Wiskundige lessen

https://hdl.handle.net/1874/358902

WISKUNDIGE
LESSEN.

TWEEDE CURSUS.

WISKUNDIGE LESSEN,

TWEEDE CURSUS,

BEVATTENDE DE

VOLLEDIGE GRONDEN

DER

STELKUNST,

EN, ONDER ANDEREN, DE THEORIE DER *LOGARITHMEN*, DE *COMBINATORISCHE ANALYSIS*, EN DE MEEST MERKWAARDIGE *REEKSEN*

DOOR

JACOB DE GELDER,

Professor in de Wiskunst, Vestingbouw en Artillerie, aan het Hôtel van de Pages *van* Z. M. den Koning van Holland.

IN DEN HAAG,

BIJ DE GEBROEDERS VAN CLEEF

EN

B. SCHEURLEER, JUNIOR.

1809.

Aristippus, *Philosophus Socraticus, naufragio cum ejectus ad Rhodiensium littus animadvertisset Geometrica schemata descripta, exclamavisse ad comites ita dicitur:* Benè speremus! Hominum enim vestigia video.

Vitruvius. *Architect. Lib. VI. Præf.*

Dat is:

De ſocratiſche wijsgeer Aristippus, *op het eiland Rhodus ſchipbreuk geleden hebbende, en in het zand de afteekening van meetkunſtige figuren ontdekkende, riep tot zijne reisgenoten uit:* Scheppen wij goeden moed! want het blijkt, dat hier menſchen wonen.

Kvs

VOORREDE.

Bij de uitgave van het eerſte deel van dit werk, genoeg van deszelfs aanleiding, aard en inrigting gezegd hebbende, zou het overbodig zijn, daarover verder uitteweiden.

Deze tweede Curſus bevat eene volledige handleiding tot Algebra of Stelkunst, tot welke, in het laatſte gedeelte van den eerſten Curſus, de noodige gronden gelegd waren; bijzonderlijk hebben wij ons toegelegd, om de vierkants en hoogere magts vergelijkingen met juistheid te behandelen, en in derzelver waren aard te leeren kennen. Doch hetgeen dit Leerboek in zijne ſoort nieuw maakt, zijn de Leerwijzen van Budan *en* Lagrange, *welke nog maar, in weinige Leerboeken, ſchaarsch en oppervlakkig behandeld zijn; gewigtige aanmerkingen op de benaderings Leerwijze van* Newton, *op de eliminatie van twee en meer onbekenden. enz.*

 Wij

Wij hebben verkozen de oplosſingen der cubiſche en vierde magts vergelijkingen tot aan het einde van dit deel te verſchuiven; eensdeels, omdat zij, na de verbeterde aannaderings Leerwijzen, van minder belang in de werkdadige berekening geworden zijn; en anderdeels, omdat eene volledige behandeling dezer ſtoffe, niet, dan nadat men met de ſtelkundige bewerkingen meer gemeenzaam geworden is, verſtaan, met belang gelezen en met wezenlijke vrucht kan beoefend worden.

Voorts zal men, onder de geheele nieuwe dingen, welke in dezen tweeden Curſus voorkomen, een geheel boek vinden over de zoogenaamde Combinatoriſche Analyſis *van* HINDENBURG, *welke ongetwijfeld onder de hulp-middelen, die de ſtelkundige berekeningen gemakkelijk maken, en met meer zekerheids beſturen kunnen, gerekend moeten worden, en bijzonderlijk geſchikt zijn, om den jongen beoefenaar aan eene zekere orde en netheid in de aanëënſchakeling zijner denkbeelden te gewennen.*

Het zal misſchien bevreemden: dat wij geen woord over de onbepaalde analyſis gezegd hebben. Zulks is niet geſchied, omdat wij dit vak voor eenen Wiskundigen van minder aangelegenheid aanmerken: maar wij beſchouwen hetzelve niet van de eerſte noodzakelijk-

lijkheid, en hebben daarom liever, in de behandeling van die stoffen, waarover onze Hollandsche Schrijvers of bijna niets gezegd, of zeer onvolledig en oppervlakkig gesproken hebben, en welke echter voor andere vakken van meer algemeen belang zijn, zooveel te vollediger en te uitvoeriger willen zijn; en wij hebben zooveel te gereder kunnen besluiten, om dit vak geheel achter wege te laten, daar toch het grootste gedeelte van de Algebra van den beroemden EULER, *welke in elks handen behoorde te zijn, zich met dit onderwerp bezig houdt, en als eene inleiding dienen kan, om de schriften van* LEGENDRE *en* GAUSS, *welke de beste zijn, te leeren verstaan.*

De Wiskundige oefeningen, tot deze twee stukken behoorende, zullen zoo spoedig mogelijk in het licht verschijnen, en wij zullen met onze Meetkundige Lessen den meesten spoed maken.

Wij meenen eene zeer naauwkeurige lijst der ingeslopene drukfeilen gegeven te hebben. Wij zijn dezelve aan den ijver van onzen vriend, den Heer J. J. KRANTZ, J^R^. *verschuldigd. Gelijk wij ook van een ander vriend, den Heer* J. FLORIJN, *de naauwkeurige lijst der in het eerste deel nog overgeblevene drukfeilen ontvangen hebben.*

De aan ons door verscheidene personen gevraagde ophelderingen, zullen wij, als eene bijlage, bij de Wiskundige Oefeningen voegen.

Wordt ook dit stuk met dezelfde goedgunstige toegevenheid als het eerste ontvangen, zal zulks ons aanmoedigen, om op den begonnen loopbaan ijverig voorttegaan.

JACOB DE GELDER.

Utrecht, den 15 April
1809.

INHOUD

DER

WISKUNDIGE LESSEN

VAN DEN

TWEEDEN CURSUS.

(NB. *De Nommers der Boeken en Lessen loopen, van den eersten tot den tweeden Cursus, als een geheel makende, door. De paragraphen van den tweeden Cursus zijn echter op nieuw van één afgeteld, om het gemak in het nazoeken te bevorderen.*)

NEGENDE BOEK.

Over de behandeling der stelkundige uitdrukkingen, in het gemeen.

TIENDE BOEK.

Over de vierkants-vergelijkingen, derzelver oplossing en de oplossing van eenige vraagstukken, die tot de tweede magt opklimmen.

ELF-

ELFDE BOEK.

Over de deelers en gemeene deelers der stelkundige uitdrukkingen, en derzelver gebruik in de oplossing der hoogere magts vergelijkingen.

Ver-

— *Al-*

TWAALFDE BOEK.

Over de oplosſing der vergelijkingen van twee of meer onbekenden, tot alle magten, in het algemeen.

DERTIENDE BOEK.

Over de behandeling der Wortel-uitdrukkingen, zoo der beſtaanbare, als der onbeſtaanbare.

LIV.

VEERTIENDE BOEK.

Over de magts verheffingen der tweeledige uitdrukkingen en over de worteltrekkingen uit dezelve.

VIJFTIENDE BOEK.

Over de Logarithmen en cirkelbogen.

ZESTIENDE BOEK.

Over de Leer der Combinatien, en derzelver gebruik in de analytische bewerkingen.

— *Vraag-*

ZEVENTIENDE BOEK.

Beschouwing van de meest merkwaardige Reeksen.

ACHTIENDE BOEK.

Verslag van de vorderingen, welke men in het stelkundig oplossen der hoogere magts vergelijkingen gemaakt heeft.

Han-

V E R B E T E R I N G

V A N

D R U K F E I L E N,

WELKE IN DEN EERSTEN CURSUS ZIJN OVERGEBLEVEN.

Pag. 58. reg. 5 ſtaat: *ontledigen*, lees: *ontleden*
Pag. 70. reg. 21, 25 en 28 ſtaat: *ABCD*, lees: *abcd*,
Pag. 223. reg. 10 ſtaat: *Æ* lees: *EQ*
Pag. 238. reg. 3 van ond. ſtaat: *en*, lees: *enz.*
Pag. 242. reg. 19 in de laatſte formule ſtaat: R, lees: r
Pag. 269. reg. 9 van ond. ſtaat: $117\frac{1}{3}x$ lees: $117 - \frac{1}{3}x$
Pag. 350. reg. 6 ſtaat: *vijf* lees: *zes*
Pag. 422. reg. 24 ſtaat: met b vermenigvuldigen, en voorts moet geheel weg.
Pag. 428. reg. 3 van ond. ſtaat: $\frac{2}{3}$ lees: $\frac{3}{4}$
Pag. 441. reg. 12 van ond. ſtaat: $a+3b$, $a+4b$, lees: $a+2b$, $a+3b$
Pag. 443. reg. 15 ſtaat: *de der* lees: *de ſom der*
Pag. 443. reg. 21 ſtaat: $a+2b$, $a+3b$, lees: $a+b$, $a+2b$
Pag. 466. reg. 18 ſtaat: 9 lees: 8

Voorts in Plaat I. *fig*. 13 moet de laatſte C een c zijn, en in Plaat III. *fig*. 20 ſtaat onder de breuk $\frac{0}{0}$ moet zijn $\frac{0}{9}$.

VER-

VERBETERINGEN

VAN ZAKEN EN OVER HET HOOFD GEZIENE

DRUKFEILEN.

NB. De meeste dezer kunnen in elk exemplaar zeer netjes veranderd worden, door, wanneer 'er een $+$ in plaats van $-$ ſtaat, het dwarsſtreepje van de $+$ met een pennemesje wegteſchrappen, en met de pen een dwarsſtreepje te maken, wanneer 'er een $-$ in plaats van een $+$ ſtaan moet.

Pag. 22. regel 14 van bov. ſtaat: $-a$ *min* $-b = +a + b$. Lees: $-a$ *min* $-b = -a + b$.

Tabelle N° I. Tegenzijde, in de merkwaardige producten, N° 10. ſtaat: $\pm x^n y^{n-3}$ lees: $\pm x^2 y^{n-3}$

Pag. 42. onderſte regel noot, ſtaat: o, (9) lees: o, (1).

Pag. 43. op het einde van §. 68. moeten de termen $-\frac{1}{x^9} - \frac{1}{x^{10}}$ bijgevoegd worden.

Pag. 38. §. 60. 4 regel ſtaat: *gelijkſlachtige* lees: *gelijknamige*.

Pag. 45. regel 8 van onder ſtaat: $q = -3$. lees: $q = +3$.

Pag. 49. 10 regel van boven ſtaat: XLVII *Les*, lees: L *Les*.

Pag. 50. laatſte regel van de noot, moet ſtaan $336x^3y^2z^2$.

Pag. 75. eerſte regel van de opl. van 2 vraagſt. op het einde ſtaat: *dat is het* lees: *dan is het*.

Pag. 78. in formule (C) ſtaat: $+2x^2y$, lees: $2x^2y^2$.

Pag. 79. Oplosſing Vr. 9. regel 7 ſtaat: $-2axy$, lees: $-2xy$, — en twee regels lager $-8xy$, lees: $-3xy$.

Pag. 87. Vraagſtuk 18, is het teeken $\surd$ voor de waarde van x uitgevallen.

Pag. 91. regel 3 van ond. moeten de wortel-uitdrukkingen met den coefficient $\frac{1}{2}$ aangedaan en gelezen worden

$$x = \pm \tfrac{1}{2}\surd\left(\frac{4b}{3a} - \tfrac{1}{3}a^2\right) + \tfrac{1}{2}a;\ y = \pm \tfrac{1}{2}\surd\left(\frac{4b}{3a} - \tfrac{1}{3}a^2\right) - \tfrac{1}{2}a$$

Pag. 92. laatste regel van §. 127. in de waarde van y moet de coefficient van b, onder het wortel-teeken, $\frac{1}{4}$ zijn.

Pag. 93. 21 Vr. 15 regel staat: $x = -a + a\sqrt{2}$, lees: $-a \pm a\sqrt{2}$, — en onderste regel der pag. staat: $\sqrt{2}$, lees: $\sqrt{5}$.

Pag. 94. 12 regel van boven staat: O, lees: C.

Pag. 95. 12 regel van boven staat: $\frac{1}{20}x$, lees: $\frac{1}{20}x^2$, — in regel 24 is het teeken $= 0$ vergeten, — en in regel 29 staat: $\frac{1}{20}x^2$, lees: $\frac{1}{20}x$.

Pag. 105. eerste regel na het tafeltje staat: *verkrijt*, lees: *verkrijgt*, — en in de twee laatste regels van noot 29 staat: $p+1$, p en $p-1$, lees: $p-1$, p en $p+1$.

Pag. 107. 1 regel noot 31 staat: 5 vergelijkingen, lees: vijfde vergelijking.

Pag. 110. §. 156. tweede en vierde regel van onder staat: $x-1$, lees: $x+1$.

Pag. 213. regel 4 van boven staat: z_{14}, lees: z_{12}.

Pag. 214. regel 9 van boven staat: $b<1$, lees: $b<2$.

Pag. 219. regel 7 van ond. staat: $(a_n+1)^2$, lees: $(x_n+1)^2$.

Pag. 220. regel 5 staat: a_1, a_2, a_2, lees: a_1, a_2, a_4.

Pag. 221. in de noot, regel 12, van onder staat onder het wortel-teeken $a^2 b$, lees: $a^2 b^2$.

Pag. 225. §. 327. regel 2 staat: $p-z$, lees: $p+z$.

Pag. 228. regel 10 van onder staat: *deze stemmen de*, lees: *deze stemmen, in de* enz.

Pag. 232. regel 15 en 16 staat: $A'x^{n-1}$ en $a'x^{n-1}$, lees: $A'x^n$ en $a'x^n$.

Pag. 234. regel 14 staat: §. 238. lees: §. 338.

Pag. 235. regel 14 staat: *groote*, lees: *grootste*, regel 22 staat: $-10x$, lees: $-10x^2$.

Pag. 236. regel 12 en 14 staat: $+9$, lees: -9.

Pag. 237. regel 14 van onder staat: $3a^2x^3(x-1)$, lees: $9a^2x^3(x-1)$, — en onderste regel staat: $3ab(b-c)$, lees: $3ab(b-2c)$.

Pag. 240. regel 12, 15 en 16, lees in plaats T de letter S.

Pag. 243. §. 350. regel 11 in den coefficient van y staat: -9, lees: $+9$.

Pag. 245. regel 8 van onder het teeken $+$ vergeten.

Pag. 253. regel 14 staat: $c'' = mc$, lees: $c'' = nc$.

Pag. 256. noot 70, regel 7 staat: 4 uren, moet weg.

Pag. 259. regel 9 van onder staat: *gewone eerste magts vergelijking*, lees: *gewone n^{de} magts vergelijking van ééne onbekende*,

Pag. 261. regel 2 van onder staat: -2 en -3, lees: -3 en -4.

Pag. 263. regel 15 staat: $\sqrt{5}$, lees: $\sqrt{15}$.

Pag.

Pag. 269. regel 16 ſtaat: $33y$, lees: $3y$, — regel 23 ſtaat: $+2y^2$, lees: $-2y^2$, en regel 2 van onder ſtaat: $+75y$, lees: $-75y$.
Pag. 272. regel 8 ſtaat: R en S, lees: R' en S'.
Pag. 274. regel 8 van onder ſtaat: *de tweede en eerſte*, lees: *tweede en derde.*
Pag. 288. §. 442. regel 4 ſtaat, in het begin, p in het $\sqrt{}$, moet q zijn, en op het einde in den exponent pr moet zijn ps.
Pag. 297. regel 6 ſtaat: *tot de* n^{de}, lees: *tot de* n^{de} *magt.*
Pag. 299. regel 3 ſtaat: $+q\sqrt{r}$, lees: $q\sqrt{c}$, — en regel 23 ſtaat: $15\,L$, lees: $15\,M$.
Pag. 301. regel 5 van onder ſtaat: §. 473. lees: §. 478.
Pag. 302. regel 8 ſtaat: $\sqrt{-3}$, moet zijn $\frac{1}{2}\sqrt{-3}$.
Pag. 303. §. 482. regel 5 moet de exponent 3 in het derde $\sqrt{}$ ſtaan.
Pag. 304. regel 5 van onder, begint: *dan zal men het product van enz.*
Pag. 305. regel 5 en 6 ſtaat: $-2ac$, lees: $2\sqrt{ac}$ en $+2bc$, lees: $-2\sqrt{bc}$.
Pag. 316. regel 10 moet de coefficient van z^3 het teeken — hebben.
Pag. 321. laatſte regel van §. 512. moeten de n in den noemer m zijn.
Pag. 329. de laatſte vergelijking van §. 527. tweede term ſtaat: $\overset{1}{(p)}\,\overset{n-2}{(q)}$, lees: $\overset{1}{(p)}\,\overset{n-1}{(q)}$.
Pag. 336. regel 3 ſtaat 11, lees 10.
Pag. 340. 3 Voorb. ſtaat: $\sqrt[3]{}$ voor de breuk, moet in den noemer ſtaan.
Pag. 348. regel 6 van onder ſtaat: $\frac{1}{24}z^3$, lees: $\frac{1}{24}z^4$.
Pag. 351. regel 2 van onder in den laatſten term van den noemer moet de exponent 4 zijn.
Pag. 352. in form. log. a moet expon. tweeden term des noemers 2 zijn.
Pag. 354. in §. 584. in de waarde van y moet in den laatſten term M^3 in plaats van M^2 ſtaan.
Pag. 358. eerſte regel van de noot ſtaat: $+\frac{1}{4}z^4$, lees: $-\frac{1}{4}z^4$.
Pag. 361. §. 611. regel 5 ſtaat: 17, 18, 19, 21 en 22, lees: 19, 18 en 17, 21, 23.
Pag. 366. regel 13 ſtaat: *eerſte*, lees: *tweede.*
Pag. 370. regel 18 ſtaat: $z = \pm 2\pi$ en $z = \pm 2\pi$, lees: $z = \pm\pi$ en $z = \pm\pi$.
Pag. 372. §. 629. regel 6 op het einde ſtaat: $2\sqrt{-1}$, lees: $\sqrt{-1}$.

Pag. 382. §. 640. regel 1 ſtaat: $y^n - A = 0$, moet zijn $x^n - A = 0$, en regel 5 ſtaat: y^n moet zijn x^n.

Pag. 383. §. 642. eerſte regel ſtaat: *van be-* lees: *van de be- enz.*

Pag. 389. §. 680. regel 1 ſtaat: §. 653. lees: §. 658.

Pag. 389. regel 26 ſtaat: *dan de ſom*, lees: *dan zal de ſom*

Pag. 395. regel 13, 15, 18, en in noot 106 moet in plaats van den exponent n gelezen worden p.

Pag. 416. §. 736. regel 2 ſtaat: $= p$, lees: $= 1 : p$.

Pag. 418. §. 471. regel 2 ſtaat: *Sin.* x en *Cot.* x, lees: *Sin.* x en *Coſ.* x.

Pag. 420. §. 743. regel 10 in de verg. ſtaat: $(\Delta \ddot{\underset{\cdot}{1}}^{1} - \ddot{\underset{\cdot}{1}})$ lees: $(\Delta \ddot{\underset{\cdot}{1}}^{1} - 1)$.

Pag. 421. regel 1 ſtaat: $z = x^2$, lees $z = x$.

Pag. 421. §. 745. regel 3 ſtaat: $Sin.\ x = x + \frac{x^3}{2 \cdot 3}$ enz. lees: $Arc.\ Sin.\ x =$ enz.

Pag. 421. §. 747. regel 6 ſtaat: $x = Nep.\ Log.\ (1 + y)$, lees: $u = Nep.\ Log.\ (1 + y)$.

Pag. 422. §. 749. moeten de noemers van den coefficient x^{16} zijn 11. 13. 16. 49. 125. 729.

Pag. 426. regel 17 ſtaat: $C\Sigma_{n-2}$, lees: $C\Sigma_{n-3}$, — regel 19 ſtaat: $D\Sigma_{n-3}$, lees: $D\Sigma_{n-4}$.

Pag. 428. regel 6 ſtaat: $+ 30$, lees: $+ 50$, — en regel 10 ſtaat: 5752 moet zijn $+ 5742$.

WIS-

WISKUNDIGE

LESSEN.

TWEEDE CURSUS.

BELANGRIJKE HERINNERING.

§. 1. In de vier laatste boeken van den eersten cursus, hebben wij ons met eene voorloopige verklaring van den waren aard der Stelkunst bezig gehouden, en door hare voortreffelijkheid, in de oplossing van het onbekende, aantewijzen, de eerste grondslagen gelegd, waarop wij, uit de reeds verzamelde bouwstoffen, een geregeld en volledig zamenstel van de algemeene regelen en bijzondere handgrepen dezer voortreffelijke leerwijze zullen kunnen vestigen. Reeds moet de minstgevorderde met de grondteekens zijn bekend geworden, en deze kunst als een hulpmiddel hebben leeren beschouwen, waardoor men de betrekkingen der grootheden tot en derzelver onderlinge afhankelijkheid van elkander op eene beknopte wijze kan uitdrukken, en aan het oog des verstands op eene zinnelijke wijze voorstellen: bijna elke bladzijde moet hem eene nieuwe proef gegeven hebben van den graad van zekerheid, en van het helder licht der zelfs-overtuiging, waarmede die blijvende teekens ons over den aard en de gevolgen der uitgedrukte betrekkingen leeren redeneren en oordeelen.

§. 2. 'Er wordt slechts eene geringe bedrevenheid in de geschiedenis der Wiskunst vereischt, om het onderscheid tusschen haren tegenwoordigen toestand met dien van hare eerste kindsheid optemerken. Ten allen tijde waren de beginselen, waaruit zij hare hulpmiddelen ontleende, dezelfde; want het zijn onveranderlijke waarheden, waaraan niemand van een gezond denkvermogen zijne toeſtemming weigeren kan; maar om deze waarheden te vergelijken, om alzoo andere en ſteeds verder van dien oorſprong afgelegene waarheden te ontdekken, is een gewrocht van die werking onzes denkvermogens, die wij oordeelen noemen: tot dit oordeelen wordt nu eene zekere inſpanning van geest, eene kracht van voorſtellen vereischt, welke door de zinnelijke afleiding doorgaans verzwakt en ligtelijk vernietigd wordt, waardoor het gedachte in eenen nevel van onzekerheid verdwijnt. Hoezeer nu deze zinnelijke afleidingen in gemeenzame zaken van minder gewigt zijn, hebben echter de eerſte Wiskundigen, die zich met diepzinnige beſchouwingen, (bij voorbeeld, met die der meetkunſtige figuren,) bezig hielden, moeten ondervinden, dat men, om daarin wel te ſlagen, hulpmiddelen behoefde, om zich het reeds gedachte, ten allen tijde, en, zoo dikwijls men goedvond, te kunnen herinneren, op dat men alzoo zou kunnen overzien, of men wel gedacht, en zijne ſluitredenen, naar de beginſelen eener gezonde rede, had opgemaakt.

§. 3. De gewone ſpraak beſtaat uit klanken, waardoor men, als in hoorbare teekens, elkander zijne gedachten mededeelt: maar deze zijn, hoe volkomen zij voor het overige zijn mogten, geene blijvende teekens: zij worden al ſpoedig uit het geheugen van den ſpreker en hoorder uitgewischt, en kunnen daarom tot het bedoelde oogmerk niet ſtrekken. Men nam dan zijnen toevlugt tot het gewone ſchrift, hetwelk, op eene zeer omſlagtige wijze (1), de klanken van de woorden onzer taal afteekent, en daarom met dezelve alle volmaaktheden en gebreken gemeen heeft: nogtans hebben de oude meetkunſtenaars zich ten minſten van dit hulpmiddel be-

(1) De mogelijkheid, om zijne gedachten veel ſpoediger, dan door het gewone ſchrift, en bijna zoo ſpoedig als men ſpreekt, zonder in de duidelijkheid iets te verliezen, uittedrukken, wordt door de *Stenographie*, *Tachygraphie*, *Okygraphie*, en andere kunst-ſchriften, voldoende bewezen. 'Er wordt ſlechts eene meer algemeene wijsgeerige wijze van denken gevorderd, om zich ernſtig op die noodzakelijke verbetering van ons al te omſlagtig ſchrift toeteleggen.

bediend, om, hetgeen zij dachten en uitvonden, tot eene latere nakomelingſchap overtebrengen, en, indien zij geene andere dan dit hulpmiddel gehad hebben, hetwelk evenwel niet waarſchijnlijk is, dan kunnen wij niet genoeg het vermogen hunner denk en voorſtellingskracht bewonderen (2). De ongeſchiktheid van het gewone ſchrift in wiskunſtige naſporingen wordt door het genoegzaam onvruchtbare tijdvak, dat ſedert den leeftijd der ouden tot op den tijd van DESCARTES, welke het eerst de wiskunſtige teekens aan de Meetkunst dienstbaar maakte, proefondervindelijk bevestigd.

§. 4. DIOPHANTUS van *Alexandrien*, welke, volgens het getuigenis van ABULPHARAGE, ten tijde van Keizer JULIANUS, omtrent den jare 360 onzer tijdrekening leefde, is, onder de bekende oude ſchrijvers, de eerſte, die eene, van de onze zeer veel verſchillende, ſoort van teekens gebruikte (3), wel-

(2) De ouden meetkundigen waren in het bezit van eene analytiſche leerwijze, welke men uit de ſchriften van APPOLLONIUS PERGÆUS het best kan leeren kennen. Nogtans vindt men in de oudheid nergens een Meetkunſtenaar, die zich ter bekorting van de redenering, (wanneer men de getallen uitzondert,) van eenig teeken bediend heeft. Het blijkt hieruit: dat de analytiſche leerwijze niet, zoo als vele eerstbeginnende verkeerdelijk meenen, daarom analytisch is, omdat men ſtelkundige teekens gebruikt: want deze teekens kunnen, in de analytiſche zoo wel als ſynthetiſche leerwijze, ter bekorting en duidelijkheid van de redenering, gebruikt worden.

(3) DIOPHANTUS drukte het onbekende en gezochte getal uit door het teeken ϛ', zijnde de Griekſche *Sigma-tau*; deszelfs vierkant of tweede-magt door δ' of δ^{υ}, de eerſte letter van het woord *δυναμις*, dat *magt*, vierkant, beteekent; deszelfs derde-magt door κ' of κ^{υ}, de eerſte letter van *κυβος*; deszelfs vierde-magt door δ— of δδ—; de vijfde-magt door δκ—; de zesde-magt door κ— of κκ— (*Vide* DIOPH. *Alex. Arithm. Auctore* BACHETO *Lib.* I. *Def.* IX.) De teekens + en — waren, indien men het teeken ⫯, eene omgekeerde ψι, welke hij gebruikte om een negatief getal aantewijzen, uitzondert, hem onbekend. VIETA, aan wiens licht de op hem volgende Wiskundigen hunnen fakkel ontſtoken hebben, gebruikte, behalve de teekens + en —, voor de magten der getallen teekens, welke, wel is waar, van die van DIOPHANTUS verſchilden, maar toch in den grond dezelfde waren: hetgeen DIOPHANTUS met Griekſche letters ſchreef, drukte hij in Latijnſche letters uit. In zijne *emendatione æquationum* was *N* bij hem eenig getal, hetgeen wij door *N*2, *N*3, *N*4, enz. uitdrukken.

welke, hoe onvolkomen deze op zich zelven waren, hem nogtans in ſtaat ſtelden, om moeijelijke en ingewikkelde vragen, de getallen betreffende, optelosſen. Offchoon nu, ſedert den leeftijd van dien beroemden man, deszelfs leerwijze, eerst onder de Arabieren, en naderhand, tegen het einde van de vijftiende Eeuw, in *Europa* beoefend werd, ondergingzij tot op den tijd van VIETA, een Fransch wiskunſtenaar, welke op het einde van de zestiende Eeuw leefde, geene verbeteringen: tot dus verre had men de bekende getallen op de gewone wijze uitgedrukt; doch VIETA drukte deze, even als de onbekende, door letters uit en gebruikte de teekens + en — benevens het teeken van diviſie, waardoor de uitkomſten zijner redeneringen algemeener werden, en aantoonden: hoe de onbekende van de bekende getallen afhingen. [Vergelijk I. C. §. 536. 1 *voorb.* met de 2 en 3 voorbeelden, pag. 298 en 299.] Voor het overige bleef het ſtelkundig ſchrift van VIETA aan dezelfde gebreken als dat van DIOPHANTUS onderhevig. Korten tijd daarna, (en na dat HARRIOT het gebruik der kleine letters van het Alphabeth had ingevoerd, en de magten der getallen door herhaling van den wortel, als *xx* voor de tweede, *xxx* voor de derde-magt, enz. had ingevoerd,) kwam de beroemde DES-

CAR-

ken, drukte hij uit door *Q*, *C*, *QQ*, *QC*, enz. (de eerſte letters van de woorden quadraat, cubus, quadraats-quadraat, enz.) dan, deze teekens gebruikte hij nog maar alleen in hoogere magts-vergelijkingen, welker coefficienten bepaalde getallen zijn; anders is, in alle zijne ſchriften, *A quadratum* hetzelfde als bij ons A^2; *A cubus* hetzelfde als bij ons A^3, enz. In plaats van 2 *A* ſchreef hij: *A bis*; voor 3 *A* ſchreef hij: *A ter.* $5 A^4 B$ werd bij hem aldus uitgedrukt *A quadr-quadratum in B* 5, enz. Men kan hieruit beoordeelen, hoe gebrekkig zijn zamenſtel van teekens moest zijn. Ook moet men deze ſchriften lezende, zich tevens verwonderen, dat noch DIOPHANTUS noch VIETA, niet op het denkbeeld der exponenten gevallen zijn, daar elke bewerking, waarin zij hun ontwerp van teekens gebruikten, hen daartoe aanleiding moest geven. Maar zulks leert ons: dat de gehechtheid aan oude gebruiken voor de grootſte verſtanden den weg tot nieuwe ontdekkingen afſluit. Te rukeloos beoordeelt men meestal, tot wezenlijk nadeel der wetenſchappen, een nieuw begrip eene nieuwe leerwijze, waarin men, omdat men zich geene moeite geeft dezelve te leeren verſtaan, natuurlijk ook niets nieuws of beters vinden kan.

CARTES, die in 1596 geboren werd, ten tooneele, en was de uitvinder der exponenten, welke aan het ſtelkundig ſchrift zulk eenen aanmerkelijken graad van klaarheid en algemeenheid gaven, dat men daaraan deszelfs verdere volmaking en de kennis der diepe geheimen van de betrekkingen der grootheden, ſedert dien tijd ontdekt, te danken heeft. WALLIS volmaakte de leerwijze der exponenten door de invoering der negatieve en gebrokene, terwijl de uitbreiding dezer leerwijze aan NEWTON en LEIBNITZ de middelen verſchafte, om, hoezeer langs onderſcheidene leidingen van gedachten, eene nieuwe ſoort van teekens daarteſtellen, waardoor men de betrekkingen van de veranderingen, welke de waardijen der ſtelkundige uitdrukkingen ondergaan, zoo juist en duidelijk kan voorſtellen, dat men thans in ſtaat is, om de diepzinnigſte naſporingen regelmatig en met volkomene zekerheid te kunnen beſturen (4). Voegen wij hierbij: dat het tegenwoordige tijdvak ſchijnt zwanger te gaan van groote ontdekkingen, die een natuurlijk gevolg van de verbetering en vereénvoudiging der teekens moeten zijn. Het leerſtuk der combinatien, hetwelk OZANAM onder de wiskundige vermakelijkheden ſtelde, is ten onzen tijde een vermogend hulpmiddel ter ontdekking van de diepzinnigſte geheimen geworden: het ontbrak aan LEIBNITZ, DE MOIVRE, BOSCOVISCH en EULER, aan eene geſchikte teekenſpraak, om hunne inzigten verder te ontwikkelen. HINDENBURG heeft de eerſte proef van deze teekenſpraak gegeven, en het leerſtelſel der *combinatoriſche analyſis* is, onder zijne handen en die van zijne medewerkers, reeds tot een aanmerkelijk geheel aangegroeid, het is eene nieuwe ſymbologie, een nieuw werktuig, dat ſlechts een grooter aantal geſchikte handen behoeft, om door hetzelve den ſchat der wiskundige waarheden, met gewigtige ontdekkingen te verrijken.

§. 5. De aandachtige Lezer zal hebben moeten bemerken: dat wij, in den eerſten curſus, beſtendiglijk van het bijzonde-

(4) Wij bedoelen hier de zoogenaamde *Differentiaal* en *Integraal-Rekening*, welke NEWTON *Fluxie en Fluent-Rekening* genoemd heeft.

dere tot het algemeene befloten hebben, (zie, wat men door zulke befluiten verftaat, §. 56. I. C.) en dat deze algemeene befluiten altijd van de bijzondere waarde der getallen onafhankelijk waren, (zie §§. 76, 87, 115, 118, 132, 139, 260, 267, 299, 328, 349, enz. I. C.) en daarom zeer gefchikt, om in het ftelkundig fchrift te worden uitgedrukt, zoo als bijzonderlijk uit §. 320—§. 325, uit §. 342—§. 350. I. C. en uit vele andere plaatfen blijkt. De befchouwing der bepaalde getallen gaf alzoo aanleiding tot de uitvinding van het ftelkundig fchrift: deze gronden eens wel gevestigd en de grondteekens van het ftelkundig fchrift vastgefteld zijnde, viel het ten uiterfte gemakkelijk om velerlei foorten van ftelkundige uitdrukkingen te conftrueren (5), aan eene bijzondere befchouwing te onderwerpen, en, daar men in deze teekens de uitgedrukte grootheid beftendig voor oogen heeft, gaf zulks gelegenheid, om in deze uitgedrukte betrekkingen eigenfchappen optemerken, welke, zonder het bijzonder hulpmiddel der teekens, voor altijd onbekend zouden gebleven zijn.

§. 6. Men kan de wiskundige teekens in twee hoofdfoorten onderfcheiden: in teekens, welke de bepaalde waardijen der hoeveelheden uitdrukken. (zie §. 31. I. C.) Deze zijn de cijfers: alles, wat nu tot de kennis en de behandeling dezer teekens betrekking heeft, noemt men: *Arithmetica*, dat zooveel zegt, als *kunst om de getallen te meten*; in het Nederduitsch *Rekenkunst*, hoezeer anders het min gebruikelijke woord *Cijferkunst* dit eerfte gedeelte der wiskundige teekenfpraak duidelijker en eigenaardiger voorftelt. Eene tweede foort van teekens ftrekken, om de wijze, waarop de getallen, of de grootheden, die zij uitdrukken, van elkander afhangen, op eene beknopte en zinnelijke wijze voorteftellen: men noemt deze teekens, (zie §. 433. I. C.) *ftelkundige uitdrukkingen*, *ftelkundige teekens*. Dit tweede en meer verheven gedeelte der Wiskunst, hetwelk, met de Cijferkunst,

(5) Zie, wat wij door conftrueren verftaan, §. 10. I. C. Men moet dit artijkel met ons gezegde in den text naauwkeurig vergelijken.

kunst, in de algemeene bepaling van §. 1. I. C. begrepen is, is het meest onder den naam van *Algebra* of *Stelkunst* bekend: beide deze deelen van hetzelfde geheel, hoezeer zij, bij eene oppervlakkige beschouwing, van elkander onderscheiden schijnen te zijn, berusten op dezelfde beginselen: het laatste is uit het eerste geboren, en zou zonder deszelfs hulpzame hand een onbruikbaar werktuig zijn.

§. 7. De Stelkunst heeft in allen tijden verschillende namen gedragen. Het schoone werk van DIOPHANTUS, waarvan ons slechts een gedeelte is overgebleven, draagt den tijtel: ΔΙΟΦΑΝΤΟΥ ΑΛΕΞΑΝΔΡΕΩΣ ΑΡΙΘΜΕΤΙΚΩΝ, dat wil zeggen: DIOPHANTUS *van Alexandrien, over die dingen, welke de getallen aangaan*; en hij zegt, in zijnen opdragt aan DIONYSIUS, dat hij vraagstukken verklaren zal, die tot de getallen betrekking hebben, zonder aan de kunstgrepen, waarvan hij zich bedient, eene bijzondere benaming te geven. De Arabieren, welke het werk van DIOPHANTUS tot ons hebben overgebragt, noemden de Stelkunst in hunne taal *Algebra v' almucabala*, welk woord LUCAS DE BURGO, in zijn Italiaansch werk, getijteld: *Summa di Arith. è Geom. proportioni è proportionalità. Venet.* 1494, het eerste wiskundig werk, dat gedrukt werd, aldus verklaart: *restauratio et oppositio.* GOLIUS zegt: dat het Arabisch woord *gebera* of *giabera* zooveel beteekent, als *religavit* of *consolidavit*, (*verbinden, te zamen vereënigen*,) en *mocabalat* zooveel als *comparatio* of *oppositio*, dat is: *vergelijking*, of *tegenstelling*: volgens deze verklaring zou de Arabische benaming in hare beteekenis te kennen geven, *de kunst van verbinden en vergelijken*, hetgeen niet veel van *l'art de comparer et de résoudre* van DESCARTES verschilt (6). LUCAS DE BURGO noemde, als eerste Europesche Schrijver, deze kunst *Arte Maggiore*, (Lat. *Ars Magna*,) dat is: *de groote kunst*, of *de kunst*

(6) Gewaagd, en zonder oordeelkunde, is dus het gevoelen der genen, welke het woord *Algebra* van eenen zekeren Arabier GEBER willen afleiden; want het blijkt nergens, dat GEBER de Stelkunst beoefende: bovendien strookt de gegevene oorsprong genoeg met den aard der zake.

kunst bij uitnemendheid: doch, korten tijd daarna, gaven de Italianen, welke, nadat hun landgenoot LEONARDO DI PISA deze kunst uit Arabien in Italien had overgebragt, het eerst de Stelkunst beoefenden, aan dezelve den naam van *Arte della cofa*, hetgeen, zoo als het daar ftaat, letterlijk beteekent: *de kunst van de zaak*, doch welke uitdrukking verftaanbaar wordt, wanneer men 'er bijvoegt, dat zij, in de ftelkundige oplosfingen, het onbekende ding *la cofa* noemden (7). VIETA gaf aan de Stelkunst den naam van *Logisticen fpeciofam*, hetgeen men kan overzetten door *blijkbare Redeneerkunst*, benaming, welke lang in zwang geweest is. NEWTON noemde deze kunst: *Arithmetica univerfalis*, dat is: *Algemeene Rekenkunst*, onze beroemde landgenoot 's GRAVENSANDE noemde haar *Algemeene Wiskunst.* Vele Franfche

(7) *La cofa .... Arte della cofa.* Onze Nederduitfche Lezer zal ongetwijfeld met genoegen den oorfprong van het woord *Cos*, benevens die der barbaarfche woorden, waarvan wij in noot 67, pag. 413. I. C. eene uitvoerige naamlijst gegeven hebben, bij deze gelegenheid, vinden aangewezen. Nog in de laatfte helft der voorgaande Eeuw, vindt men, (onder anderen HALCHEN, *Zinnen-Confect*,) de benamingen: *Regel-Cos*, *quadraat-Cos*, *cubiek-Cos*, enz.; om daarmede de oplosfing der vergelijkingen van de eerfte, tweede en derde-magt aanteduiden. Het woord *Cos* is van het Italiaanfche *la Cofa* afkomftig, gelijk ook van het Italiaansch afftammen de verbasterde woorden, in de noot 67 opgegeven: want de Italianen noemden het vierkant of de tweede-magt: *il cenfo*, ook wel, *il zenzo*, van waar de benaming *Zenzus*; zij noemden de derde-magt: *il cubo*; de vierde-magt: *il cenfo di cenfo*; de vijfde-magt: *il primo fuperfolido*; enz. waaruit de oorfprong dezer bastaard-woorden genoeg blijkbaar is. Het is niet gemakkelijk nategaan, hoe deze woorden in onze taal zijn vermengd geworden. Beter kan men verklaren, waarom zij zoo lang in ftand gebleven zijn. Het is, omdat men te voren niets ter inlichting onzer landgenooten deed: in den geest van dien tijd, (toen men een wiskunftenaar, die de wiskunst in de Latijnfche taal onderwees, als een man van hooger rang befchouwde, even als of de kennis der geleerde talen eene bijzondere gefchiktheid, om wiskunftenaar te worden, konde aanbrengen,) deed men alles voor de geleerden, bijna niets voor het algemeen. Geen wonder dan, dat onder de beoefenaars der Wiskunst, welke in ons land altijd in groot aantal gevonden werden, die oude en barbaarfche benamingen zoo lang zijn in ftand gebleven.

ſche Schrijvers van later tijd geven haar de benaming van *Analyſe mathématique*, (zie *l'Algèbre de* COUSIN,) anderen eenvoudig *Analyſe:* en laatstelijk, in 1799, is 'er een nagelaten werk van den beroemden CONDILLAC uitgekomen, waarin hij deze kunst *Langue des calculs*, dat is, *Taal der berekeningen*, noemt.

§. 8. Velen der beroemdſte Wiskundigen van onzen leeftijd ſtellen een bepaald onderſcheid tusſchen *Algebra* en *Analyſis:* de Duitſche Wiskundigen zijn mij toegeſchenen dit onderſcheid het omſtandigst omſchreven te hebben. De beroemde en duidelijk ſprekende KLÜGEL zegt: (in zijne *Bemerkungen über den Polynomiſchen Lehrſatz*, te vinden in de *Erſte Sammlung Combinatorisch-Analytiſcher Abhandlungen von* Prof. HINDENBURG, pag. 48.) „ De Analyſis der eindige grootheden," (hetzelfde dat velen Algebra noemen,) „ beſtaat uit twee hoofddeelen, welke nogtans door de wederzijdſche hulp, die zij elkander bewijzen, ten naauwſte „ aan elkander verknocht zijn. Het zijn twee, elk op hunnen eigenen grondſlag rustende gebouwen, welker vertrekken met elkander gemeenſchap hebben, en, om de „ vergelijking te voltooijen, kan men 'er bijvoegen, dat de „ letterrekening [de bewerking der ſtelkundige uitdrukkingen,] hun gemeenſchappelijk voorhof is. Deze deelen zijn „ de Algebra en Analyſis: de eerſte houdt zich met de eigenſchappen, zamenſtelling, verbinding en oplosſing der „ vergelijkingen bezig; de tweede bepaalt zich tot de beſchouwing van de formen der uitdrukkingen, hare gedaante-verwisſelingen, enz." Anderen zouden misſchien de zaak wederom op eene andere wijze verklaren, en dit verſchil in het gebruik der woorden zou het gezegde van CONDILLAC: *l'Algèbre eſt une langue qui manque encore d'une Grammaire*, billijken. Zeker gaat het: dat deze verſchillende deelen, onder welk eenen tijtel dan ook, niet kunnen geſcheiden worden; want, wanneer men, bij voorbeeld, bij de omſchrijving van KLÜGEL blijft, dan behooren de Additie, Subſtractie, Multiplicatie, Diviſie, enz. der ſtelkundige uitdrukkingen, welke nogtans de algemeene oplosſing der vergelijkingen moeten voorafgaan, tot de Analyſis, omdat die bewerkingen niet anders dan gedaante-verwisſelingen van gegevene uitdrukkingen zijn.

§. 9. Welke is nu, kan men vragen, de oorzaak van deze onderſcheidene benamingen? Voorzeker moet zij niet aan de duisterheid der zaak worden toegeſchreven: maar zij is gelegen, vooreerst in de trapswijze ontdekking van de ontelbare oorden van haar onbegrensd gebied; want naar mate men deze kunst meer in den uitgeſtrekten rijkdom van hare menigvuldige hulpmiddelen leerde kennen, beſpeurde men de ongepastheid der aangenomene benamingen, en men trachtte aan deze kunst eenen meer gepasten naam te geven: ten anderen is het niet mogelijk eenen naam uittedenken, welke, buiten eene zakelijke omſchrijving, hoedanige wij, §. 1, I. C. gegeven hebben, den aard, de bedoeling en de voortreffelijkheid eener kunst kan uitdrukken, welke het groote werktuig des denkens is, waardoor wij uit de onuitputtelijke mijn der eeuwige en onveranderlijke waarheden, de meest verborgene ſchatten opdelven: en daar dus geene der uitgedachte benamingen volkomen zijn (8), kan men gevoegelijk het woord *Algebra* of *Stelkunst* blijven gebruiken: ten minſten ſtrekt die naam, op eene billijke wijze, ter nagedachtenis der vroegere Arabieren, welke de meeste ſchatten der oude wiskundigen tot ons hebben overgebragt.

§. 10. Wij hebben gemeend, in deze korte, doch belangrijke herïnnering, eene korte ſchets van de geſchiedenis der wiskundige-teekens en de benamingen, welke men aan de kunst, om die teekens te leeren gebruiken, gegeven heeft, ter inlichting van den lezer, te moeten opgeven: eensdeels, om-

(8) Eene der beste benamingen is die van NEWTON: maar LAGRANGE merkt met het grootſte regt aan, dat de benaming van *Algemeene Rekenkunst* niet genoeg het onderſcheid tusſchen de Reken- en Stelkunst bepaalt: hetzelfde kan bijna op de benaming van 's GRAVESANDE aangemerkt worden. De naam van *Taal der berekeningen* van CONDILLAC bevat zeer veel goeds; maar hij is daarom niet juist, omdat, zie de volgende §, meer dan de bloote kennis der teekens tot de beoefening der Wiskunst gevorderd wordt.

omdat deze geschiedkundige kennis hem, in zijne verdere oefeningen, ter opheldering zijner denkbeelden, nuttig kan zijn; ten anderen omdat hij, oudere Schrijvers raadplegende, de beteekenis van sommige vreemde woorden, welke thans voor het grooter getal lezers hunne beteekenis verloren hebben, zou leeren verstaan: bovendien kan deze schets de benaming van Wiskunst, in §. 1, I. C. aan het geheel gegeven, regtvaardigen. Men oordeele zelfs of onze bepaling, (zie aangehaalde plaats,) niet in allen opzigte aan den inhoud der zake voldoet (9).

§. 11. Uit hetgeen wij §. 6. gezegd hebben, volgt derhalve: dat de Cijferkunst de grondslag van de Stelkunst is, en dat men in de laatste, zonder eene grondige kennis der eerste, geene vorderingen maken kan: daarom hebben wij ook in onzen eersten cursus getracht de Cijfer of Rekenkunst met zooveel juistheid te behandelen, den lezer al vroeg met het gebruik der voornaamste teekens bekend gemaakt, om alzoo een ongevoelige overgang van de Cijfer tot de Stelkunst te maken: terwijl wij in de vier laatste boeken eenige staaltjes van de voortreffelijke uitwerkingen dezer kunst hebben opgegeven. De Lezer is nu alzoo tot het ontvangen van het onderwijs in verhevener zaken toegerust, en kan nu veilig voortgaan: nogtans lette hij bestendig op de naauwkeurige betrachting dezer drie dingen. 1° Hij gaa niet te spoedig voort, maar overdenke naarstig elke bijzondere zaak. 2° Hij oefene zich zorgvuldig in de voorgeschrevene regelen;

(9) Het is hier te lande vrij algemeen, om bejaarde lieden te ontmoeten, welke onder *Mathesis*, dat zij door Wiskunst overzetten, hetzelfde verstaan, dat wij *Meetkunst*, (*Geometrie*) noemen. Doch, daar de Meetkunst hare eigene beginselen heeft, welke uit de begrippen van ruimte en uitgebreidheid voortvloeijen, is de Meetkunst eene kunst, welke op hare eigene gronden steunt, en waarop, voor zoo verre de voorwerpen die zij leert beschouwen, hoegrootheid hebben, die kunst, welke wij, §. 1, I. C, Wiskunst noemen, wordt toegepast. De Wiskunst is dus het eerste beginsel en het eenige werktuig der Meetkunst: zij behoort, hoe zeer anders deze twee kunsten elkander onderling toelichten, in dat opzigt, in de eerste rangorde geplaatst te worden.

len; want de ondervinding leert dagelijks, dat men in het wiskundige eene zaak volmaakt wel kan begrijpen, maar handen aan het werk slaande, in de uitvoering vele zwarigheden ontmoet: de teekens en woorden, die men moet leeren gebruiken, zijn vreemd, en het vereischt eenigen tijd en genoegzame oefening, eer men met dezelve zoo gemeenzaam als met onze natuurlijke taal geworden is; want in den beginne wordt een gedeelte van het geheugen en het oordeel vernietigd, door de onophoudelijke herinnering van de waarde der teekens. 3° moet de lezer zich alle de bijzonderheden, welke hij door het gebruik der teekens leert kennen, in het geheugen prenten en onderling vergelijken: dit doende zal hij eindelijk in alles eene oneindige verscheidenheid, gepaard met eene volmaakte overëénstemming, ontwaren, hetwelk hem eindelijk in het verheven gezigtpunt plaatsen zal, uit hetwelk hij alle de deelen van het schoone geheel der wiskundige kennis, welke hij door het gebruik der teekens opgezameld heeft, zal leeren overzien en omvatten. „ De „ menschelijke ziel,” zegt BURMAN, in zijn *Essai du Calcul fonctionnaire*, „ onderscheidt, door het algemeen maken „ der zamenvoegingen en het verëénvoudigen van derzelver „ teekens, de deelen van een onmetelijk geheel: door zulk „ een steun aan het geheugen te geven, beschikt de verbeeldingskracht over alle hare vermogens, en de mensch ver- „ éénigt, als 't ware, het Heelal in het brandpunt van zij- „ nen geest.”

WIS-

WISKUNDIGE LESSEN.

IX. BOEK.

Over de behandeling der ſtelkundige uitdrukkingen in het algemeen.

EEN- EN- VEERTIGSTE LES.

Over de Additie *en de* Subſtractie *der ſtelkundige uitdrukkingen* (10).

§. 12. De woorden Additie, Subſtractie, Multiplicatie en Diviſie, worden in de Stelkunst in geene andere beteekenis dan

(10) Verdienſtelijke Geleerden, die wij om hunne talenten hoogſchatten, (want men kan aan vermetele Recenſenten, die de bewijzen met zich medebrengen, dat zij zich zelven niet verſtaan, niet kwalijk nemen, dat zij eens anders meening verkeerd uitleggen,) hebben gemeend zwarigheid te vinden in het gebruik van het woord *uitdrukking*, in plaats van het woord *grootheid*, hetwelk meestal bij alle Schrijvers daar gebruikt wordt, waar wij het woord *uitdrukking* bezigen. De bepaling van §. 1. I. C. heeft ons, zouden wij op eene regelmatige wijze ſpreken, daartoe genoodzaakt, en ook is deze ſpreekwijs niet zonder voorbeeld, zoo als uit LA GRANGE, LA PLACE, en andere beroemde Wiskundigen van dezen tijd zou kunnen aangetoond worden. Wanneer men de geſteldheid der zaak wel overweegt, dan zijn het niet de grootheden zelve; maar wel de teekens, waardoor zij worden uitgedrukt, door welke men dezelve onderling vergelijkt. De ſterrekundige, welke de afmetingen van den loopkring eener Comeet met den afſtand van de Aarde tot de Zon vergelijkt, past die grootheden, welke voor hem ontoegankelijk zijn, niet als met eenen pasſer af: het zijn de teekens, waardoor hij dezelve uitdrukt, waarmede hij werkt en waardoor hij hetzelfde doet, hetgeen hij zou kunnen doen, indien 'er geen onoverkomenlijke hinderpalen in den weg geſteld waren, om die grootheden, zoo gemakkelijk te meten, als men de lengte van eene kamer met die van eenen meter vergelijkt. Wij gelooven: dat deze opheldering genoeg zal zijn, om ten minſte aantetoonen, dat wij het woord *uitdrukking* niet zonder genoegzamen grond in plaats van dat van *grootheid* gebruikt hebben. De figuren der Rhetorica hebben in de Wiskunst geen bijzonder voorregt. Voor het overige heb ik tegen het gebruik van het woord *grootheid* niets, indien men ſlechts wel verſtaat, wat men zegt.

dan in de gewone Cijferkunst opgenomen; in geene andere derhalve, dan in die, welke wij in §§. 48, 109, 58, 129, I. C. aan dezelve gegeven hebben. In getallen zijn het kunstbewerkingen, waardoor een getal, hetwelk op de eene of andere wijze uitgedrukt is, met de ſchaal van het talſtelſel vergeleken, door deszelfs termen afgemeten, en in éénheden van die termen welgeordend wordt uitgedrukt. Die grondregels zijn dus, in den grond der zake, herleidingen of overzettingen van meer omſlagtige en min bekende teekens tot teekens, die eenvoudiger en meer algemeen bekend zijn. Het teeken 23×7 ſtelt, bij voorbeeld, een zeker bepaald getal voor: maar de multiplicatie leert dit teeken in het meer eenvoudige 161 overzetten.

§. 13. De vier hoofdbewerkingen in ſtelkundige teekens moeten ook uit dit oogpunt beſchouwd worden: elke min of meer zamengeſtelde ſtelkundige uitdrukking ſtelt, zie § 431 en §. 453, I. C, een getal voor, hetwelk naar de wijze, waarop de zamenſtellende deelen dezer uitdrukking van elkander afhangen, en volgens de waarde, welke men aan dezelve geeft, bepaald is, en, door de kunstbewerkingen der Cijferkunst, in het ſtelſel onzer gewone telling kan worden overgezet: nu kunnen twee of meer getallen, door zulke ſtelkundige uitdrukkingen voorgeſteld, tot één getal veréénigd, het éćne van het andere afgetrokken, het éćne met het andere vermenigvuldigd, het éćne door het andere gedeeld moeten worden: wanneer nu deze ſtelkundige uitdrukkingen zulk eene toevallige overéénkomst met elkander hebben, (en dit gebeurt dikwijls,) dat ſommige van derzelver termen niet veréénigd en op eene beknoptere wijze kunnen worden uitgedrukt, dan kunnen de bedoelde Additien, Subſtractien, Multiplicatien en Diviſien, niet anders dan door derzelver teekens worden aangewezen; doch, 'er kunnen, en wij hebben daarvan reeds voorbeelden gezien, zulke overéénkomſten tusſchen de termen dezer uitdrukkingen plaats grijpen, dat de uitkomſten dezer bewerkingen, op eene beknoptere wijze, dan door de bloote teekens, kunnen worden uitgedrukt: waar nu dit geval plaats heeft, moet men deze nieu-

we

we uitdrukkingen trachten te bepalen: 1° *Omdat men daardoor veeltijds op eenvoudiger uitdrukkingen komt: 2° omdat, wanneer de uitdrukking door eenige herleiding verkregen, zamengeſtelder dan de gegevene is, dezelve altijd zekere betrekkingen tusſchen de zamenſtellende deelen aan den dag brengt, welke de eerst gegevene uitdrukking, hoezeer zij voor het overige eenvoudiger dan de herleide mogt zijn, niet zigtbaar maakt.* Door deze herleidingen worden zamengeſtelde uitdrukkingen eenvoudiger, wanneer men, in plaats van $7xy + 3xy + \frac{1}{2}xy$, door additie, $10\frac{1}{2}xy$ vindt, (zie §. 459, I. C.), voor $3xy \times 7x^2y^2$, door multiplicatie, $21x^3y^3$, en voor $x^2 - y^2 : x + y$, door diviſie, $x - y$, enz.: deze herleidingen geven meer zamengeſtelde uitdrukkingen, wanneer men, bij voorbeeld, voor $\left(a + \frac{p}{q}\right) \times \left(b + \frac{r}{s}\right)$, door multiplicatie, vindt $ab + a \times \frac{r}{s} + b \times \frac{p}{q} + \frac{p}{q} \times \frac{r}{s}$, . . (zie §. 337, I. C.), en, door magts-verheffing, voor $(a + b + c)^2$ de meer zamengeſtelde uitdrukking, $a^2 + (2a + b).b + (2a + 2b + c).c$. (zie §. 756, I. C.) (11).

§. 14. Hoezeer dan de Additien, Subſtractien, Multiplicatien en Diviſien in getallen het vinden van eenvoudiger uitdrukkingen bedoelen, en men als een algemeen voorſchrift in acht moet nemen: „ *Om, ook in ſtelkundige redeneringen, de uitdrukkingen, indien het mogelijk is, tot haren eenvoudigſten vorm te brengen,*” zou men daaruit verkeerdelijk beſluiten: dat de meer zamengeſtelde vormen, welke men bij het herleiden en omzetten der ſtelkundige uitdrukkingen verkrijgt, als nutteloos zouden moeten verworpen worden: deze zamengeſtelde uitdrukkingen leeren nieuwe hulpmiddelen kennen, om moeijelijke zaken te ontknopen, en

(11) De opzameling van alle die mogelijke gedaante-verwisſelingen der ſtelkundige uitdrukkingen maakt de groote voorraadkamer uit van alle hulpmiddelen en fijne kunstgrepen, waardoor men de ingewikkeldſte zaken ontknopen kan. Het verdrietige, hetwelk die herleidingen voor eenen eerstbeginnenden mogt hebben, wordt rijkelijk vergoed, door het vooruitzigt op eenen rijken oogst van wezenlijke kennis.

en vele dezer formen hebben, nadat zij, als eene onhandelbare uitdrukking, verworpen waren geworden, dikwijls nieuwe en gewigtige zaken openbaar gemaakt. Ten opzigte van de quadraats- en cubiek-worteltrekkingen, geven de ontwikkelingen van §. 760 en §. 789, I. C. voorbeelden, welke onze meening verstaanbaar maken en derzelver wezenlijkheid proefkundig bevestigen.

§. 15. Het is dan blijkbaar: dat de herleidingen, omzettingen en transformatien der stelkundige uitdrukkingen, een zeer gewigtig gedeelte der Wiskunst uitmaken. De leerling moet dus, zal hij verstandig te werk gaan, deze regels, niet, naar veler gewoonte, als onbeduidende zaken, waarvan men het doel niet inziet, te los behandelen: hij moet naarstig alle aanmerkingen, die wij zullen opzamelen, betrachten, en zich met de bijzondere uitkomsten dezer herleidingen gemeenzaam maken.

§. 16. Als eenen algemeenen regel moet men, hier en in het vervolg, aannemen: „ *dat in alle uitdrukkingen, welke* „ *met elkander op eenigerlei wijze vergeleken worden, dezelfde letter, in de eene uitdrukking gehouden moet worden,* „ *altijd dezelfde waarde als in alle de anderen te hebben.*"

Additie *of* Zamenvoeging *der stelkundige uitdrukkingen.*

§. 17. De stelkundige uitdrukkingen, welker waardijen tot één geheel moeten vereënigd worden, zijn of *éénledig* of *veelledig*. Zie, wat men onder deze benamingen verstaat, §. 141 – §. 443, I. C. *pag.* 267.

§. 18. Indien de uitdrukkingen éénledig zijn, kunnen zij. 1° *Alle ongelijkslachtig*; 2° *alle gelijkslachtig*; of 3° *sommige derzelver gelijkslachtig en sommige ongelijkslachtig zijn.* —— Raadpleeg § 455 – §. 459. I. C. *pag.* 272.

§. 19. †† „ *Wanneer de uitdrukkingen, welker waardijen* „ *tot één geheel moeten vereënigd worden, ongelijkslachtig* „ *zijn, dan kan die vereëniging niet anders worden aangewezen, dan door die gegevene uitdrukkingen met hare* „ *eigene teekens aan elkander te verbinden.*" Aldus zal de groot-

grootheid, welke uit de vereëniging van de grootheden a, b, c en d geboren wordt, op geene andere wijze, dan door het teeken $a + b + c + d$, kunnen worden voorgesteld. Vergelijk §. 48, I. C.

§. 20. Wij zeggen: *met hunne eigene teekens.* Voor de positieve grootheden is zulks buiten allen twijfel, en, wat de negatieve grootheden aangaat, wij hebben, in §. 468 en 469. I. C., betoogd: „ *dat eene negatieve grootheid bij eene po-* „ *sitieve optetellen, (naar den aard en de beteekenis van ne-* „ *gatief,) niet anders kan uitgelegd worden, dan deze groot-* „ *heid, als positief genomen, van de eerste aftetrekken:*" hetgeen op hetzelfde uitkomt, als of men de bijgevoegde negatieve grootheid, met haar eigen negatief teeken, verbindt aan die grootheid, met welke zij moet worden opgeteld.

Aldus wordt, indien $+ a$, $- b$, $- c$ en $+ d$ moeten vereënigd worden, de som, uit deze vereëniging ontstaande, door $a - b - c + d$ voorgesteld. Insgelijks zal de som, welke uit de vereëniging van $- a$, $- b$ en $- c$, geboren wordt, door $- a - b - c$, of dat, zie §. 474, I. C., hetzelfde is, door $-(a + b + c)$ kunnen worden uitgedrukt. † Het spreekt van zelfs, dat de termen der som in eene willekeurige rangorde kunnen gesteld worden.

§. 21. †† Deze eenvoudige regel is algemeen: *zij strekt zich derhalve ook uit tot de vereëniging van veelledige uitdrukkingen tot één geheel.*

Om dus de grootheden, uitgedrukt door $a - b$, door $- c + d$, en door $-(x - y)$, te vereënigen, zal men schrijven:

$$a - b - c + d - (x - y)$$

welke uitdrukking ook door het teeken:

$$a - b - c + d - x + y$$

kan worden voorgesteld. Raadpleeg §. 474, I. C.

§. 22. †† *Indien de gegevene uitdrukkingen gelijkslachtig zijn, dan kan men derzelver som op eene eenvoudiger wijze uitdrukken, dan, wanneer men dezelve met hunne eigene teekens verbindt.*

Immers kan men, in plaats van $a + a + a$, schrijven $3a$: in plaats van $7ab + 3ab + 4ab$, kan men stellen $14ab$; en men zal, in plaats van $2axy + 3bxy$ schrijven kunnen $(2a + 3b) . xy$. Vergelijk §. 459, I. C.

§. 23. †† „ *In het algemeen, zal men, ten einde gelijk-*
„ *ſlachtige uitdrukkingen met elkander te verëënigen, alle die*
„ *gelijkſlachtige uitdrukkingen, elk in het bijzonder, door*
„ *haren gemeenſchappeliiken deeler deelen; de komende quo-*
„ *tienten, volgens hunne eigene teekens,* (*zie* §. 19 *en* 20.)
„ *verbinden en deze ſom met den gemeenſchappelijken deeler*
„ *vermenigvuldigen.*"

Gevolgelijk zal men de uitdrukking $3abxy^2 - 4acx^2y + b^2x^2y^2$, welker termen alle door xy deelbaar zijn, aldus kunnen herleiden. Men deele elken term der uitdrukking door xy; dan vindt men, voor de quotienten: $3aby$, $-4acx$, $+b^2xy$; men zal derhalve, in plaats van de gegevene uitdrukking, ſtellen kunnen:

$$(3aby - 4acx + b^2xy) \times xy$$

welke, hoezeer zij, wel is waar, niet onder eene eenvoudiger gedaante dan de gegevene ſchijnt voortekomen, aan dezelve nogtans eenen vorm geeft, die in vele opzichten zijne nuttigheid hebben kan. Men kan dezelve ook nog onder de twee volgende vormen voorſtellen.

$$a \times (3bxy^2 - 4cx^2y) + b^2x^2y^2$$
$$b \times (3axy^2 + bx^2y^2) - 4acx^2y$$

ja zelfs, onder nog meer anderen.

§. 24. †† „ *Indien ſommige dezer quotienten,*" (welke men als factoren, ten opzigte van die bewerking coefficienten genoemd, zie §. 456, I. C., kan aanmerken,) „ *gelijkſlach-*
„ *tige uitdrukkingen zijn, dan wordt de gegevene uitdruk-*
„ *king door deze herleiding onder eenen eenvoudiger vorm ge-*
„ *bragt.*"

Men zal derhalve, voor de uitdrukking,

$$3abxyz + 7c^2x^2yz^2 + 7abxyz$$

ſtellen kunnen, de meer eenvoudige:

$$(10ab + 7c^2xz) \times xyz$$

en voor

$$10a^2x^2 - by^2 + 11by^2 - \tfrac{1}{2}a^2x^2$$

de meer eenvoudige:

$$9\tfrac{1}{2}a^2x^2 + 10by^2.$$

§. 25. †† Nog eenvoudiger zal de uitdrukking der ſom worden, wanneer alle de coefficienten bepaalde getallen zijn; „ *want, in dit geval, zal men dezelve, door Additie en Sub-*

„ *ſtrac-*

„ *ſtractie, volgens de grondregels van* §. 468–§. 471, *I. C.*, „ *in één getal kunnen verëënigen.*

VOORBEELDEN.

$$3ab - 7ab + 8ab = (3 - 7 + 8).ab = 4ab$$
$$7x^2 - 8x^2 + 11x^2 - x^2 = 9x^2$$
$$-3xy - 10xy - 17xy = -30xy$$
$$+1\tfrac{1}{2}xy - 17y^2 - \tfrac{7}{8}xy - 1\tfrac{1}{2}y^2 = \tfrac{5}{8}xy - 18\tfrac{1}{2}y^2.$$

§. 26. Alle de gevallen der Additie, zelfs die der veelledige uitdrukkingen niet uitgezonderd, zijn in deze voorſchriften begrepen; alleenlijk moet men, ten einde geene der termen over het hoofd te zien, zich ſtiptelijk aan den volgenden regel houden. „ *Plaatst de gelijkſlachtige termen der ge-* „ *gevene uitdrukkingen, met de teekens,* (+ *of* —), *waar-* „ *mede zij zijn aangedaan, in afzonderlijke kolommen: de ter-* „ *men, welke onderling en met de termen dezer kolommen on-* „ *gelijkſlachtig zijn, worden afzonderlijk, zonder dat het* „ *noodzakelijk zij, daaromtrent eenige orde in acht te ne-* „ *men, uitgeſchreven. Alle deze bijzondere kolommen wor-* „ *den, volgens* §. 25, *opgeteld, en deze partieele ſommen met* „ *de teekens, die zij in de optelling verkrijgen, als ook met* „ *de ongelijkſlachtige termen, volgens* §. 19 *en* 20, *tot één* „ *geheel, welke de totale ſom is, verëënigd.*" Deze regel ſteunt gedeeltelijk op het reeds verklaarde, en gedeeltelijk op het beginſel, dat men de termen eener uitdrukking naar welgevallen kan verplaatſen, zonder dat deze verplaatſing op de waarde dezer uitdrukking eenigen invloed kan hebben. Wij zullen de toepaſſing van dezen regel, door de volgende voorbeelden, ophelderen.

1. VOORBEELD. *De ſom te vinden van de volgende uitdrukkingen:* 1° *van* $3a^2b - 7ab^2 + xy$; 2° *van* $7xy - ab^2 - a^2b$; . . . 3° *van* $7y^2 - a^3$; 4° *van* $2a^3 + 2b^3 - xy + 2a^2b$; . . . . . 5° *van* $3ab^2 - 7b^3 - xy$; *en* 6° *van* $-7xy - x^2 + 2y^2$?

Men ſtelle de gelijkſlachtige termen, in de gegevene uitdrukkingen voorkomende, onder elkander; dan zal men hebben:

$$\begin{array}{l}
\dots\dots\; 3a^2b-7ab^2\;\dots\dots\dots\; +xy\;\dots \\
\dots\dots\; -a^2b-ab^2\;\dots\dots\dots\; +7xy\;\dots \\
-a^3\;\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\; +7y^2 \\
+2a^3+2a^2b\;\dots\; +2b^3\;\dots\; -xy\;\dots \\
\dots\dots\dots\; +3ab^2-7b^3\;\dots\; -xy\;\dots \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\; -x^2\;-7xy+2y^2
\end{array}$$

Nu telle men de termen van elke kolom bij elkander; dan vindt men, voor de ſom der eerſte kolom: $-a^3+2a^3=a^3$; voor die der tweede kolom: $3a^2b+2a^2b-a^2b=4a^2b$, enz. alles volgens §. 25: wanneer men nu deze partieele ſommen, met hunne eigene teekens, vereënigt, dan vindt men voor de totale ſom, de uitdrukking:

$$a^3+4a^2b-5ab^2-5b^3-x^2-xy+9y^2 \quad (12).$$

2. VOORBEELD. *De ſom te vinden van de volgende uitdrukkingen:* 1° $17a\sqrt{b}-8\sqrt{xy}+x\sqrt{y}$; 2° $a\sqrt{b}+2\sqrt{xy}$; 3° $6\sqrt{xy}-6x\sqrt{y}+a\sqrt{3}$; 4° $10\tfrac{3}{4}\sqrt{y}-\tfrac{1}{3}\sqrt{xy}+7a\sqrt{b}$?

$$\begin{array}{r}
17a\sqrt{b}-8\sqrt{xy}+x\sqrt{y} \qquad\qquad \\
a\sqrt{b}+2\sqrt{xy} \qquad\qquad\qquad\quad \\
+6\sqrt{xy}-6x\sqrt{y}+a\sqrt{3} \\
+7a\sqrt{b}-\tfrac{1}{3}\sqrt{xy}+10\tfrac{3}{4}\sqrt{y} \qquad\qquad \\
\hline
\textit{ſom: } 25a\sqrt{b}-\tfrac{1}{3}\sqrt{xy}-(5x-10\tfrac{3}{4})\sqrt{y}+a\sqrt{3}
\end{array}$$

3. VOORBEELD. *De volgende uitdrukkingen in ééne ſom te vereënigen:* 1° $a\sqrt{(x^2+y^2)}+b\sqrt{(x^2-y^2)}+3\sqrt[3]{xy^2}-7\sqrt{xy}$; 2° $-\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{xy^2}+3b\sqrt{(x^2-y^2)}$; 3° $1\tfrac{1}{3}\sqrt[3]{xy^2}-\tfrac{1}{3}a\sqrt{(x^2+y^2)}-3\tfrac{1}{3}\sqrt{xy}$; 4° $7y-9x-\tfrac{1}{4}\sqrt[3]{xy^2}-\tfrac{7}{8}\sqrt{(x^2-y^2)}$ en 5° $+\tfrac{1}{5}\sqrt[3]{xy^2}-3y+7x+1\tfrac{7}{3}\sqrt{xy}$?

$$\begin{array}{r}
a\sqrt{(x^2+y^2)}+b\sqrt{(x^2-y^2)}+3\sqrt[3]{xy^2}-7\sqrt{xy} \qquad\qquad \\
+3b\sqrt{(x^2-y^2)}-\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{xy^2} \qquad\qquad\qquad\qquad \\
-\tfrac{1}{3}a\sqrt{(x^2+y^2)}\;\dots\dots\; +1\tfrac{1}{3}\sqrt[3]{xy^2}-3\tfrac{1}{3}\sqrt{xy} \qquad\qquad \\
-\tfrac{7}{8}\sqrt{(x^2-y^2)}-\tfrac{1}{4}\sqrt[3]{xy^2}\;\dots\; -9x+7y \\
+\tfrac{1}{5}\sqrt[3]{xy^2}+1\tfrac{7}{3}\sqrt{xy}+7x-3y
\end{array}$$

deze

(12) Men moet niet vergeten, dat, wanneer de termen eener uitdrukking met geen coefficient zijn aangedaan, dezelve moeten gehouden worden de éénheid tot coefficient te hebben.

deze optellende, vindt men, voor de ſom, de uitdrukking:

$$\tfrac{2}{5}\, a \sqrt{(x^2 + y^2)} + (4b - \tfrac{7}{8}) \cdot \sqrt{(x^2 - y^2)} + 3\tfrac{47}{60} \sqrt[3]{xy^2} - 4\tfrac{2}{3} \sqrt{xy} - 2x + 4y.$$

Deze voorbeelden zullen genoegzaam zijn, om de Additie der ſtelkundige uitdrukkingen, zelfs ook in de moeijelijkſte gevallen, te leeren behandelen.

Subſtractie *of* Afſcheiding *der ſtelkundige uitdrukkingen van elkander.*

§. 27. †† De ſubſtractie wordt door den volgenden eenvoudigen regel ten uitvoer gebragt: „ *keer het teeken van de één „ ledige uitdrukking, of de teekens van de termen der veelledige „ uitdrukking, welke moet afgetrokken worden, om*, (dat wil „ zeggen, verandér + in —, en — in +,) *en tel die uit- „ drukking met haar omgekeerd teeken, indien zij éénledig „ is, of met hare omgekeerde teekens, indien zij veelledig is, „ bij de uitdrukking, waarvan zij moet afgetrokken worden: in „ acht nemende alle de gevallen en omſtandigheden, welke ten „ opzigte der Additie, van* §. 19 *tot* §. 26, *verklaard zijn: „ deze ſom zal dan het begeerde verſchil zijn.*" — Immers, blijkt het uit den V. Grondregel, §. 472, I. C: dat, wanneer een poſitief getal van een poſitief getal wordt afgetrokken, dit aftrekken een eigenlijk aftrekken is: maar dat, wanneer een negatief getal van een poſitief wordt afgetrokken, die aftrekking in eene eigenlijke optelling verandert: derhalve ſchrijft men, in plaats van + *a min* + *b*, de uitdrukking *a* — *b*; en, in plaats van + *a min* — *b*, de uitdrukking *a plus* + *b*, dat is, + *a* + *b*: zie het bewijs op de aangehaalde plaats. Hieruit blijkt derhalve de waarheid van den algemeenen regel voor het geval der éénledige uitdrukkingen. De verdere uitſtrekking van dien regel op veelledige uitdrukkingen is blijkbaar, uit §. 476, I. C: maar wil men deszelfs waarheid, langs eenen anderen weg, even overtuigend gevoelen, zoo merke men aan: dat eene veelledige uitdrukking in eens aftetrekken, op hetzelfde uitkomt, als of men alle hare termen één voor één aftrekt; want op

 dit

dit beginſel ſteunt immers, zie §. 112, I. C, de aftrekking der bepaalde getallen: gevolgelijk zal eene veelledige uitdrukking van eene andere aftetrekken, niets anders zijn dan derzelver termen, volgens het beloop der teekens, waarmede zij aangedaan zijn, één voor één aftetrekken, dat is, (volgens het zoo even betoogde,) met hunne tegengeſtelde teekens, aan de uitdrukking, waarvan men dezelve aftrekt, te verbinden. Om nu dezen regel in de beoefening vaardig te leeren uitvoeren, zal het noodig zijn het volgende tafeltje in het geheugen te prenten.

$$+a \text{ min } +b = +a - b$$
$$-a \text{ min } +b = -a - b$$
$$+a \text{ min } -b = +a + b$$
$$-a \text{ min } -b = -a + b$$

de grootheden a en b kunnen alle waardijen hebben; derhalve zal, indien men $a = 0$ ſtelt,

$$0 \text{ min } +b = 0 - b = -b \text{ (13)}$$
$$\text{en } 0 \text{ min } -b = 0 + b = +b \text{ zijn.}$$

Voor veelledige uitdrukkingen zal men hebben:

$$a + b \text{ min } \quad c - d + e = a + b - c + d - e$$
$$a + b \text{ min } -c - d - e = a + b + c + d + e$$
$$0 \text{ min } \quad x - y + z = -x + y - z.$$

Past men nu deze beginſelen op gelijkſlachtige uitdrukkingen toe; dan zal men verkrijgen:

$$7ab + 3b^2 \text{ min } \quad ab + b^2 = 7ab + 3b^2 - ab - b^2 = 6ab + 2b^2$$
$$-6xy + 7yz \text{ min } -xy - yz = -6xy + 7yz + xy + yz = -5xy + 8yz$$

en op dezelfde wijze voor alle andere gevallen.

§. 28. †† Het is dan, zoo als wij §. 27. geſteld hebben, uit dit alles blijkbaar: †† *dat eene één- of veelledige uitdrukking van eene andere zal worden afgetrokken, indien men derzelver teekens omkeert en de uitdrukking, welke men op* de-

(13) *Men moet* 0 — b *niet lezen, als of* — b *van* 0 *moet afgetrokken worden*, zoo als ſommige eerstbeginnenden zich daarin vergisſen. *Nul min* b of 0 — b moet verſtaan worden, dat de grootheid b, als poſitief genomen, van 0 moet worden afgetrokken. Immers, als men ſchrijft: 7 — 4, meent men, + 4 van + 7 aftetrekken? Het moet op dezelfde wijze verſtaan worden, wanneer in plaats van 7 een 0 komt.

deze wijze verkrijgt, optelt bij die, waarvan zij moet worden afgetrokken. Zie hier eenige voorbeelden, om dezen regel verder te beoefenen.

1. VOORBEELD. *Van* $3a^3 - 7a^2b + 4ab^2 - 3b^3$ *aftetrekken* $9a^3 - a^2b + 2ab^2 - 2b^3$

$$\begin{array}{ll} \textit{bij} & +3a^3 - 7a^2b + 4ab^2 - 3b^3 \\ \textit{tel} & -9a^3 + a^2b - 2ab^2 + 2b^3 \\ \hline \textit{komt} & -6a^3 - 6a^2b + 2ab^2 - b^3 \text{ voor het verschil.} \end{array}$$

2. VOORBEELD. *Van* $7x\sqrt{y} + 9y\sqrt{y} - 11\sqrt{xy}$ *aftetrekken* $-2\sqrt{xy} + 2x\sqrt{y} - y\sqrt{y} + 12a^2$?

$$\begin{array}{ll} \textit{bij} & +7x\sqrt{y} + 9y\sqrt{y} - 11\sqrt{xy} \\ \textit{tel} & -2x\sqrt{y} + y\sqrt{y} + 2\sqrt{xy} - 12a^2 \\ \hline \textit{komt} & +5x\sqrt{y} + 10y\sqrt{y} - 9\sqrt{xy} - 12a^2 \text{ voor het begeerde verschil.} \end{array}$$

3. VOORBEELD. *Van* $13a\sqrt{(x^2-y^2)} - 17b(\sqrt{x^2+y^2}) - axy$ *aftetrekken* $17b\sqrt{(x^2-y^2)} + bxy - x^2 + a^2y$?

$$\begin{array}{ll} \textit{bij} & 13a\sqrt{(x^2-y^2)} - 17b\sqrt{(x^2+y^2)} - axy \\ \textit{tel} & -17b\sqrt{(x^2-y^2)} \ldots\ldots\ldots\ldots - bxy + x^2 - a^2y \\ \hline \textit{komt} & (13a - 17b).\sqrt{(x^2-y^2)} - 17b\sqrt{(x^2+y^2)} - (a+b)xy \\ & + x^2 - a^2y, \text{ voor het begeerde verschil.} \end{array}$$

§. 29. Wij moeten opmerken: dat het eigenlijk niet noodig is de teekens der uitdrukkingen, die men aftrekt, omtekeeren, *indien men*, zoo als vele, ja wel de meeste Schrijvers doen, en hetwelk wij ook in het vervolg kortheidshalve volgen zullen, *de teekens in de gedachte omkeert, en met die omgekeerde teekens bij de gelijkslachtige termen optelt.*

TWEE- EN- VEERTIGSTE LES.

Over de Multiplicatie *der stelkundige uitdrukkingen.*

§. 30. †† Ook deze bewerking is in allen opzigte gegrond op het denkbeeld, dat wij van de multiplicatie, in §. 57. *et seq.* I. C. gegeven hebben en op de regels voor de vermenigvuldiging der getallen, welke wij uit hetzelve hebben afgeleid. In deze bewerking komen drie hoofdgevallen voor: 1° *de*

1° *de vermenigvuldiging van twee of meer éénledige uitdrukkingen met elkander*; 2° *de vermenigvuldiging van eene veelledige uitdrukking met eene éénledige*; en 3° *die van eene veelledige met eene veelledige uitdrukking.*

§. 31. I. Geval. In de eerste plaats moet men, en dit voorschrift strekt zich tot alle gevallen uit, acht geven op de teekens + of —, welke aan het product toekomen. Hoe nu de teekens der producten van die der factoren afhangen, is, in den eersten cursus, van §. 477 tot §. 485, *pag.* 282, op twee onderscheidene wijzen betoogd. De regels dien aanaangaande zijn begrepen in de vier volgende gevallen

$$+a \times +b = +ab \qquad -a \times +b = -ab$$
$$-a \times -b = +ab \qquad +a \times -b = -ab$$

waarbij men, in het algemeen, voegen kan: „ *dat het teeken* „ *van een gedurig product*, (zie in het bijzonder §. 482, „ I. C.,) *positief of negatief zal zijn*, *naarmate het aantal* „ *der negatieve factoren even of oneven is.*" Voorts geldt, met betrekking tot de multiplicatie, de aanmerking van §. 13: indien 'er namelijk geen bijzondere overëënkomst tusschen de factoren bestaat, dan kan derzelver product niet anders, dan volgens het teeken van multiplicatie, (zie §. 437, I. C.) worden aangewezen. Het product van a, b, x en y, zal men gevolgelijk door $abxy$ aanwijzen.

§. 32. Maar de factoren kunnen: 1° met bepaalde getallen, als coefficienten, zijn aangedaan; 2° sommige derzelven kunnen gelijkslachtig zijn, en 3° de factoren kunnen of alle, of, voor een gedeelte, gelijkslachtige exponentiale uitdrukkingen zijn. Voorts kunnen alle deze drie omstandigheden geheel of gedeeltelijk verëënigd zijn.

§. 33. Zijn de factoren met coefficienten aangedaan, gelijk wanneer, bij voorbeeld, $7a$ met $3b$ moet vermenigvuldigd worden; dan kan men voor het product schrijven $7a \times 3b$; maar $7a$ is, zie §. 59, I. C, gelijk $7 \times a$, en $3b = 3 \times b$; derhalve is $7a \times 3b = 7 \times a \times 3 \times b = 7 \times 3 \times a \times b$, zie §. 62—§. 65, I. C: maar nu is $7 \times 3 = 21$; gevolgelijk $7a \times 3b = 21ab$. „ †† *Men verkrijgt dan*, *door de coef-* „ *ficienten met elkander te vermenigvuldigen*, *en de letters ach-*

„ *ter*

„ *ter het product dezer coefficienten te plaatsen, altijd eene* „ *uitdrukking, welke beknopter is.*" Nogtans moet men hier, als een bijzonder gebruik, waarvan de leerling vooreerst niet mag afgaan, in acht nemen: „ *de voorkomende letters in hunne alphabetische rangorde te plaatsen;*" want, hoezeer uit §. 65, I. C. blijkt: dat die plaatsing geenen invloed op de wezenlijke waarde der uitdrukking hebben kan, is het, om redenen, welke in het vervolg nader blijken zullen, noodzakelijk, zich vroegtijdig aan dit voorschrift te gewennen. —— Men zal dan volgens den voorgeschreven regel vinden:

$$-7a \times +8x = -56ax;\ \tfrac{1}{2}b \times \tfrac{1}{3}a = +\tfrac{1}{6}ab$$
$$+3a \times -4b \times -5x \times -7y = -420abxy$$
$$-7\tfrac{1}{2}a \times +8x \times -\tfrac{3}{4}b \times -\tfrac{1}{2}y = -22\tfrac{1}{2}abxy$$

§. 34. De tweede en derde onderdeelingen van het eerste geval steunen op de leer der exponentiale uitdrukkingen, welke wij in de XXXV *Les* I. C. zoo uitvoerig verklaard hebben, dat 'er niets meer bij te voegen is: want, zijn de exponentiale uitdrukkingen gelijknamig; dan hebben wij, zie §. 713, I. C,

$$a^3 \times b^3 \times c^3 = (abc)^3;\ a^n \times b^n \times x^n = (abx)^n$$
$$+7a^2 \times -9b^2 = -63(ab)^2;\ \tfrac{1}{2}a^n \times -\tfrac{1}{3}x^n = -\tfrac{1}{6}(ax)^n$$

Zijn zij gelijkslachtig, dat is; hebben zij denzelfden wortel; „ *dan is hun product eene medegelijkslachtige exponentiale uitdrukking, welkers exponent de som van de exponenten der factoren is.*" Hetgeen zoowel voor de negatieve en gebrokene exponenten, als voor de geheele en positieve, geldt. Zie §. 715, 734 en 735, I. C. Alzoo is

$$a^2 \times a = a^3;\ a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{5}{6}};\ a^m \times a^n \times a^p = a^{m+n+p} \text{ enz.}$$

wanneer men dan in de vermenigvuldiging der éénledige uitdrukkingen onder het oog houdt: „ *dat dezelfde letters, welke in de gegevene uitdrukkingen, als derzelver bijzondere factoren, voorkomen, volgens dezen laatsten regel, door optelling der exponenten, tot ééne eenvoudige magt kunnen vereënigd worden;*" dan zal men vinden:

$$-7abxy \times +3bxyz = -21ab^2x^2y^2z$$
$$-a^2bx^2 \times -3c^2y \times +abxy = +3a^3b^2c^2x^3y^2$$
$$+\tfrac{1}{3}ax^2 \times -\tfrac{1}{2}bxy \times -\tfrac{2}{5}aby^2 \times -\tfrac{5}{16}cyz = -\tfrac{1}{48}a^2b^2cx^3y^4z.$$

§. 35. II. Geval. Men herleze hier hetgeen, in den eersten cursus §. 67 en 68, betoogd en verklaard is, en dan zal het blijken, dat voor

$$(a+b+c+d+e+ \text{enz.}) \times p$$

kan geschreven worden:

$$ap+bp+cp+dp+ep+ \text{enz.}$$

en zelfs ook, wanneer men het vermenigvuldigtal met den vermenigvuldiger verwisselt. Hieruit volgt dan: „ *dat,* „ *wanneer eene veelledige uitdrukking met eene éénledige moet* „ *vermenigvuldigd worden, men alle de leden van het vermenigvuldigtal met den vermenigvuldiger moet vermenigvuldigen, en deze partieele producten tot één geheel vereënigen,* „ *hetwelk dan gelijk aan het totale product zal zijn.*"

§. 36. Men moet in de uitvoering van dit voorschrift nogtans onder het oog houden: „ *dat men, in deze bijzondere* „ *multiplicatien, vooreerst de regels van de vermenigvuldiging* „ *der éénledige uitdrukkingen volge, en* 2° *dat men de voorschriften voor het bepalen der teekens, zie* § 31, *op dezelfde wijze als in het eerste geval blijve in acht nemen*"

§. 37. Wanneer men nu omtrent dit laatste gedeelte nog eenige zwarigheid maken mogt, zoo laten wij stellen: dat $a - b$ met c moet vermenigvuldigd worden: stellen wij $a - b = p$; dan is, zie §. 498, I. C. $a = b + p$: vermenigvuldigen wij dan beide leden dezer vergelijking met c: dan zal $ac = bc + pc$ zijn, waaruit, indien bc uit het achterste in het voorste lid wordt overgebragt, volgen zal: $ac - bc = pc$: maar nu zegt men, volgens §. 31, $+a \times +c = +ac$, en $-b \times +c = -bc$; gevolgelijk verandert de regel der teekens niet, wanneer de termen eener uitdrukking met een positief getal vermenigvuldigd worden. Moet $a - b$ met $-c$ worden vermenigvuldigd; dan zal men, $a - b = p$ stellende, $a = b + p$ hebben, hetwelk met $-c$ vermenigvuldigd zijnde, geven zal: $-ac = -bc - cp$; gevolgelijk $-ac + bc = -cp$: maar nu is wederom $+a \times$

$-c$

$-c = -ac$; en $-b \times -c = +bc$; waaruit blijkt: dat ook, in dit geval, de regel der teekens geene verandering ondergaat.

§. 38. De volgende voorbeelden ſtrekken tot oefening en opheldering van dit tweede geval.

1° $(3a^2 - 9ab + 7b^2) \times 2ab = 6a^3b - 18a^2b^2 + 14ab^3$

2° $(x^2 - xy + 2y^2) \times -\frac{1}{2}a = -\frac{1}{2}ax^2 + \frac{1}{2}axy - ay^2$

3° $(ax^3 - bxy^2) \times -3ab\sqrt{xy} = -3a^2bx^3\sqrt{xy} + 3ab^2xy^2\sqrt{xy}$.

§. 39. III. Geval. Het is in §. 70, I. C. ontegenzeggelijk bewezen: „ *dat men het product van eene veelledige uitdrukking met eene veelledige vindt, indien men elken term van het vermenigvuldigtal met elken term van den vermenigvuldiger in het bijzonder vermenigvuldigt, en de partieele producten, welke uit deze bijzondere multiplicatien ontſtaan, tot één geheel vereënigt.* Het product

$$(a+b+c+d+e) \times (p+q+r+s+t)$$

zal gevolgelijk worden uitgedrukt door:

$$\begin{array}{l} +(a+b+c+d+e) \times p \\ +(a+b+c+d+e) \times q \\ +(a+b+c+d+e) \times r \\ +(a+b+c+d+e) \times s \\ +(a+b+c+d+e) \times t \end{array}$$

of, wanneer men deze producten volgens het II. Geval ontwikkeldt, door:

$$\begin{array}{l} +ap+bp+cp+dp+ep \\ aq+bq+cq+dq+eq \\ ar+br+cr+dr+er \\ as+bs+cs+ds+es \\ at+bt+ct+dt+et \end{array}$$

§. 40. Het blijkt hieruit, om zulks in het voorbijgaan aantemerken: dat, wanneer 'er in den eerſten factor m leden en in den tweeden factor n leden voorkomen, het aantal der partieele producten, uit welker vereëniging het totale product ontſtaat, door mn zal worden uitgedrukt.

§. 41. Het zou overtollig zijn te bewijzen, dat ook in dit geval, even als in de twee eerſte, de regels voor de bepaling van de teekens der partieele producten, onder dezelfde om-

omſtandigheden, op dezelfde wijze blijven gelden: het verklaarde in §. 37, is ten dien opzigte genoeg voldoende. Ten aanzien nu van dit derde geval, moet men de twee volgende dingen onder het oog houden: 1° „ *Dat alle de partieele* „ *producten, volgens de regels van het I. Geval, zie* §. 31—„ §. 35, *gevormd worden.*" 2° „ *Dat, even als voor de Additie, zie* §. 26, *de gelijkſlachtige partieele producten, in* „ *den loop der bewerking, in afzonderlijke kolommen geplaatst, elk dezer kolommen afzonderlijk opgeteld, en deze* „ *ſommen, met elkander, en met de enkelde overgeblevene partieele producten, overëénkomſtig hunne eigene teekens, moeten verëénigd worden, zullende als dan deze ſom het totale* „ *product te voorſchijn brengen.*"

§. 42. Deze twee zaken ſtriktelijk in acht nemende, zal men de producten van alle veelledige uitdrukkingen gemakkelijk vinden kunnen, terwijl de uitgewerkte voorbeelden, op het hier tegen overſtaande uitſlaande blad geplaatst, den leerling overvloedige gelegenheid zullen geven, zich in de toepasſing van dezen regel te oefenen. Tot meer gemak en regelmatigheid in de bewerking, moet men nogtans de twee volgende dingen in acht nemen.

1° „ *Dat men, even als in de multiplicatie der getallen* „ *geſchiedt, den vermenigvuldiger onder het vermenigvuldigtal plaatſe.*"

2° „ *Dat men, zooveel mogelijk, de termen van de factoren naar de alphabetiſche orde rangſchikke.*"

Deze omſtandigheden behoorlijk in acht nemende, komen in den loop der bewerking de gelijkſlachtige termen meestal van zelve, in hunne natuurlijke rangorde, onder elkander.

§. 43. Het is om het even, of men de vermenigvuldiging van voren dan wel, gelijk in de getallen meest gebruikelijk is, van achteren begint: wij hebben dezelve in de uitgewerkte voorbeelden, echter, zonder daartoe de minſte reden te hebben, van voren begonnen. De verklaring van een enkel voorbeeld zal genoeg zijn om alle de deelen der geheele bewerking opteheldéren. Nemen wij daartoe het 11. Voorbeeld. Hier moet $a + b + c$ met $a + b - c$ vermenigvuldigd worden. Men plaatſe deze factoren onder elkander en multipliceere:

1° alle

No. I. UITGEWERKTE MULTIPLICATIEN, *strekkende ter opheldering en beoefening van* §. 41. [Tegen over bladz. 28.]

	1. VOORB.	2. VOORB.	3. VOORB.	4. VOORB.	5. VOORB.	6. VOORB.	7. VOORB.
verm. tal	$a+b$	$a-b$	$a+b$	$2a-b$	$-x+4y$	$-x-2y$	$4x^2-2xy+3y^2$
vermenigv.	$a+b$	$a-b$	$a-b$	$a+2b$	$+2x-3y$	$-x-2y$	$-x+2y$
	a^2+ab	a^2-ab	a^2+ab	$2a^2-ab$	$-6x^2+8xy$	x^2+2xy	$-4x^3+2x^2y-3xy^2$
	$+ab+b^2$	$-ab+b^2$	$-ab-b^2$	$+4ab-2b^2$	$+9xy-12y^2$	$+2xy+4y^2$	$+8x^2y-4xy^2+6y^3$
product	$a^2+2ab+b^2$	$a^2-2ab+b^2$	a^2-b^2	$2a^2+3ab-2b^2$	$-6x^2+17xy-12y^2$	$x^2+4xy+4y^2$	$-4x^3+10x^2y-7xy^2+6y^3$

	8. VOORB.	9. VOORB.	10. VOORB.
verm. tal	x^2-xy+y^2	x^2+xy+y^2	$x^n-x^{n-1}y+x^{n-2}y^2-$ enz. $\pm x^2y^{n-2}\mp xy^{n-1}\pm y^n$
vermenigv.	$x+y$	$x-y$	$x+y$
	$x^3-x^2y+xy^2$	$x^3+x^2y+xy^2$	$x^{n+1}-x^ny+x^{n-1}y^2-$ enz. $\pm x^3y^{n-2}\mp x^2y^{n-1}\pm xy^n$
	$+x^2y-xy^2+y^3$	$-x^2y-xy^2-y^3$	$+x^ny-x^{n-1}y^2+$ enz. $\mp x^3y^{n-2}\pm x^2y^{n-1}\mp xy^n\pm y^{n+1}$
product	x^3+y^3	x^3-y^3	x^{n+1} . . . . $\pm y^{n+1}$

	11. VOORB.	12. VOORB.	13. VOORB.	14. VOORB.
verm. tal	$a+b+c$	$-3x+2y-z$	x^2-xy+y^2	$x^2-12x+7$
vermenigv.	$a+b-c$	$-3x-2y-z$	x^2+xy+y^2	x^2+7x-5
α	$a^2+ab+ac$	$+9x^2-6xy+3xz$	$x^4-x^3y+x^2y^2$	$x^4-12x^3+7x^2$
β	$+ab+b^2+bc$	$+6xy-4y^2+2yz$	$+x^3y-x^2y^2+xy^3$	$+7x^3-84x^2+49x$
γ	$-ac-bc-c^2$	$+3xz-2yz+z^2$	$+x^2y^2-xy^3+y^4$	$-5x^2+60x-35$
product	$a^2+2ab+b^2-c^2$	$+9x^2+6xz-4y^2+z^2$	$x^4+x^2y^2+y^4$	$x^4-5x^3-82x^2+109x-35$

	15. VOORB.
verm. tal	$2a^4-3a^3b+4a^2b^2-2ab^3+2b^4$
vermenigv.	$\frac{1}{2}a^3-\frac{1}{3}a^2b+2ab^2-b^3$
	$a^7-1\frac{1}{2}a^6b+2a^5b^2-a^4b^3+a^3b^4$
	$-\frac{2}{3}a^6b+a^5b^2-1\frac{1}{3}a^4b^3+\frac{2}{3}a^3b^4-\frac{2}{3}a^2b^5$
	$+4a^5b^2-6a^4b^3+8a^3b^4-4a^2b^5+4ab^6$
	$-2a^4b^3+3a^3b^4-4a^2b^5+2ab^6-2b^7$
product	$a^7-2\frac{1}{6}a^6b+7a^5b^2-10\frac{1}{3}a^4b^3+12\frac{2}{3}a^3b^4-8\frac{2}{3}a^2b^5+6ab^6-2b^7$

	16. VOORB.
	$7x^5$ . . . $+4x^3-x^2+2x-10$
	$2x^4+3x^3-2x^2+4x+2$
	$14x^9$ . . . $+8x^7-2x^6+4x^5-20x^4$
	$+21x^8$ . . . $+12x^6-3x^5+6x^4-30x^3$
	$-14x^7$ . . . $-8x^5+2x^4-4x^3+20x^2$
	$+28x^6$ . . . $+16x^4-4x^3+8x^2-40x$
	$+14x^5$ . . . $+8x^3-2x^2+4x-20$
product . . .	$14x^9+21x^8-6x^7+38x^6+7x^5+4x^4-30x^3+26x^2-36x-20$

NB. De Lezer moet, ten einde in de bewerking van de multiplicatie der stelkundige uitdrukkingen, welke in het eerst vrij moeijelijk valt, eene genoegzame bedrevenheid te verkrijgen, na vooraf de verklaarde gronden bedaardelijk overwogen te hebben, de hier bovenstaande voorbeelden met die gronden, één voor één, vergelijken, en dezelve daarna op eene lei of een stuk papier nawerken: indien hij misslagen begaan heeft, zal hij het vergelijken van zijn werk met deze tafel hem doen zien, waar de misslag ontstaan is, en waaruit hij voorkomt. Hierna zal hij de voorbeelden, welke op de tegenzijde van deze tabelle opgegeven zijn, uitwerken.

VOORBEELDEN *ter beoefening van de* MULTIPLICATIE *der stelkundige uitdrukkingen.*

1. *Multipl.* $5\,a - 9\,b$ *met* $-a + 3\,b$? *komt:* $-5\,a^2 + 24\,a\,b - 27\,b^2$.
2. *Multipl.* $5\,a^2 - a\,b - b^2$ *met* $3\,a^2 + 9\,b^2$? *komt:* $+15\,a^4 - 3\,a^3\,b + 42\,a^2\,b^2 - 9\,a\,b^3 - 9\,b^4$.
3. *Multipl.* $a\,b + a\,c + b\,c$ *met zich zelve? komt:* $a^2\,b^2 + 2\,a^2\,b\,c + a^2\,c^2 + 2\,a\,b^2\,c + 2\,a\,b\,c^2 + b^2\,c^2$.
4. *Multipl.* $x^4 - x^3\,y + x^2\,y^2 - x\,y^3 + y^4$ *met* $x^4 + x^3\,y + x^2\,y^2 + x\,y^3 + y^4$? *komt:* $x^8 + x^6\,y^2 + x^4\,y^4 + x^2\,y^6 + y^8$.
5. *Multipl.* $x^5 + x^4\,y + x^3\,y^2 + x^2\,y^3 + x\,y^4 + y^5$ *met* $x - y$? *komt:* $x^6 - y^6$.
6. *Multipl.* $1 + x + x^2 + x^3 + x^4$ *met zich zelve? komt:* $1 + 2\,x + 3\,x^2 + 4\,x^3 + 5\,x^4 + 4\,x^5 + 3\,x^6 + 2\,x^7 + x^8$.
7. *Multipl.* $7\,x^2 - 9\,x + 15$ *met* $-7\,x + 9$? *komt:* $-49\,x^3 + 126\,x^2 - 186\,x + 135$.
8. *Multipl.* $2\,x^2 - 3\,x + 1$ *met* $x^2 + 2\,x + 3$? *komt:* $2\,x^4 + x^3 + x^2 - 7\,x + 3$.
9. *Multipl.* $-3\,x^2 + 100\,x - 17$ *met* $-19 + x^2$? *komt:* $-3\,x^4 + 100\,x^3 + 40\,x^2 - 1900\,x + 323$.
10. *Multipl.* $x^3 + 17 - 11\,x$ *met* $x^2 + 11$? *komt:* $x^5 + 17\,x^2 - 121\,x + 187$.
11. *Multipl.* $-13\,x + x^3 - 10 + 3\,x^2$ *met* $1 - 3\,x + x^2$? *komt:* $x^5 - 21\,x^3 + 32\,x^2 + 17\,x - 10$.
12. *Multipl.* $x^4 + x - 11$ *met* $x^3 - x + 1$? *komt:* $x^7 - x^5 + 2\,x^4 - 11\,x^3 - x^2 + 12\,x - 11$.
13. *Multipl.* $x - 3$ *met* $x - 5$ *met* $x + 7$ *met* $x^2 - 1$? *komt:* $x^5 - x^4 - 42\,x^3 + 106\,x^2 + 41\,x - 105$.
14. *Multipl.* $x^2 - 17$ *met* $x^2 - x + 5$ *met* $x^2 - 7\,x + 1$? *komt:* $x^6 - 8\,x^5 - 4\,x^4 + 100\,x^3 - 216\,x^2 + 612\,x - 85$.
15. *Multipl.* $5\,x^2 + 4\,a\,x - 7\,b^2$ *met* $3\,x^2 - 9\,a\,x + 2\,b^2$? *komt:* $15\,x^4 - 33\,a\,x^3 - (36\,a^2 + 11\,b^2)\,x^2 + 71\,a\,b^2\,x - 14\,b^4$.

MERKWAARDIGE PRODUCTEN.

Welke in de oplossing van vele vraagstukken van zeer veel dienst zijn, om dezelve te bekorten, eenvoudiger te maken, of tot eene lagere magt te brengen.

1° $(x + y)^2 = x^2 + 2\,x\,y + y^2$.

2° $(x - y)^2 = x^2 - 2\,x\,y + y^2$.

3° $(x + y)\,(x - y) = x^2 - y^2$.

4° $(x + y)^3 = x^3 + 3\,x^2\,y + 3\,x\,y^2 + y^3 = x^3 + y^3 + 3\,x\,y\,(x + y)$.

5° $(x - y)^3 = x^3 - 3\,x^2\,y + 3\,x\,y^2 - y^3 = x^3 - y^3 - 3\,x\,y\,(x - y)$.

6° $(a^2 - b^2) \times (a - b) = a^3 - a^2\,b - a\,b^2 + b^3$.

7° $(x^2 - x\,y + y^2) \times (x + y) = x^3 + y^3$.

8° $(x^2 + x\,y + y^2) \times (x - y) = x^3 - y^3$.

9° $(x^{n-1} + x^{n-2}\,y + x^{n-3}\,y^2 + x^{n-4}\,y^3 + \text{enz.} + x^2\,y^{n-3} \pm x\,y^{n-2} + y^{n-1}) \times (x - y) = x^n - y^n$.

10° $(x^{n-1} - x^{n-2}\,y + x^{n-3}\,y^2 - x^{n-4}\,y^3 + \text{enz.} \pm x^2\,y^{n-3} \mp x\,y^{n-2} \pm y^{n-1}) \times (x + y) = x^n \pm y^n$.

11° $(x^2 + x\,y + y^2) \times (x^2 - x\,y + y^2) = x^4 + x^2\,y^2 + y^4$.

12° $(x^3 + x^2\,y + x\,y^2 + y^3) \times (x^3 - x^2\,y + x\,y^2 - y^3) = x^6 + x^4\,y^2 - x^2\,y^4 - y^6$.

13° $(x^4 + x^3\,y + x^2\,y^2 + x\,y^3 + y^4) \times (x^4 - x^3\,y + x^2\,y^2 - x\,y^3 + y^4) = x^8 + x^6\,y^2 + x^4\,y^4 + x^2\,y^6 + y^8$.

1° alle de termen van $a + b + c$ eerst met $+ a$, komt: $a^2 + ab + ac$, welker termen op de rij α geplaatst worden; 2° alle de termen van $a + b + c$ met $+ b$; komt $ab + b^2 + bc$, welker termen men op de rij β plaatst, en eindelijk 3° alle de termen van $a + b + c$ met $- c$, komt $- ac - bc - c^2$, welke op de rij γ geplaatst worden: men ziet nu: dat deze rijen zoodanig geplaatst zijn, dat de gelijkſlachtige termen in afzonderlijke kolommen onder elkander komen, (ſchoon nogtans in de derde kolom de ongelijkſlachtige term b^2 voorkomt, waarvoor men eene nieuwe kolom zou hebben kunnen aanleggen,) zoodat men deze kolommen volgens §. 26, ſlechts behoeft optetellen, om het totale product te verkrijgen.

§. 44. Multiplicatien, hoedanige in de 14, 15 en 16, voorbeelden voorkomen, zijn in de analytiſche bewerkingen van veel gewigt: de gegevene uitdrukkingen zijn in dezelve, naar de afdalende magten van dezelfde letter geordend: in de 14 en 16 voorb. naar de afdalende magten van de letter x, in het 15, naar die van de letter a. * *Eene uitdrukking kan nu op tweeërlei wijze, naar de magten van eene letter x geordend zijn: 1° volgens de rangorde der afdalende magten, gelijk in* $2x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 4x + 2$: *2° volgens die der opklimmende magten, gelijk, wanneer men de termen der laatſte uitdrukking omzettende, verkrijgt:* $2 + 4x - 2x^2$ $+$ *enz.* „ *Men moet alvorens de multiplicatien te beginnen „ de termen der factoren naar de magten van eenige letter „ rangſchikken, waartoe men de afdalende of opklimmende ex„ ponenten naar welgevallen verkiezen kan; mits alle de za„ menſtellende factoren in dezelfde rangorde genomen wor„ den.*" Dan, hierover nader, wanneer wij de leer der combinatien op de multiplicatien en magts-verheffingen zullen toepasſen.

§. 45. Een enkel voorbeeld zal genoeg zijn, om de algemeenheid van de producten der ſtelkundige uitdrukkingen boven die der bepaalde getallen te doen opmerken. Nemen wij het product $(x + y) \times (x - y) = x^2 - y^2$: dit product leert ons: dat, de ſom van twee getallen met derzelver verſchil vermenigvuldigd zijnde, het product zooveel waard is als het verſchil van de tweede magten dezer getallen. Zulks

zou

zou de multiplicatie der getallen niet kenbaar gemaakt hebben: indien niet anders gegeven ware dan $(x+y)\times(x-y)$ en $x=10$ en $y=7$ was, zou men 17 met 3 hebben vermenigvuldigd, en men zou voor het product 51 verkregen hebben, zonder dat men zou geweten hebben, dat dit product ook gelijk is aan $x^2-y^2=100-49=51$. Men zal derhalve op gelijke wijze, voor elke stelkundige multiplicatie, het product der getallen, welke de waarde van de zamenstellende factoren, (naar zekere waardijen, welke men aan de daarin voorkomende letters gegeven heeft,) verkrijgen, op tweederlei wijze vinden kunnen; 1° door de waardijen der zamenstellende factoren met elkander te vermenigvuldigen; 2° door de waarde van het stelkundig product, volgens de aangenomene waarde der daarin voorkomende letters, te berekenen, hetwelk dan ook eenigermate tot eene proef van de juistheid der stelkundige multiplicatie verstrekken kan. Hoe nuttig nu die algemeenheid der stelkundige producten zij, zal men bij voorraad uit de vergelijking van de *merkwaardige producten*, op het uitslaande blad geplaatst, met de oplossingen van de 37, 38, 39, 40, 41 en 42, vraagstukken I. C. pag. 344. *et seq.* kunnen beoordeelen.

DRIE- EN- VEERTIGSTE LES.

Over de Divisie *der stelkundige uitdrukkingen.*

§. 46. Het woord divisie heeft hier geene andere beteekenis dan die, welke in §. 129, §. 140, en op meer andere plaatsen van den eersten cursus aan hetzelve gegeven is. Indien de grootheden nu, die op elkander gedeeld moeten worden, niet anders dan door eene enkele letter zijn aangewezen, dan moet men eenvoudig bij de aanwijzing van die divisie blijven: indien dus a het deeltal en b de deeler is, kan men het quotient dezer divisie slechts door het teeken $\frac{a}{b}$, (ook door $a:b$,) hetwelk men ook als eene stelkundige breuk kan aanmerken, worden voorgesteld. Maar 'er zijn ge-

gevallen, waarin men het quotient op eene andere, en veeltijds meer eenvoudige, wijze kan uitdrukken.

§. 47. Onderscheiden wij wederom drie gevallen: 1° *Het deelen van eene éénledige door eene éénledige uitdrukking.* 2° *Het deelen van eene veelledige door eene éénledige uitdrukking.* 3° *Het deelen van eene veelledige uitdrukking door eene veelledige.*

§. 48. I. GEVAL. *Om eene éénledige uitdrukking door eene éénledige te deelen.* Beginnen wij met te onderstellen: dat de deeler een stelkundige factor van het deeltal is. Dit geval is eenvoudig: want, indien $a\,b$ door b moet gedeeld worden, dan is het klaar: dat $\frac{ab}{b} = a$ zal zijn: 1° omdat $b \times a = a\,b$ is, en 2° omdat men, teller en noemer van het gebroken $\frac{ab}{b}$ door b deelende, $\frac{ab}{b} = \frac{a}{1} = a$ verkrijgen zal, zie §. 285 en 275, I. C.

§. 49. Om alle de bijzonderheden van dit geval in één gezigtpunt te vereénigen, zullen wij aantoonen: †† *dat het quotient van twee gedurige producten kan gehouden worden gelijk te zijn aan het product der quotienten, die men verkrijgt, wanneer men de factoren des deeltals genomen in zulk eene rangorde, als men goedvindt, één voor één, door de factoren des deelers, almede in eene willekeurige orde gerangschikt, deelt.* Dat is, bij voorbeeld:

$$\frac{abc}{def} = \frac{a}{d} \times \frac{b}{e} \times \frac{c}{f} = \frac{a}{e} \times \frac{b}{d} \times \frac{c}{f} = \frac{a}{f} \times \frac{b}{e} \times \frac{c}{d} = \text{enz.}$$

op zoo vele verschillende wijzen, als de tellers a, b en c; alsmede de noemers d, e en f, in eene andere rangorde kunnen gerangschikt worden.

Hoezeer deze waarheid uit de multiplicatie der breuken, zie §. 323, I. C., blijkbaar genoeg is, zoo laat ons, om dezelve nog op eene andere wijze te bevestigen, $\frac{a}{d} = p$; $\frac{b}{e} = q$; en $\frac{c}{f} = r$ stellen; dan zal $a = d\,p$; $b = e\,q$; en $c = r\,f$ zijn; vermenigvuldigen wij nu deze drie laatste vergelijkingen met elkander, dan zullen wij vinden: $a\,b\,c = d\,e\,f\,p\,q\,r$, en deze laatste door $d\,e\,f$ deelende, zal men ver-

krij-

krijgen: $\frac{abc}{def} = pqr = \frac{a}{d} \times \frac{b}{e} \times \frac{c}{f}$, alles volgens §§. 504 en 505, I. C. Hetzelfde zal gevonden worden, indien men $\frac{a}{e} = p$; $\frac{b}{d} = q$ en $\frac{c}{f} = r$ ftelt. Een grooter aantal factoren in den deeler of het deeltal zal geen invloed op de algemeenheid dezer ftelling hebben. Stellen wij nu, bij voorbeeld, $a = 15$; $b = 49$; $c = 80$; $d = 3$; $e = 7$ en $f = 5$; dan zal: 1° $\frac{abc}{def} = \frac{15 \times 49 \times 80}{3 \times 7 \times 5} = \frac{58800}{105} = 560$ zijn: maar men vindt ook: $\frac{a}{d} \times \frac{b}{e} \times \frac{c}{f} = \frac{15}{3} \times \frac{49}{7} \times \frac{80}{5} = 5 \times 7 \times 16 = 560$. †† Indien 'er een minder aantal factoren, of letters in den deeler dan in het deeltal voorkomen, blijft het geftelde evenwel waarheid; want, men kan, in plaats der ontbrekende factoren, éénheden ftellen. Aldus zal:

$$\frac{abc}{pq} = \frac{a}{p} \times \frac{b}{q} \times \frac{c}{1} = \frac{a}{p} \times \frac{b}{q} \times c = \frac{c}{p} \times \frac{b}{q} \times a = \text{enz.}$$

§. 50. Deze betoogde waarheid heeft nu vooreerst eene nuttige toepasfing, wanneer de deeler en het deeltal met coefficienten zijn aangedaan: „ *want men zal deze coefficienten* „ *of dadelijk deelen kunnen, of als eene afzonderlijke breuk,* „ *die als coefficient zal voorkomen, kunnen affcheiden.*" Alzoo zal:

$$\frac{15a}{3b} = 5 \times \frac{a}{b};\ \frac{7a}{12b} = \frac{7}{12} \cdot \frac{a}{b};\ \frac{9ab}{3b} = \frac{9}{3} \times \frac{a}{1} \times \frac{b}{b} = 3a \text{ zijn.}$$

§. 51. „ *Wanneer de deeler en het deeltal eener ftelkundige* „ *divifie gemeenfchappelijke factoren hebben, zal men door de* „ *toepasfing van het zoo even betoogde beginfel, of, zoo men* „ *wil, door* §. 258, *I. C. deze gemeenfchappelijke factoren kunnen wegnemen, hetwelk dan ook natuurlijk tot de gelijkflachtige exponentiale uitdrukkingen, welke in den teller en* „ *noemer, of in het deeltal en den deeler, kunnen voorkomen,* „ *moet worden uitgeftrekt, in welk geval de regel* $a^m : a^n = a^{m-n}$ *zal moeten worden toegepast, zie* §. 716, *I. C.*" Zie hier voorbeelden:

$$\frac{15\,abc}{3\,bc} = \frac{15}{3} \times \frac{a}{1} \times \frac{bc}{bc} = 5\,a;\quad \frac{91\,abxyz}{7\,bxy} = 13\,az;$$

$$\frac{117\,a^2 b^2 x^2 z^2}{9\,abx} = 13\,abxz^2;\quad \frac{19\,a^3 b^4 x^5}{3\,ab^3 x^4} = 6\tfrac{1}{3}\,a^2 bx;$$

$$\frac{21\,abxz}{7\,a^2 b^2 z^3} = 3\,a^{-1}\,b^{-1}\,xz^{-2} = \frac{3x}{abz^2};\quad \frac{17\,a^m}{9\,a^n} = 1\tfrac{8}{9}\,a^{m-n}.$$

§. 52. Men kan niet ontkennen: dat deze herleidingen kunnen aangemerkt worden, als te behooren tot de herleiding der breuken onder eenen eenvoudiger vorm: maar men moet hierbij in aanmerking nemen: dat 'er, wegens de algemeenheid van de beteekenis der letters, volſtrekt geen onderſcheid tusſchen de uitgedrukte diviſien en de gebrokens beſtaat, waarom dan ook $\frac{a}{b}$, vergelijk §. 272, I. C. dan eens een geheel, dan wederom een gebruikelijk gebroken kan uitdrukken, naar dat b een evenmatig deel van a, of $a < b$ is.

§. 53. „ *Wat nu de teekens + of — aanbelangt, welke* „ *aan het quotient moeten gegeven worden: deze zijn, raad-* „ *pleeg §. 485, I. C. dezelfde als voor de multiplicatien, en* „ *zijn in de volgende vergelijkingen vervat.*"

$$\frac{+15}{+3} = +5;\quad \frac{-15}{-3} = +5;\quad \frac{+15}{-3} = -5;\quad \frac{-15}{+3} = -5.$$

§. 54. II. GEVAL. *Om eene veelledige uitdrukking door eene éénledige te deelen.* †† Wanneer men §§. 131 en 132, I. C, raadpleegt: dan zal men daaruit duidelijk zien: „ *dat ook, voor ſtelkundige uitdrukkingen, het quotient, dat* „ *men verkrijgt, wanneer men eene veelledige uitdrukking* „ *door eene éénledige deelt, gelijk zal zijn aan de ſom der* „ *particele quotienten, welke ontſtaan, indien men elken* „ *term des deeltals door den deeler deelt: het woord ſom, met* „ *betrekking tot de teekens der termen, in de beteekenis van* „ *§. 19. nemende.*"

§. 55. Hoezeer men daaraan weinig twijfelen zal, zullen wij nogtans deze waarheid uit de eigenſchappen der vergelijkingen betoogen, ten einde wederom eene nieuwe proef van de volmaakte overéénſtemming der beginſelen te geven. Stellen wij dan: dat $a + b - c - d$ door n moet gedeeld worden, en dat $\frac{a}{n} = p$, $\frac{b}{n} = q$, $\frac{-c}{n} =$

 $-r$,

$-r$, en $\frac{-d}{n} = -s$ zij; dan zal:

$$\frac{a+b-c-d}{n} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n} - \frac{c}{n} - \frac{d}{n} = p+q-r-s$$

zijn. Want, uit deze aangenomene vergelijkingen volgt, zie §. 503, I. C. dat $a = np$, $b = nq$, $-c = -nr$, en $-d = -ns$ zal zijn, welke vergelijkingen, indien zij worden opgeteld, geven zullen:

$$a+b-c-d = np+nq-nr-ns$$

zie §. 502, I. C., of wel:

$$a+b-c-d = n(p+q-r-s)$$

en, deelende deze laatste vergelijking door n,

$$\frac{a+b-c-d}{n} = p+q-r-s.$$

Laat, bij voorbeeld, $a = 15$; $b = 17$; $c = 3$; $d = 5$; en $n = 4$; genomen worden; dan is: $a+b-c-d = 24$ en $\frac{a+b-c-d}{n} = \frac{24}{4} = 6$; maar $p+q-r-s = \frac{a}{n} + \frac{b}{n} - \frac{c}{n} - \frac{d}{n} = 3\frac{3}{4} + 4\frac{1}{4} - \frac{3}{4} - 1\frac{1}{4} = 6$ zijnde, wordt hieruit, als eene bijzondere proef, het gestelde opgehelderd en deszelfs waarheid bevestigd.

§. 56. De toepassing van dezen regel is vervat is de volgende voorbeelden:

1°. $\frac{a^2+ab}{a} = \frac{a^2}{a} + \frac{ab}{a} = a+b.$

2°. $\frac{a^4-3a^3b+5a^2b^2}{5a^2} = \frac{a^4}{5a^2} - \frac{3a^3b}{5a^2} + \frac{5a^2b^2}{5a^2} = \frac{1}{5}a^2 - \frac{3}{5}ab + b^2.$

3°. $\frac{17a^2c^2-3abc^2+c^4-x^4}{3ac^2} = 5\frac{2}{3}a - b + \frac{1}{3}.\frac{c^2}{a} - \frac{x^4}{3ac^2}.$

4°. $\frac{12x^2y^2z^2-4x^3yz^2+6y^6}{9xyz} = 1\frac{1}{3}xyz - \frac{4}{9}x^2z + \frac{2}{3}.\frac{y^5}{xz}.$

§. 57. III. Geval. *Om eene veelledige uitdrukking door eene veelledige te deelen.* Gelijk in getallen een zeker getal 161 niet door een ander getal 7 deelbaar is, indien niet het deeltal 161 ontstaan is, door den deeler 7 met een zeker heel getal 23 te vermenigvuldigen, zoo kan ook eene veelledige stelkundige uitdrukking $a^2 - 2ab + b^2$ niet volkomen, zonder overschot, door eene veelledige $a - b$ gedeeld worden, indien het deeltal $a^2 - 2ab + b^2$ niet kan begrepen worden

den ontſtaan te zijn uit de vermenigvuldiging van den deeler $a - b$ met eenige veelledige uitdrukking $a - b$. 'Er komen dan, even, als in het deelen der getallen, twee gevallen voor: 1° de deeler is, ſtelkundig genomen, een evenmatig deel, of 2° hij is een onevenmatig deel van het deeltal (14), of, met andere woorden, 1° de deeling gaat op, of 2° zij gaat

(14) *Stelkundig deelbaar.* Offchoon de ſpreekwijzen: *een getal is door een getal deelbaar*, en, *eene ſtelkundige uitdrukking is door eene ſtelkundige uitdrukking deelbaar*, van dezelfde grondbegrippen afkomſtig zijn, en, in de uitgeſtrektſte algemeenheid van het gebruik der woorden vermenigvuldigen en deelen, gelijk ſtaan, beſtaat 'er nogtans in de bijzondere beteekenis dezer uitdrukkingen een aanmerkelijk verſchil.

1° Een getal 15 is door een getal 3 deelbaar, wanneer het tweede 3 een evenmatig deel van het eerſte 15 is. Zie §. 159, I. C.

2° Eene ſtelkundige uitdrukking $a^2 - b^2$ is door eene andere $a - b$, deelbaar, wanneer de eerſte ontſtaan is uit de vermenigvuldiging van den deeler $a - b$ met eenige uitdrukking $a + b$: doch het is klaarblijkelijk, dat hier het woord deelbaar in eene uitgeſtrektere, en met de bijzondere eigenſchappen der getallen niets gemeens hebbende, beteekenis genomen wordt. Dit zal blijkbaar worden, wanneer wij aan a en b eenige waardijen geven: ſtellen wij: $a = 1$ en $b = \frac{1}{2}$; dan is, $a^2 - b^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, en $a - b = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$: nu kan men in den zin van §. 159, I. C. niet zeggen: dat $\frac{3}{4}$ door $\frac{1}{2}$ deelbaar is: maar ſtelkundig wel; want $\frac{3}{4} \div \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \times \frac{2}{1} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$, welke uitkomst met het ſtelkundig quotient $a + b = 1 + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$ inſtemt.

3° Nog blijkbaarder wordt dit onderſcheid: wanneer, bij hetzelfde voorbeeld blijvende, de deeler eene onmeetbare grootheid uitdrukt. Nemen wij $a = 3$ en $b = \sqrt{3}$; dan is $a^2 - b^2 = 9 - 3 = 6$ en $a - b = 3 - \sqrt{3}$; hier is zelfs eene deeling in getallen volſtrekt onmogelijk: het is de ſtelkunde, die ons leert: dat het quotient door $3 + \sqrt{3}$ kan uitgedrukt worden: en men kan, door eene ſteeds meer begrensde benadering, de waarheid van deze ſtelkundige deeling proefkundig bevestigen; want indien $\sqrt{3} = 1{,}73205$ genomen wordt, zal $3 - \sqrt{3} = 1{,}26795$ zijn, en men zal vinden: $\frac{a^2 - b^2}{a - b} = \frac{6}{1{,}26795} = 4{,}73205 = 3 + \sqrt{3}$. †† Alles wat derhalve ſtelkundig deelbaar is, is daarom in getallen niet deelbaar.

4° De ſtelkundige uitdrukkingen zijn niet altijd deelbaar, wanneer derzelver waardijen, in den zin van §. 159, I. C. deelbaar zijn, zoo als uit $\frac{a + b}{c}$ blijkt, wanneer $a = 1$, $b = 15$ en $c = 2$ genomen wordt.

gaat niet op. Men moet deze twèe gevallen, elk in het bijzonder, wel opzettelijk in overweging nemen; omdat zij, gelijk weldra blijken zal, met de gewigtigfte leerftukken van de analyfis in een naauw verband ftaan. Wanneer men nu in aanmerking neemt: dat de ftelkundige vermenigvuldiging ons betoogd heeft: dat het product, gelijk elk der zámenftellende factoren, naar de opklimmende of afdalende magten van eenige letter als van zelfs geordend is; dan blijkt al ten eerften de onmogelijkheid der ftelkundige deeling, wanneer deze omftandigheid tusfchen den deeler en het deeltal geen plaats heeft, gelijk wanneer $x + y$ door $a + b$ moest gedeeld worden (15): maar zijn deeler en deeltal beide naar de magten van eenige letter geordend, dan ontftaat het vermoeden: dat de deeler, ftelkundiger wijze, een evenmatig deel van het deeltal kan zijn: de regel, welke wij zoo dadelijk zullen voordragen, beflist de deelbaar of niet deelbaarheid, en ontwikkelt, in het laatfte geval, de ftelkundige deeling in eene oneindig voortloopende reeks, welke in meer verhevener befchouwingen van een zeer uitgeftrekt gebruik is.

§. 58. „ *In beide gevallen moeten de deeler en het deeltal „ naar de opklimmende of afdalende magten van dezelfde let- „ ter geordend worden. Zie de uitgewerkte voorbeelden op de „ hier tegen overftaande tabelle* N° II. *Men bepaalt zich bij „ de eerfte termen van den deeler en het deeltal, en deelt, vol- „ gens*

(15) *Men zal $x + y$ niet door $a + b$ kunnen deelen:* dat wil zeggen: niet in dien zin, in welke eene ftelkundige deeling bedoeld wordt: nogtans zal men, om zoo te fpreken, van het quotient alles kunnen maken, wat men wil. Stellen wij, bij voorbeeld, $\frac{x + y}{a + b} = p + q$, dan zal men voor p kunnen aannemen zulk eene waarde als men goedvindt, terwijl alsdan q, door deze waarde, en die van x, y, a en b, zal bepaald zijn.

Immers is $q = -p + \frac{x + y}{a + b} = \frac{x + y - p\,(a + b)}{a + b}$, en men zal gevolgelijk kunnen ftellen:

$$\frac{x + y}{a + b} = p + \frac{x + y - p \times (a + b)}{a + b}$$

deze herleiding is nu wel geene divifie, hoedanige thans bedoeld wordt: nogtans kan dezelve als zoodanig worden aangemerkt.

N°. II. UITGEWERKTE DIVISIEN, *strekkende ter opheldering en beoefening van* §. 58. [Tegen over bladz. 36.]

1. VOORBEELD.

deeler *deeltal* *quotient*

$$
\begin{array}{lrl}
a - b \Big\{ & a^2 - b^2 & \Big\{ a + b \\
* & a^2 - ab & \\
\hline
\textit{rest} & + ab - b^2 & \\
** & + ab - b^2 & \\
\hline
 & \textit{rest} \quad 0 &
\end{array}
$$

2. VOORBEELD.

deeler *deeltal* *quotient*

$$
\begin{array}{lrl}
a - 3b \Big\{ & a^2 - 6ab + 9b^2 & \Big\{ a - 3b \\
 & a^2 - 3ab & \\
\hline
\textit{rest} & - 3ab + 9b^2 & \\
 & - 3ab + 9b^2 & \\
\hline
 & \textit{rest} \quad 0 &
\end{array}
$$

3. VOORBEELD.

deeler *deeltal* *quotient*

$$
\begin{array}{lrl}
a + b \Big\{ & a^3 + b^3 & \Big\{ a^2 - ab + b^2 \\
* & a^3 + a^2 b & \\
\hline
\textit{rest} & - a^2 b + b^3 & \\
** & - a^2 b - ab^2 & \\
\hline
\textit{rest} & + ab^2 + b^3 & \\
** & + ab^2 + b^3 & \\
\hline
 & \textit{rest} \quad 0 &
\end{array}
$$

4. VOORBEELD.

deeler *deeltal* *quotient*

$$
\begin{array}{lrl}
a - 2b - 3c \Big\{ & a^3 - 6a^2 b + 12ab^2 - 8b^3 - 27c^3 & \Big\{ a^2 - 4ab + 4b^2 + 3ac - 6bc + 9c^2 \\
 & a^3 - 2a^2 b - 3a^2 c & \\
\hline
 & - 4a^2 b + 12ab^2 + 3a^2 c - 8b^3 - 27c^3 & \\
 & - 4a^2 b + 8ab^2 + 12abc & \\
\hline
 & + 4ab^2 - 8b^3 + 3a^2 c - 12abc - 27c^3 & \\
 & + 4ab^2 - 8b^3 - 12b^2 c & \\
\hline
 & + 3a^2 c - 12abc + 12b^2 c - 27c^3 & \\
 & + 3a^2 c - 6abc - 9ac^2 & \\
\hline
 & - 6abc + 12b^2 c + 9ac^2 - 27c^3 & \\
 & - 6abc + 12b^2 c + 18bc^2 & \\
\hline
 & + 9ac^2 - 18bc^2 - 27c^3 & \\
 & + 9ac^2 - 18bc^2 - 27c^3 & \\
\hline
 & \textit{rest} \quad 0 &
\end{array}
$$

VERKLARING *van de bewerking van* VOORBEELD 4.

Men vrage: hoe menigmaal is a begrepen op a^3? komt a^2, voor het eerste gedeelte des quotients: nu vermenigvuldige men den deeler $a - 2b - 3c$ met dit eerste gedeelte a^2, komt voor het product $a^3 - 2a^2 b - 3a^2 c$, dit stelle men onder het deeltal, om hetzelve daarvan aftetrekken. Men houdt, na de aftrekking, $- 4a^2 b + 12ab^2 + 3a^2 c - 8b^3 - 27c^3$ over. Men drage zorg, om altijd de termen van elk nieuw overschot, naar de afdalende magten van den eersten term a, des deelers, te ordenen.

Men vrage: hoeveelmaal is a op $-4a^2 b$ begrepen? komt $-4ab$ maal. Men multiplicere den deeler met dit tweede gedeelte des quotients, en men trekke het product $-4a^2 b + 8ab^2 + 12abc$ van de eerste rest af, komt $4ab^2 - 8b^3 + 3a^2 c - 12abc - 27c^3$.

Men ga, om de overige deelen van het quotient te vinden, op dezelfde wijze te werk.

VOORBEELDEN, *ter beoefening van de* DIVISIE *der stelkundige uitdrukkingen.*

1° *Divideer* $9a^2 - 12ab + 4b^2 - x^2$ *door* $3a - 2b + x$? *komt:* $3a - 2b - x$.

2° *Divideer* $x^6 + x^4 y^2 - x^2 y^4 - y^6$ *door* $x^3 + x^2 y + x y^2 + y^3$? *komt:* $x^3 - x^2 y + x y^2 - y^3$.

3° *Divideer* $- y^3 - a^3 - 3a^2 b - 3ab^2 - b^3$ *door* $y + a + b$? *komt* $- y^2 + ay + by - a^2 - 2ab - b^2$.

4° *Divideer* $x^2 + 6xy - 6xz - 18yz + 9y^2 + 9z^2 - 144$ *door* $- 12 - 3z + 3y + x$? *komt* $x + 3y - 3z + 12$.

NB. Behalve de uitwerking dezer voorbeelden, zal men zich in de divisie der stelkundige uitdrukking oefenen kunnen, door de producten van de 12, 13, 14, 15 en 16, der uitgewerkte voorbeelden van de tabelle N° 1. door den vermenigvudiger te deelen, en door de 9 laatste der opgegevene voorbeelden, op de tegenzijde dezer tabelle geplaatst, op dezelfde wijze, te behandelen.

ONTWIKKELING *van stelkundige Breuken in oneindig voortloopende wederkeerige Reeksen.*

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 - x^7 + x^8 - \text{enz.}$$

$$\frac{1}{(1+x)^2} = \frac{1}{1+2x+x^2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 - 6x^5 + 7x^6 - \text{enz.}$$

$$\frac{1}{(1+x)^3} = \frac{1}{1+3x+3x^2+x^3} = 1 - 3x + 6x^2 - 10x^3 + 15x^4 - 21x^5 + 28x^6 - \text{enz.}$$

$$\frac{1+3x+3x^2}{1+x-2x^2-2x^3} = 1 + 2x + 3x^2 + 3x^2 + 7x^4 + 5x^5 + 15x^6 + 9x^7 + 31x^3 + 17x^9 + \text{enz.}$$

$$\frac{16-67x}{1-5x+x^2} = 16 + 13x + 49x^2 + 232x^3 + 1111x^4 + 5323x^5 + \text{enz.}$$

$$\frac{1+2z}{1-z-z^2} = 1 + 3z + 4z^2 + 7z^3 + 11z^4 + 18z^5 + 29z^6 + 47z^7 + \text{enz.}$$

$$\frac{1}{1-z-z^2+z^3} = 1 + z + 2z^2 + 2z^3 + 3z^4 + 3z^5 + 4z^6 + 4z^7 + \text{enz.}$$

$$\frac{1+3x+2x^2}{1+x-2x^2-2x^3} = 1 + 2x + 2x^2 + 4x^3 + 4x^4 + 8x^5 + 8x^6 + 16x^7 + 16x^8 + \text{enz.}$$

Deze ontwikkelingen kunnen, in de eerste plaats, ter verdere beoefening der deeling strekken, en zullen in het vervolg dienen, om proefkundig aantetoonen, hoe de bijzondere leerwijze der wederkeerige reeksen, op eene eenvoudige wijze, dezelfde uitkomsten als de dadelijke deeling oplevert. Men raadplege hetgeen, wegens deze reeksen, in de LXVII Les, *pag.* 447, en verv. zal gezegd worden.

„ *gens het eerſte geval, den eerſten term van het deeltal door „ den eerſten term van den deeler: het komende quotient merkt „ men aan als een gedeelte van het gezogte, vermenigvuldigt „ den deeler met hetzelve, en trekt het komende product van „ van het deeltal af, wel in acht nemende, de termen van „ het verſchil, naar de magten van dezelfde letter, en op de„ zelfde wijze, als het deeltal, te rangſchikken. Het verſchil „ merkt men aan als een nieuw deeltal, hetwelk men vervol„ gens op dezelfde wijze behandelt.*"

§. 59. Volgens dezen regel, †† is de ſtelkundige deeling eene trapswijze ontwikkeling van het quotient, gelijk de diviſie der geheele getallen in eene trapswijze benadering van het quotient beſtaat. Wij hebben de voorbeelden, ter toepasſing van dezen regel ſtrekkende, op de voorſte zijde van Tabelle II. geplaatst: het inzien dezer uitwerkingen, gevoegd bij de volgende verklaring, zal den lezer in ſtaat ſtellen, om deze bewerking zich eigen te maken.

VERKLARING. In het 1. voorbeeld, moet $a^2 - b^2$ door $a - b$ gedeeld worden. Men ſchrijft, even als of men getallen deelde; den deeler vooraan, en achter hetzelve het deeltal, eene plaats voor het quotient latende: deeler en deeltal zijn beide, zie §. 44, naar de afdalende magten van a geordend. Men vrage nu: hoe menigmaal is de eerſte term a des deelers op den eerſten term a^2 des deeltals begrepen? men vindt volgens §. 51, a maal: deze a wordt als de eerſte term des quotients aangezien, en in de plaats, voor het quotient beſtemd, geſchreven: men vermenigvuldige nu den deeler $a - b$ met den eerſten term des quotients a, en trekt het komende product $a^2 - ab$, (in de bewerking met * geteekend,) af van het deeltal $a^2 - b^2$, en de rest is $ab - b^2$: dit is de eerſte benadering: het is uit dezelve blijkbaar, dat men ſchrijven kan:

$$\frac{a^2 - b^2}{a - b} = a + \frac{ab - b^2}{a - b}$$

Men beſchouwe nu $ab - b^2$ als een nieuw deeltal en vrage: hoe menigmaal is de eerſte term a des deelers op den eerſten term ab des deeltals begrepen? (*men moet zich namelijk bij elke nieuwe deeling bij de eerſte termen van den deeler en het deeltal bepalen*,) men vindt b malen: deze b is nu de tweede term van het quotient, en daar $a - b$ vermenigvuldigd met b gelijk is aan $ab - b^2$, blijkt hieruit: dat de deeling juist opgaat en het begeerde quotient volkomen aan $a + b$ gelijk is.

Op dezelfde wijze zal het blijken: dat ook, in de andere voorbeelden, de deeling eene trapswijze ontwikkeling van het quotient is. Aldus is in het tweede voorbeeld:

$$\frac{a^2 - 6ab + 9b^2}{a - 3b} = a + \frac{-3ab + 9b^2}{a - 3b} = a - 3b$$

en in het derde voorbeeld,

$$\frac{a^3 + b^3}{a + b} = a^2 + \frac{-a^2 b + b^3}{a + b} = a^2 - ab + \frac{ab^2 + b^3}{a + b} = a^2 - ab + b^2$$

§. 60. Wij kunnen niet voorbij, om den leerling bij deze gelegenheid te doen opmerken: dat de ſtelkundige diviſie ons, onder anderen, deze twee gewigtige waarheden leert:

1° †† *De ſom van twee gelijkſlachtige onevene magten* $x^{2n+1} + y^{2n+1}$, *(n een zeker geheel getal zijnde,) is altijd door de ſom van derzelver wortelen deelbaar: en het quotient, dat uit* $2n+1$ *termen beſtaat, is van den vorm* $x^{2n} - x^{2n-1}y - x^{2n-2}y^2 +$ *enz.* $- xy^{2n-1} + y^{2n}$*: zijnde de laatſte term altijd poſitief, en op één na de laatſte negatief, het zij n een even of oneven getal is.* De ſom van twee gelijkſlachtige evene magten is, op deze wijze, door de ſom van derzelver wortels niet deelbaar.

2° †† *Het verſchil van twee gelijkſlachtige magten, het zij evene of onevene, is altijd door het verſchil der wortels deelbaar, aldus is:*

$$\frac{x^n - y^n}{x - y} = x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \text{enz.} + x^2 y^{n-3} + xy^{n-2} + y^{n-1}$$

welke waarheden van een nuttig en uitgeſtrekt gebruik zijn.

§. 61. Wanneer de deelingen niet opgaan, dan maakt men, even als in getallen, zie §. 141, I. C. het overſchot tot den teller van eene breuk, waarvan de deeler de noemer is, bij voorbeeld:

$$\frac{x^2 - 3x + 3}{x - 2} = x - 1 + \frac{1}{x - 2}$$

$$\frac{a^2 + b^2}{a + b} = a - b + \frac{2b^2}{a - b}$$

§. 62. †† Men kan echter de gebrokens, uit de laatſte overſchotten der deeling ontſtaande, [* een overſchot is nu het laatſte, wanneer alle de termen van het deeltal in rekening gekomen zijn,] op eene wijze, welke in allen opzigte aan de ontwikkeling van eene gewone in eene tiendelige breuk gelijkvormig is, (zie §. 378 en §. 381, I. C.) in eene on-

onbepaalde voortloopende reeks van termen ontwikkelen. Stellen wij, bij voorbeeld, dat $-3x^3+5x^2-19x+18$ door $-x+1$ moet gedeeld worden? dan zullen wij, deze deeling uitwerkende,

$$\begin{array}{llll}
\textit{deeler} & \textit{deeltal} & & \textit{quotient} \\
-x+1 & \left\{\begin{array}{l} -3x^3+5x^2-19x+18 \\ \underline{-3x^3+3x^2} \end{array}\right. & & \left\{ +3x^2-2x+17+\dfrac{1}{-x+1} \right. \\
 & \quad +2x^2-19x & & \\
 & \quad \underline{+2x^2-\ \ 2x} & & \\
 & \qquad -17x+18 & & \\
 & \qquad \underline{-17x+17} & & \\
 & \qquad\qquad +1. \ \textit{laatste overschot der deeling.} & &
\end{array}$$

voor het ware quotient $3x^2-2x+17+\frac{1}{-x+1}$ verkrijgen, in hetwelk $3x^2-2x+17$, als het geheel, en $\frac{1}{-x+1}$ als het gebroken moet aangemerkt worden: maar men zal de deeling verder kunnen voortzetten, en daardoor het gebroken $1:-x+1$ in de termen eener onbepaald voortloopende reeks kunnen ontwikkelen, en deze ontwikkeling zal op twee onderscheidene wijzen kunnen worden uitgevoerd: want, vragen wij, altijd dezelfde bewerking herhalende, hoeveelmaal is $-x$ op $+1$ begrepen? dan verkrijgen wij $-\frac{1}{x}$ voor het quotient; vermenigvuldigen wij dan den deeler $-x+1$ met dit quotient, en trekken wij het product $1-\frac{1}{x}$ van het deeltal 1 af, dan zal de rest dezer nieuwe deeling $+\frac{1}{x}$ zijn: men zal dus voor het totale of naauwkeurige quotient stellen kunnen:

$$3x^2-2x+17-\frac{1}{x}+\frac{1:x}{-x+1}$$

wederom, vragende: hoeveelmaal is $-x$ op $\frac{1}{x}$ begrepen? zal men, zie §. 349, I. C., voor het quotient vinden $-\frac{1}{x^2}$:

 en,

en, wanneer men den deeler $-x+1$ met dit quotient vermenigvuldigt, en het komende product van het deeltal aftrekt, zal de rest der deeling $+\frac{1}{x^2}$ zijn, en het totale naauwkeurige quotient zal door

$$3x^2-2x+17-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1:x^2}{-x+1}$$

worden uitgedrukt. Men zal, dit laatste gebroken op dezelfde wijze ontwikkelende, vinden:

$$3x^2-2x+17-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}+\frac{1:x^3}{-x+1}$$

welke laatste, op nieuw ontwikkeld zijnde, geven zal:

$$3x^2-2x+17-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^4}+\frac{1:x^4}{-x+1}$$

§. 63. Men zal zich door voor x eene zekere waarde aan te nemen, proefmatig kunnen overtuigen, dat alle deze voor het quotient verkregene uitdrukkingen naauwkeurig zijn. †† Het blijkt intusschen uit den regelmatigen voortgang der ontwikkeling: 1° dat elke nieuwe term van het quotient van den vorm $\frac{1}{x^n}$ zal zijn; 2° dat overal het quotient en de rest der deeling, op de teekens na, gelijk zal zijn; en 3° dat, vermits het product altijd eenen term meer dan het deeltal bevat: die deeling, hoe onbegrijpelijk ver zij ook mogte worden voortgezet, nimmer zal opgaan.

§. 64. Wij verkrijgen dan, voor het quotient de oneindig voortloopende reeks:

$$+3x^2-2x+17-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^5}-\frac{1}{x^6}-\textit{enz.}$$
$$-\frac{1}{x^{n-2}}-\frac{1}{x^{n-1}}-\frac{1}{x^n}+\frac{1:x^n}{-x+1}$$

omtrent, welke moet aangemerkt worden: 1° dat zij, wanneer men het laatste gebroken, waar voor men ook schrijven kan $\frac{1}{x^n(1-x)}$, mederekent, naauwkeurig de waarde van het quotient uitdrukt; 2° dat de termen dezer reeks steeds kleiner zullen worden, wanneer $x>1$ is, en, steeds grooter,

ter, wanneer $x < 1$ is. * De reeks wordt gezegd: in het eerste geval, te *convergeren* of *zamenteloopen:* dat wil zeggen: dat de som van een grooter aantal van derzelver termen nader komt aan de waarde van de breuk, waaruit zij is afgeleid; en in het tweede geval te *divergeren:* dat wil zeggen, dat de som van een grooter aantal termen steeds verder van de waarde der breuk zal afwijken.

§. 65. Maar het gebroken $\frac{1}{-x+1}$ kan nog op eene andere wijze ontwikkeld worden. Men weet: dat de verplaatsing van de termen eener uitdrukking in derzelver waarde geene verandering maakt: men zal gevolgelijk in plaats van $-x+1$ stellen kunnen $1-x$; zulks doende zal men voor de ontwikkeling van het gebroken $\frac{1}{1-x}$, vinden:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + \frac{x}{1-x} = 1 + x + \frac{x^2}{1-x} = 1+x+x^2+\frac{x^3}{1-x} = enz.$$

en, in het algemeen:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + enz. + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x} \quad (16).$$

§. 66.

(16) Uit deze uitdrukking volgt, wanneer men den term $\frac{x^{n+1}}{1-x}$ uit het achterste in het voorste lid overbrengt:

$$\frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x} = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{x^{n+1}-1}{x-1} = 1 + x + x^2 + enz. + x^n$$

en deze vergelijking met a vermenigvuldigende

$$a \times \frac{x^{n+1}-1}{x-1} = a + ax + ax^2 + ax^3 + enz. + ax^n$$

of, in plaats van $n+1$ stellende n, de vergelijking

$$a \times \frac{x^n-1}{x-1} = a + ax + ax^2 + ax^3 + enz. + ax^{n-1}$$

Deze is dezelfde vergelijking of formule, welke wij §. 838, pag. 448, I. C. voor de som van n termen der meetkunstige reeks a, ax, ax^2, uit andere beginselen hebben afgeleid.

Stellen wij x kleiner dan 1, en gelijk $\frac{1}{r}$, (r altijd een geheel getal grooter dan één zijnde;) dan zal $\frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-1:r} = \frac{r}{r-1} = 1 +$

§. 66. Dit quotient verſchilt in deszelfs vorm aanmerkelijk van het eerſte, namelijk van

$$\frac{1}{-x+1}=-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}-enz.-\frac{1}{x^n}+\frac{1:x^n}{-x+1}$$

dan, hoezeer deze vormen onderſcheiden zijn, hebben nogtans deze uitdrukkingen dezelfde waarde, hetgeen bij de proef blijken zal, indien men voor x eene zekere waarde, bij voorbeeld, $x=4$ aanneemt; want dan zal men vinden:

$$\frac{1}{-x+1}=-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1:x^2}{-x+1}=-\frac{1}{4}-\frac{1}{16}+\frac{1:16}{-3}=-\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\frac{x^3}{1-x}=1+4+16+\frac{64}{-3}=-\frac{1}{3}$$

en diezelfde gelijkheid van waarde zal, voor elke waarde van x, en elke bijzondere meer of mindere ontwikkeling, welke men in de eene of andere onderſtelling aan $\frac{1}{1-x}$ zal gegeven hebben, beſtendig blijven beſtaan.

§. 67.

$\frac{1}{r}+\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r^3}+\frac{1}{r^4}+enz.+\frac{1}{r^n}+\frac{1}{r^n(r-1)}$ worden: het laatſte gebroken zal alzoo ſteeds kleiner zijn, naar mate n grooter wordt en verdwijnen, wanneer n oneindig groot wordt: men zal gevolgelijk hebben:

$$\frac{r}{r-1}=1+\frac{1}{r}+\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r^3}+\frac{1}{r^4}+enz.$$

en aan beide zijden 1 aftrekkende

$$\frac{1}{r-1}=\frac{1}{r}+\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r^3}+\frac{1}{r^4}+enz.$$

Hoeveel termen men nu van de reeks $\frac{1}{r}+\frac{1}{r^2}$ neme, derzelver ſom zal altijd minder dan $\frac{1}{r-1}$ zijn; doch hoe meer genomen worden, des te nader zal derzelver ſom aan $\frac{1}{r-1}$ komen: men zal dus $\frac{1}{r-1}$ als de limiet van de ſom van de termen der afdalende meetkunſtige reeks kunnen aanmerken, en het is in dezen zin, dat deze en ſoortgelijke vergelijkingen moeten verſtaan worden.

Stellen wij $r=10$, dan is:

$$\frac{1}{9}=\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\frac{1}{10^4}+nz.=0,(1)$$

vergelijk §. 385, I. C.

§. 67. Ten opzigte van de laatste ontwikkeling, moet men aanmerken: dat, wanneer $x < 1$ is de reeks convergeert; maar integendeel divergeert, wanneer $x > 1$ is, juist het genstelde van hetgeen in de eerste reeks plaats heeft.

§. 68. Men kan alle stelkundige breuken, welker tellers en noemers, naar de opklimmende of afdalende magten van eenige grootheid x, (die men als veranderlijk kan aanmerken,) geordend zijn, door divisie, in eene onbepaald voortloopende reeks herleiden, en deze herleiding kan op twee onderscheidene wijzen plaats hebben. 1° Wanneer men den deeler en het deeltal, (teller en noemer,) naar de opklimmende magten van de veranderlijke grootheid x ordent: in dit geval, zullen ook de termen der reeks naar de opklimmende magten van de veranderlijke grootheid x geordend en van den vorm $p\,x^n$ zijn, (n een geheel getal zijnde.) 2° Zal men den deeler en het deeltal beide naar de afdalende magten der veranderlijke grootheid x kunnen rangschikken: in dit geval, zal de ontwikkelde reeks naar de opklimmende negatieve magten, hetgeen men ook noemen kan, naar de afdalende magten van x, geordend en van den vorm $\frac{p}{x^n}$ of px^{-n} zijn.

Stellen wij, bij voorbeeld, het gebroken $\frac{1+3x+x^2}{1+2x+2x^2+x^3}$.

Indien men het gebroken, zoo als de termen van deszelfs teller en noemer, naar de opklimmende magten van x, geordend zijn, ontwikkelt, vindt men:

$$\frac{1+3x+x^2}{1+2x+2x^2+x^3} = 1 + x - 3x^2 + 3x^3 - x^4 - x^5 + x^6 + x^7 - \frac{3x^8+3x^9+x^{10}}{1+2x+2x^2+x^3} \;\ldots\ldots\ldots \quad (A)$$

maar, wanneer men hetzelve naar de afdalende magten van x ordent, en in dien toestand, door divisie, in eene reeks ontwikkelt, zal men vinden:

$$\frac{x^2+3x+1}{x^3+2x^2+2x+1} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x^3} + \frac{3}{x^4} - \frac{1}{x^5} - \frac{1}{x^6} + \frac{1}{x^7} + \frac{1}{x^8} - \frac{3x^{-8}+3x^{-9}+x^{-10}}{x^3+2x^2+2x+1} \;\ldots \quad (B)$$

§. 69. Deze ontwikkeling der stelkundige breuken in onbepaaldd voortloopende reeksen, is vooral in de Integraal Rekening, van zeer veel gewigt, en hoezeer dezelve door andere, en in zeker opzigt geschiktere, handelwijzen kunnen worden daargesteld, hebben wij nogtans

tans op de tegenzijde van Tabelle N° II. daarvan een goed aantal voorbeelden gegeven. De tweeledige ontwikkeling, waarvoor elk gebroken vatbaar is, maakt, dat men dien vorm kan uitkiezen, welke de ontwikkelde reeks het meest doet convergeren.

§. 70. Het is bekend: dat in getallen de deeler, met het quotient eener divisie vermenigvuldigd, en bij dit product de rest der deeling opgeteld zijnde, deze som het deeltal moet voortbrengen: in de deeling der stelkundige uitdrukkingen is de zaak op dezelfde wijze gelegen. Passen wij nu dit beginsel toe op de reeks (*A*) van §. 68, en vermenigvuldigen wij het quotient $1 + x - 3x^2 +$ enz. met den deeler, dan zal men, zie onderstaande bewerking,

$$\begin{array}{l}
1 + x - 3x^2 + 3x^3 - x^4 - x^5 + x^6 + x^7 \\
1 + 2x + 2x^2 + x^3 \\
\hline
1 + x - 3x^2 + 3x^3 - x^4 - x^5 + x^6 + x^7 \\
\quad + 2x + 2x^2 - 6x^3 + 6x^4 - 2x^5 - 2x^6 + 2x^7 + 2x^8 \\
\qquad + 2x^2 + 2x^3 - 6x^4 + 6x^5 - 2x^6 - 2x^7 + 2x^8 + 2x^9 \\
\qquad\quad + x^3 + x^4 - 3x^5 + 3x^6 - x^7 - x^8 + x^9 + x^{10} \\
\textit{rest der laatste deeling} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; - 3x^8 - 3x^9 - x^{10} \\
\hline
1 + 3x + x^2 \; \textit{product gelijk het deeltal.}
\end{array}$$

vinden: dat door deze multiplicatie het deeltal of den teller weder worde voortgebragt: maar zulks kan nu niet geschieden, ten zij alle de verticale kolommen, (in ons geval, van de vierde kolom af en mede gerekend,) zoodanige termen bevatten, welker som overal gelijk *nul* is; zoo als men dan ook indedaad zal bevinden plaats te hebben, zelfs al ware de reeks door divisie tot verscheidene millioenen termen voortgezet geworden. Maar hoe zijn nu de termen van elke verticale kolom in de multiplicatie gevormd geworden? Beginnen wij, om zulks te verklaren, bij de vierde. De eerste term $+ 3x^3$ is het product van den vierden term der reeks met den eersten van den deeler; de tweede term $- 6x^3$ is het product van den derden term der reeks met den tweeden term des deelers; de derde term $+ 2x^3$ is het product van den tweeden term der reeks met den derden term des deelers; en de vierde term $+ x^3$ is het product van den eersten term der reeks met den vierden term des deelers. Hieruit blijkt dan ten klaarste: †† dat, wanneer men de vier eerste termen der reeks in rangorde uitschrijft, en onder dezelve de termen des deelers, in eene omgekeerde orde, en voords de onder elkander staande termen vermenigvuldigt, de producten de termen der vierde kolom geven zullen:

ter-

termen der reeks	$1 \ldots$	$+ x \ldots$	$- 3x^2 \ldots$	$+ 3x^3$
termen des deelers	$x^3 \;..$	$+ 2x^2 \;..$	$+ 2x \ldots$	$+ 1$
producten ...	$+ x^3 \;..$	$+ 2x^3 \;..$	$- 6x^3 \ldots$	$+ 3x^3$

welker ſom, zoo als wij bij de proef gezien hebben, en hetgeen ook noodzakelijk zoo zijn moet, gelijk nul is. Voor de vijfde, zesde en volgende kolommen zal hetzelfde plaats hebben. Hieruit volgt dus:

§. 71. †† *Dat eene reeks, welke uit de ontwikkeling van een ſtelkundig gebroken door diviſie geboren wordt, de merkwaardige eigenſchap hebben moet, dat, wanneer men, van den eerſten term afterekenen, en voorts de geheele reeks door, tot in het oneindige, even zoo vele op elkander volgende termen in rangorde neemt, als 'er termen in den noemer der ontwikkelde breuk voorkomen, en men voorts alle deze termen, in hunne natuurlijke rangorde met de termen van den noemer der gegevene breuk, maar in eene omgekeerde rangorde genomen, vermenigvuldigt, daarbij op de teekens behoorlijk acht gevende, de ſom dezer producten altijd gelijk nul zal moeten zijn.*

§. 72. †† En hierdoor zal men, wanneer een genoegzaam aantal termen der reeks door diviſie is bekend geworden, de volgende zeer gemakkelijk kunnen vinden. Laten wij, daar alles op het vinden der coefficienten aankomt, de coefficient van x^8 gelijk p ſtellen, dan zal men:

$$-1,\ +1,\ +1,\quad p$$

respectievelijk met

$$+1,\ +2,\ +2,\ +1$$

moeten vermenigvuldigen, en de ſom der producten gelijk o ſtellen, en wij zullen alzoo verkrijgen de vergelijking:

$$-1+2+2+p=0$$

en $p = -3$: wederom de coefficient van $x^9 = q$ ſtellende, zal $+1+2-6+q=0$ en $q=+3$ zijn, enz., en men zal alzoo gemakkelijker, dan door de deeling, de volgende termen der reeks kunnen vinden.

§. 73. * *Reekſen, welke, gelijk die van (A) en (B), de eigenſchap hebben: dat een zeker aantal van derzelver op elkander volgende termen, elk in het bijzonder, met zekere grootheden vermenigvuldigd zijnde, de ſom van derzelver producten altijd gelijk nul is, worden wederkeerige reekſen,*

(ſe-

(ſeries recurrentes,) *genoemd.* * *De grootheden waarmede die op elkander volgende termen vermenigvuldigd worden, noemt men de ſchaal van de onderlinge overëénkomst der termen,* (ſcala relationis). †† De meetkunſtige reekſen zijn onder de wederkeerige reekſen die van de eenvoudigſte ſoort. In het vervolg zal de beſchouwing van de eigenſchappen dezer reekſen verder worden voortgezet.

VIER- EN- VEERTIGSTE LES.

Over de ſtelkundige Breuken in het gemeen.

§. 74. * *Door ſtelkundige breuken verſtaat men alle uitdrukkingen van den vorm* $\frac{a}{b}$, *het zij a en b éénledige of veelledige uitdrukkingen zijn.* †† Elke uitgedrukte diviſie kan, zie §. 52, als eene ſtelkundige breuk worden aangemerkt.

§. 75. Omdat in eene ſtelkundige uitdrukking $\frac{a}{b}$ de letters a en b alle waarden hebben kunnen, zijn in deze ſtelkundige breuk, gelijk in alle andere, hoe zamengeſteld derzelver teller en noemer zijn moge, alle die bijzondere ſoorten van breuken begrepen, welke §. 273–§. 279, I. C. zijn opgeteld, en moeten dus gehouden worden alle de hoofdeigenſchappen der breuken, in de XIX. *Les*, §. 281, *et ſeq.* I. C., verklaard, met elkander gemeen te hebben.

§. 76. De voornaamſte dezer hoofdeigenſchappen zijn in §. 284 en §. 285, I. C., omſtandig genoeg verklaard en betoogd: zij zijn begrepen in de volgende vergelijking:

$$\frac{a}{b} = \frac{an}{bn} = \frac{a:n}{b:n}$$

welke, omdat wij daar ter plaatſe gezien hebben: dat zij voor alle waardijen van a, b en n geldt, ook gelden zal voor alle ſoorten van ſtelkundige uitdrukkingen, welke men in plaats van a, b en n zou willen ſtellen, daar deze altijd zekere getallen uitdrukken.

§. 77. * Alle één- en veelledige uitdrukkingen van den vorm

vorm axy, $\frac{3}{4}by^2$, $9a - 6b$, $1\frac{1}{2}a^2 - \frac{3}{4}ab$ worden, al is het ook, dat sommige van derzelver coefficienten gebrokene getallen zijn, in vergelijking van de uitdrukkingen $\frac{a}{b}$, $\frac{2x}{3y}$, enz., welke stelkundige gebrokens heeten, *stelkundige geheelen* genoemd. †† Nogtans moet men aanmerken: dat, wegens de algemeenheid van de waarde der zamenstellende grootheden, de waarde van zulk eene geheele stelkundige uitdrukking een eigenlijk gezegd gebroken zijn kan, terwijl de waarde van eene stelkundige breuk, (gelijk, bij voorbeeld, wanneer in $\frac{a}{b}$, de teller $a = 6$, en de noemer $b = 2$ is,) een geheel getal kan zijn. * *Zamengestelde* of *gemengde uitdrukkingen* zijn zoodanige, welker termen gedeeltelijk geheele, gedeeltelijk stelkundige breuken zijn; zoo als, bij voorbeeld, $a + \frac{b}{c}$, $-3x + \frac{7y}{a-b}$, enz.

§. 78. Volgen wij nu de herleidingen, welke in §. 287, *et seq.* I. C. zijn opgegeven, dan zal het blijken:

1° „ *Dat*, zie §. 287, *elke geheele stelkundige uitdruk-„ king onder den vorm van een gebroken zal kunnen worden „ voorgesteld, door de éénheid voor den noemer aantenemen.*" Aldus zal

$$a = \frac{a}{1} \text{ zijn; } a^2 - 2ab = \frac{a^2 - 2ab}{1} \text{ en } \frac{a}{b} = \frac{a:b}{1} \text{ zijn.}$$

2° „ *Dat men elk geheel tot een gebroken zal kunnen her-„ leiden, dat eenen gegevenen noemer heeft, door dit geheel „ met dien noemer te vermenigvuldigen, en het product voor „ den teller der breuk aantenemen.*" Raadpleeg §. 288, I. C. Aldus zal

$$a = \frac{ar}{r} \text{ zijn, en } 3a - b = \frac{3a^2 + 2ab - b^2}{a+b} \text{ zijn.}$$

3° „ *Dat men elk gebroken, indien het mogelijk is, tot „ eene gemengde uitdrukking zal kunnen herleiden?*" Vergelijk §. 61. Aldus zal

$$\frac{x^2 - 3x + 4}{x - 3} = x + \frac{4}{x - 3}$$

$$\frac{a^2 - ab + b^2}{a - 3b} = a + 2b + \frac{7b^2}{a - 3b}$$

4° „ *Dat men elke zamengestelde uitdrukking, uit een geheel en gebroken bestaande, tot eene stelkundige breuk zal kunnen herleiden, door het geheel met den noemer der breuk te vermenigvuldigen, en bij het product den teller optetellen.*" Vergelijk §. 290. I. C. Alzoo zal

$$3a + \frac{b}{2c} = \frac{6ac + b}{2c} \text{ zijn, en } 7x - \frac{2a^2}{3y} = \frac{21xy - 2a^2}{3y}$$

en al verder,

$$3a - 2b + \frac{10ab + 3b^2}{a - 3b} = \frac{3a^2 - ab + 9b^2}{a - 3b}, \text{ enz.}$$

§. 79. Het is, even als in bepaalde getallen, van veel belang, de stelkundige gebrokens tot hunnen eenvoudigsten vorm te herleiden: †† zulks kan nu, wanneer de tellers en noemers éénledige en daarenboven gelijkslachtige uitdrukkingen zijn, altijd plaats hebben: „ *men deelt teller en noemer door de gemeenschappelijke factoren, welke in dezelve voorkomen, en, in de éénledige stelkundige uitdrukkingen, van zelfs in het oog loopen.*" Vergelijk §. 291, I. C. met §. 51, hier boven. Aldus is

$$\frac{ab}{b^2} = \frac{a}{b};\quad \frac{3ax^2y}{6bx^3y^2} = \frac{a}{2bxy};\quad \frac{161a^2b^2x^3y}{49a^3bxy^4} = \frac{23bx^2}{7ay^3}.$$

§. 80. Somtijds zijn, of de teller of de noemer, of wel beide veelledige uitdrukkingen, welker termen onderling gelijkslachtig zijn: „ *in dit geval kan men beide door den gemeenschappelijken factor deelen, en het gebroken tot eenen eenvoudiger vorm herleiden.*" Bij voorbeeld:

$$\frac{9axyz - 18by^2z}{21axyz} = \frac{3ax - 6by}{7ax}$$

$$\frac{48a^2b^5}{64ab^6 - 80a^2b^5 + 96a^3b^4} = \frac{3ab^4}{4b^5 - 5ab^4 + 6a^2b^3}$$

$$\frac{17a(x+y)^2 - 19b^2(x+y)}{3b(x+y) + 4(x+y)^2} = \frac{17a(x+y) - 19b^2}{3b + 4(x+y)}.$$

§. 81. Zoo gemakkelijk gaat het niet, wanneer de tellers en noemers veelledige uitdrukkingen van den vorm $ax^n +$

bx^{n-1}

$b x^{n-1} + c x^{n-2} + d x^{n-3} +$ enz. zijn: het is mogelijk, dat dezelve eenen gemeenschappelijken factor van den vorm $px^r + q x^{r-1} + s x^{r-2} +$ enz. hebben, ($n > r$ zijnde,) en zulks brengt ons tot het vraagstuk: *om te onderzoeken, of twee stelkundige uitdrukkingen van dien vorm eenen gemeenen deeler of gemeenschappelijken factor hebben?* welks oplossing, behalve in het verkleinen der stelkundige breuken, in alle de deelen der wiskunde van het grootste gewigt is, en hetwelk, daar wij deszelfs oplossing voor het tegenwoordige onderstellen, in de XLVII *Les* opzettelijk, in alle deszelfs bijzonderheden, zal opgelost worden. Intusschen kunnen de volgende voorbeelden dit geval ophelderen.

$$\frac{a^2 - b^2}{(a+b)^2} = \frac{a-b}{a+b}; \quad \frac{a^3 + b^3}{a^2 - b^2} = \frac{a^2 - ab + b^2}{a - b}:$$

$$\frac{2x^2 - 10x - 72}{7x^2 - 62x - 9} = \frac{2x + 8}{7x + 1}$$

In het laatste voorbeeld is $x - 9$ de gemeene deeler.

§. 82. †† Men kan geene breuken bij elkander optellen of van elkander aftrekken, ten zij, wanneer derzelver noemers verschillen, die breuken vooraf tot denzelfden noemer zijn herleid geworden. Om zulks nu op de geschiktste wijze te doen, moet men, zie §. 296, I. C, het kleinste gemeene veelvoud van de noemers der gegevene breuken vinden. Zie §. 266, I. C. †† Dit kleinste gemeene veelvoud is eigenlijk een getal, waarvan alle de noemers evenmatige deelen zijn, onder die bepaling, dat dit getal het minst mogelijk aantal ondeelbare factoren hebbe. Voor de stelkundige breuken is het geval hetzelfde: nemen wij, tot een voorbeeld, de breuken:

$$\frac{3ab}{7x^2 y}, \quad \frac{17abc}{28xyz}, \quad \frac{3a^2 c}{16x^3 y^2}, \quad \frac{17ab^2 c}{21xy^2 z^2},$$

dan zal men, elke letter, x, y, z, als een ondeelbaar getal, (hoedanig het altijd met betrekking tot de algemeenheid der letters is,) aanmerkende, den regel van §. 267, I. C. toepassende, door de volgende bewerking het kleinste gemeene veelvoud vinden:

deelers				
2	$\cancel{7}\,x^2 y$,	$\cancel{28}\,x y z$,	$\cancel{16}\,x^3 y^2$,	$\cancel{21}\,x y^2 z^2$
2		$\cancel{14}$	$\cancel{8}$	3
7		$\cancel{7}$	4	
x	$x^2 y$,	$x y z$,	$4 x^3 y^2$,	$3 x y^2 z^2$
x	$x y$,	$y z$,	$4 x^2 y^2$,	$3 y^2 z^2$
y	y,	$y z$,	$4 x y^2$,	$3 y^2 z^2$
y	1,	z,	$4 x y$,	$3 y z^2$
z	1,	z,	$4 x$,	$3 z^2$
	1,	1,	$4 x$,	$3 z$

Nu zal het kleinſte gemeene veelvoud zijn:

$$1 \times 1 \times 4x \times 3z \times z \times y \times y \times x \times x \times 7 \times 2 \times 2 = 336 x^3 y^2 z^2$$

hetwelk een geoefend rekenaar, zonder al dien omſlag van den regel te volgen, met eenen opſlag van het oog vinden zal (17). —— „*Men neeme nu, gelijk bekend is, het kleinſte gemeene veelvoud* $336 x^3 y^2 z^2$ *voor den algemeenen* „*noemer aan, deele denzelven door den noemer van elke breuk* „*en vermenigvuldige den teller van die breuk met dit quotient.*" Zie §. 295, I. C. Aldus zal:

$336 x^3 y^2 z^2 : 7 x^2 y = 48 x y z^2$ *zijnde*, $\frac{3ab}{7x^2 y} = \frac{144 abxyz^2}{336 x^3 y^2 z^2}$ *zijn*

$336 x^3 y^2 z^2 : 28 xyz = 12 x^2 yz \ldots \frac{17 abc}{28 xyz} = \frac{204 abcx^2 yz}{336 x^3 y^2 z^2}$.

$336 x^3 y^2 z^2 : 16 x^3 y^2 = 21 z^2 \ldots \frac{3 a^2 c}{16 x^3 y^2} = \frac{63 a^2 cz^2}{336 x^3 y^2 z^2}$.

$336 x^3 y^2 z^2 : 21 xy^2 z^2 = 16 x^2 . \frac{17 ab^2 c}{21 xy^2 z^2} = \frac{272 ab^2 cx^2}{336 x^3 y^2 z^2}$ *zijn*

en

(17) Hoe algemeener een regel is, des te meer gevallen beſtaan 'er, waarin men, door bijzondere kunstgrepen, van de toevallige omſtandigheden, waarin zich de gegevens bevinden, langs eenen veel eenvoudiger weg, dan door van dien algemeenen regel regtſtreeks gebruik te maken, het begeerde vinden kan. Zulks is, bij voorbeeld, hier het geval. Men zal het kleinſte gemeene veelvoud van de noemers der gegevene breuken gemakkelijker vinden, wanneer men, 1° „*het kleinſte gemeene veelvoud* „*van de coefficienten* 7, 28, 16 *en* 21, *zoekt:*" dit is het getal 336, hetwelk natuurlijk de coefficient van het kleinſte gemeene veelvoud zijn moet; en 2° „*wanneer men die coefficient vermenigvuldigt met de hoogſte* „*der magten van elke letter, die in de gegevene noemers voorkomen.*" In de gegevene noemers komen de letters x, y en z, voor. De hoogſte magt van x is x^3; de hoogſte magt van y is y^2; en die van z is $z2$; derhalve zal het kleinſte gemeene veelvoud $336\, x^3 y^2 z^2$ zijn.

en men zal in plaats van de gegevene breuken andere gevonden hebben, welke eenen gemeenſchappelijken noemer hebben, en tevens dezelfde waarde uitdrukken.

Additie *en* Subſtractie *der ſtelkundige breuken* (18).

§. 83. Indien men ſtelkundige breuken tot eenen gemeenſchappelijken noemer herleiden kan, zal men de regelen voor het optellen en het aftrekken der breuken in bepaalde getallen, in de XX *Les*, §. 296, *et ſeq.* I. C., opgegeven, op dezelve kunnen toepasſen; want

$$\frac{a}{n} + \frac{b}{n} - \frac{c}{n} + \frac{d}{n} = \frac{a + b - c + d}{n}$$

zijnde, zie §. 297, I. C., „ *zal men, na alvorens, indien* „ *het noodig is, de gegevene breuken onder denzelfden noemer gebragt te hebben, de tellers dezer herleide breuken,* „ *volgens den regel van* §. 26, *tot één geheel vereënigen, en* „ *de ſom zal de teller der breuk zijn, welke de ſom van de* „ *gegevene breuken uitdrukt.*" (19) Indien men dus de breu-

(18) Wij nemen hier deze twee bewerkingen bij elkander, omdat zij, zie §. 27, voor zoo verre de ſtelkundige uitdrukkingen aangaat, alleen door de teekens + en — onderſcheiden zijn, en voor het overige de regels dezelfde blijven.

(19) Hoezeer de gevolgtrekking uit de breuken in bepaalde getallen tot de meer algemeene ſtelkundige juist en duidelijk is, zullen wij nogtans, en wel voornamelijk om aantetoonen: dat de regel van het III. *Geval* van de oplosſing der vergelijkingen, §. 526, I. C. onder andere woorden, die van de additie der breuken voorſtelt, deze zaak nog uit een ander oogpunt beſchouwen. Zij gegeven de uitdrukking:

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} + \frac{e}{f} - \frac{g}{h}$$

laat derzelver waarde door x worden uitgedrukt, dan is:

$$x = \frac{a}{b} - \frac{c}{d} + \frac{e}{f} - \frac{g}{h}$$

vermenigvuldigen wij nu beide leden van deze vergelijking met zulk eene uitdrukking, dat de producten van alle termen geheele getallen worden, dat is, in ons geval, met $bdfh$; dan zal men verkrijgen:

$$bdfhx = adfh - bcfh + bdeh - bdfg$$

en, wanneer men door den coefficient van x deelt,

$x =$

breuken, welke in §. 82, onder eenen gemeenſchappelijken noemer herleid zijn, optelt, zal men voor de ſom vinden:

$$\frac{144\,abxyz^2 + 204\,abcx^2yz + 63\,a^2cz^2 + 272\,ab^2cx^2}{336\,x^3y^2z^2}$$

of, ſommige van de termen des tellers die gelijkſlachtig zijn, volgens §. 23, vereënigende,

$$\frac{4\,abxyz \times (36z + 51\,cx) + ac \times (63\,az^2 + 272\,b^2x^2)}{336\,x^3y^2z^2}$$

men zal op dezelfde wijze vinden:

$$\frac{3x}{a} + \frac{2y}{b} = \frac{3\,bx + 2\,ay}{ab}$$

$$\frac{2x}{a^2} - \frac{3y}{ab} = \frac{2\,bx - 3\,ay}{a^2b}$$

$$\frac{7x}{2a^2} - \frac{2y}{3ab} + \frac{z}{4b^2} = \frac{42\,b^2x - 8\,aby + 3\,a^2z}{12\,a^2b^2}$$

§. 84. Somtijds zijn de breuken, welke men moet optellen, zamengeſteld: in dit geval is het veilig van den vorm der bewerking, welke in §. 298, *pag.* 190, I. C. is opgegeven, gebruik te maken. Stellen wij, bij voorbeeld, dat gegeven is:

$$\frac{3}{2x-3} + \frac{4}{x-1} - \frac{2}{4x+3} - \frac{1}{x+1}$$

en dat deze ſom tot eene breuk moet herleid worden.

ge-

$$x = \frac{adfh - bcfh + bdeh - bdfg}{bdfh}$$

Dit is dezelfde uitkomst, welke men door de Additie der gebrokens zou gevonden hebben: men ziet intusſchen, dat tot het wegmaken der breuken uit de vergelijking ſlechts zulk een getal vereischt wordt, hetwelk door de noemers der gegevene breuken deelbaar is: daar nu het kleinſte gemeene veelvoud der noemers, onder alle mogelijke getallen, welke daaraan voldoen kunnen, het eenvoudigſte is, ziet men: waarom in den regel van het III. *Geval* is voorgeſchreven, om de termen der vergelijking met het kleinſte gemeene veelvoud der voorkomende noemers te vermenigvuldigen, en de overeënkomst tusſchen dien regel en de Additie der breuken is duidelijk.

gemeene noemer $8x^4 - 6x^3 - 17x^2 + 6x + 9$ *der herleide breuken*

$$\begin{array}{r|l} \frac{3}{2x-3} & 12x^3 + 9x^2 - 12x - 9 \\ \frac{4}{x-1} & 32x^3 + 8x^2 - 60x - 36 \\ -\frac{2}{4x+3} & -4x^3 + 6x^2 + 4x - 6 \\ -\frac{1}{x+1} & -8x^3 + 14x^2 + 3x - 9 \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{l} a \\ a \\ a \\ a \end{array}}\right\} \text{\textit{tellers der herleide breuken, welke moeten worden opgeteld.}}$$

komt: $32x^3 + 37x^2 - 65x - 60$ *voor de som der tellers van de herleide breuken.*

VERKLARING. Daar de noemers der gegevene breuken geene gemeenschappelijken deeler hebben, moeten dezelve vermenigvuldigd worden om den gemeenen noemer $8x^4 - 6x^3 - 17x^2 + 6x + 9$ te vinden. Men deelt dezen gemeenen noemer door den noemer $2x - 3$ der eerste breuk, en vermenigvuldigt het komende quotient $4x^3 + 3x^2 - 4x - 3$, met den teller 3, en dan verkrijgt men, voor den teller der herleide breuk, $12x^3 + 9x^2 - 12x - 9$, enz. De som der gegevene breuken is alzoo:

$$\frac{32x^3 + 37x^2 - 65x - 60}{8x^4 - 6x^3 - 17x^2 + 6x + 9}$$

Wij hebben dit voorbeeld gekozen, omdat wij in het vervolg leeren zullen: hoe zulke breuken wederom in andere breuken van den vorm $\frac{a}{bx + c}$ kunnen ontleed worden.

Multiplicatie *der stelkundige breuken.*

§. 85. Het is in §. 325, I. C., betoogd, dat in het algemeen,

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \text{ (20)}$$

daar

(20) Men kan dezen regel nog aldus betoogen. Stel $\frac{a}{b} = p$ en $\frac{c}{d} = q$; dan zal $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = pq$ zijn; nu is $a = bp$ en $c = dq$, zie §. 503, I. C. Wanneer men nu deze vergelijkingen met elkander vermenigvuldigt, verkrijgt men: $ac = bd \times pq$, en deze laatste vergelijking door bd deelende, zal, zie §. 503, I. C.

$$pq = \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

daar nu alle stelkundige breuken getallen uitdrukken, zal die regel ook gelden voor zulke stelkundige breuken, welker tellers en noemers uit factoren zamengesteld, of wel veelledige uitdrukkingen zijn: men zal dus hebben:

$$\frac{3a}{b^2} \times \frac{7b}{15y} = \frac{21ab}{15b^2y} = \frac{7a}{5by}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{a}{b} \times - \frac{2x}{3y} \times - \frac{21z^2}{4by} = + \frac{21axz^2}{12b^2y^2} = \frac{7axz^2}{4b^2y^2}$$

$$\frac{a}{x-a} \times \frac{b}{x+c} = \frac{ab}{x^2-(a-c)x-ac}$$

$$\frac{17x}{x^2-9} \times \frac{x+3}{5x} = \frac{17}{5x-15}$$

Het zal niet noodig zijn dezen regel door een grooter aantal voorbeelden optehelderen.

Divisie *der stelkundige breuken.*

§. 86. Het is in §. 349, I. C., gebleken: dat, in het algemeen:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

is (21), welke regel op alle meer zamengestelde stelkundige uitdrukkingen kan worden toegepast. Aldus zal:

$$\frac{3ab}{x^2} : \frac{7xy}{z^2} = \frac{3ab}{x^2} \times \frac{z^2}{7xy} = \frac{3abz^2}{7x^3y}$$

zijn, en daar men in alle andere gevallen de divisie, door omkeering van het deeltal, tot eene multiplicatie brengt, kan deze bewerking, indien men die der multiplicatie wel verstaat, geene zwarigheden hebben.

(21) Deze regel kan op eene gelijkvormige wijze, als de regel der multiplicatie in de voorgaande noot, betoogd worden. Zij $\frac{a}{b} = p$ en . . . $\frac{c}{d} = q$; dan zal $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{p}{q}$ zijn, en daar nu $a = bp$ en $c = dq$ is, zal $\frac{a}{c} = \frac{bp}{dq}$ zijn; vermenigvuldigen wij deze laatste met d, dan heeft men:

$$\frac{ad}{c} = \frac{bp}{q}$$

en deelen wij de laatste door b, dan zal men verkrijgen:

$$\frac{ad}{bc} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{p}{q} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d}.$$

WISKUNDIGE LESSEN.

X. BOEK.

Over de vierkants-vergelijkingen, derzelver oplossing en de oplossing van eenige vraagstukken, die tot de tweede magt opklimmen.

VIJF- EN- VEERTIGSTE LES.

Over de vierkants-vergelijkingen in het gemeen, en derzelver oplossing.

§. 87. Voor eenige oogenblikken den draad van ons begonnen onderwerp afbrekende, zullen wij ons voor het tegenwoordige opzettelijk bezig houden, om den aard en de hoedanigheid der vierkants of tweede magts-vergelijkingen te verklaren. Wij hebben dezen uitstap noodig geoordeeld: 1° om den Lezer, door eene aangename afwisseling, niet te langdurig met deze eenigzins afgetrokkene beschouwingen der stelkundige uitdrukkingen bezig te houden, en 2° omdat de kennis van den aard en de oplossing der vierkants-vergelijkingen ons in onze verdere beschouwingen steeds behulpzaam zal moeten zijn.

§. 88. Wij hebben, §. 522, I. C. reeds met een woord van de tweede en hoogere magts-vergelijkingen gewag gemaakt, en in de XXX *Les* de oplossing van die der eerste magt verklaard. * *Eene vergelijking wordt gezegd eene vierkants-vergelijking te zijn, wanneer de onbekende grootheid in dezelve tot de tweede magt, of het vierkant, opklimt.* Alzoo zijn $a x^2 - b = 0$ en $a x^2 + b x + c = 0$ vierkants of tweede magts-vergelijkingen. —— * *Op dezelfde wijze zal eene derde, vierde, en, in het algemeen, n^{de} magts-vergelijking zulk eene vergelijking zijn, in welke de onbekende tot de* *de derde, vierde, en, in het algemeen, tot de n^{de} magt opklimt.*

§. 89. Maar alle deze tweede en hoogere magts-vergelijkingen onderſcheiden zich in twee groote hoofdſoorten: te weten, in *eenvoudige* en *meer* of *min volkomene.* * *Eene eenvoudige tweede, of hoogere magts-vergelijking, is zulk eene, waarin de onbekende, in alle de termen, waarin zij voorkomt, tot dezelfde magt opklimt, en diensvolgens tot den vorm $a\,x^n = b$ kan gebragt worden.* De oplosſing van zulke vergelijkingen hangt, zie §. 530, I. C. van de n^{de} magts-worteltrekking af, en men zal hebben: $x = \sqrt[n]{\frac{b}{a}} = \frac{1}{a}\sqrt[n]{a^{n-1}\,b}$. Zie §. 800, I. C. noot (74). * *Eene volkomene hoogere magts-vergelijking is zulk eene, in welke, behalve de hoogſte magt der onbekende, ook alle de daarop volgende poſitieve lagere magten der onbekende, tot en met de eerſte magt ingeſloten, met eenen geheel bekenden term voorkomen.* Alzoo is;

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0$$

eene volkomene vierkants-vergelijking,

$$a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d = 0$$

eene volkomene derde magts-vergelijking, enz. * *Eene hoogere magts-vergelijking is onvolkomen, wanneer één of meer lagere magten der onbekende ontbreken.* Alzoo is $x^3 - 17\,x = 100$ eene onvolkomene derde magts of cubiſche vergelijking. †† De eenvoudige hoogere magts-vergelijkingen zijn in deze klasſe van onvolkomene vergelijkingen begrepen.

§. 90. †† De onvolkomene en eenvoudige vergelijkingen kunnen begrepen worden uit de volkomene te ontſtaan, wanneer ſommige van de coefficienten der volkomene vergelijking gelijk nul worden aangenomen. Alzoo ontſtaat uit de volkomene vergelijking, $x^4 - a\,x^3 + b\,x^2 - c\,x + d = 0$, de onvolkomene $x^4 + b\,x^2 - c\,x + d = 0$, door $a = 0$ te ſtellen, en de eenvoudige $x^4 + d = 0$, wanneer $a = 0$, $b = 0$ en $c = 0$ wordt. †† Hieruit volgt: †† *dat, wanneer eene volkomene n^{de} magts-vergelijking algemeen ware opgelost, alle onvolkomene vergelijkingen, tot die zelfde magt behoorende, in deze oplosſing zouden begrepen zijn.*

§. 91.

§. 91. * *Door de oplossing der vergelijkingen verstaat men, in het algemeen, vergelijk §. 521, I. C., die redenering, waardoor men, uit de bekende en gegevene grootheden, welke in de vergelijking voorkomen, en uit de wijze, waarop deze met de onbekende zijn zamengesteld en aan elkander verbonden, zulk eene bekende en bepaalde waarde voor de onbekende vindt, welke in de gegevene vergelijking, in plaats van de onbekende, gesteld zijnde, aan dezelve voldoet, of zoo als men dit noemt, dezelve tot identiteit brengt.* Aldus zal de vergelijking $x^3 - 12x^2 + 47x - 60 = 0$ zijn opgelost, wanneer voor x gevonden hebbende ééne der drie waarden 3, 4 of 5, elk ééne dezer waarden, in de gegevene vergelijking in plaats van de onbekende x gesteld zijnde, deze vergelijking $0 = 0$ maakt. De oplossing der vergelijkingen in het algemeen moet uit dit algemeen oogpunt beschouwd worden: dan, hoe klaarblijkelijk het zij, dat die oplossing, op de algemeenste wijze genomen, in de vervulling van die voorwaarde bestaan moet, valt die oplossing in alle gevallen zoo gemakkelijk niet, en gaat, wanneer de vergelijkingen hooger dan de vierde magt loopen, boven de tegenwoordige krachten der analysis.

Oplossing eener vierkants-vergelijking tot ééne onbekende.

§. 92. Stellen wij: *dat gegeven zij de volkomene vierkantsvergelijking $ax^2 + bx + c = 0$, in welke a, b en c, alle positieve en negatieve geheele en gebrokene waarden kunnen hebben, en dat men de waarde van de onbekende begeere te vinden?*

De oplossing dezer vergelijking is op de gewone wijze niet mogelijk; want, indien men alle de termen, in welke de onbekende voorkomt, in het voorste lid afzondert, verkrijgt men wel:

$$ax^2 + bx = -c \quad . \quad . \quad . \quad . \quad [1]$$

maar men zal het voorste lid niet, gelijk in de oplossing van de eerste magts-vergelijkingen plaats heeft, in twee factoren kunnen verdeelen, waarvan de eene factor alleen de onbekende en de tweede alleen bekende termen inhoud; want het eerste lid is op geene andere wijze ontleedbaar, dan in de factoren $a x + b$ en x, en men zou kunnen schrijven:

$$(a x + b) \times x = - c$$

waar uit niets anders kan gehaald worden, dan

$$a x + b = - \frac{c}{x}; \text{ of } x = - \frac{c}{a x + b}$$

waardoor de waarde van de onbekende x geenzins kan bekend worden.

Maar de oplossing wordt langs eenen anderen weg mogèlijk. Deelen wij alle de termen van vergelijking [1], door den coefficient a, welke de hoogste magt van x vermenigvuldigt, dan hebben wij:

$$x^2 + \frac{b}{a} x = - \frac{c}{a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad [2]$$

Wanneer wij nu in aanmerking nemen: dat het vierkant van eene tweeledige uitdrukking van den vorm $x + p$ gelijk $x^2 + 2 p x + p^2$ is, dat de laatste term van dit vierkant gelijk is aan het vierkant van den halven coefficient van den tweeden term $2 p x$; zoo volgt hieruit: dat, wanneer men de helft van $\frac{b}{a}$, dat is: $\frac{b}{2a}$, of den halven coefficient van den tweeden term van het eerste lid der vergelijking [2] in het vierkant brengt, en dit vierkant, hetwelk gelijk $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ of $\frac{b^2}{4 a^2}$ is, aan beide zijden van de vergelijking optelt, het eerste lid der komende vergelijking een volkomen stelkundig vierkant zal zijn. Men zal namelijk hebben:

$$x^2 + \frac{b}{a} x + \frac{b^2}{4 a^2} = - \frac{c}{a} + \frac{b^2}{4 a^2}$$

waarvoor men ook schrijven kan: zie §. 83.

$$x^2 + \frac{b}{a} x + \frac{b^2}{4 a^2} = \frac{b^2 - 4 a c}{4 a^2} \quad . \quad . \quad . \quad [3]$$

Het eerste lid dezer nieuwe vergelijking [3] is een volkomen vierkant, welks wortel gelijk is aan $x + \frac{b}{2 a}$, hetgeen blijkt, in-

indien men deze uitdrukking, met zich zelve vermenigvuldigt; en het tweede lid is eene uitdrukking, welke geheel van de bekende getallen a, b en c, afhangt: indien men dan uit beide leden dezer vergelijking den vierkants-wortel trekt, zal men, aangezien den vierkants-wortel uit een getal, zie §. 484, I. C., zoowel positief als negatief kan genomen worden, vinden:

$$\pm\left(x+\frac{b}{2a}\right)=\pm\sqrt{\left[\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]}$$

waarvoor men ook schrijven kan:

$$\pm x\pm\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a}\quad\ldots\quad[4]$$

Daar 'er nu geene reden is, waarom men liever het eene dan het andere teeken nemen, en het positieve met het negatieve niet zou kunnen verbinden, bevat de zoo even uitgebragte vergelijking, de vier volgende:

$$1^\circ\quad +x+\frac{b}{2a}=+\frac{\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a}$$

$$2^\circ\quad +x+\frac{b}{2a}=-\frac{\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a}$$

$$3^\circ\quad -x-\frac{b}{2a}=+\frac{\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a}$$

$$4^\circ\quad -x-\frac{b}{2a}=-\frac{\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a}$$

wanneer men nu de teekens van de termen der eerste vergelijking omkeert, verkrijgt men de vierde vergelijking, en de teekens van de tweede vergelijking omkeerende, verkrijgt men de derde: de vierde vergelijking zegt bijgevolg, zie §. 512, I. C., niets meer dan de eerste, en de derde niets meer dan de tweede: en men heeft alzoo slechts deze twee vergelijkingen:

$$x+\frac{b}{2a}=+\frac{\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a}$$

$$x+\frac{b}{2a}=-\frac{\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a}$$

welke, volgens §. 524, I. C. opgelost zijnde, geven zullen: zie §. 83.

de eerste

$$x = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a} . \quad [5]$$

de tweede

$$x = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a} . \quad [6]$$

Deze twee waarden van x zijn zeer onderscheiden: doch, daar de eene zoowel als de andere uit de gestelde vergelijking volgt, zullen zij ook beide aan de gegevene vergelijking moeten voldoen. Laat ons dit beproeven.

§. 93. Nemen wij eerst $x = \frac{-b + \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}$; dan hebben wij:

$$x^2 = \frac{[-b + \sqrt{(b^2 - 4ac)}]^2}{4a^2} = \frac{2b^2 - 4ac - 2b\sqrt{(b^2 - 4ac)}}{4a^2}$$

en hieruit verkrijgt men voor $a\,x^2$ de vergelijking:

$$a\,x^2 = \frac{b^2 - 2ac - b\sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}$$

voorts zal

$$b\,x = \frac{-b^2 + b\sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}$$

zijn, en men zal voor c kunnen schrijven:

$$c = \frac{+2ac}{2a}$$

Telt men nu deze waarden van $a\,x^2$, $b\,x$ en c bij elkander, dan zal men vinden:

$$a x^2 + b x + c = \frac{b^2 - 2ac - b\sqrt{(b^2 - 4ac)} - b^2 + b\sqrt{(b^2 - 4ac)} + 2ac}{2a}$$

maar alle de gelijkslachtige termen van den teller vernietigen elkander, en men vindt derhalve:

$$a\,x^2 + b\,x + c = \frac{0}{2a} = 0$$

§. 94. Nemen wij $x = \frac{-b - \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}$; dan zal men, de waarde van de leden der gegevene vergelijking berekenende, vinden:

$$a\,x^2 = \frac{b^2 - 2ac + b\sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}$$

$$b\,x = \frac{-b^2 - b\sqrt{(b^2 - 4\,a\,c)}}{2\,a}$$

$$\textit{en} \qquad c = \frac{2\,a\,c}{2\,a}$$

en, wanneer men deze vergelijkingen optelt, zal men voor de ſom o = o vinden. †† Het blijkt derhalve: dat de twee waardijen, welke wij voor de onbekende x gevonden hebben, aan de gegevene vergelijking voldoen, en daar deze twee waardijen door het twijfelachtige teeken $\pm$ van . . . . $\sqrt{(b^2 - 4\,a\,c)}$ ontſtaan, volgt hieruit: †† *dat eene tweede magts-vergelijking altijd twee oplosſingen zal moeten hebben:* dat wil zeggen: *dat 'er twee waarden voor de onbekende grootheid zullen beſtaan, welke, elk in het bijzonder, aan de gegevene vergelijking zullen voldoen.*

§. 95. Wij hebben gezien: dat de dubbelde teekens voor de leden van vergelijking [4] geplaatst, door derzelver vier mogelijke zamenvoegingen, vier vergelijkingen van de eerſte magt gegeven hebben, welke ſlechts twee onderſcheidene eerſte magts-vergelijkingen geven. Nu zal men deze twee vergelijkingen verkrijgen, wanneer men het dubbelde teeken uit het eerſte lid van vergelijking [4] weglaat, en eenvoudig ſchrijft:

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{(b^2 - 4\,a\,c)}}{2\,a}$$

want, indien men zich beurtelings van het teeken + en het teeken — bedient, zullen de vergelijkingen [5] en [6] te voorſchijn komen. Men pleeg daarom ook, in de oplosſing der vierkants-vergelijkingen, het dubbelde teeken in het voorſte lid, als overtollig, weg te laten; gelijk men dan ook de twee waardijen der onbekende, * die men de *wortels der vergelijking* noemt, op de volgende wijze uitdrukt:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{(b^2 - 4\,a\,c)}}{2\,a} \quad . \; . \; . \; . \quad [7]$$

§. 96. Wanneer men nu de oplosſing der vierkants-vergelijking aandachtig nagaat, dan blijkt het: dat men, door eene kunſtige herleiding, die oplosſing, welke door de bekende regelen onmogelijk ſcheen, gebragt heeft tot de oplosſing van eene

eene vergelijking van de eerste magt. Wij zullen in het vervolg zien: dat, door soortgelijke kunstgrepen, de oplossing van de cubische vergelijking tot de oplossing van eene tweede magts, en die der vierde magts-vergelijkingen tot die van eene derde magts gebragt worden.

§. 97. Men zal nu de oplossing eener vierkants-vergelijking, tot ééne onbekende, in dit algemeene voorschrift begrijpen kunnen.

1° „ *Breng alle de termen, waarin de onbekende voorko-*
„ *men, in het voorste lid der vergelijking, en rangschik de-*
„ *zelve naar de afdalende magten der onbekende: de bekende*
„ *termen komen dan van zelven in het achterste lid.*"

2° „ *Indien de tweede magt der onbekende met eenen coef-*
„ *ficient is aangedaan, deelt men alle de termen der vergelij-*
„ *king door dien coefficient.*"

3° „ *Men telle bij elk lid dezer nieuwe vergelijking het*
„ *vierkant van den halven coefficient van de eerste magt der*
„ *onbekende.* * Men noemt zulks het vierkant volkomen
„ maken. *Het voorste lid is dan een stelkundig vierkant, en*
„ *het achterste lid der komende vergelijking bestaat uit geheel*
„ *bekende termen.*"

4° „ *Men trekke uit beide leden dezer vergelijking den*
„ *vierkants-wortel, en stelle de positieve wortel van het voorste*
„ *lid gelijk met den positieven wortel van het achterste lid,*
„ *en daarna nog eens gelijk met den negatieven wortel van*
„ *dat zelfde achterste lid. Men verkrijgt alzoo twee eerste*
„ *magts-vergelijkingen, welke, elk in het bijzonder, opgelost*
„ *zijnde, de wortels der gegevene vergelijking zullen doen*
„ *bekend worden.*"

§. 98. * Eene vierkants-vergelijking wordt gezegd *welgeordend* te zijn, wanneer alle hare termen in het voorste lid gebragt, en, naar de afdalende magten van de onbekende, geordend zijn: gelijk in de vergelijking $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$, en daarenboven de coefficient van de hoogste magt de éénheid is.

§. 99. Stellen wij, om te bekorten, de wortels der vergelijking-lijking $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$ gelijk aan p en q; dan hebben wij:

$$\left.\begin{array}{l} p = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a} \\ q = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a} \end{array}\right\} \quad \ldots \quad [8]$$

Indien wij nu deze twee wortels bij elkander optellen, dan zullen wij vinden:

$$p + q = -\frac{2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

en dit leert ons: †† *dat de som van de wortels eener vierkants-vergelijking gelijk is aan den coefficient van den tweeden term, met het tegengestelde teeken genomen: wel verstaande, wanneer de coefficient van den eersten term de éénheid is.* Stelt men $a = 1$; dan verandert de gegevene vergelijking in $x^2 + bx + c = 0$, en de som der wortels is, ook in dit geval, gelijk $-b$.

§. 100. Vermenigvuldigen wij de twee vergelijkingen [8] in §. 99; dan zal men vinden:

$$pq = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b\sqrt{(b^2-4ac)}}{4a^2} + \frac{b\sqrt{(b^2-4ac)}}{4a^2} - \frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

maar de som der tweede en derde termen van het tweede lid dezer vergelijking gelijk nul zijnde, verandert dezelve in:

$$pq = +\frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

en het blijkt dus: †† *dat het product van de wortelen eener welgeordende vierkants-vergelijking gelijk is aan den bekenden term, met zijn eigen teeken genomen.*

§. 101. Men kan deze twee eigenschappen nog op eene andere wijze betoogen. Indien p en q de wortels van de vergelijking $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ zijn; dan moet, zie §. 91.

$$p^2 + \frac{b}{a}p + \frac{c}{a} = 0$$

$$q^2 + \frac{b}{a}q + \frac{c}{a} = 0$$

zijn. Trekken wij nu deze vergelijkingen van elkander af, dan

dan zal men vinden:

$$p^2 - q^2 + \frac{b}{a}(p - q) = 0$$

en alles door $p - q$ deelende, dan zal men hebben:

$$p + q + \frac{b}{a} = 0; \text{ of } p + q = -\frac{b}{a}$$

wederom de eerste vergelijking met q, en de tweede met p vermenigvuldigende, verkrijgt men:

$$p^2 q + \frac{b}{a} p q + \frac{c}{a} q = 0$$

$$p q^2 + \frac{b}{a} p q + \frac{c}{a} p = 0$$

en, de tweede van de eerste dezer vergelijkingen aftrekkende, vindt men:

$$p q \times (p - q) + \frac{c}{a} \times (q - p) = 0$$

welke, door $p - q$ gedeeld zijnde, geven zal:

$$p q - \frac{c}{a} = 0; \text{ of } p q = \frac{c}{a}.$$

§. 102. Indien men nu p en q als de wortels der vergelijking $x^2 + \frac{b}{a} x + \frac{c}{a} = 0$ aanneemt; dan zal $x = p$ en $x = q$ zijn, of, $x - p = 0$ en $x - q = 0$; indien wij nu deze laatste vergelijkingen met elkander vermenigvuldigen: dan verkrijgen wij:

$$(x - p) \times (x - q) = x^2 - (p + q) x + p q = 0$$

daar nu §. 99, 100 en 101, bewezen is: dat $-p-q = \frac{b}{a}$, en $p q = \frac{c}{a}$ is, zal de uitdrukking $x^2 - (p + q) x + p q$ dezelfde zijn met de uitdrukking $x^2 + \frac{b}{a} x + \frac{c}{a}$. Hieruit blijkt dan: †† *dat het voorste lid eener vierkants-vergelijking kan aangemerkt worden als bestaande uit het product van twee tweeledige stelkundige factoren, in elken van welke, de eerste term de onbekende grootheid is, en de tweede term ééne der wortelen, met een tegengesteld teeken genomen.* —— Deze waarheid wordt nog op eene andere wijze be-

bevestigd, wanneer men het eerſte lid van

$$x^2 + \frac{b}{a} x + \frac{c}{a} = 0$$

door éène der twee uitdrukkingen:

$$x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}, \text{ of } x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}$$

deelt; want, men zal, door de eerſte uitdrukking deelende, de tweede; en, door de tweede deelende, de eerſte tot quotient verkrijgen.

§. 103. Het voorſte lid eener vierkants-vergelijking is dan, onafhankelijk van eenige bijzondere waarde van x, altijd in twee factoren onleedbaar (22). †† *Wanneer men derhalve de deelers van het eerſte lid, op de eene of andere wijze, vinden kan, zal de vergelijking worden opgelost, indien men elk dezer factoren gelijk nul ſtelt, en de daaruit voortkomende eerſte magts-vergelijkingen oplost.* Want, het eerſte lid der vergelijking zal dan uit twee factoren beſtaan, welker product nul

(22) *Onafhankelijk van eenige bijzondere waarde van x.* Het is van belang dit gezegde een weinig nader opteholderen. Stellen wij de uitdrukking $x^2 - 23x + 120$, welke $x - 8$ en $x - 15$ tot factoren heeft. Deze uitdrukking zal nu onderſcheidene waardijen verkrijgen, naarmate aan x andere en andere waardijen gegeven worden. Stellen wij, in het gemeen, de waarde dezer uitdrukking gelijk y; dan zal:

$$x^2 - 23x + 120 = y$$

zijn. Wanneer wij nu ſuccesſivelijk $x = 4, 3, 2, 1, 0, -1, -2$, enz. ſtellen, zullen de waarden van y in rangorde zijn, $+44, 60, 78, 98, 120, 144, 170$, enz.: maar dan zullen de deelers $x - 8$, en $x - 15$ waardijen verkrijgen, welke daarmede overëénkomſtig zijn, gelijk uit het volgend tafeltje blijkt:

Waard. van x	. . . .	$+4$,	$+3$,	$+2$,	$+1$,	$+0$,	-1,	-2, *enz.*
Waard. van y	. . . .	$+44$,	$+60$,	$+78$,	$+98$,	$+120$,	$+144$,	$+170$, *enz.*
Waard. van $x - 8$	. .	-4,	-5,	-6,	-7,	-8,	-9,	-10, *enz.*
Waard. van $x - 15$	. .	-11,	-12,	-13,	-14,	-15,	-16,	-17, *enz.*

Nu zijn $x - 8$ en $x - 15$ ſtelkundige factoren van $x^2 - 23x + 120$, en dit blijven zij altijd, welke bijzondere waardijen men ook voor x mogte ſtellen; want ſtellen wij, bij voorbeeld: $x = 4$; dan is $y = 44$; $x - 8 = -4$ en $x - 15 = -11$, en $-11 \times -4 = +44$, en het is met alle andere waarden van x even eens gelegen. Deze opheldering zal ſtrekken kunnen, om hetgeen in den text volgt, duidelijker te bevatten.

nul is: dan, aan deze voorwaarde kan niet voldaan worden, indien niet één der factoren gelijk nul wordt aangenomen. Stellen wij, bij voorbeeld, de vergelijking: $x^2 - 13x + 42 = 0$: indien men nu ontdekt, (en de wijze waarop deze factoren gevonden worden, zal in het volgende boek worden verklaard,) dat

$$(x - 6) \times (x - 7) = x^2 - 13x + 42$$

is, zal, vermits x zoodanig moet genomen worden, dat $x^2 - 13x + 42 = 0$ is, ook

$$(x - 6) \times (x - 7) = 0$$

moeten zijn: gevolgelijk moet men ééne dezer twee onderstellingen aannemen: 1° $x - 6 = 0$; of 2°, $x - 7 = 0$: nu geven deze onderstellingen: $x = 6$ en $x = 7$, voor de wortels der gegevene vergelijking, welke men ook vinden zal, indien men de gegevene vergelijking, volgens den regel §. 97. oplost.

§. 104. †† *Eene vierkants-vergelijking kan maar twee wortels hebben.* Stellen wij, om dit te bewijzen, de wortels van $x^2 + Ax + B = 0$, gelijk p en q; dan zal:

$$(x - p) \times (x - q) = x^2 + Ax + B = 0$$

moeten zijn. Nu zeg ik: dat geene andere waarde van x, dan $x = p$, of $x = q$, aan de vergelijking zal voldoen. Want, nemen wij: dat 'er eene derde wortel r bestaan kan, en dat p de grootste en q de kleinste wortel zij, die door de gewone oplossing gevonden is, dan zal: 1° r grooter dan p en q zijn, of 2° r zal tusschen p en q vallen, of 3° r zal kleiner zijn dan p en q. Stellen wij nu, in het eerste geval, r in plaats van x; dan zal

$$(r - p) \times (r - q) = 0$$

moeten zijn: maar, omdat $r > p$ en $r > q$ is, zullen de factoren $r - p$ en $r - q$ beide positief zijn, welker product nooit nul kan zijn. — In het tweede geval, zal $r - p$ negatief en $r - q$ positief zijn, en het product zal negatief en niet nul zijn. — In het derde geval is $r - p$ negatief en $r - q$ negatief, het product der factoren is dan wederom positief en niet gelijk nul. — Geene andere derhalve dan

dan de getallen p en q kunnen aan de gegevene vergelijking voldoen.

§. 105. Overwegen wij nog eenige oogenblikken de vergelijking [7] van §. 95. namelijk

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}$$

als bevattende de wortels van de vergelijking $x^2 + \frac{b}{a} x + \frac{c}{a} = 0$, in welke aan a, b en c, in getallen, alle waardijen, zoo wel geheele als gebrokene, zoo wel positieve als negatieve, kunnen gegeven worden; uitgenomen dat a, door de teekens behoorlijk interigten, altijd als positief behoort te moeten voorkomen: dan zal men het volgende kunnen opmerken.

§. 106. 1° De grootheid b^2 is altijd positief, het zij b positief of negatief is.

§. 107. 2° Indien men c positief neemt, blijft de term $4ac$ zijn negatief teeken behouden: maar wordt c negatief, dan verandert de wortel-uitdrukking in $\sqrt{(b^2 + 4ac)}$ (23).

§. 108. 3° In het eerste dezer gevallen, kan $b^2 - 4ac > 0$ dat is positief; of $b^2 - 4ac < 0$ of negatief zijn. Heeft het eerste plaats; dan is $\sqrt{(b^2 - 4ac)}$ altijd eene mogelijke uitdrukking; omdat men uit een positief getal altijd den wortel trekken kan: maar, in het tweede geval, is $\sqrt{(b^2 - 4ac)}$ eene onbestaanbare uitdrukking; omdat 'er geene negatieve tweede magt bestaan kan (24).

§. 109.

(23) De uitdrukkingen $\sqrt{(b^2 - 4ac)}$ en $\sqrt{(b^2 + 4ac)}$ zijn wortel-uitdrukkingen, in eenen stelkundigen zin; omdat 'er geen stelkundige uitdrukking, een bepaald getal termen hebbende, bestaat, welke, met zich zelve gemultipliceerd zijnde, $b^2 - 4ac$ of $b^2 + 4ac$ kan voortbrengen: niet te min, kunnen de waarden van a, b en c, zoodanig gegeven zijn, dat $b^2 - 4ac$ of $b^2 + 4ac$ een volkomen vierkant getal geeft: in dit geval, zijn de waarden dezer wortel-uitdrukkingen geene wortel-uitdrukkingen meer: maar meetbare grootheden, die door een geheel of een gebroken getal kunnen worden uitgedrukt. Het blijkt intusschen hieruit: dat de wortels eener vierkants-vergelijking meetbaar of onmeetbaar zullen zijn, naar dat de waarde van $b^2 - 4ac$ of $b^2 + 4ac$ een volkomen of niet volkomen vierkant getal is.

(24) Bij de beschouwing van de vergelijkingen van de tweede magt,

 ont-

§. 109. 4° Maar is c negatief, dan is $b^2 - 4ac$, welke, in dit geval, in $b^2 + 4ac$ verandert, altijd positief; en de uitdrukking $\sqrt{(b^2 + 4ac)}$ is, voor alle waarden van a, b en c, bestaanbaar. Hieruit volgt:

§. 110. 5° †† *Dat, wanneer de laatste term der vierkants-vergelijking negatief is, die vergelijking altijd bestaanbaar zijn, en twee bestaanbare wortels zal hebben.*

§. 111. 6° †† *Maar dat, wanneer die laatste term positief is, de vergelijking onbestaanbaar zal worden, zoodra het viervoudige product van den coefficient des eersten terms met den laatsten term grooter is dan het vierkant van den coefficient des tweeden terms.*

§. 112. 7° Indien c derhalve positief is, dan beslist het positief of negatief zijn van $b^2 - 4ac$ over de bestaanbaar- of onbestaanbaarheid der vergelijking: maar de uitdrukking $b^2 - 4ac$ gaat niet van den positieven tot den negatieven toestand over, ten zij $b^2 - 4ac = 0$ worde: in dit geval is $c = \frac{b^2}{4a}$: stellen wij nu deze waarde van c in de algemeene vergelijking, dan verkrijgen wij: $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = 0$, waarvan het eerste lid een volkomen vierkant is, tot wortel hebbende $x + \frac{b}{2a} = 0$. In dit geval, worden de twee wortels der vergelijking gelijk, en men zegt: * dat de vergelijking als dan twee gelijke wortels heeft. Men kan hier dan uit opmaken: †† *dat, wanneer men de coefficienten a, b en c aanneemt, als alle mogelijke waardijen te kunnen hebben, de toestand der vergelijking, welke twee gelijke wortels heeft, de juis-*

ontmoeten wij het eerste voorbeeld van eigenlijk gezegde onbestaanbare vergelijkingen, (want de onbestaanbare vergelijkingen, waarvan wij §. 533, I. C., voorbeelden gegeven hebben, zijn van eenen anderen aard en alleen onbestaanbaar, omdat zij niet tot den vorm $ax = b$ kunnen gebragt worden). Deze onbestaanbaarheid is kenbaar aan de uitdrukkingen van den vorm $p + q\sqrt{-1}$, welke de wortels bij de oplossing verkrijgen, en die men meestal denkbeeldige grootheden, (*quantitates imaginariæ*) noemt; * aan welke wij nogtans den naam van *onbestaanbare uitdrukkingen* zullen geven, welke in het vervolg opzettelijk zullen behandeld worden.

juiste limiet tusschen hare bestaanbaar- en onbestaanbaarheid is.

§. 113. 8° Nemen wij altijd c positief en $b^2 > 4ac$; dan zal $\sqrt{(b^2 - 4ac)} < b$ zijn; en $-b + \sqrt{(b^2 - 4ac)}$ is negatief. †† *Indien dan, in eene mogelijke vierkants-vergelijking, de tweede en derde termen positief zijn, zijn beide de wortels negatief.*

§. 114. 9° Is, alle overige omstandigheden dezelfde blijvende, b negatief; dan verandert [7] in

$$x = \frac{+b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}$$

en, omdat $b > \sqrt{(b^2 - 4ac)}$ is, zullen beide de wortelen positief zijn. Men kan hieruit en uit de voorgaande § afleiden, †† *dat in de vergelijking:*

$$x^2 \pm \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$b^2 > 4ac$ zijnde, beide wortelen negatief zullen zijn, wanneer in den tweeden term het bovenste teeken plaats heeft, en beide wortelen positief, indien den tweeden term met het negatieve teeken is aangedaan (25).

§. 115. 10° Stellen wij c negatief; dan is $\sqrt{(b^2 + 4ac)} > b$: wanneer dan b positief is zal de kleinste wortel met het positieve en de grootste met het negatieve teeken zijn aangedaan: het tegengestelde zal plaats hebben, indien b negatief is.

§. 116. Alle deze omstandigheden zijn in de volgende schets vereënigd.

(25) Langen tijd heeft men, in navolging van DESCARTES, aan de negatieve wortelen eener vergelijking den naam van *valsche wortelen* gegeven. Deze benaming moet eenen eerstbeginnenden doen denken: dat deze wortelen aan de vergelijking niet voldoen, en diensvolgens moeten verworpen worden. Het is waar, en wij zullen zulks in de volgende les doen opmerken, dat somtijds de negatieve wortelen met de bijzondere omstandigheden van een vraagstuk, dat tot eene vergelijking van de tweede of tot die van eene hoogere magt opklimt, strijdig zijn, en om die reden moeten verworpen worden: het is waar, dat deze omstandigheden aanleiding tot deze verkeerde benaming hebben gegeven: maar het is ook aan den anderen kant waar: dat DESCARTES die benaming, in welker keuze hij zeker niet gelukkig was, nooit gemeend heeft in dien verkeerden zin, welke vele daaraan toegeschreven hebben.

$x^2 \pm bx + c = 0$ Indien in deze vergelijking $b^2 < 4c$ is, dan is de vergelijking onbestaanbaar, dat is: geene positieve of negatieve waarde, welke men voor x zou mogen aannemen, zal aan dezelve voldoen kunnen: maar is $b^2 > 4c$, dan is de vergelijking bestaanbaar, en zij zal, in de onderstelling van $+ bx$, twee negatieve, en in de onderstelling van $- bx$ twee positieve wortelen hebben. Is $b^2 = 4c$ dan heeft de vergelijking twee gelijke wortelen.

$x^2 \pm bx - c = 0$ Deze vergelijking is altijd bestaanbaar: doch de eene wortel zal positief en de andere negatief zijn. In het geval van $+ bx$ zal de kleinste wortel met het positieve en de grootste met het negatieve teeken zijn aangedaan; het tegengestelde zal in de onderstelling van $- bx$ plaats hebben.

§. 117. 'Er zijn hoogere magts-vergelijkingen onder den vorm eener vierkants-vergelijking. Zij zijn van den vorm

$$x^{2n} + a x^n + b = 0$$

zijnde n een geheel getal. Stellen wij, om dezelve optelossen, $x^n = y$; dan verandert zij in

$$y^2 + a y + b = 0$$

en dezelve oplossende, zal men verkrijgen:

$$y = \frac{-a \pm \sqrt{(a^2 - 4b)}}{2} = x^n$$

en, uit deze de n^{de} magts-wortel trekkende, zal men vinden:

$$x = [-\tfrac{1}{2}a \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(a^2 - 4b)}]^{\frac{1}{n}}$$

Wanneer dan, bij voorbeeld, $n = 3$ is, zullen de wortels van $x^6 + a x^3 + b = 0$ zijn:

$$x = [-\tfrac{1}{2}a \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(a^2 - 4b)}]^{\frac{1}{3}}.$$

Wij zullen op deze vergelijking in het vervolg terugkomen.

§. 118. Geven wij nu eenige voorbeelden van de oplossing der vierkants-vergelijking.

1. Voorb. *Gegeven zijnde:* $x^2 - 16x + 63 = 0$, *de waarde van* x *te vinden?* Antw. $x = 7$ en $x = 9$.

2. Voorb. *Gegeven zynde:* $x^2 + 25x + 156 = 0$, *de waarde van* x *te vinden?* Antw. $x = -12$ en $x = -13$.

3. Voorb. *Gegeven zijnde:* $x^2 - 2x + 145 = 0$, *de waarde van* x *te vinden?* Antw. $x = +1 + 12\sqrt{-1}$ en $x = +1 - 12\sqrt{-1}$ ten bewijze, dat de vergelijking onbestaanbaar is.

4. Voorb.

4. VOORB. *Gegeven zijnde:* $x^2 - 6x + 3 = 0$, *de waarde van* x *te vinden?* Antw. $x = 3 + \sqrt{6}$ en $x = 3 - \sqrt{6}$; of nagenoeg $x = 5,44948974$ *en* $x = 0,55051026$.

5. VOORB. *Gegeven zijnde:* $x^2 - 2x - 143 = 0$, *de waarde van* x *te vinden?* Antw. $x = +13$ en $x = -11$.

6. VOORB. *Gegeven zijnde:* $x^2 + 3x - 54 = 0$, *de waarde van* x *te vinden?* Antw. $x = +6$ en $x = -9$.

7. VOORB. *Gegeven zijnde:* $5x = 1 + 6x^2$, *de waarde van* x *te vinden?* Antw. $x = \frac{1}{2}$ en $x = \frac{1}{3}$.

8. VOORB. *Gegeven zijnde:* $1 + 24x = \frac{35}{2x}$, *de waarde van* x *te vinden?* Antw. $x = \frac{5}{6}$ en $x = -\frac{7}{8}$.

9. VOORB. *Gegeven zijnde:* $x - 7 = \frac{x^2 - 40x + 299}{6 - x}$ *de waarde van* x *te vinden?* Antw. $x = 15\frac{1}{2}$ en $x = 11$.

10. VOORB. *Gegeven zijnde:* $x \times (x + 3) = \frac{1}{57}(1311 + 17x)$, *de waarde van* x *te vinden?* Antw. $x = 3\frac{12}{19}$ en $x = -6\frac{1}{3}$.

11. VOORB. *Gegeven zijnde:* $x + 1000 = 14x^2$, *de waarde van* x *te vinden?* Antw. $x = \frac{1}{28} \pm \frac{1}{28}\sqrt{56001}$.

12. VOORB. *Gegeven zijnde:* $17 + \sqrt{x} = x - 9$, *de waarde van* x *te vinden?* Antw. $x = 26\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{105}$.

§. 119. In de zes laatſte voorbeelden moeten de vergelijkingen, volgens §. 98. door herleiding wel geordend worden. Men zal dezelve dan vervolgens, naar het voorſchrift van §. 97. regtſtreeks kunnen oplosſen, of de vergelijking [7] §. 95, pag. 61, daarop kunnen toepasſen.

§. 120. Somtijds zijn de coefficienten en bekende termen der vergelijking ſtelkundige uitdrukkingen: men moet, in dit geval, de oplosſing op dezelfde wijze behandelen.

1. VOORB. *Gegeven zijnde:* $x^2 - px - \frac{pr^2}{a} = 0$, *de waarde van* x *te vinden?* Men vindt:

$$x = +\tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{\left[\tfrac{1}{4}p^2 + \frac{pr^2}{a}\right]}$$

2. VOORB. *Gegeven zijnde:* $x^2 - (2a + b)x + a^2 = 0$, *de waarde van* x *te vinden?* Antw.

$$x = +(a + \tfrac{1}{2}b) \pm \sqrt{[b \times (a + \tfrac{1}{4}b)]}$$

Oplossing van een stelsel van vergelijkingen, tot twee, drie en meer onbekenden, in hetwelk de finale vergelijking tot de tweede magt opklimt. Vergelijk §. 561, I. C.

§. 121. Hoe vele vergelijkingen, voor zoo vele onbekenden, mogten gegeven zijn, zal altijd de laatste afgeleide vergelijking tot de eerste magt behooren, indien maar geene der onbekenden in de gegevene vergelijkingen hooger dan tot de eerste magt opklimmen, of met elkander in ééne of meer vergelijkingen vermenigvuldigd zijn. De beschouwing van de oplossing der vergelijkingen, tot twee en meer onbekenden, in welke de onbekenden tot hoogere magten opklimmen, of met elkander vermenigvuldigd zijn, maakt een bijzonder en uitgestrekt gedeelte der Stelkunst uit, waarover BEZOUT een voortreffelijk werk, onder den tijtel van *Equations Algébriques* geschreven heeft. Daar wij ons thans met die algemeene beschouwingen niet kunnen ophouden, zullen wij ons met de opgave van eenige voorbeelden vergenoegen.

1. VOORB. *Gegeven zijnde de vergelijkingen:* $xy + 3x - y = 83$ *en* $\frac{1}{3}x + y = 10$, *de waarden van* x *en* y *te vinden?*

Wanneer het product der onbekenden in éene der gegevene vergelijkingen voorkomt, zal de finale vergelijking tot de tweede magt moeten opklimmen. De tweede vergelijking geeft ons $y = 10 - \frac{1}{3}x$, en deze waarde van y in de eerste overgebragt zijnde en de komende met drie vermenigvuldigd zijnde, zal men voor de finale vergelijking verkrijgen:

$$3x(10 - \tfrac{1}{3}x) + 9x - 30 + x = 249$$

welke, ontwikkeld en welgeordend zijnde, geven zal, $x^2 - 40x = -279$; waaruit $x = 31$ en $x = 9$; waarmede $y = -\frac{1}{3}$ en $y = 7$ overéénstemmen.

Men zou ook uit de eerste vergelijking $y = \frac{83 - 3x}{x - 1}$ halen en deze waarde van y met $y = 10 - \frac{1}{3}x$ vergelijken kunnen, en zulks zou dezelfde uitkomst geven.

2. VOORB. *Gegeven zijnde de vergelijkingen:* $3xy + x - y = 74$ *en* $17x + 19y - xy = 154$, *de waarden van* x *en* y *te vinden?*

Men kan elk der gegevene vergelijkingen met zulk getal vermenigvuldigen, dat de coefficienten van den term xy in beide uitkomsten gelijk worden: men vermenigvuldige ten dien einde de tweede vergelijking met 3 en telle het product bij de eerste; dan zal men, na door 4 gedeeld te hebben, verkrijgen:

$$13x + 14y = 134; \text{ hieruit } y = \frac{134 - 13x}{14}$$

Nu kan men deze waarde van y, het zij in de eerste, het zij in de tweede vergelijking, overbrengen: door beide handelwijzen, zal men, na eene geschikte herleiding, vinden:

$$x^2 - 11x + 30 = 0$$

waaruit zal gevonden worden:

$$x = 6 \text{ en } y = 4$$
$$\text{of } x = 5 \text{ en } y = 4\tfrac{13}{14}$$

welke twee oplossingen, elk in het bijzonder, aan beide de gegevene vergelijkingen voldoen.

Of men zal, hetgeen in dit geval kan geschieden, uit beide vergelijkingen de waarde van y, of de waarde van x afzonderen, deze waardijen met elkander kunnen vergelijken, en men zal dezelfde uitkomsten verkrijgen.

3. Voorb. *Gegeven zijnde de vergelijkingen:* $3x^2 + y - 116 = 0$ *en* $5x^2 - y + x - 178 = 0$, *de waarden van x en y te vinden?*

De som der gegevene vergelijkingen $8x^2 + x = 294$ zijnde, zal men, deze vergelijking oplossende, vinden:

$$x = +6 \text{ en } y = +8$$
$$\text{of } x = -6\tfrac{1}{8} \text{ en } y = +3\tfrac{29}{64}$$

4. Voorb. *Gegeven zijnde de vergelijkingen:*

$$2xy = 32 - xz - yz$$
$$x + y + z = 9$$
$$\text{en } 3x + y - z = 5$$

de waarden van x, y en z te vinden?

Indien men de twee laatste vergelijkingen bij elkander optelt, dan verkrijgt men, na alles door 2 gedeeld te hebben:

$$2x + y = 7 \text{ en } y = 7 - 2x$$

uit de tweede vergelijking haalt men: $z = 9 - x - y$, waarin de waarde van y overgebragt zijnde, zal men vinden:

$$z = x + 2$$

stellende nu deze waarden van y en z in de eerste vergelijking, dan zal men, na behoorlijke herleiding, verkrijgen:

$$x^2 - \tfrac{19}{5}x + \tfrac{18}{5} = 0$$

waarvan 2 en $1\frac{4}{5}$ de wortels zijn. Men zal alzoo hebben:

$$x = 2, \; y = 3 \text{ en } z = 4$$
$$\text{of } x = 1\tfrac{4}{5}, \; y = 3\tfrac{2}{5} \text{ en } z = 3\tfrac{4}{5}.$$

§. 122. Het zal niet noodig zijn deze leerwijze door meer voorbeelden optehelderen. Wij zullen, daar wij, in het vervolg de stelsels van vergelijkingen, tot een zeker aantal onbekenden, nader zullen overwegen, ons thans alleenlijk bij de volgende aanmerkingen bepalen.

 1° Dat,

1° Dat, wanneer in een ſtelſel van vergelijkingen alleenlijk in ééne van dezelve ééne of meer der onbekenden ſlechts tot de tweede magt opklimmen, of twee dezer onbekenden met elkander vermenigvuldigd zijn, terwijl in alle de overige de onbekenden in de eerſte magt voorkomen, de finale vergelijking altijd tot de tweede magt en nooit hooger zal opklimmen. 2° Maar dat, wanneer, bij voorbeeld, in twee vergelijkingen tot twee onbekenden, de onbekenden in elke vergelijking tot de tweede magt opklimmen, de finale vergelijking in het algemeen tot de vierde magt zal opklimmen; ten ware, dat men, door eene kunſtige zamenvoeging, uit de twee gegevene vergelijkingen, eene vergelijking van de eerſte magt tot twee onbekenden konde afleiden, welke met ééne der twee gegevene vergelijkingen verbonden zijnde, natuurlijk, gelijk in het tweede voorbeeld, eene vergelijking van de tweede magt, tot ééne onbekende zou moeten opleveren.

ZES- EN- VEERTIGSTE LES.

Oplosſing van Vraagſtukken tot de tweede magt (26).

§. 123. Bij de verzameling der werkſtukken, welke wij in deze les zullen opgeven, gedeeltelijk oplosſen, en gedeeltelijk analyſeren, herinneren wij ſlechts alles, wat wij in de XXXI *Les* I. C. van §. 566–578. gezegd hebben, en gaan dadelijk ter zake over.

1. Vraagstuk. *Een getal onder die voorwaarde te bepalen, dat het vierkant van deszelfs helft, en het getal* 216 *te zamen genomen, zooveel waard is als vijftienmaal dat zelve getal?*

Het begeerde getal x noemende, wordt de voorwaarde der vraag door de vergelijking:

$$\tfrac{1}{4}x^2 + 216 = 15x$$

uitgedrukt, welke welgeördend zijnde, geven zal:

$$x^2 - 60x = -864$$

en

(26) De 38, 39, 40, 41, 42 en 43 vraagſtukken van den I. Curſus behooren tot de vierkants-vergelijkingen; het is alleen maar de bijzondere inrichting der oplosſing, welke maakt, dat de finale vergelijking geene volkomene vierkants-vergelijking is.

en deze, volgens §. 97, opgelost zijnde, zal men vinden: $x = 36$ of $x = 24$, voor de waarde van het onbekende en gevraagde getal, welke beide andwoorden aan de vraag voldoen; want

$$(\tfrac{1}{2} \times 36)^2 + 216 = 15 \times 36$$
$$(\tfrac{1}{2} \times 24)^2 + 216 = 15 \times 24$$

2. VRAAGSTUK. *Twee getallen te vinden, waarvan het eene een vierkant is, welks wortel aan het verschil der getallen gelijk is, en, onder deze bepaling, dat het product der getallen tot de som van derzelver vierkanten in betrekking staat, als het getal* 30 *tot het getal* 61?

Laat ons het getal, dat een vierkant is, door xx uitdrukken, dan is het verschil der gevraagde getallen x: nu wordt 'er geene melding gemaakt of het vierkante getal het grootste van de gevraagde getallen, dan wel of het het kleinste is: indien wij het als het kleinste aannemen, dan zal het grootste door $x^2 + x$; maar als het grootste, dan zal het kleinste door $x^2 - x$ worden uitgedrukt. In het eerste geval, wordt het product door $x^2 \times (x^2 + x)$ en de som der vierkanten door $2x^4 + 2x^3 + x^2$ uitgedrukt en de tweede voorwaarde der vraag wordt aldus voorgesteld

$$x^2 + x : 2x^2 + 2x + 1 = 30 : 61$$

en men verkrijgt na herleiding:

$$x^2 + x = 30$$

welker wortelen zijn 5 en -6. In de tweede onderstelling zal men voor de herleide vergelijking verkrijgen:

$$x^2 - x = 30$$

welker wortelen 6 en -5 zijn.

Beide deze vergelijkingen geven dezelfde andwoorden, namelijk 30 en 25 voor de begeerde getallen; of 36 en 30.

3. VRAAGSTUK. *Het getal* 120 *in drie deelen te verdeelen, zoodanig, dat het tweede deel* 14 *minder zij dan het eerste, en dat de som van de vierkanten der deelen, te zamen genomen,* 5624 *uitmaakt?*

Het eerste der deelen x noemende, zal men het tweede deel door $x - 14$ moeten uitdrukken: de som dezer deelen $2x - 14$ zijnde, zal, volgens de vraag, het derde deel door $120 - (2x - 14)$ of door $134 - 2x$ worden uitgedrukt, en volgens de laatste voorwaarde der vraag zal:

$$x^2 + (x - 14)^2 + (134 - 2x)^2 = 5624$$

moeten zijn, welke vergelijking, ontwikkeld en tot den gewonen vorm gebragt zijnde, geven zal:

$$x^2 - 94x + 2088 = 0$$

welker wortels zijn: $x = 58$ en $x = 36$; men heeft dus twee oplossingen, de deelen zijn:

eerste oplossing 58, 44 *en* 18 *de begeerde deelen*
tweede oplossing 36, 22 *en* 62

welke beide aan de voorwaarden zullen voldoen.

4. VRAAGSTUK. Cajus *vertrekt uit eene zekere stad A naar eene andere stad B, dagelijks acht mijlen wegs afleggende: na zeven- en-*

twin-

twintig mijlen van zijnen weg te hebben afgelegd, vertrekt Sempronius *uit de ſtad B naar de ſtad A, en volbrengt dagelijks één-twintigſte gedeelte van den geheelen weg, en had, toen hij* Cajus *ontmoette, even zoo vele dagen op reis geweest, als mijlen daags afgelegd. Men vraagt naar den afſtand dezer ſteden?*

Stel den afſtand der ſteden x; dan reist *Sempronius* daags $\frac{1}{20}x$ mijlen; en daar hij, bij de ontmoeting van *Cajus*, even zoo vele dagen gereisd heeft, als hij mijlen daags heeft afgelegd, heeft hij, op het oogenblik dezer ontmoeting, $\frac{1}{400}x^2$ van den geheelen weg afgelegd. Hieruit kan eene uitdrukking bepaald worden van den weg dien *Cajus* nog moet afleggen; deze is klaarblijkelijk gelijk aan $x - 27 - \frac{1}{400}x^2$ mijlen, en het aantal dagen, welke hij noodig zal hebben, om dien weg te volbrengen, zal door $\frac{1}{8}(x - 27 - \frac{1}{400}x^2)$ worden uitgedrukt: wij hebben dan, volgens de voorwaarde der vraag:

$$\frac{1}{8}\left(x - 27 - \frac{1}{400}x^2\right) = \frac{1}{20}x$$

welke herleid zijnde, geven zal:

$$x^2 - 240x + 10800 = 0$$

waaruit $x = 180$ of 60 mijlen, gelijk den afſtand der twee ſteden.

5. VRAAGSTUK. *Twee getallen te vinden, zoodanig, dat hunne ſom met het grootſte vermenigvuldigd zijnde, het product gelijk zij aan* 273; *en dat hun verſchil met het kleinſte vermenigvuldigd zijnde, het product gelijk zij aan* 40?

Stellende het grootſte getal x en het kleinſte y; dan zijn de voorwaarden der vraag begrepen in de vergelijkingen:

$$(x + y) \cdot x = 273, \text{ en } (x - y) \cdot y = 40$$

Uit de eerſte dezer vergelijkingen haalt men: $y = \frac{273 - x^2}{x}$; deze waarde van y in de tweede vergelijking overbrengende, zal men hebben:

$$x \times \frac{273 - x^2}{x} - \left[\frac{273 - x^2}{x}\right]^2 = 40$$

welke ontwikkeld en welgeordend zijnde, geven zal:

$$x^4 - 389\tfrac{1}{2}x^2 + 37264\tfrac{1}{2} = 0$$

waaruit volgen zal: $x^2 = 169$ en $x^2 = 220\frac{1}{2}$; en verder

$$x = +13;\ x = -13;\ x = +10\tfrac{1}{2}\sqrt{2};\ x = -10\tfrac{1}{2}\sqrt{2}$$
$$y = +8;\ y = -8;\ y = +2\tfrac{1}{2}\sqrt{2};\ y = -2\tfrac{1}{2}\sqrt{2}.$$

6. VRAAGSTUK. *De ſom van twee getallen en de ſom van derzelver vierde magten gegeven zijnde, die getallen te bepalen?*

Stellen wij de begeerde getallen x en y, en laat derzelver ſom door a, die der vierde magten door b worden voorgeſteld; dan heeft men:

$$x + y = a \text{ en } x^4 + y^4 = b$$

Men zal uit de eerſte y kunnen afzonderen, en deze waarde van y in de tweede vergelijking overbrengen: maar de finale vergelijking zal dan tot de vierde magt opklimmen. Beter en fraaijer is de volgende oplosſing.

De

De eerste vergelijking tot de vierde magt verheffende, verkrijgt men: zie §. 740, I. C.

$$x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 = a^4$$

$$\text{of } x^4 + y^4 + 4(x^2 + y^2) \,.\, xy + 6x^2y^2 = a^4$$

maar nu is $x^4 + y^4 = b$; en $x^2 + y^2 + 2xy = (x + y)^2 = a^2$; derhalve $x^2 + y^2 = a^2 - 2xy$: de laatste vergelijking verandert dan, door de in plaats stelling dezer waarden, in de volgende:

$$b + 4(a^2 - 2xy) \times xy + 6x^2y^2 = a^4$$

of, door ontwikkeling en verschikking, in

$$6x^2y^2 - 8x^2y^2 + 4a^2xy + b - a^4 = 0$$

en eindelijk, na alles wel geordend te hebben, in deze

$$x^2y^2 - 2a^2xy = \tfrac{1}{2}b - \tfrac{1}{2}a^4$$

welke tweede magts-vergelijking, met betrekking tot xy, opgelost zijnde, geven zal:

$$xy = a^2 \pm \surd(\tfrac{1}{2}a^4 + \tfrac{1}{2}b)$$

De som en het product der onbekenden is alzoo bekend, en men zal, zie *vraagstuk* 38, I. C., de onbekenden vinden kunnen; want

$$(x-y)^2 = (x+y)^2 - 4xy = a^2 - 4a^2 \mp 2\surd(2a^4 + 2b)$$

zijnde, zal men hieruit den vierkants-wortel trekkende, vinden:

$$x - y = \pm \surd[-3a^2 \mp 2\surd(2a^4 + 2b)]$$

en nu zal men, de som en het verschil der onbekenden bekend zijnde, dezelve, volgens vraagstuk 37, I. C. vinden kunnen; te weten:

$$x = \tfrac{1}{2}a \pm \tfrac{1}{2}\surd[-3a^2 \mp 2\surd(2a^4 + 2b)]$$

$$\text{en } y = \tfrac{1}{2}a \mp \tfrac{1}{2}\surd[-3a^2 \mp 2\surd(2a^4 + 2b)]$$

Gegeven zijnde $a = 8$, en $b = 706$; dan zal men vinden: $x = 5$ of 3; en $y = 3$ of 5: 'er zijn nog twee onbestaanbare waarden voor de onbekenden, welke uit de oplossing volgen, te weten: $x = 4 + \surd{-97}$, of $x = 4 - \surd{-97}$, en $y = 4 - \surd{-97}$, $y = 4 + \surd{-97}$; die, als uitdrukkingen, aan de voorwaarden der vraag voldoen.

7. VRAAGSTUK. *Van twee getallen gegeven zijnde de som a, benevens de som der vijfde magten b: deze getallen te vinden?*

Indien men de begeerde getallen x en y stelt, dan zullen de vergelijkingen:

$$x + y = a; \text{ en } x^5 + y^5 = b$$

moeten worden opgelost. De eerste dezer vergelijkingen tot de vijfde magt verheffende, zal men, na behoorlijke schikking der termen, vinden:

$$x^5 + y^5 + 5(x^3 + y^3) \times xy + 10(x + y) \times x^2y^2 = a^5$$

daar nu $x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = a^3 - 3axy$ is, zal men voor $x^5 + y^5$, voor $x^3 + y^3$ en voor $x + y$ derzelver waarden in plaats stellende, na behoorlijke herleiding, vinden:

$$x^2y^2 - a^2xy + \tfrac{1}{5}a^4 - \frac{b}{5a} = 0$$

wel-

welke, met betrekking tot het product xy, eene tweede magts-vergelijking is, die opgelost zijnde, geven zal:

$$xy = \tfrac{1}{2}a^2 \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{\left[\tfrac{1}{5}a^4 + \frac{4b}{5a}\right]}$$

Men kent alzoo de som en het product, en men zal, even als in het voorgaande vraagstuk, de getallen zelve kunnen bepalen, namelijk:

$$x = \tfrac{1}{2}a \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{\left[-a^2 \mp 2\sqrt{\left(\tfrac{1}{5}a^4 + \frac{4b}{5a}\right)}\right]}$$

$$y = \tfrac{1}{2}a \mp \tfrac{1}{2}\sqrt{\left[-a^2 \mp 2\sqrt{\left(\tfrac{1}{5}a^4 + \frac{4b}{5a}\right)}\right]}.$$

en men zal in getallen twee bestaanbare en twee onbestaanbare waarden vinden.

8. Vraagstuk. *Van twee getallen staan de sommen der eerste, derde en vijfde magten tot elkander in dezelfde betrekking als de getallen p, q en r: men begeert hieruit deze getallen te vinden?*

Stel de begeerde getallen x en y; dan zal, volgens de voorwaarde der vraag, de volgende evenredigheid moeten plaats hebben,

$$x + y : x^3 + y^3 = p : q$$

hieruit vindt men:

$$\frac{q}{p} = \frac{x^3 + y^3}{x + y} = x^2 - xy + y^2 \quad \ldots\ldots \quad (A)$$

wederom moet, volgens de vraag, de evenredigheid

$$x + y : x^5 + y^5 = p : r$$

plaats hebben; men zal derhalve hebben:

$$\frac{r}{p} = \frac{x^5 + y^5}{x + y} = x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4 \quad (B)$$

uit deze laatste kan geformeerd worden;

$$\frac{r}{p} + x^2y^2 = x^4 - x^3y + 2x^2y^2 - xy^3 + y^4 \quad (C)$$

Het laatste lid dezer vergelijking is ontleedbaar in de factoren $x^2 - xy + y^2$ en $x^2 + y^2$. Deelende derhalve deze laatste vergelijking (C) door de vergelijking (A), dan zal men vinden:

$$\frac{px^2y^2 + r}{q} = x^2 + y^2 = xy + \frac{q}{p}$$

welke behoorlijk herleid zijnde, veranderen zal in de tweede magts-vergelijking

$$x^2y^2 - \frac{q}{p}xy - \frac{q^2}{p^2} + \frac{r}{p} = 0$$

welke opgelost zijnde, geven zal:

$$xy = +\frac{q}{2p} \pm \sqrt{\left(\frac{5q^2}{4p^2} - \frac{4pr}{4p^2}\right)}$$

waaruit blijkt: dat tot de mogelijkheid der vraag vereischt wordt: dat de getallen p, q en r zoodanig gegeven zijn: dat $5q^2 > 4pr$ zij. Stellen wij nu $xy = a$, en tellen wij bij vergelijking (A) eerst $3xy = 3a$ en trekken wij 'er $xy = a$ af; dan zal men, na uit deze komende ver-

vergelijkingen den vierkants-wortel getrokken te hebben, vinden:

$$x + y = \pm\sqrt{\left(\frac{q}{p} + 3a\right)} \text{ en } x - y = \pm\sqrt{\left(\frac{q}{p} - a\right)}$$

waaruit volgen zal:

$$x = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{q}{p} + 3a\right)} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{q}{p} - a\right)}$$

$$y = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{q}{p} + 3a\right)} \mp \tfrac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{q}{p} - a\right)}$$

zijnde $a = + \frac{q}{2p} \pm \sqrt{\left(\frac{5q^2 - 4pr}{4p^2}\right)}$

Stel, dat in getallen gegeven zijn: $p = 1$, $q = 19$ en $r = 421$; dan is:

$$a = \frac{q}{2p} \pm \sqrt{\left(\frac{5q^2 - 4pr}{4p^2}\right)} = 15 \text{ of } 4$$

Neemt men $a = 15$; dan zijn de begeerde getallen 5 en 3; of -3 en -5; doch neemt men $a = 4$, dan vindt men voor de gevraagde getallen: $\frac{1}{2}\sqrt{31} + \frac{1}{2}\sqrt{15}$ en $\frac{1}{2}\sqrt{31} - \frac{1}{2}\sqrt{15}$; of ook $-\frac{1}{2}\sqrt{31} + \frac{1}{2}\sqrt{15}$ en $-\frac{1}{2}\sqrt{31} - \frac{1}{2}\sqrt{15}$; waaruit blijkt, dat 'er, voor de bijzondere waarden van p, q en r, twee antwoorden in positieve en twee in negatieve getallen bestaan.

9. VRAAGSTUK. *Een gegeven getal a in twee deelen te verdeelen, zoodanig, dat de som van de vierkanten der deelen met die der derde magten vermenigvuldigd zijnde, het product gelijk b zal zijn?*

Stellende de begeerde deelen x en y, dan zullen de twee vergelijkingen:

$$x + y = a, \text{ en } (x^2 + y^2) \times (x^3 + y^3) = b$$

moeten worden opgelost: deelende nu de tweede vergelijking door de eerste, zal men, omdat $x^3 + y^3$ door $x + y$ deelbaar is, vinden:

$$(x^2 + y^2) \times (x^2 - xy + y^2) = \frac{b}{a} \quad \ldots \quad (A)$$

Nu is $x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = a^2 - 2xy$; gevolgelijk ook $x^2 - xy + y^2 = a^2 - 3xy$: deze laatste vergelijking (A) verandert dan in

$$(a^2 - 2xy) \times (a^2 - 3xy) = \frac{b}{a}$$

Indien men deze laatste door vermenigvuldiging ontwikkelt, en ordent, dan zal men hebben:

$$x^2y^2 - \tfrac{5}{6}a^2xy + \tfrac{1}{6}a^4 - \frac{b}{6a} = 0$$

eene vierkants-vergelijking, welker oplossing geven zal:

$$xy = \tfrac{5}{12}a^2 \pm \tfrac{1}{12}\sqrt{\left(\frac{a^5 + 24b}{a}\right)}$$

de som en het product der onbekende getallen gegeven zijnde, zullen dezelve, gelijk bekend is, kunnen gevonden worden.

10. VRAAGSTUK. *Twee getallen te vinden, welker product gelijk is aan het dubbeld van hun som en zoodanig, dat de som hunner tweede magten gegeven zij gelijk a of 45?*

Stel

Stel de begeerde getallen x en y; dan moeten de vergelijkingen:

$$x^2 + y^2 = a \text{ en } x y = 2 x + 2 y$$

worden opgelost. Indien men het tweevoud van de tweede vergelijking bij de eerste optelt, dan zal men vinden:

$$x^2 + 2 x y + y^2 = a + 4 (x + y)$$

of, na behoorlijke herleiding,

$$(x + y)^2 - 4 (x + y) = a$$

welke opgelost zijnde, geven zal:

$$x + y = 2 \pm \sqrt{(a + 4)}$$

Indien men deze laatste vergelijking in het vierkant brengt, en 'er ... $4 x y = 8 (x + y) = 16 \pm 8 \sqrt{(a + 4)}$ van aftrekt, en uit het verschil den vierkants-wortel trekt, dan zal men vinden:

$$x - y = \pm \sqrt{[a - 8 \mp 4 \sqrt{(a + 4)}]}$$

welke, met de laatst voorgaande vereenigd zijnde, geven zal:

$$x = 1 \pm \tfrac{1}{2} \sqrt{(a + 4)} \pm \tfrac{1}{2} \sqrt{[a - 8 \mp 4 \sqrt{(a + 4)}]}$$

$$y = 1 \pm \tfrac{1}{2} \sqrt{(a + 4)} \mp \tfrac{1}{2} \sqrt{[a - 8 \mp 4 \sqrt{(a + 4)}]}$$

'er zijn derhalve op deze vraag twee antwoorden. Zij a, zoo als gezegd is 45; dan is, de bovenste teekens nemende, $x = 6$ en $y = 3$; maar indien men de benedenste teekens neemt, dan is $x = -2\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{65}$ en $y = -2\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{65}$.

11. VRAAGSTUK. *Het getal a in twee deelen te deelen, zoodanig, dat het product der deelen gelijk zij aan het verschil van derzelver vierkanten?*

Stel het grootste deel x, het kleinste y; dan moeten de vergelijkingen:

$$x + y = a \text{ en } x^2 - y^2 = x y$$

opgelost worden. Deelende de tweede vergelijking door de eerste, dan zal men verkrijgen:

$$x - y = \frac{x y}{a} \text{ of } x y = a (x - y)$$

nu is $(x + y)^2 - 4 x y = (x - y)^2$: men heeft gevolgelijk:

$$a^2 - 4 a (x - y) = (x - y)^2$$

vergelijking, welke met betrekking tot $(x - y)$, eene vierkants-vergelijking is, waaruit men vindt:

$$x - y = - 2 a \pm a \sqrt{5}$$

vermits nu $x + y = a$ is, zal

$$x = - \tfrac{1}{2} a \pm \tfrac{1}{2} a \sqrt{5}$$

$$\text{en } y = + 1\tfrac{1}{2} a \mp \tfrac{1}{2} a \sqrt{5} \text{ zijn}$$

Nemen wij $a = 2$; dan is

eerste oplossing $x = - 1 + \sqrt{5}$

$y = + 3 - \sqrt{5}$

tweede oplossing $x = - 1 - \sqrt{5}$

$y = + 3 + \sqrt{5}$

Het blijkt uit deze oplossing: dat een gegeven getal op deze wijze in geene twee, onderling en, met het gegeven getal, meetbare, deelen kan verdeeld worden.

12. VRAAGSTUK. *Indien de sommen van de eerste en de tweede magten van de termen eener meetkunstige reeks, uit drie termen bestaande, gegeven zijn, begeert men deze reeks te vinden?*

Stellen wij de meetkunstige reeks x, xy, xy^2, voorts de som harer termen a en die van derzelver vierkanten b; dan hebben wij deze twee vergelijkingen:

$$x(1 + y + y^2) = a$$

$$\text{en } x^2(1 + y^2 + y^4) = b$$

deelende de tweede dezer vergelijkingen door de eerste, dan zal men, zie het 11. der merkwaardige producten op Tabelle Nº I, vinden.

$$x(1 - y + y^2) = \frac{b}{a}$$

en deelende deze laatste door de eerste

$$\frac{1 - y + y^2}{1 + y + y^2} = \frac{b}{a^2}$$

welke behoorlijk herleid zijnde, geven zal:

$$y^2 - \frac{a^2 + b}{a^2 - b}\, y + 1 = 0$$

waaruit, $\frac{a^2 + b}{a^2 - b} = c$ stellende, volgen zal:

$$y = \tfrac{1}{2} c \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4} c^2 - 1)}$$

stel $a = 21$; $b = 189$; dan zal $\frac{a^2 + b}{a^2 - b} = 2\frac{1}{2}$ zijn; waaruit $y = 2$ of $y = \frac{1}{2}$: nemende $y = 2$; dan is $x = 3$: maar neemt men $y = \frac{1}{2}$; dan is $x = 12$; en men vindt voor de meetkunstige reeks:

3, 6 en 12
of 12, 6 en 3

welke twee andwoorden op hetzelfde uitkomen.

13. VRAAGSTUK. *Men begeert twee meetkunstige reeksen, elk van vier termen, te vinden, zoodanig, dat trekkende de overëenkomstige termen van de tweede reeks van die van de eerste, de verschillen zullen zijn a, b, c, d; of 2, 16, 98 en 544?*

Stellen wij de eerste reeks x, xy, xy^2 en xy^3, en de tweede v, vt, vt^2 en vt^3; dan moeten de volgende vergelijkingen worden opgelost:

$$\begin{aligned} x - v &= a \\ xy - vt &= b \\ xy^2 - vt^2 &= c \\ \text{en } xy^3 - vt^3 &= d \end{aligned}$$

Uit de eerste vergelijking haalt men $x = v + a$: stelt men nu deze waarde van x in de drie volgende vergelijkingen, dan zal men hebben:

$(a+v) \cdot y - vt = b$; gevolgelijk $v = \dfrac{b - ay}{y - t}$

$(a+v) \cdot y^2 - vt^2 = c \quad . \; . \; . \; . \quad v = \dfrac{c - ay^2}{y^2 - t^2}$

$(a+v) \cdot y^3 - vt^3 = d \quad . \; . \; . \; . \quad v = \dfrac{d - ay^3}{y^3 - t^3}$

Uit deze drie waarden van v ontstaan de twee volgende vergelijkingen tusschen y en t:

$$1^\circ \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; b - ay = \frac{c - ay^2}{y + t}$$

$$2^\circ \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; b - ay = \frac{d - ay^3}{y^2 + yt + t^2}$$

De eerste dezer twee vergelijkingen geeft ons:

$$t = \frac{c - by}{b - ay}$$

welke waarde van t, in de tweede overgebragt zijnde, geven zal:

$$(b - ay) \cdot \left[y^2 + y \times \frac{c - by}{b - ay} + \left(\frac{c - by}{b - ay}\right)^2\right] = d - ay^3$$

welke alleenlijk de onbekende y bevat, en, na behoorlijke herleiding, tot de volgende vierkants-vergelijking

$$(b^2 - ac)\, y^2 + (ad - bc)\, y + c^2 - bd = 0$$

gebragt wordt. De wortels uit deze vergelijking zijn:

$$y = \frac{bc - ad \pm \sqrt{[-4(c^2 - bd) \cdot (b^2 - ac) + (ad - bc)^2]}}{2\,(b^2 - ac)}$$

waardoor ook t, v en x zullen bekend worden; want wij hebben:

$$t = \frac{c - by}{b - ay};\quad v = \frac{b - ay}{y - t};\quad en\ x = a + v$$

In getallen is $a = 2$; $b = 16$; $c = 98$; en $d = 544$; derhalve is $y = 3$ of $y = 5$; en men heeft deze twee oplossingen:

$$\textit{Eerste oplossing} \begin{Bmatrix} 5, & 25, & 125, & 625 \\ 3, & 9, & 27, & 81 \end{Bmatrix} \textit{de meetk. reeksen.}$$

$$\textit{Tweede oplossing} \begin{Bmatrix} -3, & -9, & -27, & -81 \\ -5, & -25, & -125, & -625 \end{Bmatrix} \textit{de meetk. reeksen.}$$

welke elk aan de voorwaarden der vraag voldoen.

14. VRAAGSTUK. *Men begeert eene harmonische reeks van drie termen, onder de volgende voorwaarden, te bepalen: 1° dat de som van derzelver termen 69, en het product van het verschil der kleinste met het verschil der grootste termen gelijk 90 zij?*

Stellen wij, (raadpleeg de oplossing van vraagstuk 45, pag. 346, I. C.) voor de termen der harmonische reeks x, $\dfrac{2xy}{x+y}$ en y, zijnde x de grootste en y de kleinste term, dan zal aan de twee volgende vergelijkingen:

$$x + \frac{2xy}{x + y} + y = 69 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (A)$$

en

$$\text{en } xy - \frac{4x^2y^2}{(x+y)^2} = 90 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (B)$$

welke de voorwaarden der vraag uitdrukken, moeten voldaan worden.

Vermenigvuldigen wij de eerste vergelijking (A) met $x + y$, dan verkrijgen wij:

$$(x+y)^2 + 2xy = 69\,(x+y)$$

waaruit volgt:

$$2xy = 69\,(x+y) - (x+y)^2$$

brengende nu deze waarde van $2xy$ in de tweede vergelijking (B) over; dan zal men na herleiding vinden:

$$(x+y)^2 - 115\,(x+y) + 3234 = 0$$

uit welker oplossing volgt:

$$x + y = 66 \quad \text{of} \quad x + y = 49$$
$$xy = 99 \quad \text{of} \quad xy = 490$$

en men zal voor de harmonische reeks vinden:

eerste oplossing $33 + 3\sqrt{110};\ 3;\ 33 - 3\sqrt{110}$

tweede oplossing $35;\ 20;\ 14$

beide aan de voorwaarden der vraag voldoende.

15. Vraagstuk. *Men begeert vijf getallen te vinden, welker som 285 is; moetende de drie eerste in eene rekenkunstige, de drie middelste in eene harmonische, en de drie laatsten in eene meetkunstige reeks zijn, en voorts zoodanig bepaald worden, dat het laatste, met het vierkant des eersten vermenigvuldigd en het product door het middelste gedeeld, voorts het komende quotient tot het twee- en- vijftigvoudige van deszelfs wortel vergaard zijnde, de komende som juist de som der vijf begeerde getallen zal voortbrengen?*

Indien men voor de vijf getallen stelt:

$$x,\ x+y,\ x+2y,\ \frac{(x+y)\,(x+2y)}{x},\ \frac{(x+2y)\,(x+y)^2}{x^2}$$

dan zijn de drie eerste in eene rekenkunstige reeks, welker gemeene verschil y is, de drie middelste zijn in eene harmonische reeks; want, volgens vraagstuk 45, pag. 346, I. C. is de derde harmonische evenredige tot twee getallen gelijk aan het product dezer twee getallen, gedeeld door tweemaal het eerste getal met het tweede verminderd: daarnu

$$\frac{(x+y) \times (x+2y)}{x} = \frac{(x+y) \times (x+2y)}{2\,(x+y) - (x+2y)}$$

is, blijkt de harmonische evenredigheid der middelste getallen, en het loopt van zelfs in het oog, dat de drie laatste getallen in eene meetkunstige reeks zijn, welker reden of exponent $\frac{x+y}{x}$ is: door dan deze vijf uitdrukkingen voor de gevraagde getallen aantenemen, is reeds aan drie onderscheidene voorwaarden der vraag voldaan.

Vermenigvuldigen wij nu het laatste getal $\frac{(x+2y) \times (x+y)^2}{x^2}$ met x^2,

 het

het vierkant van het eerste, en deelen wij het product door het middelste getal $x + 2y$; dan is $(x + y)^2$ het quotient, en wij hebben alzoo

$$(x + y)^2 + 52(x + y) = 285$$

welke, opgelost zijnde, $x + y$ of het tweede getal zal doen bekend worden. Men vindt:

$$1^{\circ} \quad x + y = 5 \quad \ldots \quad of \quad 2^{\circ} \quad x + y = -57$$

$$x = 5 - y \qquad\qquad x = -57 - y$$

$$x + 2y = 5 + y \qquad\qquad x + 2y = -57 + y$$

elk dezer twee uitkomsten moet nader getoetst worden.

Volgens de eerste voorwaarde der vraag is:

$$3(x + y) + \frac{(x + y) \times (x + 2y)}{x} + \frac{(x + 2y) \times (x + y)^2}{x^2} = 285 \quad (A)$$

deze vergelijking, in de eerste onderstelling, door $x + y = 5$ deelende, verkrijgt men, na herleiding:

$$\frac{x + 2y}{x} + \frac{(x + 2y) \times (x + y)}{x^2} = 54$$

waarin voor x en $x + 2y$ respectievelijk $5 - y$ en $5 + y$, met de hypothese van $x + y = 5$ overëenkomende, in plaats moet gesteld worden, wanneer men, na herleiding, verkrijgen zal:

$$11y^2 - 109y + 260 = 0$$

waaruit $y = 4$ en $y = 5\frac{10}{11}$ de wortelen zijn. In deze onderstelling vindt men voor de begeerde getallen:

$$1, \ 5, \ 9, \ 45, \ 225$$

$$\text{of } -\tfrac{10}{11}, \ 5, \ 10\tfrac{10}{11}, \ -60, \ 330$$

Neemt men $x + y = -57$; dan zal men, de vergelijking (A) door deze deelende, vinden:

$$\frac{x + 2y}{x} + \frac{(x + 2y) \cdot (x + y)}{x^2} = -8$$

en schrijvende in plaats van x en $x + 2y$ derzelver wardijen $-57 - y$ en $-57 + y$, zal men, na behoorlijke herleiding, verkrijgen:

$$7y^2 + 855y + 32490 = 0$$

welke twee onbestaanbare wortelen heeft, die als zoodanig aan de voorwaarden der vraag voldoen, en welke wij hier tot des Lezers oefening hebben achter wege gelaten.

16. VRAAGSTUK. *Het getal* 31 *in twee reeksen, elk van drie termen, te verdeelen; de eerste eene rekenkunstige en de tweede eene meetkunstige, onder de voorwaarden:* 1° *dat het verschil der rekenkunstige reeks gelijk zij aan de reden der meetkunstige;* 2° *dat de grootste term der rekenkunstige reeks gelijk zij aan den grootsten term der meetkunstige;* 3° *en dat, wanneer men alle de termen der rekenkunstige reeks door alle de overëenkomstige termen der meetkunstige reeks deelt, (dat is, den kleinsten door den kleinsten, den middelsten door den middelsten, en den grootsten door den grootsten,) de quotienten op nieuw eene rekenkunstige reeks zullen uitmaken.*

Stel

Stel de rekenkunſtige reeks $x - 2y$, $x - y$ en x; en de meetkunſtige z, zy en zy^2; dan voldoen deze reekſen reeds aan ééne van de voorwaarden der vraag. Deelende voorts de termen der rekenkunſtige reeks door die der meetkunſtige, dan moeten de quotienten $\frac{x - 2y}{z}$, $\frac{x - y}{zy}$ en $\frac{x}{zy^2}$ eene rekenkunſtige reeks uitmaken: men zal dan, volgens de eigenſchap van die reeks, hebben:

$$\frac{x}{zy^2} + \frac{x - 2y}{z} = \frac{2x - 2y}{yz}$$

Hieruit wordt afgeleid $x = \frac{2y^2}{y - 1}$: maar, volgens ééne van de voorwaarden der vraag, moet $x = zy^2 = \frac{2y^2}{y - 1}$ zijn; gevolgelijk is . . . $z = \frac{2}{y - 1}$.

De ſom van beide de reekſen te zamen is 31; men heeft derhalve:

$$3(x - y) + z(1 + y + y^2) = 31$$

ſtellende nu in deze vergelijking in plaats van x en z derzelver waardijen, dan verkrijgt men:

$$\frac{3y^2 + 3y}{y - 1} + \frac{2}{y - 1} \times (1 + y + y^2) = 31$$

welke herleid en opgelost zijnde, geven zal: $y = 3$ en $y = 2\frac{1}{5}$: waardoor men tot deze twee oploſſingen komt:

$$\textit{eerſte oploſſing}\left\{\begin{array}{l} 3,\ 6,\ 9,\ \textit{de rekenkunſtige reeks} \\ 1,\ 3,\ 9,\ \textit{de meetkunſtige reeks} \end{array}\right\}$$

$$\textit{tweede oploſſing}\left\{\begin{array}{l} 3\frac{10}{15},\ 5\frac{13}{15},\ 8\frac{1}{15},\ \textit{de rekenkunſtige reeks} \\ 1\frac{10}{15},\ 3\frac{10}{15},\ 8\frac{1}{15},\ \textit{de meetkunſtige reeks} \end{array}\right\}$$

welke beiden aan alle de voorwaarden der vraag voldoen.

17. VRAAGSTUK. *Men begeert het getal* 971 *in drie reekſen, eene rekenkunſtige, meetkunſtige en harmoniſche, te verdeelen, elke reeks uit drie termen beſtaande, en de volgende eigenſchappen hebbende:* 1° *dat het kleinſte lid van de meetkunſtige reeks, vermenigvuldigd met het middelſte lid van de rekenkunſtige, en voorts met het grootſte lid van de harmoniſche reeks, het product gelijk zal zijn aan* 21600; 2° *dat het gedurig product van het kleinſte lid van de harmoniſche, het middelſte lid van de rekenkunſtige en het grootſte lid van de meetkunſtige reeks gelijk zij aan* 64800: *en eindelijk ten* 3°, *dat de leden der harmoniſche reeks, met de overëënkomſtige leden der rekenkunſtige reeks vermenigvuldigd zijnde, (wel verſtaande, het kleinſte met het kleinſte, het middelſte met het middelſte, enz.) de producten aan de leden der meetkunſtige reeks gelijk zullen zijn.*

Stel voor de leden der rekenkunſtige reeks $x - y$, x en $x + y$.

Voor die der harmonische reeks u, $\frac{2uv}{u+v}$ en v, waarin u de kleinste en v de grootste term is.

Vermenigvuldigende nu de overéénkomstige leden dezer reeksen, dan verkrijgen wij:

$$u(x-y),\ \frac{2uyx}{u+v}\ \text{en}\ v(x+y)$$

welke zoodanig moeten bepaald worden, dat deze producten eene meetkunstige reeks uitmaken.

Nu zijn volgens de eerste en tweede voorwaarden der vraag:

$$uvx(x-y) = 21600$$
$$uvx(x+y) = 64800$$

uit welke vergelijkingen volgt: $x = 2y$. Door deze omstandigheid worden de rekenkunstige en meetkunstige reeksen eenvoudiger uitgedrukt.

de Rekenkunstige door . . . y, $2y$ en $3y$

de Meetkunstige . . . . . . uy, $\frac{4uvy}{u+v}$, en $3vy$

Maar nu moet, uit de natuur der meetkunstige reeks, volgen:

$$3uvy^2 = \frac{16u^2v^2y^2}{(u+v)^2}$$

welke tot de meer eenvoudige vergelijking

$$3(u+v)^2 = 16uv$$

zal gebragt worden. Stellen wij nu, in $uvx(x-y) = 21600$, in plaats van x derzelver waarde $2y$; dan wordt $uvy^2 = 10800$, en men verkrijgt:

$$uv = \frac{10800}{y^2}\ en\ u+v = \frac{240}{y}$$

waaruit gemakkelijk gevonden wordt,

$$v-u = \frac{120}{y};\quad v = \frac{180}{y};\quad u = \frac{60}{y}\ \text{en}\ \frac{2uv}{u+v} = \frac{90}{y}$$

Wij hebben derhalve, na aan alle deze voorwaarden voldaan te hebben, voor de rekenkunstige reeks

$$y,\ 2y\ en\ 3y$$

voor de harmonische

$$\frac{60}{y},\ \frac{90}{y},\ \frac{180}{y}$$

en indien wij de overéénkomstige termen dezer reeksen met elkander vermenigvuldigen, staan de producten

$$60,\ 180\ \text{en}\ 540$$

in eene meetkunstige reeks, zijnde $60 \times 2y \times \frac{180}{y} = 21600$ en $\frac{60}{y} \times 2y \times 540 = 64800$: het blijkt hieruit: dat de meetkunstige reeks van de grootheid y geheel onafhankelijk is. Men moet nu nog aan de eerste voorwaarde der vraag voldoen: dat, namelijk de som van de termen van alle deze reeksen gelijk aan 971 moet zijn: deze voorwaarde brengt ons tot de vergelijking:

y^2 —

$$y^2 - \frac{191}{6} y + 55 = 0$$

waaruit $y = 30$ of $y = 1\frac{5}{6}$. 'Er zijn dan op deze vraag de twee volgende antwoorden:

Rekenkunstige reeks . . . 30, 60, 90 of $1\frac{5}{6}$, $3\frac{2}{3}$, $5\frac{1}{2}$

Harmonische reeks . . . . 2 : 3 : 6 . . . $32\frac{8}{11}$, $49\frac{1}{11}$, $98\frac{2}{11}$

Meetkunstige reeks . . . 60, 180, 540 . . . 60, 180, 540

welke, elk in het bijzonder, aan de vraag voldoen.

18. VRAAGSTUK. *Van eene rekenkunstige reeks van drie termen maakt het product van de twee eerste termen, opgeteld met het vierkant des derden terms, $a = 9088$; en het product der twee laatste termen $b = 4928$: men vraagt, welke deze rekenkunstige reeks zij?*

Stel het derde getal of den derden term x, dan is de tweede $\frac{b}{x}$, en de eerste $\frac{ax - x^3}{b}$, en nu moet, volgens de eigenschap der rekenkunstige reeks,

$$\frac{ax - x^3}{b} + x = \frac{2b}{x}$$

zijn, welke ons brengt tot

$$x^4 - (a + b)\, x^2 + 2 b^2 = 0$$

waaruit

$$x = \pm \surd [\tfrac{1}{2} a + \tfrac{1}{2} b \pm \tfrac{1}{2} \surd (a^2 + 2ab - 7b^2)]$$

en men vindt voor de begeerde reeks:

1^o 24, 56, 88

2^o . . . . $32 \surd 2$, $44 \surd 2$, $56 \surd 2$

3^o . . . . . -24, -56, -88

4^o . . . . . $-32 \surd 2$, $-44 \surd 2$ en $-56 \surd 2$

19. VRAAGSTUK. *Van zeven getallen, die in eene rekenkunstige reeks opklimmen, staan de sommen van de eerste, tweede en derde magten van derzelver termen tot elkander, als p, q en r, of, als 1, 5 en 28: men vraagt deze reeks te bepalen?*

Stel de reeks $x - 3y$, $x - 2y$, $x - y$, x, $x + y$, $x + 2y$ en $x + 3y$; dan zal men tot de twee volgende vergelijkingen komen:

$$x^2 + 4y^2 = \frac{qx}{p} \text{ en } x^2 + 12y^2 = \frac{r}{p}$$

waaruit volgen zal:

$$x^2 - \frac{3qx}{2p} + \frac{r}{2p} = 0$$

$$x = \tfrac{3}{4} \cdot \frac{q}{p} \pm \frac{1}{4p} \surd (9q^2 - 8pr)$$

$$\text{en } y = \pm \surd \left(\frac{r}{12p} - \frac{1}{12} x^2\right)$$

 hier-

hierdoor vindt men twee antwoorden, in positieve getallen, namelijk:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6 \textit{ en } 7$$

$$3\tfrac{1}{2} - \tfrac{3}{4}\sqrt{21},\ 3\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{21},\ 3\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}\sqrt{21},\ 3\tfrac{1}{2},\ 3\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}\sqrt{21},\ 3\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{21},\ 3\tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{4}\sqrt{21}.$$

De negatieve waardijen van y geven dezelfde getallen.

20. VRAAGSTUK. *Van vijf getallen, welke eene rekenkunstige reeks uitmaken, staan de sommen van de eerste, derde en vijfde magten van derzelver termen tot elkander, als p, q en r, of, als 1, 15 en 295: men begeert deze getallen te vinden?*

Stel voor de begeerde getallen $x - 4y$, $x - 2y$, x, $x + 2y$ en $x + 4y$; dan zal men vinden:

$$y = \pm\sqrt{\left[\frac{4q \pm \sqrt{(66q^2 - 50pr)}}{200p^2}\right]};\ \textit{en}\ x = \pm\sqrt{\left(\frac{q}{p} - 24y^2\right)}$$

en men zal voor de begeerde getallen verkrijgen. *Eerste oplossing* 1, 2, 3, 4 en 5; *tweede oplossing* $\frac{1}{5}\sqrt{165} - \frac{2}{5}\sqrt{35}$, $\frac{1}{5}\sqrt{165} - \frac{1}{5}\sqrt{35}$, . . $\frac{1}{5}\sqrt{165}$, $\frac{1}{5}\sqrt{165} + \frac{1}{5}\sqrt{35}$, $\frac{1}{5}\sqrt{165} + \frac{2}{5}\sqrt{35}$. Men zal nog twee negatieve oplossingen vinden.

Algemeene Aanmerkingen.

§. 124. Daar eene tweede magts-vergelijking altijd twee wortels heeft, zal elk vraagstuk, welks finale vergelijking tot de tweede magt opklimt, ten minste, zooveel die finale vergelijking betreft, ook twee oplossingen moeten hebben. Nogtans zijn, met betrekking tot het vraagstuk, in zijn geheel genomen, deze oplossingen somtijds met omstandigheden verzeld, welker kennis van de grootste aangelegenheid is.

§. 125. 1. AANMERKING. †† *Somtijds zijn de twee oplossingen in den grond der zaak dezelfde, en doen de onbekenden slechts in eene andere rangorde voorkomen: dit verschijnsel zal altoos plaats hebben, wanneer de onbekende grootheden in alle de vergelijkingen, ten opzigte van elkander, op dezelfde wijze voorkomen, en gevolgelijk met elkander kunnen verwisseld worden, zonder dat daardoor den vorm der vergelijkingen verandert.* Stellen wij, bij voorb., dat gegeven zijn:

$$x + y = a,\ \textit{en}\ x^2 + y^2 = b$$

dan zal men, zie *vraagst.* 39, *pag.* 344, *I. C.*, vinden:

$$x = \tfrac{1}{2}a \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(2b - a^2)}\ \textit{en}\ y = \tfrac{1}{2}a \mp \tfrac{1}{2}\sqrt{(2b - a^2)}$$

in welke de eerste en tweede waardijen van x dezelfde zijn als de tweede en eerste waardijen van y; 'er bestaat dan maar éene oplossing.

De

De twee oplossingen, welke het vraagstuk in den eersten opslag schijnt te hebben, zijn in den aard der gegevene vergelijkingen gegrond, waarin niets te vinden is, waaruit volgen zou, dat de waarde van éénе der onbekende liever het grootste dan het kleinste der onbekende getallen zou zijn. Men kan daarom ook verwagten, dat, wanneer men zich niet van de kunstgreep van 39 *vraagst.* I. C. bedient, en uit de eerste vergelijking éénе der onbekende afzondert, en derzelver waarde in de tweede vergelijking overbrengt, men tot eene vierkants-vergelijking zal komen, welker wortelen de twee begeerde getallen zullen zijn. Indien men y afzondert, zal men vinden:

$$x^2 - ax + (\tfrac{1}{2}a^2 - \tfrac{1}{2}b) = 0$$

in welke, volgens §. 99, de som van de wortels dezer vergelijkingen gelijk a is: daar nu $x + y = a$ is, blijkt het: dat de wortels van de vergelijking in x geene andere dan de begeerde getallen kunnen zijn. Hetzelfde zal gebeuren, wanneer men x afzondert: men zal dan vinden:

$$y^2 - ay + (\tfrac{1}{2}a^2 - \tfrac{1}{2}b) = 0$$

welker wortelen insgelijks de onbekende getallen zullen zijn.

Hetzelfde verschijnsel zal plaats hebben, wanneer de vergelijkingen $x + y = a$ en $xy = b$ worden opgelost; gelijk ook, wanneer de vergelijkingen $x + y = a$ en $x^3 + y^3 = b$ gegeven zijn. Nemen wij nog de vergelijkingen $xy = a$ en $x^3 + y^3 = b$; dan zal $y = \frac{a}{x}$ zijn, en men verkrijgt voor de finale vergelijking:

$$in\ x \ldots\ x^6 - bx^3 + a^3 = 0$$
$$in\ y \ldots\ y^6 - by^3 + a^3 = 0$$

derzelver wortelen leeren de waardijen van x^3 en y^3 kennen: maar uit §. 99 en 100 blijkt: dat de wortels van elke vergelijking de cuben der gevraagde getallen zijn; want $x^3 + y^3 = b$ en $x^3 \times y^3 = a^3$.

§. 126. Nog zullen de oplossingén der finale vergelijking op hetzelfde uitkomen, al is het, dat de onbekenden in de gegevene vergelijkingen niet op dezelve wijze schijnen voortekomen: deze bijzonderheid heeft plaats gehad in de oplossing van het 12 *vraagstuk: pag.* 81, zij bragt ons tot de vergelijkingen:

$$x\ (1 + y + y^2) = a$$
$$x^2\ (1 + y^2 + y^4) = b$$

uit welker zamenvoeging de finale vergelijking:

$$y^2 - \frac{a^2 + b}{a^2 - b}\, y + 1 = 0 \quad \ldots\ldots \quad (A)$$

geboren wordt. Stellen wij nu: dat de ééne wortel dezer vergelijking r zij; dan zal de andere $\frac{1}{r}$ moeten zijn, omdat, onder deze voorwaarde alleen, de achterste term gelijk één kan zijn. Men heeft dus wel twee waardijen voor y: maar, wanneer men $x(1-y+y^2)=\frac{b}{a}$ van $x(1+y+y^2)=a$ aftrekt, dan verkrijgt men:

$$xy=\tfrac{1}{2}\left(a-\frac{b}{a}\right)$$

en het blijkt hieruit: 1° dat xy, of de tweede term der reeks, maar ééne bepaalde waarde kan hebben: 2° dat, y twee positieve waarden hebbende, x insgelijks twee positieve waardijen hebben moet, welke met de twee positieve waardijen van y overéénstemmen: maar de twee waardijen, welke men voor x verkrijgen zal, zullen dezelfde zijn, als die, welke de berekening voor xy^2 zal geven; evenwel met dit onderscheid, dat de kleinste waarde van x met de grootste van xy^2 zal overéénstemmen, en *vice versâ*.

Om zulks buiten allen twijfel te stellen, zoo merken wij aan: dat uit de laatst voorgaande vergelijking, in het algemeen, volgt:

$$x=\frac{a^2-b}{2ay}$$

stellende nu in plaats van y de waardijen voor y verkregen, namelijk r en $\frac{1}{r}$; dan zullen de waarden van x, welke daarmede in rangorde overéénstemmen, zijn:

$$\frac{a^2-b}{2ar},\ \textit{en}\ \left(\frac{a^2-b}{2a}\right)\times r$$

en indien wij deze met de vierkanten van de waarden van y, dat is, met r^2 en r^{-2}, vermenigvuldigen, dan zullen de waarden van xy^2, welke met die van x overéénstemmen, zijn:

$$\left(\frac{a^2-b}{2a}\right)\times r,\ \textit{en}\ \frac{a^2-b}{2ar}$$

hetwelk alles ten vollen overéénstemt met de finale vergelijkingen in x en xy^2, welke men door eene ligte berekening zal kunnen verkrijgen, namelijk:

$$x^2-\frac{a^2+b}{2a}x+\left(\frac{a^2-b}{2a}\right)^2=0$$

$$x^2y^4-\frac{a^2+b}{2a}xy^2+\left(\frac{a^2-b}{2a}\right)^2=0$$

in

in welke vergelijkingen

$$\frac{a^2+b}{2a}=\left[\frac{a^2-b}{2a}\right]\times\left(r+\frac{1}{r}\right)=\left[\frac{a^2-b}{2a}\right]\times\left[\frac{a^2+b}{a^2-b}\right]$$

(Zie hier boven de vergelijking in (A)) en voorts

$$\left[\frac{a^2-b}{2ar}\right]\times\left[\frac{a^2-b}{2a}\right]\times r=\left[\frac{a^2-b}{2a}\right]^2$$

zal zijn, zoo als het, volgens §§. 99 en 100, behoort. Het blijkt dan, waarom de twee oplosſingen van de vierkants-vergelijking in y dezelfde oplosſingen op het voorſtel geven: ook moest men, daar de termen eener meetkunſtige reeks, zoowel opklimmend als afdalend kunnen genomen worden, natuurlijk verwagten, dat 'er, onder de oplosſingen van dit vraagſtuk, ten minſte twee zijn moesten, welke op de rangorde na, waarin men de onbekende grootheden nemen kan, dezelfde moeten zijn. Voegen wij 'er nog bij: dat men, door het vraagſtuk op eene andere wijze aantevatten, de vergelijkingen op eene ſymetieke wijze zal zien te voorſchijn komen; want, ſtellen wij de termen der meetkunſtige reeks x^2, xy en y^2; dan zullen de volgende vergelijkingen:

$$x^2+xy+y^2=a$$
$$x^4+x^2y^2+y^4=b$$

moeten worden opgelost, en hoe zulks, onder anderen, geſchieden kan, is in de oplosſing van vraagſtuk 42, I. C., aangetoond.

§. 127. 2. Aanmerking. †† *Wanneer de vergelijkingen, die de voorwaarden van een vraagſtuk uitdrukken, zoodanig geſteld zijn, dat, wanneer de teekens der onbekenden worden omgekeerd, de onbekenden, in deze vergelijkingen voorkomende, alleenlijk van plaats veranderen, of wel, op de plaatsverandering geen invloed hebben, zonder dat, door de omkeering dezer teekens, de vorm der vergelijking verandert, dan zal 'er ééne poſitieve en ééne negatieve oplosſing plaats hebben, welke, op de teekens na, zullen gelijk zijn.* Dit geval zal plaats hebben in de vergelijkingen:

$$x-y=a \text{ en } x^3-y^3=b$$

welke, op de wijze, als in vraagſt. 41, pag. 345, I. C. behandeld zijnde, geven zullen:

$$x=\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{4b}{3a}-\tfrac{1}{3}a^2\right)}+\tfrac{1}{2}a;\ y=\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{4b}{3a}-\tfrac{1}{3}a^2\right)}-\tfrac{1}{2}a$$

in welke de eerſte waarde van x gelijk is aan de tweede waarde van y, negatief genomen, en omgekeerd: maar nu zal ook deze omſtandigheid

heid bevestigd worden, wanneer men de vergelijkingen in x en y uitbrengt, deze zullen geven:

$$x^2 - ax + \frac{a^3 - b}{3a} = 0$$

$$y^2 + ay + \frac{a^3 - b}{3a} = 0$$

Men ziet duidelijk: dat deze vergelijkingen zoodanig met elkander overeenstemmen, dat, wanneer men in éénc dezer vergelijkingen de wortels negatief stelt, de andere zal te voorschijn komen; waaruit volgt: dat $x = -y$, en $-x = y$ moet zijn: wanneer men nu ook in de gegevene vergelijkingen x en y negatief stelt, zullen zij $y - x = a$, en $y^3 - x^3 = b$ worden, vergelijkingen, welke aan de gegevene volmaakt gelijkvormig zijn. Hetzelfde zal gebeuren, wanneer $xy = a$, en $x - y = b$ gegeven zijn; want deze vergelijkingen zullen ons geven:

$$x^2 - bx - a = 0 \text{ en } y^2 + by - a = 0$$

en men zal vinden:

$$x = \tfrac{1}{2}b \pm \sqrt{(a + \tfrac{1}{4}b^2)} \text{ en } y = -\tfrac{1}{2}b \pm \sqrt{(a + \tfrac{1}{4}b^2)}$$

§. 128. 3. Aanmerking. †† *Wanneer de teekens der onbekenden omgekeerd zijnde, de vergelijkingen daardoor van gedaante veranderen, dan houden ook de voorgaande omstandigheden op plaats te hebben, en 'er zijn in allen opzigte twee oplossingen.* Dit geval zal plaats hebben, wanneer de vergelijkingen $x + 3y = a$ en $x^2 - y^2 = b$ gegeven zijn; want dan zal men voor de vergelijkingen in x en y vinden:

$$x^2 + \tfrac{1}{4}ax - \frac{a^2 + 9b}{8} = 0$$

$$y^2 - \tfrac{3}{4}ay + \frac{a^2 - b}{8} = 0$$

welke in alles van elkander onderscheiden zijn. Indien $a = 9$ en $b = 5$ gegeven zijn; dan zal $x = 3$ of $-5\tfrac{1}{4}$, en $y = 2$ of $4\tfrac{3}{4}$ zijn.

§. 129. 4. Aanmerking. †† *Het gebeurt somtijds, dat sommige van de wortelen der finale vergelijking niet aan alle de voorwaarden der vraag voldoen.* Descartes, *en zijne navolgers, noemden deze wortelen valsche wortelen, welke benaming, ten onregte ook aan de negatieve wortelen eener tweede en hoogere magts-vergelijking gegeven, door derzelver onnaauwkeurigheid, den leerling in de war moet brengen, waarom dan ook de voornaamste Wiskundigen van onzen tijd die ongeschikte benaming verworpen hebben.* †† *Het is gevolgelijk van be-*

belang bij de oplosfing van een voorftel te onderzoeken, of de gevondene wortels aan alle de voorwaarden der vraag voldoen, en die geene te verwerpen, die niet alle de uitgedrukte voorwaarden vervullen. * Wij zullen zulke wortels *onvoldoende wortels* noemen.

§. 130. †† De niet voldoende wortels ontftaan uit de volftrekte algemeenheid der ftelkundige teekens, welke, wanneer zij meer uitdrukken dan in het vraagftuk gezegd wordt, niet flechts de voorgeftelde vraag oplosfen: maar ook tevens een vraagftuk, hetwelk met hetzelve zulk eene naauwe overëénkomst heeft, dat zij beide in een meer algemeen vraagftuk kunnen begrepen worden, aan hetwelk dan ook beide wortels voldoen. Deze omftandigheid verdient door voorbeelden te worden opgehelderd.

21. VRAAGSTUK. *De zijde van een vierkant te vinden, wanneer het verfchil tusfchen deszelfs diagonaal en zijde gegeven is?*

Stel de zijde van het vierkant x: dan moet $\sqrt{2x^2} - x = a$ zijn, en men vindt:

$$x = + a \pm a \sqrt{2}$$

Wanneer men nu deze twee oplosfingen aandachtig inziet, blijkt het, dat, daar de diagonaal min de zijde niet negatief kan zijn, de oplosfing $x = a - a\sqrt{2}$ niet kan voldoen: DESCARTES zou daarom dezen wortel eenen valfchen wortel genoemd hebben. De oplosfing $x = a + a\sqrt{2}$ voldoet alleen. Maar vanwaar ontftaat, kan men vragen, deze onvoldoende wortel? Zeer natuurlijk, omdat men, in de voorftelling der vraag, alleenlijk denkt op een vierkant, hetwelk eene pofitieve zijde heeft: maar daar deze zijde in het algemeen zoowel pofitief als negatief kan gedacht worden, zoo geldt de ongefchikte wortel $x = a - a\sqrt{2}$, die noodzakelijk negatief is, voor dit geval. Laten wij nu aan x eene negatieve waarde geven, dan verandert de vergelijking in $\sqrt{2xx} + x = a$, en $x = -a \pm a\sqrt{2}$: nu is deze vergelijking de overzetting der vraag: *De fom van de diagonaal en de zijde van een vierkant* $= a$ *zijnde, de zijde te vinden?* en, wanneer men zich de zijde als pofitief voorftelt, voldoet alleen de oplosfing $x = -a + a\sqrt{2}$: maar neemt men de zijde negatief, dan geldt $x = -a - a\sqrt{2}$.

22. VRAAGSTUK. *Eene regte lijn zoodanig in twee deelen te verdeelen, dat het vierkant van het grootfte deel gelijk zij aan den rechthoek van de geheele lijn en het kleinfte deel?*

Stel de geheele lijn $= a$, het grootfte deel gelijk x; dan is het kleinfte deel $= a - x$, en

$$x^2 = a\,(a - x)$$
$$x = -\tfrac{1}{2}a \pm \tfrac{1}{2}a\sqrt{5}$$

de wijze nu, waarop de vraag is voorgedragen, laat ons niet toe $x = -\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}a\sqrt{5}$ te gebruiken, omdat 1°, het grootfte deel in dien zin niet

niet negatief, en niet grooter dan de gegevene lijn kan zijn. Intusschen kan men x negatief nemen: maar dan heet het niet meer de lijn a te verdeelen; maar wel, *de lijn te verlengen, zoodat het vierkant van het verlengde stuk gelijk zij aan de geheele lijn, en het verlengde stuk te zamen genomen, met de geheele lijn vermenigvuldigd*, een vraagstuk, hetwelk in vergelijking gebragt zijnde, geven zal: $x^2 = a(a + x)$ en voorts

$$x = + \tfrac{1}{2} a \pm \tfrac{1}{2} a \sqrt{5}$$

waarvan $x = \frac{1}{2} a + \frac{1}{2} a \sqrt{5}$ alleen voldoet, terwijl $x = \frac{1}{2} a - \frac{1}{2} a \sqrt{5}$, voor x eene negatieve waarde geeft, welke de eerste vraag oplost. Beide deze vragen zijn nu in de algemeene vraag: *eene onbepaalde regte lijn met twee punten A en B in dezelve gegeven zijnde, eene derde punt C te vinden zoodanig dat het vierkant van den afstand van A tot C gelijk zij aan den reghthoek onder den afstand en van B tot C en den afstand van A tot B?* begrepen, welke twee oplossingen heeft, in $x = -\frac{1}{2} a \pm \frac{1}{2} a \sqrt{5}$ begrepen.

23. Vraagstuk. *Gegeven zijnde $x + y = xy$, en $x^2 - y^2 = xy$, de waarde van x en y te vinden?*

Dit vraagstuk, waarvan Wolff, in zijne *Elementa Matheseos*, eene zeer omslagtige oplossing geeft, kan aldus worden opgelost: deel de tweede vergelijking door de eerste, dan heeft men: $x - y = 1$, en men zal vinden:

$$\begin{array}{l|l} x^2 - 3x + 1 = 0 & x = 1\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{5} \\ y^2 - y - 1 = 0 & y = \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{5} \end{array}$$

de tweede waarde van y is negatief; Wolff neemt dezen wortel voor valsch, tot reden gevende, dat, dezen wortel aannemende, y niet het kleinste getal zijn kan: maar zulks is eene dwaling, daaruit voortkomende, dat men de onbekende getallen zich natuurlijk in het begin der oplossing als positief voorstelt, welke nogtans, overëënkomstig den aard der vergelijkingen, eene negatieve waarde kunnen hebben, welke de oplossing leert kennen.

§. 131. †† Uit deze weinige voorbeelden blijkt het dan: dat de zoogenaamde valsche wortelen wel degelijk aan de voorwaarden der finale vergelijking, in de striktste algemeenheid genomen, voldoen, en slechts, met betrekking tot de bijzondere omstandigheden der vraag, onvoldoende kunnen zijn, waarom dan ook de uitkomsten der oplossing altijd aan dezelve moeten getoetst worden, ten einde die bijzondere wortels te leeren kennen, welke met deze omstandigheden instemmen. Dit zal in de oplossing van de volgende vraagstukken nog duidelijker worden.

24. Vraagstuk. *Een Koopman koopt twee soorten thee, in alles 1168 ponden: van de eerste soort heeft hij 20 maal zooveel ponden, als*

als het pond van die soort stuivers kost; van de tweede soort 16 maal zoo veel ponden, als het pond van die soort stuivers kost; nu verkoopt hij die beide soorten, door elkander, tegen één-derde zooveel stuivers het pond, als hij van de eerste soort meer ponden dan van de tweede soort heeft gekogt, en wint, dus doende, op de geheele partij 285 guldens $1\frac{1}{3}$ stuiver: men begeert te weten: hoeveel ponden van elke soort, en, tegen hoe vele stuivers het pond, hij dezelve hebbe ingekogt.

Stel, dat hij van de eerste soort koopt x ponden; dan bedraagt de tweede soort $1168 - x$ ponden: volgens de vraag besteedt hij voor het pond van de eerste soort $\frac{1}{20}x$ stuiv., en voor het pond van de tweede $\frac{1}{16}(1168 - x)$ stuiv., en dan beloopt de eerste soort $\frac{1}{20}x^2$ stuivers; en de tweede $\frac{1}{16}(1168 - x)^2$ stuivers, en hij heeft beide partijen gevolgelijk ingekogt voor $\frac{1}{20}x^2 + \frac{1}{16}(1168 - x)^2$ stuivers.

Om nu voor den verkoop eene uitdrukking te vinden, trekke men $1168 - x$ het getal ponden van de tweede partij van x het getal ponden van de eerste partij af, het verschil is $2x - 1168$: één-derde van dat verschil, of $\frac{1}{3}(2x - 1168)$, met 1168 verm. geeft $\frac{1}{3}.(2x - 1168) \times 1168$, en voor zoo vele stuivers heeft hij beide partijen uitverkogt. Nu zegt de vraag: dat hij gewonnen heeft 285 gl. $1\frac{1}{3}$ stuiv., dat is $5701\frac{1}{3}$ stuiv.: men zal derhalve de vergelijking:

$\frac{1}{3}(2x - 1168).1168 - \frac{1}{20}x^2 - \frac{1}{16}(1168 - x)^2 = 5701\frac{1}{3}$ hebben, welke herleid zijnde, geven zal:

$$x^2 - \frac{221920}{27}x + \frac{130969600}{27} = 0$$

waaruit volgt: $x = 7579\frac{7}{27}$ en $x = 640$.

Hoewel nu deze vergelijking twee positieve wortels heeft, die beide aan de vergelijking voldoen, is echter de grootste wortel op de natuur der vraag niet toepasselijk: want, daar men twee soorten te zamen van 1168 ponden gekogt heeft, zal de eene soort geen $7579\frac{7}{27}$ pond kunnen bedragen: men verwerpt dus dezen wortel en behoudt slechts den niet strijdigen wortel 640, welke alleen op de natuur der vraag toepasselijk kan zijn, en dan is $1168 - x = 528$ ponden van de tweede soort en is de eerste soort tegen $\frac{1}{20}x = 32$ stuivers, en de tweede soort tegen $\frac{1}{16}(1168 - x) = 33$ stuivers ingekogt.

25. VRAAGSTUK. *Indien het door proeven bekend is, dat het geluid in den tijd van ééne secunde eenen weg van 337 meters aflegt, en een vallend ligchaam, in de eerste secunde van zijnen val, 4,9044 meters doorloopt, hoe diep zal dan een put zijn, wanneer de tijd, die sedert den val eens ligchaams, dat men in den put laat vallen, tot dat men den slag van den val hoort, verloopt, door waarneming bekend en gelijk 20 secunden is. De tegenstand van de lucht niet in aanmerking nemende?*

Stel:

Stel: 4,9044 meters $= a$, 377 meters $= b$, en 20 fecunden $= t$, en de diepte van den put $= x$ meters. In de Natuurkunde wordt bewezen: dat de hoogten, door welke een ligchaam vrijelijk valt, aan het vierkant van den tijd, welke federt het begin van den val verloopen is, evenredig moet zijn: men heeft alzoo de evenredigheid: a ftaat tot x, gelijk éénmaal één tot het vierkant van het getal fecunden, noodig zijnde, om door de diepte van x meters te vallen; de vierde evenredige tot a, x en 1 gelijk $\frac{x}{a}$ zijnde, zal de tijd van den val door $\sqrt{\frac{x}{a}}$ worden uitgedrukt.

Wederom leert de Natuurkunde: dat het geluid regelmatig voortgaat: wij hebben derhalve

$$b : x = 1 : \frac{x}{b}$$

en de tijd, welke noodig is, om het geluid, uit den bodem van den put, tot aan deszelfs opening, te doen opklimmen, is gelijk $\frac{x}{b}$. Wij hebben dan de vergelijking:

$$\sqrt{\frac{x}{a}} + \frac{x}{b} = t$$

welke, herleid zijnde, geven zal:

$$x^2 - \left(2\,b\,t + \frac{b^2}{a}\right)x + b^2\,t^2 = 0$$

waaruit voor de diepte van den put volgen zal:

$$x = b\,t + \frac{b^2}{2\,a} \pm \frac{b}{2\,a}\sqrt{(4\,a\,b\,t + b^2)}$$

Hier heeft men nu twee waarden, welke aan de finale vergelijking voldoen: evenwel beftaat 'er maar éene waarde, die de vraag kan oplosfen; want de put heeft maar éene diepte. Het loopt duidelijk in het oog, welke dezer twee waarden aan de vraag voldoen zal; want, vermits de tijd, in welken het geluid opklimt, minder is dan de waargenomen tijd, die, federt het begin van den val en het hooren van den flag, verloopt, zal $x < b\,t$ moeten zijn: deze omftandigheid kan nu niet met

$$x = b\,t + \frac{b^2}{2\,a} + \frac{b}{2\,a}\sqrt{(b^2 + 4\,a\,b\,t)}$$

inftemmen: maar, omdat $\sqrt{(b^2 + 4\,a\,b\,t)} > b$ is, zal $+\frac{b^2}{2\,a} - \frac{b}{2\,a}\sqrt{(b^2 + 4\,a\,b\,t)}$ negatief worden, en de ware bruikbare wortel zal gevolgelijk zijn:

$$x = b\,t + \frac{b^2}{2\,a} - \frac{b}{2\,a}\sqrt{(b^2 + 4\,a\,b\,t)}$$

Nu is $a = 4{,}9044$ meters; $b = 337$ meters; $t = 20$, en de berekening zal geven: $x = 1285{,}03$ meters voor de diepte des puts.

§. 132. 5. Aanmerking. †† *Wanneer een vraagftuk ons tot eene finale vergelijking brengt, welke onbeftaanbare wortels heeft, is zulks een be-*

bewijs van deszelfs onbestaanbaarheid. Het volgend vraagstuk zal daarvan een voorbeeld geven.

26. VRAAGSTUK. *Het getal 30 in drie deelen te verdeelen: zoodanig, dat het tweede deel driemaal grooter dan het eerste, en de som van de vierkanten der deelen, te zamen genomen, gelijk 300 zij?*

Het eerste deel gelijk x stellende; dan is het tweede $3x$, en het derde $30 - 4x$, en men heeft:

$$x^2 + 9x^2 + (30 - 4x)^2 = 300$$

welke geven zal: $x = + \frac{60}{13} \pm \frac{10}{13} \sqrt{-3}$ eene onbestaanbare waarde, welke de onbestaanbaarheid der vraag bewijst.

§ 133. Dan, hoewel dit laatste vraagstuk onmogelijk is, volgt daarom niet: dat eene vraag van gelijke natuur, maar in andere getallen gegeven, onmogelijk zou zijn: want, wanneer 'er geene tegenstrijdigheid in gelegen is, een getal in drie deelen te deelen, zoodanig dat het tweede deel driemaal het eerste deel evenaart, en de som van de vierkanten der deelen altijd een bepaald getal uitmaakt, dan moet de onbestaanbaarheid der vraag alleen in de betrekking der gegevene getallen gelegen zijn; alleen daarin, dat van alle mogelijke wijzen, waarop men aan de eerste voorwaarde voldoen kan, geen geval bestaat, in hetwelke de som der vierkanten 300 kan worden: men ziet gevolgelijk: dat 'er eenen overgang van het mogelijke tot het onmogelijke moet plaats hebben. Deze overgang ontdekt men, wanneer men in plaats van de gegevene getallen letters stelt. Zij $30 = a$ en $300 = b$, dan zal

$$x^2 + 9x^2 + (a - 4x)^2 = b \text{ moeten zijn}$$

deze vergelijking oplossende, wordt

$$x = + \tfrac{2}{13} a \pm \tfrac{1}{26} \sqrt{(26b - 10a^2)}$$

De bestaanbaarheid van de voorwaarden der vraag hangt nu slechts af van de bestaanbaarheid der uitdrukking $\frac{1}{26}\sqrt{(26b - 10a^2)}$; want, indien $10a^2 < 26b$ is, is de grootheid onder het wortelteeken positief, en heeft eenen positieven en eenen negatieven wortel; maar wordt $10a^2 > 26b$, dan is deze grootheid negatief, en kan geenen vierkants-wortel hebben: hieruit blijkt dan ten klaarste, dat het mogelijke of onmogelijke der vraag alleen van de betrekking der gegevene getallen a en b afhangt, en dat 'er een punt van overgang van het mogelijke tot het onmogelijke moet plaats hebben, hetwelk noodzakelijk kenbaar zal worden, indien men de grootheid onder het wortelteeken gelijk nul stelt; want, dan is $26b - 10a^2 = 0$ of $26b = 10a^2$ en $b = \frac{5}{13}a^2$, wanneer nu $b = \frac{5}{13}a^2$ is, is ook

$\pm \sqrt{(26\,b - 10\,a^2)} = 0$, en $x = \frac{2}{13}\,a$, $3\,x = \frac{6}{13}\,a$, $a - 4\,x = a - \frac{8}{13}\,a = \frac{5}{13}\,a$, en nu is $(\frac{2}{13}\,a)^2 + (\frac{6}{13}\,a)^2 + (\frac{5}{13}\,a)^2 = \frac{4}{169}\,a^2 + \frac{36}{169}\,a^2 + \frac{25}{169}\,a^2 = \frac{65}{169}\,a^2 = \frac{5}{13}\,a^2 = b$; wanneer nu $b < \frac{5}{13}\,a^2$ genomen is, wordt $26\,b - 10\,a^2$ negatief, en de vraag is onmogelijk; maar zoodra $b = \frac{5}{13}\,a^2$ of grooter dan $\frac{5}{13}\,a^2$ gegeven is, zijn de voorwaarden met elkander bestaanbaar, en het voorstel heeft twee oplosſingen.

§. 134. * Het bepalen van de betrekking der gegevene grootheden, waaronder een bepaald vraagſtuk mogelijk wordt, noemt men: *het bepalen van de limieten van overgang van het mogelijke tot het onmogelijke, of van het beſtaanbare tot het onbeſtaanbare der vraag:* het maakt altijd een gedeelte van derzelver oplosſing uit: doch, kan nimmer algemeen beoordeeld worden, zoo men niet, in plaats van de gegevene getallen, algemeene letters ſtelt, en het vraagſtuk zuiver ſtelkunſtig, dat is, zoo algemeen mogelijk is, oplost.

§. 135. Merken wij nog aan: dat het bepalen van de limiet der mogelijkheid in het voorgaande vraagſtuk te gelijk eene andere vraag oplost, te weten, deze: *het getal a in drie deelen te verdeelen, zijnde het tweede deel gelijk driemaal het eerſte, zoodanig dat de ſom van de vierkanten der deelen zoo klein valle als mogelijk is*; want, welk ook het getal a zijn moge, moet de ſom van de vierkanten, zal de vraag mogelijk zijn, niet kleiner dan $\frac{5}{13}\,a^2$ mogen genomen worden. Dan zulks verder te overwegen, zou ons in de leerwijze der *maxima* en *minima* vervoeren, welke wij op zijnen tijd uit algemeener beginzelen zullen afleiden.

§. 136. 6. Aanmerking. †† *Men moet, (en deze aanmerking geldt in het algemeen voor alle vraagſtukken,) zorgen, dat in de oplosſing de vraag tot geene hoogere magt opklimme, dan bij eene beter ingerigte oplosſing zou plaats hebben.* Omdat, 1° de oplosſing van eene hoogere magts-vergelijking moeijelijker dan die van eene lagere magts-vergelijking is. 2° Omdat, wanneer eene vraag in de oplosſing tot eene hagere magt kan gebragt worden, 'er in de finale vergelijking overtollige wortels zullen gevonden worden, die men met regt valſche wortelen zou kunnen noemen. Men moet dan wel aandachtig overwegen: hoe de vraag in de oplosſing moet aangevat worden, en gelijk, in de gewone Cijferkunst, de kennis van de eigenſchappen der getallen, in elk geval, den eenvoudigſten weg aanwijst, zoo ook hangt het gelukkig ſlagen der oplosſing van de grondige kennis van de eigenſchappen der ſtelkundige uitdrukkingen af. De oplosſing van de 6 en 7 vraag-

ſtuk-

stukken, pag. 76 en 77, zouden, indien men uit $x+y=a$, $y=a-x$ afgeleid, en deze waarde in de tweede vergelijking had overgebragt, in het 6 vraagstuk, eene vierde, en, in het 7 vraagstuk, eene vijfde magts-vergelijking gegeven hebben: niet te min heeft men deze twee vraagstukken, door van de bekende eigenschappen der stelkundige uitdrukkingen gebruik te maken, tot de tweede magt kunnen brengen.

Zeer ligtelijk kan men ook tot eene hoogere magt vervallen, wanneer men zich door het eenvoudige, dat de inrigting van eene oplossing schijnt te hebben, laat misleiden, en daarop voortwerkt. Dit zal het geval zijn, wanneer men het 13 vraagstuk pag. 81. op de volgende wijze aanvat. Stel de eerste meetkunstige reeks x, y, z en v; dan is de tweede $x-1$, $y-5$, $z-19$ en $v-65$, en men heeft de vergelijkingen

$$xz=y^2;\ yv=z^2;\ (x-1)(z-19)=(y-5)^2;\ (y-5)(v-65)=(z-19)^2$$

en men zal eindelijk tot

$$y^3-10y^2-11y+180=0$$

komen, welker wortelen zijn: $y=9$; $y=5$ en $y=-4$ (27). Intusschen voldoen alleen maar de wortels 9 en -4; want, in den loop der oplossing, vindt men:

$$z=\frac{5y^2-6y}{2y-5}$$

z wordt derhalve, in de onderstelling van $y=5$, gelijk 19, $x=y^2 \div z=1\frac{6}{19}$, en $v=z^2\div y=19^2:5=72\frac{1}{5}$. De wortel $y=5$ geeft derhalve, voor de eerste meetkunstige reeks de getallen $1\frac{6}{19}$, 5, 19 en $72\frac{1}{5}$, welke wel eene meetkunstige reeks uitmaken; dan, wanneer men van deze getallen, in rangorde, 1, 5, 19 en 65 aftrekt, zijn de verschillen $\frac{6}{19}$, 0, 0 en $7\frac{1}{5}$ ver af van eene meetkunstige reeks uittemaken, zoo als, volgens de vraag, zou behooren plaats te hebben. De wortel $y=5$, kan derhalve, als vreemd aan de natuur der vraag, met regt eenen *valschen wortel* genoemd worden.

(27) Dit is de oplossing, welke de Heer A. VRYER, een bekwaam stelkunstenaar, van dit vraagstuk gegeven heeft. Zie *Wiskundige Verlustiging van het Genootschap: Een onvermoeide arbeid komt alles te boven. II. Deel, pag. 24, et seq.*

WISKUNDIGE LESSEN.

XI. BOEK.

Over de deelers en gemeene deelers der ſtelkundige uitdrukkingen, en derzelver gebruik in de oplosſing der hoogere magts-vergelijkingen.

ZEVEN- EN- VEERTIGSTE LES.

Over het vinden van de deelers der ſtelkundige uitdrukkingen.

§. 137. Gelijk een getal uit het product van twee of meer getallen kan ontſtaan, even zoo kan ook eene ſtelkundige uitdrukking uit het product van twee of meer ſtelkundige uitdrukkingen geboren worden. Bij voorbeeld, $49x^3 - 126x^2 + 186x - 135$ is het product van $7x^2 - 9x + 15$ en $7x - 9$, en deze laatſte zijn gevolgelijk ſtelkundige deelers van de eerſte. †† Gelijk nu, in getallen, niet elk gegeven getal het product van andere getallen is, waarom de getallen in twee groote hoofdſoorten, deelbare en ondeelbare getallen, onderſcheiden worden; zoo is ook elke ſtelkundige uitdrukking niet altijd het product van twee of meer anderen. De ſtelkundige uitdrukkingen, welke in den loop der berekeningen kunnen voorkomen, zijn dan deelbaar of ondeelbaar. En hieruit ontſtaat het gewigtige vraagſtuk: *Eene ſtelkundige uitdrukking gegeven zijnde, te onderzoeken, of zij deelbaar of ondeelbaar zij, en in het eerſte geval hare deelers te vinden?* Wij zullen ons in deze les met deszelfs oplosſing bezig houden.

§. 138. Wanneer wij deze vraag in deszelfs geheele uitgeſtrektheid zouden willen behandelen, zou zulks een geheel boekdeel vereiſchen: wij zullen ons daarom alleen met die gevallen ophouden, welke op de oplosſing der hoogere magts-

ver-

vergelijkingen en de theorie der kromme lijnen en oppervlakten onmiddelijk kunnen toegepast worden.

§. 139. Op dat wij nu onze denkbeelden op eene duidelijke en geregelde wijze zouden kunnen voordragen, zullen wij eene ſtelkundige uitdrukking, als $49\,x^3 - 126\,x^2 + 186\,x - 135$, welker deelers onderzogt worden, als veranderlijk beſchouwen. †† Het is zeer klaarblijkelijk, dat, wanneer men de waarde van x verandert, die der uitdrukking ook noodzakelijk zal moeten veranderen. Stellen wij, bij voorbeeld, $x = 2, 1, 0, -1$, enz., dan zullen de waarden der uitdrukking, welke met die aangenomene waarden van x overëenſtemmen, in het onderſtaande tafeltje gevonden worden.

$$\left.\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 1 \\ x = 0 \\ x = -1 \end{array}\right| 49x^3 - 126x^2 + 186x - 135 = \left|\begin{array}{l} +125 \\ -26 \\ -135 \\ -496 \end{array}\right.$$

Het blijkt uit dit tafeltje: dat de waarde van $49x^3 - 126x^2 + 186\,x - 135$ voornamelijk afhangt van de waarde, die men aan x geeft. †† *Deze uitdrukking wordt dus in waarde veranderlijk, zoodra men x als veranderlijk beſchouwt.* * Omdat nu de verandering van de waarde der uitdrukking van die der grootheid x afhangt, zegt men: dat $49\,x^3 - 126x^2 + 186\,x - 135$ eene uitdrukking van de veranderlijke grootheid x is.

§. 140. * Wanneer men in eene ſtelkundige uitdrukking éénе of meer grootheden als veranderlijk, en de overige als ſtandvastig beſchouwt, pleegt men de ſtandvastige door de eerſte, en de veranderlijke door de laatſte letters van het alphabeth uittedrukken.

§. 141. * De uitdrukkingen $aa + xx$, $\sqrt{(a^2 - x^2)}$, $\frac{a+x}{a-x}$ enz. kunnen als uitdrukkingen van ééne veranderlijke grootheid x worden aangemerkt.

§. 142. * 'Er zijn ook uitdrukkingen van twee en meer veranderlijke grootheden. Alzoo is $x^2 - 2\,a\,x\,y + b\,y^2 + c\,x + d\,y - e$ eene uitdrukking van twee veranderlijke grootheden x en y; (a, b, c, d en e ſtandvastig zijnde.)

§. 143. * Hoezeer nu, in het algemeen, zie §. 453, I. C., de waarde eener ſtelkundige uitdrukking gedeeltelijk van haren vorm en gedeeltelijk van de waardijen der grootheden, welke in hare zamenſtelling voorkomen, afhangt, pleegt men nogtans te zeggen: *dat, in het bijzonder, de waarde eener uitdrukking afhankelijk is van de waarde der grootheden, welke in dezelve als veranderlijk beſchouwd worden*; omdat de minſte verandering, welke de veranderlijke grootheden ondergaan, de waarde der geheele uitdrukking verandert.

§. 144. * Wij zullen nu in de behandeling van ons onderwerp ons alleenlijk bepalen, 1° tot de ſtelkundige uitdrukking tot ééne veranderlijke grootheid, 2° tot uitdrukkingen van twee en meer veranderlijke grootheden. Het ſpreekt van zelfs: dat de uitdrukkingen, welker deelers men onderzoekt, tot den rang der ſtelkundige geheelen, zie §. 77, moeten behooren; en — het zij eens en vooral gezegd — * dat die uitdrukkingen naar de opklimmende of afdalende magten der veranderlijke grootheid, zie §. 44, moeten geordend zijn. Omdat nu het aanwezen van de deelers eener ſtelkundige uitdrukking, uit de wijze, waarop de producten ontſtaan, zal moeten beoordeeld worden, zal het vooraf noodig zijn, dat wij ter bekorting de volgende bepalingen van woorden en zaken geven.

§. 145. * Eene uitdrukking $a x^n + b x^{n-1} + enz.$ wordt gezegd tot de n^{de} magt te behooren, wanneer de exponent van de hoogſte magt der onbekende gelijk n is. †† Wanneer nu zulk eene uitdrukking deelbaar is, kunnen de factoren van de volgende vormen

tweeledig	$p\,x + q$
drieledig	$p\,x^2 + q\,x + r$
vierledig	$p\,x^3 + q\,x^2 + r\,x + s$
enz.	*enz.*

zijn. * De term, waarin de hoogſte magt der veranderlijke grootheid x voorkomt, noemt men den hoogſten, en die, welke geheel van de veranderlijke grootheid bevrijd is, den laagſten term. * Deze benamingen gelden insgelijks voor de factoren der uitdrukking, welke, zie §. 44 en 58, op dezelfzelfde wijze, naar de opklimmende of afdalende magten der daarin voorkomende veranderlijke grootheid, moeten geordend zijn.

I. *Onderzoek van de tweeledige deelers van den vorm* $x + p$.

§. 146. Beginnen wij met te ſtellen: dat de uitdrukking $x^3 - 5x^2 - 29x + 105$ gegeven zij, en dat men begeert te bepalen, of dezelve uit de vermenigvuldiging van factoren van den vorm $x + p$, $x + q$, $x + r$ ontſtaan zij? Voor zooveel men eenig duidelijk begrip van de multiplicatie en de diviſie der ſtelkundige uitdrukkingen verkregen hebbe, ziet men ten klaarſte: †† dat, wanneer een factor van den vorm $x + p$ beſtaat, het getal p een deeler van 105 zal moeten zijn. Nu vindt men, volgens de handelwijze van de XV *Les*, I. C. voor de deelers van 105, de getallen: 1, 3, 5, 7, 15, 21, 35 en 105, daar men nu, ingeval 'er een deeler beſtaat, niet vooruit weten kan, of het getal p poſitief of negatief zal zijn, zal men moeten beproeven, of de gegevene uitdrukking door éêne der volgende: $x+1$, $x+3$, $x+5$, $x+7$, $x+15$, $x+21$, $x+35$, $x+105$, of door $x-1$, $x-3$, $x-5$, enz., tot $x-105$ ingeſloten, deelbaar zij? want, indien 'er tweeledige factoren in de gegevene uitdrukking beſtaan, zullen zij noodzakelijk daar onder moeten behooren, en zij zullen alle door deze beproeving te voorſchijn komen. Men zal ook in de daad bevinden: dat $x-7$, $x-3$ en $x+5$ deelers der gegevene uitdrukking zijn. Beſtaan 'er geene deelers, zullen alle deze beproevingen vruchteloos afloopen.

§. 147. Alhoewel tot deze wijze van onderzoek, waarvan Harriot (28) het eerst gebruik gemaakt heeft, een bepaald ge-

(28) Een Engelsch Wiskundige, te *Oxford* in 1560 geboren. Hij was de eerſte, die alle de termen eener hoogere magts-vergelijking in het voorſte lid overbragt. Voorzeker in den eerſten opſlag eene geringe zaak: doch die, in hare gevolgen, de verhevenſte ontdekkingen heeft aan den dag gebragt

getal beproevingen gevorderd wordt, en men alzoo met zekerheid de voorhanden zijnde factoren moet ontdekken, is zij, wegens de menigvuldige ſtelkundige deelingen, welke men in dezelve moet uitwerken, ten uiterſte lastig. NEWTON heeft daarom, in zijne *Arithm. Univ. Cap.* VIII. *Art.* II. eene andere handelwijze voorgedragen, welke geheel en alleen ſteunt op het beginſel, dat de ſtelkundige factor (zie noot 22, pag. 65.) eener ſtelkundige uitdrukking altijd factor blijft, welke waarde de letters ook mogten verkrijgen: indien dan $x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ door $x + p$ deelbaar is, en men aan x achtervolgens de waarden 0, 1, 2, 3, 4, 5, enz. geeft, dan zal de gegevene uitdrukking in getallen waarden verkrijgen, die wij kortheidshalve D, P, Q, R, S, enz. zullen noemen, terwijl de deeler $x + p$ in p, $p + 1$, $p + 2$, $p + 3$, enz. veranderen zal; en, nu zal, volgens het zoo even aangehaalde beginſel, D door p, P door $p + 1$, Q door $p + 2$, R door $p + 3$, enz. moeten deelbaar zijn. Hierop berust de volgende Regel, welke, met eenige verandering, dezelfde is, welke NEWTON op de aangehaalde plaats heeft opgegeven.

§. 148. 1° „ *Men ſtelle voor de veranderlijke grootheid* „ *eenige, in eene rekenkunſtige reeks opklimmende, waardijen,* „ *als* -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, *enz. en berekene de* „ *waarden, welke de gegevene uitdrukking, in deze onderſtel-* „ *lingen, verkrijgt: de overëenkomſtige waarden van den* „ *deeler zullen dan* $p - 3$, $p - 2$, $p - 1$, p, $p + 1$, $p + 2$, „ $p + 3$, *worden, en men zal nu de waarde van p moeten be-* „ *palen.*"

2° „ *Tot dat einde, zal men alle de deelers van den be-* „ *kenden term der gegevene uitdrukking zoeken, en, p (zoo-* „ *wel poſitief als negatief,) aan deze deelers gelijk ſtellende,* „ *onderzoeken, of de waarden der gegevene uitdrukking, die* „ *door* $p - 3$, $p - 2$, $p - 1$, p, $p + 1$, $p + 2$, $p + 3$, *moe-* „ *ten deelbaar zijn, in de daad door die deelers, zonder over-* „ *ſchot, kunnen gedeeld worden; zoo niet, dan moet men de* „ *waarde, welke voor p genomen is, als onvoldoende verwer-* „ *pen; zoo ja, dan zal* $x + p$ *een factor der gegevene uit-*

„ *druk-*

„ *drukking zijn, hetgeen door nadere beproeving zal beves-*
„ *tigd worden* (29).”

§. 149. Nemen wij de uitdrukking $x^4 - 4x^3 - 164x^2 + 336x + 5760 = y$ tot een voorbeeld:

waarden van x	*waarden van y*	*overëenkomst. d.*
-3	$+3465$	$p-3$
-2	$+4480$	$p-2$
-1	$+5265$	$p-1$
0	$+5760$	p
$+1$	$+5929$	$p+1$
$+2$	$+5760$	$p+2$
$+3$	$+5265$	$p+3$

deelers van 5760
1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, enz.

stellende $x = -3, -2$ enz., dan verkrijt y de waarden, welke in de tweede kolom van het bovenstaande tafeltje voorkomen, nevens welke, in de derde kolom, de overëenkomstige deelers geplaatst zijn: de deelers van den standvastigen term der gegevene uitdrukking zijn 1, 2, 3, 4, 5, 6, enz. Men neme nu voor p éénen dezer deelers: neemt men, bij voorbeeld, $p = 5$, dan zijn de overëenkomstige deelers van de derde kolom 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8; maar 3465 is niet door 2 deelbaar; de deeler kan dan niet $x + 5$ zijn: maar nemen wij $p = 6$, dan veranderen $p - 3$, $p - 2$, enz. in 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, en, daar alle de overëenkomstige waarden van y door deze getallen deelbaar zijn, is het zeer waarschijnlijk, dat $x + 6$ een factor van de gegevene uitdrukking zal zijn: gelijk ook door dadelijke deeling bevestigd wordt. Men vindt nog $x+10$, $x-12$ en $x-8$ (30).

§. 150.

(29) Deze regel verschilt bijna niet van dien, welken onze Landgenoot, de Heer VAN WASSENAAR, vroeger gevonden had, en welken VAN SCHOOTEN *in Comm. Cartesii Geom. pag.* 307, ons leert kennen. Indien $x + p$ een deeler der gegevene uitdrukking is, zal p een factor van derzelver standvastigen term moeten zijn: nu zal, volgens de opmerking van VAN WASSENAAR, indien men de veranderlijke grootheid x met een zeker getal a vermeerdert of vermindert, de waarde der uitdrukking, welke met deze onderstelling overëenstemt, door $x + p + a$ of $x + p - a$ moeten deelbaar zijn; waaruit hij de gevolgtrekking opmaakt: dat, wanneer men in de uitdrukking $x = -1$, 0 of $+1$ stelt, de overëenkomstige waarden der gegevene uitdrukking door $p - 1$, p en $p + 1$ deelbaar zullen moeten zijn.

(30) Sommige oppervlakkige beschouwers hebben de zekerheid van NEWTON's regel in twijfel getrokken, en zich verbeeld: dat, wanneer de deelbaarheid in eenige waarden, welke met $x = 0, 1, 2, 3$, enz. overëenstemmen, plaats grijpt: men niet zeker is, of dezelve voor alle an-

§. 150. Men kan de tweeledige deelers, welke eene gegevene uitdrukking hebben kan, nogtans op eene beknoptere en niet minder fraaije wijze, waarvan wij ons ook in het vervolg steeds bedienen zullen, opspeuren en ter toetze brengen. Laat $x^5 + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$ eene gegevene uitdrukking zijn, in welke A, B, C, D en E, onder alle positieve of negatieve waarden, in geheele getallen, kunnen voorkomen. Stellen wij: dat deze uitdrukking $x + a$ tot factor hebbe; dan zal, wanneer men dezelve door dien factor deelt, het quotient eene uitdrukking van den vorm $x^4 + Px^3 + Qx^2 + Rx + S$ moeten zijn, in welke P, Q, R, S, noodzakelijk geheele positieve of negatieve getallen zullen zijn. Indien wij nu dit quotient met den deeler $x + a$ vermenigvuldigen, dan zal men verkrijgen:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} x^5 + P & x^4 + Q & x^3 + R & x^2 + S & x + aS \\ + a & + aP & aQ & aR & \end{array}$$

welke, gelijk bekend is, dezelfde zal zijn als de gegevene uitdrukking:

$$x^5 + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$$

maar deze uitdrukking zal met de laatst voorgaande niet dezelfde zijn, indien de coefficienten van de termen der gelijke magten van x niet aan elkander gelijk zijn: om dan deze coefficienten gelijk te maken, zal men aan de volgende vergelijkingen moeten voldoen

$1^\circ\ aS = E$; $2^\circ\ aR + S = D$; $3^\circ\ aQ + R = C$; . . . .
$4^\circ\ aP + Q = B$ en $5^\circ\ a + P = A$.

Wij hebben hier even zoo vele vergelijkingen als 'er onbekende grootheden in dezelve voorkomen, en het zou, bij eene regtstreeksche oplossing blijken: dat, om de onbekende a te vinden, 'er niets minder zou vereischt worden, dan de vergelijking:

a^5 —

dere waarden van x zal stand grijpen. Maar men kan *à priori* bewijzen: dat, wanneer de deelbaarheid ten minste voor zoo vele waarden bestaat, als 'er éénheden in den exponent van de hoogste magt der veranderlijke grootheid voorkomen, zij ook voor alle andere waarden van x bestaan zal. Bij eene andere gelegenheid zullen wij dit bewijs mededeelen.

$$a^5 - Aa^4 + Ba^3 - Ca^2 + Da - E = 0$$

optelossen (31). Dan, men zal aan deze vergelijkingen, in geheele getallen, moeten voldoen.

De eerste vergelijking geeft ons $S = \frac{E}{a}$ waaruit volgt: dat, gelijk reeds §. 146. gezegd is, het getal a een deeler van den bekenden en standvastigen term E moet zijn. Wanneer wij derhalve eene waarde voor a aannemen, die factor van E is, dan zal S een geheel getal zijn.

De tweede vergelijking geeft $aR = D - S$, waarvan het laatste lid $D - S$, door de aangenomene waarde van a, als bekend kan aangemerkt worden, en daar R een geheel getal moet zijn, zal men a zoodanig moeten nemen, dat $D - S$ door a deelbaar zij.

Wanneer dit laatste plaats heeft, dan zal R een geheel en bekend getal zijn, en de derde vergelijking geeft als dan: $aQ = C - R$; en daar nu Q wederom een geheel getal moet zijn, zal $C - R$ door diezelfde aangenomene waarde van a moeten deelbaar zijn.

Indien a ook aan die voorwaarde voldoet, dan zal Q bekend zijn, en de vierde vergelijking zal geven: $aP = B - Q$; en a zal, om dezelfde reden als boven, een factor van $B - Q$ moeten zijn.

Heeft dit wezenlijk plaats, dan zal eindelijk, volgens de vijfde vergelijking, $a = A - P$ moeten zijn, of dat hetzelfde is, $1 = \frac{A - P}{a}$ (32).

§. 151. †† Men zal dan voor a zulk eene waarde moeten nemen, dat men, in geheele getallen, aan de nevenstaande vergelijkingen kan voldoen, en dat bovendien $1 = \frac{A - P}{a}$ zij,

(31) Men verkrijgt deze vergelijking aldus. Uit de 5de vergelijkingen volgt $P = A - a$; deze waarde van P in de 4 vergelijking overbrengende, verkrijgt men $Q = B - Aa + a^2$ enz.

(32) Dezelfde redenering zal voor elke hoogere of lagere magts-uitdrukking, in het algemeen, gelden.

zij, waartoe in de eerste plaats vereischt wordt, dat a een factor van E zij: †† *wanneer men nu alle deze voorwaarden kan vervullen, dan zal 'er noodzakelijk een tweeledige factor* $x + a$ *bestaan; zoo niet, dan zal het tot een bewijs verstrekken, dat de gegevene uitdrukking geenen zoodanigen factor heeft.*

$$S = \frac{E}{a}$$
$$R = \frac{D - S}{a}$$
$$Q = \frac{C - R}{a}$$
$$P = \frac{B - Q}{a}$$

§. 152. Wanneer men door de negatieve waarde van a deelt, dan zullen S, R, Q en P, ook negatief worden, en $D - S$, $C - R$, $B - Q$ en $A - P$, zullen in $D + S$, $C + R$, $B + Q$ en $A + P$ veranderen; en men zal, in plaats van de straks opgegevene, de nevenstaande vergelijkingen vinden, waarbij de vergelijking $-1 + 1 = 0$ nog kan gevoegd worden. Nu brengt dit stelsel van vergelijkingen ons tot den volgenden eenvoudigen

$$-S = \frac{E}{-a}$$
$$-R = \frac{D + S}{-a}$$
$$-Q = \frac{C + R}{-a}$$
$$-P = \frac{B + Q}{-a}$$
$$-1 = \frac{A + P}{-a}$$
$$-1 + 1 = 0$$

Regel. 1° „ *Zoek alle de deelers van „ den bekenden term der gegevene uitdrukking, en onderstel* $-a$ *gelijk aan éénen „ dezer deelers, positief of negatief genomen.*"

2° „ *Deel den laagsten term der gegevene uitdrukking door „ dezen deeler, en tel bij het quotient den coefficient van den „ term van de eerste magt der veranderlijke grootheid.*"

3° „ *Deel deze som door denzelfden aangenomen deeler, „ indien dan de deeling opgaat, telt men bij het quotient den „ coefficient van de tweede magt der veranderlijke.*"

4° „ *Deze nieuwe som deelt men op nieuw door den aangenomen deeler, en, indien de deeling opgaat, telt men op „ nieuw bij dit quotient den coefficient van den volgenden „ term.*"

5° „ *Men gaat op dezelfde wijze voort, hoe groot het aantal der termen van de gegevene uitdrukking zij. Wanneer dan alle deze deelingen opgaan, en het laatste quotient met den coefficient van den hoogsten term, die altijd „ de éénheid is, opgeteld zijnde, de som nul is, dan zal de*

„ ver-

„ *veranderlijke grootheid, veréénigd met den aangenomen dee-*
„ *ler, met een tegengesteld teeken genomen, een tweeledige*
„ *deeler van de voorgestelde uitdrukking zijn: maar, indien*
„ *niet alle deze voorwaarden vervuld worden, zal de aange-*
„ *nomen deeler niet voldoen: en wanneer geen der deelers*
„ *van den bekenden term, positief of negatief genomen, vol-*
„ *doet, dan zal de voorgestelde uitdrukking geenen tweeledi-*
„ *gen factor $x + a$ hebben.*"

§. 153. Indien men nu dezen regel op een voorbeeld in getallen wil toepassen, dan zal men de berekening op de volgende wijze (zie voorbeelden op de uitslaande tabelle N° III. en bijzonderlijk het 1. voorbeeld,) kunnen inrigten.

Men schrijve op de eerste rij *A* alle de deelers van den bekenden term $+ 105$, van den grootsten tot den kleinsten ingesloten.

Op de tweede rij *B* plaatse men, onder elken deeler, het quotient dat ontstaat, indien men den bekenden term $+ 105$ door dien deeler deelt, op de teekens behoorlijk acht gevende.

Bij elk dezer quotienten telle men den coefficient van den term der eerste magt, namelijk $- 29$, en men plaatse de sommen op de rij *C*, elke som in hare eigene kolom.

Nu beproeve men: of de getallen, in de rij *C* geplaatst, door de deelers van de rij *A*, welke boven dezelve staan, deelbaar zijn: die, welke deelbaar zijn, deelt men werkelijk, en men plaatse de quotienten onder de deeltallen, op de rij *D*. De deelers, welke in de overéénkomstige sommen niet volmaakt opgaan, kunnen de waarde van *a* niet zijn, en worden om die reden verworpen. Men schrijft daarom, in dit geval, in de rij *D* niets, en het verdere gedeelte van het onderzoek bepaalt zich steeds, naar mate men verder vordert, tot een minder aantal deelers.

Men telle bij de quotienten, welke op de rij *D* overblijven, den coefficient van den volgenden term van de tweede magt der veranderlijke grootheid, en men verkrijgt de getallen op de rij *E*.

Deze getallen op de rij *E* deelt men door de deelers van de rij *A*, welke boven elk getal staan, en men stelt de quotienten met derzelver teekens onder dezelve.

Bij deze quotienten telt men de éénheid, en daar de som, voor de deelers $+ 7$, $+ 3$ en $- 5$, nul is, volgt hieruit: dat $x - 7$, $x - 3$ en $x + 5$, deelers der gegevene uitdrukking zijn.

§. 154. 'Er bestaat in de leer der hooge magts-vergelijkingen een zeer gewigtige grondregel: †† *dat, wanneer in eene geheele stelkundige uitdrukking, als* $x^3 + Ax^2 + Bx + C$, *welke van de geheele en positieve magten eener veranderlijke grootheid x afhangt, eene zekere waarde a, welke men voor die veranderlijke grootheid x aanneemt, de waarde dezer uitdrukking gelijk nul maakt, diezelfde uitdrukking alsdan door die veranderlijke grootheid min die aangenomene waarde, dat is, door* $x - a$, *stelkundig zal deelbaar zijn.*

Stellen wij, om zulks te bewijzen, de waarde der uitdrukking in het algemeen y; dan zal

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = y$$

moeten zijn, en $x = a$ stellende, zal men, volgens de onderstelling, verkrijgen:

$$a^3 + Aa^2 + Ba + C = 0$$

trekken wij nu deze laatste vergelijking van de eerste af, dan zal 'er

$$(x^3 - a^3) + A(x^2 - a^2) + B(x - a) = y$$

overblijven. Nu hebben wij, §. 60, pag. 38, gezien: dat het verschil van twee gelijknamige magten door het verschil van derzelver wortels deelbaar is: gevolgelijk zullen $x^3 - a^3$, $A(x^2 - a^2)$ en $B(x - a)$, elk in het bijzonder, door $x - a$ deelbaar zijn, en het eerste lid der laatste vergelijking zal, zie §. 193, I. C. door $x - a$ deelbaar zijn, dat is: y of de gegevene uitdrukking zal in de onderstelling, dat $x = a$ dezelve nul maakt, door $x - a$ deelbaar zijn.

§. 155. Aangezien alle de magten van het getal *één* gelijk aan de éénheid zijn: †† zal men, door slechts de coefficienten der gegevene uitdrukking optetellen, terstond kunnen zien, of de uitdrukking, door $x - 1$ deelbaar is, omdat, gelijk bewezen is, deze deelbaarheid plaats zal hebben, wanneer deze som gelijk nul is: bij voorbeeld, $x^3 - 5x^2 - 29x + 105$ zal niet door $x - 1$ deelbaar zijn, omdat

$$1 - 5 - 29 + 105 = 72 \text{ en niet } = 0 \text{ is}$$

§. 156. En daar de onevene magten van een negatief getal negatief zijn, zal men, door de teekens der termen van de onevene magten der veranderlijke grootheid omtekeeren, en de coefficienten alsdan optetellen, uit de komende som kunnen beoordeelen, of de uitdrukking door $x + 1$ deelbaar zij; want deze deelbaarheid zal plaats hebben, indien de som der coefficienten gelijk nul is. Dezelfde uitdrukking zal gevolgelijk niet door $x + 1$ deelbaar zijn, omdat

$$-1 - 5 + 29 + 105 = 128 \text{ is.}$$

§. 157.

Nº III. Voorbeelden, *tot het onderzoek van de tweeledige of eerste magts-deelers der stelkundige uitdrukkingen, door de toepassing van den Regel van* §. 152. [Tegen over bladz. 110.]

1. Voorbeeld. Onderzoek van de deelers van $x^3 - 5x^2 - 29x + 105$.

A		+105	+35	+21	+15	+7	+5	+3	+1	−1	−3	−5	−7	−15	−21	−35	−105
B	−29)	+1	+3	+5	+7	+15	+21	+35	+105	−105	−35	−21	−15	−7	−5	−3	−1
C		−28	−26	−24	−22	−14	−8	+6	+76	−134	−64	−50	−44	−36	−34	−32	−30
D	−5)					−2		+2	+76	+134		+10					
E						−7		−3	+71	+129		+5					
F	+1)					−1		−1	+71	−129		−1					
G						0		0	+72	−128		0					

Het blijkt uit deze berekening, dat $x-7$, $x-3$ en $x+5$, de tweeledige deelers der gegevene uitdrukking $x^3-5x^2-29x+105$ zijn, welker product de gegevene uitdrukking wederom zal voortbrengen.

2. Voorb. $x^3 - 9x^2 + 26x - 25$

	+25	+5	−5	−25
	−1	−5	+5	+1
+26)	+25	+21	+31	+27
	+1			
−9)	−8			

Het blijkt hieruit, dat de gegevene uitdrukking geen tweeledige deelers heeft.

3. Voorb. De tweeledige deelers van $x^3 + x^2 - 48x - 56$ te onderzoeken.

	+56	+28	+14	+8	+7	+4	+2	−2	−4	−7	−8	−14	−28	−56
	−1	−2	−4	−7	−8	−14	−28	+28	+14	+8	+7	+4	+2	+1
−48)	−49	−50	−52	−55	−56	−62	−76	−20	−34	−40	−41	−44	−46	−47
					−8		−38	+10						
+1)					−7		−37	+11						
					−1									
+1)					0									

Het blijkt dan uit deze berekening, dat de gegevene uitdrukking slechts éénen tweeledigen deeler $x-7$ heeft: indien men dezelve ook werkelijk door dien deeler deelt; dan zal men voor het quotient vinden x^2+8x+8, waarin geen deelers meer voorhanden zijn.

Voorbeelden, *ter verdere beoefening van het onderzoek der tweeledige deelers.*

1. Voorb. De tweeledige deelers van $x^3 - 7x^2 + 36$ zijn $x-6$, $x-3$ en $x+2$.
2. Voorb. De tweeledige deeler van $x^4 - 9x^3 + 23x^2 - 20x + 15$ is $x-3$.
3. Voorb. De tweeledige deelers van $x^4 + 8x^3 - 1710x^2 - 5744x + 659525$ zijn $x-31$, $x-23$, $x+25$ en $x+37$.
4. Voorb. De deelers van $90x^4 - 267x^3 - 647x^2 + 107x + 45$ zijn $3x+5$, $2x-9$, $5x+1$ en $3x-1$.
5. Voorb. De deelers van $x^5 - 60x^3 - 80x^2 + 960x + 2304$ zijn $(x+4)^3$ en $(x-6)^2$.
6. Voorb. De deelers van $8x^5 - 52x^4 + 98x^3 - 35x^2 + 25x - 125$ zijn $(2x-5)^3$ en x^2+x+1.

Voorbeelden *tot het onderzoek van de tweeledige deelers der stelkundige uitdrukkingen, wanneer de standvastige deelen en termen van zulk eene uitdrukking in letters voorkomen.*

4. Voorb. Geg. $x^3 - (3a+3c)x^2 + a(b+9c)x - 3abc$

	$+3a$	$+3b$	$+3c$
tel bij	$-bc$	$-ac$	$-ab$
$ab+9ac)$	$+ab+9ac-bc$	$+ab+8ac$	$+9ac$
			$+3a$
$-3a-3c)$	Deze uitdrukking is niet meer door $+3a$ stelkundig deelbaar: men staakt daarom de bewerking.	Hier geldt dezelfde aanmerking.	$-3c$
			-1
$+1)$			0

De gegevene uitdrukking heeft eenen deeler $x-3c$. Zie verder de verklaring §. 168. Indien men de gegevene uitdrukking door den gevonden deeler deelt; dan zal men, voor het quotient, $x^2-3ax+ab$ vinden.

5. Voorb. Geg. $x^4 - (2a-b)x^3 - 3abx^2 + (2a^2b - ab^2)x + 2a^2b^2$

	$-2ab$	$+2a$	$-b$
tel bij	$-ab$	$+ab^2$	$-2a^2b$
$+2a^2b-ab^2)$	$+2a^2b-ab^2-ab$	$+2a^2b$	$-ab^2$
	$-a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}$	$+ab$	$+ab$
$-3ab)$	$-3ab-a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}$	$-2ab$	$-2ab$
		$-b$	$+2a$
$-2a+b)$	Deze laatste uitdrukking niet meer door $-2ab$ stelkundig deelbaar zijnde, wordt hier de bewerking gestaakt.	$-2a$	$+b$
		-1	-1
$+1)$		0	0

De deelers der gegevene uitdrukking zijn derhalve $x-2a$ en $x+b$. Zie §. 169, *pag.* 119. Indien men de gegevene uitdrukking door het product der deelers $x-2a$ en $x+b$ deelt; dan zal men x^2-ab, voor het quotient, vinden.

6. Voorbeeld. Gegeven $12x^3 - (14b-9c)x^2 - (12b^2+6bc-8c^2)x + (8b^3-12b^2c-4bc^2+6c^3)$; de deelers te vinden.

Men zoekt, even als in de 4 en 5 voorbeelden, de deelers van $8b^3-12b^2c-4bc^2+6c^3$: deze vindt men te zijn: $2b-3c$ en $4b^2-2c^2$. Nu zijn de deelers van 12 de getallen 1, 2, 3, 4, 6, 12: men zal deze deelers met alle de deelers van den achtersten term moeten combineren, stellende eenen factor van $8b^3-12b^2c-4bc^2+6c^3$ tot teller en eenen factor van 12 tot noemer: men zal dan alle gebrokene en geheele uitdrukkingen verkrijgen, onder welken de standvastige term van den deeler kan begrepen zijn. Na alle beproevingen blijkt het: dat $\frac{2b-3c}{4}$ alleen voldoet. Want, dien deeler aannemende, zal $+8b^3-12b^2c-4bc^2+6c^3$, door dien deeler gedeeld, geven $16b^2-8c^2$: hier $-12b^2-6bc+8c^2$ bij tellende, zal men $+4b^2-6bc$ voor de som vinden, welke wederom door $\frac{2b-3c}{4}$ gedeeld zijnde geven zal $+8b$, voor het quotient: bij dit laatste quotient $-14b+9c$, den coefficient van x^2, optellende, vindt men voor de som $-6b+9c$, welke wederom door denzelfden deeler gedeeld zijnde -12 voor het quotient geeft; daar nu de coefficient van x^3 het getal 12 is, en $+12-12=0$ is, zal $4x-2b+3c$ een deeler der gegevene uitdrukking zijn: en daar geene andere deelers aan den regel voldoen, bestaat 'er, behalve dezen, geen ander eerste magts deeler. Dit voorbeeld is uit Newton's *Arith. Univ.* §. LXXI.

Benadering *van de wortels der vergelijking*, $x^4 + 2x^3 - 47x^2 - 47x + 252 = 0$, *volgens de handelwijze van* Budan.

I. *Benadering der positieve wortels, in geheele getallen.* Zie §. 242, *pag.* 164.

$$\begin{array}{lr}
1^\circ) & 1 + 2 - 47 - 47 + 252 \; \textit{in} \; (x) \\
 & + 1 + 3 - 44 - 91 + 161 \\
 & + 1 + 4 - 40 - 131 \\
 & + 1 + 5 - 35 \\
 & + 1 + 6 \\
 & + 1
\end{array}$$

$$\begin{array}{lr}
2^\circ) & 1 + 6 - 35 - 131 + 161 \; \textit{in} \; (x - 1) \\
 & + 1 + 7 - 28 - 159 + 2 \\
 & + 1 + 8 - 20 - 179 \\
 & + 1 + 9 - 11 \\
 & + 1 + 10 \\
 & + 1
\end{array}$$

$$\begin{array}{lr}
3^\circ) & 1 + 10 - 11 - 179 + 2 \; \textit{in} \; (x - 2) \\
 & + 1 + 11 + 0 - 179 - 177 \\
 & + 1 + 12 + 12 - 167 \\
 & + 1 + 13 + 25 \\
 & + 1 + 14 \\
 & + 1
\end{array}$$

$$\begin{array}{lr}
4^\circ) & 1 + 14 + 25 - 167 - 177 \; \textit{in} \; (x - 3) \\
 & + 1 + 15 + 40 - 127 - 304 \\
 & + 1 + 16 + 56 - 71 \\
 & + 1 + 17 + 73 \\
 & + 1 + 18 \\
 & + 1
\end{array}$$

$$\begin{array}{lr}
5^\circ & 1 + 18 + 73 - 71 - 304 \; \textit{in} \; (x - 4) \\
 & + 1 + 19 + 92 + 21 - 283 \\
 & + 1 + 20 + 112 + 133 \\
 & + 1 + 21 + 133 \\
 & + 1 + 22 \\
 & + 1
\end{array}$$

Vervolg in de volgende, of tweede kolom.

$$\begin{array}{lr}
6^\circ) & 1 + 22 + 133 + 133 - 283 \; \textit{in} \; (x - 5) \\
 & + 1 + 23 + 156 + 289 + 6
\end{array}$$

Verder behoeft men de bewerking niet voortte zetten: want het blijkt uit dezelve genoegzaam: dat 'er één wortel tusschen 2 en 3, één tusschen 5 en 6, en verder geen grooter bestaat.

II. *Benadering der negatieve wortels, in geheele getallen.*

Men verandere volgens §. 241. de teekens van de evene termen der gegevene vergelijking, dan verkrijgt men: $x^4 - 2x^3 - 47x^2 + 47x + 252 = 0$, waaruit de volgende vergelijkingen worden afgeleid.

$$\begin{array}{lr}
1^\circ) & 1 - 2 - 47 + 47 + 252 \; \textit{in} \; (-x) \\
 & + 1 - 1 - 48 - 1 + 251 \\
 & + 1 + 0 - 48 - 49 \\
 & + 1 + 1 - 47 \\
 & + 1 + 2 \\
 & + 1
\end{array}$$

$$\begin{array}{lr}
2^\circ) & 1 + 2 - 47 - 49 + 251 \; \textit{in} \; (-x - 1) \\
 & + 1 + 3 - 44 - 93 + 158 \\
 & + 1 + 4 - 40 - 133 \\
 & + 1 + 5 - 35 \\
 & + 1 + 6 \\
 & + 1
\end{array}$$

$$\begin{array}{lr}
3^\circ) & 1 + 6 - 35 - 133 + 158 \; \textit{in} \; (-x - 2) \\
 & + 1 + 7 - 28 - 161 - 3 \\
 & + 1 + 8 - 20 - 181 \\
 & + 1 + 9 - 11 \\
 & + 1 + 10 \\
 & + 1
\end{array}$$

Vervolg in de volgende, of derde kolom.

$$\begin{array}{lr}
4^\circ) & 1 + 10 - 11 - 181 - 3 \; \textit{in} \; (-x - 3) \\
 & + 1 + 11 + 0 - 181 - 184 \\
 & + 1 + 12 + 12 - 169 \\
 & + 1 + 13 + 25 \\
 & + 1 + 14 \\
 & + 1
\end{array}$$

$$\begin{array}{lr}
5^\circ) & 1 + 14 + 25 - 169 - 184 \; \textit{in} \; (-x - 4) \\
 & + 1 + 15 + 40 - 129 - 313 \\
 & + 1 + 16 + 56 - 73 \\
 & + 1 + 17 + 73 \\
 & + 1 + 18 \\
 & + 1
\end{array}$$

$$\begin{array}{lr}
6^\circ) & 1 + 18 + 73 - 73 - 313 \; \textit{in} \; (-x - 5) \\
 & + 1 + 19 + 92 + 19 - 294 \\
 & + 1 + 20 + 112 + 131 \\
 & + 1 + 21 + 133 \\
 & + 1 + 22 \\
 & + 1
\end{array}$$

$$\begin{array}{lr}
7^\circ) & 1 + 22 + 133 + 131 - 294 \; \textit{in} \; (-x - 6) \\
 & + 1 + 23 + 156 + 287 - 7 \\
 & + 1 + 24 + 180 + 467 \\
 & + 1 + 25 + 205 \\
 & + 1 + 26 \\
 & + 1
\end{array}$$

$$\begin{array}{lr}
8^\circ) & 1 + 26 + 205 + 467 - 7 \; \textit{in} \; (-x - 7) \\
 & + 1 + 27 + 232 + 699 + 692
\end{array}$$

Hier zijn de afleidingen ver genoeg voortgezet; want het blijkt: dat 'er twee negatieve wortels, één tusschen -2 en -3; en één, tusschen -7 en -8, bestaat.

NB. Wij hebben de getallen eenigzins anders gesteld dan, in den regel van §. 230, *pag.* 160, is opgegeven: deze schikking is ons, voor de optelling, gemakkelijker voorgekomen.

III. *Benadering van den wortel der vergelijking, welke tusschen 5 en 6 valt. Zie* §. 252 *en* §. 253, *pag.* 168 *en* 169.

Men vermenigvuldige de vergelijking, in $(x - 5)$, namelijk:

$$x^4 + 22x^3 + 133x^2 + 133x - 283 = 0$$

met de reeks 1, 10, 100, 1000 en 10000; dan verkrijgt men, voor de vergelijking, in $(10x - 50)$, als volgt:

$$\begin{array}{lr}
\text{in } (10x - 50) \ldots & 1 + 220 + 13300 + 133000 - 2830000 \\
(10x - 51) \ldots & 1 + 224 + 13966 + 160264 - 2683479 \\
(10x - 52) \ldots & 1 + 228 + 14644 + 188872 - 2509024 \\
(10x - 53) \ldots & 1 + 232 + 15334 + 218848 - 2305279 \\
(10x - 54) \ldots & 1 + 236 + 16036 + 250216 - 2070864 \\
(10x - 55) \ldots & 1 + 240 + 16750 + 283000 - 1804375 \\
(10x - 56) \ldots & 1 + 244 + 17476 + 317224 - 1504384 \\
(10x - 57) \ldots & 1 + 248 + 18214 + 352912 - 1169439 \\
(10x - 58) \ldots & 1 + 252 + 18964 + 390088 - 798064 \\
(10x - 59) \ldots & 1 + 256 + 19726 + 428776 - 388759 \\
(10x - 60) \ldots & 1 + 260 + 20500 + 469000 + 60000
\end{array}$$

Hieruit volgt, $x > 5,9$ en $< 6,0$. De laatste vergelijking geeft, bij de teruggaande afleidingen.

$$\begin{array}{ll}
\text{in } (100x - 600) & 1 + 2600 + 2050000 + 469000000 + 600000000 \\
\text{in } (100x - 599) & 1 + 2596 + 2042206 + 464907796 + 133047401 \\
\text{in } (100x - 598) & 1 + 2592 + 2034424 + 460831168 - 329820784
\end{array}$$

Men heeft derhalve $x > 5,98$ en $x < 5,99$: en, alzoo voortgaande, zal men, bij elke nieuwe bewerking, één cijfer, in de tiendeelige breuk, meer verkrijgen.

§. 157. †† Met behulp van dit beginzel, kan men dan, met eenen opslag van het oog, zien, of de gegevene uitdrukking door $x - 1$ of $x + 1$ deelbaar zij; en men zal alzoo, in de toepasfing van den regel van §. 152, de deelers $+ 1$ en $- 1$, welker behandeling doorgaans het lastigfte is, kunnen uitfluiten, gelijk in de volgende voorbeelden, op de tabelle, is in acht genomen.

§. 158. I. Aanmerking. †† Wanneer het gebeurt, dat fommige magten der veranderlijke grootheid in de gegevene uitdrukking ontbreken, moet men, ten einde den voorfchrevenen regel te kunnen toepasfen, deze termen als aanwezig aanmerken: hetgeen altijd zal kunnen gefchieden, wanneer men derzelver coefficienten als nul befchouwt.

Laat, bij voorbeeld, gegeven zijn: $x^5 - 9x^3 + 8x^2 - 72$; dan zal men in plaats van deze uitdrukking kunnen nemen: $x^5 + 0x^4 - 9x^3 + 8x^2 + 0x - 72$. Daar nu de deelers $+ 1$ en $- 1$ niet gelden, zullen wij, (alleenlijk de deelers $+ 3$, $+ 2$, $- 2$, $- 3$, hiernevens plaatzende,) bij de tweede rij der quotienten 0 moeten optellen, en dan de getallen van de derde rij, (die dezelfde als die van de tweede rij zijn,) door de overéénkomftige deelers, naar den regel, moeten deelen; bij de quotienten voorts $+ 8$ moeten optellen, enz.: wanneer men de achtfte rij gevormd heeft, zal men wederom bij dezelve nul moeten optellen, en de getallen van de negende rij door de overéénkomftige deelers deelen, wanneer men zal vinden: dat $x - 3$, $x + 2$ en $x + 3$, deelers der gegevene uitdrukking zijn (33).

	+ 3	+ 2	− 2	− 3
	− 24	− 36	+ 36	+ 24
0) . . .	− 24	− 36	+ 36	+ 24
	− 8	− 18	− 18	− 8
+ 8) * . .	+ 0	− 10	− 10	+ 0
	+ 0	− 5	+ 5	+ 0
− 9) . . .	− 9	− 14	− 4	− 9
	− 3	− 7	+ 2	+ 3
0) . . .	− 3	− 7	+ 2	+ 3
	− 1		− 1	− 1
+ 1)	0		0	0

§. 159.

(33) Het blijkt uit dit voorbeeld: dat eenige fom, voor het einde der bewerking, nul kan worden. Lacroix heeft zich, zie *Elém. d'Algebre pag. 277. Ed. de 1804*, niet duidelijk uitgedrukt, wanneer hij zegt: „ *en obfervant que l'on ne doit trouver zéro pour refultat que lorsqu'on fera parvenu au premier terme de l'équation propofée.*" Wanneer men nul voor de fom verkrijgt, dan is het naastvolgende quotient gelijk nul, men gaat volgens den regel voort, en deze omftandigheid is zonder invloed op de algemeenheid van den regel.

§. 159. „ *Men zal nogtans, gelijk van zelfs blijkt, het „ bijtellen der nullen kunnen achterwege laten; mits men op „ nieuw zoo menigmaal door den deeler deele, als in de ge- „ gevene uitdrukking termen, van den eenen tot den anderen „ term, mogten ontbreken.*"

§. 160. II. Aanmerking. †† *Het kan gebeuren, dat een deeler van den vorm $x + a$ meer dan éénmaal in de gegevene uitdrukking als factor kan verhouden zijn.* †† Dit geval zal nu plaats kunnen hebben, wanneer 1° de regel van §. 152. minder deelers gegeven heeft dan 'er éénheden in den exponent van de hoogste magt der veranderlijke grootheid voorkomen; 2° wanneer de tweede en volgende magten van a onder de factoren des bekenden terms voorkomen. (Want indien de gegevene uitdrukking door $(x + a)^n$ deelbaar is, wordt vereischt, dat de bekende term door a^n en de mindere magten van a deelbaar is.) „ *Men moet dan, wanneer deze „ twee omstandigheden te gelijk plaats hebben, onderzoeken: „ of de gevonde deeler niet twee of meermalen in de gege- „ vene uitdrukking verhouden is, waartoe slechts eene enkel- „ de stelkundige deeling vereischt wordt.*" (34).

Zij gegeven $x^3 - x^2 - 21x + 45$? De deelers van 45 zijn: 45, 15, 9, 5, 3 en 1; de deelers $+ 1$ en $- 1$ vervallen van zelven. Men vindt verder, door de toepassing van den regel, $x + 5$ en $x - 3$: daar 'er nu, wanneer 'er in eene derde magts-uitdrukking twee tweeledige deelers bestaan, 'er noodzakelijk ook een derde bestaan moet, zoo zal $x + 5$, of $x - 3$, nog éénmaal moeten voorkomen (35): die derde deeler zal noodzakelijk $x - 3$ moeten zijn, omdat de tweede magt van 3, en niet die van 5, onder de deelers van het getal 105 voorkomt. Men zal ook in de daad bevinden: dat $x^3 - x^2 - 21x + 45 = (x + 5) \cdot (x - 3)^2$ zal zijn.

Ne-

(34) Nog niemand, zooveel mij bekend is, heeft opgemerkt: dat men op deze wijze de gelijke factoren ontdekken kan: de gewone handelwijze, welke men tot dat einde gebruikt, en die in de L Les zal verklaard worden, is veel omslagtiger.

(35) Dit is zeer natuurlijk; want indien het bekende getal van dien derden deeler een ander dan $+ 5$ of $- 3$ ware, zou men hetzelve, onder de positieve of negatieve deelers van 45, ontdekt hebben.

Nemen wij, tot een tweede voorbeeld, de vergelijking

$$x^5 - 4x^4 - 15x^3 + 106x^2 - 196x + 120$$

welke Cousin, in zijne *Traité Elémentaire de l'Analyse Mathématique*, *pag.* 112, opgeeft, en waarvan hij de gelijke factoren, door het zoeken van den gemeenen deeler, welke tusschen de gegevene uitdrukking en deszelfs differentiaal bestaan kan, bepaalt. Zie §. 356, *pag.* 245.

De deelers van 120 zijn 120, 60, 40, 30, 24, 20, 15, 12, 10, 8, 6, 5, 4, 3, 2 en 1. De deelers + 1 en − 1 vervallen van zelve. Zie hier een gedeelte van de geheele berekening.

	+ 3	+ 2	− 2	− 3	− 4	− 5
	+ 40	+ 60	− 60	− 40	− 30	− 24
− 196) . . .	− 156	− 136	− 256	− 236	− 226	− 220
	− 52	− 68	+ 128	. . . .	. . . .	+ 44
+ 106) . . .	+ 54	+ 38	+ 234	. . . .	. . . .	+ 150
	+ 18	+ 19	− 117	. . . .	. . . .	− 30
− 15) . . .	+ 3	+ 4	− 132	. . . .	. . . .	− 45
	+ 1	+ 2	+ 66	. . . .	. . . .	+ 9
− 4) . . .	− 3	− 2	+ 62	. . . .	. . . .	+ 5
	− 1	− 1	. . . .	. . . .	. . . .	− 1
	0	0				0

Het blijkt hieruit: dat $x - 3$, $x - 2$ en $x + 5$ deelers van de gegevene uitdrukking zijn: maar, daar 'er in onze vijfde magts-uitdrukking, behalve deze drie factoren, nog twee andere kunnen bestaan, welke aan de reeds gevondene factoren kunnen gelijk zijn, en de tweede en hoogere magten van 3 en 5 niet onder de deelers van 120 voorkomen, maar wel $2^2 = 4$ en $2^3 = 8$; zoo zullen, indien 'er meer factoren bestaan, deze factoren geene andere kunnen zijn, dan $x - 2$ en $x - 2$: men beproeve dan, of de gegevene uitdrukking door $x - 2$, driemaal achter den anderen, deelbaar zij? en daar men bevinden zal, dat deze deelingen gelukken, zal de gegevene uitdrukking gelijk zijn aan $(x - 2)^3 \times (x - 3) \times (x + 5)$.

Nemen wij nogmaals de uitdrukking:

$$x^5 - 13x^4 + 67x^3 - 171x^2 + 216x - 108 = 0$$

welke Lacroix, in zijne *Elémens d'Algèbre*, *art.* 212. *Ed.* 1800. *et art.* 207. *Ed.* 1804. opgeeft.

	+ 3	+ 2
	36	− 54
+ 216)	+ 180	+ 162
	+ 60	+ 81
− 171)	− 111	− 90
	− 37	− 45
+ 67)	+ 30	+ 22
	+ 10	+ 11
− 13)	− 3	− 2
	− 1	− 1
	0	0

Het blijkt, uit de nevenstaande berekening: dat $x - 3$ en $x - 2$ deelers zijn: maar 'er kunnen nog drie deelers in de gegevene uitdrukking voorkomen, welke, indien zij werkelijk bestaan, geene andere, dan $x - 3$ of

$x - 2$, kunnen zijn. Onder de deelers van het getal 108, komen de tweede en derde magten van drie, en de tweede magt van twee voor; men beproeve derhalve de deeling, door $x - 3$ en $x - 2$, zoo lang mogelijk is, en men zal, met LACROIX, vinden: dat de gegevene uitdrukking gelijk aan $(x - 3)^3 \times (x - 2)^2$ is.

§. 161. III. AANMERKING. †† *Het kan gebeuren, dat de hoogste term der gegevene uitdrukking met eenen coefficient is aangedaan, en dan is zij, in dezen toestand, niet geschikt, om den voorgeschreven regel, zoo als hij voorkomt, op het naspeuren van hare tweeledige deelers, die van den vorm $px + q$ kunnen zijn, toetepassen:* men moet vooraf de gegevene uitdrukking tot deze toepassing bekwaam maken, of aan den voorgeschreven regel eene grootere algemeenheid geven.

Stellen wij, om zulks te ontvouwen, dat gegeven zij de uitdrukking:

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha)$$

indien wij dan deze vergelijking door A deelen; dan verkrijgen wij:

$$x^4 + \frac{B}{A}x^3 + \frac{C}{A}x^2 + \frac{D}{A}x + \frac{E}{A} = \frac{y}{A}$$

Stellen wij nu $x = \frac{z}{A}$; dan zal men, deze waarde van x in de laatste vergelijking overbrengende, verkrijgen:

$$\frac{z^4}{A^4} + \frac{B}{A} \cdot \frac{z^3}{A^3} + \frac{C}{A} \cdot \frac{z^2}{A^2} + \frac{D}{A} \cdot \frac{z}{A} + \frac{E}{A} = \frac{y}{A}$$

en indien men eindelijk alle de termen dezer laatste vergelijking met A^4 vermenigvuldigt; dan verkrijgt men:

$$z^4 + Bz^3 + ACz^2 + A^2Dz + A^3E = A^3y \quad . \quad . \quad (\beta)$$

in welke $z = Ax$ is. Wij hebben dan de gegevene uitdrukking (α) in eene andere (β) herleid, welker veranderlijke grootheid z gelijk is aan de veranderlijke grootheid x der gegevene uitdrukking (α), vermenigvuldigd met den coefficient, waarmede de hoogste term der gegevene uitdrukking (α) is aangedaan, terwijl de waarde dezer laatste, te weten, de waarde van (α), of y, daardoor vermenigvuldigd is geworden met eene magt van dienzelfden coefficient, welker exponent één minder is, dan de exponent van den hoogsten term dezer uitdrukking. Stellen wij nu: dat $z + a$ een factor van de uitdrukking in z (namelijk van (β)) zij; dan zal men, in plaats van z hare waarde Ax stellende, $Ax + a$ voor dien factor verkrijgen: maar nu is de waarde van de uitdrukking in z (namelijk (β)) geworden A^3y; en nu zal het kunnen gebeuren: dat A en a eenen gemeenen deeler heb-

hebben: daar nu, voor elke bijzondere waarde van y, de grootheid y niet algemeen door het bepaalde getal, dat de gemeene deeler van A en a is, deelbaar kan zijn, moet die gemeene deeler noodzakelijk in A^3, en niet in y, begrepen zijn. Men zal daarom den gemeenen deeler van A en a, in $Ax + a$ voorkomende, moeten wegwerpen, en de uitdrukking, welke daaruit geboren wordt, zal de gevraagde factor der gegevene uitdrukking, in x, moeten zijn.

§. 162. †† Het blijkt, uit het bloote inzien van de herleide uitdrukking (β), dat dezelve zal verkregen worden, door alle de termen der gegevene uitdrukking (α), één voor één, van den hoogsten tot den laagsten ingesloten, met de termen der meetkunstige reeks

$$\frac{1}{A},\ 1,\ A,\ A^2,\ A^3,\ enz.$$

te vermenigvuldigen, en, in plaats van x, eene andere veranderlijke grootheid z te stellen. Hieruit volgt derhalve dezen

REGEL. 1° „ *Indien de hoogste term der gegevene uitdrukking met eenen coefficient is aangedaan, verander dan x in z, of Ax; laat dezen coefficient weg, en vermenigvuldig alle de volgende termen met ééne opklimmende meetkunstige reeks, die met de éénheid aanvangt, en met de magten van den coefficient des hoogsten terms opklimt. Het spreekt van zelven, dat de ontbrekende termen, als met den coefficient nul aangedaan, wel degelijk in rekening moeten komen.*"

2° „ *Zoek, volgens den regel van §. 152, de tweeledige deelers der nieuw verkregene uitdrukking in z.*"

3° „ *Onderzoek, of de coefficienten A en a van den deeler $Ax + a$, welke men in plaats van $z + a$ verkrijgt, eenen gemeenen deeler hebben? indien 'er zulk een bestaat, zal die uitdrukking door denzelven moeten gedeeld worden, om den eigenlijken factor der gegevene uitdrukking te verkrijgen.*"

§. 163. Zij gegeven $12x^3 - 4x^2 - 117x - 56$. Men begint derzelver termen met de meetkunstige reeks, $\frac{1}{12}$, 1, 12 en 144, te vermenigvuldigen, en in plaats van x de letter z te stellen; men verkrijgt aldus:

$$z^3 - 4z^2 - 1404z - 8064$$

zijnde $z = 12x$. Nu blijkt het, uit de nevenstaande berekening, dat $z - 42$,

		+ 42	− 6	− 32
		− 192	+ 1344	+ 252
− 1404)		− 1596	− 60	− 1152
		− 38	+ 10	+ 36
−	4)	− 42	+ 6	+ 32
		− 1	− 1	− 1
+	1)	0	0	0

$z+6$ en $z+32$ de deelers van de uitdrukking in z zijn: wanneer men dan, in plaats van z, hare waarde $12x$ ſtelt; dan zal men, na de verkleining, $2x-7$, $2x+1$ en $3x+8$ voor de tweeledige deelers der gegevene uitdrukking vinden.

§. 164. IV. Aanmerking. †† *Maar het is, zoo als wij reeds zeiden, niet volſtrekt noodzakelijk, de gegevene uitdrukking, vooraf te herleiden. Men kan aan den regel van* §. 152. *eene grootere uitgeſtrektheid geven.*

Laat, om zulks aantetoonen, $ax+b$ een deeler van $Ax^n+Bx^{n-1}+Cx^{n-2}+enz.+S$ zijn; dan moet, zie §. 146, a een deeler van A, en b een deeler van S zijn. Nu kunnen wij de gegevene uitdrukking onder den vorm

$$A\times\left\{x^n+\frac{B}{A}x^{n-1}+\frac{C}{A}x^{n-2}+enz.+\frac{S}{A}\right\}$$

en den deeler $ax+b$ onder den vorm $a\times\left(x+\frac{b}{a}\right)$ brengen; daar nu a een deeler van A is, zal ook $x+\frac{b}{a}$ een deeler van ... $x^n+\frac{B}{A}x^{n-1}+enz.$ moeten zijn. Om nu aan deze voorwaarde te voldoen, zal de breuk $\frac{b}{a}$ een factor van de breuk $\frac{S}{A}$ moeten zijn, onder dien verſtande, dat, zoo als gezegd is, a een factor van A, en b een factor van S zij. „ *Men zal dan eene reeks van breuken maken,* „ *welker noemers factoren van A, en welker tellers factoren van S* „ *zijn, en men zal elk dezer breuken, volgens den regel van* §. 152, „ *aan de uitdrukking $x^n+enz.+\frac{S}{A}$ toetſen; wanneer 'er dan dee-* „ *lers van den vorm $x+\frac{b}{a}$ beſtaan, zal deze beproeving dezelve* „ *kenbaar maken, en, wanneer men zulk eèn deeler gevonden heeft,* „ *zal men denzelven met a moeten vermenigvuldigen om den begeer-* „ *den deeler te verkrijgen.*"

§. 165. †† „ *Men kan zelfs de uitdrukking onder den gegevenen* „ *vorm laten ſtaan, en, nadat men de mogelijke breuken, die een* „ *term des deelers kunnen uitmaken, gemaakt heeft, beginnen met* „ *den laatſten term door de breuk $-\frac{b}{a}$ te deelen, terwijl men, vol-* „ *gens den regel, zal blijven werken: maar, daar de coefficient van*

„ *den*

„ *den hoogsten term, in dit geval, een ander getal dan de éénheid* „ *is, zal men, tot aan den laatsten term gekomen zijnde, deszelfs coef-* „ *ficient, in plaats van de éénheid, moeten optellen. Wanneer nu deze* „ *laatste som gelijk nul is, zal de gegevene uitdrukking* $x+\frac{b}{a}$, „ *of, dat op hetzelfde uitkomt,* $ax+b$ *tot factor hebben.*"

Stellen wij, om dit te betoogen, $Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E$ voor de gegevene uitdrukking, en laat zij aan het product van de factoren Px^3+Qx^2+Rx+S en $ax+b$ gelijk zijn; dan zal de gegevene uitdrukking door multiplicatie worden

$$aPx^4+(aQ+bP)x^3+(aR+bQ)x^2+(aS+bR)x+bS$$

en men heeft

$$A=aP;\ B=aQ+bP;\ C=aR+bQ;\ D=aS+bR \text{ en } E=bS$$

Nu is .... $bS:-\frac{b}{a}=bS\times-\frac{a}{b}=-aS$

en .... $aS+bR-aS=bR$

wederom .. $bR:-\frac{b}{a}=bR\times-\frac{a}{b}=-aR$

en .... $aR+bQ-aR=bQ$

voorts .... $bQ:-\frac{b}{a}=bQ\times-\frac{a}{b}=-aQ$

en .... $aQ+bP-aQ=bP$

eindelijk ... $bP:-\frac{b}{a}=bP\times-\frac{a}{b}=-aP$

en .... $aP-aP=0$.

Het zal niet noodig zijn, de toepassing van deze twee bijzondere gevallen des algemeenen regels, door voorbeelden, opteholderen.

§. 166. V. Aanmerking. Tot hiertoe onderstelden wij stilzwijgend: †† *dat, wanneer alle de coefficienten van de algemeene uitdrukking*

$$x^n+Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+Cx^{n-3}+\text{enz.}+Ux+V$$

geheele getallen zijn, de standvastige term a van eenigen tweeledigen factor $x+a$ *een geheel getal zal moeten zijn.* Het is van het uiterste belang, deze waarheid, door een bijzonder bewijs, te bevestigen.

Stellen wij, tot dat einde, dat $x-\frac{p}{q}$ een deeler der gegevene uitdrukking zij, zijnde p en q onderling ondeelbare getallen. Wanneer men dan $x - \frac{p}{q} = 0$ maakt; dan zal $x = \frac{p}{q}$ moeten zijn, en, wanneer men voorts deze waarde van x in de gegevene uitdrukking overbrengt; dan zal men, daar derzelver factor gelijk nul wordt, verkrijgen:

$$\frac{p^n}{q^n} + A \cdot \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + B \cdot \frac{p^{n-2}}{q^{n-2}} + C \cdot \frac{p^{n-3}}{q^{n-3}} + enz. + U \cdot \frac{p}{q} + V = 0$$

welke, wanneer men dezelve met q^n vermenigvuldigt, in

$$p^n + q \times [Ap^{n-1} + Bp^{n-2}q + enz. + Upq^{n-2} + Vq^{n-1}] = 0$$

veranderen zal. Men zal deze laatste nog onder de volgende gedaante kunnen stellen:

$$\frac{p^n}{q} = -[Ap^{n-1} + Bp^{n-2}q + enz. + Upq^{n-2} + Vq^{n-1}]$$

waaruit blijkt: dat, aangezien p, q, A, B, C, enz. U en V geheele getallen zijn, tot de mogelijkheid der onderstelling gevorderd wordt, dat p^n door q deelbaar zij: maar, daar p en q onderling ondeelbaar zijn, is q geen evenmatig deel van p; derhalve zal, zie §. 767, I. C., ook q geen evenmatig deel van p^n, en bijgevolg $x - \frac{p}{q}$ geen factor der gegevene uitdrukking kunnen zijn.

§. 167. VI. Aanmerking. †† *De algemeene regel is ook toepasselijk op het vinden van de eerste magts factoren van elke stelkundige uitdrukking, welker coëfficienten en standvastige term zelven stelkundige uitdrukkingen zijn*, zonder dat men, met Newton en Clairaut, tot het zoeken van gemeene deelers zijnen toevlugt behoeve te nemen, of, dat het noodig zij, met Newton, aan sommige voorkomende grootheden eene bepaalde waarde te geven (36).

§. 168. Stellen wij: dat de uitdrukking $x^3 - (3a + 3c)x^2 + (ab + 9ac)x - 3abc$ gegeven zij; dan is het klaar, dat, wanneer zij eenen deeler van den vorm $x + p$ heeft, p een deeler van $-3abc$ zal moeten zijn; nu zijn de deelers van $-3abc$ in rangorde

±

(36) Bezout en Lacroix zijn, zooveel wij weten, de Schrijvers, welken dezen regel hebben bekend gemaakt: noch de een noch de ander hebben opgemerkt: dat hij zich tot de stelkundige coefficienten en de gelijke factoren uitstrekt. Sedert Budan, (zie §. 238 en 239.) eenen anderen regel vond, zou men dezen geheel kunnen missen, ware het niet, dat zij, in het geval der stelkundige coefficienten, van nut ware.

$$\pm 3abc,\ \pm 3ab,\ \pm 3ac,\ \pm 3bc,\ \pm 3a,\ \pm 3b,\ \pm 3c,$$
$$\pm a,\ \pm b,\ \pm c,\ \pm 3,\ \pm 1.$$

Deze deelers zullen, volgens den regel van §. 152, één voor één, ter toetſe moeten gebragt worden. (Zie 4 *Voorb.* op de *Tabelle* N° III.) Nemen wij $+3a$, dan is $-3abc$ gedeeld door $+3a$ gelijk $-bc$; tel hierbij $ab+9ac$; dan verkrijgt men: $ab+9ac-bc$, welke, niet ſtelkundig door $3a$ deelbaar zijnde, bewijst: dat p niet $=+3a$ kan zijn. Neemt men $+3b$ zal hetzelfde gebeuren. Hetzelfde zal ook gebeuren met andere deelers: maar de eenige deeler $+3c$ zal aan de voorwaarden voldoen; want $-3abc:+3c=-ab$ zijnde, is $ab+9ac-ab=9ac$; wederom, $+9ac:+3c=+3a$ zijnde, heeft men: $-3a-3c+3a=-3c$; eindelijk $-3c:+3c=-1$ en $-1+1=0$, hetwelk alles voldoet. In het 4 *Voorb.* op de *Tabelle* hebben wij, om plaats te winnen, alleen een gedeelte der bewerking geplaatst.

§. 169. Laat nog, (zie 5 *Voorb.* op de *Tabelle* N° III.) gegeven zijn de uitdrukking $x^4-(2a-b)x^3-3abx^2+(2a^2b-ab^2)x+2a^2b^2$: onder de deelers van den laagſten term zijn:

$$\pm 2a^2b^2,\ \pm a^2b^2,\ \pm 2a^2b,\ \pm 2ab^2,\ \pm 2ab,\ \pm a^2b,\ \pm ab^2,$$
$$\pm ab,\ \pm 2a,\ \pm 2b,\ \pm a,\ \pm b,\ \pm 2,\ \pm 1$$

Indien men de deelers $+2a$ en $-b$ beproeft; dan zal men voor de tweeledige deelers vinden: $x-2a$, en $x+b$.

§. 170. VII. Aanmerking. †† *Indien de ſtandvastige of bekende term eene zamengeſtelde uitdrukking is, die van twee algemeene letters afhangt, zal men eerst de ſtelkundige deelers van dien term, op de gewone wijze, zoeken, en daarna, volgens den algemeenen regel, te werk gaan.*

§. 171. Stellen wij, met Clairaut, *Elémens d'Algèbre*, *Art* XXXIII. de uitdrukking $2x^3+7ax^2-3bx^2+5a^2x-3abx+4b^2x+10ab^2-6b^3$. Deze uitdrukking zullen wij, om derzelver deelers te zoeken, onder de volgende gedaante ſtellen.

$$2x^3+(7a-3b)x^2+(5a^2-3ab+4b^2)x+(10ab^2-6b^3)$$

De eenvoudige of ondeelbare deelers van $10ab^2-6b^3$ zijn, 2, b, b, $5a-3b$; hieruit worden volgens §. 254, I. C., alle de deelers gevonden, die men bevinden zal te zijn: 1, 2, b, $2b$, b^2, $2b^2$, $5a-3b$, $10a-6b$, $5ab-3b^2$, $10ab-6b^2$, $5ab^2-3b^3$,

$10ab^2 - 6b^3$ (37): maar, daar de hoogste term der uitdrukking twee tot coefficient heeft, zal men, volgens §. 165, de deelers van dien coefficient tot de noemers, en de deelers van $10ab^2 - 6b^3$ tot de tellers van eene breuk moeten maken, welke alle de geheele en gebrokene getallen geven zullen, die voor de waarde van p, in den ondersteldén deeler $x + p$, kunnen aangenomen worden: nemen wij $p = -\frac{5a - 3b}{2}$; dan zal men bevinden: dat deze waarde voldoet; want, men heeft:

$$+10ab^2 - 6b^3 : -\tfrac{1}{2}(5a - 3b) = -4b^2$$

tel hierbij den coefficient van x, of $+5a^2 - 3ab + 4b^2$; dan verkrijgt men: $+5a^2 - 3ab$. Wederom is

$$+5a^2 - 3ab : -\tfrac{1}{2}(5a - 3b) = -2a$$

tel hierbij den coefficient van x^2, namelijk $7a - 3b$; dan komt 'er $+5a - 3b$: eindelijk is;

$$5a - 3b : -\tfrac{1}{2}(5a - 3b) = -2$$

daar nu $-2 + 2 = 0$ is, zal $x + \frac{1}{2}(5a - 3b)$, of $2x + 5a - 3b$, een factor der gegevene uitdrukking zijn: en, daar geen van de andere deelers, die mogelijk zouden kunnen zijn, gelukken, zal men hieruit met zekerheid mogen besluiten: dat 'er geen dan deze deeler bestaat. Indien men werkelijk door denzelven deelt, zal men vinden: $x^2 + ax + 2b^2$ voor het quotient.

§. 172. Nemen wij nog, met CLAIRAUT, $8x^4 - 2ax^3 - 10bx^3 - 3a^2x^2 - 5abx^2 - 12ab^2x + 9a^2b^2 + 15ab^3$. Deze zal, onder den meer geschikten vorm

$$8x^4 - (2a + 10b)x^3 - (3a^2 + 5ab)x^2 - 12ab^2x + 9a^2b^2 + 15ab^3$$

moeten gebragt worden: men zal de deelers van $9a^2b^2 + 15ab^3$ en van 8 zoeken, uit dezelve eene reeks van een bepaald aantal breuken maken, onder welken zich ook $+\frac{3a + 5b}{4}$ bevinden zal, die, aan

(37) Na de uitvoerige verklaring, welke in de XV *Les*, I. C. van het vinden van de deelers van een deelbaar getal gegeven is, zal het niet noodig zijn, die van eene éénledige stelkundige uitdrukking te leeren vinden; te meer, daar derzelver eenvoudige deelers van zelven in het oog loopen, zoodat 'er geene de minste beproeving, gelijk in getallen moet plaats hebben, vereischt wordt, om dezelve te vinden. Voor het overige worden de zamengestelde deelers, op dezelfde wijze, als in §. 254, I. C. gevonden.

aan de voorwaarden van §. 152. voldoende, ons leert: dat $4x - 3a - 5b$ een deeler is. De gegevene uitdrukking door denzelven deelende, vindt men voor het quotient: $2x^3 + ax^2 - 3ab^2$.

§. 173. Men ga nog het 6 *Voorb.* op de *Tabelle* N° III. na. Om niets achterwege te laten, dát men, in een der gewigtigste stukken, hetwelk zulk eenen uitgestrekten invloed op alle deelen der Wiskunst heeft, verlangen kan, zoo zullen wij nog de deelers eener uitdrukking van twee veranderlijke grootheden x en y onderzoeken. * *Eene uitdrukking van twee veranderlijke grootheden kan naar de magten van éène derzelve geordend worden, en het is, onder deze gedaante, dat zij bekwaam gemaakt wordt, om 'er den algemeenen regel op toetepassen.* Nemen wij nu aan: dat zij naar de afdalende magten van x geordend zij; dan zal zij onder den vorm

$$x^n + Px^{n-1} + Qx^{n-2} + enz. + U$$

voorkomen, en dan zullen de coefficienten P, Q, R, *enz.* U stelkundige uitdrukkingen zijn, zamengesteld uit de veranderlijke grootheid y, en de standvastige termen, welke in hare zamenstelling voorkomen. „ *Men zal de termen, waaruit de coefficienten P, Q, enz. zijn za-* „ *mengesteld, naar de afdalende magten van y ordenen: men zoeke* „ *dan, of U stelkundige deelers hebbe; indien 'er zoodanige niet be-* „ *staan, dan is alle verder onderzoek overtollig; omdat, onder deze* „ *voorwaarde alleen, een deeler bestaan kan: maar, wanneer U een* „ *deeler of deelers heeft, zullen deze deelers, één voor één, aan den* „ *algemeenen regel getoetst zijnde, de deelers der gegevene uitdruk-* „ *king, indien 'er zoodanige bestaan, kenbaar maken.*"

Zij gegeven de uitdrukking:

$$\begin{array}{rl|rl|rl}
ab\,x^3 & -\,2b^2y & x^2 & +\,3bcy^2 & x & -\,c^2y^3 \\
 & -\,acy & & +\,4ab^2y & & -\,abcy^2 \\
 & -\,4a^2b & & +\,a^2cy & & +\,a^2bcy \\
 & & & +\,3a^3b & & +\,6a^2b^2y \\
 & & & -\,a^2b^2 & & +\,3a^3b^2
\end{array}$$

men begeert te onderzoeken, of deze uitdrukking deelers hebbe? De achterste of laatste term dezer uitdrukking is

$$-c^2y^3 - abcy^2 + (a^2bc + 6a^2b^2).y + 3a^3b^2$$

men begint met te onderzoeken of dezelve deelers hebbe? De deelers van $3a^3b^2$ zijn, indien men, (zie hier onder §. 174.) die deelers, welke geen plaats kunnen hebben, uitzondert:

$$\pm 3ab,\ \pm ab,\ \pm 3a^2,\ \pm a^2,\ \pm 3b^2,\ \pm b^2$$

en die van c^2 zijn $\pm c$, $\pm c^2$. Men make dan, volgens §. 165. de vol-

volgende breuken:

$$\pm\frac{3ab}{c},\ \pm\frac{ab}{c},\ \pm\frac{3a^2}{c},\ enz.$$

Indien men deze, één voor één, aan den regel toetst, vindt men: dat $-\frac{3ab}{c}$ alleen voldoet; $cy+3ab$ is bijgevolg een deeler, en de deelers van den laagsten term der gegevene uitdrukking zijn:

$$cy+3ab,\ en\ -cy^2+2aby+a^2b$$

Nu moeten nog maar de deelers

$$\pm\frac{cy+3ab}{a},\ en\ \pm\frac{cy+3ab}{b}$$

aan denzelfden algemeenen regel getoetst worden. Nemen wij .... $+\frac{cy+3ab}{b}$; dan zal, indien men den laatsten term der uitdrukking door dezelve deelt, het quotient

$$-bcy^2+2ab^2y+a^2b^2$$

geven: men telle hierbij den coefficient van x, dan verkrijgt men:

$$+2bcy^2+6ab^2y+a^2cy+3a^3b$$

dezen door den aangenomen deeler deelende, verkrijgt men:

$$+2b^2y+a^2b$$

wanneer men nu bij dit quotient wederom den coefficient van x^2 optelt, dan vindt men:

$$-acy-3a^2b$$

welke som, op nieuw door den aangenomen deeler gedeeld zijnde, $-ab$ tot quotient geven zal: daar nu $-ab+ab=0$ is; zal men hieruit, met zekerheid, besluiten kunnen: dat

$$bx-cy-3ab$$

een deeler van de voorgestelde uitdrukking is, welke, door denzelven werkelijk gedeeld zijnde, tot quotient $ax^2-2bxy+cy^2-a^2x-2aby-a^2b$ hebben zal.

§. 174. De algemeene regel voldoet derhalve in de moeijelijkste gevallen, en ontdekt bovendien de gelijke deelers, en dit is alles, wat men verlangen kan. De vlijtige Lezer zal meer ontdekken, dan wij gezegd hebben: hij zal, bij voorbeeld zien: †† *dat, wanneer alle de termen eener gegevene stelkundige uitdrukking van dezelfde afmeting zijn, dat wil zeggen:* * *wanneer de sommen van de exponenten der letters, die als factoren voorkomen, in alle termen dezelfde zijn, de gezogte deeler dezelfde eigenschap zal moeten hebben:* deze opmerking zal een groot aantal nuttelooze beproevingen uitwinnen.

II.

II. *Over het vinden van de drieledige of tweede-magts deelers.*

§. 175. †† *Wanneer het, na een behoorlijk onderzoek, gebleken is: dat eene uitdrukking* $x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ *geene eerste-magts-deelers heeft, zal zij nogtans eenen tweede-magts-deeler van den vorm* $x^2 + \alpha x + \beta$ *kunnen hebben*: daar het nu van belang kan zijn, deze deelers te leeren kennen, zullen wij kortelijk de wegen aanwijzen, welke tot dat einde kunnen ingeslagen worden.

§. 176. Bepalen wij ons tot de vierde magts-uitdrukking $x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$, welker factor wij $x^2 + \alpha x + \beta$ onderstellen te zijn. Wanneer wij dan x achtervolgens gelijk $-2, -1, 0, +1, +2$ *enz.* stellen, en aannemen: dat de gegevene uitdrukking, in deze onderstelling, de waarden van de getallen p, q, D, s, t, *enz.* verkrijge; dan zal, volgens het bewezene, in §. 146.

$$\left.\begin{array}{r} p \\ q \\ D \\ s \\ t \end{array}\right\} \textit{deelbaar moeten zijn door} \left\{\begin{array}{l} 4-2\alpha+\beta \\ 1-\alpha+\beta \\ \beta \\ 1+\alpha+\beta \\ 4+2\alpha+\beta \end{array}\right.$$

†† De uitdrukkingen, in de tweede kolom, $4-2\alpha+\beta$, *enz.* zullen dus deelers zijn van de getallen p, q, *enz.* der eerste kolom, nevens welke zij, in dit tafeltje, geplaatst zijn. Laten dan p', q', d', s', t', deelers van p, q, D, s, t, zijn, en stellen wij:

$$\begin{array}{llll} p'=4-2\alpha+\beta; & \textit{dan zal} & p'-4=-2\alpha+\beta \\ q'=1-\alpha+\beta & \ldots\ldots & q'-1=-\alpha+\beta \\ d'=\beta & \ldots\ldots & d'=+\beta \\ s'=1+\alpha+\beta & \ldots\ldots & s'-1=+\alpha+\beta \\ t'=4+2\alpha+\beta & \ldots\ldots & t'-4=+2\alpha+\beta & \text{zijn} \end{array}$$

waaruit blijkt: †† *dat, wanneer 'er een factor van den vorm* $x^2 + \alpha x + \beta$ *bestaat, 'er ook, onder de deelers der getallen* p, q, D, s, t, *welke de waarde der gegevene uitdrukking, in de onderstelling van* $x = -2, -1, 0, +1, +2$, *zijn, getallen moeten gevonden worden, welke, met* 4, 1, 0, 1, 4, *verminderd zijnde, eene rekenkunstige reeks* $-2\alpha+\beta$, $-\alpha+\beta$, β, $\alpha+\beta$, $+2\alpha+\beta$ *zullen moeten uitmaken.*

§. 177. Hieruit volgt dezen fraaijen regel van NEWTON,

1° „ *Stel de veranderlijke grootheid x gelijk aan* -2,

„ -1,

„ -1, 0, $+1$, $+2$, *enz*, (*in eene rekenkunstige reeks*, „ *waarvan men doorgaans zoo vele termen neemt*, *als 'er éénheden in den exponent der hoogste magt zijn*.) *en bereken*, „ *welke waarden de gegevene uitdrukking*, *in deze onderstellingen*, *verkrijgt: dan heeft men de getallen* p, q, D, s, t."

2° „ *Schrijf nevens deze getallen derzelver deelers*."

3° „ *Trek van deze deelers*, *zoo wel positief als negatief genomen*, *de tweede magten van* -2, -1, 0, $+1$, „ $+2$, *of*, *in rangorde*, 4, 1, 0, 1, 4, *af: schrijf alle* „ *deze resten op dezelfde rij*, *waarin de getallen* p, q, D, „ s *en* t, *zich bevinden*."

4° „ *Zoek onder deze resten*, *van boven naar beneden gaande*, *alle die geenen*, *welke in eene rekenkunstige reeks opklimmen of afdalen. Deze reeksen*, *door* $-2\alpha+\beta$, $-\alpha+\beta$, „ β, $+\alpha+\beta$, $+2\alpha+\beta$ *voorgesteld zijnde*, *zal men gemakkelijk vinden kunnen*, *welke waarden van* α *en* β, *met* „ *dezelve overëénstemmen*"

5° „ *De waarden van de coefficienten* α *en* β *gevonden zijnde*, *zal men beproeven*, *of de gegevene uitdrukking in de* „ *daad door* $x^2+\alpha x+\beta$ *deelbaar zij?*"

6° „ *Wanneer 'er*, *onder de bovengenoemde resten*, *geene* „ *rekenkunstige reeksen voorkomen*, *zal men besluiten mogen:* „ *dat 'er geene tweede magts factoren bestaan*."

§. 178. Stellen wij: dat gegeven zij $x^4-x^3-5x^2+12x-6=y$: men vraagt, of deze uitdrukking tweede magts factoren hebbe?

x	y	*deelers van* y	x^2	*deelers van* y *min* x^2	M	N	
-2	-26	$1, 2, 13, 26$	4	$22, 9, -2, -3, -5, -6, -17, -30$	-6	$+9$	$-2\alpha+\beta$
-1	-21	$1, 3, 7, 21$	1	$20, 6, 2, 0, -2, -4, -8, -22$	-4	$+6$	$-\alpha+\beta$
0	-6	$1, 2, 3, 6$	0	$6, 3, 2, 1, -1, -2, -3, -6$	-2	$+3$	β
$+1$	$+1$	1	1	$0, -2$	0	0	$+\alpha+\beta$
$+2$	$+6$	$1, 2, 3, 6$	4	$+2, -1, -2, -3, -5, -6, -7, -10$	$+2$	-3	$+2\alpha+\beta$

In de eerste kolom staan de aangenomene waarden van x; in de tweede die van y; in de derde de deelers; in de vierde de tweede magten van de aangenomene waarden van x; in de vijfde de deelers van y, zoowel positief als negatief genomen, min de vierkanten van x; onder deze deelers vindt men, van boven tot beneden gaande, de rekenkunstige reeksen in de kolommen M en N geplaatst, welke als de waarde van $-2\alpha+\beta$ enz. moeten aangemerkt worden. De reeks M geeft $\beta=-2$ en $\alpha=+2$; de reeks N, $\beta=+3$ en $\alpha=-3$: 'er kunnen dan twee factoren bestaan, namelijk:

x^2

x^2+2x-2 en x^2-3x+3

welke, zoo als door dadelijke deeling blijken zal, indedaad factoren zijn.

§. 179. †† *De hoogste term der gegevene uitdrukking kan met eenen coefficient zijn aangedaan.* Stellen wij: dat algemeen gegeven zij . . $Ax^n+Bx^{n-1}+Cx^{n-2}+enz.+Lx+M$; indien dan deze uitdrukking eenen tweede-magts factor ax^2+bx+c heeft, zal a een deeler van A, en c een deeler van M moeten zijn: stellen wij de waarde der gegevene uitdrukking gelijk U, die van haren factor gelijk v; dan zal, wanneer men de eerste door A, en den tweeden door a deelt, verkrijgen:

$$x^n+\frac{B}{A}x^{n-1}+\frac{C}{A}x^{n-2}+enz.+\frac{L}{A}x+\frac{M}{A}=\frac{U}{A}$$

en . . . . . . $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=\frac{v}{a}$

stellen wij nu $x=\frac{z}{A}$; dan zullen, zie §. 161, beide vergelijkingen veranderen in

$$z^n+Bz^{n-1}+ACz^{n-2}+enz.+A^{n-2}Lz+A^{n-1}M=A^{n-1}U$$

$$en\ z^2+A.\frac{b}{a}z+A^2.\frac{c}{a}=A^2\times\frac{v}{a}$$

Nu is a een deeler van A; gevolgelijk zal $z^2+A.\frac{b}{a}z+A^2\times\frac{c}{a}$ eene uitdrukking in geheele getallen zijn, welke bestaan zal, zoodra de factor ax^2+bx+c in de gegevene uitdrukking $Ax^n+Bx^{n-1}+enz.$ voorhanden is. „ *Wanneer men dan de termen der gegevene uitdrukking, in rangorde, door die der meetkunstige reeks* „ $\frac{1}{A}$, 1, A, A^2, A^3, *enz. vermenigvuldigt, en de uitdrukking,* „ $z^n+Bz^{n-1}+ACz^{n-2}+enz.$, *welke men daardoor verkrijgt,* „ *eenen tweede-magts factor van den vorm* $z^2+\alpha z+\beta$ *heeft;* „ *zal men* $\alpha=A\times\frac{b}{a}$, *en* $\beta=A^2\times\frac{c}{a}$ *moeten stellen, waaruit* „ $\frac{b}{a}=\frac{\alpha}{A}$ *en* $\frac{c}{a}=\frac{\beta}{A^2}$ *volgen zal, en de begeerde factor zal* ax^2 „ $+bx+c$ *worden.*"

Wanneer men de uitdrukking $3x^5-6x^4+x^3-8x^2-14x+14$ op deze wijze behandelt, dan zal men voor derzelver deeler $3x^2+7$ vinden.

§. 180. Newtons regel is algemeen: nogtans kan men 'er andere vin-

vinden, waarmede men hetzelfde oogmerk bereiken zal (38). Stellen wij, om met eene vierde magts uitdrukking te beginnen (39), dat gegeven zij $x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$: wanneer deze dan door eenen tweede magts deeler $x^2 + \alpha x + \beta$ deelbaar is; dan zal deze deeling, zonder overſchot, moeten opgaan: men zal bijgevolg de voorwaarden, onder welk zulk eene uitdrukking $x^2 + \alpha x + \beta$ een deeler is, vinden kunnen, wanneer men de gegevene uitdrukking door dezelve deelt, en de rest der deeling gelijk nul ſtelt. Nu geeft deze deeling voor het quotient

$$x^2 + (A - \alpha)x + B - \beta - \alpha(A - \alpha)$$

en hetgeen voor de rest der deeling overblijft, is

$$[C - \beta(A - \alpha) - \alpha(B - \beta) + \alpha^2(A - \alpha)]x$$
$$+ [D - \beta(B - \beta) + \alpha\beta(A - \alpha)]$$

Deze laatſte uitdrukking zal nul moeten zijn, en nul moeten blijven, voor alle waarden, die men aan x geven kan: daaraan kan nu, op geene andere wijze, voldaan worden, dan door den coefficient van x, alsmede den tweeden term gelijk nul te ſtellen; dat is, door de vergelijkingen

$$C - \beta(A - \alpha) - \alpha(B - \beta) + \alpha^2(A - \alpha) = 0$$
$$en \quad D - \beta(B - \beta) + \alpha\beta(A - \alpha) = 0$$

aan-

(38) Men kan tot dat einde verſchillende wegen inſlaan. Stellen wij: dat gegeven zij $x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$, en nemen wij: dat dezelve uit het product der factoren $x^2 + ax + b$ en $x^2 + px + q$ beſta. Wanneer men dan deze factoren met elkander vermenigvuldigt, zal uit het product blijken: dat, wanneer 'er wezenlijk twee zulke factoren beſtaan; men, in geheele getallen, aan de volgende vergelijkingen:

$$A = p + a; \quad B = q + ap + b$$
$$C = aq + bp \quad en \quad D = bq$$

zal moeten voldoen. Nu is het klaar: dat men b als een deeler van D zal moeten aannemen en, dat, in deze onderſtelling, q als bekend zal moeten aangemerkt worden: men zal de eerſte en derde vergelijkingen $A = p + a$ en $C = aq + bp$ als twee vergelijkingen, waarin twee onbekenden a en p voorkomen, kunnen oplosſen: *indien deze oplosſing, die altijd bepaald zal zijn, als maar b niet gelijk q is, voor a en p geheele getallen geeft, welke aan de vergelijking $q + ap + b = B$ voldoen; zullen 'er twee factoren beſtaan, welke door deze oplosſing zullen bekend worden.* Deze handelwijze kan ook op hoogere magts vergelijkingen worden toegepast.

(39) Wanneer het gebleken is, dat eene derde magts-uitdrukking geenen eerſten magts-deeler heeft, zal het overtollig zijn, eenen tweede magts-deeler te zoeken; omdat deze, zonder eenen eerſten magts-deeler, niet beſtaan kan.

aantenemen, welke vergelijkingen ontwikkeld en naar de afdalende magten van α geordend zijnde, op de twee volgende uitkomen:

$$(1) \ldots \alpha^3 - A\alpha^2 + (B - 2\beta)\alpha - (C - \beta A) = 0; \textit{ zijnde } N = \frac{D}{\beta}$$

$$(2) \ldots\ldots \alpha^2 - A\alpha + (B - \beta - N) = 0$$

§. 181. Merken wij aan: dat indien β bekend ware, elk éénc dezer vergelijkingen zou kunnen dienen, om de waarde van α te vinden: maar eenige waarde van α, die aan de eerste vergelijking voldoet, zal ook klaarblijkelijk aan de tweede moeten voldoen; 'er zal derhalve, voor eenige onderstelling van β, geene waarde voor α bestaan, indien elke dezer twee vergelijkingen niet door $\alpha - p$ ($\alpha = p$ zijnde) deelbaar zij: zie §. 153; beide deze uitdrukkingen zullen gevolgelijk $\alpha - p$ tot gemeenen deeler moeten hebben. Aan alle deze voorwaarden zal men nu gemakkelijk kunnen voldoen, wanneer men aldus te werk gaat. Men vermenigvuldige de vergelijking (2) met α en trekke het product van de vergelijking (1), dan heeft men:

$$(\beta - N)\alpha + (C - A\beta) = 0 \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

waaruit terstond volgen zal:

$$\alpha = \frac{A\beta - C}{\beta - N} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Vermenigvuldigen wij vergelijking (3) met α, en (2) met $\beta - N$, en trekken wij het laatste product van het eerste; dan zal men verkrijgen:

$$(C - AN)\alpha + (B - N)N + (\beta - B)\beta = 0$$

waaruit men insgelijks eene waarde voor α verkrijgen kan; doch welke meer zamengesteld is: namelijk

$$\alpha = \frac{(N - B).N + (B - \beta)\beta}{C - AN}$$

deze waarde van α met de voorgaande vergeleken zijnde, zullen wij de vergelijking:

$$\frac{A\beta - C}{\beta - N} = \frac{N^2 - BN + B\beta - \beta^2}{C - AN}$$

verkrijgen, in welke β alleen onbekend is. Deze vergelijking opgelost en naar de afdalende magten van β geordend zijnde, zal men, in plaats van N schrijvende $D:\beta$, verkrijgen:

$$\beta^6 - B\beta^5 + (AC - D)\beta^4 - \left.\begin{matrix} C^2 \\ - A^2D \\ + 2BD \end{matrix}\right| \beta^3 + \left.\begin{matrix} ACD \\ - D^2 \\ \end{matrix}\right| \beta^2 - BD^2\beta + D^3 = 0$$

Zonder ons nu, voor het tegenwoordige, met den aard dezer vergelijking

king intelaten en aantetoonen, dat dezelve tot eene zesde magt moet opklimmen, zoo merken wij aan: dat, wanneer 'er een factor $x^2 + \alpha x + \beta$ bestaat, α en β geheele getallen moeten zijn, (in de onderstelling namelijk, dat A, B, C, D, geheele getallen zijn,) en dat gevolgelijk $\beta^6 - B\beta^5 +$ *enz.* eenen eerste magts-deeler van den vorm $\beta - q$ zal moeten hebben. Men onderzoeke dan dezen factor, volgens den regel van §. 152. Bestaat 'er geen zoodanige factor; dan heeft de gegevene uitdrukking geenen tweeden magts-factor: in het tegengestelde geval, zal men de waarde van β in

$$\alpha = \frac{A\beta - C}{\beta - N}$$

overbrengen, en α zal bekend worden.

§. 182. †† *Volgens deze handelwijze, wordt het zoeken der tweedemagts-deelers tot die van de eerste magts-deelers gebragt;* jammer is het, dat de vergelijkingen in β, welke, in het algemeen, voor eene n^{de} magts-uitdrukking, (zal de oplossing algemeen zijn,) tot de $\frac{1}{2} n \times (n - 1)$ magt zullen moeten opklimmen, zoo zamengesteld worden, dat deze handelwijze op de dadelijke berekening bezwaarlijk kan worden toegepast. Intusschen bewijst deze analysis *de mogelijkheid, om het vraagstuk van het vinden der tweede magts-deelers van dat der eerste magts-deelers te doen afhangen, en des noods, op eene voldoende wijze, optelossen.*

§. 183. Nogtans kan men van de vergelijking (4) een zeer geschikt gebruik maken, om op eene ligte wijze, de tweede-magts-deelers te ontdekken. Want, aangezien β een deeler van D moet zijn, „ *zal men, voor alle positieve en negatieve deelers van D, de waar-* „ *den van $A\beta - C$ en $\beta - N$ berekenen, en onderzoeken, welke* „ *geheele getallen men voor α verkrijgt? geven deze waarden van α* „ *geene geheele getallen, zal 'er ook geenen tweede magts-deeler kun-* „ *nen bestaan: maar verkrijgt men voor α geheele getallen, dan zal* „ *de factor, welke deze uitkomst schijnt aanteduiden, door dadelijke* „ *deeling, moeten beproefd worden;*" want het is klaar, dat, daar deze waarde van α, in eene willekeurige onderstelling voor β, is aangenomen, zulk eene waarde van β voor α een geheel getal geven kan, zonder dat daarom deze bijzondere waarde eenen tweeden magts-factor bewijst.

1. Voorbeeld. *Zij gegeven de uitdrukking:* $x^4 - x^3 - 5x^2 + 12x - 6$; dan is, $A = -1$; $B = -5$; $C = +12$ en $D = -6$. Men schrijve in de kolom β alle de deelers van D; in de kolom N alle

alle de overëénkomstige waarden van N; in de derde en vierde kolom eindelijk, de overëénkomstige waarden van $A\beta - C$ en $\beta - N$: men onderzoeke dan, welke getallen uit de derde kolom door de overëénkomstige uit de vierde deelbaar zijn? Deze deelbaarheid, in de tweede en zesde rij, plaats hebbende: mag men vermoeden: dat $x^2 - 3x + 3$ en $x^2 + 2x - 2$ deelers der gegevene uitdrukking zijn, en dit vermoeden wordt ook, door de dadelijke proef, bevestigd.

β	N	$A\beta - C$	$\beta - N$	α
$+6$	-1	-18	$+7$	
$+3$	-2	-15	$+5$	-3
$+2$	-3	-14	$+5$	
$+1$	-6	-13	$+7$	
-1	$+6$	-11	-7	
-2	$+3$	-10	-5	$+2$
-3	$+2$	-9	-5	
-6	$+1$	-6	-7	

§. 184. 2. Voorbeeld. *Zij nog gegeven de uitdrukking:*

$$x^4 \begin{array}{l} -3a \\ +c \end{array} \Bigg| \; x^3 \begin{array}{l} -8a^2 \\ -ac \end{array} \Bigg| \; x^2 \begin{array}{l} +18a^3 \\ -8a^2c \end{array} \Bigg| \; x \begin{array}{l} +6a^3c \\ -8a^4 \end{array}$$

Uit het bloote inzien van deze uitdrukking blijkt het: dat β eene tweede magt of een product van twee factoren zal behooren te zijn; 'er behoeven dus geene andere beproevingen, dan $\beta = \pm a^2$; $\beta = \pm 2a^2$, in het werk gesteld te worden. Nemen wij $\beta = -2a^2$, dan is, aangezien $A = -3a + c$, $B = -8a^2 - ac$, $C = 18a^3 - 8a^2c$ en $N = 4a^2 - 3ac$ is, $\beta - N = 3ac - 6a^2$ deeler; $A\beta = 6a^3 - 2a^2c$, en $A\beta - C = 6a^2c - 12a^3$ deeltal; nu is

$$\alpha = \frac{A\beta - C}{\beta - N} = \frac{6a^2c - 12a^3}{3ac - 6a^2} = +2a, \textit{ eene geheele stelk. uitdr.}$$

het is dus vermoedelijk: dat $x^2 + 2ax - 2a^2$ eene tweeledige deeler zij: men vindt, voor het quotient, $x^2 - (5a - c)x + (4a^2 - 3ac)$.

§. 185. Indien $x^5 + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$ gegeven is, zal het zeer vermoedelijk zijn, dat 'er een tweede magts-deeler $x^2 + \alpha x + \beta$ bestaat, indien men, in geheele getallen, vinden kan

$$\alpha = \frac{\beta^2(A - C) + BE - DN}{\beta^2(\beta - D) + AE - N^2}$$

mits $N = \frac{E}{\beta}$, en β een deeler van E zij. Voor hoogere magten worden deze vergelijkingen zamengestelder, waarom men, in die gevallen, veiliger van Newtons Leerwijze gebruik zal kunnen maken.

§. 186. Wij zouden nu tot het onderzoek van de deelers van den vorm $x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ moeten overgaan; maar aangezien zij van minder nuttigheid zijn, en wij bovendien de gronden van deze wijze van onderzoek verklaard hebben, is het ons raadzaam voorgekomen, dit minder belangrijk geval, met stilzwijgen, voorbij te gaan.

 ACHT-

ACHT- EN- VEERTIGSTE LES.

Het gebruik der stelkundige Deelers, in de oplossing der hooge magts Vergelijkingen; en over derzelver oplossing door benadering.

§. 187. Ter gelegenheid, dat wij, in de XLV *Les*, de tweede magts vergelijkingen leerden oplossen, gaven wij (zie §. 88.) een beknopt denkbeeld van de hoogere magts vergelijkingen, welker aard en eigenschappen, als gegrond zijnde op de leer der stelkundige deelers, thans overwogen zullen worden, ten einde wij daaruit de regelen tot derzelver oplossing zouden mogen afleiden.

§. 188. * *Wij nemen, hier en in het vervolg, aan: dat men, door herleiding en verplaatsing der termen, eenige hooge magts vergelijking onder den vorm*

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + \text{enz.} + Px + Q = 0$$

gebragt, en alzoo naar de afdalende magten der onbekende geordend hebbe. (Zijnde de coefficienten A, B, C, D, *enz.* P, Q, bekende, geheele of gebrokene, positieve of negatieve, getallen.) * *Men noemt den exponent van de hoogste magt der onbekende grootheid den exponent van de magt der vergelijking.* — * *Eene hooge magts vergelijking optelossen, is voor de onbekende zulk eene waarde te vinden, welke, in plaats van die onbekende, in de gegevene vergelijking, gesteld zijnde, dezelve, wanneer zij als boven geordend is, tot de vergelijking,* $0 = 0$ *zal brengen.* * *Zulk eene waarde der onbekende wordt gezegd de vergelijking optelossen, en wordt wortel der vergelijking genoemd.* Vergel. §. 95, *pag.* 61.

§. 189. Eer wij ter zake gaan, moeten wij doen opmerken: dat, wanneer men door het oplossen eener hooge magts vergelijking, $x^n + Ax^{n-1} + \text{enz.} = 0$, *verstaat eene uitdrukking voor de onbekende te vinden, welke te kennen geeft, hoe zij van de bekende coefficienten* A, B, C, *enz. afhangt*, (even zoo als, in $x^2 + ax + b = 0$, de onbekende $x = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - b)}$ van de bekende getallen a en b afhangt,) men daarin niet verder, dan tot de oplossing der vierde magts vergelijkingen, gevorderd is. (Zie de LXX, LXXI en LXXIII *Lessen*,

sen, pag. 479, *en verv.*) Maar wanneer men aanneemt, dat de coefficienten A, B, C, *enz.* in getallen gegeven zijn, * in welk geval, de vergelijking eene *getallen vergelijking* genoemd wordt; dan kan, zoo als wij verder zien zullen, de waarde der onbekende, indien zij *meetbaar* is, door middel der *deelers*, en, is zij *onmeetbaar*, door *benadering*, zoo naauwkeurig men begeert, gevonden worden, zoodat men in dien zin zeggen kan: *dat alle hoogere magts vergelijkingen, zonder onderscheid, opgelost kunnen worden.* Vergelijk §. 870 en 871. hier onder.

Verklaring van de voornaamste Hoofd-eigenschappen der hooge magts Vergelijkingen.

§. 190. I. HOOFD-EIGENSCHAP. †† *Wanneer men voor de onbekende eener vergelijking.*

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + enz. + Px + Q = 0$$

zulk een waarde a gevonden heeft, welke dezelve oplost, dan zal het voorste lid der vergelijking, door het voorste lid der vergelijking, $x - a = 0$, *deelbaar zijn.*

De waarheid dezer stelling is, in §. 154, *pag.* 110, reeds bewezen.

§. 191. II. HOOFD-EIGENSCHAP. †† *Indien het mogelijk is, om het voorste lid eener gegevene hooge magts vergelijking,* (geordend, zoo als in §. 188. is voorgeschreven,) *in twee of meer eerste magts factoren te ontleden; dan zal deze vergelijking even zooveel wortels hebben, als 'er eerste magts factoren in haar voorste lid voorkomen; en de vergelijking zal, in het algemeen, zooveel wortels kunnen hebben, als door den exponent van derzelver magt wordt uitgedrukt.*

Stellen wij, om deze gewigtige waarheid te betoogen, dat het voorste lid der algemeene vergelijking

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + enz. + Px + Q = 0$$

de eerste magts factoren $x - a$, $x - b$, $x - c$, $x - d$, *enz.* hebbe, en dat, wanneer hetzelve door het product dezer factoren gedeeld wordt, het quotient, dat altijd van den vorm $x^r + \alpha x^{r-1} + \beta x^{r-2} + \gamma x^{r-3} +$ *enz.* zijn zal, door P worde uitgedrukt; dan zal de gegevene vergelijking veranderen in de volgende:

$$(x - a)\,(x - b)\,(x - c)\,(x - d)\ enz. \times P = 0$$

 Nu

Nu kan een gedurig product niet gelijk nul worden, ten zij men één van deszelfs factoren gelijk nul stelle. Men zal dan aan deze, en dus ook aan de gegevene vergelijking, die aan dezelve gelijk is, voldoen, wanneer men eene van de volgende onderstellingen aanneemt:

$$1^{\circ}\ x-a=0;\quad 2^{\circ}\ x-b=0;\quad 3^{\circ}\ x-c=0;\quad 4^{\circ}\ x-d=0$$
$$\ldots \textit{enz.} \ldots\ldots \textit{en eindelijk} \ldots P=0$$

in elke van welke, de gegevene vergelijking $0=0$ worden zal.

Deze vergelijkingen geven nu: $x=a$; $x=b$; $x=c$; $x=d$; *enz.* en deze zijn zoo vele onderscheidene waarden, welke de gegevene vergelijking oplossen, en daarom wortels van dezelve genoemd worden; en daar 'er nu geene reden is, waarom men liever de een dan de ander dezer wortels zou doen gelden, komen ze alle gelijkelijk in aanmerking.

Het blijkt hieruit: dat, *wanneer het voorste lid eener gegevene vergelijking eenen eerste magts factor heeft, dezelve gelijk nul zal behooren gesteld te worden, om den wortel der vergelijking te verkrijgen;* daar zulks nu voor elken eerste magts factor geldt, zal de gegevene vergelijking even zoo vele wortels hebben, als 'er eerste magts factoren in haar voorste lid bestaan; vermits 'er nu even zoo vele eerste magts factoren in eenige vergelijking bestaan kunnen, als 'er éénheden in den exponent van derzelver magt zijn, (omstandigheid, welke van de betrekking der coefficienten afhangt,) kan eenige hooge magts vergelijking ook juist even zoo vele wortels hebben.

§. 192. Het onafscheidelijk verband, hetwelk tusschen het vinden der stelkundige deelers en de oplossing der hoogere magts vergelijkingen bestaat, is, uit dit betoogde, ten volle blijkbaar, en wanneer de wortels der gegevene vergelijkingen altijd meetbare grootheden waren; zouden zij, door het zoeken van de deelers van derzelver voorste leden, kunnen worden opgelost; dan, daar deze omstandigheid wel het minste plaats heeft, moet men de eigenschappen der vergelijkingen nader opspeuren, ten einde dezelve, ook wanneer de wortels onmeetbaar zijn, te kunnen oplossen. Intusschen oefene men zich in de oplossing van de Vraagstukken, op de Tabelle *A* voorkomende.

§. 193. Men mag het bewezene in de stelling niet omkeeren, en het daar voor houden: *dat eene vergelijking slechts zooveel en geen meer wortels zou kunnen hebben, als 'er eerste magts deelers in haar voorste lid voorkomen;* want het ongerijmde daarvan zal, uit de proeven, welke de volgende aanmerkingen aan de hand zullen geven, overtuigend blijken.

§. 194.

TABELLE A. *Eenige uitgelezene stelkundige Vraagstukken, welke van de oplossing der derde, vierde en hoogere magts Vergelijkingen afhangen, met derzelver oplossingen.*

[Tegen over bladzijde 132.]

1. VRAAGSTUK. *Een getal van die natuur te vinden, dat, wanneer men deszelfs cubus bij het getal* 120 *optelt, de som gelijk zij aan het negen-en-veertig voudige van dat zelfde onbekende getal?*

Stel het begeerde getal gelijk x; dan moet, volgens de voorwaarde der vraag, $x^3+120=49x$ zijn; waaruit, na verplaatsing der termen, volgt:

$$x^3-49x+120=0$$

Het voorste lid dezer vergelijking bestaat uit het product der factoren $x-3$, $x-5$ en $x+8$: men heeft alzoo de drie vergelijkingen $x-3=0$; $x-5=0$, en $x+8=0$; waaruit volgt: $x=3$; $x=5$ en $x=-8$; en deze zijn drie onderscheidene getallen, welke aan de voorwaarden der vraag voldoen.

2. VRAAGSTUK. *De Eigenaar van een buitengoed laat eenen vierkanten vijver, ter diepte van twaalf voeten graven, en dit werk door eenige arbeiders aannemen, (welker aantal dertien minder is, dan elke zijde van den vijver roeden lengte bedraagt,) onder voorwaarde, dat zij, bij het begin van het werk, gezamenlijk* 385 *guldens ter goede rekening ontvangen, en, na afloop van hetzelve, elk zooveelmaal* 49 *guldens zullen genieten, als zij arbeiders sterk zijn, en elk nog twee guldens daarenboven: volgens deze overëenkomst, zal de cubieke roede zooveel guldens aan uitgraven kosten, als tot dat werk arbeiders zijn aangenomen geworden: men vraagt: hoe groot kan, volgens deze bepaling, het getal arbeiders geweest zijn? hoe groot was de vijver, en hoeveel heeft zijne uitgraving gekost?*

Stel het getal der arbeiders x; dan heeft elke zijde van den vijver de lengte van $x+13$ roeden: nu zullen zij elk, na het einde van het werk, $49x+2$ guldens genieten, en dus gezamenlijk, met hun allen, $x(49x+2)=49x^2+2x$ guldens, en, daar zij, bij het begin van den arbeid, 385 guldens ter goede rekening ontvangen, zal het uitgraven $49x^2+2x+385$ guldens aan arbeidsloon bedragen. Nu bevat de vijver $(x+13)^2\times 1=x^2+26x+169$ cubieke roeden; daar nu de cubieke roede zooveel guldens aan uitgraven kost, als 'er arbeiders tot dit werk zijn aangenomen, hebben wij de vergelijking $x(x^2+26x+169)=49x^2+2x+385$, welke naar behooren ontwikkeld en herleid zijnde, geven zal:

$$x^3-23x^2+167x-385=0$$

De deelers van het voorste lid dezer vergelijking zijn $x-5$, $x-7$ en $x-11$: men zal dan, om aan de finale vergelijking te voldoen, kunnen stellen $x-5=0$; $x-7=0$, en $x-11=0$, en men vindt dus drie antwoorden $x=5$; $x=7$ en $x=11$; voor het getal arbeiders; 324, 400 of 576, cubieke roeden, voor de groote van den vijver, en 1620, 2800 of 6336 guldens, voor de kosten van zijne uitgraving.

3. VRAAGSTUK. *Het getal* 40 *zoodanig in twee deelen te verdeelen, dat de som van de vierkants-wortels der deelen in het verschil van diezelfde deelen viermaal begrepen zij?*

Stel het grootste deel x; dan is het kleinste gelijk $40-x$; en het verschil der deelen $2x-40$, en dan moet, volgens de voorwaarde der vraag, $\sqrt{x}+\sqrt{(40-x)}=\frac{1}{4}(2x-40)=\frac{1}{2}(x-20)$ zijn. Men verheffe, om de wortel-teekens weg te maken, beide leden der vergelijking tot de tweede magt; dan verkrijgt men, na behoorlijke herleiding, $8\sqrt{(40x-x^2)}=x^2-40x+240$, welke vergelijking men nogmaals tot de tweede magt verheft, als wanneer men, na behoorlijke schikking der termen, verkrijgen zal:

$$x^4-80x^3+2144x^2-21760x+57600=0$$

Het voorste lid dezer vergelijking heeft de deelers $x-36$; $x-4$ en $(x-20)^2$; de eerste deeler geeft $x=36$, voor het grootste, en $40-x=4$, voor het kleinste der deelen: de tweede deeler zou voor het grootste deel 4, en voor het kleinste 36 geven, hetgeen met de onderstelling, in het begin der oplossing, waarbij men x als het grootste deel aanneemt, schijnt te strijden; dan, daar de vierkants-wortel uit een getal zoowel negatief als positief kan genomen worden, maakt deze waarde, ofschoon zij eigenlijk geene andere getallen geeft, eene bijzondere oplossing uit. De twee gelijke wortels $x=20$ voldoen insgelijks; omdat het verschil van derzelver vierkants-wortels in het verschil der deelen kan gehouden worden, viermaal begrepen te zijn.

4. VRAAGSTUK. *Men begeert het getal* 40 *in drie deelen te verdeelen, zoodanig dat twee dezer deelen zich tot elkander, als twee tot drie, verhouden, en dat de som van de cuben der deelen gelijk zij aan* 10240?

Stel voor de twee deelen, welke tot elkander in reden moeten staan, als twee tot drie, $2x$ en $3x$; dan is het derde deel klaarblijkelijk gelijk aan $40-5x$, en, volgens de laatste voorwaarde der vraag, zal

$$8x^3+27x^3+(40-5x)^3=10240$$

moeten zijn. Indien men de termen dezer vergelijking ontwikkelt, en naar behooren ordent; zal men tot de finale vergelijking

$$9x^3-300x^2+2400x-5376=0$$

komen, welker voorste lid uit het product der factoren $x-4$ en $9x^2-264x+1344$ bestaat: men heeft gevolgelijk

$$x-4=0, \text{ en } 9x^2-264x+1344=0$$

De eerste vergelijking geeft $x=4$, en de laatste, naar den regel der vierkants vergelijkingen, oplossende, vindt men: $x=+14\frac{2}{3}+1\frac{1}{3}\sqrt{37}$ en $x=+14\frac{2}{3}-1\frac{1}{3}\sqrt{37}$. 'Er zijn derhalve op deze vraag drie oplossingen. De eerste geeft 8, 12 en 20, voor de deelen; de tweede $29\frac{1}{3}+2\frac{2}{3}\sqrt{37}$, $44+4\sqrt{37}$ en $-33\frac{1}{3}-6\frac{2}{3}\sqrt{37}$; en de derde $29\frac{1}{3}-2\frac{2}{3}\sqrt{37}$, $44-4\sqrt{37}$ en $-33\frac{1}{3}+6\frac{2}{3}\sqrt{37}$, voor de begeerde deelen van het gegeven getal 40.

5. VRAAGSTUK. *Welk jaartal is het, dat, in twee onderscheidene Talstelsels, welker grondtallen twee verschillen, in het eerste stelsel, door* 12213, *en, in het tweede, door* 3421 *wordt uitgedrukt?*

Stel het grondtal van het eerste stelsel x; dan is het grondtal van het tweede $x+2$; en dan wordt, zie §. 416, I. C., de waarde van het jaartal, in het eerste stelsel, uitgedrukt, door $x^4+2x^3+2x^2+x+3$, en, in het tweede, door $3(x+2)^3+4(x+2)^2+2(x+2)+1$. Daar nu deze twee uitdrukkingen hetzelfde getal voorstellen, verkrijgt men de vergelijking: $x^4+2x^3+2x^2+x+3=3(x+2)^3+4(x+2)^2+2(x+2)+1$; welke, na behoorlijke ontwikkeling en herleiding, geven zal:

$$x^4-x^3-20x^2-53x-42=0$$

deze vergelijking heeft slechts éénen meetbaren positieven wortel $x=6$. Het getal 12213 behoort dus tot het zestallig, en 3421 tot het achttallig stelsel, en wanneer men elk dezer getallen in het tientallig stelsel overzet, vindt men 1809, voor het gevraagde jaartal. De negatieve en onmeetbare wortel geldt hier niet.

6. VRAAGSTUK. *Drie getallen, in eene meetkunstige reeks, te vinden, welker drie verschillen eene harmonische evenredigheid uitmaken?*

Stellende x, y en z voor de drie getallen; dan zal, uit den aard der meetkunstige reeks, volgen: dat $xz=y^2$ moet zijn. De drie verschillen zijn $x-y$, $y-z$ en $x-z$; deze moeten eene harmonische evenredigheid uitmaken: volgens *Vraagstuk* 45, *pag.* 346, I. C., zal dan

$$x-y:x-z=2y-x-z:x-y$$

moeten zijn: en, volgens de hoofd-eigenschap der evenredigheden,

$$x^2-2xy+y^2=2xy-x^2-2yz+z^2$$

Indien men, in deze vergelijking, in plaats van z, schrijft $\frac{y^2}{x}$; dan zal men hebben:

$$x^2-2xy+y^2=2xy-x^2-\frac{2y^3}{x}+\frac{y^4}{x^2}$$

welke, herleid zijnde, geven zal:

$$y^4-2xy^3-x^2y^2+4x^3y-2x^4=0$$

eene vergelijking van twee onbekenden, welke, daar 'er geene derde vergelijking uit het vraagstuk gehaald kan worden, de onbepaaldheid van hetzelve bewijst. De oplossing dezer vergelijking zou zeer moeijelijk zijn, indien de theorie der deelers ons niet deed zien: dat het eerste lid in twee factoren, $y^2-2xy+x^2$ en y^2-2x^2 ontleedbaar is: men heeft dan

$$(y^2-2xy+x^2)\times(y^2-2x^2)=0$$

en men zal derhalve kunnen stellen:

$$y^2-2xy+x^2=0, \text{ en } y^2-2x^2=0$$

de eerste onderstelling geeft $y-x=0$, of $x=y$ en $z=x=y$. Deze oplossing beteekent niets: aangezien drie gelijke getallen van zelven eene meetkunstige en harmonische reeks uitmaken. De tweede vergelijking geeft:

$$y=\pm x\sqrt{2} \text{ en } z=\frac{y^2}{x}=\frac{2x^2}{x}=2x$$

Men kan nu x, naar welgevallen, nemen, en men zal drie getallen gevonden hebben, die aan de begeerde voorwaarden voldoen. Stel $x=1$; dan zijn de begeerde getallen 1, $\sqrt{2}$ en 2.

7. VRAAGSTUK. *Drie getallen, in eene harmonische evenredigheid, te vinden, welker drie verschillen eene gedurige meetkunstige evenredigheid uitmaken?*

Stel voor de drie begeerde getallen x, y en z; dan moet, volgens de eigenschap der harmonische evenredigheid, $x:z=x-y:y-z$, zijn, en daar het product der uiterste termen gelijk is aan het product der middelsten, dan zal men de vergelijking: $xy-xz=xz-yz$ verkrijgen. Daar nu, volgens de voorwaarde van de vraag, de verschillen, $x-y$, $y-z$ en $x-z$, in eene gedurige meetkunstige evenredigheid moeten zijn; en dus het product der uiterste termen gelijk aan het vierkant van den middelsten is, zal men nog de vergelijking, $x^2 - xz - xy + yz = y^2 - 2yz + z^2$, welke, met de zoo even uitgebragte, $xy - xz = xz - yz$, de vergelijkingen zijn, die uit de voorwaarden der vraag volgen, en daar 'er nu drie onbekenden en slechts twee vergelijkingen zijn, is het vraagstuk onbepaald. De laatste dezer vergelijkingen geeft: $x = yz : (2z - y)$, en, wanneer men de eerste, met betrekking tot x, oplost, vindt men: $x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z \pm \frac{1}{2}\sqrt{(5y^2 - 10yz + 5z^2)}$. Vergelijkt men deze twee waarden van x met elkander, zal men, na het wegmaken van het wortelteeken, vinden:

$$y^4 - 8y^3z + 17y^2z^2 - 14yz^3 + 4z^4 = 0$$

en nu moeten y en z zoodanig bepaald worden, dat zij aan deze vergelijking voldoen. Nu zal men vinden, dat haar voorste lid in de factoren $y^2 - 2yz + z^2$ en $y^2 - 6yz + 4z^2$ ontleedbaar is; men heeft gevolgelijk:

$$y^2 - 2yz + z^2 = 0, \quad en \quad y^2 - 6yz + 4z^2 = 0$$

Uit de eerste vergelijking volgt: $y = z = x$, welke oplossing niets beteekent. De tweede geeft $y = 3z \pm z\sqrt{5}$, en men kan hier z naar welgevallen nemen. Stellende dan $z = 2$; dan zal men, voor de drie begeerde getallen, vinden: $-1 \pm \sqrt{5}$; $6 \mp 2\sqrt{5}$, en 2.

8. VRAAGSTUK. *Twee getallen, onder deze bepaling, te vinden, dat, wanneer men elk derzelver met de éénheid vermeerdert, het product der sommen gelijk zij aan 20; en, wanneer men bij de cubus van elk de éénheid optelt, het product dezer sommen gelijk zij aan 1820?*

Stel de getallen x en y; dan moet, volgens de voorwaarden der vraag, $(x+1)(y+1) = 20$; en $(x^3+1) \times (y^3+1) = 1820$ zijn. De eerste vergelijking geeft: $x = (19 - y) : (y + 1)$; en deelt men de tweede door de eerste; dan verkrijgt men: $(x^2 - x + 1) \ldots (y^2 - y + 1) = 91$, welke, wanneer men in dezelve de waarde van x overbrengt, na herleiding, geven zal:

$$y^4 - 19y^3 + 103y^2 - 193y + 84 = 0$$

Het eerste lid dezer vergelijking is in de factoren $y - 3$; $y - 4$ en $y^2 - 12y + 7$ ontleedbaar: men kan derhalve $y - 3 = 0$; $y - 4 = 0$ en $y^2 - 12y + 7 = 0$ stellen. Deze vergelijkingen oplossende, verkrijgt men vier positieve waarden voor y, te weten: $y = 3$; $y = 4$; $y = 6 + \sqrt{29}$ en $y = 6 - \sqrt{29}$; de waarden van $x = (19 - y) : (y + 1)$, welke hiermede overëênkomen, zijn $x = 4$; $x = 3$; $x = 6 - \sqrt{29}$ en $x = 6 + \sqrt{29}$. De twee eerste dezer oplossingen komen op hetzelfde uit, gelijk ook de twee laatste. Vergelijk §. 125, I. AANMERKING, *pag.* 88.

9. VRAAGSTUK. *Men begeert drie getallen, onder de volgende bepalingen, te vinden: dat het product van de som van de twee eersten met het vierkant van het derde gelijk 80; het product van de som der twee laatsten met het vierkant van het eerste gelijk 28, en het product van de som van het eerste en derde met het vierkant van het tweede gelijk 54 zij?*

Stel voor de gevraagde getallen x, y en z; dan worden de voorwaarden van het vraagstuk door de drie volgende vergelijkingen: $(x + y)z^2 = 80$; $(y + z)x^2 = 28$ en $(x + z)y^2 = 54$; of, door $xz^2 + yz^2 = 80$; $x^2y + x^2z = 28$; $xy^2 + y^2z = 54$; uitgedrukt. Men stelle $y = nx$ en $z = mx$; dan verkrijgen deze vergelijkingen de meer geschikten vorm: $m^2x^3 + m^2nx^3 = 80$; $nx^3 + mx^3 = 28$; en $n^2x^3 + mn^2x^3 = 54$: en men haalt uit dezelve

$$x^3 = \frac{80}{m^2 + m^2n}; \quad x^3 = \frac{28}{m + n} \quad en \quad x^3 = \frac{54}{n^2 + mn^2}$$

Men kan nu, uit deze drie waarden van x^3, twee vergelijkingen, tusschen m en n, opmaken, uit welke men gemakkelijk . . . . $m = (27n - 14n^2) : (14n^2 - 27)$, en eindelijk de finale vergelijking: $28n^3 - 81n + 27 = 0$, vinden zal. Het voorste lid dezer laatste vergelijking is gelijk aan $(n - 1\frac{1}{2}) \times (28n^2 + 42n - 18)$. Men heeft dan $n = 1\frac{1}{2}$; en wanneer men de vergelijking $14n^2 + 21n - 9 = 0$ oplost, vindt men nog voor n de twee andere waarden: $n = -\frac{3}{4} \pm \frac{3}{4}\sqrt{1\frac{5}{7}}$. Met de eerste dezer waarden, namelijk met $n = 1\frac{1}{2}$, vindt men, $m = 2$; $x = 2$; $y = nx = 3$ en $z = mx = 4$. Neemt men $n = -\frac{3}{4} + \frac{3}{4}\sqrt{1\frac{5}{7}}$; dan vindt men: $m = -2\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2}\sqrt{1\frac{5}{7}}$; en voorts: $x = 3\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{105}$; $y = 3$ en $z = 2\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{105}$. Neemt men eindelijk: $n = -\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\sqrt{1\frac{5}{7}}$; dan zal men voor de gevraagde getallen vinden: $x = 3\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{105}$; $y = 3$ en $z = 2\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{105}$. Dit vraagstuk heeft alzoo drie onderscheidene oplossingen.

10. VRAAGSTUK. *Vier getallen te vinden, waarvan de som der eerste magten gelijk* 12, *de som der tweede magten gelijk* 56, *de som der derde magten gelijk* 300, *en de som der vierde magten gelijk aan* 1716 *is.*

Stellende, dat de vier gevraagde getallen de wortels der vergelijking: $z^4 - az^3 + bz^2 - cz + d = 0$ zijn; dan zal men de coefficienten a, b, c, d, dezer vergelijking, met behulp van het *Theorema* van GIRARD, zie §. 755, alwaar $\Sigma = 12$; $\Sigma_2 = 56$; $\Sigma_3 = 300$ en $\Sigma_4 = 1716$ is, vinden kunnen: volgens dit theorema, is, $a = \Sigma = 12$; $b = \frac{1}{2}[a\Sigma - \Sigma_2] = +44$; $c = \frac{1}{3}[b\Sigma - a\Sigma_2 + \Sigma_3] = 52$ en $d = \frac{1}{4}[c\Sigma - b\Sigma_2 + a\Sigma_3 - \Sigma_4] = 11$. Men heeft alzoo de vergelijking: $z^4 - 12z^3 + 44z^2 - 52z + 11 = 0$, welker wortels de gevraagde getallen zijn. Het voorste lid dezer vergelijking bestaat uit het product der factoren $x^2 - 4x + 1$ en $x^2 - 8x + 11$: elk dezer factoren gelijk nul stellende, en de komende vierkantsvergelijkingen oplossende, vindt men, voor de gevraagde getallen: $2 + \sqrt{3}$, $2 - \sqrt{3}$, $4 + \sqrt{5}$ en $4 - \sqrt{5}$.

11. VRAAGSTUK. *De middellijnen van de in en omgeschrevene cirkels, benevens de inhoud eenes driehoeks gegeven zijnde, eenen regel te vinden, om de zijden dezes driehoeks te berekenen?*

Stel de middellijn des ingeschrevenen cirkels a, die van den omgeschreven cirkel $4b$, en den inhoud gelijk P; laten de zijden door x, y en z worden uitgedrukt; stel kortheidshalve . . . . . $s = \frac{1}{2}(x + y + z)$; dan zal, (aangezien, uit de gronden der Meetkunst, bekend is, dat de middellijn van den omgeschreven cirkel gelijk is aan het product der zijden, gedeeld door het dubbeld van den inhoud,) $xyz : 2P = a$ moeten zijn, en daar de inhoud gedeeld door den omtrek gelijk aan de halve straal des ingeschreven cirkels is, zal $P : (x + y + z) = b$ moeten zijn, en eindelijk zal, naar den bekenden regel, waardoor men den inhoud eens driehoeks uit zijne drie zijden vindt, $s(s - x)(s - y)(s - z) = P^2$ moeten zijn. Wij hebben alzoo drie vergelijkingen, waardoor de drie onbekenden x, y en z moeten gevonden worden. Wij merken op: dat, in alle de gegevene vergelijkingen, de grootheden op dezelfde wijze voorkomen, zoodat, wanneer men tot eene finale vergelijking komt, deze noodzakelijk ook de waarden der twee andere onbekenden geven zal: men kan dus vooruit zien, dat men tot eene derde magts vergelijking zal komen, welker wortels de zijden van den gevraagden driehoek zullen zijn. Stellen wij deze vergelijking:

$$v^3 - Av^2 + Bv - C = 0$$

dan zal, $A = x + y + z$; $B = xy + xz + yz$ en $C = xyz$, moeten zijn. De eerste vergelijking geeft: $xyz = 2aP$, en de tweede $x + y + z = P : b$. Het komt 'er derhalve op aan, om $xy + xz + yz$ te vinden: zulks kan, met behulp van de derde vergelijking, geschieden. Indien men dezelve ontwikkelt, vindt men:

$$s^4 - (x + y + z)s^3 + (xy + xz + yz)s^2 - xyz.s = P^2$$

Indien men deze eerst door $s^2 = P^2 : 4b^2$ deelt, en in plaats van $xyz : s$ schrijft $4ab$, zal men:

$$s^2 - (x + y + z)s + (xy + xz + yz) - 4ab - 4b^2 = 0$$

verkrijgen, uit welke, indien men eindelijk voor s en $x + y + z$ derzelver waarde stelt, volgen zal:

$$xy + yz + xz = \frac{P^2}{4b^2} + 4b \times (a + b)$$

Alle de coefficienten der aangenomene vergelijking zijn derhalve bekend, en het blijkt hieruit: dat, wanneer men de derde magts vergelijking,

$$v^3 - \frac{P}{b}v^2 + \left\{\frac{P^2}{4b^2} + 4b(a + b)\right\}v - 2aP = 0$$

oplost, derzelver wortels de zijden van den begeerden driehoek zullen zijn. Zij, bij voorbeeld, in getallen, $a = 260$, $4b = 128$ en $P = 21504$; dan zal de vergelijking, voor dit geval $v^3 - 672v^2 + 150272v - 11182080 = 0$ worden, welker wortels 208, 224 en 240 de zijden van den gegevenen driehoek zijn.

12. VRAAGSTUK. *De som van n termen eener meetkunstige reeks, en de som van derzelver vierkanten gegeven zijnde, begeert men de termen dezer reeks te bepalen?*

Men stelle de begeerde reeks: x, xy, xy^2, *enz.*; dan is derzelver laatste term xy^{n-1}; en men heeft de twee vergelijkingen:

$$x(1 + y + y^2 + y^3 + enz. + y^{n-1}) = a$$

$$x^2(1 + y^2 + y^4 + y^6 + enz. + y^{2n-2}) = b$$

Zijnde a en b de gegevene sommen. Nu is, (zie §. 60,) $1 + y + y^2 + enz. + y^{n-1} = (1 - y^n) : (1 - y)$; en $1 + y^2 + y^4 + enz. + y^{2n-2} = (1 - y^{2n}) : (1 - y^2)$, de twee gegevene vergelijkingen veranderen derhalve in

$$x \times \frac{1 - y^n}{1 - y} = a, \quad en \quad x^2 \times \frac{1 - y^{2n}}{1 - y^2} = b$$

waaruit volgt: $x = a \times \frac{1 - y}{1 - y^n}$ en $x^2 = b \times \frac{1 - y^2}{1 - y^{2n}}$; en, de eerste dezer twee in het vierkant brengende, $x^2 = a^2 \times \frac{(1 - y)^2}{(1 - y^n)^2}$. Vergelijkt men nu deze waarden van x^2 met elkander; dan verkrijgt men de finale vergelijking in y, namelijk:

$$a^2 \times \frac{(1 - y)^2}{(1 - y^n)^2} = b \times \frac{1 - y^2}{1 - y^{2n}}$$

welker beide leden door het gebroken $(1 - y) : (1 - y^n)$ deelbaar zijn. Men verkrijgt, door deze deeling,

$$a^2 \times \frac{1 - y}{1 - y^n} = b \times \frac{1 + y}{1 + y^n}$$

$$\text{of} \quad a^2(1 - y)(1 + y^n) = b(1 + y)(1 - y^n) \quad . \quad . \quad . \quad (P)$$

In alle gevallen, zijn beide leden dezer laatste vergelijking door $1 - y$ deelbaar; omdat, voor alle waarden van n, de factor $1 - y^n$ door $1 - y$ deelbaar is; doch $1 + y^n$ zal, in geen ander geval, door $1 + y$ deelbaar zijn, ten zij de waarde van n oneven is. Men heeft dus twee gevallen te onderscheiden.

1° Indien n even is. In dit geval, zal na de deeling, door $1 - y$, de vergelijking (P), in $a^2(1 + y^n) = b(1 + y)(1 + y + y^2 + enz. + y^{n-1})$ veranderen; en, wanneer men nu, om te bekorten, $c = 2b : (a^2 - b)$ stelt; dan wordt de finale vergelijking:

$$y^n - cy^{n-1} - cy^{n-2} - enz. - cy^2 - cy + 1 = 0 \quad . \quad . \quad (Q)$$

2° Is n een oneven getal; dan zal men de vergelijking (P) nog door $1 + y$ kunnen deelen, en, $c = (a^2 + b) : (a^2 - b)$ stellende, zal de finale vergelijking worden:

$$y^{n-1} - cy^{n-2} + y^{n-3} - enz. - cy^3 + y^2 - cy + 1 = 0 \quad . \quad . \quad (R)$$

en derhalve, in dit geval, eene afmeting minder, dan in het voorgaande, verkrijgen. In beide gevallen behooren de finale vergelijkingen (Q) en (R) tot de soort van vergelijkingen, welke de Franschen *équations réciproques* noemen, en welke, in het eerste geval, tot eene vergelijking van de $\frac{1}{2}n$, en, in het tweede, tot de $\frac{1}{2}(n - 1)$ magt kan verlaagd worden. Zie de LXXII. *Les.* De verdere toepassing en uitbreiding laten wij aan den Lezer over.

§. 194. I. Aanmerking. †† *Wanneer het voorste lid eener vergelijking slechts eenen eerste magts-deeler heeft, zou men daaruit verkeerdelijk besluiten: dat zij niet meer dan éénen wortel zou hebben.*

Dit zal blijken, wanneer men kan aantoonen, dat 'er, in dit geval, nog onmeetbare wortels bestaan kunnen. Laat gegeven zijn:

$$x^3 + x^2 - 48x - 56 = 0$$

dan zal men, volgens den regel van §. 152, vinden: dat het voorste lid dezer vergelijking door $x - 7$ deelbaar is, en dat gevolgelijk $x = 7$ een wortel zal zijn. Deelen wij dan dit voorste lid door dezen deeler; dan zal men, voor het quotient, vinden $x^2 + 8x + 8$: en men zal gevolgelijk kunnen stellen:

$$(x^2 + 8x + 8) \times (x - 7) = 0$$

dat is $x - 7 = 0$, en $x^2 + 8x + 8 = 0$. Offchoon nu het voorste lid der laatste vergelijking geenen eerste magts deeler meer heeft, zal men dezelve vergelijking nogtans, naar §. 97, kunnen oplossen, en vinden: $x = -4 + 2\sqrt{2}$ en $x = -4 - 2\sqrt{2}$, welke insgelijks wortels van de gegevene derde magts vergelijking zullen zijn; want, wanneer men elk dezer waarden van x, in plaats van de onbekende, stelt, zal het voorste lid der vergelijking, daardoor, in beide gevallen, nul worden. Indedaad, $x = -4 + 2 + \sqrt{2}$ zijnde, zal $x^2 = (-4 + 2\sqrt{2}) \times (-4 + 2\sqrt{2}) = + 16 - 16\sqrt{2} + 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = + 16 - 16\sqrt{2} + 8 = 24 - 16\sqrt{2}$ zijn; en $x^3 = (24 - 16\sqrt{2}) \times (-4 + 2\sqrt{2}) = - 96 + 64\sqrt{2} + 48\sqrt{2} - 32 \times 2 = - 160 + 112\sqrt{2}$; en nu heeft men

$$\left.\begin{array}{rcl} x^3 & = & -160 + 112\sqrt{2} \\ x^2 & = & +\ 24 - \ 16\sqrt{2} \\ -48x & = & +192 - \ 96\sqrt{2} \\ -56 & = & -\ 56 \end{array}\right\} \textit{optetellen}$$

$$0 = 0$$

Indien men deze vergelijkingen optelt, wordt het voorste lid der vergelijking, ten bewijze, dat $-4 + 2\sqrt{2}$ een wortel is, gelijk nul. Hetzelfde zal ook van den wortel $x = -4 - 2\sqrt{2}$ blijken (40).

§. 195. Indien gegeven is: $x^3 - 2x + 4 = 0$, zal men vinden: $x =$

(40) Wanneer wij, in het vervolg, kortheidshalve, de deelen eener oplossing niet uitwerken, moet zulks echter door den Lezer, tot wiens oefening wij de uitwerking van die deelen hebben overgelaten, geschieden.

$x = -2$, $x = 1 + \sqrt{-1}$ en $x = 1 - \sqrt{-1}$. De twee onbestaanbare uitdrukkingen, welke men hier verkrijgt, voldoen aan de vergelijking, waaruit bij de proef blijkt: †† *dat eene derde magts vergelijking ééne bestaanbare en twee onbestaanbare wortels kan hebben.*

§. 196. II. AANMERKING. †† *Ook mag men, wanneer 'er, in het voorste lid eener gegevene vergelijking, geen eerste magts deelers mogten voorkomen, niet besluiten: dat deze vergelijking daarom geen wortels zou hebben.*

Zulks blijkt ten klaarste, wanneer men de vergelijking,

$$x^4 - x^3 - 5x^2 + 12x - 6 = 0,$$

welker eerste lid geene factoren van den vorm $x - a$ heeft, naauwkeurig beschouwt. Want het zal, door den regel van §. 177, of 183, blijken: dat de gegevene vergelijking in

$$(x^2 + 2x - 2) \times (x^2 - 3x + 3) = 0$$

verandert. Men zal dus kunnen stellen:

$$x^2 + 2x - 2 = 0, \quad \textit{en} \quad x^2 - 3x + 3 = 0$$

en men heeft alzoo twee vierkants-vergelijkingen, welke, elk in het bijzonder, opgelost zijnde, geven zullen:

$$\textit{de eerste} \begin{cases} x = -1 + \sqrt{3} = +0{,}7320508 \textit{ enz.} \\ x = -1 - \sqrt{3} = -2{,}7320508 \textit{ enz.} \end{cases}$$

$$\textit{de tweede} \left.\begin{cases} x = +1\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{-3} \\ x = +1\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{-3} \end{cases}\right\} \textit{onbestaanbare wortels}$$

Men zal zich nu kunnen overtuigen, dat deze vier uitdrukkingen ware wortels, der gegevene vergelijking zijn, wanneer men elk derzelve in het voorste lid overbrengt, als wanneer men, zoo als het behoort, $0 = 0$ zal vinden.

§. 197. Bij het onderzoek van de volgende vergelijkingen, (welker wortels met behulp der tweede magts-deelers, zie §. 177, kunnen gevonden worden)

$$x^4 - 2x^3 - 23x^2 + 50 = 0$$

waarvan $-1 + \sqrt{6}$, $-1 - \sqrt{6}$, $+2 + \sqrt{14}$ en $+2 - \sqrt{14}$ de wortels zijn, en van

$$x^4 + 7x^2 + 2x + 30 = 0$$

welker wortelen zijn: $+1 + \sqrt{-5}$; $+1 - \sqrt{-5}$; $-1 + 2\sqrt{-1}$ en $-1 - 2\sqrt{-1}$

zal het blijken: †† *dat een vierde magts vergelijking, offschoon zij, in geheele getallen, geen wortels heeft, nogtans vier bestaanbare, of vier onbestaanbare wortels zal kunnen hebben.*

§. 198.

§. 198. III. Aanmerking. Uit deze proeven ontſtaat dan het vermoeden: †† *dat eene hooge magts vergelijking even zoo vele wortels hebben kan, als 'er éénheden in den exponent van de hoogſte magt der onbekende voorkomen; onder deze wortels, zoowel de onbeſtaanbare als de beſtaanbare begrijpende.* 'Er wordt een, voor het tegenwoordige, te diepzinnig bewijs gevorderd, om, zoo als in het vervolg geſchieden zal, de wezenlijkheid van dit vermoeden buiten twijfel te ſtellen. Dit *vermoeden* dan, als eene *bewezene waarheid*, aannemende, zal het thans belangrijker en van meer gewigt zijn, opzettelijk te betoogen.

III. Hoofd-eigenschap. †† *Dat, wanneer 'er, voor eene vergelijking, zoo vele beſtaanbare wortels gevonden zijn, als 'er éénheden in den exponent van hare magt voorkomen, 'er geen meer dan deze wortels beſtaan kunnen.*

Laat, om deze ſtelling, die, op eene meer algemeene wijze, hetzelfde bevat, wat wij in §. 104, *pag.* 66, van de vierkants-vergelijking bewezen hebben, buiten twijfel te ſtellen

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$$

eene vierde magts-vergelijking zijn. Nemen wij aan: dat men, door den regel der eerſte magts-deelers, §. 152, gevonden hebbe: dat a, b, c, d de beſtaanbare wortels der vergelijking zijn, of liever, dat derzelver eerſte lid uit het product der factoren $x-a$, $x-b$, $x-c$, $x-d$ beſtaat; dan zal

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d) = 0$$

moeten zijn. Nemen wij nog, duidelijkshalve, dat a de grootſte wortel, en voorts $a > b$; $b > c$ en $c > d$ zij: indien 'er dan eenige andere wortel, behalve a, b, c en d, beſtaat, zal hij, 1° of grooter dan de grootſte wortel a, of 2° tusſchen a en b, of 3° tusſchen b en c, of 4° tusſchen c en d, moeten vallen, of 5° eindelijk kleiner dan de kleinſte wortel d moeten zijn. Onderzoeken wij elk één dezer gevallen.

1° Indien een wortel, die wij r zullen noemen, grooter dan a ware, dan zou hij, om wezenlijk een wortel te kunnen zijn, in het voorſte lid der vergelijking, in plaats van x, geſteld zijnde, hetzelve gelijk nul moeten maken: dan, of men deze waarde in $x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ ſtelt, dan wel in $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$, die, volgens de onderstelling, aan de eerste gelijk is, zal zulks op hetzelfde moeten uitkomen. Wanneer dan r een wortel ware, zou

$$(r-a)\ (r-b)\ (r-c)\ (r-d)=0 \quad . \quad . \quad . \quad (A)$$

moeten zijn. Maar daar, in ons geval, $r>a$ is, zou (omdat $a>b$, $b>c$ en $c>d$ is,) $r>b$, $r>c$, en $r>d$ zijn, en het voorste lid der laatste vergelijking zou uit het product van vier positieve getallen bestaan, en bijgevolg positief en niet gelijk nul kunnen zijn, zoo als, indien r een wortel ware, zou behooren plaats te hebben.

2° Stellen wij: $r<a$ en $>b$, of tusschen a en b; dan zal $r-a$ negatief; maar $r-b$, $r-c$, en $r-d$ zullen positief zijn. Het eerste lid van de vergelijking (A), zal dan, volgens het leerstelsel der teekens, negatief en niet gelijk nul zijn, ten bewijze, dat 'er geen wortel tusschen a en b bestaan kan.

3° Neemt men $r<b$ en $r>c$; dan zullen $r-a$ en $r-b$ negatief zijn; $r-c$ en $r-d$ daarentegen positief: en het voorste lid van de vergelijking (A) zal positief en niet gelijk nul zijn. Wij besluiten hieruit: dat 'er ook geen wortel tusschen b en c bestaat.

4° Maar 'er zal ook geen wortel tusschen c en d bestaan; omdat $r-a$, $r-b$, $r-c$, in dit geval, negatief, en $r-d$ positief zijnde, het eerste lid van de vergelijking (A) negatief en niet nul wordt.

5° Nu zou 'er nog een wortel bestaan kunnen, die kleiner is dan alle de gevondene wortels der vergelijking: maar, deze onderstelling aannemende, worden de factoren $r-a$, $r-b$, $r-c$, $r-d$, alle negatief, en derzelver product positief wordt en niet gelijk nul.

§. 199. Uit het beloop van dit betoog ziet men:

IV. HOOFD-EIGENSCHAP. 1° †† *Dat, wanneer men, in plaats van de onbekende, eene grootheid stelt, grooter dan de grootste wortel, en eene andere grootheid, kleiner dan de grootste en grooter dan de tweede wortel zijnde, de waarde van het voorste lid der vergelijking, in het eerste geval, positief, en in het tweede negatief zal moeten zijn.*

2° †† *Dat, in het algemeen, wanneer p, q en r drie op elkander volgende wortels zijn, en men, voor de onbekende, twee getallen m en n in plaats stelt, waarvan het eerste tusschen p en q, en het tweede tusschen q en r valt, de waarde van het eerste lid in een dezer gevallen, positief, en, in het andere geval, negatief zal zijn.*

Men wordt hierdoor op de gedachte gebragt, of niet, wanneer 'er,

voor

voor de onbekende grootheid, twee getallen a en b, in het voorste lid der vergelijking, gesteld worden, en de waarden, welke hetzelve daardoor verkrijgt, de éêne positief en de andere negatief is, de vergelijking eenen wortel hebben zal, welke tusschen die twee waarden valt? dan, *daar men tot het omgekeerde eener stelling, niet, zonder een wettig betoog van deszelfs waarheid, besluiten mag*, zullen wij hetzelve, als zeer gewigtig en belangrijk zijnde, op eene van het voorgaande betoog onafhankelijk zijnde wijze, staven.

§. 200. V. HOOFD-EIGENSCHAP. †† *Wanneer in eene vergelijking*

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \text{enz.} + Px + Q = 0$$

twee verschillende waarden, die men aan de onbekende x geeft, als $x = a$ en $x = b$, de eerste waarde, $x = a$, de som der termen van het voorste lid positief, en de andere waarde, $x = b$, de som dezer termen negatief maakt; dan zal 'er, tusschen deze waarden a en b, ten minste éêne waarde moeten bestaan, welke de som van de termen dezer vergelijking nul maakt, en bijgevolg een wortel van dezelve zal zijn.

Om deze gewigtige waarheid buiten allen twijfel te stellen, zullen wij, duidelijkshalve, eene vergelijking van eene bepaalde magt, als

$$x^5 - Ax^4 - Bx^3 + Cx^2 - Dx + E = 0$$

aannemen, in welke de coefficienten A, B, C, D en E, als wezenlijke en bestaanbare grootheden, die eene bepaalde waarde hebben, voorkomen; zijnde x^5, Cx^2 en E termen, die altijd positief blijven, zoo lang x positief blijft; terwijl $-Ax^4$, $-Bx^3$ en $-Dx$ altijd, in dezelfde onderstelling, negatief zijn: men zal dan, in de onderstelling, dat de waarden a en b, welke men voor den wortel neemt, positief zijn, stellen kunnen.

$$(x^5 + Cx^2 + E) - (Ax^4 + Bx^3 + Dx) = 0$$

of, $x^5 + Cx^2 + E = P$; *en* $Ax^4 + Bx^3 + Dx = Q$ *makende*,

$$P - Q = 0.$$

Wanneer nu de onderstelling van $x = a$ de som van alle de termen van het voorste lid positief, en die van $x = b$ deze som negatief maakt, zal zulks om geene andere reden kunnen plaats hebben, dan, omdat de eerste onderstelling P grooter dan Q, en de tweede, in tegendeel, P kleiner dan Q zal maken. Stellen wij: dat a grooter dan b zij; (want zulks is hetzelfde,) dan is het klaar, dat, wanneer men voor x trapswijze alle waarden, stelt, die tusschen a en b invallen,

P en Q trapswijze kleiner zullen worden: en daar men eindelijk, door a trapswijze kleiner te nemen, tot b zal komen, in welk geval P kleiner dan Q is, zal natuurlijk, voor de volgende kleinere waarden van x, de term Q minder moeten afnemen dan P, en het verschil tusschen P en Q zal, hoezeer positief blijvende, steeds kleiner worden, naar mate x kleiner genomen wordt: men zal gevolgelijk, tusschen a en b, zulk eene waarde van x moeten vinden, welke $P = Q$ maakt, en gevolgelijk een wortel van de gegevene vergelijking zal zijn. Het is nu met die afnemende waarden van x even eens gelegen als met twee ligchamen P en Q, (om zich van de opheldering van LAGRANGE, van wien dit bewijs is, zie *Ecole Normale*, *Vol.* III. *pag.* 465, te bedienen,) welke in dezelfde rigting bewogen worden; want, wanneer het ligchaam Q vooruit is, en P sneller dan Q bewogen wordt, dan zal de afstand dezer ligchamen steeds kleiner worden; het ligchaam P zal het ligchaam Q inhalen, en op dit oogenblik zal de afstand nul zijn, en onmiddelijk daarna zal P vooruit gekomen en de afstand der ligchamen negatief geworden zijn.

Wanneer de onderstelling van $x = a$ het eerste lid der vergelijking negatief, en die van $x = b$ het tweede lid positief maakte, zou het bewijs op dezelfde wijze afloopen.

Op gelijke wijze zal men, indien $x = -a$ en $x = -b$ het voorste lid der vergelijking positief en negatief maken, bewijzen: dat 'er, tusschen deze waarden, ééne bestaan zal, welke een wortel der vergelijking is.

§. 201. I. AANMERKING. Deze grondeigenschap der vergelijkingen kan nu strekken, om aantetoonen: †† *dat 'er vergelijkingen bestaan kunnen, welke, hoezeer derzelver eerste lid geenen eerste noch tweede magts-deeler heeft, niet te min even zoo vele wezenlijke en bestaanbare wortels hebben kunnen, als 'er éénheden in den exponent van de magt dezer vergelijking voorkomen.*

Nemen wij, bij voorbeeld, de vergelijking:

$$x^4 + 2x^3 - 47x^2 - 47x + 252 = 0$$

welke geen eerste noch tweede magts-factoren heeft, en gevolgelijk, door derzelver hulp, niet kan worden opgelost. Wanneer men nogtans de onbeken-

waarden van x	*overëenk. waarden van het eerste lid*
+ 8	+ 1988
+ 7	+ 707
+ 6	+ 6
+ 5	− 283
+ 4	− 304
+ 3	− 177
+ 2	+ 2
+ 1	+ 161
0	+ 252
− 1	+ 251
− 2	+ 158
− 3	− 3
− 4	− 184
− 5	− 313
− 6	− 294
− 7	− 7
− 8	+ 692

kende x achtervolgens aan $+8$, $+7$, *enz.* tot -8, ingesloten, gelijk stelt; dan zal het voorste lid de waarden verkrijgen, welke, in het nevenstaande tafeltje, nevens de waarden van x, staan aangeteekend; uit hetwelk blijken zal: dat 'er, volgens het bewezene in §. 200, een wortel tusschen 5 en 6; een tweede, tusschen 3 en 2; een derde, tusschen -2 en -3; en een vierde, tusschen -7 en -8, bestaan zal.

§. 202. II. Aanmerking. *Wanneer 'er in het voorste lid eener hooge magts vergelijking geen eerste magts deelers bestaan; dan zal zij ook geene meetbare wortels kunnen hebben.*

Want wij hebben, §. 166, bewezen: dat, wanneer 'er in de uitdrukking $x^n + A x^{n-1} +$ *enz.*, in welke alle de coefficienten geheele getallen zijn, geen deeler van den vorm $x + p$ (p een geheel getal zijnde,) bestaat, 'er ook geen deeler van den vorm $x + p : q$ bestaan zal. Waaruit blijkt: †† *dat, wanneer de wortel eener vergelijking geen geheel getal is, hij ook* (wel verstaande als de coefficienten geheele getallen zijn,) *geen gebroken zijn kan. Hij moet gevolgelijk in dit geval onmeetbaar zijn.* En dit strookt bijzonder wel met hetgeen de tweede magts-factoren van het voorste lid der vergelijkingen, van §. 194—§. 197. ons geleerd hebben, welke factoren onmeetbare wortels hebben opgeleverd.

§. 203. *Maar indien nu, gelijk in het bijgebragte voorbeeld van* §. 201, *de wortels onmeetbaar zijn, hoe moet men het dan verstaan, wanneer men nogtans zegt: dat het voorste lid der vergelijking door de onbekende x min den wortel deelbaar is?* Hierop antwoorden wij: op dezelfde wijze, als men het verstaan moet, dat 2 door $\sqrt{2}$ deelbaar is; dat wil zeggen: dat, hoe nader de waarde van den wortel bekend wordt, x min dien wortel zooveel te naauwkeuriger een deeler zal worden, [dat wil zeggen, dat het overschot der deeling van $x^4 + 2x^3 - 47x^2 - 47x + 252$ door $x - a$, (a de wortel zijnde,) zooveel te nader aan niets zal komen,] zonder dat zij immer een naauwkeurige deeler zal kunnen worden, die, als een bepaald en meetbaar getal, met het quotient vermenigvuldigd zijnde, het voorste lid der vergelijking naauwkeurig zal te voorschijn brengen.

§. 204. *Op dezelfde wijze moet de zaak van de tweeledige deelers verstaan worden;* want hoezeer

$$x^4 + 2x^3 - 47x^2 - 47x + 252 = 0$$

noodzakelijk zal moeten aangemerkt worden, als uit de factoren $x^2 + ax + b$ en $x^2 + a'x + b'$ bestaande, welke opgelost zijnde, de vier

vier wortels zullen doen bekend worden, zoo is het toch duidelijk: dat de coefficienten a, b, a' en b', met betrekking tot de éénheid, onmeetbaar zullen moeten zijn.

§. 205. III. Aanmerking. †† *Men kan zich een onnoemlijk aantal stelkundige vergelijkingen voorstellen*, (als, bij voorbeeld,)

$$(x^2 + a x + b)^2 + (p x + q)^2 = 0$$

welke, ontwikkeld zijnde, eene vergelijking van den vorm

$$x^4 + A x^3 + B x^2 + C x + D = 0$$

geven zal, waarvan het eerste lid, voor alle positieve en negatieve waarden van x, altijd positief zal zijn (41), *en welke gevolgelijk geenen bestaanbaren wortel kan hebben* (42). *Indien men nu nogtans bewijzen kan: dat 'er, in zulk eene vergelijking, factoren van den vorm* $x^2 + \alpha x + \beta$ *bestaan, zelfs ook zoodanige, waarin* α *en* β *onmeetbaar zijn, zal men ook bewijzen kunnen, dat 'er, in dit geval, even zoo vele onbestaanbare uitdrukkingen voor den wortel bestaan zullen, als 'er éénheden in den exponent van den hoogsten term voorkomen.* Zulks zal nu in het vervolg bewezen en buiten twijfel gesteld worden.

§. 206. IV. Aanmerking. †† *De wortels van alle vergelijkingen van dezelfde magt, worden, door de bijzondere betrekking van derzelver coefficienten, van meetbaar onmeetbaar, of van bestaanbaar onbestaanbaar.*

Zoo worden deze wortels in de vergelijking, $x^4 + 2x^3 - 47x^2 - 47x + 252 = 0$ meetbaar, wanneer de coefficient van $-47x$, van -47 in -48, verandert, terwijl alle de wortels onbestaanbaar zullen worden, wanneer de term $-47x^2$ in $-53x^2$ verandert: de algemeene oplossing der vergelijkingen zal ons leeren: hoe alle deze om-

(41) Dat is immers klaar. Want laten de waarden van $x^2 + ax + b$ en $px + q$ positief of negatief zijn, zoo zijn toch derzelver tweede magten positief en het voorste lid der vergelijking blijft gevolgelijk, voor alle waarden, die men aan x geven kan, positief, zonder immer gelijk nul te kunnen worden.

(42) Eene vergelijking heeft nu geene bestaanbare wortels, wanneer elke waarde, die men aan de onbekende geeft, zoowel positieve als negatieve, het voorste lid der vergelijking altijd positief, en hetzelve nooit negatief kan maken. Wij zullen op eene andere plaats zien, dat het aantal der onbestaanbare wortels altijd even moet zijn.

omstandigheden van de bijzondere betrekking der coefficienten afhangen. Zie §. 891 en §. 922.

§. 207. V. Aanmerking. †† *Wanneer 'er onbestaanbare wortels in eene vergelijking voorkomen, zal men, eenen dier onbestaanbare wortels a noemende, wel niet, in den zin, waarin een stelkundige deeler genomen wordt, maar in den zin van het verklaarde in §. 203, het voorste lid dezer vergelijking, door* $x - a$ *kunnen deelen.*

§. 208. VI. Aanmerking. †† *De wortels eener vergelijking mogen dan meetbaar of onmeetbaar, bestaanbaar of onbestaanbaar zijn, men zal derzelver voorste lid altijd kunnen aanmerken, als ontstaan te zijn, uit het product van even zoo vele eerste magts vergelijkingen,* $x - a = 0$, $x - b = 0$, $x - c = 0$, $x - d = 0$, *enz., als 'er éénheden in den exponent van de hoogste magt der onbekende grootheid voorkomen,* (zijnde a, b, c, d, *enz.* de wortels der vergelijking.) Hieruit blijkt ten klaarste, op welk eene wijze, de hooge magts vergelijkingen kunnen begrepen worden, uit het product van een zeker aantal eerste magts vergelijkingen, zamengesteld te zijn.

§. 209. VI. Hoofd-eigenschap. †† *Indien dan eenige hooge magts vergelijking*

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + \text{enz.} + N = 0$$

kan gehouden worden, uit het gedurig product der eerste magts vergelijkingen, $x - a = 0$, $x - b = 0$, $x - c = 0$, ... $x - d = 0$, $x - e = 0$, *enz. ontstaan te zijn; dan zullen de coefficienten* A, B, C, D, *enz. de merkwaardige eigenschap hebben: dat 1° de coefficient* A *van den tweeden term der vergelijking, negatief genomen, gelijk zal zijn aan de som van derzelver wortels. 2° Dat de coefficient* B *van den derden term, positief genomen, gelijk zal zijn aan de som van de producten der wortels, op alle mogelijke wijzen, twee aan twee, zamengevoegd. 3° Dat de coefficient* C *van den vierden term, negatief genomen, gelijk zal zijn aan de som van de producten der wortelen, op alle mogelijke wijzen, drie aan drie, zamengevoegd. 4° Dat de coefficient* D *van den vijfden term, positief genomen, gelijk zal zijn aan de som van*

de

de producten der wortels, op alle mogelijke wijzen, vier aan vier, met elkander vereënigd, enz. —— *En dat, in het algemeen de coefficienten van de zesde, zevende, achtste, enz. termen beurtelings negatief, positief, negatief, enz. genomen, aan de sommen van de producten der wortelen, vijf aan vijf, zes aan zes, zeven aan zeven, enz. op alle mogelijke wijzen zamengevoegd, zullen gelijk zijn.* —— Wel verstaande, dat de coefficienten der termen, positief of negatief te nemen, hetzelfde beteekent, als die coefficienten te nemen, met de teekens, waarmede zij, in de gegevene vergelijking, zijn aangedaan.

Deze hoofd-eigenschap der hoogere magts vergelijkingen is eene der gewigtigsten. Zij leert ons, op welk eene wijze, en, volgens welk eene wet, de coefficienten van de termen van zulk eene vergelijking van hare wortels afhangen, en, wanneer men in staat was, om, uit de vergelijkingen, welke deze afhankelijkheid bepalen, omgekeerd af te leiden: hoedanig de wortels dezer vergelijkingen van de coefficienten van hare termen afhangen, dan zou het gewigtig vraagstuk van de oplossing der hoogere magts vergelijkingen zijn opgelost. Om nu den zin van het gestelde wel te verstaan, moet men, min of meer, een klaar begrip hebben van hetgeen men door de combinatien van eenige gegevene dingen, twee aan twee, drie aan drie, enz. genomen, verstaat, en hetgeen dien aangaande, in de oplossing van het 46 *Vraagstuk*, *pag.* 349, I. C. verklaard is, zal tot dat einde genoegzaam voldoen kunnen. Het zal bovendien nuttig zijn, en zeer veel tot het wel verstaan der stelling toebrengen, wanneer men twee, drie, vier, of meer eerste magts vergelijkingen van den vorm $x - a = 0$, ... $x - b = 0$, $x - c = 0$, *enz.* met elkander vermenigvuldige, en de producten met de uitkomsten der combinatien, zoodanig als deze, naar het voorschrift van het meergemelde vraagstuk, gevormd worden, naauwkeurig vergelijke. Dit alles zal een duidelijk denkbeeld van den zin der stelling geven, en de waarheid van het gestelde, welke, door het volgend betoog, algemeen bewezen zal worden, zal alzoo, langs den weg van inductie, reeds eenen aanmerkelijken grond van zekerheid verkrijgen.

A ... *B*
$x - a = 0$ (1)
$x - b = 0$ (2)
$x - c = 0$ (3)
$x - d = 0$ (4)
$x - e = 0$ (5)
enz. tot n vergelijkingen.

§. 210. Men stelle, om zulks te bewijzen, gelijk in het nevenstaande tafeltje, de eerste magts-

sacfactoren onder elkander, en men neme derzelver aantal gelijk n. Wanneer men nu de vermenigvuldiging wel verstaat; dan is het zoo klaar als de dag: †† *dat het gedurig product dezer factoren bestaan zal uit de som van de bijzondere producten, die men verkrijgt, wanneer men, uit het voorste lid van elke vergelijking, éénen term als factor van dit bijzonder product, neemt*; (bij voorbeeld: uit de (1) en (2) vergelijking x en x; en, uit de (3), (4) en (5), de termen $-c$, $-d$, $-e$, *enz. en, wanneer men voorts alle de producten, welke, op deze wijze, kunnen gemaakt worden, in ééne som vereënigt.* Ten einde nu alle deze mogelijke producten, zonder 'er één over het hoofd te zien, te verkrijgen, zal men:

1° Het product van alle de termen x, uit de eerste kolom A, nemen: dit product zal, daar 'er n vergelijkingen zijn, geven x^n.

2° Op zoo vele verschillende wijzen, als mogelijk is, zal men $n-1$ termen, uit de eerste kolom A, met éénen term uit de tweede B vermenigvuldigen. Het is klaarblijkelijk: dat men op deze wijze zoo vele producten verkrijgen zal, als 'er vergelijkingen gegeven zijn, en dat de som dezer producten gelijk zal zijn aan

$$-(a+b+c+d+e+f+\text{enz.})\,x^{n-1}$$

daar nu deze som klaarblijkelijk aan Ax^{n-1} moet gelijk zijn, volgt hieruit: dat

$$a+b+c+d+e+f+\text{enz.}=-A$$

zal zijn: dat is: †† *de coefficient van den tweeden term der vergelijking, negatief genomen, zal gelijk zijn aan de som van derzelver wortels.*

3° Men zal voorts alle de termen, uit de eerste kolom A, met uitzondering van twee van dezelve, (bij voorbeeld, van de twee eerste,) met elkander vermenigvuldigen, en dit product met de twee termen uit de kolom B, welke niet behooren tot de vergelijkingen, waaruit de x, x, x, *enz.* genomen zijn: men zal daardoor de producten abx^{n-2}, acx^{n-2}, *enz.* verkrijgen: maar, daar nu deze soort van producten, op zoo vele verschillende wijzen kunnen gevormd worden, als men de n gegevene vergelijkingen, op alle mogelijke wijzen, twee aan twee, kan zamenvoegen, zal derzelver som gelijk zijn aan de som van de producten der wortelen, op alle wogelijke wijzen, twee aan twee, genomen, vermenigvuldigd met x^{n-2}: maar nu is deze som gelijk aan Bx^{n-2}: hieruit volgt dan: †† *dat de coefficient van den derden term gelijk zal zijn aan de som van de producten der wortelen, op alle mogelijke wijzen, twee aan twee, genomen.*

4° Men

4° Men zal al verder de termen, uit de eerste kolom, met uitzondering van drie van dezelve, vermenigvuldigen, en het product nogmaals met drie termen uit de tweede kolom: (altijd, zoo als gezegd is, onder het oog houdende, dat men uit dezelfde vergelijking geene twee termen neemt,) men zal alsdan de producten: $-abcx^{n-3}$, ... $-acdx^{n-3}$, $-adex^{n-3}$, *— enz.*, verkrijgen, welker som gevolgelijk aan Cx^{n-3} gelijk zal zijn; daar nu deze producten, op zoo vele wijzen gemaakt kunnen worden, als men de n gegevene vergelijkingen, drie aan drie, zal kunnen zamenvoegen, blijkt hieruit: †† *dat de coefficient van den vierden term eener vergelijking, negatief genomen, gelijk zal zijn aan de som van de producten der wortels, op alle mogelijke wijzen, drie aan drie, zamengevoegd.*

5° Op dezelfde wijze voort redenerende, zal het blijken: †† *dat de coefficient van den vijfden term gelijk zal zijn aan de som van de producten der wortels, op alle mogelijke wijzen, vier aan vier, genomen. —— Dat de coefficient van den zesden term, negatief genomen, gelijk zal zijn aan de som van de producten der wortels, vijf aan vijf, enz. —— en dat de laatste term gelijk zal zijn aan het product van alle de wortels.*

§. 211. Wat nu de wijze, waarop de teekens van de coefficienten der termen beurtelings negatief en positief moeten genomen worden, aangaat, zal de volgende opheldering allen twijfel, welke dien aangaande mogt overgebleven zijn, geheel wegnemen. In de meer aangehaalde vergelijking, $x^4 + 2x^3 - 47x^2 - 47x + 252 = 0$, is de som der wortels gelijk -2; want de coefficient van den tweeden term is $+$, en moet dus, daar die coefficient negatief genomen moet worden, van $+$ in $-$ veranderen. De som van de producten der wortels, twee aan twee, genomen, zal -47 zijn; omdat de som van die producten gelijk is aan den coefficient des tweeden terms, positief genomen; dat is, genomen met het teeken, waarmede die coefficient is aangedaan: de som van de producten der wortels, drie aan drie, genomen, zal gelijk $+47$, en het product der wortels gelijk $+252$ zijn. Men merke, ten aanzien van dit Leerstuk, op: dat het woord som in eene algemeene stelkundige beteekenis genomen wordt, en dat gevolgelijk, wanneer eenige der wortelen a, b, c, d, *enz.* anders, dan in de redenering aangenonomen is, negatieve teekens verkrijgen, deze omstandigheid geene verandering in de algemeenheid van het betoogde zal te weeg brengen (43).

Benadering van de wortels der Vergelijkingen, volgens NEWTON, DE COURTRIVON *en* SIMPSON.

§. 212. Wanneer dan het voorste lid eener vergelijking eerste of tweede magts-deelers heeft, zullen, of alle hare wortelen, of sommige van dezelve, het zij door de oplossing eener eerste, het zij door die eener tweede magts vergelijking, bekend worden. Wanneer men nu, na alle de eerste en tweede magts-deelers gevonden te hebben, het voorste lid der vergelijking door derzelver product deelt, zal het quotient eene vergelijking van den vorm (44)

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$$

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0, \textit{ enz.}$$

geven: waarin geene eerste of tweede magts-deelers meer zullen voorkomen, en welker onmeetbare wortels niet meer, op de voorschrevene wijze, zullen kunnen gevonden worden. Het is billijk, dat wij thans overgaan, om aan des Lezers nieuwsgierigheid te voldoen, en aantoonen: hoe de wortels van zulke vergelijkingen, wanneer zij reeds ten naaste bij bekend zijn, verder benaderd kunnen worden. Nemen wij tot dat einde de vergelijking:

$$x^4 + 2x^3 - 47x^2 - 47x + 252 = 0$$

welke blijkens §. 201, éénen wortel tusschen 5 en 6; éénen anderen tusschen 2 en 3; éénen derden tusschen -2 en -3, en nog éénen tusschen -7 en -8 heeft. In de volgende Les zullen wij verklaren: hoe de wortels, tot op ééne éénheid na, kunnen gevonden worden.

§. 213. Stellen wij, om een denkbeeld van de wijze, waarop men de wortelen benaderen kan, te geven, in het algemeen, de vergelijking

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + \textit{enz.} = 0$$

en nemen wij, dat één der wortelen tusschen p en $p+1$ valle, (p een ge-

(43) Daar dit verklaarde leerstuk, in de leer der vergelijkingen, van het hoogste belang is, zal het nuttig zijn, dat de Lezer deszelfs waarheid nader op de proef stelle. Hij zal, tot dat einde, de wortels van de vergelijkingen, die in §. 194. §. 195. §. 196. opgelost zijn, kunnen gebruiken.

(44) Want, vergelijkingen van den tweeden graad komen hier niet in aanmerking, omdat hare oplossing als bekend ondersteld wordt.

geheel getal zijnde,) of dat $x > p$ en $< p + 1$ zij; wanneer men dan $x = p + z$ ftelt; dan zal z een gebroken getal zijn. Nu worden de tweede, derde en hoogere magten van een gebroken zooveel te kleiner, naar mate dit gebroken zelve kleiner is, en men kan, zich met eene geringe benadering vergenoegende, deze hoogere magten van z voor een oogenblik verwaarloozen, en zich alleenlijk bij de eerfte magt van z bepalen, en dan zal, volgens het theorema van de magten eener tweeledige grootheid, zie §. 741, I. C., en §. 498.

$$x^n = p^n + n p^{n-1} z + \textit{enz.}$$
$$A x^{n-1} = A p^{n-1} + A(n-1) p^{n-2} . z + \textit{enz.}$$
$$B x^{n-2} = B p^{n-2} + B(n-2) p^{n-3} . z + \textit{enz.}$$
$$\textit{enz.} \qquad\qquad \textit{enz.}$$

zijn: wanneer men dan deze vergelijkingen optelt, en voorts de komende vergelijking, met betrekking tot z, oplost, zal men voor eene benaderde waarde van z vinden:

$$z = -\frac{p^n + A p^{n-1} + B p^{n-2} + C p^{n-3} + D p^{n-4} + \textit{enz.}}{n . p^{n-1} + A(n-1) p^{n-2} + B(n-2) p^{n-3} + C(n-3) p^{n-4} + \textit{enz.}}$$

†† *Deze waarde van z kan, zonder al dien omflag, uit de gegevene vergelijking gemakkelijk opgemaakt worden;* want de teller van de waarde van z volgt uit het voorfte lid der vergelijking, wanneer men x met p verwisfelt: de termen van den noemer worden uit die van den teller afgeleid: „ *door elken term van den teller met den exponent van de magt van p te vermenigvuldigen en het product door p te deelen.*" Alzoo wordt uit p^n afgeleid $n p^{n-1}$, en uit $A p^{n-1}$ de uitdrukking $(n-1) A p^{n-2}$, *enz.* (45).

Voor ons bijzonder geval, zal dan

$$z = -\frac{p^4 + 2p^3 - 47p^2 - 47p + 252}{4p^3 + 6p^2 - 94p - 47}$$

zijn. Uit het tafeltje van §. 201. blijkt, dat de eerfte wortel, tusfchen 5 en 6, nader bij 6 dan bij 5 komt: nemen wij dan $p = 6$; dan is

$$z = -\frac{1296 + 2.216 - 47.36 - 47.6 + 252}{4.216 + 6.36 - 94.6 - 47} = -\frac{6}{469} = -0,0128$$

bijgevolg, $x = p + z = 6 - 0,0128 = 5,9872$ nabij (46).

Wan-

(45) Deze bewerking is niets anders dan hetgeen men, in de Differentiaal-Rekening, differentieren noemt. Zij volgt uit de wettige fubftitutie en het bewezene in §. 742, I. C. Zie verder hier onder §. 215.

(46) Deze geheele kunstbewerking is dus eene benadering, hoedanige de gewone deeling in getallen en de worteltrekkingen zijn; eene benadering, wel-

Wanneer men nu de waarde des eerſten wortels naauwkeuriger begeert te kennen, zal men $p = 5,9872$ en $x = p + z$ ſtellen, en op nieuw de waarde van z berekenen; deze zal geven:

$$z = -\frac{(5,9872)^4 + 2(5,9872)^3 - 47(5,9872)^2 - 47(5,9872) + 252}{4 \cdot (5,9872)^3 + 6(5,9872)^2 - 94(5,9872) - 47}$$

en men vindt: $z = -\frac{+0,0301183}{+463,7647711} = -0,00006496$, derhalve $x = p + z = 5,9872 - 0,00006496 = 5,98713504$, welke tot het zesde cijfer naauwkeurig is.

Om de andere wortels dezer vergelijking te berekenen, zal men gebruik moeten maken, van hetgeen hier onder in §. 330, pag. 288, zal aangewezen worden: de wortels zijn:

$x = +5,98713\ 459$	$x = -2,98340\ 843$
$x = +2,01116\ 560$	$x = -7,01489\ 175$

Ten blijke, dat deze wortels, tot in het laatſte cijfer, naauwkeurig zijn, zal derzelver ſom (-2) gelijk zijn aan den coëfficient van den tweeden term der vergelijking, negatief genomen; ook zal men door middel der Logarithmen vinden, dat derzelver product nagenoeg 252 is: wanneer men eindelijk elke wortel, in plaats van x ſtelt, zal het voorſte lid, op eene zeer kleine breuk na, gelijk nul worden.

§. 214. Dit is de geest der leerwijze, welke NEWTON, in zijne *Opuscula*, *Tom.* I, *pag.* 10, heeft voorgedragen. Zij heeft het nadeel, dat men, bij elke volgende benadering, in grooter getallen vervalt. De Marquis DE COURTRIVON, heeft daarom, in de *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris* 1744. getracht deze leerwijze te verbeteren, en is tot eene uitkomst gekomen, welke met die van den grooten EULER, in dit zelfde jaar aan dezelfde Academie, doch zonder bewijs, ingezonden, overëenkomt (47).

§. 215. Tot de handelwijze van DE COURTRIVON, even als tot vele anderen (ook daar onder die van HALLEY begrepen) wordt vereischt, dat men, op eene gemakkelijke wijze, eene vergelijking in x in eene andere (in $y + p$, bij voorbeeld,) herleiden kunne, onder voorwaarden, dat alle de termen, naar de magten van y of van p geordend zijn: offchoon nu dit werk, door eene eenvoudige vermenigvuldiging, of, welke op den aard der zake gegrond is, en geheel daar op neder komt, dat men uit eene gegevene vergelijking eene andere afleide, welker wortel minder dan één is.

(47) 'Er beſtaat ook nog eene handelwijze van HALLEY, waar over wij in het vervolg gelegenheid vinden zullen iets te zeggen.

of, zoo men wil, door magts-verheffingen kan volbragt worden, zoo zullen wij, daar deze soort van herleidingen in het vervolg onophoudelijk voorkomen, aantoonen: hoe men, zonder deze lastige vermenigvuldigingen, de herleide vergelijking verkrijgen kan. Uit de behandeling van één bijzonder geval, zal het van zelfs in het oog loopen, dat andere gevallen, op dezelfde wijze, moeten behandeld worden.

§. 216. Zij $x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$ eene vergelijking, zij $x = p + z$; en laat gevraagd worden, deze vergelijking naar de opklimmende magten van z te ordenen? Het is klaar: dat men volgens §. 740, I. C., of door eenvoudige vermenigvuldiging verkrijgen zal

$$\begin{aligned}
x^4 &= p^4 + 4p^3 . z + 6p^2 . z^2 + 4p . z^3 + z^4 \\
Ax^3 &= Ap^3 + 3Ap^2 . z + 3Ap . z^2 + A . z^3 \\
Bx^2 &= Bp^2 + 2Bp . z + B . z^2 \\
Cx &= Cp + C . z \\
D &= D
\end{aligned}$$

Wanneer men nu deze vergelijkingen optelt, zal men, (zie gegevene vergelijking,) tot de vergelijking

$$\begin{aligned}
0 = [p^4 + Ap^3 + Bp^2 + Cp + D] + [4p^3 + 3Ap^2 + 2Bp + C] . z \\
+ [6p^2 + 3Ap + B] . z^2 + [4p + A] . z^3 + z^4
\end{aligned}$$

komen, welke naar de afdalende magten van z geordend is, en welke, wanneer men

$$\begin{aligned}
p^4 + Ap^3 + Bp^2 + Cp + D &= P \\
4p^3 + 3Ap^2 + 2Bp + C &= Q \\
6p^2 + 3Ap + B &= R \\
4p + A &= S
\end{aligned}$$

stelt, in de volgende zal veranderen.

$$0 = P + Qz + Rz^2 + Sz^3 + z^4$$

†† De grootheden P, Q, R, S, welke als coëfficienten van de vergelijking in z voorkomen, hangen alle, zonder uitzondering, van de grootheid p, en van de coëfficienten A, B, C, D, enz. der gegevene vergelijking af: maar het is bijzonder opmerkelijk, dat

1° *De grootheid P gelijk is aan het voorste lid der gegevene vergelijking in x, wanneer men namelijk x in p verandert.*

2° *Dat de uitdrukking Q uit P wordt afgeleid, door elken term van P met den exponent van p te vermenigvuldigen, en het product door p te deelen. Aldus volgt, uit p^4, de uitdrukking: $\frac{4p^4}{p} = 4p^3$; uit Ap^3, de uitdrukking $3Ap^3 : p = 3Ap^2$ enz.: de term D kan* aan-

aangemerkt worden als gelijk aan Dp^0 *te zijn, en men heeft dus:* $0 \times Dp^0 : p = 0$.

3° *Dat R uit Q, op dezelfde wijze, wordt afgeleid, mits dat men de afgeleide uitdrukking door twee deele.*

4° *Dat S uit R, op dezelfde wijze, gemaakt wordt, mits men de afgeleide uitdrukking door drie deele, enz.* (48).

Hieruit is de wet van voortgang blijkbaar, en deze regel is op alle hoogere vergelijkingen algemeen toepasselijk.

§. 217. DE COURTRIVON gaat nu op deze wijze te werk. Wanneer hij de wortel eener vergelijking, op minder dan ééne éénheid na, bekend heeft, ſtelt hij deze benaderde waarde gelijk p, en $x = p + z$; dan is, even als te voren, z eene breuk, die kleiner dan één is: hij maakt vervolgens de vergelijking in z namelijk

$$0 = P + Qz + Rz^2 + Sz^3 + enz. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

verwaarloozende nu de tweede en volgende magten van z, lost hij de vergelijking $P + Qz = 0$ op: deze geeft terſtond,

$$z = -\frac{P}{Q} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Tot hiertoe is de handelwijze van DE COURTRIVON dezelfde als die van NEWTON. Maar, voor de tweede benadering, redeneert DE COURTRIVON ten naaste bij aldus. Stel, duidelijkheidshalve, de gevondene waarde van z gelijk $+\alpha$, en nemen wij nu, in plaats van twee, drie termen der vergelijking in z, namelijk: $P + Qz + Rz^2 = 0$; dan is het duidelijk: dat, wanneer men in plaats van z^2 de benaderde waarde α^2 ſtelt, en de vergelijking $P + Qz + R\alpha^2 = 0$ met betrekking tot z oplost, men vinden zal:

$$z = -\frac{P}{Q} - \frac{R}{Q}.\alpha^2, \text{ of } z = +\alpha - \frac{R}{Q}\alpha^2 \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

deze waarde van z zal nader bij de waarheid dan de eerſte komen.

Om

(48) Deze afleiding is wederom niets anders dan differentieren; eene kunstbewerking, welke, hier met voordeel, in plaats van de lastige multiplicatien en magts-verheffingen, gebruikt wordt. Men behandele éénmaal eene vijfde, zesde, en n^{de} magts-vergelijking op deze wijze, en men zal zien, dat men de coefficienten der afgeleide vergelijking door dezelfde geregelde bewerking vinden zal. Lang, voor de uitvinding der Differentiaal en Fluxie-Rekening, kende reeds onze landgenoot, HUDDE, deze fraaije kunstbewerking. Raadpleeg F. à SCHOOTEN, *Exercitat. Mathem. pag.* 498. 'Er is ook van dit boek eene Oud-Hollandſche vertaling.

Om tot eene derde benadering te komen, bepaalt men zich tot vier termen, en neemt

$$0 = P + Qz + Rz^2 + Sz^3$$

Men ftelt voor z^2 en z^3, in de termen Rz^2 en Sz^3 de laatfte benaderde waarde van z, namelijk: $+\alpha - \frac{R}{Q}\alpha^2$, *zich nogtans alleen tot de derde magten van α bepalende*, en, wanneer men dan deze vergelijking, met betrekking tot z, oplost, zal men voor de derde benadering vinden:

$$z = +\alpha - \frac{R}{Q}\alpha^2 + \left(\frac{2R^2 - QS}{Q^2}\right)\alpha^3 \quad . \; . \; . \quad (4)$$

Nog eenen term meer nemende, en, in plaats van z, in de termen Rz^2, Sz^3, Tz^4, de laatst gevondene waarde van z overbrengende, waarbij men zich wederom alleen tot de vierde magten van α zal bepalen, zal men verkrijgen:

$$z = +\alpha - \frac{R}{Q}\alpha^2 + \left(\frac{2R^2 - QS}{Q^2}\right)\alpha^3 - \left(\frac{5R^3 - 5QRS + Q^2T}{Q^3}\right)\alpha^4 \quad (5)$$

en men zal op deze wijze tot in het oneindige kunnen voortgaan.

§. 218. Nemen wij tot een voorbeeld dezelfde vergelijking van §. 201, namelijk:

$$x^4 + 2x^3 - 47x^2 - 47x + 252 = 0$$

dan is, volgens den regel van §. 216, $P = p^4 + 2p^3 - 47p^2 - 47p + 252$; $Q = 4p^3 + 6p^2 - 94p - 47$; $R = 6p^2 + 6p - 47$; $S = 4p + 2$; $T = 1$; $U = 0$; enz. Nu is p nagenoeg 6; derhalve $P = +6$; $Q = 469$; $R = 205$; $S = 26$; $T = 1$. De eerfte benadering geeft, als in §. 213, $z = -0,012793176972$; men neme dus . . . $\alpha = -0,01279318$; de tweede benadering geeft:

$$z = +\alpha - \frac{R}{Q}\alpha^2 = -0,012865$$

hetgeen overëénkomt met de waarde, welke wij boven gevonden hebben. „ *Men moet, bij het gebruik dezer handelwijze, in acht nemen:* „ *dat men de ontwikkeling van de eerfte waarde van z of — α in* „ *eene decimale breuk tot één of twee cijfers verder voortzette, dan* „ *men den wortel begeert te benaderen.*" Men zal door dezelfde formulen, doch op eene meer gemakkelijke wijze, dan naar de leerwijze van NEWTON, de waarden van de drie andere wortels der gegevene vergelijking benaderen.

§. 219. †† De handelwijze van DE COURTRIVON ftrekt dan, even als die van NEWTON, om de waarde van den wortel eener vergelijking,

king, trapswijze, te benaderen: maar tot beide wordt vereischt: dat men den wortel, op minder dan ééne éénheid na, kenne. Ten aanzien van de waarde van α, welke men door de vergelijking $z = - P:Q$ vindt, moet men zorgvuldig deze twee dingen in acht nemen. 1° *Het teeken van α, dat van die van P en Q afhangt, behoorlijk te bepalen.* 2° *Dat men de waarde van α tot één of twee cijfers verder, dan men de benadering wenscht voorttezetten, ontwikkele.*

§. 220. Behalve de handelwijze van DE COURTRIVON, verdient nog die van den Engelschen Wiskunstenaar, THOMAS SIMPSON, gekend te worden (49). Deze is, schoon zij weinig schijnt bekend te zijn, (50) nogtans ééne der fraaiste en vernuftigste, die wij kennen: zij komt hierop neder. Nadat, even gelijk in de handelwijze van NEWTON, DE COURTRIVON en EULER, de wortel, op eene kleine grootheid na, bekend is, stelt SIMPSON, (de gegevene vergelijking in x zijnde,) $x = p + z$; zijnde p de nabij bekende waarde des wortels, en z de grootheid, welke 'er bij moet gevoegd worden, om den waren wortel te verkrijgen, en hij komt eindelijk tot de herleide vergelijking:

$$0 = P + Qz + Rz^2 + Sz^3 + Tz^4 + enz. \quad . \quad . \quad (\Omega)$$

welke in §. 217, gevonden is, en welker coëfficienten P, Q, R, S, enz. uit de vergelijking in x, volgens het voorschrift van §. 216. afgeleid worden. Tot hiertoe stemt zijne handelwijze met die van NEWTON en DE COURTRIVON overëén: maar, om nu de onnaauwkeurigheid, welke door het verwaarloozen van de tweede en volgende magten van z, in de leerwijze van NEWTON, ontstaat, te ontgaan, en zich, des noods

(49) Deze handelwijze is door THOMAS SIMPSON, (die men niet met zijnen tijdgenoot, den Schotschen ROBERT SIMSON verwarren moet,) voorgedragen in een werkje getijteld: *Select Exercises for young Proficients in the Mathematicks.* Men zie de uitgave van dit werkje, door HUTTON, die 'er den zonderlingen levensloop van dien beroemden man voor geplaatst heeft, op pag. 215, en vervolgens. De Nederduitsche Lezer, die dit Engelsch werkje niet bezit, kan, om zijne nieuwsgierigheid te voldoen, de *Inleiding tot de Mathematische Wetenschappen*, door den Heer STRABBE, nalezen, waarin bijna woordelijk dit geheele stuk geplaatst is.

(50) Ten minste heb ik deze Leerwijze, behalve bij SIMPSON zelven, en het aangehaalde werk van STRABBE, nergens gevonden, uitgenomen bij KLÜGEL, in zijne *Mathematisches Wörterbuch, II Theil, pag. 496*, die vermoedelijk het werk van SIMPSON niet kent, omdat hij zegt: *eine andere allgemeine Methode, die noch nicht angewandt worden is, is folgende:* &c. zonder van SIMPSON gewag te maken, schoon hij anders zeer onpartijdig en naauwgezet aan elk zijn eigendom toewijst.

noods, flechts met eene enkelde benadering te vergenoegen; neemt hij eene uitdrukking van den vorm

$$1 + \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \delta z^4 + \varepsilon z^5 + enz.$$

aan, in welke de coefficienten α, β, γ, δ, enz onbepaalde getallen zijn, en vermenigvuldigt de vergelijking (Ω) met deze aangenomene uitdrukking, van welke hij flechts zoo vele termen neemt, als hij tot den voorgeftelden graad van benadering dienftig oordeelt. Bij deze vermenigvuldiging verkrijgt het product den vorm

$$\begin{array}{l} 0 = P + Qz + Rz^2 + Sz^3 + Tz^4 + enz. \quad (A) \\ \quad + \alpha Pz + \alpha Qz^2 + \alpha Rz^3 + \alpha Sz^4 + enz. \\ \qquad + \beta Pz^2 + \beta Qz^3 + \beta Rz^4 + enz. \\ \qquad\quad + \gamma Pz^3 + \gamma Qz^4 + enz. \\ \qquad\qquad + \delta Pz^4 + enz. \end{array}$$

daar nu de aangenomene uitdrukking onbepaalde coefficienten heeft, zal men over de onbepaalde getallen α, β, γ, enz. zoodanig kunnen befchikken, dat, in de zoo even uitgebragte vergelijking, zoo vele coefficienten van z^2, z^3, z^4, enz. verdwijnen, als men goedvindt. Nogtans zal men niet alle deze coefficienten kunnen weg maken: maar aangezien z onderfteld wordt zeer klein te zijn, zullen de volgende magten van z, welker coefficienten niet kunnen vernietigd worden, ten opzigte van de eerfte magt van z, zulk eene geringe waarde verkrijgen, dat de waarde van z zooveel te naauwkeuriger zal benaderd zijn, naar mate p minder van de eigenlijke waarde des gezogten wortels afwijkt, en meer coefficienten van de hoogere magten van de vergelijking (A) nul worden.

De hoogere magten van z, welker coefficienten niet verdwijnen, verwaarloozende, zal men, uit hoofde der verdwijnende termen, in alle gevallen, verkrijgen:

$$0 = P + (\alpha P + Q)z$$

waaruit terftond volgt:

$$z = -\frac{P}{\alpha P + Q} \quad \ldots\ldots \quad (\xi)$$

het komt 'er nu op aan om α te vinden.

Wil men nu: dat alleenlijk de tweede magt van z geen' invloed op de naauwkeurigheid der berekening hebbe, zal men in (A)

$$R + \alpha Q + \beta P = 0$$

ftellen, en men zal β, γ, δ, enz. alle nul kunnen nemen, hetgeen even zoo goed is, als of men de vergelijking (Ω) alleenlijk met $1 + \alpha z$ vermenigvuldigd hadde. Door deze onderftelling is

$\alpha =$

$$\alpha = -\frac{R}{Q}$$

en deze waarde van α in de vergelijking (ξ) overbrengende, wordt, *voor eene eerste benadering, waarop de verwaarloosing van z^2 geenen invloed hebben kan.*

$$z = \frac{PQ}{PR - Q^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\delta)$$

§. 221. Wil men de verwaarloozing van de derde magt van z buiten allen invloed stellen, zoo make men:

$$R + \alpha Q + \beta P = 0$$
$$S + \alpha R + \beta Q + \gamma P = 0$$

en dan zullen de termen, waarin z^2 en z^3 voorkomen, gelijk nul worden, en de verwaarloosing der volgende termen, zal daardoor te minder invloed op de waarde van z hebben. Daar 'er nu drie onbekenden en slechts twee vergelijkingen zijn, zal men γ, δ, ε, enz. gelijk nul kunnen stellen, en zulks zal hetzelfde zijn, als of men de vergelijking met $1 + \alpha z + \beta z^2$ vermenigvuldigd had. —— Men vermenigvuldige dan, in die onderstelling, de eerste vergelijking met Q en de tweede met P, en trekke de laatste van de eerste af, dan heeft men:

$$(RQ - SP) + (Q^2 - PR)\alpha = 0$$

$$en \ldots \alpha = -\frac{RQ - SP}{Q^2 - PR}$$

welke waarde van α in de vergelijking (ξ) overgebragt zijnde, geven zal, voor de waarde van z, op welke de verwaarloosing van de tweede en derde magten van z geenen invloed kan hebben.

$$z = \frac{P(Q^2 - PR)}{P(2QR - SP) - Q^3}$$

§. 222. Men zal deze berekening zoo verre kunnen voortzetten, als men goedvindt: doch de waarden van z zullen steeds zamengestelder worden. Het is beter: dat men, op het voetspoor van SIMPSON, de waarden van z niet regtstreeks berekene; maar van de volgende substitutien, die men gemakkelijk zal kunnen verifieren, gebruik make.

§. 223. Stel dat p de benaderde waarde van den wortel der gegevene vergelijking zij, welken wij door $p + z$ uitdrukken:

$$-P + Qz + Rz^2 + Sz^3 + Tz^4 + Uz^5 + Vz^6 + = 0$$

zij de vergelijking in z, welker coefficienten P, Q, R, S, enz. op de wijze in §. 216, opgegeven bepaald worden. (Wij geven in deze aan P het negatieve teeken, om, op het voetspoor van SIMPSON, die berekening gemakkelijker te maken; de vergelijking (ξ) verandert nu in

$z = \frac{P}{Q - \alpha P}$. De functie $1 + \alpha z + \beta z^2 +$ enz. is, even als boven, de aangenomene factor. Stel nu

$$\begin{array}{ll} m = Q : P \;\ldots\ldots\ldots\ldots & n = R : P \\ m' = (Qm + R) : P \;\ldots\ldots\ldots & n' = (Qn + S) : P \\ m'' = (Qm' + Rm + S) : P \;\ldots\ldots & n'' = (Qn' + Rn + T) : P \\ m''' = (Qm'' + Rm' + Sm + T) : P \;\ldots & n''' = (Qn'' + Rn' + Sn + U) : P \\ m'''' = (Qm''' + Rm'' + Sm' + Tm + U) : P & n'''' = +(Qn''' + Rn'' + Sn' + Tn + V) : P \end{array}$$

dan zullen de volgende uitdrukkingen:

$$\frac{Pm}{Pn + Qm}, \; \frac{Pm'}{Pn' + Qm'}, \; \frac{Pm''}{Pn'' + Qm''}, \; \frac{Pm'''}{Pn''' + Qm'''}, \text{ enz.}$$

in rangorde, de waarden van z uitdrukken, welke men verkrijgen zal, door achtervolgens $1 + \alpha z$, $1 + \alpha z + \beta z^2$, $1 + \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3$, enz. voor de factoren, waarmede men de vergelijking (Ω) vermenigvuldigt, aantenemen; of zoo men wil, het zullen de waarden van z zijn, die men verkrijgen zal, door de tweede, derde, vierde magten enz. van z mede in rekening te brengen (50).

Laat ons, om deze formulen op een voorbeeld toetepassen, nemen de vergelijking:

$$x^4 + 2x^3 - 47x^2 - 47x + 252 = 0$$

die wij reeds volgens NEWTONS leerwijze hebben opgelost: stellen wij in het gemeen de benaderde wortel $p + z$; dan zal $-P = p^4 + 2p^3 - 47p^2 - 47p + 252$; $Q = 4p^3 + 6p^2 - 94p - 47$; $R = 6p^2 + 6p - 47$; $S = 4p + 2$; $T = 1$; $U = 0$; enz. zijn. Voor den wortel, die tusschen 5 en 6 valt, nemen wij, omdat hij nader aan 6 dan aan 5 komt, $p = 6$; dan is $P = -6$; $Q = 469$; $R = 205$; $S = 26$; $T = 1$; $U = 0$; enz. Met deze getallen waarden zal men nu vinden:

$$m = Q : P = -\frac{469}{6} \;\ldots\; n = R : P = -\frac{205}{6}$$

en dit zal, voor de eerste benadering van z, geven:

$$z = \frac{Pm}{Pn + Qm} = \frac{469 \times 6}{6 \times 205 - 469 \times 469} = -0{,}0128$$

Om de tweede benadering te verkrijgen, zal men berekenen:

$$m' = (Qm + R) : P = \frac{218731}{36} \quad n' = (Qn + S) : P = \frac{95989}{36}$$

Hieruit zal volgen:

$z =$

(50) SIMPSON heeft in het aangehaalde werk, van deze leerwijze eene fraaije toepassing, op het trekken van de hoogere magts-wortels, gemaakt.

$$z = \frac{P\,m'}{P\,n' + Q\,m'} = -\frac{1312386}{102009905} = -0,01286528$$

hetgeen nader aan de waarheid komt. — Men zal alzoo kunnen voortgaan. Men heeft verder:

$$m'' = (Q m' + R m + S) : P = -\frac{102008905}{216};\quad n'' = (Q n' + R n + T) : P$$
$$= -\frac{44766727}{216}$$

en $z = \dfrac{P\,m''}{P\,n'' + Q\,m''} = -\dfrac{612053430}{47573576083} = -0,012865407$ nog nader.

De wortel is gevolgelijk gelijk 5,987134593, hetwelk met de Newtoniaansche benaderingswijze overëënkomt.

NEGEN- EN- VEERTIGSTE LES.

Over de oplossing der vergelijkingen door benadering, volgens de Leerwijzen van de Heeren BUDAN *en* LAGRANGE.

§. 224. De oplossing der hoogere magts-vergelijkingen door benadering, is het belangrijkste Leerstuk der Wiskunst, en men kan zeggen: dat het, tot op de gelukkige ontdekking van den Heer BUDAN (51), het moeijelijkst geweest is. Wanneer men de fraaije maar werkzame leerwijze van den Heer LAGRANGE, welke wij op het einde dezer Les verklaren zullen, uitzondert, kunnen geene der leerwijzen van NEWTON, EULER, DE COURTRIVON, SIMPSON, enz., dan met omzigtigheid gebruikt worden. Derzelver voornaamste zwarigheden zijn: 1° het vinden van twee op elkander volgende geheele ge-

(51) Deze Heer is Doctor in de Medicijnen te Parijs. Het eerste gedeelte zijner Leerwijze verwierf in 1803 de goedkeuring van de eerste klasse van het Nationaal Instituut van Frankrijk, welke dezelve als (*une Méthode générale directe et sure*,) eene algemeene regtstreeksche en zekere handelwijze erkende. Sedert heeft de uitvinder in een werkje, getiteld: *Nouvelle méthode pour la résolution des équations numériques*, in 1807, zijne handelwijze nader ontwikkeld en meer volkomen gemaakt. Het is uit dit werkje, dat wij, met die verandering van leerwijze en schikking van stoffe, welke ons noodig toescheen, dit artijkel hebben opgemaakt. In het werkje zelve, ontbreken de betoogen der voornaamste gronden.

getallen, tusſchen welke een wortel valt; 2° zich te verzekeren, dat tusſchen deze twee geheele getallen niet meer dan een wortel beſtaat; want, ofſchoon de ſubſtitutie van p en $p+1$ voor den wortel verſchillende teekens aan de uitkomſten geven, en 'er diensvolgens, zie §. 200, ten minſte ééne waarde tusſchen p en $p+1$ beſtaan moet, die de vergelijking $0=0$ maakt, kan het nogtans gebeuren, dat, wanneer men, bij voorbeeld, de éénheid in tien-duizend deelen verdeelt, en in plaats van de onbekende $p+\frac{1}{10000}$, ... $p+\frac{2}{10000}$, $p+\frac{3}{10000}$, enz. ſtelt, 'er tusſchen p en $p+1$ meermalen eene afwisſeling van teekens zal plaats hebben, ten bewijze, dat 'er tusſchen p en $p+1$ meer dan één wortel beſtaan zal: men weet alleenlijk, dat, in dit geval, het aantal der wortels oneven moet zijn: in dit bijzonder geval, dat zeer dikwijls kan plaats hebben, zijn de handelwijzen van NEWTON en anderen onzeker; 3° en eindelijk, laten alle de bekende handelwijzen, uitgenomen die van LAGRANGE, zonder eene lastige beproeving in het werk te ſtellen, ons aangaande den graad van benadering in het onzekere. Alle deze zwarigheden zijn, door de leerwijze van BUDAN, vervallen: DELAMBRE zegt, in zijn verſlag over de vorderingen der Wiskundige Wetenſchappen aan Keizer NAPOLEON: dat men bezwaarlijk iets eenvoudigers vinden zal.

Bijzondere Algorithmus *van* BUDAN.

§. 225. Onder de menigvuldige eigenſchappen der vergelijkingen, tot welker ontdekking het zoeken van derzelver algemeene oplosſing aanleiding heeft gegeven, is de volgende, in de leerwijze van BUDAN, van het meeste gebruik.

§. 226. Zij beſtaat hierin: †† *dat men elke vergelijking herleiden kan tot eene andere, welker wortels gelijk zijn aan die der gegevene, vermeerderd of verminderd, met een getal, naar welgevallen genomen.*

Zij gegeven de vergelijking

$$x^4+Ax^3+Bx^2+Cx+D=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (P)$$

Stellen wij $x=y-a$; dan zal men deze waarde van x in het voorſte lid der vergelijking overbrengende vinden:

$x^4=$

$$\begin{array}{rl} x^4 = & y^4 - 4ay^3 + 6a^2y^2 - 4a^3y + a^4 \\ Ax^3 = & Ay^3 - 3Aay^2 + 3Aa^2y - Aa^3 \\ Bx^2 = & By^2 - 2Bay + Ba^2 \\ Cx = & Cy - Ca \\ D = & + D \end{array}$$

welke, opgeteld zijnde, geven zullen:

$$y^4 - (4a - A)y^3 + (6a^2 - 3Aa + B)y^2 \quad . \; . \quad (Q)$$
$$-(4a^3 - 3Aa^2 + 2Ba - C).y + (a^4 - Aa^3 + Ba^2 - Ca + D) = 0$$

Uit de vergelijking $x = y - a$ volgt: $y = x + a$. De wortels van de vergelijking in y zullen derhalve aan die van de vergelijking in x, elk met a vermeerderd, gelijk zijn. Wanneer 'er eenigen twijfel ontſtaan mogt, of zulks van alle de wortels der vergelijking geldt, zal men zich op de volgende wijze daarvan kunnen overtuigen. Men ſtelle de wortels der vergelijking in x, gelijk p, q, r en s; die der vergelijking in y zullen dan zijn de wortels der vergelijking in x, elk met a vermeerderd: namelijk $p + a$, $q + a$, $r + a$ en $s + a$, nu is volgens §. 210,

$$p + q + r + s = -A$$
$$pq + pr + ps + qr + qs + rs = +B$$
$$pqr + pqs + prs + qrs = -C$$
$$\text{en } pqrs = +D$$

Men zal nu, met behulp dezer vergelijkingen, de coefficienten van de vergelijking in y berekenen kunnen; want, de ſom van de wortels der vergelijking (Q) is: $p + a + q + a + r + a + s + a = -A + 4a$, en deze, negatief genomen, geeft $A - 4a$ voor den coefficient van den tweeden term der vergelijking in y. Ontwikkelt men de producten $(p + a) \times (q + a)$, $(p + a) \times (r + a)$, $(p + a) \times (s + a)$, enz. en telt men dezelve bij elkander, zal men vinden: $6a^2 - 3Aa + B$, welke de coefficient van den derden term der vergelijking (Q) is: en men zal, op dezelfde wijze voortgaande, betoogen: dat de wortels van de vergelijking (Q) gelijk zijn aan die van de vergelijking (P), met het getal a vermeerderd.

§. 227. Stellen wij, in de vergelijking van x, in plaats van x, de grootheid $y + a$; dan zal men verkrijgen:

$$y^4 + (4a + A)y^3 + (6a^2 + 3aA + B)y^2 \quad . \; . \; . \quad (R)$$
$$+ (4a^3 + 3Aa^2 + 2Ba + C)y + (a^4 + Aa^3 + Ba^2 + Ca + D) = 0$$

in welke $y = x - a$ is. De wortels dezer vergelijking in y zijn gelijk aan die van de vergelijking in x, verminderd met het getal a. Men zal zulks, op dezelfde wijze, als boven, kunnen bevestigen.

§. 228. †† De vergelijking (R) is van de vergelijking (Q) alleen in de teekens van de onevene magten van a, welke in de coefficienten van de magten van y voorkomen, onderſcheiden. Wij hebben reeds in §. 216. opgegeven: hoe men zonder de lastige berekening, welke de ſubſtitutie medebrengt, dadelijk de herleide vergelijking in y, namelijk (R) vinden kan: nu merken wij aan: †† „*dat de vergelijking* (Q) „ *op dezelfde wijze zal gevonden worden, wanneer men, in de* „ *gedachte, de teekens van de evene termen omkeert, en, voorts,* „ *naar het voorſchrift van* §. 216. *te werk gaat.*"

Nemen wij, tot een voorbeeld, de vergelijking: $x^4 + 9x^3 - 39x^2 - 281x + 630 = 0$; welker wortels zijn $+5$, $+2$, -7 en -9. Stellen wij: dat dezelve moet herleid worden in eene vergelijking, welker wortels 3 meer zijn dan die der gegevene; dan is, $y = x + 3$; of $x = y - 3$: bijgevolg $a = 3$: men keere nu de teekens der onevene magten van x om, en ſchrijve, in plaats van x, het getal a; dan is

$$a^4 - 9a^3 - 39a^2 + 281a + 630$$

het achterſte lid der vergelijking in y; waaruit volgens §. 216. volgt:

$$4a^3 - 27a^2 - 78a + 281$$

voor de coefficient van y; verder

$$6a^2 - 27a - 39$$

voor de coefficient van y^2; eindelijk

$$4a - 9$$

de coefficient van y^3, en ſtellende nu $a = 3$, dan wordt de vergelijking in y

$$y^4 - 3y^3 - 66y^2 + 88y + 960 = 0$$

welker wortels 8, 5, -4, en -6 zullen zijn. —— „ †† *Wanneer* „ *men de wortels der vergelijking met de éénheid begeert te vermin-* „ *deren, dan zal men* $x = y + 1$ *ſtellen, en op dezelfde wijze de* „ *coefficienten van y uit de gegevene vergelijking afleiden.*" Men zal alsdan vinden:

$$a^4 + 9a^3 - 39a^2 - 281a + 630 = +320$$
$$4a^3 + 27a^2 - 78a - 281 = -328$$
$$6a^2 + 27a - 39 = -6$$
$$4a + 9 = 13$$

en voor de vergelijking in y

$$y^4 + 13y^3 - 6y^2 - 328y + 320 = 0$$

welker wortelen $+4$, $+1$, -8, en -10 zullen zijn.

§. 229. †† Wanneer men eene vijfde, zesde en hoogere magts-vergelijking neemt, zal de fubftitutie van $y + a$ voor x tot dezelfde uitkomften brengen. Wij zullen derhalve ons niet langer hiermede ophouden: maar nog eenige oogenblikken de vergelijking (R) in overweging nemen. Men kan, omdat $y = x - a$ is, dezelve aanmerken als de herleide vergelijking in $x - a$, * waardoor wij, om ons van de fpreekwijze van Budan te bedienen, verftaan: *eene vergelijking welker wortelen zijn $x - a$, of gelijk aan de wortelen der gegevene vergelijking met a verminderd.* Nemen wij nu $a = 1$; dan zal de vergelijking in y, welke wij nu noemen zullen de vergelijking in $(x - 1)$, zijn

$$(x - \ )^4 \left.\begin{matrix}+4\\+A\end{matrix}\right\} (x-1)^3 \left.\begin{matrix}+6\\+3A\\+B\end{matrix}\right\} (x-1)^2 \left.\begin{matrix}+4\\+3A\\+2B\\+C\end{matrix}\right\} (x-1) \begin{matrix}+1\\+A\\+B\\+C\\+D\end{matrix} = 0$$

†† *De coefficienten dezer vergelijking hebben de eigenfchap, dat zij uit de gedurige optelling van de coefficienten der gegevene vergelijking in x ontftaan.*

P	Q	R	S	T	U
1	1	1	1	1	1
A	$1+A$	$2+A$	$3+A$	$4+A$	
B	$1+A+B$	$3+2A+B$	$6+3A+B$		
C	$1+A+B+C$	$4+3A+2B+C$			
D	$1+A+B+C+D$				

Plaatfen wij, om zulks zigtbaar te maken, de coefficienten der gegevene vergelijking in de eerfte kolom P; en in de tweede kolom Q de fommen van de eerfte, de twee eerfte, drie eerfte, enz. termen van de eerfte kolom; namelijk 1, $1 + A$, $1 + A + B$, enz.: * dit noemen wij de *eerfte fommen*. In de derde kolom R de fommen dezer eerfte fommen, namelijk 1; $1 + (1 + A)$; $1 + (1 + A) + (1 + A + B)$, enz. tot op ééne na de laatfte ingefloten: in de vierde kolom S de fommen van de tweede fommen, in dezelfde orde genomen, enz., tot men, in de zesde of laatfte kolom, op de éénheid komt: deze fommen der eerfte, tweede en volgende orden aldus gemaakt zijnde, ziet men ten duidelijke: dat, van de regte naar de linkehand gaande, de laatfte termen der kolommen de coefficienten van de termen der vergelijking in $(x - 1)$ zijn. Indien men deze zelfde proef op de algemeene ne vijfde, zesde, en volgende hoogere magts-vergelijkingen toepast, zal men dezelfde uitkomsten verkrijgen. Offchoon nu deze proef voor geen strikt betoog, (hetwelk voor het tegenwoordige te moeijelijk zou zijn,) kan doorgaan, is zij overtuigend, en, daar men ten klaarste ziet: dat de wording dezer sommen van de bijzondere waarde der coefficienten 1, A, B, C, enz. onafhankelijk is, en gevolgelijk op dezelfde wijze zal plaats hebben, het zij die coefficienten positieve of negatieve, geheele of gebrokene getallen zijn, volgt hieruit den eenvoudigen regel van BUDAN, om uit eene gegevene vergelijking in x de herleide in $x - 1$ door eene eenvoudige optelling van getallen te vinden.

§. 230. Zij, bij voorbeeld, gegeven de vergelijking: $x^4 + 9x^3 - 39x^2 - 281x + 630 = 0$. „ *Dan schrijve men, gelijk in het* „ *nevenstaande tafeltje,* „ *alle de coefficienten, met* „ *derzelver teekens, in de* „ *eerste rij: uit deze make* „ *men de eerste sommen,* „ *als volgt:*

gegev. coeff.	$+1$	$+9$	-39	-281	$+630$
eerste somm.	$+1$	$+10$	-29	-310	$+\overset{\frown}{320}$
tweede somm.	$+1$	$+11$	-18	$-\overset{\frown}{328}$	
derde somm.	$+1$	$+12$	$-\overset{\frown}{6}$		
vierde somm.	$+1$	$+\overset{\frown}{13}$			
vijfde somm.	$+\overset{\frown}{1}$				

„ *Men zegt:* $1 + 9 = 10$; $10 - 39 = -29$; $-29 -$ „ $281 = -310$; $-310 + 630 = +320$.

„ *Uit deze rij der eerste sommen make men de rij der* „ *tweede sommen, op dezelfde wijze, zeggende:* $1 + 10 = 11$; „ $11 - 29 = -18$; $-18 - 310 = -328$; *verder gaat* „ *men niet.*

„ *Uit de rij der tweede sommen make men, op dezelfde* „ *wijze, die der derde, zeggende:* $1 + 11 = 12$; $+12 -$ „ $18 = -6$

„ *Uit de rij der derde sommen die der vierde, enz. telkens* „ *in elke volgende rij eene som minder nemende, tot dat men* „ *eindelijk in de laatste rij slechts één getal verkrijgt.*

„ *De onderste getallen van elke kolom in rangorde, van de* „ *linke naar de regterhand: namelijk:*

$$+1, \ +13, \ -6, \ -328, \ +320$$

„ *zijn*

„ *zijn de coefficienten van de vergelijking in* $(x-1)$, *en* „ *men kan nu uit het gemaakte tafeltje dadelijk schrijven.*"

$$(x-1)^4+13(x-1)^3-6(x-1)^2-328(x-1)+320=0$$

welke, indien men $x-1=y$ stelt, geven zal:

$$y^4+13y^3-6y^2-328y+320=0$$

welke vergelijking wij, in §. 228, door eene lastiger berekening, gevonden hebben.

§. 231. Deze kunstbewerking maakt het eerste gedeelte van de handelwijze van BUDAN uit. Hij noemt dezelve *den algorithmus, om de getransformeerde vergelijking in* $(x-1)$ *te verkrijgen* (52). 'Er wordt, gelijk gebleken is, tot deze bewerking, niets meer dan optellen vereischt, en dat men in de optelling, behoorlijk op de teekens acht geve.

§. 232. †† *Het is zelfs niet noodig, dat de coefficient van den eersten term der gegevene vergelijking de éénheid zij.* Men zal zich daarvan in het algemeen kunnen overtuigen, door de vergelijking: $Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E=0$, bij voorbeeld, in eene vergelijking in $(x-1)$ te herleiden.

Laat, bij voorbeeld, gegeven zijn, de vergelijking:

$$2x^3-3x^2+5x-3=0;$$

dan zal men, volgens den regel werkende, vinden, voor de herleide in $(x-1)$, de vergelijking:

Geg. coefficienten	$2-3+5-3$
eerste sommen	$+2-1+4+1$
tweede sommen	$+2+1+5$
derde sommen	$+2+3$
vierde sommen	$+2$

$$2(x-1)^3+3(x-1)^2+5(x-1)+1=0$$

§. 233. †† *Wanneer de gegevene vergelijking onvolkomen is, dat wil zeggen,* (*zie* §. 90.) *wanneer sommige van derzelver termen ontbreken, dan kan men de coefficienten dezer ontbrekende termen als nul aanmerken, en vervolgens, naar den voorgeschrevenen regel, van* §. 230, *te werk gaan.* Laat, bij voorbeeld, gegeven zijn:

$$x^5+3x-100=0$$

dan zal men, in plaats van deze vergelijking, kunnen stellen:

x^5+

(52) *Algorithmus*, uit het Arabisch geslachtwoord, *Al*, en het Grieksche αριθμος, *getal*, zamengevoegd, beteekende, ten tijde, dat het tientallig stelsel in Europa werd ingevoerd, de tientallige wijze van rekenen: men schreef ook somtijds *Algorismus.* * In het tegenwoordige spraakgebruik, beteekent *Algorithmus eene zekere rekenwijze in getallen of letters.*

$$x^5 + 0.x^4 + 0.x^3 + 0.x^2 + 3x - 100 = 0$$

en men zal, volgens de nevenstaande bewerking, voor de herleide vergelijking in $(x-1)$, verkrijgen:

$$(x-1)^5 + 5(x-1)^4 + 10(x-1)^3 + 10(x-1)^2 + 8(x-1) - 96 = 0.$$

$$\begin{array}{rrrrrr} 1, & 0, & 0, & 0 & +3 & -100 \\ +1 & +1 & +1 & +1 & +4 & -96 \\ & +1 & +2 & +3 & +4 & +8 \\ & & +1 & +3 & +6 & +10 \\ & & & +1 & +4 & +10 \\ & & & & +1 & +5 \\ & & & & & +1 \end{array}$$

§. 234. †† Bij de herhaling van dezelfde handelwijze, zal men, door enkel opstellen, de herleide vergelijkingen, in $(x-2)$, $(x-3)$, $(x-4)$, enz. verkrijgen. Nemen wij, bij voorbeeld, de vergelijking $x^3 - 7x + 7 = 0$; dan zullen de coefficienten der vergelijkingen

in x *zijn:*	$1 + 0 - 7 + 7$
in $(x-1)$	$1 + 3 - 4 + 1$
in $(x-2)$	$1 + 6 + 5 + 1$ *enz.*

Zij nog gegeven de vergelijking:

$$x^3 - 15x^2 + 74x - 117 = 0;$$

dan zal men, door de toepassing van denzelfden regel, vinden voor de coefficienten van de vergelijkingen

in x	$1 - 15 + 74 - 117$
in $(x-1)$	$1 - 12 + 47 - 57$
in $(x-2)$	$1 - 9 + 26 - 21$
in $(x-3)$	$1 - 6 + 11 - 3$
in $(x-4)$	$1 - 3 + 2 + 3$
in $(x-5)$	$1 + 0 - 1 + 3$
in $(x-6)$	$1 + 3 + 2 + 3$, *enz.*

§. 235. Zien wij nu: welk voordeel men uit deze herleidingen zal kunnen trekken. Stellen wij, om hierin de verbeelding te gemoet te komen, eenige vergelijking

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$$

en dat men uit dezelve de herleide in $(x-1)$, $(x-2)$, $(x-3)$, enz. hebbe afgeleid: nemen wij dan drie of vier op elkander volgende vergelijkingen, in $(x-p)$, $(x-p-1)$, $(x-p-2)$, $(x-p-3)$, enz.; dan zal men hebben:

$$(x-p)^4 + A'(x-p)^3 + B'(x-p)^2 + C'(x-p) + D' = 0$$

$$(x-p-1)^4 + A''(x-p-1)^3 + B''(x-p-1)^2 + C''(x-p-1) + D'' = 0$$

$$(x-p-2)^4 + A'''(x-p-2)^3 + B'''(x-p-2)^2 + C'''(x-p-2) + D''' = 0 \text{ enz.}$$

welker coefficienten A', B', *enz.* A'', B'', *enz.* bekend zijn.

Wan-

Wanneer men nu, in deze vergelijkingen, $x = p$; $x = p + 1$; $x = p + 2$ ſtelt, zullen derzelver voorſte leden in D', D'' en D''' veranderen, en voorts onder het oog houdt, hetgeen in §. 154 en 200, van de vergelijkingen betoogd is; dan zal men overtuigend zien:

§. 237. 1° „ †† *Dat, wanneer de laatſte termen D' en D'' „ van twee op elkander volgende afgeleide vergelijkingen, in „ $(x-p)$ en $(x-p-1)$, twee tegengeſtelde teekens hebben, „ 'er tusſchen p en $p+1$ noodzakelijk één wortel, of een on- „ even aantal wortels, beſtaan zal.*"

§. 238. 2° „ †† *Dat, wanneer de achterſte term D', eener „ afgeleide vergelijking in $(x-p)$, gelijk nul wordt, de ge- „ gevene vergelijking eenen geheelen en meetbaren wortel zal „ hebben, die gelijk aan p is.*"

§. 239. 3° „ †† *Dat, wanneer verſcheidene coefficienten „ der achterſte termen B', C', D', eener afgeleide vergelij- „ king, in $(x-p)$, nul worden, daaruit volgen zal: dat „ de gegevene vergelijking even zoo vele gelijke wortels hebben „ zal, als 'er coefficienten gelijk nul geworden zijn.*" Waaruit dan volgt: dat de handelwijze van Budan de geheele en meetbare, benevens de gelijke wortels, eener gegevene vergelijking doet kennen.

§. 240. Maar nu denkt misſchien iemand: op deze wijze worden alleen de poſitieve wortels en derzelver limieten ontdekt, en deze leerwijze zal dus niets van de negatieve wortelen leeren kennen? Maar men kan de handelwijze van Budan omkeeren, en de afgeleide, in $x+1$, $x+2$, $x+3$, enz. vinden, door, in plaats van optetellen, aftetrekken. Men zal zich daarvan kunnen overtuigen, door, in de vergelijking (Q) §. 226, pag. 157, $a = 1$ te ſtellen, en uit de coefficienten 1, A, B, C, D, door gedurig aftrekken, de verſchillen van de eerſte, tweede en volgende orden te vormen, enz.: dan, dit onderzoek, dat zeer gemakkelijk is, voor den Lezer overlatende, merken wij aan: †† „ *dat men de wortels „ eener vergelijking, van poſitief in negatief, veranderen kan, „ door de teekens van de coefficienten der tweede, vierde, zes- „ de termen, en, in het gemeen, van de termen van éénen*

„ *eve-*

„ *evenen rang omtekeeren.*" Op deze wijze zullen de wortels van de vergelijking $x^3 - x^2 - 21x + 45 = 0$, van positief in negatief, en van negatief in positief, veranderen, wanneer men schrijft $x^3 + x^2 - 21x - 45 = 0$.

Om zulks te betoogen, neme men de vergelijking $x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$: indien men nu $x = -y$ stelt, verkrijgt men: $-y^3 + Ay^2 - By + C = 0$; of, alle de teekens omzettende, $y^3 - Ay^2 + By - C = 0$. Voor eene evene magts-vergelijking, $x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$, zal men, door in plaats van x te schrijven $-y$, verkrijgen $y^4 - Ay^3 + By^2 - Cy + D = 0$. Naderhand zullen wij deze waarheid nog op eene andere wijze betoogen.

§. 241. †† „ *Om dan de negatieve wortels eener gegevene* „ *vergelijking, door den algorithmus van* BUDAN, *te vinden,* „ *keere men de teekens van de evene termen der gegevene vergelijking om, en zoeke, uit deze nieuwe vergelijking, de* „ *afgeleide vergelijkingen, in* $(x-1)$, $(x-2)$, *enz.; dan* „ *zal men, op deze wijze, of de negatieve wortels, of derzelver naaste grenzen, in geheele getallen vinden.*"

§. 242. Nemen wij, om van een en ander een ophelderend voorbeeld te geven, de vergelijking:

$$x^4 + 2x^3 - 47x^2 - 47x + 252 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (D)$$

dan is de vergelijking in $-x$, dat wil zeggen, de vergelijking, welke dezelfde wortels als de gegevene, maar met tegengestelde teekens, heeft

$$x^4 - 2x^3 - 47x^2 + 47x + 252 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (E)$$

Uit de eerste vergelijking (D) haalt men de afgeleide, in $x-1$, $x-2$, enz. als volgt:

$$\begin{array}{lllllll}
\textit{in } x-1 & \ldots\ldots & 1 & +\ 6 & -\ 35 & -\ 131 & +\ 161 \\
x-2 & \ldots\ldots & 1 & +\ 10 & -\ 11 & -\ 179 & +\ 2 \\
x-3 & \ldots\ldots & 1 & +\ 14 & +\ 25 & -\ 167 & -\ 177 \\
x-4 & \ldots\ldots & 1 & +\ 18 & +\ 73 & -\ 71 & -\ 304 \\
x-5 & \ldots\ldots & 1 & +\ 22 & +\ 133 & +\ 133 & -\ 283 \\
x-6 & \ldots\ldots & 1 & +\ 26 & +\ 205 & +\ 469 & +\ 6
\end{array}$$

De vergelijkingen, in $(x-1)$, $(x-2)$, uit (E) afgeleid, zijn:

$$\begin{array}{lllllll}
\textit{in } x-1 & \ldots\ldots & 1 & +\ 2 & -\ 47 & -\ 49 & +\ 251 \\
x-2 & \ldots\ldots & 1 & +\ 6 & -\ 35 & -\ 133 & +\ 158 \\
x-3 & \ldots\ldots & 1 & +\ 10 & -\ 11 & -\ 181 & -\ 3 \\
x-4 & \ldots\ldots & 1 & +\ 14 & +\ 25 & -\ 169 & -\ 184 \\
x-5 & \ldots\ldots & 1 & +\ 18 & +\ 73 & -\ 73 & -\ 313 \\
x-6 & \ldots\ldots & 1 & +\ 22 & +\ 133 & +\ 131 & -\ 294
\end{array}$$

in

in $x - 7 \;.\;.\;.\;.\; 1 + 26 + 205 + 467 - 7$
$x - 8 \;.\;.\;.\;.\; 1 + 30 + 289 + 959 + 692$

§. 243. Wij hebben de berekening, welke tot het maken dezer vergelijkingen vereischt wordt, op de tegenzijde van de derde tabelle geplaatst, en tot de uitvoering van al dat werk behoeft geen cijfer meer gedacht of geschreven te worden, dan die, welke in de drie eerste kolommen voorkomen. Het blijkt nu, uit de afgeleide vergelijkingen, die men, door eenvoudig optellen, verkregen heeft, dat de gegevene vergelijking vier wortels heeft; éénen tusschen 5 en 6, éénen tusschen 2 en 3; éénen tusschen — 2 en — 3, en éénen tusschen — 7 en — 8.

§. 244. †† *Wanneer de teekens van de termen van eenige afgeleide vergelijking alle positief zijn, gelijk als in de vergelijking, in* $(x - 6)$, *plaats heeft; dan zal 'er in alle de daarop volgende afgeleide vergelijkingen, in* $(x - 7)$, $(x - 8)$, $(x - 9)$, $(x - 10)$, *enz. geene afwisseling van teekens meer kunnen plaats hebben;* want, de coefficienten der volgende vergelijkingen zullen steeds grooter worden, en de teekens van derzelver achterste termen bestendig positief blijven.

§. 245. Hieruit volgt onmiddelijk: †† *dat, wanneer alle de termen eener vergelijking positief zijn, dezelve geenen positieven wortel zal kunnen hebben:* want, de achterste termen van de vergelijkingen in $(x - 1)$, $(x - 2)$, $(x - 3)$, enz. noodzakelijk positief zijnde, zal 'er geene afwisseling van $+$ tot $-$ meer kunnen plaats hebben. †† *De algorithmus van* Budan *ontdekt derhalve de grenzen, tusschen welken de positieve en negatieve wortels eener vergelijking moeten begrepen zijn.*

§. 246. Misschien zal men tegen de Leerwijze van Budan inbrengen: dat, wanneer eene vergelijking groote wortels heeft, 'er een groot aantal vergelijkingen zal moeten afgeleid worden, eer men ontdekken zal, tusschen welke geheele getallen de wortels invallen: en dat men dan nog niet verder zal gevorderd zijn, dan toen wij de leerwijze van Newton en anderen op de benadering van de wortels der vergelijkingen toepasten? In het gemeen, moeten wij op deze bedenking aanmerken: dat, wanneer men deze zwarigheid niet konde wegnemen, Budan's leerwijze, in dit opzigt, met

 alle

alle anderen zou gelijk ſtaan; doch, dat zij dan nog, wegens hare eenvoudigheid, boven alle anderen de voorkeur verdienen zou: dan, wij zullen dadelijk aantoonen, dat dezelfde kunstgreep, waardoor BUDAN elke volgende vergelijking uit de voorgaande afleidt, ook ſtrekt, zoo, om het moeijelijke van dit werk te bekorten, als om tevens de nadere grenzen van de wortels der vergelijkingen te vinden: tot dat einde zal het noodig zijn, de volgende eigenſchappen der vergelijkingen te verklaren.

Verdere merkwaardige eigenſchappen der Vergelijkingen.

§. 247. †† *Elke gegevene vergelijking kan veranderd worden in eene andere, welker wortels gelijke veelvouden of gelijke onderveelvouden van die der gegevene zijn.*

Laat, om het eerſte te betoogen,

$$x^5 + A x^4 + B x^3 + C x^2 + D x + E = 0$$

eene vergelijking zijn, welker wortels p, q, r, s, t, zijn; dan zal men (n een zeker getal zijnde,) eene vergelijking moeten vinden, welker wortels np, nq, nr, ns, nt, zijn: ſtel deze vergelijking

$$y^5 + P y^4 + Q y^3 + R y^2 + S y + T = 0$$

dan is, zie §. 210, *pag.* 143.

$-A$ gelijk aan de ſom der wortels p, q, r, s en t; $+B$ gelijk aan de ſom dezer wortels, twee aan twee genomen; $-C$ gelijk aan de ſom der wortels, drie aan drie genomen; $+D$ gelijk aan de ſom der wortels, vier aan vier; $-E$ gelijk aan het product der wortels. Dezelfde eigenſchap zal voor de vergelijking in y gelden. $-P$ zal gelijk zijn aan de ſom der wortels np, nq, nr, ns, nt; $+Q$ gelijk aan de ſom der producten, twee aan twee genomen, enz. Hieruit is ligtelijk opte maken: dat

$$nA = P;\ n^2 B = Q;\ n^3 C = R;\ n^4 D = S \text{ en } n^5 E = T$$

zal zijn, en de vergelijking in y, welker wortelen np, nq, nr, ns, nt zijn, zal gevolgelijk worden:

$$y^5 + n A y^4 + n^2 B y^3 + n^3 C y^2 + n^4 D y + n^5 E = 0$$

Het blijkt hieruit: †† „ *dat, wanneer de termen eener vergelijking, van den eerſten af, tot den laatſten ingeſloten, in* „ *rangorde, met die der meetkunſtige reeks*

$$1,\ n,\ n^2,\ n^3,\ n^4,\ \text{enz.}$$

„ *vermenigvuldigd worden, alle de wortels der komende ver-*
„ *gelijking, geen uitgezonderd, n malen grooter zullen zijn*
„ *dan die der gegevene.*"

Men zal op dezelfde wijze betoogen: †† *dat, wanneer de termen eener vergelijking, in rangorde, gedeeld worden door de termen der meetkunstige reeks*

$$1,\ n,\ n^2,\ n^3,\ n^4,\ n^5,\ \text{enz.}$$

de wortels der komende vergelijking één n^{de} gedeelte zullen zijn van die der gegevene.

§. 248. 1. VOORBEELD. Laat gegeven zijn de vergelijking: $y^4 - 3y^3 - 66y^2 + 88y + 960 = 0$, welker wortelen zijn $8, 5, -4$ en -6; dan zal men uit dezelve terstond eene vergelijking in z kunnen afleiden, welker wortels gelijk zullen zijn aan driemaal de wortels der gegevene vergelijking, namelijk aan $24, 15, -12, -18$. „ *Men vermenigvuldi-*
„ *ge, tot dat einde, derzelver termen met de meetkunstige reeks*
„ $1, 3, 9, 27, 81$, *aldus:*

$$\begin{array}{ccccccccc} y^4 & - & 3y^3 & - & 66y^2 & + & 88y & + & 960 = 0 \\ 1 & & 3 & & 9 & & 27 & & 81 \\ \hline z^4 & - & 9z^3 & - & 594z^2 & + & 2376z & + & 77760 = 0 \end{array}$$

„ *en de komende vergelijking zal de begeerde zijn.*"

§. 249. 2. VOORBEELD. Wil men, uit dezelfde vergelijking in y, eene andere vergelijking in v afleiden, welker wortels één-tiende van die der gegevene zijn; „ *dan zal men derzel-*
„ *ver termen, in rangorde, door die der meetkunstige reeks*
„ $1, 10, 100, 1000$, *enz. deelen*

$$\begin{array}{ccccccccc} y^3 & - & 3y^3 & - & 66y^2 & + & 88y & + & 960 = 0 \\ 1 & & 10 & & 100 & & 1000 & & 10000 \\ \hline v^4 & - & 0{,}3v^3 & - & 0{,}66v^2 & + & 0{,}088v & + & 0{,}096 = 0 \end{array}$$

„ *en de vergelijking, welke men op deze wijze verkrijgt, zal*
„ *de begeerde zijn.*"

§. 250. Men kan, met de meeste Schrijvers, deze eigenschappen der vergelijkingen ook aldus, evenwel onzes oordeels minder duidelijk, bewijzen. Stel $y = nx$; dan is $x = y : n$, brengt men nu deze waarde van x in de vergelijking $x^5 + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0$ over; dan verandert zij in

$$\frac{y^5}{n^5}$$

$$\frac{y^5}{n^5} + A \cdot \frac{y^4}{n^4} + B \cdot \frac{y^3}{n^3} + C \cdot \frac{y^2}{n^2} + D \cdot \frac{y}{n} + E = 0$$

welke, indien men alle hare termen met n^5 vermenigvuldigt, in de vergelijking

$$y^5 + nAy^4 + n^2By^3 + n^3Cy^2 + n^4Dy + n^5E = 0$$

die wij langs eenen anderen weg gevonden hebben, verandert.

Stellen wij wederom $z = x : n$; dan is $x = nz$, en men zal dan op gelijke wijze vinden:

$$z^5 + \frac{A}{n} z^4 + \frac{B}{n^2} z^3 + \frac{C}{n^3} z^2 + \frac{D}{n^4} z + \frac{E}{n^5} = 0$$

Het blijkt dan: †† *dat men in plaats van den wortel x slechts x : n of n x zal behoeven te stellen, om eene vergelijking te verkrijgen, welker wortelen het n-voud of het n^{de} gedeelte van die der gegevene vergelijking zullen zijn.*

§. 251. * Eene vergelijking in nx zal zeggen: *eene vergelijking, welker wortels het n-voud van eenige vergelijking in x zijn.* Op dezelfde wijze, zal men door eene vergelijking in $x : n$ verstaan, *eene vergelijking, welker wortels het n^{de} gedeelte van de wortels van eenige vergelijking in x zijn.*

§. 252. †† *Men kan deze eigenschappen der vergelijkingen, op het voetspoor van* BUDAN, *doen dienen, om de wortels eener vergelijking, tot op minder dan één-tiende van de éénheid, te benaderen.*

Wij hebben uit de vergelijking:

$$x^4 + 2x^3 - 47x^2 - 47x + 252 = 0$$

(zie §. 241. en de tegenzijde van tabelle N° III.) gevonden, voor de vergelijkingen in $(x-5)$ en $(x-6)$

$$1 + 22 + 133 + 133 - 283 = 0 \text{ in } (x-5)$$
$$1 + 26 + 205 + 469 + 6 = 0 \text{ in } (x-6)$$

en daaruit besloten: dat 'er, tusschen $x = 5$ en $x = 6$ een wortel bestaan moet: indien wij nu elk dezer vergelijkingen met de reeks 1, 10, 10^2, 10^3, enz. vermenigvuldigen; dan zullen wij voor de vergelijkingen in $(10x - 50)$ en $(10x - 60)$ verkrijgen:

$$1 + 220 + 13300 + 133000 - 2830000 = 0$$
$$1 + 260 + 20500 + 469000 + 60000 = 0$$

en nu is het klaarblijkelijk: dat, wanneer men de eerste dezer vergelijkingen naar den regel van §. 230, behandelt, men door optelling

de

de vergelijkingen in $(10x - 51)$, $(10x - 52)$ enz. verkrijgen zal, even zoo, als dezelve in de laatste kolom van de tegenzijde van tabelle N° III. voorkomen. Het blijkt nu, uit de opgave van deze berekening: dat de wortel tusschen 5 en 6, (zie §. 238.) begrepen zal zijn tusschen $\frac{1}{10}$ van 59 en $\frac{1}{10}$ van 60; of dat $x > 5, 9$ en $x < 6, 0$ zijn.

§. 253. Nogtans hebben wij, in deze berekening, alles op den langen weg behandeld, en in dit geval kan men ten hoogste negen afleidingen noodig hebben. Het blijkt uit de vergelijkingen in $(x - 5)$ en $(x - 6)$: dat de wortel nader bij 6 dan bij 5 komt: men doet dan beter, wanneer men, gelijk in §. 240. opgemerkt is, uit de vergelijking in $(10x - 60)$, die in $(10x - 59)$ enz. afleidt, hetgeen door aftrekken, in plaats van optellen, aldus afloopt

$$\begin{array}{rrrrrl}
1 + 260 + & 20500 + & 469000 + & 60000 & \textit{in} & (10x - 60) \\
1 + & 259 + & 20241 + & 448759 - & 388759 & \\
& 1 + & 258 + & 19983 + & 428776 & \\
& & 1 + & 257 + & 19726 & \\
& & & 1 + & 256 & \\
& & & & 1 &
\end{array}$$

komt voor de coefficienten van de vergelijking in $(10x - 59)$

$$1 + 256 + 19726 + 428776 - 388759$$

en men komt alzoo, door éene, in plaats van door negen afleidingen, tot de grenzen 5, 9 en 6, 0, tusschen welken de gezogte wortel moet begrepen zijn.

Wij hebben daarom, om dienzelfden wortel, op minder dan éénhonderdste deel van het geheel, te vinden, van de teruggaande afleidingen gebruik gemaakt, (zie het laatste gedeelte van de laatste kolom op de tegenz. van tab. N° III.) en uit de vergelijking in $(10x - 60)$, na hare coefficienten op nieuw met de reeks $1, 10, 10^2, 10^3$, enz. vermenigvuldigd te hebben, de coefficienten van de vergelijking in $(100x - 600)$; en verder, uit deze laatste, die van de vergelijkingen in $(100x - 599)$, $(100x - 598)$, enz. afgeleid. Op deze wijze worden 'er slechts twee afleidingen vereischt, om te vinden, dat de wortel tusschen 5, 98 en 5, 99 begrepen is. De vergelijkingen in $(100x - 599)$ en $(100 - 598)$ doen zien: dat de wortel nader aan 5, 99 dan aan 5, 98 zal komen. Men leide dan, uit de vergelijking in $(1000x - 5990)$, die in $(1000x - 5989)$, $(1000x - 5988)$ enz. af: en men zal alzoo, in deze en in alle volgende afleidingen, met de minste moeite, de wortels kunnen benaderen.

§. 254. †† Indien men deze wijze van afleiden volgt, zal, wanneer het volgend cijfer des wortels *vijf* is, het grootste getal, namelijk vijf, afleidingen gevorderd worden. †† *Gebruikt men de afleiding bij optelling, dan zal het aantal der afleidingen, noodig zijnde, om den wortel te benaderen, gelijk zijn aan het aantal cijfers, dat in den wortel voorkomt, vermeerderd met de som van die cijfers: maar, wanneer men zich beurtelings van de afleiding bij optelling en aftrekking bedient, zal, in het ongunstigste geval, wanneer de cijfers des wortels alle vijf zijn, het getal afleidingen gelijk zijn aan vijfmaal het getal cijfers, dat in den wortel voorkomt.*

§. 255. †† Men kan, door het betoogde in §. 247, gemakkelijk ontdekken: *tusschen welke tientallen, honderdtallen, enz. de wortels eener vergelijking invallen.* Stellen wij, met BUDAN, de vergelijking $x^3 - 1745 = 0$; dan zal men de vergelijkingen, welke in het nevenstaande tafeltje geplaatst zijn, moeten berekenen, om te vinden, dat de cubiek-wortel uit het getal 1745 tusschen 12 en 13 valt: dan, men kan dit werk aanmerkelijk bekorten, wanneer men de vergelijking $x^3 - 1745 = 0$, of, zoo men wil,

$$x^3 + 0 \times x^2 + 0 \times x - 1745 = 0$$

verandert in eene andere, welker wortels één-tiende van die der gegevene zijn, of wanneer men de vergelijking in $\frac{1}{10}x$ vormt: men zal tot dat einde de termen der vergelijking door die der reeks

Afgeleide Vergelijkingen.

in (x)	1	$+\ 0$	$+\ 0$	-1745
in $(x-1)$ ...	1	$+\ 3$	$+\ 3$	-1744
in $(x-2)$ ...	1	$+\ 6$	$+\ 12$	-1737
in $(x-3)$ ...	1	$+\ 9$	$+\ 27$	-1718
in $(x-4)$ ...	1	$+\ 12$	$+\ 48$	-1681
in $(x-5)$ ...	1	$+\ 15$	$+\ 75$	-1620
in $(x-6)$ ...	1	$+\ 18$	$+\ 108$	-1529
in $(x-7)$ ...	1	$+\ 21$	$+\ 147$	-1402
in $(x-8)$ ...	1	$+\ 24$	$+\ 192$	-1233
in $(x-9)$ ...	1	$+\ 27$	$+\ 243$	-1016
in $(x-10)$ ...	1	$+\ 30$	$+\ 300$	-745
in $(x-11)$ ...	1	$+\ 33$	$+\ 363$	-414
in $(x-12)$ ...	1	$+\ 36$	$+\ 432$	-17
in $(x-13)$ ...	1	$+\ 39$	$+\ 507$	$+452$

$$1,\ 10,\ 10^2,\ 10^3$$

deelen, hetgeen, voor de vergelijking in $\frac{x}{10}$, geven zal:

$$x^3 - 1,745 = 0.$$

Hieruit zal men vinden voor de vergelijkingen

in

$$in\ \left(\frac{x}{10}\right) \ldots\ldots 1 + 0 + 0 - 1{,}745$$

$$in\ \left(\frac{x}{10} - 1\right) \ldots 1 + 3 + 3 - 0{,}745$$

$$in\ \left(\frac{x}{10} - 2\right) \ldots 1 + 6 + 12 + 6{,}255$$

En wanneer men de wortels der twee laatfte vergelijkingen, door derzelver coefficienten met 1, 10, 10^2, 10^3, te vermenigvuldigen, tienmaal grooter maakt, zal men verkrijgen:

$$in\ (x - 10) \ldots\ldots 1 + 30 + 300 - 745$$
$$in\ (x - 20) \ldots\ldots 1 + 60 + 1200 + 6255$$

Men zal nu, uit de vergelijking in $(x - 10)$, de coefficienten der vergelijkingen in $(x - 11)$, $(x - 12)$, $(x - 13)$, door §. 230. onmiddelijk vinden kunnen (53).

§. 256. †† *Deze bekorting is nu niet flechts toepasfelijk op eene vergelijking van twee termen, maar op alle vergelijkingen in het algemeen.* Zoodra men, op het inzien van de coefficienten der gegevene vergelijking, reden heeft te denken: dat de grootfte wortel uit verfcheidene cijfers beftaan zal, zal men uit dezelve vergelijkingen afleiden, welker wortels tien, honderd, duizendmaal, enz. kleiner zijn, *en men zal gevolgelijk vinden: tusfchen welke honderdtallen, tientallen, éénheden, tiendeelen, enz. de wortel invalt.*

Laat nog gegeven zijn de vergelijking:

$$x^3 + 213x - 4384569 = 0$$

dan zal men vinden voor de coefficienten

$$in\ \left(\frac{x}{100}\right) \ldots\ldots 1 + 0 + 0{,}0213 - 4{,}384569$$

$$in\ \left(\frac{x}{100} - 1\right) \ldots 1 + 3 + 3{,}0213 - 3{,}363269$$

$$in\ \left(\frac{x}{100} - 2\right) \ldots 1 + 6 + 12{,}0213 + 3{,}658031$$

Het blijkt hieruit, dat 'er ten minfte één wortel tusfchen 100 en 200 valt: de vergelijkingen, in $(x - 100)$ en $(x - 200)$ zullen zijn:

1 +

(53) Het blijkt hieruit: dat de uittrekking van de wortels van alle magten tevens met de oplosfing van de hoogere magts vergelijkingen, in de leerwijze van BUDAN begrepen zijn. Deze omftandigheid is geen twijfelachtig bewijs van hare algemeenheid.

$$1 + 300 + 30213 - 3363269$$
$$1 + 600 + 120213 + 3658031$$

de vergelijking in $(\frac{1}{10}x - 10)$ zal zijn

$$1 + 30 + 302,13 - 3363,269$$

Uit deze zal men de coefficienten der vergelijkingen in . . . $(\frac{1}{10}x - 11)$, $(\frac{1}{10}x - 12)$, enz. vinden.

§. 257. †† *Wanneer de wortels eener vergelijking*

$$x^5 + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0 \ldots (\alpha)$$

door de letters p, q, r, s en t, worden uitgedrukt; dan zullen de wortels van de vergelijking:

$$y^5 + \frac{D}{E}y^4 + \frac{C}{E}y^3 + \frac{B}{E}y^2 + \frac{A}{E}y + \frac{1}{E} = 0 \,.. (\beta)$$

zijn $\frac{1}{p}$, $\frac{1}{q}$, $\frac{1}{r}$, $\frac{1}{s}$, $\frac{1}{t}$; *dat is het omgekeerde van de wortels der gestelde vergelijking in x.*

Want, volgens §. 210. zal $-A = p + q + r + s + t$; $B = pq + pr + ps + pt + qr + qs + qt + rs + rt + st$; $-C = pqr + pqs + pqt + prs + prt + pst + qrs + qrt + qst + rst$; $D = pqrs + pqrt + pqst + prst + qrst$; $-E = pqrst$ zijn. Nu zal men vinden: dat

1° $\frac{D}{E} = \frac{pqrs + pqrt + pqst + prst + qrst}{-pqrst} = -\frac{1}{t} - \frac{1}{s} - \frac{1}{r} - \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$ is. Het blijkt hieruit: dat $\frac{D}{E}$ gelijk is aan de negatieve som der omgekeerde wortelen van (α), en dat de breuk $\frac{D}{E}$ de coefficient moet zijn van den tweeden term der vergelijking (β), welker wortelen $\frac{1}{p}$, $\frac{1}{q}$, $\frac{1}{r}$, $\frac{1}{s}$ en $\frac{1}{t}$ zijn.

2° Voorts is $\frac{C}{E} = \frac{-pqr - pqs - \text{enz.}}{-pqrst} = +\frac{1}{pq} + \frac{1}{pr} + \text{enz.}$: deze breuk $\frac{C}{E}$ is derhalve, (als gelijk zijnde aan de som van de producten der wortels, op alle mogelijke wijzen, twee aan twee, genomen,) de coefficient des tweeden terms van de vergelijking (β).

3° Wederom is $\frac{B}{E} = \frac{+pq + pr + ps + \text{enz.}}{-pqrst} = -\frac{1}{pqr} - \frac{1}{pqs}$

$\frac{1}{pqs}$ — *enz.* = aan de fom van de producten der wortelen van de vergelijking (β), drie aan drie, en negatief genomen.

4° Verder is $\frac{A}{E} = \frac{-p-q-r-s-t}{-pqrst} = + \frac{1}{pqrs} + enz.$ = aan de fom van de producten der wortelen, vier aan vier, genomen.

5° Eindelijk is $\frac{1}{E} = \frac{1}{-pqrst}$ = aan het product van alle de wortelen negatief genomen.

Men mag dan befluiten: dat $\frac{1}{p}$, $\frac{1}{q}$, $\frac{1}{r}$, $\frac{1}{s}$, $\frac{1}{t}$, de wortels van de vergelijking:

$$y^5 + \frac{D}{E} y^4 + \frac{C}{E} y^3 + \frac{B}{E} y^2 + \frac{A}{E} y + \frac{1}{E} = 0$$

zullen zijn. Dit bewijs geldt voor alle hoogere magts vergelijkingen.

§. 258. * Men noemt de vergelijking in y, welke, op deze wijze, uit de vergelijking in x wordt afgeleid, *de vergelijking tot het omgekeerde van de wortels der gegevene.*

Over de Limieten van de grootfte en kleinfte pofitieve en negatieve wortels der Vergelijkingen.

§. 259. * *Men verftaat door de limieten of de grenzen van de grootfte en kleinfte wortels eener vergelijking, getallen, welke of grooter of kleiner dan de grootfte of kleinfte dezer wortelen zijn.* Men heeft zich veel moeite gegeven, om de limieten van alle de wortels eener vergelijking te vinden: hetgeen men dien aangaande gedaan heeft, zal, in het vervolg, beknoptelijk worden opgegeven. Wij bepalen ons thans alleen bij de volgende eigenfchappen der limieten, waarvan wij het meeste gebruik zullen maken.

§. 260. †† *Wanneer men in eene vergelijking*

$$x^n + Px^{n-1} + Qx^{n-2} + enz. + Sx^2 + Tx + U = 0$$

in plaats van de onbekende x, de grootfte van de negatieve coefficienten, pofitief genomen, en met de éénheid vermeerderd, aanneemt, zal deze waarde van x het voorfte lid der vergelijking altijd pofitief maken.

* Men

Men gevoelt al ten eerste; dat men, in elke vergelijking, voor de onbekende, zulk een positief getal zal kunnen stellen, hetwelk den hoogsten term der vergelijking grooter maakt dan de som van alle de negatieve termen; want, met een weinig opmerkzaamheid, moet men hebben waargenomen: dat de hoogere magten van een getal zooveel grooter dan de lagere magten worden, naar mate dit getal grooter genomen wordt. Het is nu klaarblijkelijk: dat het allerongunstigst geval juist dat geene zijn zal, waarin men alle de coefficienten der volgende termen negatief en gelijk aan den grootsten negatieven coefficient der gegevene vergelijking maakt. Laat dan S de grootste negatieve coefficient der vergelijking $x^n + P x^{n-1} + enz. = 0$ zijn, en nemen wij:

$$x^n - S x^{n-1} - S x^{n-2} - S x^{n-1} - enz. - S x - S = 0$$

dan zal men deze onder den vorm

$$x^n - S (x^{n-1} + x^{n-2} + enz. + x^2 + x + 1) = 0 \ldots (A)$$

kunnen stellen: maar nu is, volgens §. 838, I. C. of zoo men wil volgens §. 60.

$$x^{n-1} + x^{n-2} + enz. + x + 1 = \frac{x^n - 1}{x - 1}$$

wij hebben derhalve in plaats van (A) de vergelijking:

$$x^n - S . \frac{x^n - 1}{x - 1} = 0$$

vergelijking, welke men onder den vorm

$$x^n - \frac{S x^n}{x - 1} + \frac{S}{x - 1} = 0$$

stellen kan. Stellen wij nu, in plaats van x, het getal N; dan zal men hebben:

$$N^n - \frac{S N^n}{N - 1} + \frac{S}{N - 1} = 0$$

Het voorste lid dezer vergelijking zal klaarblijkelijk positief zijn, indien men

$$N^n = \frac{S N^n}{N - 1}$$

stelt; maar, wanneer men dan door N^n deelt, zal

$$1 = \frac{S}{N - 1}; \; N - 1 = S; \quad \text{of } N = S + 1$$

zijn. Het blijkt dus: dat, wanneer men nu in

$$x^n - S x^{n-1} - S x^{n-2} - enz. - S x - S = 0$$

$x = S + 1$ stelt, het voorste lid dezer vergelijking positief zal worden,

den, en daar zulks in het ongunſtigſte geval zal plaats hebben, mag men met regt beſluiten: dat, wanneer men de onbekende gelijk ſtelt aan den grootſten der negatieve coefficienten, poſitief genomen, en met één vermeerderd, de waarde van het voorſte lid der vergelijking poſitief zal zijn.

§. 261. †† Deze uitkomst zal, (want zulks blijkt uit den geest van dit betoog ten klaarſte,) poſitief blijven, al neemt men de onbekende nog grooter dan deze limiet: men mag hieruit beſluiten: dat 'er, boven die waarde van x, geene wortels der vergelijking kunnen gelegen zijn, men kan gevolgelijk, tot eenen ALGEMEENEN REGEL, ſtellen:

„ *De limiet of grenspaal van den grootſten der poſitieve*
„ *wortelen is gelijk aan den grootſten der negatieve coefficien-*
„ *ten, poſitief genomen, en met de éénheid vermeerderd.*"

§. 262. Daar het nu, uit §. 240. gebleken is: dat men door $-y$ in plaats van x te ſtellen, de wortels der vergelijking in x negatief maakt, of de negatieve in poſitieve verandert, zoo zal, *wanneer, na deze verandering van teekens, R de grootſte negatieve coefficient is,* $R + 1$ *grooter dan de grootſte der poſitieve wortels in y zijn; gevolgelijk zal* $-R-1$ *grooter dan de grootſte der negatieve wortels van de vergelijking in x zijn.*

§. 263. Volgens deze beginſelen zal in de vergelijking:

$$x^4 + 2x^3 - 47x^2 - 47x + 252 = 0.$$

in welke -47 de grootſte negatieve coefficient is, de grootſte der poſitieve wortelen kleiner dan $47 + 1$, en de kleinſte der negatieve grooter dan $-47-1$ zijn. Zoo als ook uit de oploſſing gebleken is.

§. 264. †† *Maar men kan, in de meeste gevallen, nadere limieten vinden.* Deelen wij de wortels der vergelijking $x^4 + 2x^3 - 47x^2 - 47x + 252 = 0$ door 10; dan zal volgens §. 248.

$$v^4 + 0,2v^3 - 0,47v^2 - 0,047v + 0,0252 = 0$$

zijn: de grootſte poſitieve wortel dezer vergelijking zal kleiner dan $0,47 + 1$, of kleiner dan $1,47$ zijn; gevolgelijk zal de grootſte wortel kleiner dan $14,7$ zijn.

§. 265. †† *Men zal uit het betoogde in* §. 257. *gemakkelijk eene algemeene uitdrukking vinden, die altijd kleiner zal zijn dan de kleinſte poſitieve wortel eener gegevene vergelijking.*

Want,

Want, laten p, q, r, s, *enz.* t, u, in rangorde van grootte, de wortels der vergelijking

$$x^n + P x^{n-1} + Q x^{n-2} + enz. + S x^2 + T x + U = 0$$

zijn, zoodanig dat p de grootste en u de kleinste wortel zij; dan zal uit §. 257. volgen: dat, in rangorde van grootte, $\frac{1}{u}$, $\frac{1}{t}$, *enz.* $\frac{1}{q}$, $\frac{1}{p}$, de wortels van de vergelijking

$$y^n + \frac{T}{U} y^{n-1} + \frac{S}{U} y^{n-2} + enz + \frac{Q}{U} y^2 + \frac{P}{U} y + \frac{1}{U} = 0$$

zullen zijn; zijnde $1:u$ de grootste en $1:p$ de kleinste wortel.

Nemen wij nu: dat de grootste negatieve coefficient dezer vergelijking in y door $-N$ worde uitgedrukt; dan zal uit §. 261. volgen: dat $N+1$ grooter dan de grootste wortel, dat is, grooter dan $1:u$ zal zijn: indien wij nu de vergelijking, $1=1$, door $N+1 > 1:u$ deelen; dan zal, omdat, wanneer dezelfde grootheid door een grooter getal gedeeld wordt, het quotient steeds kleiner zal worden,

$$\frac{1}{N+1} < u$$

zijn, en het gebroken $1:(N+1)$ is gevolgelijk altijd kleiner dan de kleinste positieve wortel der vergelijking in x.

Men zal nu gemakkelijk deze kleinste limiet der positieve wortels van de vergelijking in x door de coefficienten van diezelfde vergelijking kunnen uitdrukken. Om dit oogmerk te bereiken, zal men $-N$ of de grootste negatieve coefficient van de vergelijking in y, welker coefficienten gebrokens zijn, die alle U tot gemeenschappelijken noemer hebben, moeten bepalen: hieruit volgt dan: dat $-N$, of de grootste negatieve coefficient van de vergelijking in y, van den grootsten negatieven coefficient van de vergelijking in x, of van derzelver grootsten positieven coefficient zal afhangen, naar dat de achterste term U positief of negatief is.

Indien U positief is; dan zal de grootste negatieve coefficient van de vergelijking in x, gedeeld door den achtersten term U, gelijk zijn aan den grootsten negatieven coefficient van de vergelijking in y: laat dan $-S$ die grootste negatieve coefficient in x zijn; dan zal, in dit geval, $N = S:U$ zijn, en de kleinste positieve wortel in x, namelijk u, zal grooter zijn dan de breuk $1:(S:U+1)$; dat is, de breuk

$$\frac{U}{S+U}$$

is

is kleiner dan de kleinste positieve wortel van de vergelijking in x.

Is de achterste term U negatief; dan zal de grootste negatieve coefficient der vergelijking in y ontstaan, wanneer de grootste positieve coefficient der vergelijking in x door U gedeeld wordt. Zij M die grootste positieve coefficient; dan zal men vinden: dat

$$U:(M+U)$$

kleiner zal zijn dan de kleinste positieve wortel.

§. 266. Men kan dan, volgens dit betoogde, als voorname en gewigtige grondregels aannemen:

1° „ *Dat de grootste negatieve coefficient eener vergelijking,*
„ *positief genomen, en, als zoodanig, met de éénheid vermeer-*
„ *derd zijnde, de som grooter dan de grootste positieve wor-*
„ *tel dezer vergelijking zal zijn.*"

2° „ *Dat, wanneer men den achtersten term eener verge-*
„ *lijking deelt door dienzelfden achtersten term, vermeerderd*
„ *met den grootsten negatieven coefficient, (positief genomen,)*
„ *indien die achterste term met het positieve teeken is aange-*
„ *daan; of, vermeerderd met den grootsten positieven coeffi-*
„ *cient, indien de achterste term negatief is, het quotient al-*
„ *tijd kleiner dan de kleinste positieve wortel dezer vergelij-*
„ *king zal zijn.*"

§. 267. Deze twee regels geven, voor alle vergelijkingen, de grootste en kleinste limieten, tusschen welke derzelver positieve wortels begrepen zijn. Wij hebben §. 240. gezien: dat men, door de verandering van de teekens der evene termen, de teekens van de wortelen eener vergelijking kan omkeeren. †† *Diezelfde regels zullen dan ook de grootste en kleinste limieten der negatieve wortelen geven.*

§. 268. Nemen wij, om den zin dezer regelen, door een paar voorbeelden, optehelderen, de vergelijkingen:

$$x^4 - x^3 - 5x^2 + 12x - 6 = 0 \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

$$x^4 - 2x^3 - 23x^2 + 50 = 0 \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

(zie §. 196 en 197.) dan is, in de vergelijking (1), de grootste positieve wortel kleiner dan $6 + 1 = 7$, en de kleinste positieve wortel grooter dan $\frac{6}{18}$ of $\frac{1}{3} = 0,3$. Indedaad is de positieve wortel, zie §. 196, gelijk $0,732$ *enz.*, en valt tusschen 7 en 0,33. In de vergelijking (2), is de grootste positieve wortel kleiner dan $23 + 1 = 24$; de kleinste positieve grooter dan $50 : (50 + 23) = \frac{50}{73}$. Keert men, in de gegevene ver-

„ *éénheid is.*" Deze som minder dan één zijnde, zal 'er een wortel kunnen bestaan. Dezelfde regel geldt voor elke twee op elkander volgende afgeleide vergelijkingen.

Nu volgt, uit §. 266, dat de kleinste positieve wortel van de vergelijking in (x) grooter is dan $\frac{8}{12}$ of $\frac{2}{3}$; en uit §. 267. [in plaats van $1-2-3-8$, nemende, in $(-x)$, $1+2-3+8$]: dat de kleinste negatieve wortel (55) van de vergelijking in $(x-1)$ grooter dan $\frac{8}{11}$ zal moeten zijn: indien 'er nu een wortel tusschen $x=0$ en $x=1$ bestond, zou die wortel te gelijk meer dan $\frac{2}{3}$ boven de nul en meer dan $\frac{8}{11}$ beneden de één, of $\frac{2}{3}+\frac{8}{11}<1$, moeten zijn: het tegenstrijdige daarvan blijkt ten klaarste, en doet ons wettig besluiten: dat 'er geen wortel tusschen 0 en 1 bestaan kan.

De kleinste positieve wortel der vergelijking in $(x-1)$ moet, volgens denzelfden regel, grooter dan $\frac{8}{9}$, en de kleinste negatieve wortel der vergelijking in $(x-2)$ grooter dan $\frac{12}{16}$, of $\frac{3}{4}$ zijn: maar $\frac{8}{9}+\frac{3}{4}$ is >1: 'er bestaat dus ook geen wortel tusschen 1 en 2.

De kleinste positieve wortel der vergelijking in $(x-2)$ moet grooter dan $\frac{12}{13}$, en de kleinste negatieve wortel in $(x-3)$ grooter dan $\frac{7}{9}$ zijn. 'Er kan dan ook geen wortel tusschen 2 en 3 bestaan.

De limieten der kleinste positieve en negatieve wortels van de vergelijkingen in $(x-3)$ en $(x-4)$ zijn $\frac{7}{9}$ en $\frac{8}{15}$: hieruit is het dan ook zeker: dat 'er geen wortel tusschen 3 en 4 bestaat.

Beschouwen wij nu nog den wortel, die tusschen 4 en 5 valt. Hij is, met betrekking tot de vergelijking, in $(x-4)$, positief, en minder dan nul, en ten opzigte van de vergelijking, in $(x-5)$, negatief, en valt tusschen 0 en -1. Volgens den regel der limieten, moet hij, met betrekking tot de vergelijking, in $(x-4)$, grooter dan $\frac{8}{20}$ of $\frac{2}{5}$, en, met opzigt tot de vergelijking, in $(x-5)$, meer dan $\frac{12}{41}$ beneden de nul zijn: hij valt gevolgelijk tusschen $4\frac{2}{5}$ en $4\frac{29}{41}$, of, in tiendeeligen, tusschen 4, 4 en 4, 72.

§. 272. Het blijkt hieruit: hoe men, 'met een' opslag van het oog, (want deze uitsluitingen vereischen niets meer dan een duidelijk begrip van de zaak,) meestal zal kunnen nagaan, of 'er wortels tusschen twee op elkander volgende getallen p en $p+1$ bestaan, (dat is, of eenige afgeleide vergelijk-

(55) * *Kleinste negatieve wortel is*, hier en in het vervolg, die negatieve wortel, welke het naast aan nul komt.

lijking, in $(x-p)$, wortels tusfchen één en nul heeft,) en hoe bijgevolg de afleidingen van BUDAN, in zich zelven, het hulpmiddel bevatten, om de grenzen der voorhanden zijnde wortels zeer nabij elkander te brengen.

§. 273. †† *Elke onevene magts-vergelijking heeft noodzakelijk éénen beftaanbaren wortel, en deze zal pofitief of negatief zijn, naar dat de achterfte term dezer vergelijking negatief of pofitief is.*

Laat wederom, gelijk in §. 260. in het algemeen,

$$x^n + Px^{n-1} + Qx^{n-2} + Rx^{n-3} + enz. + Sx^2 + Tx + U = 0$$

de vergelijking zijn. Nu hebben wij in §. 260. gezien: dat men, in plaats van x, zulk een getal N nemen kan, dat het teeken van de uitdrukking:

$$N^n + PN^{n-1} + QN^{n-2} + enz. + SN^2 + TN + U$$

alleenlijk van den voorften term N^n afhangt. Stellen wij nu: dat de exponent n oneven zij; dan zal N^n met N hetzelfde teeken $+$ of $-$ gemeen hebben. Dit alzoo gefteld zijnde, dan zal:

1° Wanneer U pofitief is, aan N zulk eene negatieve waarde kunnen gegeven worden, dat N^n, pofitief genomen, grooter dan de fom van alle de volgende pofitieve termen zal zijn: de onderftelling van $x = -N$ zal dan het voorfte lid der vergelijking negatief, en die van $x = 0$, zal hetzelve pofitief maken; 'er zal dan, zie §. 200. een negatieve wortel, tusfchen 0 en $-N$, beftaan.

2° Is U negatief; dan zal aan N zulk eene groote pofitieve waarde kunnen gegeven worden, dat N^n grooter dan de fom van alle de volgende negatieve termen zal zijn: de onderftelling van $x = +N$ zal dan het voorfte lid pofitief, en $x = 0$ zal hetzelve negatief maken; 'er zal bijgevolg een pofitieve wortel, tusfchen 0 en $+N$, beftaan (56).

§. 274. †† *Wanneer de achterfte term eener evene magtsvergelijking negatief is, zal zij noodzakelijk éénen pofitieven en éénen negatieven wortel hebben: maar, is die term pofitief, dan zal men daaruit, met zekerheid, niets tot het beftaan van beftaanbare wortels kunnen opmaken.*

Het

(56) Deze eigenfchap ftemt overëén met die der eerfte magts-vergelijkingen, welke tot den vorm $x + a = 0$, of $x - a = 0$, kunnen gebragt worden: zij hebben éénen wortel $x = -a$ of $x = +a$, welke pofitief of negatief is, naar dat de achterfte term negatief of pofitief is.

Het zij men, in dit geval, N pofitief of negatief neme, zal men N, als getal, in het afgetrokkene, zoo groot nemen kunnen, dat N^n grooter dan de fom van alle de volgende termen wordt, en, daar, in beide gevallen, N^n pofitief zal zijn, zal men $+N$ of $-N$ zoo groot nemen kunnen, dat het voorfte lid der vergelijking pofitief wordt: wanneer nu U negatief is; dán zal de waarde van het voorfte lid, door $x=+N$, $x=0$, en $x=-N$ te ftellen, beurtelings *pofitief*, *negatief*, en *pofitief* worden: de vergelijking zal dan noodzakelijk éénen pofitieven wortel tusfchen $+N$ en 0, en éénen negatieven tusfchen 0 en $-N$ hebben: maar is U pofitief; dan zal men daaruit, met zekerheid, niets tot het beftaan van beftaanbare wortels befluiten kunnen (57).

Merkwaardige Regel van DESCARTES *voor het verkennen der pofitieve en negatieve wortels.*

§. 275. * Wanneer de termen eener hooge magts-vergelijking naar de afdalende magten der onbekende grootheid welgeordend zijn, zegt men: dat twee op elkander volgende termen eene *afwisfeling van teekens* hebben, indien zij met $+$ en $-$ of met $-$ en $+$ zijn aangedaan; en eene *permanentie* of *beftendigheid van teekens*, wanneer zij beide met hetzelfde teeken $+ +$ of $- -$ zijn aangedaan.

§. 276. †† STELLING. „ *Wanneer alle de wortels eener* „ *vergelijking beftaanbaar zijn; dan heeft zij even zoo vele* „ *pofitieve en even zoo vele negatieve wortels, als 'er afwisfeling en permanentien van teekens, in de opvolging van derzelver welgeordende termen, voorkomen.*"

§. 277. OPHELDERING. Deze is de vermaarde leerftelling van DESCARTES, welke fommigen, ten onregte, aan HARRIOT hebben toegeëigend (58). Wij zullen, daar het van veel belang is, den zin van dien

(57) Vergelijk deze grondftelling met het bewezene in §. 110. en de tafel van §. 116.

(58) WOLF, in zijne *Elem. Anal. Finit.* §. 330, SAUNDERSON, in zijne *Algebra*, §. 434. en anderen, waarfchijnlijk, door de gefchiedkundige verhandeling der Algebra van WALLIS, een werk, dat alleen fchijnt gefchreven te zijn, om den roem van HARRIOT, ten koste van dien van VIETA en DESCARTES, te verheffen, misleid, fchrijven de uitvinding van dien regel aan HARRIOT toe: doch, daar 'er in HARRIOT's fchriften niets van denzel-

dien regel behoorlijk te verstaan, denzelven door een paar voorbeelden ophelderen. Nemen wij, tot dat einde, de vergelijkingen:

$$x^3 - 5x^2 - 29x + 105 = 0$$

$$x^4 + 2x^3 - 47x^2 - 47x + 252 = 0$$

De eerste heeft éénen negatieven en twee positieve wortels; de tweede twee positieve en twee negatieve. Nu brengen (dit is de zin van den regel,) die wortels *noodzakelijk* mede: dat 'er, in de eerste vergelijking, twee afwisselingen van teekens, te weten (+ —) en (— +), en éne permanentie of blijving (— —) moeten plaats hebben; en dat 'er insgelijks, in de tweede vergelijking, twee afwisselingen (+ —) en (— +), benevens twee permanentien, (+ +) en (— —), zullen *moeten* voorkomen. †† *Maar, men mag de stelling niet omkeeren, en, uit het aantal afwisselingen en permanentien, welke men in eenige vergelijking bemerkt, tot het aantal van derzelver positieve en negatieve wortels besluiten;* want men zou, door zulk een onbedachtzaam besluit, zich zeer vergissen, gelijk blijken zal, wanneer men de vergelijking $x^4 - x^3 - 5x^2 + 12x - 6 = 0$, welke twee

zelven gevonden wordt, en een hedendaagsch Engelsch Wiskundige, HORSLEY, onpartijdiger dan WALLIS, in zijne aanmerkingen op NEWTONI *Arithm. Univ. pag.* 166, te regt zegt: *Hariotus de numero radicum nil plane sani habet. Vir magnæ quidem diligentiæ sed mediocris ingenii ea fere in Algebraicis intellexit, quæ à Cardano et Vieta acceperat*, heeft men, om deze en meer andere gewigtige oordeelkundige redenen, DESCARTES in zijn regt van eigendom hersteld. Men is dus aan dien grooten man de ontdekking eener waarheid verschuldigd, die, hoezeer zij lang onvruchtbaar bleef, in de handen van BUDAN, gelijk wij straks zien zullen, een vruchtbaar hulpmiddel tot de oplossing der vergelijkingen geworden is. DESCARTES geeft dezen regel in zijne *Geométrie*, (*pag.* 108. *Ed. de Paris* 1705.) zonder bewijs. Het heeft niet ontbroken aan bedenkingen, die men tegen dezelve geopperd heeft: dan, deze zijn, door de bewijzen, welke DE GUA, in de *Mém. de l'Acad. des Sciences de Paris* 1741, SEGNER, in de *Mém de l'Acad. des Sciences de Berlin* 1756, (welk bewijs LACROIX in zijne *Traité du Calcul Différentiel Tom.* I. *pag.* 311, overgenomen heeft,) en die van anderen, weggenomen, en men kan DESCARTES regel thans onder de zekerste van alle waarheden stellen. Die beroemde man heeft, op de aangehaalde plaats, zijne stelling aldus opgegeven: „ *On connoit de* „ *ceci combien il peut y avoir de racines vrayes* (positives) *et combien* „ *de fausses* (négatives) *en chaque Equation, à sçavoir, il en peut avoir* „ *autant de vrayes que les signes* + *et* — *s'y trouvent de fois changés, et autant de fausses qu'il s'y trouve de fois deux signes* +, *ou* „ *deux signes* — *qui s'entresuivent, etc.*"

Het zij men, in dit geval, N positief of negatief neme, zal men N, als getal, in het afgetrokkene, zoo groot nemen kunnen, dat N^n grooter dan de som van alle de volgende termen wordt, en, daar, in beide gevallen, N^n positief zal zijn, zal men $+N$ of $-N$ zoo groot nemen kunnen, dat het voorste lid der vergelijking positief wordt: wanneer nu U negatief is; dán zal de waarde van het voorste lid, door $x=+N$, $x=0$, en $x=-N$ te stellen, beurtelings *positief*, *negatief*, en *positief* worden: de vergelijking zal dan noodzakelijk éénen positieven wortel tusschen $+N$ en 0, en éénen negatieven tusschen 0 en $-N$ hebben: maar is U positief; dan zal men daaruit, met zekerheid, niets tot het bestaan van bestaanbare wortels besluiten kunnen (57).

Merkwaardige Regel van DESCARTES *voor het verkennen der positieve en negatieve wortels.*

§. 275. * Wanneer de termen eener hooge magts-vergelijking naar de afdalende magten der onbekende grootheid welgeordend zijn, zegt men: dat twee op elkander volgende termen eene *afwisseling van teekens* hebben, indien zij met + en — of met — en + zijn aangedaan; en eene *permanentie* of *bestendigheid van teekens*, wanneer zij beide met hetzelfde teeken + + of — — zijn aangedaan.

§. 276. †† STELLING. „ *Wanneer alle de wortels eener* „ *vergelijking bestaanbaar zijn; dan heeft zij even zoo vele* „ *positieve en even zoo vele negatieve wortels, als 'er afwisseling en permanentien van teekens, in de opvolging van der-* „ *zelver welgeordende termen, voorkomen.*"

§. 277. OPHELDERING. Deze is de vermaarde leerstelling van DESCARTES, welke sommigen, ten onregte, aan HARRIOT hebben toegeëigend (58). Wij zullen, daar het van veel belang is, den zin van dien

(57) Vergelijk deze grondstelling met het bewezene in §. 110. en de tafel van §. 116.

(58) WOLF, in zijne *Elem. Anal. Finit.* §. 330, SAUNDERSON, in zijne *Algebra*, §. 434. en anderen, waarschijnlijk, door de geschiedkundige verhandeling der Algebra van WALLIS, een werk, dat alleen schijnt geschreven te zijn, om den roem van HARRIOT, ten koste van dien van VIETA en DESCARTES, te verheffen, misleid, schrijven de uitvinding van dien regel aan HARRIOT toe: doch, daar 'er in HARRIOT's schriften niets van denzel-

dien regel behoorlijk te verstaan, denzelven door een paar voorbeelden ophelderen. Nemen wij, tot dat einde, de vergelijkingen:

$$x^3 - 5x^2 - 29x + 105 = 0$$
$$x^4 + 2x^3 - 47x^2 - 47x + 252 = 0$$

De eerste heeft éénen negatieven en twee positieve wortels; de tweede twee positieve en twee negatieve. Nu brengen (dit is de zin van den regel,) die wortels *noodzakelijk* mede: dat 'er, in de eerste vergelijking, twee afwisselingen van teekens, te weten (+ —) en (— +), en éene permanentie of blijving (— —) moeten plaats hebben; en dat 'er insgelijks, in de tweede vergelijking, twee afwisselingen (+ —) en (— +), benevens twee permanentien, (+ +) en (— —), zullen *moeten* voorkomen. †† *Maar, men mag de stelling niet omkeeren, en, uit het aantal afwisselingen en permanentien, welke men in eenige vergelijking bemerkt, tot het aantal van derzelver positieve en negatieve wortels besluiten*; want men zou, door zulk een onbedachtzaam besluit, zich zeer vergissen, gelijk blijken zal, wanneer men de vergelijking $x^4 - x^3 - 5x^2 + 12x - 6 = 0$, welke twee

zelven gevonden wordt, en een hedendaagsch Engelsch Wiskundige, Horsley, onpartijdiger dan Wallis, in zijne aanmerkingen op Newtoni *Arithm. Univ. pag.* 166, te regt zegt: *Hariotus de numero radicum nil plane sani habet. Vir magnæ quidem diligentiæ sed mediocris ingenii ea fere in Algebraicis intellexit, quæ à Cardano et Vieta acceperat*, heeft men, om deze en meer andere gewigtige oordeelkundige redenen, Descartes in zijn regt van eigendom hersteld. Men is dus aan dien grooten man de ontdekking eener waarheid verschuldigd, die, hoezeer zij lang onvruchtbaar bleef, in de handen van Budan, gelijk wij straks zien zullen, een vruchtbaar hulpmiddel tot de oplossing der vergelijkingen geworden is. Descartes geeft dezen regel in zijne *Geométrie*, (*pag.* 108. *Ed. de Paris* 1705.) zonder bewijs. Het heeft niet ontbroken aan bedenkingen, die men tegen dezelve geopperd heeft: dan, deze zijn, door de bewijzen, welke de Gua, in de *Mém. de l'Acad. des Sciences de Paris* 1741, Segner, in de *Mém de l'Acad. des Sciences de Berlin* 1756, (welk bewijs Lacroix in zijne *Traité du Calcul Différentiel Tom.* I. *pag.* 311, overgenomen heeft,) en die van anderen, weggenomen, en men kan Descartes regel thans onder de zekerste van alle waarheden stellen. Die beroemde man heeft, op de aangehaalde plaats, zijne stelling aldus opgegeven: „ *On connoit de* „ *ceci combien il peut y avoir de racines vrayes* (positives) *et combien* „ *de fausses* (négatives) *en chaque Equation, à sçavoir, il en peut avoir* „ *autant de vrayes que les signes* + *et* — *s'y trouvent de fois changés, et autant de fausses qu'il s'y trouve de fois deux signes* +, *ou* „ *deux signes* — *qui s'entresuivent, etc.*"

twee onbeſtaanbare wortels, $1\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}$ en $1\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3}$, zie §. 196, heeft, aandachtig overweegt; want, niet tegenſtaande 'er, in derzelver termen, drie afwisſelingen en ééne permanentie voorkomen, heeft zij ſlechts éénen poſitieven en éénen negatieven wortel, en geen drie poſitieve wortels met éénen negatieven, zoo als uit de teekens, indien alle de wortels beſtaanbaar waren, volgen zou. Men kan alleen zeggen: †† *Eene vergelijking kan geen* meer: *maar* wel minder *poſitieve en negatieve wortels hebben, dan 'er afwisſelingen en permanentien van teekens in derzelver termen voorkomen.* Wij zullen het bewijs van deze ſtelling, (waarvan men zich intusſchen door inductie kan overtuigen,) omdat deszelfs uitgeſtrektheid ons thans te ver zou afleiden, in de bijvoegſels opgeven.

§. 278. †† Wanneer de wortels eener vergelijking alle beſtaanbaar zijn, en men die vergelijking met $x+1=0$ vermenigvuldigt; dan zal het product eene vergelijking zijn, welker exponent één hooger is, en die ook eenen negatieven wortel meer dan de gegevene zal hebben: in dit product zal bijgevolg éénе permanentie meer dan in de gegevene moeten voorkomen: *heeft zulk geen plaats; dan zijn ook alle de wortels der geſtelde vergelijking niet beſtaanbaar.* De teekens van de termen der vergelijking $x^4-8x^3+7x^2-10x-50=0$ toonen aan: dat 'er drie poſitieve wortels en één negatieve beſtaan kunnen: maar, indien men deze vergelijking met $x+1=0$ vermenigvuldigt; dan zal het product $x^5-7x^4-x^3-3x^2-60x-50=0$, in die onderſtelling, drie poſitieve en twee negatieve wortels moeten hebben: maar, daar 'er nu in dit laatſte product niet meer dan éénen poſitieven wortel beſtaan kan; mag men beſluiten: dat de gegevene vergelijking twee onbeſtaanbare, met (zie §. 274.) éénen poſitieven en éénen negatieven wortel heeft. Dan, men zal, op deze wijze, het beſtaan der onbeſtaanbare wortels niet altijd kunnen verkennen.

§. 279. Maar, hoe zal de regel van DESCARTES moeten verſtaan worden, indien de vergelijking onvolkomen is, en één of meer van derzelver termen ontbreken? In dit geval, kan de vergelijking (gelijk in §. 158 en §. 255.) volkomen gemaakt worden, wanneer men voor de coëfficienten der ontbrekende termen nul aanneemt: maar nul, geene waarde hebbende, kan aangemerkt worden, als met de teekens + of − te zijn aangedaan, en men kan, in plaats van $x^3+px+q=0$, bij voorbeeld, ſchrijven: $x^3\pm 0x^2+px+q=0$; en in plaats van $x^3-p=0$, wederom $x^3\pm 0x^2\pm 0x-p=0$, enz.

§. 280. †† Maar, dit dubbelde teeken van de nul, in eenen ontbrekenden term, verklikt, in sommige gevallen, dat eene vergelijking onbestaanbare wortels heeft; bij voorbeeld, in $x^3 \pm 0x^2 + px + q = 0$: want, het spreekt van zelfs: †† *dat, wanneer alle de wortels van zulk eene vergelijking bestaanbaar zijn: de teekens altijd dezelfde uitkomst zullen moeten geven, het zij men zich van het bovenste of benedenste teeken bediene.* In ons voorbeeld, geeft het bovenste teeken drie negatieve, het benedenste twee positieve en éénen negatieven wortel: dit tegenstrijdige bewijst nu klaarblijkelijk het onbestaanbare van twee wortels, en, wanneer men deze gevolgtrekking met het bewezene in §. 273. vergelijkt, dan volgt hieruit: dat de vergelijking $x^3 + px + q = 0$ slechts éénen negatieven bestaanbaren wortel heeft. Men zal, op dezelfde gronden, mogen besluiten: dat de vergelijking $x^3 + px - q = 0$ slechts éénen bestaanbaren positieven wortel hebben kan. In de vergelijking $x^3 - px - q = 0$, waarvoor men schrijven kan: $x^3 \pm 0x^2 - px - q = 0$, wordt geene tegenstrijdigheid tusschen de opvolging der teekens, het zij men zich van het bovenste, of het benedenste teeken, bedient, gevonden: alle hare wortels kunnen dus bestaanbaar zijn: echter mag men, uit deze overéénstemming der teekens, wederom niet tot de bestaanbaarheid van alle hare wortels besluiten. Men kan hier bijvoegen: †† *Dat, wanneer 'er in eene vergelijking een term ontbreekt, en de termen, welken dien ontbrekenden onmiddelijk voorgaan en volgen, met hetzelfde teeken zijn aangedaan, deze vergelijking ten minste twee onbestaanbare wortels moet hebben.*

Gebruik van Descartes *Regel in de Leerwijze van* Budan.

§. 281. De regel van Descartes is, in de Leerwijze van Budan, van eene zeer uitgestrekte toepassing. Bepalen wij, om deze toepassing zigtbaar te maken, onzen aandacht bij de afgeleide vergelijkingen, in $(x - 1)$, $(x - 2)$, $(x - 3)$, enz., welke op de tegenzijde van tabelle N° III. voorkomen. Men zal bemerken: dat de vergelijkingen, in $(x - 1)$, $(x - 2)$ hetzelfde aantal van afwisselingen en permanentien, als de vergelijking, in (x), hebben: maar, daar de vergelijking, welke op die tafel geanalyseerd is, éénen wortel tusschen 2 en 3 heeft, zal de vergelijking, in $(x - 3)$, éénen positieven wortel minder, en éénen negatieven wortel meer dan de vergelijking,

king, in $(x-2)$ moeten hebben; nu heeft 'er ook, in $(x-3)$, ééne afwisfeling minder en ééne permanentie meer, dan in $(x-2)$, plaats. De vergelijkingen, in $(x-4)$, $(x-5)$, blijven hetzelfde getal permanentien en afwisfelingen behouden als de vergelijking, in $(x-3)$: maar, daar de gegevene nog éénen wortel tusfchen 5 en 6 heeft, zal de vergelijking, in $(x-6)$, ééne afwisfeling minder en ééne permanentie meer, dan die in $(x-5)$, moeten hebben, zoo als ook dadelijk bevonden wordt. Men zal dan, met BUDAN, kunnen ftellen.

§. 282. †† „ *Eene vergelijking, in* (x), *welker wortels,* „ *alle zonder uitzondering, beftaanbaar zijn, zal even zoo* „ *vele wortels, tusfchen nul en* p, *hebben, als 'er permanen-* „ *tien van teekens in de vergelijking, in* $(x-p)$, *meer dan* „ *in de gegevene vergelijking, in* (x), *voorkomen.*"

§. 283. †† Doch, men mag deze ftelling niet omkeeren, en zeggen: *dat eene vergelijking, in* (x), *even zoo vele wortels tusfchen nul en* p *zal hebben, als 'er permanentien van teekens meer in* $(x-p)$, *dan in* (x) *voorkomen:* want het ongerijmde daarvan kan, door vele voorbeelden, bevestigd worden: men kan alleen vastftellen: †† „ *Dat eene vergelijking zoo* „ *vele wortels, tusfchen nul en* p, kan *hebben, als 'er permanen-* „ *tien van teekens in* $(x-p)$ *meer, dan in* (x), *voorkomen.*"

§. 284. Dit alles is een onmiddelijk gevolg van den regel van DESCARTES, gelijk ook uit denzelven volgt: †† „ *Dat* „ *eene vergelijking geen één, twee of* n *wortels, tusfchen nul* „ *en* p, *zal kunnen hebben, indien de vergelijking, in* $(x-p)$, „ *niet respectievelijk één, twee of* n *permanentien van teekens* „ *meer dan de vergelijking in* (x) *heeft.*"

§. 285. †† *Wanneer eenige vergelijking, in* (x), *geene pofitieve wortels tusfchen nul en één heeft; dan zal de vergelijking tot derzelver omgekeerde wortels,* (zie hoe deze wordt opgemaakt §. 257.) *ook geene pofitieve wortels kunnen hebben, welke grooter dan één zijn.*

Want nemen wij de letters p, q, r, s, *enz.* voor de pofitieve wortels eener vergelijking, in (x), en ftellen wij: dat zij alle grooter dan één zijn; dan zullen de wortels der vergelijking, in $(1:x)$, zijn:

$\frac{1}{p}$,

$$\frac{1}{p},\ \frac{1}{q},\ \frac{1}{r},\ \frac{1}{s},\ \textit{enz.}$$

en gevolgelijk alle minder dan de éénheid; waaruit volgt: dat de wortels der vergelijking, in (y), of ($1:x$), tusschen nul en één zullen vallen, en dat onder dezelve geen zal gevonden worden, die grooter dan de éénheid is.

Over de Verkennings-Vergelijkingen en derzelver gebruik.

§. 286. †† *Indien men dan uit eene vergelijking, in* (x), *de vergelijking tot de omgekeerde wortels, in* ($1:x$), *opmaakt, en, uit deze laatste, eene vergelijking, in* ($1:x-1$), *welker wortels met één verminderd zijn; dan zal, indien de teekens der coefficienten van de termen dezer laatste vergelijking alle positief zijn, daaruit noodzakelijk volgen: dat de gestelde vergelijking, in* (x), *geene positieve wortels, tusschen één en nul, zal hebben.*

Zij, om zulks optehelderen, gegeven de vergelijking:

$$x^3-5x^2-29x+105=0$$

welker wortels $+3$, $+7$ en -5 zijn; dan zal, zie §. 257, de vergelijking, in $1:x$, of y zijn:

x	$1 -$	$5 -$	$29 +$	105
$1:x$, of y;	$105 -$	$29 -$	$5 +$	1
	$+105 +$	$76 +$	$71 +$	72
		$+105 +$	$181 +$	252
			$+105 +$	286
				$+105$

$$y^3-\frac{29}{105}y^2-\frac{5}{105}y+\frac{1}{105}=0$$

of, met 105 vermenigvuldigende

$$105\,y^3-29\,y^2-5\,y+1=0$$

Men heeft derhalve, voor de coefficienten der vergelijking

in (y) . . . . $105-29-5+1$

waaruit men, zie bovenstaande afleiding, voor de coefficienten der vergelijking, welker wortels één minder zijn

in ($y-1$) . . . . $105+286+252+72$

vindt: daar nu de teekens van de termen dezer vergelijking alle positief zijn, zal men daaruit mogen besluiten: dat de gegevene vergelijking, $x^3-5\,x^2-29\,x+105=0$, geenen wortel tusschen nul en één heeft.

§. 287. Wanneer men, volgens §. 230 en 235, uit eene gegevene vergelijking, de vergelijkingen, in ($x-1$), ($x-2$), enz.

enz. heeft afgeleid, zal men, uit dezen, de vergelijkingen tot de omgekeerde wortels, in $(1:x)$, $(1:(x-1))$, $(1:(x-2))$, enz. en, in het algemeen, de vergelijking, in $(1:(x-p))$, kunnen afleiden: * die wij in het vervolg de vergelijkingen in y, y_1, y_2, y_3, *enz* y_p, zullen noemen; uit deze laatste wederom de vergelijkingen, in $(y-1)$, (y_1-1), (y_2-1), enz. en algemeen, in (y_p-1). * BUDAN noemt deze vergelijkingen *collaterale vergelijkingen*. * Wij zullen dezelve, daar zij het afwezen van wortels, tusschen nul en één, kenbaar maken, *verkennings-vergelijkingen* noemen.

§. 288. †† Elk ééne der afgeleide vergelijkingen heeft hare eigene verkennings-vergelijking, welke, gelijk wij zoo even zagen, naar aanleiding van §. 257. aldus gevormd wordt: „ *Men schrijve de coefficienten van de vergelijking, welker* „ *verkennings-vergelijking men opmaken wil, in eene omge-* „ *keerde orde, na dat men, indien de achterste term negatief* „ *is, alle de teekens der coefficienten heeft omgekeerd: men* „ *heeft alsdan de vergelijking tot de omgekeerde wortels, uit* „ *welke men, naar den regel van* §. 230. *de verkennings-ver-* „ *gelijking opmaakt.*

§. 289. Laat, gegeven zijn de vergelijking: $12x^3 - 120x^2 + 326x - 127 = 0$; dan zal men, door dezen regel, vinden:

Afgeleide vergelijkingen.		*Verkennings-vergelijkingen.*	
in x	$12 - 120 + 326 - 127$ ...	$(y-1)$	$127 + 55 - 151 - 91$
$x-1$ ...	$12 - 84 + 122 + 91$ ...	(y_1-1) ..	$91 + 395 + 433 + 141$
$x-2$ ...	$12 - 48 - 10 + 141$ ...	(y_2-1) ..	$141 + 413 + 355 + 95$
$x-3$ ...	$12 - 12 - 70 + 95$ ...	(y_3-1) ..	$95 + 215 + 133 + 25$
$x-4$ ...	$12 + 24 - 58 + 25$ ...	(y_4-1) ..	$25 + 17 - 17 + 3$
$x-5$ ...	$12 + 60 + 26 + 3$ ...	(y_5-1) ..	$3 + 35 + 121 + 101$

Uit dit tafeltje, in hetwelk de verkennings-vergelijkingen, nevens de afgeleide, tot welke zij behooren, geplaatst zijn, blijkt het: dat de vergelijkingen, in $(x-1)$, $(x-2)$, $(x-3)$, geene wortels tusschen nul en één hebben kunnen, en dat gevolgelijk de gestelde vergelijking ook geenen wortel tusschen één en drie hebben kan.

§. 290. ††. *Men mag evenwel wederom deze stelling niet omkeeren, en, uit de afwisseling van de teekens der verkennings-*

nings-

nings-vergelijking, tot het bestaan van wortels tusschen nul en één besluiten; omdat 'er in dezelve eene afwisseling van teekens, zonder het bestaan van positieve wortels, kan plaats hebben.

§. 291. Het is van belang, dat wij aantoonen: hoe zulks kan plaats hebben. Indien de vergelijking, in $x-p$, geenen wortel tusschen nul en één heeft; dan zal de vergelijking, in y_p geenen wortel hebben, die grooter dan één is, en de vergelijking, in $(y_p - 1)$, bijgevolg geene dan negatieve wortels; alle de factoren van het eerste lid dezer vergelijking zullen derhalve van den vorm $y_p - 1 + A$ zijn; wanneer nu deze tweeledige factoren met geene andere drieledige, die onbestaanbare wortels geven kunnen, dan die den vorm

$$(y_p - 1)^2 + P(y_p - 1) + Q$$

hebben, in de zamenstelling verbonden zijn, [de getallen A, P en Q, positief, A grooter dan één en $\frac{1}{4} P^2 < Q$ zijnde,] dan zal 'er klaarblijkelijk, in de verkennings-vergelijking, geene verwisseling van teekens kunnen plaats hebben. Nu geeft de factor $(y_p - 1)^2 + P(y_p - 1) + Q$, indien zij gelijk nul gesteld wordt, onbestaanbare wortels, die van den vorm

$$y_p - 1 = -\tfrac{1}{2} P \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4} P^2 - Q)}$$

zijn; waaruit dan volgt: †† *dat, wanneer het bestaanbaar gedeelte van de onbestaanbare wortels der vergelijking in* $y_p - 1$ *negatief is, deze wortels geene afwisseling van teekens kunnen te weeg brengen.*

§. 292. †† *Het zijn alleen de onbestaanbare wortels van den vorm* $+a \pm \sqrt{-b}$; *welke aanleiding tot de afwisseling van teekens geven, en ons, wegens het bestaan der positieve wortelen, waarvan dezelfde afwisseling een gevolg is, in het onzekere kunnen laten.* De onbestaanbare wortels van die soort volgen uit drieledige of tweede magts-factoren van den vorm

$$(y_p - 1)^2 - P(y_p - 1) + Q = 0$$

onder beding, dat $Q > \frac{1}{4} P^2$ zij. Deze allen kunnen, met de factoren van den vorm $y_p - 1 + A$ verbonden, onder zekere bepalingen, die nader verdienden onderzogt te worden, eene afwisseling van teekens te weeg brengen. Stellen wij nu: dat de vergelijking, in $x-p$, een of meer twee-tallen van onbestaanbare wortels van den vorm $+a \pm \sqrt{-b}$ hebbe; dan zal men kunnen stellen:

$$x - p = +a \pm \sqrt{-b};\ y_p = \frac{1}{a \pm \sqrt{-b}} = \frac{a \mp \sqrt{-b}}{a^2 + b}$$

en

$$\text{en } y_p - 1 = \frac{a}{a^2 + b} - 1 \mp \frac{\sqrt{-b}}{a^2 + b}$$

en deze waarde van $y_p - 1$ bevat den vorm van de onbestaanbare wortels der verkennings-vergelijking, welke met die der vergelijking, waaruit zij volgt, in het teeken van het bestaanbare deel overeëenstemt. Het bestaanbare deel van dien onbestaanbaren wortel kan niet positief zijn, indien niet $a^2 + b$ kleiner dan a is, en deze voorwaarde kan wederom niet vervuld worden, indien a en b beide geene breuken zijn, en b kleiner dan $a - a^2$, of b kleiner dan $a \times (1 - a)$ zij; waaruit volgt: dat b minder dan $\frac{1}{4}$ of 0, 25 moet zijn; omdat, gelijk bekend is, het grootste product van ééne breuk, met zijn complement tot de éénheid, *één-vierde* is.

§. 293. Het zijn dan alleen de onbestaanbare wortels der verkennings-vergelijking, welker bestaanbaar deel positief, en te gelijk minder dan één is, en waarin het negatieve gebroken, onder het wortel-teeken, minder dan *één-vierde* is, die eene twijfeling, door de afwisseling van derzelver teekens, tusschen de positieve en onbestaanbare wortels kan te weeg brengen: dan, deze twijfeling houdt op plaats te hebben, wanneer men de afleidingen verder voortzet; want men zal alsdan de wezenlijke wortels, die tusschen p en $p + 1$ vallen kunnen; ontdekken, of, de verkennings-vergelijkingen zullen ten laatste het afwezen van positieve wortels tusschen p en $p + 1$ bewijzen; in welk geval de afwisseling der teekens aan onbestaanbare wortels van den vorm $+ a \pm \sqrt{-b}$ moet toegeschreven worden.

§. 294. Men is alle deze leerstukken (van §. 281. tot §. 299. ingesloten) aan den Heer BUDAN verschuldigd: zij bevatten alle de gronden, waarop men, zelfs ook in de neteligste gevallen, alle de bestaanbare wortels opspeuren, derzelver grenzen met zekerheid daarstellen, en tevens het aantal der onbestaanbare wortels, door hulp van diezelfde leerstukken, met juistheid bepalen kan; en zulks was het voornaamste en gewigtigste gedeelte van de oplossing der vergelijkingen, aan hetwelk, door den grooten LAGRANGE, wel in zoo verre voldaan was, als hij, door de vergelijking van de verschillen der wortels te zoeken, eenen weg ter oplossing baande, de, welke echter voor hoogere vergelijkingen onbruikbaar wordt.

§. 295. Wij onderscheiden, na alle deze dingen voorgedragen te hebben, en thans tot den zamenhangenden voordragt van de oplossing der vergelijkingen, in het algemeen, zullende overgaan, duidelijkshalve twee zaken: 1° *De beoordeeling van de wortels eener gegevene vergelijking, welke strekken moet, om derzelver juiste grenzen, benevens het aantal, zoo van de bestaanbare, als van de onbestaanbare, optemaken.* 2° *De benadering van elk dezer wortels zelve.* Wij gaan over, om elk dezer twee stukken, in het bijzonder, te behandelen, en, door genoegzame voorbeelden, zooveel ons mogelijk zal zijn, in het helderst licht te stellen.

Over het beoordeelen van de wortels eener Vergelijking.

§. 296. Algemeen voorschrift. 1° „ *Men zie, hoe* „ *vele verwisselingen van teekens in de gegevene vergelijking* „ *voorkomen: men zal even zoo vele, geen meer, maar wel* „ *minder, positieve wortels kunnen verwachten.*"

2° „ *Indien de coefficienten der gegevene vergelijking zeer* „ *groot zijn, dan zal men ook groote wortels kunnen verwachten.* (59) *In dit geval, zal men de vergelijking, in* $(x:10^n)$, „ *volgens den regel van* §. 249, *kunnen opmaken, en, uit het* „ *teeken van den laatsten term dezer vergelijking, verkennen,* „ *tusschen welke twee op elkander volgende termen van de* „ *schaal van het talstelsel de grootste wortel gelegen is. Men* „ *zal, op gelijke wijze, ook de kleinere positieve wortels trachten te ontdekken.*"

3° „ *Men zal, door de herhaling van denzelfden regel, en* „ *gebruik makende van alles, wat in* §. 252, 253, *enz. ge-* „ *leerd*

(59) Men zal, in de uitvoering van dit gedeelte des onderzoeks, met vrucht van de aanmerking van §. 264, *pag.* 175, gebruik kunnen maken, om met eenen opslag van het oog den grootsten limiet van den grootsten positieven wortel te ontdekken: langs dien weg zal men in vele gevallen vele overtollige beproevingen kunnen uitwinnen.

„ *leerd is, vinden, tusſchen welke duizendtallen, honderdtal-*
„ *len, tientallen en éénheden, de wortels der gegevene ver-*
„ *gelijking begrepen zijn; indien namelijk de naast aan el-*
„ *kander grenzende wortels meer dan één verſchillen, waar-*
„ *bij men moet aanmerken:*

a. „ *Dat, wanneer de vergelijking eenen geheelen en meetbaren* „ *wortel heeft, die, bij voorbeeld, gelijk p is, de achterſte term van* „ *de afgeleide, in* $(x - p)$, *gelijk nul zal worden.*" Zie §. 238.

b. „ *Dat, wanneer de gegevene vergelijking eenige gelijke wortels* „ $x = p$, $x = p$, *enz. heeft, zulks kenbaar zal worden, door de* „ *afgeleide, in* $(x - p)$, *in welke, van achteren afterekenen, zoo* „ *vele coefficienten, (de achterſte term daar onder begrepen,) ge-* „ *lijk nul zullen worden, als 'er gelijke wortels,* $x = p$, *in deze* „ *vergelijking voorkomen* (60)." Zie §. 239.

De gelegde gronden bevatten, ter bekorting van dit werk, vele kunstgrepen, welker bijzondere beſchrijving te wijdloopig, voor den ſchranderen overtollig, en voor den geenen, die dezelve niet uit zich zelven bemerkt, vruchteloos zou zijn.

4° „ *Daarna keere men de teekens van de evene termen der* „ *vergelijking om, ten einde de poſitieve en negatieve wortels* „ *zie §. 240., reſpectievelijk negatief en poſitief te maken, en* „ *men behandele de komende vergelijking, even als boven, ten* „ *einde de negatieve wortels der gegevene te ontdekken.*"

Men moet in acht nemen: dat, wanneer 'er, in de gegevene vergelijking, geene afwisſeling in de teekens van derzelver termen plaats grijpt, zij ook geene poſitieve wortels hebben zal, en geene negatieve, wanneer 'er geene permanentien van teekens in dezelve voorkomen; wel verſtaande, indien alle de termen der vergelijking naar behooren voltallig zijn. Zie §. 277.

5° „ *Wan-*

(60) Door deze twee voordeelen, welke aan de handelwijze van BUDAN bijzonder eigen zijn, kan men, ten minſte, wat de vergelijkingen in getallen aangaat, den regel van §. 152, en de II. Aanmerking §. 160, op dien regel geheel misſen. Deze gunſtige omſtandigheid, waarin zich de Leerwijze van BUDAN opdoet, ſtrekt behalve die, welke wij in de noot (53), *pag.* 171, aangewezen hebben, tot een nieuw bewijs van derzelver volſtrekte algemeenheid; daar zij, behalve de limieten der onmeetbare wortels, ook tevens de meetbare, en de gelijke, van zelve ontdekt, gelijk zulks door de 3. en 19. voorbeelden hieronder, nader zal bevestigd worden.

5° „ *Wanneer men nu, door de verwisſeling der teekens „ van de achterſte termen der afgeleide vergelijkingen, de „ grenzen van zoo vele wortels ontdekt heeft, als de vergelij- „ king bij mogelijkheid hebben kan; dan is hiermede het ge- „ heele werk der beoordeeling afgeloopen, en 'er blijft dan „ niets meer over, dan dat men, het zij door het reeds aan- „ gewezene, in* §. 252, *het zij, langs eenen anderen weg, de „ waarde dezer wortels verder benadere.*"

6° „ *Maar zijn 'er minder wortels ontdekt, dan 'er in de „ vergelijking beſtaan kunnen; dan zullen de nog verborgene „ wortels, in ſommige gevallen, onbeſtaanbaar kunnen zijn; of „ 'er zullen, in andere gevallen, een oneven aantal wortels, tus- „ ſchen* p *en* $p+1$, [*indien namelijk de achterſte termen van „ de vergelijkingen, in* $(x-p)$ *en* $(x-p-1)$, *in teekens „ afwisſelen,*] *vallen kunnen; of, zoo eindelijk deze teekens „ dezelfde zijn, zal 'er, tusſchen* p *en* $p+1$, *een even aantal „ wortels beſtaan kunnen. Deze gevallen moeten nu nog na- „ der onderſcheiden worden.*"

7° „ *Tot dit nader onderzoek zal men, in het tweede ge- „ val, de vergelijkingen, in* $(10x-10p)$, $(10x-10p-1)$, „ *enz. naar* §. 252 *en* 230, *afleiden: men zal dan, tot min- „ der dan één-tiende deel van het geheel, tot den wortel, die „ reeds ontdekt was, aannaderen, en de afwisſeling der tee- „ kens van de achterſte termen dezer nieuwe vergelijkingen „ zal leeren, of 'er meer wortels, tusſchen* p *en* $p+1$, *be- „ ſtaan: blijft nu dit laatſte, na deze nieuwe afleidingen, „ nog twijfelachtig, zal zulks op de wijze, waarop men het „ tweede geval behandelen moet, worden uitgemaakt.*"

8° „ *Het vermoeden: dat 'er, tusſchen* p *en* $p+1$, [*indien „ de achterſte termen van* $(x-p)$ *en* $(x-p-1)$ *dezelfde „ teekens hebben,*] *een even aantal wortels beſtaan kan, zal „ dan alleen, met eenigen grond van waarſchijnlijkheid, kun- „ nen plaats hebben, wanneer de achterſte termen (het teeken „ dat zij hebben hier niet in aanmerking nemende,) op zijn „ kleinst vallen; omdat, in dit geval alleen, tusſchen* p *en „* $p+1$, *eenen overgang van* $+$ *tot* $-$ *en van* $-$ *tot* $+$ *„ zal kunnen plaats hebben. Op dit vermoeden nu, make*

„ *men gebruik, het zij van den regel der limieten van* §. 271, „ *het zij van de verkennings-vergelijkingen, die wij in* §. 286. „ *hebben leeren zamenſtellen* (61).”

9° „ *Bewijzen deze: dat 'er geen wortels, tusſchen p en $p+1$,* „ *beſtaan; dan kan men het onderzoek voor afgeloopen hou-* „ *den; doch laten deze proeven nog eenig vermoeden over,* „ *dat 'er wortels tusſchen deze grenzen beſtaan kunnen, dan* „ *zal men de vergelijkingen, in* $(10x-10p)$, $(10x-10p-1)$, „ *enz. afleiden, en deze als boven ten toetze brengen. Men* „ *zal, op denzelfden voet, zoo lang voortgaan, tot dat men, of* „ *de wortels, die 'er beſtaan, ontdekt heeft, of tot zoo lang,* „ *in het tegenovergeſtelde geval, overtuigend is gebleken: dat* „ *'er geene wortels, tusſchen p en $p+1$, beſtaan kunnen. Als* „ *wanneer men voor zeker weten zal: hoe vele beſtaanbare en hoe* „ *vele onbeſtaanbare wortels de gegevene vergelijking hebben* „ *zal? terwijl dan ook tevens de grenzen der beſtaanbare wor-* „ *tels bekend, en duidelijk onderſcheiden zullen zijn.*”

§. 297. Wij gaan thans over, om dezen algemeenen regel van beoordeeling op zoo vele voorbeelden toetepasſen, als noodig zullen zijn, om alle de bijzondere omſtandigheden nader te leeren kennen, en den Lezer, in dit eerſte en gewigtigſte ſtuk van de oplosſing der vergelijkingen, in allen opzigte, bekwaam te maken.

I. Voorbeeld. *De vergelijking* $x^3 - 11x^2 + 31x - 21 = 0$ *optelosſen?*

in x	1	-11	$+31$	-21
in $(x-1)$ . . .	1	-8	$+12$	$+0$
in $(x-2)$ . . .	1	-5	-1	$+5$
in $(x-3)$ . . .	1	-2	-8	$+0$
in $(x-4)$ . . .	1	$+1$	-9	-9
in $(x-5)$ . . .	1	$+4$	-4	-16
in $(x-6)$ . . .	1	$+7$	$+7$	-15
in $(x-7)$ . . .	1	$+10$	$+24$	$+0$

Daar 'er, in de gegevene vergelijking, geene permanentie van teekens plaats heeft, beſtaan 'er geene ne- ga-

(61) De Heer Budan heeft 'er, in de nooten op zijne *Nouvelle Méthode*, nog een derde bijgevoegd. „ †† *Eene vergelijking*,” zegt hij, „ *heeft geenen wortel, tusſchen nul en één, indien de eerſte ſommen van derzelver coefficienten, van achter naar voren genomen, geene afwisſeling van teekens hebben.*” Alzoo zal de vergelijking $1-4+3-6$ geenen wortel tusſchen nul en één hebben, omdat de eerſte ſommen, op deze wijze genomen, zijn $-6-16-15-6$. Deze regel is een onmiddelijk gevolg van de eigenſchappen der verkennings-vergelijkingen.

gatieve wortels. De achterſte termen der afgeleide vergelijkingen, in $(x-1)$, $(x-3)$ en $(x-7)$, nul zijnde, blijkt hieruit: dat 1, 3 en 7 de wortels der gegevene vergelijking zijn, en dat het voorſte lid der vergelijking, door $(x-1)$, $(x-3)$ en $(x-7)$ deelbaar is.

2. VOORBEELD. *De vergelijking* $x^3 - 331\,x^2 + 2250\,x + 5832 = 0$ *optelosſen?*

Het blijkt, uit het bloote inzien dezer vergelijking: dat 'er één negatieve en twee poſitieve wortels beſtaan kunnen. De afgeleide vergelijkingen, tot $(x-10)$ ingeſloten, doen zien: dat $+9$ een meetbare wortel is, en dat 'er tevens een wortel, aanmerkelijk grooter dan 9, beſtaan moet; hetgeen voornamelijk uit de teekens van de coefficienten der vergelijking, in $(x-10)$, blijkbaar is. Men make dan, volgens §. 249. de vergelijking, in $(x:100)$; en uit deze de vergelijkingen, in $(x:100-1)$, enz. welke kenbaar maken, dat 'er een wortel, tusſchen 300 en 400, beſtaat. Men vermenigvuldige dan, om dien wortel nader te begrenzen, de vergelijking, in $\left(\frac{x}{100} - 3\right)$ met 10, dan verkrijgt men de vergelijking, in $\left(\frac{10\,x}{100} - 30\right)$, waaruit dan wederom de vergelijkingen, in $\left(\frac{10\,x}{100} - 31\right)$ en $\left(\frac{10\,x}{100} - 32\right)$ worden afgeleid: uit welke blijkt: dat de gezogte wortel, tusſchen 320 en 330, valt. Men

in x	$1 - 331 + 2250 + 5832$
in $(x-1)$	$1 - 328 + 1591 + 7752$
	enz. *enz.*
in $(x-8)$	$1 - 307 - 2854 + 3160$
in $(x-9)$	$1 - 304 - 3465 + 0$
in $(x-10)$	$1 - 301 - 4070 - 3768$
Vergelijkingen in	
$\left(\frac{x}{100}\right)$ . . .	$1 - 3{,}31 + 0{,}2250 + 0{,}005832$
$\left(\frac{x}{100} - 1\right)$ . .	$1 - 0{,}31 - 3{,}3950 - 2{,}079168$
$\left(\frac{x}{100} - 2\right)$ . .	$1 + 2{,}69 - 1{,}0150 - 4{,}784168$
$\left(\frac{x}{100} - 3\right)$ . .	$1 + 5{,}69 + 7{,}3650 - 2{,}109168$
. . . .	
$\left(\frac{10x}{100} - 30\right)$	$1 + 56{,}9 + 736{,}50 - 2109{,}168$
$\left(\frac{10x}{100} - 31\right)$	$1 + 59{,}9 + 853{,}30 - 1314{,}768$
$\left(\frac{10x}{100} - 32\right)$	$1 + 62{,}9 + 976{,}10 - 400{,}568$
. . . .	
$(x-320)$	$1 + 629 + 97610 - 400568$
$(x-321)$	$1 + 632 + 98871 - 302328$
$(x-322)$	$1 + 635 + 100138 - 202824$
$(x-323)$	$1 + 638 + 101411 - 102050$
$(x-324)$	$1 + 641 + 102690 + 0$

vermenigvuldige dan, om denzelven nog nader te komen, de wortels der laatste vergelijking, in $\left(\frac{10x}{100} - 32\right)$ met 10; dan verkrijgt men de vergelijking, in $(x - 320)$; uit welke de vergelijkingen, in . . . $(x - 321)$, $(x - 322)$, *enz.* afgeleid worden: waaruit het dan eindelijk blijkt: dat $+ 324$ de tweede positieve wortel der vergelijking is. Om den negatieven wortel te vinden, zal men, volgens het vierde gedeelte van den algemeenen regel, te werk gaan, en voor denzelven $- 2$ vinden.

3. Voorbeeld. *De vergelijking* $x^7 - 31x^6 + 401x^5 - 2791x^4 + 11195x^3 - 25525x^2 + 29875x - 13125 = 0$ *optelossen?*

Men vindt voor de afgeleide vergelijkingen:

in $(x-1)$ . . .	1	-24	$+236$	-1216	$+3456$	-5120	$+3072$	$+0$
in $(x-2)$ . . .	1	-17	$+113$	-361	$+507$	-27	-621	$+405$
in $(x-3)$ . . .	1	-10	$+32$	-16	-112	$+224$	-128	$+0$
in $(x-4)$ . . .	1	-3	-7	$+29$	-21	-17	$+27$	-9
in $(x-5)$ . . .	1	$+4$	-4	-16	$+0$	$+0$	$+0$	$+0$
in $(x-6)$ . . .	1	$+11$	$+41$	$+59$	$+11$	-55	-53	-15
in $(x-7)$ . . .	1	$+18$	$+128$	$+464$	$+912$	$+928$	$+384$	$+0$

Het blijkt hieruit: dat de gegevene vergelijking vier positieve wortels, elk gelijk 5, heeft; benevens nog de positieve wortels: 1, 3 en 7.

4. Voorbeeld. *Gegeven zijnde de vergelijking* $x^3 - 15x^2 + 74x - 117 = 0$, *dezelve optelossen?*

Deze vergelijking, kan, naar den regel van Descartes, geene negatieve wortels hebben. Uit §. 234, *pag.* 162, blijkt het: dat zij eenen wortel, tusschen 3 en 4, heeft. Maar, de vergelijking, in $(x - 5)$, twee afwisselingen in de teekens harer termen hebbende, die in de vergelijking, in $(x - 6)$, niet meer voorkomen, is het vermoedelijk: dat 'er twee wortels, tusschen 5 en 6 vallen: doch dit vermoeden vervalt, wanneer men in aanmerking neemt, dat de kleinste positieve wortel der vergelijking, in $(x - 5)$, grooter dan $\frac{3}{4}$, en die, welke het minst beneden één vallen kan, kleiner dan $\frac{3}{5}$ zijn moet, hetgeen onmogelijk is: 'er bestaan dan geene bestaanbare wortels tusschen 5 en 6, hetwelk boven dien, door de verkennings-vergelijking, in $(y_5 - 1)$, welker coefficienten $3 + 8 + 7 + 3$ zijn, bevestigd wordt. De vergelijking heeft gevolgelijk slechts éénen bestaanbaren wortel, tusschen 3 en 4.

5. Voorbeeld. *De vergelijking* $x^3 - 2x - 5 = 0$ *optelossen?*

Uit de afgeleide vergelijkingen blijkt: dat 'er een wortel tusschen 2 en 3 bestaat; en wel slechts één wortel, omdat 'er, in de vergelijking,

king, in $(x-2)$, maar ééne afwisseling plaats heeft: de verkennings-vergelijkingen, in $(y-1)$ en ... (y_1-1), namelijk:

$$5+17+19+6$$
$$6+17+13+1$$

leeren: dat 'er geen wortels tusschen 0 en 1, en tusschen 1 en 2 bestaan:

in (x)	$1+0-2-5$
in $(x-1)$	$1+3+1-6$
in $(x-2)$	$1+6+10-1$
in $(x-3)$	$1+9+25+16$
en stellende $-x=z$	
in (z)	$1+0-2+5$
in $(z-1)$	$1+3+1+4$

de vergelijkingen, in (z) en $(z-1)$, bewijzen, en de verkennings-vergelijking tot die in (z), namelijk $5+13+11+4$, bevestigt het ook: dat 'er geene negatieve wortels bestaan. Men besluit hieruit: dat de vergelijking slechts éénen positieven wortel heeft.

6. VOORBEELD. *De vergelijking* $x^4-5x^3+5x^2+6x-12=0$ *optelossen?*

De coefficienten der vergelijkingen zijn:

in (x)	$1-5+5+6-12$	in $(y-1)$ ...	$12+42+49+25+5$
in $(x-1)$ ..	$1-1-4+5-5$	in (y_1-1) ..	$5+15+19+14+4$
in $(x-2)$ ..	$1+3-1-2-4$	in (y_2-1) ..	$4+18+31+21+3$
in $(x-3)$ ..	$1+7+14+9-3$	in (y_3-1) ..	$3+3-23-50-28$
in $(x-4)$ ..	$1+11+41+62+28$		

en stellende voor de negatieve wortels $-x=z$

in (z)	$1+5+5-6-12$	$(y-1)$ ..	$12+54+85+51+7$
in $(z-1)$ ..	$1+9+26+23-7$	(y_1-1) ..	$7+5-53-102-52$
in $(z-2)$ ..	$1+13+59+106+52$		

Het blijkt, uit de afgeleide vergelijkingen, en derzelver tegenoverstaande verkennings-vergelijkingen: dat slechts éénen positieven wortel tusschen 3 en 4, en éénen negatieven, tusschen -1 en -2, kan bestaan. Want de vergelijking, in (y_1-1), heeft slechts éénen afwisseling, en kan derhalve slechts eenen positieven wortel hebben, en geen twee, zoo als ten minste zou vereischt worden.

7. VOORBEELD. *De vergelijking* $x^4-12x^3+58x^2-132x+121=0$ *optelossen?*

De coefficienten der vergelijkingen zijn:

		Verkennings-vergelijkingen.	
in (x)	$1-12+58-132+121$		
in $(x-1)$ ..	$1-8+28-48+36$	(y_1-1)	$36+96+100+48+9$
in $(x-2)$ ..	$1-4+10-12+9$	(y_2-1)	$9+24+28+16+4$
in $(x-3)$ ..	$1+0+4+0+4$	(y_3-1)	$4+16+28+24+9$
in $(x-4)$ ..	$1+4+10+12+9$		

De verkennings-vergelijkingen bewijzen de onbestaanbaarheid van positieve wortelen; en vermits de gegevene geene permanentie van teekens heeft, besluit men: dat alle hare wortels onbestaanbaar zijn.

8. VOORBEELD. *Gegeven zijnde de vergelijking* $12x^3 - 120x^2 + 326x - 127 = 0$, *dezelve oplelosfen?*

De coefficienten der vergelijkingen zijn:

in (x) . . . . $12 - 120 + 326 - 127$	*in* $(y-1)$ . . . $127 + 55 - 151 - 91$
in $(x-1)$ . . $12 - 84 + 122 + 91$	*in* (y_1-1) . . $91 + 395 + 433 + 141$
in $(x-2)$ . . $12 - 48 - 10 + 141$	*in* (y_2-1) . . $141 + 413 + 355 + 95$
in $(x-3)$ . . $12 - 12 - 70 + 95$	*in* (y_3-1) . . $95 + 215 + 133 + 25$
in $(x-4)$ . . $12 + 24 - 58 + 25$	*in* (y_4-1) . . $25 + 17 - 17 + 3$
in $(x-5)$ . . $12 + 60 + 26 + 3$	

Het blijkt nu: dat 'er een pofitieve wortel, tusfchen nul en één, beftaat; en, omdat de vergelijking, in $(y-1)$, flechts eene afwisfeling van teekens heeft, dat 'er maar één wortel tusfchen die grenzen beftaan kan. Men ziet: dat voorts de achterfte termen van de volgende vergelijkingen, in $(x-1)$, *enz.*, na eerst tot eene zekere hoogte te zijn aangegroeid, verminderen, en daar de verkennings-vergelijking, in (y_4-1), twee afwisfelingen heeft, is het vermoedelijk, dat de vergelijking, in $(x-4)$, twee wortels tusfchen 0 en 1 kan hebben: men moet dan, om zulks te beflisfen, het onderzoek verder voortzetten. Uit de vergelijking, in $(x-4)$, volgt de vergelijking in:

$$(10x-40) \;.\;.\;.\; 12 + 240 - 5800 + 25000$$

waaruit verder de vergelijkingen in:

$(10x-47)$ . . $12 + 492 - 676 + 276$; *Verkennings-vergelijking van* $(10x-47)$
$(10x-48)$ . . $12 + 528 + 344 + 104$ $\qquad + 276 + 152 - 32 + 104$

volgen. Deze berekening laat nog onzeker: of 'er twee wortels tusfchen 4,7 en 4,8 beftaan; want, de verkennings-vergelijking, welke tot $(10x-47)$ behoort, heeft in hare teekens, nog twee afwisfelingen. Men make derhalve, uit de vergelijking, in $(10x-47)$, de vergelijking, in $(100x-470)$, namelijk:

$$12 + 4920 - 67600 + 276000$$

waaruit men de vergelijkingen

in $(100x-476)$ . . $12 + 5136 - 7264 + 50112$
in $(100x-477)$ . . $12 + 5172 + 3044 + 47996$

afleidt: de verkennings-vergelijking, tot de eerfte van deze twee behoorende, is:

$$50112 + 143072 + 140944 + 47996$$

welke, aangezien alle hare teekens pofitief zijn, volledig bewijst: dat 'er geene beftaanbare wortels, tusfchen 4,76 en 4,77, in de vergelijking aanwezig zijn. De beoordeeling is hiermede volkomen afgeloopen, en men mag met zekerheid befluiten: dat de gegevene vergelijking flechts éénen wortel, tusfchen nul en één, hebben kan.

9. VOOR-

9. VOORBEELD. *Gegeven zijnde de vergelijking* $100x^3 - 550x^2 + 875x - 349 = 0$, *dezelve optelosſen?*

Men vindt, voor de coefficienten der vergelijkingen, in $(x-1)$, *enz.* en die der verkennings-vergelijking, $(y_2 - 1)$, de getallen, welke in het nevenſtaande tafeltje voorkomen. Het blijkt uit deze: dat de gegevene vergelijking, éénen wortel, tusſchen o en 1, heeft. De verkennings-vergelijking doet vermoeden: dat de vergelijking, in $(x-2)$, twee wortels, tusſchen nul en één, hebben kan.

in (x)	100	-550	$+875$	-349
in $(x-1)$ . . .	100	-250	$+75$	$+76$
in $(x-2)$ . . .	100	$+50$	-125	$+1$
in $(x-3)$ . . .	100	$+350$	$+275$	$+26$
en de verkennings-vergelijking, in				
(y_2-1)	1	-122	-197	$+26$

De vergelijking, in $(10x - 20)$, is:

$$100 + 500 - 12500 + 1000$$

hieruit volgen, voor de coefficienten der vergelijkingen:

in $(10x-21)$ . .	100	$+800$	-11200	-10900
. . . .				
in $(10x-28)$ . .	100	$+2900$	$+14700$	-15800
in $(12x-29)$ . .	100	$+3200$	$+20800$	$+1900$

waaruit blijkt: dat de gegevene vergelijking nog twee wortels heeft, éénen, tusſchen 2, o en 2, 1, en éénen anderen, tusſchen 2, 8 en 2, 9. De gegevene vergelijking heeft dan drie poſitieve wortels.

10. VOORBEELD. *De vergelijking* $x^3 - 200x + 8 = 0$ *optelosſen?*

Men zal, zonder moeite, vinden: dat deze vergelijking éénen wortel, tusſchen o en 1; éénen anderen, tusſchen 14 en 15, en éénen negatieven, tusſchen -15 en -14, heeft.

11. VOORBEELD. *De vergelijking* $x^4 - 17x^3 + 105x^2 - 277x + 259 = 0$ *optelosſen?*

Wanneer men de vergelijkingen, in $(x-1)$ tot $(x-6)$, ingeſloten, opmaakt; dan zal men, met behulp der verkennings-vergelijkingen, of der limieten vinden: dat deze vergelijking ſlechts twee wortels, éénen tusſchen 2 en 3, en éénen anderen, tusſchen 5 en 6, hebben zal.

12. VOORBEELD. *De vergelijking* $35x^5 - x^2 - 100x - 2 = 0$ *optelosſen?*

Men zal, zonder moeite vinden: dat deze vergelijking éénen poſitieven wortel heeft, tusſchen 1 en 2: en twee negatieve, éénen tusſchen o en -1, en éénen anderen tusſchen -1 en -2.

13. VOORBEELD. *De vergelijking* $20x^5 - x^4 + 10 = 0$ *optelosſen?*

Men zal vinden: dat zij ſlechts éénen mogelijken wortel heeft, die negatief is, en tusſchen o en -1 valt.

 14. VOOR-

14. VOORBEELD. *De vergelijking* $x^5 - 5x^2 + 16 = 0$ *optelosſen?*

Men zal vinden: dat deze vergelijking éénen negatieven wortel heeft, welken tusſchen -1 en -2 valt. Dit is de vergelijking, welke de Abt CALUSO, in *de Mém. de Turin*, *Tom. VI. pag.* 171. heeft opgelost.

15. VOORBEELD. *De vergelijking* $x^5 + x^4 - 1 = 0$ *optelosſen?*

Deze vergelijking zal bevonden worden, ſlechts éénen poſitieven wortel, tusſchen 0 en 1, te hebben.

16. VOORBEELD. *De vergelijking* $x^5 - 9x^4 + 4x^3 + 66x^2 - 12x - 99 = 0$ *optelosſen?*

De afgeleide vergelijkingen, van de gegevene af, tot in $(x-8)$ ingeſloten, doen zien: dat 'er drie poſitieve beſtaan; één, tusſchen $+1$ en $+2$, één, tusſchen 3 en 4, en één derde, tusſchen 7 en 8. De permanentie van de teekens der gegevene doet het beſtaan van negatieve wortels, die twee in getal kunnen zijn, vermoeden. Stellende derhalve $-x = z$; dan zijn de coefficienten der vergelijkingen:

$$\begin{array}{llllllll} in\ (z) \ldots\ldots & 1 + & 9 + & 4 - & 66 - & 12 + & 99 \\ in\ (z-1) \ldots & 1 + & 14 + & 50 + & 10 - & 91 + & 35 \\ in\ (z-2) \ldots & 1 + & 19 + & 116 + & 254 + & 140 + & 19 \end{array}$$

De verkennings-vergelijking, tot $(z-1)$ doet zien: dat de vergelijking, in $(z-1)$, twee wortels kan hebben. Indien men nu, gelijk in het 9. *voorbeeld*, te werk gaat; zal men vinden: dat 'er twee negatieve wortels, één, tusſchen $-1,4$ en $-1,5$, en één ander, tusſchen $-1,7$ en $-1,8$ beſtaan. De gegevene vergelijking heeft bijgevolg vijf beſtaanbare wortels.

17. VOORBEELD. *Gegeven zijnde* $x^5 - 4x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 5x - 4 = 0$, *dezelve optelosſen?*

Deze vergelijking kan twee negatieve en drie poſitieve wortels hebben. Nogtans heeft zij ſlechts éénen poſitieven wortel, tusſchen 3 en 4. De coefficienten van de vergelijking, in $-x = z$,

$$1 + 4 + 4 + 2 - 5 + 4$$

zijnde; ziet men, uit derzelver teekens: dat de coefficienten der vergelijking, in $z-1$, poſitieve teekens zullen hebben: men kan dan nog een oogenblik vermoeden: dat 'er twee wortels tusſchen 0 en $+1$ zouden kunnen beſtaan: maar, aangezien men, met eenen opſlag van het oog, beſpeurt: dat de teekens van de termen der verkennings-vergelijking alle poſitief zullen moeten zijn, vervalt dit vermoeden oogenblikkelijk. Men vergelijke hiermede de langwijlige beoordeeling, welke CAGNOLI, (*Trig. Ed.* 1808, *pag.* 240,) van deze vergelijking gegeven heeft, en bij de vier bladzijden in quarto beſlaat.

NEW-

NEWTON geeft (*Arithm. Univerſ. Cap.* II.) bij overhaasting aan deze vergelijking twee negatieve wortels.

18. VOORBEELD. *De vergelijking* $x^6 - 8x^5 + 32x^4 - 50x^3 + 9x^2 + 78x + 338 = 0$ *oplosſen?*

Men zal bevinden: dat deze vergelijking geene beſtaanbare wortels heeft.

19. VOORBEELD. *De vergelijking* $x^7 - 7x^6 + 10x^5 + 38x^4 - 155x^3 + 221x^2 - 144x + 36 = 0$ *oplosſen?*

Men zal vinden: dat deze vergelijking éénen negatieven en zes poſitieve wortels heeft, welke men in een oogenblik vinden zal. CAGNOLI komt, zie het meer aangehaalde werk, *pag.* 244, door een zeer langwijlige beoordeeling, tot dezelfde uitkomst.

20. VOORBEELD. *De vergelijking* $x^6 - 16x^5 + 85x^4 - 144x^3 - 57x^2 + 126x + 54 = 0$ *oplosſen?*

Dit is dezelfde vergelijking, welke RUFFINI, in zijne Verhandeling, door het *Italiaanſche Genootſchap der Wetenſchappen*, in 1804, bekroond, onderzocht. Zij heeft zes wezenlijke wortels. Men zal, door den regel van NEWTON, zie §. 177. ligtelijk ontdekken, dat de vergelijking kan ontleed worden in de factoren $x^2 - 5x - 3 = 0$, $x^2 - 5x - 3 = 0$, en $x^2 - 6x + 6 = 0$. De vergelijking heeft alzoo twee tweetallen van gelijke en onmeetbare wortels: en dit is het moeijelijkſte geval, dat, in de Leerwijze van den Heer BUDAN, kan voorkomen.

Verdere aannadering der wortels, naar twee onderſcheidene Leerwijzen van BUDAN.

§. 298. De Heer BUDAN heeft twee handelwijzen opgegeven, waardoor men, wanneer eenige wortel eener gegevene vergelijking, tot op minder dan ééne éénheid benaderd is, denzelven nader bepalen kan. Bij de eerſte wordt (gelijk bij de gewone worteltrekkingen,) elk der cijfers van de tiendeelige breuk, door eene nieuwe, en ſteeds aan het voorig gedeelte des werks gelijkvormige, bewerking, verkregen, op eene wijze, welke wij reeds, in §. 253. voorloopig verklaard hebben. Deze handelwijze, men kan zulks niet tegenſpreken, gaat zeker, en is te gelijker tijd zeer eenvoudig, waarom dan ook BUDAN aan dezelve in dit opzigt den voorrang boven zijne nieuwere, die in de nooten van het meer aangehaalde werk voorkomt, gegeven heeft.

§. 299. Om nu, in een kort bestek, het gansche beloop dezer handelwijze voortedragen, zoo laat

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \text{enz.} = 0$$

eene vergelijking zijn, die moet opgelost worden. Nadat men dan vooraf, naar §. 296. het aantal en de grenzen van derzelver wortels ontdekt heeft, zal men, om elk derzelven verder aantenaderen, aldus te werk gaan:

„ *Stel, dat men bevonden hebbe: dat 'er, tusschen p en $p+1$,* (62) „ *slechts éénen wortel gelegen is; dan zal men, om de naast kleinere* „ *tiendedeelen van dien wortel te vinden, de vergelijking, in* $(x-p)$, „ *volgens* §. 247. *met* 10 *vermenigvuldigen, hetgeen de vergelijking,* „ *in* $10(x-p)$, *of* $(10x-10p)$, *die wij kortheidshalve de verge-* „ *lijking, in* (x^{I}), *zullen noemen, geven zal: uit deze zal men, vol-* „ *gens* §. 230, *de vergelijking, in* $(x^{\text{I}}-1)$, $(x^{\text{I}}-2)$, *enz. aflei-* „ *den, tot zoo lang twee volgende vergelijkingen, in* $(x^{\text{I}}-q)$ *en* „ $(x^{\text{I}}-q-1)$, *eene afwisseling van teekens, in derzelver achterste* „ *termen, ondergaan, als waaruit het blijken zal, dat de wortel der* „ *vergelijking, in* (x^{I}), *of* $10(x-p)$, *tusschen q en $q+1$ valt, en,* „ *dat die van de gegevene vergelijking grooter dan* $p+\frac{1}{10}q$, *en* „ *kleiner dan* $p+\frac{1}{10}(q+1)$ *zal zijn.*"

„ *De wortels van de vergelijking, in* $(x^{\text{I}}-q)$, *of eigenlijk in* „ $(10x-10p-q)$, *met tien vermenigvuldigd hebbende, zal men* „ *eene vergelijking, in* (10^2x-10^2p-10q), *verkrijgen, die* „ *wij, bij verkorting, de vergelijking, in* (x^{II}), *zullen noemen,* „ *waaruit men op nieuw de vergelijkingen, in* $(x^{\text{II}}-1)$, $(x^{\text{II}}-2)$, „ *zal afleiden, tot dat de teekens der achterste termen van twee op* „ *elkander volgende vergelijkingen, in* $(x^{\text{II}}-r)$ *en* $(x^{\text{II}}-r-1)$, „ *afwisselen, als wanneer wederom de wortel der vergelijking, in* „ (x^{II}), *grooter dan r, en kleiner dan* $r+1$, *en de wortel der* „ *vergelijking, in* (10^2x-10^2p-10q), *op minder dan ééne één-* „ *heid na, bekend zal zijn geworden; zoodat, wanneer men de wor-* „ *tels dezer vergelijking, volgens* §. 248. *door* 10^2 *deelt*

$$x > p + \tfrac{1}{10}q + \tfrac{1}{100}r, \text{ en } x < p + \tfrac{1}{10}q + \tfrac{1}{100}(r+1)$$

„ *zal zijn.*"

„ *Op denzelfden voet voortgaande, zal men, (n een geheel getal* „ *zijn-*

(62) Want niet eer, voor dat men zeker is, dat 'er tusschen deze twee waarden, slechts één wortel gelegen is, zal men deze handelwijze veilig kunnen in het werk stellen.

„ *zijnde,) ten laatste uit de gegevene vergelijking eene afgeleide ver-*
„ *gelijking in*

$$(10^n.x - 10^n.p - 10^{n-1}.q - 10^{n-2}.r - 10^{n-3}.s - 10^{n-4}t \ldots - v)$$

„ *verkrijgen, welker wortel, tot op minder dan ééne éénheid na, zal*
„ *bekend zijn.*"

„ *Indien men dan de wortels dezer vergelijking door* 10^n *deelt, zal*
„ *men vinden:*

$$x = p + \tfrac{1}{10}q + \frac{r}{10^2} + \frac{s}{10^3} + \frac{t}{10^4} + \frac{u}{10^5} + \frac{v}{10^6} + \textit{enz.}$$

„ *en men zal, op deze wijze voortgaande, den wortel, zoo na men*
„ *begeert, kunnen aannaderen.*"

§. 300. Wij zullen deze Leerwijze, welker werktuigelijke behandeling uit §. 252 en 253, als ook, uit de schets, op de tegenzijde van *Tabelle* N° III. genoegzaam kan nagegaan worden, door geene verdere voorbeelden ophelderen. Wij merken op dezelve aan: dat, hoe eenvoudig zij schijnen moge, nogtans de getallen, die men, bij de afleidingen verkrijgt, al spoedig zoo groot worden, dat zij, wanneer men de benadering tot zes of zeven cijfers wilde voortzetten, bijna onhandelbaar worden, en de uitvoering, hoe eenvoudig op zich zelve, aanmerkelijk belemmeren zou: zoo zou men, wanneer men, bij voorbeeld, de wortels van de vergelijking $x^5 - 9x^4 + 4x^3 + 66x^2 - 12x - 99 = 0$ langs dien weg, tot in eene decimale breuk van zeven cijfers, wilde benaderen, in de afgeleide vergelijkingen, op het laatst getallen van meer dan dertig cijfers verkrijgen, en alhoewel het niet onmogelijk zou zijn, middelen uittedenken, om dit werk te verligten, zouden echter die kunstgrepen, wanneer men zich toch bij het eenvoudige bepalen wil, in der onkundigen handen een gevaarlijk werktuig kunnen worden.

§. 301. De tweede handelwijze van Budan is gegrond op het leerstelsel van de limieten van den kleinsten positieven wortel eener vergelijking, welke tusschen nul en één valt. Nemen wij: om deze handelwijze te verklaren, de vergelijking $x^3 - 2x - 5 = 0$; dan is:

$$\begin{array}{l} \textit{in } (x-2) \ldots 1 + 6 + 10 - 1 \\ \textit{in } (x-3) \ldots 1 + 9 + 25 + 16 \end{array}$$

waaruit volgt: dat de wortel tusschen 2 en 3 valt, en dat de vergelijking, in $(x-2)$, eenen wortel tusschen nul en één heeft. Volgens het verklaarde in §. 266 en §. 271, blijkt het: dat deze wortel grooter dan

dan $\frac{1}{10+1}$, en kleiner dan $\frac{16}{25+16}$ of $\frac{16}{41}$ (63). Zich dan bij de naast kleinere benaderde waarden bepalende, zal de wortel der vergelijking grooter dan $2+\frac{1}{11}$ zijn, of grooter dan 2,0909 enz.

Men moet, vervolgt BUDAN, door $x-2=p$ te stellen, van de vergelijking, in p, tot die in $(p-\frac{1}{11})$ overgaan. Men stelle, tot dat einde, $11p=q$, en dan zal men, volgens §. 247, voor de coefficienten der vergelijking in q, verkrijgen:

$$\begin{array}{ll} \textit{in } (q) \ldots\ldots & 1+6.11+10.11^2-1.11^3 \\ \textit{of } \ldots\ldots\ldots & 1+66+1210-1331 \\ \textit{in } (q-1) \ldots & 1+69+1345-\ \ 54 \end{array}$$

en stellende nu wederom voor $q-1$ derzelver waarde $11p-1$ of $11(p-\frac{1}{11})$, zal men de wortels dezer laatste vergelijking door 11 moeten deelen, en men zal voor de vergelijking in

$$\begin{array}{ll} (p-\frac{1}{11}) \ldots & 11^3+69.11^2+1345.11-54 \\ \textit{of } \ldots\ldots & 1331+8349+14795-54 \end{array}$$

verkrijgen. De kleinste limiet van den wortel dezer vergelijking is $\frac{54}{14849}$, het naast met $\frac{1}{275}$ of $\frac{1}{11\times 25}$ overéénkomende. De derde benaderde wortel zal dus grooter dan

$$2+\frac{1}{11}+\frac{1}{11.25},\ \textit{of}\ \frac{576}{275},\ \textit{of}\ 2,094545 \text{ zijn.}$$

De wortel van de vergelijking, in $(p-\frac{1}{11})$, grooter dan $\frac{1}{11.25}$ zijnde, zoeke men de vergelijking, in $\left(p-\frac{1}{11}-\frac{1}{11.25}\right)$; of, omdat $p=\frac{1}{11}q$ is, (zie boven) de vergelijking, in $\left(\frac{1}{11}q-\frac{1}{11}-\frac{1}{11.25}\right)$, of in $\frac{1}{11}(q-1-\frac{1}{25})$: men vermenigvuldige ten dien einde de wortels van de vergelijking, in $(q-1)$, met 25, en men verkrijgt, voor de coefficienten der vergelijking, in $25(q-1)$,

1 +

(63) En niet $\frac{25}{41}$, zoo als de Heer BUDAN, schoon hij anders den regel op *pag.* 24. van zijn meer aangehaald werkje naar behooren voordraagt, niet alleen hier; maar ook overal, verkeerdelijk stelt, door, in plaats van den achtersten term, den hoogsten coefficient, door de som van den hoogsten coefficient, welke met den achtersten term, een tegengesteld teeken heeft, te deelen. Wij hebben gemeend zulks tot narigt van de bezitters van zijn werkje te moeten opgeven.

$$1 + 69 . 25 + 1345 . 25^2 - 54 . 25^3$$
$$\textit{of} \quad 1 + 1725 + 840625 - 843750$$

en hieruit voor de vergelijking, in $25(q-1)-1$

$$1 + 1728 + 844078 - 1399$$

om nu uit deze laatfte wederom de vergelijking, in $\frac{1}{11}(q-1-\frac{1}{25})$, optemaken, zal men de wortels van deze laatfte vergelijking door 11×25 deelen: de coefficienten der komende vergelijking zullen zijn:

$$11^3 . 25^3 + 1728 . 11^2 . 25^2 + 844078 . 11 . 25 - 1399$$
$$\textit{of} \quad 20796875 + 130680000 + 232121450 - 1399$$

De kleinfte pofitieve wortel dezer vergelijking is kleiner dan:

$$\frac{1399}{1399 + 232121450}, \textit{ of nagenoeg } \frac{1}{165921}$$

waarvoor men, met BUDAN, zonder veel van de waarheid aftewijken, ftellen kan: $1 : 165925 = 1 : 25 \times 6637$.

BUDAN befluit hieruit: dat de wortel der gegevene vergelijking nagenoeg gelijk zal zijn aan:

$$2 + \frac{1}{11} + \frac{1}{275} + \frac{1}{165925} \quad \text{of } 2,0945514813 64$$

en wij zullen, in waarheid, zien: dat het tiende cijfer der tiendeelige breuk het eerfte is, dat van de waarheid afwijkt.

§. 302. Dit is hetzelfde voorbeeld, dat de Heer BUDAN, ter verklaring zijner tweede Leerwijze, opgeeft: hij fchijnt het, als met voordacht uitgekozen te hebben, om dezelve met die van NEWTON en LAGRANGE in vergelijking te brengen. Maar wij hebben veel reden, om te twijfelen, of de Heer BUDAN deze nieuwe leerwijze wel op een groot aantal voorbeelden hebbe toegepast; immers, indien het hem, zoo als ons, gegaan is, zou hij geene reden gehad hebben, om veel ter aanprijzing van deze zijne nieuwe Leerwijze te zeggen, welker algemeene befchrijving, met de berekeningen, die vereischt worden, om te bepalen, tot welk eenen graad van naauwkeurigheid men gevorderd zij, de nieuwsgierigen, in het aangehaalde werk, verder kunnen nagaan. Van dezelve dan afftappende, merken wij alleen dit aan: dat het voorbeeld, door de Heer BUDAN gekozen, buitengemeen zeer gefchikt is, om zijne Leerwijze van hare gunftigfte zijde te vertoonen, daar de limiet van den kleinften pofitieven wortel der afgeleide vergelijking, in $(x-2)$, zeer na aan den waren wortel komt, waardoor van zelve de breuken zeer klein worden: dan, daar men vooraf van deze gunftige omftandigheid niet verzekerd, ja zelfs het verfchil tusfchen die limiet en den wortel aanmerkelijk groot kan zijn, zullen de gevallen, waarin deze

deze proef zoo gunſtig zal afloopen, niet menigvuldig zijn, en hoezeer wij niet ontkennen kunnen, dat een geoefend berekenaar 'er langs dien weg altijd, evenwel dikwijls met veel omſlags, wel komen zal, zoo vinden wij altoos geene reden, om deze Leerwijze, als eene algemeene, veel minder boven zijne eerſte, aante prijzen, en zijn van oordeel, dat deze bijzondere proef van BUDANS leerwijze, als in de allervoordeeligſte omſtandigheden genomen, niet tegen die van LAGRANGE, welke, voor dit zelfde geval, in merkelijk ongunſtige omſtandigheden voorkomt, zonder onbillijk te zijn, mag vergeleken worden.

Aannaderings Leerwijze, door de gedurige Breuken, van den Heer LAGRANGE.

§. 303. Wij kunnen niet ontveinzen: dat wij ons, bij het opzettelijk onderzoek van de fraaije Leerwijze van BUDAN, eenigzins verwonderd hebben, dat die Schrijver in het geheel niet ſchijnt te hebben opgemerkt: dat zijn algorithmus ook bijzonderlijk daartoe ſtrekken kan, om de ontwikkeling van de wortels eener vergelijking in eene gedurige breuk aanmerkelijk te verligten, en alzoo deze natuurlijke en ſierlijke handelwijze van LAGRANGE te ontheffen van het omſlagtige, dat aan dezelve, ondanks hare voortreffelijkheid, niet in alles ten onregte, wordt te laste gelegd. De Heer BUDAN ſchijnt zelfs (zie *pag.* 77. van zijn werkje,) eenige vooringenomenheid tegen LAGRANGE's Leerwijze te koesteren, wanneer hij zegt: dat de ontwikkeling der wortels in gedurige breuken dan bijzonderlijk kan aanbevolen worden, wanneer men voor heeft de tweede-magts factoren eener vergelijking te ontdekken: maar dat, (zoo als hij al verder vervolgt,) wanneer het op de oplosſing eener getallen-vergelijking aankomt, de benadering in tiendeelige breuken, boven die in gedurige, den voorrang ſchijnt te verdienen: doch de redenen, welke deze kundige Schrijver, ter ſtaving van zijn gevoelen, aanvoert, zal men, als gegrond zijnde op omſtandigheden, welke met de ontwikkeling in eene gedurige breuk, als zoodanig, niets gemeens hebben, bezwaarlijk van eenige eenzijdigheid kunnen vrijpleiten. Wij zullen dadelijk de handelwijze van LAGRANGE voordragen, en daarna, ten onpartijdigste, hare voordeelen boven de nieuwe benadering van den Heer BUDAN aanwijzen.

§. 304. Door den Algorithmus van BUDAN is de leerwijze van LAGRANGE ontheven geworden van eene soort van tasting of rading, welke men, bij elke nieuwe herhaling, verpligt was in het werk te stellen, en die dezelve zeer omslagtig maakte. Thans komt de handelwijze van LAGRANGE, na dat de beoordeeling der wortels naar die van BUDAN, volgens §. 296. heeft plaats gehad, op het volgende neder. *Wetende: dat eenige vergelijking, in (x) of $(x-p)$, eenen wortel tusschen nul en één heeft, dien wortel in eene gedurige breuk te ontwikkelen?*

§. 305. Wij zullen, ten einde, in de verklaring van LAGRANGE's handelwijze, zooveel te duidelijker zijn, eene algemeene vergelijking van eene bepaalde magt aannemen, hetwelk, zoo als men van zelven gevoelen zal, in het minste niets aan hare algemeenheid zal te kort doen. Stellen wij dan, dat de vergelijking

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (P)$$

of de gegevene, of éénе der afgeleiden zij, welke éénen wortel, tusschen nul en één, heeft, en nemen wij zelfs aan: dat zij meer wortels grooter dan één, ja ook negatieve hebbe. Omdat dan de wortel tusschen nul en één valt, zal men dezelve $= 1:z$ kunnen stellen, en dan zal z altijd grooter dan één zijn: wanneer wij derhalve deze waarde van x in de gegevene vergelijking overbrengen; dan zullen wij, vergelijk het bewezene in §. 257. verkrijgen:

$$\frac{1}{z^4} + A.\frac{1}{z^3} + B.\frac{1}{z^2} + C.\frac{1}{z} + D = 0$$

of alles met z^4 vermenigvuldigende, en de leden van de komende vergelijking, naar de afdalende magten van z, ordenende:

$$Dz^4 + Cz^3 + Bz^2 + Az + 1 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (Q)$$

Deze is (zie §. 257.) de vergelijking tot de omgekeerde wortels van die der gegevene vergelijking, in (x), of van de vergelijking (P), en daar de gegevene vergelijking éénen wortel,

tel, tusſchen nul en één, heeft, zal de vergelijking (Q) 'er eenen hebben, die grooter dan één is.

§. 306. Merken wij op: 1° †† „ *dat de vergelijking* (Q) „ *uit de vergelijking P, zonder eenige berekening, gemaakt* „ *wordt, door de coëfficienten der vergelijking* (P), *in eene* „ *omgekeerde orde, van achteren naar voren, uitteſchrijven:*" met die voorzorg echter, dat, wanneer de laatſte term D van de vergelijking (P) negatief is, men, om, bij de éénmaal aangenomene gewoonte te blijven, om den eerſten term eener vergelijking poſitief te maken, alle de teekens zal moeten omkeeren, hetgeen, zoo als bekend is, de wortels in hare waarde laat; 2° †† *dat, wanneer de vergelijking* (P) *ſlechts éénen wortel, tusſchen nul en één, heeft, de vergelijking* (Q) *'er ſlechts éénen boven de éénheid zal hebben;* want, wat aangaat de wortels, welke (P) boven de één kan hebben, *deze zullen in de vergelijking* (Q), *naar het duidelijk bewezene, in* §. 257, *met wortels, tusſchen nul en één, inſtemmen, en de negatieve wortels van* (P), *alleenlijk met negatieve in* (Q), en men kan derhalve, in dit geval, met volkomene zekerheid, vastſtellen: dat de oplosſing van den geheelen wortel der vergelijking (Q) de eigenaardige van z zal bekend doen worden. 3° Men kan hier bijvoegen: †† *dat, wanneer de vergelijking* (P) *een zeker aantal wortels, tusſchen nul en één, heeft, de vergelijking* (Q) *noodzakelijk even zoo vele poſitieve wortels boven de éénheid zal hebben;* zoodat men, in dit geval, door de afleiding van Budan, naar aanleiding van §§. 230, 235 en 281, noodzakelijk die wortels en bijgevolg het aantal der wortels van (P), tusſchen nul en één vallende, ontdekken zal, zonder dat men van het vijfde gedeelte van den regel van §. 296. gebruik behoeft te maken.

§. 307. Men zal dan, uit de vergelijking (Q), of de vergelijking in z, naar het voorſchrift van Budan, de vergelijkingen, in $(z-1)$, $(z-2)$, enz. afleiden, tot dat men twee volgende vergelijkingen, in $(z-a)$ en $(z-a-1)$, verkregen hebbe, welker achterſte termen van teekens verwisſelen, in welk geval, a de naast kleinere waarde van z zijn zal, zullende a op haar kleinst genomen, gelijk één kunnen zijn.

§. 308.

§. 308. Wanneer (Q) een oneven aantal wortels tusfchen 0 en 1 heeft, zal men dezelve, of ten eerfte, of bij de volgende bewerkingen, ontdekken. Dit alles zal zich van zelven wijzen. Wij onderftellen, om duidelijk te zijn, flechts éénen wortel, en dan is, door deze bewerking, die wij de eerfte benadering noemen, gebleken: dat z grooter dan a en kleiner dan $a + 1$ is, en dat bijgevolg

$$x < \frac{1}{a} \text{ en } x > \frac{1}{a+1}$$

§. 309. De vergelijking in $(z - a)$, door de eerfte benadering gevonden, heeft nu wederom, omdat z tusfchen a en $a + 1$ valt, éénen wortel tusfchen nul en één; wanneer men derhalve $z = a + \frac{1}{z_1}$ ftelt, zal $(z - a) = \frac{1}{z_1}$, en, de coefficienten der vergelijking in $(z - a)$ door de letters p, q, r, s en t, uitdrukkende, zal zij $p \,.\, (z - a)^4 + q \,.\, (z - a)^3 + r \,.\, (z - a)^2 + s \,.\, (z - a) + t = 0$ worden: dat is

$$p \cdot \frac{1}{z_1^4} + q \cdot \frac{1}{z_1^3} + r \cdot \frac{1}{z_1^2} + s \cdot \frac{1}{z_1} + t = 0 \quad . \quad (R)$$

uit welke, even als in §. 305, volgens §. 257. volgen zal:

$$t z_1^4 + s z_1^3 + r z_1^2 + q z_1 + p = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (S)$$

§. 310. Deze vergelijking zal nu wederom eenen wortel hebben, die grooter dan één is, en welker naast kleinere waarde, door uit dezelve de vergelijkingen in $(z_1 - 1)$, $(z_1 - 2)$, enz. afteleiden, zal gevonden worden. Stel: dat de vergelijkingen in $(z_1 - b)$ en $(z_1 - b - 1)$ in derzelver achterfte termen eene verwisfeling van teekens ondergaan, dan zal $z_1 > b$ en $z_1 < b + 1$ zijn, en, overëénkomftig deze tweede benadering, zal

$$x > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \quad \text{en} \quad x < \frac{1}{a} + \frac{1}{b+1}$$

zijn. Zie §. 596, I. C.

§. 311. Stellende dan wederom op nieuw, $z_1 = b + \frac{1}{z_2}$; dan zal $(z_1 - b) = \frac{1}{z_2}$ zijn, en de coefficienten der vergelij-

king in $(z_1 - b)$ gelijk p^1, q^1, r^1, s^1, t^1 ftellende, zal uit
$p^1 . (z_1 - b)^4 + q^1 . (z_1 - b)^3 + r^1 . (z_1 - b)^2 + s^1 . (z_1 - b)$
$+ t^1 = 0$

of $p^1 . \frac{1}{z_2^4} + q^1 . \frac{1}{z_2^3} + r^1 . \frac{1}{z_2^2} + s^1 . \frac{1}{z_2} + t^1 = 0 \quad . \quad (T)$

even als boven, volgens § 257. volgen:

$$t^1 z_2^4 + s^1 z_2^3 + r^1 z_2^2 + q^1 z_2 + p^1 = 0 \quad . \quad . \quad (U)$$

welker wortel, omdat de wortel der vergelijking in $(z_1 - b)$ tusfchen één en nul valt, weder grooter dan één zijn, en, op dezelfde wijze als boven, zal gevonden worden.

§. 312. Het zou zonder eenige nuttigheid zijn, deze befchouwingen verder voorttezetten. Men befpeurt reeds den regelmatigen en eenvoudigen gang van het werk. In de twee eerfte benaderingen heeft men de vergelijkingen (T) en (R), door eenvoudig de coefficienten in eene omgekeerde rangorde te ftellen, op dezelfde wijze opgemaakt, als, bij de eerfte benadering, de vergelijking (Q) uit de vergelijking (P) volgt, terwijl, door ééne en dezelfde regelmatige leerwijze van Budan, (R) uit (Q); (T) uit (S) wordt afgeleid, door trapswijze van éénheid tot éénheid voorttegaan, tot zoo lang de afwisfeling van de teekens der achterfte termen aanwijzen, waar men die afleidingen ftaken moet, en te gelijk, welke waarden men aan a, b, c, enz. moet toefchrijven; geldende omtrent elk éénе dezer benaderingen dezelfde aanmerkingen, welke in §. 306, met betrekking tot de eerfte benadering, zijn opgegeven.

§. 313. Men zal, alzoo voortgaande, den wortel der gegevene vergelijking, dien men aannadert, in eene gedurige breuk ontwikkelen, welker index (alleen de getallen van den index nemende)

$$[1, a, b, c, d, e, f, g, h, enz.]$$

zie §. 596 en 597, I. C. zijn zal, en uit welken index men, volgens den regel van §. 609, I. C. eene reeks van breuken zal afleiden, welke beurtelings grooter en kleiner dan de ware wortel der vergelijking zijn zullen; terwijl de afwijking van elk dezer breuken van de waarheid, volgens de eigenfchappen der gedurige breuken, in §. 616 en 617, I. C. bewewezen, met eenen opflag van het oog, worden opgemaakt, zonder dat men, zoo als fommigen, en, onder deze, mannen van groot aanzien en kennis, verkeerdelijk gemeend hebben, dezelve vooraf in tiendeelige breuken behoeft te herleiden. — Is nu de wortel der vergelijking onmeetbaar, dan zal de gedurige breuk, (§. 597, I. C.) nimmer ten einde loopen: maar elke nieuwe benadering zal (zie §. 614, I. C.) den wortel, met de meest mogelijke naauwkeurigheid, en in de kleinfte getallen, uitdrukken; is daarentegen de wortel eene meetbare breuk, dan kan het niet misfen, of men zal deze breuk ten naauwkeurigfte vinden. Helderen wij nu deze verklaarde Leerwijze door voorbeelden op.

§. 314. I. VOORBEELD. *De vergelijking* $x^3 - 2x - 5 = 0$ *optelosfen?*

Het vijfde voorbeeld der beoordeelingen, pag. 196. heeft ons geleerd: dat deze vergelijking flechts éénen wortel tusfchen twee en drie heeft: de coefficienten der vergelijking in $(x-2)$ zijn:

$$in\ (x-2) \ldots 1 + 6 + 10 - 1$$

ftellende derhalve $x - 2 = \frac{1}{z}$; dan zullen, volgens §. 306. de coefficienten der vergelijkingen in z zijn:

$$in\ z \ldots 1 - 10 - 6 - 1$$

uit welke men de vergelijkingen in $(z-1)$ enz. zal moeten afleiden. Uit het inzien dezer vergelijking blijkt het: dat de wortel vrij groot zal zijn: men make dan, volgens §. 247. de vergelijking in $\frac{1}{10}z$; dan heeft men:

$$\begin{array}{ll} in\ \frac{1}{10}z \ldots\ldots & 1 - 1 - 0{,}06 - 0{,}001 \\ in\ (\frac{1}{10}z - 1) \ldots & 1 + 2 + 0{,}94 - 0{,}061 \\ of\ in\ (z-10) \ldots\ldots & 1 + 20 + 94 - 61 \end{array}$$

Hieruit volgt: $a > 10$ en $a < 11$; ftellende dan $z - a = \frac{1}{z_1}$; dan is, zie §. 309,

$$\begin{array}{ll} in\ (z_1) \ldots\ldots & 61 - 94 - 20 - 1 \\ in\ (z_1 - 1) \ldots & 61 + 89 - 25 - 54 \end{array}$$

derhalve $b > 1$ en $b < 2$; ftel $z_1 - b = + \frac{1}{z_2}$; dan is wederom, volgens den regel:

$$\begin{array}{ll} in\ (z_2) \ldots\ldots & 54 + 25 - 89 - 61 \\ in\ (z_2 - 1) \ldots & 54 + 187 + 123 - 71 \end{array}$$

 Want,

Waaruit volgt: $c > 1$ en $c < 2$; ſtel daarom $z_2 - c = \frac{1}{z_3}$; dan is

in (z_3) ...... $71 - 123 - 187 - 54$
in $(z_3 - 1)$ ... $71 + 90 - 220 - 293$
in $(z_3 - 2)$ ... $71 + 303 + 173 - 352$

Hier blijkt: dat $d > 2$ en $d < 3$ is; ſtel $z_3 - d = 1 : z_4$; dan is:

in (z_4) ...... $352 - 173 - 303 - 71$
in $(z_4 - 1)$ ... $352 + 883 + 407 - 195$

Waaruit $e > 1$ en $e < 2$; ſtel derhalve $z_4 - e = 1 : z_5$; dan is:

in (z_5) ...... $195 - 407 - 883 - 352$
in $(z_5 - 1)$ ... $195 + 178 - 1112 - 1447$
in $(z_5 - 2)$ ... $195 + 763 - 171 - 2186$
in $(z_5 - 3)$ ... $195 + 1348 + 1940 - 1399$

derhalve $f > 3$ en $f < 4$; ſtel daarom $z_5 - f = 1 : z_6$; dan is:

in (z_6) ...... $1399 - 1940 - 1348 - 195$
in $(z_6 - 1)$ ... $1399 + 2257 - 1031 - 2084$

Waaruit $g > 1$ en $g < 2$; ſtel wederom $z_6 - g = 1 : z_7$; dan is:

in (z_7) ...... $2084 + 1031 - 2257 - 1399$
in $(z_7 - 1)$ ... $2084 + 7283 + 6057 - 541$

derhalve $h > 1$ en $h < 2$; ſtel dan $z_7 - h = 1 : z_8$; dan is:

in z_8 ...... $541 - 6057 - 7283 - 2084$

Hier ziet men, uit de teekens, dat z_8 aanmerkelijk groot zal zijn: men make dan:

in $(\frac{1}{10} z_8)$ ...... $541 - 605,7 - 72,83 - 2,084$
in $(\frac{1}{10} z_8 - 1)$ ... $541 + 1017,3 + 338,77 - 139,614$
in $(z_8 - 10)$ .... $541 + 10173 + 33877 - 139614$
in $(z_8 - 11)$ .... $541 + 11796 + 55346 - 95023$
in $(z_8 - 12)$ .... $541 + 13419 + 81061 - 26840$

Hieruit is $i > 12$ en $i < 13$; ſtel dan $z_8 - i = 1 : z_9$; dan is:

in (z_9) ...... $26840 - 81061 - 13419 - 541$
in $(z_9 - 1)$ ... $26840 - 541 - 95021 - 68181$
in $(z_9 - 2)$ ... $26840 + 79979 - 15583 - 136903$
in $(z_9 - 3)$ ... $26840 + 160499 + 224895 - 45667$

derhalve $k > 3$ en $k < 4$; ſtel dan $z_9 - k = 1 : z_{10}$; dan is:

in (z_{10}) ...... $45667 - 224895 - 160499 - 26840$
in $(z_{10} - 1)$ ... $45667 - 87894 - 473288 - 366567$
in $(z_{10} - 2)$ ... $45667 + 49107 - 512075 - 882082$
in $(z_{10} - 3)$ ... $45667 + 186108 - 276860 - 1299383$
in $(z_{10} - 4)$ ... $45667 + 323109 + 232357 - 1344468$
in $(z_{10} - 5)$ ... $45667 + 460110 + 1015576 - 743335$

Hieruit volgt dus $l > 5$ en $l < 6$; ſtel daarom $z_{10} - l = 1 : z_{11}$; dan is:

in (z_{11}) ...... $743335 - 1015576 - 460110 - 45667$
in $(z_{11} - 1)$ ... $743335 + 1214429 - 261257 - 778018$

der-

derhalve $m > 1$ en $m < 2$; ſtel dan $z_{11} - m = 1 : z_{12}$; dan is:

$$in\ (z_{12}) \ldots\ldots 778018 + 261257 - 1214429 - 743335$$
$$in\ (z_{12} - 1) \ldots 778018 + 2595311 + 1642139 - 918489$$

Waaruit volgt $n > 1$ en $n < 2$; ſtel daarom $z_{12} - n = 1 : z_{13}$; dan is:

$$in\ (z_{13}) \ldots 918489 - 1642139 - 2595311 - 778018$$

Hieruit zal men $z_{13} > 2$ en $z_{13} < 3$ vinden.

Wij zullen hier de bewerking ſtaken. De index van de gedurige breuk, in welke de wortel der vergelijking is uitgedrukt, zal zijn (het geheele gedeelte des wortels onder denzelven begrijpende,)

[2, 10, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 1, 12, 3, 5, 1, 1, 2, *enz.*]

uit welken men, volgens den regel van §. 609, I. C. vinden zal voor de breuken, welke, beurtelings grooter en kleiner dan de eigenlijke waarde van den wortel zijnde, zoo na, als in zulke kleine getallen mogelijk is, den wortel uitdrukken,

$$\frac{1}{0},\ \frac{2}{1},\ \frac{21}{10},\ \frac{23}{11},\ \frac{44}{21},\ \frac{111}{53},\ \frac{155}{74},\ \frac{576}{275},\ \frac{731}{349},\ \frac{1307}{624},\ \frac{16415}{7837},$$
$$+\quad -\quad +\quad -\quad +\quad -\quad +\quad -\quad +\quad -\quad +$$
$$\frac{50552}{24135},\ \frac{269175}{128512},\ \frac{319727}{152647},\ \frac{588902}{281159},\ \frac{1497531}{714965},\ \text{enz.}$$
$$-\quad +\quad -\quad +\quad -$$

De laatſte dezer breuken zal, volgens §. 617, I. C. minder dan . . $1 : 714965^2$; of minder dan

0, 00000 00000 019

van de eigenlijke waarde des wortels verſchillen: indien men dezelve dan in eene tiendeelige breuk ontwikkelt; dan zal men vinden:

2, 09455 14815 415

in welke alleenlijk het laatſte cijfer 5 twijfelachtig is. Men ziet hieruit: dat BUDAN, volgens zijne tweede leerwijze, (zie pag. 74. van zijn werk) de grenzen van dien wortel kwalijk bepaald heeft.

2. VOORBEELD. *De wortels der vergelijking* $100x^3 - 550x^2 + 875x - 349 = 0$, *in gedurige breuken te ontwikkelen?*

Het is, uit het 9. voorbeeld pag. 199. gebleken: dat deze vergelijking éénen wortel tusſchen nul en één, en twee wortels tusſchen twee en drie heeft. Men vindt namelijk voor de coefficienten der vergelijkingen:

$$(x) \ldots\ldots 100 - 550 + 875 - 349$$
$$(x-1) \ldots 100 - 250 + 75 + 76$$
$$(x-2) \ldots 100 + 50 - 125 + 1$$
$$(x-3) \ldots 100 + 350 + 275 + 26$$

Wij beginnen eerst met den wortel tusſchen nul en één te ontwikkelen. De coefficienten van de vergelijking in (x) zijn:

$$100 - 550 + 875 - 349$$

 ſtel

ſtel nu $x = 1 : z$; dan zijn de coefficienten van de vergelijkingen

$$\begin{array}{lll} in\ (z) \ldots\ldots & 349 - 875 + 550 - 100 \\ in\ (z-1) \ldots & 349 + 172 - 153 - 76 \\ \quad enz. & \quad enz. \end{array}$$

bijgevolg $a > 1$ en $a < 2$. Stellende dan $(z - a) = 1 : z_1$; dan zijn de coefficienten der vergelijkingen

$$\begin{array}{ll} in\ (z_1) \ldots\ldots & 76 + 153 - 172 - 349 \\ in\ (z_1 - 1) \ldots & 76 + 381 + 362 - 292 \end{array}$$

waaruit blijkt: dat $b > 1$ en $b < 1$ is. Wanneer men nu op deze wijze voortgaat, dan zal men, met weinig moeite, voor den index van den wortel, tusſchen nul en één, vinden:

[1, 1, 1, 1, 31, 1, 1, 1, 8, 1, 1, 2, 2, 5, 1,]

Om de wortels, welke tusſchen 2 en 3 vallen, te ontdekken, beginne men met de vergelijking in $(x-2)$: derzelver coefficienten zijn:

$$(x - 2) \ldots 100 + 50 - 125 + 1$$

men make nu $(x - 2) = 1 : y$; dan zal men verkrijgen voor de coefficienten

$$\begin{array}{ll} in\ (y) \ldots\ldots & 1 - 125 + 50 + 100 \\ in\ (y-1) \ldots & 1 - 122 - 197 + 26 \\ in\ (y-2) \ldots & 1 - 119 - 438 - 292 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ in\ (y-124) \ldots & 1 + 247 + 15178 - 9076 \end{array}$$

waaruit blijkt: dat de vergelijking in y twee wortels, éénen tusſchen 1 en 2, en éénen anderen tusſchen 124 en 125 heeft, en dat men bijgevolg voor de wortels der gegevene vergelijking, welke tusſchen 2 en 3 vallen, ſtellen kan:

$$x = 2 + \frac{1}{124 + \frac{1}{z}} \qquad x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{y}}$$

elk dezer wortels moeten nu, naar het voorgeſchrevene in §. 306, op dezelfde wijze, als boven, uit de vergelijkingen

$$\begin{array}{ll} (y - 1) \ldots & 1 - 122 - 197 + 26 \\ en\ \ (y - 124) \ldots & 1 + 247 + 15178 - 9076 \end{array}$$

verder ontwikkeld worden: zulks doende, zal men voor den index van den eerſten

[2, 1, 8, 6, 1, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 4, 2, *enz.*]

en voor dien van den tweeden

[2, 124, 1, 1, 4, 1, 3, 5, 1, 1, *enz.*]

vinden; welke indices meer dan voldoende zijn, om de wortels, tot in tien of elf cijfers der tiendeeligen, naauwkeurig te verkrijgen, gelijk men zich daarvan bij de proef zal kunnen overtuigen.

3. VOOR-

3. VOORBEELD. *De vergelijking* $7x^4 - 11x^3 - 49x^2 + 126x - 77 = 0$ *oplossen?*

In de teekens van de termen dezer vergelijking komen drie afwisselingen en ééné permanentie voor; zij kan derhalve drie positieve wortels en éénen negatieven wortel hebben: men vindt, volgens de afleidings regelen, voor de coefficienten der vergelijkingen in

$$\begin{array}{l}(x) \ldots\ldots 7 - 11 - 49 + 126 - 77 \\ (x-1) \ldots 7 + 17 - 40 + 23 - 4 \\ (x-2) \ldots 7 + 45 + 53 + 22 + 3\end{array}$$

daar nu de vergelijking in $(x-1)$ drie afwisselingen meer dan de vergelijking in $(x-2)$ heeft, is het wel mogelijk: dat 'er drie wortels, tusschen één en twee, zullen vallen, hetwelk door de afleidingen van de vergelijking in $1:(x-1)$ van zelfs zal moeten blijken.

Stel dan $(x-1) = 1:z$, dan is de vergelijking in:

$$\begin{array}{l}in\ (z) \ldots\ldots 4 - 23 + 40 - 17 - 7 \\ in\ (z-1) \ldots 4 - 7 - 5 + 10 - 3 \\ in\ (z-2) \ldots 4 + 9 - 2 - 5 - 1 \\ in\ (z-3) \ldots 4 + 25 + 49 + 34 + 5\end{array}$$

Het blijkt uit deze vergelijkingen: dat 'er vooreerst eenen wortel tusschen 2 en 3 bestaat: maar, daar 'er in de vergelijking in $(z-2)$ twee permanentien meer dan in de vergelijking $(z-1)$ voorkomen, is het mogelijk: dat de vergelijking in $(z-1)$ twee wortels tusschen één en nul heeft. Men stelle dan $(z-1) = 1:y$, en make de vergelijkingen in $(y-1)$, $(y-2)$, $(y-3)$, enz., en men verkrijgt:

$$\begin{array}{l}in\ (y) \ldots\ldots 3 - 10 + 5 + 7 - 4 \\ in\ (y-1) \ldots 3 + 2 - 7 - 1 + 1 \\ in\ (y-2) \ldots 3 + 14 + 17 + 3 - 2 \\ in\ (y-3) \ldots 3 + 26 + 77 + 91 + 35\end{array}$$

uit deze vergelijkingen blijkt het: dat de vergelijking in (y) éénen wortel tusschen 0 en 1, éénen tusschen 1 en 2, en éénen derden tusschen 2 en 3 heeft: de wortel tusschen nul en één stemt overéén met dien van de vergelijking in $(z-2)$, en wij zullen ons derhalve met denzelven hier niet ophouden. Het blijkt nu: dat de vergelijking in $(z-1)$ twee wortels tusschen één en nul heeft, welke door de oplossing van de vergelijkingen in $(y-1)$ en $(y-2)$ nader zullen bekend worden.

Stel, om den wortel van de vergelijking in $(y-1)$ te ontwikkelen, $(y-1) = 1:p$; dan is:

$$\begin{array}{l}in\ (p) \ldots\ldots 1 - 1 - 7 + 2 + 3 \\ in\ (p-1) \ldots 1 + 3 - 4 - 11 - 2\end{array}$$

$$\begin{array}{l} in\ (p-2)\ \ldots\ 1+7+11+6-13 \\ in\ (p-3)\ \ldots\ 1+11+38+41+0 \end{array}$$

Waaruit blijkt: dat $p = 3$ is: men heeft dan voor éénen der wortelen tusfchen 1 en 2

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3}}} = \frac{11}{7} = 1\frac{4}{7}.$$

Om den tweeden wortel tusfchen 1 en 2 te vinden, ontwikkele men de vergelijking in $(y-2)$, en men zal voor den index van dien wortel, die onmeetbaar is, vinden: [1, 1, 2, 1, enz.]

Om den derden wortel tusfchen 1 en 2 te vinden: zal de vergelijking in $(z-2)$ verder moeten worden opgelost, waaruit blijken zal: dat de index van den derden pofitieven wortel is: [1, 2, 1, 4, enz.]

Nu blijft nog over, dat wij den negatieven wortel, die, omdat 'er drie pofitieve wortels gevonden zijn, noodzakelijk beftaan moet, bepalen. Wanneer men de pofitieve wortels in negatieve verandert, en op dezelfde wijze te werk gaat, dan zal men voor den index van dien wortel vinden: [3, 20, 3, enz.]

§. 315. Het zou overtollig zijn, deze leerwijze van Lagrange, door een grooter aantal voorbeelden, opteheIderen. In eenvoudigheid en gemak behoeft zij geenzins voor Budan's handelwijze te wijken, en het is, na al het voorgaande aandachtig overwogen te hebben, van belang te doen opmerken: dat zij met veel minder werkzaamheid tot eenen veel grooteren graad van benadering brengt, dan naar de leerwijze van Budan of eenige andere; want, de grootfte getallen, die men in het eerfte voorbeeld in de afleidingen verkregen heeft, beftonden op het laatst flechts uit zeven cijfers, en de verkregene wortel was tot in het dertiende cijfer naauwkeurig; daar men, naar Budan's leerwijze, om tot denzelfden graad van benadering te geraken, in de afgeleide vergelijkingen, door telkens de nieuwe vergelijkingen met de reeks 1, 10, 100, 1000, te vermenigvuldigen, getallen van meer dan veertig cijfers zou verkrijgen, terwijl in vergelijkingen van hoogere magten dit onderfcheid nog aanmerkelijker zou worden. Men zou ten onregte hier tegen in brengen: dat elke nieuwe herhaling in de aannadering van Budan, doet

zien,

zien, tot hoe verre men gevorderd is; want, dit voordeel heeft ook, zoo als wij reeds hebben aangemerkt, de leerwijze van LAGRANGE; gelijk men ook hier niet tegen in kan brengen het geval, dat vele termen van den index de éénheid zijn; want alsdan zijn de afleidingen minder en de getallen blijven kleiner. De leerwijze van LAGRANGE heeft daarenboven nog de nuttige eigenschap, waarvan die van BUDAN en alle anderen verstoken zijn, dat, wanneer de vergelijking breuken tot meetbare wortels heeft, dezelve regtstreeks te voorschijn komen, gelijk in het derde voorbeeld gebleken is, zonder dat men tot andere beginselen zijnen toevlugt behoeft te nemen, gelijk zij ook, zoo als wij straks zien zullen, de tweede-magts factoren eener vergelijking ontdekt. Voegt men nu alle deze voordeelen te zamen, en brengt men daar bij in rekening de eigenschap, dat zij de wortels op het naauwkeurigste in de kleinste breuken uitdrukt, dan zou men, of deze handelwijze niet genoeg kennen, of door berekening in getallen, geene genoegzame proeven genomen moeten hebben, om aan eenige andere, behalve aan die van LAGRANGE, de voorkeur te geven. Wij houden het zelfs geenzins vermetel te zeggen: dat, wanneer 'er eene kortere en gemakkelijker handelwijze mogelijk is, dezelve in eenen algemeenen regel zal moeten bestaan, waardoor men, zoo verre men begeert, de termen van den index van elken wortel op eene meer gemakkelijke wijze zal kunnen vinden.

Merkwaardige eigenschap der tweede magts-vergelijkingen.

§. 316. * Eene gedurige breuk, welker termen uit de gedurige en onbepaalde voortgaande herhaling van dezelfde getallen, als:

$$[a, a, a, a, \text{enz.}];\ [a, b, a, b, a, b, a, b, \text{enz.}]$$
$$[a, b, c, d, a, b, c, d, a, b, c, d, \text{enz.}]$$

bestaan, noemt men *wederkeerige of periodieke gedurige breuk.* Zij is zuiver of zamengesteld, naar dat de breuk met de periode of het repetendum aanvangt, of eerst op sommige, van de periode verschillend zijnde, termen volgt, en daarna zonder ophouden herhaald wordt.

§. 317. †† *De onmeetbare wortels eener bestaanbare vierkants-ver-*

gelijking kunnen door eene periodieke gedurige breuk worden uitgedrukt.

Stellen wij, om deze gewigtige waarheid te betoogen,

$$a_1 x^2 - 2bx - a = 0$$

zijnde a_1, b en a, geheele getallen, dan zal, volgens §. 97.

$$x = \frac{b + \sqrt{(b^2 + aa_1)}}{a_1}$$

zijn. Voor den kleinsten wortel zal men het wortel-teeken met $-$ moeten aandoen, en $b^2 + aa_1$ zal grooter dan nul moeten zijn. Het zal geene moeite kosten, om uit deze vergelijking, in geheele getallen, de naast kleinere waarde van x te vinden. Laat p_1 deze naast kleinere waarde zijn, en stellen wij $x = p_1 + 1 : x_1$, dan zal men, deze waarde van x in de gegevene vergelijking overbrengende, vinden:

$$(a + 2bp_1 - a_1 p_1^2) x_1^2 - 2(a_1 p_1 - b) x_1 - a_1 = 0$$

stellende dan

$$a_2 = a + 2bp_1 - a_1 p_1^2, \text{ en } b_1 = a_1 p_1 - b$$

dan zal zij veranderen in

$$a_2 x_1^2 - 2b_1 x_1 - a_1 = 0$$

welke aan de gegevene volmaakt gelijkvormig is, en tot grootsten wortel hebben zal

$$x_1 = \frac{b_1 + \sqrt{(b_1^2 + a_1 a_2)}}{a_2}$$

Uit deze zal men insgelijks de naast kleinere waarde van x_1 in een geheel getal bepalen kunnen; stel deze naast kleinere waarde p_2 en $p_2 + 1 : x_2 = x_1$; dan zal men, op dezelfde wijze te werk gaande, en $a_3 = a_1 + 2b_1 p_2 - a_2 p_2^2$, en $b_2 = a_2 p_2 - b_1$ stellende, de vergelijking

$$a_3 x_2^2 - 2b_2 x_2 - a_2 = 0$$

verkrijgen, welke de waarde van x_2 op dezelfde wijze, in het naast kleiner geheel getal zal doen bekend worden; terwijl men op gelijke wijze, tot in het oneindige, zal kunnen voortvaren.

Het is bijzonder opmerkelijk: dat men

$$b^2 + aa_1 = b_1^2 + a_1 a_2 = b_2^2 + a_2 a_3 = b_3^2 + a_3 a_4 = enz. = N$$

zal kunnen stellen. Immers volgt uit $b_1 = a_1 p_1 - b$: dat $b_1^2 = a_1^2 p_1^2 - 2ba_1 p_1 + b^2$; of $b_1^2 - b^2 = a_1^2 p_1^2 - 2ba_1 p_1$ is, en wederom uit $a_2 = a + 2bp_1 - a_1 p_1^2$; $a_2 - a = 2bp_1 - a_1 p_1^2$, welke met a_1 vermenigvuldigd zijnde, geeft $a_1 a_2 - aa_1 = 2ba_1 p_1 - a_1^2 p_1^2$; weshalve $b_1^2 - b^2 = aa_1 - a_1 a_2$; of eindelijk $b^2 + aa_1$ =

$= b_1^2 + a_1 a_2$ zal zijn: en op dezelfde wijze betoogt men de andere gelijkheden.

Stellende dan als volgt:

p_1	*in een geheel getal*	$\dfrac{b + \sqrt{N}}{a_1}$	*en makende* $b_1 = p_1 a_1 - b$; $a_2 = \dfrac{N - b_1^2}{a_1}$
p_2	*de naast kleinere*	$\dfrac{b_1 + \sqrt{N}}{a_2}$	. . . . $b_2 = p_2 a_2 - b_1$; $a_3 = \dfrac{N - b_2^2}{a_2}$
p_3	*waarde van* . .	$\dfrac{b_2 + \sqrt{N}}{a_3}$	. . . . $b_3 = p_3 a_3 - b_2$; $a_4 = \dfrac{N - b_3^2}{a_3}$
p_4	. . . . .	$\dfrac{b_3 + \sqrt{N}}{a_4}$	. . . . $b_4 = p_4 a_4 - b_3$; $a_5 = \dfrac{N - b_4^2}{a_4}$
enz.			*enz.*

dan zal, aangezien $x = p_1 + \frac{1}{x_1}$; $x_1 = p_2 + \frac{1}{x_2}$ enz. is, de gedurige breuk:

$$[p_1, p_2, p_3, p_4, \text{enz.}]$$

de waarde van den grootsten wortel der vergelijking uitdrukken. Begeert men den kleinsten wortel te vinden, zal men, in het betoogde stelsel van vergelijkingen, aan $\sqrt{N}$ het negatieve teeken geven, en beide wortels zullen alzoo, zonder van het gewone voorschrift gebruik te maken, door dezelve, op eene min omslagtige wijze, kunnen gevonden worden.

§. 318. Om nu te betoogen: dat deze gedurige breuk noodzakelijk periodiek zal zijn, merken wij aan: dat, uit den aard der zake, de vergelijkingen in x_1, x_2, x_3, enz. niet anders zijn dan de vergelijkingen, welke, in het algemeene voorschrift, de vergelijkingen in z_1, z_2, z_3, enz. genoemd zijn, en welke, hoedanig ook de teekens van de gegevene vergelijking zijn mogen, alle, zonder uitzondering, tot den vorm

$$a_n (x_{n-1})^2 - 2 b_{n-1} x_{n-1} - a_{n-1} = 0$$
$$a_{n+1} (x_n)^2 - 2 b_n x_n - a_n = 0$$
$$a_{n+2} (x_{n+1})^2 - 2 b_{n+1} x_{n+1} - a_{n+1} = 0$$

zullen behooren, dat wil zeggen: dat de getallen a_{n-1}, a_n en a_{n+1}, in deze en alle de volgende vergelijkingen, positievelijk, dat is met de teekens, onder welke zij voorkomen, zullen moeten genomen worden. Zulks nu alzoo zijnde, zal volgens het betoogde in §. 316,

$$N = (b_n)^2 + a_n a_{n+1} = (b_{n+1})^2 + a_{n+1} a_{n+2} = \text{enz.}$$

moeten zijn; daar nu a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, enz. alle hetzelfde teeken hebben,

ben, zijn de producten $a_n\, a_{n+1}$, $a_{n+1}\, a_{n+2}$ positief, waaruit men ligtelijk kan opmaken: 1° dat $(b_n)^2$, $(b_{n+1})^2$, $(b_{n+2})^2$, elk kleiner dan N, gelijk ook b_n, b_{n+1}, b_{n+2}, enz. tot in het oneindige, elk kleiner dan $\sqrt{N}$ zullen zijn; 2° dat ook, vermits de getallen a, a_1, a_2, a_2, enz. uit den aard der zake, geheele getallen zijn, a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, enz. alle kleiner dan N zullen zijn. Daar derhalve N gegeven is, is het klaarblijkelijk: dat 'er slechts een bepaald aantal getallen bestaan kunnen, die minder dan N en $\sqrt{N}$ zijn; de getallen a_n, a_{n+1}, enz. en b_n, b_{n+1}, enz. kunnen dan slechts een zeker aantal verschillende waarden hebben: wanneer dan elk dezer reeksen, tot in het oneindige worden voorgezet, zullen dezelfde getallen, in dezelfde rangorde, moeten wederkeeren, gelijk ook eene zekere rangorde van zamenvoeging ten laatste eene gedurig wederkeerende periode zal uitmaken. Indien men dan, bij voorbeeld, heeft:

$$a_{n+r+s} = a_{n+r}\,, \text{ en } b_{n+r+s} = b_{n+r}$$

of wel, $n + r = p$ stellende,

$$a_{p+s} = a_p \quad \text{en } b_{p+s} = b_p$$

zal, omdat

$$N = (b_p)^2 + a_p\, a_{p+1} = (b_{p+s})^2 + a_{p+s}\, a_{p+s+1}$$

is, ook noodzakelijk $a_{p+s+1} = a_{p+1}$ moeten zijn: maar dan is ook te gelijk

$$x_p = \frac{b_p + \sqrt{N}}{a_{p+1}} \quad \text{en } x_{p+s} = \frac{b_{p+s} + \sqrt{N}}{a_{p+s+1}}$$

derhalve zal $x_{p+s} = x_p$ zijn; en het zal op gelijke wijze blijken: dat dan ook $x_{p+s+1} = x_{p+1}$, enz. zal moeten zijn. Het blijkt dan uit dit alles overtuigend: dat de gedurige breuk, welke uit de ontwikkeling van de wortels eener vierkants-vergelijking ontstaat, noodzakelijk periodiek zal moeten zijn.

§. 319. †† Men zal, met LAGRANGE, die de eerste is, welke deze waarheid regtstreeks betoogd heeft (64), uit dezelfde beginselen voortre-

(64) Men had al lang bemerkt: dat elke periodieke gedurige breuk tot eene tweede magts-vergelijking kan gebragt worden. Laat gegeven zijn de gedurige breuk:

$$x = \frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \text{enz., tot in het oneindige.}$$

dan

redenerende, betoogen: dat, wanneer de achterste termen a_n en a_{n+1} van twee volgende afgeleide vergelijkingen beide negatief geworden zijn, éene der twee termen a_n of a_{n+1} reeds periodiek zal zijn. Dan, wij kunnen ons met de verdere bijzonderheden van dit belangrijk onderwerp, waarover zeer veel zou te zeggen vallen, niet langer ophouden.

§. 320. Laat, om het betoogde op een voorbeeld toetepassen, gegeven zijn, de vergelijking: $3x^2 - 4x - 3 = 0$; dan is $a_1 = 3$, $b = 2$ en $a = 3$; $N = b^2 + aa_1 = 9 + 4 = 13$, en dan zal volgens de vergelijkingen van §. 317.

$$\frac{b + \sqrt{N}}{a_1} = \frac{2 + \sqrt{13}}{3} \text{ zijn; derhalve } p_1 = 1$$

nu

dan zal $x = \frac{1}{a + x}$ zijn, of $x^2 + ax = 1$, welke opgelost zijnde, geven zal $\frac{1}{2}\sqrt{(a^2 + 4)} - \frac{1}{2}a = x$; of, $\sqrt{(a^2 + 4)} = a + 2x$. Door deze formule zal men alle vierkants-wortels uit getallen berekenen kunnen, die vier meer dan een volkomen vierkant zijn, gelijk de getallen 5, 13, 29, 53, 68, 85, 104, 125, enz.: alzoo zal, bij voorbeeld,

$$\sqrt{29} = 5 + 2 \times [(5), (5), (5), \text{enz.}]$$

want $29 = 25 + 4 = 5^2 + 4$ zijnde, zal men $a = 5$ moeten stellen.

Stellen wij nogmaals $x = \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{a + \text{enz.}}}}$

dan zal $x = \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + x}} = \frac{b + x}{ab + 1 + ax}$ zijn, bijgevolg $ax^2 + abx - b = 0$, welke vergelijking opgelost zijnde, geven zal:

$$x = \frac{-ab + \sqrt{(a^2b + 4ab)}}{2a}$$

Waaruit men vervolgens halen zal:

$$\sqrt{(a^2b^2 + 4ab)} = ab + 2a \times [(a, b), (a, b), \text{enz.}]$$

Stelt men insgelijks $x = [(a, b, c,), (a, b, c,), \text{enz.}]$ dan zal men hieruit vinden:

$$(ab + 1)x^2 + (abc + a - b + c)x - bc - 1 = 0$$

en verder

$$\sqrt{[(abc + a + b + c)^2 + 4]} = abc + a - b + c + 2(ab + 1) . \times [(a, b, c), \text{enz.}]$$

Men zal, op deze wijze voortgaande, alle getallen kunnen vinden, welker wortels van eene periodicke breuk, welker periode uit éénen, twee, drie of meer gegevene termen bestaat, afhangen.

nu is $b_1 = p_1 a_1 - b = 1 \times 3 - 2 = 1$ en $a_2 = \frac{N - b_1^2}{a_1} = \frac{13 - 1}{3} = 4$, en gaat men op deze wijze voort, zal men voor den grootsten wortel dezer vergelijking vinden:

$$[(1, 1, 6, 1, 1,), (1, 1, 6, 1, 1,) \; enz.]$$

De kleinste wortel zal even gemakkelijk gevonden worden.

§. 321. Diezelfde leerwijze zal ook strekken kunnen, om den vierkants-wortel uit een wortelloos getal in eene gedurige breuk uitte-drukken. (Vergelijk §. 768, I. C.) Laat gevraagd worden: den vierkants-wortel uit 17 te trekken? dan hebben wij de vergelijking $x^2 - 17 = 0$ optelossen, en dan is $a_1 = 1$, $b = 0$ en $a = 17$ en $N = b^2 + a a_1 = 17$. De algemeene vergelijkingen van §. 317, geven dan:

$$\frac{b + \sqrt{N}}{a_1} = \frac{\sqrt{17}}{1}\text{; derhalve } p_1 = 4$$

en $b_1 = p_1 a_1 - b = 4 \times 1 - 0 = 4$, en $a_2 = \frac{N - b_1^2}{a_1} = \frac{17 - 16}{1} = 1$

Voorts $\frac{b_1 + \sqrt{N}}{a_2} = \frac{4 + \sqrt{17}}{1}$; derhalve $p_2 = 8$

en $b_2 = p_2 a_2 - b_1 = 8 \times 1 - 4 = 4$, en $a_3 = \frac{N - b_2^2}{a_2} = \frac{17 - 16}{1} = 1$

Hieruit blijkt: dat de periode met den tweeden term begint, en slechts uit éénen term bestaat: zoo dat $\sqrt{17} = 4 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{8 + \text{enz.}}}$ zal zijn, gelijk in §. 768, I. C. uit andere beginselen gevonden is.

§. 322. Men kan uit dezelfde beginselen gemakkelijk afleiden: dat, n een geheel getal zijnde,

1° $\sqrt{(n^2 + 1)} = [n, (2n), (2n), (2n), \text{enz.}]$
2° $\sqrt{(n^2 + 2)} = [n, (n, 2n), (n, 2n), \text{enz.}]$
3° $\sqrt{(n^2 + n)} = [n, (2, 2n), (2, 2n), \text{enz.}]$
4° $\sqrt{(n^2 + 2n)} = [n, (1, 2n), (1, 2n), \text{enz.}]$
5° $\sqrt{(n^2 + \frac{1}{2}n)} = [n, (4, 2n), (4, 2n), \text{enz.}]$
6° $\sqrt{\left(n^2 + \frac{2n}{m}\right)} = [n, (m, 2n), (m, 2n), \text{enz.}]$
7° $\sqrt{(n^2 + 2n - 1)} = [n, (1, (n-1),), (1, (n-1),), \text{enz.}]$

NB. De vijf eerste dezer formulen zijn in de zesde begrepen, en kunnen, door m achtervolgens gelijk $2n$, n, 2, 1 en 4 te stellen, uit dezelve worden afgeleid.

§. 322.

§. 323. Dit zijn de formulen, welke onze achtingswaardige en kundige Landgenoot, J. M. C. VAN UTENHOVE, gevonden heeft (65), en waardoor men in vele gevallen den vierkants-wortel uit een worteloos getal, zonder eenige berekening, zal kunnen ontwikkelen in eene gedurige breuk, welke gewonelijk, en dan vooral, wanneer n eén aanmerkelijk groot getal is, eene ſpoedige benadering zal geven. Indien men, bij voorbeeld, den vierkants-wortel uit het getal $1298 = 1296 + 2 = 36^2 + 2$ trekken moet, dan zal men van de tweede formulen kunnen gebruik maken, in welke $n = 36$ is, en

$$\sqrt{1298} = [36, (36, 72,) (36, 72,) \textit{ enz.}]$$

en volgens den regel van §. 768, I. C. zullen de naderende breuken zijn.

	36	36	72	36	72
1	36	1297	93420	3364417	242331444
0	1	36	2593	93384	6726241
+	−	+	−	+	−

de laatſte dezer breuken, die iets te klein is, zal minder dan één, gedeeld door $(6726241)^2$, van de waarheid verſchillen, en, wanneer men dit gebroken ontwikkelt, zal de wortel tot in het veertiende cijfer der tiendeelige breuk naauwkeurig zijn.

Volgens de eerſte formule zal $\sqrt{2} = \sqrt{(1+1)} = [1, 2, 2, 2$, enz.] zijn: men zal nogtans, in plaats van deze breuk, eene andere vinden kunnen, die ſterker aannadert. Bij voorbeeld, de $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ zijnde, zal $\sqrt{2} = \frac{1}{5}\sqrt{50} = \frac{1}{5}\sqrt{(7^2+1)}$ zijn; bijgevolg de

$$\sqrt{2} = \tfrac{1}{5} \times [7, 14, 14, 14, 14, \textit{ enz.}]$$

Insgelijks $\sqrt{363} = 11\sqrt{3}$ zijnde, zal $\sqrt{3} = \frac{1}{11}\sqrt{363} = \ldots \frac{1}{11}\sqrt{(361+2)} = \frac{1}{11}\sqrt{(19^2+2)}$ zijn, en, volgens de tweede formule, zal

$$\sqrt{3} = \tfrac{1}{11} \times [19, (19, 38,), (19, 38,), \textit{ enz.}]$$

zijn. En op gelijke wijze met andere.

§. 324. Stelt men, in de 4de en 7de formulen van den Heer UTENHOVE, $n = p - 1$; dan zullen zij in

$$\sqrt{(p^2-1)} = [(p-1), [1, 2p-2], [1, 2p-2], \textit{ enz.}]$$

$$\text{en } \sqrt{(p^2-2)} = [(p-1), [1, 2p-3], [1, 2p-3], \textit{ enz.}]$$

ver-

(65) Zie deszelfs fraaije oplosſing van de vergelijking $Ax^2 + 1 = y^2$, in het tweede Deel van het *Wiskundig Mengelwerk van het Mathematisch Genootſchap, te Amſterdam*, onder de ſpreuk: *Een onvermoeide arbeid komt alles te boven. pag.* 415.

veranderen. Omdat nu, bij voorbeeld, $\sqrt{9800} = 70\sqrt{2}$ is, zal $\sqrt{2} = \frac{1}{70}\sqrt{(9801-1)} = \frac{1}{70}\sqrt{(99^2-1)}$ zijn, en

$$\sqrt{2} = \tfrac{1}{70} \times [98, (1, 196), (1, 196), \textit{enz.}]$$

zijn. Men zal op deze wijze vele verſchillende rekenwijzen ontdekken kunnen, om de vierkants-wortels uit wortellooſe getallen te vinden.

Men zal nu uit dit verklaarde ligtelijk kunnen opmaken: †† dat, wanneer eene hoogere magts-vergelijking tweede-magts factoren heeft, welker wortels beſtaanbaar zijn, dezelve door de aannaderings leerwijze van den Heer Lagrange, alle kenbaar zullen worden, wanneer eenige vergelijking, welke in de ontwikkeling der termen was voorgekomen, op nieuw terugkeert: dan, wij zullen, over de onbeſtaanbare wortels der vergelijkingen ſprekende, nader op dit onderwerp terugkeeren.

§. 325. De zonderlinge eigenſchap der gedurige breuken, welke de wortels eener vierkants-vergelijking uitdrukken, doen vermoeden: dat de gedurige breuken, waardoor de wortels eener derde, vierde en hoogere magts-vergelijking uitgedrukt worden, aanmerkelijke eigenſchappen bezitten moeten, welker onderzoek waarſchijnlijk vele gewigtige zaken zou ontdekken.

Nader onderzoek van de aannaderingswijze van Newton.

§. 326. Wij hebben, §. 224, gezegd: dat de aannaderingswijze van Newton zeer onzeker is. Het is billijk, dat wij thans de waarheid van dit gezegde door bewijzen ſtaven. Wanneer, zie §. 213, gegeven is vergelijking:

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \textit{enz.} = 0$$

p bijna de waarde van éénen der wortelen is, dan zal, $x = p + z$ ſtellende:

$$z = -\frac{p^n + Ap^{n-1} + Bp^{n-2} + \textit{enz.}}{np^{n-1} + A(n-1)p^{n-2} + B(n-2)p^{n-3} + \textit{enz.}} \quad . \ (\Delta)$$

zijn. Nemen wij nu: dat p eene benaderde waarde van éénen der wortels zij; dan zal men, door de vergelijking (Δ), z berekenen: ſtellende dan in dezelfde vergelijking $p + z$, in plaats van p; dan zal men eene tweede waarde van z vinden: men noeme die z'; dan zal men, op denzelfden voet voortgaande, $p + z + z'$, $p + z + z' + z''$, in plaats van p te ſtellen voor den wortel vinden $p + z + z' + z'' + z''' +$ enz., en men zal alzoo, zoo na men begeert, tot den wortel kunnen na-

naderen (66). Indien men nu op deze aannadering zal kunnen ſtaat maken, moet men verzekerd zijn: dat, wanneer p eene eerst benaderde waarde der vergelijking is, de waarden van $p + z$, $p + z + z'$, enz., welke men bij de tweede, derde en volgende herhalingen verkrijgt, al meer en meer bij den gezogten wortel der vergelijking zullen komen: kan men van deze voorwaarde, in alle gevallen, verzekerd zijn, dan kan men NEWTON's handelwijze, zonder ſchroom, in het werk ſtellen; doch, blijft deze voorwaarde twijfelachtig, ja kan men zelfs bewijzen: dat 'er vele gevallen kunnen zijn, waarin het tegengeſtelde zal moeten plaats hebben, dan kan men die handelwijze niet, dan met omzigtigheid, gebruiken. Wij gaan thans over, om dit alles behoorlijk te onderzoeken.

§. 327. Wanneer men dan in de gegevene vergelijking, in plaats van x, de waarde van $p - z$ ſtelt, en de komende vergelijking naar de opklimmende magten van z ordent, dan zal men hebben:

$$P + Qz + Rz^2 + Sz^3 + enz. = 0$$

en, volgens het betoogde in §. 216. zal:

$$P = p^n + Ap^{n-1} + Bp^{n-2} + enz.$$
$$Q = np^{n-1} + (n-1)Ap^{n-2} + (n-2)Bp^{n-3} + enz.$$

moeten zijn. Stellen wij nu: dat de wortels van de vergelijking $x^n + Ax^{n-1} + enz. = 0$, zijn a, b, c, d, enz.; dan zal de vergelijking in z even zoo vele wortels hebben als de vergelijking in x; en men zou, door de vergelijking in z regtſtreeks optelosſen, n onderſcheidene waardijen van z vinden, welke, bij het getal p opgeteld zijnde, de wortels van de vergelijking in x geven zouden. Nogtans is, in de leerwijze van NEWTON, z alleen betrekkelijk tot éénen bepaalden wortel, en deze ééne bedenking moet al ten eerſte eenige twijfeling doen ontſtaan, tot welken wortel de verbetering z behooren zal? Maar wij zullen ons nader verklaren. Volgens het bewezene in §. 210. is P gelijk aan het product van alle de wortels van de vergelijking in z, en Q gelijk aan de ſom van alle producten van diezelfde wortels, $n - 1$ aan $n - 1$ maal genomen: daar nu de wortels van de vergelijking (x), a, b, c, d, enz. zijn; zijn de wortels van de vergelijking in (z),

(66) Deze is eigenlijk de leerwijze, zoo als RAPHSON dezelve, in zijne *Analyſis æquationum univerſalis*, in 1690, te London, gedrukt, heeft opgegeven. Zij kan als eene vereenvoudiging van NEWTONS handelwijze, welke dezelve eenigzins anders behandelde, aangemerkt worden.

(z), als volgt: $(p-a)$, $(p-b)$, $(p-c)$, enz., en wij hebben derhalve:

$$P=(p-a).(p-b).(p-c).(p-d).\ enz.$$

$$Q=(p-a).(p-b).(p-c).enz.+(p-b).(p-c).(p-d).enz.$$
$$+(p-a).(p-c).(p-d).enz.+(p-a).(p-b).(p-d).enz.$$

en deelende nu de laatste door de eerste vergelijking, dan zal:

$$\frac{Q}{P}=\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}+\frac{1}{p-d}+enz.$$

moeten zijn, en daar $z=-\frac{P}{Q}$ is, zal men hebben:

$$z=-\frac{1}{\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}+\frac{1}{p-d}+enz.}$$

$$\text{of } z=+\frac{1}{\frac{1}{a-p}+\frac{1}{b-p}+\frac{1}{c-p}+\frac{1}{d-p}+enz.}$$

Nemen wij nu: dat a de wortel is, dien men zoekt; dan zal, het zij p eene naast grootere of kleinere waarde van dien wortel zij, $a-p$ het onderscheid tusschen den waren en eerst gegisten wortel zijn, en de deugdzaamheid der benadering zal vorderen, dat $a-(p+z)$, of $a-p-z$, kleiner dan $a-p$; of

$$\frac{1}{a-p-z} \text{ grooter dan } \frac{1}{a-p}$$

zij. Stellen wij dan, kortheidshalve

$$N=\frac{1}{b-p}+\frac{1}{c-p}+\frac{1}{d-p}+enz.$$

dan zal:

$$a-p-z=a-p-\frac{1}{\frac{1}{a-p}+N}=\frac{N(a-p)}{\frac{1}{a-p}+N}$$

zijn; bijgevolg

$$\frac{1}{a-p-z}=\frac{\frac{1}{a-p}+N}{N(a-p)}=\frac{1}{a-p}+\frac{1}{(a-p)^2\times N}$$

Hieruit volgt nu: 1° dat, wanneer N met hetzelfde teeken als $(a-p)$ is aangedaan, de waarde van $a-p-z$ ook hetzelfde teeken hebben zal, en dat, in dit geval, de vereischte voorwaarde zal plaats hebben. 2° Dat, wanneer $a-p$ en N verschillende teekens hebben, als dan

$$\frac{1}{(a-p-z)^2} \text{ grooter dan } \frac{1}{(a-p)^2}$$

zal moeten zijn. Indien men nu de voorgaande vergelijking in het vierkant brengt, dan zal

$$\frac{1}{(a-p-z)^2} = \frac{1}{(a-p)^2} + \frac{2}{(a-p)^3 N} + \frac{1}{(a-p)^4 N^2}$$

zijn: derhalve zal

$$\frac{2}{(a-p)^3 N} + \frac{1}{(a-p)^4 N^2}$$

grooter dan nul moeten zijn, of wel

$$2(a-p) \times N + 1 > 0$$

Daar nu de waarde van N van de andere wortels b, c, d, e, enz. afhangt, is het moeijelijk (67) een kenmerk te vinden, waaruit het blijken kan, of de gestelde voorwaarde, bij eenige benadering, vervuld zij? Voor het overige, zou het gemakkelijk zijn, om vele voorbeelden bij te brengen, in welke men, deze voorwaarde niet vervuld zijnde, in plaats van tot den gezogten wortel te naderen, integendeel van denzelven zou afwijken.

§. 328. Het is dan alleenlijk in het eerste geval, wanneer namelijk de gegiste waarde p of grooter of kleiner dan alle de wortels der gegevene vergelijking is, (de grootste negatieve wortel als de kleinste aanmerkende,) waarin men met veiligheid op de aannadering zal kunnen staat maken: ja, men kan 'er ook bijvoegen: dat ook zelfs p of grooter of kleiner dan de bestaanbare deelen der onbestaanbare wortels moet zijn. Men kan alle deze verdere omstandigheden in het breede in LAGRANGE's *Résolutions des Equations numériques*, *pag.* 140, *et seq.* verklaard vinden; welke, zoo als zij aldaar voorkomen, de leerwijze van NEWTON, zoo als zij gewonelijk wordt in het werk gesteld, naar waarheid, als een onveilig hulpmiddel doet voorkomen.

§. 329. Evenwel kunnen wij, tot genoegen van de voorstanders der Newtoniaansche benadering, verklaren: dat in de schoone leerwijze van LAGRANGE, zonder dat die groote man het doet opmerken, den weg gebaand is, om, na eene kleine herleiding, de aannadering van NEWTON tot de benadering van alle de wortels eener vergelijking bruikbaar te maken, door de benadering van elken wortel van de benadering van den

(67) Ja misschien wel onmogelijk, voegt 'er LAGRANGE bij. Dat men intusschen zulk een nader kenmerk missen kan, en echter NEWTON's leerwijze veilig gebruiken, zal straks buiten twijfel gesteld worden.

den grootsten wortel eener vergelijking, die uit de gegevene afgeleid wordt, te doen afhangen; waardoor dan de betoogde voorwaarde in zoo verre vervuld wordt, dat men, met volkomene zekerheid, op de juistheid der benadering zal kunnen staat maken.

§. 330. Laat, om deze kunstgreep aantewijzen,

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0$$

eene vergelijking zijn. Stel: dat men, door den algorithmus van BUDAN, gevonden hebbe, dat, van den kleinsten tot den grootsten wortel, de wortels tusschen a en $a+1$; b en $b+1$; c en $c+1$; d en $d+1$; vallen, en bepalen wij ons tot het benaderen des wortels, die tusschen b en $b+1$ valt; dan zal men, zie §. 304, den wortel der vergelijking

$$A'(x-b)^4 + B'(x-b)^3 + C'(x-b)^2 + D'(x-b) + E' = 0$$

welken tusschen één en nul valt, (want deze heeft nog twee grootere die tusschen $c-b$ en $c-b-1$, $d-b$ en $d-b-1$ vallen,) moeten oplossen; of wel, $x-b=y$ stellende, de vergelijking

$$A'y^4 + B'y^3 + C'y^2 + D'y + E' = 0$$

stellende dan $y = 1 : z$, dan zal de vergelijking

$$E'z^4 + D'z^3 + C'z^2 + B'z + A' = 0$$

zie §. 305 en 306, eenen wortel hebben die grooter dan één is, en de grenzen van dien wortel zullen, volgens BUDAN's algorithmus, spoedig gevonden worden. Wij onderstellen hier: dat 'er slechts éénen wortel tusschen nul en één besta: zulks zoo zijnde, zal de vergelijking in (z) wel even zoo vele wortels hebben, als de vergelijking in (x); maar de wortel van z, die hier in het bijzonder, om de waarde van b te benaderen, moet gezogt worden, is juist de grootste wortel der vergelijking in (z); want, omdat $a < b$ is, is de wortel a der vergelijking (x) voorzeker in de vergelijking (y) negatief en stemt met eenen negatieven wortel van de vergelijking in (z) overëën, en wat de wortels c en d aangaat, deze stemmen de vergelijking in (z) met gebrokene wortels overëën, (raagpleeg §. 306.). De wortel z, die men, naar de gewone ontwikkeling van LAGRANGE zoeken zou, is dus de grootste en zal in alle omstandigheden de grootste zijn. Wanneer dan $z > p$ en $< p+1$ is, en z voor eene eerste benadering gelijk $p+1$, als benaderende waarde, gesteld wordt; dan zal men, van deze onderstelling afgaande, den wortel der vergelijking in (z), als grootste, onder de vereischte verzekering, naar de leerwijze van NEWTON kunnen benaderen. Ook is het op deze wijze, dat wij pag. 147. de wortels der vergelijking $x^4 + 2x^3 - 47x^2 - 47x + 252 = 0$ gevonden

heb-

hebben. — Wanneer de vergelijking in (z) meer dan éénen wortel tusschen nul en één mogt hebben, die, bij voorbeeld, tusschen q en $q+1$, r en $r+1$, s en $s+1$, vallen, dan zou men in dit geval tot eene afleiding verder gaan, en de vergelijkingen in ($z-q$), ($z-r$), ($z-s$), enz. op denzelfden voet behandelen. Op deze wijze, en op geene andere, zal men derhalve, met veiligheid, zoo op de leerwijze van NEWTON, als op die van DE COURTRIVON, en op die van SIMPSON, kunnen staat maken.

§. 331. Wij kunnen, uit al het verhandelde, in deze en de voorgaande Les, besluiten: 1° dat de leerwijze van BUDAN de grenzen van alle wortels op eene voldoende wijze bepaalt. 2° Dat de aannadering van LAGRANGE, wegens hare fraaiheid en algemeenheid, de beste is; en 3°, dat die van NEWTON, na eene behoorlijke voorbereiding, veilig kan gebruikt worden. Indien 'er in het vervolg van tijd betere ontdekt worden, zullen zij voorzeker op deze gronden moeten berusten: met betrekking tot de zekerheid der uitkomsten, is alles gedaan, wat men verlangen kan: ten opzigte van het min werkzame, zal men altijd verbetering blijven hopen: dan, wanneer men in aanmerking neemt, dat de wortels eener vergelijking van alle hare coefficienten afhangen, gevoelt men ligtelijk, dat alle verbetering nogtans altijd zoo werkzaam blijven zal, als tot het in rekening brengen van alle die bekenden, waarvan de wortels afhangen, zal noodig zijn.

VIJFTIGSTE LES.

Over het vinden van de gemeenes deeler der stelkundige uitdrukkingen.

§. 332. In de XVI *Les*, I. C. een denkbeeld van de gemeene deelers der getallen gegeven, en derzelver uitvinding geleerd hebbende, kunnen wij, daar de gemeene deelers der stelkundige uitdrukkingen in aard en eigenschappen van die der getallen niet onderscheiden zijn, op deze bekende gronden, voortgaan, en ons thans met de navorsching van de gemeene deelers der stelkundige uitdrukkingen bezig houden.

De gronden, op welke de oplosfing van dit gewigtig vraagftuk berust, zijn meerendeels verklaard, en in het gemeen de twee volgende:

§. 333. 1° †† *Elk getal, hetwelk een deeler van twee andere getallen is, is ook te gelijk een deeler van derzelver veelvouden, gelijk ook van de fom en het verfchil dezer veelvouden.* *Zie* §§. 193, 194, 195 *en* 196, *I. C.*

§. 334. 2° †† *Om den grootften gemeenen deeler van een zeker aantal getallen te vinden, is het genoeg, dat men denzelven tusfchen twee getallen vinden kan.* Zie §. 263, I. C.

§. 335. Wat nu het vinden van de gemeene deelers der ftelkundige uitdrukkingen belangt, deze uitdrukkingen moeten begrepen worden, onder de volgende vormen te kunnen voorkomen. 1° *Wanneer beide de uitdrukkingen éénledig zijn;* 2° *Wanneer de eene éénledig en de andere veelledig is;* 3° *Wanneer beide de uitdrukkingen veelledig zijn.* Wanneer 'er, in de twee eerfte gevallen, gemeene deelers beftaan, dan loopen deze van zelven in het oog; want, vermits aan de letters, in de ftelkundige uitdrukkingen, alle waardijen kunnen gegeven worden, zoo zullen twee onderfcheidene letters nimmer kunnen gehouden worden, op eene algemeene wijze, onderling deelbaar te zijn: de gemeene deelers zullen derhalve moeten opgemaakt worden: 1° uit de gemeene deelers der getallen coefficienten; en 2°, uit de gelijke letters, welke in beide uitdrukkingen, onder de eerfte, of onder eene hoogere magt, voorkomen. †† *De gemeene deeler der twee gegevene uitdrukkingen zal bijgevolg het product van alle de bijzondere gemeene deelers, zoo der getallen coefficienten, als der factoren, zijn, welke men in de twee gegevene uitdrukkingen zal ontdekt hebben.* (zie §. 191, I. C.) Laten, om zulks optehelderen, gegeven zijn de uitdrukkingen: $117\,abx^2y^2$ en $300bx\,y^2z$; dan hebben vooreerst de coefficienten het getal 3 tot gemeenen deeler. De letter a wordt in de tweede uitdrukking niet gevonden, en zij kan derhalve geen gemeene deeler zijn; de letter b, als deeler van elk der uitdrukkingen, is een gemeene deeler; op dezelve wijze, zijn x^2 en y^2 gemeene deelers; de grootfte gemeene deeler zal dan $3 \times b \times$

$x^2 \times$

$x^2 \times y^2$, of $3bx^2y^2$ zijn; en zulks voor alle waarden, welke aan de letters b, x en y gegeven worden. Indien gegeven zijn: de éénledige uitdrukking: $18\,a^3b^2x^3$, en de veelledige: $27\,a^2b^2x^4 - 33\,ab^2x^5 + 18\,a^2b^2x^3$; dan befpeurt men: dat de gemeene deeler dezer twee uitdrukkingen tevens een gemeene deeler van de termen der tweede zal zijn: indien derhalve de termen dezer tweede geenen gemeenen deeler hebben, zullen de gegevene uitdrukkingen 'er insgelijks geenen hebben: men zoeke diensvolgens den gemeenen deeler der termen $+27\,a^2b^2x^4$ en $-33\,ab^2x^5$: deze is $3ab^2x^4$; voorts den gemeenen deeler tusfchen $3ab^2x^4$ en $18\,a^2b^2x^3$; en deze is: $3\,ab^2x^3$, en nu zal de tweede uitdrukking door $3\,ab^2x^3$ deelbaar zijn. Men zoeke dan eindelijk den gemeenen deeler van de eerfte uitdrukking $18\,a^3b^2x^3$ en den laatst gevonden deeler $3\,ab^2x^3$: deze $3\,ab^2x^3$ zijnde, zal $3\,ab^2x^3$ de gevraagde gemeene deeler zijn.

§. 336. In dit alles is, daar het zich van zelven wijst, niets moeijelijks gelegen: wij zullen daarom tot het onderzoek van de gemeene deelers der veelledige uitdrukkingen overgaan. Deze deelers kunnen nu éénledig of veelledig zijn. Zijn zij éénledig, dan worden zij, even als in het tweede geval, bijna met éénen opflag van het oog gevonden. Wij moeten nogtans herinneren: dat men, alvorens het onderzoek der veelledige deelers in het werk te ftellen, omtrent de éénledige onderzoek doen moet, en dezelve, indien zij voorkomen, verwerpen, omdat het onderzoek der veelledige gemeene deelers doorgaans gemakkelijker valt, na dat men de gegevene uitdrukkingen van de gemeenfchappelijke éénledige gemeene deelers, die dezelve kunnen hebben, gezuiverd heeft.

§. 337. In het onderzoek van de veelledige gemeene deelers, onderftellen wij: dat de uitdrukkingen naar de magten eener letter geordend zijn. Het is onnodig te doen opmerken: dat de gemeene deeler ook in dezelfde rangordening zal moeten voorkomen. Laat x die letter zijn, welke altijd als eene veranderlijke grootheid kan aangemerkt worden; dan zullen de uitdrukkingen met derzelver gemeenen deeler van den vorm

Gegevene uitdrukkingen

$$A x^n + B x^{n-1} + C x^{n-2} + D x^{n-3} + \text{enz.} + P x + Q$$
$$a x^m + b x^{m-1} + c x^{m-2} + d x^{m-3} + \text{enz.} + p x + q$$

Gemeene deeler

$$\alpha x^r + \beta x^{r-1} + \gamma x^{r-2} + \text{enz.} + \mu x + \nu$$

moeten zijn; zijnde de coefficienten, of bepaälde getallen, of uitdrukkingen, welke van ééne of meer veranderlijke grootheden y, z, enz. benevens van eenige ſtandvastige kunnen afhangen. Het eerſte dat dan zal behooren gedaan te worden, zal zijn te onderzoeken: of de coefficienten der gegevene uitdrukkingen eenen gemeenen deeler hebben, en ingeval deze werkelijk beſtaat, zal men elke uitdrukking, in het bijzonder, eerst door denzelven deelen: en voorts den veelledigen gemeenen deeler der quotienten, die nu van den vorm

$$A' x^{n-1} + B' x^{n-1} + \text{enz.} + P' x + Q'$$
$$a' x^{m-1} + b' x^{m-1} + \text{enz.} + p' x + q'$$

zullen zijn, trachten te bepalen.

§. 338. Dit onderzoek is nu gegrond op het algemeene beginſel: †† *dat de grootſte gemeene deeler van twee uitdrukkingen, noch van vorm, noch van waarde, veranderen zal, wanneer men, of éëne, of beide uitdrukkingen met eene éénledige vermenigvuldigt of deelt, en de producten of quotienten optelt, aftrekt, of, op eenigerlei wijze, met elkander verbindt of zamenvoegt.*

Wanneer men het betoogde, in §. 258, I. C. wel verſtaan heeft, zal men dit geſtelde, bij een weinig opheldering, als een onmiddelijk gevolg van hetzelve aanmerken. Stellen wij, bij voorbeeld, dat $x^2 + r x + s$ een gemeene deeler zij: noemen wij de gegevene uitdrukkingen X en X': de quotienten die ontſtaan, wanneer elk derzelve, door den gemeenen deeler gedeeld wordt, R en R': dan zal

$$X = (x^2 + r x + s) \times R$$
$$X' = (x^2 + r x + s) \times R'$$

moeten zijn. Nu is het klaar: dat, wanneer men éëne dezer uitdrukkingen met eene éénledige uitdrukking U, ook zelfs met zulk eene, waarin eenige magt van de letter x voorkomt, als $U x^h$, vermenigvuldigt, dit product met de andere uitdrukking den deeler $x^2 + r x + s$ gemeen zal hebben: hetzelfde zal ook van de andere uitdrukking gelden,

den, wanneer zij met eenige uitdrukking V vermenigvuldigd wordt: diensvolgens bestaat in de producten

$$U x^k \times (x^2 + r x + s) \times R$$
$$V x^l \times (x^2 + r x + s) \times R'$$

nog dezelfde onveranderde gemeene deeler; waaruit volgt: dat, wanneer men denzelven gevonden heeft, tevens die van de gegevene uitdrukkingen zal bekend geworden zijn. Men kan 'er bijvoegen: dat de uitdrukkingen U en V zelf veelledig, en van den vorm $x^r + p x^{r-1} +$ enz. kunnen zijn; en dat, indien men slechts zorg draagt, dat deze factoren geenen onderlingen gemeenen deeler, en voorts U met R' en V met R insgelijks geenen gemeenen deeler hebben, evenwel het gestelde nog plaats zal hebben.

§. 339. Volgens dit beginsel, zal men den Regel van §. 260, I. C. gegrond op het bewezene in §. 258. met eenige, naar den aard der stelkundige uitdrukkingen gepaste, veranderingen, op het onderzoek van eenen veelledigen gemeenen deeler kunnen toepassen. Stellen wij: dat de gegevene uitdrukkingen (van derzelver éénledige deelers gezuiverd zijnde,) zijn M en N; dan zal men dezen Regel volgen

ALGEMEENE REGEL. 1° „ *Rangschikt alle de termen der* „ *twee gegevene uitdrukkingen, naar de afdalende magten* „ *der veranderlijke grootheid x; dan zullen deze uitdrukkingen of tot dezelfde, of tot verschillende magten opklimmen.*"

2° „ *In het eerste geval, deelt men de ééne door de andere; (om het even, welke voor deeler verstrekt,) in het tweede, de uitdrukking, waarin de hoogste magt van x voorkomt, door de andere: alles volgens den regel, voor de divisie der stelkundige uitdrukkingen, in §. 58, voorgeschreven; en, daar men meestal, bij deze eerste bewerking, geen opgaand quotient vinden zal, zet men deze deeling zoo ver voort, als in §. 62. is aangewezen. Zonder nu, in deze deeling, op het quotient te letten, zullen wij derzelver rest door P uitdrukken.*"

3° „ *Omtrent dit eerste gedeelte der bewerking, gelijk ook* „ *omtrent alle de volgende, moet men in het algemeen aanmerken: dat de hoogste termen meestal met onderscheidene*

P 5 „ ge-

,, *getallen of letter-coëfficienten zijn aangedaan, en dat men*
,, *in dit geval natuurlijk gebrokene termen in het quotient*
,, *verkrijgen zal, welke omſtandigheid de uitvoering, vooral*
,, *voor die geenen, die niet gaarne met gebrokens te doen*
,, *hebben, lastig maakt. In dit geval zal men:* 1° *of alles*
,, *laten zoo als het is, en naar de regels, die voor de gebro-*
,, *kens voorgeſchreven zijn, de diviſien volbrengen: of* 2° *bei-*
,, *de uitdrukkingen, ten einde de gebrokens te vermijden,*
,, *vooraf vermenigvuldigen met de quotienten, die men ver-*
,, *krijgt, wanneer men het kleinſte gemeene veelvoud van de*
,, *coëfficienten van de hoogſte termen der gegevene uitdrukkin-*
,, *gen respectievelijk door die coëfficienten deelt: hierdoor zal*
,, *wel eene verandering in het quotient der diviſie geboren*
,, *worden; doch, volgens het bewezene, in* §. 238, *zal de ge-*
,, *meene deeler onveranderd blijven.*"

4° ,, *Volgens den aard der ſtelkundige deeling, zal de ver-*
,, *anderlijke grootheid x, in de rest P dezer eerſte bewerking,*
,, *tot eene lagere magt dan in elk der gegevene uitdrukkingen*
,, *opklimmen; daar nu deze rest noodzakelijk denzelfden dee-*
,, *ler met de gegevene uitdrukkingen M en N gemeen heeft,*
,, *zal, indien N, bij voorbeeld, van eene lagere magt dan*
,, *M is, het onderzoek van den gemeenen deeler van M en*
,, *N gebragt zijn tot het zoeken van den gemeenen deeler*
,, *van de uitdrukkingen N en P, welke van eene lagere magt*
,, *dan de gegevene zijnde, gevolgelijk minder termen bevatten,*
,, *en gemakkelijker te behandelen zullen zijn. Men deele dan*
,, *N door P, alles behandelende, als in het derde gedeelte*
,, *voorgeſchreven is.*"

5° ,, *Stel: dat de rest dezer tweede diviſie Q zij: dan zal*
,, *deze rest wederom van eene lagere magt zijn, en zal Q*
,, *met P, N en M denzelfden deeler wederom gemeen hebben.*
,, *Zoodat, wanneer men dan den gemeenen deeler van P en*
,, *Q gevonden heeft, die van de gegevene uitdrukkingen,*
,, *M en N, zal bekend zijn.*"

6° ,, *Het ſpreekt van zelven: dat, wanneer men op deze*
,, *wijze voortgaat, de resten R, S, T, enz. der volgende*
,, *deelingen (altijd den laatſten deeler door het laatst verkre-*

,, *ge-*

„ *gene overschot deelende,) telkens van eene lagere magt zul-*
„ *len zijn.*"

7° „ *Men moet wel acht geven: dat men elk overschot van*
„ *de geheele of gebrokene factoren, die aan alle termen van*
„ *hetzelve gemeen zijn, zuivere; want, omdat hierdoor de ge-*
„ *meene deeler onveranderd blijft, zal men, het gezuiverde over-*
„ *schot, in plaats van het verkregene, gebruikende, met den*
„ *minst mogelijken omslag, het onderzoek ten einde brengen.*"

8° „ *Wanneer 'er een twee- of veelledige deeler bestaat,*
„ *zal dezelve daaraan kenbaar worden, wanneer het overschot*
„ *van eenige deeling den deeler van de laatst voorgaande di-*
„ *visie volkomen deelt: dit overschot, gezuiverd van den ge-*
„ *meenen deeler, welke derzelver coefficienten hebben kun-*
„ *nen, zal noodzakelijk de groote gemeene deeler der gege-*
„ *vene uitdrukkingen zijn.*"

9° „ *Komt men men op een overschot, dat een bloot getal, of*
„ *eene éénledige uitdrukking is, en dat gevolgelijk bevrijd is*
„ *van alle zamenstelling der veranderlijke grootheid x, zal*
„ *zulks tot een bewijs verstrekken: dat 'er geen twee- of veel-*
„ *ledige gemeene deeler bestaat.*"

§. 340. 1. VOORBEELD. *Den gemeenen deeler van de uitdrukkingen* $4x^3 - 2x^2 + 5x - 7$ *en* $2x^3 - 10x + 9x - 1$ *te vinden?*

Men deele de eerste uitdrukking door de tweede; dan vindt men voor het quotient 2, en voor de rest der deeling $18x^2 - 13x - 5$.

Nu deele men den deeler der eerste deeling $2x^3 - 10x^2 + 9x - 1$ door $18x^2 - 13x - 5$: hetgeen regtstreeks aldus geschiedt:

$$
\begin{array}{l|l}
18x^2 - 13x - 5 & 2x^3 - 10x^2 + 9x - 1 \left\{ \tfrac{1}{9}x - \tfrac{77}{162} \text{ quotient} \right. \\
 & 2x^3 - \tfrac{13}{9}x^2 - \tfrac{5}{9}x \\ \hline
 & \quad - \tfrac{77}{9}x^2 + \tfrac{86}{9}x - 1 \\
 & \quad - \tfrac{77}{9}x^2 + \tfrac{1001}{162}x + \tfrac{385}{162} \\ \hline
\textit{rest der deeling} \;\ldots\ldots & \quad \tfrac{547}{162}x - \tfrac{547}{162} = \tfrac{547}{162} \times (x - 1)
\end{array}
$$

Deze deeling heeft niets vreemds; uitgezonderd, dat men, in den loop harer bewerking, de behandeling der breuken verstaan moet. Bij de eerste bewerking, vraagt men: hoeveelmaal is $18x^2$ op $2x^3$ begrepen? komt $\frac{1}{9}x$: als naar gewoonte, wordt de deeler $18x^2 - 13x - 5$ met dit quotient $\frac{1}{9}x$ vermenigvuldigd, en het product $2x^3$ —

$-\frac{13}{9}x^2 - \frac{5}{9}x$ van het deeltal afgetrokken. Wederom vraagt men: hoeveelmaal is $18x^2$ op $-\frac{77}{9}x^2$ begrepen? komt $-\frac{77}{162}$ enz.

Men kan nu uit de rest der deeling den factor $\frac{547}{162}$, die aan derzelver termen gemeen is, weglaten, en den voorgaanden deeler, $18x^2 - 13x - 5$, door $x - 1$ deelen. Deze deeling gaat volmaakt op: men mag dan daaruit besluiten: dat $x - 1$ de gemeene deeler der gegevene uitdrukkingen is, zoo als ook, bij de proef, blijken zal.

Wil men echter de gebrokens vermijden; dan zal men, na de eerste deeling, aldus te werk gaan:

$$\begin{array}{lllll}
\textit{deeler} \ldots & 18x^2 - 13x - 5 & & \\
\textit{deeltal} \ldots & 2x^3 - 10x^2 + 9x - 1 & & \\
 & 18x^3 - 90x^2 + 81x + 9 & = 9 \textit{ maal het deeltal} \\
\textit{af} & \underline{18x^3 - 13x^2 - 5x} & = x \textit{ maal den deeler} \\
\textit{rest} & \ldots -77x^2 + 86x + 9 & \\
 & -77 \times 18x^2 + 1548x - 162 & = 18 \textit{ maal de rest} \\
 & \underline{-77 \times 18x^2 + 1001x + 385} & = 77 \textit{ maal den deeler} \\
 & \textit{tweede rest} \ldots 547x - 547 & = 547 \times (x - 1)
\end{array}$$

In deze bewerking vermenigvuldigt men het deeltal met 9, om den coefficient van den hoogsten term des deeltals door dien des deelers deelbaar te maken. Men vraagt dan: hoeveelmaal is $18x^2$ op $18x^3$ begrepen? komt x maal; men trekt x maal den deeler van 9 maal het deeltal af, rest $-77x^2 + 86x - 9$. Deze rest vermenigvuldigt men op nieuw met 18, om den coefficient van derzelver hoogsten term door dien des deelers deelbaar te maken, en men vraagt: hoeveelmaal is $18x^2$ op $-77 \times 18x^2$ begrepen? komt -77 maal, en men vindt, voor de tweede rest, $547(x-1)$ enz.

2. Voorbeeld. *Den gemeenen deeler van de uitdrukkingen* $2x^4 - 3x^3 - 28x^2 + 75x - 91$ *en* $10x^3 - 41x^2 + 43x - 77$ *te vinden?*

De eerste bewerking geeft:

$$\begin{array}{lll}
\textit{deeler} & 10x^3 - 41x^2 + 43x + 77 & \\
\textit{deeltal} & 2x^4 - 3x^3 - 28x^2 + 75x - 91 & \\
 & 10x^4 - 15x^3 - 140x^2 + 375x - 455 & = 5 \textit{ maal het deeltal} \\
\textit{af} & \underline{10x^4 - 41x^3 + 43x^2 - 77x} & = x \textit{ maal den deeler} \\
\textit{rest} \ldots & + 26x^3 - 183x^2 + 452x - 455 & \\
 & + 130x^3 - 915x^2 + 2260x - 2275 & = 5 \textit{ maal deze rest} \\
\textit{af} \ . & \underline{+ 130x^3 - 533x^2 + 559x - 1001} & = 13 \textit{ maal den deeler}
\end{array}$$

rest der eerste deeling $-382x^2 + 1701x - 1274$, welker coefficienten geenen gemeenen deeler hebben,

In

In de tweede bewerking heeft men:

deeler $-382x^2+1701x-1274$

deeltal $10x^3-41x^2+43x-77$

$+1910x^3-7831x^2+8213x-14707=191$ *maal het deeltal*

$+1910x^3-8505x^2+6370x\ \ldots=-5x$ *maal den deeler*

eerste rest . . $+674x^2+1843x-14707$

$257468x^2+704026x-5618074=382$ *m. de eerste rest*

af $257468x^2-1146474x+858676=-674$ *maal d. deel.*

rest . . . $1850500x-6476750$

De gemeene deeler van de termen dezer rest is 925250: men kan dan in plaats van denzelven stellen: $925250\times(2x-7)$.

Nu moet nog den laatsten deeler $-382x^2+1701x-1274$ door $2x-7$ gedeeld worden. Het quotient is $-191x+182$ en de deeling gaat juist op. Men besluit dan: dat $2x-7$ de grootste gemeene deeler der gegevene uitdrukkingen is.

3. Voorbeeld. *De gemeene deelers van* $36a^2x^6-18a^2x^5-27a^2x^4+9a^2x^3$ *en* $27a^2x^5-9a^2x^3-18a^2x^4$ *te vinden?*

De grootste gemeene deeler der getallen coefficienten is 9; voorts zijn alle de leden der twee gegevene uitdrukkingen nog deelbaar door a^2x^3; de geheele éénledige gemeene deeler is derhalve $9a^2x^3$. De gegevene uitdrukkingen door denzelven deelende, verkrijgt men:

$$4x^3-2x^2-3x+1$$

en . . . $$3x^2-2x-1$$

welker gemeene deeler zal bevonden worden te zijn $x-1$. De gemeene deeler der gegevene uitkrukkingen is alzoo $3a^2x^3(x-1)$.

4. Voorbeeld. *Den grootsten gemeenen deeler van* $21a^2b^3-18ab^4+9a^3b^2+36ab^3c-18a^3bc-42a^2b^2c$, *en* $18ab^2c-30a^2bc+15a^2b^2-9ab^3$ *te vinden?*

De gegevene uitdrukkingen zijn beide door $3ab$ deelbaar, en de quotienten, naar de magten van de letter a ordenende, verkrijgt men:

$$(3b-6c).a^2+(7b^2-14bc)a+(12b^2c-6b^3)$$

en $$(5b-10c)a+(6bc-3b^2)$$

De gemeene deeler van de coefficienten der magten van a is $b-2c$: de gegevene uitdrukkingen door denzelven deelende, verkrijgt men:

$$3a^2+7ba-6b^2$$

en $$5a-3b$$

deze twee uitdrukkingen geenen gemeenen deeler hebbende, zal de gemeene deeler der twee gegevene uitdrukkingen $3ab(b-c)$ zijn.

5. Voor-

5. VOORBEELD. *Den grootsten gemeenen deeler van* $(14\,b^3\,c\,d - 28\,b^2\,c\,d - 14\,b\,c\,d + 28\,c\,d)\,a + (21\,b^2\,c\,d - 21\,c\,d)$ . . . . $- \frac{14\,b^3\,c\,d - 14\,b\,c\,d - 7\,b^2\,c\,d + 7\,c\,d}{a^2}$, *en van* . . . . .

$$(21\,b^3\,cd - 84\,b^2\,cd + 105\,bcd - 42\,cd) + \frac{49\,b^2\,cd - 98\,bcd + 49\,cd}{a}$$

$- \frac{21\,b^3 . c\,d - 35\,b^2\,c\,d + 7\,b\,c\,d + 7\,c\,d}{a^2}$ *te vinden?*

Men zal, om de breuken weg te maken, elk der twee gegevene uitdrukkingen met a^2 vermenigvuldigen: daarna, zal men bevinden: dat alle de coefficienten van de magten van a door $7\,c\,d$ deelbaar zijn: dezelve dan door dien deeler deelende, zal het blijken: dat de coefficienten nogmaals alle door $b - 1$ deelbaar zijn: daarna zal men bevinden: dat $a - 1$ nog een gemeene deeler is: men zal dan voor den gemeenen deeler der gegevene uitdrukking verkrijgen:

$$\frac{7\,c\,d}{a^2} \times (b - 1) \times (a - 1).$$

§. 341. Het is noodzakelijk: dat wij nog eenige oogenblikken blijven stilstaan bij de uitdrukkingen, die van twee en meer veranderlijke grootheden x, y, z, enz. afhangen, en bij het bepalen van derzelver gemeene deelers; want, offchoon de algemeene regel tot dat einde wel voldoende is, zou het nogtans gebeuren kunnen, dat een eerstbeginnende daarin zwarigheden ontmoettede, welke, daar het vinden van de gemeene deelers van die soort van uitdrukkingen met het verdrijven der onbekenden ten naauwste verbonden is, wel degelijk behooren opgeheven te worden.

§. 342. * Eene uitdrukking, welke van éénе, twee of meer veranderlijke grootheden afhangt, wordt eene *functie van die veranderlijke grootheden* genoemd. Alzoo zijn x^n, $a\,x^n + b\,x^{n-p}$ functien van x; en $a\,x^2 - b\,x\,y$ eene functie van x en y.

§. 343. †† Gelijk elke functie van ééne veranderlijke grootheid, volgens §. 58. naar de opklimmende of afdalende magten van die veranderlijke grootheid, geordend kan worden; even zoo zal men ook elke functie van twee veranderlijke grootheden x en y, naar de opklimmende of afdalende magten van ééne dezer twee veranderlijke grootheden, ordenen kun-

kunnen. Eene functie van x en y zal, naar de afdalende magten van x geordend zijnde, van den vorm

$$P x^n + Q x^{n-1} + R x^{n-2} + enz. + T x + V$$

zijn, en dan zullen de coefficienten P, Q, enz. als functien van y moeten aangemerkt worden. Ordent men diezelfde functie, naar de afdalende magten van y, dan zal zij van den vorm

$$p y^n + q y^{n-1} + r y^{n-2} + enz. + t y + v$$

zijn; terwijl de coefficienten p, q, r, t, v, in dit geval, functien van de veranderlijke grootheid x zullen zijn.

§. 344. Niets is eenvoudiger dan eene functie van twee veranderlijke grootheden, naar ééne der veranderlijke grootheden, te ordenen. „ *Men verzamelt tot dat einde alle de termen, in welke dezelfde magten van dezelfde veranderlijke grootheid voorkomen, welke termen, naar* §. 449 *en* §. 474. *I. C., tot éénen term verëënigd worden, welker coefficienten nogtans, naar de opklimmende of afdalende magten, van de andere veranderlijke grootheid geordend worden.*"

§. 345. Laat, bij voorbeeld, gegeven zijn de uitdrukking: $5 x^3 - 3 y^3 + 7 x^2 y - 9 x y^2 - 3 x^2 - 13 x - 11 y^2 + 8 y - 17 x y - 137$; dan zal deze ongeordende uitdrukking, naar de afdalende magten van x geordend zijnde, den volgenden vorm verkrijgen:

$$5 x^3 + (7y - 3) x^2 - (9y^2 + 17y + 13) x - (3y^3 + 11y^2 - 8y + 137)$$

uitdrukking, welke somtijds ook aldus geschreven wordt:

$$5 x^3 \left.\begin{array}{l} + 7y \\ - 3 \end{array}\right\} x^2 \left.\begin{array}{l} - 9y^2 \\ - 17y \\ - 13 \end{array}\right\} x \begin{array}{l} - 3y^3 \\ - 11y^2 \\ + 8y \\ - 137 \end{array}$$

Meestal schrijft men echter, bij verkorting:

$$P x^3 + Q x^2 + R x + S$$

Zijnde alsdan, voor ons bijzonder geval: $P = 5$; $Q = 7y - 3$; $R = - 9y^2 - 17y - 13$; $S = - 3y^3 - 11y^2 + 8y - 137$. Ordent men dezelve uitdrukking naar de afdalende magten van y; dan zal zij onder dezen vorm staan:

$$- 3y^3 - (9x + 11) y^2 + (7x^2 - 17x + 8) y + (5x^3 - 3x^2 - 13x - 137)$$

en dit voorbeeld is genoeg, om aantewijzen: hoe men, in andere gevallen, de termen eener gegevene uitdrukking of functie, naar den voorschrevenen regel ordenen zal.

§. 346.

§. 346. Uit dit verklaarde is ligtelijk optemaken: hoe eene functie van drie en meer veranderlijke grootheden, naar de magten van eene der veranderlijke grootheden, kan geordend worden.

§. 347. Het ordenen der functien, op deze wijze, is van veel dienst om dezelve, wanneer zij uit twee of meer veranderlijke grootheden bestaan, optetellen, aftetrekken, met elkander te multipliceren en te divideren; hetgeen, zonder dezelve vooraf alzoo geordend te hebben, niet zoo gemakkelijk, immers met veel moeite, zou kunnen uitgevoerd worden. Want, laten gegeven zijn twee functien van x en y, namelijk:

$$Px^3 + Qx^2 + Rx + T$$
$$\text{en } px^2 + qx + r$$

dan zal derzelver som zijn:

$$Px^3 + (Q + p)x^2 + (R + q)x + (T + r)$$

derzelver verschil:

$$Px^3 + (Q - p)x^2 + (R - q)x + (T - r)$$

en eindelijk derzelver product:

$$\begin{aligned} Ppx^5 + Qpx^4 + Rpx^3 &+ Spx^2 \\ + Pqx^4 + Qqx^3 &+ Rqx^2 + Sqx \\ + Prx^3 &+ Qrx^2 + Rrx + Sr \end{aligned}$$

De letters P, Q, R, S, p, q en r, verbeelden functien van y, welke, naar de regels der additie, subtractie en multiplicatie, kunnen opgeteld, afgetrokken en vermenigvuldigd worden; waardoor de som, het verschil en het product dezer twee functien, in welgeregelde uitdrukkingen, te voorschijn zullen komen.

§. 348. Na deze korte opheldering, zal men de toepassing van den algemeenen regel, op het vinden van den gemeenen deeler, van twee functien, van twee veranderlijke grootheden gemakkelijk bevatten kunnen.

1. Voorbeeld. *Den grootsten gemeenen deeler van de uitdrukkingen* $6x^3 - (11y - 3)x^2 + (5y^2 + 6y - 3)x - (3y^3 - 3y^2 + 9y - 9)$, *en van* $10x^2 - (17y - 17)x + (3y^2 - 6y + 3)$ *te vinden?*

Men behandele de gegevene uitdrukkingen, volgens den algemeenen regel, even als of de coefficienten van de magten van x bepaalde getaltallen waren: men deelt derhalve de eerste door de tweede. Dan, om de breuken te vermijden, vermenigvuldige men de eerste met 5, en de tweede met 3; dan verkrijgt men:

deeler $30x^2-(51y-51)x+(9y^2-18y+9)$

deeltal $30x^3-(55y-15)x^2+(25y^2+30y-15)x-\,.\,.$
$(15y^3-15y^2+45y-45)$

men vrage nu: hoe veelmaal $30x^2$ op $30x^3$? komt x; men vermenigvuldige den deeler met x, komt:

$$30x^3-(51y-51)x^2+(9y^2-18y+9)x$$

dit product trekke men van het deeltal af; dan is de rest:

$$-(4y+36)x^2+(16y^2+48y-24)x-(15y^3-15y^2+45y-45)$$

dit overschot moet op nieuw, (aangezien 'er nog de tweede magt van x in voorkomt,) door den deeler, $30x^2$ — *enz.* gedeeld worden; dan, om in deze deeling de gebrokens te vermijden, vermenigvuldige men de laatst verkregene rest met 5; dan verkrijgt men:

$$-(20y+180)x^2+(80y^2+240y-120)x-(75y^3-75y^2+225y-225)$$

en nu vrage men: hoe menigmaal is $10x^2$ op $-(20y+180)x^2$ begrepen? komt: $-(2y+18)$ maal: men vermenigvuldige dan $10x^2-(17y-17)x+(3y^2-6y+3)$ met $-(2y+18)$, tot bereiking van welk oogmerk, men 10 met $-(2y+18)$; $-(17y-17)$ met $-(2y+18)$, en $+(3y^2-6y+3)$ met $-(2y+18)$ afzonderlijk zal moeten vermenigvuldigen, om de coefficienten van x^2, x^1 x^0 te verkrijgen. Het komende product zal zijn:

$$-(20y+180)x^2+(34y^2+272y-306)x-(6y^3+42y^2-102y+54)$$

hetwelk van de voorgaande rest afgetrokken zijnde, voor de laatste of eigenlijke rest der eerste bewerking geven zal:

$$+(46y^2-32y+186)x-(69y^3-117y^2+327y-279)$$

De deeler van de voorgaande deeling moet door deze rest gedeeld worden: maar men moet dezelve rest vooraf zuiveren van den gemeenen deeler, welke aan derzelver termen gemeen kunnen zijn; deze gemeene deeler zal onafhankelijk van x, en eene functie van y moeten zijn. Men zoeke dan den gemeenen deeler van $46y^2-32y+186$ en $69y^3-117y^2+327y-279$. Deze is: $23y^2-16y+93$. Wanneer men dan de laatst verkregene rest door denzelven deelt, dan verkrijgt men: $2x-3y+3$.

Men moet nu, volgens den regel, den voorgaanden deeler, $10x^2-(17y-17)x+(3y^2-6y+3)$, door $2x-(3y-3)$ dee-

 len:

len: daar nu deze deeling juist opgaat, blijkt het: dat $2x - 3y + 3$ de gemeene deeler der twee gegevene uitdrukkingen is.

Men moet opmerken: dat, wanneer deze deeling niet opgaat, het overschot (indien men namelijk de deeling zoo ver voortgezet heeft, als men dezelve voortzetten moet,) eene functie van y zal zijn. Deze aanmerking zal ons welhaast te pas komen.

2. VOORBEELD. *Den grootsten gemeenen deeler te vinden van* $x^5 - (y-2)x^4 - (2y^2 - 6y + 3)x^3 + (9y^3 - 14y^2 + 19y - 25)x^2 - (9y^4 - 3y^3 + 32y^2 - 18y + 40)x + (3y^3 - 15y^2 + 5y - 25)$, *en* $x^4 - (5y-8)x^3 + (12y^2 - 18y + 19)x^2 + (15y^3 - 22y^2 + 10y - 22)x + (9y^4 + 3y^3 + 12y^2 + 5y - 5)$ *te vinden?* Men vindt voor den gemeenen deeler: $x^2 - (2y-3)x + (3y^2 + 5)$.

§. 349. †† Men kan de gemeene deelers van de functien van twee en meer veranderlijke grootheden ook nog vinden, op eene wijze, die wel op dezelve gronden steunt; doch, indien het alleen te doen is, om te weten, of deze functien eenen gemeenen deeler hebben, in de uitvinding dikwijls veel gemakkelijker is. Laat eene functie van x en y, te weten,

$$x^3 + Px^2 + Qx + R$$

gegeven zijn; dan is het klaar: dat, wanneer zij eenen eerste-magts deeler heeft, dezelve van den vorm $x + V$ zal zijn, (zijnde V eene functie van y, even als de coefficienten P, Q en R,) en dat voorts V een deeler van R zal moeten zijn. Laten voorts twee functien van x en y, welke wij door

$$Nx^5 + Px^4 + Qx^3 + Rx^2 + Sx + T$$

$$\text{en} \ldots nx^4 + px^3 + qx^2 + rx + s$$

voorstellen, zijn: indien dan deze functien eenen gemeenen deeler $x + V$ hebben; dan zal V eenen gemeenen deeler van T en s moeten zijn, en, wanneer 'er zulk een gemeene deeler tusschen T en s niet bestaat, dan zullen de gegevene functien 'er ook geenen kunnen hebben. In het eerste geval, zal men den term, welke van x afhangt, nog bepalen moeten. Om dezen nu, zonder eenige tasting, te vinden, zal men de gegevene functien, naar de magten van y, rangschikken, en zij zullen dan onder den vorm

$$N'y^5 + P'y^4 + Q'y^3 + R'y^2 + S'y + T'$$

$$\text{en} \ldots n'y^4 + p'y^3 + q'y^2 + r'y + s'$$

voorkomen. De gemeene deeler, welken deze functien kunnen hebben, onder den vorm $y + V'$ gesteld zijnde, zal V', welke nu eene functie van x is, een gemeene deeler van T' en s' moeten zijn. Wanneer

neer 'er nu, in het eerste geval, een gemeene deeler bestaan had, zouden, wanneer 'er in het tweede geen bestond, de gegevene functien 'er ook geenen hebben. Maar bestaan 'er, in beide vormen, tusschen de achterste termen T en s, en T' en s' gemeene deelers; dan zal 'er, indien de standvastige term van beide gemeene deelers, in waarde en teekens, dezelfde is, een gemeene deeler tusschen de gegevene functien bestaan, welke gelijk zal zijn aan den term van y uit den eersten deeler, met de term van x uit den tweeden, en met nog denzelfden standvastigen term, die in beide gemeene deelers voorkomt.

§. 350. Nemen wij, om dit verklaarde optehelderen, de functien of uitdrukkingen, welke, in het 1. voorbeeld, §. 348. onderzogt zijn. Dan zal men, de functien naar de magten van x geordend hebbende, verkrijgen:

$$6x^3-(11y-3)x^2+(5y^2+6y-3)x-(3y^3-3y^2+9y-9)$$
$$10x^2-(17y-17)x+(3y^2-6y+3)$$

de achterste termen $(3y^3-3y^2+9y-9)$ en $(3y^2-6y+3)$ hebben, (gelijk men door den regel van §. 339. vinden zal,) . . . . $\pm 3(y-1)$ tot gemeenen deeler Ordent men nu de uitdrukkingen, naar de afmetingen van y; dan zal men verkrijgen:

$$-3y^3+(5x+3)y^2-(11x^2-6x-9)y+(6x^3+3x^2-3x+9)$$
$$\text{en . . . } 3y^2-(17x+6)y+(10x^2+17x+3)$$

de achterste termen dezer uitdrukkingen hebben: $\pm(2x+3)$ tot gemeenen deeler: nu zijn de gemeene deelers der functien, welke naar x geordend zijn:

$$+3y-3,\ -3y+3,\ +y-1 \text{ en } -y+1$$

en die van de achterste termen der functien, naar y geordend:

$$-2x-3,\ +2x+3,$$

de gemeene deelers $+3y-3$ en $-2x-3$, gelijk ook $-3y+3$ en $2x+3$, stemmen in de teekens der standvastige termen overeën, men mag dan besluiten: dat

$$\pm(2x-3y+3)$$

de gemeene deeler der gegevene uitdrukkingen is.

§. 351. †† Nogtans strekt deze handelwijze zich zoo gemakkelijk niet uit tot die gevallen, in welke de gemeene deelers tot eene tweede of hoogere magt opklimmen. Deze zullen het best door den algemeenen regel bepaald worden. †† Echter zal deze bijzondere handelwijze altijd een geschikt middel zijn, om eenigzins over de waarschijnlijkheid van eenen gemeenen deeler te oordeelen; want, indien de achterste termen der gegevene functien 'er geenen hebben, is alle verder onderzoek overtollig, omdat de gemeene deeler niet, dan onder deze voorwaarde, bestaan kan.

§. 352. †† Het is genoegzaam op dezelfde gronden, dat NEWTON, in *Arith. Univ. Sect.* I. *Cap.* VIII. §. LXXI. en, na hem, uitvoeriger, CLAIRAUT, in zijne *Elémens d'Algèbre*, §. XXIX. *et seq.* de deelers van uitdrukkingen, die van verscheidene letters afhangen, gezogt hebben. Hunne redeneerwijze komt bijna op het volgende uit. Nemen wij, met NEWTON, de uitdrukking:

$$12x^3-(14b-9c)x^2-(12b^2+6bc-8c^2)x+(8b^3-12b^2c-4bc^2+6c^3)$$

dan redeneert men aldus: indien 'er een deeler in deze uitdrukking bestaat; dan zal zij bestaan, welke ook de waarden zijn, die men aan x, b en c geeft; derhalve ook, wanneer men achtervolgens x, b en c gelijk nul stelt. Stelt men x gelijk nul; dan verandert de uitdrukking in:

$$8b^3-12b^2c-4bc^2+6c^3$$

en deze heeft $2b-3c$ en $4b-6c$ tot deelers. Stelt men $b=0$, dan verandert zij in:

$$12x^3+9cx^2+8c^2x+6c^3$$

en deze heeft slechts eenen deeler: $4x+3c$. Stelt men eindelijk $c=0$; dan verandert zij in

$$12x^3-14bx^2-12b^2x+8b^3$$

en deze heeft de deelers $2x-b$ en $4x-2b$.

Men zoeke nu: welke, onder deze deelers, overëënstemmen, (wel verstaande de gevondene deelers met beiderlei teekens aandoende,) en dan zal men vinden: dat slechts $-2b+3c$; $4x+3c$; $4x-2b$ overëënkomen; $4x-2b+3c$ zal gevolgelijk een deeler kunnen zijn; hetwelk ook, door dadelijke beproeving, bevestigd wordt.

§. 353. Op dezelfde gronden heeft NEWTON voor den deeler van

$$12x^5-(10a+9b)x^4-(26a^2-12ab-6b^2)x^3+(24a^3-8a^2b-8ab^2-24b^3)x^2-(4a^3b-6a^2b^2+12ab^3-18b^4)x+(12a^4b+32a^2b^3-12b^5)$$

de uitdrukking $4x^2+(2a-3b)x-(6a^2-2b^2)$ gevonden. Zoo als de lezer, door de toepassing van het voorgeschrevene, ter zijner oefening, zal kunnen nazoeken.

§. 354. †† Wanneer men, op deze wijze, de deelers van ééne der gegevene uitdrukkingen zoekt, zal men daarna derzelver gemeenen deeler, door beproeving, ontdekken kunnen; want, bestaat 'er tusschen dezelve een gemeene deeler, zal hij zich noodwendig onder deze deelers moeten bevinden; waaruit dus volgt: dat, bijaldien ééne der uitdrukkingen geenen deeler heeft, 'er ook geenen gemeenen deeler bestaan zal: heeft zij integendeel éénen of meer deelers, zal men de andere uitdrukking door elk derzelven deelen, om te beproeven, of de deeling met éénen derzelver opgaat. Bij deze beproevingen, zal de gemeene deeler, indien hij indedaad bestaat, kenbaar worden. Dit alles komt overéén met hetgeen wij, in §. 264, I. C., van de gemeene deelers der getallen gezegd hebben.

§. 355. Vele der beroemdste Schrijvers, als LACROIX, in zijne *Elém. d'Algèbre*, §. 209. *Ed.* 1800. *et Ed. de* 1804, COUSIN, in zijne *Traité Elém. de l'Anal. Math. pag.* 108. en anderen, hebben van de gemeene deelers der stelkundige uitdrukkingen gebruik gemaakt, om de gelijke factoren, en bijgevolg, door deze, tevens de gelijke wortels der vergelijkingen, te vinden. Offchoon wij nu, §. 160, *et seq.*, hebben aangewezen: dat deze gelijke factoren en wortels, op eene geschiktere wijze, met minder omslags, dan door de gemeene deelers, kunnen gevonden worden; en, ook bovendien, de leerwijze van BUDAN dezelve kenbaar maakt, zie §. 296, zullen wij nogtans, uit eenigzins andere beginselen, beknoptelijk aantoonen, waarin deze leerwijze bestaat, en op welke gronden zij steunt.

§. 356. Wij hebben in §. 216. reeds betoogd: hoe men, door eene eenvoudige bewerking, welke met den algorithmus der Differentiaal-Rekening instemt, zonder magts-verheffing, noch andere stelkundige bewerkingen, daartoe anders vereischt wordende, eene vergelijking in (x) kan veranderen in eene, welker wortels zijn $(p+z)$, en hoe men tevens, in den loop dezer ontwikkeling, de komende vergelijking, naar de magten, het zij van p, het zij van z, ordenen kan. Nemen wij eene vergelijking tot eene bepaalde magt:

$$x^6 + Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex + F = 0$$

dan zal, $x = p + z$ stellende, en de herleide, naar de afdalende magten van z, ordenende,

$$z^6 + Pz^5 + Qz^4 + Rz^3 + Sz^2 Tz + U = 0$$

zijn, en men zal, volgens §. 216, hebben:

$$\begin{aligned} U &= p^6 + Ap^5 + Bp^4 + Cp^3 + Dp^2 + Ep + F \\ T &= 6p^5 + 5Ap^4 + 4Bp^3 + 3Cp^2 + 2Dp + E \\ S &= 15p^4 + 10Ap^3 + 6Bp^2 + 3Cp + D \\ &\quad \textit{enz.} \qquad \textit{enz.} \end{aligned}$$

Stellen wij nu: dat de vergelijking in (x) eenige gelijke wortels, bij voorbeeld, vier zulke $x = p$ hebbe; dan zal de vergelijking in (x)

 door

door $(x-p)^4$ deelbaar zijn: maar nu zal ook $x-p=p+z-p=z$ zijn: men zal dan, in plaats van de vergelijking in (z), schrijven kunnen:

$$(x-p)^6+P(x-p)^5+Q(x-p)^4+R(x-p)^3+S(x-p)^2 +T(x-p)+U=0$$

en de coefficienten U, T, S, enz., zullen worden:

$$U=x^6+Ax^5+Bx^4+Cx^3+Dx^2+Ex+F$$
$$T=6x^5+5Ax^4+4Bx^3+3Cx^2+2Dx+E$$
$$\textit{enz.} \qquad \textit{enz.}$$

De laatste vergelijking in $(x-p)$ zal nu insgelijks door $(x-p)^4$ deelbaar zijn. Deze deeling zal geven:

$$(x-p)^2+P(x-p)+Q+\frac{R}{x-p}+\frac{S}{(x-p)^2}+\frac{T}{(x-p)^3}+\frac{U}{(x-p)^4}=0$$

Deze laatste vergelijking zal eene tweede magts-vergelijking moeten zijn, welke zij nimmer worden kan, indien R, S, T en U niet respectievelijk door $(x-p)$, $(x-p)^2$, $(x-p)^3$, $(x-p)^4$ deelbaar zijn; waaruit blijkt: dat, wanneer 'er vier gelijke deelers of wortels bestaan, de gegevene vergelijking met derzelver eerste, tweede en derde differentiaal, (want aldus noemt men de vergelijkingen, welke volgens §. 216. worden afgeleid,) eenen gemeenen deeler $x-p$ moeten hebben. De leerling make nu zelf de uitbreiding en toepasfing.

✻

WIS-

WISKUNDIGE LESSEN.

XII. BOEK.

Over de oplosſing der vergelijkingen van twee en meer onbekenden, tot alle magten, in het algemeen.

EEN- EN- VIJFTIGSTE LES.

Over de oplosſing der vergelijkingen van twee en meer onbekenden, tot de eerſte magt.

§. 357. In de XXX Les van den eerſten Curſus, is reeds alles gezegd, wat tot de volledige oplosſing der vergelijkingen van twee en meer onbekenden, tot de eerſte magt, noodig was; doch, daar ter plaatſe was ons oogmerk meer, om, door vele voorbeelden, den leerling, op eene aangename wijze, in de behandeling van het ſtelkundig ſchrift, te oefenen, en wij hebben ons daarom van meer algemeene beſchouwingen onthouden, omdat zij hier ter plaatſe, bij de algemeene oplosſingen der vergelijkingen, beter zouden te pas komen. Wij hebben in deze Les gezien: dat, door behoorlijke herleidingen, alle vergelijkingen van ééne onbekende tot den vorm $ax = b$, of $ax + b = 0$; die van twee onbekenden tot den vorm

$$ax + by + c = 0$$
$$a'x + b'y + c' = 0$$

die van drie onbekenden tot den vorm

$$ax + by + cz + d = 0$$
$$a'x + b'y + c'z + d' = 0$$
$$a''x + b''y + c''z + d'' = 0$$

kunnen gebragt, en dat daarna de regels, het zij van afzondering, 't zij van ſubſtitutie, op dezelve toegepast zijnde,

de,

de, alle de onbekende kunnen worden opgelost. Thans zullen wij deze vergelijkingen, aldus voorgesteld, algemeen oplossen, betwelk ons leeren zal: hoe elke onbekende van de bekende coefficienten, op eene regelmatige wijze, afhangt.

§. 358. Wij zullen ons met de vergelijking $ax + b = 0$ niet ophouden; maar dadelijk de vergelijkingen

$$ax + by + c = 0$$
$$a'x + b'y + c' = 0$$

bij der hand nemen. Men zou, door het voorschrift van §. 544, I. C. te volgen, uit elke vergelijking de waarde van y of x kunnen afzonderen, en deze met elkander vergelijken, enz.; maar wij zullen hier eene leerwijze volgen, welke meer met eene algemeene, die wij voor de vergelijkingen van twee en meer onbekende, tot hoogere magten, zullen gebruiken, overëénstemt.

Men kan ééne der twee vergelijkingen met eenig onbepaald getal, bij voorbeeld, p vermenigvuldigen: indien men dan dit product bij de andere vergelijking optelt, dan zal men

$$(ap + a')x + (bp + b')y + cp + c' = 0 \quad . \quad . \quad (P)$$

verkrijgen: daar nu het getal p onbepaald is, zal men hetzelve zoodanig nemen kunnen, dat de coefficient van eene der onbekenden verdwijnt, of gelijk nul wordt: doen wij zulks ten opzigte van den coefficient van y; dan zal

$$bp + b' = 0; \; en \; (ap + a')x + cp + c' = 0$$

zijn, en uit deze vergelijkingen volgt dan:

$$p = -\frac{b'}{b}; \; en \; x = -\frac{cp + c'}{ap + a'}$$

Wanneer men nu, in de waarde van x, voor p stelt $-\frac{b'}{b}$; dan zal men vinden:

$$x = -\frac{cb' - bc'}{ab' - ba'} = \frac{bc' - b'c}{ab' - a'b}$$

Zie §. 494, I. C.

Op dezelfde wijze zal men, in de vergelijking (P), den coefficient van x gelijk nul kunnen stellen, en dan zal:

$$ap + a' = 0; \; en \; (bp + b')y + cp + c' = 0$$

zijn, waaruit, op gelijke wijze, volgen zal:

$y =$

$$y = -\frac{a c' - c a'}{a b' - b a'} = \frac{c a' - c' a}{a b' - a' b}$$

Men zou dezelfde uitkomsten, door de gewone wijze van oplossen, gevonden hebben.

§. 359. Deze algemeene oplossing brengt ons tot de volgende analytische aanmerkingen.

1° Men kan alle vergelijkingen tusschen twee onbekenden tot de voorschrevene vormen brengen; alsdan zullen a, b, c, a', b' en c' gegeven, en positieve, negatieve, of gebrokene getallen zijn, welke in de algemeene waarden van x en y gesteld zijnde, op de teekens behoorlijk acht gevende, de onbekende, in dit bijzonder geval, door berekening in getallen, zullen doen bekend worden.

§. 360. 2° Het zal bij deze substitutie kunnen gebeuren: dat de noemer $a b' - a' b = 0$ is, terwijl de tellers $b c' - b' c$ en $a' c - a c'$ beide, of positief, of negatief zijn. In dit geval, zijn x en y beide gelijk aan een getal gedivideerd door nul. Laat ons nu zien, wat dit beteekent? Wanneer men den noemer eener breuk kleiner maakt; dan wordt, zie §. 283, I. C., de breuk grooter, en zal steeds, in dezelfde reden grooter worden, waarin men den noemer kleiner neemt. Wordt dan de noemer eindelijk nul, dan zal men geen getal voor het quotient, groot genoeg, nemen kunnen, of het zal nog oneindig vele malen te klein zijn; want $a : b = c$ zijnde, is $a = b \times c$; stelt men $a : 0 = b$; dan zal $a = 0 \times b$ moeten zijn, en dit is onmogelijk. * Om die reden, hebben de Wiskundigen zich van de spreekwijs: *een getal, door nul gedivideerd, is oneindig groot*, bediend, om daar mede te zeggen: *het quotient kan niet zoo groot genomen worden, of het is nog altijd veel te klein:* en zij hebben, om dit gezegde uittedrukken, zich van het teeken:

$$\frac{a}{0} = \infty$$

bediend, hetwelk altijd in dien zin moet verklaard worden. †† Waar nu, in de oplossing van twee bijzondere vergelijkingen, dit verschijnsel plaats heeft, daar zijn de vergelijkingen onderling onbestaanbaar. Men kan de gronden van dit gestelde gemakkelijk aanwijzen. De vergelijking $a b' - a' b = 0$ geeft $a b' = a' b$, en $a : a' = b : b'$. Stellen wij nu: $a' = m a$; dan zal $b' = m b$ zijn, en de gegevene vergelijkingen zullen in:

$$a x + b y + c = 0$$
$$a m x + b m y + c' = 0$$

 ver-

veranderen. Deelt men de laatste vergelijking door m, dan wordt zij

$$a x + b y + \frac{c'}{m} = 0$$

en, wanneer men dit quotient van de eerste aftrekt, dan zal . . . . $c - \frac{c'}{m} = 0$ of $c' = c m$ moeten zijn, en dit is de voorwaardens-vergelijking, onder welke de twee gegevene vergelijkingen niet met elkander strijdig zullen zijn. Is $c' >$ of $<$ dan $c m$, dan zullen zij strijden. Stellen wij: $c' > c m$; dan zal $b c' > b c m$ zijn; maar $b c m = b . m c = b' c$ zijnde, zal ook $b c' > b' c$ en $b c' - b' c$ positief zijn. Is $c' < c m$; dan zal $b c' - b' c$ negatief zijn. Insgelijks, $c' >$ of $< c m$ zijnde, zal $a c' >$ of $< a c m$, of $>$ of $< a' c$ zijn. Uit dit alles volgt dan: dat de onderstelling van $a b' - a' b = 0$, zullen de vergelijkingen niet onderling strijden, medebrengt: dat a, b en c tot elkander in dezelve verhouding staan, als a', b' en c': maar, dat, wanneer $a : a' = b : b'$ is, en niet tevens $c : c' = a : a' = b : b'$, de vergelijkingen onderling strijdig zullen zijn, en dat deze strijdigheid in de berekening kenbaar zal worden, wanneer de noemers der breuken nul worden, en derzelver tellers eene positieve of negatieve waarde verkrijgen.

§. 361. 3° Maar nu blijkt het ook: dat, zullen de vergelijkingen met elkander bestaanbaar, en $c' = c m$ zijn; dan ook te gelijk de tellers van de breuken, die de waarden van x en y uitdrukken, nul zullen moeten worden: men zal derhalve hebben:

$$x = \tfrac{0}{0} \quad \text{en} \quad y = \tfrac{0}{0}$$

Ziedaar eene nieuwe soort van uitdrukking, die nog niet is voorgekomen. * Zij beteekent: *eene onbepaalde waarde*, *eene waarde*, *naar welgevallen*; want, daar zij uit eene uitgedrukte divisie, welker deeler en deeltal, onder zekere omstandigheden, nul worden, ontstaat, kan men de uitkomst dezer deeling naar welgevallen stellen; want nemen wij dit quotient n; dan zal

$$\tfrac{0}{0} = n \quad \text{en} \quad 0 = 0 \times n$$

zijn: en zulks zal altijd plaats hebben, welke waarde aan n gegeven worde (68). Is nu, overëénkomstig dit alles, $c' = c m$; dan zal de tweede vergelijking

$a m x$

(68) Het zal nogtans, in de Differentiaal-Rekening blijken: dat 'er gevallen zijn, in welke de uitdrukking $\frac{0}{0}$ een bepaalde waarde kan hebben, wanneer zij namelijk aan eene zekere wet van continuiteit verbonden is. In abstracto genomen, heeft zij, indien teller en noemer geenen gemeenen deeler hebben, eene onbepaalde waarde.

$$a m x + b m y + c m = 0$$

worden, welke, door m gedeeld zijnde, de eerste vergelijking voortbrengt. †† Zoo dikwijls nu dit verschijnsel plaats heeft, zal het een bewijs zijn: *dat de tweede van de eerste vergelijking niet onderscheiden is*, en het zal even zoo goed zijn, *als of 'er slechts ééne vergelijking gegeven ware*, welke, zoo als men weet, een oneindig aantal oplossingen heeft, hetgeen dan overëénstemt met de onbepaalde waarden, welke men voor x of y, overëénkomstig het teeken $\frac{0}{0}$, stellen kan (69).

§. 362. 4° Stellen wij $c = 0$ en $c' = 0$; dan worden

$$x = \frac{0}{a b' - a' b} = 0 \text{ en } y = \frac{0}{a b' - a' b} = 0$$

de onbekende x en y zullen, in dit geval, geene wezenlijke grootte hebben, en de vergelijkingen zullen nog onbestaanbaar zijn: maar, neemt men $a b' - a' b = 0$; dan wordt $x = \frac{0}{0}$ en $y = \frac{0}{0}$; en dit bewijst: dat de waarden van x en y, ook in dit geval, onbepaald zijn. Dan, vermits deze omstandigheid de vergelijking $a b' - a' b = 0$ medebrengt, kan men deze als eene voorwaardens-vergelijking aanmerken, welke de betrekking van de coefficienten der gegevene vergelijking zoodanig bepaalt, dat zij met elkander bestaanbaar zijn.

§. 363. Indien 'er, behalve de twee gegevene vergelijkingen, nog eene derde

$$a'' x + b'' y + c'' = 0$$

gegeven is; dan zal deze derde met de twee voorgaande niet, dan onder zekere voorwaarden, bestaanbaar zijn; nu zullen deze voorwaarden alleen in de coefficienten gelegen kunnen zijn. Men zal dezelve gemakkelijk vinden, indien men de waarden van x en y, die uit de eerste vergelijkingen gehaald zijn, in de derde overbrengt; want dan zal men, na herleiding, verkrijgen:

$$a''(b c' - b' c) + b''(c a' - c' a) + c''(a b' - a' b) = 0$$

Het is deze vergelijking, welke tusschen de coefficienten der drie vergelijkingen zal moeten plaats hebben, opdat zij onderling bestaanbaar zijn. Indien 'er nog eene vierde, vijfde, en meer vergelijking gegeven waren, zouden 'er nog even zoo vele vergelijkingen van voorwaarde, die men op dezelfde wijze bepalen kan, moeten plaats hebben.

§. 364.

(69) Wanneer men de vergelijkingen niet op deze algemeene wijze oplost, verkrijgt men, tot kenmerk van die onderlinge afhankelijkheid, $x = x$ of $0 = 0$. Zie §. 543, I. C.

§. 364. Wanneer drie vergelijkingen tot drie onbekenden

$$ax + by + cz + d = 0$$
$$a'x + b'y + c'z + d = 0$$
$$a''x + b''y + c''z + d'' = 0$$

gegeven zijn; dan zal men twee van dezelve, bij voorbeeld, de eerfte en de tweede, elk respectievelijk met p en q, twee onbepaalde getallen, vermenigvuldigen, en de producten bij de derde vergelijking optellen: men zal dan de vergelijking

$$(ap + a'q + a'')x + (bp + b'q + b'')y + (cp + c'q + c'')z + (dp + d'q + d'') = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (P)$$

verkrijgen. Indien men nu de coefficienten van y en z, in deze vergelijking, gelijk nul ftelt, dan zal zij in

$$(ap + a'q + a'')x + (dp + d'q + d'') = 0 \quad . \; . \; (Q)$$

veranderen, en men zal de waarden van p en q, door de twee vergelijkingen

$$bp + b'q + b'' = 0, \text{ en } cp + c'q + c'' = 0,$$

uit welke $p = \dfrac{b'c'' - b''c'}{bc' - b'c}$ en $q = \dfrac{b''c - bc''}{bc' - b'c}$ volgt, overëénkomftig deze voorwaarde, bepalen; zoodat men, in de vergelijking (Q), flecht deze waarden van p en q zal behoeven overtebrengen, om te vinden:

$$x = -\frac{d(b'c'' - b''c') + d'(b''c - bc'') + d''(bc' - b'c)}{a(b'c'' - b''c') + a'(b''c - bc'') + a''(bc' - b'c)}$$

Wanneer men, op gelijke wijze, in de vergelijking (P), eerst de coefficienten van x en z, en daarna die van x en y gelijk nul ftelt, dan zal men insgelijks de waarde van y en z vinden: namelijk

$$y = -\frac{d(a'c'' - a''c') + d'(a''c - ac'') + d''(ac' - a'c)}{b(a'c'' - a''c') + b'(a''c - ac'') + b''(ac' - a'c)}$$

$$z = -\frac{d(a'b'' - a''b') + d'(a''b - ab'') + d''(ab' - a'b)}{c(a'b'' - a''b') + c'(a''b - ab'') + c''(ab' - a'b)}$$

§. 365. Hoezeer de noemers der breuken, die de waarden der onbekenden uitdrukken, van elkander fchijnen onderfcheiden te zijn, hebben zij nogtans dezelfde waarde; hetgeen blijken zal, indien men elken noemer in het bijzonder ontwikkelt.

§. 366. †† De coefficienten b, b', b'' en c, c', c'' kunnen zoodanig gefteld zijn, dat, met betrekking tot de vergelijkingen $bp +$

$b'q$

$b'q+b''=0$ en $cp+c'q+c''=0$, $p=\frac{0}{0}$ en $q=\frac{0}{0}$ worden: maar, vermits deze omſtandigheid medebrengt, dat $b'c''-b''c'=0$, $b''c-bc''=0$ en $bc'-b'c=0$ zij, zal, in dit geval ook, $x=\frac{0}{0}$, en gevolgelijk onbepaald zijn: doch, hieruit volgt niet: dat de tellers der breuken van de waarden van y en z nul zullen worden: deze kunnen poſitief of negatief zijn, en dan is $y=\infty$ en $z=\infty$, en de vergelijkingen zijn in dit geval onderling onbeſtaanbaar. Opdat nu de teller van de breuk van y tevens nul worde, zal $a'c''-a''c'=0$, $a''c-ac''=0$ en $ac'-a'c=0$ moeten zijn; maar dan hebben wij:

$$b:b'=c:c';\quad b':b''=c':c'' \text{ en } b:b''=c:c''$$
$$a:a'=c:c';\quad a':a''=c':c'' \text{ en } a:a''=c:c''$$

Stellende dan: $a'=ma$ en $a''=na$; dan zal $b'=mb$ en $b''=nb$; $c'=mc$ en $c''=mc$ zijn, en men zal voor de vergelijkingen ſtellen kunnen:

$$ax+by+cz+d=0;\quad amx+bmy+cmz+d'=0;\quad anx+bny+cnz+d''=0$$

doch, deze vergelijkingen zullen niet onderling beſtaanbaar zijn, indien niet $d'=md$ en $d''=nd$ zij; in welk geval ook de teller van de breuk, die de waarde van z uitdrukt, nul zal worden.

§. 367. Indien $d=0$, $d'=0$ en $d''=0$ zijn; dan zal de voorwaarde, onder welke de vergelijkingen met elkander beſtaanbaar zullen zijn, door de vergelijking:

$$a(b'c''-b''c')+a'(b''c-bc'')+a''(bc'-b'c)=0$$

worden uitgedrukt.

§. 368. †† Zijn 'er meer dan drie vergelijkingen tot drie onbekenden gegeven, dan zal men, op dat deze vergelijkingen met elkander beſtaanbaar zijn, tusſchen de coefficienten der vergelijkingen aan even zoo vele voorwaardens-vergelijkingen moeten voldoen, als 'er meer vergelijkingen dan onbekenden gegeven zijn. Zij zullen op dezelfde wijze, als in §. 363, gevonden worden.

§. 369. Men kan de gevondene waarden van x, y en z, door de uitgedrukte producten te ontwikkelen, onder de volgende gedaante voorſtellen.

$$x=-\frac{db'c''-dc'b''+cd'b''-bd'c''+bc'd''-cb'd''}{ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''}$$

$$y=-\frac{ad'c''-ac'd''+ca'd''-da'c''+dc'a''-cd'a''}{ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''}$$

$z=-$

$$z = -\frac{ab'd'' - ad'b'' + da'b'' - ba'd'' + bd'a'' - db'a''}{ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''}$$

§. 370. De waarden van x en y, uit de oplossing der vergelijkingen $ax + by + c =$ en $a'x + b'y + c' = 0$ verkregen, zijn:

$$x = -\frac{cb' - bc'}{ab' - ba'} \text{ en } y = -\frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}$$

Nu merken wij op: 1° dat de gemeenschappelijke noemer dezer breuken alleen uit de coefficienten van x en y is zamengesteld, en dat men denzelven verkrijgen zal, door a en b op alle mogelijke wijzen te verplaatsen; mits dat men, wanneer b van plaats verandert, ook aan de nieuwe rangschikking van het product een ander teeken geve. Alzoo volgen uit a de rangschikkingen $ab - ba$: men teekene nu, in de termen van deze uitdrukking, de tweede letter met ($'$); dan verkrijgt men den noemer $ab' - ba'$. 2° Dat de teller van elke breuk gevonden wordt, door, uit den noemer van die breuk, de coefficienten der onbekenden, die zij moet uitdrukken, met den bekenden term c te verwisselen. Alzoo vindt men uit $ab' - ba'$, door a en a' met c en c' te verwisselen, den teller $cb' - bc'$, en, uit $ab' - ba'$, door b' en b met c' en c te verwisselen, $ac' - ca'$.

§. 371. Op dezelve wijze zal men, zonder eenige berekening, alleen door het leerstuk der permutatien, de breuken vinden, welke de waarden van x, y en z, in de vergelijkingen tusschen drie onbekenden, uitdrukken.

$$\text{Uit} \begin{Bmatrix} +ab \\ -ba \end{Bmatrix} \textit{volgen de verplaatsingen} \begin{Bmatrix} +abc - acb + cab \\ -bac + bca - cba \end{Bmatrix}$$

Men stelle namelijk, om deze verplaatsingen te vinden, bij ab de letter c, door aan dezelve, van achter naar voren te rekenen, de eerste, tweede en derde plaats te geven, en bij elke plaats-verandering het teeken omtekeeren. Men tekene daarna, in de termen van de uitkomst, de tweede letter met ($'$), en de derde met ($''$); dan heeft men den gemeenschappelijken noemer

$$ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''$$

en, om de tellers te vinden, verwisselt men, in dezen gemeenschappelijken noemer, de coefficienten van x, y en z, met de bekende termen, even als in het eerste geval.

§. 372. Wanneer men de moeite neemt, om vier vergelijkingen tusschen vier onbekenden, vijf vergelijkingen tusschen vijf onbekenden, enz., op de wijze in §. 358. en §. 364. optelossen, zal men bevinden: dat de uitkomsten dezer oplossingen, op gelijke wijze, elke vol-

gen-

gende uit de voorgaande, zullen kunnen afgeleid worden. Men zal dus, zonder al het omflagtige van de fubftitutien, welke deze oplosfingen vorderen, dadelijk de waarden der onbekenden, zonder eenige berekening, enkel met behulp van het leerftuk der permutatien, (zie *I. C.*, *pag.* 45, *noot* 14,) kunnen opmaken. Maar, tot dat einde, zal men de permutatien, eenigzins op eene andere wijze, dan in den eerften Curfus voorgefchreven is, uit elkander moeten afleiden. Laten a, b, c, d, e, enz. eenige grootheden zijn, welke op alle mogelijke wijzen van plaats moeten veranderen; dan ga men op de volgende wijze te werk:

1° Met het eerfte ding a, verwisfele men b; dan heeft men flechts twee rangfchikkingen:

$$ab - ba$$

2° Met elk dezer twee rangfchikkingen, wordt c gerangfchikt, door aan dit derde ding c, van achter af te rekenen, alle mogelijke plaatfen te geven; dan volgen uit:

$$\left.\begin{matrix} +ab \\ -ba \end{matrix}\right\} \textit{de rangfchikkingen} \left\{\begin{matrix} +abc - acb + cab \\ -bac + bca - cba \end{matrix}\right\}$$

en omdat nu, in elke rangfchikking van twee dingen, het derde drie verfchillende plaatfen verkrijgen kan, is het aantal der verplaatfingen van drie dingen gelijk 2×3, of 6.

3° Op gelijke wijze, plaatfe men in elk eene van de rangfchikkingen der drie eerfte letters a, b, c, de vierde letter d, van achter naar voren, in den eerften, tweeden, derden en vierden rang, en verandere, bij elke verfchikking van d, het teeken van de voorgaande rangfchikking, dan heeft men:

$$\textit{Uit} \left(\begin{matrix} +abc \\ -acb \\ +cab \\ -bac \\ +bca \\ -cba \end{matrix}\right) \begin{matrix}\textit{de rang-} \\ \textit{fchikkin-} \\ \textit{gen}\end{matrix} \left(\begin{matrix} +abcd - abdc + adbc - dabc \\ -acbd + acdb - adcb + dacb \\ +cabd - cadb + cdab - dcab \\ -bacd + badc - bdac + dbac \\ +bcad - bcda + bdca - dbca \\ -cbad + cbda - cdba + dcba \end{matrix}\right)$$

4° Op dezelfde wijze, zal men, uit de rangfchikkingen van vier dingen, die 6×4 of 24 in getal zijn, die van vijf; uit de rangfchikkingen van vijf dingen, die van zes; enz. kunnen afleiden, en men zal eens en vooral deze rangfchikkingen, tot zijn bijzonder gebruik, kunnen opmaken.

Laten nu p, q, r, s, t, enz. eenige onbekenden zijn, tusfchen welke de vergelijkingen:

$$a p + b q + c r + d s + enz. + h = 0$$
$$a' p + b' q + c' r + d' s + enz. + h' = 0$$
$$enz. \qquad enz.$$

gegeven zijn, zijnde deze vergelijkingen even zooveel in getal, als 'er onbekenden zijn; dan zal men

1° Uit de permutatien-tafel de permutatien van de coefficienten der onbekenden, met de teekens nemen, en in rangschikking de tweede letter met ($'$), de derde met ($''$), de vierde met ($'''$), enz. teekenen, en dit zal den gemeenschappelijken noemer der breuken, die de waarden der onbekenden uitdrukken, geven.

2° Om de tellers dezer breuken te bepalen, zal men, uit dezen gemeenschappelijken noemer, de coefficienten a, a', enz. indien men p wil vinden; b, b', b'', indien men q wil vinden, enz. wegnemen, en, in plaats van deze, de bekende termen h, h', h'', enz. schrijven.

§. 373. Wij moeten andere vormen, welke uit deze alzoo gevondene waarden der onbekenden afgeleid kunnen worden, met stilzwijgen voorbij gaan. †† Het blijkt intusschen; dat, wanneer, in alle de gegevene vergelijkingen, de onbekende alle en op dezelfde wijze voorkomen, de oplossing buiten het bereik van het menschelijk vermogen valt (70). Wanneer 'er echter, in éene of meer vergelijkingen, éene of meer onbekenden niet voorkomen, dan worden verscheidene termen van de waarden der onbekenden nul; en offchoon men, in die gevallen, uit de algemeene uitdrukking, de bijzondere zal kunnen afleiden, zal het nogtans alsdan raadzamer zijn, de oplossing op eene bijzondere wijze interigten; vooral, wanneer men eene zekere symetrie in de gegevene vergelijkingen ontdekt. Ons bestek laat niet toe, in de verklaring

(70) Stellen wij tien vergelijkingen tusschen tien onbekenden, en dat elk dezer vergelijkingen alle de onbekenden inhoudt: dan zal men, (zie noot 14 pag. 45, I. C.) 3628800 producten van tien getallen moeten maken, en dezelve, volgens hunne teekens, zamenvoegen; wanneer men nu elk dezer producten, in den tijd van éene minuut, maken kan, en men dagelijks 12 uren aan dit werk besteedde, zou men 13 jaren 295 dagen en 4 uren tijds noodig hebben, om dezen arbeid te volbrengen, zonder de optelling van 3628800 termen daaronder te begrijpen. Nogtans zal men, wanneer deze vergelijkingen in getallen gegeven zijn, de oplossing naar de voorschriften van de XXX Les I. C. zeer wel kunnen ten einde brengen. Men kan uit deze aanmerking leeren: dat de uitkomsten van algemeene oplossingen fraai en merkwaardig zijn, en nogtans, wegens de omslagtigheid, die zij medebrengen, niet altijd kunnen worden toegepast.

ring van deze bijzonderheden, welke als een ſtuk van nieuwsgierigheid, zonder eenigen wezenlijken invloed op het vervolg onzer lesſen, moeten worden aangemerkt, te treden. In HALCKEN's *Zinnen-Confect*, zal men vele vragen vinden, welke aanleiding tot die ſoort van beſchouwingen geven kunnen; het Amſterdamsch Genootſchap heeft vele van dezelve opgelost.

TWEE- EN- VIJFTIGSTE LES.

Over de oplosſing van een ſtelſel van vergelijkingen, van twee en meer onbekenden, tot de tweede, derde, en hoogere magten.

§. 374. * Wanneer ééne of meer der onbekenden in eene vergelijking hooger, dan tot de eerſte magt, opklimmen; of wel twee of meer dezer onbekenden, of derzelver magten, met elkander vermenigvuldigd, voorkomen, noemt men deze vergelijking eene hoogere magts-vergelijking, tot twee, drie, en meer onbekenden.

§. 375. * Elke term van zulk eene vergelijking heeft zijne bijzondere magt. Deze magt wordt bepaald door den exponent van de enkelde onbekende, welke in dien term voorkomt; of door de ſom van de exponenten der onbekenden, welke, in zulk eenen term, met elkander vermenigvuldigd zijn. Indien de bekende grootheden door letters worden uitgedrukt, komen de magten dezer letters, in de begrooting van de magten der termen, niet in aanmerking. * De bekende termen worden gerekend tot de magt nul te behooren. Alzoo is $a^2 y^3$ een term van de derde magt; $-axy$ een term van de tweede; $bxyz$ een van de derde; abx^2y^3 een van de vijfde magt; enz.

§. 376. * Wanneer de magt van eenigen term eener vergelijking hooger is dan de magten van alle de andere termen, dan wordt die term de hoogſte term der vergelijking genoemd. Zijn 'er meer termen, die dezelfde magt als die hoogſte term hebben, kunnen alle die termen als de hoogſte worden aangemerkt.

§. 377. * De termen eener vergelijking, welke tot dezelf-

de

de magt behooren, noemt men *homogene termen*, of *termen van dezelfde orde*. Aldus zijn ax^3, $3bxy^2$, cy^3, termen van dezelfde orde.

§. 378. * De magt eener vergelijking is gelijk aan de magt van haren hoogsten term of hoogste termen. Aldus is $3x^3 + xy - 2x - y - 11 = 0$ eene derde-magts, $4x^2yz - 9x^2 + 11y^2 - 1000 = 0$ eene vierde-magts vergelijking.

§. 379. * Eene hoogere magts-vergelijking, van twee of meer onbekenden, is volkomen of onvolkomen. * Zij is volkomen, wanneer alle de lagere magten der onbekenden afzonderlijk, en de producten van de onbekenden en derzelver magten, op alle mogelijke wijzen, in die vergelijking voorkomen; met dien verstande, dat de som van de exponenten der onbekenden, welke elkander vermenigvuldigen, wel minder, maar niet meer dan de exponent van den hoogsten term zij. Aldus zal eene vergelijking van twee onbekenden tot de vierde-magt volkomen zijn, wanneer alle de termen, in het nevenstaande tafeltje, met coefficienten en teekens aangedaan, in dezelve voorkomen. * De vergelijking zal daarentegen onvolkomen zijn, indien een of meer dezer termen ontbreken. In dit geval, zullen zij als eene volkomene vergelijking, waarin sommige termen met den coefficient nul zijn aangedaan, aangemerkt kunnen worden. Vergelijk §. 89 en 90.

$$\begin{array}{rrrrr}
x^4, & x^3, & x^2, & x, & 1 \\
 & x^3y, & x^2y, & xy, & y \\
 & & x^2y^2, & xy^2, & y^2 \\
 & & & xy^3, & y^3 \\
 & & & & y^4
\end{array}$$

§. 380. Om dit tafeltje voor eene algemeene magt n zamentestellen, schrijve men alle de afdalende magten van x, in eene horizontale rij, tot de éénheid, of de magt nul, ingesloten.

$$x^n,\ x^{n-1},\ x^{n-2},\ enz.\ \ldots\ x^3,\ x^2,\ x,\ 1$$

In eene tweede rij, de magten van de onbekende x, van x^{n-1} tot één ingesloten, en men vermenigvuldige elke term van die rij met y; dan heeft men:

$$x^{n-1}y,\ x^{n-2}y,\ enz.\ x^3y,\ x^2y,\ xy,\ y$$

In de derde rij, de afdalende magten van x, van x^{n-2} tot één ingesloten, en men vermenigvuldige deze termen met y^2. Op deze wijze voortgaande, komt men eindelijk tot de laatste rij, in welke slechts éénen

éénen term y^n zal voorkomen. Het aantal der termen in de eerste rij, is gelijk $n+1$: vermits nu, in elke volgende rij, één term minder dan in de voorgaande voorkomt, zal het aantal van alle de termen gelijk $(n+1)+n+(n-1)+(n-2)+enz.+2+1$ zijn; gevolgelijk zal, zie §. 823, I. C., het aantal dezer termen gelijk aan $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ zijn. Worden deze termen gerangschikt, gelijk in het tafeltje, dan worden de termen van dezelfde orde in de diagonaal of dwarslijnen gevonden. * Pascal noemde dit tafeltje *analtytischen driehoek.*

Uit dit tafeltje is gemakkelijk optemaken, welke, en hoe vele termen in eene volkomene vergelijking van drie, vier en n onbekenden zullen kunnen en moeten voorkomen.

§. 381. Men brengt gewoonlijk alle de termen eener hoogere magts-vergelijking, van twee en meer onbekenden, in het voorste lid der vergelijking, en ordent dezelve, naar de afdalende magten van éene der onbekenden, welke men daartoe, naar welgevallen, verkiest. Aldus wordt

$$x^2 - axy + bx = cy^2 - dy + e$$

onder den vorm

$$x^2 - (ay - b)x - (cy^2 - dy + e) = 0$$

gesteld. Eene n^{de} magts-vergelijking van twee onbekenden, zal dan den vorm

$$x^n + (a + by)x^{n-1} + (c + dy + ey^2)x^{n-2} + enz.$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ (p + qy + ry^2 + enz. + uy^{n-1})x + (p' + q'y + r'y^2 + enz. + vy^n) = 0$$

verkrijgen. Gewoonlijk stelt men $a + by = P$; $c + dy + ey^2 = Q$; enz. en dan verkrijgt de vergelijking den vorm eener gewone eerste-magts-vergelijking

$$x^n + Px^{n-1} + Qx^{n-2} + enz. + Tx + U = 0$$

in welke de coefficienten P, Q, R, enz. T en U functien zijn van éene, twee, of meer onbekenden.

§. 382. Alles, wat wij in den I. C., van §. 538–544, van 548–553, en voorts van 556–565, gezegd hebben, zijn algemeene beginselen, welke ook op de hoogere magtsvergelijkingen, van twee en meer onbekenden, toepasselijk zijn. Tot een bepaald vraagstuk, worden even zoo vele van elkankander onafhankelijke, en niet onderling ſtrijdig zijnde, vergelijkingen gevorderd, als 'er onbekenden voorkomen. Zijn 'er minder vergelijkingen dan onbekenden, dan zijn de onbekenden onbepaald: dan, in dit geval, ſtelt men zich gewonelijk voor, de onbekenden onder zekere conditien te bepalen, welke wijze van oploſſen eene geheele nieuwe tak van de analyſis, onder den naam van onbepaalde analyſis, heeft voortgebragt, waarover wij in het vervolg afzonderlijk ſpreken moeten.

§. 383. Alle de handelwijzen, welke wij, om de vergelijkingen, tot twee en meer onbekenden, opteloſſen, zullen voordragen, komen hierop neder: dat men, uit de gegevene vergelijkingen, ééne vergelijking afleide, welke ſlechts ééne der onbekenden inhoudt. * Men noemt die vergelijking, welke altijd tot eene zekere magt opklimt, de finale vergelijking. De Franſchen noemen dezelve *la résultante*.

Bijzondere handgrepen, welke in ſommige gevallen kunnen worden te pas gebragt.

§. 384. I. GEVAL. Wanneer twee vergelijkingen tuſſchen twee onbekenden gegeven zijn, en ééne dezer onbekenden, in elke vergelijking, ſlechts tot de eerſte magt opklimt, zal men, naar den regel van §. 544, I. C., deze onbekende uit elke vergelijking kunnen afzonderen.

1. VOORBEELD. *Gegeven zijnde de vergelijkingen* $3x^2y - x^2 + 3y - 401 = 0$, *en* $5xy - 3x + 2y - 90 = 0$, *de waarden van* x *en* y *te vinden?*

Men vindt uit de eerſte vergelijking $y = \frac{x^2 + 401}{3x^2 + 3}$, en uit de tweede $y = \frac{3x + 90}{5x + 2}$: men heeft daarom, deze twee waarden van y met elkander vergelijkende.

$$\frac{x^2 + 401}{3x^2 + 3} = \frac{3x + 90}{5x + 2}$$

en, de leden dezer vergelijking met $(3x^2 + 3) \times (5x + 2)$ vermenigvuldigende, na herleiding, de derde-magts-vergelijking

$$x^3 + 67x^2 - 499x - 133 = 0$$

volgens de leerwijze van BUDAN, vindt men: dat $x = 7$ is, en nu zal:

$x^3 +$

$$\frac{x^3+67x^2-499x-133}{x-7}=x^2+74x+19=0$$

ſtellende, en deze vierkants-vergelijking oplosſende, $x=-37+15\sqrt{6}=-0,2576539$, en $x=-37-15\sqrt{6}=-73,7423461$ zijn. Met elk dezer drie waarden van x, zal eene waarde van y overëénſtemmen, welke door éénе der gevondene waarden van y zal berekend worden. Men zal vinden:

$$y=3, \text{ overëénſtemmende met } x=7$$

$$y=\frac{1823+740\sqrt{6}}{29} \text{ .... met } x=-37+15\sqrt{6}$$

$$y=\frac{1823-740\sqrt{6}}{29} \text{ .... met } x=-37-15\sqrt{6}$$

welke drie ſtelſels van waarden aan de gegevene vergelijkingen voldoen.

§. 385. II. Geval. Deze oplosſing, door afzondering, zal op een ſtelſel van vergelijkingen, tot drie en meer onbekenden, niet toepasſelijk zijn, dan in zoo verre de onbekenden, tot op éénе na, in de eerſte magt voorkomen, en in de tusſchen vergelijkingen niet tot eene tweede, derde, of hoogere magt opklimmen.

2. Voorbeeld. *Gegeven zijnde de vergelijkingen,*

$$xyz+3xz+yz-36=0$$
$$yz+9x^2-z-39=0$$
$$3x+z-9=0$$

de waarde der onbekenden te vinden?

Men vindt uit de gegevene vergelijkingen:

$$z=\frac{36}{xy+3x+y};\quad z=\frac{39-9x^2}{y-1} \text{ en } z=9-3x$$

Men heeft derhalve tusſchen x en y de twee vergelijkingen;

$$\frac{12}{xy+3x+y}=3-x \text{ en } \frac{13-3x^2}{y-1}=3-x$$

Uit elk dezer vergelijkingen zal men y kunnen afzonderen, en dan vindt men:

$$y=\frac{3x^2-9x+12}{-x^2+2x+3} \text{ en } y=\frac{-3x^2-x+16}{-x+3}$$

waaruit volgt:

$$\frac{3x^2-9x+12}{-x^2+2x+3}=\frac{-3x^2-x+16}{-x+3},$$

welke herleid zijnde, geven zal:

$$3x^4-2x^3-45x^2+68x+12=0$$

Volgens den regel van Budan, vindt men: dat deze vergelijking twee poſitieve wortels $x=2$, $x=3$; benevens twee negatieve; éénen tusſchen -1 en -2, en éénen tusſchen -2 en -3 heeft. 'Er zijn alzoo vier wezenlijke en beſtaanbare oplosſingen.

§. 386. III. GEVAL. Doch in de zeldzaamste gevallen zal men, door eene geregelde afzondering, tot eene finale vergelijking komen. In een grooter aantal zal zulks echter door substitutie, op de volgende wijze, kunnen geschieden.

3. VOORBEELD. *De vergelijkingen*

$$3x^3 - 2x^2y + y^3 + 17x^2 - 19x - y - 54 = 0$$

en . . . . . . $2xy - 2x + y - 11 = 0$

oplossen?

Indien men uit de eerste vergelijking x of y zou willen afzonderen, gelijk wij in de twee voorgaande voorbeelden gedaan hebben, dan zou men tweede en derde-magts-wortel-uitdrukkingen in de waarde van x of y verkrijgen, en de finale vergelijking zou zoo zamengesteld worden, dat derzelver oplossing ondoenlijk, ten minste zeer moeijelijk zou zijn: maar, aangezien de onbekenden in de tweede vergelijking slechts tot de eerste magt opklimmen, zal men éène derzelven kunnen afzonderen, en in de eerste vergelijking substitueren, waardoor dan alle wortel-uitdrukkingen vermeden, en de finale vergelijking, onder den gewonen vorm, zal voorkomen. Zonderen wij uit de tweede vergelijking y af, dan zal men hebben:

$$y = \frac{2x + 11}{2x + 1}$$

Men stelle nu deze waarde van y in de eerste vergelijking; dan heeft men:

$$3x^3 - 2x^2 \cdot \frac{2x+11}{2x+1} + \frac{(2x+11)^3}{(2x+1)^3} + 17x^2 - 19x - \frac{2x+11}{2x+1} - 54 = 0$$

welke, onder de volgende gedaante gesteld:

$$3x^3 + 17x^2 - 19x - 54 - \frac{(2x^2+1)\cdot(2x+11)\cdot(2x+1)^2 - (2x+11)^3}{(2x+1)^3} = 0$$

en verder ontwikkeld zijnde, geven zal:

$$24x^6 + 156x^5 - 34x^4 - 647x^3 - 687x^2 + 337x + 1266 = 0$$

Men zal, door den regel van BUDAN, vinden: dat deze vergelijking vier bestaanbare wortels heeft; éénen positieven, tusschen 1, 1 en 1, 2; éénen positieven gelijk 2; éénen negatieven, tusschen -1 en -2; en nog éénen, tusschen -6 en -7. 'Er zijn dus vier oplossingen. Men zal ook x kunnen afzonderen en eene finale vergelijking in y verkrijgen, welke insgelijks vier bestaanbare wortels zal hebben.

§. 387. IV. GEVAL. Wanneer de termen van twee vergelijkingen tusschen twee onbekenden van dezelfde orde zijn, zal men, door $x = yz$ of $y = xz$ te stellen, twee vergelijkingen in z en y, of in z en x verkrijgen, in elke van welke slechts eene magt van y of x zal voorkomen; zoodat men, door magts-verheffing, uit elke herleide vergelijking, dezelfde magt van y of van x zal kunnen afzonderen,

waar-

waardoor men dan eene finale vergelijking in z verkrijgen zal.

4. VOORBEELD. *Gegeven zijnde* $x + y = 12$, *en* $x^3 + 9x^2y - 6xy^2 = 1568$, *de waarden van* x *en* y *te vinden* (71)?

Deze vergelijkingen, welke volgens het voorgaande geval zouden kunnen opgelost worden, zullen, omdat de termen der vergelijking van dezelfde orde zijn, ook aldus kunnen worden opgelost. Stel $y = xz$, dan veranderen de vergelijkingen in:

$$x(1 + z) = 12 \quad \text{en} \quad x^3(1 - 6z + 9z^2) = 1568$$

De tweede vergelijking door de derde magt van de eerste deelende, zal men, na herleiding, verkrijgen:

$$49z^3 - 339z^2 + 471z - 5 = 0$$

Volgens den regel van BUDAN, en voorts, door oplossing van eene vierkants-vergelijking, zal men voor z drie positieve wortels vinden: namelijk $z = \frac{1}{49} \cdot (47 - 12\sqrt{15})$; $z = \frac{1}{49} \cdot (47 + 12\sqrt{5})$; $z = 5$. Hierdoor vindt men: $x = 8 + \sqrt{15}$; $y = 4 - \sqrt{15}$; $x = 8 - \sqrt{15}$; $y = 4 + \sqrt{15}$; $x = 2$; $y = 10$.

5. VOORBEELD. *Gegeven zijnde de vergelijkingen:*

$$5x^2y - 3xy^2 + 4y^3 - 6156 = 0$$

$$\textit{en} \;.\;.\; 9x^2 + 5xy - y^2 - 117 = 0$$

de waarden van x *en* y *te vinden?*

Deze vergelijkingen zouden, door de afzonderingen of substitutien, waarvan men zich, in de voorgaande gevallen, bediend heeft, niet kunnen worden opgelost: maar, vermits, in elke vergelijking, de termen van dezelfde orde zijn, zal men $y = xz$ kunnen stellen, en dan verkrijgt men, in plaats van de gegevene vergelijkingen,

$$x^3(5z - 3z^2 + 4z^3) = 6156, \quad \text{en} \quad x^2(9 + 5z - z^2) = 117$$

Men verheffe de eerste dezer vergelijkingen tot de tweede, en de tweede tot de derde magt; dan zal men, uit elk dezer uitkomsten, x^6 kunnen afzonderen, en men zal eene vergelijking in z verkrijgen, welke, na behoorlijke herleiding, worden zal

$$87136z^6 - 832488z^5 + 2602885z^4 + 7471770z^3 - 22402163z^2$$
$$- 63160560z - 37896336 = 0$$

Deze vergelijking heeft éénen positieven wortel $z = 4$, en éénen negatieven, welke tusschen 0 en 1 valt. Met den positieven wortel vindt men

(71) HALCKEN wil, in zijn *Arithmetisch Zinnen-Confect*, N° 201, deze vergelijking tot eene vierkants-vergelijking gebragt hebben: doch zulks is niet mogelijk. Ook verdienen de oplossingen, die men, naar den eisch des Schrijvers, van deze vergelijkingen meent gegeven te hebben, den naam van oplossing niet. De jonge beoefenaars der Wiskunst doen wel, wanneer zij hunnen tijd aan soortgelijke beuzelingen niet verspillen.

men $x = \sqrt{\frac{117}{9+5z-z^2}} = \sqrt{9} = \pm 3$. Hier kan echter $+3$ alleen gelden, omdat alleen die waarde van x, welke tevens aan . . . . $x^3 = \frac{6156}{5z-3z^2+4z^3}$ voldoet, in het ſtelſel der gegevene vergelijkingen, kan aangenomen worden.

§. 388. V. Geval. Somtijds gebeurt het, dat door eene kunſtige zamenvoeging uit de gegevene vergelijkingen, eene vergelijking van eene lagere magt kan afgeleid worden, welke, met eene der gegevene veréénigd zijnde, de oploſſingen door de toepaſſing van een der voorgaande gevallen mogelijk maakt.

6. Voorbeeld. *De vergelijkingen*

$$3x^3 + 3y^3 - 6xy + 3x + 2y - a = 0$$
$$x^3 + y^3 + 2xy - 10x - 17y - b = 0$$

opteloſſen? (a en b bekende getallen zijnde.)

Wanneer men de eerſte vergelijking van driemaal de tweede aftrekt, dan zal men vinden:

$$12xy - 33x - 53y + a - 3b = 0$$

uit welke, de eerſte magt van x of y in eene functie van y of x afgeleid, en, in eene der twee gegevene geſubſtitueerd zijnde, eene finale vergelijking in y of x komen zal, welke men als naar gewoonte zal oploſſen.

§. 389. De kortheid van ons beſtek gedoogt niet, deze gevallen door meer voorbeelden optehelderen; noch ook de opgegevene in alle hare bijzonderheden uittewerken. In de wiskundige oefeningen zullen wij daartoe ruimer gelegenheid vinden. Wij merken, van deze kunstgrepen afſtappende, aan: dat, hoezeer de beſchrevene gevallen het minst voorkomen; men echter, wanneer de gegevene vergelijkingen in een van dezelve vallen, liever van de gegevene voorſchriften, dan van de algemeene leerwijzen, tot welker beſchrijving wij nu overgaan, gebruik moet maken, omdat men door dezelve meestal, langs eenen korteren weg, tot de oploſſing zal komen.

Oploſſing der hoogere magts-vergelijkingen, door de hoogere magten van dezelfde onbekende trapswijze te doen verdwijnen.

§. 390. Laat gegeven zijn, de vergelijkingen:

$$x^2 + Px + Q = 0 \qquad x^2 + P'x + Q' = 0$$

in welke de letters P, Q, P', Q', functien van y en van bekende groot-

grootheden zijn. Wanneer men dan de tweede van de eerste vergelijking aftrekt, zal men verkrijgen:

$$(P-P')x+(Q-Q')=0,\quad \text{en } x=-\frac{Q-Q'}{P-P'}$$

en, wanneer men nu deze waarde van x in ééne der twee vergelijkingen stelt, bij voorbeeld, in de eerste; dan zal men:

$$\frac{(Q-Q')^2}{(P-P')^2}-P\times\frac{Q-Q'}{P-P'}+Q=0$$

en, na behoorlijke herleiding,

$$(Q-Q')^2+(P-P')\times(PQ'-P'Q)=0\quad .\ .\ (A)$$

verkrijgen. Wanneer men nu de bijzondere waarden, welke P, Q, P' en Q' in de gegevene vergelijkingen verkrijgen, overbrengt, dan zal men, na de ontwikkeling der producten en magten, eene finale vergelijking (A) in (y) verkrijgen, welke niet hooger, dan tot de vierde magt, zal kunnen opklimmen.

§. 391. Wanneer men de waarde van x in de tweede der gegevene vergelijkingen gesteld had, dan zou men dezelfde vergelijking (A) verkregen hebben.

§. 392. Men kan de eerste der gegevene vergelijkingen met Q', en de tweede met Q vermenigvuldigen, en dan zal men, het laatste van het eerste product aftrekkende, verkrijgen:

$$x=-\frac{PQ'-P'Q}{Q'-Q}$$

vergelijkt men nu deze waarde van x met de eerstgevondene, dan zal men nog de vergelijking (A) vinden.

§. 393. Maar, wanneer men deze waarde van x in de eerste vergelijking substitueert; dan verkrijgt men, na herleiding:

$$(PQ'-P'Q)^2+P(PQ'-P'Q)(Q-Q')+Q(Q-Q')^2=0\quad (B)$$

en deze zelfde substitutie in de tweede vergelijking zal geven:

$$(PQ'-P'Q)^2+P'(PQ'-P'Q)(Q-Q')+Q'(Q-Q')^2=0\quad (C)$$

§. 394. Deze twee finale vergelijkingen zijn van elkander en van de eerste (A) aanmerkelijk onderscheiden, en zij zullen, indien de gegevene vergelijkingen volkomen zijn, tot de zesde magt opklimmen. Dan, de vergelijkingen (B) en (C) hebben elk eenen factor, en, wanneer men dezelve door dien factor deelt, zal de vergelijking (A) te voorschijn komen. Want, de twee eerste termen van het voorste lid van (B), namelijk $(PQ'-P'Q)^2+P(PQ'-P'Q)(Q-Q')$ kunnen, wegens hunnen gemeenen deeler $(PQ'-P'Q)$, onder den vorm

$$(PQ'-P'Q+PQ-PQ')\times(PQ'-P'Q)$$

gebragt worden, welke, aangezien de termen $+PQ'$ en $-PQ'$ elkander vernietigen, de eenvoudige gedaante

$$Q(P-P') \times (PQ'-P'Q)$$

verkrijgt. De vergelijking (B) wordt dan:

$$Q(Q-Q')^2+Q(P-P')\,(PQ'-P'Q)=0$$

welke, zoo als van zelven blijkt, door Q deelbaar is, en diensvolgens door Q gedeeld zijnde, de finale vergelijking (A) oplevert.

§. 395. Helderen wij nu deze handelwijze door een voorbeeld op.

7. VOORBEELD. *Gegeven zijnde*

$$x^2-3xy+9y^2-11x-\;y+\;13=0$$
$$x^2+6xy-\;y^2+\;9x+11y-262=0$$

Men zal dezelve onder de volgende vormen ſtellen:

$$x^2-(3y+11)x+(9y^2-y+13)=0$$
$$x^2+(6y+\;9)x-(y^2-11y+262)=0$$

dan is: $P=-3y-11$; $P'=+6y+9$; $P-P'=-9y-20$; $Q=9y^2-y+13$; $Q'=-y^2+11y-262$; $Q-Q'=10y^2-12y+275$. Men vindt, door multiplicatie:

$$(Q-Q')^2=\;100y^4-240y^3+5644y^2-6600y+75625$$
$$PQ'=\;\;3y^3-\;22y^2+\;665y\;+2882$$
$$P'Q=\;54y^3+\;75y^2+\;\;69y\;+\;117$$
$$PQ'-P'Q=-51y^3-\;97y^2+\;596y\;+2765$$

Hieruit zal men voor de finale vergelijking (A) verkrijgen:

$$559y^4+1653y^3+2220y^2-43405y+20325=0$$

welke twee beſtaanbare poſitieve wortels, éénen, tuſſchen nul en één, en eenen anderen gelijk drie heeft. De waarde van x zal, met behulp van $x=-\dfrac{Q-Q'}{P-P'}=\dfrac{10y^2-12y+275}{9y+20}$, gevonden worden: alzoo zal met $y=3$ overeënſtemmen $x=7$.

§. 396. Wanneer in twee vergelijkingen dezelfde onbekende x tot eene hoogere, dan tot de tweede magt, opklimt, zoo als wanneer, bij voorbeeld, gegeven ware, de vergelijkingen:

$$x^3+Px^2+Qx+R=0$$
$$x^3+P'x^2+Q'x+R'=0$$

dan zou men de tweede van de eerſte aftrekken, en, het verſchil met x vermenigvuldigd zijnde, verkrijgen

$$(P-P')x^3+(Q-Q')x^2+(R-R')x=0$$

Men zou vervolgens de eerſte en tweede der gegevene vergelijkingen met $(P-P')$ vermenigvuldigen, en van de producten de laatst voorgaande aftrekken, wanneer men, na de resten door de coefficienten der eerſte termen gedeeld te hebben, zou verkrijgen:

x^2+

$$x^2 + \frac{Q(P-P') - (R-R')}{P(P-P') - (Q-Q')}x + \frac{R(P-P')}{P(P-P') - (Q-Q')} = 0$$

$$x^2 + \frac{Q'(P-P') - (R-R')}{P'(P-P') - (Q-Q')}x + \frac{R'(P-P')}{P'(P-P') - (Q-Q')} = 0$$

welke vergelijkingen, op dezelfde wijze, als in §. 390, behandeld zijnde, eene finale vergelijking tusschen P, Q, R, P', Q' en R' geven zal, waardoor y zal bekend worden.

§. 397. Indien de magten van x nog hooger opklimmen, zal men dezelfde handelwijze volgen. En zijn 'er drie vergelijkingen, tusschen drie onbekenden, gegeven, dan zal men uit de eerste en tweede, gelijk ook, uit de tweede en derde, twee vergelijkingen in y en z afleiden, uit welke, door de herhaling van dezelfde handelwijze, eindelijk eene finale vergelijking in z zal te voorschijn komen. Niets is derhalve eenvoudiger, dan het begrip van deze trapswijze opklimming tot vergelijkingen van een minder aantal onbekenden, en eindelijk tot eene finale vergelijking van éene onbekende. Maar de langwijligheid der berekening baart afschrik, en bovendien is men *à priori* niet verzekerd, dat de finale vergelijking niet hooger dan het behoort zal opklimmen; want, wanneer men, zie §. 393, in het eenvoudigste geval, ligtelijk tot eene hoogere magt, dan de aard der vergelijkingen medebrengt, komen kan, hoeveel te gemakkelijker zal zulks gebeuren kunnen, wanneer de onbekenden tot hoogere magten opklimmen, en meer in getal zijn? hoezeer wij nu voor ons gelooven, dat men door de gepaste zamenvoegingen, even als in §. 394, de finale vergelijking wel altijd tot hare behoorlijke magt zou kunnen brengen, zouden nogtans, wegens de zamengesteldheid der uitdrukkingen, dezelve moeijelijk te vinden zijn, en het is, om die reden, dat EULER en BEZOUT deze wijze van oplossen, als onvolkomen en onbruikbaar, verworpen hebben.

Oplossing door middel van de gemeene deelers.

§. 398. Veel fraaijer en natuurlijker is het gebruik van van den gemeenen deeler in de oplossing van die soort van vergelijkingen. Hervatten wij de vergelijkingen van het voorgaande voorbeeld,

$$x^2 - (3y + 11)x + (9y^2 - y + 13) = 0$$
$$x^2 + (6y + 9)x - (y^2 - 11y + 262) = 0$$

en stellen wij voor een oogenblik: dat y, overëénkomstig den

aard

aard der vergelijkingen bepaald, en gelijk drie zij; dan veranderen deze vergelijkingen, door de ſubſtitutie van y, in

$$x^2 - 20x + 91 = 0$$
$$x^2 + 27x - 238 = 0$$

Het is duidelijk te zien: dat deze twee vergelijkingen met elkander beſtaanbaar moeten zijn; dat wil zeggen, dat eene waarde van x zoo wel de eerſte als de tweede vergelijking zal moeten oplosſen; want, zonder dit vereischte, zal 'er met de waarde van y geene overëénkomſtige van x beſtaan, die beide gegevene vergelijkingen zal oplosſen. Nu kan aan deze voorwaarde niet voldaan worden, indien niet ten minſte de vergelijkingen $x^2 - 20x + 91 = 0$, en $x^2 + 27x - 238 = 0$ denzelfden wortel hebben: maar die zullen zij niet hebben, indien 'er tusſchen derzelver voorſte leden geenen gemeenen deeler beſtaat. Men vindt voor deze vergelijkingen

$$(x - 7)(x - 13) = 0$$
$$(x - 7)(x + 34) = 0$$

De getallen 7 en 13 zijn derhalve de wortels van de eerſte, en de getallen 7 en -34 de wortels van de tweede, en $x = 7$ is gevolgelijk de eenige waarde, welke, met $y = 3$, aan beide de gegevene vergelijkingen voldoen zal. Wat de wortels 13 en -34 aangaat, deze behooren tot de eerſte en tweede vergelijkingen in het bijzonder; maar niet tot beide de vergelijkingen in haar geheel genomen.

§. 399. Men kan nu, zonder dat het noodig is de waarde van y vooraf te kennen, op dit beginſel voortredeneren, en ſtellen: †† *dat de twee gegevene vergelijkingen niet met elkander beſtaanbaar zullen zijn, indien 'er niet eene waarde voor y kan gevonden worden, welke, in de gegevene vergelijkingen geſubſtitueerd zijnde, derzelver coefficienten zoodanig bepalen, dat zij eenen gemeenen deeler hebben.* Maar hoe zal men nu de waarde van y, overëénkomſtig deze voorwaarde, vinden? Eenvoudig door de gegevene vergelijkingen te behandelen, als of zij eenen gemeenen deeler hadden. Deze handelwijze heeft het voordeel: dat, wanneer de gegevene vergelijkingen eenen gemeenen deeler hebben, (in welk geval de vergelijkingen in een opzigt bepaald, en in een ander op-

opzigt onbepaald zijn,) dezelve bekend wordt: doch hebben de gegevene vergelijkingen geenen gemeenen deeler, *dan zal men tot eene rest komen die alleenlijk van y afhangt: om dan de voorwaarde van het bestaan der gemeene deelers te vervullen, zal men deze rest gelijk nul moeten stellen. Men zal alzoo de finale vergelijking in y verkrijgen, welke tot geene hoogere noch lagere magt zal opklimmen, dan de aard der vergelijkingen mede brengt; terwijl men om de waarde van x te vinden, den laatsten deeler, die de plaats van den onderstelden gemeenen deeler bekleedt, klaarblijkelijk gelijk nul zal moeten stellen.*

§. 400. Passen wij dezen regel toe op de vergelijkingen van het 7. *voorbeeld* pag. 266. Indien men de tweede door de eerste vergelijking deelt, zal men voor het quotient 1, en voor de rest der deeling $(9y+20)x-(10y^2-12y+275)$ verkrijgen. Men deele verder de laatstvoorgaande deeler $x^2-(3y+11)x+(9y^2-y+13)$ door deze rest, dan zal men voor de rest der deeling verkrijgen: $559y^4+1653y^3+2220y^2-43405y+20325$, welke gelijk nul gesteld zijnde, de waarde van y zal doen bekend worden. Men ziet: dat deze oplossing volmaakt met de voorgaande overëénstemt.

8. VOORBEELD. *Gegeven zijnde de vergelijkingen*

$$x^3+3x^2y+3xy^2-98=0$$
$$x^2+4xy+2y^2-10=0$$

de waarde van x en y te vinden?

Den gemeenen deeler der voorste leden zoekende, zal men, de laatste rest gelijk nul stellende, verkrijgen:

$$43y^6+345y^4-1960y^3+750y^2-2940y-4302=0$$

De laatste deeler is: $(9y^2+10)x-(2y^3+10y+98)$, deze is de gemeene deeler van de voorste leden der vergelijkingen, in de onderstelling, dat de laatste rest gelijk nul zij. De finale vergelijking in y heeft éénen positieven wortel $y=3$, en éénen negatieven, tusschen 0 en -1. Behandelt men de gegevene vergelijkingen, naar het voorschrift van §. 387, dan zal men dezelfde vergelijking in y verkrijgen.

9. VOORBEELD. *Gegeven zijnde de vergelijkingen*

$$x^3-4yx^2+(4y^2-3y-25)x-(3y^3-9y^2+75y)=0$$
$$\text{en} \ldots 2x^2-(7y+2)x+(3y^2+6y)=0$$

de waarden van x en y te vinden?

De voorste leden dezer vergelijkingen hebben $x-3y$ tot gemee-

nen

nen deeler. De gegevene vergelijkingen kunnen derhalve onder de volgende gedaante gesteld worden,

$$(x^2 - yx + y^2 - 3y - 25) \times (x - 3y) = 0$$
$$(2x - y - 2) \times (x - 3y) = 0$$

Men kan nu, omdat, wanneer een product van twee of meer factoren nul is, noodzakelijk één van deszelfs factoren nul moet zijn, de volgende stelsels aannemen

Eerste stelsel $\left\{\begin{array}{c} x - 3y = 0 \\ x - 3y = 0 \end{array}\right\}$

Tweede stelsel $\left\{\begin{array}{c} x^2 - xy + y^2 - 3y - 25 = 0 \\ 2x - y - 2 = 0 \end{array}\right\}$

Derde stelsel $\left\{\begin{array}{c} x^2 - xy + y^2 - 3y - 25 = 0 \\ x - 3y = 0 \end{array}\right\}$

Vierde stelsel $\left\{\begin{array}{c} 2x - y - 2 = 0 \\ x - 3y = 0 \end{array}\right\}$

Het eerste dezer stelsels, komt slechts op de enkelde vergelijking $x - 3y = 0$ uit; dat is op $x = 3y$; men zal dan y naar welgevallen nemen, en $x = 3y$ stellen kunnen, en alle deze waarden van x en y zullen aan de twee gegevene vergelijkingen voldoen: doch de derde en vierde stelsels, hoewel zij voor x en y bepaalde waarden geven, zullen ook aan het eerste stelsel, dat gevolgelijk de derde en vierde in zich begrijpt, voldoen moeten. Het tweede stelsel staat geheel op zich zelve, en geeft, als zoodanig, voor de onbekenden: $x = 5$, $y = 8$ en $x = -1$ en $y = -4$, welke in het geheel niet aan de vergelijking $x - 3y = 0$ zullen voldoen, noch ook niet aan de waarden, welke de onbekenden, in het derde en vierde stelsel, als in de vergelijking $x - 3y = 0$ begrepen zijnde, verkrijgen zullen; want het derde stelsel zal geven:

$$x = \tfrac{9}{14} \pm \tfrac{3}{14}\sqrt{709}; \quad en \quad y = \tfrac{3}{14} \pm \tfrac{1}{14}\sqrt{709}$$

en het vierde stelsel $x = 1\tfrac{1}{5}$ en $y = \tfrac{2}{5}$. Men heeft alzoo drie onderscheidene stelsels van bepaalde oplossingen, die elk in het bijzonder aan de gegevene vergelijkingen, zoo als zij liggen, voldoen: wij zeggen: zoo als zij liggen; want, indien men eene der vergelijkingen van eenen zijner factoren bevrijd, voldoet slechts een stelsel, en men heeft eene bijzondere oplossing. Het hangt nu van den aard van het vraagstuk af, de wijze te bepalen, waarop men van die onderscheidene oplossingen gebruik moet maken (72).

§. 401.

(72) Men zou mogelijk denken: dat het voordeelig zou zijn, om, in de

§. 401. Wanneer men de oplosfing, door het zoeken van den gemeenen deeler, aanvat, zal men, ten minfte voor twee vergelijkingen van twee onbekenden den gemeenen deeler, indien hij werkelijk beftaat, ontdekken, waardoor de oplosfing altijd tot de oplosfing van eenvoudiger vergelijkingen gebragt wordt, welke op de behoorlijke wijze verëénigd zijnde, het geheele ftelfel van oplosfingen geven zal, en om deze reden is deze laatfte oplosfings-wijze boven de eerfte, (welke anders behoorlijk behandeld zijnde, op dezelfde gronden berust,) veel verkiefelijker.

Handelwijze van EULER.

§. 402. De beroemde EULER gebruikt, in plaats van den gemeenen deeler op de gewone wijze te zoeken, eene fierlijker handelwijze. Laten gegeven zijn, de vergelijkingen:

$$x^3 + Px^2 + Qx + R = 0$$
$$x^4 + P'x^3 + Q'x^2 + R'x + S' = 0$$

Ne-

de oplosfing van een ftelfel van vergelijkingen, de gemeene deelers wegtemaken; om alzoo eenvoudiger vergelijkingen te verkrijgen: maar, hierdoor verliest de oplosfing ten minfte altijd hare algemeenheid, en men loopt daardoor gevaar, de bijzondere oplosfingen, welke in de vergelijkingen opgefloten zijn, en welke dikwijls alleen met de bijzondere omftandigheden van het werkftuk overëénkomen, te misfen. Maar, in het bijzonder, geldt ook deze waarfchuwing, wanneer de twee vergelijkingen wel geenen gemeenen deeler hebben; maar toch eene derzelve in twee factoren ontleedbaar is, in welk geval geenen der twee factoren mogen verwaarloosd worden. Laten gegeven zijn

$$x^2 - (5y + 2)x + (6y^2 + 5y + 1) = 0$$
$$x^2 - 2yx + 3x - y - 40 = 0$$

De eerfte dezer twee vergelijkingen is ontleedbaar in de factoren . . . $x - (3y + 1)$ en $x - (2y + 1)$: men heeft alzoo

$$(x - (3y + 1)) \times (x - (2y + 1)) = 0$$
$$\text{en} \quad . \; . \; . \quad x^2 - 2yx + 3x - y - 40 = 0$$

Men zal nu, om deze vergelijkingen in haar geheel optelosfen, de twee volgende ftelfels afzonderlijk moeten oplosfen

$$\left\{ \begin{array}{c} x = 3y + 1 \\ x^2 - 2yx + 3x - y - 40 = 0 \end{array} \right\}$$
$$\text{en} \left\{ \begin{array}{c} x = 2y + 1 \\ x^2 - (2y - 3)x - y - 40 = 0 \end{array} \right\}$$

Het eerfte ftelfel geeft: $y = 2$ of -6, en $x = +7$ of -17; en het tweede ftelfel $x = 11\frac{2}{7}$ en $y = 5\frac{1}{7}$; welke waarden men insgelijks verkregen zou hebben, indien men de deelers van de eerfte vergelijking niet bemerkt hadde, en op de gewone wijze ware te werk gegaan.

Nemen wij, dat $x - a$ een factor van beide de vergelijkingen zij; dan is het klaar: dat de quotienten, welke ontstaan, indien men de voorste leden door dien factor deelt, van den vorm $x^2 + px + q$, en $x^3 + p'x^2 + q'x + r'$ zullen zijn; in welke, omdat de aangenomen factor onbekend is, p, q, p', q' en r' onbekend zullen zijn: maar men zal nu, overëénkomstig die onderstelling, stellen kunnen:

$$x^3 + Px^2 + Qx + R = (x-a) \times (x^2 + px + q)$$

$$x^4 + P'x^3 + Q'x^2 + Rx + S = (x-a) \times (x^3 + p'x^2 + q'x + r')$$

Nu zal men, uit elke dezer twee vergelijkingen, $x - a$ afzonderen, en dezelve aan elkander kunnen gelijk stellen, wanneer men, na behoorlijke herleiding, verkrijgen zal:

$$(x^3 + Px^2 + Qx + R) \times (x^3 + p'x^2 + q'x + r') =$$
$$(x^4 + P'x^3 + Q'x^2 + R'x + S') \times (x^2 + px + q)$$

Deze vergelijking moet bestaan, zonder aan x eene bijzondere waarde te geven; zulks kan nu geen plaats vinden, indien het eerste product ontwikkeld zijnde, deszelfs termen niet, één voor één, gelijk zijn aan die van het ontwikkelde product, hetwelk in het tweede lid der vergelijking voorkomt. Men voere dan deze multiplicatien uit, en vergelijke de coefficienten van dezelfde magten van x met elkander, dan zal men de volgende vergelijkingen verkrijgen.

$$P + p' = P' + p$$
$$Q + Pp' + q' = Q' + P'p + q$$
$$R + Qp' + Pq' + r' = R' + Q'p + P'q$$
$$Rp + Qq' + Pr' = S' + R'p + Q'q$$
$$Rq' + Qr' = S'p + R'q$$
$$Rr' = S'q$$

Hier zijn zes vergelijkingen, en vijf onbepaalde grootheden p, q, p', q' en r'. Men zal dezelve, daar zij niet hooger, dan tot de eerste magt opklimmen, uit deze vergelijkingen kunnen doen verdwijnen, en tot eene finale vergelijking komen, waarin geene andere dan de grootheden P, Q, R, P', Q', R' en S', die functien van y zijn, voorkomen, en welke, bijgevolg de finale vergelijking in y zijn zal.

§. 403. Nemen wij, tot een voorbeeld, de vergelijkingen:

$$x^2 + Px + Q = 0 \quad \text{en} \quad x^2 + P'x + Q' = 0$$

dan zijn de factoren, waarmede $x - a$ moeten vermenigvuldigd worden, om de leden van de gegevene vergelijkingen te verkrijgen $x + p$ en $x + p'$, en dan is voor dit geval

$$R = 0,\ R' = 0,\ S' = 0;\ q = 0,\ q' = 0 \text{ en } r' = 0$$

en men heeft alleenlijk

$$\left\{\begin{array}{l} P+p'=P'+p \\ Q+Pp'=Q'+P'p \\ Qp'=Q'p \end{array}\right\} \textit{waaruit volgt} \left\{\begin{array}{l} p-p'=P-P' \\ P'p-Pp'=Q-Q' \\ Q'p-Qp'=0 \end{array}\right\}$$

Uit de twee eerste dezer vergelijkingen haalt men:

$$p=\frac{(P-P').P-(Q-Q')}{P-P'}; \textit{ en } p'=\frac{(P-P').P'-(Q-Q')}{P-P'}$$

en, wanneer men nu, in de derde vergelijking $Q'p-Qp'=0$, in plaats van p en p', de gevondene waarden ſtelt; dan zal men, na behoorlijke herleiding, voor de finale vergelijking verkrijgen:

$$(Q-Q')^2+(P-P')\times(PQ'-P'Q)=0$$

dezelfde, als welke in §. 390. gevonden is. Om nu de waarde van x te vinden, deelt men x^2+Px+Q door $x+p$; het quotient zal $x-a$ zijn, en de rest der deeling, welke de finale vergelijking in y is, zal men als nul moeten aanmerken: nu geeft de deeling van x^2+Px+Q door $x+p$ tot quotient $x+P-p$ en $Q-(P-p).p$ tot rest der deeling, welke laatſte, indien men voor p hare waarde ſtelt, op de finale vergelijking nederkomt: nu is $x+P-p=x-a=0$, derhalve $x=a=p-P$; ſtelt men nu voor p hare waarde, welke boven gevonden is; dan zal men hebben:

$$x=-\frac{Q-Q'}{P-P'}$$

§. 404. Laten nog gegeven zijn, de vergelijkingen:

$$x^3+Px^2+Qx+R=0$$
$$x^3+P'x^2+Q'x+R'=0$$

dan zal, in de algemeene vergelijkingen boven, $S'=0$ en $r'=0$ zijn, en men zal voor de finale vergelijking in y verkrijgen:

$$+R'(R-R')\times[(P-P')Q-(R-R')]-R'(Q-Q')\times[(Q-Q')Q-(R-R')P]-R'(P-P')\times[(PQ'-P'Q)Q-(PR'-P'R)P+(QR'-Q'R)]-R(R-R')\times[(P-P')Q'-(R-R')]+R(Q-Q')\times[(Q-Q')Q'-(R-R')P']+R(P-P')\times[(PQ'-P'Q)Q'-(PR'-P'R)P'+\ldots(QR-Q'R)]=0$$

welke uitdrukking men ook, door trapswijze de magten van x uit de vergelijking uitteroeijen, verkrijgen zal. Men zal nu, door deze vergelijking, de waarde van y, en gevolgelijk die van p en P', enz. en door deze eindelijk de waarde van x vinden. (73)

(73) Wij bevelen den leerling, deze geheele opgave naterekenen. Hij zal ook dezelfde uitkomst vinden, door regtſtreeks den gemeenen deeler der gegevene vergelijkingen te zoeken. Zie §. 396.

Zwarigheden, welke men, in de toepassing dezer leerwijze, op een grooter aantal vergelijkingen, ontmoet.

§. 405. Stellen wij, tusschen drie onbekenden x, y en z, drie vergelijkingen: $\phi(x,y,z,)=0$; $\phi_1(x,y,z,)=0$ en $\phi_2(x,y,z,)=0$ (74), dan zal men, deze vergelijkingen, naar de afdalende magten van dezelfde letter, geordend hebbende, den gemeenen deeler van de twee eerste bepalen, de eene door de andere deelende, tot zoo lang men eene rest verkrijgt, die alleen van y en z afhankelijk is, welke rest men gelijk nul stelt. Op dezelfde wijze zal men, den gemeenen deeler van de tweede en derde vergelijking bepalen, en men zal alzoo twee vergelijkingen in y en z vinden, die wij kortheidshalve door $\phi(y,z,)=0$ en $\phi_1(y,z,)=0$ zullen uitdrukken. In de zamenstelling van deze vergelijkingen komt de tweede vergelijking tweemaal, en de eerste en derde slechts éénmaal voor, en het is dus te verwachten, dat men, door den gemeenen deeler van $\phi(y,z,)$ en van $\phi_1(y,z,)$ te zoeken, eene vergelijking in z verkrijgen zal, welke, met den aard van het gegeven stelsel der vergelijkingen, vreemde wortels hebben zal. Om die reden, heeft dan ook BEZOUT deze handelwijze verworpen: dan, indien men de derde met de eerste der gegevene vergelijkingen veréénigt, zal men, door derzelver gemeenen deeler te bepalen, eene derde vergelijking $\phi_2(y,z,)=0$ verkrijgen. Men verkrijgt dan:

$$\left\{\begin{array}{l}\phi\ (y,z)=0\\ \phi_1(y,z)=0\\ \phi_2(y,z)=0\end{array}\right\}\textit{uit de zamenvoeging van}\left\{\begin{array}{ccc}1 & \text{en} & 2\\ 2 & \text{en} & 3\\ 3 & \text{en} & 1\end{array}\right\}$$

nu kan men de eerste en tweede, de tweede en eerste, en de derde en eerste dezer vergelijkingen zamenvoegen: men zal dan drie finale vergelijkingen in z verkrijgen; namelijk:

$$\left\{\begin{array}{l}\phi\ (z)=0\\ \phi_1(z)=0\\ \phi_2(z)=0\end{array}\right\}\textit{uit de zamenvoeging van}\left\{\begin{array}{l}1,\ 2,\ 2,\ 3\\ 2,\ 3,\ 3,\ 1\\ 3,\ 1,\ 1,\ 2\end{array}\right\}$$

Elk dezer vergelijkingen, in z, bevat de waarden van z, welke met het gegeven stelsel van vergelijkingen instemmen; daar het nu buiten alle

(74) Dit teeken ϕ beteekent eigenlijk functie; men gebruikt daartoe ook nog de teekens F, f, ψ, φ, enz. de cijfertjes, aan den voet der letters ϕ geplaatst, dienen slechts, om een onderscheid in den vorm dezer functien aantewijzen.

alle twijfel ſtaat, dat dit ſtelſel van vergelijkingen een bepaald aantal van waarden voor z medebrengt, hetwelk alleenlijk, met de overëénkomſtige waarden van x en y, met uitſluiting van alle anderen, het ſtelſel der gegevene vergelijkingen oplost, zoo volgt hieruit: dat 'er eene zekere finale vergelijking in z beſtaan moet, welke dit ſtelſel volmaakt oplost, welke vergelijking gevolgelijk van alle vreemde factoren bevrijd, en in elk ééne der drie vergelijkingen $\phi(z) = 0$, $\phi_1(z) = 0$ en $\phi_2(z) = 0$ begrepen zal zijn. Noemen wij deze vergelijking $\psi(z) = 0$; dan zal men de drie finale vergelijkingen, onder de volgende gedaanten:

$$f(z) \times \psi(z) = 0;\ f_1(z) \times \psi(z) = 0;\ f_2(z) \times \psi(z) = 0$$

kunnen voorſtellen, en nu blijkt het ten duidelijkſte, dat, wanneer men den gemeenen deeler van $\phi(z)$, $\phi_1(z)$ en $\phi_2(z)$ zoekt, en men denzelven gelijk nul ſtelt, deze alsdan de ware finale vergelijking zijn zal, welke alle de wortels van z (en geen meer of minder) inhoudt, die, met de overëénkomſtige waarden van x en y verëénigd, alle de mogelijke, zoo beſtaanbare als onbeſtaanbare, oplosſingen geven zullen (75). Wij kunnen thans in geene verdere bijzonderheden treden, en zullen de nadere uitbreiding dezer beſchouwingen in een bijzonder geſchrift mededeelen.

Handelwijze van Bezout.

§. 406. Bezout de zwarigheden, hier boven geopperd, (doch, welke, zoo als wij gezien hebben, kunnen weggenomen worden,) inziende, heeft in zijn werk, *Théorie Générale des Equations Algébriques*, eenen geheel anderen weg ingeſlagen. Hij vermenigvuldigt elke der gegevene vergelijkingen met eene veelledige uitdrukking, welke van denzelfden vorm als de gegevene vergelijking is, en telt alsdan alle deze vergelijkingen bij elkander: de coefficienten dezer aangenomene uitdrukkingen onbepaald zijnde, is men meester, om van de ſom dezer producten alle de coefficienten, behalve die, welke de magten van dezelfde onbekenden vermenigvuldigen, gelijk nul te ſtellen; waardoor dan tusſchen die onbepaalde coefficienten een genoegzaam aantal vergelijkingen ontſtaan, door welke de onbepaalde coefficienten van de termen der finale vergelijking bekend worden. Wanneer men de oplosſing der ver-

ge-

(75) Mogelijke oplosſingen zijn die, welken de aard der vraag medebrengt, beſtaanbare en onbeſtaanbare daar onder begrepen.

gelijkingen van deze zijde aanvat, en zich tevens voorstelt, om tot eene finale vergelijking te komen, welke niet te hoog noch te laag opklimt, moet men geene geringe zwarigheden overwinnen, waarvan de voornaamste op deze twee nederkomen. 1° Welke zal, in elk bijzonder geval, de magt zijn, tot welke de finale vergelijking opklimt? en 2°, Hoe zal men, uit de gegevene vergelijkingen, den vorm der aantenemene factoren kunnen beoordelen, op dat men, door deze handelwijze, tot de ware en eigenlijke finale vergelijking gebragt worde? BEZOUT heeft dit stuk met zijne gewone schranderheid behandeld. Hij is de eerste geweest, die bewezen heeft: *dat de magt eener finale vergelijking, spruitende uit een stelsel van volkomene vergelijkingen, zooveel in aantal zijnde, als 'er onbekenden zijn, gelijk is aan het product van de exponenten van de magten der bijzondere vergelijkingen*, (eene waarheid, welke naderhand door POISSON, meer regtstreeks, bewezen is, zie *Journal de l'Ecole Polytechnique*, XI *Cahier*, *pag.* 199.) en de middelen aan de hand gegeven, om, met zekerheid, den vorm der aantenemene factoren te bepalen. Meer kunnen wij 'er voor het tegenwoordige niet van zeggen: de ontwikkeling dezer beschouwingen onderstelt kundigheden, die nog niet geleerd zijn, en eene bedrevenheid, die men, op de tegenwoordige hoogte, niet kan onderstellen. Met een uittreksel zouden wij, voor den onkundigen te weinig zeggen, en deskundigen niets nieuws leeren: om welke redenen wij dan, daar 'er in deze les genoeg gezegd is, om de oplossingen der hoogere magts-vergelijkingen uit het ware gezigtpunt te beschouwen, en ook dadelijk in die gevallen, welke in de gewone toegepaste wiskunde kunnen voorkomen, optelossen, voor het tegenwoordige van deze stof afstappen, en den meergevorderden Lezer de lezing van het aangehaalde werk van BEZOUT aanbevelen.

§. 407. Wij zouden nu, het plan van den eersten Cursus volgende, eene menigte vraagstukken kunnen oplossen, welke tot eene hoogere dan de tweede magt opklimmen: maar wij oordeelen, dat, wanneer de Lezer op deze hoogte gekomen is, hij alsdan den tijd aan nuttiger beschouwingen, dan de oplossing van rekenkunstige vraagstukken, welke, ofschoon zij tot eene hoogere magt opklimmen, daarom niet moeijelijker in vergelijking te brengen zijn, besteden kan; vooral, wanneer hij zich, in de XXXI Les van den eersten Cursus, en de voorgaande XLVI Les, daarin genoegzaam geoefend heeft.

WISKUNDIGE LESSEN.

XIII. BOEK.

Over de behandeling der Wortel-uitdrukkingen, zoo der bestaanbare, als der onbestaanbare.

DRIE- EN- VIJFTIGSTE LES.

Over de behandeling der Wortel-uitdrukkingen.

§. 408. De worteltrekkingen, en de oplossing der tweede en hoogere magts-vergelijkingen doen eene soort van uitdrukkingen ontstaan, die men wortel-uitdrukkingen noemt, en tot de vormen $\sqrt[n]{a}$ en $a + b\sqrt[n]{c}$ behooren. Wij zullen ons, in dit boek, met derzelver nadere beschouwing bezig houden.

§. 409. De wortel-uitdrukkingen zijn van de exponentiale, in de XXXV Les, I. C. behandeld, niet in waarde en beteekenis, maar alleen in vorm, onderscheiden; want

$$\textit{Voor}\left\{\begin{array}{c}\sqrt[n]{a}\\ \sqrt[n]{a^r}\\ a+p\sqrt[n]{b^r}\end{array}\right\}\textit{kan men schrijven}\left\{\begin{array}{c}a^{\frac{1}{n}}\\ a^{\frac{r}{n}}\\ a+p\times b^{\frac{r}{n}}\end{array}\right\}$$

De wortel-uitdrukkingen zijn nog een overblijfsel der verouderde teekens, welke men thans, na de volmaking van de Leer der exponenten, geheel zou kunnen ontbeeren.

§. 410. Reeds zijn, in de XXXV Les, I. C., alle de gronden blootgelegd, waarop de beteekenis en het gebruik der exponentiale uitdrukkingen berusten: deze gronden zijn in de volgende grond-formulen begrepen.

A. Voor de gelijknamige exponentiale uitdrukkingen is:

1° $\left\{\begin{array}{l} a^n \times b^n = (ab)^n \\ a^n \times b^n \times c^n \times enz. = (abc\,enz.)^n \end{array}\right\}$ Zie §. 713. I. C.

2° $a^n : b^n = \frac{a^n}{b^n} = \frac{aaaa\ enz.}{bbbb\ enz.} = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times enz. =$

. . . . . $\left(\frac{a}{b}\right)^n$. Zie §. 714.

B. Voor de gelijkslachtige is:

3° $\left\{\begin{array}{l} a^p \times a^q = a^{p+q} \\ a^p \times a^q \times a^r \times a^s \times enz. = a^{p+q+r+s+enz.} \end{array}\right\}$ Zie §. 715.

4° . . . . $a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$. Zie §. 716.

C. Voor de magts-verheffingen en worteltrekkingen.

5° $(a^n)^m = a^{nm}$ en 6° $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$. Zie §. 727 en 728.
Ook is, in §. 722. en vervolgens, de beteekenis der negatieve exponenten verklaard, en het is gebleken: dat

1° $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$; 2° $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$; 3° $\frac{a^n}{b^m} = a^n \times b^{-m}$

4° $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{b}{a}\right)^{-n}$; 5° $\frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$ is.

Deze formulen zijn zeer gewigtig, en zij kunnen verder uitgebreid worden, gelijk de leerling in de uitslaande tabelle zien kan. Thans zullen wij, op deze gelegde gronden voortgaan, en den lezer, welke intusschen de XXXV Les nog eens door mag loopen, de behandeling dezer uitdrukkingen, welker kennis zoo nuttig is, nader leeren kennen.

Herleiding en omzetting der exponentiale of wortel-uitdrukkingen.

§. 411. †† *Wanneer men een product of gedurig product tot eenige magt moet verheffen, dan zal men elken factor tot die magt verheffen, en de magten der factoren met elkander vermenigvuldigen.* Dat is:

$$(abcde)^n = a^n b^n c^n d^n e^n$$

Want

Want $(abcde)_n = abcde \times abcde \times abcde \times$ *enz.* tot zooveel malen, als 'er éénheden in n zijn: elk eene der letters a, b, c, enz. zal dan, in dit product, n maal voorkomen, en men zal hetzelve, bijgevolg, onder den vorm aaa *enz. tot* $n \times bbb$ *enz. tot* $n \times ccc \times$ *enz.* stellen kunnen: dat is $(abcde)^n = a^n b^n c^n d^n e^n$.

§. 412. †† Omdat $(a^n)^m = a^{mn}$ is, zie §. 727, I. C., zal men, ingevolge het bewezene, stellen kunnen:

$$(a^p b^q c^r d^s)^n = a^{pn} b^{qn} c^{rn} d^{sn}.$$

§. 413. †† *Wanneer men eene breuk tot eene zekere magt moet verheffen, zal men den teller en den noemer, elk afzonderlijk, tot die magt verheffen, en de magt des tellers door die des noemers deelen*, dat is:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \text{enz.} = \frac{aaa\ \text{tot}\ n}{bbbb\ \text{tot}\ n} = \frac{a^n}{b^n}$$

Deze waarheid volgt onmiddelijk uit §. 714, I. C. Wil men echter dezelve nog, op eene andere wijze, in verband met de negatieve exponenten, zien; zoo zal men $a : b$ onder deze gedaante $a^1 b^{-1}$ stellen, en dan is, volgens §. 412. $(a^1 b^{-1})^n = a^n b^{-n} = a^n : b^n$.

§. 414. †† Het zal op dezelfde wijze blijken: dat

$$\left[\frac{a^p b^q c^r}{d^s e^t}\right]^n = \frac{a^{pn} b^{qn} c^{rn}}{d^{sn} e^{tn}}$$

zal zijn.

§. 415. †† *Elke evene magt is altijd positief, het zij de wortel van die magt positief of negatief zij*: dat is, wanneer n een geheel getal is; dan zal men hebben:

$$(\pm a)^{2n} = + a^{2n}. \text{ Zie §. 482, I. C.}$$

§. 416. †† *Elke onevene magt heeft hetzelfde teeken als haar wortel.* Dat is, n een geheel getal zijnde, dan is

$$(\pm a)^{2n+1} = \pm a^{2n+1}. \text{ Zie §. 482, I. C.}$$

§. 417. *Indien eene uitdrukking, waaruit men eenigen wortel trekken zal, in factoren ontleed is, zal de wortel uit die grootheid gelijk zijn aan het product van de wortels uit alle hare afzonderlijke factoren.*

Deze waarheid wordt door de formule

$$\sqrt[n]{(ab^p c^q d^r)} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b^p} \times \sqrt[n]{c^q} \times \sqrt[n]{d^r}$$

of, zoo men wil, door

$$(ab^p c^q d^r)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} \times b^{\frac{p}{n}} \times c^{\frac{q}{n}} \times d^{\frac{r}{n}}$$

uitgedrukt, en is slechts eene verdere uitbreiding van hetgeen, in §. 412. van de geheele exponenten gezegd is. Het is buiten twijfel: dat men uit elk gegeven getal de n^{de} magt kan trekken, en dat men, voor dezen n^{den} magts-wortel uit dit getal, een zeker getal verkrijgen zal. Laat dan $\sqrt[n]{a} = A$; $\sqrt[n]{b^p} = B$; $\sqrt[n]{c^q} = C$; $\sqrt[n]{d^r} = D$ zijn; dan zal $a = A^n$; $b^p = B^n$; $c^q = C^n$ en $d^r = D^n$ zijn; gevolgelijk zal ook $ab^p c^q d^r = A^n B^n C^n D^n = (ABCD)^n$ zijn. Hieruit den n^{de} magts-wortel trekkende, zal men $\sqrt[n]{(ab^p c^q d^r)} = ABCD = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b^p} \times \sqrt[n]{c^q} \times \sqrt[n]{d^r} = a^{\frac{1}{n}} \times b^{\frac{p}{n}} \times c^{\frac{q}{n}} \times d^{\frac{r}{n}}$ verkrijgen.

§. 418. †† *Het bewezene in §. 412 en 417. strekt zich ook tot de gebrokene en negatieve magten uit*; zoo als uit de volgende formulen blijken zal.

$$(a^p b^q c^r)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{pm}{n}} b^{\frac{qm}{n}} c^{\frac{rm}{n}}$$

$$\sqrt[\frac{m}{n}]{(a^p b^q c^r)} = (a^p b^q c^r)^{1:\frac{m}{n}} = (a^p b^q c^r)^{\frac{n}{m}} = a^{\frac{pn}{m}} b^{\frac{qn}{m}} c^{\frac{rn}{m}}$$

$$(a^p b^q c^r)^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{(a^p b^q c^r)^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{a^{\frac{pm}{n}} b^{\frac{qm}{n}} c^{\frac{rm}{n}}} = \ldots.$$

$$\ldots\ldots.\ a^{-\frac{pm}{n}} b^{-\frac{qm}{n}} c^{-\frac{rm}{n}}.$$

§. 419. *De formulen:* $(a^n)^m = a^{mn}$, *en* $\sqrt[m]{(a^n)} = a^{\frac{n}{m}}$ *zijn ook voor eene verdere verheffing vatbaar.* Om $(a^n)^m$ tot de magt p te verheffen; dan zal men schrijven:

$$((a^n)^m)^p = (a^{mn})^p = a^{mnp}$$

Wil men deze laatste wederom tot de magt q verheffen; dan zal men hebben:

$$(((a^n)^m)^p)^q = ((a^{mn})^p)^q = a^{mnpq}.\ enz.$$

†† Even eens is het met de worteltrekking gelegen. Om den wortel p uit $\sqrt[m]{a^n}$ te trekken, zal men schrijven:

$$\sqrt[p]{\cdot \sqrt[m]{(a^n)}} = \sqrt[p]{a^{\frac{n}{m}}} = a^{\frac{n}{mp}} = \sqrt[mp]{a^n}$$

Uit

Uit deze wederom den q^{de} magts-wortel zullende trekken, zal men schrijven:

$$\sqrt[q]{\cdot}\sqrt[p]{\cdot}\sqrt[m]{(a^n)} = \sqrt[q]{\sqrt[p]{a^{\frac{n}{m}}}} = \sqrt[q]{a^{\frac{n}{mp}}} = a^{\frac{n}{mpq}} = \sqrt[mpq]{a^n}$$

Op dezelfde wijze zal, in het algemeen,

$$\left(\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{mpr}{nqs}}$$

zijn. Met deze formulen, gelijk ook met alles, wat in de XXXV Les is geleerd, alsmede met de formulen, op de uitslaande tabelle N° IV, moet de leerling, zoo veel mogelijk, zich gemeenzaam maken.

§. 420. Uit de verklaarde herleidingen volgt:

1° †† *Dat de uitdrukking* $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$ *is.*

Want a is gelijk $a^{\frac{n}{n}}$, of gelijk $\sqrt[n]{a^n}$; derhalve is $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{(a^n b)}$.

Volgens deze formule, zal $3\sqrt{2} = \sqrt{(9 \times 2)} = \sqrt{18}$. Wederom $7\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{(7^3 \times 3)} = \sqrt[3]{1029}$.

Insgelijks zal $2a\sqrt{b} = \sqrt{(4a^2 b)}$, of $= \sqrt{4a^2 b}$. Insgelijks $2a\sqrt[4]{7b} = \sqrt[4]{112a^4 b}$. Nogmaals $3a^2 b^2 c\sqrt[5]{abc} = \sqrt[5]{243a^{11}b^{11}c^6}$.

§. 421. 2° †† *Dat, wanneer de uitdrukking* $\sqrt[n]{a}$ *gegeven is, en het getal, of de uitdrukking,* a *door eene volkomene* n^{de} *magt deelbaar is, zoodat* $a = b^n c$ *is, alsdan* $\sqrt[n]{a} = b\sqrt[n]{c}$ *zal zijn.*

Want $a = b^n c$ zijnde; zal $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b^n} \times \sqrt[n]{c} = b\sqrt[n]{c}$ zijn. Zie §. 417. * In eene uitdrukking, als deze $a\sqrt[n]{b}$, wordt de grootheid, of letter, b gezegd onder het wortel-teeken te staan, en de grootheid a buiten hetzelve. * De laatste wordt doorgaans als den coefficient van $\sqrt[n]{b}$ aangemerkt.

§. 422. Het is van veel belang, om zoo het mogelijk is, de wortels, het zij uit getallen, het zij uit stelkundige uitdrukkingen, volgens deze formulen te herleiden. †† *Deze herleiding is nu altijd mogelijk, wanneer het getal of de uitdrukking, waaruit de* n^{de} *magt moet getrokken worden, door de* n^{de} *magt van eenig getal deelbaar is.* „ Om

„ *nu daarvan zeker te zijn, zal men het gegeven getal, of de ge-*
„ *gevene uitdrukking, in factoren ontleden, om te zien, of onder de-*
„ *zelve* n^{de} *magten gevonden worden.*" De volgende voorbeelden zullen deze handelwijze beter, dan eene meer omslagtige beschrijving, doen kennen.

Om te beslissen of $\sqrt{18}$ tot den vorm $a\sqrt{b}$ herleidbaar zij, zal men onderzoeken: of 18 door een volkomen vierkant getal deelbaar zij? Nu is $18 = 9 \times 2 = 3^2 \times 2$; derhalve is $\sqrt{18} = \sqrt{(9 \times 2)} = 3\sqrt{2}$. Op dezelfde wijze zal

$\sqrt{242} = \sqrt{121 \times 2} = 11\sqrt{2}$; en $\sqrt{162} = \sqrt{81 \times 2} = 9\sqrt{2}$ zijn. En zulks is op alle soort van wortel-uitdrukkingen toepasselijk.

$$\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{27 \times 2} = 3\sqrt[3]{2};\quad \sqrt[3]{192} = \sqrt[3]{64 \times 3} = 4\sqrt[3]{3}.$$

$$\sqrt[4]{144} = \sqrt[4]{16 \times 9} = 2\sqrt[4]{9};\quad \sqrt[7]{640} = \sqrt[7]{128 \times 5} = 2\sqrt[7]{5}.$$

§. 423. †† De stelkundige uitdrukkingen zijn ook voor deze herleidingen vatbaar.

Laat gegeven zijn $\sqrt{24\, a^3 b^2 c}$; dan is, vooreerst, $24 = 4 \times 6 = 2^2 \times 6$; voorts $a^3 = a^2 \times a$; men zal dan voor $24\, a^3 b^2 c$ kunnen schrijven: $4\, a^2 b^2 \times 6\, a\, c$ en $\sqrt{24\, a^3 b^2 c} = 2\, a\, b\sqrt{6\, a\, c}$.

Zij nog gegeven $\sqrt[3]{(378000\, a^{19} b^{15} c^{13})}$; dan zal men kunnen schrijven: $\sqrt[3]{(378000\, a^{19} b^{15} c^{13})} = \sqrt[3]{378000} \times \sqrt[3]{a^{19}} \times \sqrt[3]{b^{15}} \times \sqrt[3]{c^{13}}$; nu is, volgens §. 422, $\sqrt[3]{378000} = \sqrt[3]{27000} \times 14 = 30\sqrt[3]{14}$; ook is $\sqrt[3]{a^{19}} = a^{\frac{19}{3}} = a^{6+\frac{1}{3}} = a^6\sqrt[3]{a}$; $\sqrt[3]{b^{15}} = b^{\frac{15}{3}} = b^5$, en $\sqrt[3]{c^{13}} = c^{\frac{13}{3}} = c^{4+\frac{1}{3}} = c^4 \times \sqrt[3]{c}$; men zal dan, alle de vergelijkingen vermenigvuldigd hebbende, verkrijgen:

$$\sqrt[3]{(378000\, a^{19} b^{15} c^{13})} = 30\, a^6 b^5 c^4\sqrt[3]{(14\, a\, c)}$$

Men zal zich in deze soort van herleidingen, door de volgende voorbeelden, oefenen kunnen.

$$\sqrt[3]{(250\, a^4 b^5 c^2)} = 5\, a\, b\sqrt[3]{(2\, a\, b^2 c^2)} = 5\, a\, b\,(2\, a\, b^2 c^2)^{\frac{1}{3}}$$

$$\sqrt[5]{(96 a^6 b^3 c^{11} d^{15})} = 2 a b c^2 d^3\sqrt[5]{(3 a b^3 c)} = 2 a b c^2 d^3 (3 a b^3 c)^{\frac{1}{5}}$$

$$\sqrt[3]{[81\, a^3 b^4 \times (a-x)^4 \times (a+x)^{3n+2}]} = \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$3 a b (a-x) \times (a+x)^n \times \sqrt[3]{[3\, b\, (a-x) \times (a+x)^2]}$$

§. 424. †† De wortels uit breuken zijn ook altijd voor eene soortgelijke herleiding vatbaar. In het algemeen zal, zie §. 800. I. C.

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{1}{b}\sqrt[n]{(a\,b^{n-1})}$$

zijn. Dit beginsel kan met de zoo even verhandelde vereënigd worden, en dan zal men vinden:

1° $\sqrt{\frac{a^3}{b}}=\frac{\sqrt{a^3}}{\sqrt{b}}=\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=a\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{a}{b}\sqrt{a b}.$

2° $\sqrt[3]{\frac{a^5}{b^4}}=\sqrt[3]{\left(\frac{a^3}{b^3}\times\frac{a^2}{b}\right)}=\frac{a}{b}\sqrt[3]{\frac{a^2}{b}}=\frac{a}{b^2}\sqrt[3]{(ab)^2}$

3° $\sqrt[5]{\frac{64a^7b^8}{3p^6q^{11}}}=\sqrt[5]{\left[\frac{2^5\times a^5b^5}{p^5q^{10}}\times\frac{2a^2b^3}{3pq}\right]}=\frac{2ab}{3p^2q^3}\sqrt[5]{(162a^2b^3p^4q^4)}$

4° $6\sqrt{\left[\frac{75ab^2}{98}\right]}=6\sqrt{\left[\frac{25b^2}{49}\times\frac{3a}{2}\right]}=\frac{30b}{7}\sqrt{\frac{3a}{2}}=\frac{15b}{7}\sqrt{6a}$

5° $\sqrt{\frac{a^2m^2+a^2n^2}{n^2}}=\sqrt{\left[\frac{a^2}{n^2}(m^2+n^2)\right]}=\frac{a}{n}\sqrt{(m^2+n^2)}$

6° $\sqrt[3]{\left(\frac{8a^3b^2-16a^4b+48a^5}{54(a+b)^4}\right)}=\frac{2a}{3(a+b)}\sqrt[3]{\left(\frac{b^2-2ab+6a^2}{2(a+b)}\right)}$

Wanneer deze herleidingen mogelijk zijn, moeten zij niet verzuimd worden; want zij brengen gemeenlijk de gegevene wortel-uitdrukkingen onder eene eenvoudiger gedaante, welke haar voor de berekening geschikter maken.

Additie en Subtractie der wortel-uitdrukkingen.

§. 425. Wortel-uitdrukkingen worden, volgens de gewone regelen van de Additie en Subtractie der stelkundige uitdrukkingen, bij elkander opgeteld en van elkander afgetrokken. Aldus zal $\sqrt{a}$ opgeteld met $\sqrt{b}$, en nog met $\sqrt{c}$, aldus geschreven worden:

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$$

en men zal $\sqrt{a}$, met $\sqrt{b}-\sqrt{c}$ verminderd, aldus uitdrukken:

$$\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{c}$$

en op dezelfde wijze zal men met alle andere, en zoo vele wortel-uitdrukkingen, als men bij elkander optelt, of van elkander aftrekt, te werk gaan.

§. 426. * Wortel-uitdrukkingen zijn gelijkslachtig, wanneer zij, na behoorlijke herleiding, in §. 421 geleerd, tot wortel-grootheden, waarin hetzelfde getal, of dezelfde uitdrukdrukking, onder het wortel-teeken voorkomt, kunnen gebragt worden. Alzoo zijn $2\sqrt{3}$ en $7\sqrt{3}$ gelijkflachtig.

§. 427. †† Het is klaar: dat men, in plaats van $\sqrt{a}+\sqrt{a}+\sqrt{a}$, ftellen kan $3\sqrt{a}$; voor $6\sqrt[3]{a}+7\sqrt[3]{a}=13\sqrt[3]{a}$, en dat, op dezelfde wijze:

$$7\sqrt[n]{a}-3\sqrt[n]{a}+11\sqrt[n]{a}=15\sqrt[n]{a}$$

$$p\sqrt[n]{a}+q\sqrt[n]{a}-r\sqrt[n]{a}=(p+q-r)\times\sqrt[n]{a}$$

zal zijn.

§. 428. †† Wanneer dan de leden van de uitdrukking

$$\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}-\sqrt[n]{c}-\sqrt[n]{d}+\sqrt[n]{e}$$

zoodanig kunnen herleid worden, dat $\sqrt[n]{a}=a'\sqrt[n]{p}$; $\sqrt[n]{b}=b'\sqrt[n]{p}$; $\sqrt[n]{c}=c'\sqrt[n]{p}$; $\sqrt[n]{d}=d'\sqrt[n]{p}$; $\sqrt[n]{e}=e'\sqrt[n]{p}$ zij; dan zal men, in plaats van die uitdrukking, fchrijven kunnen:

$$(a'+b'-c'-d'+e')\times\sqrt[n]{p}$$

§. 429. Wanneer eene foortgelijke herleiding mogelijk is, dan hangt de waarde der uitdrukking flechts van ééne wortel-trekking, in plaats van zoo vele, af, als 'er termen in deze uitdrukking voorkomen. Deze herleidingen worden nu, naar de voorfchriften van §. 421—§. 424, volbragt. Zie hier voorbeelden:

1° $\sqrt{18}+\sqrt{50}-\sqrt{8}=3\sqrt{2}+5\sqrt{2}-2\sqrt{2}=6\sqrt{2}=\sqrt{72}$.

2° $\sqrt{45}+\sqrt{80}-\sqrt{245}=3\sqrt{5}+4\sqrt{5}-7\sqrt{5}=0$.

3° $\sqrt{27}+\sqrt{48}-\sqrt{98}+\sqrt{32}=7\sqrt{3}-3\sqrt{2}$.

4° $\sqrt[3]{54}+\sqrt[3]{250}-\sqrt[3]{128}=3\sqrt[3]{2}+5\sqrt[3]{2}-4\sqrt[3]{2}=4\sqrt[3]{2}$.

5° $\sqrt{\tfrac{18}{48}}+\sqrt{\tfrac{2}{27}}-\sqrt{10\tfrac{2}{3}}+\sqrt{16\tfrac{2}{3}}=\tfrac{3}{4}\sqrt{\tfrac{2}{3}}+\tfrac{1}{3}\sqrt{\tfrac{2}{3}}-4\sqrt{\tfrac{2}{3}}+5\sqrt{\tfrac{2}{3}}=2\tfrac{1}{12}\sqrt{\tfrac{2}{3}}=\tfrac{25}{36}\sqrt{6}$.

6° $\sqrt[3]{\tfrac{3}{2048}}+\sqrt[3]{1\tfrac{7}{9}}+\sqrt[3]{93\tfrac{3}{4}}=\tfrac{1}{8}\sqrt[3]{\tfrac{3}{4}}+\tfrac{4}{3}\sqrt[3]{\tfrac{3}{4}}+5\sqrt[3]{\tfrac{3}{4}}=6\tfrac{11}{24}\sqrt[3]{\tfrac{3}{4}}=1\tfrac{59}{96}\sqrt[3]{48}=3\tfrac{11}{48}\sqrt[3]{6}$.

§. 430. In ftelkundige uitdrukkingen, zal men, naar dezelfde regelmaat, te werk gaan.

1° $\sqrt{(25a^2b)}+\sqrt{(144a^2b)}=5a\sqrt{b}+12a\sqrt{b}=17a\sqrt{b}$.

2° $3b\sqrt[3]{(2a^5b^2)}-7ab\sqrt[3]{(2a^2b^2)}+8a\sqrt[3]{(2a^2b^5)}=\ldots$ $4ab\sqrt[3]{(2a^2b^2)}$.

Mul-

Multiplicatie.

§. 431. Men kan de vermenigvuldiging der éénledige wortel-uitdrukkingen tot twee gevallen brengen: 1° wanneer de wortel-teekens der gegevene uitdrukkingen gelijknamig zijn, 2° wanneer zij ongelijknamig zijn.

§. 432. Betrekkelijk tot het eerste geval, wanneer de gegevene uitdrukkingen met hetzelfde wortel-teeken zijn aangedaan, „ *zal men de grootheden, onder de wortel-teekens staan-* „ *de, met elkander vermenigvuldigen, en het product onder het-* „ *zelfde wortel-teeken plaatsen: men verkrijgt dan eene wortel-* „ *uitdrukking, welke voorts met het product van de coefficien-* „ *ten, of letters, welke buiten de gegevene wortel-uitdrukkin-* „ *gen staan mogten, als coefficient of factor vereënigd worden.* „ *Terwijl men voorts altijd, indien het mogelijk is, de wor-* „ *tel-uitdrukkingen volgens* §. 422, *tot de eenvoudigsten vorm* „ *brengen zal.*" Want, volgens §. 412 en 417 is, welke ook de waarde van *n* zij: $\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$; $\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}\times\sqrt[n]{c}=\sqrt[n]{abc}$; enz. Alzoo zal

$\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{6}$; $\sqrt{2}\times\sqrt{8}=\sqrt{2\times 8}=\sqrt{16}=4$; $2\sqrt{2}\times 3\sqrt{5}=6\sqrt{10}$; $\sqrt{5}\times\sqrt{10}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$; $5\sqrt{2}\times 3\sqrt{2}=15\times 2=30$; $\sqrt{\frac{2}{3}}\times\sqrt{\frac{3}{4}}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2}$; $\sqrt{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{8}=4\sqrt{3}$; $\frac{3}{4}\sqrt{\frac{2}{5}}\times\frac{5}{9}\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{1}{18}\sqrt{15}$; $\sqrt[3]{3}\times\sqrt[3]{16}=\sqrt[3]{48}=2\sqrt[3]{6}$; $\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{2}{9}}\times\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{4}{3}}=\frac{2}{9}$.

$3a\sqrt{b}\times 2a\sqrt{ab}=6a^2\sqrt{ab^2}=6a^2b\sqrt{a}$.

$5\sqrt{3ab}\times 3a\sqrt{abc}=15a\sqrt{3a^2b^2c}=15a^2b\sqrt{3c}$.

$3a\sqrt{(a^2+b^2)}\times 6ab\sqrt{(a^3+ab^2)}=18a^2b(a^2+b^2)\times\sqrt{a}$.

$4a\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\times 3ab\sqrt[3]{a^2bc^2x}=12a^3b^2c\sqrt[3]{acx}$.

§. 433. Wanneer de wortel-uitdrukkingen, die men met elkander vermenigvuldigen moet, ongelijkvormig zijn, zal men dezelve vooraf tot hetzelfde wortel-teeken moeten herleiden; hetgeen altijd geschieden kan, door de wortel-teekens in gebrokene exponenten te herleiden, en deze gebrokene exponenten onder eenen gemeenschappelijken noemer te brengen.

§. 434.

§. 434. Laten gegeven zijn de wortel-uitdrukkingen: $\sqrt[p]{a^q}$ en $\sqrt[r]{b^s}$; dan zal men, in derzelver plaats, de exponentiale uitdrukkingen $a^{\frac{q}{p}}$ en $b^{\frac{s}{r}}$ kunnen ſtellen: wanneer men nu de breuken $\frac{q}{p}$ en $\frac{s}{r}$ onder denzelfden noemer brengt; dan zullen zij $\frac{qr}{pr}$ en $\frac{ps}{pr}$ worden; derhalve zal $a^{\frac{q}{p}} = a^{\frac{qr}{pr}} = \sqrt[pr]{a^{qr}}$, en $b^{\frac{s}{r}} = b^{\frac{ps}{pr}} = \sqrt[pr]{b^{ps}}$ zijn. Men zal dan kunnen ſtellen:

$$\sqrt[p]{a^q} \times \sqrt[r]{b^s} = \sqrt[pr]{a^{qr}} \times \sqrt[pr]{b^{ps}} = \sqrt[pr]{(a^{qr}\, b^{ps})}$$

en, op dezelfde wijze, zal men te werk gaan, indien meer dan twee wortel-uitdrukkingen moeten vermenigvuldigd worden.

§. 435. Indien men aan de waarheid van de vergelijking $a^{\frac{q}{p}} = a^{\frac{qr}{pr}}$ mogt twijfelen, zou men zich, op de volgende wijze, van dezelve kunnen overtuigen. De uitdrukking $a^{\frac{q}{p}}$ beteekent: dat men den p^{de} magtswortel uit de q^{de} magt van a moet trekken. Laat nu a^q tot de magt r verheven worden, dan zal men $(a^q)^r = a^{qr}$ hebben; wanneer men nu uit deze eerst den p^{de}, daarna den r^{de} magts-wortel trekt, is zulks hetzelfde als, in eens af, den $(pr)^{de}$ magts-wortel te trekken: dus is $\sqrt[p]{a^q} = \sqrt[pr]{a^{qr}}$.

§. 436. Volgens deze betoogde formule, zal nu $\sqrt{3} \times \sqrt[3]{8} = 3^{\frac{1}{2}} \times 8^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{3}{6}} \times 8^{\frac{2}{6}} = (3^3 \times 8^2)^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{1728}$; $2\sqrt{ab} \times \sqrt[5]{a^2 b} = 2\sqrt[10]{a^9 b^7}$. enz.

§. 437. De gelijkſlachtige wortel-, of exponentiale, uitdrukkingen worden, volgens den bekenden regel, door het optellen der exponenten vermenigvuldigd. Zie §. 735, I. C.. Aldus is

$$\sqrt[3]{6} \times \sqrt[5]{6} = 6^{\frac{1}{3}} \times 6^{\frac{1}{5}} = 6^{\frac{8}{15}} = \sqrt[15]{6^8} = \sqrt[15]{1679616}$$

$$3\,a^{\frac{1}{2}}\, b^{\frac{2}{3}}\, c^{-\frac{1}{2}} \times 7\,a^{-\frac{1}{2}}\, b^{-\frac{1}{3}}\, c^2 = 21\, b^{\frac{1}{3}}\, c^{\frac{3}{2}}.$$

§. 438. Dit alles is voldoende, om éénledige wortel-uitdrukkingen met elkander, te vermenigvuldigen. Men zal dan nu ook de pro-

producten van de veelledige, volgens de gewone regels, kunnen bepalen. Alleenlijk pleegt men, in het product, de termen, welke van het wortel-teeken bevrijd zijn, en daarom als meetbaar beschouwd worden, te vereenigen, gelijk ook die, welke met wortel-teekens zijn aangedaan; de vereeniging der eerste maakt het rationale of meetbare, en die der laatste het irrationale of onmeetbare gedeelte der uitdrukking uit. Men zal, door de regels der stelkundige multiplicatie met de voorgaande te vereenigen, vinden:

$$[6+2\sqrt{5}]^2 = 56+24\sqrt{5}$$
$$[6+2\sqrt{5}]\times[6-2\sqrt{5}] = 16$$
$$[2\sqrt{2}-\sqrt{6}]\times[2\sqrt{3}-\sqrt{2}] = -4-6\sqrt{2}+2\sqrt{3}+4\sqrt{6}$$
$$[\sqrt{a}+\sqrt{b}]^2 = a+b+2\sqrt{ab}$$
$$[\sqrt{a}+\sqrt{b}]\times[\sqrt{a}-\sqrt{b}] = a-b$$
$$[\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}]\times[\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}] = a+b-c+2\sqrt{ab}$$
$$[\sqrt{ab}+\sqrt{(a^2-b^2)}]\times[\sqrt{ab}-\sqrt{(a^2-b^2)}] = -a^2+ab+b^2.$$

§. 439. Het is opmerkelijk: dat, †† wanneer eene uitdrukking van den vorm $a+\sqrt{b}$ tot de tweede, derde en volgende magten verheven wordt, deze magten altijd van den vorm $p+q\sqrt{b}$ zijn. Indedaad zal men, door dadelijke vermenigvuldiging, vinden:

$$(a\pm\sqrt{b})^2 = a^2+b\pm 2a\sqrt{b}$$
$$(a\pm\sqrt{b})^3 = a^3+3ab\pm(3a^2+b)\sqrt{b}$$

Het product van $p+q\sqrt{r}$ met $p'+q'\sqrt{r}$, gelijk $pp'+qq'r+(pq'+p'q)\sqrt{r}$ zijnde, ziet men, zonder dat het noodig is, deze magts-verheffing verder voorttezetten, †† dat alle de volgende magten van $a\pm\sqrt{b}$ van den vorm $p\pm q\sqrt{b}$ zullen zijn.

Divisie.

§. 440. De divisie der gelijknamige wortel-uitdrukkingen geschiedt door den regel, of de formule, van §. 714, I. C. „ *Men deelt de getallen of uitdrukkingen, onder de wortelteekens staande, door elkander, en stelt het quotient onder hetzelfde wortel-teeken.*" Aldus is:

$$\sqrt{a}:\sqrt{b} = a^{\frac{1}{2}}:b^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{1}{b}\sqrt{ab}$$

$$\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b} = a^{\frac{1}{n}}:b^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{1}{b}\sqrt[n]{(ab^{n-1})}$$

$\sqrt{12} : \sqrt{3} = \sqrt{\frac{12}{3}} = \sqrt{4} = 2;$

$\sqrt{3} : \sqrt{2} = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{6}$; enz.

$$\sqrt{\frac{a}{b}} : \sqrt{\frac{c}{d}} = \sqrt{\left(\frac{a}{b} \times \frac{d}{c}\right)} = \sqrt{\frac{ad}{bc}} = \frac{1}{bc}\sqrt{(abcd)}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} : \sqrt[n]{\frac{c}{d}} = \sqrt[n]{\left(\frac{a}{b} \times \frac{d}{c}\right)} = \sqrt[n]{\frac{ad}{bc}} = \frac{1}{bc}\sqrt[n]{(adb^{n-1}c^{n-1})}$$

$$\frac{a}{b}\sqrt[n]{\frac{p}{q}} : \frac{c}{d}\sqrt[n]{\frac{r}{s}} = \frac{ad}{bc}\sqrt[n]{\frac{ps}{qr}} = \frac{ad}{bcqr}\sqrt[n]{(pq^{n-1}sr^{n-1})}$$

§. 441. Wanneer eene meetbare uitdrukking a, door eene onmeetbare $\sqrt{b}$ moet gedeeld worden; gaat men aldus te werk:

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a \times \sqrt{b}}{\sqrt{b} \times \sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b} = \frac{a}{b}\sqrt{b}$$

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b}} = \frac{a \times \sqrt[n]{b^{n-1}}}{\sqrt[n]{b} \times \sqrt[n]{b^{n-1}}} = \frac{a\sqrt[n]{b^{n-1}}}{\sqrt[n]{b^n}} = \frac{a}{b}\sqrt[n]{b^{n-1}}$$

dus zal, in getallen,

$3 : \sqrt{2} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$; $7 : \sqrt[3]{3} = \frac{7}{3}\sqrt[3]{9}$ zijn.

§. 442. De divisie der gelijknamige wortel-uitdrukkingen kan altijd, nadat zij onder dezelfde wortel-teekens gebragt zijn, door dezelfde regels worden uitgevoerd. Want men heeft, in het algemeen:

$$\sqrt[q]{a^q} : \sqrt[r]{b^s} = a^{\frac{q}{p}} : b^{\frac{s}{r}} = a^{\frac{qr}{pr}} : b^{\frac{sp}{pr}} = \left(\frac{a^{qr}}{b^{sp}}\right)^{\frac{1}{pr}} = \sqrt[pr]{(a^{qr}b^{-pr})}.$$

§. 443. De gelijkslachtige wortel-, of exponentiale uitdrukkingen worden volgens §. 736, I. C. gedeeld, bij voorbeeld: $\sqrt[3]{6} : \sqrt{6} = 6^{\frac{1}{3}} : 6^{\frac{1}{2}} = 6^{-\frac{1}{6}} = 1 : \sqrt[6]{6}$.

§. 444. Wanneer de deeler uit onmeetbare en meetbare termen is te zamen gesteld, dan tracht men, deeler en deeltal beide, met zulk eene uitdrukking te vermenigvuldigen, dat de deeler der nieuwe deeling eene volmaakt meetbare uitdrukking worde: wanneer men nu deze producten door elkander deelt; dan zal men, gelijk bekend is, het begeerde quotient verkrijgen. Zie §. 142, I. C.

§. 445. Indien de deeler $a + \sqrt{b}$ is, dan zal men deeler en deeltal met $a - \sqrt{b}$ vermenigvuldigen; want $(a + \sqrt{b}) \times (a - \sqrt{b})$ is gelijk $a^2 - b$; en de deeler van de herleide deeling zal altijd meetbaar zijn.

§. 446. Insgelijks zal, wanneer de deeler van den vorm $a - \sqrt{b}$ is, is, deeler en deeltal met $a+\sqrt{b}$ moeten vermenigvuldigd worden.

§. 447. Is de deeler van den vorm $\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}$; dan zal men den deeler en het deeltal, elk in het bijzonder, met $\sqrt[n]{a^{n-1}}-\sqrt[n]{(a^{n-2}b)}+\sqrt[n]{(a^{n-3}b^2)}+enz.-\sqrt[n]{(ab^{n-2})}+\sqrt[n]{b^{n-1}}$ vermenigvuldigen, en het product $a+b$ zijn; mits n oneven is.

§. 448. Is de deeler van den vorm $\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}$; dan zal men $\sqrt[n]{a^{n-1}}+\sqrt[n]{(a^{n-2}b)}+\sqrt[n]{(a^{n-3}b^2)}+enz.+\sqrt[n]{(ab^{n-2})}+\sqrt[n]{b^{n-1}}$ voor vermenigvuldiger aannemen, en het product zal $a-b$ zijn. Zie §. 60, pag. 38.

§. 449. Is de deeler van den vorm $a+\sqrt[n]{b}$; dan zal men $a^{n-1}-a^{n-2}\sqrt[n]{b}+a^{n-3}\sqrt[n]{b^2}-enz.+\sqrt[n]{b^{n-1}}$ als vermenigvuldiger aannemen, en dan zal a^n+b het product zijn; mits n oneven is.

§. 450. En, voor $a-\sqrt[n]{b}$, den vermenigvuldiger $a^{n-1}+a^{n-2}\sqrt[n]{b}+a^{n-3}\sqrt[n]{b^2}+enz.+\sqrt[n]{b^{n-1}}$, en a^n-b het product. Al hetwelk door eenvoudige multiplicatie, bevestigd wordt. Zie §. 60.

§. 451. Is de deeler van den vorm $\sqrt[m]{a}\pm\sqrt[n]{b}$, of van den vorm $a^{\frac{1}{m}}\pm b^{\frac{1}{n}}$; dan zal men, $\frac{1}{m}=\frac{n}{mn}$ en $\frac{1}{n}=\frac{m}{mn}$ zijnde, voor .. $a^{\frac{1}{m}}\pm b^{\frac{1}{n}}$ kunnen schrijven $\sqrt[mn]{a^n}\pm\sqrt[mn]{b^m}$, welke deeler, door deze herleiding, klaarblijkelijk tot den vorm $\sqrt[p]{r}\pm\sqrt[p]{s}$ gebragt, en als boven zal kunnen behandeld worden.

§. 452. Wanneer $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$ de deeler is; dan zal men $\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{c}$ voor vermenigvuldiger aannemen, en het product zal $a-b+c+2\sqrt{ac}$ zijn; daarna zal men $a-b+c-2\sqrt{ac}$ tot vermenigvuldiger aannemen, het laatste product daarmede vermenigvuldigen, wanneer men eene meetbare uitdrukking verkrijgen zal.

§. 453. Voor den deeler $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}$ zal men eerst $\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{d}$ als vermenigvuldiger aannemen: het product zal $(a-b+c-d)+2\sqrt{ac}-2\sqrt{bd}$ zijn; dit zal men met $(a-b+c-d)+2\sqrt{ac}+2\sqrt{bd}$ vermenigvuldigen; het product

duct zal $(a-b+c-d)^2+4ac-4bd+4(a-b+c-d)\sqrt{ac}$ zijn, waarna men nogmaals met $(a-b+c-d)^2+4ac-4bd-4(a-b+c-d)\sqrt{ac}$ zal vermenigvuldigen, hetwelk ten laatste eene meetbare uitdrukking zal geven. Indien 'er meer wortel-teekens voorkomen, zal deze herleiding niet zoo gemakkelijk, ja meestal ondoenlijk zijn.

§. 454. Alle deze herleidingen strekken om eenen meetbaren deeler te verkrijgen, door welken de quotienten altijd eene geschiktere en meer handelbare gedaante verkrijgen.

§. 455. Voorbeelden:

1° $\dfrac{6}{2+\sqrt{2}}=\dfrac{6\times(2+\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})\times(2-\sqrt{2})}=\dfrac{12+6\sqrt{2}}{2}=6+3\sqrt{2}$

2° $\dfrac{56+24\sqrt{5}}{6+2\sqrt{5}}=\dfrac{(56+24\sqrt{5})\times(6-2\sqrt{5})}{(6+2\sqrt{5})\times(6-2\sqrt{5})}=\dfrac{96+32\sqrt{5}}{16}=$
$6+2\sqrt{5}$

3° $\dfrac{588+132\sqrt{2}}{12+2\sqrt{2}}=48+3\sqrt{2}$; 4° $\dfrac{2\sqrt{5}+\sqrt{14}}{\sqrt{10}+\sqrt{6}}=2\tfrac{1}{2}\sqrt{2}+$
$\tfrac{1}{2}\sqrt{35}-\tfrac{1}{2}\sqrt{30}-\tfrac{1}{2}\sqrt{21}$

5° $\dfrac{12}{3+\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\dfrac{12\times(3+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(3+\sqrt{2}-\sqrt{3})\times(3+\sqrt{2}+\sqrt{3})}=\ldots$
$\dfrac{36+12\sqrt{2}+12\sqrt{3}}{8+6\sqrt{2}}=\dfrac{(36+12\sqrt{2}+12\sqrt{3})\times(8-6\sqrt{2})}{(8+6\sqrt{2})\times(8-6\sqrt{2})}$
$=-18+15\sqrt{2}-12\sqrt{3}+9\sqrt{6}$. Zie §. 452.

6° $\dfrac{10+5\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}}=\dfrac{(10+5\sqrt[3]{3})\times(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9})}{(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3})\times(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9})}=2\sqrt[3]{4}-$
$2\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{12}+2\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{18}+3$. Zie §. 447.

7° $\dfrac{a^3b-ab^2c}{a^2+a\sqrt{bc}}=\dfrac{(a^3b-ab^2c)\times(a^2-a\sqrt{bc})}{(a^2+a\sqrt{bc})\times(a^2-a\sqrt{bc})}=ab-b\sqrt{bc}$

8° $\dfrac{a^2b^2-c^2d^2}{\sqrt{ab}-\sqrt{cd}}=(ab+cd)\sqrt{ab}+(ab+cd)\sqrt{cd}$

9° $\dfrac{a^3+bc\sqrt{bc}}{a+\sqrt{bc}}=a^2+bc-a\sqrt{bc}$.

Men zal alle deze voorbeelden, indien men alles, wat van §. 444 tot §. 452. is opgegeven, behoorlijk raadpleegt, gemakkelijk kunnen uitwerken. Wij hebben geoordeeld, dat het overtollig zou zijn, eene nadere verklaring dezer bewerkingen te geven.

VIER- EN- VIJFTIGSTE LES.

Over de onbestaanbare uitdrukkingen.

§. 456. De onbestaanbare uitdrukkingen hebben, gelijk uit de oplosfing der vierkants-vergelijkingen, zie §. 108, gebleken is, met de wortel-uitdrukkingen eenerlei oorsprong, en zij drukken eene bewerking uit, die onbestaanbaar is, waarom dan ook deze uitdrukkingen gehouden worden, als herkennings-teekens van de onmogelijkheid, of het onbestaanbare, van de voorwaarden der vraag, welker oplossing die soort van uitdrukkingen voortbrengt.

§. 457. De wortel-uitdrukkingen behooren tot vier klassen.

1° *Onevene magts-wortels uit positieve grootheden.* †† Zij zijn van den vorm $\sqrt[2n+1]{+a}$: derzelver wortels zijn altijd positief.

2° *Onevene magts-wortels uit negatieve grootheden.* †† Zij zijn van den vorm $\sqrt[2n+1]{-a}$. Derzelver wortels zijn negatief.

3° *Evene magts-wortels uit positieve grootheden.* †† Zij zijn van den vorm $\sqrt[2n]{+a}$; derzelver wortels zijn positief of negatief.

4° *Evene magts-wortels uit negatieve getallen.* Zij zijn van den vorm $\sqrt[2n]{-a}$. Deze laatste bevatten eene bijzondere klasse van onbestaanbare uitdrukkingen.

§. 458. Dat $\sqrt[2n+1]{+a}$ positief en $\sqrt[2n+1]{-a}$ negatief is, blijkt uit de leer der teekens. Zie §. 482, I. C. 'Er volgt uit: dat men stellen kan:

$$\sqrt[2n+1]{(-a)} = -\sqrt[2n+1]{(+a)}$$

§. 459. Dat het teeken $\sqrt[2n]{+a}$, zoo wel met het teeken $+$ als met het teeken $-$ kan aangedaan worden, is uit dezelfde beginselen bekend, en de noodzakelijkheid, om zulks niet te verzuimen, is reeds door genoegzame voorbeelden bevestigd.

§. 460. De uitdrukking $\sqrt[2n]{-a}$ drukt eene grootheid uit, die

T 2

die niet bestaan kan; want het getal, dat de waarde van dien wortel uitdrukt, moet of positief, of negatief, of nul zijn; in de twee eerste gevallen, zal de magt positief, en niet negatief, en in het laatste geval gelijk nul zijn.

§. 461. Soortgelijke uitdrukkingen zijn de uitkomst eener redekaveling over de grootheden, en sommige van derzelver bijzondere betrekkingen: zij toonen het onbestaanbare eener gestelde betrekking, waarvan zij de ongerijmdheid te kennen geven. Offchoon nu deze uitdrukkingen geene grootheden voorstellen, kunnen zij echter als zoodanige beschouwd, en, even als alle andere uitdrukkingen, in rekening gebragt en behandeld worden: ja, het zal ook zelfs blijken: dat men, met behulp dezer uitdrukkingen, waarheden ontdekken kan, tot welker kennis men, zonder de hulp dezer teekens, bezwaarlijk geraken zou; waarom dan ook derzelver beschouwing een van de aanmerkelijkste leerstukken der Wiskunst uitmaakt. Zie §. 108. en noot 24.

§. 462. Men kan in plaats van $-a$ schrijven $-1 \times +a$, zie §. 488, I. C. †† Bijgevolg is, volgens §. 417.

$$\sqrt[2n]{-a} = \sqrt[2n]{+a} \times \sqrt[2n]{-1}$$

Nu is $\sqrt[2n]{+a}$ altijd eene bestaanbare uitdrukking; de $(2n)^{de}$ wortel uit een positief getal is altijd een positief of negatief getal, hetwelk men door eene enkelde letter p kan uitdrukken: waaruit volgt: †† dat de onbestaanbare uitdrukkingen, welke van de evene magts-worteltrekkingen uit negatieve getallen afstammen, alle tot den vorm $p\sqrt[2n]{-1}$ behooren. †† De n^{de} magt dezer uitdrukking $p^n \sqrt{-1}$ zijnde, behoort tot den vorm $q\sqrt{-1}$.

§. 463. Uit de oplossing der tweede magts-vergelijkingen ontstaan de uitdrukkingen van den vorm $p + \sqrt{-q}$. †† Deze kunnen altijd tot den vorm $p + r\sqrt{-1}$ gebragt worden. Want $\sqrt{-q} = \sqrt{(+q \times -1)}$ zijnde, zal $\sqrt{-q} = \sqrt{q} \times \sqrt{-1}$ zijn; nu kan $\sqrt{q}$, die altijd bestaanbaar is, het zij de grootheid, daardoor voorgesteld, eene meetbare of onmeetbare waarde hebbe, door eene enkelde letter r worden aangegewezen, en, in dit geval, is $\sqrt{-q} = r\sqrt{-1}$. En de uitdrukking $p + \sqrt{-q}$, verandert dan in $p + r\sqrt{-1}$. * In deze soort van uitdrukking $p + r\sqrt{-1}$, onderscheidt men het bestaanbare deel p van het onbestaanbare $r\sqrt{-1}$, of $\sqrt{-q}$. * De uitdrukking $r\sqrt{-1}$ wordt gelezen: r vermenigvuldigd met $\sqrt{-1}$; en $\sqrt{-1}$ beteekent zooveel als $1 \times \sqrt{-1}$.

§. 464. †† De onbestaanbare uitdrukkingen zijn door de formule $\sqrt{(p^2 - q)}$ met de wortel-uitdrukkingen verbonden, en kunnen derhalve gerekend worden tot dezelfde hoofdsoort te behooren; want deze algemeene uitdrukking geeft eene bestaanbare wortel-uitdrukking, indien p^2, grooter dan q, en eene onbestaanbare, indien p^2 kleiner dan q is; indien $p^2 = q$ is, dan heeft de overgang van het eerste tot het tweede geval plaats. Uit dit alles volgt dan: †† dat de onbestaanbare uitdrukkingen even als de wortel-uitdrukkingen, en, volgens dezelfde regels, moeten behandeld worden.

§. 465. Additie *en* Subtractie. Indien onbestaanbare uitdrukkingen bij elkander opgeteld, of van elkander afgetrokken moeten worden, moeten derzelver onbestaanbare deelen, alle, volgens §. 463. tot den vorm $a\sqrt{-1}$ gebragt worden: daarna telt men, naar het beloop der teekens, de grootheden a, welke als coefficienten van $\sqrt{-1}$ voorkomen, bij elkander, en men vermenigvuldigt derzelver som met $\sqrt{-1}$: dit product is dan de som der onbestaanbare deelen: de bestaanbare worden, naar de bekende regels, volgens hunne teekens, vereënigd. Aldus is

1° $a\sqrt{-1} + b\sqrt{-1} + c\sqrt{-1} = (a+b+c).\sqrt{-1}$

2° $3\sqrt{-8} + 5\sqrt{-2} + \sqrt{-18} = 6\sqrt{-2} + 5\sqrt{-2} + 3\sqrt{-2}$
$= 14\sqrt{-2}$

3° $(a + b\sqrt{-1}) + (-b - c\sqrt{-1}) = (a-b) + (b-c) \times \sqrt{-1}$

4° $7 + \sqrt{-18} + 8 - 3\sqrt{-2} = 15$.

Het blijkt, uit dit laatste voorbeeld: †† dat de som of het verschil van twee of meer onbestaanbare uitdrukkingen bestaanbaar kan worden, wanneer namelijk derzelver onbestaanbare deelen elkander, in de optelling of aftrekking, vernietigen.

§. 466. Multiplicatie *en* Divisie. Deze bewerkingen steunen almede op dezelfde gronden. De bijzonderheden, welke hierbij in acht moeten genomen worden, zijn in de volgende formulen begrepen.

1° . . . . $\sqrt{(-1)} \times \sqrt{(-1)} = -1$

2° . . . . $\sqrt{(-a)} \times \sqrt{(-b)} = -\sqrt{(ab)}$

3° . . . . $\sqrt{(+a)} \times \sqrt{(-b)} = +\sqrt{(-ab)}$

4° . . . . $\sqrt{(-a)} \times \sqrt{(+b)} = +\sqrt{(-ab)}$

Wat aangaat de eerste dezer formulen: deze schijnt, in den eersten opslag, strijdig te zijn met het bewezen beginsel, dat elke vierkants-wortel met het dubbelde teeken $\pm$ moet aangedaan zijn; want daar $\sqrt{(-1)} \times \sqrt{(-1)} = \sqrt{(-1 \times -1)} = \sqrt{(+1)}$, en $\sqrt{(+1)} = \pm 1$ is, zou het schijnen, als of men ± 1 voor het product nemen moest. Dan, wanneer men de zaak aandachtig overweegt, dan zal men zien: dat alleen het teeken $-$ kan genomen worden, en dat het teeken $+$ valsch is; want, stellen wij $b = \sqrt{-1}$; dan zal $b^2 = \sqrt{(-1)} \times \sqrt{(-1)}$ zijn; nemen wij nu, dat $\sqrt{(-1)} \times \sqrt{(-1)} = +1$ konde zijn; dan zou ook $b^2 = +1$ zijn, en $b = \pm\sqrt{(+1)} = \pm 1$; waaruit zou volgen: dat $\sqrt{-1}$ gelijk ± 1; dat is, eene onbestaanbare grootheid gelijk aan een bestaanbare zou kunnen zijn; men kan niet anders dan het teeken $-$ nemen, zoo als ook bovendien, uit de bepaling van $\sqrt{a}$, (in welke die van $\sqrt{-1}$ begrepen is,) zie §. 440, I. C. van zelven volgt.

Met betrekking tot de tweede formule, is $\sqrt{(-a)} = \sqrt{a} \times \sqrt{(-1)}$ en $\sqrt{(-b)} = \sqrt{b} \times \sqrt{(-1)}$; gevolgelijk is $\sqrt{(-a)} \times \sqrt{(-b)} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} \times [\sqrt{(-1)} \times \sqrt{(-1)}] = \sqrt{(ab)} \times (-1) = -\sqrt{(ab)}$. En de derde heeft geene zwarigheid; want, omdat $(-a) \times (+b) = -ab$ en $(+a) \times (-b) = -ab$, en $-ab = -ba$ is, zal men, uit beide den vierkants-wortel trekkende, verkrijgen:

$$\sqrt{(-a)} \times \sqrt{(+b)} = \sqrt{(+a)} \times \sqrt{(-b)} = \sqrt{(-ab)}$$

§. 467. Volgens deze beginselen, zal nu ook, met betrekking tot de deeling,

1° $\dfrac{\sqrt{(-a)}}{\sqrt{(+b)}} = +\sqrt{(-1)} \times \sqrt{\left(+\dfrac{a}{b}\right)}$

2° $\dfrac{\sqrt{(+a)}}{\sqrt{(-b)}} = -\sqrt{(-1)} \times \sqrt{\left(+\dfrac{a}{b}\right)}$

3° $\dfrac{\sqrt{(-a)}}{\sqrt{(+b)}} = -\dfrac{\sqrt{(+a)}}{\sqrt{(-b)}}$, of $\sqrt{\dfrac{-a}{+b}} = -\sqrt{\dfrac{+a}{-b}}$

4° $\dfrac{\sqrt{(-a)}}{\sqrt{(-b)}} = \sqrt{\left(+\dfrac{a}{b}\right)}$ zijn.

Want, wat de eerste dezer formulen belangt: heeft men

$\sqrt{(-a)}$

$$\frac{\sqrt{(-a)}}{\sqrt{(+b)}}=\frac{\sqrt{(-1\times+a)}}{\sqrt{(+b)}}=\sqrt{(-1)}\times\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{(-1)}\times\sqrt{}\times\frac{a}{b}$$

Voor de tweede is

$$\frac{\sqrt{(+a)}}{\sqrt{(-b)}}=\frac{\sqrt{(+a)}}{\sqrt{(-1)}\times\sqrt{(+b)}}=\frac{1}{\sqrt{(-1)}}\times\sqrt{\left(+\frac{a}{b}\right)};$$ maar nu is $\frac{1}{\sqrt{-1}}=\frac{1\times\sqrt{(-1)}}{\sqrt{(-1)}\times\sqrt{(-1)}}=-\sqrt{-1}$; gevolgelijk zal ook $\frac{\sqrt{(+a)}}{\sqrt{(-b)}}=-\sqrt{(-1)}\times\sqrt{\left(+\frac{a}{b}\right)}$ moeten zijn.

Eindelijk voor de vierde is

$\frac{\sqrt{(-a)}}{\sqrt{(-b)}}=\frac{\sqrt{(-1)}\times\sqrt{(+a)}}{\sqrt{(-1)}\times\sqrt{(+b)}}$, en daar de teller en noemer beide door $\sqrt{(-1)}$ deelbaar zijn, of $\sqrt{(-1)}$ tot gemeenschappelijken factor hebben, blijkt hieruit de waarheid der gestelde formule.

§. 468. Magts-verheffing. Wanneer men de uitdrukking $\sqrt{-a}$ tot eenige magt n zal verheffen, dan heeft men $\sqrt{(-a)}=\ldots.$ $\sqrt{(+a\times-1)}=\sqrt{a}\times(\sqrt{-1})$, en gevolgelijk $[\sqrt{(-a)}]^n=(\sqrt{a})^n\times(\sqrt{-1})^n$; waaruit blijkt: dat men $\sqrt{(-1)}$ tot de verschillende magten zal moeten verheffen.

Stellen wij $x=\sqrt{(-1)}$; dan is $x^2=\sqrt{(-1)}\times\sqrt{(-1)}=-1$; $x^3=x^2\times x=-1\times\sqrt{-1})=-\sqrt{(-1)}$; $x^4=x^2\times x^2=-1\times-1=+1$; of $x^4=x^3\times x=-\sqrt{(-1)}\times\sqrt{(-1)}=-(-1)=+1$. Dit betoogd zijnde, zal men, vermits alle getallen, zie §. 168, I. C., door de formulen

$$4n,\ 4n+1,\ 4n+2 \text{ en } 4n+3$$

(n een geheel getal zijnde,) kunnen worden voorgesteld, de volgende vergelijkingen hebben:

$$(\sqrt{(-1)})^{4n}=x^{4n}=(x^4)^n=(+1)^{4n}=+1$$
$$(\sqrt{(-1)})^{4n+1}=x^{4n+1}=x^{4n}.x=1\times x=+\sqrt{(-1)}$$
$$(\sqrt{(-1)})^{4n+2}=x^{4n+2}=x^{4n}.x^2=+1\times-1=-1$$
$$(\sqrt{(-1)})^{4n+3}=x^{4n+3}=x^{4n}.x^3=+1\times-\sqrt{-1}=-\sqrt{(-1)}$$

Deze uitkomsten zijn onafhankelijk van de waarde van n; hieruit volgt dan: dat, van vier tot vier, de opklimmende magten van $\sqrt{(-1)}$ in dezelfde periodicke orde zullen terugkeeren, zoodat, in het algemeen,

$$(\sqrt{(-1)})^n=(\sqrt{(-1)})^{n+4}=(\sqrt{(-1)})^{n+8}=(\sqrt{(-1)})^{n+4p}$$

zal zijn. Het blijkt hieruit: dat men, ten einde eene zekere gehee-le positieve magt van $\sqrt{(-1)}$ te bepalen, den exponent van die magt door vier zal moeten deelen, wanneer met de resten o, 1, 2 en 3, als de begeerde magten van $\sqrt{(-1)}$, zullen overeënstemmen:

$$+1,\ +\sqrt{(-1)},\ -1,\ -\sqrt{(-1)}$$

§. 469. Om dan $\sqrt{(-2)}$ tot de vijftiende magt te verheffen, zal men 15 door 4 deelen: de rest is 3; en met deze rest stemt $-\sqrt{(-1)}$ overeën: nu is $(\sqrt{-2})^{15} = (\sqrt{2})^{15} \times (\sqrt{-1})^{15} = -(\sqrt{2})^{15} \times \sqrt{(-1)}$.

§. 470. Voor de negatieve magten van $\sqrt{(-1)}$, zal het volgende plaats hebben:

$$1^\circ\ (\sqrt{(-1)})^{-1} = \frac{1}{\sqrt{(-1)}} = \frac{1 \times \sqrt{(-1)}}{\sqrt{(-1)} \times \sqrt{(-1)}} = \frac{1 \times \sqrt{(-1)}}{-1} = -\sqrt{(-1)}$$

$$2^\circ\ (\sqrt{(-1)})^{-2} = \frac{1}{(\sqrt{(-1)})^2} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$3^\circ\ (\sqrt{(-1)})^{-3} = \frac{1}{(\sqrt{(-1)})^3} = \frac{1}{-\sqrt{(-1)}} = \ldots\ldots \frac{1 \times \sqrt{(-1)}}{-\sqrt{(-1)} \times \sqrt{(-1)}} = \frac{\sqrt{(-1)}}{-(-1)} = +\sqrt{(-1)}$$

$$4^\circ\ (\sqrt{(-1)})^{-4} = \frac{1}{(\sqrt{(-1)})^4} = \frac{1}{+1} = +1$$

Waaruit blijkt: dat, wanneer men den negatieven exponent door vier deelt, de resten o, 1, 2, 3, met $+1$, $-\sqrt{(-1)}$, -1 en ... $+\sqrt{(-1)}$, als negatieve magten van $\sqrt{-1}$, zullen overeënstemmen.

§. 471. Deze gelegde gronden bevatten alle de omstandigheden, welke men in acht moet nemen, wanneer men de onbestaanbare uitdrukkingen met elkander vermenigvuldigt of deelt: en daar nu, voor het overige, alles, als bij de gewone wortel-uitdrukkingen, behandeld wordt, zal het niet noodig zijn, deze gelegde gronden door voorbeelden opteh elderen.

VIJF- EN- VIJFTIGSTE LES.

Over het trekken der tweede en hoogere-magts-wortelen uit tweeledige uitdrukkingen van den vorm $a + b\sqrt{c}$.

§. 472. Wij hebben §. 439. reeds bewezen: dat, wanneer a, b en c meetbare getallen, positieve of negatieve, geheele of gebrokene zijn, de uitdrukking $(a + b\sqrt{c})^n$ als dan noodzakelijk van den vorm $p + q\sqrt{c}$ zal zijn; en, wanneer men de tweede en volgende magten ren van de onbestaanbare uitdrukking $a + b\sqrt{(-c)}$, door vermenigvuldiging opmaakt, dan zal men vinden: dat $(a+b\sqrt{-c})^n$ van den vorm $p+q\sqrt{-c}$ is. †† Het omgekeerde zal nogtans niet altijd kunnen plaats hebben; want de n^{de} magts-wortel uit $p+q\sqrt{c}$ zal in geen ander geval den vorm $a+b\sqrt{c}$ hebben, dan, wanneer eene uitdrukking van den vorm $a+b\sqrt{c}$, tot de n^{de} verheven zijnde, de gegevene uitdrukking $p+q\sqrt{c}$ kan voortbrengen. Wij zullen thans onderzoeken, aan welke omstandigheden kan herkend worden, of ... $\sqrt[n]{(a+b\sqrt{c})}$ tot den vorm $p+q\sqrt{c}$ herleidbaar is, en welke, in het geval der herleidbaarheid, de waarden van p en q zijn.

§. 473. Wij nemen aan: dat $a+b\sqrt{c}$ tot den eenvoudigsten vorm gebragt zij, zoo dat 'er in c geene vierkante getallen als factoren voorkomen. Voorts merken wij aan: dat, wanneer c een gebroken getal is, $\sqrt{c}$, volgens §. 424. altijd tot den vorm $r\sqrt{s}$ kan gebragt worden, met beding, dat s een geheel getal zij. Wij hebben dan, in het algemeenste geval, $a+b\sqrt{c}$; zijnde c een geheel getal, en de getallen a en b geheele of gebrokene.

§. 474. Laten nu a en b gebrokene getallen zijn; dan zal men altijd de gegevene uitdrukking met zulk een geheel getal kunnen vermenigvuldigen, dat, (noemende h dit geheel getal)

$$h(a+b\sqrt{c})=p+q\sqrt{c}$$

zij: men zal dan hebben:

$$h^{\frac{1}{n}} \times (a+b\sqrt{c})^{\frac{1}{n}} = (p+q\sqrt{c})^{\frac{1}{n}}$$

waaruit volgt:

$$\sqrt[n]{(a+b\sqrt{c})} = \frac{1}{\sqrt[n]{h}} \times \sqrt[n]{(p+q\sqrt{c})}$$

Het blijkt hieruit: dat, ingevalle a en b gebrokene getallen zijn, de gegevene uitdrukking met h, of het kleinste gemeene veelvoud van de noemers der breuken, moet vermenigvuldigd worden, en dat daardoor de wortel-trekking gebragt wordt, tot die uit eene uitdrukking $p+q\sqrt{c}$, in welke p en q en c geheele getallen zijn.

§. 475. Hebben, in deze laatste, p en q eenen gemeenen deeler, welke eene volkomen n^{de} magt is; dan zal, dien gemeenen deeler $=v^n$; $p=p'v^n$ en $q=q'v^n$ gesteld zijnde,

$$\sqrt[n]{(p+q\sqrt{c})} = \sqrt[n]{(p'v^n+q'v^n\sqrt{c})} = v\sqrt[n]{(p'+q'\sqrt{c})}$$

zijn, en hierdoor zal het onderzoek gebragt zijn tot het onderzoek

 van

van den n^{den} magts-wortel uit $a + b\sqrt{c}$, en zich bepalen tot het geval, waarin 1° a, b en c geheele getallen zijn; 2° dat c door geen volkomen vierkant deelbaar is; en 3°, dat a en b geene volkomene n^{de} magt tot gemeenen deeler hebben.

§. 476. Stellen wij nu: $\sqrt[n]{(a \pm b\sqrt{c})} = p \pm q\sqrt{c}$; dan zal, indien men kortheidshalve de coefficienten van de n^{de} magt van eene tweeledige uitdrukking, zie §. 742, I. C., ftelt als volgt: $n = A$; . . . $\frac{n(n-1)}{1.2} = B$; $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} = C$; enz.

$$a \pm b\sqrt{c} = p^n \pm Ap^{n-1}q\sqrt{c} + Bp^{n-2}q^2c \pm Cp^{n-3}q^3c\sqrt{c}$$
$$+ Dp^{n-4}q^4c^2 \pm Ep^{n-5}q^5c^2\sqrt{c} + Fp^{n-6}q^6c^3 \pm \text{enz.}$$

Deze vergelijking kan, in de onderftelling dat p en q meetbare getallen zijn, niet beftaan, ten zij de meetbare en onmeetbare deelen der leden aan elkander gelijk gefteld worden: men zal gevolgelijk hebben:

$$a = p^n + Bp^{n-2}q^2c + Dp^{n-4}q^4c^2 + Fp^{n-6}q^6c^3 + \text{enz.} \quad . . (1)$$
$$b\sqrt{c} = Ap^{n-1}q\sqrt{c} + Cp^{n-3}q^3c\sqrt{c} + Ep^{n-5}q^5c^2\sqrt{c} + \text{enz.} \quad (2)$$

Maar nu is

$$a^2 - b^2c = (p^n + Bp^{n-2}q^2c + Dp^{n-4}q^4c^2 + \text{enz.})^2 -$$
$$(Ap^{n-1}q\sqrt{c} + Cp^{n-3}q^3c\sqrt{c} + Ep^{n-5}q^5c^2\sqrt{c} + \text{enz.})^2$$

en, omdat het verfchil van twee vierkanten gelijk is aan de fom hunner wortels, met derzelver verfchil vermenigvuldigd, is ook

$$a^2 - b^2c = [p^n + Ap^{n-1}q\sqrt{c} + Bp^{n-2}q^2c + Cp^{n-3}q^3c\sqrt{c} + \text{enz.}]$$
$$\times [p^n - Ap^{n-1}q\sqrt{c} + Bp^{n-2}q^2c - Cp^{n-3}q^3c\sqrt{c} + \text{enz.}]$$

De tweede factor van het laatfte lid dezer vergelijking, is van den eerften, alleen in de teekens der evene termen, onderfcheiden, en kan uit denzelven afgeleid worden, wanneer men in dezen q negatief neemt: omdat dan

$$p^n + Ap^{n-1}q\sqrt{c} + Bp^{n-2}q^2c + \text{enz.} = (p + q\sqrt{c})^n \text{ is,}$$

zal ook, door q negatief te nemen,

$$p^n - Ap^{n-1}q\sqrt{c} + Bp^{n-2}q^2c - \text{enz.} = (p - q\sqrt{c})^n \text{ zijn.}$$

De zoo even gevondene vergelijking verandert dan in:

$$a^2 - b^2c = (p^2 - q^2c)^n$$

ftellende dan, kortheidshalve, $a^2 - b^2c = P^n$, zal men, na den n^{den} magts-wortel uit deze laatfte getrokken te hebben, verkrijgen:

$$p^2 - q^2c = \sqrt[n]{(a^2 - b^2c)} = P \quad . . . . (3)$$

Aangezien nu p, q en c geheele getallen moeten zijn, zoo blijkt hieruit: dat, zal deze voorwaarde kunnen vervuld worden, P een meetbaar getal, en bijgevolg $a^2 - b^2c$ eene volkomen n^{de} magt zal moeten

ten zijn; waaruit volgt: dat, wanneer de getallen a, b, c, zoodanig gegeven zijn, dat deze voorwaarde niet vervuld wordt, de gegevene uitdrukking $a+b\sqrt{c}$ geenen n^{den} magts-wortel van den vorm $p+q\sqrt{r}$ zal kunnen hebben.

Uit de vergelijking $p^2-q^2c=P$ volgt: $q^2c=p^2-P$. Hieruit zal men de tweede en volgende magten van q^2c vinden, welke van de evene magten van p zullen afhangen; alzoo zal $q^4c^2=p^4-2Pp^2+P^2$; $q^6c^3=p^6-3Pp^4+3P^2p^2-P^3$, enz. zijn; wanneer men nu deze waarden van q^2c, q^4c^2, q^6c^3, enz. in de vergelijking (1) namelijk in

$$a=p^n+Bp^{n-2}(q^2c)+Dp^{n-4}(q^2c)^2+Fp^{n-6}(q^2c)^3+\text{enz.}$$

overbrengt, en de termen van dezelfde magten van p in éénen vereénigt, dan zal men vinden:

$$A'p^n-B'p^{n-2}+C'p^{n-4}-D'p^{n-6}+E'p^{n-8}-\text{enz.}-a=0$$

Wij zullen, in het volgende Boek, zien: dat

$$1+B+D+F+H+K+\text{enz.}=2^{n-1} \text{ is}$$

de vergelijking zal dan in

$$2^{n-1}p^n-B'p^{n-2}+C'p^{n-4}-D'p^{n-6}+E'p^{n-8}-\text{enz.}-a=0 \quad (4)$$

veranderen. Dit is eene vergelijking, welke alleen de onbekende p bevat, en waarin

$$\begin{aligned}
A' &= 1+B+D+F+H+\text{enz.}=2^{n-1}\\
B' &= (B+2D+3F+4H+5K+\text{enz.})\times P\\
C' &= (D+3F+6H+10K+15L+\text{enz.})\times P^2\\
D' &= (F+4H+10K+20M+35O+\text{enz.})\times P^3 \text{ is.}\\
&\text{enz.} \qquad\qquad \text{enz.}
\end{aligned}$$

Omdat nu p, volgens de voorwaarde, eene meetbare waarde moet hebben, zal deze vergelijking, op eene ligte wijze, naar de Leerwijze van BUDAN, kunnen worden opgelost.

Wanneer men eene waarde voor p gevonden heeft, dan moet met dezelve eene zekere waarde van q overéénstemmen; en deze wordt, op het ligtste, door de vergelijking (3) gevonden: men heeft namelijk

$$q^2=\frac{p^2-P}{c} \text{ en } q=\pm\sqrt{\frac{p^2-P}{c}} \quad . \ . \ . \ . \ (5)$$

Met eenige waarde van p schijnen dan twee onderscheidene waardijen van q overéénteststemmen: dan, daar de waarde van q ook nog door de vergelijking (2) kan gevonden worden, namelijk door

$$0=-b+Ap^{n-1}(q)+Cp^{n-3}c(q)^3+Ep^{n-5}c^2(q)^5+\text{enz.} \quad (6)$$

zal de waarde van q door vergelijking (5) gevonden, ook te gelijk aan de vergelijking (6) moeten voldoen, welke vergelijking bijgevolg

zal

zal doen kennen, welke dezer twee teekens $+$ of $-$ voor q in de vergelijking (5) zullen moeten genomen worden.

§. 477. Deze formulen zijn algemeen; zij zijn zoo wel op onbestaanbare als bestaanbare tweeledige wortel-uitdrukkingen toepasselijk. Men zal slechts $n = 2, 3, 4, 5$, enz. behoeven te stellen, om de bijzondere vergelijkingen voor de tweede, derde, vierde, vijfde, enz. magtswortel-trekkingen te verkrijgen.

§. 478. Stellen wij $n = 2$; dan is $A = 2$; $B = 1$; $C = 0$ en $D = 0$; enz.; en $A' = 2$; $B' = P$; $C' = 0$; $D' = 0$; enz. en nu is:

1° . . . . . $P = \sqrt{(a^2 - b^2 c)}$

2° . . . . . $2p^2 - (P + a) = 0$

3° . . $q = \pm\sqrt{\left(\frac{p^2 - P}{c}\right)}$; *Voorw. verg.* $0 = -b + 2p\,(q)$

1. VOORBEELD. *Den vierkants-wortel uit* $37 + \sqrt{1200}$, *indien het mogelijk is, tot den vorm* $p + q\sqrt{c}$ *te brengen?*

Volgens §. 422. is $\sqrt{1200} = 20\sqrt{3}$. De gegevene uitdrukking wordt dan $37 + 20\sqrt{3}$, welke, met $a + b\sqrt{c}$ vergeleken zijnde, geeft $a = 37$, $b = 20$ en $c = 3$. Nu is $P = \sqrt{(a^2 - b^2 c)} = \sqrt{(37^2 - 20^2 \times 3)} = \sqrt{169} = 13$. De tweede vergelijking wordt dan

$2p^2 - 50 = 0$; hieruit volgt $p = \pm 5$

en $q = \sqrt{\frac{p^2 - P}{c}} = \sqrt{\frac{25 - 13}{3}} = \sqrt{1\frac{2}{3}} = \sqrt{4} = \pm 2$

De voorwaardens-vergelijking $0 = -b + 2pq$ geeft $q = \frac{b}{2p}$; neemt men $p = +5$; dan is $q = \frac{20}{10} = +2$; en neemt men $p = -5$; dan is $q = \frac{20}{-10} = -2$. Men heeft gevolgelijk twee wortels, namelijk $\sqrt{(37 + \sqrt{1200})} = 5 + 2\sqrt{3}$ of $= -5 - 2\sqrt{3}$.

2. VOORBEELD. *Is het mogelijk, om den vierkants-wortel uit* $5 - 12\sqrt{-1}$ *onder den vorm* $p + q\sqrt{-1}$ *te brengen?*

Hier is $a = +5$; $b = -12$ en $c = -1$; derhalve $P = 13$, en men heeft, in plaats van $2p^2 - (P + a) = 0$, de vergelijking $2p^2 - 18 = 0$, hieruit $p = \pm 3$. Voorts vindt men $q = \pm 2$ de vergelijking $0 = -b + 2p\,(q)$ leert: dat $q = -2$ met $p = +3$ en $q = +2$ met $p = -3$ overeenstemt. Men heeft derhalve $\sqrt{(5 - 12\sqrt{(-1)})} = 3 - 2\sqrt{-1}$ of $= -3 + 2\sqrt{-1}$.

3. VOORBEELD. *Den vierkants wortel uit* $-93 - 30\sqrt{6}$ *te vinden?*

Hier is $a = -93$; $b = -30$; $c = 6$; gevolgelijk wordt $P = 57$ en $2p^2 = P + a = 57 - 93 = -36$; $p^2 = -18$ en $p = \pm 3\sqrt{-2}$; voorts is $q = \pm\sqrt{\left(\frac{p^2 - P}{c}\right)} = \pm\sqrt{\left(\frac{-18 - 57}{+6}\right)} = \pm\sqrt{-7\frac{5}{6}} = \pm 5\sqrt{-} = \pm 2\frac{1}{2}\sqrt{-2}$, om nu te weten, welk teeken hier moet genomen wor-

worden, raadplege men de verkennings-vergelijking $o = -b + 2pq$; deze geeft: $q = \frac{b}{2p} = \frac{-30}{+6\sqrt{-2}}$ (indien men $p = +3\sqrt{-2}$ ftelt,) of ... $q = \frac{-30 \times +6\sqrt{-2}}{-72} = +2\frac{1}{2}\sqrt{-2}$. Neemt men $p = -3\sqrt{-2}$; dan zal $q = -2\frac{1}{2}\sqrt{-2}$ zijn. Men vindt dan: dat de wortel $p + q\sqrt{c}$ $= \pm 3\sqrt{-2} \pm 2\frac{1}{2}\sqrt{-2} \times (\sqrt{6}) = \pm 3\sqrt{-2} \pm 5\sqrt{-3}$ is.

§. 479. Op dezelfde wijze zal men vinden:

1° .. $\sqrt{(84 - \sqrt{6912})} = +6 - 4\sqrt{3}$, *of* $-6 + 4\sqrt{3}$

2° .. $\sqrt{(72 + \sqrt{5120})} = +2\sqrt{10} + 4\sqrt{2}$, *of* $-2\sqrt{10} - 4\sqrt{2}$

3° .. $\sqrt{[a^2 + 2x\sqrt{(a^2 - x^2)}]} = \pm x \pm \sqrt{(a^2 - x^2)}$.

§. 480. Stellen wij $n = 3$; dan is $A = 3$; $B = 3$; $C = 1$; $D = o$; $E = o$; $F = o$; enz. $A' = 1 + 3 = 2^2 = 4$ en $B' = 3P$; $C' = o$, en nu heeft men:

1° . . . . . . $P = \sqrt[3]{(a^2 - b^2 c)}$

2° . . . . . . $4p^3 - 3Pp - a = o$

3° . . . . . . $q = \pm\sqrt{\left(\frac{p^2 - P}{c}\right)}$

voorwaardens of verkennings-vergelijking

4° . . . . . . $c(q)^3 + 3p^2(q) - b = o$

1. VOORBEELD. *Is het mogelijk den cubus-wortel uit* $215 + \sqrt{39366}$ *tot den vorm* $p + q\sqrt{c}$ *te brengen?*

De gegevene uitdrukking wordt tot den vorm $215 + 81\sqrt{6}$ gebragt: men heeft derhalve: $a = 215$; $b = 81$; $c = 6$. Nu is $P = \sqrt[3]{(a^2 - b^2 c)}$ $= \sqrt[3]{6859} = 19$. De vergelijking in (p) wordt dan $4p^3 - 57p - 215 = o$: hieruit vindt men: $p = 5$, en nog twee onbestaanbare wortels: $p = -2\frac{1}{2}$ $+ 1\frac{1}{2}\sqrt{-2}$, en $p = -2\frac{1}{2} - 1\frac{1}{2}\sqrt{-2}$; elk dezer wortels moet afzonderlijk in vergelijking (3) gefubftitueerd worden.

a) Voor $p = 5$ vindt men $q = \sqrt{\frac{p^2 - P}{c}} = \sqrt{\frac{6}{6}} = \sqrt{1} = \pm 1$. Om te weten, welke dezer twee waarden van q moet genomen worden, zoo ftelle men dezelve in de voorwaardens-vergelijking $6q^3 + 75q - 81 = o$, en dan blijkt het, dat $q = +1$ en niet -1 moet genomen worden. Het blijkt dan, dat $5 + \sqrt{6}$ één der wortels is.

b) Neemt men $p = -2\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2}\sqrt{-2}$; dan is $p^2 = 1\frac{3}{4} - 7\frac{1}{2}\sqrt{-2}$;
$p^2 - P = -17\frac{1}{4} - 7\frac{1}{2}\sqrt{-2}$ en $q^2 = -2\frac{7}{8} - 1\frac{1}{4}\sqrt{-2}$. Hieruit vindt men, volgens de formulen van §. 477, $q = +\frac{1}{2} - 1\frac{1}{4}\sqrt{-2}$ en $q = -$ $\frac{1}{2} + 1\frac{1}{4}\sqrt{-2}$. Uit de voorwaardens-vergelijking, welke, tot meer gemaks, onder de volgende gedaante kan gefteld worden $q(2q^2 + p^2) - 27 = o$, vindt men: dat $q = -\frac{1}{2} + 1\frac{1}{4}\sqrt{-2}$ hier alleen gelden kan. Stelt men nu, voor $p = -2\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2}\sqrt{-2}$, de daarmede overëénkomftige waarde van

van q in de uitdrukking $p + q\sqrt{c}$, dan vindt men voor den tweeden wortel:

$$-2\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{6} + 1\tfrac{1}{2}\sqrt{-2} + 2\tfrac{1}{2}\sqrt{-3}$$

c) Stelt men eindelijk $p = -2\tfrac{1}{2} - 1\tfrac{1}{2}\sqrt{-2}$; dan zal men voor den derden wortel vinden:

$$-2\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{6} - 1\tfrac{1}{2}\sqrt{-2} - 2\tfrac{1}{2}\sqrt{-3}$$

Indien men elken dezer wortels zoo wel als den eersten $5 + \sqrt{6}$ tot de derde magt verheft; dan zal men telkens $215 + 81\sqrt{6}$ tot product verkrijgen. Halcken verkrijgt, in zijn *Zinnen-Confect*, *pag.* 42, dezelfde getallen: maar hij heeft zich in de teekens vergist.

2. Voorbeeld. *Den cubus-wortel uit* $80 + 72\sqrt{-3}$ *te trekken?*

Hier is $a = 80$, $b = 72$ en $c = -3$. Wij verkrijgen dus . . . .

$P = \sqrt[3]{(a^2 - b^2 c)} = \sqrt[3]{(80^2 + 72^2 \times 3)} = 28$, en de vergelijking in p wordt $p^3 - 21p - 20 = 0$, welk drie bestaanbare en meetbare wortels heeft, namelijk $p = +5$, $p = -1$ en $p = -4$. Met behulp van de vergelijking $q^2 = \pm\sqrt{\dfrac{p^2 - P}{c}}$ vindt men, dat

$$\begin{array}{rlll} \textit{met} & p = +5; & p = -1; & p = -4 \\ \textit{overëënstemmen} & q = \pm 1; & q = \pm 3; & q = \pm 2 \end{array}$$

stelt men nu deze waarden van q in de verkennings-vergelijking $q^3 - p^2 . q + 24 = 0$, dan blijkt het, dat

$$\begin{array}{rlll} \textit{met} & p = +5; & p = -1; & p = -4 \\ \textit{overëënstemmen} & q = +1; & q = -3; & q = +2 \end{array}$$

De wortels der gegevene uitdrukking zijn alzoo $+5 + \sqrt{-3}$; . . . $-1 - 3\sqrt{-3}$; $-4 + 2\sqrt{-3}$. Ten blijke, dat deze wortels de ware zijn, zal men elk van dezelve tot de derde magt verheffen, wanneer men verkrijgen zal $80 + 72\sqrt{-3}$.

§. 481. 1. Aanmerking. Men kan het trekken van den cubus-wortel uit een getal a^3, aanmerken als de oplossing van de vergelijking $x^3 = a^3$ of $x^3 - a^3 = 0$, wanneer namelijk de letter a den wortel beteekent: nu is klaarklijkelijk $x = a$ of $x - a = 0$; maar $x^3 - a^3 = (x^2 + ax + a^2) \times (x - a) = 0$ zijnde, kan ook $x^2 + ax + a^2 = 0$ gesteld worden, en, wanneer men deze vierkants-vergelijking oplost, dan zal men vinden: $x = a \times (-\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{-3})$ en $x = a \times (-\tfrac{1}{2} - \sqrt{-3})$. †† Elk getal A heeft dan drie cubiek-wortelen, welke door

$$\sqrt[3]{A},\ (-\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{-3}) \times \sqrt[3]{A},\ \textit{en}\ (-\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{-3}) \times \sqrt[3]{A}$$

worden uitgedrukt; offschoon nu de twee laatsten onbestaanbaar zijn, is nogtans derzelver derde magt gelijk A. Deze formulen nu kunnen dienen, om, wanneer men den wortel, welke met $\sqrt[3]{A}$ overëënstemt, gevonden heeft, de beide anderen te vinden. Wij vonden, bij voorbeeld, in het 1. voorbeeld; dat $\sqrt[3]{(215 + 81\sqrt{6})}$, welke met den meet-

meetbaren wortel der vergelijking $4p^3 - 57p - 215 = 0$ overeënstemt, is $5 + \sqrt{6}$; wanneer men nu dezen wortel, welke in de bovenstaande formulen door $\sqrt[3]{A}$ is uitgedrukt, eerst met $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}$ en daarna met $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3}$ vermenigvuldigt, dan zal men de twee onbestaanbare wortels, welke in den loop der oplossing gevonden zijn, ook langs dezen weg verkrijgen.

§. 482. 2. Aanmerking. In de vergelijking $x^3 - A = 0$, ontbreekt den tweeden term, of liever derzelver coefficient is gelijk nul: hieruit volgt: †† dat de som der gevondene wortels gelijk nul moet zijn, zie §. 210. Ook is indedaad

$$\sqrt[3]{A} + (-\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{-3})\sqrt[3]{A} + (-\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{-3})\sqrt[3]{A} = 0.$$

Zulks kan dan tot eene proef verstrekken, dat de gevonde wortels naar behooren berekend zijn. — †† Omdat A gelijk is aan het product der wortels, zie §. 210, zal men de gevondene wortels met elkander vermenigvuldigen, en het product zal gelijk aan het gegevene getal, of aan de gegevene uitdrukking, moeten zijn.

§. 483. 3. Aanmerking. Het is opmerkelijk, dat, wanneer . . . $\sqrt[3]{(a + b\sqrt{c})} = p + q\sqrt{c}$ is, ook te gelijk $\sqrt[3]{(a - b\sqrt{c})} = p - q\sqrt{c}$ zal zijn. Want het zij b positief of negatief zij, de letter P zal altijd dezelfde waarde hebben, en de vergelijking $4p^3 - 3Pp - a = 0$ zal niet veranderen: de waarde van p zal bijgevolg, in beide gevallen, dezelfde zijn, en, om die reden, zal ook $q = \pm\sqrt{\frac{p^2 - P}{c}}$ niet veranderen: het is alleen de vergelijking $c(q)^3 + 3p^2(q) - b = 0$, welker achterste term b, in het tweede geval, een negatief teeken verkrijgen, en die gevolgelijk in $c(q)^3 + 3p^2(q) + b = 0$ veranderen zal: maar, nu is het klaar: dat, wanneer, bij voorbeeld $+q$ aan $c(q)^3 + 3p^2(q) - b = 0$ voldaan heeft, $-q$ aan $c(q)^3 + 3p^2(q) + b = 0$ voldoen zal, en *vice versâ*. Het dubbelde teeken in de vergelijking $q = \pm\sqrt{\frac{p^2 - P}{c}}$ lost dan beide gevallen op, en het is de verkennings-vergelijking, die beslist, welke dezer twee waarden, in elk bijzonder geval, moet genomen worden.

§. 484. Men zal slechts, in de algemeene oplossing van §. 476, $n = 4, 5, 6, 7$, enz. behoeven te stellen, om de bijzondere formulen voor het trekken der vierde, vijfde, zesde, zevende, enz. magtswortelen uit uitdrukkingen van den vorm $a + b\sqrt{c}$ te vinden: indien deze

deze wortel-uittrekking mogelijk is, zal P altijd meetbaar zijn, en de vergelijking in p zal altijd eenen meetbaren wortel hebben. Om nu uit dezen, door eene ligte bewerking, alle de overige te vinden, zoo merken wij aan, dat de vergelijking $x^n - a^n = 0$ altijd zoo vele wortels heeft, als 'er éénheden in n zijn. Bij de beschouwing van het Theorema van COTES, zal zulks algemeen betoogd worden. Wij zullen ons daarom hiermede thans niet verder ophouden, en alleen tot oefening van den Lezer hier bijvoegen: dat, wanneer men $n = 5$ stelt, zal gevonden worden

$$\sqrt[5]{(843 - 589\sqrt{2})} = 3 - \sqrt{2}$$

en stelt men $n = 7$; dan zal men de formulen vinden, waaruit blijken zal, dat

$$\sqrt[7]{(568 + 328\sqrt{3})} = 1 + \sqrt{3} \text{ is.}$$

§. 485. Somtijds stelt men zich voor den vierkants-wortel te trekken uit uitdrukkingen van den vorm $a + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d} +$ enz. en dan bedoelt men te onderzoeken, of deze uitdrukking, door de verheffing van eene gelijksoortige tot de tweede magt, ontstaan zij? Daar nu deze onderzoekingen meer een voorwerp van liefhebberij zijn, dan een wezenlijk nut hebben, zullen wij 'er kortelijk alleen zooveel van zeggen, als noodig is, om den Lezer, die lust mogt gevoelen, dit onderwerp nader te doorgronden, op den weg te helpen.

§. 486. Indien men eene drieledige uitdrukking $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$ in het vierkant brengt, dan verkrijgt men:

$$a + b + c + 2\sqrt{ab} + 2\sqrt{ac} + 2\sqrt{bc}$$

en dit vierkant heeft dan de eigenschap, †† dat twee van derzelver wortel-uitdrukkingen met elkander vermenigvuldigd, en door de derde gedeeld zijnde, het quotient altijd meetbaar, en gelijk aan het dubbeld van eene der gegevene, onder het wortel-teeken, zal zijn: want $2\sqrt{ab} \times 2\sqrt{ac} : 2\sqrt{bc} = 2a$; $2\sqrt{ab} \times 2\sqrt{bc} : 2\sqrt{ac} = 2b$ en $2\sqrt{ac} \times 2\sqrt{bc} : 2\sqrt{ab} = 2c$; de som dezer quotienten is dan gelijk aan het dubbeld van het meetbare deel der gegevene uitdrukking.

§. 487. Wanneer derhalve gegeven is: $6 + \sqrt{8} - \sqrt{12} - \sqrt{24}$; dan zal men twee der wortel-uitdrukkingen door de derde deelen, en hierin op de teekens behoorlijk acht geven; vindt men nu, in alle deze mogelijke deelingen, meetbare quotienten, en is derzelver som gelijk aan het meetbare deel der gegevene uitdrukking, dan is de worteltrekking stelkundiger wijze mogelijk. Nu is $\frac{+\sqrt{8} \times -\sqrt{12}}{-\sqrt{24}} = \sqrt{4} = 2$;

+

$\frac{+\sqrt{8} \times -\sqrt{24}}{-\sqrt{12}} = 4$ en $\frac{-\sqrt{12} \times -\sqrt{24}}{+\sqrt{8}} = +6$; nu is de helft van $2 + 4 + 6 = 1 + 2 + 3 = 6 =$ aan het meetbare deel der gegevene uitdrukking: men kan dan $a + b + c = 1 + 2 + 3$ of $a = 1$, $b = 2$ en $c = 3$ stellen. Nu is $2\sqrt{ab} = \sqrt{8}$, of $\sqrt{ab} = \sqrt{2}$, en dit stemt met $a = 1$ en $b = 2$ overëén. Insgelijks is $2ac = -2\sqrt{3}$ en $+ 2bc = -2\sqrt{6}$; vermits nu de negatieve teekens daarin overëénstemmen, dat men $\sqrt{c}$ negatief moet nemen, blijkt hieruit: dat $1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}$ de vierkants-wortel uit de gegevene uitdrukking is.

§. 488. Wanneer men eene uitdrukking van den vorm $a + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d} + \sqrt{e} +$ *enz.* in het vierkant brengt, zullen 'er, in het algemeen, indien het getal der termen n is, een aantal van $n \times \frac{n-1}{2}$ wortel-uitdrukkingen in het vierkant kunnen voorkomen; doch, daar het product van twee wortel-uitdrukkingen meetbaar kan worden, kan het aantal dezer wortel-uitdrukkingen aanmerkelijk verminderen, (zoo is, bij voorbeeld, het vierkant van $-\sqrt{3} + \sqrt{7} + \sqrt{15} + \sqrt{35}$, gelijk aan $60 + 8\sqrt{21} + 8\sqrt{5}$). Het is, door deze omstandigheden in acht te nemen, en door de vormen der vierkanten, in voorkomende gevallen, te onderzoeken, dat men de regelen ter oplossing vinden zal. Men zal bij de oudere Schrijvers, voornamelijk bij REYNEAU, *Analyse démontrée*; PRETEST, *Elémens de Mathématiques*, en vele anderen, genoeg voorbeelden van deze soort van worteltrekkingen aantreffen.

WISKUNDIGE LESSEN.

XIV. BOEK.

Over de magts-verheffingen der tweeledige uitdrukkingen en over de worteltrekkingen uit dezelve.

ZES- EN- VIJFTIGSTE LES.

Over het verheffen van eene tweeledige uitdrukking $x+y$ tot eene geheele, gebrokene, positieve of negatieve magt. Of over de uitvinding van het Binomium *van* NEWTON.

§. 489. * Wanneer men eene tweeledige uitdrukking $x+y$ tot eenige magt (zie §. 738 en 739, I. C.) verheft, dan noemt men de uitdrukking, welke men voor deze magt verkrijgt, *de ontwikkelde magt*. Alzoo is $x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$ de ontwikkelde derde magt van $x+y$. * Derzelver termen x^3, $3x^2y$, enz. noemt men de *termen der ontwikkelde magt:* * en de coefficienten, waarmede zij zijn aangedaan, noemt men *binomial-coefficienten.*

§. 490. Indien men zijnen aandacht vestigt op de wijze, waarop de op elkander volgende magten van $x+y$, door eenvoudig vermenigvuldigen, verkregen worden, blijkt het: dat de binomial-coefficienten van elke magt van den exponent dezer magt moeten afhangen; want, vooreerst, blijven zij, in elke bijzondere magt, voor de waarden, welke men aan x en y geven kan, dezelfde, en ten anderen worden zij, in de trapswijze ontwikkeling der op elkander volgende magten, volgens dezelfde wet, uit de binomial-coefficienten der onmiddelijk voorgaande magt afgeleid: de coefficienten moeten dan functien van den exponent der magt zijn, en als zoodadanig in ſtelkundige uitdrukkingen kunnen daargeſteld worden. Kan men nu dit doel bereiken, dan zal men elke tweeledige uitdrukking, zonder multiplicatie, door ſlechts ééne enkelde ſubſtitutie, tot eene gegevene magt kunnen verheffen.

§. 491. Vroeger, dan bij STIFELIUS, in zijne *Arithmetica Integra* L. I. C. 5, (een boek dat in 1544. gedrukt is,) vindt men de binomial-coefficienten niet. Zij komen aldaar tot de zeventiende magt voor: dan, STIFELIUS ſchijnt niets van de wet, volgens welke zij van elkander afhangen, geweten te hebben. Volgens HUTTON, ontdekte BRIGGS de wijze, op welke de binomial-coefficienten van zekere magt, onafhankelijk van die der voorgaande magten, kunnen gevonden worden. Echter bleef hij bij de geheele poſitieve magten ſtaan, en de wijze, waarop die wet, in ſtelkundige teekens, wordt uitgedrukt, ſchijnt hem onbekend geweest te zijn (76). NEWTON gaf niet ſlechts die uitdrukkingen; maar toonde ook aan, dat deze wet niet alleen voor de geheele; maar ook tevens voor de gebrokene en negatieve magten dezelfde is: het is dan ook om die reden, dat de ontwikkeling van $(x+y)^n$, dat is de vergelijking

$$(x+y)^n = x^n + \frac{n}{1} x^{n-1} y + \frac{n.(n-1)}{1.2} x^{n-2} y^2 + enz.$$

welke, voor alle waarden van n, geldt, gemeenlijk het *Binomium* van NEWTON genoemd wordt (77). Het is met het betoog dezer gewigtige waarheid, dat wij ons in deze Les zullen bezig houden.

§. 492. Wij zullen vooraf de uitdrukking $(x+y)^n$ onder eene geſchiktere, en, voor ons tegenwoordig onderzoek, eenvoudiger gedaante brengen. Men kan $x+y$ eerst door x deelen, en, wanneer men dan het komende quotient $1+\frac{y}{x}$ met x vermenigvuldigt, dan zal de eerſte grootheid $x+y$ weder te voorſchijn komen. Men kan dan ſchrijven:

$x+y$

(76) JOH. BERNOUILLI ſchrijft de uitvinding van die wet toe aan PASCAL, en grondt waarſchijnlijk deze meening op den arithmetiſchen driehoek, waarvan PASCAL voor den uitvinder gehouden wordt, offchoon die driehoek, reeds vroeger, aan GIRARD, en, volgens KÆSTNER en HUTTON, lang voor den tijd van STIFELIUS bekend was.

(77) Deze ontdekking, als eene der ſchoonſten, en, in hare gevolgen, de belangrijkſte, is, op 's mans grafſtombe, in de Abtdij van *Westmunſter*, uitgehouwen.

$$x+y=x\left(1+\frac{y}{x}\right)$$

Indien men de leden dezer vergelijking tot de n^{de} magt verheft, dan zal

$$(x+y)^n=x^n\times\left(1+\frac{y}{x}\right)^n$$

zijn. Stelt men nu verder $\frac{y}{x}=z$; dan zal de laatste vergelijking in

$$(x+y)^n=x^n\times(1+z)^n$$

veranderen, en wanneer men nu $(1+z)^n$ ontwikkelen kan, dan zal men, in deze ontwikkelde magt, in plaats van z moeten schrijven $\frac{y}{x}$, en daarna alle de termen der uitdrukking, die men alsdan verkrijgt, met x^n moeten vermenigvuldigen, wanneer men tot dezelfde uitkomst zal moeten komen, als of men regtstreeks de uitdrukking $(x+y)^n$ ontwikkeld had.

I. Geval. *Als n een geheel positief getal is.*

§. 493. Wanneer men de uitdrukking $1+z$ tot de tweede en volgende magten verheft, dan zal men door de multiplicatie vinden:

$$\begin{aligned}(1+z)^1&=1+z\\(1+z)^2&=1+2z+z^2\\(1+z)^3&=1+3z+3z^2+z^3\\ \textit{enz.}&\quad\textit{enz.}\end{aligned}$$

Het is niet noodig, deze verheffing verder voorttezetten, om, uit den trapswijzen voortgang van het werk, ten duidelijkste te bespeuren: dat, uit den aard der multiplicatie zelve, elke volgende magt van $(1+z)$ éénen term meer dan de voorgaande zal verkrijgen; en dat de termen van eenige magt van $(1+z)$ de opklimmende magten van de grootheid z

$$z^0 \text{ of } 1,\ z,\ z^2,\ z^3,\ z^4,\ z^5,\ z^6,\ \textit{enz.}$$

met zekere getallen vermenigvuldigd, moeten inhouden, en dat eindelijk de laatste term dezer uitdrukking gelijk zal zijn aan z verheven tot dezelfde magt, als tot welke $(1+z)$ verheven is.

§. 494. Wanneer dan $(1+z)^n$ door multiplicatie ontwikkeld wordt, dan zal de laatste uitkomst eene uitdrukking van den vorm

$$1+Az+Bz^2+Cz^3+Dz^4+\textit{enz.}+z^n$$

geven; en de letters A, B, C, D, enz., zullen getallen zijn, welke noodzakelijk van den exponent n afhangen, dat wil zeggen: A, B, C, D, enz. moeten functien van n zijn. Men kan nu ook vooraf inzien: dat, om de voorwaarde van het vraagstuk, welks oplossing wij thans

thans ondernemen, te vervullen, de vorm van de uitdrukkingen, die wij voor A, B, C, enz. verkrijgen moeten, ten minste, wanneer n een geheel getal is, zoo algemeen zal moeten zijn, dat men, in dezelve uitdrukkingen, slechts $n = 1, 2, 3, 4$, enz. zal behoeven te stellen, om de eerste, tweede, derde en volgende magten van $1 + z$, die men anders door multiplicatie zou vinden, te verkrijgen. Het is op dit ontwijfelbaar beginsel, dat de volgende redenering steunt.

§. 495. Wanneer men dan $n = 0$ stelt; dan moeten, aangezien $(1 + z)^0 = 1$ is, zie §. 718, I. C., de coefficienten A, B, C, D, enz., door, in dezelve $n = 0$ te stellen, gelijk nul worden: dit kan nu op geene andere wijze plaats hebben, dan, wanneer n een gemeenschappelijke factor van alle de coefficienten A, B, C, D, enz. is.

Stelt men $n = 1$; dan wordt $(1 + z)^1 = 1 + z$; en nu moeten, door deze substitutie, alle de termen, waarin de tweede en volgende magten van z voorkomen, verdwijnen; doch zulks kan nu, zie §. 154. niet geschieden, ten zij de coefficienten B, C, D, enz., door $n - 1$ deelbaar zijn.

De onderstelling $n = 2$, moet in de algemeene uitdrukking de derde en hoogere magten van z doen verdwijnen, welker coefficienten, door deze substitutie, nul worden, en diensvolgens door $n - 2$ deelbaar moeten zijn.

Op dezelfde wijze voort redenerende, zal het blijken: dat de onderstelling $n = 3$ de coefficienten D, E, F, enz. nul zal moeten maken: dat al verder, door de onderstelling van $n = 4$, de coefficienten E, F, G, enz. nul zullen worden, en dat zulks, op dezelfde wijze, voor de volgende waarden van n, zal moeten plaats hebben, zoodat, in de rangorde der termen, elke volgende term eenen factor meer dan de voorgaande hebben zal; gelijk in het onderstaande tafeltje nader kan gezien worden.

A, B, C, D, E, F, G, H enz. hebben alle	n	*tot factor*
B, C, D, E, F, G, H	$n - 1$	. . .
C, D, E, F, G, H	$n - 2$	. . .
D, E, F, G, H	$n - 3$	. . .
E, F, G, H	$n - 4$	. . .
F, G, H	$n - 5$	. . .
G, H	$n - 6$	. . .
enz.	*enz.*	

Het blijkt hieruit: dat men, als eene nadere bepaling van den vorm der algemeene uitdrukking, stellen kan:

$$(1+z)^n = 1 + nA'z + n(n-1)B'z^2 + n(n-1)(n-2)C'z^3 + n(n-1)(n-2)(n-3)D'z^4 + n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)E'z^5 + n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)F'z^6 + enz. \quad\ldots\ldots\ldots\ldots (\Omega)$$

Hier zijn de letters A', B', C', D', E', enz. factoren, welke nog nader moeten bepaald worden, en deze moeten, omdat aan alle de bijzondere waarden van n voldaan is, geheel standvastige getallen zijn (78), welke buiten alle invloed van de bijzondere waarden van n staan. Men zal dezelve door de volgende overweging gemakkelijk vinden.

§. 496. Wanneer men in de laatste vergelijking (Ω), in plaats van n, stelt $n+1$, dan zal zij in

$$(1+z)^{n+1} = 1 + (n+1)A'z + (n+1)nB'z^2 + (n+1)n(n-1)C'z^3 + enz.$$

veranderen; en, wanneer men de vergelijking (Ω) met $1+z$ vermenigvuldigt, dan verkrijgt men:

$$(1+z)^{n+1} = 1 + \left.\begin{matrix} nA' \\ 1 \end{matrix}\right\} z + \left.\begin{matrix} n(n-1)B' \\ nA' \end{matrix}\right\} z^2 + \left.\begin{matrix} n(n-1)(n-2)C' \\ n(n-1)B' \end{matrix}\right\} z^3 + enz.$$

Deze twee uitdrukkingen moeten, onafhankelijk van z, aan elkander gelijk zijn; waaraan alleen voldaan kan worden, indien men de coefficienten van dezelfde magten van z aan elkander gelijk stelt: men heeft dan de vergelijkingen:

$$nA' + 1 = (n+1)A' \quad \ldots \quad hieruit: \; A' = 1$$
$$n(n-1)B' + nA' = (n+1)nB' \quad \ldots \quad hieruit: \; B' = \tfrac{1}{2}\; enz.$$

Uit de volgende vergelijkingen zal men vinden: $C' = \dfrac{1}{1\,.\,2\,.\,3}$; ...

$D' = \dfrac{1}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}$, enz. In het algemeen, zal men hebben:

n

(78) Indien men hier aan twijfelen mogt, zal men zich, op de volgende wijze, daarvan kunnen overtuigen. De term, welke de p^{de} magt van z vermenigvuldigt is.

$$P'n(n-1)(n-2)\; enz.\; (n-(p-1))\, z^p$$

Indien wij nu n gelijk p stellen; dan is deze de laatste term der ontwikkelde magt, en de coefficient van z^p is de éénheid: men heeft dan

$$P' = \frac{1}{1,\,2,\,3,\,4,\,5,\; enz.\; p}$$

welke eene standvastige grootheid is. Het is deze redenering, welke ook de waarden van A', B', C', enz. leert kennen.

$$n(n-1)(n-2) \text{ enz. } (n-(p-1))N' + n(n-1)(n-2) \text{ enz. } (n-(p-2))M' = (n+1)n(n-1)(n-2) \text{ enz. } (n-(p-2)) \times N'$$

welke vergelijking door $n(n-1)(n-2)$ *enz.* $(n-(p-2))$ deelbaar is: na door dien factor gedeeld te hebben, zal men vinden:

$$(n-(p-1))N' + M' = (n+1)N'$$

$$nN' - pN' + N' + M' = nN' + N'$$

$$pN' = M'; \text{ dat is } N' = \frac{M'}{p}$$

Nu blijkt het, uit de wet van voortgang, dat N' de p^{de} factor uit de uitdrukking (Ω) is, *en gelijk aan den* $(p-1)^{en}$ *factor, gedeeld door* p; zoo dat deze factoren, volgens eene eenvoudige wet, van elkander afhangen. Men heeft namelijk $A' = 1$; $B' = \frac{1}{2}A'$; .... $C' = \frac{1}{3}B'$; $D' = \frac{1}{4}C'$; $E' = \frac{1}{5}D'$; enz.

§. 497. De waarden van A', B', C', D', enz. nu bepaald zijnde, verandert de laatste uitdrukking (Ω) in

$$(1+z)^n = 1 + \frac{n}{1}z + \frac{n(n-1)}{1.2}z^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}z^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}z^4 + \text{enz.} \ldots\ldots \quad (1)$$

en de algemeene term van deze uitdrukking zal zijn:

$$\frac{n(n-1)(n-2) \text{ enz. } (n-(p-2)).(n-(p-1))}{1.2.3\ldots \text{enz.} \ldots\ldots (p-1)p} z^p$$

§. 498. Stelt men nu, in deze uitdrukking, $z = \frac{y}{x}$, en vermenigvuldigt men alle de termen met x^n, zie §. 492, dan verkrijgt men:

$$(x+y)^n = x^n + \frac{n}{1}x^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}y^2 + \ldots\ldots \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^{n-3}y^3 + \text{enz.} \ldots\ldots \quad (2)$$

in welke men slechts $n = 2, 3, 4, 5$, enz. behoeft te stellen om, met een opslag van het oog, de tweede en volgende volgende magten van $x+y$, zonder eene omslagtige multiplicatie, te verkrijgen.

§. 499. †† Stelt men in de vergelijkingen (1) en (2) van §. 497 en 498, z en y, negatief, dan zullen de teekens der termen, waarin de onevene magten van z en y voorkomen negatief worden, en de uitdrukkingen van $(1-z)^n$ en $(x-y)^n$ zullen alleen in de teekens der tweede, vierde en verdere termen van eenen evenen rang verschillen.

Afleiding van het binomium in dit geval uit de leer der combinatien.

§. 500. Wanneer men het gedurig product $(x+p) \times (x+q) \times (x+r) \times$ *enz.*, *tot n factoren*, door eene multiplicatie ontwikkelt, dan zal, raadpleeg §. 210, het laatste product van den vorm

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + \text{enz.} + Lx + M$$

zijn: de coefficient A zal gelijk zijn aan de som van de grootheden p, q, r, enz.; B gelijk aan de som der producten van deze zelfde grootheden, op alle mogelijke wijzen, twee aan twee, genomen, enz. $M = pqrst$ enz. Indien wij nu $p = q = r = s = t = \text{enz.} = y$ stellen; dan zal:

1° $A = ny$ zijn.

2° $B = pq + pr + \text{enz.} = y^2 + y^2 + \text{enz.} =$ aan zooveel maal y^2, als n grootheden, twee aan twee, kunnen worden zamengevoegd: nu is dit getal zamenvoegingen, zie vraagstuk 46, I. C. pag. 349, $= \frac{n \times (n-1)}{1 \,.\, 2}$; gevolgelijk is $B = \frac{n(n-1)}{1 \,.\, 2} y^2$.

3° $C = pqr + pqs + \text{enz.} + qrs + \text{enz.} = y^3 + y^3$ *enz.* zooveel maal genomen, als n dingen, drie aan drie, kunnen zamengevoegd worden; daar nu, zie de aangehaalde plaats, dit getal zamenvoegingen gelijk $\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}$ is, zal $C = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} y^3$ zijn.

Het zal, op dezelfde wijze, blijken: dat $D = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} y^4$

$E = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5} y^5$, enz. is.

Stelt men nu de gevondene waarden van A, B, C, D, enz. in de uitdrukkingen $(x+p) \times (x+q) \times$ *enz.* en $x^n + Ax^{n-1} + \text{enz.}$, dan zal men:

$$(x+y)^n = x^n + \frac{n}{1} x^{n-1} y + \frac{n(n-1)}{1 \,.\, 2} x^{n-2} y^2 \; . \; . \; . \; . \\ \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} x^{n-3} y^3 + \text{enz.}$$

verkrijgen, en het blijkt hieruit: dat het leerstelsel van NEWTON, ten minste voor het geval der geheele positieve magten, uit dat der combinatien kan worden afgeleid.

II. GEVAL. *Wanneer n een geheel negatief getal is.*

§. 501. Aangezien de negatieve en gebrokene exponenten met de geheele, voor zoo verre de multiplicatien, divisien, magtsverheffingen

en

en worteltrekkingen aangaat, aan dezelfde regels, als de geheele en positieve exponenten, onderworpen zijn, kan men vermoeden, dat ook de ontwikkeling van de magt eener tweeledige uitdrukking, voor de negatieve en gebrokene exponenten, aan dezelfde regelmaat zal onderworpen zijn. Het is immers bekend, dat $(1+z)^{-n}$ niet anders is, dan de éénheid gedeeld door $(1+z)^n$, of de éénheid eerst gedeeld door $1+z$; het komende quotient door $1+z$; het tweede quotient op nieuw door $1+z$, enz. tot zoo vele malen, als 'er éénheden in n zijn. Nu hebben wij, in de divisie der stelkundige uitdrukkingen zie §. 65, pag. 41, gezien, dat

$$(1+z)^{-1}=\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-z^3+z^4-z^5+z^6-enz.$$

is, en dat dit quotient uit een oneindig aantal termen zal bestaan. Wanneer men nu deze vergelijking op nieuw door $1+z$ deelt; dan zal men verkrijgen:

$$(1+z)^{-2}=\frac{1}{(1+z)^2}=1-2z+3z^2-4z^3+5z^4-6z^5+enz.$$

zonder dat het nu noodig is, de wet, volgens welke de coëfficienten der termen opklimmen, te kennen, zoo ziet men: dat, wanneer deze deelingen onbepaaldelijk tot n malen worden voortgezet, de vorm van $(1+z)^{-n}$ zal zijn

$$1-Az+Bz^2-Cz^3+Dz^4-Ez^5+Fz^6-enz.$$

deelen wij nu deze laatste uitdrukking door $1+z$; dan zal men verkrijgen:

$$(1+z)^{-(n+1)}=\frac{1}{(1+z)^{n+1}}=1-(1+A)z+(1+A+B)z^2$$
$$-(1+A+B+C)z^3+(1+A+B+C+D)z^4-enz.$$

stelt men z negatief, dan zullen de onevene magten van z, in de ontwikkelde uitdrukking, slechts van teeken veranderen, en men zal hebben:

$$(1-z)^{-n}=1+Az+Bz^2+Cz^3\ enz.$$
$$(1-z)^{-(n+1)}=1+(1+A)z+(1+A+B)z^2+enz.$$

Het blijkt dan: hoe, eene magt bekend zijnde, alle de volgende kunnen gevonden worden: en het is, door de deeling, ontwijfelbaar bewezen: (en dit bewijs is meer dan eene inductie,) dat $(1-z)^{-1}=1+z+z^2+z^3+z^4+z^5+enz.$ is. Men make dan de volgende

Tafel der Figuurlijke getallen (79).

Exponenten van $(1+z)-p$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	*rang. d. term.*
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	*enz.*
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	*enz.*
3	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	*enz.*
4	1	4	10	20	35	56	84	120	165	220	*enz.*
5	1	5	15	35	70	126	210	330	495	715	*enz.*
6	1	6	21	56	126	252	462	792	1287	2002	*enz.*
7	1	7	28	84	210	462	924	1716	3003	5005	*enz.*
8	1	8	36	120	330	792	1716	3432	6435	11440	*enz.*
9	1	9	45	165	495	1287	3003	6435	12870	24310	*enz.*
10	1	10	55	220	715	2002	5005	11440	24310	48620	*enz.*
enz.	*enz.*	*enz.*	*enz.*	*enz.*	*enz.*	*enz.*	*enz.*	*enz.*	*enz.*	*enz.*	

§. 502. De horizontale rijen van deze tafel bevatten de coefficienten van de termen der negatieve magten van $1 + z$, welker exponenten aan den voorsten ingang, ter linkerhand, staan: de getallen aan den bovensten ingang geven de rangen der termen te kennen: om dus den coefficient van den zevenden term der achtste magt van $1 : (1 + z)$ te vinden, zoeke men in de rij 8 den term in de kolom 7: deze is 1716 en de zevende term van $(1 + z)^{-8}$ is gevolgelijk $1716\ z^6$. Dit tafeltje is nu, volgens het zoo straks betoogde, op de volgende wijze, door optellen, gemaakt: om, bij voorbeeld, de rij N° 5, te formeren zegge $1 + 0 = 1$; dit getal stelle men in de eerste kolom: $1 + 4 = 5$; $5 + 10 = 15$; $15 + 20 = 35$: „ *men telle namelijk elken term, die* „ *men verkregen heeft, bij den term van den volgenden rang der* „ *naast voorgaande rij:*" en men zal, op deze wijze, de coefficienten-tafel, tot in het oneindige, kunnen voortzetten.

§. 503. De zamenstelling van deze tafel steunt derhalve op een algemeen beginsel, dat *à priori*, uit de ontwikkeling der negatieve magten, als eene algemeene wet, bewezen is. Nu kan men bewijzen: dat de vergelijking

$$(1+z)^n = 1 + \frac{n}{1} z + \frac{n(n-1)}{1\ .\ 2} z^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\ .\ 2\ .\ 3} z^3 + \textit{enz.}$$

aan het geval van $n = -1$ voldoet; want, indien men $n = -1$ stelt, dan wordt $n = -1$; $n - 1 = -2$; $n - 2 = -3$; $n - 3 = -4$; $n - p = -(1 + p)$: men heeft dan

$n =$

(79) De reden van deze benaming zal naderhand blijken.

$$n = -1;\ \frac{n(n-1)}{1\,.\,2} = \frac{-1 \times -2}{1\,.\,2} = +1;\ \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3} = \frac{-1 \times -2 \times -3}{1\,.\,2\,.\,3} = -1 \textit{ enz.}$$

en, in het algemeen, voor den term p

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ \textit{enz.}\ (n-(p-1))}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\ \textit{enz.}\ .\ .\ p} = \ldots\ldots \frac{-1 \times -2 \times -3 \times \textit{enz.} -p}{1\,.\,2\,.\,3\,.\ \textit{enz.}\ p} = \pm 1$$

de uitdrukking voor $(1+z)^n$ gevonden, welke voor eenen geheelen en positieven exponent voldoet, voldoet dan, wanneer $n = -1$ gesteld wordt, en bevat bijgevolg, in zich de ontwikkeling van $(1+z)^{-1}$. Het is dan zeer waarschijnlijk: dat zij ook aan alle negatieve exponenten voldoen zal. Wanneer men dus $n = -q$ stelt; dan zal $n - 1 = -(q+1)$; $n - 2 = -(q+2)$ enz. worden, en, wanneer nu dit vermoeden gegrond is, dan zal de vergelijking:

$$(1+z)^{-q} = 1 - qz + \frac{q(q+1)}{1\,.\,2} z^2 - \frac{q(q+1)(q+2)}{1\,.\,2\,.\,3} z^3 + \frac{q(q+1)(q+2)(q+3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} z^4 -$$

moeten plaats hebben, welke voldoet, wanneer $q = 1$ genomen wordt. Wanneer nu de rij van de coefficienten dezer uitdrukking voldoet aan de wet, welke, uit de trapswijze ontwikkeling der negatieve magten, door divisie, ontstaat, zie §. 501, dan is zij algemeen, en dan zal men zeker zijn, dat zij, zonder uitzondering, aan alle negatieve magten voldoen, en dat de uitdrukking der positieve magten gevolgelijk ook die van de negatieve zal insluiten.

§. 504. De coefficienten van twee op elkander volgende termen van de magt $-q$, namelijk z^r en z^{r+1}, zijn:

$$\frac{q(q+1)(q+2)\textit{enz.}(q+r-1)}{1\,.\,2\,.\,3\ \ \textit{enz.}\ \ r} z^r \ldots\ldots \frac{q(q+1)\,\textit{enz.}\,(q+r)}{1\,.\,2\ \ \textit{enz.}\,(r+1)} z^{r+1}$$

de twee coefficienten van de termen van dezelfde orde van de volgende magt verkrijgt men, wanneer men voor q schrijft $q+1$; deze zijn dan:

$$\frac{(q+1)(q+2)\textit{enz.}(q+r)}{1\,.\,2\,.\ \textit{enz.}\ \ r} z^r \ldots\ldots \frac{(q+1)(q+2)\textit{enz.}(q+r+1)}{1\,.\,2\,.\ \textit{enz.}\ (r+1)} z^{r+1}$$

Indien nu de vermoedde reeks, voor alle waarden van q, waarheid is; *dan zal de coefficient van z^r in de magt $-(q+1)$ plus de coef-*

fi-

ficient van z^{r+1} *in de magt* $-q$ *gelijk zijn aan den coefficient van den term* z^{r+1} *in de magt* $-(q+1)$. Nu is

$$\frac{(q+1)(q+2)\text{ enz. }(q+r)}{1\ .\ 2\ .\ \text{enz. }r}+\frac{q(q+1)(q+2)\text{ enz. }(q+r)}{1\ .\ 2\ .\ \text{enz. }r(r+1)}=\ldots\cdot$$

$$\frac{[r+1]\times[(q+1)(q+2)\text{enz.}(q+r)]+[q]\times[(q+1)(q+2)\text{enz.}(q+r)]}{1\ .\ 2\ .\ 3\text{ enz. }\ldots\ r(r+1)}$$

$$=\frac{(q+1)(q+2)\text{ enz. }(q+r+1)}{1\ .\ 2\ \text{ enz. }(r+1)}$$

Het blijkt derhalve: dat, indedaad, deze wet, voor de onderstelde uitdrukking, algemeen is, en, onafhankelijk van de bijzondere waarden van q en r, voldoet, dat is voor alle de magten q en alle de termen r dezer magten. Daar het dan bewezen is: dat

$$(1+z)^{-q}=1-\frac{q}{1}z+\frac{q(q+1)}{1\ .\ 2}z^2+\frac{q(q+1)(q+2)}{1\ .\ 2\ .\ 3}z^3+\text{enz.}$$

voor $q=1$ voldoet, zal deze uitdrukking ook aan alle volgende waarden van q moeten voldoen: en daar men dezelve verkrijgt, door, in $(1+z)^n=1+nz+$ *enz.* de letter $n=-q$ te stellen, is bewezen: dat het Binomium van NEWTON voor geheele negatieve magten geldt.

III. GEVAL. *Wanneer n een gebroken positief getal is.*

§. 505. De uitdrukking $(1+z)^{\frac{p}{q}}$ beteekent eene grootheid, welke ontstaat, wanneer men de uitdrukking $1+z$ tot de p^{de} magt verheft, en uit deze magt, of uit $1+pz+\frac{p(p-1)}{1\ .\ 2}z^2+$ *enz.* den q^{den} magts-wortel trekt. Voor zoo verre men nu de worteltrekkingen, uit de XXXVI en XXXVII Lessen I. C. heeft leeren kennen, weet men: dat den q^{den} magts-wortel uit $1+pz+\frac{p.(p-1)}{1\ .\ 2}z^2$ $+$ *enz.* van den vorm $1+Az+Bz^2+$ *enz.* zijn moet, en dat de coefficienten A, B, C, afhangen, in de eerste plaats, van de coefficienten van de uitdrukking $1+pz+\frac{p(p-1)}{1\ .\ 2}z^2+$ *enz.* en van den exponent q; dat is van p en q beide (80), zonder dat 'er, in het algeme-

(80) Volgens de regels, in de XXXVI en XXXVII Lessen voorgeschreven, kan men de tweede, derde en volgende magts-wortelen uit uitdrukkingen van den vorm $1+z$ en $1+Az+Bz^2+$ enz. trekken: wij hebben daarvan geene bijzondere voorbeelden willen geven. Elk leermeester, desnoodig oordeelende, zal dezelve ligtelijk kunnen opgeven. Voor het overige zijn ook deze bewerkingen geheel buiten gebruik geraakt.

gemeen, andere dan deze twee letters in derzelver zamenstelling kunnen voorkomen. Nu merken wij aan: dat, welke ook de gedaante of de vorm van de coefficienten A, B, C, enz. zijn moge, zij aan alle waarden van p en q moeten voldoen, en dat bijgevolg, in de eerste plaats, wanneer $q = 1$ gesteld wordt, $(1+z)^{\frac{p}{q}} = 1 + Az + Bz^2 +$ enz. in $(1+z)^p = 1 + pz + \frac{p(p-1)}{1.2}z^2 +$ *enz.* zal moeten veranderen: dat men, al verder, p als standvastig, en q als veranderlijk; of omgekeerd, p als veranderlijk, en q als standvastig zal kunnen aanmerken, en voorts aan p en q alle zoodanige waarden geven, als men goedvindt, zonder dat, in eenig geval, de substitutie van die waarden in $1 + Az + Bz^2 +$ *enz.* iets anders dan de wezenlijke waarde van $(1+z)^{\frac{p}{q}}$ zal kunnen voortbrengen: immers is deze voorwaarde de grondslag, waarop alle stelkundige redeneringen steunen, en zonder welke het niet mogelijk zou zijn, om A, B, enz. van p en q te doen afhangen. Daar men dan aan p en q alle waarden geven kan, zoo kan men q als standvastig aannemen, en p succesfivelijk gelijk o, q, $2q$, $3q$, $4q$, *enz.* stellen. Zien wij nu: wat 'er in deze gevallen gebeuren zal?

1° Is $p = 0$; dan verandert $(1+z)^{\frac{p}{q}}$ in $(1+z)^0 = 1$. Door deze onderstelling, moet dan A, B, C, enz. gelijk nul worden, en alle de coefficienten moeten gevolgelijk door p deelbaar zijn.

2° Stellen wij $p = q$; dan verandert $(1+z)^{\frac{p}{q}}$ in $1 + z$; gevolgelijk moeten ook, door deze substitutie, de coefficienten B, C, D, E, nul worden, en, gelijk bekend is, door $p - q$ deelbaar zijn.

3° In het algemeen, zal het blijken: dat

$$\begin{array}{rl}
A, B, C, D, E, F, G, H, \textit{enz.} & \text{door } p \\
B, C, D, E, F, G, H, \textit{enz.} & \ldots\; p - q \\
C, D, E, F, G, H, \textit{enz.} & \ldots\; p - 2q \\
D, E, F, G, H, \textit{enz.} & \ldots\; p - 3q \\
E, F, G, H, \textit{enz.} & \ldots\; p - 4q \\
\textit{enz.} & \qquad \textit{enz.}
\end{array}$$

deelbaar zullen moeten zijn. De uitdrukking $1 + Az + Bz^2 +$ enz. zal gevolgelijk den vorm

=

$$1 + pA'z + p(p-q)B'z^2 + p(p-q)(p-2q)C'z^3 + enz.$$
$$= (1+z)^{\frac{p}{q}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (P)$$

moeten verkrijgen, en, wanneer men nu de waarden van A', B', C', vinden kan, dan zal alles bepaald zijn.

§. 506. Om nu de waarden van A', B', C', enz. te verkrijgen, zoo merk ik aan, dat zij alleen van q en geenzins van p kunnen afhangen: de waarheid hiervan zal blijken, wanneer men $q = 1$ ſtelt, als wanneer de vergelijking in $1 + pA'z + p(p-1)B'z^2 + enz. = (1+z)^p$ veranderen, en $1 + pA'z + p(p-1)B'z^2 + enz. = 1 + pz + \frac{p(p-1)}{1\cdot 2}z^2 + enz.$ zal worden, in welk geval $A' = 1$, $B' = \frac{1}{2}$ enz. zal zijn. Indien nu A', B', enz van p afhingen, dan zouden, door de onderſtelling van $q = 1$, de waarden van A', B', C', enz. nog functien van p blijven, en geene ſtandvastige waarden 1, $\frac{1}{2}$ enz. kunnen hebben (81).

Wanneer men, in plaats van p, ſtelt $p+q$; dan zal de laatſte vergelijking in

$$1 + (p+q)A'z + (p+q)pB'z^2 + (p+q)p(p-q)C'z^3 +$$
$$enz. = (1+z)^{\frac{p+q}{q}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (Q)$$

veranderen; en A', B', C', enz. zullen dezelfde waarde als in de voorgaande vergelijking blijven behouden.

Nu is $(1+z)^{\frac{p+q}{q}} = (1+z)^{\frac{p}{q}+1}$. Indien men dan de vergelijking (P) met $1+z$ vermenigvuldigt; dan zal men

$$1 + \left.\begin{matrix} pA' \\ +1 \end{matrix}\right\} z + \left.\begin{matrix} p(p-q)B' \\ +pA' \end{matrix}\right\} z^2 + \left.\begin{matrix} p(p-q)(p-2q)C' \\ p(p-q)B' \end{matrix}\right\} z^3 +$$
$$enz. = (1+z)^{\frac{p+q}{q}}$$

verkrijgen, en het voorſte lid dezer vergelijking zal, term voor term, aan het voorſte lid van de vergelijking (Q) gelijk moeten zijn: men zal dan hebben:

$$pA' + 1 = (p+q)A'; \text{ gevolgelijk } A' = \frac{1}{q}$$

p

(81) Stellen wij eene functie $3xy + y^2$ van twee veranderlijke grootheden; dan is het immers klaar: dat, wanneer men y gelijk één ſtelt, de uitdrukking $3x + 1$, die men alsdan verkrijgt, in hare waarde, van x zal afhangen.

$p(p-q)B'+pA'=(p+q)pB'$; gevolgelijk $B'=\frac{1}{q}\times\frac{1}{2q}$ en, in het algemeen:

$$p(p-q)(p-2q)(p-3q)\text{ enz. }(p-(n-1)q)N'+p(p-q)\text{ enz. }(p-(n-2)q)M'=(p+q)p(p-q)(p-2q)\text{ enz. }(p-(n-2)q)N'$$

welke vergelijking door $p(p-q)$ *enz.* $(p-(n-2)q)$ deelbaar is: men heeft dan, na de deeling:

$$M'+(p-(n-1)q)N'=(p+q)N'$$

of $M'=nqN'$, dat is $N'=\frac{M'}{nq}$. Waaruit de wet blijkt, volgens welke B' van A'; C' van B'; *enz.* afhangen.

Alles is dan bepaald, en het blijkt: dat

$$(1+z)^{\frac{p}{q}}=1+\frac{p}{q}z+\frac{p(p-q)}{q\cdot 2q}z^2+\frac{p(p-q)(p-2q)}{q\cdot 2q\cdot 3q}z^3\text{ enz.}$$

is.

§. 507. Wanneer men nu in de vergelijking $(1+z)^n=1+nz+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}z^2+$ enz. $n=\frac{p}{q}$ stelt, dan verkrijgt men de zoo even gevondene uitdrukking. †† Het leerstelsel van NEWTON is dan ook op de gebrokene positieve exponenten toepasselijk.

§. 508. Neemt men aan: dat p en q onderling ondeelbare getallen zijn; dan kan geen veelvoud van q gelijk p worden; †† geene der coefficienten van de magten van z, zullen dan gelijk nul kunnen worden; om welke redenen dan ook de ontwikkelde magt uit een oneindig aantal termen bestaan zal.

IV. GEVAL. *Wanneer n een negatief gebroken is.*

§. 509. De uitdrukking $(1+z)^{-\frac{p}{q}}$ gelijk zijnde aan $1:(1+z)^{\frac{p}{q}}$ en $(1+z)^{-p}=1-pz+\frac{p(p+1)}{1\cdot 2}z^2+$ enz. zal men, om de waarde van $(1+z)^{-\frac{p}{q}}$ te verkrijgen, den q^{den} magts-wortel uit deze vergelijking moeten trekken; en deze wortel zal van den vorm $1-Az+Bz^2$ *enz.* moeten zijn. Omdat nu, wanneer $(1+z)^{-p}=1-nz+$ *enz.* tot de magt r verheven wordt, $(1+z)^{-pr}=1-prz+\frac{pr(pr+1)}{1\cdot 2}z^2-$ *enz.* zal moeten zijn, zoo zal omgekeerd, wanneer men den q^{den} magts-wortel uit dezelfde uitdrukking trekt,

$$(1+z)^{-\frac{p}{q}}$$

$$(1+z)^{-\frac{p}{q}} = 1 - \frac{p}{q}z + \frac{\frac{p}{q}\times\left(\frac{p}{q}+1\right)}{1\,.\,2}z^2 + \ldots \frac{\frac{p}{q}\times\left(\frac{p}{q}+1\right)\times\left(\frac{p}{q}+2\right)}{1\,.\,2\,.\,3}z^3 + enz.$$

moeten zijn, welke, na de coefficienten behoorlijk herleid te hebben, in

$$(1+z)^{-\frac{p}{q}} = 1 - \frac{p}{q}z + \frac{p(p+q)}{q\,.\,2q}z^2 - \frac{p(p+q)(p+2q)}{q\,.\,2q\,.\,3q}z^3 + enz.$$

veranderen zal (82).

§. 510. Stelt men in de vergelijking $(1+z)^n = 1 + nz + enz.$ $n = -\frac{p}{q}$, dan zal men dezelfde uitdrukking verkrijgen. †† *Het blijkt dan: dat het binomium van* NEWTON, *voor alle exponenten algemeen is;* dat wil zeggen: †† *dat men, in* $(1+z)^n = 1 + nz + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}z^2 + enz.$, *voor den exponent n alle geheele gebrokene en positieve en negatieve getallen nemen kan.*

§. 511. Men stelle nu in plaats van z hare waarde $\frac{x}{y}$, en vermenigvuldige de komende uitdrukking met x^n, dan zal men voor de vier gevallen, de uitdrukkingen verkrijgen, welke, met eenige anderen, tot des Lezers gebruik, op Tabelle N° IV. geplaatst zijn.

ZEVEN- EN- VIJFTIGSTE LES.

Over de bijzondere eigenschappen der Binomial-coefficienten.

§. 512. * De coefficienten, waarmede de termen van de ontwikkelde magt van eenige tweeledige uitdrukking zijn aangedaan, noemt men Binomial-coefficienten. * De Duitsche Wiskundigen drukken bij verkorting de Binomial coefficienten aldus uit: ${}^n\mathfrak{A} = n$; ${}^n\mathfrak{B} = \frac{n\,.\,(n-1)}{1\,.\,2}$ enz., en de rang van de

(82) Men kan nogtans dit geval op dezelfde wijze als het tweede betoogen: wij hebben hier deze verandering van bewijstrant aangenomen, om den Lezer te doen zien: dat men, op meer dan eene wijze, tot het betoog komen kan. Wij moeten doen opmerken, dat echter dit bewijs zijn voornaamste klem in de volgende Les verkrijgen zal.

de letter beteekent de hoeveelfte coefficient in rang. Deze wijze van uitdrukken is min of meer onvolkomen: want, hoe zal men, daar 'er flechts 24 letters zijn, den 100^{en} coefficient uitdrukken? Wij zullen derhalve die coefficienten door den exponent zelve, die wij tusfchen twee haakjes zullen ftellen, aanduiden, en boven denzelven een getal ftellen, welke den rang of hoeveelften coefficient uitdrukt. Aldus zal

$$\overset{1}{(n)}=n;\ \overset{2}{(n)}=\frac{n(n-1)}{1\,.\,2};\ \overset{3}{(n)}=\frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3},\ enz.$$

zijn: men kan ook voor den coefficient van den eerften term ftellen: $\overset{0}{(n)}$; $\overset{0}{(n)}$ is dan $=1$. In het algemeen, is:

$$\overset{p}{(n)}=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ enz.\ (n-(p-1))}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\ enz.\ p}$$

$$\overset{1}{(-n)}=-n;\ \overset{2}{(-n)}=\frac{n(n+1)}{1\,.\,2};\ \overset{3}{(-n)}=-\frac{n(n+1)(n+2)}{1\,.\,2\,.\,3};\ enz.$$

$$\overset{p}{\left(\frac{n}{m}\right)}=\frac{n(n-m)(n-2m)(n-3m)\ enz.\ (n-(p-1)m)}{m\,.\,2n\,.\,3n\,.\,4n\,.\ enz.\ .\ pn}.$$

§. 513. Laten, in de algemeene reeks $(1+z)^n=1+Az+Bz^2+$ *enz.* drie op elkander volgende termen $Pz^r+Qz^{r+1}+Rz^{r+2}$ genomen worden, wanneer men dan beide leden dezer vergelijking met $1+z$ vermenigvuldigt, dan verkrijgt men:

$$(1+z)^{n+1}=1+(1+A)z+(A+B)z^2+(B+C)z^3+enz.$$
$$(P+Q)z^{r+1}+(Q+R)z^{r+2}+enz.$$

Nu kan men, volgens §. 512, ftellen:

$$(1+z)^n=1+\overset{1}{(n)}z+\overset{2}{(n)}z^2+enz.+\overset{r}{(n)}z^r+\overset{r+1}{(n)}z^{r+1}+enz.$$

$$(1+z)^{n+1}=1+\overset{1}{(n+1)}z+enz.+\overset{r}{(n+1)}z^r+\overset{r+1}{(n+1)}z^{r+1}+enz.$$

Vergelijkt men deze twee uitdrukkingen met de voorgaande, dan zal men vinden: dat, in het algemeen,

$$\overset{r+1}{(n+1)}=\overset{r}{(n)}+\overset{r+1}{(n)}$$

zal zijn: dat wil zeggen: †† *de coefficient van den $(r+1)^{en}$ term van zekere magt is gelijk aan den coefficient van den $(r+1)^{en}$ term der naastvoorgaande magt, opgeteld met zijn ommiddelijk voorgaanden van dezelfde magt.* Het blijkt hieruit: hoe men de binomial-coefficienten der magten, welke met de éénheid opklimmen, door eenvoudig optellen, vinden kan.

§. 514. Uit de laatst voorgaande vergelijking volgt:

$$\overset{r}{(n)} = \overset{r+1}{(n+1)} - \overset{r+1}{(n)}$$

waaruit blijkt: hoe de afdalende magten, door ſubtractie, kunnen gevonden worden. †† Deze formulen gelden ook voor de negatieve en gebrokene magten: maar men moet alsdan de teekens in acht nemen.

§. 515. †† Wanneer men, in de vergelijking $\overset{r+1}{(n+1)} = \overset{r}{(n)} + \overset{r+1}{(n)}$, in plaats van n, ſchrijft $n-1$; dan zal men $\overset{r+1}{(n)} = \overset{r}{(n-1)} + \overset{r+1}{(n-1)}$ verkrijgen, en, deze waarde van $\overset{r+1}{(n)}$ in de eerſte vergelijking ſubſtituerende, zal $\overset{r+1}{(n+1)} = \overset{r}{(n)} + \overset{r}{(n-1)} + \overset{r+1}{(n-1)}$ worden. Op gelijke wijze voortgaande, zal men vinden:

$$\overset{r+1}{(n+1)} = \overset{r}{(n)} + \overset{r}{(n-1)} + \overset{r}{(n-2)} + \overset{r}{(n-3)} + \overset{r}{(n-4)} + \text{enz.}$$
$$+ \overset{r}{(n-p)} + \overset{r+1}{(n-p)}$$

†† Deze vergelijking geldt voor alle geheele en gebrokene waarden van n: en beſtaat, indien n een geheel getal is, uit een bepaald aantal termen.

§. 516. †† Omdat $\overset{r}{(n)} = \dfrac{n\,(n-1)\ \text{enz.}\ (n-(r-1))}{1\ .\ 2\ .\ \text{enz.}\ \ r}$ en $\overset{r+1}{(n)} = \dfrac{n\,(n-1)\ \text{enz.}\ (n-r)}{1\ .\ 2\ .\ \text{enz.}\,(r+1)}$ is, zal, aangezien, de tweede door de eerſte vergelijking gedeeld zijnde, $\overset{r+1}{(n)} : \overset{r}{(n)} = (n-r) : (r+1)$ wordt, ook noodzakelijk

$$\overset{r+1}{(n)} = \frac{n-r}{r+1} \times \overset{r}{(n)}\ \ldots\ \text{en}\ \ldots\ \overset{r}{(n)} = \frac{r+1}{n-r} \times \overset{r+1}{(n)}$$

worden. †† Zulks geldt voor alle waarden van n. Het blijkt hieruit: hoe elke coefficient van zijnen naast voorgaanden of naast volgenden afhangt.

§. 517. Wanneer, in de vergelijking $\overset{r+1}{(n)} = \dfrac{n-r}{r+1} \times \overset{r}{(n)}$, genomen wordt $n = r$; dan is $\overset{r+1}{(n)} = 0$: ſtellen wij, in diezelfde vergelijking, $r+1 = n$, dan wordt $\overset{n}{(n)} = \dfrac{1}{n}\overset{n-1}{(n)}$; nu is, indien n een geheel getal is, $\overset{n}{(n)} = 1$; derhalve wordt $\overset{n-1}{(n)} = n = \overset{1}{(n)}$. Op dezelfde wijze zal

zal, in het algemeen, blijken: dat $\overset{n-2}{(n)} = \overset{2}{(n)}$ en $\overset{n-p}{(n)} = \overset{p}{(n)}$ zal zijn.
†† *Voor de geheele en positieve magten, klimmen de binomial-coefficienten eerst op, en dalen daarna, in dezelfde orde en waarde, af.*

§. 518. †† Wanneer men, in de vergelijking $(1+z)^n = 1 + \overset{1}{(n)}z + \overset{2}{(n)}z^2 + enz. + \overset{n}{(n)}z^n$, de grootheid z gelijk één stelt; dan verkrijgt men:

$$(1+1)^n = 2^n = 1 + \overset{1}{(n)} + \overset{2}{(n)} + \overset{3}{(n)} + \overset{4}{(n)} + enz. + \overset{n}{(n)}$$

Zulks geldt voor alle waarden van n. Is n nogtans een geheel getal, dan bestaat het tweede lid der vergelijking uit een bepaald aantal termen.

§. 519. Maakt men, in de vergelijking $(1-z)^n = 1 - \overset{1}{(n)}z + \overset{2}{(n)}z^2 - enz.$, de waarde van z gelijk 1; dan zal men vinden:

$$(1-1)^n = 0^n = 1 - \overset{1}{(n)} + \overset{2}{(n)} - \overset{3}{(n)} + \overset{4}{(n)} - \overset{5}{(n)} + enz. \pm \overset{n}{(n)}$$

§. 520. En deze vergelijking met die van §. 518. optellende, zal men, nadat de som door twee gedeeld is, verkrijgen:

$$2^{n-1} = 1 + \overset{2}{(n)} + \overset{4}{(n)} + \overset{6}{(n)} + \overset{8}{(n)} + \overset{10}{(n)} + enz.$$

Dit is de eigenschap welke wij in het betoog van §. 476. gebruikten.

§. 521. En trekt men dezelfde vergelijking van die van §. 518. af, dan zal men, de rest door twee deelende, verkrijgen:

$$2^{n-1} = \overset{1}{(n)} + \overset{3}{(n)} + \overset{5}{(n)} + \overset{7}{(n)} + \overset{9}{(n)} + \overset{11}{(n)} + enz.$$

§. 522. †† De som van de binomial-coefficienten der onevene termen is dan gelijk aan die der evene termen.

§. 523. †† *Indien men n, als een geheel getal aanneemt; dan zal altijd, voor alle waarden van n, de volgende vergelijking*

$$2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)\,..\,enz.\,..\,(n+3)(n+2)(n+1) = (2n-1)(2n-3)(2n-5)(2n-7)\,enz.\,..\,7.5.3.1 \times (2)^n$$

plaats hebben.

Onderstellen wij voor een oogenblik, dat deze vergelijking waar zij; en vermenigvuldigen wij beide derzelver leden met $2(2n+1)$; dan zal men verkrijgen:

$$(2n+2)(2n+1)2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)\,enz.\,(n+3)(n+2) = (2n+1)(2n-1)(2n-3)(2n-5)\,enz.\,7.5.3.1 \times (2)^{n+1}$$

Is nu de gestelde vergelijking bestaanbaar; dan zal ook deze laatste

 be-

bestaan: nu ontstaat de laatste klaarblijkelijk uit de eerste, wanneer, in de eerste, $n+1$ in plaats van n gesteld wordt. Uit deze tweede zal men derhalve eene derde; uit de derde eene vierde kunnen afleiden; door telkens, in plaats van n, te stellen $n+1$; en alle deze vergelijkingen zullen met de eerste staan of vallen. Nemen wij nu $n=3$; dan wordt de eerste vergelijking $6 \times 5 \times 4 = 5 \times 3 \times 1 \times (2)^3 = 120$; zij is dus in dit geval bestaanbaar, en zal, volgens het bewezene, indien men $n=4, 5, 6$, enz. neemt, dát is, voor alle waarden van n, in het algemeen, bestaanbaar blijven.

§. 524. In de ontwikkeling van $(a+b)^{2n}$ is:

$$\overset{n}{(2n)} = \frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3) \text{ enz. } (n+1)}{1 \;.\; 2 \;.\; 3 \;.\; 4 \;.\; \text{enz. } n}$$

schrijft men nu voor den teller dezer breuk zijne waarde, in de voorgaande § gevonden; dan verkrijgt men:

$$\overset{n}{(2n)} = \frac{1,\, 3,\, 5,\, 7,\, 9,\, 11, \text{ enz. } (2n-1)}{2,\, 4,\, 6,\, 8,\, 10,\, 12, \text{ enz. } 2n} \times 2^{2n}$$

Nu is, volgens het bewezene, in §. 517. $\overset{1}{(2n)} = \overset{2n-1}{(2n)}$; en algemeen, $\overset{r}{(2n)} = \overset{2n-r}{(2n)}$; stellende dan $r = n-1$; dan is $\overset{n-1}{(2n)} = \overset{n+1}{(2n)}$; de term, welke hier tusschen valt, is $\overset{n}{(2n)}$, en deze is klaarblijkelijk de middelste der coefficienten van den exponent of de magt $2n$: †† de zoo even gevondene vergelijking geeft bijgevolg de waarde van den middelsten coefficient eener evene magt. Deze vergelijking zal ons in het vervolg van dienst zijn.

§. 525. †† *Wanneer, in derzelver natuurlijke rangorde, twee reeksen van binomial-coefficienten*

$$1,\ \overset{1}{(p)},\ \overset{2}{(p)},\ \overset{3}{(p)},\ \overset{4}{(p)},\ \overset{5}{(p)}, \text{ enz. } \overset{n-1}{(p)},\ \overset{n}{(p)},\ \overset{n+1}{(p)}, \text{ enz.}$$

$$1,\ \overset{1}{(q)},\ \overset{2}{(q)},\ \overset{3}{(q)},\ \overset{4}{(q)},\ \overset{5}{(q)}, \text{ enz. } \overset{n-1}{(q)},\ \overset{n}{(q)},\ \overset{n+1}{(q)}, \text{ enz.}$$

tot de exponenten of magten p en q behoorende, gegeven zijn, en men den eersten met den eersten, den tweeden met den tweeden, den derden met den derden term, enz. vermenigvuldigt; dan zal de som dezer producten, van het eerste af tot het laatste ingesloten (83); *namelijk*

1 ×

(83) Zijn 1, 3, 3, 1, en 1, 4, 6, 4, 1, de binomial-coefficienten van de derde en vierde magt; dan heeft de eerste reeks eenen coefficient minder dan de tweede; de coefficienten, die op 1, 3, 3, 1, volgen,

zijn

$$1 \times 1 + \overset{1}{(p)} \times \overset{1}{(q)} + \overset{2}{(p)} \times \overset{2}{(q)} + \overset{3}{(p)} \times \overset{3}{(q)} + \text{enz.} + \overset{p}{(p)} \times \overset{p}{(q)} = \overset{p}{(p+q)}$$

zijn; wel verstaande, indien p kleiner dan q is.

Wij hebben, volgens het bewezene in §. 513 en 516, de vier volgende vergelijkingen:

$$1^{\circ}\ \overset{n}{(p)} = \overset{n-1}{(p-1)} + \overset{n}{(p-1)} \qquad 3^{\circ}\ n.\overset{n}{(p)} = (p-n+1) \times \overset{n-1}{(p)}$$

$$2^{\circ}\ \overset{n}{(q)} = \overset{n-1}{(q-1)} + \overset{n}{(q-1)} \qquad 4^{\circ}\ n.\overset{n}{(q)} = (q-n+1) \times \overset{n-1}{(q)}$$

Men vermenigvuldige van deze vergelijkingen de tweede met de derde, en de eerste met de vierde; dan verkrijgt men:

$$n.\overset{n}{(p)} \times \overset{n}{(q)} = (p-n+1).\overset{n-1}{(p)} \times \overset{n-1}{(q-1)} + n.\overset{n}{(p)} \times \overset{n}{(q-1)} \ldots (\alpha)$$

$$n.\overset{n}{(p)} \times \overset{n}{(q)} = (q-n+1).\overset{n-1}{(q)} \times \overset{n-1}{(p-1)} + n.\overset{n}{(q)} \times \overset{n}{(p-1)} \ldots (\beta)$$

Men geve nu, in de vergelijking (α), aan n achtervolgens de waarden 1, 2, 3, 4, enz.; dan zal men verkrijgen:

$$1 \times \overset{1}{(p)} \times \overset{1}{(q)} = \qquad p \times \overset{0}{(p)} \times \overset{0}{(q-1)} + 1.\overset{1}{(p)} \times \overset{1}{(q-1)}$$

$$2 \times \overset{2}{(p)} \times \overset{2}{(q)} = (p-1) \times \overset{1}{(p)} \times \overset{1}{(q-1)} + 2.\overset{2}{(p)} \times \overset{2}{(q-1)}$$

$$3 \times \overset{3}{(p)} \times \overset{3}{(q)} = (p-2) \times \overset{2}{(p)} \times \overset{2}{(q-1)} + 3.\overset{3}{(p)} \times \overset{3}{(q-1)}$$

$$\ldots \text{enz.} \ldots\ldots\ldots\ldots \text{enz.} \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$n \times \overset{n}{(p)} \times \overset{n}{(q)} = (p-(n-1)).\overset{n-1}{(p)} \times \overset{n-1}{(q-1)} + n.\overset{n}{(p)} \times \overset{n}{(q-1)}$$

Laat nu de som van de voorste leden dezer vergelijkingen, van de eerste tot de n^{de} ingesloten, gelijk S gesteld worden; wanneer men dan deze vergelijkingen optelt; dan zal derzelver som aldus worden uitgedrukt:

$$S = p \times [\overset{0}{(p)} \times \overset{0}{(q-1)} + \overset{1}{(p)} \times \overset{1}{(q-1)} + \overset{2}{(p)} \times \overset{2}{(q-1)} + \text{enz.} + \overset{n-1}{(p)} \times \overset{n-1}{(q-1)}] + n.\overset{n}{(p)} \times \overset{n}{(q-1)}$$

Behandelt men de vergelijking (β) op dezelfde wijze, als de vergelijking (α) behandeld is; dan zal men verkrijgen:

$$S = q \times [\overset{0}{(p-1)} \times \overset{0}{(q)} + \overset{1}{(p-1)} \times \overset{1}{(q)} + \overset{2}{(p-1)} \times \overset{2}{(q)} + \text{enz.} + \overset{n-1}{(p-1)} \times \overset{n-1}{(q)}] + n.\overset{n}{(p-1)} \times \overset{n}{(q)}$$

Alle

zijn nul: de producten, die hier dan bedoeld worden, zijn 1×1, 3×4, 3×6, 1×4, 0×1. Het is in dien zin, dat de stelling moet verstaan worden.

Alle de vergelijkingen, welke wij, tot nog toe, in dit betoog, gemaakt hebben, gelden voor alle waarden van p en q. Thans zullen wij echter aannemen: dat p en q geheele getallen zijn, waarvan q het grootſte is; indien wij dan verder $n = p$ ſtellen; dan wordt $\overset{n}{(p)} = 1$, en $\overset{n}{(p-1)} = 0$: indien men dan, de waarden van S, in deze onderſtelling, met elkander vergelijkt, dan zal men vinden:

$$\overset{0}{(p)}\times\overset{0}{(q-1)}+\overset{1}{(p)}\times\overset{1}{(q-1)}+\overset{2}{(p)}\times\overset{2}{(q-1)}+\text{enz.}+\overset{n}{(p)}\times\overset{n}{(q-1)}$$
$$=\frac{q}{p}\times\left\{\overset{0}{(p-1)}\times\overset{0}{(q)}+\overset{1}{(p-1)}\times\overset{1}{(q)}+\text{enz.}+\overset{n-1}{(p-1)}\times\overset{n-1}{(q)}\right\}$$

Het laatſte lid dezer vergelijking bevat éénen term minder dan het voorſte lid; wanneer men dan, in dezelve, $p = p-1$, en $q-1 = q$ ſtelt; dan wordt $p-1 = p-2$ en $q = q+1$, ook zal $p-1 = n-1$ zijn; en men zal verkrijgen:

$$\overset{0}{(p-1)}\times\overset{0}{(q)}+\overset{1}{(p-1)}\times\overset{1}{(q)}+\overset{2}{(p-1)}\times\overset{2}{(q)}+\text{enz.}+\overset{n-1}{(p-1)}$$
$$\overset{n-1}{(q)}=\frac{q+1}{p-1}\times\left\{\overset{0}{(p-2)}\times\overset{0}{(q+1)}+\overset{1}{(p-2)}\times\overset{1}{(q+1)}+\text{enz.}\right.$$
$$\left.+\overset{n-1}{(p-2)}\times\overset{n-1}{(q+1)}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(P)$$

welker achterſte lid, in het achterſte lid der naast voorgaande vergelijking, kan overgebragt worden, wanneer men verkrijgen zal:

$$\overset{0}{(p)}\overset{0}{(q-1)}+\overset{1}{(p)}\overset{1}{(q-1)}+\overset{2}{(p)}\overset{2}{(q-1)}+\text{enz.}+\overset{n}{(p)}\overset{n}{(q-1)}=$$
$$\frac{q\,.\,(q+1)}{p\,.\,(p-1)}\times\left\{\overset{0}{(p-2)}\overset{0}{(q+1)}+\overset{1}{(p-2)}\overset{1}{(q+1)}+\text{enz.}+\right.$$
$$\left.\overset{n-1}{(p-2)}\times\overset{n-1}{(q+1)}\right\}$$

ſtelt men nu verder, in de vesgelijking P, in plaats van $p-1$, $p-2$; en in plaats van $q+1$, $q+2$, en gaat men op deze wijze voort, met de achterſte leden der volgende vergelijkingen, achter elkander, in de achterſte leden der laatst voorgaande overtebrengen; dan zal men ten laatſte, in het algemeen, verkrijgen:

$$\overset{0}{(p)}\times\overset{0}{(q-1)}+\overset{1}{(p)}\times\overset{1}{(q-1)}+\overset{2}{(p)}\times\overset{2}{(q-1)}+\text{enz.}+\overset{n}{(p)}\times$$
$$\overset{n}{(q-1)}=\frac{q.(q+1).(q+2).(q+3).(q+4)\,\text{enz.}\,(q+r-1)}{p.(p-1).(p-2).(p-3).(p-4)\,\text{enz.}\,(p-r+1)}\times$$
$$\left\{\overset{0}{(p-r)}\times\overset{0}{(q+r-1)}+\overset{1}{(p-r)}\times\overset{1}{(q+r-1)}+\text{enz.}+\right.$$
$$\left.\overset{n-1}{(p-r)}\times\overset{n-1}{(q+r-1)}\right\}$$

Wan-

Wanneer men nu $r = p$ stelt; dan wordt $\overset{1}{(p-r)} = 0$, en de tweede factor van het achterste lid der laatste vergelijking, wordt gelijk 1 [illegible] 1; en nu heeft men:

$$\overset{0}{(p)} \times \overset{0}{(q-1)} + \overset{1}{(p)} \times \overset{1}{(q-1)} + \overset{2}{(p)} \times \overset{2}{(q-1)} + \textit{enz.} + \overset{n}{(p)} \times \overset{n}{(q-1)} = \frac{q.(q+1)(q+2)(q+3)(q+4)\,\textit{enz.}\,(q+p-1)}{p.(p-1)(p-2)(p-3)(p-4)\,\textit{enz.} \ldots 1} = \overset{p}{(q+p-1)}.$$ Zie §. 512.

en, wanneer men eindelijk, in deze laatste, q, in plaats van $q-1$, stelt; dan zal men verkrijgen:

$$\overset{0}{(p)} \times \overset{0}{(q)} + \overset{1}{(p)} \times \overset{1}{(q)} + \overset{2}{(p)} \times \overset{2}{(q)} + \textit{enz.} + \overset{p}{(p)} \times \overset{p}{(q)} = \overset{p}{(p+q)}$$

dat is: de som van de producten der overëenkomstige termen van twee reeksen van binomial-coefficienten is gelijk aan den p^{den} binomial-coefficient van de $(p+q)^{de}$ magt.

§. 526. †† Stelt men $p = q$, dan is:

$$(1)^2 + \overset{1}{(p)}{}^2 + \overset{2}{(p)}{}^2 + \overset{3}{(p)}{}^2 + \overset{4}{(p)}{}^2 + \textit{enz.} + \overset{p}{(p)}{}^2 = \overset{p}{(2p)}$$

dat is, vergelijk §. 524.

$$(1)^2 + \overset{1}{(p)}{}^2 + \textit{enz.} + \overset{p}{(p)}{}^2 = \frac{1.3.5.7\ \textit{enz.}\ (2p-1)}{2.4.6.8\ \textit{enz.}\ \ 2p} \times 2^{2p}$$

Deze is de zonderlinge formule, welke LAGRANGE, in de *Mélanges de la Société de Turin*, *Tom. V*, door inductie, gevonden heeft.

§. 527. †† Indien men de twee vergelijkingen

$$(1+z)^p = \overset{0}{(p)} + \overset{1}{(p)}z + \overset{2}{(p)}z^2 + \overset{3}{(p)}z^3 + \textit{enz.} + \overset{n}{(p)}z^n$$

$$(1+z)^q = \overset{0}{(q)} + \overset{1}{(q)}z + \overset{2}{(q)}z^2 + \overset{3}{(q)}z^3 + \textit{enz.} + \overset{n}{(q)}z^n$$

met elkander vermenigvuldigt, dan is het product van den volgenden vorm

$$\begin{aligned}
&\overset{0}{(q)}\overset{0}{(p)} + \overset{0}{(q)}\overset{1}{(p)}z + \overset{0}{(q)}\overset{2}{(p)}z^2 + \overset{0}{(q)}\overset{3}{(p)}z^3 + \overset{0}{(q)}\overset{4}{(p)}z^4 + \textit{enz.} \\
&\quad + \overset{1}{(q)}\overset{0}{(p)}z + \overset{1}{(q)}\overset{1}{(p)}z^2 + \overset{1}{(q)}\overset{2}{(p)}z^3 + \overset{1}{(q)}\overset{3}{(p)}z^4 + \textit{enz.} \\
&\quad + \overset{2}{(q)}\overset{0}{(p)}z^2 + \overset{2}{(q)}\overset{1}{(p)}z^3 + \overset{2}{(q)}\overset{2}{(p)}z^4 + \textit{enz.} \\
&\quad + \overset{3}{(q)}\overset{0}{(p)}z^3 + \overset{3}{(q)}\overset{1}{(p)}z^4 + \textit{enz.} \\
&\quad + \overset{4}{(q)}\overset{0}{(p)}z^4 + \textit{enz.}
\end{aligned}$$

 Men

Men kan, uit dit product, zonder moeite opmaken: dat de coefficient van den term z^n gelijk zal zijn aan de volgende uitdrukking:

$$\overset{0}{(q)}\overset{n}{(p)} + \overset{1}{(q)}\overset{n-1}{(p)} + \overset{2}{(q)}\overset{n-2}{(p)} + \text{enz.} + \overset{n-2}{(q)}\overset{2}{(p)} + \overset{n-1}{(q)}\overset{1}{(p)} + \overset{n}{(q)}\overset{0}{(p)}$$

zal zijn: nu is dit product gelijk $(1+z)^{p+q}$, en de coefficient van de term z^n, in deze magt, is:

$$\frac{(p+q)\,(p+q-1)\,(p+q-2)\ \text{enz.}\ (p+q-n+1)}{1\ .\quad 2\ .\quad 3\ .\quad \text{enz.}\ .\ .\ .\ n}$$

Beproeven wij nu: of het mogelijk zij, de waarde van den coefficient van z^n uit dezelfde beginfelen, welke ons zoo ftraks gediend hebben, te bepalen? kunnen wij dit oogmerk bereiken, dan zal men daarin eene nieuwe bevestiging van de waarheid van het reeds betoogde binomium van NEWTON vinden.

Volgens §. 516. is $m\,.\,\overset{m}{(p)} = (p-m+1)\,.\,\overset{m-1}{(p)}$ en $n\,.\,\overset{n}{(q)} = (q-n+1)\,.\,\overset{n-1}{(q)}$: vermenigvuldigen wij nu de eerfte dezer vergelijkingen met $\overset{n}{(q)}$, en de tweede met $\overset{m}{(p)}$; dan zullen wij voor de fom der producten verkrijgen:

$$(m+n)\,.\,\overset{m}{(p)}\,.\,\overset{n}{(q)} = (p-m+1)\,.\,\overset{m-1}{(p)}\,.\,\overset{n}{(q)} + (q-n+1)\,.\,\overset{n-1}{(q)}\,.\,\overset{m}{(p)}$$

en deze vergelijking is voor alle waarden van p, q, m en n algemeen. Nemen wij, voor m en n, de overëenkomftige waarden, in de twee volgende regels te vinden:

voor $m\,..\,0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \text{enz.}\ n-4,\ n-3,\ n-2,\ n-1,\ n$

voor $n\,..\,n,\ n-1,\ n-2,\ n-3,\ n-4,\ \text{enz.}\ 4,\ 3,\ 2,\ 1,\ 0$

zoodanig, dat, als men $m=0$ ftelt, $n=n$; en als men $m=1$ ftelt, $n=n-1$ genomen worde, enz.; dan zal men de volgende vergelijkingen verkrijgen:

$$n\,.\,\overset{0}{(p)} \times \overset{n}{(q)} = \ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (q-n+1)\,.\,\overset{n-1}{(q)}\,.\,\overset{0}{(p)}$$

$$n\,.\,\overset{1}{(p)} \times \overset{n-1}{(q)} = \quad p\,.\,\overset{0}{(p)} \times \overset{n-1}{(q)} + (q-n+2)\,.\,\overset{n-2}{(q)}\,.\,\overset{1}{(p)}$$

$$n\,.\,\overset{2}{(p)} \times \overset{n-2}{(q)} = (p-1)\,.\,\overset{1}{(p)} \times \overset{n-2}{(q)} + (q-n+3)\,.\,\overset{n-3}{(q)}\,.\,\overset{2}{(p)}$$

$$.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ \text{enz.}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .$$

$$n\,.\,\overset{n}{(p)} \times \overset{0}{(q)} = (p-n+1)\,.\,\overset{n-1}{(p)}\,.\,\overset{0}{(q)}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .$$

Men houde onder het oog, dat $\overset{-1}{(p)} = 0$, en $\overset{-1}{(q)} = 0$ is.

Indien men nu alle deze vergelijkingen optelt, en derzelver fom door n deelt; dan verkrijgt men:

$\overset{0}{(p)}$

$$\overset{0}{(p)}\times\overset{n}{(q)}+\overset{1}{(p)}\times\overset{n-1}{(q)}+\overset{2}{(p)}\times\overset{n-2}{(q)}+\text{enz.}+\overset{n}{(p)}\times\overset{0}{(q)}=\ldots$$
$$\frac{p+q-n+1}{n}\times\left\{\overset{0}{(p)}\times\overset{n-1}{(q)}+\overset{1}{(p)}\times\overset{n-2}{(q)}+\text{enz.}+\overset{n-1}{(p)}\times\overset{0}{(q)}\right\}$$

Men ſtelle nu, in deze laatſte vergelijking, $n-1$, $n-2$, $n-3$, *enz.* in plaats van n; dan zal men, elke volgende vergelijking in de voorgaande ſubſtituerende, in het algemeen, vinden:

$$\overset{0}{(p)}\times\overset{n}{(q)}+\overset{1}{(p)}\times\overset{n-1}{(q)}+\overset{2}{(p)}\times\overset{n-2}{(q)}+\text{enz.}+\overset{n}{(p)}\times\overset{0}{(q)}=\ldots$$
$$\frac{p+q-n+1}{n}\times\frac{p+q-n+2}{n-1}\times\frac{p+q-n+3}{n-2}\times\frac{p+q-n+4}{n-3}\times$$
$$\text{enz.}\frac{p+q-n+r}{n-r+1}\times\left\{\overset{0}{(p)}\times\overset{n-r}{(q)}+\overset{1}{(p)}\times\overset{n-r-1}{(q)}+\text{enz.}+\overset{n-r}{(p)}\times\overset{0}{(q)}\right\}$$

Stelt men verder $n=r$; dan is $\overset{n-r}{(q)}=1$; en $\overset{n-r-1}{(q)}=0$, en men verkrijgt:

$$\overset{0}{(p)}\times\overset{n}{(q)}+\overset{1}{(p)}\times\overset{n-2}{(q)}+\overset{2}{(p)}\times\overset{n-2}{(q)}+\text{enz.}\overset{n}{(p)}\times\overset{0}{(q)}=\ldots$$
$$\frac{p+q-n+1}{n}\cdot\frac{p+q-n+2}{n-1}\cdot\frac{p+q-n+3}{n-2}.\text{enz.}\frac{p+q}{1}=\overset{n}{(p+q)}.$$

§. 528. Deze vergelijking is, uit de bewezene eigenſchappen van de Binomial-coefficienten eener geheele en poſitieve magt, afgeleid. L. Huillier heeft, in zijne *Princip. Calc. Differ. et Integr. Expoſitio Elementaris, pag. V. Intr.* dezelfde ſtelling op eene geheel andere, doch, daar hij onze verkorte teekens niet gebruikte, meer omſlagtige wijze betoogd, en op deze eigenſchap het betoog van het leerſtelſel van Newton, in alle de bijzondere gevallen, geveſtigd.

De Binomial-coefficienten als Figuurlijke getallen overwogen.

§. 529. * Omdat de termen van de reeks der Binomial-coefficienten van de negatieve magt $(1+z)^{-3}$, te weten:

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, *enz.*

elk in het bijzonder, als zoo vele éénheden van punten aangemerkt zijnde, in eene driehoekige figuur kunnen gerangſchikt worden,

```
                                                  o
                                   o             o o
                      o           o o           o o o
          o          o o         o o o         o o o o
o,       o o,       o o o,      o o o o,      o o o o o,    enz.
1         3           6            10             15        enz.
```


noemt

noemt men deze getallen *trigonale* of *driehoekige getallen*. * Het aantal punten in elke zijde van eenen aldus gerangschikten driehoek, noemt men de zijde of den wortel van het driehoekige getal (84).

§. 530.

(84) * Een figuurlijk getal is, in het algemeen, een getal, welks éénheden, als zoo vele punten aangemerkt, in zulk eene regelmatige orde kunnen gerangschikt worden, dat daaruit eene zekere regelmatige meetkunstige figuur ontstaat. Van dien aard zijn alle veelhoekige of polygonaal getallen, en anderen, welke, uit de vereëniging dezer laatsten, kunnen gevormd worden.

De veelhoekige getallen zijn van twee soorten: 1° de *gewone veelhoekige getallen*, en 2°, de *centrale veelhoekige getallen*.

De eersten worden voorgesteld door de som eener rekenkunstige reeks, welker eerste term met de éénheid begint, en met een zeker getal r opklimt. Zij, in kolom A, zulk eene reeks, welker gemeene verschil r, en de n^{de} term $1+(n-1)r$ is. Volgens §. 824, I. C. is de som dezer termen $\frac{1}{2}n\,(1+1+(n-1)r)$. Zij wordt, na behoorlijke herleiding, door

rang der termen	A
1	1
2	$1+r$
3	$1+2r$
4	$1+3r$
5	$1+4r$
enz.	*enz.*
n	$1+(n-1)r$

$$\frac{rn^2-(r-2)n}{2}$$

uitgedrukt. Men stelle nu $p=r+2$, of $r=p-2$; dan wordt $r-2=p-4$, en de gevondene som verandert in

$$1+(1+p-2)+(1+2(p-2))+(1+3(p-2))+\text{enz.}$$

$$(1+(n-1)(p-2))=\frac{(p-2)n^2-(p-4)n}{2}$$

Deze formule bevat nu, in het algemeen, alle de veelhoeksgetallen: de letter p drukt, in dezelve, het aantal der zijden, en n den wortel uit. Stelt men $p=3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$; dan verkrijgt men, voor de drie, vier, vijf, zes, zeven, acht, negen en tienhoekige getallen, ook wel *trigonaal*, *tetragonaal*, *pentagonaal*, *hexagonaal*, *heptagonaal*, *octogonaal*, *enneagonaal*, *decagonaal* getallen genoemd, de volgende algemeene uitdrukkingen:

driehoekige	$\frac{1}{2}(n^2+n)$	*zevenhoekige*	$\frac{1}{2}(5n^2-3n)$
vierhoekige	$\frac{1}{2}(2n^2)$	*achthoekige*	$\frac{1}{2}(6n^2-4n)$
vijfhoekige	$\frac{1}{2}(3n^2-n)$	*negenhoekige*	$\frac{1}{2}(7n^2-5n)$
zeshoekige	$\frac{1}{2}(4n^2-2n)$	*tienhoekiege*	$\frac{1}{2}(8n^2-6n)$

Volgens de algemeene formule, zal men eenig veelhoekig getal, dat zekeren gegeven wortel of zijde heeft, kunnen berekenen. *Men vraagt*, bij voorbeeld, *het twintig hoekig getal, wiens wortel vijf zij?* Hier is $p=20$ en $n=5$: men heeft dus $\frac{(p-2)n^2-(p-4)n}{2}=\frac{18\times25-16\times5}{2}$

$=185$

§. 530. * Stellen wij ons deze punten als kogeltjes voor; indien men dan deze driekoeken van kogeltjes op elkander ſtapelt, verkrijgt men eene figuur, die de gedaante eener pyramide heeft, in hare zijde even

zoo

$= 185 =$ het twintighoekig getal, vijf tot zijde hebbende. Stellen wij het veelhoekig getal, in het algemeen, gelijk a; dan hebben wij:

$$a = \tfrac{1}{2}\,[(p-2)\,n^2 - (p-4)\,n] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$p = \frac{2a + 2n^2 - 4n}{n\,(n-1)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$\text{en } n = \frac{(p-4) + \sqrt{[8a\,(p-2) + (p-4)^2]}}{2\,(p-2)} \quad \ldots \quad (3)$$

Door de eerſte vergelijking, vindt men het veelhoeks getal, uit zijnen naam en zijne zijde. Door de tweede, den naam uit den gegevenen veelhoek en de zijde. Door de derde, den wortel uit den veelhoek en deszelfs naam.

Het zijn alleen de drie en vierhoekige getallen, welke men, in eene eigenlijk gezegde regelmatige figuur, kan rangſchikken. Bij de vijfhoekige en volgende veelhoekige getallen, houdt die regelmatigheid op plaats te hebben. Wij zullen ons niet ophouden met de wijze optegeven, op welke de figuren, in die gevallen, kunnen opgemaakt worden.

De veelhoekige getallen hebben vele eigenſchappen, welke men ligtelijk ontdekken zal. Eene der voornaamſte is: *dat de ſom twee op elkander volgende trigonaal-getallen een volmaakt vierkant is.* Want ſtellen wij de wortels dezer trigonalen n en $n+1$; dan is $\frac{1}{2}\,(n^2+n) + \ldots \frac{1}{2}\,((n+1)^2 + (n+1)) = (n+1)^2$. Onze landgenoot, de Heer DE JONCOURT, heeft eene tafel dezer getallen, met de verklaring van dezelver eigenſchappen, uitgegeven.

De zoogenaamde *polygonaal-centraal* getallen, verdienen, met regt, den naam van veelhoekige. Verbeelden wij ons eenen regelmatigen veelhoek van p zijden, de éénheid tot halve middelijn hebbende: laat, in het middelpunt van dezen veelhoek, één punt, en, op elk der hoekpunten, insgelijks een ander punt geplaatst worden; dan zal men een *centraal p hoekig* getal hebben, hetwelk $1+p$ éénheden bevat: laten nu, om dezen eerſten veelhoek, eene menigte van medemiddelpuntige veelhoeken geconſtrueerd worden, welker halve middellijnen 2, 3, 4, 5, enz. zijn; dan zal men, in den omtrek van den tweeden, $2p$ punten; in dien van den derden $3p$ punten; enz. kunnen plaatſen, en men zal alzoo voortgaande, veelhoeken verkrijgen, welker zijden met één opklimmen, (zie zulks voor den zeshoek in fig. 1.). Deze centrale veelhoeks-getallen en derzelver zijden zijn, volgens deze conſtructie, in dit tafeltje bevat.

zijden	1.	2,	3,	4,	n
veelh.	1,	$1+p$,	$1+3p$,	$1+6p$,	$1+\frac{n\,(n-1)}{2}\times p$

Men heeft dan, voor het centraal-veelhoekig getal, dat wij a zullen noemen, de vergelijkingen

$a =$

zoo vele kogeltjes hebbende, als 'er in de zijde van den grootsten der zamengevoegde driehoeken, welke als de basis der pyramide kan aangemerkt worden, voorkomen: * men noemt daarom de getallen, welke, uit de gedurige optelling der op elkander volgende driehoeks-getallen, van het eerste afterekenen, ontstaan, *pyramidaal-getallen* (85).

§. 531. * Offchoon men nu in de Meetkunst geene figuren voor de eerste en volgende sommen der pyramidaal-getallen aantreft, heeft men nogtans aan dezelve den naam van figuurlijke getallen gegeven; zij zijn van de driehoekige en pyramidale, door de benaming van derzelver orders of geslachten, onderscheiden.

§. 532. * Wij zullen de reeks 1, 1, 1, enz. de eerste in rang noemen; die, welke de r^{de} in rang is, zal dan de binomial-coefficienten van de magt $(1+z)^{-r}$ uitmaken. Volgens §. 503. zullen de termen van de reeks, tot de r^{de} orde behoorende, in hunne natuurlijke rangschikking

$$1,\ r,\ \frac{r(r+1)}{1\ .\ 2},\ \frac{r(r+1)(r+2)}{1\ .\ 2\ .\ 3},\ enz.\ \frac{r(r+1)enz.(r+n-2)}{1\ .\ 2\ .\ enz.\ (n-1)}$$

$$1,\ 2,\ 3,\qquad 4\ \ldots\ enz.\ \ldots\ n^{de}$$

zijn,

$$a = 1 + \frac{n\ (n-1)}{2}\ p \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (1)$$

$$p = \frac{2\ (a-1)}{n\ (n-1)} \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (2)$$

$$n = \tfrac{1}{2} + \sqrt{\left\{\frac{2\ (a-1)}{p} + \frac{1}{4}\right\}} \ \ldots\ldots\ (3)$$

Door de eerste vindt men het centraal polygonaal getal uit den naam en de zijde of den wortel; uit de tweede, de benaming uit het getal en de zijde; uit de derde, den wortel uit het getal en deszelfs benaming.

Vroeger Schrijvers hielden zich veel met deze soort van getallen op, en stelden woorden van twintig en meer lettergrepen zamen, waardoor zij hunne vraagstukken, die veeltijds, na van deze bastaard namen ontkleed te zijn, zonder geest noch smaak waren, onverstaanbaar maakten. Daar de smaak voor dit wiskundig *abracadabra* bij velen nog schijnt te heerschen, zijn wij verpligt, den Leerling aanteraden, zijnen tijd aan deze soort van kwakzalverij en wind geleerdheid niet vruchteloos te verspillen.

(85) In de krijgsmagazijnen, worden dikwijls de kogels, in zulk eene driehoekige pyramide, op één gestapeld. Wanneer men nu slechts telt, hoe vele kogels in eene zijde van de basis liggen, kan men, door de formule $\frac{1}{6}(n)(n+1)(n+2)$, in welke n het getal kogels, in de zijde van de driehoekige basis liggende, beteekent, het aantal kogels, in die pyramide begrepen, berekenen. Laat, bij voorbeeld, $n = 10$ zijn; dan is dit getal gelijk $\frac{1}{6} \times 10 \times 11 \times 12 = 220$ kogels.

zijn, waarbij men in aanmerking nemen moet, dat de $(n+1)^{de}$ term de coefficient van z^n is.

§. 533. * Vindt men goed, de tweede rij, 1, 2, 3, enz. als de eerste in rang te beschouwen; dan wordt de n^{de} term van het figuurlijk getal van den rang p, omdat nu $r = p + 1$ wordt, door

$$\frac{(p+1)(p+2) \text{ enz. } \ldots (p+n-1)}{1 \ . \quad 2 \ . \quad \text{enz. } \ldots . (n-1)}$$

uitgedrukt. Wij zullen ons echter aan de eerste bepaling houden.

§. 534. Drukken wij kortheidshalve den n^{den} term van de reeks der figuurlijke getallen, welke de r^{de} in rang is, door $\daleth^n . r$ uit; dan zal

$$\daleth^n . r = \frac{r(r+1)(r+2) \text{ enz. } (r+n-2)}{1 \ . \ 2 \ . \quad 3 \ . \ \text{enz. } (n-1)} \quad . \ . \ . \quad (\psi)$$

zijn.

§. 535. †† Volgens §. 501 en §. 496. hebben deze twee vergelijkingen plaats

$$\daleth^1 . n + \daleth^2 . n + \daleth^3 . n + \daleth^4 . n + \text{enz.} + \daleth^r . n = \daleth^r . (n+1)$$

$$\text{en} \ . \ . \ . \ \daleth^r . n = \daleth^r . (n-1) + \daleth^{r-1} . n$$

de laatste dezer bevat de wet, volgens welke de reeksen der figuurlijke getallen, door gedurig optellen, gevormd worden.

§. 536. †† *De figuurlijke getallen hebben de eigenschap, dat* $\daleth^n . r = \daleth^r . n$ *is.* Nemen wij, dat $n > r$ zij, en stellen wij gevolgelijk $n = r + p$; dan is:

$$\daleth^n . r = \frac{r(r+1) \text{ enz. } (2r-2)(2r-1) 2r(2r+1) \text{ enz. } (2r+p-2)}{1 \ . \ 2 \ . \ \text{enz. } (r-1) \ . \ r \ . (r+1)\ (r+2) \text{ enz. } (r+p-1)}$$

$$\daleth^r . n = \frac{(r+p)(r+p-1) \ldots \text{enz.} \ldots (2r+p-2)}{1 \ . \quad 2 \ldots \ldots \text{enz.} \ldots . \ r-1}. \text{ Zie §. 532.}$$

deelende nu de eerste vergelijking door de tweede, dan verkrijgt men:

$$\frac{\daleth^n . r}{\daleth^r . n} = \frac{r(r+1)(r+2) \text{ enz.} \ldots (2r+p-2)}{r(r+1)(r+2) \text{ enz.} \ldots (2r+p-2)} = 1$$

dat is, $\daleth^n . r = \daleth^r . n$

§. 537. †† Indien derhalve de figuurlijke getallen, gelijk in §. 501, in rijen onder elkander geplaatst worden; dan zal de horizontale rij, welke de p^{de} in rang is, volmaakt dezelfde zijn, als de verticale kolom van denzelfden rang p.

§. 538. Stellen wij, in de vergelijking (ψ) van §. 534. de waarde van r achtervolgens gelijk 1, 2, 3, 4, enz. en laten wij met deze waarden, voor n, laten overeenstemmen n, $n-1$, $n-2$, enz.: dan zullen wij verkrijgen:

$\daleth^n . 1 =$

$$7^{n}.1 \;= \frac{1.2.3\ldots enz.\,(n-1)}{1.2.3\ldots enz.\,(n-1)} = (\overset{0}{n-1})$$

$$7^{n-1}.2 = \frac{2.3.4\ldots enz.\,(n-1)}{1.2.3\ldots enz.\,(n-2)} = \frac{n-1}{1} = (\overset{1}{n-1})$$

$$7^{n-2}.3 = \frac{3.4.5.6\ enz.\,(n-1)}{1.2.3.4\ enz.\,(n-3)} = \frac{(n-1)(n-2)}{1\ .\ 2} = (\overset{2}{n-1})$$

. . . .

$$7^{n-p}.(p+1) = \frac{(p+1)(p+2)\ enz.\,(n-1)}{1\ .\ 2\ .\quad enz.\,(n-p-1)} = (\overset{p}{n-1})$$

waaruit blijkt: †† dat de getallen, welke, in de tafel van §. 501, in eenige diagonaal-lijn voorkomen, zoo als, bij voorbeeld: 1, 4, 6, 4, 1, van de regterhand van boven, tot benedenwaards, naar de linkerhand, de binomial-coefficienten van eene geheele positieve magt bevatten, welker exponent één minder is, dan de rang van den term, welke, als eerste term van die diagonaal, in de bovenste horizontale rij voorkomt. Wanneer men deze diagonaalswijze rijen op de nevenstaande wijze rangschikt, dan verkrijgt men den arithmetischen driehoek van PASCAL, welke onze beroemde landgenoot, GIRARD, reeds vroeger, onder den naam van *triangle d'extraction*, had bekend gemaakt.

			1			
		1		1		
	1		2		1	
1		3		3		1

ACHT- EN- VIJFTIGSTE LES.

Het Binomium van NEWTON, *wordt onder verschillende vormen voorgesteld. Gebruik van sommigen derzelven in de worteltrekkingen.*

§. 539. Vermits het binomium van NEWTON, volgens §. 504, 506, 507 en 510, voor alle waarden van den exponent algemeen is, zoo volgt hieruit: dat, wanneer men, in $(1+z)^n = 1 + \frac{n}{1}z + \frac{n(n-1)}{1\ .\ 2}z^2 +$ enz., voor n en z bijzondere waarden aanneemt, uit deze oorspronkelijke vergelijking vele andere zullen kunnen afgeleid worden, welke, in zeer vele omstandigheden, van een bijzonder en nuttig gebruik kunnen zijn. Alle deze, ten minste de meest gebruikelijkste, vormen van het binomium, hebben wij, tot des Lezers gebruik, op het tweede gedeelte van de IV Tabelle geplaatst.

Wij

Wij zullen ons vergenoegen om met den vinger aantewijzen; hoe deze formulen, de eene uit de andere, zijn afgeleid.

§. 540. De formule N° 1. voor alle geheele en gebrokene, positieve en negatieve magten, geldende, zoo neme men $n =$ $-p$, $+\frac{p}{q}$ en $-\frac{p}{q}$, dan zal men N° 2, N° 3 en N° 4, de eerste voor eene geheele negatieve, de tweede voor eene gebrokene positieve, en de laatste voor eene gebrokene negatieve magt verkrijgen. De laatste termen van de achterste leden dezer vergelijkingen, stellen den algemeenen term voor, welke, de eerste medegerekend zijnde, de $(r+1)^e$ in rang is. Stelt men z negatief; dan moeten de teekens der termen, in welke de onevene magten van z voorkomen, (de termen z, z^3, z^5, z^{2n+1},) aangedaan worden met een teeken, hetwelk het tegengestelde is van de teekens, welke die termen N° 1, 2, 3 en 4 hebben; en deze omstandigheid moet ook, op dezelfde wijze, van alle de volgende formulen verstaan worden.

§. 541. Stelt men, in de eerste der formulen, $z = \frac{y}{x}$; dan zal, zie §. 492. $(x+y)^n = x^n \times \left(1 + \frac{y}{x}\right)^n$ zijn. Men stelle dan in formule N° 1, in plaats van z, de aangenomene waarde $y : x$, en vermenigvuldige daarna de komende vergelijking met x^n; dan zal men N° 5 verkrijgen.

§. 542. Stelt men, in N° 5, voor n achtervolgens $-p$, $\frac{p}{q}$ en $-\frac{p}{q}$; dan zullen de formulen N° 6, 7 en 8, te voorschijn komen.

§. 543. Stellende, in N° 3 en 4, den teller $p = 1$; dan verkrijgt men, N° 9 en 10, welke wij, daar deze de grondslag van vele anderen uitmaken, met het dubbelde teeken hebben aangedaan.

§. 544. Stellen wij in deze twee laatste $z = b : aq$; dan verkrijgt men: N° 11 en 12.

§. 545. En in N° 11, voor q de getallen 2, 3, 4, 5 en 10 stellende, zal men de formulen 13, 14, 15, 16 en 17, ver-

verkrijgen, welke ons ſtraks dienen zullen, om de wortels uit wortellooze getallen, door benadering, te vinden. Stelt men $q = 6, 7, 8, 9, 11$, enz. dan zal men voor het trekken van de zesde, zevende, enz. magts-wortelen, ſoortgelijke formulen vinden, welke alle in N° 11, algemeenelijk begrepen zijn.

§. 546. Zij A een getal, waaruit den q^{den} magts-wortel moet getrokken worden. Laat dan A met de q^{de} magt van eenig getal c vermenigvuldigd worden; dan zal men $c^q \times A$, voor het produćt verkrijgen, en men zal, door eene ligte beproeving, den naast kleineren q^{den} magts-wortel uit $c^q \times A$ kunnen vinden. Stellen wij nu: $c^q \times A = a^q \pm b$, en laat a den naast kleineren q^{den} magts-wortel uit $c^q \times A$ verbeelden, indien men het bovenſte teeken $+$ neemt, en den naast grooteren voor het teeken $-$. Wanneer men dan uit deze laatſte vergelijking den q^{den} magt trekt, en daarna alles door c deelt; dan zal men de formule N° 18, verkrijgen.

§. 547. Stelt men in deze laatſte $q = 2$ en 3; dan verkrijgt men N° 19 en 20, welke voor de benadering der quadraats- en cubus-wortelen uit wortellooze getallen zeer geſchikt zijn.

§. 548. Wanneer men in de formule N° 11, eerst $b = 1$ ſtelt, en daarna, in die onderſtelling, eerst de waarde van $\sqrt[q]{(a^q + 1)}$, en dan die van $\sqrt[q]{(a^q - 1)}$ neemt, en deze twee vergelijkingen bij elkander optelt en van elkander aftrekt, dan zal men, $a^q = A$ ſtellende, na verſchikking der termen, de formulen 21 en 22 verkrijgen, waardoor men eene tafel van de wortels der natuurlijke getallen zal kunnen berekenen, terwijl de eene formule tot eene verificatie van de andere zal kunnen ſtrekken.

§. 549. Stellen wij in N° 5 voor $\frac{y}{x+y}$ de letter u; dan is $y = \frac{xu}{1-u}$, $x + y = \frac{x}{1-u}$: bijgevolg $(x+y)^n = \ldots$ $x^n(1-u)^{-n} = x^n\left\{1 + nu + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}u^2 + enz.\right\}$: men ſtelle

nu

No IV. A. FORMULEN *voor de* MULTIPLICATIE, DIVISIE, MAGTS-VERHEFFINGEN *en* MAGTS-WORTELTREKKINGEN, *der exponentiale uitdrukkingen.*

[Tegen over bladz. 336.]

MULTIPLICATIE.

1° $a^m \times a^n = a^{m+n}$ 2° $a^{-p} \times a^q = a^{q-p}$

3° $a^{-m} \times a^{-n} = a^{-(m+n)}$ 4° $a^{\frac{p}{q}} \times a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{ps+qr}{qs}}$

5° $a^{-\frac{p}{m}} \times a^{\frac{q}{n}} = a^{\frac{mq-pn}{mn}}$ 6° $a^{-\frac{p}{m}} \times a^{-\frac{q}{n}} = a^{-\frac{pn+qm}{mn}}$

DIVISIE.

1° $a^p : a^{-q} = a^{p+q}$ 2° $a^{-p} : a^{-q} = a^{q-p}$

3° $a^{-p} : a^q = a^{-(p+q)}$ 4° $a^{\frac{p}{m}} : a^{\frac{q}{n}} = a^{\frac{pn-qm}{mn}}$

5° $a^{-\frac{p}{m}} : a^{\frac{q}{n}} = a^{-\frac{pn+qm}{mn}}$ 6° $a^{-\frac{p}{m}} : a^{-\frac{q}{n}} = a^{\frac{qm-pn}{mn}}$

MAGTS-VERHEFFING.

1° $(a^n)^m = a^{mn}$ 2° $(a^{-p})^q = a^{-pq}$

3° $(a^{-p})^{-q} = a^{pq}$ 4° $(a^p)^{-q} = a^{-pq}$

5° $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^q = a^{\frac{mq}{n}}$ 6° $\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{pr}{qs}}$

MAGTS-WORTELTREKKING.

1° $(a^n)^{\frac{1}{p}} = a^{\frac{n}{p}}$ 2° $(a^{-n})^{\frac{1}{p}} = a^{-\frac{n}{p}}$

3° $(a^n)^{-\frac{1}{p}} = a^{-\frac{n}{p}}$ 4° $\left(a^{\frac{1}{p}}\right)^{\frac{1}{q}} = a^{\frac{1}{rq}}$

5° $\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{1}{r}} = a^{\frac{p}{qr}}$ 6° $\left(a^{-\frac{r}{s}}\right)^{\frac{1}{p}} = a^{-\frac{r}{sp}}$

B. *Het* Binomium *van* NEWTON, *benevens de reeksen, welke 'er uit kunnen afgeleid worden.*

(Zie LVIII LES, §. 539, *et seq.*)

1. $(1+z)^n = 1 + \frac{n}{1}z + \frac{n(n-1)}{1.\,2}z^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\,2.\,3}z^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\,2.\,3.\,4}z^4 + \text{enz.} + \frac{n(n-1)(n-2).\,\text{enz.}\ldots(n-r+1)}{1.\,2.\,3.\,\text{enz.}\ldots r}z^r + \text{enz.}$ . . . . Zie §. 497.

2. $(1+z)^{-p} = 1 - \frac{p}{1}z + \frac{p.(p+1)}{1.\,2}z^2 - \frac{p.(p+1).(p+2)}{1.\,2.\,3}z^3 + \frac{p.(p+1).(p+2).(p+3)}{1.\,2.\,3.\,4}z^4 - \text{enz.} \pm \frac{p.(p+1).(p+2).\text{enz.}\ldots(p+r-1)}{1.\,2.\,3.\,\text{enz.}\ldots r}z^r \mp \text{enz.}$ . . . . Zie §. 503.

3. $(1+z)^{\frac{p}{q}} = 1 + \frac{p}{q}z + \frac{p.(p-q)}{q.\,2q}z^2 + \frac{p.(p-q).(p-2q)}{q.\,2q.\,3q}z^3 + \frac{p.(p-q).(p-2q).(p-3q)}{q.\,2q.\,3q.\,4q}z^4 + \text{enz.} + \frac{p.(p-q).(p-2q)\,\text{enz.}\ldots(p-(r-1)q)}{q.\,2q.\,3q.\,\text{enz.}\ldots rq}z^r + \text{enz.}$ . . . . Zie §. 506.

4. $(1+z)^{-\frac{p}{q}} = 1 - \frac{p}{q}z + \frac{p.(p+q)}{q.\,2q}z^2 - \frac{p.(p+q).(p+2q)}{q.\,2q.\,3q}z^3 + \frac{p.(p+q).(p+2q).(p+3q)}{q.\,2q.\,3q.\,4q}z^4 - \text{enz.} \pm \frac{p.(p+q)(p+2q)\,\text{enz.}\ldots(p+(r-1)q)}{q.\,2q.\,3q.\,\text{enz.}\ldots rq}z^r \mp \text{enz.}$ . . . . Zie §. 509.

5. $(x+y)^n = x^n + \frac{n}{1}x^{n-1}y + \frac{n.(n-1)}{1.\,2}x^{n-2}y^2 + \frac{n.(n-1).(n-2)}{1.\,2.\,3}x^{n-3}y^3 + \text{enz.} + \frac{n.(n-1).(n-2)\,\text{enz.}\ldots(n-r+1)}{1.\,2.\,3.\,\text{enz.}\ldots r}x^{n-r}y^r + \text{enz.}$ . . . . Zie §. 541.

6. $(x+y)^{-p} = x^{-p} - \frac{p}{1}x^{-(p+1)}y + \frac{p(p+1)}{1.\,2}x^{-(p+2)}y^2 - \frac{p(p+1)(p+2)}{1.\,2.\,3}x^{-(p+3)}y^3 + \text{enz.} \pm \frac{p(p+1)(p+2).\,\text{enz.}\ldots(p+r-1)}{1.\,2.\,3.\,\text{enz.}\ldots r}x^{-(p+r)}y^r \mp \text{enz.}$ . . . . Zie §. 542.

7. $(x+y)^{\frac{p}{q}} = x^{\frac{p}{q}} + \frac{p}{q}x^{\frac{p-q}{q}}y + \frac{p.(p-q)}{q.\,2q}x^{\frac{p-2q}{q}}y^2 + \frac{p.(p-q).(p-2q)}{q.\,2q.\,3q}x^{\frac{p-3q}{q}}y^3 + \text{enz.} + \frac{p.(p-q).(p-2q).\text{enz.}\ldots(p-(r-1)q)}{q.\,2q.\,3q.\,\text{enz.}\ldots rq}x^{\frac{p-rq}{q}}y^r + \text{enz.}$ . . . . Zie §. 542.

8. $(x+y)^{-\frac{p}{q}} = x^{-\frac{p}{q}} - \frac{p}{q}x^{-\frac{p+q}{q}}y + \frac{p.(p+q)}{q.\,2q}x^{-\frac{p+2q}{q}}y^2 - \frac{p.(p+q).(p+2q)}{q.\,2q.\,3q}x^{-\frac{p+3q}{q}}y^3 + \text{enz.} \pm \frac{p.(p+q).(p+2q).\text{enz.}\ldots(p+(r-1).q)}{q.\,2q.\,3q.\,\text{enz.}\ldots rq}x^{-\frac{p+rq}{q}}y^r \mp \text{enz.}$ . . . . Zie §. 542.

9.* $(1\pm z)^{\frac{1}{q}} = 1 \pm \frac{1}{q}z - \frac{1.(q-1)}{q.\,2q}z^2 \pm \frac{1.(q-1).(2q-1)}{q.\,2q.\,3q}z^3 - \frac{1.(q-1).(2q-1).(3q-1)}{q.\,2q.\,3q.\,4q}z^4 \pm \text{enz.} \pm \frac{1.(q-1).(2q-1)\,\text{enz.}\ldots((r-1)q-1)}{q.\,2q.\,3q.\,\text{enz.}\ldots rq}z^r \mp \text{enz.}$ . . . . Zie §. 543.

10. $(1\pm z)^{-\frac{1}{q}} = 1 \mp \frac{1}{q}z + \frac{1.(q+1)}{q.\,2q}z^2 \mp \frac{1.(q+1).(2q+1)}{q.\,2q.\,3q}z^3 + \frac{1.(q+1).(2q+1).(3q+1)}{q.\,2q.\,3q.\,4q}z^4 \mp \text{enz.} \pm \frac{1.(q+1).(2q+1)\,\text{enz.}\ldots((r-1)q+1)}{q.\,2q.\,3q.\,\text{enz.}\ldots rq}z^r + \text{enz.}$ . . . . Zie §. 543.

* In No 9. is q een geheel getal, grooter dan de éénheid.

NB. *Het vervolg dezer formulen, vindt men op de tegenzijde dezer Tabelle.*

C. *Berekening van den cubus-wortel uit* 2, *volgens de formulen van* §. 558, *pag.* 339.

1° Volgens $\sqrt[3]{2} = \frac{635}{504} \cdot \left\{ 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{253}{256047875} - \text{enz.} \right\}$
Zie *form.* 20.

Hier is $a = 635$; $c = 504$; $b = +253$ en $\frac{b}{a^3} = \frac{253}{256047875}$.

Men herleide, door divisie, $b : a^3$ tot eene tiendeelige breuk, dan verkrijgt men: $b : a^3$, kortheidshalve $= \rho$ stellende.

$\rho = 0,\ 00000\ 09880\ 96464\ 38190\ 51$

Men zoeke nu de magten van ρ, tot zoo lang zij kleiner worden, dan nul gevolgd van twee- en- twintig nullen, om tot op het twee- en- twintigste cijfer zeker te zijn; dan vindt men:

$\rho^2 = 0,\ 00000\ 00000\ 00976\ 33462\ 29$
$\rho^3 = 0,\ 00000\ 00000\ 00000\ 00096\ 47$

(Indien men, tot deze vermenigvuldigingen, de Neperiaansche Staafjes gebruikt; dan zal het werk zeker en spoedig afloopen.)
Nu is de reeks, No 20, in ons geval,

$$\sqrt[3]{2} = \tfrac{635}{504} \times \left\{ 1 + \frac{1}{3}\rho - \frac{1}{9}\rho^2 + \frac{5}{81}\rho^3 - \text{enz.} \right\}$$

Men berekene dan eerst $1 + \frac{1}{3}\rho - \frac{1}{9}\rho^2 + \frac{5}{81}\rho^3 - \text{enz.}$ als volgt:

$1 =$	1,	00000	00000	00000	00000	00
$+\frac{1}{3}\rho =$	.	. . .	3293	65488	12730	17
	1,	00000	03293	65488	12730	17
$-\frac{1}{9}\rho^2 =$	.	. . .	. . .	108	48162	47
	1,	00000	03293	65379	64567	70
$+\frac{5}{81}\rho^3 =$	.	. . .	. . .	. . .	. . . 5	95
	1,	00000	03293	65379	64573	65

11. $(a^q \pm b)^{\frac{1}{q}} = a \times \left\{ 1 \pm \frac{1}{q} \cdot \left[\frac{b}{a^q}\right] - \frac{1.(q-1)}{q.\ 2q} \cdot \left[\frac{b}{a^q}\right]^2 \pm \frac{1.(q-1).(2q-1)}{q.\ 2q.\ 3q} \cdot \left[\frac{b}{a^q}\right]^3 - \frac{1.(q-1).(2q-1).(3q-1)}{q.\ 2q.\ 3q.\ 4q} \cdot \left[\frac{b}{a^q}\right]^4 \pm \frac{1.(q-1).(2q-1).(3q-1).(4q-1)}{q.\ 2q.\ 3q.\ 4q.\ 5q} \cdot \left[\frac{b}{a^q}\right]^5 - \text{enz.} \right\}$ Zie §. 544.

12. $(a^q \pm b)^{-\frac{1}{q}} = a \times \left\{ 1 \mp \frac{1}{q} \cdot \left[\frac{b}{a^q}\right] + \frac{1.(q+1)}{q.\ 2q} \cdot \left[\frac{b}{a^q}\right]^2 \mp \frac{1.(q+1).(2q+1)}{q.\ 2q.\ 3q} \cdot \left[\frac{b}{a^q}\right]^3 + \frac{1.(q+1).(2q+1).(3q+1)}{q.\ 2q.\ 3q.\ 4q} \cdot \left[\frac{b}{a^q}\right]^4 \mp \frac{1.(q+1).(2q+1).(3q+1).(4q+1)}{q.\ 2q.\ 3q.\ 4q.\ 5q} \cdot \left[\frac{b}{a^q}\right]^5 + \text{enz.} \right\}$ Zie §. 544.

13. $\sqrt{(a^2 \pm b)} = a \times \left\{ 1 \pm \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{b}{a^2}\right] - \frac{1}{8} \cdot \left[\frac{b}{a^2}\right]^2 \pm \frac{1}{16} \cdot \left[\frac{b}{a^2}\right]^3 - \frac{5}{128} \cdot \left[\frac{b}{a^2}\right]^4 \pm \frac{7}{256} \cdot \left[\frac{b}{a^2}\right]^5 - \frac{21}{1024} \cdot \left[\frac{b}{a^2}\right]^6 \pm \frac{33}{2048} \cdot \left[\frac{b}{a^2}\right]^7 - \frac{429}{32768} \cdot \left[\frac{b}{a^2}\right]^8 \pm \text{enz.} \right.$

14. $\sqrt[3]{(a^3 \pm b)} = a \times \left\{ 1 \pm \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{b}{a^3}\right] - \frac{1}{9} \cdot \left[\frac{b}{a^3}\right]^2 \pm \frac{5}{81} \cdot \left[\frac{b}{a^3}\right]^3 - \frac{10}{243} \cdot \left[\frac{b}{a^3}\right]^4 \pm \frac{22}{729} \cdot \left[\frac{b}{a^3}\right]^5 - \frac{154}{6561} \cdot \left[\frac{b}{a^3}\right]^6 \pm \frac{374}{19683} \cdot \left[\frac{b}{a^3}\right]^7 - \frac{935}{59049} \cdot \left[\frac{b}{a^3}\right]^8 \pm \text{enz.} \right.$

15. $\sqrt[4]{(a^4 \pm b)} = a \times \left\{ 1 \pm \frac{1}{4} \cdot \left[\frac{b}{a^4}\right] - \frac{3}{32} \cdot \left[\frac{b}{a^4}\right]^2 \pm \frac{7}{128} \cdot \left[\frac{b}{a^4}\right]^3 - \frac{77}{2048} \cdot \left[\frac{b}{a^4}\right]^4 \pm \frac{231}{8192} \cdot \left[\frac{b}{a^4}\right]^5 - \frac{1463}{65536} \cdot \left[\frac{b}{a^4}\right]^6 \pm \frac{4807}{262144} \cdot \left[\frac{b}{a^4}\right]^7 - \frac{129789}{8388608} \cdot \left[\frac{b}{a^4}\right]^8 \pm \text{enz.} \right.$ Zie §. 545.

16. $\sqrt[5]{(a^5 \pm b)} = a \times \left\{ 1 \pm \frac{1}{5} \cdot \left[\frac{b}{a^5}\right] - \frac{2}{25} \cdot \left[\frac{b}{a^5}\right]^2 \pm \frac{6}{125} \cdot \left[\frac{b}{a^5}\right]^3 - \frac{21}{625} \cdot \left[\frac{b}{a^5}\right]^4 \pm \frac{399}{15625} \cdot \left[\frac{b}{a^5}\right]^5 - \frac{1596}{78125} \cdot \left[\frac{b}{a^5}\right]^6 \pm \frac{6612}{390625} \cdot \left[\frac{b}{a^5}\right]^7 - \frac{28101}{1953125} \cdot \left[\frac{b}{a^5}\right]^8 \pm \text{enz.} \right.$

17. $\sqrt[10]{(a^{10} \pm b)} = a \times \left\{ 1 \pm \frac{1}{10} \cdot \left[\frac{b}{a^{10}}\right] - \frac{9}{200} \cdot \left[\frac{b}{a^{10}}\right]^2 \pm \frac{57}{2000} \cdot \left[\frac{b}{a^{10}}\right]^3 - \frac{1653}{80000} \cdot \left[\frac{b}{a^{10}}\right]^4 \pm \frac{64467}{4000000} \cdot \left[\frac{b}{a^{10}}\right]^5 - \frac{1052961}{80000000} \cdot \left[\frac{b}{a^{10}}\right]^6 \pm \text{enz.} \right.$

18. $\sqrt[q]{A} = \frac{a}{c} \times \left\{ 1 \pm \frac{1}{q} \cdot \left[\frac{b}{a^q}\right] - \frac{1.(q-1)}{q.\ 2q} \cdot \left[\frac{b}{a^q}\right]^2 \pm \frac{1.(q-1).(2q-1)}{q.\ 2q.\ 3q} \cdot \left[\frac{b}{a^q}\right]^3 - \frac{1.(q-1).(2q-1).(3q-1)}{q.\ 2q.\ 3q.\ 4q} \cdot \left[\frac{b}{a^q}\right]^4 \pm \frac{1.(q-1).(2q-1).(3q-1).(4q-1)}{q.\ 2q.\ 3q.\ 4q.\ 5q} \cdot \left[\frac{b}{a^q}\right]^5 - \text{enz.} \right\}$ Zijnde $c^q A = a^q \pm b$. Zie §. 546.

19. $\sqrt{A} = \frac{a}{c} \times \left\{ 1 \pm \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{b}{a^2}\right] - \frac{1}{8} \cdot \left[\frac{b}{a^2}\right]^2 \pm \frac{1}{16} \cdot \left[\frac{b}{a^2}\right]^3 - \frac{5}{128} \cdot \left[\frac{b}{a^2}\right]^4 \pm \frac{7}{256} \cdot \left[\frac{b}{a^2}\right]^5 - \frac{21}{1024} \cdot \left[\frac{b}{a^2}\right]^6 \pm \frac{33}{2048} \cdot \left[\frac{b}{a^2}\right]^7 - \text{enz.} \right\}$; zijnde $c^2 A = a^2 \pm b$.

20. $\sqrt[3]{A} = \frac{a}{c} \times \left\{ 1 \pm \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{b}{a^3}\right] - \frac{1}{9} \cdot \left[\frac{b}{a^3}\right]^2 \pm \frac{5}{81} \cdot \left[\frac{b}{a^3}\right]^3 - \frac{10}{243} \cdot \left[\frac{b}{a^3}\right]^4 \pm \frac{22}{729} \cdot \left[\frac{b}{a^3}\right]^5 - \frac{154}{6561} \cdot \left[\frac{b}{a^3}\right]^6 \pm \frac{374}{19683} \cdot \left[\frac{b}{a^3}\right]^7 - \text{enz.} \right\}$; zijnde $c^3 A = a^3 \pm b$. Zie §. 547.

21. $\sqrt[q]{(A+1)} = -\sqrt[q]{(A-1)} + 2\sqrt[q]{(A)} \times \left\{ 1 - \frac{1.(q-1)}{q.\ 2q} \cdot \left[\frac{1}{A}\right]^2 - \frac{1.(q-1).(2q-1).(3q-1)}{q.\ 2q.\ 3q.\ 4q} \cdot \left[\frac{1}{A}\right]^4 - \frac{1.(q-1).(2q-1)\ \text{enz.}\ (5q-1)}{q.\ 2q.\ 3q.\ \text{enz.}\ 6q} \cdot \left[\frac{1}{A}\right]^6 - \frac{1.(q-1)\ \text{enz.}\ (7q-1)}{q.\ 2q.\ \text{enz.}\ 8q} \cdot \left[\frac{1}{A}\right]^8 - \text{enz.} \right\}$

22. $\sqrt[q]{(A+1)} = +\sqrt[q]{(A-1)} + 2\sqrt[q]{(A)} \times \left\{ \frac{1}{q} \cdot \left[\frac{1}{A}\right] + \frac{1.(q-1).(2q-1)}{q.\ 2q.\ 3q} \cdot \left[\frac{1}{A}\right]^3 + \frac{1.(q-1)\ \text{enz.}\ (4q-1)}{q.\ 2q.\ \text{enz.}\ 5q} \cdot \left[\frac{1}{A}\right]^5 + \frac{1.(q-1)\ \text{enz.}\ (6q-1)}{q.\ 2q.\ \text{enz.}\ 7q} \cdot \left[\frac{1}{A}\right]^7 + \frac{1.(q-1)\ \text{enz.}\ (8q-1)}{q.\ 2q.\ \text{enz.}\ 9q} \cdot \left[\frac{1}{A}\right]^9 + \text{enz.} \right\}$ Zie §. 548.

23. $(x+y)^n = x^n \times \left\{ 1 + n \cdot \frac{y}{x+y} + \frac{n.(n+1)}{1.\ 2} \cdot \left[\frac{y}{x+y}\right]^2 + \frac{n.(n+1).(n+2)}{1.\ 2.\ 3} \cdot \left[\frac{y}{x+y}\right]^3 + \text{enz.} \right\}$ Zie 549.

24. $(x+y)^{-q} = x^{-q} \times \left\{ 1 - q \cdot \left[\frac{y}{x+y}\right] + \frac{q.(q-1)}{1.\ 2} \cdot \left[\frac{y}{x+y}\right]^2 - \frac{q.(q-1).(q-2)}{1.\ 2.\ 3} \cdot \left[\frac{y}{x+y}\right]^3 + \text{enz.} \right\}$ Zie §. 550.

25. $\sqrt[q]{(a^q+b)} = a \times \left\{ 1 + \frac{1}{q} \cdot \left[\frac{b}{a^q+b}\right] + \frac{1.(1+q)}{q.\ 2q} \cdot \left[\frac{b}{a^q+b}\right]^2 + \frac{1.(1+q).(1+2q)}{q.\ 2q.\ 3q} \cdot \left[\frac{b}{a^q+b}\right]^3 + \text{enz.} \right\}$

26. $\sqrt[q]{(a^q-b)} = a \times \left\{ 1 - \frac{1}{q} \cdot \left[\frac{b}{a^q-b}\right] + \frac{1.(1+q)}{q.\ 2q} \cdot \left[\frac{b}{a^q-q}\right]^2 - \frac{1.(1+q).(1+2q)}{q.\ 2q.\ 3q} \cdot \left[\frac{b}{a^q-q}\right]^3 + \text{enz.} \right\}$ Zie §. 551.

27. $(a+b\sqrt{-1})^n = a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} b\sqrt{-1} - \frac{n.(n-1)}{1.\ 2} a^{n-2} b^2 - \frac{n \ldots (n-2)}{1 \ldots 3} a^{n-3} b^3 \sqrt{-1} + \frac{n \ldots (n-3)}{1 \ldots 4} a^{n-4} b^4 + \frac{n \ldots (n-4)}{1 \ldots 5} a^{n-5} b^5 \sqrt{-1} - \frac{n \ldots (n-5)}{1 \ldots 6} a^{n-6} b^6 - \text{enz.}$

28. $(a-b\sqrt{-1})^n = a^n - \frac{n}{1} a^{n-1} b\sqrt{-1} - \frac{n.(n-1)}{1.\ 2} a^{n-2} b^2 + \frac{n \ldots (n-2)}{1 \ldots 3} a^{n-3} b^3 \sqrt{-1} + \frac{n \ldots (n-3)}{1 \ldots 4} a^{n-4} b^4 - \frac{n \ldots (n-4)}{1 \ldots 5} a^{n-5} b^5 \sqrt{-1} - \frac{n \ldots (n-5)}{1 \ldots 6} a^{n-6} b^6 + \text{enz.}$ Zie §. 552.

Men vermenigvuldige nu dit verkregene getal met 635, en deele het product door 504, als hier onder, dan is:

1, 00000 03293 65379 64573 65 (635

504) 635, 00020 91470 16075 04267 75

$\sqrt[3]{2} = 1,$ 25992 10498 94873 16476 72

2° Volgens $\sqrt[3]{2} = \frac{63}{50} \times \left\{ 1 - \frac{47}{250047} - \text{enz.} \right\}$.

Hier is $a = 63$; $c = 50$; $b = -47$; stel $\tau = b : a^3$; dan is

$\tau = 0,$ 00018 79646 62643 42303 64
$\tau^2 = 0,$ 00000 00353 30714 40265 58
$\tau^3 = 0,$ 00000 00000 06640 92581 36
$\tau^4 = 0,$ 00000 00000 00001 24825 94
$\tau^5 = 0,$ 00000 00000 00000 00023 46

Nu is de formule N°. 20, in het tegenwoordig geval,

$\sqrt[3]{2} = \frac{63}{50} \times \left\{ 1 - \frac{1}{3}\tau - \frac{1}{9}\tau^2 - \frac{5}{81}\tau^3 - \frac{10}{243}\tau^4 - \frac{22}{729}\tau^5 - \text{enz.} \right\}$

en men heeft

$\frac{1}{3}\tau = 0,$ 00006 26548 87547 80767 88
$\frac{1}{9}\tau^2 = 0,$ 00000 00039 25634 93362 84
$\frac{5}{81}\tau^3 = 0,$ 00000 00000 00409 93369 22
$\frac{10}{243}\tau^4 = 0,$ 00000 00000 00000 05136 87
$\frac{22}{729}\tau^5 = 0,$ 00000 00000 00000 00000 71

opgeteld

0, 00006 26588 13592 72637 52 af
van 1, 00000 00000 00000 00000 00

0, 99993 73411 86407 27362 48 (63

50) 62, 99605 24947 43658 23836 24

$\sqrt[3]{2} = 1,$ 25992 10498 94873 16476 72

hetgeen met de eerste berekening, tot in het twee- en- twintigste cijfer, overeënstemt.

nu, in deze, voor u hare waarde $\frac{y}{x+y}$; dan verkrijgt men de formule N° 23, welke, wanneer n een geheel getal is, uit een oneindig aantal termen bestaat.

§. 550. Stelt, men in deze laatste, $n = -q$, dan verkrijgt men N° 24, welke een bepaald aantal termen heeft.

§. 551. Stellende eindelijk, in N° 23, $x = a^q$, $y = b$ en $n = \frac{1}{q}$; dan verkrijgt men: N° 25: en in deze b negatief stellende, N° 26.

§. 552. Stellende eindelijk in N° 5, $x = a$ en en $y = b\sqrt{-1}$; dan verkrijgt men N° 27, en $y = -b\sqrt{-1}$ stellende N° 28. Deze zullen wij elders gebruiken.

§. 553. De leerling moet alle deze formulen, naar de gegevene aanleiding, zelf berekenen, en zich met dezelve gemeenzaam maken.

§. 554. Wij gaan met stilzwijgen het gebruik voorbij, hetwelk wij in den eersten Cursus §. 744, en, in de XXXVI en XXXVII Lessen, van het Binomium van Newton gemaakt hebben, zoo, om op de geschiktste wijze, eene tweeledige stelkundige uitdrukking tot eenige positieve magt te verheffen, als om de klaarblijkelijkste formulen te ontwikkelen, welke dienen kunnen, om de regelen voor de worteltrekkingen der bijzondere magten te verkrijgen, en zullen ons alleen tot het gebruik der formulen N° 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, enz. 22 en N° 25 en 26 bepalen, om de wortels uit wortellooze getallen te berekenen.

§. 555. Om het gebruik der gegevens en de wijze, waarop zij moeten voorkomen, in dezen, wel te verstaan, zullen wij ons bij de formule N° 11, als alle de volgende in zich begrijpende, bepalen. Deze formule bestaat uit eene onbepaald voortloopende reeks, omdat geene der coefficienten, zoolang q een geheel getal blijft, gelijk nul kan worden. * Men onderscheidt deze soort van reeksen, met betrekking tot hare bruikbaarheid, in twee soorten: in divergerende en convergerende reeksen. * De eerste zijn zoodanig gesteld, dat de volgende termen steeds grooter dan de onmiddelijk voorgaande worden: * in de tweede zijn daarentegen de volgende termen steeds kleiner dan de voorgaande. De eerste kunnen voor het berekenen van de getallen-waarden der grootheden, welke zij uitdrukken, niet gebruikt worden: de twee-

 de

de ſoort kan alleen tot dit oogmerk ſtrekken. Het vereischt dikwijls zeer veel omzigtigheid, om de convergentie eener reeks te beoordeelen, omdat 'er veel gevonden worden, welker eerſte termen ſchijnen te convergeren, en nogtans, verder voortgezet zijnde, ten laatſte divergeren, andere wederom ſchijnen, in derzelver voorſte termen, te divergeren, en worden intusſchen convergent. Men moet dan wel verzekerd zijn: dat, 1° de termen van eenige reeks ſteeds kleiner worden; en 2°, dat de ſom der termen, die men verwaarloost, minder in waarde zal zijn, dan de laatſte term, welke men in de berekening gebruikt heeft. In dit geval bevinden zich nu N° 11, benevens de reekſen, welke uit deze zijn afgeleid, wel te verſtaan, wanneer $aq > b$ is. Deze reekſen zullen altijd zooveel te ſterker convergeren, naarmate $b : aq$ een kleiner breuk is.

§. 556. De formulen N° 11, *enz.* tot 17, kunnen gebruikt worden, wanneer het getal, waaruit men eenigen wortel moet trekken, weinig van eene volkomene magt onderſcheiden is. Bij voorbeeld, den vierkants-wortel uit 50, 65, 82, 101, enz. en anderen. Nemen wij den vierkants-wortel uit 101 en 102; dan zal men $a^2 + b = 101$ of 102 ſtellen: in het eerſte geval, zal $a = 10$ en $b = 1$; in het tweede $a = 10$ en $b = 2$: men heeft dan, wanneer men deze waarden van a en b in de formule N° 13 overbrengt.

$$\sqrt{101} = 10 \times [1 + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{100} - \tfrac{1}{4} A \times \tfrac{1}{100} + \tfrac{3}{6} B \times \tfrac{1}{100} - \tfrac{5}{8} C \times \tfrac{1}{100} + \tfrac{7}{10} D \times \tfrac{1}{100} - \tfrac{9}{12} E \times \tfrac{1}{100} + \tfrac{11}{14} F \times \tfrac{1}{100} - \textit{enz.}]$$

$$\sqrt{102} = 10 \times [1 + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{50} - \tfrac{1}{4} A \times \tfrac{1}{50} + \tfrac{3}{6} B \times \tfrac{1}{50} - \tfrac{5}{8} C \times \tfrac{1}{50} + \tfrac{7}{10} D \times \tfrac{1}{50} - \tfrac{9}{12} E \times \tfrac{1}{50} + \tfrac{11}{14} F \times \tfrac{1}{50} - \textit{enz.}]$$

en neemt men, in de achterſte leden dezer vergelijkingen, de evene termen negatief, dan zal men uitdrukkingen voor $\sqrt{99}$ en $\sqrt{98}$ verkrijgen. In de eerſte reeks, is $A = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{100}$; $B = \frac{1}{4} A \times \frac{1}{100}$, *enz.* Alzoo moet men ook de tweede verſtaan.

§. 557. In geen ander, dan in dit geval, kunnen deze formulen, met een wezenlijk voordeel, gebruikt worden, ten ware men mogt goedvinden, om vooraf den begeerden wortel, tot in de honderdſte of duizendſte deelen, te benaderen, in welk geval, deze reekſen altijd genoegzaam zullen convergeren.

§. 558. Om de wortels uit kleine getallen te vinden, zal men van N° 18, 19 en 20, met voordeel, gebruik kunnen maken. Wij zullen, ten aanzien van het gebruik dezer formulen, het volgende, tot des leerlings-overdenking, ter nederſtellen.

1° Stellen wij in N° 19, het getal $A = 2$; $a = 99$; $c = 70$; dan

dan is $b=1$, en men zal verkrijgen $70^2 \times 2 = 99^2 - 1$

$$\sqrt{2} = \frac{99}{70} \times \left\{ 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9801} - \frac{1}{8} \cdot \left[\frac{1}{9801}\right]^2 - \frac{1}{16} \cdot \left[\frac{1}{9801}\right]^3 - enz. \right\}$$

2° Stellen wij, in N° 19, wederom $A=3$; $c=56$; $a=97$; dan is $b=1$, en $56^2 \times 3 = 97^2 - 1$, en

$$\sqrt{3} = \frac{97}{56} \times \left\{ 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9409} - \frac{1}{8} \cdot \left[\frac{1}{9409}\right]^2 - \frac{1}{16} \cdot \left[\frac{1}{9409}\right]^3 - enz. \right\}$$

3° Stellen wij in N° 20, het getal $A=2$; $a=635$; $c=504$; dan is $b=253$; $504^3 \times 2 = 635^3 + 253$, en men heeft

$$\sqrt[3]{2} = \frac{635}{504} \times \left\{ 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{253}{256047875} - enz. \right\}$$

Men zal, door een weinig nazoeken, voor alle wortelloose getallen aanmerkelijk convergerende uitdrukkingen vinden; ja zelfs meer dan ééne. Stellen wij, bij voorbeeld: $50^3 \times 2 = 63^3 - 47$; dan zal ook

$$\sqrt[3]{2} = \frac{63}{50} \times \left\{ 1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{47}{250047} - enz. \right\}$$

zijn, welke tot eene bevestiging der voorgaande ſtrekken kan. Men zie, over de wijze, op welke deze uitdrukkingen berekend worden, de uitſlaande tabelle. *Littera* C.

§. 559. De formulen, N° 21 en 22, kunnen dienen om eene tafel van de quadraat en cubus-wortelen der naturlijke getallen te berekenen; zij onderſtellen dat de wortels van twee op elkander volgende getallen, $A-1$ en A, bekend zijn, en zij loopen, zoodra A grooter dan 100 wordt, ſterk zamen.

§. 560. De formulen, N° 25 en 26, hebben wij gebruikt, om te vinden, dat

$$(10)^{\frac{1}{10}} = 1,25892\ 54117\ 94167\ 21042$$

is. De Lezer zal, bij het narekenen van dit voorbeeld, gewaar worden, waarom wij liever deze dan eene andere formule gebruikt hebben: ondertusſchen is het noodig; dat men vooraf eenige cijfers, bij voorbeeld, 1,2589 zoeke, (en deze kunnen, zie §. 894, I. C., altijd door de gewone Logarithmen-tafel gevonden worden,) waarna men $a=1,2589$ ſtelt; de letter b zal alsdan eene kleine breuk worden, en een klein aantal termen der reeks zal voldoende zijn, om den gevraagden wortel te vinden.

§. 561. Het zoo even verklaarde, bevat ſlechts de minst nuttige toepasſing van het Binomium van Newton. Het is bijzonder nuttig in vele andere herleidingen, welke, zonder deszelfs hulp, niet zouden kunnen plaats hebben. Wij geven de volgende voorbeelden tot 's Lezers oefening.

1. VOORBEELD. *Gegeven zijnde* $Cof.\, z = \sqrt{(1 - Sin^2.z)}$ *de Cosinus z in eene reeks, welke de evene magten van Sin. z inhoudt, te ontwikkelen?*

Vergelijkende deze uitdrukking met N° 9, dan is $n = \frac{1}{2}$, en $Sin^2.z = z$, en men zal verkrijgen:

$$Cof.\, z = 1 - \tfrac{1}{2} Sin^2.z - \tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{4}.Sin^4.z - \tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{4}.\tfrac{3}{6}.Sin^6.z - enz.$$

2. VOORBEELD. *Met weet: dat* $Tang\, z = Sin.z \times (1 - Sin^2.z)^{-\frac{1}{2}}$ *is: men begeert Tang. z in eene reeks van Sin. z uittedrukken?*

$$Tang\, z = Sin.z + \tfrac{1}{2} Sin^3.z + \tfrac{1}{2}.\tfrac{3}{4} Sin^5.z + \tfrac{1}{2}.\tfrac{3}{4}.\tfrac{5}{6} Sin^7.z + enz.$$

3. VOORBEELD. *Het gebroken* $\dfrac{ax}{\sqrt[3]{(1-bx^2)^2}}$ *in eene oneindig voortloopende reeks te ontwikkelen?*

In plaats van dit gebroken, kan men stellen: $ax(1 - bx^2)^{-\frac{2}{3}}$, men ontwikkele dan $(1 - bx^2)^{-\frac{2}{3}}$, en vermenigvuldige de uitkomst met ax; dan zal men verkrijgen:

$$\sqrt[3]{\frac{ax}{(1-bx^2)^2}} = ax \times \left\{1 + \tfrac{2}{3} bx^2 + \tfrac{2}{3}.\tfrac{5}{6} b^2 x^4 + \tfrac{2}{3}.\tfrac{5}{6}.\tfrac{8}{9} b^3 x^6 + enz.\right\}$$

§. 562. VRAAGSTUK. *Gegeven zijnde* $x + y = s$, *en* $xy = p$; *dan begeert men eene algemeene uitdrukking voor* $x^n + y^n$, *in eene functie van s en p, te vinden?*

Wij geven hier dit vraagstuk, waarvan wij naderhand een bijzonder gebruik maken zullen, om een voorbeeld van de toepassing van het *Binomium* van NEWTON, in de oplossing van algemeene vraagstukken, te geven. Men verheffe $x + y = s$ tot de magt n; dan verkrijgt men:

$$(x+y)^n = s^n = x^n + n x^{n-1} y + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2} x^{n-2} y^2 + \ldots .$$
$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3} x^{n-3} y^3 + enz. + y^n + n y^{n-1} x + \ldots .$$
$$\frac{n(n-1)}{1\,.\,2} y^{n-2} x^2 + enz.$$

en stellende $xy = p$; dan zal deze vergelijking in

$$s^n = (x^n + y^n) + np(x^{n-2} + y^{n-2}) + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2} p^2 (x^{n-4} + y^{n-4})$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3} p^3 (x^{n-6} + y^{n-6}) + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} p^4$$
$$(x^{n-8} + y^{n-8}) + enz.$$

ver-

veranderen, welker laatste lid noodzakelijk bij eenigen term zal afbreken; kunnen wij nu $x^{n-2}+y^{n-2}$, $x^{n-4}+y^{n-4}$, enz. in functien van s en p vinden; dan zullen deze functien in het voorste lid der vergelijking moeten overgebragt worden, om de waarde van x^n+y^n te vinden.

Stellen wij, om dit oogmerk te bereiken, in de laatste uitdrukking, $n-2$ voor n; dan zal men verkrijgen:

$$s^{n-2}=(x^{n-2}+y^{n-2})+(n-2).p\,(x^{n-4}+y^{n-4})+\dots$$
$$\frac{(n-2)\,(n-3)}{1\;.\;2}p^2\,(x^{n-6}+y^{n-6})+\frac{(n-2)\,(n-3)\,(n-4)}{1\;.\;2\;.\;3}p^3$$
$$(x^{n-8}+y^{n-8})+\textit{enz.}$$

vermenigvuldigen wij deze vergelijking met np, en trekken wij het product van de laatst voorgaande af; dan zal men verkrijgen:

$$s^n-nps^{n-2}=(x^n+y^n)-n.\frac{n-3}{2}p^2\,(x^{n-4}+y^{n-4})+\textit{enz.}$$

Op deze wijze, zal men de sommen van $x^{n-4}+y^{n-4}$, $x^{n-6}+y^{n-6}$, enz. kunnen wegmaken, hetgeen wij aan den Lezer overlaten. Men zal eindelijk vinden:

$$x^n+y^n=s^n-nps^{n-2}+n.\frac{n-3}{2}p^2s^{n-4}-n.\frac{n-4}{2.}.\frac{n-5}{3}p^3s^{n-6}+$$
$$n.\frac{n-5}{2.}.\frac{n-6}{3.}.\frac{n-7}{4}p^4s^{n-8}-n.\frac{n-6}{2.}.\frac{n-7}{3.}.\frac{n-8}{4.}.\frac{n-9}{5}p^5s^{n-10}$$
$$+\textit{enz.}$$

§. 563. Wij zouden nu tot de ontwikkeling van de magten der veelledige uitdrukkingen moeten overgaan: maar, daar wij het leerstelsel der combinatien daarin te hulp zullen nemen, hetwelk ook te gelijk op andere onderwerpen deszelfs toepasfing heeft, zullen wij eerst over de transcendentale uitdrukkingen spreken, welke met elkander en met het leerstelsel der magten ten naauwste verwandschapt zijn.

*

WISKUNDIGE LESSEN.

XV. BOEK.

Over de Logarithmen en Cirkelbogen.

NEGEN- EN- VIJFTIGSTE LES.

Over het gebruik der onbepaalde coefficienten.

§. 564. Alle wiskundige onderzoekingen bedoelen het verkrijgen van zekere uitkomsten, en alle bewerkingen, welke tot dat einde strekken, bestaan in eene reeks van herleidingen, welke de eene uit de andere volgen, en zoodanig moeten ingerigt zijn, dat men, door dezelve, eene voorgestelde uitkomst verkrijgt. In deze herleidingen, ook somtijks ontwikkelingen genoemd, kan men veeltijds, *à priori*, bepalen, welk eenen vorm de herleide uitdrukking verkrijgen moet, en in dit geval, is alles, op de coefficienten van de termen der herleide uitdrukking na, bekend. Men stelle dan voor deze coefficienten onbepaalde letters, en onderzoeke aandachtigtiglijk, of de aard der gegevene uitdrukking, niet zulke omstandigheden medebrengt, welke voldoende zijn, om een genoegzaam aantal vergelijkingen, tusschen de onbepaalde coefficienten, uit dezelve afteleiden? kan men dit oogmerk bereiken; dan zal de oplossing dezer vergelijkingen de gevraagde ontwikkeling doen bekend worden. * Men noemt deze wijze van oplossen: *ontwikkeling eener gegevene uitdrukking door onbepaalde coefficienten.* De volgende voorbeelden, zullen deze handelwijze nader leeren kennen.

§. 565. I. Voorbeeld. *Het gebroken* $\frac{3+2x}{1-3x+2x^2}$ *in eene wederkeerige reeks te herleiden?*

Vol-

Volgens §. 68, kan deze reeks, door de gewone divisie, gevonden worden: door de handelwijze der onbepaalde coefficienten aldus. Men weet, *à priori*, dat de gevraagde reeks van den vorm $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 +$ *enz.* zal moeten zijn: men stelle dan:

$$\frac{3+2x}{1-3x+2x^2} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{enz.}$$

indien nu deze aangenomene uitdrukking het ware quotient zal voorstellen, dan moet hetzelve, met den deeler vermenigvuldigd zijnde, het deeltal voortbrengen. Nu vindt men voor het product:

$$\begin{array}{llllll} A + & Bx + & Cx^2 + & Dx^3 + & Ex^4 + & Fx^5 + \text{enz.} \\ & -3Ax & -3Bx^2 & -3Cx^3 & -3Dx^4 & -3Ex^5 + \text{enz.} \\ & & +2Ax^2 & +2Bx^3 & +2Cx^4 & +2Dx^5 + \text{enz.} \end{array}$$

Dit product moet nu aan het deeltal $3 + 2x$ gelijk zijn; en men heeft derhalve de vergelijkingen:

$$\begin{array}{ll} A = 3 \;\ldots\ldots\; \textit{waaruit } A = 3 & \\ B - 3A = 2 \;\ldots\ldots\ldots\; B = 2 \;\; + 3A = & 2 + 3 \times 3 = 11 \\ C - 3B + 2A = 0 \;\ldots\;\; C = 3B - 2A = & 3 \times 11 - 2 \times 3 = 27 \\ D - 3C + 2B = 0 \;\ldots\;\; D = 3C - 2B = & 3 \times 27 - 2 \times 11 = 59 \\ E - 3D + 2C = 0 \;\ldots\;\; E = 3D - 2C = & 3 \times 59 - 2 \times 27 = 123 \\ \quad \textit{enz.} \qquad\qquad\qquad \textit{enz.} & \end{array}$$

waaruit blijkt: dat elke coefficient gelijk is aan driemaal den voorgaanden, min tweemaal den naast voorgaanden. Men kan dan de gezogte reeks, zonder divisie, of zonder meer vergelijkingen opteloßen, zoo verre men goedvindt, voortzetten. Men heeft derhalve:

$$\frac{3+2x}{1-3x+2x^2} = 3 + 11x + 27x^2 + 59x^3 + 123x^4 + \text{enz.}$$

hetzelfde, dat men, door de gewone divisie, zou gevonden hebben. Men zal de breuken, op de tegenzijde van Tabelle N° II. geplaatst op dezelfde wijze kunnen ontwikkelen.

§. 566. 2. VOORBEELD. *Wetende, dat* $(1+z)^n = 1 + \frac{n}{1}z + \frac{n(n-1)}{1 \,.\, 2}z^2 +$ *enz. is, vraagt men de uitdrukking* $(1+z)^{-n}$ *in eene reeks te ontwikkelen?*

Voor $(1+z)^{-n}$ kan geschreven worden $\frac{1}{(1+z)^n}$; of

$$\frac{1}{1 + nz + \frac{n(n-1)}{1 \,.\, 2}z^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}z^3 + \text{enz.}}$$

 men

men zou nu de begeerde uitdrukking, door dadelijke divisie, kunnen vinden: wanneer men nogtans de handelwijze der onbepaalde coefficienten daartoe wil in het werk stellen, neme men voor de begeerde uitdrukking: $1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + enz.$; dan zal

$$\frac{1}{1 + nz + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} z^2 + enz.} = 1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + enz.$$

zijn: men vermenigvuldige dan het aangenomen quotient met den deeler, dan verkrijgt men voor het product:

$$\begin{array}{l} 1 + Az + Bz^2 + \ldots Cz^3 + \ldots\ldots Dz^4 + \\ \quad + nz + nAz^2 + \ldots nBz^3 + \ldots\ldots nCz^4 + \\ \qquad + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} z^2 + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} Az^3 + \ldots \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} Bz^4 + \\ \qquad\qquad + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} z^3 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} Az^4 + \\ \qquad\qquad\qquad + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} z^4 + \end{array}$$

dit product moet gelijk aan het deeltal, dat is, gelijk aan de éénheid zijn. Het blijkt: dat men, ten einde daaraan te voldoen, de coefficienten van de magten van z in het gevonden product, gelijk nul zal moeten stellen. Men zal dan hebben:

$1^o \ldots A + n = 0$, *derhalve* $A = -n$

$$2^o \quad B + nA + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} = 0, \quad \textit{of } B = -nA - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$$

en stellende voor A de waarde, uit de eerste vergelijking afgeleid.

$$B = -n \times -n - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} = +n^2 - \tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{1}{2}n = \tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{1}{2}n$$

$$\textit{of} \ \ldots \ B = \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}$$

Op deze wijze voortgaande, zal men de waarde van de coefficienten C, D, E, F, *enz.* bevinden dezelfde te zijn, als welke wij in §. 503 en 504. voor de ontwikkeling van $(1+z)^{-n}$, langs eenen geheel anderen weg, gevonden hebben.

Gebruik der onbepaalde coefficienten in het verdeelen der stelkundige breuken.

§. 567. De onbepaalde coefficienten zijn een zeer geschikt hulp-

hulpmiddel, om eene stelkundige breuk in eenvoudiger breuken te verdeelen.

§. 568. 1. VOORBEELD. *Laat, bij voorbeeld, gegeven zijn de breuk:*

$$\frac{32x^3+37x^2-65x-60}{8x^4-6x^3-17x^2+6x+9}$$

welke zoo als uit §. 84. *blijkt, de waarde van de uitdrukking*

$$\frac{3}{2x-3}+\frac{4}{x-1}-\frac{2}{4x+3}-\frac{1}{x+1}$$

voorstelt, en door de optelling dezer eenvoudige breuken verkregen wordt: men begeert deze gegevene breuk wederom te verdeelen, in de breuken, uit welker som zij is voortgekomen?

Men zal, het zij, door den regel van §. 152, het zij, door de leerwijze van BUDAN, den noemer der gegevene breuk in de factoren $2x-3$, $x-1$, $4x+3$ en $x+1$ ontleden, en, voor de gevraagde breuken,

$$\frac{a}{2x-3}+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{4x+3}+\frac{d}{x+1}$$

stellen kunnen, welke, naar de regels van de gewone Additie der stelkundige breuken, opgeteld zijnde, voor de som geven zal:

$$\frac{\begin{array}{l}4ax^3+3ax^2-4ax-3a\\8bx^3+2bx^2-15bx-9b\\2cx^3-3cx^2-2cx+3c\\8dx^3-14dx^2-3dx+9d\end{array}}{8x^4-6x^3-17x^2+6x+9}=\frac{32x^3+37x^2-65x-60}{8x^4-6x^3-17x^2+6x+9}$$

Deze breuken gelijk zijnde, moeten, daar de noemers gelijk zijn, ook de tellers gelijk zijn: men zal dan de coefficienten van dezelfde magten der grootheid x, aan elkander moeten gelijk stellen, en daardoor zal men de volgende vergelijkingen verkrijgen:

$$\begin{array}{r}4a+8b+2c+8d=32\\3a+2b-3c-14d=37\\-4a-15b-2c-3d=-65\\-3a-9b+3c+9d=-60\end{array}$$

welke even zooveel in getal zijn, als 'er onbekende grootheden voorkomen. Lost men dezelve op; dan zal men vinden: $a=3$; $b=4$; $c=-2$ en $d=-1$: men verkrijgt derhalve $\frac{3}{2x-3}$, $\frac{4}{x-1}$, ...

$-\frac{2}{4x+3}$, en $-\frac{1}{x+1}$ voor de breuken, in welke de gegevene breuk kan verdeeld worden.

§. 569. Zoo dikwijls de noemer der gegevene breuk in tweeledige factoren van den vorm $ax+b$ kan ontleed worden, zal men die breuk in breuken van den vorm $\frac{p}{ax+b}$ kunnen verdeelen; mits de vergelijkingen, tusschen de onbepaalde tellers der aangenomene breuken, onderling bestaanbaar, en zooveel in aantal zijn, als het getal der breuken bedraagt, waarin de gegevene breuk verdeeld wordt.

§. 570. Zie hier meer voorbeelden.

1. Voorbeeld. *Het gebroken* $\frac{5x+1}{x^2+2x-15}$ *in eenvoudiger breuken te verdeelen?* Men vindt voor de breuken $\frac{3}{x+5}$ en $\frac{2}{x-3}$.

2. Voorbeeld. *Het gebroken* $\frac{2-4x+x^2}{(1+5x)\times(1-x^2)}$ *te verdeelen?* Men zal vinden, dat deze breuk gelijk is, aan:

$$\frac{71}{24(1+5x)}-\frac{7}{8(1+x)}-\frac{1}{12(1-x)}$$

§. 571. Somtijds heeft de noemer der gegevene breuk ondeelbare tweede-magts factoren. In dit geval moet men, voor eene der zamengestelde breuken, eene breuk aannemen, welke dien ondeelbaren tweeden-magts factor tot noemer heeft, en om aan den teller, welke tot die breuk behoort, de hoogstmogelijke algemeenheid te geven, neemt men voor denzelven eene tweeledige of eerste-magts uitdrukking, met onbepaalde coefficienten, aan.

3. Voorbeeld. *Om de breuk* $\frac{1+3x-2x^2}{(1-x^2)(1+x^2)}$ *in eenvoudiger breuken te verdeelen?*

Men stelle, na den noemer der gegevene breuk in deszelfs factoren ontleed te hebben,

$$\frac{1+3x-2x^2}{(1-x^2)(1+x^2)}=\frac{A}{1+x}+\frac{B}{1-x}+\frac{C+Dx}{1+x^2}$$

dan zal men, na de aangenomene deelen, volgens den regel opgeteld, en den teller van de som met dien der gegevene breuk vergeleken te heb-

hebben; vinden $A = -1$; $B = \frac{1}{2}$; $C = 1\frac{1}{2}$ en $D = 1\frac{1}{2}$: en de gegevene breuk wordt alzoo gelijk aan:

$$-\frac{1}{1+x} + \frac{1}{2(1-x)} + \tfrac{3}{2}\cdot\frac{1+x}{1+x^2}$$

4. VOORBEELD. *Men zal door de toepasfing van hetzelfde beginfel vinden, dat:*

$$\frac{1+x^3}{(1-x)^3(1+x^2)^2} = \tfrac{1}{4}\left\{\frac{4-3x+x^2}{(1-x)^3} + \frac{3x+x^3}{(1+x^2)^2}\right\} \text{ is.}$$

§. 572. †† Een gebroken van den vorm . . . . $\frac{a+bx+cx^2+enz.+px^{n-1}}{(r+sx)^n}$, kan altijd verdeeld worden in breuken, welker tellers bepaalde getallen, en welker noemers uit de afdalende magten van $r+sx$, van de n^{de} tot de eerfte magt ingefloten, beftaan. Want, men zal altijd voor den noemer der gegevene breuk den vorm $a+bx+cx^2+enz.+px^{n-1}$ kunnen aannemen; en, wanneer men de onderftelde breuken optelt, even zoo vele verfchillende vergelijkingen verkrijgen, als 'er onbekende tellers zijn aangenomen. De oplosfing dezer vergelijkingen zal de verdeelde breuken doen bekend worden.

5. VOORBEELD. *De breuk* $\frac{8-7x+3x^2}{(1-x)^3}$ *in eenvoudiger breuken opteloslen?*

Men ftelle voor de eenvoudiger breuken: $\frac{A}{(1-x)^3} + \frac{B}{(1-x)^2} + \frac{C}{1-x}$; dan zal men, na deze aangenomene breuken opgeteld, en derzelver fom met de gegevene breuk vergeleken te hebben, de vergelijkingen $A+B+C=8$; $B+2C=7$ en $C=3$, verkrijgen, waaruit $A=4$; $B=1$ en $C=3$; volgen zal; zoodat

$$\frac{8-7x+3x^2}{(1-x)^3} = \frac{4}{(1-x)^3} + \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{3}{1-x}$$

zal zijn. Men zal de breuken, welke in het voorgaande voorbeeld gevonden zijn, insgelijks nog verdeelen kunnen. Deze wijze om de breuken te verdeelen, heeft in de leer der wederkeerige reekfen, en in de Integraal-Rekening eene uitgeftrekte toepasfing.

Over

Over de omkeering der Reeksen.

§ 573. * Wanneer eene veranderlijke grootheid y van eene andere x zoodanig afhangt, dat zij door de vergelijking

$$y = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + Fx^6 + \textit{enz.}$$

wordt uitgedrukt, in welke de coefficienten A, B, C, D, *enz.* bekende en standvastige waarden hebben; dan is het, zoo als dadelijk blijken zal, altijd mogelijk, om de veranderlijke grootheid x, in eene reeks of functie van y, uittedrukken, zoodanig dat

$$x = ay + by^2 + cy^3 + dy^4 + ey^5 \textit{ enz.}$$

worde, en de bewerking, waardoor men deze uitdrukking verkrijgt, wordt *omkeering der reeksen*, (*reversio serierum*) genoemd. Wij zullen, daar het thans genoeg is, de mogelijkheid der oplossing te doen gevoelen, ons alleenlijk vergenoegen, met de handelwijze van NEWTON, in zijnen laatsten brief aan OLDENBURG voorgedragen, (zie NEWTONI, *Opuscula*, *Tom. I. pag.* 352.) optegeven. Laat, zegt NEWTON, gegeven zijn:

$$z = x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{5}x^5 + \textit{enz.}$$

indien men dan de leden dezer vergelijkingen door multiplicatie tot de tweede, derde en volgende magten verheft, dan zal men, met weinig moeite, vinden:

$$z^2 = x^2 + x^3 + \tfrac{11}{12}x^4 + \tfrac{5}{6}x^5 + \textit{enz.} \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$
$$z^3 = \ldots\ x^3 + \tfrac{3}{2}x^4 + \tfrac{7}{4}x^5 + \textit{enz.} \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$
$$z^4 = \ldots\ldots\ x^4 + 2x^5 + \textit{enz.} \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$
$$z^5 = \ldots\ldots\ldots\ x^5 + \textit{enz.} \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Nu trekke men van de gegevene vergelijking $z = x + \frac{1}{2}x^2 + \textit{enz.}$ de helft van vergelijking (1), dat is $\frac{1}{2}z^2 = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{11}{24}x^4 + \frac{5}{12}x^5 + \textit{enz.}$; dan zal men overhouden:

$$z - \tfrac{1}{2}z^2 = x - \tfrac{1}{6}x^3 - \tfrac{5}{24}x^4 - \tfrac{13}{60}x^5 + \textit{enz.}$$

Hier telle men een zesde van vergelijking (2), namelijk $\frac{1}{6}z^3 = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{7}{24}x^5 + \textit{enz.}$ bij; dan zal men verkrijgen:

$$z - \tfrac{1}{2}z^2 + \tfrac{1}{6}z^3 = x + \tfrac{1}{24}x^4 + \tfrac{3}{40}x^5 + \textit{enz.}$$

van deze som zal men voorts aftrekken, één- vier- en- twintigste van vergelijking (3), namelijk: $\frac{1}{24}z^3 = \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{12}x^5$: men zal dan overhouden:

$$z - \tfrac{1}{2}z^2 + \tfrac{1}{6}z^3 - \tfrac{1}{24}z^4 = x - \tfrac{1}{120}x^5 + \textit{enz.}$$

Bij deze laatste telle men wederom één-honderd- en- twintigste van vergelijking (5), dan zal men hebben:

$$z - \tfrac{1}{2}z^2 + \tfrac{1}{6}z^3 - \tfrac{1}{24}z^4 + \tfrac{1}{120}z^5 = x + \textit{enz.}$$

§. 574.

§. 574. Men ziet, uit deze zeer natuurlijke oplossing, dat men de magten van z door de gewone multiplicatie verder zou hebben moeten voortzetten, om de verdere termen van de waarde x, welke van z^6, z^7, enz. afhangen, te vinden. †† Wanneer de waarde van z, uit een bepaald aantal termen bestond, welke van de magten van x afhingen, zou nogtans x in eene oneindig voortloopende reeks, eene functie van z zijnde, worden ontwikkeld. Dit weinige zij voor het tegenwoordige genoeg, om een denkbeeld van deze leerwijze te geven.

ZESTIGSTE LES.

Over de Logarithmen. (Vervolg van de veertigste Les.)

§. 575. Uit den inhoud van de XL Les, in den eersten Cursus, is genoeg gebleken: dat eenig stelsel van Logarithmen, door de vergelijking $y = a^x$, kan worden voorgesteld, zijnde a standvastig, en x en y veranderlijke getallen. Voor alle waarden, die men x geven kan, verkrijgt y eene overéénkomstige waarde, welke, indien x een geheel getal is, door a tot eene zekere magt te verheffen, en, indien x een gebroken is, of alleen, door eene worteltrekking uit a; of, door eene magt-verheffing van a, en eene worteltrekking uit die magt, verkregen wordt. In alle gevallen is, zie §. 869, I. C., het getal x de logarithmus van het getal y, en omgekeerd x het getal dat tot den logarithmus y behoort. De vergelijkingen

$$a^x = y, \quad en \ x = log.\ y$$

zijn dan slechts twee verschillende wijzen, om dezelfde overéénkomst van getallen uittedrukken: de laatste is echter minder volkomen dan de eerste, omdat daarbij het grondtal van het stelsel van logarithmen, dat men gebruikt, niet wordt uitgedrukt.

§. 576. Wij hebben reeds, in §. 861, I. C., opgemerkt: dat 'er zoo vele stelsels van logarithmen zijn, als men aan het getal a verschillende waarden kan geven: alleenlijk behoudt het grondtal a, in hetzelfde stelsel van logarithmen,

de-

dezelfde ſtandvastige waarde. Men kan nu, met betrekking tot eenig ſtelſel, twee vragen voorſtellen. 1° *In eenig ſtelſel van Logarithmen, de Logarithmus van eenig getal te vinden?* 2° *De Logarithmus van eenig ſtelſel gegeven zijnde, het getal te vinden, hetwelk met dien Logarithmus overëénſtemt?* In de oplosſing van deze twee vragen beſtaat alles, wat men van de Logarithmen, of van de vergelijking $y = a^x$, kan verlangen te weten.

I. *Om de Logarithmus van zeker getal te vinden?*

§. 577. Dit vraagſtuk beſtaat in het vinden van de waarde van x, wanneer in de vergelijking $a^x = y$, de waarden van a en y gegeven zijn. Wij hebben elders (86) eene volledige oplosſing van deze vraag gegeven: thans zullen wij, ten einde te doen zien, dat de oplosſing van dit vraagſtuk uit het Binomium van NEWTON kan afgeleid worden, ons van de oplosſing van LAGRANGE, zie zijne *Théorie des fonctions analytiques, pag.* 20. bedienen.

§. 578. Het is klaar, dat, in plaats van a, kan geſchreven worden $1 + a - 1$, en, in plaats van y, op gelijke wijze kan geſteld worden $1 + y - 1$: de vergelijking $a^x = y$ zal dan onder de gedaante

$$(1 + a - 1)^x = 1 + y - 1$$

kunnen worden voorgeſteld, en indien wij derzelver leden tot eenige magt n verheffen, dan zal men hebben:

$$(1 + a - 1)^{nx} = (1 + y - 1)^n.$$

Houden wij nu onder het oog, dat de drieledige uitdrukking $1 + a - 1$, door $a - 1$ als één lid aantemerken, als eene tweeledige kan worden aangezien, dan zal men volgens het Binomium van NEWTON hebben;

1 +

(86) Zie onze *Handleiding tot de beſchouwende werkdadige Meetkunst*, §. 811. *et ſeq.* Aldaar hebben wij, uit den aard der zake, eenen algemeenen vorm, namelijk $log. (1 + z) = A z + B z^2 + C z^3 + D z^4 +$ *enz.* afgeleid, en op grond, dat de logarithmus van $(1 + z)^2$ gelijk $2 \times log. (1 + z)$ moet zijn, de onbepaalde coefficienten A, B, C, D, *enz.* bepaald. Deze onze handelwijze, welke reeds vroeger, in de Verhandelingen van het Bataasch Genootſchap, voorkomt, heeft met die van L'HUILLIER veel overëénkomst.

$$1+\frac{nx}{1}(a-1)+\frac{nx\,(nx-1)}{1\,.\,2}(a-1)^2+\frac{nx(nx-1)(nx-2)}{1\,.\,2\,.\,3}$$
$$(a-1)^3+enz.=1+\frac{n}{1}(y-1)+\frac{n(n-1)}{1\,.\,2}(y-1)^2+\ldots$$
$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}(y-1)^3+enz.$$

Indien men van elk lid dezer vergelijking de éénheid aftrekt, en de komende vergelijking door n deelt, dan zal men verkrijgen:

$$x\,(a-1)+\frac{x\,(nx-1)}{1\,.\,2}(a-1)^2+\frac{x(nx-1)(nx-2)}{1\,.\,2\,.\,3}(a-1)^3$$
$$+enz.=(y-1)+\frac{n-1}{1}.\tfrac{1}{2}(y-1)^2+\frac{(n-1)(n-2)}{1\,.\,2}.\tfrac{1}{3}(y-1)^3$$
$$+enz.$$

De termen van het voorste lid der vergelijking zijn alle door x deelbaar: men zal de vergelijking dan onder deze gedaante kunnen stellen:

$$x\times\left\{(a-1)+\frac{nx-1}{1}.\tfrac{1}{2}.(a-1)^2+\frac{(nx-1)(nx-2)}{1\,.\,2}.\tfrac{1}{3}.\right.$$
$$\left.(a-1)^3+enz.\right\}=(y-1)+\frac{n-1}{1}.\tfrac{1}{2}.(y-1)^2+\ldots\ldots$$
$$\frac{(n-1)(n-2)}{1\,.\,2}.\tfrac{1}{3}(y-1)^3+enz.$$

De termen, welke de magten van x vermenigvuldigen, zegt LAGRANGE, moeten, daar n eene geheel willekeurige, van x en y onafhankelijke waarde heeft, elkander vernietigen: hoezeer zulks waarheid zij, kan dit beginsel eenen eerstbeginnenden duister voorkomen: onze kundige Landgenoot, BANGMA, slaat eenen gemakkelijker weg in: „ *Omdat n* „ *alle waarden hebben kan,*" zegt hij, „ *kan men $n=0$ stellen:*" zulks doende, verdwijnt n uit de voorgaande vergelijking, en nu wordt $nx-1=-1$; $nx-2=-2$; $nx-3=-3$; insgelijks $n-1=-1$; $n-2=-2$; en nu zal uit deze onderstelling volgen:

$$x\times\left\{(a-1)-\tfrac{1}{2}(a-1)^2+\tfrac{1}{3}(a-1)^3-\tfrac{1}{4}(a-1)^4+enz.\right\}=$$
$$(y-1)-\tfrac{1}{2}(y-1)^2+\tfrac{1}{3}(y-1)^3-\tfrac{1}{4}(y-1)^4+enz.$$

en, wanneer men deze vergelijking, met betrekking tot x oplost, dan zal men hebben:

$$x=\frac{(y-1)-\frac{1}{2}(y-1)^2+\frac{1}{3}(y-1)^3-\frac{1}{4}(y-1)^4+enz.}{(a-1)-\frac{1}{2}(a-1)^2+\frac{1}{3}(a-1)^3-\frac{1}{4}(a-1)^3+enz.}\;.\;(a)$$

en deze vergelijking leert ons: hoe de Logarithmus van een getal van het

het getal, waarvan hij logarithmus is, en van de basis van het stelsel, dat men heeft aangenomen, afhangt.

§. 579. Stelt men in deze gevondene vergelijking (α), de veranderlijke grootheid $y = 1$, dan is $x = Log. 1$, en wij hebben:

$$Log. 1 = \frac{(1-1) - \frac{1}{2}(1-1)^2 + \frac{1}{3}(1-1)^3 - enz.}{(a-1) - \frac{1}{2}(a-1)^2 + \frac{1}{3}(a-1)^3 - enz.} = \frac{0}{1} = 0$$

en stellende voorts $x = a$, dan wordt

$$Log. a = \frac{(a-1) - \frac{1}{2}(a-1)^2 + \frac{1}{3}(a-1)^3 - enz.}{(a-1) - \frac{1}{2}(a-1)^2 + \frac{1}{3}(a-1)^3 - enz.} = 1$$

Hetgeen overëënstemt met §. 862, I. C.

§. 580. De noemer der breuk in de vergelijking (α), is standvastig, want hij hangt alleen van de basis van het stelsel van logarithmen af: hij zal dus, van het eene tot het andere logarithmen-stelsel, eene andere waarde verkrijgen: stellen wij dan

$$M = \frac{1}{(a-1) - \frac{1}{2}(a-1)^2 + \frac{1}{3}(a-1)^3 - \frac{1}{4}(a-1)^4 + enz.}$$

dan verandert de vergelijking (α), in

$$x = M \times \left\{ (y-1) - \tfrac{1}{2}(y-1)^2 + \tfrac{1}{3}(y-1)^3 - enz. \right\} \quad . \; . \; (\beta)$$

* Men noemt het getal *M* de *Modulus* van het logarithmen-stelsel, dat het getal *a* tot basis heeft.

§. 581. Stellen wij nu in de vergelijking (β), in plaats van $y - 1$, de letter z; dan wordt $y = 1 + z$, en daar nu $x = Log. y = . . Log. (1 + z)$ is, zal

$$Log. (1 + z) = M \times \left\{ z - \tfrac{1}{2}z^2 + \tfrac{1}{3}z^3 - \tfrac{1}{4}z^4 + \tfrac{1}{5}z^5 - enz. \right\} \; (\Omega)$$

zijn. Deze is de voorname grondreeks, door welke de logarithmen berekend, en uit welke alle andere reeksen, tot die berekening dienende, worden afgeleid.

II. *Het getal te vinden, dat tot een zekeren gegevenen Logarithmus behoort?*

§. 582. Hier moet de exponentiale uitdrukking a^x in eene reeks, welke naar de veranderlijke grootheid x geordend is, bepaald worden. Men zal wederom, in plaats van $y = a^x$ stellen kunnen: . . . $y = (1 + a - 1)^x$: nu is het klaar: dat, in plaats van $(1 + a - 1)^x$, zal kunnen geschreven worden: $\left\{ (1 + a - 1)^n \right\}^{\frac{x}{n}}$: men heeft derhalve:

y =

$$y = \left\{ (1 + a - 1)^n \right\}^{\frac{x}{n}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (O)$$

n is hier een willekeurig getal, hetwelk in de waarde van y van zelf verdwijnen moet. De uitdrukking $(1 + a - 1)^n$, volgens het binomium van NEWTON, ontwikkeld zijnde, vindt men voor derzelver waarde:

$$1 + n(a-1) + \frac{n(n-1)}{1 \,.\, 2}(a-1)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}(a-1)^3$$
$$+ \textit{enz.} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (P)$$

Nu kan men de gedurige producten $n(n-1)$, $n(n-1)(n-2)$, enz. ontwikkelen, en dezelve met de ontwikkelde magten van $a - 1$ vermenigvuldigen, en dan zal men, na dit alles, de vereënigde termen der producten naar de opklimmende magten van n kunnen ordenen, en dan zal

$$(1 + a - 1)^n = 1 + An + Bn^2 + Cn^3 + \textit{enz.}$$

worden, in welke A, B, C, D, *enz.* functien van a zijn, zonder dat de grootheid n in derzelver zamenstelling voorkomt. Het is niet noodig deze berekening in het werk te stellen: alleenlijk merken wij aan, dat

$$A = (a-1) - \tfrac{1}{2}(a-1)^2 + \tfrac{1}{3}(a-1)^3 - \textit{enz.}$$

zal moeten zijn. Dit is gemakkelijk nategaan; want al de termen van de uitdrukking (P) zijn, (de eerste uitgezonderd,) door n deelbaar; indien men deze door n deelt, en de quotienten ontwikkelt; dan zullen de termen, die van n bevrijd zijn, $-\tfrac{1}{2}$, $+\tfrac{1}{3}$, $-\tfrac{1}{4}$, *enz.* zijn.

De gevondene waarde van A is, zie voorgaande §, het omgekeerde van den modulus: substitueren wij nu de gevondene waarde van $(1 + a - 1)^n$ in de vergelijking (O); dan hebben wij:

$$y = \left\{ 1 + An + Bn^2 + Cn^3 + \textit{enz.} \right\}^{\frac{x}{n}}$$

Beschouwen wij nu voorts $An + Bn^2 + \textit{enz.}$ als eenen enkelden term; dan hebben wij:

$$y = 1 + \frac{x}{n} \,.\, [An + Bn^2 + \textit{enz.}] + \frac{x \,.\, (x-n)}{n \,.\, 2n} \,.\, [An + Bn^2 + \textit{enz.}]^2$$
$$+ \frac{x \,.\, (x-n)(x-2n)}{n \,.\, 2n \,.\, 3n} \,.\, [An + Bn^2 + \textit{enz.}]^3 + \textit{enz.}$$

Nu ziet men, met eenen opslag van het oog: dat de eerste, tweede, en volgende magten van $An + Bn^2 + \textit{enz.}$, door n, n^2, n^3, *enz.* deelbaar zijn, en gevolgelijk tegen n, n^2, n^3, *enz.*, welke in de noemers van de coefficienten der termen voorkomen, weggaan: men heeft alzoo

$$y = 1 + x.[A + Bn + enz.] + \frac{x(x-n)}{1\,.\,2}.[A + Bn + enz.]^2 + \frac{x(x-n)(x-2n)}{1\,.\,2\,.\,3}.[A + Bn + enz.]^3 + enz.$$

Deze vergelijking zal nu, voor alle waarden van x en n bestaan; bijgevolg ook, wanneer men $n = 0$ stelt; en dan heeft men:

$$y = a^x = 1 + xA + \frac{x^2 A^2}{1\,.\,2} + \frac{x^3 A^3}{1.2.3} + \frac{x^4 A^4}{1.2.3.4} + enz.$$

§. 583. Nu is, zie §. 580, $M = 1 : A$; gevolgelijk $A = 1 : M$; men heeft dan:

$$a^x = 1 + \frac{x}{M} + \frac{x^2}{1\,.\,2\,.\,M^2} + \frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,M^3} + enz. \quad . \quad . \quad (\Phi)$$

§. 584. Stellen wij voorts $x = Log.y$; dan hebben wij:

$$y = 1 + \frac{Log.y}{M} + \frac{(Log.y)^2}{1\,.\,2\,M^2} + \frac{(Log.y)^3}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,M^2} + enz. \quad . \quad (\Psi)$$

en deze is de reeks, waardoor een getal door den Logarithmus, welke tot hetzelve behoort, kan berekend worden (87).

§. 585.

(87) Vergelijkt men deze eenvoudige formulen met hetgeen in §. 872, I. C. verklaard is, dan ontdekt men het meerder voordeel van de nieuwere boven de oude handelwijze. De geschiedenis van de ontdekking der Logarithmen, en de trapswijze verbetering der handelwijzen om dezelve te berekenen, is zeer leerzaam. ARCHIMEDES verbond reeds in zijn geschrift: ψαμμιτης (*zandrekening*) eene reken- en meetkunstige reeks met elkander. STIFELIUS gaf de eigenschappen dezer reeksen, welke in den eersten Cursus §. 850 tot 854. voorkomen, zonder echter op het denkbeeld der Logarithmen te komen. JOHN NEPER of NAPIER, een Schotsch Edelman, in 1618 gestorven, ontwierp de Logarithmen, en grondde zijn zamenstel op eene meetkunstige beschouwing. Zijn medewerker, BRIGGS, Hoogleeraar te *London*, gaf, in 1618, de eerste proef eener logarithmen-tafel, welke in 1624 vervolgd, en door GELLIBRAND, in 1633, onder den tijtel van *Trigonometria Britannica*, voltooid werd. Echter was BYRG, in Duitschland, met NEPER, gelijktijdig op dezelfde gedachte gekomen, en stelde Tafelen zamen, welker inrigting nogtans min volkomen was. Gelijktijdig, en naderhand, hebben KEPLER, MERCATOR, GREGORY, NEWTON, LEIBNITZ, HALLEY, en andere beroemde mannen, zich met dit belangrijk onderwerp bezig gehouden. Men raadplege over dit alles FRANCIS MASERES, *Scriptores Logarithmici*, een werk dat te *London* uitgegeven en zeer omslagtig is, waarin nogtans vele oude en oorspronkelijke stukken niet gevonden worden.

§. 585. Aanmerking. Men zal van deze gevondene reekſen geen gebruik kunnen maken, ten zij men vooraf den modulus van het ſtelſel van Logarithmen, dat men berekenen wil, bepaald hebbe. Daar nu de uitdrukking, hier boven voor M gevonden, vermits zij in alle gevallen niet genoeg convergeert, daartoe niet zeer geſchikt is, zullen wij eenen anderen weg inſlaan, om denzelven te vinden.

§. 586. Nemen wij a en e tot de grondtallen van twee verſchillende Logarithmen-ſtelſels; dan zal men, in elk dezer twee ſtelſels, den Logarithmus van een zeker getal y kunnen bepalen: laten die Logarithmen door p en q worden uitgedrukt; dan heeft men:

$$y = a^p, \text{ en } y = e^q; \text{ gevolgelijk } a^p = e^q$$

Deze laatſte vergelijking in Logarithmen van hetzelfde (om het even welk) ſtelſel overgebragt zijnde, zal

$$p \times Log.\, a = q \times Log.\, e$$

$$p : q = Log.\, e : Log.\, a$$

zijn: dat is, †† *de Logarithmen van hetzelfde getal, in twee onderſcheidene ſtelſels genomen, ſtaan in de omgekeerde reden van de Logarithmen van de grondtallen dezer ſtelſels.*

§. 587. Laat, bij dezelfde onderſtelling blijvende, M de modulus van het ſtelſel $y = a^p$, en M' de modulus van het ſtelſel $y = e^q$ zijn; dan is, volgens §. 580,

$$Log.\, y = M \times \left\{ (y-1) - \tfrac{1}{2}(y-1)^2 + \tfrac{1}{3}(y-1)^3 - enz. \right\} = p$$

en in het tweede,

$$Log.\, y = M' \times \left\{ (y-1) - \tfrac{1}{2}(y-1)^2 + \tfrac{1}{3}(y-1)^3 - enz. \right\} = q$$

gevolgelijk is: $p : q = M : M'$; dat is: †† *de Logarithmen van hetzelfde getal, in twee onderſcheidene ſtelſels genomen, zijn tot elkander in dezelfde reden als de modulen dezer ſtelſels.*

§. 588. Vergelijkt men deze grondſtelling met de voorgaande, dan volgt daaruit: dat

$$Log.\, a : Log.\, e = M' : M, \text{ en } M = \frac{Log.\, e \times M'}{Log.\, a} \text{ is.}$$

In de onderſtelling namelijk, dat de Logarithmen van de grondtallen a en e uit hetzelfde ſtelſel van Logarithmen genomen zijn.

§. 589. Nemen wij, voor het ſtelſel $y = e^q$, tot hetwelk de modulus M' behoort, een ſtelſel, welks modulus gelijk aan de éénheid is; dan wordt $M' = 1$, en wij verkrijgen dat ſtelſel van Logarithmen, hetwelk, door de gevondene formulen, het ligſte kan berekend wor-

 den.

den. * Dit ſtelſel noemen ſommige de *natuurlijke*; anderen, ten onregte, *hyperboliſche* (88) Logarithmen: wij zullen dezelve, naar deszelfs uit-

(88) * Laten, *fig.* 2 en 3, AP en AQ twee onbepaalde regte lijnen zijn, welke elkander, het zij, onder eenen regten hoek, gelijk in *fig.* 2, het zij onder eenen ſcherpen of ſtompen hoek, gelijk in *fig.* 3, doorſnijden. Indien wij nu onderſtellen: dat de lijn BC, eens evenwijdig aan AQ geplaatst zijnde, evenwijdig aan zich zelve bewogen worde, en dat, in deze bewegende lijn, een punt C zulk eene beweging hebbe, dat, overal BC wederkerig evenredig zij aan AB, dat is: dat overal $AB \times BC$, $AD \times DE$, $AF \times FG$, $AH \times HI$, eene ſtandvastige waarde hebbe; dan zal het punt C eene kromme lijn $RCEGIS$ beſchrijven, welke de gewone *Hyperbola* is, geplaatst tusſchen hare aſymptoten AP en AQ. * Indien de hoek PAQ regt is, wordt de Hyperbola *gelijkzijdig* genoemd; is de hoek PAQ ſcherp of ſtomp, dan draagt zij den naam van *ongelijkzijdig*.

Men make hoek $BAC =$ hoek CAQ, en $AB = BC$; nemen wij nu AB aan, als de lengte éénheid, voorts eene lijn AD naar welgevallen, en verder AF, AH, enz. met de twee eerſte lijnen AB en AD, in eene opklimmende meetkunſtige reeks; dan zullen BC, DE, FG, HI, enz., eene afdalende meetkunſtige reeks uitmaken; indien wij nu $A\alpha = AB$ nemen, en door het punt α eene lijn $\alpha\beta\gamma\delta\epsilon$ evenwijdig aan AP trekken, en daarna de ordinaten tot in de punten β, γ, δ en ϵ, verlengen; dan zal 1°. het vierkant $AB\beta\alpha$ *het vierkant van de éénheid* zijn; en de regthoeken $AB\beta\alpha$, $AD\gamma\alpha$, $AF\delta\alpha$, $AH\epsilon\alpha$, zullen, even als hunne lengten, eene opklimmende meetkunſtige reeks uitmaken. Nu zeg ik: †† *dat de Hyperbola de eigenſchap heeft, dat, indien* $AB = 1$ *en* AB, AD, AF, AH, *in eene meetkunſtige reeks ſtaan, de hyperboliſche ſtukken* $BCED$, $DEGF$, $FGIH$, *eenen gelijken inhoud zullen hebben.*

Onderſtellen wij, dat de lijnen BD, DF, FH, elk in een aantal van 100 gelijke deelen verdeeld zijn; dat Bb, Dd, Ff, ééne van die deelen zijn, zoodat 100 maal $Bb = BD$; 100 maal $Dd = DF$; 100 maal $Ff = FH$ zij, enz. laten dan, door de deelpunten, de lijnen bc, de, fg, evenwijdig aan AQ worden getrokken, en wederom Cc, Ee, Gg, evenwijdig aan AP; dan zullen de regthoekjes $BCcb$, $DEed$, $FGgf$, enz. ontſtaan: nu zeg ik: †† *dat deze regthoekjes gelijk van inhoud zijn.*

Het is zeer gemaklijk, dit geſtelde te betoogen; want $AB : AD = AD : AF$ zijnde, zal ook $AD - AB$, of $BD : AF - AD$, of $DF = AB : AD$ zijn; maar nu is $BD : DF = \frac{1}{100} BD : \frac{1}{100} DF = Bb : Dd$, en diensvolgens $AB : AD = Bb : Dd$; daar nu $AB : AD = DE : BC$ is, zal ook $DE : BC = Bb : Dd$, en $DE \times Dd = BC \times Bb$ zijn; dat is, regthoek $BCcb =$ regthoek $DEed$ zijn. Men zal, op gelijke wijze, betoogen, dat regthoek $DEed$ gelijk regthoek $FGgf$ zal zijn.

Men

uitvinder, *Neperiaansche Logarithmen* noemen. Nemen wij nu: dat, in de zoo even gevondene vergelijking, de Logarithmen van e en a, ne-

Men zal even gemakkelijk betoogen: dat $b\,r\,c'b' = d\,t\,e'd' = f\,y\,g'f'$ is; dat, al verder, $b's\,c''b'' = d'u\,e''d'' = f'w\,g''f''$ *enz.* is.

Zoo wij nu, in het algemeen, het aantal gelijke deelen in BD, DF en FH gelijk n ftellen: dan zijn 'er n deelen in de lijn BD; n deelen in de lijn DF; gevolgelijk ook n regthoeken in de hyperbolifche ruimte $BCED$: n regthoeken in de hyperbolifche ruimte $DEGF$, enz. Nu zal de fom van de inhouden der n regthoeken, in de eerfte hyperbolifche ruimte $BCED$ geplaatst, gelijk zijn aan de fom van de inhouden der n regthoeken, in de tweede hyperbolifche ruimte $DEGF$ geplaatst, gelijk aan de fom van de inhouden van de n regthoeken in de derde hyperbolifche ruimte $FGIH$ ftaande.

Deze fommen blijven altijd gelijk, hoe groot men ook het getal n ftelle. Uit de figuur blijkt het nu: dat de fom der regthoeken, in de eerfte hyperbolifche ruimte $BCED$, grooter is dan de hyperbolifche ruimte, in welke zij geplaatst zijn, en wel zooveel grooter, als de fom van de kleine driehoekjes Ccr, $rc's$, enz. bedraagt, welke fom, indien wij de deeltjes Cr, rs, van de kromme lijn als regte lijntjes aanmerken, gelijk is aan $(BC - DE) \times Bb$. Stellen wij dan de fom der regthoekjes, in elk der hyperbolifche ruimten ftaande, gelijk S; dan zullen wij de drie volgende vergelijkingen hebben.

$$\textit{Hyp. ruimte } BCED = S - (BC - DE) \times Bb$$
$$\textit{Hyp. ruimte } DEGF = S - (DE - FG) \times Dd$$
$$\textit{Hyp. ruimte } FGIH = S - (FG - HI) \times Ff$$

In deze vergelijkingen, zijn de grootheden $(BC - DE) \times Bb$, $(DE - FG) \times Dd$, $(FG - HI) \times Ff$, zeer klein, en worden fteeds kleiner, naarmate n grooter wordt. Indien dan Bb, Dd, Ff, gelijk nul worden, worden de hyperbolifche ruimten aan S, en onderling aan elkander gelijk.

Het volgt nu: dat hyp. ruimte $BCEGF =$ tweemaal hyp. ruimte $BCED$, en hyp. ruimte $BCEGIH =$ driemaal hyp. ruimte $BCED$ is.

Met het vierkant van de éénheid, $AB\beta\alpha$, welke de eerfte term der meetkunftige reeks is, begint de telling der hyperbolifche ruimten. Met de termen $AD\gamma\alpha$, $AF\delta\alpha$, $AH\epsilon\alpha$, der meetkunftige reeks, ftemmen overëen de hyperbolifche ruimten $BCED$, $BCEGF$, en $BCEGIH$, welke eene rekenkunftige reeks uitmaken. †† *Elke hyperbolifche ruimte* $BCED$, $BCEGF$, *enz. is, dan de Logarithmus van den overëenkomftigen regthoek* $AD\gamma\alpha$, $AF\delta\alpha$, *enz.*

Mercator ontdekte het eerst deze eigenfchap der Hyperbola, evenwel flechts voor de gelijkzijdige. Gregory ontwikkelde, bijna gelijktijdig, de gevolgen: dit gefchiedde in 1668: doch Newton had reeds, in 1665, door zijne Fluxie-Rekening, dien inhoud gevonden.

†† Indien de hyperbola gelijkzijdig is, dan wordt ($AB = 1$ en $BD = z$ ftellende,) de hyperbolifche ruimte door

neperiaansche zijn; dan is, vermits in elk stelsel de Logarithmus van het grondtal gelijk één is, *Nep. Log.* $e = 1$; en daar nu ook $M' = 1$ is, zal men verkrijgen:

$$M = \frac{1}{Nep.\,Log.\,a}$$

dat is: †† *de modulus van eenig Logarithmen-stelsel, is gelijk aan de éénheid, gedeeld door den Neperiaanschen Logarithmus van het grondtal van datzelfde stelsel.*

§. 590. Stellen wij $a = 10$; dan heeft men het stelsel der gewone Briggiaansche Logarithmen, zie §. 863, I. C.; en nu zal: †† *de Modulus der Briggiaansche Logarithmen gelijk zijn aan één, gedeeld door den Neperiaanschen Logarithmus van het grond-tal tien.* Het zal straks blijken: hoe men, op de beste wijze, den Neperiaanschen Logarithmus van het getal tien vinden kan. Men heeft:

Nep.Log. $10 = 2{,}30258\ 50929\ 94045\ 68401\ 79914\ 54684\ 36420\ 76$

deelt men de éénheid door dit getal; dan vindt men, voor den Modulus der Briggiaansche Logarithmen,

$$M = 0{,}43429\ 44819\ 03251\ 82765\ 11289\ 18916\ 05082\ 3$$

§. 591. Omdat, voor de Neperiaansche Logarithmen, welks grondtal e genoemd is, $M = 1$ is, zal men, in de vergelijking (Φ), in plaats

$$z - \tfrac{1}{2} z^2 + \tfrac{1}{3} z^3 + \tfrac{1}{4} z^4 + \tfrac{1}{5} z^5 - enz.$$

uitgedrukt: het stelsel der Logarithmen, in de gelijkzijdige hyperbola begrepen, is derhalve het Neperiaansche. Om die reden heeft men dan ook langen tijd deze Logarithmen *hyperbolische* genoemd.

Doch, de hyperbolische ruimten eener ongelijkzijdige hyperbola, geven ook een stelsel van Logarithmen, dat van het stelsel, hetwelk de gelijkzijdige geeft, onderscheiden is. Wanneer, in *fig.* 3, $AB = 1$ en $BD = z$ is, zal de hyperbolische ruimte $BDEC$, door

$$Sin.\,PAQ \times [z - \tfrac{1}{2} z^2 + \tfrac{1}{3} z^3 - \tfrac{1}{4} z^4 + enz.]$$

worden uitgedrukt: nu is, voor de Briggiaansche Logarithmen, de Modulus gelijk 0,43 *enz.*, maakt men dan *Sin.* $PAQ = 0{,}43$ *enz.*; dan is hoek $PAQ = 25^\circ\, 44'\, 25''{,}47298$ sexagesimale verdeeling. †† *De hyperbolische ruimte van eene hyperbola, welker asymptoten dien hoek maken, zullen dan het stelsel der gewone Briggiaansche Logarithmen voorstellen.*

De Briggiaansche Logarithmen zijn gevolgelijk zoowel hyperbolisch als de Neperiaansche, gelijk ook alle Logarithmen, welker modulus gelijk of minder dan één is: maar een Logarithmen-stelsel, welks modulus grooter dan één is, kan door geene hyperbolische ruimte worden voorgesteld. †† Alle Logarithmen zijn gevolgelijk niet hyperbolisch.

plaats van a, moeten schrijven e, en $M = 1$ stellen, dan zal men verkrijgen:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + enz.$$

door deze, vindt men het getal, dat tot eenen gegeven Neperiaanschen Logarithmus behoort.

§. 592. Maakt men nu, in deze laatste, $x = 1$; dan wordt

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + enz.$$

deze reeks convergeert zeer sterk. Men zal, door eene ligte berekening, voor het grondtal van de Neperiaansche Logarithmen vinden:

$$e = 2,71828\ 18284\ 59045\ 23536\ 02874\ 71352\ 66249\ 8$$

Dit getal, hetwelk men niet met den Neperiaansche Logarithmus van tien verwarren moet, is, in de hoogere Wiskunde, van eene uitgestrekte nuttigheid.

Afleiding van andere Logarithmische reeksen.

§. 593. Wij hebben aan het hoofd van Tabelle N° V. de reeksen (Ω) en (Ψ), welke aldaar onder de Numero's (1) en (2) voorkomen, geplaatst. Uit dezelve worden alle de volgende afgeleid.

§. 594. Wanneer men, in N° (1), de veranderlijke z negatief neemt; dan verkrijgt men N° (3), waaruit blijkt: dat de Logarithmus van eene grootheid minder dan één, negatief is. Vergelijk §. 880, I. C.

§. 595. Trekt men N° 3. van N° 1. af; dan verkrijgt men de formule N° 4. Deze wordt, in de berekening van de Logarithmen der getallen, het meeste gebruikt.

§. 596. Stelt men, in N° 4, in plaats van $\frac{1+z}{1-z}$, de veranderlijke grootheid y; dan verkrijgt men de reeks N° 5.

§. 597. Maakt men, in N° 1 en 3, de letter z gelijk aan het gebroken $y : x$; dan verkrijgt men de reeksen N° 6 en 7.

§. 598. En in deze $y = 1$ stellende, verkrijgt men de bijzondere reeksen N° 8 en 9, waardoor men den Logarithmus van eenig getal zooveel te gemakkelijker uit dien van het ommiddelijk volgend of voorgaand getal vinden zal, naarmate dit getal grooter is.

§. 599. De voorgaande reeksen N° 8 en 9, bij elkander optellende, of van elkander aftrekkende, zal men N° 10 en 11 verkrijgen, van welke de laatste met N° 4, overeenstemt. Door de eerste zal men den Logarithmus van een getal, uit die van de twee onmiddelijk voorgaande getallen, vinden.

§. 600. Wanneer men uit N° 11 de grootheid $2M$ afzondert, en de waarde, welke men voor dezelve verkrijgt, in de reeks N° 10, overbrengt; dan zal men, na behoorlijke divisie, waarbij men van de onbepaalde coefficienten gebruik zal kunnen maken, de reeks N° 12, vinden.

§. 601. Stellen wij, in de reeks N° 6, in plaats van y, het gebroken $\frac{x^2}{u-x}$; dan zal men, na behoorlijke herleiding, de reeks N° 13, verkrijgen.

§. 602. En ftelt men, in de laatfte, x negatief; dan zal de reeks N° 14. ontftaan.

§. 603. Wanneer men, in N° 4, in plaats van $\frac{1+z}{1-z}$, ftelt $1+\frac{y}{x}$; dan zal men de reeks N° 15. verkrijgen.

§. 604. En, in deze laatfte, y negatief ftellende, de reeks N° 16.

§. 605. Indien men, in de reeks N° 15, voor x en y ftelt, $x=(n+1)(n-1)$ en $y=1$; dan zal men, na behoorlijke herleiding, N° 17, vinden.

§. 606. Stelt men, in formule N° 4, in plaats van $\frac{1+z}{1-z}$, eerst $\frac{z^n+d}{z^n}$, en daarna $\frac{z^n}{z^n-d}$, dan zal men de twee formulen N° 18 en 19 verkrijgen, waardoor men, wanneer *Log.* (z^n+d) gegeven is, den Logarithmus z^n, en gevolgelijk Logarithmus z zal kunnen berekenen, en *vice verfâ*.

§. 607. Nemende verder, in N° 15, $\frac{x+y}{x}= \ldots\ldots$ $\frac{(z-a).(z-b).(z+a+b)}{(z+a).(z+b).(z-a-b)}$, dan zal men, na behoorlijke herleiding, de reeks N° 20 vinden.

§. 608. Stellen wij, in deze laatfte, eerst $a=1$ en $b=2$, en daarna $a=1$ en $b=1$; dan zal men de reekfen N° 21 en 22 vinden.

§. 609. Stellen wij, in N° 5, $y=u:v$, en verder $u=x^4-25x^2=x^2(x^2-25)$ en $v=x^4-25x^2+144=(x^2-9)(x^2-16)$; dan zal men, door eene ligte berekening, de reeks N° 23 vinden.

§. 610. Laat in de vergelijking (Φ) van §. 583, namelijk

$a^x=$

$$a^x = 1 + \frac{x}{M} + \frac{x^2}{1 \cdot 2 \cdot M^2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot M^3} + enz.$$

$x = u + v$ gesteld worden; dan is $a^x = a^{u+v}$: men zal dan kunnen stellen:

$$a^x = a^u \times \left[1 + \frac{v}{M} + \frac{v^2}{1 \cdot 2 \cdot M^2} + \frac{v^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot M^3} + enz. \right]$$

stellen wij nu: dat x en u benevens a^u gegeven zijn, dan zal men daar $v = x - u$ is, de reeks $1 + \frac{v}{M} + enz.$ kunnen berekenen, welke zooveel te meer zal convergeren, naarmate v een kleiner breuk is: vermenigvuldigt men dan het getal a^u, met de waarde van deze reeks, dan zal men de waarde van a^x vinden. †† Men zal derhalve, door deze reeks, den Logarithmus van een getal vinden, wanneer de Logarithmus van een getal, dat 'er zeer nabij komt, bekend is.

§. 611. Alle deze reeksen convergeren zooveel te sterker, naarmate z, in N° 1, 3 en 4; de breuk $\frac{1}{x}$, in N° 8, 9, 10 en 11; de breuk $\frac{y}{x}$, in N° 6 en 7, benevens de breuken $\frac{x}{u - x}$, $\frac{x}{u + x}$, $\frac{y}{2x + y}$, $\frac{y}{2x - y}$, $\frac{d}{2z^n + d}$, $\frac{d}{2z^n - d}$, $\frac{1}{2n^2 - 1}$, $\frac{6}{z^3 - 7z}$, $\frac{2}{z^3 - 3z}$, en . . $\frac{72}{x^4 - 25x^2 + 72}$, in N° 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 21, 22 en 23, kleiner zijn. De berekening van de waarde dezer reeksen kan, na de verklaring, welke wij, in Tabelle IV, van het berekenen der reeksen, welke de wortels uit een getal voorstellen, gegeven hebben, geene zwarigheid maken, waarom wij ons dan ook daarmede, in het bijzonder, niet zullen ophouden.

§. 612. Gelijk wij, §. 872, I. C., reeds hebben opgemerkt, is het genoeg de Logarithmen der ondeelbare getallen te vinden. Het berekenen van de Logarithmen der kleine getallen maakt de meeste zwarigheid. Maakt men nogtans van de formule N° 4. gebruik, en stelt men, $Log. [(1 + z) : (1 - z)]$ successivelijk gelijk aan de breuken: $\frac{64}{63}$, $\frac{126}{125}$, $\frac{225}{224}$ en $\frac{2401}{2400}$; dan zal, voor de eerste breuk, $z = \frac{1}{127}$; voor de tweede, $z = \frac{1}{251}$; voor de derde, $z = \frac{1}{449}$; en voor de vierde, $z = \frac{1}{4801}$ zijn, en volgens deze formule zal:

1° $Log.\ \frac{64}{63} = 2M \times [\frac{1}{127} + \frac{1}{3} \cdot (\frac{1}{127})^3 + enz.]$; *Stel* $= H$

2° $Log.\ \frac{126}{125} = 2M \times [\frac{1}{251} + \frac{1}{3} \cdot (\frac{1}{251})^3 + enz.] \ldots\ldots = K$

3° $Log.\ \frac{225}{224} = 2M \times [\frac{1}{449} + \frac{1}{3} \cdot (\frac{1}{449})^3 + enz.] \ldots\ldots = L$

4° $Log.\ \frac{2401}{2400} = 2M \times [\frac{1}{4801} + \frac{1}{3} \cdot (\frac{1}{4801})^3 + enz.] \ldots\ldots = N$

De waarden van H, K, L, N, worden gemakkelijk gevonden.

Nu beſtaan 'er, in de tellers en noemers dezer breuken, geene andere factoren, dan de getallen 2, 3, 5 en 7, en derzelver magten: beſchouwende dan de Logarithmen dezer getallen als onbekend, en de letters, H, K, L, N, als bekend; dan zal men vier eerſte-magts-vergelijkingen verkrijgen, welke opgelost zijnde, geven zullen:

$$Log.\ 2 = 31\,H + 10\,K + 27\,L + 12\,N$$
$$Log.\ 3 = 49\,H + 16\,K + 43\,L + 19\,N$$
$$Log.\ 5 = 72\,H + 23\,K + 63\,L + 28\,N$$
$$Log.\ 7 = 87\,H + 28\,K + 76\,L + 34\,N$$

waardoor men gemakkelijk de Logarithmen der getallen 2, 3, 5 en 7, vinden zal. Neemt men in deze berekeningen $M = 1$, en berekent men H, K, L, N, tot in 37 cijfers, dan zal men, Nep. Log. 10 verkrijgen, door Nep. Log. 2 bij Nep. Log. 5 optetellen, waaruit men, zie §. 590, den modulus der Briggiaanſche Logarithmen bepalen zal.

§. 613. Wanneer de Logarithmen der getallen 2, 3, 5 en 7, berekend zijn, zal men, alleen de formule, N° 4, gebruikende, door eene ligte beproeving, zeer convergerende reekſen voor de Logarithmen van 11, 13, 17, 19, enz. kunnen vinden. Men zoeke eene breuk van den vorm $(a + 1) : a$, in welker teller en noemer geene andere factoren dan het ondeelbare getal, welks Logarithmus men zoekt, benevens de mindere ondeelbare getallen, welker Logarithmen reeds bekend zijn, voorkomen. Na eenige beproevingen, vindt men:

$$Log.\ 11 = M \times [\tfrac{1}{19601} + \tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{19601})^3 + enz.] + 1\tfrac{1}{2}\,.\,Log.\ 2 - 2\,Log.\ 3 + log.\ 35.$$
$$Log.\ 13 = M \times [\tfrac{1}{246401} + \tfrac{1}{3}\,.\,(\tfrac{1}{246401})^3 + enz.] + 3\,Log.\ 2 + Log.\ 5 + \tfrac{1}{2}\,Log.\ 77 - 3\,Log.\ 3$$
$$Log.\ 17 = 4\,Log.\ \tfrac{13}{2} - Log.\ 105 - 2\,M \times [\tfrac{1}{57121} + \tfrac{1}{3}\,.\,(\tfrac{1}{57121})^3 + enz.]$$
$$Log.\ 19 = \tfrac{2}{3}\,.\,Log.\ 2 + Log.\ 7 + \tfrac{1}{3}\,.\,Log.\ 5 - \tfrac{2}{3}\,M \times [\tfrac{1}{13719} + \tfrac{1}{3}\,.\,(\tfrac{1}{13719})^3 + enz.]$$
$$Log.\ 23 = M \times [\tfrac{1}{51841} + \tfrac{1}{3}\,.\,(\tfrac{1}{51841})^3 + enz.] + 3\,Log.\ 2 + 2\,Log.\ 3 + \tfrac{1}{2}\,Log.\ 5 - Log.\ 7$$
$$Log.\ 29 = 4\,Log.\ 99 - Log.\ 400 - Log.\ 49 - Log.\ 169 - 2\,M \times [\tfrac{1}{192119201} + enz.]$$

Men zal, op gelijke wijze, ſoortgelijke uitdrukkingen voor de ondeelbare getallen, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, *enz.* vinden. Voor getallen, grooter dan 100 zijnde, zal men van alle formulen, van N° 8 tot N° 23, gebruik kunnen maken.

EEN-

N° V. TABELLE, *bevattende de reeksen, tot het berekenen der* Logarithmen *behoorende.* Zie LX LES, §. 575, *et seq.* [Tegen over bladz. 362.]

1. $$Log.\ (1+z) = M \times \left[z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{4}z^4 + \frac{1}{5}z^5 - \frac{1}{6}z^6 + \frac{1}{7}z^7 - \frac{1}{8}z^8 + \frac{1}{9}z^9 - \frac{1}{10}z^{10} + enz.\right]$$ Zie §. 581.

2. $$y = 1 + \frac{Log.\, y}{M} + \frac{Log^2.\, y}{1.\,2.\,M^2} + \frac{Log^3.\, y}{1.\,2.\,3.\,M^3} + \frac{Log^4.\, y}{1.\,2.\,3.\,4.\,M^4} + \frac{Log^5.\, y}{1.\,2.\,3.\,4.\,5.\,M^5} + enz. \;\ldots\ldots$$ Zie §. 584.

3. $$Log.\ (1-z) = -M \times \left[z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{4}z^4 + \frac{1}{5}z^5 + \frac{1}{6}z^6 + \frac{1}{7}z^7 + \frac{1}{8}z^8 + \frac{1}{9}z^9 + \frac{1}{10}z^{10} + enz.\right]$$ Zie §. 594.

4. $$Log.\ \frac{1+z}{1-z} = 2M \times \left\{z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{5}z^5 + \frac{1}{7}z^7 + \frac{1}{9}z^9 + \frac{1}{11}z^{11} + \frac{1}{13}z^{13} + \frac{1}{15}z^{15} + \frac{1}{17}z^{17} + enz.\right\} \;\ldots$$ Zie §. 595.

5. $$Log.\, y = 2M \times \left\{\frac{y-1}{y+1} + \frac{1}{3}\cdot\left[\frac{y-1}{y+1}\right]^3 + \frac{1}{5}\cdot\left[\frac{y-1}{y+1}\right]^5 + \frac{1}{7}\cdot\left[\frac{y-1}{y+1}\right]^7 + \frac{1}{9}\cdot\left[\frac{y-1}{y+1}\right]^9 + enz.\right\}$$ Zie §. 596.

6. $$Log.\ (x+y) = Log.\, x + M \times \left\{\frac{y}{x} - \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{y}{x}\right]^2 + \frac{1}{3}\cdot\left[\frac{y}{x}\right]^3 - \frac{1}{4}\cdot\left[\frac{y}{x}\right]^4 + \frac{1}{5}\cdot\left[\frac{y}{x}\right]^5 - \frac{1}{6}\cdot\left[\frac{y}{x}\right]^6 + enz.\right\}$$ Zie §. 597.

7. $$Log.\ (x-y) = Log.\, x - M \times \left\{\frac{y}{x} + \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{y}{x}\right]^2 + \frac{1}{3}\cdot\left[\frac{y}{x}\right]^3 + \frac{1}{4}\cdot\left[\frac{y}{x}\right]^4 + \frac{1}{5}\cdot\left[\frac{y}{x}\right]^5 + \frac{1}{6}\cdot\left[\frac{y}{x}\right]^6 + enz.\right\}$$ Zie §. 597.

8. $$Log.\ (x+1) = Log.\, x + M \times \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^3} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x^4} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{x^5} - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x^6} + enz.\right] \;\ldots\ldots$$ Zie §. 598.

9. $$Log.\ (x-1) = Log.\, x - M \times \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^3} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x^4} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{x^5} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x^6} + enz.\right] \;\ldots\ldots$$ Zie §. 598.

10. $$Log.\ (x+1) = 2\, Log.\, x - Log.\,(x-1) - 2M \times \left\{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x^4} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x^6} + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{x^8} + enz.\right\} \;\ldots\ldots$$ Zie §. 599.

11. $$Log.\ \frac{x+1}{x-1} = 2M \times \left\{\frac{1}{x} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{x^5} + \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{x^7} + \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{x^9} + \frac{1}{11}\cdot\frac{1}{x^{11}} + enz.\right\} \;\ldots\ldots$$ Zie §. 599.

12. $$Log.\ (x+1) = 2\, Log.\, x - Log.\,(x-1) - Log.\,\frac{x+1}{x-1} \times \left\{\frac{1}{4x} + \frac{1}{24x^3} + \frac{7}{360x^5} + \frac{181}{15120x^7} + enz.\right\} \;\ldots\ldots$$ Zie §. 600.

13. $$Log.\ (u-x) = Log.\, u - M \times \left\{\frac{x}{u-x} - \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{x}{u-x}\right]^2 + \frac{1}{3}\cdot\left[\frac{x}{u-x}\right]^3 - \frac{1}{4}\cdot\left[\frac{x}{u-x}\right]^4 + enz.\right\}$$ Zie §. 601.

14. $$Log.\ (u+x) = Log.\, u + M \times \left\{\frac{x}{u+x} + \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{x}{u+x}\right]^2 + \frac{1}{3}\cdot\left[\frac{x}{u+x}\right]^3 + \frac{1}{4}\cdot\left[\frac{x}{u+x}\right]^4 + enz.\right\}$$ Zie §. 602.

15. $$Log.\ (x+y) = Log.\, x + 2M \times \left\{\frac{y}{2x+y} + \frac{1}{3}\cdot\left[\frac{y}{2x+y}\right]^3 + \frac{1}{5}\cdot\left[\frac{y}{2x+y}\right]^5 + enz.\right\} \;\ldots\ldots$$ Zie §. 603.

16. $$Log.\ (x-y) = Log.\, x - 2M \times \left\{\frac{y}{2x-y} + \frac{1}{3}\cdot\left[\frac{y}{2x-y}\right]^3 + \frac{1}{5}\cdot\left[\frac{y}{2x-y}\right]^5 + enz.\right\} \;\ldots\ldots$$ Zie §. 604.

17. $$2\, Log.\, n = Log.\,(n+1) + Log.\,(n-1) + 2M \times \left\{\frac{1}{2n^2-1} + \frac{1}{3}\cdot\left[\frac{1}{2n^2-1}\right]^3 + \frac{1}{5}\cdot\left[\frac{1}{2n^2-1}\right]^5 + enz.\right\}$$ Zie §. 605.

18. $$Log.\,(z^n+d) = n\,.\,Log.\, z + 2M \times \left\{\frac{d}{2z^n+d} + \frac{1}{3}\cdot\left[\frac{d}{2z^n+d}\right]^3 + \frac{1}{5}\cdot\left[\frac{d}{2z^n+d}\right]^5 + enz.\right\} \;\ldots\ldots$$ Zie §. 606.

19. $$Log.\ (z^n-d) = n\,.\,Log.\, z - 2M \times \left\{\frac{d}{2z^n-d} + \frac{1}{3}\cdot\left[\frac{d}{2z^n-d}\right]^3 + \frac{1}{5}\cdot\left[\frac{d}{2z^n-d}\right]^5 + enz.\right\} \;\ldots$$ Zie §. 606.

20. $$Log.\,(z-a) + Log.\,(z-b) + Log.\,(z+a+b) - Log.\,(z+a) - Log.\,(z+b) - Log.\,(z-a-b) \;\ldots$$
$$= 2M\left\{\frac{a^2b+ab^2}{z^3-(a^2+b^2+ab)z} + \frac{1}{3}\cdot\left[\frac{a^2b+ab^2}{z^3-(a^2+b^2+ab)z}\right]^3 + enz.\right\} \;\ldots\ldots$$ Zie §. 607.

21. $$Log.\,(z-1) + Log.\,(z-2) + Log.\,(z+3) - Log.\,(z+1) - Log.\,(z+2) - Log.\,(z-3) \;\ldots\ldots$$
$$= 2M \times \left\{\frac{6}{z^3-7z} + \frac{1}{3}\cdot\left[\frac{6}{z^3-7z}\right]^3 + \frac{1}{5}\cdot\left[\frac{6}{z^3-7z}\right]^5 + enz.\right\} \;\ldots\ldots$$ Zie §. 608.

22. $$2\, Log.\,(z-1) - 2\, Log.\,(z+1) + Log.\,(z+2) - Log.\,(z-2) \;\ldots\ldots$$
$$= 2M \times \left\{\frac{2}{z^3-3z} + \frac{1}{3}\cdot\left[\frac{2}{z^3-3z}\right]^3 + \frac{1}{5}\cdot\left[\frac{2}{z^3-3z}\right]^5 + \frac{1}{7}\cdot\left[\frac{2}{z^3-3z}\right]^7 + enz.\right\} \;\ldots$$ Zie §. 608.

23. $$Log.\,(x+5) = Log.\,(x+3) + Log.\,(x-3) + Log.\,(x+4) + Log.\,(x-4) - Log.\,(x-5) - 2\, Log.\, x \;\ldots$$
$$- 2M \times \left\{\frac{72}{x^4-25x^2+72} + \frac{1}{3}\cdot\left[\frac{72}{x^4-25x^2+72}\right]^3 + enz.\right\} \;\ldots\ldots$$ Zie §. 609.

Exponentiale Reeksen.

24. $$a^x = 1 + \frac{x}{M} + \frac{x^2}{1.\,2.\,M^2} + \frac{x^3}{1.\,2.\,3.\,M^3} + \frac{x^4}{1.\,2.\,3.\,4.\,M^4} + enz. \;\ldots\ldots$$ Zie §. 583.

25. $$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.\,2} + \frac{x^3}{1.\,2.\,3} + \frac{x^4}{1.\,2.\,3.\,4} + \frac{x^5}{1.\,2.\,3.\,4.\,5} + enz. \;\ldots\ldots$$ Zie §. 591.

26. $$a^{x+y} = a^x \times \left\{1 + \frac{y}{M} + \frac{y^2}{1.\,2.\,M^2} + \frac{y^3}{1.\,2.\,3.\,M^3} + \frac{y^4}{1.\,2.\,3.\,4.\,M^4} + enz.\right\} \;\ldots$$ Zie §. 610.

Tafeltje van de negen eerste veelvouden der getallen M en 1 : M, dienende tot gemak der multiplicatie en divisie, met en door M.

Veelvouden van het getal M.

1	0,	43429	44819	03251	82765	11289
2	0,	86858	89638	06503	65530	22578
3	1,	30288	34457	09755	48295	33868
4	1,	73717	79276	13007	31060	45157
5	2,	17147	24095	16259	13825	56446
6	2,	60576	68914	19510	96590	67735
7	3,	04006	13733	22762	79355	79024
8	3,	47435	58552	26014	62120	90314
9	3,	90865	03371	29266	44886	01603

Veelvouden van het getal $\frac{1}{M}$.

1	2,	30258	50929	94045	68401	79915
2	4,	60517	01859	88091	36803	59829
3	6,	90775	52789	82137	05205	39744
4	9,	21034	03719	76182	73607	19658
5	11,	51292	54649	70228	42008	99573
6	13,	81551	05579	64274	10410	79487
7	16,	11809	56509	58319	78812	59402
8	18,	42068	07439	52365	47214	39316
9	20,	72326	58369	46411	15616	19231

Goniometrische Formulen en Reeksen, behoorende tot de LXI LES.

LITTERA A.

Oorspronkelijke Goniometrische Formulen.

1° $Cos^2.x + Sin^2.x = 1$ 2° $Tang.x = \frac{Sin.x}{Cos.x}$

3° $Cot.x = \frac{Cos.x}{Sin.x}$ 4° $Sec.x = \frac{1}{Cos.x}$

5° $Cosec.x = \frac{1}{Sin.x}$ 6° $Sec^2.x = 1 + Tang^2.x$

7° $Sin.(x \pm y) = Sin.x.Cos.y \pm Sin.y.Cos.x$

8° $Cos.(x \pm y) = Cos.x.Cos.y \mp Sin.x.Sin.y$

Afgeleide Goniometrische Formulen.

9° $Tang.(x \pm y) = \frac{Tang.x \pm Tang.y}{1 \mp Tang.x \times Tang.y}$

10° $Cos.z = \frac{e^{+z\sqrt{-1}} + e^{-z\sqrt{-1}}}{2}$

11° $Sin.z = \frac{e^{+z\sqrt{-1}} - e^{-z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$

Zie wegens deze laatste formulen, §. 619, *pag.* 366 en 367.

LITTERA B. TAFEL, *van de voornaamste Reeksen der Goniometrische lijnen.*

1° $Sin.x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \frac{x^9}{1.2.3.4.5.6.7.8.9} -$ enz.

2° $Cos.x = 1 - \frac{x^2}{1.2.} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \frac{x^8}{1.2.3.4.5.6.7.8} -$ enz.

3° $Tang.x = \frac{4(4-1)A}{1.2.}.x + \frac{4^2(4^2-1).B}{1.2.3.4}x^3 + \frac{4^3(4^3-1).C}{1.2.3.4.5.6}x^5 + \frac{4^4(4^4-1).D}{1.2.3.4.5.6.7.8}x^7 +$ enz. . . . . Zie §. 845, *pag.* 466.

4° $Cot.x = \frac{1}{x} - \frac{4A}{1.2}x - \frac{4^2.A}{1.2.3.4}x^3 - \frac{4^3.C}{1.2.3.4.5.6}x^5 - \frac{4^4.D}{1.2.3.4.5.6.7.8}x^7 -$ enz. . . . . Zie §. 845, *pag.* 466.

5° $Nep.Log.Sin.x = Nep.Log.x - \frac{4A}{1.2}.\frac{1}{2}x^2 - \frac{4^2.B}{1.2.3.4}.\frac{1}{4}x^4 - \frac{4^3.C}{1.2.3.4.5.6}.\frac{1}{6}x^6 -$ enz. . . . . Zie §. 846, *pag.* 467.

6° $Nep.Log.Cos.x = -\frac{4(4-1)A}{1.2}.\frac{1}{2}x^2 - \frac{4^2(4^2-1)B}{1.2.3.4}.\frac{1}{4}x^4 - \frac{4^3(4^3-1)C}{1.2.3.4.5.6}.\frac{1}{6}x^6 -$ enz. . . . . Zie §. 846, *pag.* 467.

7° $Nep.Log.Tang.x = Nep.Log.x + \frac{2^3(2-1)A}{1.2}.\frac{1}{2}x^2 + \frac{2^5(2^3-1)B}{1.2.3.4}.\frac{1}{4}x^4 + \frac{2^7(2^5-1)C}{1.2.3.4.5.6}.\frac{1}{6}x^6 +$ enz. . . . . Zie §. 846. *pag.* 467.

Zijnde, in deze vijf laatste reeksen, A, B, C, D, enz. de Bernouilliaansche coefficienten, welker waarde men op *pag.* 465, vindt aangeteekend.

8° $Sin.x = x \times \left[1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right].\left[1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right].\left[1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right].\left[1 - \frac{x^2}{16\pi^2}\right].\left[1 - \frac{x^2}{25\pi^2}\right].$ enz. . . . . Zie §. 625, *pag.* 370.

9° $Cos.x = \left[1 - \frac{4x^2}{\pi^2}\right].\left[1 - \frac{4x^2}{9\pi^2}\right].\left[1 - \frac{4x^2}{25\pi^2}\right].\left[1 - \frac{4x^2}{49\pi^2}\right].\left[1 - \frac{4x^2}{81\pi^2}\right].$ enz. . . . . Zie §. 626, *pag.* 371.

10° $Arc.Sin.x = x + \frac{x^3}{2.3} + \frac{3.x^5}{2.4.5} + \frac{3.5.x^7}{2.4.6.7} + \frac{3.5.7.x^9}{2.4.6.8.9} + \frac{3.5.7.9.x^{11}}{2.4.6.8.10.11} +$ enz. . . . . Zie §. 744, *pag.* 421.

11° $Arc.Tang.x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{7} + \frac{x^9}{9} + \frac{x^{11}}{11} +$ enz. . . . . Zie §. 620, *pag.* 367.

EEN- EN- ZESTIGSTE LES.

Over de reeksen, waardoor de Goniometrische lijnen, in functiën van derzelver cirkelbogen, worden uitgedrukt.

§. 614. Vermits wij in deze Les de kennis van de eerste beginselen der Driehoeksmeting onderstellen, zoo merken wij de formulen, welke op de tegenzijde van Tabelle V. Littera *A*, voorkomen, als bewezen aan. Men raadplege derwegens de Meetkunst van VAN SWINDEN, VIII Boek, onze meermalen aangehaalde Handleiding, en de eerste afdeeling van ons kort begrip der Driehoeksmeting.

§. 615. Het eerste lid der vergelijking, $Sin^2. x + Cos^2. x = 1$, kan in de onbestaanbare factoren, $Cos. x + Sin. x \times \sqrt{-1}$, en $Cos. x - Sin. x \times \sqrt{-1}$, ontleed worden. Offchoon deze onbestaanbare factoren geene denkbare grootheden uitdrukken, kunnen zij nogtans tot de ontdekking der gewigtigste zaken strekken (89). Vermenigvuldigen wij $Cos. x + Sin. x \times \sqrt{-1}$, met $Cos. y + Sin. y \times \sqrt{-1}$; dan zal men voor het product vinden: $(Cos. x \times Cos. y - Sin. x \times Sin. y) + (Cos. x \times Sin. y + Sin. x \times Cos. y) \times \sqrt{-1}$; Nu is $Cos. x \times Cos. y - Sin. x \times Sin. y = Cos. (x + y)$, en $Cos. x \times Sin. y + Sin. x \times Cos. y = Sin. (x + y)$; derhalve zal

$$\left\{Cos. x + Sin. x \times \sqrt{-1}\right\} \times \left\{Cos. y + Sin. y \times \sqrt{-1}\right\} = \ldots Cos. (x + y) + Sin. (x + y) \times \sqrt{-1} \quad \ldots\ldots \quad (P)$$

zijn. Op dezelfde wijze zal men vinden: dat

$$\left\{Cos. x - Sin. x \times \sqrt{-1}\right\} \times \left\{Cos. y - Sin. y \times \sqrt{-1}\right\} = \ldots Cos. (x + y) - Sin. (x + y) \times \sqrt{-1} \quad \ldots\ldots \quad (Q)$$

Vermenigvuldigt men de vergelijking (P) met $Cos. z + Sin. z \times \sqrt{-1}$,

(89) Het zal misschien vreemd schijnen: dat men, door uitdrukkingen, die geene bestaanbare waarden hebben, wezenlijke dingen ontdekken kan. Doch, daar de onbestaanbare uitdrukkingen, (zie §. 464.) uit wettige besluiten volgen, en alleen, door de bijzondere waarden, welke sommige van de daarin voorkomende letters verkrijgen, onbestaanbaar worden, zijn zij met de bestaanbare, door de algemeenheid der stelkundige uitdrukkingen, verbonden, en daaruit volgt dan: dat, wanneer men deze in de redenering met andere verbindt, derzelver uitkomsten even zoo zeker zullen moeten zijn, als wanneer, in gelijke omstandigheden, bestaanbare uitdrukkingen de plaats der onbestaanbare bekleed hadden.

$\sqrt{-1}$, en de vergelijking (Q), met $Cos.z - Sin.z \times \sqrt{-1}$; dan zal men verkrijgen:

$$\left\{Cos.x + Sin.x\sqrt{-1}\right\} \times \left\{Cos.y + Sin.y\sqrt{-1}\right\} \times \ldots$$
$$\left\{Cos.z + Sin.z\sqrt{-1}\right\} = Cos.(x+y+z) + Sin.(x+y+z) \times \sqrt{-1} \ldots \ldots (R)$$

$$\left\{Cos.x - Sin.x\sqrt{-1}\right\} \times \left\{Cos.y - Sin.y\sqrt{-1}\right\} \times \ldots$$
$$\left\{Cos.z - Sin.z\sqrt{-1}\right\} = Cos.(x+y+z) - Sin.(x+y+z) \times \sqrt{-1} \ldots \ldots (S)$$

§. 616. Stelt men, in de vergelijkingen (P) en (Q), $x = y$; en, in de vergelijkingen (R) en (S), $x = y = z$; dan zal men verkrijgen:

$$\left\{Cos.x \pm Sin.x \times \sqrt{-1}\right\}^2 = Cos.2x \pm Sin.2x \times \sqrt{-1}$$

$$\left\{Cos.x \pm Sin.x \times \sqrt{-1}\right\}^3 = Cos.3x \pm Sin.3x \times \sqrt{-1}$$

§. 617. Wanneer men de magten van $Cos.x + Sin.x\sqrt{-1}$, door dadelijke vermenigvuldiging, en door van de formulen (7) en (8) gebruik te maken, berekent, zal het, uit den regelmatigen voortgang dezer magten, blijken: dat, in het algemeen,

$$\left\{Cos.x \pm Sin.x \times \sqrt{-1}\right\}^n = Cos.nx \pm Sin.nx \times \sqrt{-1}$$

§. 618. Nemen wij, in deze vergelijking, het bovenste teeken, en trekken wij uit beide leden den n^{de} magts-wortel, dan verkrijgt men:

$$Cos.x + Sin.x\sqrt{-1} = \left\{Cos.nx + Sin.nx\sqrt{-1}\right\}^{\frac{1}{n}} \ldots (A)$$

en deze zal ons dienen, om, met behulp van het Binomium van Newton, de Sinus en de Cosinus van eenen boog, in eene van dien boog afhangende reeks uittedrukken. Voor $Sin.x$ kan gesteld worden $Ax + Bx^2 + enz.$ (zijnde A, B, $enz.$ onafhankelijk van x,) omdat, onder dien vorm alleen, de onderstelling van $x = 0$, tevens $Sin.x = 0$ maakt. Daar nu $Cos.x = \sqrt{[1 - Sin^2.x]}$ is, zal noodzakelijk $Cos.x = \sqrt{[1 - A^2x^2 - 2ABx^3 - enz.]} = 1 - \frac{A^2x^2}{2}$ $+ enz$ moeten zijn. Zonder dat het nu noodig is, de termen dezer reeksen, in de berekening, verder voorttezetten, zoo als dadelijk blijken zal, merken wij aan: dat, naar deze aangenomene onderstelling,

Sin.

$$Sin.\, n\, x = n\, A\, x + n^2\, B\, x^2 + n^3\, C\, x^3 + enz.$$

$$Cos.\, n\, x = 1 - \frac{n^2\, A^2\, x^2}{2} + enz.$$

zal moeten zijn. Indien wij dan de eerste dezer vergelijkingen met $\sqrt{-1}$ vermenigvuldigen, en bij het product de tweede optellen, dan zal men, volgens de grond-vergelijking, (A) verkrijgen:

$$Cos.x + Sin.x\sqrt{-1} = \left\{1 + nAx\sqrt{-1} + n^2(B\sqrt{-1} - \tfrac{1}{2}A^2)x^2 + enz.\right\}^{\frac{1}{n}}$$

Stellen wij nu kortheidshalve

$$n\, A\, x\sqrt{-1} + n^2\,(B\sqrt{-1} - \tfrac{1}{2}\, A^2)\, x^2 + enz. = n\, P \quad . \; . \; (B)$$

dan zal de voorgaande vergelijking in deze volgende

$$Cos.\, x + Sin.\, x\sqrt{-1} = (1 + n\, P)^{\frac{1}{n}}$$

veranderen, en, volgens het Binomium van Newton, zal

$$Cos.\, x + Sin.\, x\sqrt{-1} = 1 + \frac{1}{n}.(n\,P) + \frac{1\,(1-n)}{n\,.\,2n}\,(n\,P)^2 + $$
$$+ \frac{1\,(1-n)\,(1-2n)}{n\,.\,2n\,.\,3n}\,(n\,P)^3 + enz.$$

zijn; welke vergelijking onder de volgende gedaante zal kunnen gesteld worden:

$$Cos.\, x + Sin.\, x\sqrt{-1} = 1 + \frac{1}{1}\left(\frac{n\,P}{n}\right) + \frac{1\,(1-n)}{1\,.\,2}\left(\frac{n\,P}{n}\right)^2$$
$$+ \frac{1\,(1-n)\,(1-2n)}{1\,.\,2\,.\,3}\left(\frac{n\,P}{n}\right)^3 + enz.$$

of, dat op hetzelfde uitkomt, onder deze

$$Cos.\, x + Sin.\, x\sqrt{-1} = 1 + P + \frac{1\,.\,(1-n)}{1\,.\,2}\,P^2 + \; . \; . \; . \; .$$
$$\frac{1\,(1-n)\,(1-2n)}{1\,.\,2\,.\,3}\,P^3 + enz. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (C)$$

Nu is het klaar, dat, in de vergelijking (A), de waarde van de letter n naar welgevallen zal kunnen genomen worden. Men zal dan n gelijk nul mogen stellen, en de vergelijking (C) zal in

$$Cos.\, x + Sin.\, x\sqrt{-1} = 1 + P + \frac{1}{1\,.\,2}\,P^2 + \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3}\,.\,P^3 + \; . \; .$$
$$\frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\,.\,P^4 + enz. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (D)$$

en, vergelijking (B), na dezelve door n gedeeld te hebben, in

$$P = A\, x\sqrt{-1}$$

veranderen.

Stel-

Stellen wij nu deze waarde van P in de vergelijking (D); dan hebben wij:

$$Cos.\, x + Sin.\, x\sqrt{-1} = 1 + Ax\sqrt{-1} + \tfrac{1}{2}(Ax\sqrt{-1})^2 + \frac{1}{1.2.3}(Ax\sqrt{-1})^3 + enz.$$

Men zal, op eene gelijke wijze, vinden: dat

$$Cos.\, x - Sin.\, x\sqrt{-1} = 1 - Ax\sqrt{-1} + \tfrac{1}{2}(Ax\sqrt{-1})^2 - \frac{1}{1.2.3}(Ax\sqrt{-1})^3 + enz.$$

zal zijn. De som dezer vergelijkingen door 2 en de eerste min de tweede door $2\sqrt{-1}$ deelende, zal men, na de magten van $Ax\sqrt{-1}$, volgens §. 468, ontwikkeld te hebben, verkrijgen:

$$Cos.\, x = 1 - \frac{A^2 x^2}{1.2} + \frac{A^4 x^4}{1.2.3.4} - \frac{A^6 x^6}{1.2.3.4.5.6} + enz.$$

$$Sin.\, x = Ax - \frac{A^3 x^3}{1.2.3} + \frac{A^5 x^5}{1.2.3.4.5} - enz.$$

waarin alles, behalve de standvastige grootheid A, bekend is. Om nu de waarde van A te vinden, deele men de eerste vergelijking door x; dan verkrijgt men:

$$\frac{Sin.\, x}{x} = A - \frac{A^3 x^2}{1.2.3} + \frac{A^5 x^4}{1.2.3.4.5} - enz.$$

stellen wij nu $x = 0$; dan is in dit geval $Sin.\, x = x$; derhalve . . . $\frac{Sin.\, x}{x} = 1 = A$: en de bovenstaande reeksen worden gevolgelijk:

$$Cos.\, z = 1 - \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^4}{1.2.3.4} - \frac{z^6}{1.2.3.4.5.6} + \frac{z^8}{1.2.3.4.5.6.7.8} - enz.$$

$$Sin.\, z = z - \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5} - \frac{z^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \frac{z^9}{1.2.3.4.5.6.7.8.9} - enz. \text{ (90).}$$

Deze zijn de reeksen, waardoor men de Sinus en de Cosinus van eenen boog, door zijne lengte, in deelen van de radius uitgedrukt, berekenen kan. †† Deze reeksen bestaan, zoo als uit het beloop van de voorgaande analysis blijkt, uit een onnoemlijk aantal termen.

§. 619. Wanneer men, in de reeks $e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + enz.$ zie

(90) In de Verhandelingen van het *Bat. Genootschap*, *XII Deel*, en in mijne *Handl. tot de Beschouw. en Werkd. Meetk.* §. 1066. zijn deze reeksen, op eene geheel nieuwe wijze, betoogd. Wij hebben, dezelve op het voetspoor van LAGRANGE, uit het Binomium van NEWTON willen afleiden.

zie §. 591, x eerst gelijk $+z\sqrt{-1}$; en daarna gelijk $-z\sqrt{-1}$ ſtelt, en de reekſen, welke men, (zie §. 468.) verkrijgt, optelt en aftrekt; de ſom door 2, en het verſchil door $2\sqrt{-1}$ deelt; dan zal men:

$$Coſ.\,z = \frac{e^{+z\sqrt{-1}} + e^{-z\sqrt{-1}}}{2};\ en,\ Sin.\,z = \frac{e^{+z\sqrt{-1}} - e^{-z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$

verkrijgen, waaruit terſtond volgen zal:

$$1^{\circ}\quad e^{+z\sqrt{-1}} = Coſ.\,z + Sin.\,z\sqrt{-1}$$
$$2^{\circ}\quad e^{-z\sqrt{-1}} = Coſ.\,z - Sin.\,z\sqrt{-1}$$

In alle deze vergelijkingen, is e het grondtal van de Neperiaanſche Logarithmen.

§. 620. Uit deze vergelijkingen volgt terſtond:

$$+z\sqrt{-1} = Nep.\,Log.\,(Coſ.\,z + Sin.\,z\sqrt{-1})$$
$$-z\sqrt{-1} = Nep.\,Log.\,(Coſ.\,z - Sin.\,z\sqrt{-1})$$

trekkende de tweede dezer vergelijkingen van de eerſte af; dan zal men, na alles door $2\sqrt{-1}$ gedeeld te hebben, verkrijgen:

$$z = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \times Nep.\,Log.\,\left\{\frac{Coſ.\,z + Sin.\,z\sqrt{-1}}{Coſ.\,z - Sin.\,z\sqrt{-1}}\right\}$$

of wel, teller en noemer dezer breuk door $Coſ.\,z$ deelende, (omdat $Sin.\,z : Coſ.\,z = Tang.\,z$ is,)

$$z = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \times Nep.\,Log.\,\left\{\frac{1 + Tang.\,z\sqrt{-1}}{1 - Tang.\,z\sqrt{-1}}\right\}$$

Vergelijkende nu deze uitdrukking met $Nep.\,Log.\,\left\{\frac{1+x}{1-x}\right\} = \ldots$

$2\left\{x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + enz.\right\}$; en makende $x = Tang.\,z\sqrt{-1}$; dan zal men, na alles behoorlijk herleid te hebben, vinden:

$$z = Tang.\,z - \frac{Tang^3.\,z}{3} + \frac{Tang^5.\,z}{5} - \frac{Tang^7.\,z}{7} + enz.\ (91).$$

Door deze formule, wordt de waarde van eenen cirkel-boog, in deelen van de halve middellijn, bekend, wanneer de Tangens van dien boog in die zelfde deelen gegeven is.

§. 621. De Tangens van eenen halven regten hoek, of 45°, is gelijk één; ſtellen wij nu de lengte van den halven omtrek des cirkels, in

(91) Zie *Handl.* §. 1082. alwaar deze reeks, op eene geheel nieuwe wijze, betoogd is. Ook zal men dezelve met behulp van het binomium uit de vergelijking $Coſ.\,n\,x + Sin.\,n\,x\sqrt{-1} = (Coſ.\,x + Sin.\,x\sqrt{-1})^n$ kunnen afleiden.

in deelen van de halve middelijn uitgedrukt, gelijk π (letter, die, in het vervolg, altijd dezelfde beteekenis zal hebben,) dan zal

$$\tfrac{1}{4}\pi = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{11} + \tfrac{1}{13} - \tfrac{1}{15} + \textit{enz.}$$

zijn. Deze is de bekende reeks van LEIBNITZ, welke nogtans ongeschikt is, om de waarde van π te vinden.

§. 622. Om deze reeks, tot het berekenen van π te gebruiken, heeft MACHIN, Hoogleeraar te *London*, in het begin der vorige Eeuw, den boog van 45° kunstiglijk in boogen weten te verdeelen, welker Tangenten, met betrekking tot de éénheid, of halve middellijn, meetbaar zijn. Men weet, dat

$$Tang.(a+b) = \frac{Tang.\,a + Tang.\,b}{1 - Tang.\,a \times Tang.\,b} \quad (92)$$

is: stellen wij nu $a+b=45°$; dan is $Tang.(a+b)=1$; en lost men dan deze vergelijking, met betrekking tot $Tang.\,b$ op; dan zal men vinden:

$$Tang.\,b = \frac{1 - Tang.\,a}{1 + Tang.\,a}$$

welk gebroken men nu voor $Tang.\,a$ nemen moge, zal $Tang.\,b$ altijd door eene meetbare breuk uitgedrukt worden.

§. 623. Men zal door deze formule gemakkelijk kunnen betoogen: dat

1° $Arc.\,45° = 4\,A.Tang.\tfrac{1}{5} - A\,Tang.\tfrac{1}{239}$.

2° $Arc.\,45° = 8\,A.Tang.\tfrac{1}{10} - 4\,A.Tang.\tfrac{1}{515} - A.Tang.\tfrac{1}{239}$ is.

* De uitdrukking $A.\,Tang.\,x$, beteekent eenen cirkel-boog, welks Tangens gelijk x is. De eerste dezer uitdrukkingen is van MACHIN, en de tweede van BUZENGEIGER. Men zal door dezelve zeer gemakkelijk het beruchte getal van LUDOLPH VAN CEULEN vinden:

$$\pi = 3,14159\;26535\;89793\;23846\;26433\;83279\;50288$$

§. 624. †† Tot elke Sinus behoort een onnoemelijk aantal bogen, welke, wanneer π de halve omtrek, en n zeker geheel getal beteekent, door

Sin.

(92) Wanneer men de zevende grond-formule door de achtste deelt; dan vindt men:

$$\frac{Sin.\,(x+y)}{Cos.\,(x+y)} = Tang.\,(x+y) = \frac{Sin.\,x\,.\,Cos.\,y + Sin.\,y\,.\,Cos.\,x}{Cos.\,x\,.\,Cos.\,y - Sin.\,x\,.\,Sin.\,y}$$

den teller en den noemer dezer breuk door $Cos.\,x \times Cos.\,y$ deelende, en $Sin.:Cos. = Tang.$ stellende, zal men de formule van den tekst vinden.

$$Sin.\, z = Sin.\,[2n\pi + z] = Sin.\,[(2n+1).\pi - z] \quad (93)$$

worden uitgedrukt. †† Stelt men in deze $z = 0$; dan is:

$$Sin.\, 0^\circ = Sin.\, 2n\pi = Sin.\,(2n+1).\pi.$$

Men kan, in de eerste dezer formulen, z zoowel negatief als positief stellen.

§. 625. Overwegen wij nu in het bijzonder de reeks, welke de Sinus van z uitdrukt, en die onder de volgende gedaante kan gesteld worden:

$$Sin.\, z = z \times \left\{ 1 - \frac{z^2}{1.2.3} + \frac{z^4}{1.2.3.4.5} - \frac{z^6}{1.2.3.4.5.6.7} + enz. \right\}$$

Wanneer nu $z = 0$ gesteld wordt, dan zal ook $Sin.\, z$ gelijk nul worden, hetwelk overëénstemt met de omstandigheid, dat $Sin.\, 0^\circ = 0$ is: maar $Sin.\, z$ wordt nog nul, wanneer men aan z de waarden van π, 2π, 3π, *enz.* geeft: daar nu de reeks, welke de $Sin.\, z$ uitdrukt, voor alle waarden van z, hoe groot men dezelve neme (94), ten laat-

(93) Zij, om deze formule te betoogen, in *fig.* 4, de boog $AB = z$; $BC = Sin.\, z$: trek dan BD evenwijdig aan AF, en voorts DE loodregt op AF; dan zal $DE = BC = Sin.\, z$ zijn: maar $DE = Sin.\, ABPD$, en $ABPD = \pi - z$ zijnde; zal $Sin.\, z = Sin.\,(\pi - z)$ zijn: laat nu het punt A; door B, P, D, F, Q, enz. verscheiden malen den omtrek doorloopen; dan is BC klaarblijkelijk de Sinus van AB plus den geheelen omtrek, gelijk de Sinus van AB plus tweemaal den omtrek, enz.: insgelijks DE gelijk de Sinus van $ABPD$ plus den omtrek, van $ABPD$ plus tweemaal den omtrek, enz. BC zal dus de Sinus van de bogen z, $2\pi + z$, $4\pi + z$, $6\pi + z$, *enz.* en DE de Sinus van de bogen $\pi - z$, $3\pi - z$, $5\pi - z$, $7\pi - z$, *enz.* zijn. Waaruit dan ten klaarste blijkt: dat

$$Sin.\, z = Sin.\,(2n\pi + z) = Sin.\,((2n+1)\pi - z)$$

zal zijn.

BK is de Cosinus van z: trekt men nu BG evenwijdig aan PQ, en laat men GH loodregt op PQ, (die AF regthoekig snijdt,) vallen; dan is $BK = HG$, en van hetzelfde teeken. Nu is GH de Cosinus van $ABPDFQG = Cos.\,(2\pi - z)$, omdat $AG = AB = z$ is. †† Men heeft dan: $Cos.\,(2\pi - z) = Cos.\, z$. Zie het gebruik dezer vergelijking §. 635.

(94) †† Deze reeks, zoowel als de reeks voor de Cosinus, wordt op het laatst altijd convergent, hoe groot men z stellen moge. De algemeene term, welke de $2n^{de}$ magt van z inhoudt, is

$$\frac{(z^2)^n}{1.2.3.4.(n-1)\,n\,(n+1)\,(n+2)\;enz.\,(2n-1).2n}$$

De noemer dezer breuk bestaat uit $2n$ factoren: het aantal factoren, van n tot $2n$ ingesloten, namelijk n, $n+1$, $n+2$, *enz.* is gelijk aan $n+1$. Het product $n(n+1)(n+2)\;enz. \ldots (2n)$ is dus grooter dan n^{n+1}: men kan laatste convergeert, zoo dat men, door een genoegzaam aantal termen te berekenen, eindelijk de Sinus van eenen boog van vele duizenden van graden vinden zou. Men zal dan ook, $z = n\pi$ stellende, door de berekening van diezelfde reeks, $Sin.\ n\pi = 0$ moeten vinden: derhalve zal de reeks, door de onderstelling van $z = n\pi$, volmaakt nul, en, in dit opzigt, als eene hoogere magts-vergelijking kunnen aangemerkt worden. Om dezelfde reden, zullen, aangezien de Sinussen van $-\pi$, -2π, -3π, *enz.* alle gelijk nul zijn, ook de onderstellingen van $z = -\pi$, $z = -2\pi$, *enz.*, $Sin.\ z = 0$ maken. Nu zal dit alles geen plaats kunnen hebben, ten zij de reeks uit de twee rijen van factoren

$$\pi - z,\ 2\pi - z,\ 3\pi - z,\ 4\pi - z,\ 5\pi - z,\ 6\pi - z,\ enz.$$
$$\pi + z,\ 2\pi + z,\ 3\pi + z,\ 4\pi + z,\ 5\pi + z,\ 6\pi + z,\ enz.$$

of wel uit deze twee andere rijen van factoren

$$1 - \frac{z}{\pi},\ 1 - \frac{z}{2\pi},\ 1 - \frac{z}{3\pi},\ 1 - \frac{z}{4\pi},\ 1 - \frac{z}{5\pi},\ 1 - \frac{z}{6\pi},$$
$$1 + \frac{z}{\pi},\ 1 + \frac{z}{2\pi},\ 1 + \frac{z}{3\pi},\ 1 + \frac{z}{4\pi},\ 1 + \frac{z}{5\pi},\ 1 + \frac{z}{6\pi},$$
enz. *enz.*

is te zamengesteld; (zie §. 154,) want, in ééne van deze twee onderstellingen, zal de waarde van $z = \pm 2\pi$, $z = \pm 2\pi$, *enz.*, de reeks gelijk nul maken. De eerste kan niet voldoen: de tweede strookt alleen met den aard der reeks; indien men dus de overëënkomstige factoren der twee laatste rijen vermenigvuldigt, den eersten met den eersten, den tweeden met den tweeden, enz.; dan zal men verkrijgen:

$$1 - \frac{z^2}{\pi^2},\ 1 - \frac{z^2}{4\pi^2},\ 1 - \frac{z^2}{9\pi^2},\ 1 - \frac{z^2}{16\pi^2},\ enz.$$

wel-

kan derhalve aannemen, dat de noemer dezer breuk grooter is dan de n^{de} magt van n. Omdat nu de reeksen voor de Sinus en de Cosinus onbepaald voortloopen, zal 'er ergens een term in deze reeksen voorkomen, in welke, hoe groot z^2 zijn moge, nogtans n grooter dan z^2 zal zijn: in dezen term zal $(z^2)^n$ kleiner dan $n(n+1)(n+2)$ *enz.* $(2n)$ zijn, en die breuk zal gevolgelijk kleiner dan

$$\frac{1}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ enz.\ n-1}$$

en, wegens de groote waarde van n, reeds onberekenbaar klein zijn; zoo dat de reeks, welke in hare eerste termen scheen te divergeren, in de nabijheid van dezen term reeds zoo aanmerkelijk zal convergeren, dat, voor de berekening van de getallen-waarden, deze en alle de volgende termen, als onmerkbaar klein, kunnen verwaarloosd worden.

welke, met en behalve z, de factoren zullen zijn van de reeks, welke de waarde van *Sin.* z uitdrukt, en, welker aantal ontelbaar groot zal zijn. †† Wij hebben derhalve de merkwaardige vergelijking

$$Sin.\, z = z \times \left(1 - \frac{z^2}{\pi^2}\right) \times \left(1 - \frac{z^2}{4\pi^2}\right) \times \left(1 - \frac{z^2}{9\pi^2}\right) \times \left(1 - \frac{z^2}{16\pi^2}\right) \times \left(1 - \frac{z^2}{25\pi^2}\right) \times enz. \quad \ldots \quad (R)$$

§. 626. †† Omdat de reeks van *Cos.* z, even als die van *Sin.* z, voor alle waarden van *Sin.* z, convergeert, en de Cosinussen van $\pm \frac{1}{2}\pi$, $\pm \frac{3}{2}\pi$, $\pm \frac{5}{2}\pi$, *enz.*, en, in het algemeen, van $\pm \frac{(2n+1)\pi}{2}$ alle nul zijn, zal men, door eene gelijke redenering, als in de voorgaande §, vinden: dat

$$Cos.\, z = \left(1 - \frac{4z^2}{\pi^2}\right) \times \left(1 - \frac{4z^2}{9\pi^2}\right) \times \left(1 - \frac{4z^2}{25\pi^2}\right) \times \ldots \left(1 - \frac{4z^2}{49\pi^2}\right) \times \left(1 - \frac{4z^2}{81\pi^2}\right) \times enz. \quad \ldots \quad (S)$$

zal zijn. Deze zijn de merkwaardige uitdrukkingen van EULER, uit welke zeer merkwaardige gevolgen kunnen afgeleid worden.

§. 627. Stellen wij, in de vergelijkingen R en S, $z = \frac{p}{q} \cdot \frac{\pi}{2}$; (zijnde altijd $\pi = 3,14159$, *enz.* = den halven omtrek, welks radius gelijk één is,) dan is $z^2 = \frac{p^2}{4q^2} \times \pi^2$; $1 - \frac{z^2}{\pi^2} = 1 - \frac{p^2}{4q^2} = \ldots \frac{4q^2 - p^2}{4q^2}$; $1 - \frac{z^2}{4\pi^2} = 1 - \frac{p^2}{16q^2} = \frac{16q^2 - p^2}{16q^2}$ *enz.*: en men zal, in plaats van (R) en (S), verkrijgen:

$$Sin. \frac{p}{2q} \cdot \pi = \frac{p \cdot \pi}{2q} \cdot \left[\frac{4q^2 - p^2}{4q^2}\right] \cdot \left[\frac{16q^2 - p^2}{16q^2}\right] \cdot \left[\frac{36q^2 - p^2}{36q^2}\right] \cdot \left[\frac{64q^2 - p^2}{64q^2}\right] \cdot \left[\frac{100q^2 - p^2}{100q^2}\right] \cdot enz. \quad \ldots \quad (T)$$

$$Cos. \frac{p}{2q} \cdot \pi = \left[\frac{q^2 - p^2}{q^2}\right] \cdot \left[\frac{9q^2 - p^2}{9q^2}\right] \cdot \left[\frac{25q^2 - p^2}{25q^2}\right] \cdot \ldots \left[\frac{49q^2 - p^2}{49q^2}\right] \cdot \left[\frac{81q^2 - p^2}{81q^2}\right] \cdot enz. \quad \ldots \quad (U)$$

welke uitdrukkingen, vermits de teller van elken factor uit het verschil van twee vierkanten bestaat, hetwelk wederom in twee stelkundige factoren ontleedbaar is, zie §. 45, onder de volgende gedaanten zullen kunnen voorgesteld worden.

$$Sin.\frac{p}{2q}.\pi = \frac{p\pi}{2q}.\left[\frac{2q-p}{2q}\right].\left[\frac{2q+p}{2q}\right].\left[\frac{4q-p}{4q}\right].\left[\frac{4q+p}{4q}\right].$$
$$\left[\frac{6q-p}{6q}\right].\left[\frac{6q+p}{6q}\right].\text{ enz. } \ldots\ldots\ldots\ldots (V)$$

$$Cof.\frac{p}{2q}.\pi = \left[\frac{q-p}{q}\right].\left[\frac{q+p}{q}\right].\left[\frac{3q-p}{3q}\right].\left[\frac{3q+p}{3q}\right]. \ldots$$
$$\left[\frac{5q-p}{5q}\right].\left[\frac{5q+p}{5q}\right].\text{ enz. } \ldots\ldots\ldots\ldots (W)$$

§. 628. Men zal, uit deze uitdrukkingen, (welke de Sinus en de Cosinus van eenen boog, wiens betrekking tot den halven omtrek bekend is, in een gedurig product, uit eene oneindig aantal factoren bestaande, voorstellen,) eene menigte anderen kunnen afleiden, welke wij, met stilzwijgen, voorbijgaan, en aan het onderzoek van den Lezer overlaten. Alleenlijk voegen wij 'er bij: dat, uit de vergelijking (V), de waarde van $\frac{1}{2}\pi$ kan afgezonderd worden: zulks doende, zullen wij vinden:

$$\tfrac{1}{2}\pi = \frac{q}{p} \times Sin.\frac{p\pi}{2q} \times \left[\frac{2q}{2q-p}\right].\left[\frac{2q}{2q+p}\right].\left[\frac{4q}{4q-p}\right]. \ldots$$
$$\left[\frac{4q}{4q+p}\right].\left[\frac{6q}{6q-p}\right].\left[\frac{6q}{6q+p}\right].\text{ enz. } \ldots\ldots (X)$$

Deze uitdrukking heeft de zonderlinge eigenschap, dat p en q, naar welgevallen, kunnen genomen worden. Neemt men $p = q = 1$; dan is $Sin.\frac{p\pi}{2q} = Sin.\frac{1}{2}\pi = 1$, en men verkrijgt:

$$\tfrac{1}{2}\pi = \tfrac{2}{1}\times\tfrac{2}{3}\times\tfrac{4}{3}\times\tfrac{4}{5}\times\tfrac{6}{5}\times\tfrac{6}{7}\times\tfrac{8}{7}\times\tfrac{8}{9}\times\tfrac{10}{9}\times\tfrac{10}{11}\times\tfrac{12}{11}\times\tfrac{12}{13}\times \text{enz. } (Y)$$

WALLIS heeft deze uitdrukking (Y), in zijne *Arithm. Infinitorum*, door interpolatie gevonden.

§. 629. Wanneer men, in de uitdrukkingen (R) en (S), $z = t\sqrt{-1}$ stelt; dan zal $z^2 = -t^2$ worden: de uitdrukkingen (R) en (S) zullen dan de waarden van $Sin.\, t\sqrt{-1}$, en $Cof.\, t\sqrt{-1}$ geven; daar nu $Cof.\, z = \frac{1}{2}(e^{+z\sqrt{-1}} + e^{-z\sqrt{-1}})$, en $Sin.\, z = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \times \ldots$ $(e^{+z\sqrt{-1}} - e^{-z\sqrt{-1}})$ is, zie §. 619, zal $Cof.\, t\sqrt{-1} = \ldots$ $\frac{1}{2}(e^{t} + e^{-t})$ en $Sin.\, t\sqrt{-1} = \frac{1}{2}(e^{-t} - e^{+t}) : 2\sqrt{-1}$ worden, en wij verkrijgen alzoo de twee volgende Euleriaansche uitdrukkingen,

$$\frac{e^{t}-e^{-t}}{2} = t.\left[1+\frac{t^2}{\pi^2}\right].\left[1+\frac{t^2}{4\pi^2}\right].\left[1+\frac{t^2}{9\pi^2}\right].\left[1+\frac{t^2}{16\pi^2}\right].$$
$$\text{enz.} = t + \frac{t^3}{1.2.3} + \frac{t^5}{1.2.3.4.5} + \frac{t^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \text{enz.}$$

$\frac{e^{t}+e^{-t}}{2}$

$$\frac{e^t + e^{-t}}{2} = \left[1 + \frac{4t^2}{\pi^2}\right].\left[1 + \frac{4t^2}{9\pi^2}\right].\left[1 + \frac{4t^2}{25\pi^2}\right].\left[1 + \frac{4t^2}{49\pi^2}\right].$$

$$\left[1 + \frac{4t^2}{81\pi^2}\right].\,enz. = 1 + \frac{t^2}{1.2} + \frac{t^4}{1.2.3.4} + \frac{t^6}{1.2.3.4.5.6} + enz.$$

uit welke men zeer gewigtige gevolgen, welke op zijnen tijd zullen opgegeven worden, kan afleiden.

TWEE- EN- ZESTIGSTE LES.

Over het Theorema *van* DE MOIVRE, *en het daaruit volgende* Theorema *van* COTES.

§. 630. Wanneer men de bekende vergelijkingen:

$$Cos.\,(x + y) = Cos.\,x \times Cos.\,y - Sin.\,x \times Sin.\,y$$
$$Cos.\,(x - y) = Cos.\,x \times Cos.\,y + Sin.\,x \times Sin.\,y$$

optelt; dan zal men verkrijgen:

$$2\,Cos.\,x \times Cos.\,y = Cos.\,(x + y) + Cos.\,(x - y)$$

In deze vergelijking, kan men voor x en y alle waardijen, naar welgevallen, stellen: men neme dan $y = n\,x$; dan zal $x + y = x + n\,x = (n + 1)\,x$, en $x - y = x - n\,x = (1 - n)\,x$ worden: de verkregene vergelijking verandert gevolgelijk in deze:

$$2\,Cos.\,x \times Cos.\,n\,x = Cos.\,(n + 1)\,x + Cos.\,(1 - n)\,x$$

Nu is de Cosinus van eenen boog gelijk is aan de Cosinus van dien zelfden boog, negatief genomen, zie noot 93; gevolgelijk is . . . . $Cos.\,(1 - n)\,x = Cos.\,(n - 1)\,x$: de laatste vergelijking zal dan veranderen in

$$2\,Cos.\,x \times Cos.\,n\,x = Cos.\,(n - 1)\,x + Cos.\,(n + 1)\,.\,x \;.\;.\; (\Upsilon)$$

in welke voor de letter n, van nul af tot in het oneindige, alle geheele getallen zullen kunnen aangenomen worden.

§. 631. Stellen wij, in deze vergelijking, $n = 1$; dan wordt, omdat $Cos.\,0^0 = 1$ is,

$$2\,Cos.\,x \times Cos.\,x = 2\,Cos^2.\,x = 1 + Cos.\,2\,x$$

Men zal $2\,Cos.\,x = y + \frac{1}{y}$ kunnen stellen; want, wanneer x gegeven is, dan zal men y zoodanig kunnen bepalen, dat aan deze vergelijking voldaan worde: maar dan zal ook

$$4\,Cos^2.\,x = y^2 + 2 + \frac{1}{y^2}$$

moeten zijn, en door twee deelende,

$$2\,Cos^2.\,x = \tfrac{1}{2}\,y^2 + \frac{1}{2\,y^2} + 1$$

Maar nu is $2\,Cos^2.\,x = 1 + Cos.\,2\,x$; derhalve is ook

$$Cos.\,2\,x = \tfrac{1}{2}\,y^2 + \frac{1}{2\,y^2};\ \text{of}\ 2\,Cos.\,2\,x = y^2 + \frac{1}{y^2}$$

Vermenigvuldigt men voorts deze laatste vergelijking met

$$2\,Cos.\,x = y + \frac{1}{y}$$

dan zal men voor het product verkrijgen:

$$4\,Cos.\,x \times Cos.\,2\,x = y^3 + \frac{1}{y^3} + y + \frac{1}{y} = y^3 + \frac{1}{y^3} + 2\,Cos.\,x$$

Maar stelt men nu in (T), $n = 2$, dan zal men verkrijgen:

$$4\,Cos.\,x \times Cos.\,2\,x = 2\,Cos.\,x + 2\,Cos.\,3\,x$$

welke, met de voorgaande vergeleken zijnde, geven zal:

$$2\,Cos.\,3\,x + 2\,Cos.\,x = y^3 + \frac{1}{y^3} + 2\,Cos.\,x$$

of, wanneer men aan beide zijden $2\,Cos.\,x$ aftrekt, eindelijk

$$2\,Cos.\,3\,x = y^3 + \frac{1}{y^3}$$

Het zal, op dezelfde wijze, blijken: dat

$$2\,Cos.\,4\,x = y^4 + \frac{1}{y^4};\qquad 2\,Cos.\,5\,x = y^5 + \frac{1}{y^5}$$

zal zijn.

Stellen wij, in het algemeen: dat

$$2\,Cos.\,n\,x = y^n + \frac{1}{y^n}$$

zij, en vermenigvuldigen wij deze vergelijking met $Cos.\,x = y + \frac{1}{y}$; dan zal men, op gelijke wijze, vinden:

$$2\,Cos.\,(n+1)\,x = y^{n+1} + \frac{1}{y^{n+1}}.$$

Uit dit alles blijkt het dan: †† *dat, wanneer*

$$2\,Cos.\,x = y + \frac{1}{y}$$

gesteld wordt, ook te gelijk, in het algemeen,

$$2\,Cos.\,n\,x = y^n + \frac{1}{y^n}\ (95)$$

zal moeten zijn.

§. 632.

(95) Het product van y en $\frac{1}{y}$, is gelijk aan de éénheid: indien wij der-

§. 632. Herleidt men deze twee vergelijkingen; dan zal men verkrijgen:

$$y^2 - 2y\,Cof.\,x + 1 = 0; \quad en \quad y^{2n} - 2y^n\,Cof.\,nx + 1 = 0$$

welke te gelijk moeten beſtaan, en daarom ten minſte eenen gemeenſchappelijken wortel zullen moeten hebben.

§. 633. Stellen wij: dat p de gemeenſchappelijke wortel dezer twee vergelijkingen zij; dan zal, aangezien deze vergelijkingen onveranderd blijven, het zij men p of $\frac{1}{p}$, in plaats van y, ſtelle, ook $\frac{1}{p}$ een gemeenſchappelijke wortel van dezelve moeten zijn. De grootheden p en $\frac{1}{p}$ zijn dan de wortels der vierkants-vergelijking $y^2 - 2y\,Cof.\,x + 1 = 0$, en daar zij ook wortels van de vergelijking $y^{2n} - 2y^n\,Cof.\,nx + 1 = 0$ zijn, †† zal $y^2 - 2y\,Cof.\,x + 1$, noodzakelijk een factor van $y^{2n} - 2y^n\,Cof.\,nx + 1 = 0$ moeten zijn.

Stellen wij nu $nx = \phi$; dan zal $x = \frac{\phi}{n}$ zijn, en dan zal uit het betoogde volgen: †† dat de uitdrukking $y^{2n} - 2y^n\,Cof.\,\phi + 1$, de uitdrukking $y^2 - 2y\,Cof.\,\frac{\phi}{n} + 1$ tot deeler zal moeten hebben, onder dit beding nogtans, wanneer n een geheel poſitief getal is.

§. 634. Wanneer dan de halve omtrek des cirkel door π wordt uitgedrukt; dan zal, vermits, in het algemeen,

$$Cof\,\phi = Cof.\,(\phi + 2n\pi)$$

is, $\phi + 2n\pi$ in plaats van ϕ kunnen geſteld worden, en men zal voor n alle geheele getallen, van nul af tot $n - 1$ ingeſloten, ſtellen kunnen, zonder dat de uitdrukking $y^{2n} - 2y^n\,Cof.\,(\phi + 2n\pi) + 1$ in waarde zal veranderen: maar hoezeer de Coſinus van den hoek $\phi + 2n\pi$, voor elke waarde van n, dezelfde blijft, het zij men ϕ, $\phi + 2\pi$, $\phi + 4\pi$, $\phi + 6\pi$, *enz.* neemt, zoo zullen nogtans de n^{de} deelen van deze bogen onderſcheidene Coſinusſen hebben, en men

derhalve $2\,Cof.\,x = y + \frac{1}{y}$, als eene bekende grootheid, aannemen; dan zal, volgens de oploſſing van het vraagſtuk, in §. 562, voorkomende,

$$2\,Cof.\,nx = (2\,Cof.\,x)^n - n.(2\,Cof.\,x)^{n-2} + n.\frac{n-3}{2}(2\,Cof.\,x)^{n-4} - n.\frac{n-4}{2}.\frac{n-5}{3}(2\,Cof.\,x)^{n-6} + enz.$$

zijn, en hierdoor kan de Coſinus van het veelvoud van eenen boog door deszelfs Coſinus berekend worden.

men zal daarom voor den factor $y^2 - 2y\,Cos.\frac{\phi}{n} + 1$ niet minder dan n onderscheidene waarden verkrijgen. †† De uitdrukking

$$y^{2n} - 2y^n\,Cos.\phi + 1$$

zal alzoo de volgende uitdrukkingen:

$$y^2 - 2y\,.\,Cos.\frac{\phi}{n} + 1$$

$$y^2 - 2y\,.\,Cos.\left(\frac{\phi}{n} + \frac{2\pi}{n}\right) + 1$$

$$y^2 - 2y\,.\,Cos.\left(\frac{\phi}{n} + \frac{4\pi}{n}\right) + 1$$

. . . .

$$y^2 - 2y\,.\,Cos.\left(\frac{\phi}{n} + \frac{2(n-3)\pi}{n}\right) + 1$$

$$y^2 - 2y\,.\,Cos.\left(\frac{\phi}{n} + \frac{2(n-2)\pi}{n}\right) + 1$$

$$y^2 - 2y\,.\,Cos.\left(\frac{\phi}{n} + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right) + 1$$

tot factoren hebben, welke alle van elkander onderscheiden, en n in aantal zijn: zoodat, wanneer men dezelve met elkander vermenigvuldigt, derzelver product $y^{2n} - 2y^n\,.\,Cos.\phi + 1$ zal zijn. Dit is het Theorema van DE MOIVRE, uit hetwelk dat van COTES, op de volgende wijze, wordt opgemaakt.

§. 635. Stellen wij $\phi = 0$; dan is $Cos.\phi = Cos.\,0 = 1$. In deze onderstelling, wordt $\frac{\phi}{n} = 0$; $\frac{\phi}{n} + \frac{2\pi}{n} = \frac{2\pi}{n}$; $\frac{\phi}{n} + \frac{4\pi}{n} = \frac{4\pi}{n}$; gevolgelijk is $Cos.\frac{\phi}{n} = Cos.\,0^\circ = 1$; $Cos.\left(\frac{\phi}{n} + \frac{2\pi}{n}\right) = Cos.\frac{2\pi}{n}$; *enz.* †† De factoren van de uitdrukking $y^{2n} - 2y^n + 1$, of $(y^n - 1)^2$, zullen dan worden

$y^2 - 2y + 1$ . . . . . . eerste factor

$y^2 - 2y\,.\,Cos.\frac{2\pi}{n} + 1$ . . . . . . 2^e . .

$y^2 - 2y\,.\,Cos.\frac{4\pi}{n} + 1$ . . . . . . 3^e . .

. . . .

$y^2 - 2y\,.\,Cos.\frac{2(n-2)\pi}{n} + 1$. $(n-1)^e$

$y^2 - 2y\,.\,Cos.\frac{2(n-1)\pi}{n} + 1$ . . n^e

Ver-

Vermits nu, in het algemeen, $Cof.\,z = Cof.\,(2\pi - z)$ is, noot 93, zal $Cof.\,\frac{2(n-1)\pi}{n} = Cof.\left(2\pi - \frac{2\pi}{n}\right) = Cof.\,\frac{2\pi}{n}$; $Cof.\,\frac{2(n-2)\pi}{n}$ $= Cof.\left(2\pi - \frac{4\pi}{n}\right) = Cof.\,\frac{4\pi}{n}$; *enz.* Het blijkt hieruit: †† dat de n^{de}, $(n-1)^e$, $(n-2)^e$, $(n-3)^e$, *enz.* factoren, in orde, gelijk zullen zijn aan de 2^e, 3^e, 4^e, 5^e, *enz.* factoren, weshalve

$$(y^n - 1)^2 = (y-1)^2 \times \left(y^2 - 2y\,.\,Cof.\,\frac{2\pi}{n} + 1\right)^2 \times \ldots;$$
$$\left(y^2 - 2y\,.\,Cof.\,\frac{4\pi}{n} + 1\right)^2 \times \left(y^2 - 2y\,.\,Cof.\,\frac{6\pi}{n} + 1\right)^2 \times$$
$$\left(y^2 - 2y\,.\,Cof.\,\frac{8\pi}{n} + 1\right)^2 \times enz. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\alpha)$$

Hier zijn nu twee gevallen te onderfcheiden. 1° Indien n oneven, en gelijk $2p+1$ is. In dit geval, zullen de factoren van de onderftaande rangorden:

$$\begin{array}{l} 2p+1,\ 2p,\ 2p-1,\ 2p-2\ \ldots\ p+2,\ p+1,\ p \\ 2,\quad 3,\quad 4,\quad 5\ \ldots\ldots\ p+1,\ p+2,\ p+3 \end{array}$$

overeénftemmen en gelijk zijn, en wanneer men, in de voorgaande vergelijking, $n = 2p+1$ ftelt, dan zal men verkrijgen:

$$(y^{2p+1} - 1)^2 = (y-1)^2 \times \left(y^2 - 2y\,.\,Cof.\,\frac{2\pi}{2p+1} + 1\right)^2 \times$$
$$\left(y^2 - 2y\,.\,Cof.\,\frac{4\pi}{2p+1} + 1\right)^2 \times enz. \times \ldots\ldots$$
$$\left(y^2 - 2y\,.\,Cof.\,\frac{2(p-1)\pi}{2p+1} + 1\right)^2 \times \ldots\ldots$$
$$\left(y^2 - 2y\,.\,Cof.\,\frac{2p\pi}{2p+1} + 1\right)^2$$

of, uit derzelver leden den vierkants-wortel trekkende,

$$y^{2p+1} - 1 = (y-1) \times \left(y^2 - 2y\,.\,Cof.\,\frac{2\pi}{2p+1} + 1\right) \times \ldots$$
$$\left(y^2 - 2y\,.\,Cof.\,\frac{4\pi}{2p+1} + 1\right) \times enz. \times \ldots\ldots$$
$$\left(y^2 - 2y\,.\,Cof.\,\frac{2p\pi}{2p+1} + 1\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\beta)$$

2° Wanneer n even is; dan ftelle men $n = 2p$, en, in dit geval, zal de $2p^{den}$ factor met den tweeden; de $(2p-1)^e$ factor met den derden, enz., en de $(p+1)$ met den $(p+1)^{en}$ factor overeénftemmen: deze laatfte zal gevolgelijk op zich zelve ftaan, en, daar $n = 2p$ is is, door $y^2 - 2y \cdot Cos. \frac{2p\pi}{2p} + 1$, of door $y^2 - 2y\, Cos.\, \pi + 1$, worden uitgedrukt: dan, aangezien $Cos.\, \pi = -1$ is, verandert hij in $y^2 + 2y + 1$ of $(y+1)^2$, en de vergelijking (α) verandert voor dit geval, in

$$(y^{2p} - 1)^2 = (y-1)^2 \times \left(y^2 - 2y \cdot Cos. \frac{2\pi}{2p} + 1\right)^2 \times \ldots \left(y^2 - 2y \cdot Cos. \frac{4\pi}{2p} + 1\right)^2 \times enz. \times \left(y^2 - 2y \cdot Cos. \frac{2(p-1)\pi}{2p} + 1\right)^2 \times (y+1)^2$$

of, trekt men hieruit den vierkants-wortel, in

$$y^{2p} - 1 = (y+1) \times (y-1) \times \left(y^2 - 2y \cdot Cos. \frac{\pi}{p} + 1\right) + \ldots \left(y^2 - 2y \cdot Cos. \frac{2\pi}{p} + 1\right) \times \left(y^2 - 2y \cdot Cos. \frac{3\pi}{p} + 1\right) \times enz. \times \left(y^2 - 2y \cdot Cos. \frac{(p-1) \cdot \pi}{p} + 1\right) \quad \ldots \quad (\gamma)$$

§. 636. Maar stellen wij, in de uitdrukking van DE MOIVRE, dat is, in $y^{2n} - 2y^n\, Cos.\, \phi + 1$, den hoek $\phi = \pi$; dan wordt $Cos.\, \phi = Cos.\, \pi = -1$, en dan verandert deze uitdrukking in $y^{2n} + 2y^n + 1 = (y^n + 1)^2$, terwijl, voor derzelver factoren, $Cos. \frac{\phi}{n} = Cos. \frac{\pi}{n}$; .. $Cos.\left(\frac{\phi}{n} + \frac{2\pi}{n}\right) = Cos. \frac{3\pi}{n}$; $Cos.\left(\frac{\phi}{n} + \frac{4\pi}{n}\right) = Cos. \frac{5\pi}{n}$; enz. $Cos.\left(\frac{\phi}{n} + \frac{2(n-2)\pi}{n}\right) = Cos. \frac{(2n-3)\pi}{n}$; $Cos.\left(\frac{\phi}{n} + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right) = Cos. \frac{(2n-1)\pi}{n}$ wordt. Men zal dan de vergelijking:

$$(y^n + 1)^2 = \left(y^2 - 2y \cdot Cos. \frac{\pi}{n} + 1\right) \times \left(y^2 - 2y \cdot Cos. \frac{3\pi}{n} + 1\right) \times enz. \times \left(y^2 - 2y \cdot Cos. \frac{(2n-3)\pi}{n} + 1\right) \times \ldots \left(y^2 - 2y \cdot Cos. \frac{(2n-1)\pi}{n} + 1\right)$$

verkrijgen. In deze is nu wederom: $Cos. \frac{(2n-1)\pi}{n} = \ldots$ $Cos.\left(2\pi - \frac{\pi}{n}\right) = Cos. \frac{\pi}{n}$; voorts $Cos. \frac{(2n-3)\pi}{n} = \ldots$

Cos.

$Cof.\left(2\pi-\frac{3\pi}{n}\right)=Cof.\frac{3\pi}{n}$ *enz.* Men zal dan, daar de n^{de} factor aan den eerften, de $(n-1)^e$ factor aan den tweeden, enz. gelijk is, in plaats van deze vergelijking, kunnen ftellen:

$$(y^n+1)^2=\left(y^2-2y.Cof.\frac{\pi}{n}+1\right)^2\times\left(y^2-2y.Cof.\frac{3\pi}{n}+1\right)^2$$
$$\times\ enz.\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (\alpha\alpha)$$

Wanneer nu n oneven en gelijk $2p+1$ is, dan zal de $(p+1)$ factor, welke alsdan de middelfte is, op zich zelven ftaan en zal door $y^2-2y.Cof.\frac{(2p+1)\pi}{2p+1}+1$, of $y^2-2y.Cof.\pi+1$, dat is, omdat $Cof.\pi=-1$ is, door y^2+2y+1, of $(y+1)^2$, worden uitgedrukt; en men zal dan, na den vierkants-wortel uit $(\alpha\alpha)$ getrokken te hebben, verkrijgen:

$$y^{2p+1}+1=(y+1).\left(y^2-2y.Cof.\frac{\pi}{2p+1}+1\right)\times\ldots.$$
$$\left(y^2-2y.Cof.\frac{3\pi}{2p+1}+1\right)\times\left(y^2-2y.Cof.\frac{5\pi}{2p+1}+1\right)$$
$$\times\ enz.\times\left(y^2-2y.Cof.\frac{(2p-1)\pi}{2p+1}+1\right)\ \ldots.\ (\delta)$$

Is n even en gelijk $2p$, dan zal men vinden:

$$y^{2p}+1=\left(y^2-2y.Cof.\frac{\pi}{2p}+1\right)\times\left(y^2-2y.Cof.\frac{3\pi}{2p}+1\right)\times$$
$$enz.\times\left(y^2-2y.Cof.\frac{(2p-3)\pi}{2p}+1\right)\times\ \ldots\ldots$$
$$\left(y^2-2y.Cof.\frac{(2p-1)\pi}{2p}+1\right)\ \ldots\ldots\ldots\ (\varepsilon)$$

§. 637. In de formulen (β), (γ), (δ) en (ε), zijn de vier gevallen van de Leerftelling van COTES begrepen (96), welke, zoo als ge-

(96) Dit Theorema komt, in de *Harmonia Menfurarum* van COTES, op eene andere wijze voor. Het ftaat aldaar met de eigenfchappen des cirkels in een verband, merkwaardig genoeg, om zulks kortelijk optegeven. Laat, in *fig.* 5 en 6, een boog (o) (1) met de radius A (o) befchreven, en uit eenig punt B (1) getrokken worden; ftel de boog (o) (1), welke den hoek (o) A (1) meet, gelijk φ; de radius A (o) gelijk de éénheid; $AB=x$ en $B(1)=y$; dan is, in den driehoek AB (1), volgens de bekende eigenfchappen des driehoeks,

$$[B(1)]^2=AB^2+(A(1))^2-2AB\times A(1)\times Cof.\varphi;$$
dat is $\ldots\ldots\ y^2=x^2-2x\,Cof.\varphi+1$

On-genoegzaam blijkt, een bijzonder geval van de meer algemeene stelling van DE MOIVRE is. Beide deze Leerstelsels leeren ons: †† *dat de vergelijkingen* $y^{2n} - 2y^n \,Cos.\, \phi + 1 = 0$, *en* $y^n \pm 1 = 0$, *elk zoo vele wortels hebben, als 'er éénheden in de exponenten* $2\,n$ *en* n *zijn.*

Be-

Onderstellen wij nu: dat den omtrek (0) (1) (2) enz. in een aantal van $2\,m$ deelen verdeeld zij, en laten de lijnen B (0), B (1), B (2), enz., welke uit B tot de deelpunten getrokken worden, door y_0, y_1, y_2, y_3, enz. y_m, worden uitgedrukt; dan zal men, π gelijk aan den halven omtrek, en voor ϕ de waarden $\frac{0}{m}\pi$, $\frac{1}{m}\pi$, $\frac{2}{m}\pi$, $\frac{3}{m}\pi$, *enz.* stellende, de twee reeksen van vergelijkingen verkrijgen:

$$1^{\circ}\ \left\{\begin{array}{ll} y_0^2 & = x^2 - 2x\,Cos.\ \frac{0}{m}\ \pi + 1 \\ y_1^2 & = x^2 - 2x\,Cos.\ \frac{1}{m}\ \pi + 1 \\ y_2^2 & = x^2 - 2x\,Cos.\ \frac{2}{m}\ \pi + 1 \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{2(m-1)}^2 & = x^2 - 2x\,Cos.\ \frac{2m-2}{m}\ \pi + 1 \end{array}\right\}\ \textit{voor de evene verdeelingen.}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$2^{\circ}\ \left\{\begin{array}{ll} y_1^2 & = x^2 - 2x\,Cos.\ \frac{1}{m}\ \pi + 1 \\ y_3^2 & = x^2 - 2x\,Cos.\ \frac{3}{m}\ \pi + 1 \\ y_5^2 & = x^2 - 2x\,Cos.\ \frac{5}{m}\ \pi + 1 \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{2m-1}^2 & = x^2 - 2x\,Cos.\ \frac{2m-1}{m}\ \pi + 1 \end{array}\right\}\ \textit{voor de onevene verdeelingen.}$$

Men merke nu op: 1° dat overéénkomstig het verklaarde in §. 635 en §. 636, de vergelijkingen, welke betrekkelijk zijn tot den eersten halven omtrek, de dubbelde factoren van $x^m - 1$ en $x^m + 1$ geven, wanneer men eerst de evene, en daarna de onevene verdeelingen neemt; 2° dat de deelpunten, welke gelijklijk van de middellijn verwijderd zijn, voor de lijnen B (1), B (2), enz. gelijke waarden geven, zoodat $y_{m-1} = y_{m+1}$ enz. is; waaruit dan volgt: dat

$$x^m - 1 = y_0 \times y_2 \times y_4 \times enz.\ y_{(2m-2)}$$

$$x^m + 1 = y_1 \times y_3 \times y_5 \times enz.\ y_{(2m-1)}$$

In deze twee vergelijkingen, bestaat eigenlijk het Theorema van COTES, hetgeen, op de aangehaalde plaats, als eene eigenschap van de regelmatige veelhoeken, in den cirkel beschreven, is voorgedragen.

Bepalen wij ons, om zulks aantetoonen, tot de vergelijking:

$$y^{2n} - 2y^n \, Cos.\, \phi + 1 = 0$$

aan deze zal voldaan worden, wanneer men alle hare factoren gelijk nul ftelt. Zie §. 191. Men zal dan de vergelijkingen

$$y^2 - 2y \;\; Cos.\, \frac{\phi}{n} + 1 = 0$$

$$y^2 - 2y \,.\, Cos.\left(\frac{\phi}{n} + \frac{2\pi}{n}\right) + 1 = 0$$

enz. enz.

elk in het bijzonder moeten oplosfen.

§. 638. Nemen wij, in het algemeen, $y^2 - 2y \,.\, Cos.\, \mu + 1 = 0$; dan zal men, volgens §. 97, verkrijgen:

$$y = Cos.\, \mu \pm \sqrt{(Cos^2.\, \mu - 1)}$$

maar $Cos^2.\, \mu - 1 = -1 \times (1 - Cos^2.\, \mu) = -1 \times Sin^2.\, \mu$; gevolgelijk $\sqrt{(Cos^2.\, \mu - 1)} = Sin.\, \mu \times \sqrt{-1}$: men heeft derhalve:

$$y = Cos.\, \mu \pm Sin.\, \mu \times \sqrt{-1}.$$

Stellen wij nu, in deze laatfte vergelijking, na elkander, de bogen $\frac{\phi}{n}$; $\frac{\phi}{n} + \frac{2\pi}{n}$; $\frac{\phi}{n} + \frac{4\pi}{n}$; *enz.* in plaats van μ; dan zal men voor de wortels der vergelijking $y^{2n} - 2y^n \,.\, Cos.\, \phi + 1 = 0$ verkrijgen:

$$y = Cos.\, \frac{\phi}{n} \pm Sin.\, \frac{\phi}{n} \times \sqrt{-1}$$

$$y = Cos.\left(\frac{\phi}{n} + \frac{2\pi}{n}\right) \pm Sin.\left(\frac{\phi}{n} + \frac{2\pi}{n}\right) \times \sqrt{-1}$$

$$y = Cos.\left(\frac{\phi}{n} + \frac{4\pi}{n}\right) \pm Sin.\left(\frac{\phi}{n} + \frac{4\pi}{n}\right) \times \sqrt{-1}$$

enz. enz.

welke alle onbeftaanbaar en $2n$ in aantal zijn (97).

§. 639. Wanneer men de vier vergelijkingen voor de vier gevallen van het Theorema van Cotes met elkander vergelijkt; dan zal het uit dezelfde gronden blijken, dat in het algemeen, de wortels der vergelijking $y^n - 1 = 0$, door

$$y = Cos.\frac{h}{n} \,.\, 360^\circ + Sin.\, \frac{h}{n} \,.\, 360^\circ \times \sqrt{-1}$$

zul-

(97) Omdat de Cofinus van eenen boog altijd kleiner dan de éénheid is, zal eene vierkants-vergelijking, welke onbeftaanbare wortels heeft, vergelijk §. 111, door

$$x^2 - 2ax \; Cos.\, \phi + a^2 = 0$$

kunnen worden uitgedrukt.

zullen worden uitgedrukt; wanneer men namelijk aan h alle de waarden geeft, van één af tot n ingesloten.

§. 640. Laat nu gegeven zijn: $y^n - A = 0$; wanneer men dan de termen dezer vergelijking door de meetkunstige reeks,

$$1, \sqrt[n]{A}, \sqrt[n]{A^2}, \sqrt[n]{A^3}, \sqrt[n]{A^4} \ldots \sqrt[n]{A^n} = A$$

deelt; dan zullen, volgens §. 248, de wortels van de vergelijking $y^n - 1 = 0$, met $\sqrt[n]{A}$ moeten vermenigvuldigd worden, om die van de vergelijking $x^n - A = 0$, (in welke A positief of negatief zijn kan,) te vinden. †† Gevolgelijk zal

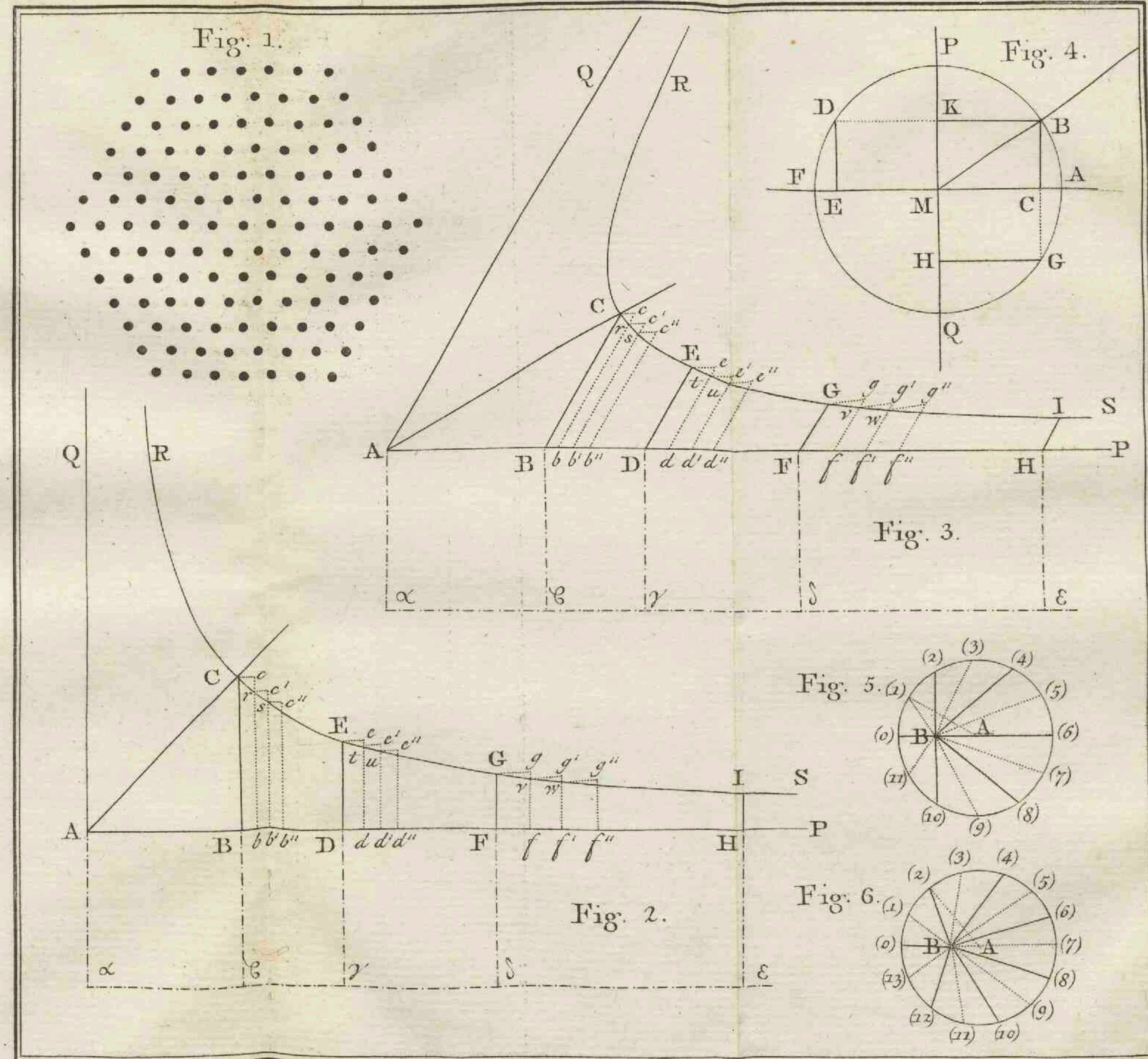
$x^n - A = 0$ *gegeven zijnde*

$$x = \left[Cos. \frac{h}{n} . 360^o + Sin. \frac{h}{n} . 360^o \sqrt{-1} \right] \times \sqrt[n]{A}$$

zijn; nemende $h = 1, 2, 3,$ *enz.* tot n ingesloten, en $\sqrt[n]{A}$ den bestaanbaren wortel, welke men, door de gewone worteltrekking, vindt. Door deze formule zal men, met behulp der gewone Sinus-tafel, alle de wortels der vergelijking $x^n - A = 0$, welke ten hoogste twee bestaanbare hebben kan, kunnen vinden.

§. 641. * De uitdrukkingen, welke wij in deze drie laatste Lessen behandeld hebben, en welke de Logarithmen en Goniometrische lijnen betreffen, noemt men *Transcendentale* of *Overklimmende uitdrukkingen*, omdat derzelver ontwikkelde waarde in geene stelkundige uitdrukking, uit een bepaald aantal termen bestaande, kunnen worden voorgesteld. Zij bekleeden, onder de stelkundige uitdrukkingen, denzelfden rang, als in de getallen de onmeetbare onder de meetbare grootheden. Derzelver kennis is in de Differentiaal- en Integraal-Rekening van veel belang: deze is het, welke de wezenlijkheid van derzelver bestaan op ontwijfelbare gronden vestigt, om welke redenen wij dan ook daar ter plaatse den eigenlijken aard dezer uitdrukkingen nader ontvouwen zullen.

WIS-



Jac. de Gelder, del. A. Zurcher sc.

WISKUNDIGE LESSEN.

XVI. BOEK.

Over de Leer der Combinatien, en derzelver gebruik in de analytische bewerkingen.

DRIE- EN- ZESTIGSTE LES.

Over de combinatien in het algemeen, en de wijze om dezelve daartestellen.

§. 642. De Wiskunst bedoelt de eigenschappen van betrekkingen der grootheden te bepalen: de beginselen, welke daartoe strekken, vloeijen alleen uit dit éénе voort: *de grootheid kan vermeerderd en verminderd worden.* Op hetzelve steunen de vier grondbewerkingen, met welker behulp getallen uit andere getallen, grootheden uit andere grootheden, zamengesteld, en de betrekkingen van het geheel tot de zamenstellende deelen overwogen worden. De uitkomsten dezer beschouwingen, vermeerderen den schat der wiskundige wetenschap, welke van de leerwijze of methode, waardoor men die uitkomsten verkrijgt, offchoon ook deze laatste door dezelfde gronden gewijzigd en bepaald wordt, even zoo zeer, als het gewrocht van de oorzaak, onderscheiden is. Elke leerwijze is nu altijd zooveel te beter, en in hare toepasfing zooveel te vruchtbaarder, naarmate zij algemeener en klaarblijkelijker is, en, met meer zekerheid, tot de bedoelde uitkomst brengt. Om deze reden, is de multiplicatie eene betere handelwijze dan de additie, schoon men door de laatste hetzelfde, als door de eerste verkrijgen kan; de algemeene formule van het Binomium van Newton, hetwelk als eene verkorte stelkundige multiplicatie kan aangemerkt worden, is is daarom boven de multiplicatie, de diviſie, en de gewone worteltrekking te ſtellen, omdat men door dezelve, zonder bijna eenige moeite, uitkomſten verkrijgt, welke niet, dan door eene langdurige en ſomtijds onuitvoerbare bewerking, zouden kunnen daargeſteld worden. Hetzelfde kan gezegd worden van de leerwijze, welke in dit boek zal worden voorgedragen. Wij hebben in het XIV Boek geleerd: hoe de magt eener tweeledige uitdrukking kan ontwikkeld worden: thans zullen wij de magten der veelledige uitdrukkingen leeren daarſtellen. Voor dezen geſchiedde zulks, door lastige multiplicatien, diviſien, worteltrekkingen, ſomtijds door de onbepaalde coefficienten, en dikwijls ook door de Differentiaal-Rekening: dan, ſedert HINDENBURG, door de ſchriften van LEIBNITZ, DE MOIVRE, BOSCOVISCH en EULER, op de gedachten gebragt werd, om de leer der combinatien op deze bewerkingen toetepasſen, is 'er eene leerwijze geboren, waardoor een groot aantal moeijelijke analytiſche bewerkingen, door het leerſtelſel der combinatien, gemakkelijk en regelmatig kan worden uitgevoerd (98).

Ver-

(98) In *Duitschland* draagt deze Leerwijze den naam van *Combinatoriſche Analyſis:* elders is zij weinig bekend. Voor drie jaren, heeft nogtans LALANDE hare lofrede in den Moniteur geplaatst. Wij kenden reeds in 1796 de twee eerſte Latijnſche ſchriſten van Profesſor HINDENBURG: maar het ging ons toen gelijk het FISCHER gegaan was: wij werden, door de menigvuldige definitien afgeſchrikt, en leerden dezelve naderhand uit FISCHER's verdedigings ſchrift: *Ueber den Urſprung der Theorie der Dimenſionszeichen und ihr Verhältniſz gegen die Combinatoriſche Analytik,* kennen. Onzes oordeels, zijn 'er twee zaken, welke eenen nieuweling in dit vak afſchrikken. 1° De menigvuldige definitien van woorden en zaken, welke, zonder van het klaarblijkelijke te verliezen, anders geplaatst zouden kunnen worden. 2° De teekens zelve, welke, daar zij voor een gedeelte uit het Hoogduitſche Alphabeth genomen zijn, de geenen, welke in deze taal niet bedreven zijn, afſchrikken. Dit laatſte maakt de beoefening der Hindenburgſche handelwijze, voor iemand, die geen Duitſcher is, moeijelijk; wij Hollanders zelfs, wier oude Nederduitſche letters met de Duitſche zooveel overëenkomst hebben, vinden deze teekens moeijelijk; om deze reden dan, en omdat de Hindenburgſche teekenſpraak, op eene Hollandſche drukkerij, bezwaarlijk zou kunnen worden uitgevoerd, hebben wij de Hindenburgſche teekens veranderd: dan, deze verandering betreft

Verklaring van teekens, woorden en zaken.

§. 643. * Het woord combinatie, van het Latijnsche woord *binis* afgeleid, beteekent de vereëniging van twee dingen, op eenigerlei wijze, uit eenige andere genomen zijnde. Het gebruik heeft nogtans dit woord algemeen gemaakt: * het woord Combinatie beteekent elke vereëniging van een bepaald aantal dingen uit eenige gegevene.

§. 644. * De dingen, welke op eenigerlei wijze vereënigd worden, pleegt men, in de Hindenburgsche leerwijze, tot meer gemaks der beschouwing, door de natuurlijke getallen 1, 2, 3, 4, enz. uittedrukken, dat is, wanneer de dingen, welke moeten vereënigd worden, door de letters *a*, *b*, *c*, *d*, *enz.* zijn aangewezen, wordt het eerste *a* door 1, het tweede *b* door 2, enz. uitgedrukt, waaruit dan een combinatorische wijzer ontstaat, welke doorgaans aldus geschreven wordt

$$\textit{Index}\left\{\begin{matrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & \textit{enz.} \\ a. & b, & c, & d, & e, & f, & g, & \textit{enz.} \end{matrix}\right\}\textit{of wijzer.}$$

In dezen Index, kunnen de letters alle soorten van dingen, alle grootheden, alle analytische uitdrukkingen beteekenen, en, in de combinatorische beschouwingen, neemt men de getallen in plaats van de dingen, die zij beteekenen: wanneer men nu van de uitkomst eener combinatie wil gebruik maken, stelt men wederom de letters in plaats van de getallen, welke in dezelve voorkomen.

§. 645. * De wijzer stelt de dingen voor, in de volgorde, waarin zij, in eenig werkstuk, of in eenige beschouwing, gegeven zijn.

§. 646. * Men noemt de zamengevoegd wordende dingen *elementen*, en eenige dezer dingen, op eene voorgestelde wijze, te zamen vereënigd zijnde, eene *complexie:* men zou in het Hollandsch zeer wel de woorden *bestaandeelen* en *zamenvoeging* daarvoor kunnen gebruiken.

§. 647. †† Wanneer men de getallen van den wijzer, als de cijfers van eenig talstelsel aanmerkt, (zoodat, wanneer die wijzer meer dan tien dingen bevat, de getallen 10, 11, enz. als cijfers op zich zelve genomen worden,) dan zullen deze cijfers, als een welgeordend getal kunnen aangemerkt worden, hetwelk, wanneer 'er n dingen zijn, ten minste tot het $(n+1)$ tallig stelsel behoort: * men neemt de zamenvoegingen der bestaandeelen in derzelver volgorde, en onderscheidt de la-

treft alleen het stoffelijke dezer teekens, en heeft geenen invloed op derzelver algemeenheid. Wij vleijen ons, dat wij daardoor aan de Hindenburgsche leerwijze eenen wezenlijken dienst zullen bewezen hebben.

lagere van de *hoogere*, en zulks brengt, zoo als uit het vervolg zal blijken, een aanmerkelijk gemak in die ſoort van bewerkingen aan.

§. 648. Een bepaald aantal dingen gegeven zijnde:

$$\left\{\begin{matrix} 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \textit{enz.} \\ a, b, c, d, e, f, g, h, \textit{enz.} \end{matrix}\right\}$$

dan kan men zich, aangaande deze, de volgende ſoorten van combinatien voorſtellen.

§. 649. 1° Men kan zich alle mogelijke plaats-verwisſelingen of permutatien dezer dingen voorſtellen. * Permuteren is van plaats of rangorde te veranderen. Somtijds zijn ſommige der gegevene beſtaandeelen dezelfde, en dan maakt het, zoo als op zijn tijd blijken zal, een bijzonder geval in de leer der permutatien uit.

§. 650. 2° Dezelfde index gegeven zijnde, kan men de dingen, welke daarin voorkomen, op alle mogelijke wijzen, twee aan twee, drie aan drie, enz. zamenvoegen, zonder dat hetzelfde beſtaandeel meer dan éénmaal voorkomt. * Deze wijze van combinatie was voor dezen onder den eenvoudigen naam van combinatie in gebruik. Thans noemen wij dezelve *eenvoudige combinatie zonder herhalingen*.

§. 651. 3° * Wanneer nogtans, in deze combinatie, de beſtaandeelen zooveelmaal als mogelijk is genomen worden, onderſcheidt men dezelve van de voorgaande combinatie door de benaming van *combinatie met herhalingen*, of *herhalings combinatien*.

§. 652. * Deze twee ſoorten van combinatien worden, gelijk ook de volgende, in klasſen onderſcheiden: tot de eerſte klasſe behooren de dingen op zich zelven genomen, tot de tweede de zamenvoegingen van twee, tot de derde, de zamenvoegingen van drie beſtaandeelen, enz.

§. 653. * Men kan in alle ſoorten van combinatien, de bijzondere zamenvoegingen van elke klasſe, naar aanwijſing van §. 649. permuteren: daardoor zal men de verſchillende klasſen van *gepermuteerde herhalings combinatien* verkrijgen. * Hindenburg noemt dezelve *variatiën*.

§. 654. Men kan eindelijk, denzelfden wijzer tot grondſlag nemende, twee, drie, en in het algemeen een bepaald aantal beſtaandeelen, op alle mogelijke wijzen, zoodanig vereënigen, dat de ſom van de rang-getallen des wijzers een bepaald en gegeven getal zij, zonder dat nogtans een wijzer-getal meer dan éénmaal voorkome. * Men noemt deze ſoort van combinatien, *combinatien tot bepaalde ſommen zonder herhalingen*, en men verdeelt dezelve in eerſte, tweede,

der-

derde klasſen, enz. naarmate van het getal der beſtaandeelen, welke in elke bijzondere zamenvoeging of complexie voorkomt.

§. 655. * Verwisſelt men in de complexien van deze laatſte ſoort van combinatie de beſtaandeelen op alle mogelijke wijzen, dan noemt men dezelve *gepermuteerde combinatien tot eene bepaalde ſom, zonder herhalingen.*

§. 656. * Wanneer men in de combinatien tot bepaalde ſommen de rang-getallen der beſtaandeelen bij herhaling doet voorkomen, noemt men dezelve *herhalings combinatien tot bepaalde ſommen.*

§. 657. * En de beſtaandeelen van de bijzondere complexien op alle mogelijke wijzen van rang veranderende, *gepermuteerde herhalings combinatien tot eene bepaalde ſom.*

§. 658. Somtijds zijn, gelijk in den volgenden index,

$$\left\{\begin{array}{llllllll} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & enz. \\ a, & b, & c, & d, & e, & f, & g, & enz. \ldots . p \\ A, & B, & C, & D, & E, & F, & G, & enz. \ldots . q \\ \mathfrak{a}, & \mathfrak{b}, & \mathfrak{c}, & \mathfrak{d}, & \mathfrak{e}, & \mathfrak{f}, & \mathfrak{g}, & enz. \ldots . r \\ \mathfrak{A}, & \mathfrak{B}, & \mathfrak{C}, & \mathfrak{D}, & \mathfrak{E}, & \mathfrak{F}, & \mathfrak{G}, & enz. \ldots . s \end{array}\right\}$$

eenige reekſen (p, q, r, s,) van dingen gegeven: men zal dan deze dingen met elkander op alle mogelijke wijzen zoodanig kunnen verëënigen, dat uit elke reeks van dingen één bijzonder ding genomen wordt, en de zoo ſtraks opgenoemde ſoorten van combinatien zijn op dezelve, zoo als nader blijken zal, onder die voorwaarde toepasſelijk.

§. 659. Alle deze verſchillende ſoorten van combinatien, zelfs hetgeen men gewoonlijk permutatien noemt niet uitgezonderd, behooren tot eene algemeene hoofdſoort van bewerkingen, en kunnen bijgevolg door één algemeen teeken uitgedrukt worden, waartoe wij de letter c, de eerſte van het woord combinatie (99), zullen gebruiken, welke letter met de bijgevoegde punten en exponenten op de wijze, welke hier volgt, de uitkomſten van de verſchillende combinatoriſche bewerkingen uitdrukt.

Lijst der combinatoriſche teekens en derzelver verklaring.

§. 660. 1° * De verëëniging of de complexie van een zeker ongenoemd aantal dingen wordt uitgedrukt, door . . $\bar{c}$

§. 661.

(99) Even gelijk men in de Differentiaal-Rekening de letter d voor differentiaal, en $\int$, de eerſte letter van ſom, gebruikt, om de Integraal aantewijzen.

§. 661. 2° * De vereëniging van een bepaald aantal van *n* dingen, door . . . . $\bar{c}^{n}$

§. 662. 3° * Alle de verschillende permutatien van een ongenoemd aantal dingen, door . . . . . $\underset{\cdot}{c}$

§. 663. 4° * Alle mogelijke permutatien van *n* dingen, door $\underset{\cdot}{c}^{n}$

§. 664. 5° * Het aantal permutatien van *p* dingen, door $N\,\underset{\cdot}{c}^{p}$

§. 665. 6° * Alle onderscheidene en mogelijke combinatien zonder herhalingen van een onbepaald aantal dingen,

. . . . twee aan twee, door . . . $\dot{c}^{2}$

. . . . drie aan drie, door . . . . $\dot{c}^{3}$

. . . . *n* aan *n*, door . . . . . . $\dot{c}^{n}$

§. 666. 7° * Alle de mogelijke combinatien, zonder herhalingen, van *n* dingen, *p* aan *p* genomen, door . . $\overset{n}{c}{}^{p}$

§. 667. 8° * Derzelver aantal, door . . . $N\,\overset{n}{c}{}^{p}$

§. 668. 9° * Alle de gepermuteerde combinatien van een ongenoemd aantal dingen, zonder herhalingen, *n* aan *n* genomen, door . . . . $\underset{\cdot}{\dot{c}}{}^{n}$

§. 669. 10° * Alle de gepermuteerde combinatien van *n* dingen, zonder herhalingen, *p* aan *p* genomen, door . $\underset{\cdot}{\overset{n}{c}}{}^{p}$

§. 670. 11° * Het aantal dezer laatste, door . . $N\,\underset{\cdot}{\overset{n}{c}}{}^{p}$

§. 671. 12° * Alle mogelijke herhalings combinatien van een ongenoemd aantal dingen, *n* aan *n* genomen, door . . . . $\ddot{c}^{n}$

§. 672. 13° * Dezelfde, uit *n* dingen, *p* aan *p* genomen, door . . . . $\overset{n}{\overline{c}}{}^{p}$

§. 673. 14°. * Alle de gepermuteerde herhalings combinatien van een ongenoemd aantal dingen, *n* aan *n*, door . $\underset{\cdot}{\ddot{c}}{}^{n}$

§. 674. 15° * Alle de gepermuteerde herhalings combinatienvan *n* dingen, *p* aan *p* genomen, door . . $\underset{\cdot}{\overset{n}{\overline{c}}}{}^{p}$

§. 675. 16° * Alle de combinatien tot eene bepaalde som van een ongenoemd aantal dingen, zonder herhalingen, op alle mogelijke wijzen, *p* aan *p*, genomen, en welke som *n* is, door . . . . . . np

§. 676. 17° * Hetzelfde mits de combinatien tot de bepaalde sommen gepermuteerd zijn, door . . $\underset{\cdot}{\dot{n}}p$

§. 677. 18° * Alle de combinatien met herhalingen, tot eene bepaalde som *n*, *p* aan *p*, genomen, door . $\ddot{n}p$

§. 678. 19° * Deze laatste gepermuteerd, door . $\underset{\cdot}{\ddot{n}}p$

§. 679.

§. 679. Aanmerking. In deze vier laatste kan men aan n en p alle waarden in geheele en positieve getallen geven, mits p altijd kleiner dan n zij.

§. 680. Wanneer, gelijk in §. 653, eenige reeksen van bestaandeelen in eenen wijzer gegeven zijn, welke door p, q, r, s, t, *enz.* worden uitgedrukt, dan zullen:

1° * Alle mogelijke combinatien van een bestaandeel van de reeks p, met een bestaandeel van de reeks q, worden uitgedrukt, door . . . . . $\frac{\cdot}{pq}$

2° * Alle mogelijke combinatien van een bestaandeel van p, met een bestaandeel van q, en met een bestaandeel van r, door . . . . $\frac{\cdot}{pqr}$

3° * Alle mogelijke combinatien van een bestaandeel van p, met een van q, met een van r, met een van s, door . $\frac{\cdot}{pqrs}$

§. 681. * Om aantewijzen, dat alle deze bijzondere combinatien gepermuteerd zijn, zal zulks geschieden, door een punt onder dezelve te stellen: aldus

$$\frac{\cdot}{\underset{\cdot}{pq}},\quad \frac{\cdot}{\underset{\cdot}{pqr}},\quad \frac{\cdot}{\underset{\cdot}{pqrs}},\quad \frac{\cdot}{\underset{\cdot}{pqrst}},\ \textit{enz.}$$

§. 682. * Wanneer uit dezelfde reeksen van bestaandeelen, op alle mogelijke wijzen, één bestaandeel uit p, en één uit q genomen wordt, zoodanig, dat de som van derzelver wijzer-getallen, bij voorbeeld, zes zij, dan zal men de vereëniging van die alle uitdrukken, door . . . . . $\frac{6}{pq}$

§. 683. * Neemt men, bij voorbeeld, drie bestaandeelen, uit elk der rijen p, q en r, één, onder die voorwaarde, dat de som gelijk *twaalf* zij; dan de som van al die combinatien worden voorgesteld, door . . . . $\frac{12}{pqr}$

§. 684. * Wanneer in deze combinatien, de complexien of zamenvoegingen gepermuteerd worden, zal men zulks door een punt aldus aanwijzen . . . . $\frac{6}{\underset{\cdot}{pq}}$

en in het geval van §. 683, door . . . . $\frac{12}{\underset{\cdot}{pqr}}$

§. 685. Alle deze teekens, zamengevoegd met de teekens, welke wij, zie §. 512, voor de binomial-coefficienten aangenomen hebben, maken het gansche zamenstel der combinatorische teekens uit, welke, wat het stoffelijke aangaat, van de Hindenburgsche merkelijk onderscheiden zijn; doch, in het wezen der zaak, even volledig, en voor

 een

een vreemdeling ongetwijfeld verstaanbarer, en in het gebruik gemakkelijker zullen zijn (100).

Over de ontwikkeling der verschillende combinatien.

§. 686. I. VRAAGSTUK. *Een zeker aantal dingen gegeven zijnde, alle dezelver mogelijke permutatien of rangschikkingen te bepalen?*

Hoe zulks geschieden kan, is in *noot* 14, *pag.* 45, I. C., en §. 372, II. C. aangetoond. Thans zullen wij eene andere oplossing geven. Laat, Tabelle VI. *fig.* 1. de index van vier dingen, *a*, *b*, *c* en *d*, gegeven zijn; dan worden, van dezen index afterekenen, door den navolgenden regel, de volgende permutatien uit de naastvoorgaande afgeleid.

1° „ *Men zoeke, in elke rangorde, van de regte naar de linke-„ hand, het eerst voorkomend lager bestaandeel, dat op een hooger „ volgt.*"

2° „ *Men zoeke, van daar naar de regtehand gaande, het be-„ staandeel, dat het naaste in rang aan dit lager komt.*"

3° „ *Men stelle dit naastvolgende bestaandeel in de plaats van het „ lagere, late de bestaandeelen ter linkehand, indien deze voorhan-„ den zijn, op hare plaats, en rangschikke alle de andere in hare „ natuurlijke volgorde.*"

4° „ *De ordening, waarop men dezen regel niet meer kan toe-„ passen, is de laatste: zij stelt de gegevene dingen in eene regel-„ matig afdalende rangordening voor.*" (101).

Om alzoo uit de rangordening *B* of 2431, in *fig.* 1, de naastvolgende afteleiden, neme men het eerste kleiner ding 2, dat op een grooter 4 volgt. Het naast grootere, dat ter linkehand staat, en op 2 volgt, is 3. Nu stelle men 3 in de plaats van 2, en daar 'er nu, ter linkehand van 3, geene bestaandeelen staan, stelle men achter 2 alle de overige in hunne natuurlijke volgorde 1, 3, 4; en men zal de

(100) Daar wij ons alleen bij het meest merkwaardigste bepalen moeten, zullen wij deze teekens niet alle gebruiken.

(101) Dat men, volgens dien regel, alle de permutatien vinden moet, is klaar: want zoolang men niet tot 4 3 2 1 gekomen is, zal men, van achter naar voren gaande, na een hooger een lager bestaandeel vinden, en gevolgelijk eene permutatie, waarop men den gegevenen regel kan toepassen; men zal derhalve niet kunnen missen, om ze alle te vinden.

de naastvolgende rangorde 3, 1, 2, 4, verkrijgen. Gegeven zijnde 4325761, dan zal men, uit deze ordening, volgens den regel, vinden 4326157. Het is kaarblijkelijk, dat de regel op de rangordening 4321 niet kan worden toegepast (102).

§. 687. Aanmerking. Volgens denzelfden regel vindt men, ook de permutatien van een gegeven aantal dingen, wanneer onder dezelve eenige gelijke gevonden worden. Zie *fig.* 2, op Tabelle VI. (103)

§. 688. 2. Vraagstuk. *Het aantal permutatien van n onderscheidene dingen te vinden?*

Het blijkt uit noot 14, I. C. pag. 45, dat

$Nc^n = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times$ *enz.* $\times (n-2) \times (n-1) \times n$

zal zijn.

§. 689. 3. Vraagstuk. *Het aantal der permutatien van n dingen te vinden, wanneer sommige dezer dingen dezelfde zijn?*

Indien 'er n dingen gegeven zijn; dan geven de bestaandeelen a en b twee ordeningen, in welke alle de andere in denzelfden rang voorkomen; deze zullen voor vier dingen a, b, c, d, bij voorbeeld, zijn $abcd$, $bacd$. Zulks zal ook voor alle andere ordeningen, in welke a en b op eenige wijze zullen voorkomen, moeten plaats hebben: wanneer derhalve $a = b$ wordt, komen die tweetallen van ordeningen op ééne en dezelfde uit, waardoor het aantal der verschillende ordeningen op de helft verminderd wordt. Hieruit volgt: dat, wanneer 'er, onder n dingen, twee dingen dezelfde zijn, het aantal van de permutatien dezer dingen door

$$\frac{1 . 2 . 3 . 4 . \text{enz.} (n-1) \times n}{1 . 2}$$

zal worden uitgedrukt. Voorts, omdat drie dingen a, b en c op 6 of $1 \times 2 \times 3$ verschillende wijzen verplaatst kunnen worden, terwijl alle de andere in dezelfde rangordening blijven, zal, indien $a = b = c$ is, het getal permutatien van n dingen door

1.

(102) Alle de combinatorische regels hebben het met alle andere gemeen, dat de enkelde lezing niet genoeg is, om met dezelve gemeenzaam te worden: om deze reden moet men dezen regel en alle de volgende op meer voorbeelden, dan de plaats ons in staat stelt, te geven, toepassen.

(103) Men zal opmerken: dat, wanneer men de permutatien naar dezen regel ontwikkelt, de cijfers, welke de bestaandeelen uitdrukken in rangorde, van het grootste tot het kleinste, alle de getallen geven, welke met die cijfers kunnen geschreven worden.

$$\frac{1.2.3.4.\mathit{enz}.(n-1)\times n}{1.2.3}$$

worden uitgedrukt. †† In het algemeen, zal men, zonder moeite, zien: dat, wanneer 'er onder de n dingen p gelijke dingen gevonden worden, het aantal van derzelver permutatien gelijk zal zijn aan

$$\frac{1.2.3.4.5.\mathit{enz}.(n-1)\times n}{1.2.3.\mathit{enz}.(p-1)\times p}$$

§. 690. In het algemeen, zal, wanneer 'er onder n dingen p dingen alle gelijk a; q dingen alle gelijk b; r dingen alle gelijk c zijn, het aantal van de permutatien dezer dingen door de formule

$$\frac{1.2.3.4.5.6.7.8.9.\mathit{enz}.(n-2)(n-1)n}{1.2.3.\mathit{enz}.p\times 1.2.3.\mathit{enz}.q\times 1.2.3.\mathit{enz}.r}$$

uitgedrukt worden: hetwelk men, de opgegevene gronden meer opzettelijk nagaande, zonder moeite vinden zal.

§. 691. Laat ons de uitkomst van de oplosfing van dit vraagftuk door een voorbeeld ophelderen. Zij gegeven het product $a^3 b^4 c^2$. Hetzelve kan aangemerkt worden als het product *aaa bbbb cc* uit negen factoren beftaande: indien men nu weten wil, op hoe vele verfchillende wijzen de factoren van dit product onderling verplaatst kunnen worden, zal men, volgens den regel, vinden:

$$N\text{ç}(a^3 b^4 c^2) = \frac{1.2.3.4.5.6.7.8.9}{1.2.3.1.2.3.4.1.2} = 1260$$

§. 692. 4. Vraagstuk. *Een zeker aantal dingen gegeven zijnde, dezelve op alle mogelijke wijzen, twee aan twee, drie aan drie, vier aan vier, enz. zoodanig zamentevoegen, dat hetzelfde ding niet tweemaal in eenige zamenvoeging voorkome?*

Zie de oplosfing 45 Vraagftuk, I. C. pag. 349. (104).

§. 693. 5. Vraagstuk. *In deze wijze van combineren te vinden, op hoe vele verfchillende wijzen de gegevene dingen, twee aan twee, drie aan drie, enz. kunnen gecombineerd worden?*

Behalve de oplosfing, op de aangehaalde plaats, van dit vraagftuk gegeven, kan men hetzelve nog aldus oplosfen. Stellen wij, dat 'er n dingen a, b, c, d, e, *enz.* gegeven zijn, en dat men dezelve p aan p zamenvoege. Laat het aantal dezer zamenvoegingen gelijk N gefteld

(104) Men kan van deze vraag onderfcheidene oplosfingen geven, welke alle hier geen plaats kunnen vinden; wij hebben alleenlijk die gekozen, welke of de eenvoudigfte zijn, of het meest tot ons oogmerk dienen.

steld worden; wanneer men dan de p eerste dingen vooraan stelt; dan zal men, terwijl deze in dezelfde rangorde blijven, de $n-p$ andere dingen zooveelmaal kunnen kunnen verwisselen als het getal

$$1 . 2 . 3 . 4 . 5 . enz. (n-p-2)(n-p-1)(n-p)$$

bedraagt. Nemen wij verder: dat alle de combinatien p aan p ontwikkeld zijn, en dat men elk dezelver, welgeordend, vooraanstelle; dan zal men, de voorgaande medegerekend, even zoo vele complexien hebben, als 'er éénheden in het getal N zijn, en daar men de $n-p$ volgende

$$1 . 2 . 3 . 4 . enz. (n-p)$$

maal zal kunnen verplaatsen, zal het getal permutatien, welker bestaandeelen met ééne der combinatien p aan p beginnen, gelijk zijn aan

$$N \times [1 . 2 . 3 . 4 . enz. (n-p-1) . (n-p)]$$

Uit deze complexien, zal men nu alle de mogelijke permutatien vinden, indien men de p eerste bestaandeelen van elke complexie zooveelmaal van plaats verandert als mogelijk is: nu is het getal der permutatien van de p eerste bestaandeelen van elke complexie gelijk aan $1 . 2 . 3 . enz. (p-1)(p)$. Het aantal der mogelijke permutatien is derhalve:

$$N \times [1 . 2 . 3 . enz. (n-p-1)(n-p)] \times [1 . 2 . 3 . enz. p] = 1 . 2 . 3 . enz. (n-p-1)(n-p)(n-p+1)(n-p+2)\ enz.\ (n-1) . n$$

Uit welke vergelijking dadelijk volgt:

$$N = \frac{n(n-1)}{1 . 2 .} \frac{(n-2)}{3 .} \frac{(n-3)}{4 .} \frac{enz.}{enz.} \frac{(n-p+1)}{p} = N c^{n}_{p}$$

Hetgeen met de aangehaalde oplossing overeënkomt (105).

§. 694.

(105) De regel, om, uit de eenvoudige deelers van een deelbaar getal, alle de deelers, zoo wel de ondeelbare als de deelbare te vinden, in §§. 254 en 255, I. C. voorgedragen, is niet anders dan eene toepassing van het Leerstuk der eenvoudige combinatien: doch, hierin komt het geval in aanmerking, wanneer sommige der elementen bij herhaling voorkomen: gelijk, wanneer gegeven zijn de dingen *aaaabbbcc*; in welk geval men derzelver combinatien vinden zal, door de magten, 1, a, a^2, a^3, a^4, met 1, b, b^2, b^3, zamentestellen, en deze uitkomst wederom met de magten 1, c, c^2; zoo als uit de aangehaalde plaats blijkt.

Wil men nu het aantal der deelers van een deelbaar getal uit derzelver ondeelbare factoren leeren kennen: dan moet men twee gevallen onderscheiden. 1° Wanneer de ondeelbare factoren alle onderscheiden zijn.

§. 694. 6. VRAAGSTUK. *Een zeker aantal dingen gegeven zijnde, dezelve op alle mogelijke wijzen, twee aan twee, drie aan drie, enz. te combineren, onder voorwaarde, dat in elke klasse van combinatien de gegevene bestaandeelen zooveelmaal herhaald worden als mogelijk zij?*

Deze vraag kan op onderscheidene wijzen worden opgelost: wij zullen ons nogtans bij de volgende bepalen. Laten, *fig.* 3. Tabelle VI, de vier dingen a, b, c, d, gegeven zijn. Men schrijve in eene verticale kolom eerst alle de gegevene bestaandeelen a, b, c, *enz.* en men plaatse het eerste a voor alle deze: daarna alle de bestaandeelen, behalve het eerste, en plaatse voor alle deze b; voorts alle de bestaandeelen, bij het derde te beginnen, en men plaatse het derde voor elk van dezen: men gaat daarmede voort, tot dat het laatste bestaandeel met het laatste vereënigd is, alsdan heeft men in den winkelhaak van A tot B alle de enkelde dingen, en van A tot C alle de combinatien twee aan twee. Om nu uit dezen de combinatien, drie aan drie, afteleiden, schrijve voor alle de combinatien twee aan twee, geene uitgezonderd, a; voor die, welke met b beginnen tot de laatste ingesloten b; voor alle, welke met c beginnen tot de laatste ingesloten c: op deze wijze tot de laatste voortgaande, verkrijgt men van A tot D de combinatien drie aan drie. Uit deze laatste worden de combinatien, vier aan vier, op dezelfde wijze, als de combinatien, drie aan drie, uit de combinatien, twee aan twee, afgeleid, en men zal alzoo blijven voortgaan, tot dat men de laatste combinatien verkregen heeft. Al hetwelk uit de figuur ten vollen verstaanbaar is.

§. 695. 7. VRAAGSTUK. *Indien n dingen gegeven zijn, het aantal van de herhalings combinatien dezer dingen, p aan p genomen, te vinden?*

Men behoeft slechts de *fig.* 3, VI. Tabelle in te zien, en men zal terstond bemerken: dat de herhalings combinatien van n dingen p aan p

zijn. 2° Wanneer sommige derzelve gelijk zijn. In het eerste geval zal, vergelijk §. 518. §. 695. wanneer n het getal der ondeelbare factoren is, dit aantal door 2^n worden uitgedrukt, indien men namelijk de éénheid en het getal zelve, onder de deelers telt; deze niet medereken-de, wordt het aantal der deelers door 2^{n-1} uitgedrukt. †† Wanneer gegeven is $a^p\ b^q\ c^r\ d^s\ e^t$, zal het aantal deelers dezer uitdrukking (de éénheid, en de uitdrukking zelve daar onder begrepen,) door

$$(p+1)\times(q+1)\times(r+1)\times(s+1)\times(t+1)$$

worden uitgedrukt.

p genomen, in de navolgende p ordeningen kunnen gerangſchikt worden. 1° In éénе, waarin het eerſte element a een aantal van p malen voorkomt; deze ordening bevat ſlechts ééne complexie. 2° In ééne, waarin datzelfde beſtaandeel $p - 1$ malen voorkomt: deze verbinding a^{p-1} (106) wordt met elk der $n - 1$ andere dingen verbonden, en geeft derhalve even zoo vele complexien als $n - 1$ dingen, één aan één, kunnen genomen worden. 3° In ééne, waarin a^{p-2} voorkomt, en daar deze complexie verbonden wordt met alle de herhalings combinatien van de $n - 1$ andere dingen, twee aan twee genomen, zal deze ordening even zoo vele complexien opleveren, als $n - 1$ dingen, twee aan twee, met herhalingen, kunnen verbonden worden. De volgende ordeningen zullen met a^{p-3}, a^{p-4}, a^{p-5}, *enz.* a^3, a^2 en a aanvangen. De ordening a^{n-3} wordt met de herhalings combinatien van de $n - 1$ overige dingen, drie aan drie; a^{n-4} met de herhalings combinatien dezer dingen, vier aan vier, verbonden, en zoo vervolgens, tot de ordening, welke met a begint, en met elk der combinatien van de $n - 1$ overige dingen, $p - 1$ aan $p - 1$, genomen, vereënigd wordt. 'Er beſtaan gevolgelijk $n - 1$ ordeningen, in welke a voorkomt, en nog ééne daarenboven, in welke a geheel ontbreekt, en de herhalings combinatien van de $n - 1$ overige dingen, op alle mogelijke wijzen, p aan p genomen bevatten zal: daar dan de herhalings combinatien dezer n dingen, p aan p genomen, aan de complexien van alle deze onderſcheidene ordeningen gelijk zijn, heeft men, de vergelijking.

$$\overset{n}{\overline{N\,c^p}} = 1 + \overset{n-1}{\overline{N\,c^1}} + \overset{n-1}{\overline{N\,c^2}} + \overset{n-1}{\overline{N\,c^3}} + \overset{n-1}{\overline{N\,c^4}} + enz. \;\ldots\ldots$$
$$+ \overset{n-1}{\overline{N\,c^{p-2}}} + \overset{n-1}{\overline{N\,c^{p-1}}} + \overset{n-1}{\overline{N.\,c^p}}$$

ſtelt men, in deze vergelijking, $p - 1$, in plaats van p, en trekt men de komende vergelijking van dezelve af; dan zal men, na herleiding, vinden:

$$\overset{n}{\overline{N\,c^p}} = \overset{n}{\overline{N\,c^{p-1}}} + \overset{n-1}{\overline{N\,c^p}}$$

waaruit blijkt: dat, wanneer men de getallen van de herhalings combinatien van $n - 1$ dingen, één aan één, twee aan twee, drie aan drie,

(106) Het teeken a^{n-1} wil hier zeggen: het beſtaandeel a, zoo menigmaal herhaald, als 'er éénheden in $n - 1$ zijn. Op dezelfde wijze moeten in dit betoog a^{n-2}, a^{n-3}, a^{n-4}, *enz.* verſtaan worden.

drie, enz. kent, daaruit de getallen van de verfchillende klasfen van de herhalings combinatien van n dingen, volgens dezelfde wet, waarnaar de figuurlijke getallen gevormd worden, zullen kunnen worden opgemaakt, (vergelijk §. 502 en §. 535). Nu is het getal der combinatien van n dingen, één aan één genomen, klaarblijkelijk gelijk aan n; de tafel der figuurlijke getallen bevat dienvolgens het aantal der herhalings combinatien in eene welgeregelde orde, en men zal, zal volgens §. 534, hebben:

$$N\overset{n}{\overline{c^p}} = \frac{n\,(n+1)\,(n+2)\,(n+3)\ \mathit{enz.}\ (n+p-1)}{1\,.\ 2\,.\quad 3\,.\quad 4\,.\quad \mathit{enz.}\quad p}\ (107).$$

§. 696. 8. VRAAGSTUK. *De gepermuteerde herhalings combinatien van een zeker aantal dingen, twee aan twee, drie aan drie, enz. te vinden?*

Laten, *fig.* 4, Tabelle VI, de beftaandeelen a, b, c, d, gegeven zijn. Men fchrijve de beftaandeelen of dingen op zich zelve; dan heeft men de eerfte klasfe $\ddot{c}^1$. Voor elk éénе der complexien van de eerfte klasfe fchrijve men eerst het eerfte beftaandeel, daarna het tweede, enz. tot het laatfte ingefloten; dan verkrijgt men de complexien van de gepermuteerde herhalings combinatien, twee aan twee, $\ddot{c}^2$. Voor alle deze laatfte fchrijve men eerst het eerfte beftaandeel, a, daarna het tweede b, enz. tot het laatfte ingefloten, en dan verkrijgt men de gepermuteerde herhalings combinatien, drie aan drie, of $\ddot{c}^3$. Op dezelfde wijze zal men uit de gepermuteerde herhalings combinatien, drie aan drie, $\ddot{c}^4$, en uit deze wederom $\ddot{c}^5$, enz. vinden (108).

§. 697. Of men ftelle, *fig.* 5, de gegevene elementen a, b, c, in eene regt opftaande rij zoo menigmaal onder elkander als 'er beftaandeelen gegeven zijn, en ftelle voor elk der beftaandeelen eerst het

(107) De tafel der Figuurlijke getallen van pag. 314, bevat dan het aantal der herhalings combinatien; met dien verftande, dat men de getallen van den bovenften ingang het aantal der gegevene dingen, en de getallen van de voorften ingang met één verminderd, het getal der zamengevoegde dingen laat beteekenen. In het algemeen is $N\overset{n}{\overline{c^p}}$ de p^{de} coefficient van $(a+b)^{-n}$ en $N\overset{n}{c^p}$ de p^{de} coefficient in $(a+b)^n$.

(108) Een voorbeeld van de gepermuteerde herhalings combinatien, vindt men in het gewone Talftelfel. In hetzelve geven de cijfers, de nul daar onder begrepen, op deze wijze gecombineerd, in rangorde alle denkbare getallen.

het eerste, daarna het tweede bestaandeel, enz. dus doende, zal men $\overset{..}{\underset{.}{c}}{}^2$ verkrijgen: deze klasse van combinatien, schrijve men wederom zoo menigmaal, als 'er bestaandeelen gegeven zijn, en stelle voor elk der complexien eerst a, dan b, dan c, enz.; dan zal men $\overset{..}{\underset{.}{c}}{}^3$ verkrijgen, en men ga op deze wijze voort, tot dat alle de klassen van combinatien ontwikkeld zijn.

§. 698. 9. VRAAGSTUK. *Het aantal der gepermuteerde herhalings combinatien van n dingen, p aan p genomen, te vinden?*

Het volgt, uit de beschouwing van de figuur, ommiddelijk, dat

$$N\overset{n}{\overline{\underset{\cdot}{c}^2}} = n;\ N\overset{n}{\overline{\underset{\cdot}{c}^2}} = n^2;\ N\overset{n}{\overline{\underset{\cdot}{c}^3}} = n^3 \text{ en } N\overset{n}{\overline{\underset{\cdot}{c}^p}} = n^p$$

zal moeten zijn (109).

§. 699. 10. VRAAGSTUK. *Gegeven zijnde de reeksen p, q, r, s, enz. van afzonderlijke bestaandeelen, de combinatien van twee, drie, en meer dezer rijen te ontwikkelen?*

Laat, *fig.* 6, Tab. VI, de Index gegeven zijn; men plaatse voor de bestaandeelen van de rij p het eerste bestaandeel van de rij q, namelijk A; daarna het tweede bestaandeel B, enz. tot het laatste, of tot zoo verre men de combinatien wil voortzetten; dan heeft men alle de complexien der zamengestelde combinatien $\overline{p\dot{\ }q}$ twee aan twee; voor de complexien van deze klasse schrijve men eerst $\mathfrak{A}$, daarna $\mathfrak{B}$, enz. dan zal men $\overline{p\,\dot{q}\,r}$ verkrijgen, en men zal op deze wijze voortgaan, tot dat alle de combinatien ontwikkeld zijn. — Men ziet, dat deze oplossing dezelfde is, als van het 8 vraagstuk. Men kan ook gelijk uit *fig.* 7. blijkt, eene oplossing geven, welke met de tweede van datzelfde vraagstuk overeënstemt. Wegens die gelijkheid, is ook het aantal van die soort van combinatien in de onderscheidene klassen dezelfde, als, wanneer de bestaandeelen van de gegevene rijen dezelfde zijn.

§. 700. 11. VRAAGSTUK. *De herhalings combinatien van eenige gegevene dingen tot eene bepaalde en gegevene som te vinden?*

$$\left\{\begin{array}{cccccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & \text{enz.} \\ a & b & c & d & e & f & g & \text{enz.} \end{array}\right\}$$

Dit vraagstuk is in de toepassing één der gewigtigste: het komt hier-

(109) Wanneer men de cijfers 0, 1, 2, 3, 4, 5. 6, 7, 8 en 9, voor de bestaandeelen aanneemt, dan stemt deze uitkomst met de bekende eigenschappen van het Talstelsel overeën.

hierop neder, om uit de wijzer-getallen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, enz., op alle mogelijke wijzen, twee, drie, vier, enz. getallen te vinden, welke eene gegevene fom maken, zoodanig echter, dat men hetzelfde getal twee of meermalen nemen mag. Ook kan men het vraagftuk aldus verklaren. Eenig getal *n*, op alle mogelijke wijzen, in twee, drie, vier, vijf, zes, en meer andere gelijke of ongelijke getallen te verdeelen? Men kan van hetzelve onderfcheidene oplosfingen geven, waarvan de twee volgende de voornaamfte zijn.

§. 701. I. OPLOSSING. (zie *fig.* 8, Tab. VI.) 1° „ *Men fchrijve* „ *het gegevene getal 7 op zich zelve.*" Dit is hetgeen in de combinatorifche teekenfpraak $\ddot{7}^1$ genoemd wordt, of de combinatie tot eene bepaalde fom, één aan één, waarin altijd maar eene complexie kan voorkomen.

2° „ *Men zette voor dit getal 7 fuccesfievelijk de getallen* 1, 2, „ 3, *enz. en vermindere het getal 7, met het getal, dat men voor* „ *hetzelve geplaatst heeft; dan verkrijgt men alle de mogelijke her-* „ *halings combinatien tot de fom 7, twee aan twee, welke zoo ver* „ *moeten worden voortgezet, tot dat het getal ter regterhand min-* „ *der dan het voorfte worden zou.*"

Men vindt aldus, voor de tweede klasfe dezer herhalings combinatien tot de fom 7, de complexien 16, 25 en 34, welke, al te zamen genomen, door $\ddot{7}^2$ worden uitgedrukt.

3° „ *Men fchrijve voor elk ééne van de complexien dezer tweede* „ *klasfe de éénheid, en vermindere het achterfte getal met één; voor* „ *alle de complexien, welke met twee beginnen, het getal twee, en* „ *men vermindert het achterfte getal met twee. Men gaat op dezelfde* „ *wijze voort; en ftelle voor alle de complexien, welke met* 3, 4, 5, „ *enz. aanvangen, tot de laatfte complexie ingefloten, de getallen* 3, „ 4, 5, *enz. en vermindere de achterfte getallen met* 3, 4, 5, *enz.* „ *onder het oog houdende, dat men de complexien, in welke een la-* „ *ger op een hoger getal volgen zou, verwerpe.*"

Men zal, volgens dit gedeelte van den regel, uit de combinatien, twee aan twee, de combinatien, drie aan drie, namelijk 115, 124, 133 en 223, vinden, welke al te zamen door $\ddot{7}^3$ worden uitgedrukt.

4° „ *Naar hetzelfde voorfchrift, wordt elke volgende klasfe van* „ *herhalings combinatien tot eene gegevene fom, uit de onmiddelijk* „ *voorgaande, tot de laatfte, opgemaakt.*"

Men vindt alle de klasfen voor de fom 7 in de *fig.* 8.

5° „ *Men ftelle in deze gevondene combinatien in plaats van de* „ *cij-*

„ *cijfers, de letters, welke zij volgens den index beteekenen, dan zal* „ *men alle klasſen van de combinatien der gegevene dingen tot de* „ *gegevene ſom zeven verkrijgen.*" — Men vindt dezelve in *fig.* 9.

§. 702. Deze oplosſing geeft in dezelfde tafel alle mogelijke klasſen van herhalings combinatien tot eene gegevene ſom; dat is alle de verſchillende wijzen om een gegeven getal in twee of meer gelijke of ongelijke getallen te verdeelen. Het is noodzakelijk, dat men de combinatien tot de ſommen 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, *enz.* zamenſtelle, en tot zijn bijzonder gebruik beware.

§. 703. II. Oplossing. Men kan alle de herhalings combinatien tot eene gegevene ſom, de volgende uit de voorgaande, dat is de combinatien tot de ſom n uit die tot de ſom $n - 1$, aldus ontwikkelen. Zie *fig.* 10, Tab. VI.

1° „ *Men zette voor alle de zamenvoegingen tot de ſom* $n - 1$ „ *de éénheid.*"

2° „ *Men verwisſele de getallen, welke in de voorſte kolom van* „ *de zamenvoegingen tot de ſom* $n - 1$ *voorkomen, met het naastvolgend* „ *hooger getal, en behoude alleen die zamenvoegingen, in* „ *welke gelijke getallen op gelijke, of hogere op lagere getallen vol-* „ *gen. De zamenvoegingen tot de ſom* n, *op deze wijze verkregen,* „ *maken met die, welke het eerſte gedeelte van den regel gegeven* „ *heeft, alle de mogelijke zamenvoegingen tot de ſom* n."

Men ſcheidt in deze bewerkingen de combinatien tot eene volgende ſom van die tot de naastvoorgaande af door winkelhaken met 1 — 1, 2 — 2, 3 — 3, *enz.* geteekend. Om nu den gegevenen regel te verklaren, dient het volgende. Stel: dat men, uit de herhalings combinatien tot de ſom 6, die tot de ſom 7 zal afleiden: dan ſtelle men eerst voor elk der zamenvoegingen 111111, 11112, 1113, 1122, 114, 123, 15, 222, 24, 33 en 6, de éénheid; dan verkrijgt men 1111111, 111112, 11113, 11122, 1114, 1123, 115, 1222, 124, 133 en 16; daarna verwisſele men men de voorſte getallen van 111111, 11112, 1113, *enz.* met de naast hogere, dan verkrijgt men 211111, 21112, 2113, 2122, 214, 223, 25, 322, 34, 43, 7; waarvan alleen 223, 25, 34 en 7, aan de voorwaarde voldoen, dat geen lager getal op een hoger volgt, en daarom in de kolom onder de complexien geplaatst worden, welke door het vooraan plaatsen van het getal één verkregen zijn (110).

§. 704.

(110) Beide deze oplosſingen zijn van Hindenburg. De laatſte heeft bo-

§. 704. In de laatste oplossing zijn de deelen van de som, naar de volgorde der natuurlijke getallen, gerangschikt; en, stelt men de letters in plaats van de cijfers, naar de alphabetische volgorde der letters. * Men noemt de eerste eene *Arithmetographische*, en de tweede eene *Lexicographische ordening*. * De laatste oplossing draagt ook nog den naam van involutorisch, omdat de verschillende ordeningen als in elkander ingewonden zijn.

§. 705. Door elk dezer twee oplossingen, verkrijgt men alle mogelijke verdeelingen van een gegeven getal (111). In het vervolg zal $\overset{n}{S}$ de som van alle klassen der mogelijke herhalings combinatien tot de som n voorstellen. Wij hebben dan, in het algemeen, de vergelijking:

$$\overset{n}{S} = \ddot{n}^1 + \ddot{n}^2 + \ddot{n}^3 + enz. + \ddot{n}^{n-2} + \ddot{n}^{n-1} + \ddot{n}^n$$

§. 706. 12. Vraagstuk. *De gepermuteerde herhalings combinatien van eenige gegevene dingen tot eene bepaalde en gegevene som te vinden?*

Dit vraagstuk is van het voorgaande alleen daarin onderscheiden, dat de bestaandeelen van elke complexie van de herhalings combinatien tot eene gegevene som, door de oplossing van het voorgaande vraagstuk gevonden, nog daarenboven, op alle mogelijke wijzen, moeten verzet of gepermuteerd worden. Men kan van dit vraagstuk verscheidene oplossingen geven, waarvan de twee volgende de voornaamste zijn.

I. Oplossing. Laat, in *fig.* 11, VI. Tabelle de wijzer gegeven zijn: om dan de gepermuteerde combinatien tot de som 6 te vinden, volge men dezen regel:

1° „ *Schrijf de gegevene som 6 aan het hoofd; dan heeft men de* „ *klasse, welke in de combinatorische teekenspraak* $\dot{6}^1$ *genoemd wordt,* „ *en slechts eene complexie bevat.*"

2° „ *Men*

boven de eerste het voordeel, dat men de tafel der combinatien, welke zij geeft, naar welgevallen kan voortzetten.

(111) Dit vraagstuk was bij de Moivre, Boscovisch en Euler, bijna in deze termen voorgedragen: *een getal gegeven zijnde, te vinden of hoe vele verschillende wijzen hetzelve in evenmatige en onevenmatige deelen kan verdeeld worden?* en als zoodanig behoort het tot de onbepaalde vraagstukken, waarop een bepaald getal antwoorden zijn. Sommigen, en onder anderen Kramp, hebben hetzelve uit dit oogpunt beschouwd.

2° „ *Men plaatse, in de gedachten, voor dit getal 6 de getallen „ 1, 2, 3, 4, enz. dan verkrijgt men:* 16, 26, 36, 46, 56; *en nu „ verminderé men hetzelve getal 6, in elke complexie, met het ge- „ tal, dat men vóór hetzelve geplaatst heeft, tot zoo lang, dat 'er „ één overblijft; dan heeft men* 15, 24, 33, 42 *en* 51, *en deze „ zijn de gepermuteerde herhalings combinatien tot de som 6, op alle „ mogelijke wijzen, twee aan twee, genomen. Men noemt deze klas- „ se in de combinatorische teekenspraak* $\ddot{6}^2$."

3° „ *Men stelle voorts ter linkerhand van alle de complexien der „ laatst verkregene klasse, eerst de éénheid, dan heeft men:* 115, „ 124, 133, 142, 151, *en verminderé de achterste cijfers ter lin- „ kerhand met de éénheid; dan verkrijgt men:* 114, 123, 132, 141; „ *daarna schrijve men ter linkerhand van die zelfde complexien het „ getal* 2, (*aldus* 215, 224, 233, *enz.*) *en verminderé het achter- „ ste cijfer met het getal* 2, *dat men vooraan geplaatst heeft, en „ men verkrijgt dan* 213, 222, 231. *Men gaat voort, en stelle „ vervolgens voor elke complexie van de combinatien, twee aan twee, „ successievelijk de getallen* 3, 4, 5, *enz. en verminderé de achter- „ ste getallen ter regterhand met de getallen, welke men voor de „ complexien geplaatst heeft. Indien men deze bewerking zoo ver „ mogelijk voortzet, dan verkrijgt men* $\ddot{6}^3$, *alle de gepermuteer- „ de herhalings combinatien tot de som* 6, *drie aan drie geno- „ men.*"

4° „ *Men ga op dezelfde wijze voort, en stelle ter linkerhand van „ alle de complexien van de laatst gevondene klasse, eerst de éénheid „ en verminderé het laatste of achterste getal met één; daarna in „ rangorde voor diezelfde complexien de getallen* 2, 3, 4, *enz. en „ verminderé de achterste getallen met de getallen* 2, 3, 4, *enz., „ welke men voor elk der complexien geplaatst heeft.*"

5° „ *Wanneer deze regel niet meer kan worden toegepast, (en „ deze toepassing kan zoo lang plaats hebben, als het achterste ge- „ getal één meer is dan het getal, dat voor de complexie gezet „ wordt,) dan zijn alle de klassen der gepermuteerde herhalings com- „ binatien tot eene bepaalde som gevonden.*"

Alle de gepermuteerde herhalings combinatien tot de som 6 zijn, volgens dezen regel, in *fig.* 11, ontwikkeld. Men zal dezelve op deze wijze voor elke andere som, tot zijn bijzonder gebruik, behooren te ontwikkelen.

§. 707. 2. Oplossing. Men zal ook alle de gepermuteerde her-

 ha-

halings combinatien tot de som n, uit die tot de som $n - 1$ kunnen afleiden, wanneer men, zie *fig.* 12, op de VI *Tabelle.*

1° „ *Ter linkerhand van elke complexie tot de som $n - 1$ de „ éénheid stelt.*"

2° „ *En daarna, de voorste getallen van de complexien tot de „ som $n - 1$ met één verhoogt. De complexien, welke men door de „ twee bijzondere deelen van dezen regel verkrijgt, geven de com„ plexien van de gepermuteerde herhalings combinatien tot de som n.*"

Volgens dezen regel zal men uit de complexien tot de som 2 namelijk $\begin{array}{l}1|1\\2\text{—}\end{array}$ door het eerste gedeelte van den regel $\begin{array}{l}1|1|1\\1|2\text{—}\end{array}$, en, door het tweede gedeelte, $\begin{array}{l}21\\3\end{array}$ verkrijgen, enz.

§. 708. In de laatste oplossing, zijn de verschillende gepermuteerde herhalings combinatien, tot de op elkander volgende sommen, de voorgaande in de volgende, ingewikkeld, zoo als uit de winkelhaken in de tafel geteekend, duidelijk genoeg zigtbaar is.

§. 709. * In het vervolg zullen alle klassen der mogelijke gepermuteerde herhalings combinatien tot de som n door $\overset{n}{\underset{\cdot}{S}}$ worden uitgedrukt. Men heeft dan:

$$\overset{n}{\underset{\cdot}{S}} = \underset{\cdot}{\ddot{n}}^{1} + \underset{\cdot}{\ddot{n}}^{2} + \underset{\cdot}{\ddot{n}}^{3} + enz. + \underset{\cdot}{\ddot{n}}^{n-2} + \underset{\cdot}{\ddot{n}}^{n-1} + \underset{\cdot}{\ddot{n}}^{n}$$

§. 710. Aanmerking. †† *In het algemeen kan men, alle soorten van gepermuteerde herhalings combinatien, uit de herhalings combinatien van dezelfde soort, afleiden, indien men de bijzondere complexien van de laatste, op alle mogelijke wijzen, permuteert.* Offchoon nu deze laatste wijzen van combineren, wanneer het op de ontwikkeling der combinatien zelve aankomt, de geschikste niet is, is nogtans deze aanmerking van belang, omdat men, in de verdere toepassing van de leer der combinatien, daardoor, zoo als op zijnen tijd blijken zal, het werk aanmerkelijk kan bekorten.

VIER- EN- ZESTIGSTE LES.

Toepassing van de leer der combinatien op het vinden van de producten, quotienten en magten der veelledige uitdrukkingen.

§. 711. Wij zullen thans aantoonen: hoe de leer der combinatien strekken kan, om de producten, quotienten en magten der veelledige uitdrukkingen, op eene gemakkelijke en eenvoudige wijze, te ontwikkekelen. Wij zullen, tot dat einde, twee hoofdgevallen onderscheiden. 1° Wanneer de termen der veelledige uitdrukkingen zonder eenig verband en van den vorm $a + b + c +$ *enz.* zijn. 2° Wanneer die termen naar de magten van eenige letter geordend zijn.

I. *Over de formatie van de producten van uitdrukkingen van den vorm $a + b + c +$ enz.*

§. 712. †† *Het product van twee of meer der volgende uitdrukkingen*

$$p = a + b + c + d + e + f + g + \text{enz.}$$
$$q = a_2 + b_2 + c_2 + d_2 + e_2 + f_2 + g_2 + \text{enz.}$$
$$r = a_3 + b_3 + c_3 + d_3 + e_3 + f_3 + g_3 + \text{enz.}$$
$$s = a_4 + b_4 + c_4 + d_4 + e_4 + f_4 + g_4 + \text{enz.}$$

bestaat uit de stelkundige som van alle de partieele producten, welke uit de afzonderlijke leden dezer uitdrukkingen zoodanig worden zamengesteld, dat, tot elk partieel product, uit elk der vermenigvuldigd wordende uitdrukkingen, éénen term als factor worde aangenomen.

Want, wanneer men p en q, naar de gewone regels vermenigvuldigt, wordt elk afzonderlijk lid van de eerste rij p, met elk afzonderlijk lid van de tweede rij q, tot één product zamengesteld, en alle deze partieele producten worden, volgens het beloop der teekens, tot ééne som vereënigd.

Indien men dit laatste product met de reeks r vermenigvuldigt, dan wordt elk partieel product van $p\,q$ met elken term van r vermenigvuldigd, en de komende producten, welke elk uit drie factoren, één factor uit de eerste, één uit de tweede, en één uit de derde reeks zijn zamengesteld, worden, naar het beloop der teekens, in éénè som vereënigd, welke som alsdan gelijk aan $p\,q\,r$ is.

Op dezelfde wijze zal het blijken: dat $p\,q\,r\,s$ gelijk is aan de som der partieele producten, welke ontstaan, wanneer men uit elk der vier reeksen éénen term als factor neemt, deze factoren met elkander vermenigvuldigt, en de partieele producten, welke men, door zulks op alle mogelijke wijzen te doen, verkrijgt, stelkundiger wijze bij elkander optelt.

En daar men duidelijk moet inzien, dat zulks ook alzoo voor vijf, zes of meer gegevene reeksen zal moeten plaats hebben, is het gestelde voldoende bewezen.

§. 713. Vermits dan, in de formatie van deze producten, alle de termen van het multiplicandum met alle de termen van den multiplicator, geene uitgezonderd, veréénigd worden, zoo volgt hieruit: †† *dat het product dezer rijen gelijk is aan de som der producten van de termen dezer rijen op alle mogelijke wijzen, zoodanig met elkander gecombineerd, dat, tot elke complexie dezer combinatie, één lid uit elke rij genomen worde.* Zie §. 680. en §. 699.

§. 714. Wanneer men dan den nevenstaanden combinatorischen wijzer aanneemt, dan zal, volgens §. 712,

$$\textit{Wijzer}\quad \left\{\begin{array}{llllll} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & \textit{enz.} \\ a, & b, & c, & d, & e, & \textit{enz. } p \\ a_2, & b_2, & c_2, & d_2, & e_2, & \textit{enz. } q \\ \textit{enz.} & & & & & \end{array}\right\}$$

$$1^o \;\ldots\ldots\; pq = \dot{\overline{pq}}$$
$$2^o \;\ldots\ldots\; pqr = \dot{\overline{pqr}}$$
$$3^o \;\ldots\ldots\; pqrs = \dot{\overline{pqrs}},\ \textit{enz.}$$

moeten zijn, en men zal, door de ontwikkeling van de zamengestelde combinatien, de gezegde producten vinden, in welker formatie men op de teekens naauwkeurig acht behoort te geven.

§. 715. Laat het getal der termen van p en q respectievelijk door a en b worden uitgedrukt, dan zal, zie §. 40, het aantal der leden van het product pq gelijk ab zijn; zijn 'er c leden in r; d leden in s; e leden in t; dan zal het aantal der leden van het product pqr gelijk abc, van het product $pqrs$ gelijk $abcd$ zijn, enz.

II. *Over de magten van eene veelledige uitdrukking van den vorm $a+b+c+d+$ enz.*

§. 716. Laat, in de bovenstaande uitdrukkingen, $a = a_2 = a_3 = a_4 =$ *enz.*; $b = b_2 = b_3 =$ *enz.*; $c = c_2 = c_3 =$ *enz.*, gesteld worden; dan zal ook $p = q = r = s =$ *enz.* zijn; en pq zal in p^2; pqr in p^3; $pqrs$ in p^4; *enz.* veranderen. Volgens het bewezene in §. 712 en 713, zal dan:

1° †† *De tweede magt van p gelijk zijn aan de som van alle de gepermuteerde herhalings combinatien van de termen a. b, c, d, enz., op alle mogelijke wijzen, twee aan twee, genomen.*

2° †† *De derde magt van p zal gelijk zijn aan de som van alle de gepermuteerde herhalings combinatien van de termen a, b, c, enz., op alle mogelijke wijzen, drie aan drie, genomen.*

3° †† *En, in het algemeen zal de n^de^ magt van p gelijk zijn aan de* *de som van alle de gepermuteerde herhalings combinatien van de termen a, b, c, enz., op alle mogelijke wijzen, n aan n genomen.*

§. 717. †† Men zal dan, volgens §. 673, stellen kunnen:

$$p^2 = \overset{..}{\underset{.}{c}}{}^2 ;\quad p^3 = \overset{..}{\underset{.}{c}}{}^3 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; p^n = \overset{..}{\underset{.}{c}}{}^n$$

$$\text{Wijzer}\left\{\begin{array}{l} 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ enz. \\ a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f,\ enz. \end{array}\right\}\text{of Index.}$$

en deze combinatien, naar het voorschrift van §. 696, slechts behoeven te ontwikkelen, om de magten van p te vinden. Men zal nogtans de termen dezer magten in den loop der ontwikkeling, op de volgende wijze, naar de afmetingen van één der leden kunnen rangschikken.

§. 718. Laat, in de vergelijking, $p = a + b + c + d +$ *enz.*, de som van alle de termen, behalve de eerste, of $b + c + d +$ *enz.* gelijk z gesteld worden; dan is $p = a + z$, en, volgens het binomium van NEWTON, zal

$$p^n = a^n + \overset{1}{(n)} . a^{n-1} z + \overset{2}{(n)} . a^{n-2} z^2 + \overset{3}{(n)} . a^{n-3} z^3 + enz.$$

zijn; men zal derhalve de magten van $z = b + c + d +$ *enz.*, volgens §. 716 en 717, ontwikkelen, en de waarden, welke men voor deze magten verkrijgt, in de gevondene vergelijking moeten overbrengen. Nu is, volgens §. 717, $z = \overset{..}{\underset{.}{c}}{}^1$; $z^2 = \overset{..}{\underset{.}{c}}{}^2$; $z^3 = \overset{..}{\underset{.}{c}}{}^3$; *enz.*, en $z^n = \overset{..}{\underset{.}{c}}{}^n$. Men zal alzoo stellen kunnen:

$$p^n = a^n + \overset{1}{(n)} a^{n-1} \overset{..}{\underset{.}{c}}{}^1 + \overset{2}{(n)} a^{n-2} \overset{..}{\underset{.}{c}}{}^2 + \overset{3}{(n)} a^{n-3} \overset{..}{\underset{.}{c}}{}^3 + enz. . .$$
$$+ \overset{p}{(n)} a^{n-p} \overset{..}{\underset{.}{c}}{}^p + enz.$$

$$\text{Wijzer}\left\{\begin{array}{l} 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ enz. \\ b,\ c,\ d,\ e,\ f,\ g,\ enz. \end{array}\right\}\text{of Index.}$$

§. 719. †† *Deze uitdrukking, welke naar de afdalende magten van n geordend is, geldt voor alle geheele en gebrokene, positieve en negatieve magten van n.* Elke magt van p hangt in dezelve van de gepermuteerde herhalings combinatien van [b, c, d, e, *enz.*] af, welke men, naar het voorschrift van §. 696, zal ontwikkelen. Het is van belang optemerken: dat de gevondene vergelijking, als op alle waarden van n toepasselijk zijnde, boven die van §. 717, den voorrang verdient.

§. 720. Het zal nogtans eene geschiktere uitkomst geven, wanneer men, in plaats *van de gepermuteerde herhalings combinatien* van de ter-

termen b, c, d, *enz.*, derzelver *herhalings combinatien*, volgens §. 694, bepaalt, en elk van derzelver complexien met het permutatie getal, hetwelk, volgens §. 690, gevonden wordt, als coefficient vermenigvuldigt; want, indien men de bestaandeelen van elke complexie der herhalings combinatien, op alle mogelijke wijzen verzet, dan verkrijgt men, zie §. 710, het geheele zamenstel der gepermuteerde herhalings combinatien; omdat nu, in de complexien, de bestaandeelen als factoren vermenigvuldigd worden, en de gedurige producten, door de verzettingen van derzelver factoren, niet van waarde veranderen, zal het genoeg zijn, elke complexie der herhalings combinatie met het permutatie getal te vermenigvuldigen, waardoor men, zonder dat de uitdrukking, voor p^n gevonden, verandert, veel schrijvens uithalen en de uitkomsten der ontwikkeling eenvoudiger maken zal. Dit alles zal door de uitwerking van het volgend voorbeeld volkomen verstaan worden.

§. 721. VOORBEELD. *De vierde magt van $a+b+c$ te vinden?*

Hier is $z=b+c$; voorts $n=4$; $\overset{1}{(n)}=4$; $\overset{2}{(n)}=6$; $\overset{3}{(n)}=4$; $\overset{4}{(n)}=1$; $\overset{5}{(n)}=0$ *enz.*: de formulen van §. 718, verandert derhalve in

$$p^4=a^4+4a^3\underset{\cdot}{\ddot{c}}^1+6a^2\underset{\cdot}{\ddot{c}}^2+4a\underset{\cdot}{\ddot{c}}^3+\underset{\cdot}{\ddot{c}}^4$$

b	b	b	b
b	b	b	c
b	b	c	c
b	c	c	c
c	c	c	c

Nu is, volgens het nevenstaande tafeltje, waarin de herhalings combinatien van de termen b en c tot de combinatien, vier aan vier, ontwikkeld zijn, zie §. 694.

$$\ddot{c}^1=b+c;\quad \ddot{c}^2=b^2+bc+c^2$$

$$\ddot{c}^3=b^3+b^2c+bc^2+c^3;\quad \ddot{c}^4=b^4+b^3c+b^2c^2+bc^3+c^4$$

want het is klaar, dat men, aangezien de bestaandeelen in de complexien vermenigvuldigd worden, voor $bbbb$ schrijven kan b^4, en dat men voor $bbcc$ stellen kan b^2c^2 enz.

Om nu, uit deze, de gepermuteerde herhalings combinatien af te leiden, zal men elke complexie met haar permutatie getal moeten vermenigvuldigen, en dan is, volgens §. 690, $N\mathrm{c}\,(bc)=2$; $N\mathrm{c}\,(b^2c)=3$; $N\mathrm{c}\,(bc^2)=3$; $N\underset{\cdot}{\mathrm{c}}\,(b^3c)=4$; $\dot{N}\underset{\cdot}{\mathrm{c}}\,(b^2c^2)=6$; $N\underset{\cdot}{\mathrm{c}}\,(bc^3)=4$; derhalve zal

$$\underset{\cdot}{\ddot{c}}^1=b+c;\quad \underset{\cdot}{\ddot{c}}^2=b^2+2bc+c^2$$

$$\underset{\cdot}{\ddot{c}}^3=b^3+3b^2c+3bc^2+c^3;\quad \underset{\cdot}{\ddot{c}}^4=b^4+4b^3c+6b^2c^2+4bc^3+c^4$$

zijn: men substituere nu deze waarden van $\underset{\cdot}{\ddot{c}}^1$, $\underset{\cdot}{\ddot{c}}^2$ enz. in de waarde de van p^4; dan zal men vinden:

$$\begin{aligned} p^4 = a^4 &+ 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \\ &+ 4a^3c + 12a^2bc + 12ab^2c + 4b^3c \\ &+ 6a^2c^2 + 12abc^2 + 6b^2c^2 \\ &+ 4ac^3 + 4bc^3 \\ &+ c^4 \end{aligned}$$

welke uitkomst men ook door de gewone multiplicatie verkrijgen zal.

Wanneer men een weinig in deze teekens geoefend is, vereischt de ontwikkeling eener magt bijna geen meer moeite dan het formeren van de combinatie-tafel en het uitschrijven der termen. Ook heeft deze handelwijze het voordeel, dat men elken term afzonderlijk ontwikkelen kan, zonder daartoe de voorgaande termen noodig te hebben (112).

III. *Over de formatie van de producten der veelledige uitdrukkingen, welke naar de opklimmende magten van eenige letter geordend zijn.*

§. 722. †† Stellen wij de veelledige uitdrukkingen:

$$\begin{aligned} p &= a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 + \text{enz.} \\ q &= a_2 + b_2x + c_2x^2 + d_2x^3 + e_2x^4 + f_2x^5 + \text{enz.} \\ r &= a_3 + b_3x + c_3x^2 + d_3x^3 + e_3x^4 + f_3x^5 + \text{enz.} \\ &\text{enz.} \qquad\qquad \text{enz.} \end{aligned}$$

dan bestaat ook het product van twee of meer dezer rijen, uit de som van alle de partieele producten van de termen dezer rijen, op alle mogelijke wijzen zoodanig genomen: dat, uit elke rij, éénen term als factor, in de zamenstelling dezer producten, aangenomen worde: maar, in het tegenwoordig geval, moeten de termen van het product naar de opklimmende magten van x geordend zijn; en daarom moet men alle de partieele producten, welke tot dezelfde magt van x behooren, tot éénen term vereënigen; dat is: men moet de som van de coefficienten der termen, waarin dezelfde magt van x, als factor, voorkomt, als den zamengestelden coefficient van den term, tot dezelfde magt van x behoorende, aanmerken. Wanneer men zich nu voor

(112) Deze omstandigheid geeft aan de leerwijze der combinatien een meerderheid boven de *Derivatie Rekening* van ARBROGAST, bij welke de termen eener ontwikkelde magt uit de naast voorgaande afgeleid worden.

voor den geest brengt, hoe, in den loop der vermenigvuldiging, de termen, welke tot dezelfde magt van x, (bij voorbeeld tot x^n,) behooren, ontstaan, dan zal men ten klaarste zien: dat

1° Het product van $p\,q$ uit de som van alle de mogelijke producten van éénen term van p, met éénen term van q ontstaat, en dat men, derhalve, om den coefficient van den term, in welke x^n voorkomt, te verkrijgen, alle zoodanige termen van p, met alle zoodanige termen van q, in welke de som van de exponenten van x gelijk is aan den exponent van x^n, vermenigvuldigen, en alle deze producten in ééne som veréénigen moet; daar men nu, om, in het algemeen, het product van $p\,q$ te vinden, volgens §. 712, de termen van p, met de termen van q, op alle mogelijke wijzen, moet combineren, volgt hieruit: dat men, om den coefficient van x^n, tot het product van $p\,q$ behoorende, te vinden, uit den nevenstaanden wijzer, de rang-getallen 0, 1, 2, 3, 4, *enz.*, op zoo vele onderscheidene wijzen als mogelijk is, tot de gegevene som n, twee aan twee, bij herhaling en met permutatie zal moeten combineren, en dat men, deze combinatien geformeerd hebbende, in elke van derzelver complexien, in plaats van het eerste en tweede cijfer, respectievelijk zal moeten stellen, de coefficienten van p en q, welke in den wijzer met die cijfers overéénstemmen. Men zal derhalve kunnen stellen:

$$\left\{\begin{array}{llllll} 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & enz. \\ a, & b, & c, & d, & e, & enz. \\ a_2, & b_2, & c_2, & d_2, & e_2, & enz. \end{array}\right\}$$

$$pq=\overset{0}{\overline{pq}}+\overset{1}{\overline{pq}}.x+\overset{2}{\overline{pq}}.x^2+\overset{3}{\overline{pq}}.x^3+enz.+\overset{n}{\overline{pq}}.x^n+enz.$$

2° Dat men insgelijks, om het product $p\,q\,r$ te vinden, voor den coefficient van x^n, zal moeten nemen de som van alle mogelijke gepermuteerde herhalings combinatien van de rang-getallen 0, 1, 2, *enz.* tot de som n, in elke van welker complexien, in plaats van de eerste, tweede en derde wijzer-getallen, de letters, welke met dezelve overéénstemmen en uit de rijen p, q en r genomen zijn, zullen moeten gesteld worden. Men zal dan hebben:

$$\left\{\begin{array}{lllll} 0, & 1, & 2, & 3, & enz. \\ a, & b, & c, & d, & enz. \\ a_2, & b_2, & c_2, & d_2, & enz. \\ a_3, & b_3, & c_3, & d_3, & enz. \end{array}\right\}$$

$$pqr=\overset{0}{\overline{pqr}}+\overset{1}{\overline{pqr}}.x+\overset{2}{\overline{pqr}}.x^2+enz.+\overset{n}{\overline{pqr}}.x^n+enz.$$

§. 723. Het is niet noodig deze beschouwing verder uittebreiden, men ziet ten duidelijkste: dat, wanneer 'er een zeker aantal reeksen

p,

p, q, r, *enz.* gegeven zijn, alle naar de opklimmende magten van x geordend zijnde, derzelver product door de volgende vergelijking zal worden voorgesteld:

$$p\,q\,r\ \text{enz.} = \overset{0}{\overline{p\,\underset{\cdot}{q}\,r\ \text{enz.}}} + \overset{1}{\overline{p\,\underset{\cdot}{q}\,r\ \text{enz.}}}\,.\,x + \overset{2}{\overline{p\,\underset{\cdot}{q}\,r\ \text{enz.}}}\,.\,x^2 + \text{enz.}\ \ldots\ldots$$

$$+ \overset{n}{\overline{\underset{\cdot}{p}\,q\,r\ \text{enz.}}}\,.\,x^n + \text{enz.}$$

§. 724. Om zich met den zin dezer uitdrukkingen gemeenzaam te maken, zullen wij aannemen: dat de drie uitdrukkingen

$$\begin{aligned} p &= A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{enz.} \\ q &= a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \text{enz.} \\ r &= \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \text{enz.} \end{aligned}$$

met elkander moeten vermenigvuldigd worden: dan is

$$p\,q\,r = \overset{0}{\overline{p\,\underset{\cdot}{q}\,r}} + \overset{1}{\overline{p\,\underset{\cdot}{q}\,r}}\,.\,x + \overset{2}{\overline{p\,\underset{\cdot}{q}\,r}}\,.\,x^2 + \text{enz.}$$

Het teeken $\overset{0}{\overline{p\,\underset{\cdot}{q}\,r}}$ geeft te kennen, dat men, uit de reeks 0, 1, 2, 3, *enz.*, drie getallen nemen moet, welker som gelijk nul is; deze drie getallen zijn 000: men neme dan uit den index

$$\text{Wijzer}\left\{\begin{array}{llllllllll} 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & \text{enz.} \\ A, & B, & C, & D, & E, & F, & G, & H, & I, & \text{enz.}\ \ldots\ p \\ a, & b, & c, & d, & e, & f, & g, & h, & i, & \text{enz.}\ \ldots\ q \\ \alpha, & \beta, & \gamma, & \delta, & \varepsilon, & \zeta, & \eta, & \theta, & \iota, & \text{enz.}\ \ldots\ r \end{array}\right\}\text{of Index.}$$

voor de eerste nul de letter A, voor de tweede nul de letter a, en voor de derde de letter α; dan wordt $\overset{0}{\overline{p\,\underset{\cdot}{q}\,r}} = A\,a\,\alpha$.

Het teeken $\overset{1}{\overline{p\,q\,r}}$ geeft te kennen: dat men, uit denzelfden index, drie getalen nemen moet, welker som gelijk één is, en deze getallen op alle mogelijke wijzen moet permuteren: men verkrijgt dan de complexien 001, 010 en 100: daar nu, in elke dezer complexien, het eerste, tweede en derde cijfer moet overëénstemmen met de letters, welke in den wijzer in de eerste, tweede en derde rijen voorkomen, heeft men:

$$\overset{1}{\overline{p\,\underset{\cdot}{q}\,r}} = A\,a\,\beta + A\,b\,\alpha + B\,a\,\alpha$$

Op dezelfde wijze geeft $\overline{p\,q\,r}^{\,2}$ te kennen, dat men, uit den wijzer, drie getallen zoeken moet, welker som gelijk 2 is: deze zijn, wanneer zij bij herhaling en permutatie genomen worden: 002, 011, 020, 101, 110, 200, stelt men in plaats van deze cijfers de letters, welke zij in hunnen rang beteekenen, dan verkrijgt men:

$$\overline{p\,q\,r}^{\,2} = A\,a\,\gamma + A\,b\,\beta + A\,c\,\alpha + B\,a\,\beta + B\,b\,\alpha + C\,a\,\alpha$$

Op dezelfde wijze zullen de coefficienten der volgende termen gevonden worden.

§. 725. †† *Alles komt derhalve in het vinden van deze producten aan, op het geregeld ontwikkelen der gepermuteerde herhalings combinatien tot de sommen* 0, 1, 2, 3, 4, 5, *enz., twee aan twee genomen, indien men twee rijen; drie aan drie, indien men drie rijen; vier aan vier, indien men vier rijen; en n aan n, indien men n rijen vermenigvuldigt.* Wij hebben de ontwikkelingen dezer combinatien in §. 701. geleerd: doch, daar, in ons geval, de wijzer met nul begint, zullen wij, daar zulks misschien eenige zwarigheid zou kunnen maken, kortelijk doen zien: hoe, in dit geval, deze combinatien het best kunnen ontwikkeld worden.

§. 726. „ *Nemen wij*, fig. 13, Tabelle VI, *dat* $\overline{p\,q\,r\,s}^{\,5}$, *volgens den* „ *wijzer* [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, enz.], *zal ontwikkeld worden: dan* „ *schrijve men:*

1° „ *De gegeven som* 5 *ter regterhand; ter linkerhand van dezel*„ *ve zoo vele nullen als noodig is, om het getal dingen, hetwelk in* „ *elke complexie moet voorkomen, vol te maken: men zal dan in A* „ *de complexie* 0005 *verkrijgen.*"

2° „ *In deze complexie schrijve men, in de plaats van de eerste* „ *nul aan de regtehand, de getallen* 1, 2, 3, *enz. en verminderе* „ *het achterste getal met de getallen, welke in plaats van deze nul* „ *genomen zijn; dan verkrijgt men de complexien van A tot B.*"

3° „ *In alle de reeds gevondene complexien, schrijve men, in plaats* „ *van de tweede nul ter regtehand: a) eerst de één, en verminderе* „ *het achterste cijfer der complexien met één: b) daarna het getal* „ *twee, en verminderе het achterste cijfer met twee: c) daarna* „ *drie, en verminderе het achterste cijfer met drie: d) en men gaat* „ *op dien voet voort, tot dat men dezen regel niet meer kan toe*„ *passen.*"

4° „ Op

4° „ *Op dezelfde wijze schrijft men, in de reeds gevondene com-*
„ *plexien, in plaats van de derde nul ter regtehand, eerst één, en*
„ *vermindere het achterste cijfer met één; daarna twee, en vermin-*
„ *dere het achterste cijfer met twee, enz.*"

5° „ *Het is op deze wijze, dat men, uit elke voorgaande rang-*
„ *orde van complexien, de volgende opmaakt.*"

§. 727. Het is noodzakelijk: dat men voor zich zelve alle deze gepermuteerde herhalings combinatien vervaardige, omdat men alsdan, in elk voorkomend geval, door eene eenvoudige substitutie, welke slechts de moeite van het uitschrijven vereischt, alle de verschillende termen van het product vinden zal.

§. 728. †† Wanneer 'er n reeksen van den vorm

$$p = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + \text{enz.}$$
$$q = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + \text{enz.}$$
$$\text{enz.} \qquad\qquad \text{enz.}$$

moeten vermenigvuldigd worden, dan zal derzelver product den vorm

$$Px^n + Qx^{n+1} + Rx^{n+2} + Sx^{n+3} + \text{enz.}$$

verkrijgen, en men zal op dezelfde wijze als in §. 722 en §. 723, betoogen, dat

$$P = \overset{n}{\overline{\underset{\cdot}{p\,q}\,\text{enz.}}}\,; \quad Q = \overset{n+1}{\overline{\underset{\cdot}{p\,q}\,\text{enz.}}}\,; \quad R = \overset{n+2}{\overline{\underset{\cdot}{p\,q}\,\text{enz.}}} \quad \text{enz.}$$

zal moeten zijn, onder die voorwaarde, dat hier de gepermuteerde herhalings combinatien tot de sommen n, $n+1$, $n+2$, *enz.*, n aan n genomen, uit den wijzer [1, 2, 3, 4, *enz.*] zullen moeten geformeerd worden.

IV. *Over de magts-verheffingen, der veelledige uitdrukkingen, welke naar de magten van eenige letter geordend zijn.*

§. 729. Wanneer de reeksen van §. 722, alle aan elkander gelijk worden; dan verandert $p\,q$ in p^2; $p\,q\,r$ in p^3; enz., en de vergelijkingen van §. 722 en 723, veranderen in de volgende:

$$\textit{Wijzer} \begin{cases} 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \text{enz.} \\ a, b, c, d, e, f, g, \text{enz.} \end{cases} \textit{of Index.}$$

$$p^2 = \underset{\cdot}{\ddot{0}}{}^2 + \underset{\cdot}{\ddot{1}}{}^2 . x + \underset{\cdot}{\ddot{2}}{}^2 . x^2 + \underset{\cdot}{\ddot{3}}{}^2 . x^3 + \underset{\cdot}{\ddot{4}}{}^2 . x^4 + \text{enz.} + \underset{\cdot}{\ddot{n}}{}^2 . x^n + \text{enz.}$$

$$p^3 = \underset{\cdot}{\ddot{0}}{}^3 + \underset{\cdot}{\ddot{1}}{}^3 . x + \underset{\cdot}{\ddot{2}}{}^3 . x^2 + \underset{\cdot}{\ddot{3}}{}^3 . x^3 + \underset{\cdot}{\ddot{4}}{}^3 . x^4 + \text{enz.} + \underset{\cdot}{\ddot{n}}{}^3 . x^n + \text{enz.}$$

. . . .

$p^n =$

$$p^n = \ddot{0}^n + \ddot{1}^n . x + \ddot{2}^n . x^2 + \ddot{3}^n . x^3 + \ddot{4}^n . x^4 + enz. + \ddot{q}^n . x^q + enz.$$

§. 730. †† Wanneer men van deze vergelijkingen tot de ontwikkeling der magten van p gebruik wil maken, is het voldoende de herhalings combinatien uit den wijzer [0, 1, 2, *enz.*] optemaken, en elk van derzelver complexien met het permutatie getal te vermenigvuldigen: doch, daar wij ſtraks eene geſchiktere uitdrukking voor de magten van p zullen vinden, zullen wij ons hiermede niet langer ophouden.

§. 731. †† Stelt men, in de vergelijking van §. 728, $p = q = r =$ *enz.*, dan zal men verkrijgen:

$$p^n = \left\{ a x + b x^2 + c x^3 + d x^4 + e x^5 + f x^6 + enz. \right\}^n =$$

$$= \ddot{n}^n . x^n + (n \ddot{+} 1)^n . x^{n+1} + (n \ddot{+} 2)^n . x^{n+2} + enz. + \ldots$$

$$(n \ddot{+} p)^n . x^{n+p} + enz.$$

$$Wijzer \left\{ \begin{matrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & enz. \\ a, & b, & c, & d, & e, & f, & g, & h, & enz. \end{matrix} \right\} \text{of } Index.$$

Deze vergelijking, welke ons dadelijk zal te ſtade komen, is van meer belang. Men herinnere zich, dat $(n \ddot{+} p)^n$ beteekent de vereëniging van alle de gepermuteerde herhalings combinatien van n getallen uit den wijzer [1, 2, 3, *enz.*] tot de ſom $n + p$. Het zal dan om den coefficient van $(n \ddot{+} p)^n x^{n+p}$ te vinden, genoeg zijn, deze klasſe van herhalings combinatien, volgens §. 701, te ontwikkelen, en elke complexie met derzelver permutatie getal te vermenigvuldigen.

§. 732. †† De vergelijking van de voorgaande § is op eene bijzondere wijze geſchikt, om de magten van $p = a + b x + c x^2 + d x^3 +$ *enz.*, op eene algemeene wijze, voor alle geheele, gebrokene en negatieve exponenten, te ontwikkelen. Stellen wij: $b x + c x^2 + d x^3 + e x^4 + enz. = z$; dan wordt $p = a + z$, en men zal volgens het binomium van NEWTON verkrijgen:

$$p^n = a^n + \overset{1}{(n)} a^{n-1} z + \overset{2}{(n)} a^{n-2} z^2 + \overset{3}{(n)} a^{n-3} z^3 + \overset{4}{(n)} a^{n-4} z^4 + enz.$$

Neemt men nu den wijzer $\left\{ \begin{matrix} 1, & 2, & 3, & 4, & enz. \\ b, & c, & d, & e, & enz. \end{matrix} \right\}$; dan vindt men, volgens §. 731, voor de magten van z:

$z =$

$$z = bx \quad + cx^2 \quad + dx^3 \quad + ex^4 \quad + fx^5 \quad + \text{enz.} \ldots \text{ of}$$

$$z = \underset{\cdot}{\ddot{1}}^1 . x + \underset{\cdot}{\ddot{2}}^1 . x^2 + \underset{\cdot}{\ddot{3}}^1 . x^3 + \underset{\cdot}{\ddot{4}}^1 . x^4 + \underset{\cdot}{\ddot{5}}^1 . x^5 + \text{enz.} + \underset{\cdot}{\ddot{p}}^1 . x^p$$

$$z^2 = \ldots \underset{\cdot}{\ddot{2}}^2 . x^2 + \underset{\cdot}{\ddot{3}}^2 . x^3 + \underset{\cdot}{\ddot{4}}^2 . x^4 + \underset{\cdot}{\ddot{5}}^2 . x^5 + \text{enz.} + \underset{\cdot}{\ddot{p}}^2 . x^p$$

$$z^3 = \ldots\ldots \underset{\cdot}{\ddot{3}}^3 . x^3 + \underset{\cdot}{\ddot{4}}^3 . x^4 + \underset{\cdot}{\ddot{5}}^3 . x^5 + \text{enz.} + \underset{\cdot}{\ddot{p}}^3 . x^p$$

$$z^4 = \ldots\ldots\ldots\ldots \underset{\cdot}{\ddot{4}}^4 . x^4 + \underset{\cdot}{\ddot{5}}^4 . x^5 + \text{enz.} + \underset{\cdot}{\ddot{p}}^4 . x^p$$

$$z^5 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \underset{\cdot}{\ddot{5}}^5 . x^5 + \text{enz.} + \underset{\cdot}{\ddot{p}}^5 . x^p$$

$$z^p = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \underset{\cdot}{\ddot{p}}^p . x^p$$

wanneer men nu deze waarden van de magten van z, in de vergelijking voor p^n overbrengt; dan zal men verkrijgen:

$$\textit{Wijzer} \begin{Bmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & \text{enz.} \\ b, & c, & d, & e, & f, & \text{enz.} \end{Bmatrix} \textit{of Index.}$$

$$p^n = a^n$$
$$+ \overset{1}{(n)} a^{n-1} \times \underset{\cdot}{\ddot{1}}^1 \times x$$
$$+ [\overset{1}{(n)} a^{n-1} \times \underset{\cdot}{\ddot{2}}^1 \times \overset{2}{(n)} a^{n-2} \times \underset{\cdot}{\ddot{2}}^2] \times x^2$$
$$+ [\overset{1}{(n)} a^{n-1} \times \underset{\cdot}{\ddot{3}}^1 + \overset{2}{(n)} a^{n-2} \times \underset{\cdot}{\ddot{3}}^2 + \overset{3}{(n)} a^{n-3} \times \underset{\cdot}{\ddot{3}}^3] \times x^3$$
$$+ \text{enz.}$$

Deze uitdrukking geldt voor alle waarden van n, en het is duidelijk te zien, dat derzelver algemeenen term, welke de coefficient van x^p en de $(p+1)^e$ in rang is, door

$$\left\{ \overset{1}{(n)} a^{n-1} \times \underset{\cdot}{\ddot{p}}^1 + \overset{2}{(n)} a^{n-2} \times \underset{\cdot}{\ddot{p}}^2 + \overset{3}{(n)} a^{n-3} \times \underset{\cdot}{\ddot{p}}^3 + \text{enz.} + \right.$$
$$\overset{p-2}{(n)} a^{n-p+2} \times \underset{\cdot}{\ddot{p}}^{p-2} + \overset{p-1}{(n)} a^{n-p+1} \times \underset{\cdot}{\ddot{p}}^{p-1} + \overset{p}{(n)} a^{n-p} \times$$
$$\left. \underset{\cdot}{\ddot{p}}^p \right\} \times x^p$$

zal worden uitgedrukt, en dat diensvolgens alle de termen van de ontwikkelde magt van de gepermuteerde herhalings combinatien tot de som, welke gelijk is aan den exponent dezes terms, zullen afhangen. Nu zullen, zoo als §. 710. is aangemerkt, deze termen door de herhalings combinatien kunnen bepaald worden, indien men elke bij-

bijzondere complexie van herhalings combinatien, met derzelver permutatie getal vermenigvuldigt. Wij zullen deze uitdrukking, door de uitwerking van het volgend voorbeeld, dadelijk ophelderen.

§. 733. Voorbeeld. *Den coefficient van den negenden term van* $(1 - 3ax + 2bx^2 - cx^3 + 4dx^4)^7$ *te vinden?*

In dit voorbeeld is de waarde van a, in $p = a + bx +$ *enz.*, gelijk één; derhalve $a^n = a^{n-1} = a^{n-2} =$ *enz.* $= 1$; voorts is:

$$\overset{1}{(n)}=7;\ \overset{2}{(n)}=21;\ \overset{3}{(n)}=35;\ \overset{4}{(n)}=35;\ \overset{5}{(n)}=21;\ \overset{6}{(n)}=7;\ \overset{7}{(n)}=1$$

de combinatorische wijzer is, in ons geval,

$$\left\{\begin{matrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8 \\ -3a, & +2b, & -c, & +4d, & 0, & 0, & 0, & 0 \end{matrix}\right\}$$

de negende term van de zevende magt van den vorm Px^8 zijnde, is deszelfs coefficient, volgens de algemeene formule, gelijk

$$7\times\ddot{\underset{\cdot}{8}}^1 + 21\times\ddot{\underset{\cdot}{8}}^2 + 35\times\ddot{\underset{\cdot}{8}}^3 + 35\times\ddot{\underset{\cdot}{8}}^4 + 21\times\ddot{\underset{\cdot}{8}}^5 + 7\times\ddot{\underset{\cdot}{8}}^6 + \ddot{\underset{\cdot}{8}}^7 + 0\times\ddot{\underset{\cdot}{8}}^8$$

Zie hier de geheele bewerking.

A		*B*			*C*	*D*
8	$=\ddot{8}^1$	1.	(8)	$=\ddot{8}^1=$	0	$7\times\ddot{8}^1=0$
17	$=\ddot{8}^2$	2.	(17)	$=\ddot{8}^2=$	. . . . .	$21\times\ddot{8}^2=336d^2$
26		2.	(26)		. . . . .	
35		2.	(35)		. . . . .	
44		1.	(44)		$+16d^2$	
116	$=\ddot{8}^3$	3.	(116)	$=\ddot{8}^3=$	. . . . . .	$35\times\ddot{8}^3=$ 2520 acd
125		6.	(125)		. . . . . .	1680 b^2d
134		6.	(134)		$+72acd$	
224		3.	(224)		$+48b^2d$	
233		3.	(233)		$+6bc^2$	210 bc^2
1115	$=\ddot{8}^4$	4.	(1115)	$=\ddot{8}^4=$	. . . .	$35\times\ddot{8}^4=$ 30240 a^2bd
1124		12.	(1124)		$+864a^2bd$	1890 a^2c^2
1133		6.	(1133)		$+54a^2c^2$	5040 ab^2c
1223		12.	(1223)		$+144ab^2c$	560 b^4
2222		1.	(2222)		$+16b^4$	
11114	$=\ddot{8}^5$	5.	(11114)	$=\ddot{8}^5=$	$+1620a^4d$	$21\times\ddot{8}^5=$ 34020 a^4d
11123		20.	(11123)		$+1080a^3bc$	22680 a^3bc
11222		10.	(11222)		$+720a^2b^3$	15120 a^2b^3
111113	$=\ddot{8}^6$	6.	(111113)	$=\ddot{8}^6=$	$+1458a^5c$	$7\times\ddot{8}^6=$ 10206 a^5c
111122		15.	(111122)		$+4860a^4b^2$	34020 a^4b^2
1111112	$=\ddot{8}^7$	7.	(1111112)	$=\ddot{8}^7=$	$+10206a^6b$	$\ddot{8}^7=$ 10206 a^6b
11111111	$=\ddot{8}^8$	1.	(11111111)	$=\ddot{8}^8=$	$+6561a^8$	$0\times\ddot{8}^8=$ 0

Men ontwikkele in kolom *A*, volgens den regel van §. 701, de herhalings combinatien tot de som 8.

Men zoeke, volgens §. 690, de permutatie-getallen voor elke complexien van de onderscheidene klassen van combinatien, in kolom *A* gevonden; dan verkrijgt men, in kolom *B*, de gepermuteerde herhalings combinatien tot de som 8.

Voorts

Voorts ſtelle men, in plaats van de wijzer-getallen van de complexien der gepermuteerde herhalings combinatien in B, de waarden, welke zij in den wijzer hebben: namelijk voor 1 de waarde $-3a$; voor 2 de waarde $+2b$; *enz.*, en, omdat de waarden van de wijzer-getallen 5, 6, 7, 8, 9, *enz.* alle nul zijn, zullen ſommige termen, welke uit de complexien, waarin de wijzer-getallen 5, 6, *enz.* voorkomen, ontſtaan, gelijk nul worden, en men zal de kolom C verkrijgen.

Eindelijk ſtelle men de waarden van $\underset{\cdot}{\ddot{8}}{}^1$, $\underset{\cdot}{\ddot{8}}{}^2$, $\underset{\cdot}{\ddot{8}}{}^3$, *enz.* in de kolom C voorkomende, in de uitdrukking:

$$7 \times \underset{\cdot}{\ddot{8}}{}^1 + 21 \times \underset{\cdot}{\ddot{8}}{}^2 + 35 \times \underset{\cdot}{\ddot{8}}{}^3 + 35 \times \underset{\cdot}{\ddot{8}}{}^4 + 21 \times \underset{\cdot}{\ddot{8}}{}^5 + 7 \times \underset{\cdot}{\ddot{8}}{}^6 + \underset{\cdot}{\ddot{8}}{}^7$$

dan verkrijgt men, in kolom D, alle de onderſcheidene termen van den coefficient van den negenden term van $(1 - 3ax + 2bx^2 - cx^3 + 4dx^4)^7$; namelijk

$$(336d^2 + 2520acd + 1680b^2d + 210bc^2 + 30240a^2bd + 1890a^2c^2 + 5040ab^2c + 560b^4 + 34020a^4d + 22680a^3bc + 15120a^2b^3 + 10206a^5c + 34020a^4b^2 + 10206a^6b)x^8$$

welker termen men ook naar de magten van a kan ordenen.

§. 734. Wij zullen geen meer voorbeelden van de toepaſſing dezer formulen geven, en ons vergenoegen, met optemerken: 1° dat men, door deze leerwijze, elken term der magt afzonderlijk kan ontwikkelen; 2° dat men de gepermuteerde herhalings combinatien, tafelsgewijze ontwikkeld hebbende, (zoo als men hiervan de ſom 2 tot de ſom 6 ingeſloten ziet)

Som 2	*Som* 3	*Som* 4	*Som* 5	*Som* 6
$\underset{\cdot}{\ddot{2}}{}^1 = 1(2)$	$\underset{\cdot}{\ddot{3}}{}^1 = 1(3)$	$\underset{\cdot}{\ddot{4}}{}^1 = 1(4)$	$\underset{\cdot}{\ddot{5}}{}^1 = 1(5)$	$\underset{\cdot}{\ddot{6}}{}^1 = 1(6)$
$\underset{\cdot}{\ddot{2}}{}^2 = 1(1^2)$	$\underset{\cdot}{\ddot{3}}{}^2 = 2(12)$	$\underset{\cdot}{\ddot{4}}{}^2 = \begin{cases} 2(13) \\ 1(2^2) \end{cases}$	$\underset{\cdot}{\ddot{5}}{}^2 = \begin{cases} 2(14) \\ 2(23) \end{cases}$	$\underset{\cdot}{\ddot{6}}{}^2 = \begin{cases} 2(15) \\ 2(24) \\ 1(3^2) \end{cases}$
	$\underset{\cdot}{\ddot{3}}{}^3 = 1(1^3)$	$\underset{\cdot}{\ddot{4}}{}^3 = 3(1^2 2)$	$\underset{\cdot}{\ddot{5}}{}^3 = \begin{cases} 3(1^2 3) \\ 3(12^2) \end{cases}$	$\underset{\cdot}{\ddot{6}}{}^3 = \begin{cases} 3(1^2 4) \\ 6(123) \\ 1(2^3) \end{cases}$
		$\underset{\cdot}{\ddot{4}}{}^4 = 1(1^4)$	$\underset{\cdot}{\ddot{5}}{}^4 = 4(1^3 2)$	$\underset{\cdot}{\ddot{6}}{}^4 = \begin{cases} 4(1^3 3) \\ 6(1^2 2^2) \end{cases}$
			$\underset{\cdot}{\ddot{5}}{}^5 = 1(1^5)$	$\underset{\cdot}{\ddot{6}}{}^5 = 5(1^4 2)$
				$\underset{\cdot}{\ddot{6}}{}^6 = 1(1^6)$

niets anders noodig heeft, dan, in elk geval, de beteekenis van de wijzer-getallen, welke in elke complexie voorkomen, uitteſchrijven,

en

en in de coefficienten der termen te ſubſtitueren, om oogenblikkelijk eenige gegevene magt, tot zoo vele termen als men goedvindt, te ontwikkelen. In de Wiskundige oefeningen zullen wij meer voorbeelden geven.

§. 735. * De vergelijking, welke in §. 732, voor $p^n = (a + bx + cx^2 + enz.)^n$ gevonden is, wordt, bij de navolgers van de Hindenburgſche leerwijze, het *polynomisch theorema* genoemd: †† wanneer men in hetzelve $b = 1$; $c = 0$; $d = 0$; *enz.* en $x = 1$ ſtelt, dan verandert het in het binomium van Newton, hetwelk bijgevolg een bijzonder geval van het *Polynomisch Theorema* is. Men maakt van dit Theorema in vele analytiſche beſchouwingen een nuttig gebruik, gelijk men in de oplosſing van de volgende vraagſtukken zien zal.

§. 736. I. Vraagstuk. *Het gebroken*

$$\frac{1}{1 - bz - cz^2 - dz^3 - ez^4 - fz^5 - enz.} = p$$

in een oneindig voortloopende reeks te ontwikkelen?

Men zou in de algemeene vergelijking van het *polynomisch theorema* $a = 1$ en $n = -1$ kunnen ſtellen: maar wij zullen eenen anderen weg inſlaan en ſtellen $bz + cz^2 + dz^3 + ez^4 + enz. = y$; dan wordt de gegevene breuk

$$\frac{1}{1 - y} = 1 + y + y^2 + y^3 + y^4 + y^5 + enz.$$

Neemt men nu voor den combinatoriſchen wijzer

$$\begin{Bmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & enz. \\ b, & c, & d, & e, & f, & g, & h, & enz. \end{Bmatrix}$$

dan is, volgens het bewezene in §. 732,

$$y = \ddot{\underset{\cdot}{1}}{}^1 z + \ddot{\underset{\cdot}{2}}{}^1 z^2 + \ddot{\underset{\cdot}{3}}{}^1 z^3 + \ddot{\underset{\cdot}{4}}{}^1 z^4 + enz.$$

$$y^2 = \;.\;.\; \ddot{\underset{\cdot}{2}}{}^2 z^2 + \ddot{\underset{\cdot}{3}}{}^2 z^3 + \ddot{\underset{\cdot}{4}}{}^2 z^4 + enz.$$

$$y^3 = \;.\;.\;.\;.\;.\; \ddot{\underset{\cdot}{3}}{}^3 z^3 + \ddot{\underset{\cdot}{4}}{}^3 z^4 + enz.$$

$$y^4 = \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; \ddot{\underset{\cdot}{4}}{}^4 z^4 + enz.$$

ſtelt men nu deze waarden van y, y^2, *enz.* in de vergelijking voor $1 : (1 - y)$, dan zal men verkrijgen:

$$\frac{1}{p} = p^{-1}$$

$$\frac{1}{p} = p^{-1} = 1 + \ddot{\underset{\cdot}{1}}{}^{1} z + [\ddot{\underset{\cdot}{2}}{}^{1} + \ddot{\underset{\cdot}{2}}{}^{2}] z^2 + [\ddot{\underset{\cdot}{3}}{}^{1} + \ddot{\underset{\cdot}{3}}{}^{2} + \ddot{\underset{\cdot}{3}}{}^{3}] z^3 +$$

$$[\ddot{\underset{\cdot}{4}}{}^{1} + \ddot{\underset{\cdot}{4}}{}^{2} + \ddot{\underset{\cdot}{4}}{}^{3} + \ddot{\underset{\cdot}{4}}{}^{4}] z^4 + \mathit{enz.}$$

of, wanneer men van de notatie van §. 709 gebruik maakt,

$$p^{-1} = 1 + \overset{1}{\underset{\cdot}{S}} z + \overset{2}{\underset{\cdot}{S}} z^2 + \overset{3}{\underset{\cdot}{S}} z^3 + \overset{4}{\underset{\cdot}{S}} z^4 + \overset{5}{\underset{\cdot}{S}} z^5 + \mathit{enz.}$$

§. 737. Volgens deze formule, zal men, met behulp der gepermuteerde herhalings combinatien, tot eene gegevene som, de waarde van p, op eene veel gemakkelijker wijze, dan door divideren, vinden kunnen. Indien, bij voorbeeld, gegeven is:

$$Cosec.\, x = \frac{1}{Sin.\, x} = \frac{1}{x} : \left\{ 1 - \frac{x^2}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4.5} - \mathit{enz.} \right\}$$

dan zal men, $x^2 = z$ stellende, met behulp van den wijzer $b = -\frac{1}{1.2.3}$; $c = + \frac{1}{1.2.3.4.5}$ *enz.* vinden.

$$Cosec.\, x = \frac{1}{x} + \frac{x}{1.2.3} + \frac{7x^3}{2.3.3.4.5} + \mathit{enz.}$$

§. 738. Op dezelfde wijze, zal men, de waarde van $Sec.\, x = \frac{1}{Cos.\, x} = 1 : \left\{ 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \mathit{enz.} \right\}$ in eene reeks ontwikkelen, en men zal vinden:

$$Sec.\, x = 1 + \frac{x^2}{1.2} + \frac{5x^4}{1.2.3.4} + \frac{61x^6}{1.5.9.16} + \mathit{enz.}$$

§. 739. 2. Vraagstuk. *Het stelkundig gebroken*

$$\frac{p}{q} = \frac{A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \mathit{enz.}}{1 - bz - cz^2 - dz^3 - ez^4 - \mathit{enz.}}$$

te ontwikkelen, dat wil zeggen, den vorm van de reeks te vinden, welke door dadelijke divisie ontstaan zal?

Omdat $p : q = p \times q^{-1}$ is, en, volgens het voorgaande vraagstuk,

$$q^{-1} = 1 + \ddot{\underset{\cdot}{1}}{}^{1} z + [\ddot{\underset{\cdot}{2}}{}^{1} + \ddot{\underset{\cdot}{2}}{}^{2}] z^2 + [\ddot{\underset{\cdot}{3}}{}^{1} + \ddot{\underset{\cdot}{3}}{}^{2} + \ddot{\underset{\cdot}{3}}{}^{3}] z^3 + \mathit{enz.}$$

zal men deze reeks met

$$p = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \mathit{enz.}$$

moeten vermenigvuldigen om de waarde van pq^{-1} of $\frac{p}{q}$ te vinden: deze vermenigvuldiging uitwerkende, verkrijgt men:

$$Wijzer \left\{ \begin{matrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & \mathit{enz.} \\ b, & c, & d, & e, & f, & g, & \mathit{enz.} \end{matrix} \right\} \text{of Index.}$$

 $\frac{p}{q} = A$

$$\frac{p}{q} = A$$
$$+ [B + A \times \ddot{\underset{\cdot}{1}}{}^1]\, z$$
$$+ [C + B \times \ddot{\underset{\cdot}{1}}{}^1 + A \times (\ddot{\underset{\cdot}{2}}{}^1 + \ddot{\underset{\cdot}{2}}{}^2)]\, z^2$$
$$+ [D + C \times \ddot{\underset{\cdot}{1}}{}^1 + B \times (\ddot{\underset{\cdot}{2}}{}^1 + \ddot{\underset{\cdot}{2}}{}^2) + A \times (\ddot{\underset{\cdot}{3}}{}^1 + \ddot{\underset{\cdot}{3}}{}^2 + \ddot{\underset{\cdot}{3}}{}^3)]\, z^3$$
$$+ \text{ enz.}$$

De wet van voortgang van de termen dezer reeks loopt zoo sprekend in het oog en is zoo regelmatig, dat het niet noodig is dezelve verder uitteschrijven. De combinatorische teekens in gewone stelkundige overzettende, zal men de uitdrukking vinden, die door divisie ontstaat.

§. 740. Stellen wij, volgens §. 709, $\ddot{\underset{\cdot}{1}}{}^1 = \overset{1}{\underset{\cdot}{S}}$; $\ddot{\underset{\cdot}{2}}{}^1 + \ddot{\underset{\cdot}{2}}{}^2 = \overset{2}{\underset{\cdot}{S}}$; *enz.* dan is:

$$\frac{p}{q} = A + (B + A \times \overset{1}{\underset{\cdot}{S}})z + (C + B.\overset{1}{\underset{\cdot}{S}} + A.\overset{2}{\underset{\cdot}{S}})z^2 + (D + C.\overset{1}{\underset{\cdot}{S}} + B.\overset{2}{\underset{\cdot}{S}} + A.\overset{3}{\underset{\cdot}{S}})z^3 + (E + D.\overset{1}{\underset{\cdot}{S}} + C.\overset{2}{\underset{\cdot}{S}} + B.\overset{3}{\underset{\cdot}{S}} + A.\overset{4}{\underset{\cdot}{S}})z^4 + \text{ enz.}$$

§. 741. Vermits $Tang.\,x = Sin.\,x : Cos.\,x$, en $Cot.\,x = Cos.\,x : Sin.\,x$, zal men, de waarden voor $Sin.\,x$ en $Cot.\,x$, in §. 618, pag 366, gevonden, als bekend aannemende, en $z = x^2$ stellende, met behulp van de vergelijking voor $p\,q^{-1}$, zoo even gevonden, vinden:

$$Tang.\,x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{3.5} + \frac{17x^7}{5.7.9} + \frac{62x^9}{35.81} + \frac{1382x^{11}}{25.77.81} + \text{ enz.}$$

$$Cot.\,x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} - \frac{2x^5}{27.35} - \frac{x^7}{7.25.27} - \frac{2x^9}{11.35.243} - \text{ enz.}$$

welke reeksen ook, even als die voor de Secans en Cosecans, met behulp der onbepaalde coefficienten, kunnen gevonden worden (113).

§. 742. 3. VRAAGSTUK. *Gegeven zijnde reeksen*

$$y = az + bz^2 + cz^3 + dz^4 + ez^5 + fz^6 + \text{ enz.}$$
$$u = Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 + Ey^5 + Fy^6 + \text{ enz.}$$

de waarde van u in eene reeks te ontwikkelen, welke naar de opklimmende magten van z geordend is?

Indien men $\left\{ \begin{matrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & \text{enz.} \\ a, & b, & c, & d, & e, & \text{enz.} \end{matrix} \right\}$ tot wijzer aanneemt; dan is, volgens §. 732.

$y =$

(113) Zie meer aangehaalde Handleiding, §. 1063. *et seq.*

$$y = \ddot{\underset{\cdot}{1}}{}^{1} z + \ddot{\underset{\cdot}{2}}{}^{1} z^{2} + \ddot{\underset{\cdot}{3}}{}^{1} z^{3} + \ddot{\underset{\cdot}{4}}{}^{1} z^{4} + \ddot{\underset{\cdot}{5}}{}^{1} z^{5} + enz.$$

$$y^{2} = \;.\;.\; \ddot{\underset{\cdot}{2}}{}^{2} z^{2} + \ddot{\underset{\cdot}{3}}{}^{2} z^{3} + \ddot{\underset{\cdot}{4}}{}^{2} z^{4} + \ddot{\underset{\cdot}{5}}{}^{2} z^{5} + enz.$$

$$y^{3} = \;.\;.\;.\;.\;.\; \ddot{\underset{\cdot}{3}}{}^{3} z^{3} + \ddot{\underset{\cdot}{4}}{}^{3} z^{4} + \ddot{\underset{\cdot}{5}}{}^{3} z^{5} + enz.$$

enz. . . . . *enz.*

en brengt men deze waarden van y, y^2, y^3, *enz.* in de tweede vergelijking $u = Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 + enz.$ over; dan zal men eindelijk verkrijgen:

$$\begin{array}{rl|l|l|l}
u = A\ddot{\underset{\cdot}{1}}{}^{1} z + & A\ddot{\underset{\cdot}{2}}{}^{1} & z^{2} + A\ddot{\underset{\cdot}{3}}{}^{1} & z^{3} + A\ddot{\underset{\cdot}{4}}{}^{1} & z^{4} + enz. \\
 & B\ddot{\underset{\cdot}{2}}{}^{2} & +B\ddot{\underset{\cdot}{3}}{}^{2} & +B\ddot{\underset{\cdot}{4}}{}^{2} & \\
 & & +C\ddot{\underset{\cdot}{3}}{}^{3} & +C\ddot{\underset{\cdot}{4}}{}^{3} & \\
 & & & +D\ddot{\underset{\cdot}{4}}{}^{4} &
\end{array}$$

Men zette nu de combinatorische teekens, welke in deze vergelijking voorkomen, met behulp van de tafels, op de tegenzijde van Tab. VI, volgens den wijzer, in ſtelkundige over; dan zal men vinden:

$$u = A.az + \left\{ A.b + B.a^{2} \right\} z^{2} + \left\{ A.c + B.2ab + C.a^{3} \right\} z^{3}$$
$$+ \left\{ A.d + B.(2ac + b^{2}) + C.3a^{2}b + D.a^{4} \right\} z^{4} + \left\{ A.e + \right.$$
$$\left. B.(2ad + 2bc) + C.(3a^{2}c + 3ab^{2}) + D.4a^{3}b + E.a^{5} \right\} z^{5}$$
$$+ \left\{ A.f + B.(2ae + 2bd + c^{2}) + C.(3a^{2}d + 6abc + b^{3}) + \right.$$
$$\left. D.(4a^{3}c + 6a^{2}b^{2}) + E.5a^{4}b + F.a^{6} \right\} z^{6} + \left\{ A.g + B.(2af \right.$$
$$+ 2be + 2cd) + C.(3a^{2}e + 6abd + 3ac^{2} + 3b^{2}c) + \;.\;.$$
$$D.(4a^{3}d + 12a^{2}bc + 4ab^{3}) + E.(5a^{4}c + 10a^{3}b^{2}) + \;.\;.$$
$$\left. F.6a^{5}b + G.a^{7} \right\} z^{7} + \left\{ A.h + B.(2ag + 2bf + 2ce + d^{2}) + \right.$$
$$C.(3a^{2}f + 6abe + 6acd + 3b^{2}d + 3bc^{2}) + D.(4a^{3}e +$$
$$12a^{2}bd + 6a^{2}c^{2} + 12ab^{2}c + b^{4}) + E.(5a^{4}d + 20a^{3}bc +$$
$$\left. 10a^{2}b^{3}) + F.(6a^{5}c + 15a^{4}b^{2}) + G.7a^{6}b + H.a^{8} \right\} z^{8} + enz.$$

 Wan-

†† Wanneer nu de coefficienten van beide reekfen gegeven zijn, dan zal men de getallen waarden van de coefficienten der gevraagde reeks, met behulp van deze uitdrukking vinden.

§. 743. 4. Vraagstuk. *Gegeven zijnde de reeks*

$$y = a z + b z^2 + c z^3 + d z^4 + e z^5 + f z^6 + enz.$$

dezelve omtekeeren, dat is, de waarde van z *in eene functie van* y *uittedrukken?*

Wij hebben §. 573, reeds een voorloopig denkbeeld van de omkeering der reekfen gegeven. Het is aldaar gebleken: dat de waarde van z van den vorm $Ay + By^2 +$ *enz.* zal moeten zijn: men zal dan de magten van y in deze laatfte vergelijking moeten overbrengen, en dan zal men verkrijgen:

$$o = (A\underset{\cdot}{\ddot{1}}^{1} - \underset{\cdot}{\ddot{1}})z + (A\underset{\cdot}{\ddot{2}}^{1} + B\underset{\cdot}{\ddot{2}}^{2})z^2 + (A\underset{\cdot}{\ddot{3}}^{1} + B\underset{\cdot}{\ddot{3}}^{2} + C\underset{\cdot}{\ddot{3}}^{3})z^3 + enz.$$

Deze vergelijking moet voor alle waarden van z gelijk nul zijn, waaraan zal voldaan worden, wanneer men alle de coefficienten gelijk nul ftelt: zulks doende, zal men hebben:

$$A\underset{\cdot}{\ddot{1}}^{1} - 1 = o$$

$$A\underset{\cdot}{\ddot{2}}^{1} + B\underset{\cdot}{\ddot{2}}^{2} = o$$

$$A\underset{\cdot}{\ddot{3}}^{1} + B\underset{\cdot}{\ddot{3}}^{2} + C\underset{\cdot}{\ddot{3}}^{3} = o$$

$$A\underset{\cdot}{\ddot{4}}^{1} + B\underset{\cdot}{\ddot{4}}^{2} + C\underset{\cdot}{\ddot{4}}^{3} + D\underset{\cdot}{\ddot{4}}^{4} = o$$

uit welke de waarde der coefficienten A, B, C, D, *enz.* de één na den anderen, zullen opgelost worden. Lost men indedaad deze vergelijkingen op, en ftelt men in plaats van de combinatorifche teekens derzelver waardijen; dan zal men vinden:

$$z = \frac{y}{a} - \frac{by^2}{a^3} + \left\{2b^2 - ac\right\}\frac{y^3}{a^5} - \left\{5b^3 - 5abc + a^2d\right\}\frac{y^4}{a^7}$$
$$+ \left\{14b^4 - 21ab^2c + 6a^2bd + 3a^2c^2 - a^3e\right\}\frac{y^5}{a^9} - \left\{42b^5\right.$$
$$- 84ab^3c + 28a^2b^2d + 28a^2bc^2 - 7a^3be - 7a^3cd +$$
$$\left. a^4f\right\}\frac{y^6}{a^{11}} + \left\{132b^6 - 330ab^4c + 120a^2b^3d + 180a^2b^2c^2 - \right.$$
$$36a^3b^2e - 72a^3bcd + 8a^4bf - 12a^3c^3 + 8a^4ce + 4a^4d^2$$
$$\left. - a^5g\right\}\frac{y^7}{a^{13}} - \left\{429b^7 - 1287ab^5c + 495a^2b^4d + 990a^2b^3c^2\right.$$
$$-$$

$$-165a^3b^3e-495a^3b^2cd+45a^4b^2f-165a^3bc^3+90a^4bce$$
$$\left.+45a^4bd^2-9a^5bg+45a^4c^2d-9a^5cf-9a^5de+a^6h\right\}\frac{y^8}{a^{15}}$$

$$+\Big\{1430b^8-5005ab^6c+2002a^2b^5d+5005a^2b^4c^2-$$
$$715a^3b^4e-2860a^3b^3cd+220a^4b^3f-1430a^3b^2c^3+660a^4b^2ce$$
$$+330a^4b^2d^2-55a^5b^2g+660a^4bc^2d-110a^5bcf-\ldots$$
$$-110a^5bde+10a^6bh+55a^4c^4-55a^5cd^2-55a^5c^2e+$$
$$\left.10a^6cg+10a^6df+5a^6e^2-a^7i\right\}\frac{y^9}{a^{17}}+\text{enz.}$$

§. 744. Men zal, met behulp van deze reeks, alle gegevene reeksen kunnen omkeeren, en tot negen termen voortzetten.

§. 745. Gegeven zijnde $Sin.\ x=x-\frac{x^3}{1.2.3}+enz.$; dan zal, $z=x^2$; $a=1$, $b=0$, $c=-\frac{1}{6}$, $d=0$, $e=\frac{1}{120}$, *enz.* stellende, gevonden worden: $Sin.\ x=x+\frac{x^3}{2.3}+\frac{3.x^5}{2.4.5}+\frac{3.5.x^7}{2.4.6.7}+\frac{3.5.7.x^9}{2.4.6.8.9}$ $+$ *enz.*

§. 746. †† Indien gegeven was: $y=p+az+bz^2+cz^3+enz.$, dan zou men, om de gegevene formule te kunnen toepassen, $(y-p)$ als eene veranderlijke grootheid moeten aanmerken, en, in de algemeene omgekeerde reeks, $y-p$ in plaats van y moeten schrijven.

§. 747. 5. VRAAGSTUK. *De uitdrukking*

$$u=Nep.\ Log.\Big\{1+az+bz^2+cz^3+dz^4+ez^5+enz.\Big\}$$

in eene reeks, welke naar de opklimmende magten van z geordend is, te ontwikkelen?

Stellen wij $y=az+bz^2+cz^3+enz.$; dan zal de gegevene uitdrukking in $x=Nep.Log.\ (1+y)$ veranderen: nu is

$$Nep.\ Log.\ (1+y)=y-\tfrac{1}{2}y^2+\tfrac{1}{3}y^3-\tfrac{1}{4}y^4+\tfrac{1}{5}y^5-enz.$$

Wij hebben dan, in de vergelijking van §. 742, $A=1$, $B=-\frac{1}{2}$, $C=\frac{1}{3}$, $D=-\frac{1}{4}$, $E=\frac{1}{5}$, $F=-\frac{1}{6}$, en men zal verkrijgen:

$$Nep.\ Log.\Big\{1+az+bz^2+cz^3+dz^4+ez^5+fz^6+enz.\Big\}$$
$$=az+\Big\{b-\tfrac{1}{2}a^2\Big\}z^2+\Big\{c-ab+\tfrac{1}{3}a^3\Big\}z^3+\Big\{d-\tfrac{1}{2}(2ac$$
$$+b^2)+a^2b-\tfrac{1}{4}a^4\Big\}z^4+\Big\{e-(ad+bc)+a^2c+ab^2-a^3b$$

$$+\tfrac{1}{5}a^5\Big\} z^5 + \Big\{ f - \tfrac{1}{2}(2ae + 2bd + c^2) + \tfrac{1}{3}(3a^2d + 6abc$$
$$+ b^3) - \tfrac{1}{4}(4a^3c + 6a^2b^2) + a^4b - \tfrac{1}{6}a^6 \Big\} z^6 + enz. \qquad (R)$$

§. 748. Laat ons, om deze laatste formule, welke gemakkelijk kan worden voortgezet, toetepassen, den Briggiaanschen Logarithmus van de Sinus en de Cosinus van eenen boog x berekenen. Wij hebben, zie §. 618,

$$Sin.\ x = x \times \left\{ 1 - \frac{x^2}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4.5} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6.7} + enz. \right\}$$

$$Nep.\ Log.\ Sin.\ x = Nep\ Log.\ x + Nep.\ Log. \left\{ 1 - \frac{x^2}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4.5} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6.7} + enz. \right\}$$

Stellen wij nu $x^2 = z$; dan is $x^4 = z^2$; $x^6 = z^3$; *enz.*; vergelijkt men dan $1 - \frac{x^2}{1.2.3} + enz.$ met $1 + az + bz^2 + enz.$; dan zal men vinden: $a = -\frac{1}{1.2.3}$; $b = +\frac{1}{1.2.3.4.5}$; *enz.*: men heeft dan slechts deze waarden van a, b, c, d, *enz.* in vergelijking (R) overtebrengen, om te vinden:

$$Log.\ Sin.\ x = Log.\ x - M \times \left\{ \frac{x^2}{2.3} + \frac{x^4}{4.5.9} + \frac{x^6}{5.7.9.9} + \frac{x^8}{7.8.25.27} + \frac{x^{10}}{7.11.25.81} + \frac{691\,x^{12}}{6.11.13.49.125.729} + \ldots \frac{2\,x^{14}}{11.13.25.49.729} + \frac{3617\,x^{16}}{11.13.16.17.49.625.2187} + enz. \right\}$$

zijnde de letter M de modulus der Briggiaansche Logarithmen.

§. 749. Men zal, op gelijke wijze, uit $Cof.\ x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + enz$, met behulp van de vergelijking (R), vinden:

$$Log.\ Cof.\ x = -M \left\{ \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{3.4} + \frac{x^6}{5.9} + \frac{17\,x^8}{5.7.8.9} + \frac{31\,x^{10}}{7.25.81} + \frac{691\,x^{12}}{6.7.11.25.81} + \frac{10922\,x^{14}}{11.13.25.49.243} + \frac{929569\,x^{16}}{11.13.16.49.112.729} + enz. \right\}$$

Men zal, door deze twee reeksen, gemakkelijk den Logarithmus van de Tangens en de Cotangens van eenen boog kunnen bepalen.

VIJF-

VIJF- EN- ZESTIGSTE LES.

Het betoog van het Theorema *van* Albert Girard, *over de sommen van de magten van de wortelen eener vergelijking, gemeenlijk het* Theorema *van* Newton *genoemd* (114).

§. 750. †† Stelling. *Laten van eenige grootheden a, b, c, d, enz. gegeven zijn: de som dezer grootheden gelijk A; de som van der-*

(114) Men heeft, gedurende eenen geruimen tijd, Néwton voor den uitvinder van dit theorema gehouden, omdat een werkje van onzen schranderen en te weinig bekenden Landgenoot, Albert Girard, in 1629, en dus, lang voor den leeftijd van Newton, te *Amsterdam*, uitgegeven, al terstond, na deszelfs uitgave, in vergetelheid schijnt geraakt te zijn. Na dat wij vele vruchteloze pogingen hadden aangewend om dit werkje te bekomen, heeft onze vriend, de Ridder en Hoogleeraar van Beeck Calkoen, de gelegenheid gevonden dit zeldzaam werkje te zien: hij schreef 'er de merkwaardigste plaatsen uit af, en deelde ons dit afschrift goedgunstig mede. De volledige tijtel van het werkje is: *Invention Nouvelle en Algebre, par* Albert Girard, *Mathématicien, tant pour la solution des equations algebriques que pour recognoistre le nombre des solutions qu'elles reçoivent avec plusieurs choses qui sont nécessaires à la perfection de cette science, à Amsterdam, chez* G. Jansen Blaauw, 1629. 4to (H_3). Het werkje is zonder getallen van bladzijden gedrukt, en bevat drie deelen: het eerste is van rekenkunstigen inhoud; het tweede stelkunstig en het derde meetkunstig. Het blijkt uit hetzelve: 1º dat Girard eene grondige kennis van de zamenstelling der hooge magts vergelijkingen had; 2º dat hij het gebruik van de exponenten der magten kende; 3º dat hem de toepassing der Algebra op de Meetkunst eigen was; onder anderen verklaard hij de beteekenis der positieve en negatieve wortels, (en hier bij moet men in aanmerking nemen: dat de Meetkunst van Descartes eerst in 1637 in het licht kwam,) op zulk eene duidelijke en eenvoudige wijze, als men, bij schrijvers van zijnen leeftijd, bezwaarlijk zal aantreffen: hij zegt ten dien aanzien: (zie F_8 van dit werkje) „ *les solutions en moins*" (in ons spraakgebruik *de negatieve wortels eener vergelijking*) „ *s'expliquent en géometrie en retrogradant;* „ *le moins recule là où le plus avance.*" 4º Dat de arithmetische driehoek, welke hij *triangle d'extraction* noemt, en altijd aan Pascal toegeschreven is geworden, van zijne vinding is, (zie E_2). Eindelijk vindt men in dit merkwaardige stuk het theorema, dat wij in deze Les behandelen. Hij drukt zich over hetzelve aldus uit: „ *Soit A premier* „ *meslé*" (dat wil zeggen, de coefficient van den tweeden term eener vergelijking $x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2}$ — *enz.*) „ *B second meslé, C trois*„ *siesme, D quatriesme etc., alors en toute sorte d'equations,* „ *A*

derzelver producten op alle mogelijke wijzen, twee aan twee, B; de som van derzelver producten, drie aan drie, C; de som van derzelver producten, vier aan vier, D; en zoo vervolgens: indien men dan de som van de eerste magten dezer grootheden door Σ, *de som der tweede magten door* Σ_2, *die der derde magten door* Σ_3; *die der* n^{de} *magten door* Σ_n *uitdrukt; dan zullen de sommen dezer magten, door de volgende vergelijkingen, kunnen bepaald worden.*

$$\begin{aligned}
\Sigma &= A \\
\Sigma_2 &= A\Sigma - 2B \\
\Sigma_3 &= A\Sigma_2 - B\Sigma + 3C \\
\Sigma_4 &= A\Sigma_3 - B\Sigma_2 + C\Sigma - 4D \\
\Sigma_5 &= A\Sigma_4 - B\Sigma_3 + C\Sigma_2 - D\Sigma + 5E \\
&\textit{enz.} \qquad\qquad \textit{enz.}
\end{aligned}$$

BEWIJS. Om in het bewijs dezer stelling de kortheid te betrachten, zullen wij de som van alle de combinatien van dezelfde soort door S. uitdrukken: S.a^n zal dan beteekenen de som van de n^{de} magten der grootheden a, b, c, d, e, *enz.*; S.$a^2 b$ de som van alle de producten, die ontstaan, wanneer de tweede magten van de grootheden a, b, c, d, *enz.*, op alle mogelijke wijzen, met de eerste magten van zelf-

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{„ } A & \textit{sera la somme des} \\
\text{„ } Aq - B2 & \\
\text{„ } Acub - AB3 + C3 & \\
\text{„ } Aqq - AqB4 + AC4 + Bq2 - D4 &
\end{array}\right\}
\begin{array}{l}
\textit{Solutions} \\
\textit{Quarrez} \\
\textit{Cubes} \\
\textit{Quarrez-quarrez."}
\end{array}$$

[Hier beteekent Aq zooveel als A^2; $Acub$ zooveel als A^3; $B2$ zooveel als $2B$; $C3$ zooveel als $3C$: het woord *solutions* heeft hier dezelfde beteekenis als bij ons *wortels eener vergelijking.*] GIRARD, welke deze vergelijkingen, zonder bewijs opgeeft, geeft wel niet de vergelijkingen, welke in den text betoogd worden, en hoedanige het eerst bij NEWTON voorkomen: doch hij kan zijne formulen uit geene andere dan uit deze, welke hij in de zamenstelling van zijn geschrift waarschijnelijk, als minder gewigtig, zal beschouwd hebben, hebben afgeleid. GIRARD doet zich, in dit geschrift, wegens de schranderheid, waarmede hij, hoezeer door eenen grooten omweg, den bekenden regel om den inhoud van eenen sphærischen driehoek te berekenen, betoogt, als eenen Wiskunstenaar van den eersten rang van zijnen tijd kennen. In zijne teekenspraak, drukte hij de onbekende in eene hooge magts vergelijking uit, door een kringetje, binnen hetwelk hij de exponenten van de magt der onbekende plaatste. Hij stierf in 1634, en schijnt, na zijnen dood, hier te lande, weinig anders dan als uitgever en vertaler van de werken van STEVIN bekend geweest te zijn.

diezelfde grootheden vermenigvuldigd worden, enz.: Σ zal dan hetzelfde beteekenen als S. a; Σ_n hetzelfde als S. a^n. Nu is

1° $\Sigma \times \Sigma = (a + b + c + enz.) \times (a + b + c + enz.) = \text{S}.a^2 + 2\,\text{S}.ab$, want, in de ontwikkeling van dit product, wordt elk lid van het vermenigvuldigtal met elk lid van den vermenigvuldiger tot één afzonderlijk partieel product zamengesteld: gevolgelijk komen in deze zamenstelling voor: 1° de som van de tweede magten der grootheden a, b, c, *enz.*; en 2°, de gepermuteerde combinatien van diezelfde grootheden, op alle mogelijke wijzen, twee aan twee, genomen. Daar nu $\Sigma \times \Sigma = A \times \Sigma$ is, zal $A \times \Sigma = \text{S}.a^2 + 2\,\text{S}.ab$ zijn; nu is $\text{S}.a^2 = \Sigma_2$ en $\text{S}.ab = B$: derhalve $\Sigma_2 = A\Sigma - 2B$.

2° Voorts hebben wij $(a + b + c + enz.) \times (a^2 + b^2 + c^2 + enz.) = A \times \text{S}.a^2 = A\Sigma_2$: deze uitdrukking is klaarblijkelijk gelijk aan de som van de derde magten der getallen a, b, c, *enz.* plus de som van de producten, welke ontstaan, indien de tweede magt van elk getal met elk der andere getallen vermenigvuldigd wordt: wij hebben alzoo $A\Sigma_2 = \text{S}.a^3 + \text{S}.a^2 b$. Ontwikkelt men verder het product $(ab + ac + bc + enz.) \times (a + b + c + enz.) = B \times \Sigma$; dan zal men bevinden: dat hetzelve gelijk is aan $\text{S}.a^2 b + 3\,\text{S}.abc$. (De term $3\,\text{S}.abc$, is met den coefficient *drie* aangedaan, omdat uit drie dingen a, b en c, eene complexie van twee dingen, slecht op drie onderscheidene wijzen, namelijk ab, ac en bc kunnen zamengesteld worden, en elk dezer verbindingen, worden, in de vermenigvuldiging, met de derde grootheid zamengevoegd.) Wij hebben alzoo: $A\Sigma_2 = \Sigma_3 + \text{S}.a^2 b$, en $B\Sigma = \text{S}.a^2 b + 3C$: nu is, uit de laatste vergelijking, $\text{S}.a^2 b = B\Sigma - 3C$; stelt men deze waarde van $\text{S}.a^2 b$ in de eerste vergelijking; dan is $A\Sigma_2 = \Sigma_3 + B\Sigma - 3C$; uit welke Σ_3 afgezonderd zijnde, zal men vinden: $\Sigma_3 = A\Sigma_2 - B\Sigma + 3C$.

3° Indien men de twee voorgaande deelen van het bewijs wel gevat heeft, zal men zonder moeite zien: dat

$$(a+b+c+enz.) \times (a^3+b^3+c^3+enz.) = \text{S}.a^4 + \text{S}.a^3 b = A\Sigma_3$$
$$(ab+ac+bc+enz.) \times (a^2+b^2+c^2+enz.) = \text{S}.a^3 b + \text{S}.a^2 bc = B\Sigma_2$$
$$(abc+abd+enz.) \times (a+b+c+enz.) = \text{S}.a^2 bc + 4\,\text{S}.abcd = C\Sigma$$

is. Wat nu deze laatste vergelijking aangaat, de coefficient van den term $4\,\text{S}.abcd$, is het getal *vier*; omdat, uit vier dingen a, b, c, d, drie dingen slechts op vier onderscheidene wijzen, drie aan drie, kunnen zamengevoegd worden, (namelijk abc, abd, acd en bcd,) deze vier zamenvoegingen komen in het multiplicandum voor en worden,

den, in de vermenigvuldiging, met elke letter van den vermenigvuldiger zamengesteld: men verkrijgt dus in het product elke complexie van de combinatien, vier aan vier, *viermaal*, en de som van alle mogelijke combinatien, vier aan vier, komt gevolgelijk viermaal in hetzelve voor.

Uit de laatste vergelijking volgt: $S. a^2 bc = C\Sigma - 4D$; gevolgelijk wordt de tweede $B\Sigma_2 = S. a^3 b + C\Sigma - 4D$, en hieruit $S. a^3 b = B\Sigma_2 - C\Sigma + 4D$, en stelt men eindelijk de waarde van $S. a^3 b$ in de eerste vergelijking; dan zal men, na behoorlijke herleiding, verkrijgen: $S. a^4 = \Sigma_4 = A\Sigma_3 - B\Sigma_2 + C\Sigma - 4D$.

4° In het algemeen, zal men vinden: dat

$(a + b + c + enz.) \times (a^{n-1} + b^{n-1} + c^{n-1} + enz.) = S. a^n +$
$S. a^{n-1} b = A\Sigma_{n-1}$

$(ab + ac + bc + enz.) \times (a^{n-2} + b^{n-2} + enz.) = S. a^{n-1} b +$
$S. a^{n-2} bc = B\Sigma_{n-2}$

$(abc + abd + bcd + enz.) \times (a^{n-3} + b^{n-3} + c^{n-3} + enz.) =$
$S. a^{n-2} bc + S. a^{n-3} bcd = C\Sigma_{n-2}$

$(abcd + abce + enz.) \times (a^{n-4} + b^{n-4} + c^{n-4} + enz.) = S. a^{n-3} bcd$
$+ S. a^{n-4} bcde = D\Sigma_{n-3}$

enz. zal zijn. Ontwikkelt men deze vergelijkingen, voor eenige waarde van n; dan zal men, op dezelfde wijze als boven, vinden:

$\Sigma_n = A\Sigma_{n-1} - B\Sigma_{n-2} + C\Sigma_{n-3} - D\Sigma_{n-4} + enz. \pm n \times$ *de som der producten, n aan n, genomen.*

en hier blijkt, in het algemeen, de waarheid van het gestelde.

§. 751. †† Daar het betoog, hetwelk wij van deze stelling, * die wij het Theorema van GIRARD noemen, gegeven hebben, van het aantal grootheden, in de beschouwing voorkomende, onafhankelijk is, geldt het van een onbepaald aantal van grootheden, waarvan men, door de betoogde formulen, de sommen der eerste, tweede, derde, en volgende magten vinden kan, wanneer die der combinatien, één aan één, twee aan twee, enz. gegeven zijn. Het is nogtans opmerkelijk, dat de som van de n^{de} magten afhangt van even zoo vele gegevens, als 'er éénheden in n zijn; zoodat, om de som van de derde magten te vinden, de sommen der combinatien, één aan één, twee aan twee, en drie aan drie, moeten gegeven zijn. Van daar dan ook, dat, wanneer 'er, bij voorbeeld, vier grootheden zijn, en 'er dus slechts vier gegevens, namelijk, de som der grootheden, de som van derzelver producten, twee aan twee; die van derzelver producten, drie aan drie; het product eindelijk van die grootheden zelve, voorkokomen, met deze gegevens nogtans de ſommen van alle de magten dezer grootheden tot in het oneindige kunnen gevonden worden: en dit is klaar; want de ſommen van de producten, vijf aan vijf, zes aan zes, zeven aan zeven, enz. zullen alle gelijk nul zijn, en diensvolgens als bekend kunnen aangemerkt worden.

§. 752. Stellen wij: $a = 3$; $b = -4$; $c = 2$; en $d = 5$; dan is:

$$A = a + b + c + d = +6$$
$$B = ab + ac + ad + bc + bd + cd = -9$$
$$C = abc + abd + acd + bcd = -94$$
$$D = abcd = -120$$

nu zal men, de betoogde formulen gebruikende, met deze vier gegevens, de ſom van de magten der getallen a, b, c en d, tot in het oneindige, vinden kunnen; want wij hebben:

$$\Sigma = A = +6$$
$$\Sigma_2 = A\Sigma - 2B = 6^2 + 2 \times 9 = 54$$
$$\Sigma_3 = A\Sigma_2 - B\Sigma + 3C = 6 \times 54 + 9 \times 6 - 3 \times 94 = 96$$
$$\Sigma_4 = A\Sigma_3 - B\Sigma_2 + C\Sigma - 4D = 6 \times 96 + 9 \times 54 - 94 \times 6 + 4 \times 120 = 978$$
$$\Sigma_5 = A\Sigma_4 - B\Sigma_3 + C\Sigma_2 - D\Sigma = 6 \times 978 + 9 \times 96 - 94 \times 54 + 120 \times 6 = 2376$$
$$\text{enz.} \qquad\qquad \text{enz.}$$

zoo als men, bij dadelijke beproeving, der waarheid overëënkomſtig bevinden zal.

§. 753. Volgens §. 210, zijn, in de algemeene vergelijking,

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + \text{enz.} + Px + Q = 0$$

$-A$ gelijk de ſom van alle derzelver wortels; $+B$ gelijk de ſom van de producten der wortels, op alle mogelijke wijzen, twee aan twee, genomen; $-C$ gelijk de ſom van alle de producten, drie aan drie, enz.: men zal dan, door de betoogde vergelijkingen, de ſommen van de tweede, derde en volgende magten der wortels vinden: intusſchen moet men, bij deze toepasſing, de teekens der coefficienten, met betrekking tot die formulen, behoorlijk bepalen: tot dat oogmerk ſchrijft men onder de termen der vergelijking, (welke men, indien het noodig is volkomen maakt, door nul voor de coëfficienten der ontbrekende termen aantenemen,) van den eerſten af, beurtelings $+ - + -$ enz.; wanneer nu deze teekens met die der coefficienten overëënſtemmen; dan houdt men de ſommen, welke deze coefficienten uitdrukken, voor poſitief; doch zijn deze teekens van elkander onderſcheiden, dan worden die ſommen voor negatief gehouden. Wanneer derhalve de vergelijking: $x^4 - 2x^3 - 23x^2 + 50 = 0$ gegeven is, zal men ſchrijven:

x^4

$$x^4 - 2x^3 - 23x^2 + 0x + 50 = 0$$
$$+ \quad - \quad + \quad - \quad +$$

en daaruit besluiten: dat de som der wortels positief $(+2)$ is; de som van de producten der wortels, op alle mogelijke wijzen, twee aan twee, genomen, negatief -23; de som van de producten der wortels, drie aan drie, gelijk nul, en het product der wortels positief en $+30$. Op de teekens dezer sommen behoorlijk acht gevende, zal men vinden: $\Sigma = A = 2$; $\Sigma_2 = A\Sigma - 2B = 50$; $\Sigma_3 = A\Sigma_2 - B\Sigma + 3C = 146$; $\Sigma_4 = A\Sigma_3 - B\Sigma_2 + C\Sigma - 4D = 1242$; $\Sigma_5 = A\Sigma_4 - B\Sigma_3 + C\Sigma_2 - D\Sigma = 5752$, enz. De wortels dezer vergelijking $-1 + \sqrt{6}$; $-1 - \sqrt{6}$; $2 + \sqrt{14}$; $2 - \sqrt{14}$; zijnde, zal men deze berekende uitkomsten ligtelijk kunnen beproeven.

§. 754. †† *Men kan uit elke vergelijking*

$$x^5 + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0$$

welker wortels p, q, r, s en t zijn, volgens het betoogde in §. 257, *de vergelijking:*

$$y^5 + \frac{D}{E}y^4 + \frac{C}{E}y^3 + \frac{B}{E}y^2 + \frac{A}{E}y + \frac{1}{E} = 0$$

(*welke de vergelijking tot de omgekeerde wortels* $1:p$, $1:q$, $1:r$, $1:s$ *en* $1:t$ *is,*) *opmaken: men zal dan, met behulp dezer laatste, de sommen van de negatieve magten der wortels vinden:* want, volgens het betoogde, in de voorgaande §, zal $\Sigma_{-1} = \frac{D}{E}$; $\Sigma_{-2} = \frac{D}{E} \cdot \Sigma_{-1} - 2 \cdot \frac{C}{E}$; *enz.* zijn.

§. 755. †† Uit de betoogde formulen op de sommen van de magten van eenige grootheden, (of dat hetzelfde is op de sommen van de magten van de wortelen eener vergelijking,) zal men, zonder veel moeite, de sommen der producten, twee aan twee, drie aan drie, enz., kunnen bepalen: men vindt namelijk:

$$A = \Sigma$$
$$B = \tfrac{1}{2}(A\Sigma - \Sigma_2)$$
$$C = \tfrac{1}{3}(B\Sigma - A\Sigma_2 + \Sigma_3)$$
$$D = \tfrac{1}{4}(C\Sigma - B\Sigma_2 + A\Sigma_3 - \Sigma_4)$$
$$E = \tfrac{1}{5}(D\Sigma - C\Sigma_2 + B\Sigma_3 - A\Sigma_4 + \Sigma_5) \text{ enz.}$$

†† waardoor men, wanneer van n grootheden de sommen der eerste, tweede, en volgende magten, tot de n^{de} magten ingesloten, gegeven zijn, de coefficienten eener vergelijking, welker wortels de onbekende getallen zijn, zal kunnen berekenen; zullende deze onbekende getallen,

len, door de oplosfing dezer vergelijking, bekend worden, (zie verder de *Wiskundige Oefeningen.*)

§. 756. †† Men zal eindelijk, door eene fuccesfive fubftitutie, in de vergelijkingen $\Sigma = A$, $\Sigma_2 = A\Sigma - 2B$, enz., de waarden van Σ_2, Σ_3, Σ_4, enz. in uitdrukkingen van A, B, C, enz. vinden: doch men kan ook deze vergelijkingen, op de volgende wijze, bepalen. Zij gegeven:

$$(1 + px)(1 + qx)(1 + rx)(1 + sx)(1 + tx) \text{ enz.}$$

uit een zeker bepaald of onbepaald aantal factoren beftaande: indien men deze uitdrukking door multiplicatie ontwikkelt, zal het product den vorm

$$1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + Fx^6 \text{ enz.}$$

verkrijgen, en dan zal A klaarblijkelijk de fom van de grootheden p, q, r, s, *enz.* zijn; B die van derzelver producten, twee aan twee; C die van derzelver producten, drie aan drie, enz. Deze twee uitdrukkingen gelijk zijnde, zullen ook derzelver Logarithmen gelijk zijn, en wij hebben derhalve:

$$Log.(1+px) + Log.(1+qx) + Log.(1+rx) + Log.(1+sx) + enz. =$$
$$Log. \left\{ 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + Fx^6 + enz. \right\}$$

Nu is, volgens §. 593, zie formule 1, Tabelle V, de Neperiaanfche Logarithmus van het eerfte lid dezer vergelijking gelijk aan

$$\begin{array}{l} px - \frac{1}{2}p^2x^2 + \frac{1}{3}p^3x^3 - \frac{1}{4}p^4x^4 + \frac{1}{5}p^5x^5 - enz. \\ qx - \frac{1}{2}q^2x^2 + \frac{1}{3}q^3x^3 - \frac{1}{4}q^4x^4 + \frac{1}{5}q^5x^5 - enz. \\ rx - \frac{1}{2}r^2x^2 + \frac{1}{3}r^3x^3 - \frac{1}{4}r^4x^4 + \frac{1}{5}r^5x^5 - enz. \\ \quad enz. \qquad\qquad\qquad enz. \end{array}$$

en het tweede lid der vergelijking is, volgens §. 747, gelijk aan

$$Ax + \left\{B - \tfrac{1}{2}A^2\right\}x^2 + \left\{C - AB + \tfrac{1}{3}A^3\right\}x^3 + \left\{D - \ldots\right.$$
$$\left.\tfrac{1}{2}(2AC + B^2) + A^2B - \tfrac{1}{4}A^4\right\}x^4 + \left\{E - (AD + BC) + A^2C\right.$$
$$\left.+ AB^2 - A^3B + \tfrac{1}{5}A^5\right\}x^5 + enz.$$

Deze twee uitdrukkingen moeten nu, onafhankelijk van de waarde van x, aan elkander gelijk zijn: men zal derhalve de coefficienten van dezelfde magten van x gelijk moeten ftellen; waardoor men, (omdat $\Sigma = p + q + enz.$ $\Sigma_2 = p^2 + q^2 + r^2 + enz.$ is,) verkrijgen zal

$$\Sigma = A$$
$$\tfrac{1}{2}\Sigma_2 = \tfrac{1}{2}A^2 - B$$
$$\tfrac{1}{3}\Sigma_3 = \tfrac{1}{3}A^3 - AB + C$$
$$\tfrac{1}{4}\Sigma_4 = \tfrac{1}{4}A^4 - A^2B + AC + \tfrac{1}{2}B^2 - D$$
$$\tfrac{1}{5}\Sigma_5 = \tfrac{1}{5}A^5 - A^3B + A^2C + AB^2 - AD - BC + E$$

en deze zijn de vergelijkingen, welke men door de gezegde ſubſtitutie verkrijgen zal: zij zijn dezelfde, welke bij GIRARD voorkomen.

§. 757. Het bewijs, van de leerſtelling van GIRARD gegeven, is ſynteticsch, en uit de leer der combinatien afgeleid. BÄRMANN, KÆSTNER, LANDEN, TEMPELHOFF, LAGRANGE, ARBOGAST, hebben onderſcheidene bewijzen van deze leerſtelling gegeven, welke hunne bijzondere verdienſten hebben. Wij zullen ten beſluite een betoog geven, hetwelk ſommigen verſtanden misſchien beter dan het eerſte bevallen zal.

§. 758. Laten de grootheden p, q, r, s en t, de wortels van de vergelijking

$$x^5 - Ax^4 + Bx^3 - Cx^2 + Dx - E = 0$$

zijn; dan is het klaar: dat, wanneer men ſuccesſievelijk voor x ſtelt p, q, r, s en t, men deze vijf vergelijkingen zal verkrijgen:

$$p^5 - Ap^4 + Bp^3 - Cp^2 + Dp - E = 0$$
$$q^5 - Aq^4 + Bq^3 - Cq^2 + Dq - E = 0$$
$$r^5 - Ar^4 + Br^3 - Cr^2 + Dr - E = 0$$
$$s^5 - As^4 + Bs^3 - Cs^2 + Ds - E = 0$$
$$t^5 - At^4 + Bt^3 - Ct^2 + Dt - E = 0$$

telt men deze bij elkander, zal men voor de ſom verkrijgen:

$$\Sigma_5 - A\Sigma_4 + B\Sigma_3 - C\Sigma_2 + D\Sigma - 5E = 0$$

of, wanneer men Σ_5 afzondert

$$\Sigma_5 = A\Sigma_4 - B\Sigma_3 + C\Sigma_2 - D\Sigma + 5E$$

En hieruit is reeds ééne vergelijking betoogd.

Vermenigvuldigen wij de vergelijking $x^5 - Ax^4 +$ *enz.* met x^{n-5}, dan zal men voor het product verkrijgen:

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - Ex^{n-5} = 0$$

en ſubſtitueerende voor x derzelver waarden p, q, r, s en t; dan zal men, na deze vergelijkingen te hebben opgeteld, verkrijgen:

$$\Sigma_n = A\Sigma_{n-1} - B\Sigma_{n-2} + C\Sigma_{n-3} - D\Sigma_{n-4} + E\Sigma_{n-5}$$

Het blijkt hieruit ontegenzeggelijk: dat voor alle magten, hooger dan de vijfde magt, de ſommen der magten, volgens dezelfde wet, uit de ſommen van de ommiddelijk lagere magten gevonden worden.

Nu

Nu blijft de vraag: of voor de fommen der magten, lager dan de vijfde magt, dezelfde wet nog zal ftand houden? deze vraag is ligtelijk te beandwoorden. Deelen wij de gegevene vergelijking door x; dan hebben wij:

$$x^4 - Ax^3 + Bx^2 - Cx + D - \frac{E}{x} = 0$$

en ftellende p, q, r, s en t, fuccesfievelijk in plaats van x; dan zullen wij, de vergelijkingen, welke daaruit voortkomen, optellende, verkrijgen:

$$\Sigma_4 - A\Sigma_3 + B\Sigma_2 - C\Sigma + 5D - E \times \left\{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \frac{1}{s} + \frac{1}{t}\right\} = 0$$

maar nu is $E = pqrst$; derhalve $E \times \left\{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \frac{1}{s} + \frac{1}{t}\right\}$ $= qrst + prst + pqst + pqrt + pqrs = D$; en de vergelijking verandert gevolgelijk in:

$$\Sigma_4 = A\Sigma_3 - B\Sigma_2 + C\Sigma - 4D$$

Deelt men de gegevene vergelijking door x^2, en fchrijft men voor x de waarden p, q, r, s en t; dan zal men, na de komende vergelijkingen te hebben opgeteld, vinden:

$$\Sigma_3 - A\Sigma_2 + B\Sigma - 5C + D\left\{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \frac{1}{s} + \frac{1}{t}\right\}$$
$$- E\left\{\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{t^2}\right\} = 0$$

Nu kan men, in plaats van de twee laatfte termen van het voorfte lid dezer vergelijking, fchrijven:

$$E\left\{\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \frac{1}{s} + \frac{1}{t}\right)^2 - \left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{t^2}\right)\right\}$$

dat is, volgens het betoog van §. 750,

$$2E \times \left\{\frac{1}{pq} + \frac{1}{pr} + \frac{1}{ps} + \text{enz.}\right\}$$

of, omdat $E = pqrst$ is, tweemaal de fom van de producten, drie aan drie: de twee laatfte termen zijn gevolgelijk gelijk aan $2C$, en de vergelijking verandert in:

$$\Sigma_3 = A\Sigma_2 - B\Sigma + 3C$$

Men zal op dezelfde wijze vinden: dat

$$\Sigma_2 = A\Sigma - 2B \quad \text{en} \quad \Sigma = A \text{ is.}$$

§. 759. Dit bewijs, dat, voor een gedeelte, op de leer der combinatien berust, kan tot eene algemeene vergelijking van de $n$de magt uitgeftrekt, en, in dit opzigt, als algemeen worden aangemerkt.

§. 760.

§. 760. Deelt men de vergelijking door x^5; dan zal men, na substitutie en oplossing, vinden:

$$5 - A\Sigma_{-1} + B\Sigma_{-2} - C\Sigma_{-3} + D\Sigma_{-4} - E\Sigma_{-5} = 0$$

Deelt men, bij voorbeeld, door x^3; dan zal men vinden:

$$\Sigma_2 - A\Sigma + 5B - C\Sigma_{-1} + D\Sigma_{-2} - E\Sigma_{-3} = 0$$

en hieruit, kan men de betrekking nagaan, welke 'er tusschen de sommen der positieve en negatieve magten van de wortels eener vergelijking, bestaat. Vergelijk §. 754.

WIS-

N° VI. Figuren *voor de combinatorische ontwikkelingen, behoorende tot de* LXIII *en* LXIV Lessen.

[Tegen over bladzijde 432.]

Fig. 1.

Index

$\begin{Bmatrix} 1, & 2, & 3, & 4 \\ a, & b, & c, & d \end{Bmatrix}$

1234
1243
1324
1342
1423
1432
2134
2143
2314
2341
2413
B 2431
3124
3142
3214
3241
3412
3421
4123
4132
4213
4231
4312
4321

Fig. 2.

Index

$\begin{Bmatrix} 11223 \\ aabbc \end{Bmatrix}$

11223
11232
11322
12123
12132
12213
12231
12312
12321
13122
13212
13221
21123
21132
21213
21231
21312
21321
22113
22131
22311
23112
23121
23211
31122
31212
31221
32112
32121
32211

De eerste figuur behoort tot het 1. *Vraagstuk*, §. 686; de tweede tot §. 687, beide worden, volgens denzelfden regel, ontwikkeld. Om de permutatien, welke men in wijzer getallen verkregen heeft, in letters over te brengen, volgt men den wijzer.

Fig. 3.

a a a a	A
a a a b	
a a a c	
a a a d	
a a b b	B
a a b c	
a a b d	
a a c c	
a a c d	
a a d d	
a b b b	C
a b b c	
a b b d	
a b c c	
a b c d	
a b d d	
a c c c	
a c c d	
a c d d	
a d d d	
b b b b	D
b b b c	
b b b d	
b b c c	
b b c d	
b b d d	
b c c c	
b c c d	
b c d d	
b d d d	
c c c c	
c c c d	
c c d d	
c d d d	
d d d d	

Deze figuur behoort tot de oplosfing van het 6. *Vraagstuk*, §. 694. De bijzondere klasfen zijn door winkelhaken afgescheiden.

Fig. 4.

Index

$\begin{Bmatrix} 1, & 2, & 3, & 4 \\ a, & b, & c, & d \end{Bmatrix}$

$\dot{c}^1$	*a,*	*b,*	*c,*	*d*
$\dot{c}^2$	*aa,*	*ab,*	*ac,*	*ad*
	ba,	*bb,*	*bc,*	*bd*
	ca,	*cb,*	*cc,*	*cd*
	da,	*db,*	*dc,*	*dd*
$\dot{c}^3$	*aaa,*	*aab,*	*aac,*	*aad*
	aba,	*abb,*	*abc,*	*abd*
	aca,	*acb,*	*acc,*	*acd*
	ada,	*adb,*	*adc,*	*add*
	baa,	*bab,*	*bac,*	*bad*
	bba,	*bbb,*	*bbc,*	*bbd*
	bca,	*bcb,*	*bcc,*	*bcd*
	bda,	*bdb,*	*bdc,*	*bdd*
	caa,	*cab,*	*cac,*	*cad*
	cba,	*cbb,*	*cbc,*	*cbd*
	cca,	*ccb,*	*ccc,*	*ccd*
	cda,	*cdb,*	*cdc,*	*cdd*
	daa,	*dab,*	*dac,*	*dad*
	dba,	*dbb,*	*dbc,*	*dbd*
	dca,	*dcb,*	*dcc,*	*dcd*
	dda,	*ddb,*	*ddc,*	*ddd*
$\dot{c}^4$	*aaaa,*	*aaab,*	*aaac,*	*aaad*
	aaba,	*aabb,*	*aabc,*	*aabd*
	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .
	baaa,	*baab,*	*baac,*	*baad*
	baba,	*babb,*	*babc,*	*babd*
	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .
	caaa,	*caab,*	*caac,*	*caad*
	caba,	*cabb,*	*cabc,*	*cabd*
	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .
	daaa,	*daab,*	*daac,*	*daad*
	daba,	*dabb,*	*dabc,*	*dabd*
	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .

enz. *enz.*

Deze figuur behoort tot de oplosfing van het 8. *Vraagstuk*, §. 696. Men zou hier de complexien der bijzondere klasfen verkrijgen, wanneer men die van *fig.* 3. op alle mogelijke wijzen permuteerde. Zie §. 710.

Fig. 5.

Index

$\begin{Bmatrix} 1, & 2, & 3 \\ a, & b, & c \end{Bmatrix}$

a a a
a a b
a a c
a b a
a b b
a b c
a c a
a c b
a c c
b a a
b a b
b a c
b b a
b b b
b b c
b c a
b c b
b c c
c a a
c a b
c a c
c b a
c b b
c b c
c c a
c c b
c c c

Deze figuur behoort tot de tweede oplosfing van het 8. *Vraagstuk*. Men verkrijgt door dezelve de gepermuteerde herhalings combinatien, met minder omslag, dan door de voorgaande oplosfing.

Fig. 6.

Index

$\begin{Bmatrix} 1, & 2, & 3 \\ a, & b, & c \ldots p \\ A, & B, & C \ldots q \\ \mathfrak{A}, & \mathfrak{B}, & \mathfrak{C} \ldots r \end{Bmatrix}$

$\dot{p}$	*a,*	*b,*	*c*
$\dot{pq}$	*Aa,*	*Ab,*	*Ac*
	Ba,	*Bb,*	*Bc*
	Ca,	*Cb,*	*Cc*
$\dot{pqr}$	𝔄*Aa,*	𝔄*Ab,*	𝔄*Ac*
	𝔄*Ba,*	𝔄*Bb,*	𝔄*Bc*
	𝔄*Ca,*	𝔄*Cb,*	𝔄*Cc*
	𝔅*Aa,*	𝔅*Ab,*	𝔅*Ac*
	𝔅*Ba,*	𝔅*Bb,*	𝔅*Bc*
	𝔅*Ca,*	𝔅*Cb,*	𝔅*Cc*
	ℭ*Aa,*	ℭ*Ab,*	ℭ*Ac*
	ℭ*Ba,*	ℭ*Bb,*	ℭ*Bc*
	ℭ*Ca,*	ℭ*Cb,*	ℭ*Cc*

Fig. 7.

𝔄 *A a*
𝔄 *A b*
𝔄 *A c*
𝔄 *B a*
𝔄 *B b*
𝔄 *B c*
𝔄 *C a*
𝔄 *C b*
𝔄 *C c*
𝔅 *A a*
𝔅 *A b*
𝔅 *A c*
𝔅 *B a*
𝔅 *B b*
𝔅 *B c*
𝔅 *C a*
𝔅 *C b*
𝔅 *C c*
ℭ *A a*
ℭ *A b*
ℭ *A c*
ℭ *B a*
ℭ *B b*
ℭ *B c*
ℭ *C a*
ℭ *C b*
ℭ *C c*

De 6 en 7 figuren behooren tot het 10. *Vraagstuk*, §. 699.

Fig. 8.

$\ddot{7}^1 = 1$

$\ddot{7}^2 = \begin{cases} 16 \\ 25 \\ 34 \end{cases}$

$\ddot{7}^3 = \begin{cases} 115 \\ 124 \\ 133 \\ 223 \end{cases}$

$\ddot{7}^4 = \begin{cases} 1114 \\ 1123 \\ 1222 \end{cases}$

$\ddot{7}^5 = \begin{cases} 11113 \\ 11122 \end{cases}$

$\ddot{7}^6 = 111112$

$\ddot{7}^7 = 1111111$

Fig. 9.

$\ddot{7}^1 = g$

$\ddot{7}^2 = \begin{cases} af \\ be \\ cd \end{cases}$

$\ddot{7}^3 = \begin{cases} aae \\ abd \\ acc \\ bbc \end{cases}$

$\ddot{7}^4 = \begin{cases} aaad \\ aabc \\ abbb \end{cases}$

$\ddot{7}^5 = \begin{cases} aaaac \\ aaabb \end{cases}$

$\ddot{7}^6 = aaaaab$

$\ddot{7}^7 = aaaaaaa$

Deze twee figuren 8 en 9 behooren tot de eerste oplosfing van het 11. *Vraagstuk*, §. 701. De 9 figuur is eene overzetting van de 8 figuur.

Fig. 10.

7	6	5	4	3	2	1	
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	2		2
1	1	1	1	3			3
1	1	1	2	2			
1	1	1	4				4
1	1	2	3				
1	1	5					5
1	2	2	2				
1	2	4					
1	3	3					
1	6						6
2	2	3					
2	5						
3	4						
7							7

enz.

Hetzelfde in letters.

7	6	5	4	3	2	1	
a	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	1
a	*a*	*a*	*a*	*a*	*b*		2
a	*a*	*a*	*a*	*c*			3
a	*a*	*a*	*b*	*b*			
a	*a*	*a*	*d*				4
a	*a*	*b*	*c*				
a	*a*	*e*					5
a	*b*	*b*	*b*				
a	*b*	*d*					
a	*c*	*c*					
a	*f*						6
b	*b*	*c*					
b	*e*						
c	*d*						
f							7

Deze figuur behoort tot de tweede oplosfing van het 11. *Vraagstuk*, §. 703. Men heeft de wijzer getallen in letters overgezet.

Fig. 11.

$\ddot{6}^1 = 6$

$\ddot{6}^2 = \begin{cases} 15 \\ 24 \\ 33 \\ 42 \\ 51 \end{cases}$

$\ddot{6}^3 = \begin{cases} 114 \\ 123 \\ 132 \\ 141 \\ 213 \\ 222 \\ 231 \\ 312 \\ 321 \\ 411 \end{cases}$

$\ddot{6}^4 = \begin{cases} 1113 \\ 1122 \\ 1131 \\ 1212 \\ 1221 \\ 1311 \\ 2112 \\ 2121 \\ 2211 \\ 3111 \end{cases}$

$\ddot{6}^5 = \begin{cases} 11112 \\ 11121 \\ 11211 \\ 12111 \\ 21111 \end{cases}$

$\ddot{6}^6 = 111111$

Deze figuur behoort tot de eerste oplosfing van het 12 *Vraagstuk*, 706.

Fig. 12.

6	5	4	3	2	1	
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	2		2
1	1	1	2	1		
1	1	1	3			3
1	1	2	1	1		
1	1	2	2			
1	1	3	1			
1	1	4				4
1	2	1	1	1		
1	2	1	2			
1	2	2	1			
1	2	3				
1	3	1	1			
1	3	2				
1	4	1				
1	5					5
2	1	1	1	1		
2	1	1	2			
2	1	2	1			
2	1	3				
2	2	1	1			
2	2	2				
2	3	1				
2	4					
3	1	1	1			
3	1	2				
3	2	1				
3	3					
4	1	1				
4	2					
5	1					
6						6

Deze figuur behoort tot de tweede oplosfing van het 12. *Vraagstuk*, zie §. 707. — De 11 en 12 figuren worden even als de 8 en 10 in letters overgezet.

Fig. 13.

A	0005
	0014
	0023
	0032
	0041
B	0050
	0104
	0113
	0122
	0131
	0140
	0203
	0212
	0221
	0302
	0311
	0320
	0401
	0410
	1004
	1013
	1022
	1031
	1040
	1103
	1112
	1121
	1130
	1202
	1211
	1220
	1301
	1310
	1400
	2003
	2012
	2021
	2030
	2102
	2111
	2120
	2201
	2210
	2300
	3002
	3011
	3020
	3101
	3110
	3200
	4001
	4100
	5000

Deze figuur behoort tot §. 726, *pag.* 410 en 411.

TAFEL *van de herhalings combinatien, tot gegevene ſommen, met derzelver permutatie getallen. Zie §. 734.*

Som 2.

$$\ddot{2}^{1} = 1\,(2)$$

$$\ddot{2}^{2} = 1\,(1^{2})$$

Som 3.

$$\ddot{3}^{1} = 1\,(3)$$

$$\ddot{3}^{2} = 2\,(12)$$

$$\ddot{3}^{3} = 1\,(1^{3})$$

Som 4.

$$\ddot{4}^{1} = 1\,(4)$$

$$\ddot{4}^{2} = \begin{cases} 2\,(13) \\ 1\,(2^{2}) \end{cases}$$

$$\ddot{4}^{3} = 3\,(1^{2}2)$$

$$\ddot{4}^{4} = 1\,(1^{4})$$

Som 5.

$$\ddot{5}^{1} = 1\,(5)$$

$$\ddot{5}^{2} = \begin{cases} 2\,(14) \\ 2\,(23) \end{cases}$$

$$\ddot{5}^{3} = \begin{cases} 3\,(1^{2}3) \\ 3\,(12^{2}) \end{cases}$$

$$\ddot{5}^{4} = 4\,(1^{3}2)$$

$$\ddot{5}^{5} = 1\,(1^{5})$$

Som 6.

$$\ddot{6}^{1} = 1\,(6)$$

$$\ddot{6}^{2} = \begin{cases} 2\,(15) \\ 2\,(24) \\ 1\,(3^{2}) \end{cases}$$

$$\ddot{6}^{3} = \begin{cases} 3\,(1^{2}4) \\ 6\,(123) \\ 1\,(2^{3}) \end{cases}$$

Vervolg in de tweede kolom.

$$\ddot{6}^{4} = \begin{cases} 4\,(1^{3}3) \\ 6\,(1^{2}2^{2}) \end{cases}$$

$$\ddot{6}^{5} = 5\,(1^{4}2)$$

$$\ddot{6}^{6} = 1\,(1^{6})$$

Som 7.

$$\ddot{7}^{1} = 1\,(7)$$

$$\ddot{7}^{2} = \begin{cases} 2\,(16) \\ 2\,(25) \\ 2\,(34) \end{cases}$$

$$\ddot{7}^{3} = \begin{cases} 3\,(1^{2}5) \\ 6\,(124) \\ 3\,(13^{2}) \\ 3\,(2^{2}3) \end{cases}$$

$$\ddot{7}^{4} = \begin{cases} 4\,(1^{3}4) \\ 12\,(1^{2}23) \\ 4\,(12^{3}) \end{cases}$$

$$\ddot{7}^{5} = \begin{cases} 5\,(1^{4}3) \\ 10\,(1^{3}2^{2}) \end{cases}$$

$$\ddot{7}^{6} = 6\,(1^{5}2)$$

$$\ddot{7}^{7} = 1\,(1^{7})$$

Som 8.

$$\ddot{8}^{1} = 1\,(8)$$

$$\ddot{8}^{2} = \begin{cases} 2\,(17) \\ 2\,(26) \\ 2\,(35) \\ 1\,(4^{2}) \end{cases}$$

$$\ddot{8}^{3} = \begin{cases} 3\,(1^{2}6) \\ 6\,(125) \\ 6\,(134) \\ 3\,(2^{2}4) \\ 3\,(23^{2}) \end{cases}$$

$$\ddot{8}^{4} = \begin{cases} 4\,(1^{3}5) \\ 12\,(1^{2}24) \\ 6\,(1^{2}3^{2}) \\ 12\,(12^{2}3) \\ 1\,(2^{4}) \end{cases}$$

Vervolg.

$$\ddot{8}^{5} = \begin{cases} 5\,(1^{4}4) \\ 20\,(1^{3}23) \\ 10\,(1^{2}2^{3}) \end{cases}$$

$$\ddot{8}^{6} = \begin{cases} 6\,(1^{5}3) \\ 15\,(1^{4}2^{2}) \end{cases}$$

$$\ddot{8}^{7} = 7\,(1^{6}2)$$

$$\ddot{8}^{8} = 1\,(1^{8})$$

Som 9.

$$\ddot{9}^{1} = 1\,(9)$$

$$\ddot{9}^{2} = \begin{cases} 2\,(18) \\ 2\,(27) \\ 2\,(36) \\ 2\,(45) \end{cases}$$

$$\ddot{9}^{3} = \begin{cases} 3\,(1^{2}7) \\ 6\,(126) \\ 6\,(135) \\ 3\,(14^{2}) \\ 3\,(2^{2}5) \\ 6\,(234) \\ 1\,(3^{3}) \end{cases}$$

$$\ddot{9}^{4} = \begin{cases} 4\,(1^{3}6) \\ 12\,(1^{2}25) \\ 12\,(1^{2}34) \\ 12\,(12^{2}4) \\ 12\,(123^{2}) \\ 4\,(2^{3}3) \end{cases}$$

$$\ddot{9}^{5} = \begin{cases} 5\,(1^{4}5) \\ 20\,(1^{3}24) \\ 10\,(1^{3}3^{2}) \\ 30\,(1^{2}2^{2}3) \\ 5\,(12^{4}) \end{cases}$$

$$\ddot{9}^{6} = \begin{cases} 6\,(1^{5}4) \\ 30\,(1^{4}23) \\ 20\,(1^{3}2^{3}) \end{cases}$$

$$\ddot{9}^{7} = \begin{cases} 7\,(1^{6}3) \\ 21\,(1^{5}2^{2}) \end{cases}$$

$$\ddot{9}^{8} = 8\,(1^{7}2)$$

$$\ddot{9}^{9} = 1\,(1^{9})$$

Som 10.

$$\ddot{10}^{1} = 1\,(10)$$

$$\ddot{10}^{2} = \begin{cases} 2\,(19) \\ 2\,(28) \\ 2\,(37) \\ 2\,(46) \\ 1\,(5^{2}) \end{cases}$$

$$\ddot{10}^{3} = \begin{cases} 3\,(1^{2}8) \\ 6\,(127) \\ 6\,(136) \\ 6\,(145) \\ 3\,(2^{2}6) \\ 6\,(235) \\ 3\,(24^{2}) \\ 3\,(3^{2}4) \end{cases}$$

$$\ddot{10}^{4} = \begin{cases} 4\,(1^{3}7) \\ 12\,(1^{2}26) \\ 12\,(1^{2}35) \\ 6\,(1^{2}4^{2}) \\ 12\,(12^{2}5) \\ 24\,(1234) \\ 4\,(13^{3}) \\ 4\,(2^{3}4) \\ 6\,(2^{2}3^{2}) \end{cases}$$

$$\ddot{10}^{5} = \begin{cases} 5\,(1^{4}6) \\ 20\,(1^{3}25) \\ 20\,(1^{3}34) \\ 30\,(1^{2}2^{2}4) \\ 30\,(1^{2}23^{2}) \\ 20\,(12^{3}3) \\ 1\,(2^{5}) \end{cases}$$

$$\ddot{10}^{6} = \begin{cases} 6\,(1^{5}5) \\ 30\,(1^{4}24) \\ 15\,(1^{4}3^{2}) \\ 60\,(1^{3}2^{2}3) \\ 15\,(1^{2}2^{4}) \end{cases}$$

$$\ddot{10}^{7} = \begin{cases} 7\,(1^{6}4) \\ 42\,(1^{5}23) \\ 35\,(1^{4}2^{3}) \end{cases}$$

$$\ddot{10}^{8} = \begin{cases} 8\,(1^{7}3) \\ 28\,(1^{6}2^{2}) \end{cases}$$

$$\ddot{10}^{9} = 9\,(1^{8}2)$$

$$\ddot{10}^{10} = 1\,(1^{10})$$

Som 11.

$$\ddot{11}^{1} = 1\,(11)$$

$$\ddot{11}^{2} = \begin{cases} 2\,(1.10) \\ 2\,(29) \\ 2\,(38) \\ 2\,(47) \\ 2\,(56) \end{cases}$$

$$\ddot{11}^{3} = \begin{cases} 3\,(1^{2}9) \\ 6\,(128) \\ 6\,(137) \\ 6\,(146) \\ 3\,(15^{2}) \\ 3\,(2^{2}7) \\ 6\,(236) \\ 6\,(245) \\ 3\,(3^{2}5) \\ 3\,(34^{2}) \end{cases}$$

$$\ddot{11}^{4} = \begin{cases} 4\,(1^{3}8) \\ 12\,(1^{2}27) \\ 12\,(1^{2}36) \\ 12\,(1^{2}45) \\ 12\,(12^{2}6) \\ 24\,(1235) \\ 12\,(124^{2}) \\ 12\,(13^{2}4) \\ 4\,(2^{3}5) \\ 12\,(2^{2}34) \\ 4\,(23^{3}) \end{cases}$$

$$\ddot{11}^{5} = \begin{cases} 5\,(1^{4}7) \\ 20\,(1^{3}26) \\ 20\,(1^{3}35) \\ 10\,(1^{3}4^{2}) \\ 30\,(1^{2}2^{2}5) \\ 60\,(1^{2}234) \\ 10\,(1^{2}3^{3}) \\ 20\,(12^{3}4) \\ 30\,(12^{2}3^{2}) \\ 5\,(2^{4}3) \end{cases}$$

$$\ddot{11}^{6} = \begin{cases} 6\,(1^{5}6) \\ 30\,(1^{4}25) \\ 30\,(1^{4}34) \\ 60\,(1^{3}2^{2}4) \\ 60\,(1^{3}23^{2}) \\ 60\,(1^{2}2^{3}3) \\ 6\,(12^{5}) \end{cases}$$

$$\ddot{11}^{7} = \begin{cases} 7\,(1^{6}5) \\ 42\,(1^{5}24) \\ 21\,(1^{5}3^{2}) \\ 105\,(1^{4}2^{2}3) \\ 35\,(1^{3}2^{4}) \end{cases}$$

Vervolg.

$$\ddot{11}^{8} = \begin{cases} 8\,(1^{7}4) \\ 56\,(1^{6}23) \\ 56\,(1^{5}2^{3}) \end{cases}$$

$$\ddot{11}^{9} = \begin{cases} 9\,(1^{8}3) \\ 36\,(1^{7}2^{2}) \end{cases}$$

$$\ddot{11}^{10} = 10\,(1^{9}2)$$

$$\ddot{11}^{11} = 1\,(1^{11})$$

Som 12.

$$\ddot{12}^{1} = 1\,(12)$$

$$\ddot{12}^{2} = \begin{cases} 2\,(1.11) \\ 2\,(2.10) \\ 2\,(39) \\ 2\,(48) \\ 2\,(57) \\ 1\,(6^{2}) \end{cases}$$

$$\ddot{12}^{3} = \begin{cases} 3\,(1^{2}.10) \\ 6\,(129) \\ 6\,(138) \\ 6\,(147) \\ 6\,(156) \\ 3\,(2^{2}8) \\ 6\,(237) \\ 6\,(246) \\ 3\,(25^{2}) \\ 3\,(3^{2}6) \\ 6\,(345) \\ 1\,(4^{3}) \end{cases}$$

$$\ddot{12}^{4} = \begin{cases} 4\,(1^{3}9) \\ 12\,(1^{2}28) \\ 12\,(1^{2}37) \\ 12\,(1^{2}46) \\ 6\,(1^{2}5^{2}) \\ 12\,(12^{2}7) \\ 24\,(1236) \\ 24\,(1245) \\ 12\,(13^{2}5) \\ 12\,(134^{2}) \\ 4\,(2^{3}6) \\ 12\,(2^{2}35) \\ 6\,(2^{2}4^{2}) \\ 12\,(23^{2}4) \\ 1\,(3^{4}) \end{cases}$$

$$\ddot{12}^{5} = \begin{cases} 5\,(1^{4}8) \\ 20\,(1^{3}27) \\ 20\,(1^{3}36) \end{cases}$$

Vervolg.

$$\ddot{12}^{5} = \begin{cases} 20\,(1^{3}45) \\ 30\,(1^{2}2^{2}6) \\ 60\,(1^{2}235) \\ 30\,(1^{2}24^{2}) \\ 30\,(1^{2}3^{2}4) \\ 20\,(12^{3}5) \\ 60\,(12^{2}34) \\ 20\,(123^{3}) \\ 5\,(2^{4}4) \\ 10\,(2^{3}3^{2}) \end{cases}$$

$$\ddot{12}^{6} = \begin{cases} 6\,(1^{5}7) \\ 30\,(1^{4}26) \\ 30\,(1^{4}35) \\ 15\,(1^{4}4^{2}) \\ 60\,(1^{3}2^{2}5) \\ 120\,(1^{3}234) \\ 20\,(1^{3}3^{3}) \\ 60\,(1^{2}2^{3}4) \\ 90\,(1^{2}2^{2}3^{2}) \\ 30\,(12^{4}3) \\ 1\,(2^{6}) \end{cases}$$

$$\ddot{12}^{7} = \begin{cases} 7\,(1^{6}6) \\ 42\,(1^{5}25) \\ 42\,(1^{5}34) \\ 105\,(1^{4}2^{2}4) \\ 105\,(1^{4}23^{2}) \\ 140\,(1^{3}2^{3}3) \\ 21\,(1^{2}2^{5}) \end{cases}$$

$$\ddot{12}^{8} = \begin{cases} 8\,(1^{7}5) \\ 56\,(1^{6}24) \\ 28\,(1^{6}3^{2}) \\ 168\,(1^{5}2^{2}3) \\ 70\,(1^{4}2^{4}) \end{cases}$$

$$\ddot{12}^{9} = \begin{cases} 9\,(1^{8}4) \\ 72\,(1^{7}23) \\ 84\,(1^{6}2^{3}) \end{cases}$$

$$\ddot{12}^{10} = \begin{cases} 10\,(1^{9}3) \\ 45\,(1^{8}2^{2}) \end{cases}$$

$$\ddot{12}^{11} = 11\,(1^{10}2)$$

$$\ddot{12}^{12} = 1\,(1^{12})$$

Uit deze voorbeelden van de ontwikkeling der herhalings-combinatien, tot de gegevene ſommen, zal men die tot de ſommen 13, 14, 15, enz. kunnen daarſtellen, en, wanneer men dezelve eens naar behooren ontwikkeld heeft, tot zijn bijzonder gebruik kunnen bewaren, om dezelve in voorkomende gevallen te pas te brengen.

WISKUNDIGE LESSEN.

XVII. BOEK.

Beschouwing van de meest merkwaardige Reeksen.

ZES- EN- ZESTIGSTE LES.

Over de rekenkunstige Reeksen van de tweede en volgende orden.

§. 761. De verklaring, welke wij, in de XXXVIII. *Les* I. C. van de rekenkunstige Reeksen gegeven hebben, tot eenen grondslag aannemende, zal men zich gemakkelijk een denkbeeld van de rekenkunstige Reeksen van de tweede en volgende orden kunnen vormen. Onderstellen wij eenige getallen A, B, C, D, E, F, G, H, I, K, L, *enz.* Wanneer wij dan den eersten term van den tweeden, den tweeden van den derden term, en, in het algemeen elken voorgaanden term van zijnen ommiddelijk volgenden aftrekken, dan verkrijgen wij:

$-A+B$; $-B+C$; $-C+D$; $-D+E$; $-E+F$; $-F+G$; *enz.*

* Wij noemen deze reeks *de reeks der eerste verschillen.* Behandelt men deze reeks op dezelfde wijze als de gegevene, trekkende den eersten term van den tweeden, enz. en in het algemeen elken voorgaanden term van zijnen ommiddelijk volgenden, dan verkrijgt men:

$A-2B+C$; $B-2C+D$; $C-2D+E$; $D-2E+F$; $E-2F+G$; *enz.*

* Wij noemen deze reeks *de reeks der tweede verschillen.* Deze op dezelfde wijze als de voorgaande behandelende, verkrijgt men de reeks:

$-A+3B-3C+D$; $-B+3C-3D+E$; $-C+3D-3E+F$; $-D+3E-3F+G$; $-E+3F-3G+H$; *enz.*

* en dit noemen wij *de reeks der derde verschillen.* Behandelt men deze wederom op dezelfde wijze als de voorgaande, zal men de nieuwe reeks,

$A - 4B + 6C - 4D + E$; $B - 4C + 6D - 4E + F$; $C - 4D + 6E - 4F + G$; $D - 4E + 6F - 4G + H$; *enz.*

verkrijgen, * en deze is *de reeks der vierde verschillen.* Op dezelfde wijze zal men de reeks der vijfde verschillen

$- A + 5B - 10C + 10D - 5E + F$; $- B + 5C - 10D + 10E - 5F + G$; *enz.*

als ook die der zesde en volgende verschillen verkrijgen.

§. 762. †† De gegevene grootheden A, B, C, D, *enz.* kunnen onder tweederlei omstandigheden voorkomen: 1° kunnen zij zoodanig gegeven zijn, dat geene van derzelver volgende verschillen gelijk worden: dit geval heeft onder anderen plaats, wanneer de getallen A, B, C, eene meetkunstige reeks uitmaken (115): 2° wanneer de tweede, derde of volgende verschillen gelijk worden.

§. 763. * Bevinden zich de grootheden A, B, C, D, *enz.* in het laatste geval; dan maken zij eene rekenkunstige reeks van zekere orde uit.

1° * Zijn de eerste verschillen gelijk; dan heeft men de gewone rekenkunstige reeks van de XXXVIII *Les*, welke wij thans *rekenkunstige reeks van de eerste orde zullen noemen.*

2° * Zijn de tweede verschillen gelijk; dan zijn de getallen A, B, C, *enz. in eene rekenkunstige reeks van de tweede orde.* De vierkanten der natuurlijke getallen maken, zie §. 747, I. C. zulk eene reeks uit.

3° * Zijn de derde verschillen gelijk; dan maken de getallen A, B, C, *enz.* eene *rekenkunstige reeks van de derde orde.* De cuben der natuurlijke getallen zijn, zie §. 782, I. C. van dien aard.

4° * Zijn in het algemeen de n^{de} verschillen, (n een geheel getal zijnde) gelijk, dan heeft men *eene rekenkunstige reeks van de n^{de} orde.* †† Het aantal der rekenkunstige reeksen, is derhalve, met betrekking tot de verschillende orden, oneindig groot.

§. 764. †† De wijze, waarop, uit de gegevene reeks, de reeksen der eerste, tweede en volgende verschillen gemaakt worden, doet, wanneer men dezelve met de ontwikkeling van de magten eener twee-

le-

(115) De meetkunstige reeks a, ar, ar^2, ar^3, ar^4, *enz.* op deze wijze behandeld, geeft de meetkunstige reeks:

$a(r-1)$, $a(r-1)r$, $a(r-1)r^2$, $a(r-1)r^3$, $a(r-1)r^4$ *enz.*

welker tweede verschillen zijn:

$a(r-1)^2$, $a(r-1)^2 r$, $a(r-1)^2 r^2$, $a(r-1)^2 r^3$ *enz.*

iedige grootheid, $(-p+q)$, door multiplicatie, vergelijkt, zonder dat het eenig nader betoog behoeft, ons zien: dat de getallen coefficienten van de termen der verschillen de binomial coëfficienten van de magt zijn, welker exponent gelijk is aan het getal, dat den rang dezer verschillen uitdrukt. †† Men kan dan stellen: dat de reeks van de *nde* verschillen bestaat uit de termen:

$$1^e\ term\ \ldots\ \pm\left(A-\overset{1}{(n)}B+\overset{2}{(n)}C-\overset{3}{(n)}D+\overset{4}{(n)}E-\overset{5}{(n)}F+enz.\right)$$

$$2^e\ term\ \ldots\ \pm\left(B-\overset{1}{(n)}C+\overset{2}{(n)}D-\overset{3}{(n)}E+\overset{4}{(n)}F-\overset{5}{(n)}G+enz.\right)$$

en, de *nde* term van A, B, C, *enz.* gelijk N, en de volgende N_2, N_3, N_4, *enz.* stellende

$$n^{de}\ term\ \pm\left(N-\overset{1}{(n)}N_1+\overset{2}{(n)}N_2-\overset{3}{(n)}N_3+\overset{4}{(n)}N_4-\overset{5}{(n)}N_5+enz.\right)$$

(zie wegens de beteekenis der Binomial Coefficienten, §. 512, pag. 320.) Het teeken $+$ geldt voor eene evene, en $-$ voor eene onevene waarde van n.

§. 765. †† *In eene rekenkunstige reeks van de nde orde zijn de $(n+1)^e$ verschillen noodzakelijk gelijk nul.* Want de *nde* verschillen van zulk eene reeks gelijk zijnde, moeten de volgende, welke de $(n+1)^e$ in rang zijn, alle gelijk nul worden.

§. 766. †† Men heeft dan voor eene reeks van de *nde* orde.

$$+A-(n\overset{1}{+}1)B+(n\overset{2}{+}1)C-(n\overset{3}{+}1)D+enz.\pm(n\overset{2}{+}1)N\mp$$
$$(n\overset{1}{+}1)N_1\pm N_2=0$$
$$+B-(n\overset{1}{+}1)C+(n\overset{2}{+}1)D-(n\overset{3}{+}1)E+enz.\pm(n\overset{2}{+}1)N_1\mp$$
$$(n\overset{1}{+}1)N_2\pm N_3=0\quad enz.$$

†† Deze vergelijkingen bestaan uit $n+2$ termen: de bovenste teekens van de achterste termen gelden voor eene onevene, en de benedenste voor eene evene waarde van n.

§. 767. †† Stelt men n achtervolgens gelijk 2, 3, 4, *enz.*; dan zal men hebben:

Voor eene reeks van de	1.	*orde.*	$A-2B+C=0$
	2.		$A-3B+3C-D=0$
	3.		$A-4B+6C-4D+E=0$
	4.		$A-5B+10C-10D+5E-F=0$
	5.		$A-6B+15C-20D+15E-6F+G=0$
	enz.		*enz.*

§. 768. †† Deze vergelijkingen kan men aanmerken, niet ſlechts als vergelijkingen, welke, in elke bijzondere orde van reekſen, de betrekking der eerſte termen bepalen: maar zij bepalen ook de betrekking van elke drie op elkander volgende termen in eene reeks van de eerſte orde; van vier op elkander volgende termen in eene reeks van de tweede orde, enz.

§. 769. †† Uit deze laatſte vergelijkingen volgt onmiddelijk

Voor eene reeks van de	1.	orde.	$C = 2B - A$
	2.		$D = 3C - 3B + A$
	3.		$E = 4D - 6C + 4B - A$
	4.		$F = 5E - 10D + 10C - 5B + A$
	5.		$G = 6F - 15E + 20D - 15C + 6B - A$
	enz.		*enz.*

en hieruit blijkt het: †† dat, in eene reeks van de eerſte orde, de twee eerſte termen A en B naar welgevallen kunnen geſteld worden, en dat de derde term, volgens de vergelijking $C = 2B - A$ van deze twee afhangt: dat, in eene reeks van de tweede orde, de drie eerſten naar welgevallen kunnen genomen worden, terwijl de vierde term, volgens de vergelijking $D = 3C - 3B + A$ van deze drie afhangt, enz., en dat eindelijk in het algemeen $n + 1$ willekeurig genomene, (poſitieve en negatieve geheele en gebrokene,) getallen voor de $(n+1)$ eerſte termen eener rekenkunſtige reeks van de n^{de} orde zullen kunnen aangenomen worden, en dat de $(n+2)^e$ term, volgens de vergelijking:

$$N_2 = (n \overset{1}{+} 1) N_1 - (n \overset{2}{+} 1) N + (n \overset{3}{+} 1) N_{-1} - (n \overset{4}{+} 1) N_{-2} + \text{enz.}$$

van dezelve zal afhangen. †† Daar nu deze vergelijkingen niet ſlechts voor de eerſte termen der reeks: maar ook voor hetzelfde aantal op elkander volgende termen gelden, ziet men duidelijk: †† dat men, met behulp dezer vergelijkingen, eene reeks van de n^{de} orde zal kunnen maken, indien men ſlechts $n + 1$ willekeurige getallen voor de eerſte termen dezer reeks aanneemt.

§. 770. 1. Voorbeeld. Stellen wij voor de twee eerſte termen van eene rekenkunſtige reeks van de eerſte orde: $A = 2$; $B = 5$; dan is $C = 2B - A = 8$; $D = 2C - B = 11$; en men verkrijgt alzoo de gewone rekenkunſtige reeks: 2, 5, 8, 11, 14, 17, enz.

§. 771. 2. Voorbeeld. Nemen wij om eene reeks van de derde orde te maken, de eerſte termen $A = 1$; $B = 1$; $C = 6$ en $D = -1$; dan is $E = 4D - 6C + 4B - A = -37$; $F = 4E$

$-6D+4C-B=-119$; en men zal, alzoo voortgaande, vinden: $1, 1, 6, -1, -37, -119, -264, -489$, enz. voor de termen eener reeks, welker derde verschillen gelijk zijn.

§. 772. †† Eene rekenkunstige reeks van de n^{de} orde kan begrepen worden in alle hare termen door $n+1$ gegevens bepaald te zijn: voor deze gegevens kan men de $n+1$ eerste termen, of, in het algemeen, $n+1$ op elkander volgende termen nemen: maar die $n+1$ gegevens kunnen ook andere grootheden zijn, welke van $n+1$ termen der reeks afhangen; en dan komen hier in het bijzonder de eerste term der reeks, benevens de eerste termen van de eerste, tweede en volgende verschillen, tot dien van het laatste verschil ingesloten, in aanmerking: deze maken met elkander $(n+1)$ gegevens, welke klaarblijkelijk van de $(n+1)$ eerste termen der reeks afhangen. Het is van belang, dat men uit de eerste termen, zoo van de gegevene reeks, als van de reeksen der verschillen, den term van eenen zekeren rang onmiddelijk leere afleiden.

§. 773. * Wij zullen, om duidelijk te zijn, den eersten term der reeks door het ranggetal 0, den tweeden door het ranggetal 1, enz. aldus:

$$\begin{array}{cccccc} 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & \textit{enz.} \\ A, & B, & C, & D, & E, & \textit{enz.} \end{array}$$

uitdrukken, en dezelfde orde van telling ook voor de reeksen van de eerste, tweede en volgende verschillen in acht nemen: zulks is wel geheel willekeurig; doch de Lezer zal weldra bemerken, dat deze keuze in de beschouwing het gemak bevordert.

§. 774. Nu zeggen wij: †† *Wanneer van eene rekenkunstige reeks van eenige orde* (A, B, C, D, E, *enz.*) *de rang van den eersten term A door nul wordt aangewezen, en de letters a, b, c, d, e, enz. in derzelver rangorde, de eerste termen van de reeksen der eerste, tweede, derde en volgende verschillen uitdrukken, en de term,* (*der reeks A, B, enz.*) *welke volgens die telling de p^{de} in rang is, door y wordt aangewezen, men alsdan hebben zal:*

$$y=A+\frac{p}{1}.a+\frac{p(p-1)}{1.\ 2}b+\frac{p(p-1)(p-2)}{1.\ 2.\ \ 3}c+\text{enz.}$$

of, dat hetzelfde is:

$$y=A+\overset{1}{(p)}.a+\overset{2}{(p)}.b+\overset{3}{(p)}.c+\overset{4}{(p)}.d+\overset{5}{(p)}.e+\text{enz.}$$

Het betoog dezer stelling is zeer ligt. Want, indien men de vorming van de rijen der eerste, tweede enz. verschillen oplettend inziet, dan

dan zal men terstond bemerken, dat niet flechts de termen van de hoofdreeks; maar ook die der eerste en volgende verschillen door eene tegengestelde bewerking: dat is, door optelling, gevonden worden. Men stelle namelijk, in de nevenstaande tafel, in de kolom o, de eerste termen, zoo van de gegevene reeks, als van die der op elkander volgende verschillen; in de kolom 1 de tweede; in kolom 2 de derde termen, enz. en telle in elke kolom, bij voorbeeld, in de eerste, de eerste term bij de tweede; dan verkrijgt men $a+b$; de tweede bij de derde; dan verkrijgt men $b+c$, enz. Op deze wijze verkrijgt men de tweede kolom, welke de tweede termen, zoo van de gegevene reeks, als van de reeksen der verschillen, bevat. Op dezelfde wijze, wordt, uit de tweede kolom, de derde; uit de derde, de vierde, enz. afgeleid, en men verkrijgt alzoo, in de eerste rij, de getallen:

$$A,\ A+a,\ A+2a+b,\ A+3a+3b+c,$$
$$A+4a+6b+4c+d,\ enz.$$

welker eerste, tweede, derde en volgende verschillen, volgens §. 761, berekend wordende, a, b, c, d, *enz.* zullen zijn; terwijl, op gelijke wijze, de eerste, tweede en volgende verschillen van de tweede rij:

$$a,\ a+b,\ a+2b+c,\ a+3b+3c+d,\ enz.$$

b, c, d, *enz.* zijn zullen. Dit geldt ook voor de derde en volgende rijen van de tafel.

Rang der termen	0	1	2	3	4	
Oorspronkelijke Reeks	A	$A+a$	$A+2a+b$	$A+3a+3b+c$	$A+4a+6b+4c+d$	enz.
Reeksen der 1. *Versch.*	a	$a+b$	$a+2b+c$	$a+3b+3c+d$	$a+4b+6c+4d+e$	enz.
2. *Versch.*	b	$b+c$	$b+2c+d$	$b+3c+3d+e$	$b+4c+6d+4e+f$	enz.
3. *Versch.*	c	$c+d$	$c+2d+e$	$c+3d+3e+f$	$c+4d+6e+4f+g$	enz.
4. *Versch.*	d	$d+e$	$d+2e+f$	$d+3e+3f+g$	$d+4e+6f+4g+h$	enz.
enz.	enz.	enz.				

§. 775. Wanneer men op de wording van de getallen coefficienten van de termen dezer rijen nadenkt, dan ziet men: dat zij op dezelfde wijze, als de Binomial coefficienten, in de multiplicatie ontstaan, en dat zij de binomial coefficienten zijn van de magt, welker exponent gelijk is aan het getal, dat den rang des terms uitdrukt. En hieruit volgt dan: dat, in het algemeen, voor den term, welks rang p is, (of eigenlijk voor den $(p+1)^e$ term,) zal zijn:

$$y = A + \overset{1}{(p)}\,a + \overset{2}{(p)}\,b + \overset{3}{(p)}\,c + \overset{4}{(p)}\,d + \overset{5}{(p)}\,e + enz.$$

§. 776.

§. 776. †† Eigenlijk — en wij hebben zulks in den eersten Cursus reeks opgemerkt — bestaat 'er in eene reeks geen eerste term: de eerste term is die term, van waar men, voorwaards en achterwaards, de termen beschouwt: hij is in dit opzigt de oorsprong der telling, welken men ergens, naar welgevallen, stellen kan: van hier kunnen de termen der reeks

$$A,\ A+a,\ A+2a+b,\ A+3a+3b+c,\ \textit{enz.}$$

achterwaards worden voortgezet, en dan zullen de rangen der achterwaards loopende termen, van A afterekenen, door de negatieve getallen -1, -2, -3, *enz.* worden uitgedrukt.

§. 777. †† *Men zal nu gemakkelijk de termen der reeks achterwaards kunnen voortzetten, wanneer men kan nagaan: hoe, in de tafel, eene voorgaande kolom uit de naast volgende gemaakt wordt.* Zulks geschiedt nu aldus: men verkrijgt de eerste term van kolom o, namelijk A, wanneer men in kolom 1 neemt $(A+b)-(b+c)$ $+(c+d)-(d+e)+(e+f)-$ *enz.*; want, daar, voor elke rekenkunstige reeks, de verschillen van zekere rangorde eindelijk nul worden, zal deze uitdrukking noodzakelijk gelijk A zijn: op dezelfde wijze is de tweede term, in kolom o namelijk, gelijk aan $(a+b)$ $-(b+c)+(c+d)-(d+e)+$ *enz.*, en de termen van eenige kolom worden uit die van de onmiddelijk volgende, op dezelfde wijze, door beurtelings bij en aftellen, gevormd. Men zal dan voor de termen van kolom -1, met behulp van kolom o, vinden.

$$A-a+b-c+d-\textit{enz.}$$
$$a-b+c-d+e-\textit{enz.}$$

en uit deze, voor kolom -2, de termen:

$$A-2a+3b-4c+5d-\textit{enz.}$$
$$a-2b+3c-4d+5e-\textit{enz.}$$

hieruit wederom, voor kolom -3, de termen:

$$A-3a+6b-10c+15d-\textit{enz.}$$
$$a-3b+6c-10d+15e-\textit{enz.}$$

§. 778. Het is niet noodig deze berekening verder voorttezetten: het loopt in het oog: dat de coefficienten der termen de binomial coefficienten der negatieve magten zijn, behoorende in elke kolom tot eene magt, welke gelijk is aan den index van die kolom, en het blijkt derhalve: dat de uitdrukking

$$y=A+\overset{1}{(p)}a+\overset{2}{(p)}b+\overset{3}{(p)}c+\overset{4}{(p)}d+\textit{enz.}$$

zoowel voor de achterwaards loopende termen, als voor de voorwaards

waards gaande, algemeen is: zoodat, wanneer de achterwaards loopende termen niet negatief, maar positief genomen worden, de term, welke achterwaards de q^{de} in rang is, door

$$y = A - q\,.\,a + \frac{q\,.\,(q+1)}{1\,.\;2}\,b - \frac{q\,(q+1)\,(q+2)}{1\,.\;2\,.\;3}\,c + \text{enz.}$$

zal worden voorgesteld.

§. 779. Laat ons, om den aart dezer uitdrukking, (waardoor men altijd de waarde van eenigen term kan leeren kennen, zonder de voorgaande te berekenen,) toetelichten, stellen: dat de vier eerste termen $1, 1, 6, -1$, van eene reeks van de derde orde gegeven zij, (zie §. 771); dan berekene men, (zie nevenstaande tafeltje,) de eerste, tweede en derde verschillen: wij hebben dan: $A = 1$, $a = 0$, $b = 5$ en $c = -17$.

1,	1,	6,	− 1
	0,	5,	− 7
		5,	− 12
			− 17

Nu is de term, die $+1$ tot index heeft, omdat $p = 1$ is, $A + pa + \text{enz.} = A + a = 1 + 0 = 1$; de term, die tot index $+2$ heeft, $A + 2a + b = 1 + 0 + 5 = 6$; de term $+3$ gelijk $A + 3a + 3b + c = 1 + 0 + 3 \times 5 - 17 = -1$; de term $+4$ gelijk $A + 4a + 6b + 4c = 1 + 0 + 6 \times 5 - 4 \times 17 = -37$; *enz.* even zoo als boven gevonden is. Wil men de term -1 vinden, dan heeft men $A - a + b - c = 1 + 5 + 17 = 23$; de term -2 is gelijk $A - 2a + 3b - 4c = 1 + 3 \times 5 + 4 \times 17 = 84$; de term -3 is gelijk $A - 3a + 6b - 10c = 1 + 30 + 170 = 201$; *enz.* De voor- en achterwaards loopende termen, maken nu, in rangorde geplaatst, gelijk uit het nevenstaande tafeltje blijkt, eene onafgebrokene reeks, welker derde verschillen gelijk zijn.

201,	84,	23,	1,	1,	6,	− 1,	− 37
	− 117,	− 61,	− 22,	0,	5,	− 7,	− 36
		56,	39,	22,	5,	− 12,	− 29
			− 17,	− 17,	− 17,	− 17,	− 17

Indien men den 20^{en} term voorwaards, dat is den term, tot den Index 19, wilde berekenen, zou deze gelijk $A + 19a + \frac{19.\;18}{2}\,b + \frac{19.\;18.\;17}{6}\,c = -15617$ bevonden worden. Neemt men 201, 84, 23 en 1, voor de vier eerste termen der reeks; dan zal $A = 201$, $a = -117$, $b = 56$ en $c = -17$ zijn, en men zal, door dezelfde formulen, de volgende termen vinden; want deze wet bestaat overal, in alle de deelen der reeks, op dezelfde wijze.

§. 780. †† Wij hebben tot hiertoe, den index p in de vergelijking

$$y = A + \overset{1}{(p)}\,a + \overset{2}{(p)}\,b + \overset{3}{(p)}\,c + \overset{4}{(p)}\,d + \text{enz.}$$

als

als een geheel getal aangemerkt: maar men kan 'er ook een gebroken voor nemen, en dan zal deze vergelijking kunnen gebruikt worden, om tusſchen de termen van eene rekenkunſtige reeks van eenige orde zoo vele termen als men goedvindt intelasſchen, welke ingelaschte termen, met de overige termen dezer reeks, volgens dezelfde wet, verbonden zijn. * Men noemt deze bewerking *interpolatie.* Het tusſchen in plaatſen van een zeker getal midden-evenredigen, tusſchen de termen eener reken- of meetkunſtige reeks, in §. 828 en §. 842, I. C. geleerd, is gevolgelijk zulk eene interpolatie. †† *Indien wij den index p gelijk aan het gebroken $q:r$ ſtellen; dan zal de term, welke het gebroken $q:r$ tot index heeft, door*

$$y = A + \left(\frac{q}{r}\right)^{1} a + \left(\frac{q}{r}\right)^{2} b + \left(\frac{q}{r}\right)^{3} c + \left(\frac{q}{r}\right)^{4} d + \text{enz.}$$

of, dat hetzelfde is, door

$$y = A + \frac{q}{r}.a + \frac{q.(q-r)}{r.\ 2r}.b + \frac{q(q-r)(q-2r)}{r.\ 2r.\ 3r}c + \text{enz.}$$

worden uitgedrukt.

§. 781. Nemen wij: dat tusſchen elk van de termen der reeks 1, 1, 6, -1, -37, -119, van §. 771 en 779, twee termen zullen ingelast worden: dan is, zie §. 779, $A = 1$; $a = 0$; $b = 5$ en $c = -17$. Vermits nu de term A nul tot index heeft, zullen de termen moeten berekend worden, welke $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{6}{3}$, $\frac{7}{3}$, $\frac{8}{3}$, *enz.* tot indices hebben. Men ſtelle dan: $q:r = 1:3$; dan heeft men: $y = A + \frac{1}{3}a - \frac{1}{9}b + \frac{5}{81}c = -\frac{49}{81} =$ de eerſte der twee termen, welke tusſchen de twee eerſte termen 1 en 1 vallen. Stelt men $q:r = 2:3$; dan zal men vinden: $y = A + \frac{2}{3}a - \frac{1}{9}b + \frac{4}{81}c = -\frac{32}{81}$ voor den tweeden der termen, welke tusſchen de twee eerſte termen 1 en 1 vallen: op deze wijze voortgaande, zal men vinden:

$1, -\frac{49}{81}, -\frac{32}{81}, +1, +2\frac{77}{81}, +4\frac{67}{81}, +6, +5\frac{58}{81}, +3\frac{58}{81}, -1,$ *enz.*

welker derde verſchillen alle gelijk $-\frac{51}{81}$ of $-\frac{17}{27}$ zijn.

§. 782. †† *Gelijk derhalve, in eene reken- of meetkunſtige reeks, een gelijk getal termen, tusſchen elke twee geïnterpoleerd zijnde, deze geïnterpoleerde termen met de termen, tusſchen welke zij vallen, eene reeks van dezelfde natuur opleveren, zoo ook zullen, wanneer 'er in eene rekenkunſtige reeks van eenige orde, hetzelfde getal termen, tusſchen elke twee termen geïnterpoleerd worden, deze geïnterpoleerde reeks eene reeks van dezelfde orde zijn;* al hetwelk men ook gemakkelijk op eene algemeene wijze zou kunnen betoogen. Wij zullen, na-

nadat wij in deze en in de twee volgende Lesfen de eigenfchappen der reekfen zullen verklaard hebben, op het nuttig gebruik van de interpolatie dezer reekfen terug komen.

§. 783. Vraagstuk. *De fom van een bepaald aantal termen van eene rekenkunftige reeks van zekere orde te vinden?*

Stellen wij, als bôven, voor de rekenkunftige reeks van eenige orde de letters A, B, C, D, E, F, *enz.:* noemen wij S_1 de fom van den eerften term; S_2 de fom van de twee eerfte termen, enz.; zoodat $S_1 = A$; $S_2 = A + B$; $S_3 = A + B + C$; $S_4 = A + B + C + D$; en S_n gelijk de fom van n termen zij; dan is het klaar: dat, wanneer men de reeks:

$$S_1,\ S_2,\ S_3,\ S_4,\ S_5,\ S_6,\ S_7,\ enz.$$

als eene rekenkunftige reeks behandelt, en den eerften term van den tweeden; den tweeden van den derden aftrekt, enz. men alsdan verkrijgen zal: $S_2 - S_1 = A + B - A = B$; $S_3 - S_2 = (A + B + C) - (A + B) = C$, *enz.*

Het blijkt hieruit: dat men de reeks, welke de fommen van éénen term, van twee, van drie termen, enz. voorftelt, moet aanmerken, als eene rekenkunftige reeks, welke de gegevene reeks tot eerfte verfchillen heeft. * Wij noemen deze reeks de *fommerende reeks*, *de reeks der fommen*; †† de exponent van hare orde is één meer dan de exponent van de orde der reeks, welker fom bepaald wordt. Wij hebben derhalve, wanneer wij den term, welke in de reeks der fommen den term S_1 voorgaat, S_0 noemen:

fommerende reeks $S_0,\ S_1,\ S_2,\ S_3,\ S_4\ \ldots\ enz.\ \ S_n$
reeks der eerfte verfch. $\ldots\ A,\ B,\ C,\ D\ \ldots\ enz.\ \ N_0$

Laten nu de eerfte term der reeks A, B, C, D, *enz.* welker fom men vinden moet, benevens de eerfte termen van de reekfen van derzelver eerfte, tweede, derde en volgende verfchillen, in rangorde, door A, a, b, c, d, *enz.* worden uitgedrukt; dan is, volgens het betoogde in §. 774,

$$S_n = S_0 + n \,.\, A + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\, a + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\, b + enz.$$

of, de aangenomene notatie der binomial coefficienten gebruikende,

$$S_n = S_0 + \overset{1}{(n)}\, A + \overset{2}{(n)}\, a + \overset{3}{(n)}\, b + \overset{4}{(n)}\, c + \overset{5}{(n)}\, d + enz.$$

In deze uitdrukking is S_n de fom van n termen van de reeks A, B, C, *enz.:* deze fom zal derhalve bekend zijn, wanneer S_0 kan bepaald worden.

Het loopt terſtond in het oog: dat $S_0 = 0$ is; want de reeks S_0, S_1, S_2, *enz.* heeft de eigenſchap, dat, elke voorgaande term van den volgenden afgetrokken zijnde, het verſchil den overëénkomſtigen term van de reeks A, B, *enz.* geeft; gevolgelijk is $S_1 - S_0 = A$, of $S_0 = S_1 - A$; maar S_1 is gelijk A; derhalve $S_0 = 0$: de ſom van n termen van de reeks A, B, C, D, *enz.*, van en met den eerſten term A medegerekend, wordt derhalve uitgedrukt door:

$$S_n = \overset{1}{(n)} A + \overset{2}{(n)} a + \overset{3}{(n)} b + \overset{4}{(n)} c + \overset{5}{(n)} d + enz.$$

§. 784. †† Het aantal van de termen dezer uitdrukking hangt af van het orde getal der reeks, en is altijd één meer dan dit getal; want 'er zijn even zoo vele reekſen van verſchillen, als éénheden in den wijzer van den rang.

§. 785. Door de gevondene formule kan men de ſom alle rekenkunſtige reekſen vinden.

§. 786. 1. VOORBEELD. *De ſom van n termen van de reeks p, p + q, p + 2 q, enz. te vinden?*

Hier is $A = p$ en $a = q$, $b = 0$, $c = 0$, *enz.* derhalve is $S_n = n\,p + \frac{n(n-1)q}{2}$; hetgeen met §. 824, I. C. overëénkomt.

§. 787. 2. VOORBEELD. *De ſom van n termen van de reeks der tweede magten van de getallen 1, 2, 3, enz. te vinden?*

1,	4,	9,	16,	25
	3,	5,	7,	9
		2,	2,	2

Wanneer men, gelijk in het nevenſtaande tafeltje, de reekſen der eerſte en tweede verſchillen bepaalt; dan is $A = 1$; $a = 3$; $b = 2$; $c = 0$; $d = 0$; *enz.* derhalve:

$$S_n = n \times 1 + \frac{n(n-1)}{1.\ 2} \times 3 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3} \times 2$$

deze termen ontwikkelende, vindt men:

$$S_n = \tfrac{1}{6} n (n+1) (2n+1)$$

Stel $n = 10$; dan is $1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64 + 81 + 100 = \frac{1}{6} \times 10 \times 11 \times 21 = 385$.

§. 788. 3. VOORBEELD. *De ſom van n termen van de derde magten der natuurlijke getallen te vinden?*

1,	8,	27,	64,	125,	216
	7,	19,	37,	61,	91
		12,	18,	24,	30
			6,	6,	6

Hier is $A = 1$, $a = 7$, $b = 12$, $c = 6$, $d = 0$, *enz.*; derhalve

$$S_n = \overset{1}{(n)} \times 1 + \overset{2}{(n)} \times 7 + \overset{3}{(n)} \times 12 + \overset{4}{(n)}\, 6 = \tfrac{1}{4} n^2 (n+1)^2$$

†† Het is opmerkelijk, dat deze ſom juist het vierkant van het trigonaal getal is, welks wortel of zijde gelijk is aan het getal termen der geſommeerde reeks.

§. 789. †† Men zal, op dezelfde wijze, de ſommen van de hoogegere magten der natuurlijke getallen vinden: doch, wij moeten in de LXVIII Les deze ſtof uit een ander oogpunt beſchouwen. Wij zullen nog kortelijk eenige eigenſchappen der rekenkunſtige reekſen overwegen.

§. 790. †† *Indien A, B, C, D, enz. P, Q, R, eene reeks van de p^{de} orde is, uit n termen beſtaande; dan zal de ſom van de reeks $nA+(n-1)B+(n-2)C+$ enz. $+3P+2Q+R$, (welke insgelijks uit n termen beſtaat,) gelijk zijn aan $\overset{2}{(n+1)}A+\overset{3}{(n+1)}a+\overset{4}{(n+1)}b+\overset{5}{(n+1)}c+$ enz.; zijnde, als boven, a, b, c, enz. de eerſte termen van de reekſen der eerſte, en volgende verſchillen.* Wij laten het betoog aan den Lezer over.

§. 791. †† *Indien A, B, C, D, enz. eene rekenkunſtige reeks van de n^{de} orde is, welker n^{de} verſchillen ſtandvastig en gelijk v zijn; dan zal de reeks A, $2B$, $3C$, $4D$, $5E$, enz. eene reeks van de $(n+1)^e$ orde zijn, welker $(n+1)^e$ ſtandvastige verſchillen gelijk aan $(n+1)v$ zullen zijn.*

Omdat de n^{de} verſchillen van de reeks A, B, C, D, ſtandvastig en gelijk v zijn, zal men, volgens §. 764 hebben.

$$\pm A \mp \overset{1}{(n)}B \pm \overset{2}{(n)}C \mp \overset{3}{(n)}D \pm \overset{4}{(n)}E \mp \text{enz.} = v$$

$$\pm B \mp \overset{1}{(n)}C \pm \overset{2}{(n)}D \mp \overset{3}{(n)}E \pm \overset{4}{(n)}F \mp \text{enz.} = v \quad . \; . \; . \; (\alpha)$$

maar nu zijn de $(n+1)^e$ verſchillen gelijk nul, en wij hebben derhalve:

$$\mp A \pm \overset{1}{(n+1)}B \mp \overset{2}{(n+1)}C \pm \overset{3}{(n+1)}D \mp \overset{4}{(n+1)}E \pm \text{enz.} = 0 \quad (\beta)$$

Indien wij nu de vergelijking (α) met $n+1$ vermenigvuldigen, en bij het product de vergelijking (β) optellen, dan zullen wij verkrijgen:

$$\mp A \pm \left\{(n+1)+\overset{1}{(n+1)}\right\}.B \mp \left\{(n+1).\overset{1}{(n)}+\overset{2}{(n+1)}\right\}.C$$

$$\pm \left\{(n+1).\overset{2}{(n)}+\overset{3}{(n+1)}\right\}.D \mp \left\{(n+1).\overset{3}{(n)}+\overset{4}{(n+1)}\right\}.E$$

$$\pm \text{enz.} = (n+1).v \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (\gamma)$$

Nu is, volgens de eigenſchappen van de binomial coefficienten, zie §. 512.

$$\overset{p}{(n)} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,p} \text{ en } \overset{p+1}{(n+1)} = \ldots$$

$$\frac{(n+1)(n)(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,p+1}$$

der-

derhalve is:

$$\overset{p+1}{(n+1)} : \overset{p}{(n)} = \frac{n+1}{p+1} \quad \text{en} \quad (n+1) \,.\, \overset{p}{(n)} = (p+1) \,.\, \overset{p+1}{(n+1)}$$

en ftellende bij opvolging $p = 0, 1, 2$, *enz.* dan zal:

$$(n+1)\overset{0}{(n)} = n+1 = 1 \,.\, \overset{1}{(n+1)}; \; (n+1) \,.\, \overset{1}{(n)} = 2\overset{2}{(n+1)};$$

$(n+1)\overset{2}{(n)} = 3\,\overset{3}{(n+1)}$; $(n+1)\overset{3}{(n)} = 4\,\overset{4}{(n+1)}$; *enz.* zijn. Men fubftituere dan deze waarden in de vergelijking (γ); dan zal men vinden:

$$\mp A \pm \overset{1}{(n+1)} \,.\, 2B \mp \overset{2}{(n+1)}\, 3C \pm \overset{3}{(n+1)}\, 4D \mp \mathit{enz.} = (n+1)v$$

Op dezelfde wijze zal men betoogen: dat is

$$\mp B \pm \overset{1}{(n+1)} \,.\, 2C \mp \overset{2}{(n+1)}\, 3D \pm \overset{3}{(n+1)}\, 4E \mp \mathit{enz.} = (n+1)v$$

$$\mp C \pm \overset{1}{(n+1)} \,.\, 2D \mp \overset{2}{(n+1)}\, 3E \pm \overset{3}{(n+1)}\, 4F \mp \mathit{enz.} = (n+1)v$$

enz. *enz.*

gevolgelijk is, vergelijk §. 763, A, $2B$, $3C$, $4D$, *enz.* eene reeks van de $(n+1)^e$ orde, welker $(n+1)^e$ verfchillen ftandvastig en gelijk $(n+1).v$ zijn.

§. 792. †† *Indien men de termen der reeks A, B, C, enz. van de n^{de} orde met de reeks a, $2a$, $3a$, $4a$, enz. vermenigvuldigt, dan zullen, (zie §. 761 en 791.) de producten aA, $2aB$, $3aC$, $4aD$, enz. de termen eener reeks van de $(n+1)^e$ orde zijn, welker ftandvastige $(n+1)^e$ verfchil $(n+1)av$ zal zijn, indien het ftandvastige verfchil van A, B, C, enz. gelijk v is.*

§. 793. †† *Indien men dezelfde reeks A, B, C, D, enz. van de n^{de} orde, en welker ftandvastige verfchil gelijk v is, met de reeks a, $a+b$, $a+2b$, $a+3b$, enz. vermenigvuldigt, dan maken de producten aA, $(a+b)B$, $(a+2b)C$, $(a+3b)D$, enz. eene reeks van de $(n+1)^e$ orde, welker ftandvastige verfchil, volgens §. 791 en 792, gelijk $(n+1)bv$ zal zijn.*

§. 794. †† *De n^{de} magten der natuurlijke getallen maken eene rekenkunftige reeks uit, welker n^{de} verfchillen ftandvastig, en gelijk $n \times (n-1)(n-2)$ enz. $3, 2, 1$, zijn.*

De reeks $1, 2, 3, 4$, enz. is eene reeks van de eerfte orde, welker ftandvastige eerfte verfchillen gelijk 1 zijn: derzelver termen vermenigvuldige men met $1, 2, 3$, enz.; dan zal, volgens §. 791, 1×1, 2×2, 3×3, enz. of $1, 4, 9$, eene reeks van de tweede orde

orde zijn, welker tweede verſchillen, (omdat hier $n = 1$ is,) gelijk 2×1 zullen zijn.

De termen dezer laatſte vermenigvuldige men wederom met 1, 2, 3, enz.; dan zullen $1, 2^3, 3^3, 4^3$, enz. de termen eener reeks van de derde orde zijn, welker derde verſchillen gelijk $3 \times 2 \times 1$ zijn zullen.

Op deze wijze voortgaande, zal de waarheid van het geſtelde blijken.

§. 795. †† *De geheele poſitieve* n^{de} *magten van de termen eener rekenkunſtige reeks van de eerſte orde* $p, p+q, p+2q, p+3q$, *enz. maken eene rekenkunſtige reeks van de* n^{de} *orde, welker* n^{de} *verſchillen gelijk* $n(n-1)(n-2)$ *enz.* $3, 2, 1 \times q^n$ *zijn.*

Want, laat het ſtandvastige n^{de} verſchil van $p^n, (p+q)^n, (p+2q)^n$, *enz.* gelijk v zijn; dan is, volgens §. 793, $p \times p^n, (p+q)(p+q)^n$; *enz.* eene rekenkunſtige reeks van de $(n+1)^e$ orde, welker ſtandvastige n^{de} verſchil gelijk $(n+1)qv$ is. Nu is $p, p+q, p+2q$, eene reeks van de eerſte orde, welker ſtandvastige verſchil gelijk q is; vermenigvuldigt men de termen dezer reeks met $p, p+q, p+2q$, *enz.*; dan is $p^2, (p+q)^2, (p+2q)^2$, *enz.* eene reeks van de tweede orde, welker verſchil, (omdat hier $n = 1$ en $v = q$ is,) gelijk $2 \times 1 \times q^2$ zal zijn: men vermenigvuldige deze reeks wederom met $p, p+q, p+2q$, *enz.*; dan zal $p^3, (p+q)^3$, *enz.* eene reeks van de derde orde zijn, welker ſtandvastige verſchil, (omdat hier $n = 2$ en $v = 2 \times 1 \times q^2$ is,) gelijk $3 \times 2 \times 1 \times q^3$ zal zijn, enz.

§. 796. †† *Wanneer men in eene uitdrukking van den vorm*

$$a x^p + b x^q + c x^r + d x^s + \text{enz.} + p$$

de coefficienten a, b, c, d, *enz. als ſtandvastig, en* x *als eene veranderlijke grootheid aanmerkt, en voorts* $p > q$; $q > r$; $r > s$; *enz. ſtelt; dan zullen, wanneer men, in plaats van de veranderlijke grootheid* x, *ſucceſſievelijk de getallen* $\alpha, \alpha+\beta, \alpha+2b, \alpha+3\beta$, *enz. in eene rekenkunſtige reeks ſtelt, de verſchillende waarden, welke deze uitdrukking daardoor verkrijgt, eene rekenkunſtige reeks van de* p^{de} *orde zijn, welker ſtandvastig verſchil gelijk* $p(p-1)(p-2)$ *enz.* $3, 2, 1 \times a\beta^p$ *zal zijn.*

Volgens §. 795, zullen de waardijen, welke de term $a x^p$ door de ſubſtitutie van $\alpha, \alpha+\beta$, *enz.* verkrijgt, eene rekenkunſtige reeks van de p^{de} orde uitmaken, welker ſtandvastig verſchil $p(p-1)$ *enz.* $3, 2, 1 \times a\beta^p$ is: dezelfde ſubſtitutie in den term $b x^q$ zal eene reeks van de q^{de} orde, in den den term $c x^r$ eene reeks van de r^{de} orde opleveren,

enz.,

enz., en de reeks, welke door de ſubſtitutie van α, $\alpha + \beta$, *enz.* in $a\,x^p + b\,x^q +$ *enz.* ontſtaat, zal gelijk zijn aan de ſom van alle deze reekſen; maar, nu is $p > q$, $q > r$, $r > s$, *enz.* derhalve zal, volgens §. 793, de reeks, welke uit $a\,x^p + b\,x^q +$ *enz.* ontſtaat, van dezelfde orde zijn, als de reeks, welke uit $a\,x^p$ geboren wordt, en zal met dezelve hetzelfde ſtandvastige p^{de} verſchil gelijk $p\,.\,(p-1)\,.$ *enz.* $3\,.\,2\,.\,1\,.\,a\,\beta^p$ hebben.

§. 797. †† Is, in dezelfde onderſtelling, $a = 1$ en $\beta = 1$; dan zal het ſtandvastige verſchil gelijk $p\,(p-1)$ *enz.* 3. 2. 1. zijn. Deze eigenſchap is, in de oplosſing der vergelijkingen, van veel belang.

ZEVEN- EN- ZESTIGSTE LES.

Over de wederkeerige Reekſen.

§. 798. * Wanneer men, zie §. 70—§. 73, een ſtelkundig gebroken $\frac{1+3x+x^2}{1+2x+2x^2+x^3}$ in eene onbepaalde voortloopende reeks $1 + x - 3x^2 + 3x^3 - x^4 - x^5 + x^6 +$ *enz.* ontwikkelt, wordt zulk eene reeks *wederkeerige reeks* genoemd, en heeft, gelijk wij reeds gezien hebben, de eigenſchap: dat, *wanneer men even zoo vele op elkander volgende termen, als 'er termen in den noemer der voortbrengende breuk voorkomen, met die zelfde termen des noemers, in eene omgekeerde orde, vermenigvuldigt, de ſom dezer producten gelijk nul is.* * De breuk uit welke de reeks ontwikkeld wordt, noemt men de *voortbrengende breuk.* * De termen van haar' noemer, van achter naar voren genomen, doch, waarvan men doorgaans alleen de coefficienten neemt, wordt de *betrekkings ſchaal* van de termen der reeks genoemd. * Men onderſcheidt de wederkeerige reekſen, in reekſen van de eerſte, tweede, derde en volgende orde; zijnde het orde getal één minder dan het aantal termen der betrekkings ſchaal, in welke altijd de ontbrekende termen, waaraan men nul tot coefficient geeft, moeten medegerekend worden.

§. 799. Wanneer de voortbrengende breuk gegeven is, wordt de wederkeerige reeks, die van dezelve afhangt, het eenvoudigst door deeling gevonden, en het gemakkelijkt naar den regel, welke wij in §. 71 reeds gegeven hebben: maar, wanneer de reeks zelve gegeven is, en men de betrekkings ſchaal van derzelver termen kent, is het van zeer veel aangelegenheid, dat men de breuk wete te bepalen, waaruit deze reeks ontſtaat. Wij zullen ons hier eerst mede bezig houden.

§. 800.

§. 800. I. VRAAGSTUK. *De reeks* $P + Qz + Rz^2 + Sz^3 + Tz^4 + Uz^5 +$ *enz. gegeven zijnde, benevens de betrekkings ſchaal van derzelver termen,* $+d$, $+c$, $+b$, $+a$, $+1$, *de breuk te vinden, waaruit dezelve geboren wordt?*

De noemer der voortbrengende breuk is, wegens de gegevene ſchaal, $1 + az + bz^2 + cz^3 + dz^4$: de teller zal dan den vorm $A + Bz + Cz^2 + Dz^3$ moeten hebben, en dan zal:

$$\frac{A + Bz + Cz^2 + Dz^3}{1 + az + bz^2 + cz^3 + dz^4} = P + Qz + Rz^2 + Sz^3 + Tz^4 + \text{enz.}$$

zijn. Vermenigvuldigen wij nu het quotient met den deeler, dan zal men, daar dit product gelijk aan het deeltal moet zijn, de vergelijkingen van het nevenſtaande tafeltje verkrijgen.

$$\begin{aligned}
A &= P \\
B &= Q + aP \\
C &= R + aQ + bP \\
D &= S + aR + bQ + cP \\
0 &= T + aS + bR + cQ \\
&\dots\dots + dP
\end{aligned}$$

§. 801. †† Uit deze vergelijkingen blijkt het: dat de coefficienten van de termen des tellers van de vier eerſte termen der reeks afhangen, zoodat men door die termen, naar aanwijzing der vergelijkingen, den teller der voortbrengende breuk vinden zal.

§. 802. Wanneer de betrekkings ſchaal, of de noemer der voortbrengende breuk, algemeen gegeven ware $1 + az + bz^2 + cz^3 +$ *enz.*, dan zou men nog ſoortgelijke vergelijkingen verkrijgen, en, wanneer men deze op eene algemeene wijze beſchouwt, dan zal het blijken: †† dat, in eene wederkeerige reeks van de eerſte orde, de teller der voortbrengende breuk van den eerſten term P alleen afhangt: dat voorts die teller in eene reeks van de tweede orde van de twee eerſte termen, en in eene reeks van de n^{de} orde van de n eerſte termen afhangt.

§. 803. †† Wanneer men dan eene wederkeerige reeks van de n^{de} orde, volgens eene ſchaal, welke uit $n + 1$ termen beſtaan moet, wil conſtrueren, zal men de n eerſte termen der reeks naar welgevallen kunnen ſtellen, en de teller der voortbrengende breuk zal, met behulp der bovenſtaande formulen, bepaald worden.

§. 804. VOORBEELD. *Eene wederkeerige reeks, benevens de breuk, waaruit hij ontſtaat te vinden, onder die bepaling, dat de coefficient van elken term gelijk zij aan de ſom van de quotienten der twee voorgaande termen?*

Men kan de twee eerſte termen van zulk eene breuk naar welgevallen aannemen: ſtellen wij derhalve voor het begin $1 + x$; dan zal, volgens de gegevene wet, de reeks $1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 8x^5 + 13x^6 +$

$+21x^7+34x^8+$ *enz.*: het loopt in het oog, dat de betrekkings ſchaal $+1$, $+1$, -1, of wel -1, -1, $+1$ is; men zal derhalve voor den noemer der voortbrengende breuk kunnen ſtellen: $1-x-x^2$. Men heeft derhalve (zie bovenſtaande vergelijkingen, in welke $c=0$ en $D=0$ moeten genomen worden,) $a=-1$; $b=-1$; $P=1$; $Q=1$: men heeft derhalve $A=P=1$; $B=Q+aP=1-1\times 1=0$, en hieruit blijkt: dat de gegevene reeks uit het gebroken $\frac{1}{1-x-x^2}$ ontſtaat.

§. 805. †† Vermits, volgens §. 765, de $(n+1)^e$ verſchillen van eene rekenkunſtige reeks van de n^{de} orde gelijk nul zijn, zal men voor de coefficienten eener reeks $P+Qx+Rx^2+Sx^3+$ *enz.* zulk eene rekenkunſtige reeks kunnen aannemen, en dan heeft men:

$$P-(n\overset{1}{+}1)Q+(n\overset{2}{+}1)R-(n\overset{3}{+}1)S+\text{enz.}=0$$

De betrekkings ſchaal is derhalve 1, $-(n\overset{1}{+}1)$, *enz.*, de noemer der voortbrengende breuk zal derhalve $(1-z)^{n+1}$ zijn; ſtellen wij dan den teller $A+Bz+Cz^2+$ *enz.*; dan zal men hebben:

$$A=P$$
$$B=Q-(n\overset{1}{+}1)P$$
$$C=R-(n\overset{1}{+}1)Q+(n\overset{2}{+}1)P$$
$$D=S-(n\overset{1}{+}1)R+(n\overset{2}{+}1)Q-(n\overset{3}{+}1)P$$
$$E=T-(n\overset{1}{+}1)S+(n\overset{2}{+}1)R-(n\overset{3}{+}1)Q+(n\overset{4}{+}1)P$$
$$F=U-(n\overset{1}{+}1)T+(n\overset{2}{+}1)S-(n\overset{3}{+}1)R+(n\overset{4}{+}1)Q-(n\overset{5}{+}1)P$$

enz. *enz.*

en hier door zal de breuk, uit welke de gegevene reeks ontſtaat, bekend worden.

§. 806. 1. VOORBEELD. *Laat gegeven zijn de reeks* $1+2x+3x^2+4x^3+$ *enz.: men vraagt de breuk te bepalen, waaruit zij ontſtaat?*

De coefficienten dezer reeks zijn eene Rekenkunſtige reeks van de eerſte orde. Wij hebben derhalve: $P-2Q+R=0$, en de noemer is $1-2x+x^2$ of $(1-x)^2$. Voorts is $P=1$, $Q=2$ en $R=3$; $n=1$ en $(n\overset{1}{+}1)=2$; $(n\overset{2}{+}1)=1$; $(n\overset{3}{+}1)=0$; en eindelijk $A=P=1$; $B=Q-2P=2-2\times 1=0$, en de voortbrengende breuk is $1:(1-x)^2$, zoo als men ook door dadelijke deeling vinden zal.

§. 807. 2. VOORBEELD. *Gegeven zijnde* $1+4x+9x^2+16x^3+25x^4+$ *enz.: men vraagt als boven?*

De coefficienten zijn hier eene rekenkunstige reeks van de tweede orde, (zie §. 787.) men heeft derhalve: $P-3Q+3R-S=1-3\times4+3\times9-16=0$; $n=2$; $n+1=3$; $\overset{1}{(n+1)}=3$; $\overset{2}{(n+1)}=3$; $\overset{3}{(n+1)}=1$; *enz.*: $P=1$; $Q=4$; $R=9$; en $S=16$. Derhalve $A=P=1$; $B=Q-3P=4-3=1$; en $C=R-3Q+3P=9-12+3=0$: de gegevene reeks ontstaat derhalve uit de breuk $\frac{1+x}{(1-x)^3}$; zoo als ook door dadelijke deeling blijken zal.

§. 808. 3. VOORBEELD. *Gegeven zijnde de wederkeerende reeks* $1^3+2^3x+3^3x^2+4^3x^3+$ *enz.*: *men vraagt als boven?*

De coefficienten maken hier eene reeks van de derde orde, en hier is $P=1$; $Q=8$; $R=27$; $S=64$; $T=125$; $n=3$; $n+1=4$; derhalve is $A=P=1$; $B=Q-4P=8-4=4$; $C=R-4Q+6P=27-32+6=1$; $D=S-4R+6Q-4P=64-108+48-4=0$; en de breuk, welke deze reeks voortbrengt, is $(1+4x+x^2):(1-x)^4$.

§. 809. Men zal op gelijke wijze vinden: dat

$$1^4+2^4x+3^4x^2+4^4x^3+\text{enz.}=\frac{1+11x+11x^2+x^3}{(1-x)^5}$$

$$1^5+2^5x+3^5x^2+4^5x^3+\text{enz.}=\frac{1+26x+66x^2+26x^3+x^4}{(1-x)^6}$$

en zoo voorts voor de volgende magten.

§. 810. Neemt men, in alle deze reeksen, x negatief; dan verkrijgt men dezelfde reeksen, met afwisselende teekens, welke, wegens hare zonderlinge eigenschappen, merkwaardig zijn.

§. 811. 2. VRAAGSTUK. *De som van een bepaald aantal termen eener wederkeerige reeks te vinden?*

Indien men de wijze nagaat, waarop eene wederkeerende reeks uit hare voortbrengende breuk, door dadelijke divisie, ontstaat; dan blijkt het: dat de voortbrengende breuk gelijk is aan de som van de reeds ontwikkelde termen, opgeteld bij het quotient van het laatste overschot der divisie, gedeeld door den noemer der voortbrengende breuk. Indien derhalve

$$\frac{A+Bx+Cx^2}{1+ax+bx^2+cx^3}=P+Qx+Rx^2+\text{enz.}+Nx^n+N'x^{n+1}+N''x^{n+2}+N'''x^{n+3}+\text{enz.}$$

is, en men de deeling tot den term Nx^n heeft voortgezet, dan zal men een overschot hebben, dat van den vorm $\alpha x^{n+1}+\beta x^{n+2}+\gamma x^{n+3}$ zal zijn, en nu is klaarblijkelijk

$$\frac{(A+Bx+Cx^2)-(\alpha x^{n+1}+\beta x^{n+2}+\gamma x^{n+3})}{1+ax+bx^2+cx^3}=P+Qx+Rx^2+Sx^3+Tx^4+\text{enz.}+Nx^n \quad \ldots\ldots\ldots (\Omega)$$

Het

Het komt 'er dan alleen maar op aan, om de coefficienten α, β en γ, te bepalen? dan zulks is zeer gemakkelijk; want het is klaar: dat de volgende termen $N'x^{n+1}$, $N''x^{n+2}$, $N'''x^{n+3}$, door de betrekkings schaal van de termen der reeks gevonden, en diensvolgens als bekend kunnen aangemerkt worden: nu ontstaan deze termen, wanneer men de rest der deeling $\alpha x^{n+1} + \beta x^{n+2} + \gamma x^{n+3}$, verder door $1 + ax + bx^2 + cx^3$ deelt, en men heeft derhalve, volgens §. 800,

$$\alpha = N';\ \beta = N'' + \alpha N' \text{ en } \gamma = N''' + \alpha N'' + \beta N'$$

en nu is alles bekend, zoodat de som van $(n+1)$ termen door de vergelijking (Ω) zal gevonden worden. De leerling zal de toepassing gemakkelijk maken kunnen.

§. 812. 3. VRAAGSTUK. *Den algemeenen term van eene wederkeerige reeks, die uit eene gegevene breuk ontstaat, te vinden?*

Wanneer de noemer van het gebroken in eerste magts factoren ontleedbaar is, dan kan de voortbrengende breuk, met behulp der onbepaalde coefficienten, naar het voorschrift van §. 568, in breuken van den vorm $P:(1-pz)$ ontleed, en de reeks verdeeld worden in even zoo vele meetkunstige reeksen, als 'er éénheden in de magt van den noemer der voortbrengende breuk voorkomen. Onderstellen wij: dat de breuk $\frac{A+Bz+Cz^2}{1-az+bz^2-cz^3}$ in de breuken $\frac{P}{1-pz}$, $\frac{Q}{1-qz}$ en $\frac{R}{1-rz}$ ontleed zij, en dat gevolgelijk de som dezer laatste aan de gegevene gelijk zij; dan zal, aangezien

$$P:(1-pz) = P \times (1 + pz + p^2 z^2 + enz. + p^n z^n + enz.)$$
$$Q:(1-qz) = Q \times (1 + qz + q^2 z^2 + enz. + q^n z^n + enz.)$$
$$R:(1-rz) = R \times (1 + rz + r^2 z^2 + enz. + r^n z^n + enz.)$$

is, de som dezer reeksen, de wederkeerende reeks zijn, welke uit de ontwikkeling der gegevene breuk ontstaat, en men verkrijgt gevolgelijk de vergelijking:

$$\frac{A+Bz+Cz^2}{1-az+bz^2-cz^3} = (P+Q+R) + (Pp+Qq+Rr)z +$$
$$(Pp^2 + Qq^2 + Rr^2)z^2 + (Pp^3 + Qq^3 + Rr^3)z^3 + enz.$$

welker algemeene $(n+1)^e$ term gelijk zal zijn aan $(Pp^n + Qq^n + Rr^n)z^n$.

§. 813. †† Deze wijze van ontleding is toepasselijk op alle breuken, welker noemers in factoren van den vorm $1-pz$ ontleedbaar zijn: indien, bij voorbeeld, $(A+Bz):(1-az+bz^2) = \ldots$

$P:(1-pz)+Q:(1-qz)$ is; dan zal de $(n+1)^e$ term gelijk $(Pp^n+Qq^n)z^n$ zijn.

§. 814. 1. VOORBEELD. *Den algemeenen term van de wederkeerende reeks te vinden, welke uit de breuk* $(1-z):(1-z-2z^2)$ *ontstaat?*

Men zal naar §. 563 vinden: dat de gegevene breuk gelijk is aan de som der breuken $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1+z}$ en $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-2z}$: daarom zal de $(n+1)^e$ term gelijk $\frac{1}{3}\cdot(2^n\pm 2)z^n$ zijn, waarin het teeken $+$ moet gebruikt worden, indien n even is; het teeken $-$ voor eene onevene waarde van n.

§. 815. 2. VOORBEELD. *De algemeene* $(n+1)^e$ *term van de reeks, welke uit* $(1-z):(1-5z+6z^2)$ *ontstaat, is gelijk* $(2.3^n-2^n)z^n$.

§. 816. 3. VOORBEELD. *De* $(n+1)^e$ *term van de reeks, welke uit de breuk* $(1+5x):(-15+2x+x^2)$ *ontstaat, is gelijk aan*
$\left\{\pm\frac{3}{5}(\frac{1}{5})^n-\frac{2}{3}\cdot(\frac{1}{3})^n\right\}x^n$.

§. 817. †† Wanneer Z eene functie van z is; dan zal, volgens het binomium van NEWTON,

$$\frac{Z}{(1-pz)^n}=Z+(\overset{1}{-n})Z.pz+(\overset{2}{-n})Z.p^2z^2+(\overset{3}{-n})Z.p^3z^3+enz.$$

zijn, en indien $Z=1$ is; dan wordt de wederkeerende reeks de ontwikkelde negatieve n^{de} magt van $1-pz$, welker algemeene $(q+1)^e$ term (zie §. 503.) gelijk

$$\frac{n(n+1)(n+2)\ enz.\ (n+q-1)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ .\ enz.\ .\ .\ .\ q}.(pz)^q$$

is: maar is Z van den vorm $A+Bz+Cz^2+enz.$; dan zal men $1+(\overset{1}{-n})pz+enz.$ met Z moeten vermenigvuldigen, om de termen van de wederkeerende reeks, welke uit dit gebroken ontstaat, te verkrijgen.

Men verkrijgt, door deze multiplicatie, voor de wederkeerende reeks:

$$\begin{array}{l}
A+(\overset{1}{-n})A.pz+(\overset{2}{-n})A.p^2z^2+(\overset{3}{-n})A.p^3z^3+(\overset{4}{-n})A.p^4z^4+enz.\\
\qquad\qquad +B.z+(\overset{1}{-n})B.pz^2+(\overset{2}{-n})B.p^2z^3+(\overset{3}{-n})B.p^3z^4+enz.\\
\qquad\qquad\qquad\qquad +C.z^2+(\overset{1}{-n})C.pz^3+(\overset{2}{-n})C.p^2z^4+enz.\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +D.z^3+(\overset{1}{-n})D.pz^4+enz.\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +E.z^4+enz.
\end{array}$$

waar-

waaruit genoegzaam blijkt: dat derzelver $(r+1)^e$ term gelijk zal zijn aan

$$\left\{ \overset{r}{(-n)} Ap^r + \overset{r-1}{(-n)} Bp^{r-1} + \overset{r-2}{(-n)} Cp^{r-2} + \overset{r-3}{(-n)} Dp^{r-3} + enz. \right\} z^r$$

§. 818. †† Indien de noemer der voortbrengende breuk van de tweede magt $1 - az - bz^2$, en in geene ſtelkundige factoren oplosbaar is, zal echter de oplosſing van de vergelijking $1 - az - bz^2 = 0$ voor de factoren des noemers geven:

$$1 + \frac{2bz}{a + \sqrt{(a^2 + 4b)}} \quad en \quad 1 + \frac{2bz}{a - \sqrt{(a^2 + 4b)}}$$

en men zal het gegeven gebroken in twee andere breuken, deze factoren tot noemers hebbende, kunnen ontleden: indien dan P en Q de tellers dezer breuken zijn; dan zal de $(n+1)^e$ term gelijk zijn aan

$$\left\{ \frac{P.(2b)^n}{(a + \sqrt{(a^2 + 4b)})^n} + \frac{Q.(2b)^n}{(a - \sqrt{(a^2 - 4b)})^n} \right\} z^n.$$

§. 819. †† De waarde van $\sqrt{(a^2 + 4b)}$ kan, in deze uitdrukking, onbeſtaanbaar zijn: doch, zulks kan geene zwarigheid veroorzaken, alzoo de onbeſtaanbare uitdrukkingen elkander, bij de nadere ontwikkeling, vernietigen. Men kan, in dit geval, om de onbeſtaanbare uitdrukkingen te vermijden, aan den noemer der voortbrengende breuk den vorm $1 - 2a\,Coſ.\,\phi\, z + a^2 z^2$ geven, en de termen der reeks zullen, in dit geval, van den boog ϕ afhangen.

§. 820. †† Wanneer nu de noemer der voortbrengende breuk altijd in factoren van de vormen $(1 - pz)$, $(1 - pz)^n$, $1 - 2a\,Coſ.\,\phi . z + a^2 z^2$, en $(1 - 2a\,Coſ.\,\phi . z + a^2 z^2)^n$ kon ontleed worden; dan zou men die breuk ook altijd verdeelen kunnen in breuken, welke deze factoren tot noemers zouden hebben, en men zou deze leerwijze, die aan EULER behoort, altijd kunnen toepasſen: maar, wanneer deze omſtandigheid geen plaats vindt, dan kan ook de algemeene term op die wijze niet worden gevonden, en men moet alsdan zijnen toevlugt tot de volgende meer algemeene handelwijze nemen.

§. 821. †† De n^{de} term eener wederkeerige reeks kan, met behulp der combinatoriſche bewerkingen, gevonden worden. Volgens §. 739 is:

$$\frac{A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + enz.}{1 - az - bz^2 - cz^3 - dz^4 - enz.} = A + \left\{ A.\ddot{\underset{.}{1}}{}^1 + B \right\} z +$$

$$\left\{ A(\ddot{\underset{.}{2}}{}^1 + \ddot{\underset{.}{2}}{}^2) + B\ddot{\underset{.}{1}}{}^1 + C \right\} z^2 + \left\{ A(\ddot{\underset{.}{3}}{}^1 + \ddot{\underset{.}{3}}{}^2 + \ddot{\underset{.}{3}}{}^3) + \right.$$

$$\left. B(\underset{\cdot}{\ddot{2}} + \underset{\cdot}{\ddot{2}}^2) + C\underset{\cdot}{\ddot{1}}^1 + D \right\} z^3 + enz.$$

en de n^{de} term zal klaarblijkelijk gelijk zijn aan

$$+ \left\{ A((n \underset{\cdot}{\ddot{-}} 1)^1 + (n \underset{\cdot}{\ddot{-}} 1)^2 + (n \underset{\cdot}{\ddot{-}} 1)^3 + enz. + (n \underset{\cdot}{\ddot{-}} 1)^{n-1}) + \right.$$

$$B((n \underset{\cdot}{\ddot{-}} 2)^1 + (n \underset{\cdot}{\ddot{-}} 2)^2 + enz. + (n \underset{\cdot}{\ddot{-}} 2)^{n-2}) + C((n \underset{\cdot}{\ddot{-}} 3)^1$$

$$\left. + (n \underset{\cdot}{\ddot{-}} 3)^2 + enz. + (n \underset{\cdot}{\ddot{-}} 3)^{n-3}) + enz. \right\} z^{n-1}$$

zijnde de wijzer $\left\{ \begin{matrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & enz. \\ a, & b, & c, & d, & e, & f, & g, & h, & enz. \end{matrix} \right\}$; en men zal, met behulp van deze algemeene uitdrukking, zeer gemakkelijk den n^{den} term kunnen berekenen.

§. 822. Nemen wij, tot een voorbeeld, de reeks, welke uit de breuk $1 : (1 - z - z^2 + z^4 + z^5 - z^6)$ ontstaat; dan is $A = 1$; $B = 0$; $C = 0$; *enz.*; voorts $a = 1$; $b = 1$; $c = 0$; $d = -1$; $e = -1$; $f = 1$; $g = 0$; en de wijzer wordt

$$\left\{ \begin{matrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6 \\ a, & b, & c, & d, & e, & f \end{matrix} \right\} \text{ of } \left\{ \begin{matrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6 \\ 1, & 1, & 0, & -1, & -1, & 1 \end{matrix} \right\}$$

Wanneer men nu den tienden term, welke gelijk is aan

$$A \left\{ \underset{\cdot}{\ddot{9}}^1 + \underset{\cdot}{\ddot{9}}^2 + \underset{\cdot}{\ddot{9}}^3 + \underset{\cdot}{\ddot{9}}^4 + \underset{\cdot}{\ddot{9}}^5 + \underset{\cdot}{\ddot{9}}^6 + \underset{\cdot}{\ddot{9}}^7 + \underset{\cdot}{\ddot{9}}^8 + \underset{\cdot}{\ddot{9}}^9 \right\} z^9$$

wil bepalen, dan zal men de herhalings combinatien tot de som 9 ontwikkelen, (men vindt dezelve op de tegenzijde van Tabelle VI,) en voorts elke van derzelver complexien met het permutatie getal vermenigvuldigen, en eindelijk voor de wijzer getallen derzelver waarden naar den wijzer nemen, wanneer men voor dien term $+ 12 z^9$ vinden zal. — Indien men de moeite neemt, om meer termen te ontwikkelen, zal men bevinden: dat de bewerking aanmerkelijk kan bekort worden. In de meeste gevallen, zal men nogtans de termen, met behulp der schaal, gemakkelijker kunnen vinden. Men zal deze handelwijze slechts gebruiken, wanneer men eenen term, welke zeer ver van den oorsprong verwijderd is, wil berekenen.

§. 823. Het tot hiertoe verhandelde bevat de voornaamste eigenschappen en hoedanigheden der wederkeerende reeksen, welke algemeener dan de Reken- en Meetkunstige zijnde, onder zekere voorwaarden, beide deze laatste in zich begrijpen. Behalve, dat zij, in de hoogere deelen der Wiskunst, van een uitgestrekt gebruik zijn, heeft EULER,

zich

zich eene opmerking van NEWTON te nutte makende (116), getracht deze reekſen tot de benadering van de wortels eener hooge magts vergelijking te doen dienen, (zie zijne Algebra, §. 784.). Wij zullen, daar deze zijne handelwijze met het Theorema van GIRARD over de ſommen van de magten van de wortels eener vergelijking in verband ſtaat, dezelve kortelijk verklaren, en hare waarde beoordeelen.

§. 824. Stellen wij: dat de wortels eener vergelijking:

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + enz. = 0$$

door a, b, c, d, *enz.* worden uitgedrukt; dan zal het voorſte lid dezer vergelijking, gelijk bekend is, gelijk zijn aan $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$, *enz.* Indien wij nu de breuken

$$\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} + \frac{1}{x-d} + enz.$$

welke zoo veel in aantal zijn, als 'er éénheden in n zijn, optelt; dan ziet men: dat, vermits

$$\frac{1}{x-a} = \frac{1}{x} + a \,.\, \frac{1}{x^2} + a^2 \,.\, \frac{1}{x^3} + a^3 \,.\, \frac{1}{x^4} + enz.$$

is, derzelver ſom gelijk zal zijn aan:

$$\frac{n}{x} + S.a \times \frac{1}{x^2} + S.a^2 \times \frac{1}{x^3} + S.a^3 \times \frac{1}{x^4} + enz.$$

in welke uitdrukking, $S.a$ beteekent de ſom der wortels; $S.a^2$ de ſom van de vierkanten der wortels, enz. De ſom dezer breuken is nu klaarblijkelijk gelijk aan eene breuk van den vorm:

$$\frac{Px^{n-1} + Qx^{n-2} + Rx^{n-3} + enz.}{x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - enz.}$$

men zal derhalve, volgens de formulen van §. 800, vinden:

$$P = n$$
$$Q = S.a - A.P$$
$$R = S.a^2 - A \times S.a + B.P$$
$$S = S.a^3 - A \times S.a^2 + B \times S.a - C.P$$
$$T = S.a^4 - A \times S.a^3 + B \times S.a^2 - C \times S.a + D.P$$

Nu

(116) De regel namelijk, welke NEWTON in zijne *Arithm. Univ. P.* II. *Cap.* IV. voor de grenzen van den grootſten wortel eener vergelijking geeft, en die zeker gaat, wanneer alle hare wortels beſtaanbaar zijn. Deze regel komt hier op neder: †† *dat de* n^{de} *magts wortel uit de ſom van de* n^{de} *magten der wortelen, (welke men naar den bewezenen regel van* GIRARD *vindt,) grooter dan de grootſte wortel is; doch zooveel nader aan denzelven komt, naarmate* n *een grooter getal is.*

Nu is, zie §. 750; $S.a = A$; $S.a^2 = A \times S.a - 2B$; $S.a^3 = A \times S.a^2 - B \times S.a + 3C$, *enz.*; derhalve is $S.a - A = 0$; . . $S.a^2 - A \times S.a + 2B = 0$; $S.a^3 - A \times S.a^2 + B \times S.a - 3C = 0$; *enz.* daar nu $P = n$ is; zal $Q = -(n-1)A$; $R = (n-2)B$; $S = -(n-3)C$; $T = (n-4)D$; *enz.* zijn. Men zal derhalve hebben:

$$\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + enz. = \frac{nx^{n-1} - (n-1)Ax^{n-2} + (n-2)Bx^{n-3} - enz.}{x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + enz.}$$

De teller dezer breuk hangt derhalve zoodanig van den noemer af: *dat men, om denzelven te verkrijgen, elken term des noemers met den exponent van dien term moet vermenigvuldigen, en het product door den wortel deelen.* Men heeft derhalve, voor elke vergelijking:

$$\frac{nx^{n-1} - (n-1)Ax^{n-2} + enz.}{x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - enz.} = \frac{n}{x} + S.a \times \frac{1}{x^2} + S.a^2 \times \frac{1}{x^3}$$

$$+ S.a^3 \times \frac{1}{x^4} + enz. + S.a^n \times \frac{1}{x^{n+1}} + S.a^{n+1} \times \frac{1}{x^{n+2}} + enz.$$

§. 825. †† Het blijkt hieruit: *dat de sommen van de magten der wortelen eener vergelijking de coefficienten van de termen eener wederkeerende reeks zijn.* Onderstellen wij nu: dat a de grootste der wortelen zij; dan is het klaar, dat, aangezien de magten van grootere getallen in zoo veel grooter reden, dan die der kleinere, toenemen, naarmate de exponenten dezer magten grooter zijn,

$$a^n + b^n + c^n + d^n + enz.$$

op het laatst zeer na aan a^n gelijk zal worden (117): waaruit dan volgt: †† *dat, wanneer men het gebroken* . . . .
$\frac{nx^{n-1} - (n-1)Ax^{n-2} + enz.}{x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - enz.}$, *door divisie, of met behulp van de betrekkings schaal, ontwikkelt, en voorts den coefficient van elken term der reeks door den ommiddelijk voorgaanden deelt, de komende quotienten steeds nader aan den grootsten wortel der vergelijking zullen komen* (118).

§. 826. EULER neemt de n eerste termen zijner reeks, hetgeen (zie §. 803,) geschieden kan, naar welgevallen, en ontwikkelt de overi-

(117) Op deze waarheid steunt de regel van NEWTON, in de voorgaande noot aangehaald.

(118) De grootste wortel, het zij hij positief of negatief zij, hetgeen aan de permanentie of afwisseling van de teekens van de sommen der magten kenbaar zal zijn.

rige termen met behulp zijner betrekking ſchaal, waardoor hij wel eene reeks verkrijgt, die aan zijn oogmerk voldoet, doch geenzins ééne, die altijd het meest convergeert, en uit het minſte getal termen beſtaat.

§. 827. VOORBEELD. Zij gegeven de vergelijking $x^3 - 11x^2 + 31x - 22 = 0$, welke drie poſitieve wortels heeft; dan zal men den grootſten dezer wortels benaderen door het gebroken .... $\frac{3x^2 - 22x + 31}{x^3 - 11x^2 + 31x - 22}$ in eene wederkeerende reeks te ontwikkelen: zulks doende, worden de coëfficienten van de termen dezer reeks

3, 11, 59, 374, 2527, 17501, 122402, 859485, 6044895, 42542654

Deelt men nu elken term dezer reeks door zijn' ommiddelijk voorgaanden, dan zal men vinden:

$$\frac{122402}{17501} = 6,99; \ \frac{859485}{122402} = 7,0218; \ \frac{6044895}{859485} = 7,031; \ldots \frac{42542654}{6044895} = 7,037; \textit{ enz.}$$

waaruit blijkt: dat de quotienten tot eene ſtandvastige waarde naderen, welke, gelijk gezegd is, de grootſte wortel der vergelijking is. De gegevene vergelijking heeft éénen wortel tusſchen 1 en 2; éénen anderen tusſchen 2 en 3; de grootſte wortel blijkt iets grooter dan 7 te zijn: daar men nu tien termen heeft moeten berekenen, om alleen van de honderdſte deelen verzekerd te zijn, is het blijkbaar genoeg: dat deze leerwijze in geen ander geval van eenigen wezenlijken dienst zal zijn, dan, wanneer men den grootſten wortel der vergelijking zoekt, en 'er in de nabijheid van dien wortel geene andere gelegen zijn. (Zoo zal men, bij voorbeeld, ſpoedig ſlagen, wanneer men de vergelijking $x^3 - 43x^2 + 122x - 81 = 0$, door deze leerwijze oplost.) Nog komt 'er bij deze handelwijze eene zwarigheid, welker gewigt en invloed echter *à priori* kan beoordeeld worden; wanneer namelijk de vergelijking een ſtelſel van twee onbeſtaanbare wortels, $p + q\sqrt{-1}$ en $p - q\sqrt{-1}$, heeft, welker beſtaanbaar deel p grooter dan de grootſte wortel is, in welk geval deze leerwijze den grootſten wortel niet doet kennen.

§. 828. †† *Wanneer wij* $\frac{A + Bz + Cz^2 + Dz^3}{1 + az + bz^2 + cz^3 + dz^4} = P + Qz + Rz^2 + Sz^3 + Tz^4 + Uz^5 + \textit{enz. en voorts } \frac{-Dz^3 - Cz^2 - Bz - A}{dz^4 + cz^3 + bz^2 + az + 1} =$

$=qz^{-1}+rz^{-2}+sz^{-3}+tz^{-4}+uz^{-5}+$ *enz. ſtellen; dan zal de reeks:* . . . . . *enz.* $+uz^{-5}+tz^{-4}+sz^{-3}+rz^{-2}+qz^{-1}+P+Qz+Rz^2+Sz^3+Tz^4+Uz^5+$ *enz.* . . . *eene onafgebrokene wederkeerige reeks zijn, welke, voor- en achterwaards, tot in het oneindige voortloopt, en welker betrekkings ſchaal* $+d$, $+c$, $+b$, $+a$, $+1$ *is.*

De betrekkings ſchaal van $P+Qz+Rz^2+$ *enz.* is $+d$, $+c$, $+b$, $+a$, $+1$; en die van $qz^{-1}+rz^{-2}$ is dezelfde; maar in eene omgekeerde orde; wanneer men derhalve de termen van de laatſte reeks in eene omgekeerde orde achterwaards uitſchrijft, en aan die van de eerſte reeks vereënigt; dan zal in de reeks

$$uz^{-5}+tz^{-4}+sz^{-3}+rz^{-2}+qz^{-1}+P+Qz+Rz^2+Sz^3+Tz^4+Uz^5+\text{enz.}$$

van den term uz^{-5}, voorwaards, tot aan qz^{-1}, en van den term P voorwaards dezelfde wet beſtaan. Om nu te betoogen, dat ook dezelfde wet van tz^{-4} tot Sz^3 ſtand houdt, zoo vermenigvuldige men beide vergelijkingen met den noemer der breuk, en ſtelle dezelfde magten van z aan elkander gelijk: dan heeft men:

1° $A=P$	6° $0=D+dq$
2° $B=Q+aP$	7° $0=C+dr+cq$
3° $C=R+aQ+bP$	8° $0=B+ds+cr+bq$
4° $D=S+aR+bQ+cP$	9° $0=A+dt+cs+br+aq$
5° $0=T+aS+bR+cQ+dP$	10° $0=du+ct+bs+ar+q$

Men ſtelle nu in de vergelijkingen 9, 8, 7 en 6, voor A, B, C en D, de waarden, welke de 1, 2, 3 en 4, der vergelijkingen daar voor geven; dan verkrijgt men:

1° $dt+cs+br+aq+P=0$; 2° $ds+cr+bq+aP+Q=0$

3° $dr+cq+bP+aQ+R=0$; 4° $dq+cP+bQ+aR+S=0$

welke vergelijkingen doen zien: dat dezelfde wet van den term tz^{-4} tot den term Sz^3, onafgebroken voortgaat, en dat gevolgelijk het geſtelde waarheid is.

§. 829. †† Wanneer men derhalve de breuk, welke eene wederkeerige reeks voortbrengt, negatief ſtelt, en in eene omgekeerde orde ontwikkelt, zal men de terugwaards gaande termen der wederkeerige reeks verkrijgen. Men ſchijnt deze merkwaardige eigenſchap, welker gevolgen wij thans niet verder ontwikkelen kunnen, tot nog toe niet opgemerkt te hebben.

ACHT-

ACHT- EN- ZESTIGSTE LES.

Bijzondere beschouwing van de sommen van de magten der natuurlijke getallen, en over de Bernouilliaansche coefficienten.

§. 830. Alhoewel de regel tot het vinden van de som eener rekenkunstige reeks toereikend is, om de sommen van de magten der natuurlijke getallen te bepalen, blijft 'er nogtans eenige duisterheid, aangaande de betrekking, welke 'er tusschen de sommen dezer getallen bestaat. Deze duisterheid verdwijnt, wanneer men deze sommen uit het Binomium van NEWTON afleidt (119): men leert als dan eene reeks van breuken kennen, welke, hoezeer zij geenen geregelden voortgang schijnen te hebben, nogtans eene onveranderlijke wet volgen, en, wegens het bijzonder voordeel, dat zij aanbrengen, door de benaming van *Bernouilliaansche coefficienten*, onderscheiden worden.

§. 831. Wij zullen dan de som $1^n + 2^n + 3^n + enz. + x^n$ onafhankelijk van de leer der Rekenkunstige reeksen trachten te bepalen. * Wij verstaan door $S.x^n$ de som van de n^{de} magten der natuurlijke getallen, van en met één, tot x ingesloten.

Volgens het Binomium van NEWTON, is

$$(x+1)^{n+1} = x^{n+1} + (n\overset{1}{+}1)x^n + (n\overset{2}{+}1)x^{n-1} + (n\overset{3}{+}1)x^{n-2} + enz. + (n\overset{2}{+}1)x^2 + (n\overset{1}{+}1)x + 1$$

Wanneer wij in deze vergelijking voor x achtervolgens alle waarden van 1 af tot x ingesloten stellen; dan verkrijgen wij de volgende vergelijkingen:

$$2^{n+1} = 1^{n+1} + (n\overset{1}{+}1)1^n + (n\overset{2}{+}1)1^{n-1} + enz. + (n\overset{1}{+}1)1 + 1$$

$$3^{n+1} = 2^{n+1} + (n\overset{1}{+}1)2^n + (n\overset{2}{+}1)2^{n-1} + enz. + (n\overset{1}{+}1)2 + 1$$

$$4^{n+1} = 3^{n+1} + (n\overset{1}{+}1)3^n + (n\overset{2}{+}1)3^{n-1} + enz. + (n\overset{1}{+}1)3 + 1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(x+1)^{n+1} = x^{n+1} + (n\overset{1}{+}1)x^n + (n\overset{2}{+}1)x^{n-1} + enz. + (n\overset{1}{+}1)x + 1$$

Wan-

(119) SIMPSON, en, op zijn voetspoor, andere Schrijvers, nemen voor deze sommen eene functie van het getal der termen aan, en bepalen dezelve vervolgens door de leerwijze der onbepaalde coefficienten: doch wij hebben, *à priori*, geenen grond voor deze onderstelling kunnen vinden, noch de redenen, die men van die onderstelling gegeven heeft, onder de klaarblijkelijke waarheden aannemen.

Wanneer men nu deze vergelijkingen optelt; dan is de ſom van de voorſte leden klaarblijkelijk gelijk aan $(x+1)^{n+1}+S.x^{n+1}-1$; de ſom van de termen van de eerſte kolom der achterſte leden is $S.x^{n+1}$; deze term kan nu uit beide leden worden weggenomen, en dan heeft men:

$$(x+1)^{n+1}-(x+1)= \ldots\ldots\ldots$$
$$\overset{1}{(n+1)}.S.x^n+\overset{2}{(n+1)}.S.x^{n-1}+\overset{3}{(n+1)}S.x^{n-2}+\overset{4}{(n+1)}S.x^{n-3}$$
$$+\mathit{enz.}+\overset{2}{(n+1)}S.x^2+\overset{1}{(n+1)}S.x \quad \ldots\ldots\ldots \quad (A)$$

§. 832. Men kan uit deze uitdrukking $S.x^n$ afzonderen, en dan zal

$$S.x^n=\frac{(x+1)^{n+1}-(x+1)}{n+1}-\left\{\overset{2}{(n+1)}S.x^{n-1}-\overset{3}{(n+1)}S.x^{n-2}\right.$$
$$\left.-\mathit{enz.}\right\}:(n+1)$$

zijn, en deze vergelijking zal dienen, om de ſommen der hoogere magten te vinden, wanneer die der lagere bekend zijn.

§. 833. Stellen wij, bij voorbeeld, $n=1$; dan is $\overset{2}{(n+1)}=\overset{2}{(2)}=0$, $\overset{3}{(n+1)}=0$, *enz.*; en $S.x=\frac{1}{2}(x+1)^2-\frac{1}{2}(x+1)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x$, gelijk bekend is. Stelt men $S.x$ bekend; dan zal men, $n=2$ ſtellende, $S.x^2$ vinden, enz.

§. 834. Maar, zonder ons verder met het berekenen dezer afzonderlijke ſommen optehouden, zullen wij ons bij den algemeenen vorm bepalen. Wij hebben wederom naar het Binomium:

$$(x-1)^{n+1}=x^{n+1}-\overset{1}{(n+1)}x^n+\overset{2}{(n+1)}x^{n-1}-\mathit{enz.}\pm\ldots$$
$$\overset{2}{(n+1)}x^2\mp\overset{1}{(n+1)}x\pm 1$$

Stelt men, in deze nieuwe vergelijking, voor x achtervolgens 1, 2, 3, *enz.* tot x, en neemt men de ſom der vergelijkingen, welke daaruit ontſtaan; dan zal, aangezien de ſom van de voorſte leden klaarblijkelijk $1^{n+1}+2^{n+1}+\mathit{enz.}+(x-1)^{n+1}$ is,

$$S.(x-1)^{n+1}=S.x^{n+1}-\overset{1}{(n+1)}S.x^n+\overset{2}{(n+1)}S.x^{n-1}-$$
$$\mathit{enz.}\pm\overset{2}{(n+1)}S.x^2\mp\overset{1}{(n+1)}S.x\pm x$$

zijn: nu is $S.(x-1)^{n+1}-S.x^{n+1}$ ontegenzeggelijk gelijk $-x^{n+1}$; gevolgelijk is:

$$x^{n+1}\pm x=\overset{1}{(n+1)}.S.x^n-\overset{2}{(n+1)}S.x^{n-1}+\overset{3}{(n+1)}S.x^{n-2}-$$
$$\mathit{enz.}\mp\overset{2}{(n+1)}S.x^2\pm\overset{1}{(n+1)}S.x \quad \ldots\ldots\ldots \quad (B)$$

In

In deze uitdrukking moet het bovenste teeken genomen worden, wanneer n oneven is; het benedenste voor eene evene waarde van n.

§. 835. Onderstellen wij nu voor n eene onevene waarde, en tellen wij alsdan de vergelijking (B) bij de vergelijking (A); dan zullen wij verkrijgen:

$$(x+1)^{n+1}+x^{n+1}-1=2.(n\overset{1}{+}1)\,S.x^n+2(n\overset{3}{+}1)\,S.x^{n-2}+$$
$$2(n\overset{5}{+}1)\,S.x^{n-4}+2(n\overset{7}{+}1)\,S.x^{n-6}+enz.+2(n\overset{3}{+}1)\,S.x^3+$$
$$2(n\overset{1}{+}1)\,S.x \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; (C)$$

en voor n eene evene waarde onderstellende, zal men (B) bij (A) optellende, verkrijgen:

$$(x+1)^{n+1}+x^{n+1}-2x-1=2(n\overset{1}{+}1)\,S.x^n+2(n\overset{3}{+}1)\,S.x^{n-2}$$
$$+2(n\overset{5}{+}1)\,S.x^{n-4}+2(n\overset{7}{+}1)\,S.x^{n-6}+enz.+2(n\overset{4}{+}1)\ldots$$
$$S.x^4+2(n\overset{2}{+}1)\,S.x^2 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; (D)$$

§. 836. De vergelijking (C) geeft, wanneer men n achtervolgens 1, 3, 5, 7, *enz.* stelt;

$$S.x = \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}x$$
$$S.x^3 = \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{2}x^3 + \tfrac{3}{12}x^2$$
$$S.x^5 = \tfrac{1}{6}x^6 + \tfrac{1}{2}x^5 + \tfrac{5}{12}x^4 - \tfrac{1}{12}x^2$$
$$S.x^7 = \tfrac{1}{8}x^8 + \tfrac{1}{2}x^7 + \tfrac{7}{12}x^6 - \tfrac{7}{24}x^4 + \tfrac{1}{12}x^2$$
$$S.x^9 = \tfrac{1}{10}x^{10} + \tfrac{1}{2}x^9 + \tfrac{9}{12}x^8 - \tfrac{7}{10}x^6 + \tfrac{1}{2}x^4 - \tfrac{3}{20}x^2$$

En de vergelijking (D) zal, wanneer n achtervolgens 2, 4, 6, *enz.* genomen wordt, geven:

$$S.x^2 = \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x$$
$$S.x^4 = \tfrac{1}{5}x^5 + \tfrac{1}{2}x^4 + \tfrac{2}{6}x^3 - \tfrac{1}{30}x$$
$$S.x^6 = \tfrac{1}{7}x^7 + \tfrac{1}{2}x^6 + \tfrac{3}{6}x^5 - \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{30}x$$
$$S.x^8 = \tfrac{1}{9}x^9 + \tfrac{1}{2}x^8 + \tfrac{4}{6}x^7 - \tfrac{7}{15}x^5 + \tfrac{2}{9}x^3 - \tfrac{1}{30}x$$
$$S.x^{10} = \tfrac{1}{11}x^{11} + \tfrac{1}{2}x^{10} + \tfrac{5}{6}x^9 - x^7 + x^5 - \tfrac{1}{2}x^3 + \tfrac{5}{66}x$$

§. 837. De coefficienten van de termen dezer vergelijkingen schijnen geene bepaalde wet te volgen: evenwel moeten zij aan zulk eene wet onderworpen zijn. Laat ons, om dezelve te vinden, de vergelijkingen (C) en (D), of liever de magt $(x+1)^{n+1}$, die in dezelve voorkomt, nader ontwikkelen: dan zullen wij, voor eene onevene waarde van n, verkrijgen:

$$2x^{n+1}+(n\overset{1}{+}1)\,x^n+(n\overset{2}{+}1)\,x^{n-1}+(n\overset{3}{+}1)\,x^{n-2}+enz.+$$
$$(n\overset{2}{+}1)\,x^2$$

$$(n\overset{2}{+}1)x^2 + (n\overset{1}{+}1)x = 2(n\overset{1}{+}1).\,S.\,x^n + 2(n\overset{3}{+}1)\,S.\,x^{n-2}$$
$$+ 2(n\overset{5}{+}1)\,S.\,x^{n-4} + enz. + 2(n\overset{3}{+}1)\,S.\,x^3 + 2(n\overset{1}{+}1)\,S.\,x$$

en voor eene evene waarde van n:

$$2x^{n+1} + (n\overset{1}{+}1)x^n + (n\overset{2}{+}1)x^{n-1} + (n\overset{3}{+}1)x^{n-2} + enz. +$$
$$(n\overset{2}{+}1)x^2 + [(n\overset{1}{+}1) - 2]x = 2(n\overset{1}{+}1)\,S.\,x^n + 2(n\overset{3}{+}1)$$
$$S.\,x^{n-2} + 2(n\overset{5}{+}1)\,S.\,x^{n-4} + enz. + 2(n\overset{4}{+}1)\,S.\,x^4 + \ldots$$
$$2(n\overset{2}{+}1)\,S.\,x^2$$

§. 838. Uit de aandachtige beſchouwing dezer vergelijking blijkt het: 1° dat de termen x^{n+1}, x^n, x^{n-1}, *enz.* met coefficienten aangedaan, in de waarde van S. x^n moeten voorkomen; 2° dat S. x^n van den vorm $a x^{n+1} + b x^n + c x^{n-1} + d x^{n-3} + e x^{n-5}$ $f x^{n-7} + g x^{n-9}$ *enz.* zijn moet; omdat de magten x^{n-2}, x^{n-4}, *enz.*, welke in het voorſte lid van de vergelijking voorkomen, als coefficienten hebbende, welke in het tweede lid niet gevonden worden, tegen de afzonderlijke termen, welke bij de ontwikkeling van S. x^{n-1}, S. x^{n-2}, *enz.* in het tweede lid ontſtaan, noodzakelijk zullen moeten verdwijnen. (Zie noot 120 op de volgende bladzijde.)

§. 839. Men ſtelle dan, als volgt:

$$S.\,x_n \;= a x^{n+1} + b x^n + c x^{n-1} + d x^{n-3} + e x^{n-5} + f x^{n-7} + enz.$$
$$S.\,x^{n-2} = a' x^{n-1} + b' x^{n-2} + c' x^{n-3} + d' x^{n-5} + e' x^{n-7} + enz.$$
$$S.\,x^{n-4} = a'' x^{n-3} + b'' x^{n-4} + c'' x^{n-5} + d'' x^{n-7} + e'' x^{n-9} + enz.$$

enz.; dan is het klaar: dat a, b, c, *enz.* even zulke functien van n, als a', b', c', *enz.* van $n - 2$, als a'', b'', *enz.* van $n - 4$ moeten zijn: men ſtelle dan deze vergelijkingen in de voorgaande; dan zal men verkrijgen:

$$2x^{n+1} + (n\overset{1}{+}1)x^n + (n\overset{2}{+}1)x^{n-1} + (n\overset{4}{+}1)x^{n-3} + (n\overset{6}{+}1)x^{n-5} + enz. =$$
$$2(n\overset{1}{+}1)a x^{n+1} + 2(n\overset{1}{+}1)b x^n + \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ 2(n\overset{1}{+}1)c x^{n-1} + 2(n\overset{1}{+}1)d x^{n-3} + 2(n\overset{1}{+}1)e x^{n-5} + enz.$$
$$+ 2(n\overset{3}{+}1)a' x^{n-1} + 2(n\overset{3}{+}1)c' x^{n-3} + 2(n\overset{3}{+}1)d' x^{n-5} + enz.$$
$$+ 2(n\overset{5}{+}1)a'' x^{n-3} + 2(n\overset{5}{+}1)c'' x^{n-5} + enz.$$
$$+ 2(n\overset{7}{+}1)a''' x^{n-5} + enz.$$

en,

en, wanneer men nu de coefficienten van dezelfde magten van x aan elkander gelijk ſtelt; dan zal men hebben (120):

1° $2(n\overset{1}{+}1)a = 2$; derhalve $a = \frac{1}{n+1}$, en, omdat a', a'', enz. even zulke functien van $n-2$, $n-4$, enz. zijn als a eene functie van n is, zal men hebben:

$$a' = \frac{1}{n-1};\ a'' = \frac{1}{n-3};\ a''' = \frac{1}{n-5};\ a'''' = \frac{1}{n-7};\ \text{enz.}$$

2° Is $(n\overset{1}{+}1) = 2(n\overset{1}{+}1)b$; dnrhalve $b = \frac{1}{2}$, en, deze coefficient van n geheel onafhankelijk zijnde, is ook: $b' = b'' = b''' =$ enz. $= \frac{1}{2}$.

3° Is $(n\overset{2}{+}1) = 2(n\overset{1}{+}1)c + 2(n\overset{3}{+}1)a'$; derhalve is:

$2(n\overset{1}{+}1)c = (n\overset{2}{+}1) - 2(n\overset{3}{+}1) \times a'$, en omdat $a' = \frac{1}{n-1}$ is

$$2(n\overset{1}{+}1)c = (n\overset{2}{+}1) - 2 \cdot \frac{(n+1)\,n\,(n-1)}{1.\ \ 2.\ \ 3} \times \frac{1}{n-1}$$

of $2(n\overset{1}{+}1)c = (n\overset{2}{+}1) - \frac{2}{3}(n\overset{2}{+}1) = \frac{1}{3}(n\overset{2}{+}1)$

derhalve is $c = \frac{(n\overset{2}{+}1)}{n+1} \times \frac{1}{6}$, en voorts $c' = \frac{(n\overset{2}{-}1)}{n-1} \times \frac{1}{6}$; . . . .

$$c'' = \frac{(n\overset{2}{-}3)}{n-3} \times \frac{1}{6}\ \text{enz.}$$

4° Verder is $(n\overset{4}{+}1) = 2(n\overset{1}{+}1)d + 2(n\overset{3}{+}1)c' + 2(n\overset{5}{+}1)a''$;

derhalve $2(n\overset{1}{+}1)d = (n\overset{4}{+}1) - 2(n\overset{3}{+}1)c' - 2(n\overset{5}{+}1)a'' \ldots (\alpha)$

maar nu is $c' = \frac{(n-1)(n-2)}{1.\ \ 2} \times \frac{1}{n-1} \times \frac{1}{6} = \frac{n-2}{2} \times \frac{1}{6}$, . . .

en $a'' = \frac{1}{n-3}$;

derhalve $2(n\overset{3}{+}1)c' = 2 \cdot \frac{(n+1)\,n\,(n-1)}{1.\ \ 2.\ \ 3} \times \frac{(n-1)(n-2)}{2(n-1)} \times \frac{1}{6}$

$= (n\overset{4}{+}1) \times \frac{2}{3}$

2

(120) Wanneer dit gezegde den Lezer te duister mogt voorkomen, dan kan hij alle de magten van x in de volgende berekening, welke 'er de waarheid van bevestigen zal, aannemen. Ook moet hij de vergelijking van §. 839. verder uitſchrijven, om het vervolg beter te verſtaan.

$$2(n\overset{5}{+}1)a'' = 2.\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5} \times \frac{1}{n-3} = \tfrac{2}{5}(n\overset{4}{+}1)$$

brengende nu deze waarden van $2(n\overset{3}{+}1)c'$ en $2(n\overset{5}{+}1)a''$ in de vergelijking (α), dan zal men hebben:

$$2(n\overset{1}{+}1)d = (1-\tfrac{2}{3}-\tfrac{2}{5}) \times (n\overset{4}{+}1) = -\tfrac{1}{15}(n\overset{4}{+}1)$$

$$\text{en } d = -\tfrac{1}{30}.\frac{(n\overset{4}{+}1)}{(n+1)};\ d' = -\tfrac{1}{30}.\frac{(n\overset{4}{-}1)}{(n-1)};\ \textit{enz.}$$

en gaat men op deze wijze voort, met de coefficienten van dezelfde magten van x aan elkander gelijk te stellen; dan zal men vinden:

$$e = +\frac{(n\overset{6}{+}1)}{(n+1)} \times \tfrac{1}{42};\ f = -\frac{(n\overset{8}{+}1)}{n+1} \times \tfrac{1}{30};\ g = +\frac{(n\overset{10}{+}1)}{n+1} \times \tfrac{5}{66}\ \textit{enz.}$$

§. 840. Stellen wij nu de standvastige coefficienten, welke in de waarden van c, d, e, f, g, *enz.* voorkomen, als volgt: $\frac{1}{6} = A$; . . $\frac{1}{30} = B$; $\frac{1}{42} = C$; $\frac{1}{30} = D$; $\frac{5}{66} = E$; en de volgende, welke nog niet berekend zijn: F, G, H, I, K, enz.: dan zullen wij voor de som van de n^{de} magten der natuurlijke getallen de uitdrukking:

$$S.x^n = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + \tfrac{1}{2}x^n + \frac{(n\overset{2}{+}1)}{n+1}A\,x^{n-1} - \frac{(n\overset{4}{+}1)}{n+1}B\,x^{n-3}$$
$$+ \frac{(n\overset{6}{+}1)}{n+1}C\,x^{n-5} - \frac{(n\overset{8}{+}1)}{n+1}D\,x^{n-7} + \frac{(n\overset{10}{+}1)}{n+1}E\,x^{n-9} -$$
$$\textit{enz.} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (E)$$

verkrijgen, in welke, na den derden term, de teekens + en — beurtelings afwisselen.

§. 841. * De coefficienten A, B, C, D, *enz.* worden, naar deszelfs uitvinder, JACOB BERNOUILLI, *Bernouilliaansche coefficienten* genoemd: het zijn (zoo als blijkt, wanneer men in de algemeene vergelijking (E) n achtervolgens gelijk 2, 4, 6, enz. stelt,) de coefficienten, welke, in de waarden van de sommen der evene magten, de eerste magt van x verkrijgt.

§. 842. Alles is nu in de uitdrukking (E) regelmatig, op de wet van de *Bernouilliaansche coefficienten* na, welker voortgang nog nader moet bepaald worden. Stelt men, om deze wet te vinden, in vergelijking (E), $x = 1$; dan is $S.x^n = 1$, en men verkrijgt, na alles met $n+1$ of $(n\overset{1}{+}1)$ vermenigvuldigd te hebben:

$$\overset{1}{(n+1)} = 1 + \tfrac{1}{2}\overset{0}{(n+1)} + \overset{2}{(n+1)}A - \overset{4}{(n+1)}B + \overset{6}{(n+1)}C -$$
$$\overset{8}{(n+1)}D + \overset{10}{(n+1)}E \pm \overset{5}{(n+1)}N_{-2} \mp \overset{3}{(n+1)}N_{-1} \pm \ldots$$
$$\overset{1}{(n+1)}N,$$

of wel:

$$\overset{1}{(n+1)}N = \overset{3}{(n+1)}N_{-1} - \overset{5}{(n+1)}N_{-2} + \overset{7}{(n+1)}N_{-3} - \ldots$$
$$\overset{9}{(n+1)}N_{-4} \ldots\ldots enz. \pm \overset{6}{(n+1)}C \mp \overset{4}{(n+1)}B \pm \overset{2}{(n+1)}A \mp$$
$$\tfrac{1}{2}(n-1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (F)$$

in welke de letters N, N_{-1}, N_{-2}, *enz.* de n^{de}, $(n-1)^e$, $(n-2)^e$, $(n-3)^e$, Bernouilliaanſche coefficienten beteekenen. Men zal, door deze vergelijking, welke CANTERZANI in de *Memorie della Società Italiana*, *Tom.* XI, A° 1804, *pag.* 173, langs eenen anderen weg gevonden heeft, de Bernouilliaanſche coefficienten kunnen berekenen. Men zal door de formule van §. 844 vinden:

$$A = +\frac{1}{6};\ B = +\frac{1}{30};\ C = +\frac{1}{42};\ D = +\frac{1}{30};\ E = +\frac{5}{66};$$
$$F = +\frac{691}{2730};\ G = +\frac{7}{6};\ H = +\frac{3617}{510};\ I = +\frac{43867}{798};$$
$$K = +\frac{174611}{330};\ L = +\frac{854513}{138};\ M = +\frac{236364091}{2730};$$
$$N = +\frac{8553103}{6};\ O = +\frac{23749461029}{870};\ P = +\frac{8615841276005}{14322};$$
$$Q = +\frac{7709321041217}{510};\ R = +\frac{2577687858367}{6};$$
$$S = +\frac{26315271553053477373}{1919190};$$

en men zal dezelve, offchoon de berekening lastig wordt, nogtans verder kunnen voortzetten.

§. 843. †† Met deze Bernouilliaanſche coefficienten, zal men de bijzondere formulen voor de magten der natuurlijke getallen, van de *eerſte* magt af, tot de *zes- en- dertigſte* ingeſloten, door dezelve coefficienten in de vergelijking (E) te ſubſtitueren, kunnen bepalen.

§. 844. Wanneer men de vergelijking (F) onder deze gedaante

$$\overset{1}{(n+1)}N - \overset{3}{(n+1)}N_{-1} + \overset{5}{(n+1)}N_{-2} - \overset{7}{(n+1)}N_{-3} + enz.$$
$$\pm \overset{6}{(n+1)}C \mp \overset{4}{(n+1)}B \pm \overset{2}{(n+1)}A \pm 1 = \tfrac{1}{2}(n+1)$$

 ſtelt,

ſtelt, en n achtervolgens gelijk 2, 4, 6, 8, *enz.* neemt; dan zal men vinden:

$$3A+1=+3:2$$

$$5B-\frac{5.4.3}{1.2.3}A-1=-5:2$$

$$7C-\frac{7.6.5}{1.2.3}B+\frac{7.6.5.4.3}{1.2.3.4.5}A+1=+7:2$$

enz. *enz.*

Men ſtelle nu $A=1.2.p$; $B=1.2.3.4.q$; $C=1.2.3.4.5.6.r$; $D=1.2.3.4.5.6.7.8.s$; *enz.*; en brenge deze aangenomene waarden voor de Bernouilliaanſche coefficienten in de voorgaande vergelijkingen over; dan zal men vinden:

$$p+\frac{1}{1.2.3}=\tfrac{1}{2}.\frac{1}{1.2}$$

$$q-\frac{p}{1.2.3}-\frac{1}{1\ldots5}=-\tfrac{1}{2}.\frac{1}{1\ldots4}$$

$$r-\frac{q}{1.2.3}+\frac{p}{1\ldots5}+\frac{1}{1\ldots7}=+\tfrac{1}{2}.\frac{1}{1\ldots6}$$

$$s-\frac{r}{1.2.3}+\frac{q}{1\ldots5}-\frac{p}{1\ldots7}-\frac{1}{1\ldots9}=-\tfrac{1}{2}.\frac{1}{1\ldots8}$$

enz. *enz.*

waaruit blijkt: dat de getallen -1, p, q, r, s, t, *enz.* eene wederkeerige reeks uitmaken, welker betrekkings ſchaal $+\frac{1}{1.2.3}$, . . $-\frac{1}{1.2..5}$, $+\frac{1}{1\ldots7}$, $-\frac{1}{1\ldots9}$, *enz.* is. Men zal dan door deze vergelijkingen gemakkelijk p, q, r, *enz.* en voorts de waarden van A, B, C, D, *enz.* vinden.

§. 845. Het is opmerkelijk, dat de betrekkings ſchaal dezer wederkeerende reeks -1, p, q, r, *enz.* de coefficienten zijn van de oneindig voortloopende reeks, welke de Sinus van eenen boog uitdrukt: deze omſtandigheid geeft aanleiding, om de reekſen voor de *Tangens*, *Cotangens* en *Coſecans* van eenen boog van de Bernouilliaanſche coefficienten te doen afhangen. Men zal namelijk vinden:

$$Tang.x=\frac{4(4-1)A}{1.2}x+\frac{4^2(4^2-1)B}{1\ldots4}x^3+\frac{4^3(4^3-1)C}{1\ldots6}x^5+enz.$$

$$Cot.x=\frac{1}{x}-\frac{4A}{1.2}x-\frac{4^2.B}{1\ldots4}x^3-\frac{4^3.C}{1\ldots6}x^5-\frac{4^4.D}{1\ldots8}-enz.$$

$$Coſec.x=\frac{1}{x}+\frac{2(2-1)A}{1.2}x+\frac{2(2^3-1)B}{1\ldots4}x^3+\frac{2(2^5-1)C}{1\ldots6}x^5+enz.$$

§. 846.

§. 846. Ook hangen de Neperiaansche Logarithmen van de Sinus, Cosinus en Tangens van eenen boog van diezelfde coefficienten af.

$$Nep.Log.Sin.x = N.L.x - \frac{4A}{1.2}.\tfrac{1}{2}x^2 - \frac{4^2B}{1...4}.\tfrac{1}{4}x^4 - \frac{4^3C}{1...6}.\tfrac{1}{6}x^6 - enz.$$

$$Nep.Log.Cos.x = -\frac{4(4-1)A}{1.2}.\tfrac{1}{2}x^2 - \frac{4^2(4^2-1)B}{1...4}.\tfrac{1}{4}x^4 - enz.$$

$$Nep.Log.Tang.x = N.L.x + \frac{2^3(2-1)A}{1.2}.\tfrac{1}{2}x^2 + \frac{2^5(2^3-1)B}{1...4}.\tfrac{1}{4}x^4$$
$$+ \frac{2^7(2^5-1).C}{1...6}.\tfrac{1}{6}x^6 + \frac{2^9(2^7-1).D}{1...8}.\tfrac{1}{8}x^8 + enz.$$

Het blijkt uit deze reeksen, aan welker vinding de Lezer zijne kragten beproeven kan, hoe de Bernouilliaansche coefficienten aan de onregelmatigste reeksen eenen regelmatigen vorm kunnen geven.

§. 847. †† De Bernouilliaansche coefficienten geven ook een geschikt hulpmiddel aan de hand, om de sommen van de evene negatieve magten der natuurlijke getallen, welke gedeeltelijk van die coefficienten, en van den omtrek des cirkels afhangen, op eene regelmatige wijze, uittedrukken. De twee onderscheidene uitdrukkingen voor *Sin.* z in §§. 618 en 625. gevonden, geven de vergelijking:

$$\left\{1 - \frac{z^2}{\pi^2}\right\}.\left\{1 - \frac{z^2}{4\pi^2}\right\}.\left\{1 - \frac{z^2}{9\pi^2}\right\}.\left\{1 - \frac{z^2}{16\pi^2}\right\}.enz. =$$
$$1 - \frac{z^2}{1.2.3} + \frac{z^4}{1.2.3.4.5} - \frac{z^6}{1.2.3.4.5.6.7} + enz.$$

het eerste lid dezer vergelijking bestaat uit een oneindig aantal factoren, en het tweede uit een oneindig aantal termen. Deze vergelijking met de meer algemeene

$$(1-az^2)(1-bz^2)(1-cz^2)\,enz. = 1 - Az^2 + Bz^4 - Cz^6 + enz.$$

vergeleken zijnde, zal $a = 1 : \pi^2$; $b = 1 : 4\pi^2$; $c = 1 : 9\pi^2$; *enz.* en $A = \frac{1}{1.2.3}$; $B = \frac{1}{1...5}$, *enz.* zijn. Noemt men dan S, S_2, S_3, *enz.* de sommen van de eerste, tweede, derde, enz. magten van $1 : \pi^2$; $1 : 4\pi^2$; *enz.* tot in het oneindige; dan zal, volgens het Theorema van GIRARD, zie §. 756.

$$S = A = \frac{2}{1.2} \times \tfrac{1}{6}$$

$$S_2 = AS - 2B = \frac{8}{1.2.3.4} \times \tfrac{1}{30}$$

$$S_3 = AS_2 - BS + 3C = \frac{32}{1.2.3.4.5.6} \times \tfrac{1}{42};\ enz.$$

De

De zaak is duidelijk; maar de berekening wordt op het laatst lastig: wanneer men nogtans dezelve voortzet, en de sommen der eerste, tweede en volgende magten van 1^{-2}, 2^{-2}, 3^{-2}, 4^{-2}, 5^{-2}, *enz.* tot in het oneindige, Σ, Σ_2, Σ_3, Σ_4, *enz.* noemt; dan zal men vinden:

$$\Sigma = \frac{2.A}{1.2}\pi^2;\ \Sigma_2 = \frac{2^3.B}{1.2.3.4}.\pi^4;\ \Sigma_3 = \frac{2^5.C}{1\ldots6}.\pi^6;\ \ldots\ldots$$

$$\Sigma_4 = \frac{2^7.D}{1\ldots8}.\pi^8;\ \Sigma_5 = \frac{2^9.E}{1\ldots10}.\pi^{10};\ \Sigma_6 = \frac{2^{11}.F}{1\ldots12}.\pi^{12};$$

$$\Sigma_7 = \frac{2^{13}.G}{1\ldots14}.\pi^{14};\ \Sigma_8 = \frac{2^{15}.H}{1\ldots16}.\pi^{16};\ enz.$$

De regelmatige voortgang van de waarden dezer sommen, kan, zooveel ons bekend is, alleen door inductie gevonden worden.

§. 848. †† Wanneer men de uitdrukkingen §. 618 en 626, voor de Cosinus gevonden, op dezelfde wijze behandelt, dan zal men voor de sommen van de evene negatieve magten der onevene getallen 1, 3, 5, 7, *enz.* tot in het oneindige, vinden:

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + enz. = \frac{(4-1)A}{1.2} \times \tfrac{1}{2}\pi^2;\ 1 + \frac{1}{3^4} + enz. = \ldots$$

$$\frac{(4^2-1)B}{1\ldots4} \times \tfrac{1}{2}\pi^4;\ 1 + \frac{1}{3^6} + enz. = \frac{(4^3-1)C}{1\ldots6} \times \tfrac{1}{2}\pi^6;\ \ldots$$

$$1 + \frac{1}{3^8} + enz. = \frac{(4^4-1)D}{1\ldots8} \times \tfrac{1}{2}\pi^8;$$

uit al hetwelk men vele merkwaardige zaken zal kunnen afleiden.

§. 849. Van het onderwerp dezer Les afstappende, merken wij aan: dat de sommen van de magten der natuurlijke getallen strekken kunnen, om die van vele andere reeksen te vinden. Wanneer men, bij voorbeeld, de termen van de rekenkunstige reeksen van de eerste orde

$$a,\ a+b,\ a+2b,\ a+3b\ \ldots\ldots\ a+(n-1)b$$
$$p,\ p+q,\ p+2q,\ p+3q\ \ldots\ldots\ p+(n-1)q$$

elk uit n termen bestaande, met elkander vermenigvuldigt; dan zal men de reeks van de tweede orde, namelijk:

$$ap,\ ap+(aq+bp)+bq,\ ap+2(aq+bp)+4bq,\ \ldots\ enz.$$
$$\ldots\ldots\ ap+(n-1)(aq+bp)+(n-1)^2\,bq$$

verkrijgen. De som van de termen dezer reeks zal klaarblijkelijk gelijk zijn aan:

$$n \times ap + [1+2+3+enz.+(n-1)] \times (aq+bp) + \ldots$$
$$[1+4+9+16+25+enz.+(n-1)^2] \times bq$$

Nu is $1+2+3+enz.+(n-1) = \tfrac{1}{2}n(n-1)$; en $1+4+9+$

16

$16 + 25 +$ *enz.* $+ (n-1)^2 = \frac{1}{6} n (n-1)(2n-1)$, zie §. 787; gevolgelijk is, wanneer men de fom gelijk aan S ftelt,

$$S = nap + \tfrac{1}{2} n (n-1) \times [aq + bp] + \tfrac{1}{6} n (n-1)(2n-1) \times bq$$

§. 850. Laat $p = 1$; $b = 1$; $q = 1$ zijn; dan verandert de gevondene formule in:

$$S = \tfrac{1}{2} n (n+1) a + \tfrac{1}{3} (n-1) n (n+1)$$

Wij gaan vele andere bijzonderheden, welke zich, bij het nadenken over deze ftof, van zelve vertoonen, met ftilzwijgen voorbij (121).

NEGEN- EN- ZESTIGSTE LES.

Iets over de Interpolatie der reekfen.

§. 851. Het Leerftelfel der rekenkunftige reekfen, in de LXVI Les verklaard, ftaat met de interpolatie van alle foorten van reekfen in zulk een onaffcheidelijk verband, dat wij nuttig geoordeeld hebben, om, als eene bijlage op deze Les, den aard en het gebruik der interpolatie nader te verklaren.

§. 852. †† Offchoon niet alle reekfen rekenkunftig zijn, kan men nogtans een onnoemelijk aantal anderen, welker eerfte, tweede en volgende verfchillen op het laatst zoo klein worden, dat zij, zonder aanmerkelijk van de waarheid aftewijken, verwaarloosd kunnen worden, als zoodanig aanmerken, en in dit geval bevinden zich zeer vele reekfen, welke de verfchillende waarden van eenige functie van eene veranderlijke grootheid x voorftellen, wanneer men in plaats van die veranderlijke grootheid, waardijen ftelt, welke in eene gewone

(121) In de krijgsmagazijnen ftapelt men de kogels, behalve, in eene driehoekige pyramide, ook in eene vierhoekige pyramide, en fomtijds in regthoekige lagen, welker zijden, van de grondlaag af, tot aan de bovenfte, welke flechts uit eene enkelde rij kogels beftaat, met één verminderen. Men berekent het aantal kogels, in zulk eenen ftapel, door deze formule, in welke a het aantal kogels in de bovenfte rij, en n het getal lagen beteekent. Laat $a = 20$ zijn; dan liggen 'er in de tweede, laag van boven, 21×2; in de derde, 22×3. *enz.*; indien 'er dan 10 lagen zijn; zal deze ftapel $\frac{1}{2} . 10 \times 11 \times 20 + \frac{1}{3} . 9 . 10 . 11 = 1430$ kogels bevatten. De formule $\frac{1}{6} n (n+1)(2n+1)$ van §. 787. dient voor het berekenen van het aantal kogels in de vierhoekige pyramidale kogelftapel: de letter n beteekent hier het getal lagen, en tevens het aantal kogels in elke zijde van de bafis. Vergelijk noot (85) *pag.* 332.

ne rekenkunſtige reeks opklimmen of afdalen: wanneer men nu van zulk eene reeks zoo vele van elkander gelijk afſtaande termen kent, als noodig is, om de eerſte termen van de eerſte, tweede en volgende verſchillen zoo verre te vinden, tot de laatſte nagenoeg gelijk of gelijk nul worden, zal men tusſchen deze termen, naar de formule van §. 780 en 781, zoo vele termen kunnen interpoleren als men goedvindt, en deze zullen altijd, in het werkdadige, nagenoeg, immers voor zooveel de gegevene termen aangaat, de waarde der geïnterpoleerde termen geven.

§. 853. Deze aanmerking is van belang bij het gebruik der wiskundige tafels en ſterrekundige Almanaken: in de laatſte worden de afwijkingen en regte klimmingen, breedte en lengte der Maan en andere Planeten voor gelijke tijds afſtanden gegeven: en daar deze grootheden zijn, welke in den ſtrikſten zin genomen, hoewel zij van zeer vele verſchillende zaken afhangen, als eene funétie van die tijden kunnen aangemerkt worden, zullen diezelfde afwijkingen, enz. voor andere tijden, dan in den Almanak voorkomen, door interpolatie, zoo naauwkeurig kunnen gevonden worden, als voor het werkdadige noodig is.

§. 854. VOORBEELD. *Volgens de Connaisſance des tems voor 1809, is de Maans noordelijke afwijking, voor den middags-cirkel van Parijs, op den 1 September, als volgt:*

			a	b	c
Op den 1 Sept. midd. of	0 uren	17° 43′			
———————	6 uren	18° 3′	0° 20′		
———————	12 uren	18° 19′	0° 16′	— 4′	
———————	18 uren	18° 33′	0 14′	— 2′	+ 2′

men vraagt: de maans afwijking ten 4 uren 30 minuten te vinden?

Men make, gelijk in de opgave reeds gedaan is, de eerſte, tweede en derde verſchillen, welke, zoo als men ziet, nagenoeg gelijk worden. Nu is in de vergelijking:

$$y = A + \overset{1}{\left(\frac{q}{r}\right)} a + \overset{2}{\left(\frac{q}{r}\right)} b + \overset{3}{\left(\frac{q}{r}\right)} c$$

$A = 17° 43'$; $a = 20'$; $b = -4'$ en $c = +2'$: voorts is r gelijk 6 uren, en $q = 4\frac{1}{2}$; derhalve $q:r = \frac{3}{4}$ en

$$y = 17° 43' + \tfrac{3}{4} \times 20' + \tfrac{3}{32} \times 4 + \tfrac{5}{128} \times 2 = 17° 58' 24'',4$$

en de Maans noordelijke afwijking is gevolgelijk ten 4 uren 30 minuten te Parijs gelijk $17° 58' 24'', 4$.

§. 855. Men zal, gelijk in het bijgebragte voorbeeld, de waarden van eene veranderlijke grootheid, welke door berekening, of door waarneneming gegeven zijn, altijd nagenoeg kunnen interpoleren; mits deze bekende waarden op gelijke afſtanden geplaatst zijn, en derzelver volgorde van verſchillen ſteeds kleiner en bijna gelijk wordt. Maar de interpolatie is van eene meer uitgeſtrekte nuttigheid, wanneer men tafels zal zamenſtellen; alsdan zijn de eerſte en volgende verſchillen niet gegeven, maar moeten, langs eenen anderen weg, gevonden worden, waarvan wij hier ter plaatſe de beginſelen zullen opgeven.

§. 856. †† Alle wiskundige tafels kunnen aangemerkt worden, als bevattende de waarden eener veranderlijke grootheid, die eene funƈtie van eene andere veranderlijke grootheid x is, en welke met de waarden der grootheid, waarvan zij funƈtie is, in eene gewone rekenkunſtige reeks genomen, overëenſtemmen. Deze aanmerking breugt ons tot het leerſtuk der verſchillen, hetwelk daarmede, en met de rekenkunſtige reekſen, in een onafſcheidelijk verband ſtaat.

§. 857. Laat y eene funƈtie van x zijn. Stellen wij in dezelve voor x achtervolgens x, $x+i$, $x+2i$, $x+3i$, $x+4i$, *enz.*, en laten y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, *enz.*, de waarden zijn, welke deze funƈtie, in deze op elkander volgende onderſtellingen, verkrijgt; dan zal men de eerſte, tweede en volgende verſchillen van de reeks y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, *enz.* maken, en op dezelve alles toepasſen kunnen, wat wij in de LXVI *Les* van de rekenkunſtige reeks A, B, C, D, E, *enz.* opgegeven en betoogd hebben. Laat nu de letter Δ, in het algemeen, het eerſte verſchil van de grootheid, waar voor zij geplaatst is, beteekenen, Δ^2 het tweede, Δ^3 het derde, Δ^n het n^{de} verſchil, enz. en laat verder

$$\begin{array}{l|l|l}
y_1 - y_0 = \Delta y_0 & \Delta y_1 - \Delta y_0 = \Delta^2 y_0 & \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 = \Delta^3 y_0 \\
y_2 - y_1 = \Delta y_1 & \Delta y_2 - \Delta y_1 = \Delta^2 y_1 & \Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1 = \Delta^3 y_1 \\
y_3 - y_2 = \Delta y_2 & \Delta y_3 - \Delta y_2 = \Delta^2 y_2 & \Delta^2 y_3 - \Delta^2 y_2 = \Delta^3 y_2 \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
y_n - y_{n-1} = \Delta y_{n-1} & \Delta y_n - \Delta y_{n-1} = \Delta^2 y_{n-1} & \Delta^2 y_n - \Delta^2 y_{n-1} = \Delta^3 y_{n-1} \\
\textit{enz.} & \textit{enz.} & \textit{enz.}
\end{array}$$

geſteld worden; dan zal men, uit deze vergelijkingen, door ſlechts de eerſte termen der voorſte leden in het voorſte lid afte zonderen, verkrijgen:

$$\begin{array}{l|l|l}
y_1 = y_0 + \Delta y_0 & & \\
y_2 = y_1 + \Delta y_1 & \Delta y_1 = \Delta y_0 + \Delta^2 y_0 & \\
y_3 = y_2 + \Delta y_2 & \Delta y_2 = \Delta y_1 + \Delta^2 y_1 & \Delta^2 y_1 = \Delta^2 y_0 + \Delta^3 y_0 \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
y_n = y_{n-1} + \Delta y_{n-1} & \Delta y_n = \Delta y_{n-1} + \Delta^2 y_{n-1} & \Delta^2 y_n = \Delta^2 y_{n-1} + \Delta^3 y_{n-1}
\end{array}$$

en

en men zal, door middel van deze laatste vergelijkingen, uitdrukkingen voor y_1, y_2, y_3, y_4, *enz.* vinden, welke alleenlijk van de oorspronkelijke uitdrukking y_0, en derzelver eerste, tweede en volgende verschillen, zullen afhangen, te weten:

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0$$
$$y_2 = y_0 + 2\Delta y_0 + \Delta^2 y_0$$
$$y_3 = y_0 + 3\Delta y_0 + 3\Delta^2 y_0 + \Delta^3 y_0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

en, in het algemeen,

$$y_n = y_0 + \frac{n}{1}\Delta y_0 + \frac{n(n-1)}{1.\ 2}\Delta^2 y_0 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}\Delta^3 y_0 + enz. \ldots\ldots\ldots\ldots (P)$$

welke vergelijking met die van §. 774, alwaar $A = y_0$, $a = \Delta y_0$, $b = \Delta^2 y_0$, *enz.* is, en $p = n$ is, overeënstemt; terwijl uit dezelfde vergelijkingen volgen zal:

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0$$
$$\Delta^2 y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0$$
$$\Delta^3 y_0 = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

en, in het algemeen:

$$\Delta^n . y_0 = y_n - \overset{1}{(n)} y_{n-1} + \overset{2}{(n)} y_{n-2} - \overset{3}{(n)} y_{n-3} + \overset{4}{(n)} y_{n-4} - enz. \ldots (Q)$$

welke wederom met de vergelijking van §. 766. overeënstemt.

§. 858. Wanneer y_0 of de oorspronkelijke functie van x gegeven is, ziet men gemakkelijk: hoe de verschillen der eerste, tweede en volgende orden moeten gevonden worden: de berekening is, in vele gevallen, gemakkelijk, vooral, wanneer deze functie van zamengestelde wortel-uitdrukkingen bevrijd is, en geenen veranderlijken deeler heeft. Stellen wij, bij voorbeeld, $y_0 = x^p$; dan zal, volgens de aangenomene notatie,

$$y_1 = (x+i)^p,\ y_2 = (x+2i)^p,\ y_3 = (x+3i)^p$$
$$\ldots\ldots\ y_n = (x+ni)^p$$

zijn, en, volgens vergelijking (Q), zal men verkrijgen:

$$\Delta^n . x^p = \left\{x + ni\right\}^p - n\left\{x + (n-1)i\right\}^p + \frac{n(n-1)}{1.\ 2} \ldots$$
$$\left\{x + (n-2)i\right\}^p - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3} . \left\{x + (n-3)i\right\}^p +$$
$$enz. \ldots . \pm x^p$$

In deze uitdrukking zullen de p^{de} en volgende magten van i alleen

voor-

voorkomen; de coefficienten der lagere magten van i zullen elkander vernietigen; want, wanneer men de magten $(x+ni)^p$, $(x+(n-i)^p$ *enz.* ontwikkelt, en nadat zij met derzelver coefficienten vermenigvuldigd zijn, onder elkander ſtelt, zoodanig dat dezelfde magten van x met elkander overéénſtemmen, dan zal men deze kolommen optellende, en van het betoogde in §. 519. gebruik makende, vinden:

$$\Delta^n . x^p = \ldots\ldots\ldots$$

$$+\overset{n}{(p)} \times \left\{ n^n - \overset{1}{(n)}.(n-1)^n + \overset{2}{(n)}.(n-2)^n - \overset{3}{(n)}.(n-3)^n + \right.$$

$$\left. \ldots \overset{4}{(n)}.(n-4)^n - \overset{5}{(n)}.(n-5)^n + enz. \right\} \times x^{p-n}\, i^n$$

$$+\overset{n+1}{(p)} \times \left\{ n^{n+1} - \overset{1}{(n)}.(n-1)^{n+1} + \overset{2}{(n)}.(n-2)^{n+1} - \overset{3}{(n)}.(n-3)^{n+1} \right.$$

$$\left. \ldots + \overset{4}{(n)}.(n-4)^{n+1} - \overset{5}{(n)}.(n-5)^{n+1} + enz. \right\} \times x^{p-n-1}\, i^{n+1}$$

$$+\overset{n+2}{(p)} \times \left\{ n^{n+2} - \overset{1}{(n)}.(n-1)^{n+2} + \overset{2}{(n)}.(n-2)^{n+2} - \overset{3}{(n)}.(n-3)^{n+2} \right.$$

$$\left. \ldots + \overset{4}{(n)}.(n-4)^{n+2} - \overset{5}{(n)}.(n-5)^{n+2} + enz. \right\} \times x^{p-n-2}\, i^{n+2}$$

$$+ enz. \ldots\ldots\ldots \quad (R)$$

Hetgeen wij aan des Lezers eigen oefening overlaten.

§. 859. De wet, welke in de termen dezer uitdrukking, die voor alle waarden van p geldt, beſtaat, loopt duidelijk in het oog. Het blijkt uit dezelve: 1° dat het verſchil van de n^{de} orde van x^p, (p en n geheele getallen zijnde,) geene lagere dan de n^{de} magt van i kan inhouden. 2° Dat in deze uitdrukking geene hoogere dan de $(p-n)^{de}$ magt van x kan voorkomen; en 3°, dat de p^{de} verſchillen van x^p van den vorm $a\,i^p$, en ſtandvastig zullen zijn.

§. 860. Men zal nu, door n achtervolgens gelijk 1, 2, 3, 4, 5, *enz.* te ſtellen, de eerſte en volgende verſchillen van x^p kunnen vinden: doch, het is voordeeliger eene tafel voor de waarden der reekſen, welke de coefficienten van i^n, i^{n+1}, *enz.* uitmaken, zamen te ſtellen, te meer daar deze tafel,

	$\overset{0}{(p)}$	$\overset{1}{(p)}$	$\overset{2}{(p)}$	$\overset{3}{(p)}$	$\overset{4}{(p)}$	$\overset{5}{(p)}$	$\overset{6}{(p)}$	$\overset{7}{(p)}$	$\overset{8}{(p)}$	
x^p	1	0	0	0	0	0	0	0	0	*enz.*
$\Delta\ x^p$	0	1	1	1	1	1	1	1	1	*enz.*
$\Delta^2\ x^p$	0	0	2	6	14	30	62	126	254	*enz.*
$\Delta^3\ x^p$	0	0	0	6	36	150	540	1806	5796	*enz.*
$\Delta^4\ x^p$	0	0	0	0	24	240	1560	8400	40824	*enz.*
$\Delta^5\ x^p$	0	0	0	0	0	120	1800	16800	126000	*enz.*
$\Delta^6\ x^p$	0	0	0	0	0	0	720	15120	191520	*enz.*
$\Delta^7\ x^p$	0	0	0	0	0	0	0	5040	141120	*enz.*
$\Delta^8\ x^p$	0	0	0	0	0	0	0	0	40320	*enz.*
enz.		*enz.*				*enz.*		*enz.*		

welker bovenſte ingang de binomial coefficienten van p, en voorſte ingang de verſchillen van x^p bevat, op eene eenvoudige wijze wordt zamengeſteld, door namelijk de naast voorgaande term 36 van zekere rij $\Delta^3\, x^p$ bij den term der voorgaande rij 14, welke 'er ommiddelijk boven ſtaat, op te tellen, en de ſom 50 met het orde getal 3 des verſchils te vermenigvuldigen, waarvan men gemakkelijk het bewijs vinden zal. Deze tafel nu eens zamengeſteld zijnde, zal men vergelijk de uitdrukkingen voor de eerſte, tweede en volgende verſchillen van x^p vinden; want, nu is, volgens deze tafel, en de formule (R):

$$\Delta x^p = \overset{1}{(p)}\, x^{p-1}\, i + \overset{2}{(p)}\, x^{p-2}\, i^2 + \overset{3}{(p)}\, x^{p-3}\, i^3 + \overset{4}{(p)}\, x^{p-4}\, i^4 + \overset{5}{(p)}\, x^{p-5}\, i^5 + \overset{6}{(p)}\, x^{p-6}\, i^6 + \overset{7}{(p)}\, x^{p-7}\, i^7 + enz.$$

$$\Delta^2 x^p = 2\,\overset{2}{(p)}\, x^{p-2}\, i^2 + 6\,\overset{3}{(p)}\, x^{p-3}\, i^3 + 14\,\overset{4}{(p)}\, x^{p-4}\, i^4 + \ldots\, 30\,\overset{5}{(p)}\, x^{p-5}\, i^5 + 62\,\overset{6}{(p)}\, x^{p-6}\, i^6 + 126\,\overset{7}{(p)}\, x^{p-7}\, i^7 + enz.$$

$$\Delta^3 x^p = 6\,\overset{3}{(p)}\, x^{p-3}\, i^3 + 36\,\overset{4}{(p)}\, x^{p-4}\, i^4 + 150\,\overset{5}{(p)}\, x^{p-5}\, i^5 + 540\,\overset{6}{(p)}\, x^{p-6}\, i^6 + 1806\,\overset{7}{(p)}\, x^{p-7}\, i^7 + enz.$$

$$\Delta^4 x^p = 24\,\overset{4}{(p)}\, x^{p-4}\, i^4 + 240\,\overset{5}{(p)}\, x^{p-5}\, i^5 + 1560\,\overset{6}{(p)}\, x^{p-6}\, i^6 + 8400\,\overset{7}{(p)}\, x^{p-7}\, i^7 + enz. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (S)$$

§. 861. Laat, bij voorbeeld, $p = 3$, $x = 1$ en $i = 1$ zijn; dan zal $\overset{1}{(p)} = 3$, $\overset{2}{(p)} = 3$, $\overset{3}{(p)} = 1$, $\overset{4}{(p)} = 0$, *enz.* zijn: voorts is $\Delta\, x^3 = 3\, x^2\, i + 3\, x\, i^2 + i^3 = 7$; $\Delta^2\, x^3 = 2.3\, x\, i^2 + 6\, i^3 = 12$;

Δ^3

$\Delta^3 x^3 = 6i^3 = 6$; $\Delta^4 x^3 = 0$; *enz.*, hetgeen met §. 782, I. C., overeënstemt.

§. 862. Men kan dan, gelijk wij voor x^p gedaan hebben, de eerste, tweede en volgende verschillen van eenige functie ommiddelijk vinden. Hier door wordt men dan in staat gesteld, om, met behulp van de vergelijkingen $y_1 = y_0 + \Delta y_0$, $y_2 = y_0 + 2\Delta y_0 + \Delta^2 y_0$, *enz.* de waarden van y_1, y_2, y_3, *enz.*, dat is, in ons geval, de waarden van $(x+i)^p$, $(x+2i)^p$, $(x+3i)^p$, *enz.*, en, wel (zoo als uit § 774, 775 en 857, genoegzaam blijkt,) door gedurig optellen, te bepalen, en het is deze omstandigheid, welke in de zamenstelling van vele tafelen van groot nut is. Laten wij zulks door een voorbeeld ophelderen.

§. 863. Wij hebben (I. C. §. 748 en 783,) reeds aangetoond: hoe de tafel der vierkanten en cuben der natuurlijke getallen, door gedurig optellen, kunnen worden zamengesteld: waaruit gebleken is, hoe groot het voordeel dezer handelwijze zijn moet: doch dit spreekt nog sterker, wanneer men eene tafel van de quadraats- en cubus-wortelen der natuurlijke getallen zou willen zamenstellen; omdat de quadraats- en cubus-worteltrekkingen, ten minste naar de gewone wijze, niet zoo gemakkelijk en spoedig afloopen. Stellen wij dan: dat, om met de quadraats-wortelen te beginnen, x een volkomen quadraat zij; dan zal men, om de eerste, tweede en volgende verschillen van $\sqrt{x}$ te vinden, in bovenstaande formulen $p = \frac{1}{2}$ moeten stellen, en dan wordt

$$\overset{1}{(p)} = \tfrac{1}{2};\ \overset{2}{(p)} = -\tfrac{1}{8};\ \overset{3}{(p)} = +\tfrac{1}{16};\ \overset{4}{(p)} = -\tfrac{5}{128};\ \overset{5}{(p)} = +\tfrac{7}{256};$$
$$\overset{6}{(p)} = -\tfrac{21}{1024};\ \overset{7}{(p)} = +\tfrac{33}{2048};\ \overset{8}{(p)} = -\tfrac{429}{32768};\ \textit{enz.}$$

Indien men nu de vierkants-wortels der getallen x, $x+1$, $x+2$, $x+3$, *enz.* berekenen wil, zal men $i = 1$ moeten stellen, en dan zullen de vergelijkingen (S) geven:

$$\Delta\sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \times \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{8x} + \frac{1}{16x^2} - \frac{5}{128x^3} + \frac{7}{256x^4} - \ldots \right.$$
$$\left. \frac{21}{1024x^5} + \frac{33}{2048x^6} - \frac{429}{32768x^7} + \textit{enz.} \right\}$$

$$\Delta^2\sqrt{x} = -\frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \left\{ \frac{1}{4x} - \frac{3}{8x^2} + \frac{35}{64x^3} - \frac{105}{128x^4} + \frac{651}{512x^5} - \right.$$
$$\left. \frac{2079}{1024x^6} + \textit{enz.} \right\}$$

Δ^3

$$\Delta^3 \sqrt{x} = + \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \left\{ \frac{3}{8x^2} - \frac{45}{32x^3} + \frac{525}{128x^4} - \frac{2835}{256x^5} + \ldots \right.$$

$$\left. \frac{29799}{1024x^6} - \text{enz.} \right\}$$

$$\Delta^4 \sqrt{x} = - \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \left\{ \frac{15}{16x^3} - \frac{105}{16x^4} + \frac{4095}{128x^5} - \frac{17325}{128x^6} + \text{enz.} \right\}$$

$$\Delta^5 \sqrt{x} = + \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \left\{ \frac{105}{32x^4} - \frac{4725}{128x^5} + \frac{17325}{64x^6} - \text{enz.} \right\}$$

$$\Delta^6 \sqrt{x} = - \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \left\{ \frac{945}{64x^5} - \frac{31185}{128x^6} + \text{enz.} \right\}$$

$$\Delta^7 \sqrt{x} = + \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \left\{ \frac{10395}{128x^6} - \text{enz.} \right\}$$

§. 864. Volgens dezelfde formulen zal men, voor de eerste en volgende verschillen van $\sqrt[3]{x}$, vinden:

$$\Delta \sqrt[3]{x} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \cdot \left\{ \frac{1}{3} - \frac{1}{9x} + \frac{5}{81x^2} - \frac{10}{243x^3} + \frac{22}{729x^4} - \ldots \right.$$

$$\left. \frac{154}{6561x^5} + \text{enz.} \right\}$$

$$\Delta^2 \sqrt[3]{x} = - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \cdot \left\{ \frac{2}{9x} - \frac{10}{27x^2} + \frac{140}{243x^3} - \frac{220}{243x^4} + \ldots \right.$$

$$\left. \frac{9548}{6561x^5} - \text{enz.} \right\}$$

$$\Delta^3 \sqrt[3]{x} = + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \cdot \left\{ \frac{10}{27x^2} - \frac{40}{27x^3} + \frac{1100}{243x^4} - \frac{3080}{243x^5} + \text{enz.} \right\}$$

$$\Delta^4 \sqrt[3]{x} = - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \cdot \left\{ \frac{80}{81x^3} - \frac{1760}{243x^4} + \frac{80080}{2187x^5} - \text{enz.} \right\}$$

$$\Delta^5 \sqrt[3]{x} = + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \cdot \left\{ \frac{880}{243x^4} - \frac{30800}{729x^5} + \text{enz.} \right\}$$

$$\Delta^6 \sqrt[3]{x} = - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \cdot \left\{ \frac{12320}{729x^5} - \text{enz.} \right\}$$

§. 865. Uit de oppervlakkige beschouwing dezer vergelijkingen blijkt het: dat de verschillen van de tweede en derde magts-wortelen van eenig getal steeds kleiner zullen worden, naarmate dat dit getal grooter genomen wordt.

§. 866. Om nu een denkbeeld te geven, van het gebruik, dat men van foortgelijke verfchillen vergelijkingen maken kan, zullen wij ftellen: dat men eene tafel van de cubus-wortelen der getallen, van en met 1000 ingefloten, enz. tot tien cijfers voortgezet, berekenen wil; dan zal men, de formulen van §. 864 gebruikende, $x = 1000$ moeten ftellen, en dan zal $1 : \sqrt[3]{1000} = 1 : 10$ zijn: voorts zal men door berekening vinden:

$$\Delta \sqrt[3]{x} = +0,00333\ 22228\ 39095$$

$$\Delta^2 \sqrt[3]{x} = -0,00000\ 22185\ 24271$$

$$\Delta^3 \sqrt[3]{x} = +0,00000\ 00036\ 88934$$

$$\Delta^4 \sqrt[3]{x} = -0,00000\ 00000\ 09804$$

§. 867. Met deze berekende verfchillen, zal men nu de cubuswortelen der getallen 1001, 1002, enz. kunnen vinden. Indedaad zijn deze verfchillen onmeetbare grootheden: doch zij worden telkens kleiner, en, hoezeer het blijkt, dat zij tot in het oneindige voortgaan, zijn nogtans de vijfde verfchillen reeds zoo klein, dat zij minder zijn dan $\frac{1}{1000000000000}$, en daar men nu de tafel der cubuswortelen niet verder dan tot tien cijfers in de decimalen wil berekenen, zullen de berekende vier eerfte verfchillen genoeg zijn, om deze wortels tot dien graad van naauwkeurigheid te vinden. Men onderftelle dan de vierde verfchillen gelijk, en dan zal men, volgens de formule $y_n = y_0 + \overset{1}{(n)} \Delta y_0 + \overset{2}{(n)} \Delta^2 y_0 + \overset{3}{(n)} \Delta^3 y_0 + enz.$, in welke nu $y_0 = 10$, $\Delta y_0 = 0,00333$ *enz.* is: door n achtervolgens gelijk 1, 2, 3, *enz.* te ftellen, zal men vinden:

getallen	*derzelver cubus wortelen*		
1000	10, 00000	00000	00
1001	10, 00333	22228	39
1002	10, 00666	22271	54
1003	10, 00999	00166	33
1004	10, 01331	55949	57
1005	10, 01663	89657	93
	enz.	*enz.*	

welke cubus-wortelen tot in de achterfte cijfers naauwkeurig zijn. Men kan nogtans, zoo als wij elders (*Handleiding* §. 878.) aangetoond

toond hebben, deze en de volgende wortels door gedurig optellen vinden.

§. 868. Langs dezen weg, zal men dan, door middel der verſchillen, eene geheele tafel kunnen berekenen: maar, met betrekking tot de cubus-wortelen, welke wij tot een voorbeeld genomen hebben, zal men niet zoo ſpoedig ſlagen, wanneer men die der lagere getallen wil berekenen: voor de kleinere getallen, zal het beter zijn, die wortels regtſtreeks door de vergelijking van Tabelle IV, volgens de voorſchriften van §. 558. te zoeken.

§. 869. Men zal op dezelfde wijze, als §. 857, de eerſte, tweede en volgende verſchillen van alle ſtelkundige ſunctien, zelfs ook van de transcendentale vinden; doch daar ons oogmerk alleen is, om het verband tusſchen de rekenkunſtige reekſen, en de leer der verſchillen te doen opmerken, en te doen zien, hoe deze ſtrekken kunnen ter verligting van het berekenen der tafels door interpolatie, zullen wij ons thans niet langer met dit onderwerp bezig houden, daar hetzelve in de Differentiaal-Rekening hervat en aldaar uitvoeriger zal behandeld worden.

WISKUNDIGE LESSEN.

XVIII. BOEK.

Verslag van de vorderingen, welke men in het stelkundig oplossen der hoogere magts vergelijkingen gemaakt heeft.

ZEVENTIGSTE LES.

Over de oplossing van de cubische of derde magts vergelijkingen.

§. 870.* Men verstaat door de volkomene of stelkundige oplossing eener hooge magts vergelijking

$$x^n + a x^{n-1} + b x^{n-2} + enz. + p x + q = 0$$

het vinden eener uitdrukking, zamengesteld uit de bekende coefficienten der gegevene vergelijking, welke, in de plaats dezer onbekende gesteld zijnde, de gegevene vergelijking tot identiteit brengt, of $0 = 0$ maakt. Op zulk eene wijze zijn:

$$x = \frac{-b + \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a} \text{ en } x = \frac{-b - \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}$$

twee stelkundige oplossingen van de vierkants-vergelijking:

$$a x^2 + b x + c = 0$$

omdat deze twee waarden van x, uit de bekende coefficienten a, b en c zamengesteld zijnde, aan deze vergelijking voldoen.

§. 871. De oplossing der hooge magts vergelijkingen door benadering, welke in het XI Boek geleerd is, is derhalve van de meer algemeene stelkundige oplossing zeer onderscheiden: de eerste is, voor elke getallen vergelijking bijzonder, en de gevondene wortels doen geenzins de wijze kennen, op welke zij van de coefficienten afhangen: de tweede oplossing geeft de wortels in eene functie der coefficienten; zij is algemeen, en zou daarom, indien zij algemeen mogelijk ware, boven de oplossing door benadering, welke nooit meer dan

dan eene bijzondere is, te verkiezen zijn: doch wij zullen zien: dat men het in die algemeene oplosſing nog niet verder dan tot de vierde magts vergelijkingen heeft kunnen brengen, ja zelfs zullen wij bewijzen: dat, wanneer men daar immer toe komen mogt, de algemeene uitdrukkingen, welke men voor de wortels zou vinden, zoo zamengeſteld zouden zijn, dat men in het werkdadige de bijzondere oplosſing door benadering liever dan de algemeene zou gebruiken.

§. 872. †† Men zal uit de cubiſche vergelijking $y^3 + ay^2 + by + c = 0$, eene andere cubiſche vergelijking kunnen afleiden, in welke geen tweede term voorkomt; want, ſtellende $y = x + r$; dan zal $y^3 = x^3 + 3rx^2 + 3r^2x + r^3$; $ay^2 = ax^2 + 2arx + ar^2$; $by = bx + br$ zijn, en de gegevene vergelijking zal veranderen in:

$$x^3 + (a+3r)x^2 + (b+2ar+3r^2)x + (c+br+ar^2+r^3) = 0$$

Wanneer men nu $a + 3r = 0$ ſtelt; dan is $r = -\frac{1}{3}a$, en de laatſte vergelijking verandert alsdan in:

$$x^3 + (b - \tfrac{1}{3}a^2)x + (c - \tfrac{1}{3}ba + \tfrac{2}{27}a^3) = 0$$

waaruit blijkt: †† *dat, wanneer men, in de vergelijking* $y^3 + ay^2 + by + c = 0$, *den wortel* y *gelijk ſtelt aan eene onbekende grootheid* x, *verminderd met één derde van den coefficient des tweeden terms, de vergelijking, welke men alsdan in* x *verkrijgen zal, geen tweeden term hebben, en van den vorm* $x^3 + px + q = 0$ *zal zijn; terwijl voorts de wortels van de vergelijking* $y^3 + ay^2 + by + c = 0$ *gelijk zullen zijn aan de wortels van* $x^3 + px + q = 0$, *verminderd met één derde van den coefficient van den tweeden term der vergelijking in* y. Vergelijk hier mede §. 226.

§. 873. †† Op dezelfde wijze zal men uit elke hooge magts vergelijking:

$$y^n + ay^{n-1} + by^{n-2} + enz. + py + q = 0$$

eene vergelijking van dezelfde magt in x vinden kunnen, waarin de tweede term ontbreekt, door $y = x - \frac{a}{n}$ te ſtellen. * Men noemt deze voorbereidende bewerking tot de oplosſing der vergelijkingen het doen verdwijnen van den tweeden term.

§. 874. Nemen wij nu de vergelijking:

$$x^3 + px + q = 0$$

welke van haren tweeden term bevrijd is, en ſtellen wij de onbekende x gelijk aan de ſom van twee andere onbekenden y en z, van welke 'er dus éène, bij voorbeeld, y naar welgevallen kan genomen worden; dan is $x = y + z$, en $x^3 = y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3$: ſtellen

len wij deze waarden van x^3 en x in de gegevene vergelijking $x^3 + px + q = 0$; dan zal zij in

$$y^3 + 3y^2 z + 3yz^2 + z^3 + p(y+z) + q = 0$$

veranderen. De fom der termen $3y^2 z + 3yz^2$, welke in het voorfte lid dezer vergelijking voorkomt, kan onder de gedaante $3yz(y+z)$ gebragt, en met den term $p(y+z)$ vereënigd worden: de laatfte vergelijking verkrijgt daardoor den vorm

$$y^3 + z^3 + (3yz + p) \times (y+z) + q = 0$$

en is van de gegevene in waarde niet onderfcheiden. Aangezien nu de grootheden y en z, welke in dezelve voorkomen, onbepaald zijn, zal men den factor $3yz + p$ gelijk nul kunnen ftellen (122), en dan wordt de voorgaande vergelijking verdeeld in de twee volgende:

$$3yz + p = 0 \quad \ldots \quad (\alpha) \quad en \quad y^3 + z^3 + q = 0 \quad \ldots \quad (\beta)$$

Deze twee vergelijkingen zijn voldoende, om y en z, en gevolgelijk $x = y + z$ te vinden. De natuurlijkfte weg, welke zich opdoet, om de grootheden y en z te bepalen, is, dat men uit de vergelijking (α) de waarde van z afzondere, en deze waarde in de vergelijking (β) overbrenge. De vergelijking (α) geeft:

$$z = -\frac{p}{3y} \quad \ldots \; en \; \ldots \quad z^3 = -\frac{p^3}{27y^3}$$

Stelt men de waarde van z^3 in vergelijking (β); dan zal men vinden:

$$y^3 - \frac{p^3}{27y^3} + q = 0$$

welke, met $27y^3$ vermenigvuldigd, en voorts herleid zijnde, geven zal:

$$27y^6 + 27qy^3 = p^3$$

$$\text{of} \quad \ldots \quad y^6 + qy^3 = \tfrac{1}{27}p^3 \quad \ldots \quad (\gamma)$$

Dit is eene zesde magts vergelijking van de tweede magts vorm: indien men dezelve, naar het voorfchrift van §. 97, oplost; dan zal men vinden:

$$y = \sqrt[3]{\left\{-\tfrac{1}{2}q \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3)}\right\}} \quad \ldots \quad (\delta)$$

Nu is $z^3 = -\frac{p^3}{27y^3}$: men zal dan, om z^3 te vinden, $-\frac{1}{27}p^3$ door —

(122) Door deze onderftelling aantenemen, is alleen het product zy gegeven, en de fom $y + z$ is ingewikkeld door $y^3 + z^3 + q = 0$, of door de gegevene vergelijking, bepaald.

$-\frac{1}{2}q \pm \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)}$ moeten deelen: deze deeler heeft twee waarden, naar dat men het teeken $+$ of het teeken $-$ neemt: nemen wij eerst het teeken $+$; dan is

$$\frac{p^3}{27y^3} = \frac{1}{27} \times \frac{p^3}{-\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)}}$$

men vermenigvuldige, volgens §. 445, teller en noemer dezer breuk met $-\frac{1}{2}q - \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)}$; dan verkrijgt men:

$$\frac{p^3}{27y^3} = \frac{1}{27} \cdot \frac{p^3 \times (-\frac{1}{2}q - \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)})}{-\frac{1}{27}p^3}$$

of, na herleiding,

$$\frac{p^3}{27y^3} = +\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)}$$

deze uitdrukking, zoo als het behoort, negatief nemende, verkrijgt men de waarde van z^3; gevolgelijk zal met

$$y = \sqrt[3]{\left\{-\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)}\right\}}$$

overeënstemmen

$$z = \sqrt[3]{\left\{-\frac{1}{2}q - \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)}\right\}}$$

Men zal op dezelfde wijze vinden: dat de uitdrukkingen

$$y = \sqrt[3]{\left\{-\frac{1}{2}q - \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)}\right\}}$$

$$z = \sqrt[3]{\left\{-\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)}\right\}}$$

met elkander overeënstemmen. Welke der twee teekens men derhalve in de vergelijking (δ) neme, zal men voor x slechts deze ééne waarde

$$x = \sqrt[3]{\left\{-\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)}\right\}} + \sqrt[3]{\left\{-\frac{1}{2}q - \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)}\right\}} \quad (\varepsilon)$$

verkrijgen (123), waarin het vierkants wortel-teeken, hetwelk onder het cubicke wortel-teeken voorkomt, in het eene deel met $+$, en, in het andere, met $-$ is aangedaan; zoodat daaromtrent geen twijfel kan overblijven.

§. 875. Deze is de uitdrukking, bekend onder de benaming van de formule van CARDANUS (124). Alle wegen, welke men naderhand, ter op-

(123) Zulks kan niet anders, omdat de onbekenden, in de vergelijkingen $3yz + p = 0$ en $y^3 + z^3 + q = 0$, op dezelfde wijze voorkomen. Vergelijk §. 125.

(124) SCIPIO FERREO, een Italiaan, vond, in het begin der zestiende eeuw,

oplossing van de cubische vergelijkingen, heeft ingeslagen, hebben altijd tot dezelfde uitkomst gebragt, en wij zullen naderhand zien, dat men ook tot geene andere komen kan.

§. 876. De cubische wortel-uitdrukkingen, welke in de gevondene formule van CARDANUS voorkomen, schijnen, in den eersten opslag, slechts éénc waarde voor x te geven: men is ook indedaad lang in de meening geweest, dat zij slechts éénen wortel deden kennen; ja zelfs blijkt het, uit de *Algebra* van CLAIRAUT, welke het eerst in 1746 uitkwam, en naderhand uit het artikel, *cas irréductible*, in de eerste *Encyclopédie*, hetwelk door den beroemden D'ALEMBERT gesteld is, dat dit verkeerde denkbeeld nog in het midden van de XVIII Eeuw bestond (125). Men zou de volstrekte algemeenheid van het stelkun-

eeuw, één der gevallen van de oplossing der cubische vergelijkingen, en liet het geheim aan zijnen leerling, MARIA ANTONIO DEL FIORE, na; deze daagde de Wiskundigen uit met vraagstukken, welke van de cubische vergelijkingen, voor zoo ver dit geval betrof, afhingen: de snorkerijen van dezen DEL FIORE deden TARTALEA, een ander Italiaansch Wiskundige, naar het geheim zoeken: deze was gelukkig genoeg, om niet slechts het geval van FERREO, maar ook alle de andere gevallen van de oplossing der cubische vergelijkingen te vinden, en nu daagde hij op zijne beurt den leerling van FERREO uit met vraagstukken, welke van de andere, door hem gevondene, gevallen afhingen, en welke DEL FIORE niet kon oplossen. TARTALEA stelde zijne regels voor de drie gevallen in Italiaansche versen, deelde ter naauwernood, en niet dan onder eene sterke beëdiging, van het geheim niet te zullen ontdekken, zijne regels aan CARDANUS mede; doch deze 'er naderhand de bewijzen van gevonden hebbende, maakte geene zwarigheid zijnen eed te breken, en, in den jare 1545, in zijne *Arte Magna*, zoowel de formulen van TARTALEA als de betoogen, welke hij van dezelve gevonden had, openlijk bekend te maken, en het is om die reden, dat men CARDANUS voor den uitvinder van de oplossing der cubische vergelijkingen houdt, welke eer, in de voornaamste plaats, aan SCIPIO FERREO toekomt. De leiding van gedachten, welke wij in den tekst gevolgd hebben, verschilt, offchoon de uitkomst dezelfde is, nogtans met die van CARDANUS. De beroemde LAGRANGE vermoedt, dat onze landgenoot, HUDDE, het eerst deze meer beredeneerde en regelmatige oplossing zou gegeven hebben.

(125) Tot op dien tijd zogt men één der wortelen door de formule van CARDANUS, en om de twee anderen te vinden, deelde men de gegevene vergelijking $x^3 + px + q = 0$ door $x - a$. (a de wortel zijnde, door de formule van CARDANUS gevonden,) Men verkreeg dan eene vergelijking van de tweede magt, welke men op de gewone wijze oploste. Deze tweede magts vergelijking kan gemakkelijk buiten de divisie gevonden

kundig schrift miskennen, wanneer men daaraan een gebrek toeschreef, dat alleen zoodanig scheen, omdat men in die tijden in de kracht en beteekenis van hetzelve nog niet genoeg bedreven was. Wij zullen dadelijk zien: dat de formule van CARDANUS, wel verstaan zijnde, alle de wortels der cubische vergelijking doet kennen.

§. 877. †† *Elk getal heeft drie cubus-wortelen, éénen bestaanbaren, en twee onbestaanbare.* Hoewel deze waarheid uit §. 640. genoegzaam blijkt, zullen wij zulks echter op eene andere wijze aantoonen. Zij $x^3 - A = 0$; dan is $x = \sqrt[3]{A}$, of $x - \sqrt[3]{A} = 0$: nu is $x^3 - A = (x^2 + x\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{A^2}) \times (x - \sqrt[3]{A}) = 0$; men zal dan ook, om aan de vergelijking $x^3 - A = 0$ te voldoen, kunnen stellen: $x^2 + x\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{A^2} = 0$, en, wanneer men deze vierkants vergelijking oplost, zal men vinden:

$$x = [-\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{-3}] \times \sqrt[3]{A}, \text{ en } x = [-\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{-3}] \times \sqrt[3]{A}$$

en deze zijn de twee onbestaanbare cubus-wortelen uit A, welke, met $\sqrt[3]{A}$, de drie cubus-wortelen van A uitmaken, en elk van welke, tot de derde magt verheven zijnde, wederom A zal voortbrengen. Het bestaan dezer drie wortelen is, gelijk men ziet, in den aard der vergelijking $x^3 - A = 0$ gegrond: †† waar men derhalve den cubus-wortel uit een getal getrokken heeft, zal men dien cubus-wortel met $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}$, en met $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3}$ moeten vermenigvuldigen, om de twee anderen te vinden.

§. 878. Passen wij nu dit beginsel op de formule van CARDANUS toe, en stellen wij, kortheidshalve:

$$-\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{-3} = \rho; \quad -\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{-3} = \rho' \text{ en } \tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3 = r$$

dan zal men hebben:

1°

den worden: want, a de gevondene wortel zijnde, zal, $x^3 + px + q = 0$ zijnde, ook $a^3 + pa + q = 0$ zijn, en, deze laatste van de eerste aftrekkende, zal $x^3 - a^3 + p(x - a) = 0$ zijn, welke vergelijking door $x - a$ deelbaar is: de deeling geeft

$$x^2 + ax + aa + p = 0$$

zie §. 191, en deze vergelijking oplossende, vindt men voor de twee andere wortels:

$$x = -\tfrac{1}{2}a + \sqrt{(-p - \tfrac{3}{4}a^2)} \text{ en } x = -\tfrac{1}{2}a - \sqrt{(-p - \tfrac{3}{4}a^2)}$$

$$1^\circ\quad y=\sqrt[3]{(-\tfrac{1}{2}q+\sqrt{r})}\ \text{en}\ z=-\tfrac{1}{3}p:\sqrt[3]{(-\tfrac{1}{2}q+\sqrt{r})}$$
$$2^\circ\quad y=\rho\sqrt[3]{(-\tfrac{1}{2}q+\sqrt{r})}\ \text{en}\ z=-\tfrac{1}{3}p:\rho\sqrt[3]{(-\tfrac{1}{2}q+\sqrt{r})}$$
$$3^\circ\quad y=\rho'\sqrt[3]{(-\tfrac{1}{2}q+\sqrt{r})}\ \text{en}\ z=-\tfrac{1}{3}p:\rho'\sqrt[3]{(-\tfrac{1}{2}q+\sqrt{r})}$$

Het is reeds gebleken: dat, in het eerste geval, $z=\sqrt[3]{(-\tfrac{1}{2}q-\sqrt{r})}$ wordt. Hieruit volgt: dat, in het tweede geval, $z=\frac{1}{\rho}\sqrt[3]{(-\tfrac{1}{2}q-\sqrt{r})}$, en, in het derde, $z=\frac{1}{\rho'}\sqrt[3]{(-\tfrac{1}{2}q-\sqrt{r})}$ zal zijn: nu is $\rho\rho'=(-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{-3})\times(-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{-3})=+1$; gevolgelijk is ... $1:\rho=\rho'$ en $1:\rho'=\rho$: derhalve stemmen met elkander overeën:

$$z=\sqrt[3]{(-\tfrac{1}{2}q-\sqrt{r})}\ \text{met}\ y=\sqrt[3]{(-\tfrac{1}{2}q+\sqrt{r})}$$
$$z=\rho'\sqrt[3]{(-\tfrac{1}{2}q-\sqrt{r})}\ \text{met}\ y=\rho\sqrt[3]{(-\tfrac{1}{2}q+\sqrt{r})}$$
$$\text{en}\ z=\rho\sqrt[3]{(-\tfrac{1}{2}q-\sqrt{r})}\ \text{met}\ y=\rho'\sqrt[3]{(-\tfrac{1}{2}q+\sqrt{r})}$$

en de wortelen van de vergelijking $x^3+px+q=0$ worden, gevolgelijk:

$$x=\sqrt[3]{\left\{-\tfrac{1}{2}q+\sqrt{r}\right\}}+\sqrt[3]{\left\{-\tfrac{1}{2}q-\sqrt{r}\right\}}\ \ldots.\ (1)$$
$$x=\rho\sqrt[3]{\left\{-\tfrac{1}{2}q+\sqrt{r}\right\}}+\rho'\sqrt[3]{\left\{-\tfrac{1}{2}q-\sqrt{r}\right\}}\ \ldots.\ (2)$$
$$x=\rho'\sqrt[3]{\left\{-\tfrac{1}{2}q+\sqrt{r}\right\}}+\rho\sqrt[3]{\left\{-\tfrac{1}{2}q-\sqrt{r}\right\}}\ \ldots.\ (3)$$

Deze drie uitdrukkingen zullen dan de wortels der gegevene vergelijking $x^3+px+q=0$ moeten zijn. Men kan zulks, indien men anders daaraan twijfelen mogt, op meer dan ééne wijze bevestigen.

§. 879. Indien de drie uitdrukkingen (1), (2) en (3), * welke wij, door de benaming van *eerste*, *tweede* en *derde wortels* zullen onderscheiden, de wortels van de vergelijking $x^3+px+q=0$ zijn; dan moet: 1° de som dezer wortels gelijk nul, 2° de som van derzelver producten, twee aan twee genomen, gelijk p, en 3°, derzelver product gelijk q zijn, zie §. 210. Stellen wij dan, zoo als boven:

$$y=\sqrt[3]{\left\{-\tfrac{1}{2}q+\sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3)}\right\}};\ z=\sqrt[3]{\left\{-\tfrac{1}{2}q-\sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3)}\right\}}$$

dan zullen de wortels der vergelijking door

$y+z$,

$$y+z,\ \rho y+\rho' z, \text{ en } \rho' y+\rho z$$

worden uitgedrukt.

De ſom dezer wortels is klaarblijkelijk gelijk aan $(1+\rho+\rho')\times(y+z)$.

Vermenigvuldigt men de wortels, twee aan twee, dan verkrijgt men:

$$(y+z).(\rho y+\rho' z)=\rho y^2+(\rho+\rho')yz+\rho' z^2$$
$$(y+z).(\rho' y+\rho z)=\rho' y^2+(\rho'+\rho)yz+\rho z^2$$
$$(\rho y+\rho' z).(\rho' y+\rho z)=\rho\rho' y^2+(\rho\rho+\rho'\rho')yz+\rho\rho' z^2$$

de ſom dezer producten is klaarblijkelijk gelijk aan

$$(\rho+\rho'+\rho\rho')\times(y^2+z^2)+(2\rho+2\rho'+\rho\rho+\rho'\rho')\times yz$$

Eindelijk zal men, door alle de wortels met elkander te vermenigvuldigen, vinden:

$$\rho\rho'(y^3+z^3)+(\rho\rho+\rho\rho'+\rho'\rho')\times(y+z)yz$$

Nu is $\rho=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}$ en $\rho'=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3}$; derhalve $\rho\rho'=+1$; $\rho\rho=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3}$; $\rho'\rho'=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}$; derhalve

$$1+\rho+\rho'=0;\quad \rho+\rho'+\rho\rho'=0$$
$$2\rho+2\rho'+\rho\rho+\rho'\rho'=-3$$
$$\rho\rho+\rho\rho'+\rho'\rho'=0$$

$$y^3z^3=\left\{-\tfrac{1}{2}q+\sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3)}\right\}\times\left\{-\tfrac{1}{2}q-\sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3)}\right\}=-\tfrac{1}{27}p^3$$

$$\text{en } yz=-\tfrac{1}{3}p \quad \text{en } y^3+z^3=-q$$

Hierdoor vindt men: 1° De ſom der wortels, dat is, $(1+\rho+\rho')(y+z)=0$. 2° Voor de ſom der producten, twee aan twee, $(\rho+\rho'+\rho\rho').(y^2+z^2)+(2\rho+2\rho'+\rho\rho+\rho'\rho')\times yz=-3\times-\frac{1}{3}p=+p$, 3° en voor het product der wortels $\rho\rho'(y^3+z^3)+(\rho\rho+\rho\rho'+\rho'\rho')(y+z)yz=+1\times-q=-q$; al hetwelk, als overëënkomſtig met het bewezene in §. 210, bewijst: dat de drie uitdrukkingen van §. 878, de drie wortels der cubiſche vergelijking $x^3+px+q=0$ moeten zijn.

§. 880. Indien men den eerſten wortel, welke men, volgens de formule van Cardanus, vindt, namelijk:

$$\sqrt[3]{\left\{-\tfrac{1}{2}q+\sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3)}\right\}}+\sqrt[3]{\left\{-\tfrac{1}{2}q-\sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3)}\right\}}$$

kortheidshalve gelijk a ſtelt, en $x^3+px+q=0$ door $x-a$ deelt, dan zal men, zie noot (125) pag. 483, voor het quotient de vierkants-vergelijking $x^2+ax+aa+p=0$ vinden, en deze geeft, voor de twee andere wortels, $x=-\frac{1}{2}a\pm\sqrt{(-p-\frac{3}{4}a^2)}$. Deze uitdrukking moet dan, na behoorlijke herleiding, ook de wortels (2)

en

en (3) van §. 878. geven. Wij hebben $a = y + z$; derhalve $a^2 = y^2 + 2yz + z^2$, en $-\frac{3}{4}a^2 = -\frac{3}{4}y^2 - 1\frac{1}{2}yz - \frac{3}{4}z^2$, en, omdat $-p = 3yz$ is, $-p - \frac{3}{4}a^2 = -\frac{3}{4}y^2 + 1\frac{1}{2}yz - \frac{3}{4}z^2 = -\frac{3}{4} \times (y^2 - 2yz + z^2)$, en hieruit den vierkants wortel trekkende, ... $\pm\sqrt{(-p - \frac{3}{4}a^2)} = \pm\frac{1}{2}y\sqrt{-3} \mp \frac{1}{2}z\sqrt{-3}$: hieruit volgt, voor de twee andere wortels, $x = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{(-p - \frac{3}{4}a^2)}$, indien men het bovenste teeken neemt, $x = (-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3})y + (-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3})z = \rho y + \rho' z$, en, wanneer, men het benedenste teeken neemt, $x = (-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3})y + (-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3})z = \rho' y + \rho z$: waaruit derhalve blijkt: dat de wortels der vergelijking $x^2 + ax + aa + p = 0$ de tweede en derde wortels van de uitdrukking van CARDANUS zijn, hetgeen tot een nieuw bewijs van de waarheid en algemeenheid dezer uitdrukking verstrekt.

§. 881. Indien de wortels, welke, voor de vergelijking $x^3 + px + q = 0$, uit de formule van CARDANUS volgen, zoodanige zijn, dan zal, wanneer men elk dezer in de plaats van x stelt, de vergelijking $0 = 0$ moeten worden. Nu zijn deze wortels: 1° $y + z$, 2° $\rho y + \rho' z$, en 3°, $\rho' y + \rho z$: stellen wij de eerste in plaats van x; dan zal $y^3 + 3y^2 z + 3yz^2 + z^3 + py + pz + q = 0$, of wel $y^3 + z^3 + (3yz + p) \times (y + z) + q = 0$ moeten zijn; dit is nu indedaad alzoo; want $y^3 + z^3 = -q$ en $3yz = -p$ zijnde; wordt de laatste vergelijking $-q + 0 + q = 0$. — Stelt men den tweeden wortel $\rho y + \rho' z$ in plaats van x; dan zal men verkrijgen $\rho^3 y^3 + 3\rho^2 \rho' y^2 z + 3\rho\rho'^2 yz^2 + \rho'^3 z^3 + p\rho y + p\rho' z + q$, en deze uitdrukking, welke onder den vorm $\rho^3 y^3 + \rho'^3 z^3 + \ldots (3\rho\rho' yz + p) \times (\rho y + \rho' z) + q$ kan gesteld worden, zal gelijk nul moeten zijn: dit zal ook wederom plaats hebben; want $\rho^3 = \rho'^3 = 1$ en $\rho\rho' = 1$ zijnde, zal $\rho^3 y^3 + \rho'^3 z^3 = y^3 + z^3 = -q$, en $3\rho\rho' yz = 3yz = -q$, zijn, en de uitdrukking zal gelijk nul worden, hetgeen bewijst, dat ook $\rho y + \rho' z$ een wortel is. Op dezelfde wijze zal men zulks ook van den derden wortel $\rho' y + \rho z$ betoogen. — Het blijkt dan, uit dit alles, overtuigend: 1° dat de som der wortels, welke uit de formule van CARDANUS volgen, benevens de som van derzelver producten, twee aan twee, als ook derzelver gedurig product, de coefficienten der gegevene vergelijking, op nieuw weder te voorschijn zullen brengen: 2° dat elk dezer wortelen, in plaats der onbekende gesteld zijnde, de gegevene vergelijking $0 = 0$ maakt, en eindelijk 3°, dat ook de wortels, welke men door de vergelijking

 $x^2 +$

$x^2 + ax + a^2 + p = 0$, (die door de deeling van $x^3 + px + q = 0$, door $x - a$, of door den eersten wortel, welke de oplossing ommiddelijk geeft,) verkrijgt, volmaakt de tweede en derde wortelen van de gezegde formule van CARDANUS geven zullen.

Van welke zijde men derhalve de verkregene uitkomsten van §. 878 toetst, men vindt overal eene overëénstemming van beginselen, welke alzoo van achteren bevestigt, hetgeen wij, in §. 876, ter wederlegging eener versletene meening hebben bijgebragt.

§. 882. Uit het voorgaande blijkt: dat de oplossing der cubische vergelijkingen van die der vierkants vergelijkingen afhangt. Indedaad ziet men: dat, de vergelijkingen $y^3 + z^3 = -q$, en $y^3 z^3 = -\frac{1}{27}p^3$ gegeven zijnde, de onbekenden y^3 en z^3 van de oplossing der vergelijking

$$t^2 + qt - \tfrac{1}{27}p^3 = 0$$

zullen afhangen: noemen wij de wortels dezer vergelijking P en Q, dan zal $y = \sqrt[3]{P}$ en $z = \sqrt[3]{Q}$ zijn: maar, volgens het betoogde in §. 877, is ook $y = \rho\sqrt[3]{P}$ en $y = \rho'\sqrt[3]{P}$: nu kan men de waarden van z, welke insgelijks drie in getal zijn, niet willekeurig met die van y verbinden; want deze waarden zijn, in derzelver zamenstemming, door de vergelijking $3yz = -p$, aan elkander verbonden, en hierom kan $z = \sqrt[3]{Q}$ alleen met $y = \sqrt[3]{P}$; $z = \rho'\sqrt[3]{Q}$ alleen met $y = \rho\sqrt[3]{P}$, en eindelijk, $z = \rho\sqrt[3]{Q}$ alleen met $y = \rho'\sqrt[3]{P}$ overëénstemmen.

§. 883. †† Indien de wortels van de vergelijking $t^2 + qt - \frac{1}{27}p^3 = 0$, * welke wij voortaan de *herleide* zullen noemen, bestaanbaar zijn, dan zal de wortel $\sqrt[3]{P} + \sqrt[3]{Q}$ bestaanbaar, en de wortels $\rho\sqrt[3]{P} + \rho'\sqrt[3]{Q}$ en $\rho'\sqrt[3]{P} + \rho\sqrt[3]{Q}$ zullen onbestaanbaar zijn; de vergelijking, $x^3 + px + q = 0$, zal derhalve, in dit geval, éénen bestaanbaren en twee onbestaanbare wortels hebben.

§. 884. Het is van belang: dat wij onderzoeken: wat 'er gebeuren zal, wanneer de wortels der herleide vergelijking $t^2 + qt - \frac{1}{27}p^3 = 0$ onbestaanbaar zijn? In dit geval zullen zij van den vorm $h + k\sqrt{-1}$, en $h - k\sqrt{-1}$ zijn, en, volgens §. 111, zal de waarde van $\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3$ negatief zijn, en de eerste wortel der cubische vergelijking zal (en deze bijzonderheid heeft den Wiskundigen, sedert CARDANUS leeftijd, veel hoofdbrekens gekost,) den onbebestaanbaren vorm

$$\sqrt[3]{(h+k\sqrt{-1})}+\sqrt[3]{(h-k\sqrt{-1})}$$

verkrijgen. Hier zijn nu twee zaken te betoogen: 1° †† *Dat, wanneer deze wortel eene bestaanbare waarde heeft, de twee overige insgelijks bestaanbaar zullen zijn.* 2° †† *Dat deze onbestaanbare vorm altijd eene bestaanbare waarde heeft.*

§. 885. Stellen wij, om het eerste te betoogen: $\sqrt[3]{(h+k\sqrt{-1})}=f$ en $\sqrt[3]{(h-k\sqrt{-1})}=g$; dan zullen wij, voor den eersten wortel, hebben: $f+g=\mu$, zijnde μ, volgens de onderstelling, eene bestaanbare uitdrukking: wij moeten nu bewijzen: dat $\rho f+\rho' g$ en $\rho' f+\rho g$, insgelijks bestaanbare uitdrukkingen zijn. Wij hebben $(h+k\sqrt{-1})\times(h-k\sqrt{-1})=h^2+k^2=f^3g^3$; derhalve $fg=\sqrt[3]{(h^2+k^2)}$: nu is $(f+g)^2=\mu^2$ en $(f+g)^2-4fg=\mu^2-4\sqrt[3]{(h^2+k^2)}=(f-g)^2$. Deze waarde van $(f-g)^2$ moet noodzakelijk negatief zijn; want ware zij positief, en gelijk ν^2; dan zou $f-g=\nu$ zijn, en $f=\frac{1}{2}(\mu+\nu)$, $g=\frac{1}{2}(\mu-\nu)$, zouden, even als hare derde magten, tegen de onderstelling, bestaanbare uitdrukkingen zijn. De uitdrukking $\mu^2-4\sqrt[3]{(h^2+k^2)}$ zal dan indedaad negatief zijn: stellen wij dan $\mu^2-\sqrt[3]{(h^2+k^2)}=(f-g)^2=-\theta^2$; dan zal $f-g=\theta\sqrt{-1}$ zijn; maar, $f+g=\mu$ gesteld zijnde, zal $f=\frac{1}{2}(\mu+\theta\sqrt{-1})$ en $g=\frac{1}{2}(\mu-\theta\sqrt{-1})$ zijn. Nu is de tweede wortel gelijk aan $\rho f+\rho' g$ en $\rho=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}$, $\rho'=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3}$; derhalve $\rho f+\rho' g=(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3})(\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\theta\sqrt{-1})+(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3})(\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}\theta\sqrt{-1})=\frac{1}{4}(-\mu-\theta\sqrt{3}+\mu\sqrt{-3}-\theta\sqrt{-1})+\ldots$ $\frac{1}{4}(-\mu-\theta\sqrt{3}-\mu\sqrt{-3}+\theta\sqrt{-1})=-\frac{1}{2}(\mu+\theta\sqrt{3})$, en de derde wortel $\rho' f+\rho g=(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3})(\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\theta\sqrt{-1})+(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3})(\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}\theta\sqrt{-1})=-\frac{1}{2}(\mu-\theta\sqrt{3})$, en deze wortels zijn diensvolgens bestaanbaar.

§. 886. Wanneer dan de eerste wortel den onbestaanbaren vorm $\sqrt[3]{(h+k\sqrt{-1})}+\sqrt[3]{(h-k\sqrt{-1})}$ heeft, en tot eene bestaanbare waarde kan herleid worden, dan zullen ook de twee andere wortels der vergelijking bestaanbaar zijn. Wij moeten nu nog bewijzen: dat, welke ook de waarden van h en k zijn, de waarde dezer uitdrukking altijd bestaanbaar zal zijn.

§. 887. * Men noemt dit geval, waarin $\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3$ negatief is, het *onherleidbaar geval*, omdat de uitdrukking van den eersten wortel niet algemeen, en in alle gevallen, in eene uitdrukking kan herleid worden, welker waarde in getallen bepaalbaar is. CARDANUS merkte het eerst dit geval op. RAPHAEL BOMBELLI, meer doorzigts dan CARDANUS hebbende, toonde in zijne *Algebra*, welke in 1589 in het licht verscheen: dat, wanneer de uitdrukking $\sqrt[3]{(h + k\sqrt{-1})}$ kan begrepen worden ontstaan te zijn uit de derde magt van eene uitdrukking van den vorm $m + n\sqrt{-1}$, alsdan $\sqrt[3]{(h + k\sqrt{-1})} = m + n\sqrt{-1}$ en dat dan $\sqrt[3]{(h - k\sqrt{-1})} = m - n\sqrt{-1}$, terwijl de eerste wortel gelijk aan $2m$ zal zijn. Wij hebben in §. 580 geleerd: hoe men, indien het mogelijk is, de uitdrukking ...... $\sqrt[3]{(h + k\sqrt{-1})}$ tot den vorm $m + n\sqrt{-1}$ brengen kan: doch zulks is nooit mogelijk, ten zij de grootheden m en n meetbaar zijn, en de gegevene cubische vergelijking meetbare wortels heeft. De algemeene herleiding van het onherleidbaar geval tot eenen bestaanbaren vorm heeft, sedert den tijd van BOMBELLI, de Wiskundigen van den eersten rang bezig gehouden, zonder dat men ooit heeft kunnen slagen; alleen heeft men kunnen bewijzen: dat de waarde van den wortel, in dit geval, altijd bestaanbaar is.

§. 888. Wanneer men de 27 en 28 formule van Tabelle N° IV, optelt, zal men verkrijgen:

$$(a + b\sqrt{-1})^n + (a - b\sqrt{-1})^n = \ldots\ldots$$
$$2 \times \left\{ a^n - \overset{2}{(n)} \cdot a^{n-2} b^2 + \overset{4}{(n)} \cdot a^{n-4} b^4 - \overset{6}{(n)} \cdot a^{n-6} b^6 + \overset{8}{(n)} \cdot a^{n-8} b^8 - \text{enz.} \right\}$$

en hieruit blijkt: dat de uitdrukking $\sqrt[n]{(a + b\sqrt{-1})} + \ldots\ldots \sqrt[n]{(a - b\sqrt{-1})}$, welke uit twee onbestaanbare deelen bestaat, eene bestaanbare waarde verkrijgt, omdat de onbestaanbare termen der ontwikkelde magten elkander vernietigen. Deze uitdrukking kan onder de volgende gedaante gesteld worden;

$$(a + b\sqrt{-1})^n + (a - b\sqrt{-1})^n = \ldots\ldots$$
$$2a^n \times \left\{ 1 - \overset{2}{(n)} \cdot \frac{b^2}{a^2} + \overset{4}{(n)} \cdot \frac{b^4}{a^4} - \overset{6}{(n)} \cdot \frac{b^6}{a^6} + \overset{8}{(n)} \cdot \frac{b^8}{a^8} - \text{enz.} \right\}$$

Stel-

Stellen wij nu $n = \frac{1}{3}$, $a = h$, $b = k$; dan zal:

$$\sqrt[3]{(h + k\sqrt{-1})} + \sqrt[3]{(h - k\sqrt{-1})} = \ldots\ldots$$

$$2h^{\frac{1}{3}} \times \left\{1 + \frac{1}{9}\cdot\frac{k^2}{h^2} - \frac{10}{243}\cdot\frac{k^4}{h^4} + \frac{154}{6561}\cdot\frac{k^6}{h^6} - \frac{935}{59049}\cdot\frac{k^8}{h^8} + enz.\right\}$$

en deze reeks zal, wanneer men $h = -\frac{1}{2}q$ en k gelijk aan den vierkants-wortel uit $\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3$, *negatief* genomen, ſtelt, in het onherleidbaar geval, op de formule van CARDANUS kunnen worden toegepast, en men zal, door dezelve, de waarde van den eerſten wortel kunnen benaderen.

§. 889. Indien men $\sqrt[3]{(h + k\sqrt{-1})}$ met $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}$, en $\sqrt[3]{(h - k\sqrt{-1})}$ met $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3}$ vermenigvuldigt, en deze producten optelt; dan zal men voor den tweeden wortel vinden:

$$-h^{\frac{1}{3}}\left\{1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{k}{h}\sqrt{3} + \frac{1}{9}\cdot\frac{k^2}{h^2} - \frac{5}{81}\cdot\frac{k^3}{h^3}\sqrt{3} - \frac{10}{243}\cdot\frac{k^4}{h^4} + \frac{22}{729}\cdot\frac{k^5}{h^5}\sqrt{3} + \frac{154}{6561}\cdot\frac{k^6}{h^6} - \frac{374}{19683}\cdot\frac{k^7}{h^7}\sqrt{3} - enz.\right\}$$

ook zal men voor den derden wortel vinden:

$$-h^{\frac{1}{3}}\left\{1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{k}{h}\sqrt{3} + \frac{1}{9}\cdot\frac{k^2}{h^2} + \frac{5}{81}\cdot\frac{k^3}{h^3}\sqrt{3} - \frac{10}{243}\cdot\frac{k^4}{h^4} - \frac{22}{729}\cdot\frac{k^5}{h^5}\sqrt{3} + \frac{154}{6561}\cdot\frac{k^6}{h^6} + \frac{374}{19683}\cdot\frac{k^7}{h^7}\sqrt{3} - enz.\right\}$$

†† De twee laatſte reekſen, waardoor men de twee andere wortels vinden kan, bevestigen dan ook, dat, in het onherleidbaar geval, alle de wortels der cubiſche vergelijking beſtaanbaar zijn.

§. 890. Maar de herleiding der cubiſche wortel-uitdrukkingen in reekſen is, hoezeer deze de beſtaanbaarheid der wortels in het onherleidbaar geval bewijst, geene herleiding, hoedanige men ſteeds zoekt: men verkrijgt daardoor geene bepaalde, en uit een bepaald getal termen beſtaande ſtelkundige uitdrukking, waaruit alle onbeſtaanbare termen zijn opgeheven. De uitdrukking van CARDANUS ſchijnt voor zulk eene herleiding niet vatbaar te zijn. Wanneer, bij voorbeeld, gegeven is: $x = \sqrt{(h + k\sqrt{-1})} + \sqrt{(h - k\sqrt{-1})}$, en men dezelve tot de tweede magt verheft; dan zal men vinden: $x^2 = 2h + \ldots 2\sqrt{(h^2 + k^2)}$, en x wordt gelijk aan $\sqrt{[2h + 2\sqrt{(h^2 + k^2)}]}$, welke klaarblijkelijk eene beſtaanbare uitdrukking is. Wanneer nog gegeven ware: $x = \sqrt[4]{(h + k\sqrt{-1})} + \sqrt[4]{(h - k\sqrt{-1})}$, dan zou men, door

door deze vergelijking tot de tweede magt te verheffen, verkrijgen: $x^2 = \sqrt{(h + k\sqrt{-1})} + \sqrt{(h - k\sqrt{-1})} + 2\sqrt[4]{(h^2 + k^2)} = \ldots$ $\sqrt{(2h + 2\sqrt{(h^2 + k^2)})} + 2\sqrt[4]{(h^2 + k^2)}$, en, voor de waarde van x zelve: $x = \sqrt{\left\{\sqrt{[2h + 2\sqrt{(h^2 + k^2)}]} + 2\sqrt[4]{(h^2 + k^2)}\right\}}$.

Men zal, in het algemeen, de uitdrukking, $\sqrt[n]{(h + k\sqrt{-1})} + \ldots$ $\sqrt[n]{(h - k\sqrt{-1})}$, zoo dikwijls n een zekere magt van het getal *twee* is, onder eenen bestaanbaren stelkundigen vorm kunnen brengen, en, zonder hulp der onbepaalde reeksen, de bestaanbaarheid dezer uitdrukking blijkbaar maken. Tot zoodanig eene bepaalde stelkundige uitdrukking zou nu de formule $x = \sqrt[3]{(h + k\sqrt{-1})} + \sqrt[3]{(h - k\sqrt{-1})}$ herleidbaar moeten zijn, om, zonder hulp der reeksen, de waarde des wortels in getallen te bepalen; doch vermits de eenige weg, welke daartoe open staat, zulk eene herleiding niet gedoogt, schijnt het, dat men aan dezelve voor altijd moet wanhopen. Verheffen wij deze vergelijking tot de derde magt; dan vindt men: $x^3 = 2h + \ldots$ $3\sqrt[3]{(h^2 + k^2)} \times [\sqrt[3]{(h + k\sqrt{-1})} + \sqrt[3]{(h - k\sqrt{-1})}]$; dat is, na herleiding: $x^3 - 3x\sqrt[3]{(h^2 + k^2)} - 2h = 0$. Deze is wederom eene cubische vergelijking: wanneer nu deze zelve niet tot het onherleidbare geval behoorde, dan zou alles gevonden zijn: maar daar $\ldots$ $\frac{1}{4}(2h)^2 + \frac{1}{27}(-3\sqrt[3]{(h^2 + k^2)})^3 = -k^2$ is, is het tegengestelde waar, en de zwarigheid blijft dezelfde. Dan, men kan, door deze nieuwe cubische vergelijking, op eene andere wijze, betoogen: dat de formule van Cardanus, in het onherleidbaar geval, eene bestaanbare waarde heeft. Want indien $k = 0$ ware, zou $x = 2\sqrt[3]{h}$ zijn; nu kan men betoogen: dat, wanneer k eenige waarde heeft, x altijd eene wezenlijke en bestaanbare waarde zal moeten hebben. Uit de voorgaande vergelijking volgt: $\sqrt[3]{(h^2 + k^2)} = \frac{x^3 - 2h}{3x}$: deze tot de derde magt verheven zijnde, verkrijgt men: $h^2 + k^2 = \ldots$ $\frac{x^9 - 6x^6 h + 12x^3 h^2 - 8h^3}{27x^3}$ en $k^2 = \frac{x^9 - 6x^6 h - 15x^3 h^2 - 8h^3}{27x^3}$ $= \frac{1}{27}\left(1 - \frac{8h}{x^3}\right) \times (x^3 + h)^2$. Wanneer men in deze uitdruk-

king

king $x^3 = 8h$ ſtelt, wordt $k = 0$. Nemen wij nu voor een oogenblik h ſtandvastig; dan zal k^2 ſteeds grooter worden, naarmate x toeneemt; want, in dit geval, zal de breuk $8h : x^3$ ſteeds minder dan één worden, en $(x^3 + h)^2$ zal insgelijks toenemen; wanneer men derhalve x^3 langzamerhand van $8h$ tot in het oneindige doet toenemen, zal ook de waarde van k^2, van nul af tot in het oneindige, grooter worden; waaruit dan volgt: dat, welke ook de waarde van k zij, k^2 altijd met eene beſtaanbare waarde van x zal overéénſtemmen.

§. 891. Trekken wij nu alles te zamen, wat tot de oploſſing eener cubiſche vergelijking behoort. Indien gegeven is

$$y^3 + ay^2 + by + c = 0$$

dan zullen de wortels der vergelijking:

$$x^3 + (b - \tfrac{1}{3}a^2)x + (c - \tfrac{1}{3}ba + \tfrac{2}{27}a^3) = 0$$

met $\frac{1}{3}a$ verminderd worden, om die van de gegevene vergelijking in y te verkrijgen. Men make dan:

$$b - \tfrac{1}{3}a^2 = p \quad \text{en} \quad c - \tfrac{1}{3}ba + \tfrac{2}{27}a^3 = q$$

dan verandert de voorgaande in:

$$x^3 + px + q = 0$$

Indien nu $\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3$ poſitief is, dan zal deze vergelijking éénen beſtaanbaren en twee onbeſtaanbare wortels hebben; en drie wezenlijke wortels, indien dezelfde uitdrukking negatief is: ſtellende nu, kortheidshalve $\sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)} = \sqrt{k}$, en $-\frac{1}{2}q = h$; dan zullen 1, ρ, ρ' de drie cubus-wortelen uit de éénheid, of $1, -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}$ en $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3}$ zijnde, de drie wortelen der vergelijking $x^3 + px + q = 0$ zijn, als volgt:

$$1^\circ \quad \sqrt[3]{(h + \sqrt{k})} + \sqrt[3]{(h - \sqrt{k})}$$

$$2^\circ \quad \rho\sqrt[3]{(h + \sqrt{k})} + \rho'\sqrt[3]{(h - \sqrt{k})}$$

$$3^\circ \quad \rho'\sqrt[3]{(h + \sqrt{k})} + \rho\sqrt[3]{(h - \sqrt{k})}$$

Men vermindere nu deze uitdrukkingen elk met $\frac{1}{3}a$; dan zal men de wortels der gegevene vergelijking $y^3 + ay^2 + by + c = 0$ verkrijgen.

Indien $\sqrt[3]{(h + \sqrt{k})}$ tot den vorm $m + \sqrt{n}$ herleidbaar is; dan zal ook $\sqrt[3]{(h - \sqrt{k})} = m - \sqrt{n}$, en de beſtaanbare wortel zal meetbaar en gelijk $2m$ zijn. Doch, indien $\sqrt[3]{(h + \sqrt{k})}$ niet tot den vorm $m + \sqrt{n}$ herleidbaar is, zal het niet mogelijk zijn, den beſtaanbaren

wor-

wortel eenvoudiger uittedrukken, en zijn getallen waarde wordt door eene quadraats en twee cubus-worteltrekkingen gevonden.

Is eindelijk $\sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)}$ onbestaanbaar en van den vorm . . . $k\sqrt{-1}$, zal men de getallen waarde van den eersten wortel

$$\sqrt[3]{(h + k\sqrt{-1})} + \sqrt[3]{(h - k\sqrt{-1})} = x$$

niet anders dan door de reeks:

$$2\sqrt[3]{h} \times \left\{ 1 + \tfrac{1}{9}\left(\frac{k}{h}\right)^2 - \frac{10}{243}\left(\frac{k}{h}\right)^4 + \frac{154}{6561}\left(\frac{k}{h}\right)^6 - \frac{935}{59049}\left(\frac{k}{h}\right)^8 + enz. \right\}$$

kunnen berekenen, en om van dezelve met goed gevolg gebruik te kunnen maken, moet h aanmerkelijk grooter dan k zijn. Indien het tegengestelde plaats heeft, zal men den eersten term h met den tweeden term $k\sqrt{-1}$ verwisselen, en de cubus-wortelen van $+k\sqrt{-1} + h$ en van $-k\sqrt{-1} + h$ ontwikkelen, en deze reeksen bij elkander tellen, en dan zal men vinden:

$$-\frac{2h}{3\sqrt[3]{k^2}} \times \left\{ 1 - \frac{5}{27}\left(\frac{h}{k}\right)^2 + \frac{22}{243}\left(\frac{h}{k}\right)^4 - \frac{374}{6561}\left(\frac{h}{k}\right)^6 + enz. \right\}$$

Om de twee andere wortels te benaderen, zal men van de reeksen van §. 889. gebruik maken, welke onder eenen geschikteren vorm kunnen gebragt worden, door de termen, welke met $\sqrt{3}$ vermenigvuldigd zijn, aftezonderen; alsdan zal men, voor de tweede en derde wortels, vinden: (vergelijk §. 885.)

$$-\sqrt[3]{h}.\left\{1 + \frac{1}{9}\left(\frac{k}{h}\right)^2 - \frac{10}{243}\left(\frac{k}{h}\right)^4 + \frac{154}{6561}\left(\frac{k}{h}\right)^6 - \frac{935}{59059}\left(\frac{k}{h}\right)^8 + enz.\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\pm\frac{k\sqrt{3}}{3\sqrt[3]{h^2}}.\left\{1 - \frac{5}{27}\left(\frac{k}{h}\right)^2 + \frac{22}{243}\left(\frac{k}{h}\right)^4 - \frac{374}{6561}\left(\frac{k}{h}\right)^6 + enz.\right\}$$

§. 892. I. VOORBEELD. Laat gegeven zijn de vergelijking $y^3 + 9y^2 + 39y + 55 = 0$; dan is $a = 9$, $b = 39$, $c = 55$; derhalve $b - \frac{1}{3}a^2 = 12 = p$, en $c - \frac{1}{3}ba + \frac{2}{27}a^3 = -8 = q$, en de vergelijking in x wordt $x^3 + 12x - 8 = 0$: nu is $\sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$, en wij hebben voor den eenigen bestaanbaren wortel van $x^3 + 12x - 8$

$$\sqrt[3]{(4 + 4\sqrt{5})} + \sqrt[3]{(4 - 4\sqrt{5})} = x$$

of

of, aangezien $\sqrt{5} = 2,2360679775$ is, zal men hebben:

$$\sqrt[3]{12,94427191} + \sqrt[3]{-4,94427191} = x$$

Men doet het best deze cubus-wortels door de Logarithmen te zoeken:

Log. 12, 94 *enz.* $= 1,1120759$	*Log.* 4, 94 *enz.* $= 0,6941040$
3)	3)
$0,3706920$	$0,2313680$
getal $= 2,34797$	getal $= 1,70360$

derhalve is $x = 2,34797 - 1,70360 = 0,64437$ nagenoeg de wortel van $x^3 + 12x - 8 = 0$, en $y = -2,35563$ nagenoeg.

§. 893. 2. Voorbeeld. Zij gegeven de vergelijking $x^3 - 21x + 37 = 0$; dan is $p = -21$, $q = 37$, $\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3 = -\frac{3}{4}$: de vergelijking heeft derhalve drie beſtaanbare wortels, en men zal, om dezelve te vinden, de reekſen van §. 891. gebruiken kunnen. In deze reekſen, is $h = -18,5$; $k = \frac{1}{2}\sqrt{3}$; derhalve $\sqrt[3]{h} = -2,644786236347$; $k^2 : h^2 = 0,00219\,13805\,697$; $\frac{k\sqrt{3}}{3\sqrt[3]{h^2}} = \frac{1}{2 \times (2,644786236347)^2} =$ $0,07148\,0709165$; voorts zal men vinden: $1 + \frac{1}{9}\left(\frac{k}{h}\right)^2 - enz.$ $= 1,00024\,3289357$, hetwelk, met $2\sqrt[3]{h}$ vermenigvuldigd zijnde, geven zal voor den eerſten wortel $-5,29085\,9369381$. Eindelijk zal men vinden: $1 - \frac{5}{27}\left(\frac{k}{h}\right)^2 + enz. = 0,99959\,4622946$ en $\frac{k\sqrt{3}}{3\sqrt[3]{h^2}} \times$ $\left\{1 - \frac{5}{27}\left(\frac{k}{h}\right)^2 + enz.\right\} = 0,07145\,1732525$, en hieruit vindt men: $+2,71688\,1417215$ en $+2,57397\,7952165$ voor de twee andere wortels der vergelijking.

§. 894. Daar men (zie §. 872 en 873.) uit elke hooge magtsvergelijking den tweeden term kan weg maken, valt men natuurlijk op de gedachte, of men niet eene cubiſche vergelijking, $y^3 + ay^2 + by + c = 0$, in eene andere cubiſche vergelijking van den vorm $x^3 + r = 0$ zou kunnen herleiden? indien toch zulk eene herleiding mogelijk ware, zou de oploſſing der cubiſche vergelijking ſlechts van éene cubus-worteltrekking afhangen. Dan men zal zien, dat de kunstgreep, waardoor men den tweeden term doet verdwijnen, tot dit oogmerk niet ſtrekken kan; want ſtellende, gelijk in §. 872, $y = x + r$, dan zou men in de vergelijking:

$x^3 +$

$x^3 + (a + 3r)x^2 + (b + 2ar + 3r^2)x + (c + br + ar^2 + r^3) = 0$ moeten aannemen $a + 3r = 0$, en $b + 2ar + 3r^2 = 0$, omdat 'er nu, in deze vergelijkingen, flechts éénе onbepaalde grootheid r voorkomt, kan men, zonder tusfchen a en b eene zekere betrekking aantenemen, welke met de algemeenheid (126) der gegevene vergelijking ftrijdig is, niet voldoen, en deze kunstgreep kan dan tot dat oogmerk niet geleiden. Nogtans heeft TSCHIRNHAUSEN in 1683 (127) een middel gevonden, om tot eene vergelijking van den vorm $x^3 + r = 0$ te komen. Zie hier zijne handelwijze, welke, zoo als men gemakkelijk bewijzen kan, algemeen is.

§. 895. Zij wederom gegeven $y^3 + ay^2 + by + c = 0$; dan neemt TSCHIRNHAUSEN $y^2 = py + q + x$, in welke hulp vergelijking p, q en x drie onbepaalde grootheden zijn, waar over men in het vervolg nader befchikken kan: deze aangenomene vergelijking met y vermenigvuldigende, en voor y^2, in het product $y^3 = py^2 + qy + xy$, hare waarde $py + q + x$ ftellende, verkrijgt men: $y^3 = p^2y + pq + px + qy + xy$, en eindelijk deze waarden van y^3 en y^2 in de gegevene vergelijking $y^3 + ay^2 + by + c = 0$ overbrengende:

$$(p^2 + ap + q + b + x)y + (a + p).(q + x) + c = 0$$

waaruit volgt:

$$y = -\frac{(a + p).(q + x) + c}{(p^2 + ap + b) + (q + x)} \quad \ldots \quad (A)$$

en nu moeten x, p en q zoodanig bepaald worden, dat tevens aan de aangenomene vergelijking $y^2 = py + q + x$ voldaan worde.

Stelt men in de aangenomene vergelijking voor y de waarde, welke voor dezelve in (A) gevonden is; dan verkrijgt men:

$$\frac{[(a+p).(q+x)+c]^2}{[(p^2+ap+b)+(q+x)]^2} + \frac{p(a+p)(q+x)+pc}{(p^2+ap+b)+(q+x)} - (q+x) = 0$$

wel-

(126) Want tot de beftaanbaarheid dezer twee vergelijkingen wordt gevorderd, dat $b = \frac{1}{3}a^2$ zij, en zulks volgt ook uit de vergelijking:

$$x^3 + (b - \tfrac{1}{3}a^2)x + (c - \tfrac{1}{3}ba + \tfrac{2}{27}a^3) = 0$$

welke daardoor in $x^3 + (c - \frac{1}{27}a^3) = 0$ verandert. De wortels van alle cubifche vergelijkingen van den vorm $y^3 + ay^2 + \frac{1}{3}a^2y + c = 0$ zijn derhalve: $x = \sqrt[3]{(\frac{1}{27}a^3 - c)}$; $x = \rho\sqrt[3]{(\frac{1}{27}a^3 - c)}$ en $x = \rho'\sqrt[3]{(\frac{1}{27}a^3 - c)}$.

(127) TSCHIRNHAUSEN, Heer van *Killingswald* in *Opper-Lautznitz*, omtrent 1672 Officier in Hollandfchen dienst, maakte deze leerwijze in 1683 in de *Acta Eruditorum* bekend.

welke herleid, en naar de magten van $(q+x)$ geordend zijnde, geven zal:

$$(x+q)^3-(a^2+ap-2b).(x+q)^2+(bp^2+(ab-3c)p+b^2-2ac)(x+q)-c(p^3+ap^2+bp+c)=0$$

en, wanneer men de magten van $x+q$ ontwikkelt, en alle de termen naar de magten van x ordent; dan zal men vinden:

$$x^3+(3q-a^2-ap+2b)x^2+[3q^2-2q(a^2+ap-2b)+bp^2+(ab-3c)p+b^2-2ac]x+q^3-(a^2+ap-2b)q^2+[bp^2+(ab-3c)p+b^2-2ac]q-c(p^3+ap^2+bp+c)=0$$

dit is eene cubifche vergelijking; maar, daar derzelver coefficienten van twee onbepaalde grootheden p en q afhangen, zal men de coefficienten van x^2 en x gelijk nul ftellen kunnen: men verkrijgt alsdan de vergelijkingen:

$$3q-a^2-ap+2b=0 \quad \ldots\ldots \quad (B)$$

$$3q^2-2q(a^2+ap-2b)+bp^2+(ab-3c)p+b^2-2ac=0 \quad \ldots\ldots \quad (C)$$

door welke p en q zullen kunnen bepaald worden. Stellen wij dan:

$$r=q^3-(a^2+ap-2b)q^2+[bp^2+(ab-3c)p+b^2-2ac]q-c(p^3+ap^2+bp+c) \quad \ldots\ldots \quad (D)$$

dan zal de waarde van r door de gevondene waarden van p en q bepaald zijn, en de voorgaande cubifche vergelijking verandert in

$$x^3+r=0$$

welker wortels $\sqrt[3]{-r}$, $\rho\sqrt[3]{-r}$ en $\rho'\sqrt[3]{-r}$ zijn.

De vergelijking (B) geeft

$$q=\tfrac{1}{3}(a^2+ap-2b) \quad \ldots\ldots \quad (E)$$

en ftelt men deze waarde van q in de vergelijking (C); dan zal men, na herleiding, vinden:

$$(a^2-3b)p^2+(9c-7ab+2a^3)p+(a^4-4a^2b+\ldots 6ac+b^2)=0 \quad \ldots\ldots \quad (F)$$

§. 896. Deze laatfte vergelijking zal twee waarden voor p geven, waarmede, wanneer men dezelve in de vergelijking (E) overbrengt, twee overëënkomftige waarden voor q zullen overëënftemmen, en, met deze overëënkomftige waarden van p en q, zullen insgelijks twee waarden van r uit vergelijking (D) overëënftemmen; deze waarden van r bekend zijnde, zal ook x en laatftelijk y bekend worden. 'Er zijn derhalve twee ftelfels van waarden voor p en q, met elk van welke, drie waarden van x zullen overëënftemmen: men zal dus zes waarden voor y vinden, hetgeen veel gronds geeft om te vermoeden, dat, offchoon de de vierkants vergelijking (F) geene zesde magts vergelijking van de tweede-magts vorm is, gelijk in de oplosfing van CARDANUS plaats heeft, men nogtans dezelfde zwarigheid zal moeten overwinnen.

§. 897. Stellen wij, om de oplosfing van TSCHIRNHAUSEN met die van CARDANUS te vergelijken, $a = 0$; dan is de vergelijking, die men moet oplosfen, $y^3 + by + c = 0$, en nu wordt

$$(F) \quad \ldots \ldots \quad p^2 - \frac{3cp}{b} - \tfrac{1}{3}b = 0$$

$$(E) \quad \ldots \ldots \ldots \quad q = -\tfrac{2}{3}b$$

$$(D) \quad r = q^3 + 2bq^2 + (bp^2 - 3cp + b^2)q - (cp^3 + bcp + c^2)$$

$$(A) \quad \ldots \ldots \quad y = -\frac{p(q+x)+c}{(p^2+b)+(q+x)}$$

Indien men, in dezen toeftand, de vergelijking (F) oplost, vindt men:

$$p = \frac{+\tfrac{1}{2}c \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}c^2 + \tfrac{1}{27}b^3)}}{\tfrac{1}{3}b}$$

Deze waarde van p doet zien: dat de beftaanbaarheid der wortels van de vierkants vergelijking in p van dezelfde voorwaarde als die van de vergelijking $y^6 + cy^3 - \tfrac{1}{27}b^3 = 0$, in de oplosfing van CARDANUS, afhangt, en het wordt alzoo ten hoogfte waarfchijnelijk, dat de waarde van y in de vergelijking (A), even als de formule van de gewone oplosfing, onherleidbaar zal zijn.

§. 898. TSCHIRNHAUSEN bepaalt de waarde van y door de aangenomene vergelijking $y^2 = py + q + x$, en begaat hierin eenen misflag; want de fom van de wortels dezer vergelijking is p, en is derhalve gelijk aan de fom van twee wortels der vergelijking $y^3 + ay^2 + by + c = 0$: daar nu, uit drie dingen, twee dingen, op drie onderfcheidene wijzen, gecombineerd kunnen worden, zou y te gelijk van eene tweede en van eene derde magts vergelijking moeten afhangen.

§. 899. De aangenomene vergelijking heeft dan met de gegevene flechts éénen wortel gemeen: beide vergelijkingen hebben dan eenen gemeenen eerfte-magts deeler: indien men derhalve den gemeenen deeler van de gegevene en de aangenomene vergelijking zoekt, zal men op de vergelijking (A) terugkomen. TSCHIRNHAUSEN neemt dan eene vergelijking aan, welke, in zijne redeneerwijze, met de gegevene eenen gemeenen wortel verkrijgt. Deze aanmerking kan veel lichts over zijne oplosfing verfpreiden.

§. 900. De vergelijking $x^3 + r = 0$ geeft: $x = -\sqrt[3]{r}$, $x = -\rho\sqrt[3]{r}$ en en $x = -\rho'\sqrt[3]{r} = -\rho^2\sqrt[3]{r}$, [want $(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3})^2$ is gelijk $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3}$, en gevolgelijk is $\rho^2 = \rho'$.] Stellen wij nu de drie wortelen der gegevene vergelijking $y^3 + ay^2 + by + c = 0$, gelijk aan y', y'', y'''; dan zal, aangezien de drie waarden van x met de drie wortels der gegevene vergelijking moeten instemmen, de aangenomene vergelijking, $y^2 = py + q + x$, de drie volgende gedaanten verkrijgen:

$$y'^2 = py' + q - \sqrt[3]{r};\quad y''^2 = py'' + q - \rho\sqrt[3]{r};$$

$$y'''^2 = py''' + q - \rho^2\sqrt[3]{r}$$

men vermenigvuldige de tweede met ρ, en de derde met ρ^2; dan zal men, omdat $\rho^4 = \rho$ is, (waarvan men zich gemakkelijk kan overtuigen,) en $1 + \rho + \rho^2 = 0$, zie §. 879, de som dezer producten, bij de eerste vergelijking opgeteld, geven:

$$p = \frac{y'^2 + \rho y''^2 + \rho^2 y'''^2}{y' + \rho y'' + \rho^2 y'''}$$

In deze vergelijking kan men de wortels y', y'' en y''' op zoo vele wijzen verzetten als mogelijk is; want men vindt in den zamenhang der vergelijkingen niets, waarom men eenige bijzondere waarde van x, liever dan eenige andere, met eenigen bijzonderen wortel van de vergelijking in y verbinden zou. Men heeft dan de navolgende zes vergelijkingen:

$$1^\circ\ p = \frac{y'^2 + \rho y''^2 + \rho^2 y'''^2}{y' + \rho y'' + \rho^2 y'''};\quad 2^\circ\ p = \frac{y'^2 + \rho y'''^2 + \rho^2 y''^2}{y' + \rho y''' + \rho^2 y''};$$

$$3^\circ\ p = \frac{y''^2 + \rho y'^2 + \rho^2 y'''^2}{y'' + \rho y' + \rho^2 y'''};\quad 4^\circ\ p = \frac{y''^2 + \rho y'''^2 + \rho^2 y'^2}{y'' + \rho y''' + \rho^2 y'};$$

$$5^\circ\ p = \frac{y'''^2 + \rho y'^2 + \rho^2 y''^2}{y''' + \rho y' + \rho^2 y''};\quad 6^\circ\ p = \frac{y'''^2 + \rho y''^2 + \rho^2 y'^2}{y''' + \rho y'' + \rho^2 y'}.$$

In den eersten opslag, zou men nu denken moeten: dat de vergelijking in p zes wortels zou behooren te hebben: maar, wanneer men teller en noemer van de eerste breuk eerst met ρ^2, en daarna met ρ vermenigvuldigt, komen de vierde en vijfde breuken te voorschijn, en, wanneer men den teller en noemer der tweede breuk met ρ en ρ^2 vermenigvuldigt, worden de derde en zesde voortgebragt: 'er zijn alzoo slechts twee onderscheidene waarden van p, namelijk:

$$p = \frac{y'^2 + \rho y''^2 + \rho^2 y'''^2}{y' + \rho y'' + \rho^2 y'''}\quad en\quad p = \frac{y'^2 + \rho y'''^2 + \rho^2 y''^2}{y' + \rho y''' + \rho^2 y''}\quad \ldots (G)$$

en dit is de reden waarom, in de oplossing van Tschirnhausen, de vergelijking in p slechts tot de tweede magt opklimt.

§. 901. Indien men de waarden van y'^2, y''^2 en y'''^2 optelt, verkrijgt men: (aangezien $1+\rho+\rho^2=0$ is,)

$$y'^2+y''^2+y'''^2=p(y'+y''+y''')+3q$$

nu is, zie §. 750. $y'+y''+y'''=-a$ en $y'^2+y''^2+y'''^2=a^2-2b$; derhalve is:

$$a^2-2b=-pa+3q; \text{ en } q=\tfrac{1}{3}(a^2+ap-2b)$$

en deze is dezelfde als vergelijking (E), welke boven gevonden is.

§. 902. Indien men de breuken (G) van §. 900, bij elkander optelt, zal men vinden, als volgt:

$$(y'+\rho y''+\rho^2 y''').(y'+\rho y'''+\rho^2 y'')=(y'^2+y''^2+y'''^2)+(\rho+\rho^2).(y'y''+y'y'''+y''y''')$$

nu is $y'^2+y''^2+y'''^2=a^2-2b$ en $y'y''+y'y'''+y''y'''=b$ en $\rho+\rho^2=-1$; gevolgelijk is het product der noemers gelijk a^2-3b. Het product van den teller van de eerste met den noemer der tweede breuk, bij dat van den teller der tweede met den noemer van de eerste opgeteld geeft, (van het theorema van GIRARD gebruik makende,) $9c-7ab+2a^3$: de som der breuken is derhalve gelijk aan $\frac{9c-7ab+2a^3}{a^2-3b}$, en het product eindelijk der breuken zal men bevinden gelijk te zijn aan $\frac{a^4-4a^2b+6ac+b^2}{a^2-3b}$. Deze twee breuken zijn derhalve de wortels van vergelijking (F). Men zal hieruit met weinig moeite vinden, dat de oplossing van TSCHIRNHAUSEN tot die van CARDANUS kan overgebragt worden.

§. 903. Men kan aan de vergelijking (A), in de oplossing van TSCHIRNHAUSEN, den vorm $y=\frac{f+gx}{h+x}$ geven, en de letters f, g en h, als onbepaalde grootheden, aanmerken; wanneer men dan deze vergelijking met $x^3+r=0$ verbindt; dan zal men de onbekende x kunnen wegmaken, waardoor men eene derde magts vergelijking in y verkrijgen zal, welke, met de gegevene $y^3+ay^2+by+c=0$, term voor term, vergeleken zijnde, drie vergelijkingen zal opleveren, door welker oplossing de onbepaalde grootheden f, g en h bekend zullen worden. Immers haalt men uit de eerste vergelijking $x=(f-hy):(y-g)$, en men verkrijgt alzoo: $[(f-hy):(y-g)]^3+r=0$. Dit is de handelwijze, welke BEZOUT in de *Mém. de l'Acad. des Sciences de Paris* 1762 heeft opgegeven, en welke de Lezer verder zal kunnen ontwikkelen.

§. 904. Naderhand, heeft BEZOUT, in de *Mémoires de l'Acad. des Scien-*

Sciences de Paris, 1765, deze laatste leerwijze eenigzins veranderd en op de oplossing van hoogere vergelijkingen, dan die van de derde magt, toegepast. Gegeven zijnde de cubische vergelijking $x^3+px+q=0$; dan neemt hij de twee hulpvergelijkingen $y^3-1=0$ en $ay^2+by+x=0$; beschouwt a, b en y als drie onbepaalde grootheden, en scheidt de waarde van y uit de twee hulpvergelijkingen af. Tot dat einde vermenigvuldigt hij de vergelijking $ay^2+by+x=0$ met y, en stelt, in het product, voor y^3 hare waarde 1, welke uit $y^3-1=0$ volgt; en verkrijgt alzoo: $by^2+xy+a=0$: deze laatste wederom met y vermenigvuldigd en, in het product, $y^3=1$ gesteld zijnde, verkrijgt men: $xy^2+ay+b=0$. Men heeft bijgevolg de vergelijkingen:

$$ay^2+by+x=0;\ by^2+xy+a=0;\ xy^2+ay+b=0$$

Uit de twee eerste vergelijkingen kan men y^2 en y, als twee van elkander onafhankelijke onbekenden, beschouwen, en als zoodanig oplossen; dan zal men vinden:

$$y^2=\frac{x^2-ab}{b^2-ax}\quad en\ y=\frac{a^2-bx}{b^2-ax}$$

en nu zal men deze waarden van y^2 en y in de derde vergelijking $xy^2+ay+b=0$ kunnen overbrengen, hetwelk geven zal:

$$\frac{x^3-abx-abx+a^3}{b^2-ax}+b=0$$

of, na behoorlijke herleiding,

$$x^3-3abx+(a^3+b^3)=0$$

welke met de gegevene vergelijking $x^3+px+q=0$, term voor term, vergeleken zijnde, geven zal:

$$-3ab=p\quad en\ a^3+b^3=q$$

Lost men deze twee vergelijkingen op; dan zal men vinden:

$$a=\sqrt[3]{\left\{-\tfrac{1}{2}q+\sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3)}\right\}};\ b=\sqrt[3]{\left\{-\tfrac{1}{2}q-\sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3)}\right\}}$$

Nu geeft de eerste hulpvergelijking $x=-ay^2-by$: men heeft derhalve:

$$x=-y^2\sqrt[3]{\left\{-\tfrac{1}{2}q+\sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3)}\right\}}-y\sqrt[3]{\left\{-\tfrac{1}{2}q-\sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3)}\right\}}$$

Men moet nu nog de waarde van y kennen, om die van x geheel te bepalen. Maar $y^3-1=0$ zijnde, is, zie §. 877, $y=1$ en $y^2=1$; $y=\rho$ en $y^2=\rho^2=\rho'$; $y=\rho'$ en $y^2=\rho'^2=\rho$; men verkrijgt derhalve voor x dezelfde uitdrukkingen, welke de oplossing van CARDANUS gegeven heeft.

§. 905. Deze zijn de voornaamſte wegen, welke men heeft ingeſlagen, om de cubiſche vergelijkingen optelosſen. Alle deze oplosſingen komen ten laatſte op de uitkomſten van CARDANUS neder, en blijven, in het onherleidbaar geval, met deze laatſte, aan dezelfde zwarigheden onderworpen.

EEN- EN- ZEVENTIGSTE LES.

Over de oplosſing der quadraats-quadraats of vierde magts vergelijkingen.

§. 906. FERRARI, een tijdgenoot en leerling van CARDANUS, was de eerſte, die eenen regel vond, om de vierde magts vergelijkingen optelosſen. Hij herleide vooraf de gegevene vierde magts vergelijking tot eene andere, in welke de tweede term ontbreekt. Gegeven zijnde

$$y^4 + a y^3 + b y^2 + c y + d = 0$$

dan ſtelle men, volgens §. 873, $y = x - \frac{1}{4} a$; en men zal verkrijgen:

$$x^4 + (b - \tfrac{3}{8} a^2) x^2 + (c - \tfrac{1}{2} b a + \tfrac{1}{8} a^3) x + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$
$$(d - \tfrac{1}{4} a c + \tfrac{1}{16} a^2 b - \tfrac{3}{256} a^4) = 0$$

of, ſtellende $b - \frac{3}{8} a^2 = p$; $c - \frac{1}{2} b a + \frac{1}{8} a^3 = q$ en $d - \frac{1}{4} a c + \frac{1}{16} a^2 b - \frac{3}{256} a^4 = r$, de vergelijking:

$$x^4 + p x^2 + q x + r = 0$$

§. 907. FERRARI ondernam de oplosſing dezer laatſte vergelijking, bragt, tot dat einde, den term x^4 in het voorſte lid over, en verkreeg alzoo: $x^4 = - p x^2 - q x - r$: nu nam hij eene onbepaalde grootheid z aan, telde bij beide leden dezer vergelijking de tweeledige uitdrukking $2 z x^2 + z^2$, en verkreeg alzoo de vergelijking:

$$x^4 + 2 x^2 z + z^2 = (2 z - p) x^2 - q x + (z^2 - r) \quad . \; . \; . \; (\Delta)$$

Het eerſte lid dezer vergelijking, is een volkomen ſtelkundig vierkant, welks wortel $x^2 + z$ is: wanneer nu ook het achterſte lid zulk een volkomen ſtelkundig vierkant ware, dan zou men, door den vierkants-wortel uit beide leden der vergelijking te trekken, tot eene vierkants-vergelijking komen, uit welke, indien z bekend ware, x zou kunnen opgelost worden. FERRARI viel op het gelukkig denkbeeld, om de coefficienten van het tweede lid dezer vergelijking zoodanig te bepalen, dat hetzelve een volkomen vierkant werd. Indedaad is in elk vierkant, $\alpha^2 r^2 + 2 \alpha \beta r s + \beta^2 s^2 = (\alpha r + \beta s)^2$, het vierkant

van

van de helft van den coefficient des tweeden terms gelijk aan het product van de coefficienten der eerste en derde termen. Op dat dan het tweede lid der vergelijking (Δ) een volkomen vierkant worde, zal men:

$$\tfrac{1}{4} q^2 = (2z - p) \times (z^2 - r)$$

moeten stellen. Deze vergelijking bevat de onbepaalde grootheid z, en alle de andere letters zijn bekend: indien men dezelve ontwikkelt, verkrijgt men de cubische vergelijking:

$$z^3 - \tfrac{1}{2} p z^2 - r z + \tfrac{1}{2} (r p - \tfrac{1}{4} q^2) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (A)$$

Deze vergelijking is, in de oplossing van FERRARI, de herleide, welke z zal doen kennen. Men neme dan de waarde van z als bekend; dan zal, vermits $z^2 - r = q^2 : 4(2z - p)$ is, de vergelijking (Δ), de volgende gedaante verkrijgen:

$$x^4 + 2x^2 z + z^2 = \left[x - \frac{q}{2(2z-p)}\right]^2 \times (2z - p)$$

Trekt men uit deze den vierkants-wortel, dan verkrijgt men:

$$x^2 + z = \left[x - \frac{q}{2(2z-p)}\right] \times \sqrt{(2z-p)} \quad . \quad . \quad . \quad (B)$$

waarin x alleen onbekend is, en welke, indien men dezelve, naar de bekende regels, oplost, voor x geven zal:

$$x = \tfrac{1}{2} . \left\{\sqrt{(2z-p)} + \sqrt{\left[-2z - p - \frac{2q}{\sqrt{(2z-p)}}\right]}\right\} \quad . \quad . \quad (C)$$

welke, wanneer men, zoo als het behoort, de uitdrukkingen, onder de vierkants wortel-teekens, beurteling positief en negatief stelt, de vier wortels der gegevene vierde magts vergelijking $x^4 + p x^2 + q x + r = 0$ geven zullen. Dit is de geest van de oplossing van FERRARI, in welke de oplossing der vierde magts vergelijkingen van de oplossing eener derde magts vergelijking afhangt. Beschouwen wij deze oplossing wat meer van nabij.

§. 908. De vergelijking (B) kan onder de gedaante

$$x^2 - x\sqrt{(2z-p)} + z + \frac{q}{2\sqrt{(2z-p)}} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (D)$$

gesteld worden, welke, wanneer men de wortel-uitdrukking negatief neemt, in

$$x^2 + x\sqrt{(2z-p)} + z - \frac{q}{2\sqrt{(2z-p)}} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (E)$$

verandert. De oplossing van (D) geeft twee van de wortels der gegevene vierde magts vergelijking, en de oplossing van (E) geeft de twee andere wortels, welke vier wortels al te zamen in de vergelijking (C) begrepen zijn.

§. 909. †† *De vergelijkingen* (D) *en* (E) *zijn factoren der vergelijking* $x^4 + p x^2 + q x + r = 0$. Om zulks te bewijzen, ſtelle men, kortheidshalve: $\sqrt{(2z-p)} = P$; $z + q : 2\sqrt{(2z-p)} = Q$, en $z - q : 2\sqrt{(2z-p)} = R$; dan geeft het product der vergelijkingen (D) en (E)

$$x^4 + (Q + R - P^2) x^2 + P(Q - R) x + QR = 0 \;...\; (F)$$

Nu is klaarblijkelijk $Q + R = 2z$; $P^2 = 2z - p$; derhalve $Q + R - P^2 = 2z - (2z - p) = +p$. Voorts is:

$$Q - R = z + \frac{q}{2\sqrt{(2z-p)}} - \left[z - \frac{q}{2\sqrt{(2z-p)}}\right] = \frac{q}{\sqrt{(2z-p)}}$$

en daarom zal $(Q - R) \times P = +q$ zijn. Eindelijk is $QR = z^2 - \frac{q^2}{4(2z-p)} = \frac{8z^3 - 4pz^2 - q^2}{8z - 4p}$. Deze waarde van QR is gelijk aan r; want, wanneer men $(8z^3 - 4pz^2 - q^2) : (8z - 4p) = r$ ſtelt, komt de cubiſche vergelijking, welke de waarde van z bepaalt, (A) te voorſchijn. Het product der twee vierkants-vergelijkingen (D) en (E), is derhalve gelijk aan de gegevene vierde magts vergelijking; de vierkants- vergelijkingen kunnen derhalve als derzelver factoren worden aangemerkt. Nu geeft de oplosſing der vierkants vergelijkingen de volgende waarden voor x:

$$x = \tfrac{1}{2} \cdot \left\{\sqrt{(2z-p)} \pm \sqrt{\left[-2z - p - \frac{2q}{\sqrt{(2z-p)}}\right]}\right\} \;...\; (C)$$

uit de eerſte (D), en uit de tweede (E),

$$x = \tfrac{1}{2} \cdot \left\{-\sqrt{(2z-p)} \pm \sqrt{\left[-2z - p + \frac{2q}{\sqrt{(2z-p)}}\right]}\right\} \;...\; (C)$$

welke beide in de vergelijking (C) van §. 907, beprepen zijn.

§. 910. †† *Het blijkt nu ten klaarſte, waarom de herleide in* z *tot de derde magt opklimt.* Want, in de oplosſing van FERRARI, wordt eigenlijk de gegevene vierde magts vergelijking in twee tweede magts factoren ontleed, welker bepaling van ééne onbekende z afhangt: nu bevat elke tweede magts factor twee wortels: dan, aangezien de oplosſing natuurlijk onbepaald laat, welke twee dezer wortels in (D), en welke twee andere in (E) zullen begrepen zijn? moet, wegens de ſtrikte algemeenheid der ſtelkundige redeneringen, daar vier dingen, op zes onderſcheidene wijzen, twee aan twee, kunnen gecombineerd worden, de onbepaalde grootheid z, welke twee dezer combinatien bepaalt, drie onderſcheidene waarden hebben, en kan derhalve niet an-

anders, dan door de oplossing eener derde magts vergelijking, gevonden worden.

§. 911. †† *Welke van de drie wortels der herleide* (A) *men in de formule* (C) *stelle, zal men, door elk dezer, de vier wortels der gegevene moeten vinden.* Stellen wij, om aan dit gestelde den uitersten graad van klaarblijkelijkheid te geven, z', z'' en z''', de drie wortels der herleide (A); dan zal altijd, welke dezer drie wortels in plaats van z, in P, Q en R, en in vergelijking (F) geplaatst moge worden, 1° $Q + R - P^2 = + p$; $P(Q-R) = + q$ zijn; en vermits de wortels z', z'' en z''', elk in het bijzonder, aan de vergelijking $QR = (8z^3 - 4pz^2 - q^2) : (8z - 4p) = r$ voldoen moeten, zal ook, voor elk van dezelve, $QR = r$ moeten zijn.

§. 912. Descartes, waarschijnlijk door de uitkomst van Ferrari's oplossing voorgelicht, neemt twee onbepaalde tweede magts factoren aan, welker product hij aan de gegevene vierde magts vergelijking gelijk stelt. Laat $x^4 + nx^3 + px^2 + qx + r = 0$ de gegevene vergelijking zijn: men neme dan $x^2 + fx + g = 0$, en $x^2 + hx + k = 0$ voor derzelver tweede magts factoren; dan zal het product dezer factoren

$$x^4 + (f+h)x^3 + (fh+g+k)x^2 + (fk+gh)x + gk = 0$$

zijn. Dit product moet nu aan de gegevene vergelijking gelijk zijn: men zal gevolgelijk, ter bepaling der vier onbepaalde grootheden, f, g, h en k, de volgende vier vergelijkingen verkrijgen:

$$f+h=n;\ fh+g+k=p;\ fk+gh=q;\ \textit{en}\ gk=r$$

Descartes doet, even als Ferrari, den tweeden term der gegevene vergelijking verdwijnen. In zijne oplossing is derhalve $n=0$, en $f+h=0$, en gevolgelijk $h=-f$. Hierdoor wordt de oplossing eenvoudiger: in plaats der vier bovenstaande vergelijkingen verkrijgt men deze drie meer eenvoudige:

$$g+k-f^2=p,\ (k-g)f=q,\ \textit{en}\ gk=r$$

en de aangenomene factoren worden, in die onderstelling, $x^2 + fx + g = 0$ en $x^2 - fx + k = 0$.

Uit de twee eerste der drie vergelijkingen volgt onmiddelijk:

$$g = \tfrac{1}{2}\cdot\left\{p + f^2 - \frac{q}{f}\right\},\ \textit{en}\ k = \tfrac{1}{2}\cdot\left\{p + f^2 + \frac{q}{f}\right\} \quad \ldots (G)$$

en, wanneer men deze waarden van g en k in de derde vergelijking $gk = r$ overbrengt; dan zal men, na herleiding, verkrijgen:

$$f^6 + 2pf^4 + (p^2 - 4r)f^2 - q^2 = 0 \quad \ldots (H)$$

en deze is, in de oplossing van Descartes, de herleide, welke eene zesde magts vergelijking van de derde magts vorm is, en naar den regel van CARDANUS kan worden opgelost. Door deze oplossing zal f bekend worden, en de twee aangenomene factoren worden dan:

$$x^2+fx+\tfrac{1}{2}.\left\{p+f^2-\frac{q}{f}\right\}=0;\ x^2-fx+\tfrac{1}{2}\left\{p+f^2+\frac{q}{f}\right\}=0$$

zijnde vierkants vergelijkingen, welker oplossing geeft:

$$1^\circ\quad x=\tfrac{1}{2}.\left\{-f\pm\sqrt{\left[-2p-f^2+\frac{2q}{f}\right]}\right\}\ .\ .\ .\ .\ .\ (I)$$

$$2^\circ\quad x=\tfrac{1}{2}.\left\{+f\pm\sqrt{\left[-2p-f^2-\frac{2q}{f}\right]}\right\}\ .\ .\ .\ .\ .\ (I)$$

§. 913. †† *De uitkomsten dezer oplossing mogen van die van* FERRARI *schijnen onderscheiden te zijn, zij zijn nogtans volmaakt dezelfde.* Want, stellen wij, in de Cartesiaansche oplossing, $\tfrac{1}{2}(g+k)=z$; dan wordt, aangezien $g+k-f^2=p$ is, $f^2=2z-p$; derhalve is $f^6=8z^3-12pz^2+6p^2z-p^3$; verder $+2pf^4=8pz^2-8p^2z+2p^3$; wederom $(p^2-4r)f^2=+(2p^2-8r)z-\ldots(p^3+4pr)$ en $-q^2=-q^2$: deze alle optellende, vindt men: $f^6+2pf^4+(p^2-4r)f^2-q^2=8z^3-4pz^2-8rz+(4pr-q^2)=0$; of, door 8 deelende, $z^3-\tfrac{1}{2}pz^2-rz+\ldots\tfrac{1}{2}(pr-\tfrac{1}{4}q^2)=0$. †† *De herleide vergelijking, in de oplossing van* DESCARTES, *is dan met de herleide, in de oplossing van* FERRARI, *ten naauwste verknocht; want de wortels uit de eerste zijn gelijk aan de vierkants wortels uit de tweevoudige wortels der laatste elk, met p verminderd.* Daar dan $f^2=2z-p$ is, wordt $\tfrac{1}{4}f^2=\tfrac{1}{2}z-\tfrac{1}{4}p$ en $f=\sqrt{(2z-p)}$; makende dan deze substitutie in de vergelijkingen (I) (I); dan zal men de vergelijkingen (C) (C) van FERRARI verkrijgen.

§. 914. Indien men, in de oplossing van DESCARTES, n niet gelijk nul stelt, zal de herleide vergelijking worden:

$$f^6-3nf^5+[3n^2+2p]\times f^4-n[n^2+4p]f^3+[2n^2p+nq+p^2-4r]\times f^2-n[nq+p^2-4r]\times f+[npq-n^2r-q^2]=0\ .\ .\ (K)$$

welke vergelijking de eigenschap heeft, †† *dat, wanneer men haren tweeden term doet verdwijnen, door* $f=\lambda+\tfrac{1}{2}n$ *te stellen, ook te gelijk de vierde en zesde termen zullen vernietigd worden*, zoo dat men verkrijgen zal:

$$\lambda^6-[\tfrac{3}{4}n^2-2p]\times\lambda^4+[\tfrac{9}{16}n^4-n^2p+nq+p^2-4r]\times\lambda^2-[\tfrac{1}{8}n^3-\tfrac{1}{2}np+q]^2=0\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (L)$$

wel-

welke, indien men $n = 0$ ſtelt, met de vergelijking (H) wederom zal inſtemmen (128).

§. 915. †† Men kan dan den tweeden term der gegevene vierde magts vergelijkingen laten beſtaan, en nogtans de handelwijze van DESCARTES gebruiken. †† *De leerwijze van* FERRARI *komt ook, in dit opzicht, met die van* DESCARTES *overëen.* Want uit $x^4 + nx^3 + px^2 + qx + r = 0$, volgt $x^4 + nx^3 = -px^2 - qx - r$; nu is het vierkant van $x^2 + \frac{1}{2}nx + y$ gelijk $x^4 + nx^3 + (\frac{1}{4}n^2 + 2y)x^2 + nyx + y^2$; telt men dan aan beide zijden $(\frac{1}{4}n^2 + 2y)x^2 + nyx + y^2$ bij, dan zal:

$$[x^2 + \tfrac{1}{2}nx + y]^2 = [2y + \tfrac{1}{4}n^2 - p]x^2 + (ny - q)x + y^2 - r$$

zijn, en om het achterſte lid tot een volkomen vierkant te maken, zal men: $\frac{1}{4}(ny - q)^2 = (2y + \frac{1}{4}n^2 - p) \times (y^2 - r)$ moeten ſtellen, waaruit de herleide derde magts vergelijking:

$$y^3 - \tfrac{1}{2}py^2 + \tfrac{1}{4}(nq - 4r)y + \tfrac{1}{8}(4p - n^2)r - \tfrac{1}{8}q^2 = 0 \quad . \; . \; (M)$$

volgen zal, welke in (A) verandert, indien men $n = 0$ ſtelt, en met de vergelijking (L) zoodanig verbonden is, dat $\lambda^2 = 2y + \frac{1}{4}n^2 - p$ is. Hetgeen bij nader onderzoek zal bevestigd worden.

§. 916. De Engelſche Wiskunſtenaar, THOMAS SIMPSON, ſtelt de vierde magts vergelijking $x^4 + nx^3 + px^2 + qx + r = 0$, gelijk aan het verſchil van twee vierkanten, gelijk $[x^2 + \frac{1}{2}nx + h]^2 - [kx + l]^2$, (zijnde h, k en l, drie onbepaalde coëfficienten,) en verkrijgt voor de ontwikkeling van het verſchil dezer vierkanten:

$$x^4 + nx^3 + [\tfrac{1}{4}n^2 + 2h - k^2]x^2 + [nh - 2kl]x + [h^2 - l^2] = 0$$

welke hij, term voor term, met de gegevene vergelijking vergelijkende, de drie volgende vergelijkingen verkrijgt:

$$\tfrac{1}{4}n^2 + 2h - k^2 = p \quad . \; . \; . \; \textit{derhalve} \;\; 2h + (\tfrac{1}{4}n^2 - p) = k^2$$
$$nh - 2kl = q \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad nh - q = 2kl$$
$$h^2 - l^2 = r \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad h^2 - r = l^2$$

waaruit volgt: $[2h + (\frac{1}{4}n^2 - p)] \times [h^2 - r] = k^2l^2 = \frac{1}{4}(nh - q)^2$. Deze vergelijking ontwikkelende, vindt men:

$$h^3 - \tfrac{1}{2}ph^2 + \tfrac{1}{4}(nq - 4r)h + \tfrac{1}{8}(4p - n^2)r - \tfrac{1}{8}q^2 = 0 \quad . \; . \; (N)$$

welke van de vergelijking (M) in de meer algemeene oplosſing van FERRARI niet onderſcheiden is. Voorts vindt men uit de eerſte en twee-

(128) DESCARTES zou ook de uitdrukking $x^2 + fx + g = 0$ als eenen factor der gegevene vergelijking hebben kunnen aanmerken, en de rest der deeling van $x^4 + nx^3 + px^2 + qx + r$ door $x^2 + fx + g$, gelijk nul ſtellen, en zulks zou hem tot dezelfde uitkomſten gebragt hebben.

tweede vergelijking $k = \sqrt{[2h + \frac{1}{4}n^2 - p]}$ en $l = (nh - q) : 2k$: en daar het verschil van twee vierkanten gelijk is, aan de som der wortels dezer vierkanten met derzelver verschil vermenigvuldigd, is de gegevene vierde magts vergelijking in de factoren $x^2 + (\frac{1}{2}n + k)x + (h + l) = 0$ en $x^2 + (\frac{1}{2}n - k)x + (h - l) = 0$ ontleed, en de oplossing dezer vierkants vergelijkingen geeft voor de wortels der gegevene vierde magts vergelijking:

$$x = -\tfrac{1}{4}[n \pm 2k] \pm \sqrt{\left\{\tfrac{1}{16}(n \pm 2k)^2 - (h \pm l)\right\}} \ldots (O)$$

welke, wanneer men in dezelve voor k en l hare waarden stelt, met de verder ontwikkelde oplossing van §. 915. zal overeënkomen, en insgelijks met de formulen (C) van FERRARI, indien men verder $n = 0$ stelt (129), zal overeënstemmen.

§. 917. In alle deze oplossingen, welke tot dezelfde uitkomsten brengen, komt men tot eene herleide van de derde magt, welker wortels alle zonder onderscheid strekken, om die der gegevene vergelijking te vinden, hetgeen, zoo als LAGRANGE ergens aanmerkt, als eene overtolligheid kan aangezien worden. Onderzoeken wij nu, wat 'er gebeuren zal, indien men de oplossing naar de handelwijze van CARDANUS aanvat?

§. 918. Zij gegeven $x^4 + px^2 + qx + r = 0$. Stel $x = t + u + v$, (zijnde t, u en v, drie onbepaalde grootheden,) dan is $x^2 = (t^2 + u^2 + v^2) + 2(tu + tv + uv)$, en het vierkant dezer laatste is $x^4 = (t^2 + u^2 + v^2)^2 + 4(t^2 + u^2 + v^2) \times (tu + tv + uv) + 4(tu + tv + uv)^2$: maar nu is $4(tu + tv + uv)^2 = 4(t^2u^2 + t^2v^2 + u^2v^2) + 8tuv(t + u + v)$, en men heeft derhalve: $x^4 = (t^2 + u^2 + v^2)^2 + 4(t^2 + u^2 + v^2) \times (tu + tv + uv) + 4(t^2u^2 + t^2v^2 + u^2v^2) + 8tuv(t + u + v)$. Men stelle nu deze waarde

(129) SIMPSON geeft te hoog van zijne leerwijze op, (zie *Treatise of Algebra*, *Ed.* 1800, *pag.* 151.) en begaat zelfs eenen grooten misslag met te zeggen: „ *the value of A* (in onze teekens h) *in this Equa-* „ *tion will be* commensurate *and* rational, *not only*, *when all the* „ *roots of the given equation are* commensurate, *but when they are* „ irrational *and even* impossible." Men losse de vergelijking $x^4 + 2x^3 - 47x^2 - 47x + 252 = 0$ op., en men zal, bij de proef, van het tegendeel overtuigd worden. Wij hebben gemeend: zulks te moeten aanteekenen, om dat de Heer STRABBE, in zijne *Inleid. tot de Math. Wet.* deze misstelling van SIMPSON heeft overgenomen.

de van x^4, x^2 en x, in de gegevene vierde magts vergelijking, dan zal men verkrijgen:

$$(t^2+u^2+v^2)^2+p(t^2+u^2+v^2)+(2p+4t^2+4u^2+4v^2)\times(tu+tv+uv)+4(t^2u^2+t^2v^2+u^2v^2)+(q+8tuv)\times(t+u+v)+r=0$$

Men kan nu in deze vergelijking de coefficienten van $(t+u+v)$ en van $(tu+tv+uv)$ gelijk nul ftellen, en dan zal men de drie volgende vergelijkingen verkrijgen:

1° $t^2+u^2+v^2=-\frac{1}{2}p$; 2° $tuv=-\frac{1}{8}q$;

3° $(t^2+u^2+v^2)^2+p(t^2+u^2+v^2)+4(t^2u^2+t^2v^2+u^2v^2)+r=0$

Uit de eerfte dezer vergelijkingen volgt: $(t^2+u^2+v^2)^2=\frac{1}{4}p^2$; men ftelle deze waarde van $(t^2+u^2+v^2)^2$ in de derde; dan verkrijgt men $-\frac{1}{4}p^2+r+4(t^2u^2+t^2v^2+u^2v^2)=0$: hieruit volgt $(t^2u^2+t^2v^2+u^2v^2)=\frac{1}{16}p^2-\frac{1}{4}r$: het vierkant van de tweede vergelijking is: $t^2u^2v^2=+\frac{1}{64}q^2$. Men kent derhalve de fom der grootheden t^2, u^2, v^2; de fom van derzelver producten, twee aan twee, en derzelver product $t^2u^2v^2$: naar de leer der vergelijkingen, zullen derhalve de grootheden t^2, u^2 en v^2, de wortels der cubifche vergelijking:

$$\mu^3+\tfrac{1}{2}p\mu^2+(\tfrac{1}{16}p^2-\tfrac{1}{4}r)\mu-\tfrac{1}{64}q^2=0 \quad . \quad . \quad . \quad (P)$$

zijn, welke, aangezien derzelver coefficienten bekend zijn, naar de leerwijze van CARDANUS, zal kunnen opgelost worden. Noemen wij de wortels dezer vergelijking a, b en c; dan zal $t=\pm\sqrt{a}$; . . . $u=\pm\sqrt{b}$ en $v=\pm\sqrt{c}$ zijn, en men heeft:

$$x=\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (Q)$$

Algemeen genomen, kan men, in deze uitdrukking, de teekens der wortel-uitdrukkingen zoowel negatief als pofitief nemen; het fchijnt dus: dat x acht onderfcheidene waarden zal hebben: dan, in aanmerking nemende, dat $tuv=\sqrt{a}\times\sqrt{b}\times\sqrt{c}=-\frac{1}{8}q$ moet zijn, blijkt het, dat, in de formule $x=\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$, alleen die combinatien van teekens gelden kunnen, welke aan het product $\sqrt{a}\times\sqrt{b}\times\sqrt{c}$ het tegengeftelde teeken van q geven. 'Er zijn derhalve twee gevallen, naar dat q pofitief of negatief is.

I. *Als q pofitief is.*	II. *Als q negatief is.*
$x=-\sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt{c}$	$x=\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$
$x=-\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$	$x=\sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt{c}$
$x=\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}$	$x=-\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{c}$
$x=\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{c}$	$x=-\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}$

§. 919

§. 919. De uitkomst dezer oplossing, welke met die van EULER (130) overëénstemt, is van alle de voorgaanden daarin onderscheiden, dat alle de wortels der herleide in μ in de zamenstelling van den wortel der gegevene vergelijking voorkomen. Nogtans zal het, bij nader onderzoek, blijken: dat de uitkomsten der laatste oplossing met die der voorgaande oplossingen zoo naauw verwandschapt zijn, dat de éene uit de andere kan afgeleid worden. Wanneer men de herleide (P) der laatste oplossing met de herleide (H) van die van DESCARTES vergelijkt, blijkt het, dat, wanneer men $\mu = \frac{1}{4}f^2$ stelt, de herleide (P) in de herleide (H) verandert. Nu is $x = \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = \sqrt{a} + \sqrt{[\sqrt{b} + \sqrt{c}]^2} = \sqrt{a} + \sqrt{(b + c + 2\sqrt{bc})}$: maar $a + b + c = -\frac{1}{2}p$ zijnde, zal $b + c = -\frac{1}{2}p - a$ zijn; wederom is $2\sqrt{bc} = \sqrt{abc} : \frac{1}{2}\sqrt{a} = -\frac{1}{8}q : \frac{1}{2}\sqrt{a} = -q : 4\sqrt{a}$: men verkrijgt dan, (deze waarden van $b + c$ en van $2bc$ overbrengende,) $x = \sqrt{a} + \sqrt{\left[-\frac{1}{2}p - a - \frac{q}{4\sqrt{a}}\right]}$, welke ook onder de gedaante:

$$x = \frac{1}{2}.\left[2\sqrt{a} + \sqrt{\left(-2p - 4a - \frac{q}{\sqrt{a}}\right)}\right]$$

kan gesteld worden: nu is $\mu = \frac{1}{4}f^2$; derhalve $a = \frac{1}{4}f^2$; $4a = f^2$; $\sqrt{a} = \frac{1}{2}f$: en alle deze waarden in de laatste vergelijking overbrengende, verkrijgt men:

$$x = \frac{1}{2}\left\{f + \sqrt{\left[-2p - f^2 - \frac{2q}{f}\right]}\right\}$$

welke, wanneer men onder het oog houdt, dat f zoo wel positief als negatief kan genomen, en de wortel-uitdrukking $\sqrt{[-2p - f^2 - 2q : f]}$ met de teekens $+$ en $-$ moet worden aangedaan, klaarblijkelijk de uitdrukkingen (I) (I) opleveren.

§. 920. De leerwijze van BEZOUT, welke wij in §. 904. op de oplossing der cubische vergelijkingen hebben toegepast, zal almede tot dezelfde uitkomsten brengen. Zij wederom gegeven $x^4 + px^2 + qx + r = 0$. Nemen wij $y^4 - 1 = 0$ en $ay^3 + by^2 + cy + x = 0$. Vermenigvuldigen wij, driemaal achter elkander, de tweede hulp-

(130) EULER is, in zijne *Algebra*, langs eenen geheel anderen weg tot dezelfde uitkomsten gekomen. Hij neemt voor den wortel $x = \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$, en stelt dat a, b, c, de wortels eener cubische vergelijking $\mu^3 + A\mu^2 + B\mu + C = 0$ zijn, welker coefficienten hij door x tot de tweede en volgende magten te verheffen, bepaalt.

hulp-vergelijking met y, stellende, op het einde van elke multiplicatie, 1, in plaats van y^4; dan zal men de vier vergelijkingen: $ay^3 + by^2 + cy + x = 0$; $by^3 + cy^2 + xy + a = 0$; $cy^3 + xy^2 + ay + b = 0$; $xy^3 + ay^2 + by + c = 0$ verkrijgen. Uit de drie eersten dezer vergelijkingen zal men y^3, y^2 en y oplossen, en de waarden, welke men daar voor verkrijgt, in de vierde vergelijking overbrengen; dan zal men vinden:

$$x^4 - (4ac + 2b^2)x^2 + (4a^2b + 4bc^2)x - a^4 + b^2 - c^4$$
$$+ 2a^2c^2 - 4ab^2c = 0$$

welke met de gegevene vergeleken zijnde, geven zal: 1° $p = -4ac - 2b^2$; $q = 4a^2b + 4bc^2$; $r = -a^4 + b^4 - c^4 + 2a^2c^2 - ab^2c$. Hieruit vindt men:

$$b^6 + \tfrac{1}{2}pb^4 + (\tfrac{1}{16}p^2 - \tfrac{1}{4}r)b^2 - \tfrac{1}{64}q^2 = 0$$

Deze is dezelfde als de herleide (P) der voorgaande oplossing: b^2 zal door dezelve bekend worden, en men zal vinden:

$$a = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{q}{4b} - \tfrac{1}{2}p - b^2\right)} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{4b} + \tfrac{1}{2}p + b^2\right)}$$
$$b = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{q}{4b} - \tfrac{1}{2}p - b^2\right)} \mp \sqrt{\left(\frac{q}{4b} + \tfrac{1}{2}p + b^2\right)}$$

Nu is, uit de eerste vergelijking, $x = -ay^3 - by^2 - cy$, en $y^4 = 1$ zijnde, heeft y vier waarden, te weten:

$$y = +1,\quad y = -1,\quad y = +\sqrt{-1},\quad y = -\sqrt{-1}$$
$$y^2 = +1,\quad y^2 = +1,\quad y^2 = -1,\quad y^2 = -1$$
$$y^3 = +1,\quad y^3 = -1,\quad y^3 = -\sqrt{-1},\quad y^3 = +\sqrt{-1}$$

brengt men nu deze waarden van y in $x = -ay^3 - by^2 - cy$ over: dan verkrijgt men voor de vier wortels: $x = -a - b - c$; $x = a - b + c$; $x = a\sqrt{-1} + b - c\sqrt{-1}$ en $x = -a\sqrt{-1} + b + c\sqrt{-1}$; of wel: $x = -b-(a+c)$; $x = -b+(a+c)$; $x = +b + (a-c)\sqrt{-1}$; $x = +b - (a-c)\sqrt{-1}$. Stelt men eindelijk, in plaats van a, de waarden boven gevonden, zal men voor de wortels wederom de Cartesiaansche uitdrukkingen (I) (I) verkrijgen.

§. 921. Uit alle deze verschillende oplossingen blijkt het: 1° dat men, in de oplossing der vierde magts vergelijkingen, altijd tot eene herleide van de derde magts vorm komt; 2° dat alle oplossingen ten laatste dezelfde uitkomsten geven. Wij zullen ons, in de toepassing, aan de laatste, en wel bepaaldelijk aan de oplossing van §. 918. houden. Latende de toepassing der andere oplossingen aan den Lezer over.

§. 922.

§. 922. Zij dan gegeven de vierde magts vergelijking,

$$y^4 + a y^3 + b y^2 + c y + d = 0$$

dan make men uit derzelver coefficienten, de vergelijking

$$x^4 + (b - \tfrac{3}{8} a^2) x^2 + (c - \tfrac{1}{2} b a + \tfrac{1}{8} a^3) x + \ldots\ldots$$
$$(d - \tfrac{1}{4} a c + \tfrac{1}{16} a^2 b - \tfrac{3}{256} a^4) = 0$$

en ſtelle $p = b - \frac{3}{8} a^2$; $q = c - \frac{1}{2} b a + \frac{1}{8} a^3$ en $r = d - \frac{1}{4} a c + \frac{1}{16} a^2 b - \frac{3}{256} a^4$, dan verkrijgt men:

$$x^4 + p x^2 + q x + r = 0$$

zijnde $y = x - \frac{1}{4} a$. Uit deze laatſte make men de herleide vergelijking:

$$\mu^3 + \tfrac{1}{2} p \mu^2 + (\tfrac{1}{16} p^2 - \tfrac{1}{4} r) \mu - \tfrac{1}{64} q^2 = 0$$

Indien nu α, β en γ, de wortels dezer vergelijking zijn, dan zullen

$$\begin{array}{ll} x = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma} & \text{en } y = -\tfrac{1}{4} a + \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma} \\ x = \sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta} - \sqrt{\gamma} & \ldots y = -\tfrac{1}{4} a + \sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta} - \sqrt{\gamma} \\ x = -\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma} & \ldots y = -\tfrac{1}{4} a - \sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma} \\ x = -\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} - \sqrt{\gamma} & \ldots y = -\tfrac{1}{4} a - \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} - \sqrt{\gamma} \end{array}$$

de wortels der gegevene vierde magts vergelijking zijn. *Moetende, volgens* §. 918, *de teekens der wortel-uitdrukkingen genomen worden, zoo als dezelve in deze formulen voorkomen, indien q negatief is; doch, met tegengeſtelde teekens, indien q poſitief is.*

§. 923. Ten aanzien van de herleide vergelijking in μ moet men opmerken: 1° *dat zij*, vergelijk §. 273, *altijd eenen poſitieven wortel heeft.* 2° *Dat, wanneer alle hare wortels poſitief zijn, de wortels der gegevene vergelijking alle beſtaanbaar zullen zijn.* 3° *Dat, wanneer één der wortels negatief is, alle de wortels der gegevene onbeſtaanbaar zullen zijn.* 4° Heeft de herleide twee onbeſtaanbare wortels van den vorm $m + n\sqrt{-1}$ en $m - n\sqrt{-1}$; dan is, zie §. 890, $\sqrt{(m + n\sqrt{-1})} + \sqrt{(m - n\sqrt{-1})} = \sqrt{(2m + 2\sqrt{(m^2 + n^2)})}$ beſtaanbaar; doch dan is $\sqrt{(m + n\sqrt{-1})} - \sqrt{(m - n\sqrt{-1})} = \sqrt{(2m - 2\sqrt{(m^2 + n^2)})}$ onbeſtaanbaar (131). *In dit geval zal de gegevene vergelijking twee beſtaanbare en twee onbeſtaanbare wortels*

(131) Want ſtel $\sqrt{(m + n\sqrt{-1})} - \sqrt{(m - n\sqrt{-1})} = y$. Indien men deze vergelijking in het vierkant brengt, dan zal men vinden: $y^2 = 2m - 2\sqrt{(m^2 + n^2)}$ en hieruit wederom den vierkants-wortel trekkende $y = \sqrt{(2m - 2\sqrt{(m^2 + n^2)})}$: nu is $\sqrt{(m^2 + n^2)} > m$; gevolgelijk $2m - 2\sqrt{(m^2 + n^2)}$ negatief, en y is van den vorm $p\sqrt{-1}$.

tels hebben (132). 5° Laat α altijd de positieve wortel der herleide zijn; dan worden, in dit geval, de wortels der gegevene . . . $x = \sqrt{\alpha} + (\sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma}) \times \sqrt{-1}$; $x = \sqrt{\alpha} - (\sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma}) \times \sqrt{-1}$; $x = -\sqrt{\alpha} - (\sqrt{\beta} - \sqrt{\gamma}) \times \sqrt{-1}$ en $x = -\sqrt{\alpha} + (\sqrt{\beta} - \sqrt{\gamma}) \times \sqrt{-1}$, alle onbestaanbaar. *Wanneer dan de herleide twee negatieve wortels heeft, zal de gegevene (zoowel, als in het geval, dat de herleide slechts eenen negatieven wortel heeft,) vier onbestaanbare wortels hebben.* 6° *Doch zijn deze twee negatieve wortels aan elkander gelijk, en is $\sqrt{\beta} - \sqrt{\gamma}$ gevolgelijk gelijk nul; dan heeft de gegevene twee onbestaanbare en twee gelijke bestaanbare negatieve wortels.* 7° Nog verdient aangaande het geval, waarin alle de wortels der herleide bestaanbaar zijn, te worden opgemerkt: dat hare oplossing alsdan aan alle de moeijelijkheden van het onherleidbaar geval onderhevig is, en, bij aldien niet een van hare wortels meetbaar is, zal het ook niet altijd mogelijk zijn, de wortels der gegevene vierde magts vergelijking onder eenen bestaanbaren vorm daartestellen, en dan zal 'er geen ander middel dan de weg van benadering overblijven. Geven wij nu eenige voorbeelden.

§. 924. I. VOORBEELD. *De vergelijking $y^4 - 2y^3 - 23y^2 + 50 = 0$, optelossen?* Men stelle $y = x + \frac{1}{2}$; dan verkrijgt men voor de vierde magts vergelijking, waarin de tweede term ontbreekt, $x^4 - 24\frac{1}{2}x^2 - 24x + 44\frac{1}{16} = 0$; derhalve is $p = -24\frac{1}{2}$; $q = -24$, en $r = 44\frac{1}{16}$, en de herleide vergelijking wordt $\mu^3 - 12\frac{1}{4}\mu^2 + 26\frac{1}{2}\mu - 9 = 0$. Men zal, door de leer der deelers, voor de wortels dezer vergelijking vinden; $\alpha = 2\frac{1}{4}$; $\beta = 5 + \sqrt{21}$ en $\gamma = 5 - \sqrt{21}$; welke alle positief zijn. Men heeft dan $\sqrt{\alpha} = \sqrt{2\frac{1}{4}} = 1\frac{1}{2}$, en men vindt, door den regel van §. 478, $\sqrt{\beta} = \frac{1}{2}\sqrt{6} + \frac{1}{2}\sqrt{14}$ en $\sqrt{\gamma} = \frac{1}{2}\sqrt{14} - \frac{1}{2}\sqrt{6}$. Vermits nu $q = -24$ negatief is,

(132) Laat de positieve wortel gelijk q, en de twee onbestaanbare wortels $r + \rho\sqrt{-1}$ en $r - \rho\sqrt{-1}$ zijn; dan is $\sqrt{q}$ bestaanbaar, en, volgens §. 890, is dan ook $\sqrt{(r + \rho\sqrt{-1})} + \sqrt{(r - \rho\sqrt{-1})}$ bestaanbaar; maar $\sqrt{(r + \rho\sqrt{-1})} - \sqrt{(r - \rho\sqrt{-1})}$ is, zie voorgaande noot, van den vorm $\rho\sqrt{-1}$. Laat nu $\sqrt{\alpha} = \sqrt{q}$ en $\sqrt{\beta} = \sqrt{(r + \rho\sqrt{-1})}$; . . . . $\sqrt{\gamma} = \sqrt{(r - \rho\sqrt{-1})}$ zijn; het zij men dan voor $\sqrt{\alpha}$, $\sqrt{\beta}$ en $\sqrt{\gamma}$, de teekens neme, welke in de formule voorkomen, of de tegengestelde, zal $x = \underline{\pm}\sqrt{\alpha}\,\underline{\pm}\sqrt{\beta}\,\underline{\pm}\sqrt{\gamma} = \underline{\pm}\sqrt{q}\,\underline{\pm}\sqrt{(2r + 2\sqrt{(r^2 + \rho^2)})}$ bestaanbaar, en $x = \underline{\underline{\pm}}\sqrt{\alpha}\,\overline{\mp}\sqrt{\beta}\,\overline{\mp}\sqrt{\gamma} = \underline{\pm}\sqrt{q}\,\overline{\mp}\sqrt{(2r + 2\sqrt{(r^2 + \rho^2)})}$ bestaanbaar; maar $x = \overline{\overline{\mp}}\sqrt{\alpha}\,\overline{\mp}\rho\sqrt{-1}$ en $x = \overline{\mp}\sqrt{\alpha}\,\underline{\pm}\rho\sqrt{-1}$ onbestaanbaar zijn.

is, zullen $x=\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}=1\frac{1}{2}+\sqrt{14}$; $x=\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma}=1\frac{1}{2}-\sqrt{14}$; $x=-\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}=-1\frac{1}{2}-\sqrt{6}$, en $x=-\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma}=-1\frac{1}{2}+\sqrt{6}$ zijn, en daar $y=x+\frac{1}{2}$ is, zullen de wortels der gegevene vergelijking zijn: $2+\sqrt{14}$, $2-\sqrt{14}$, $-1+\sqrt{6}$ en $-1-\sqrt{6}$. (133).

§. 925. 2. VOORBEELD. *De vergelijking* $x^4-22x^2-48x-23=0$ *oplossen?* — In deze ontbreekt reeds de tweede term. Men vindt, voor de herleide, $\mu^3-11\mu^2+36\mu-36=0$, welker wortels 2, 3 en 6 zijn. Men heeft derhalve, $\sqrt{\alpha}=\sqrt{2}$; $\sqrt{\beta}=\sqrt{3}$ en $\sqrt{\gamma}=\sqrt{6}$, en, daar q negatief is, zullen de wortels der gegevene vergelijking $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$, $\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{6}$, $-\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{6}$ en $-\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6}$ zijn.

§. 926. 3. VOORBEELD. *De vergelijking* $y^4+2y^3-47y^2-47y+252=0$ *oplossen?* Stellende $y=x+\frac{1}{2}$; dan verkrijgt men de vergelijking: $x^4-48\frac{1}{2}x^2+x+263\frac{9}{16}=0$: men heeft dan $p=-48\frac{1}{2}$; $q=+1$, en $r=+263\frac{9}{16}$, en de herleide vergelijking wordt $\mu^3-24\frac{1}{4}\mu^2+81\frac{1}{8}\mu-\frac{1}{64}=0$, en ftelt men, om tot meer gemak eene vergelijking in geheele getallen te hebben, $\mu=4x$, verandert deze in $x^3-97x^2+1298x-1=0$, welke, zoo als men bevinden zal, drie pofitieve wortels heeft, welke tusfchen 0 en 1; 16 en 17 en 80 en 81 vallen, en welke de wortels der vergelijking: $x^4-48\frac{1}{2}x^2+x+263\frac{9}{16}=0$, zullen doen bekend worden, waaruit, door middel van $y=x+\frac{1}{2}$, die der gegevene eindelijk volgen zullen.

Verdere aanmerkingen over de oplosfing van §. 918, *pag.* 508.

§. 927. Wanneer men uit de waarden van x, voor de vergelijking: $x^4+px^2+qx+r=0$, in §. 918, gevonden, de vergelijkingen: $x-(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma})=0$; $x-(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma})=0$; . . $x+(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma})=0$ en $x+(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma})=0$, welke, wanneer α, β en γ, pofitief zijn, beftaanbare, doch echter onmeetbare, deelers der gegevene vergelijking kunnen zijn, op alle mo-

ge-

(133) Deze uitkomst ftemt in, met hetgeen in §. 197, met behulp der twee ftelkundige tweede magts factoren, waarin het eerfte lid der vergelijking kan ontleed worden, gevonden is. Het verdient opgemerkt te worden: *dat, wanneer de pofitieve wortel der herleide vergelijking een volkomen vierkant is, de gegevene vergelijking ten minfte twee ftelkundige tweede magts factoren heeft.*

gelijke wijzen, twee aan twee, met elkander vermenigvuldigt; dan zal men de zes volgende producten verkrijgen:

1° $x^2 - 2x\sqrt{\alpha} + (\alpha - \beta - \gamma - 2\sqrt{\beta\gamma}) = 0$, uit 1 en 2.
2° $x^2 + 2x\sqrt{\alpha} + (\alpha - \beta - \gamma + 2\sqrt{\beta\gamma}) = 0$, uit 3 en 4.
3° $x^2 - 2x\sqrt{\gamma} + (-\alpha - \beta + \gamma - 2\sqrt{\alpha\beta}) = 0$, uit 1 en 3.
4° $x^2 + 2x\sqrt{\gamma} + (-\alpha - \beta + \gamma + 2\sqrt{\alpha\beta}) = 0$, uit 2 en 4.
5° $x^2 - 2x\sqrt{\beta} + (-\alpha + \beta - \gamma - 2\sqrt{\alpha\gamma}) = 0$, uit 1 en 4.
en 6° $x^2 + 2x\sqrt{\beta} + (-\alpha + \beta - \gamma + 2\sqrt{\alpha\gamma}) = 0$, uit 2 en 3.

welke, elk in het bijzonder, bestaanbare (meetbare of onmeetbare) factoren der gegevene vergelijking zijn, en welke, indien men de eerste en tweede, de derde en vierde, de vijfde en zesde met elkander vermenigvuldigt, altijd hetzelfde product geven zullen, namelijk:

$$x^4 - 2(\alpha + \beta + \gamma)x^2 - 8x\sqrt{\alpha\beta\gamma} + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha\beta - 2\alpha\gamma - 2\beta\gamma = 0$$

of, na verschikking van de deelen van den laatsten term,

$$x^4 - 2(\alpha + \beta + \gamma)x^2 - 8x\sqrt{\alpha\beta\gamma} + (\alpha + \beta + \gamma)^2 - \ldots 4(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) = 0$$

zijnde alzoo $p = -2(\alpha+\beta+\gamma)$; $q = -8\sqrt{\alpha\beta\gamma}$ en $r = (\alpha+\beta+\gamma)^2 - 4(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)$. en gevolgelijk $\alpha + \beta + \gamma = -\frac{1}{2}p$; ... $\sqrt{\alpha\beta\gamma} = -\frac{1}{8}q$ en $\alpha\beta\gamma = \frac{1}{64}q^2$; en $\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = \ldots\ldots \frac{1}{4}(\alpha + \beta + \gamma)^2 - \frac{1}{4}r$, en omdat $\alpha + \beta + \gamma = -\frac{1}{2}p$ en ..... $(\alpha + \beta + \gamma)^2 = \frac{1}{4}p^2$; $\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = \frac{1}{16}p^2 - \frac{1}{4}r$, hetwelk alles op de coefficienten der herleide vergelijking uitkomt.

§. 928. De herleide heeft altijd, gelijk wij zagen, eenen positieven wortel; nemen wij nu: dat slechts één wortel negatief zij, bij voorbeeld, γ; dan zijn alle de wortels van $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, onbestaanbaar (§. 923); maar dan worden ook $\sqrt{\gamma}$, $\sqrt{\beta\gamma}$ en $\sqrt{\alpha\gamma}$ onbestaanbaar, en van den vorm $\mu\sqrt{-1}$, en de coefficienten der drie ledige factoren, verkrijgen daardoor noodzakelijk eenen onbestaanbaren vorm: ook zal hetzelfde gebeuren, wanneer men α of β negatief stelt; doch, wanneer men op den achtersten term der herleide, $-\frac{1}{64}q^2$ let, ziet men, dat, vermits hij altijd negatief zijn moet, 'er geen enkelde negatieve wortel in de herleide kan bestaan; 'er moeten dan, wanneer alle de wortels bestaanbaar zijn, nog twee positieve, of twee negatieve bestaan. Laten β en γ twee negatieve wortels zijn; dan is $\sqrt{\beta\gamma}$ bestaanbaar, en de drieledige factoren verkrijgen alzoo alleen eenen bestaanbaren vorm, waaruit volgt: †† *dat, wanneer alle de wortels eener vierde magts vergelijking onbestaanbaar zijn, en 'er gevolgelijk, voor de onbekende, geene waarde bestaat, welke aan de ver-*

gelijking voldoet, haar voorste lid nogtans in twee (doch in geen meer) drieledige bestaanbare factoren ontleedbaar is, welker coëfficienten of meetbare of onmeetbare grootheden zullen zijn, naar dat α, β *en* γ, *volkomen of onvolkomen vierkanten zijn.*

§. 929. Indien de wortels β en γ der herleide onbestaanbaar, en van den vorm $m + n\sqrt{-1}$ en $m - n\sqrt{-1}$ zijn; dan zal men, gebruik makende van hetgeen dienaangaande in §. 923. gezegd is, betoogen: *dat de gegevene vierde magts vergelijking slechts twee drieledige bestaanbare factoren hebben kan, waarvan de eerste de bestaanbare, en de tweede de onbestaanbare wortels inhoudt.* Wij laten zulks aan den Lezer over.

§. 930. †† *Wanneer eene evene magts vergelijking:*

$$x^{2n} + Px^{2n-1} + Qx^{2n-2} + Rx^{2n-3} + Sx^{2n-4} + enz. = 0$$

geene bestaanbare wortels heeft, dat wil zeggen, wanneer geene positieve of negatieve waarde, welke men voor x *nemen kan, de vergelijking nul gelijk nul maken kan; dan zal nogtans eene uitdrukking van den vorm* $p + q\sqrt{-1}$ *aan dezelve voldoen kunnen* (134).

Stellen wij, in plaats van x, de grootheid $p + r$; dan zal de vergelijking: $x^{2n} + Px^{2n-1} + enz.$ onder de volgende gedaante:

$$A + Br + Cr^2 + Dr^3 + Er^4 + Fr^5 + Gr^6 + enz. \ldots\ldots + Mr^{2n-2} + Nr^{2n-1} + r^{2n} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (\Delta)$$

voorkomen, waarin A, B, C, D, *enz.* functien van p zijn, welke, volgens den regel van §. 216. gevonden worden. Wanneer nu geene positieve noch negatieve waarde, die men voor x nemen kan, het voorste lid der vergelijking nul of negatief maken kan; dan is het buiten alle bedenking, dat het ook niet mogelijk zal zijn, een stelsel van waarden voor p en r te vinden, hetwelk aan de vergelijking (Δ) voldoen kan, en dat alle waardijen, welke men voor de letters neemt, aan het voorste lid steeds eene positieve waarde zullen geven.

Nemen wij nu, in plaats van r, de onbestaanbare uitdrukking $q\sqrt{-1}$; dan zal $r^2 = -q^2$; $r^3 = -q^3\sqrt{-1}$; $r^4 = q^4$; $r^5 = q^5\sqrt{-1}$; *enz.* en de vergelijking (Δ) verandert dan in:

$$A + Bq\sqrt{-1} - Cq^2 - Dq^3\sqrt{-1} + Eq^4 + Fq^5\sqrt{-1} - Gq^6 - Hq^7\sqrt{-1} + Iq^8 + Kq^9\sqrt{-1} - enz. = 0 \quad \ldots\ldots (\Gamma)$$

zal nu immer de waarde $x = p + q\sqrt{-1}$, aan de gegevene vergelijking voldoen, zoo moet de som der termen van (Γ), welke coëffi-

(134) Het blijkt uit §. 273 en §. 274, dat de waarde van het voorste lid eener onbestaanbare vergelijking altijd positief moet zijn.

ficienten van $\sqrt{-1}$ zijn, niet alleen nul moeten worden, maar de fom van de overige termen der vergelijking (Γ) zal insgelijks nul moeten worden: wij verkrijgen dan, na door $q\sqrt{-1}$ gedeeld te hebben,

$$A - Cq^2 + Eq^4 - Gq^6 + Iq^8 Lq^{10} + enz. \pm q^{2n} = 0 \quad . \quad . \quad (\Phi)$$
$$B - Dq^2 + Fq^4 - Hq^6 + Kq^8 - enz. \mp Nq^{2n-2} = 0 \quad . \quad . \quad (\Psi)$$

welke vergelijkingen, zal $p + q\sqrt{-1}$ de gegevene vergelijking oplosfen, met elkander beftaanbaar moeten zijn.

Wanneer men $x = p - q\sqrt{-1}$ gefteld had, zou men tot dezelfde vergelijkingen (Φ) en (Ψ) gekomen zijn, waaruit blijkt: †† *dat, wanneer* $p + q\sqrt{-1}$ *de gegevene vergelijking oplost,* $p - q\sqrt{-1}$ *dezelve insgelijks zal oplosfen.*

Merken wij op: dat q^2, in de vergelijkingen (Φ) en (Ψ) altijd eene pofitieve waarde moet hebben, omdat, wanneer wij $q^2 = -n^2$ ftellen, $q = n\sqrt{-1}$ en $q\sqrt{-1} = -n$ worden, en daaruit volgen zou, dat $p - n$ de gegevene vergelijking, ftrijdig met de aangenomene onderftelling, zou kunnen oplosfen. †† *Wanneer het diensvolgens mogelijk is, om aan de vergelijkingen* (Φ) *en* (Ψ) *te voldoen, kan men niet anders dan eene pofitieve waarde van* q^2 *verwagten.*

Men kan, naar het voorfchrift van §. 390, de magten van q^2 trapswijze doen verdwijnen, en men zal dan, 1° eene waarde van q^2 verkrijgen, uitgedrukt in eene functie van A, B, C, D, *enz.* dat is, in eene functie van p, en 2°, eene finale vergelijking, in welke alleen de onbekende p voorkomt: kan men nu bewijzen: dat deze finale vergelijking eenen beftaanbaren wortel heeft; dan zullen de vergelijkingen, (Φ) en (Ψ) met elkander beftaanbaar zijn, en de onderftelling, waaruit deze vergelijkingen voortvloeijen, zal waarheid zijn, dat is: $p + q\sqrt{-1}$ en $p - q\sqrt{-1}$, zullen de gegevene vergelijking oplosfen.

De grootheid p komt, in onze befchouwing, voor, als de fom van twee wortels der gegevene vergelijking; daar nu deze wortels op . . $\frac{2n(2n-1)}{2} = n(2n-1)$ onderfcheidene wijzen verbonden kunnen worden, zal, wegens de algemeenheid der ftelkundige befchouwingen, de finale vergelijking, in p, tot de magt $n(2n-1)$ moeten opklimmen, en zoo dikwijls n een oneven getal is, eene onevene magts vergelijking zijn, welke, daar zij ten minfte altijd eenen beftaanbaren wortel heeft, de onderlinge beftaanbaarheid der vergelijkingen (Φ) en (Ψ), in dit geval, buiten twijfel ftelt.

 Maar

Maar indien de vergelijking, in p, tot eene evene magt opklimt, dan zal zij onbestaanbaar kunnen zijn, en indien het dan mogelijk is, dat $\alpha + \beta \sqrt{-1}$ dezelve oplost; dan zal α van eene hogere magts vergelijking afhangen, welker exponent $m(2m-1)$ zijn zal, indien $2m$ de exponent van de magt der vergelijking in p is. Is nu m een oneven getal, dan zal $m(2m-1)$ insgelijks oneven zijn, en α en β zullen bestaanbare waarden verkrijgen. Aangezien nu q eene functie van p is, zal dezelve tot den vorm $\mu + \nu\sqrt{-1}$ herleidbaar zijn, en $x = p + q\sqrt{-1}$ zal tot den vorm $p' + q'\sqrt{-1}$ gebragt kunnen worden.

Is de vergelijking in α nog van eene evene magt en onbestaanbaar, zal men de vergelijking, in $\alpha = \alpha' + \beta'\sqrt{-1}$ opmaken, omtrent welke, indien zij van eene onevene magt is, wederom hetzelfde gelden zal. Op deze wijze voortgaande, zal men men altijd ten laatste tot eene onevene magts vergelijking geraken, welke, daar zij ten minste éenen bestaanbaren wortel heeft, bewijst: dat de gegevene vergelijking door eene uitdrukking, van den vorm $p + q\sqrt{-1}$, kan worden opgelost.

§. 931. Daar dan $x = p + q\sqrt{-1}$ en $x = p - q\sqrt{-1}$, de vergelijking oplost, zal $(x - p - q\sqrt{-1}) \times (x - p + q\sqrt{-1}) = x^2 - 2px + p^2 + q^2$, een tweede magts factor zijn. Elke evene magts vergelijking heeft dan, zij zij bestaanbaar of onbestaanbaar, een tweeden magts factor. Deelt men door dien factor, zal het quotient nog eene evene magts vergelijking zijn, welke, om dezelve reden, een tweede magts factor zal hebben, enz. †† *Elke onbestaanbare evene magts vergelijking van de 2 n^{de} magt, is derhalve in n tweede magts factoren ontleedbaar, en zij heeft even zoo vele wortels van den vorm $p + q\sqrt{-1}$ en $p - q\sqrt{-1}$, twee aan twee met elkander overéénstemmende, als 'er éénheden in den exponent van hare magt zijn.*

TWEE- EN- ZEVENTIGSTE LES.

Over de Hinderpalen, welke men in de algemeene stelkundige oplossing der hoogere magts Vergelijkingen ontmoet.

§. 932. Nadat in de voorgaande §§. buiten twijfel gesteld is, dat elke vergelijking, of bestaanbare wortels, of onbestaanbare van den vorm $a + b\sqrt{-1}$ heeft, altijd zooveel en niet meer of minder in aantal zijnde, als 'er éénheden in den exponent van haren hoogsten

term

term voorkomen, kan men, zich herinnerende (zie §. 209.) dat de coefficienten der vergelijking:

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + enz. + Qx + R = 0$$

functien van de wortels zijn, de oplossing eener hooge magts vergelijking brengen tot de oplossing van het volgende vraagstuk. *Van n getallen gegeven zijnde de som der getallen gelijk $-A$; de som van alle derzelver mogelijke producten, twee aan twee, gelijk $+B$ enz. die getallen te vinden?* Want men heeft, in dit vraagstuk, even zoo vele vergelijkingen als 'er onbekenden zijn, ja zelfs, wanneer in eene vergelijking termen ontbreken, blijft het aantal der vergelijkingen nog hetzelfde, omdat de coefficienten der ontbrekende termen nul zijn. Wanneer men nu de oplossing van dit vraagstuk, door alle de onbekende, tot op ééne na, uitteroeijen, aanvat, vervalt men altijd tot eene finale vergelijking, welke aan de gegevene volmaakt gelijk is, en men is daardoor geen stap verder gevorderd. Doch deze wijze, om de zaak te beschouwen, heeft de Wiskundigen op den inval gebragt, of het niet mogelijk zou zijn, uit de coefficienten der gegevene vergelijking, zoo vele vergelijkingen te vormen, als noodig zijn, om de onbekenden te bepalen, en tevens zoo gesteld zijnde, dat de finale vergelijking tot eene lagere magt dan de gegevene opklimt. Daar deze wijze van beschouwen leerzaam is, zullen wij dezelve, offchoon zij tot geene andere uitkomsten dan de voorgaande oplossingen brengt, en, met deze, voor de vijfde en hoogere magts vergelijkingen, aan dezelfde zwarigheden onderhevig blijft, nogtans kortelijk verklaren.

§. 933. Zij, gegeven de tweede magts vergelijking: $x^2 + Ax + B = 0$. Laten de wortels dezer vergelijking door a en b worden uitgedrukt; dan is, $a + b = -A$ en $ab = B$. Lost men deze twee vergelijkingen op; dan zal men $a^2 + Aa + B = 0$ of $b^2 + Ab + B = 0$, voor de finale vergelijking verkrijgen, en derzelver oplossing heeft dezelfde zwarigheden als de gegevene. Nemen wij dan, dat, behalve $a + b = -A$, nog gegeven zij $a + pb = z$, zijnde p en z twee onbepaalde grootheden; dan zal, aangezien 'er geene bepaling gemaakt wordt, welke der twee wortels door a of b wordt uitgedrukt, met deze aangenomene vergelijking $a + bp = z$, ook te gelijk eene andere $b + pa = z'$ bestaan, in welke p dezelfde waarde heeft als in de eerste, en z' van z onderscheiden is. Deze waarden van z en z' zullen gevolgelijk van eene tweede magts vergelijking:

$$[z - (a + bp)] \times [z - (b + pa)] = 0$$

of $z^2 - (p + 1)(a + b)z + (a + bp)(b + ap) = 0$

 af-

afhangen. Omdat nu, in de aangenomene vergelijkingen, p eene onbepaalde grootheid is; zal men $(p+1)(a+b)=0$ kunnen ſtellen: doch zulks is hetzelfde, als $p+1=0$, of $p=-1$ te nemen: bij deze onderſtelling wordt nu

$$z=\pm\sqrt{\left\{-(a+bp)(b+ap)\right\}}=\pm(a-b)$$

en men heeft dus $z=a-b$ en $z'=b-a$ en $z^2=a^2+b^2-2ab$. Nu is $a+b=-A$ en $ab=B$; derhalve $a^2+b^2=A^2-2B$ en $z^2=A^2-4B$; of $z=\pm\sqrt{(A^2-4B)}$, en nu zijn de onbepaalde grootheden p en z in de aangenomene vergelijking $a+bp=z$ bekend; zoodat, om de wortels te vinden, de vergelijkingen: $a+b=-A$ en $a-b=\pm\sqrt{(A^2-4B)}$, nog moeten worden opgelost, en deze geven, $a=-\frac{1}{2}A\pm\frac{1}{2}\sqrt{(A^2-4B)}$ en $b=-\frac{1}{2}A\mp\sqrt{(A^2-4B)}$. De dubbelde teekens geven hier geen twee waarden te kennen; zij komen in de oplosſing alleen voor, omdat de vraag niet bepaalt, welke der twee wortels de grootſte of kleinſte zij?

§. 934. Zij gegeven de cubiſche vergelijking $x^3+Ax+B=0$, ſtel derzelver wortels a, b en c; dan is $a+b+c=0$: nemen wij nu eene vergelijking: $pa+qb+rc=z$ aan, in welke p, q en r, onbepaalde grootheden zijn. Hier wordt wederom niets in den aard van het vraagſtuk gevonden, waarom éène der grootheden a, b of c, liever den eenen dan den anderen wortel zou beteekenen: men kan derhalve, daar de drie wortels op $1\times2\times3$ of 6 onderſcheidene wijzen verwisſeld kunnen worden, aan de grootheid z, de zes volgende waarden geven:

$$\begin{array}{ll} pa+qb+rc & pb+qc+ra \\ pa+qc+rb & pc+qa+rb \\ pb+qa+rc & pc+qb+ra \end{array}$$

zoodat de vergelijking, van welke z afhangt, op de algemeenſte wijze genomen, van de zesde magt zal zijn; doch 'er zijn ſlechts drie onbekenden, en bijgevolg vier overtollige vergelijkingen: daar nogtans de aangenomene vergelijking $pa+qb+rc=z$ in zich zelve mogelijk is, en de vijf overige vergelijkingen medebrengt, moet hieruit noodwendig volgen: dat de coefficienten p, q en r, zoodanig moeten kunnen bepaald worden, dat de zes vergelijkingen ſlechts op twee uitkomen, of liever, dat de zesde magts vergelijking tot eene tweede magts vorm gebragt worde. Zij $z^6+Pz^3+Q=0$ die zesde magts vergelijking; dan zal $z=\sqrt[3]{\left\{-\frac{1}{2}P\pm\sqrt{(\frac{1}{4}P^2-Q)}\right\}}$ moeten zijn,

en,

en, volgens §. 877, zal z de volgende zes waarden hebben:

$$z = 1 \times \sqrt[3]{\left\{-\tfrac{1}{2}P \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}P^2 - Q)}\right\}};\quad z = (-\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{-3}) \cdot$$

$$\sqrt[3]{\left\{-\tfrac{1}{2}P \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}P^2 - Q)}\right\}} \text{ en } z = (-\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{-3}) \times \ldots$$

$$\sqrt[3]{\left\{-\tfrac{1}{2}P \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}P^2 - Q)}\right\}}$$

ſtellende dan, als in §. 878, $\rho = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{-3}$ en $\rho' = -\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{-3}$, en $\sqrt[3]{\left\{-\tfrac{1}{2}P + \sqrt{(\tfrac{1}{4}P^2 - Q)}\right\}} = z$ en $z' = \ldots$ $\sqrt[3]{\left\{-\tfrac{1}{2}P - \sqrt{(\tfrac{1}{4}P^2 - Q)}\right\}}$; dan zullen de zes wortels der zesde magts vergelijkingen z, ρz, $\rho' z$, z', $\rho z'$ en $\rho' z'$ zijn, en de aangenomene vergelijking zal de zes volgende vormen verkrijgen:

1°	$z = pa + qb + rc$	2°	$z' = pa + qc + rb$
3°	$\rho z = pb + qc + ra$	4°	$\rho z' = pb + qa + rc$
5°	$\rho' z = pc + qa + rb$	6°	$\rho' z' = pc + qb + ra$

Om nu de waarden te bepalen, welke 'er tusſchen de coëfficienten p, q en r beſtaan moeten, op dat alle deze vergelijkingen met elkander beſtaanbaar zijn, zoo brenge men de waarden van z en z', uit de twee eerſte, in de vier volgende vergelijkingen over; dit geeſt:

$$(p - \rho q)b + (q - \rho r)c + (r - \rho p)a = 0$$
$$(p - \rho' r)c + (q - \rho' p)a + (r - \rho' q)b = 0$$
$$(p - \rho r)b + (q - \rho p)a + (r - \rho q)c = 0$$
$$(p - \rho' q)c + (q - \rho' r)b + (r - \rho' p)a = 0$$

Deze vergelijkingen kunnen niet beſtaan, of de coëfficienten van a, b, c, moeten in elke vergelijking afzonderlijk nul worden, en deze onderſtellingen moeten alle met elkander beſtaanbaar zijn. Stellen wij dan $p - \rho q = 0$; $q - \rho r = 0$ en $r - \rho p = 0$; dan zal, omdat $\rho\rho' = 1$ is, ook $p - \rho' r = 0$; $q - \rho' p = 0$ en $r - \rho' q = 0$ zijn, en de coëfficienten der tweede vergelijking, worden derhalve van zelve gelijk nul. Op dezelfde wijze worden de coëfficienten der vierde vergelijking gelijk nul, wanneer men die van de derde gelijk nul ſtelt. Wij hebben dan, om deze vier vergelijkingen met elkander beſtaanbaar te doen zijn,

$$p = \rho q;\quad q = \rho r;\quad r = \rho p$$
$$p = \rho' r;\quad q = \rho' p;\quad r = \rho' q$$

Hieruit volgt: $p = \rho q = \rho^2 r$ en $r = \rho' q = \rho'^2$. De grootheden

p, q en r, moeten dan, om aan deze zes vergelijkingen te voldoen zijn, als: ρ^2, ρ en 1, en wederom, als: 1, ρ' en ρ'^2. Bij geluk zijn nu de grootheden ρ en ρ' zoodanig gesteld, dat zij aan dit vereischte voldoen; de zes bovenstaande vergelijkingen zijn dan uit zich zelven met elkander bestaanbaar, ja zelfs blijft nog eene der grootheden p, q en r, onbepaald: nemen wij derhalve $p = 1$; dan zal $q = \rho p = \rho$ en $p = \rho^2 p = \rho^2$ zijn, en de twee eerste vergelijkingen, met welke de vier andere voor alle waarden van a, b en c, bestaanbaar zijn, worden nu

$$z = a + \rho b + \rho^2 c, \quad \text{en} \quad z' = a + \rho^2 b + \rho c$$

en wij zullen hebben:

$$z^6 + \left\{(a + \rho b + \rho^2 c)^3 + (a + \rho^2 b + \rho c)^3\right\} z^3$$
$$+ (a + \rho b + \rho^2 c)^3 \times (a + \rho^2 b + \rho c)^3 = 0$$

Indien men de coefficienten dezer vergelijking outwikkelt, zal men, van het theorema van GIRARD gebruik makende, vinden:

$$z^6 + 27 B z^3 - 27 A^3 = 0 \quad \ldots\ldots \quad (n)$$

welker oplossing z en z' zal doen bekend worden, te weten:

$$z = 3\sqrt[3]{\left\{-\tfrac{1}{2}B + \sqrt{(\tfrac{1}{4}B^2 + \tfrac{1}{27}A^3)}\right\}}$$

$$z' = 3\sqrt[3]{\left\{-\tfrac{1}{2}B - \sqrt{(\tfrac{1}{4}B^2 + \tfrac{1}{27}A^3)}\right\}}$$

of $zz' = -3A$. Men heeft dan nu de drie vergelijkingen: $a + b + c = 0$; $z = a + \rho b + \rho^2 c$; $z' = a + \rho^2 b + \rho c$; welke met betrekking tot a, b en c, opgelost zijnde, geven zullen:

$$a = \frac{z + z''}{3}; \quad b = \frac{\rho z + \rho^2 z'}{3} \quad \text{en} \quad c = \frac{\rho^2 z + \rho z'}{3}$$

welke, wanneer men in dezelve de waarden van z en z' overbrengt, de uitdrukkingen van CARDANUS geven. Gebruikt men de andere wortels van (n), dan zal men voor a, b en c, andere waarden vinden, welke de wortels van de vergelijkingen: $x^3 + p\rho x + q = 0$, en $x^3 + p\rho^2 x + q = 0$ zullen zijn.

§. 935. Laat gegeven zijn de vierde magts vergelijking: $x^4 + A x^2 + B x + C = 0$, en laten derzelver wortels a, b, c, d, gesteld worden: dan hebben wij vooreerst wederom de vergelijking: $a + b + c + d = 0$. Nemen wij dan wederom de vergelijking: $pa + qb + rc + sd = z$, dan is het klaar, dat 'er wederom zoo vele waarden voor z bestaan zullen, als het mogelijk is, de letters a, b, c en d, in deze vergelijking van plaats te veranderen; daar zulks nu nu op vier- en- twintig onderscheidene wijzen geschieden kan, zullen de waarden van z van eene vier- en- twintigste magts vergelijking afhangen. Men kan nogtans al ten eerste deze vergelijking tot eene lagere magt brengen, indien men $p=q$ stelt; want dan zal het aantal der permutatien op twaalf uitkomen, en de vergelijking z zal slechts tot de twaalfde magt opklimmen. Stelt men eindelijk nog $r=s$; dan zal de waarde van z van eene zesde magts vergelijking afhangen, welker wortels

$$p(a+b)+r(c+d);\ p(a+c)+r(b+d);\ p(a+d)+r(b+c)$$
$$p(b+c)+r(a+d);\ p(b+d)+r(a+c);\ p(c+d)+r(a+b)$$

zullen zijn. Op dat nu, uit deze zesde magts vergelijking, eene van de derde magts vorm zou kunnen afgeleid worden, moeten, indien het mogelijk is, de waarden van p en r zoodanig bepaald worden, dat de coefficienten der evene termen verdwijnen. Bij een weinig overwegings, ziet men: dat, indien $p=-r$ gesteld wordt, of $p=-r=1$, wanneer de wortels

$$(a+b)-(c+d);\ (a+c)-(b+d);\ (a+d)-(b+c)$$
$$(b+c)-(a+d);\ (b+d)-(a+c);\ (c+d)-(a+b)$$

worden, dit oogmerk volkomen zal bereikt worden; want de 1e en 6e, de 2e en 5e, de 3e en 4e wortels zullen dan alleen in de teekens onderscheiden zijn: men heeft dus

$$[z^2-(a+b-c-d)^2]\times[z^2-(a+c-b-d)^2]\times\ldots$$
$$[z^2-(a+d-b-c)^2]=0$$

of, wanneer men $z^2=y$ stelt

$$[y-(a+b-c-d)^2]\times[y-(a+c-b-d)^2]\times\ldots\ldots$$
$$[y-(a+d-b-c)^2]=0\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (\varphi)$$

Nu is $a+b+c+d=0$ en $(a+b-c-d)^2=a^2+b^2+c^2+d^2+2ab-2ac-2ad-2bc-2bd+2cd$: trekt men hiervan af $(a+b+c+d)^2=a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd=0$; dan houdt men over $(a+b-c-d)^2=-4(ac+ad+bc+bd)$; maar nu is $A=ab+ac+ad+bc+bd+cd$; derhalve zal

$$(a+b-c-d)^2=-4A+4(ab+cd)=y$$

zijn; op dezelfde wijze zal men hebben:

$$(a+c-b-d)^2=-4A+4(ac+bd)=y'$$
$$(a+d-b-c)^2=-4A+4(ad+bc)=y''$$

Men stelle dan $v=\frac{1}{4}y+A$; dan zal de vergelijking (φ), in ...
$(v-(ab+cd))\times(v-(ac+bd))\times(v-(ad+bc))=0$,
of, na behoorlijke ontwikkeling in

$$\begin{array}{llll} v^3 - (ab+cd)\,v^2 & + (ab+cd)(ac+bd)\,v & - (ab+cd) \times (ac+bd)(ad+bc) = 0 \\ \quad - (ac+bd) & + (ab+cd)(ad+bc) & \\ \quad - (ad+bc) & + (ac+bd)(ad+bc) & \end{array}$$

veranderen. Wanneer men nu de coefficienten dezer vergelijking, door vermenigvuldiging, ontwikkelt; zal men vinden:

$$v^3 - A v^2 - 4 C v + 4 A C - B^2 = 0$$

ftellende nu $v = \frac{1}{4} y + A = 4 t + A$; dan zal men vinden:

$$t^3 + \frac{1}{2} A t^2 + (\frac{1}{16} A^2 - \frac{1}{4} C)\, t - \frac{1}{64} B^2 = 0$$

Zijnde deze dezelfde vergelijking, welke §. 918, *pag.* 509, gevonden is. Naar deze laatfte herleiding, is nu $\frac{1}{4} y = 4 t$ of $y = 16 t = z^2$ en $z = \pm 4 \sqrt{t}$. Laten nu t', t'' en t''', de wortels dezer laatfte vergelijking zijn; dan is $z' = \pm 4 \sqrt{t'}$; $z'' = \pm 4 \sqrt{t''}$ en $z''' = \pm 4 \sqrt{t'''}$, en de vergelijkingen, waardoor de wortels der gegevene $x^4 + A x^2 + B x + C = 0$ zullen gevonden worden, zijn

$$\left.\begin{array}{l} a+b+c+d = 0 \\ a+b-c-d = \pm 4\sqrt{t'} \\ a+c-b-d = \pm 4\sqrt{t''} \\ a+d-b-c = \pm 4\sqrt{t'''} \end{array}\right\} \textit{Hieruit volgt} \left\{\begin{array}{l} a = \pm\sqrt{t'} \pm \sqrt{t''} \pm \sqrt{t'''} \\ b = \pm\sqrt{t'} \mp \sqrt{t''} \mp \sqrt{t'''} \\ c = \mp\sqrt{t'} \pm \sqrt{t''} \mp \sqrt{t'''} \\ d = \mp\sqrt{t'} \mp \sqrt{t''} \pm \sqrt{t'''} \end{array}\right.$$

en men komt bijgevolg tot dezelfde uitkomften als in §. 918.

§. 936. Men zou nu misfchien denken: dat deze Leerwijze ook gelukken zou, wanneer zij op de oplosfing eener vijfde, zesde of hoogere magts vergelijking werd toegepast. Stellen wij, om zulks te onderzoeken: dat de vijfde magts vergelijking, $x^5 + A x^3 + B x^2 + C x + D = 0$ gegeven zij, welker wortels a, b, c, d en e zijn; dan is $a + b + c + d + e = 0$. Nemen wij dan wederom de hulp-vergelijking, $p a + q b + r c + s d + t e = z$, dan zullen de grootheden a, b, c, d en e, in deze, op $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$, dat is op 120 onderfcheidene wijzen, kunnen verwisfeld worden, en z zal alzoo 120 onderfcheidene waarden verkrijgen: maakt men nogtans in deze vergelijking $p = q = r$, dan zal z twintig, en indien men $p = q = r = s$ ftelt, zal z vijf onderfcheidene waarden verkrijgen, en bijgevolg van eene vijfde magts vergelijking afhangen, terwijl het bovendien nog mogelijk zal moeten zijn, om de waarden van s en t te vinden. Uit dit bijgebragte blijkt genoegzaam, welke zwarigheden men in de oplosfing van nog hoogere vergelijkingen, deze Leerwijze volgende, zou moeten overwinnen.

§. 937. De wegen, welke zich ter oplosfing van de hoogere magts ver-

vergelijkingen opdoen, komen op ééne van de volgende neder, 1° dat men, zoo als wij in de voorgaande §. gedaan hebben, een zeker aantal eerste magts vergelijkingen zoeke, waardoor de wortels gevonden kunnen worden, 2° dat men de vergelijking in tweede of derde magts factoren ontlede, de Leerwijzen van FERRARI, DESCARTES en SIMPSON, komen hierop neder, of 3°, dat men voor den wortel eenen vorm aanneme, hierop komt de leerwijze van CARDANUS neder, spreken wij nog met één woord van elk der twee laatsten.

§. 938. Zij gegeven de algemeene vergelijking:

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + Dx^{n-4} + enz. = 0$$

welker wortels a, b, c, d, e, *enz.* zijn.

Onderzoeken wij eerst, of deze vergelijking eenen eersten magts factor $x + p$ hebbe? Bij een weinig opmerkzaamheid bespeurt men, dat, aangezien niets hier bepaalt, of p liever $-a$, dan $-b$, dan $-c$, *enz.* uitdrukke, de vergelijking, waarvan p afhangt, de gegevene zelve zal zijn.

§. 939. Denkt men misschien: dat de bepaling van eenen tweeden magts factor gemakkelijker gaan zal? laat dan $x^2 + px + q$ die tweede magts factor zijn: vermits deze nu twee wortels bevat, en 'er niets is, hetwelk bepaalt, welke twee wortels? zal die factor noodzakelijk de volgende waarden $x^2 + (a+b)x + ab$, $x^2 + (a+c)x + ac$, $x^2 + (a+d)x + ad$, *enz.* hebben, en p zal klaarblijkelijk van de vergelijking:

$$[z - (a+b)] \times [z - (a+c)] \times [z - (a+d)] \times enz. = 0$$

en q van de vergelijking:

$$[t - ab] \times [t - ac] \times [t - ad] \times [t - ae] \times enz. = 0$$

afhangen. Maar nu kan men, met een aantal van n wortels, $\frac{1}{2}(n)(n-1)$ combinatien, twee aan twee, maken, en de vergelijkingen z en t, zullen, op zijn algemeenste genomen, tot de magt $\frac{1}{2}n(n-1)$ opklimmen, ten minste, wanneer geene bijzondere omstandigheden deze vergelijkingen tot eene lagere magt doen afdalen. Men kan, wel is waar, de coefficienten der vergelijkingen in z en t, van die der vergelijking in x doen afhangen, (zie tweede bijvoegsel) maar de oplossing der vergelijkingen zelve, wordt moeijelijker, dan die der gegevene.

§. 940. Stelt men eenen derden magts factor $x^3 + px^2 + qx + r$, zou zij de vormen $x^3\ (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x + abc$; $x^3 + (a+b+d)x^2 + (ab+ad+bd)x + abd$; *enz.* verkrijgen, en en de coefficienten p, q en r, zouden van de drie volgende vergelijkingen:

$$[z-(a+b+c)] \times [z-(a+b+d)] \times enz. = 0$$
$$[z-(ab+ac+bc)] \times [z-(ab+ad+bd)] \times enz. = 0$$
$$[z-abc] \times [z-abd] \times [z-abe] \times enz. = 0$$

afhangen, welke, daar n grootheden, drie aan drie, of $\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)$ wijzen, kunnen zamengevoegd worden, van eene $\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)$ magts vergelijking zullen afhangen, zoodat, wanneer men, bij voorbeeld, eene zesde magts vergelijking, in twee derde magts factoren zou willen ontleden, en deze oplossing van de derde magts vergelijkingen doen afhangen: niet minder dan eene twintigste magts vergelijking zou behooren opgelost te worden.

§. 941. De oorzaak van deze zwarigheden, moet alleen aan de algemeenheid der stelkundige teekens worden toegeschreven, welke van elk vraagstuk alle mogelijke oplossingen geeft, en de volmaaktheid der kunst wordt dan alzoo de oorzaak van hare onvolmaaktheid. Het is wel waar, dat, onder sommige bepaalde omstandigheden, de afgeleide vergelijkingen tot eene lagere magt zouden kunnen gebragt worden: maar deze omstandigheden zouden de oplossing van bijzondere, en geenzins van algemeene vergelijkingen, geven.

§. 942. De groote EULER, heeft zich meer dan eens onbegrijpelijk veel moeite gegeven, om de vijfde en hoogere magts vergelijkingen optelossen. Offchoon hij nu even min, als zijne voorgangers, slaagde, heeft hij echter over dit stuk zeer veel lichts verspreid. Vele zamenloopende omstandigheden deden hem den vorm, welke de wortels hebben moeten, vermoeden. Men raadplege de *Nov. Comm. Acad. Petrop. Tom. IX. A° 1764.* LAGRANGE heeft naderhand, op de gelegde gronden van EULER voortgaande, dit stuk nog nader onderzogt. Men zie zijn meer aangehaald werk: *de la résolution des équations numériques.* Alle deze onderzoekingen komen daarop neder: dat, welke wegen men ook ingeslagen zij, men zelfs niet eens heeft kunnen slagen, om eene algemeene vijfde magts vergelijking optelossen. Voegen wij hierbij, dat RUFFINI in zijne *Teoria dell' Equazioni* getracht heeft, om 'er de onmogelijkheid van te bewijzen; dan, daar wij dit werk tot heden toe niet gezien hebben, kunnen wij over de gegrondheid van het betoog dezes geleerden niet oordeelen.

§. 943. Deze vruchteloze pogingen hebben nogtans vele fraaije eigenschappen der vergelijkingen nader leeren kennen, en zelfs geheele klassen van hoogere magts vergelijkingen opgeleverd, welke volkokomen oplosbaar zijn, andere wederom, welke onder zulke omstandigheden voorkomen, dat zij tot eene lagere magt gebragt kunnen worden.

§. 944. Onder de eerste verdienen de hoogere magts vergelijkingen van de tweede, derde en vierde magts vormen, genoemd te worden, benevens verscheide anderen, welke men in de gedenkschriften van DE MOIVRE, EULER, BEZOUT, en anderen zal aantreffen, en die wij alleen daarom met stilzwijgen voorbij gaan, te meer, daar zij in den tegenwoordigen staat der kunst, van weinig gewigt zijn.

§. 945. Van meer belang zijn de gevallen, waarin eene hoogere magts vergelijking tot eene lagere magt kan gebragt worden. Onder deze behooren in de voornaamste plaats de wederkeerige vergelijkingen, * welke die vergelijkingen zijn, in welke de coefficienten en teekens van de linker naar de regterhand, tot aan het midden, op dezelfde wijze opklimmen, als zij van daar tot aan het einde afdalen, als bij voorbeeld:

$$x^2 + ax + 1 = 0$$
$$x^3 + ax^2 + ax + 1 = 0$$
$$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$$
$$x^5 + ax^4 + bx^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$$
enz. *enz.*

welke vergelijkingen zoodanig gesteld zijn, dat zij niet veranderen, wanneer men $1:x$ in plaats van x stelt. Wat nu de onevene magts vergelijkingen van deze soort aangaat, deze hebben klaarblijkelijk $x+1$ tot factor, en wanneer zij door dien factor gedeeld worden, komt 'er eene wederkeerige vergelijking te voorschijn. Alzoo zal $x^5 + ax^4 +$ *enz.* $= 0$, door $x+1$ gedeeld zijnde, geven:

$$x^4 + (a-1)x^3 + (b-a+1)x^2 + (a-1)x + 1 = 0$$

Wij moeten ons dan alleen met de evene magts vergelijkingen van deze soort ophouden. Stellen wij de algemeene evene magts vergelijking:

$$x^{2n} + Ax^{2n-1} + Bx^{2n-2} + \text{enz.} + Mx^n + \text{enz.} + Bx^2 + Ax + 1 = 0$$

Laten a, b, c, d, *enz.* eenige van hare wortels zijn, dan is het klaar: dat $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$, $\frac{1}{d}$, *enz.* insgelijks wortels zijn zullen; omdat, wanneer a, b, c, *enz.* de vergelijking $0 = 0$ maken, $1:a$, $1:b$, $1:c$, *enz* zulks insgelijks zullen doen. Deelen wij nu de termen der ver-

vergelijking door x^n; dan zal men, na behoorlijke schikking der termen, verkrijgen:

$$\left[x^n + \frac{1}{x^n}\right] + A\left[x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\right] + B\left[x^{n-2} + \frac{1}{x^{n-2}}\right] +$$
$$\text{enz.} + M = 0$$

stellen wij nu $x + \frac{1}{x} = z$, dan is $x \times \frac{1}{x} = 1$, en men zal, volgens de algemeene formule van §. 562, *pag.* 341, de waarden van $x^2 + \frac{1}{x^2}$, $x^3 + \frac{1}{x^3}$, *enz.* in functien van z vinden: namelijk

$$\begin{aligned}
x + 1 : x &= z \\
x^2 + 1 : x^2 &= z^2 - 2 \\
x^3 + 1 : x^3 &= z^3 - 3z \\
x^4 + 1 : x^4 &= z^4 - 4z^2 + 2 \\
x^5 + 1 : x^5 &= z^5 - 5z^3 + 5z \\
x^6 + 1 : x^6 &= z^6 - 6z^4 + 9z^2 - 2 \\
\text{enz.} \quad & \quad \text{enz.}
\end{aligned}$$

zijnde algemeen

$$x^n + 1 : x^n = z^n - n z^{n-2} + n \cdot \frac{n-3}{2} z^{n-4} - n \cdot \frac{n-4}{2} \cdot \frac{n-5}{3} z^{n-6} + \text{enz.}$$

Wanneer men nu deze waarden van $x^n + 1 : x^n$, $x^{n-1} + 1 : x^{n-1}$, $x^{n-2} + 1 : x^{n-2}$, in de bovenstaande vergelijking overbrengt, dan zal men eene n^{de} vergelijking in z vinden, van den vorm

$$z^n + P z^{n-1} + Q z^{n-2} + R z^{n-3} + \text{enz.} = 0$$

welke n wortels hebben zal. Wanneer deze n wortels gevonden zijn, zal men een aantal van n tweede magts vergelijkingen $x + \frac{1}{x} = z$, of $x^2 - zx + 1 = 0$ moeten oplossen, waardoor alle de wortels der gegevene vergelijking zullen bekend worden. Zie eene toepassing van deze soort van vergelijkingen, in de oplossing van het 12 *Vraagstuk*, op *Tabelle A.* †† *Het blijkt dan uit dit alles overtuigend: dat eene wederkeerige onevene magts vergelijking tot eene evene gebragt kan worden, zonder op te houden wederkeerig te zijn, en dat eene wederkeerige evene magts vergelijking altijd tot eene andere gebragt kan worden, welker magt de helft is van die der gegevene.*

§. 946. Wanneer men de wederkeerige vergelijking $x^{2n} + ax^{2n-1} + bx^{2n-2} + \text{enz.} + mx^n + \text{enz.} + bx^n + ax + 1 = 0$, met de

reeks

reeks $1, p, p^2 . p^3$, *enz.* vermenigvuldigt, of liever, in plaats van x, ſtelt $y:p$; dan zal men de vergelijking:

$$y^{2n}+apy^{2n-1}+bp^2y^{2n-2}+ \text{enz.} +mp^ny^n+ \text{enz.} +bp^{2n-2}y^2 \\ +ap^{2n-1}y+p^{2n}=0$$

verkrijgen, welke derhalve, door $y=px$ te ſtellen, tot de gegevene herleid zal worden.

§. 947. Alle wederkeerige vergelijkingen kunnen derhalve tot eene lagere magt gebragt worden: doch 'er zijn vergelijkingen, welke van eene wederkeerige vergelijking, onder de volgende omſtandigheden, afhangen, 1° wanneer de gegevene uit het product van eene wederkeerige met eene wederkeerige beſtaat, 2° wanneer, door eene geſchikte ſubſtitutie, de gegevene vergelijking tot eene wederkeerige gebragt kan worden. Daar deze ſoort van beſchouwingen, om zoo te ſpreken, onuitputtelijk zijn, zullen wij ons ſlechts met de beſchouwing van een enkeld geval vergenoegen.

§. 948. Laat de $x^6+Ax^5+Bx^4+Cx^3+Dx^2+Ex+F=0$ gegeven zijn. Nemen wij: dat 'er eenig vermoeden beſta, dat deze vergelijking uit het product van $[x^4+pax^3+qa^2x^2+pa^3x+a^4] \times [x^2+rx+s]=0$ zij zamengeſteld. Indien dan dit vermoeden indedaad gegrond is; dan zullen p, q, r en s, in geheele getallen beſtaan moeten. Men ontwikkele dan, om zulks nader te beſlisſen, het product; dan zal men vinden:

$$x^6+(pa+r)x^5+(qa^2+pra+s)x^4+(pa^3+qra^2+psa)x^3 \\ +(a^4+pra^3+qsa^2)x^2+(ra^4+psa^3)x+sa^4=0$$

welker coefficienten een voor een aan die der gegevene gelijk moeten zijn, namelijk

$$A=pa+r;\ qa^2+pra+s=B;\ pa^2+qra+ps=\frac{C}{a};$$

$$a^2+pra+qs=\frac{D}{a^2};\ ra+ps=\frac{E}{a^3} \text{ en } s=\frac{F}{a^4}.$$

Waaruit al ten eerſten volgt: dat de factor a, éénmaal in C, tweemaal in D, driemaal in E, en viermaal in F moet begrepen zijn: kan men deze factor vinden; dan is $s=F:a^4$ bekend: trekt men de vierde vergelijking van de tweede af, dan verkrijgt men $(q-1)a^2 - (q-1)s=B-D:a^2$, waaruit volgt: $q-1=(B-D:a^2):(a^2-s)$. Trekt men voorts de vijfde vergelijking van $(pa+r)a = Aa$, zoo zal men uit het verſchil $p=(Aa-E:a^3):(a^2-s)$ en $r=(E:a^2-sA):(a^2-s)$ vinden: men zal dan de waarden

 van

van a, q, p en r vinden, en deze alle zullen aan de derde vergelijking $pa^2 + qra + ps = C:a$ moeten voldoen.

§. 949. Door de toepasfing van deze formulen, zal men vinden: dat de vergelijking $x^6 + 13x^5 + x^4 - 54x^3 + 369x^2 + 405x + 81 = 0$ in de factoren $x^4 + 3.3x^2 - 9.4x^2 + 27.3x + 81.1 = 0$ en $x^2 + 4x + 1 = 0$ ontleedbaar is, en dat gevolgelijk deze zesde magts vergelijking, door tweede magts factoren, zal kunnen opgelost worden.

§. 950. Wanneer 'er tusfchen twee of meer wortels eener gegevene vergelijking eene zekere betrekking beftaat, kan dezelve altijd tot eene lagere magt gebragt worden. Laat, bij voorbeeld, gegeven zijn, de vergelijking $x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$, en nemen wij, dat twee van derzelver wortels a en b door de vergelijking $pa + qb = h$ aan elkander verbonden zijn. Omdat dan a en b wortels zijn, zal men de vergelijkingen:

$$a^4 + Aa^3 + Ba^2 + Ca + D = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$b^4 + Ab^3 + Bb^2 + Cb + D = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

verkrijgen. Maar men kan uit de vergelijking $pa + qb = h$, de waarde van b afleiden, en dezelve in de vergelijking (2) overbrengen, welke alsdan van a alleen zal afhangen, zoodat men twee vergelijkingen in a hebben zal, welker eerfte magts gemeene deeler de waarde van a geven zal. Men zal dan deze gemeene deeler zoeken, en de waarde van a, welke dezelve geven zal, in $pa + qb = h$ overbrengen, en de wortels a en b zullen bekend zijn: eindelijk zal men, om de overige wortels te vinden, $x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$, door de tweede magts vergelijking $x^2 - (a + b)x + ab$ deelen, en het quotient zal de vergelijking op de twee andere wortels zijn.

§. 951. Indien $p(a + b) = q$, en bijgevolg eene fymetrieke functie van de wortels a en b gegeven ware, in welke a met b kan verwisfeld worden; dan is het klaar: dat de wortels a en b door eene tweede magts vergelijking zouden moeten gegeven zijn, en dat deze tweede magts vergelijking de gemeene deeler van de vergelijkingen (1) en (2) zou moeten zijn, wel verftaande, nadat men uit . . . . $p(a + b) = q$ de waarde van b afgeleid, en in de vergelijking (2) zou hebben overgebragt.

§. 952. Stellen wij nog: dat 'er tusfchen de drie wortels a, b en c, de betrekkings-vergelijking $pa + qb + rc = m$ plaats hebbe, wanneer men dan a, b en c, afzonderlijk in de gegevene vergelijking over-

overbrengt, zal men drie vergelijkingen in a, in b en in c vinden; herleidt men dan, met behulp van de betrekkings-vergelijking, de vergelijking in c in eene andere op a en b, dan zal men, twee vergelijkingen; ééne in a, en eene andere in a en b hebben, welken, daar ééne en dezelfde waarde van a aan dezelve voldoen moet, eenen gemeenen deeler, die functie van a en b is, zullen moeten hebben, en welke, met de vergelijking $pa + qb + rc = m$ gecombineerd zijnde, tot eene andere vergelijking brengen zal, welke alleen eene functie van a zal zijn, en welke de waarden van c geven zal. Men kan, op dezelfde gronden voortgaande, deze beschouwingen verder uitbreiden.

§. 953. Onder de hoogere magts vergelijkingen, welker oplossing van die van lagere magts vergelijkingen kan afhangen, verdient eene bijzondere melding gemaakt te worden, niet zoo zeer van die vergelijkingen, welke indedaad uit het product van twee of meer lagere magts vergelijkingen ontstaan, en welker factoren, naar aanleiding van de gronden, in §. 180, en vervolgens geleerd, altijd zeker genoeg kunnen gevonden worden; maar in het bijzonder, wanneer de coefficienten dezer factoren voor een gedeelte zoodanige wortel-uitdrukkingen zijn, welke, bij de dadelijke vermenigvuldiging der factoren, vernietigd worden, en welke alleen langs eenen bijzonderen weg moeten opgespeurd worden. NEWTON heeft het eerst, in zijne *Arithm. Univ. Pars II. Cap. V.* deze soort van deelers onderzogt; naderhand zijn de meeste Schrijvers deze handelwijze stilzwijgend voorbijgegaan; doch sedert onze waardige landgenoot, van HUGUENIN, in zijn fraai en nuttig Hoogduitsch geschrift: *Mathematische Beyträge*, *Konigsberg* 1803 door hulp van deze Leerwijze dezelfde uitkomsten als GAUSS (135) verkregen, en aangetoond heeft, dat de zijde van eenen zeventien hoek, in eenen gegevenen cirkel beschreven, van de oplossing van vierkants-vergelijkingen afhangt, heeft deze Leerwijze van NEWTON een meerder gewigt verkregen, waarom wij dezelve kortelijk zullen verklaren. Deze Leerwijze komt nu hierop neder, dat men, wanneer 'er eene evene magts vergelijking van den vorm

$$x^{2n} + Ax^{2n-1} + Bx^{2n-2} + Cx^{2n-3} + Dx^{2n-4} + enz. = 0$$

gegeven is, onderzoeke, of dezelve niet aan het verschil van een stelkundig vierkant min een veelvoud van een ander stelkundig vierkant ge-

(135) Zie het voortreffelijk werk van C. F. GAUSS, *Disquisitionis Arithmeticæ, Sectio* VII. *Præf. pag.* 662, §. 365.

gelijk zij; dat is, dat men onderzoeke; of deze vergelijking niet kan gelijk gemaakt worden aan de vergelijking:

$$[x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + enz.]^2 - n[px^{n-1} + qx^{n-2} + rx^{n-3} + enz.]^2 = 0$$

zoodanig, dat a, b, c, d, *enz.*, n en p, q, r, s, *enz.* welke klaarblijkelijk van de coefficienten der gegevene vergelijking afhangen, meetbare getallen zijn: kan men nu zulk eene uitdrukking vinden, dan bestaat de gegevene vergelijking klaarblijkelijk uit het product van de factoren

$$x^n + (a + p\sqrt{n})x^{n-1} + (b + q\sqrt{n})x^{n-2} + (c + r\sqrt{n})x^{n-3} + enz. = 0$$

$$x^n + (a - p\sqrt{n})x^{n-1} + (b - q\sqrt{n})x^{n-2} + (c - r\sqrt{n})x^{n-3} + enz. = 0$$

en hare oplossing hangt gevolgelijk van deze twee vergelijkingen af. — Het spreekt van zelve: dat, wanneer men de gegevene vergelijking aan de aangenomene uitdrukking gelijk maken kan, en n tevens daarbij een volkomen positief vierkant wordt, de gegevene vergelijking in meetbare factoren ontleedbaar zal zijn.

§. 954. Dit onderzoek kan niet wel op eene algemeene wijze worden ingerigt. NEWTON heeft ook de gevallen voor de vierde, zesde, achtste magts vergelijkingen afzonderlijk onderzogt. Wij zullen hier, om kort te zijn, zijn voetspoor niet volgen, en ons met den Heer HUGUENIN alleen bij de achtste magts vergelijkingen bepalen, waaruit men genoeg zien zal, hoe men de hoogere magts vergelijkingen behandelen moet, terwijl door sommige coefficienten gelijk nul te stellen, ook tevens de regels, langs welke de zesde en vierde magts vergelijkingen in dit onderzoek behandeld moeten worden, bekend zullen zijn. Stellen wij dan, dat gegeven zij de achtste magts vergelijking:

$$x^8 + Ax^7 + Bx^6 + Cx^5 + Dx^4 + Ex^3 + Fx^2 + Gx + H = 0$$

en nemen wij, dat dezelve gelijk zij aan:

$$[x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d]^2 - n[ex^3 + fx^2 + gx + h]^2 = 0$$

indien men dan de stelkundige vierkanten, welke in deze uitdrukking voorkomen, ontwikkelt, en de gelijkslachtige termen bij elkander voegt; dan zal men vinden:

$$x^8 + 2ax^7 + (a^2 + 2b - ne^2)x^6 + (2ab + 2c - 2nef)x^5 + (b^2 + 2ac + 2d - nf^2 - 2heg)x^4 + (2ad + 2bc - 2neh - 2nfg)x^3 + (c^2 + 2bd - ng^2 - 2nfh)x^2 + (2cd - 2ngh)x + d^2 - nh^2 = 0$$

welke vergelijking in alle hare termen aan de gegevene gelijk moet

zijn,

zijn, en op de voorgeſtelde wijze zal kunnen opgelost worden, wanneer men aan de volgende vergelijkingen zal kunnen voldoen:

1° $A = 2a$
2° $B = a^2 + 2b - ne^2$
3° $C = 2ab + 2c - 2nef$
4° $D = b^2 + 2ac + 2d - nf^2 - 2neg$
5° $E = 2ad + 2bc - 2neh - 2nfg$
6° $F = c^2 + 2bd - ng^2 - 2nfh$
7° $G = 2cd - 2ngh$
8° $H = d^2 - nh^2$

Hier zijn acht vergelijkingen, om negen grootheden a, b, c, d, e, f, g, h en n te bepalen. Het ſchijnt derhalve: dat deze grootheden onbepaald zijn: doch hier wordt eigenlijk geene bepaalde oplosſing beoogd. Men bedoelt om, door middel dezer vergelijkingen, te onderzoeken, of de coefficienten der gegevene vergelijking ten opzichte van elkander zoodanig geſteld zijn, dat aan deze vergelijkingen in meetbare waarden van a, b, c, d, f, g, h en n kan voldaan worden, zoo ja, dan zal de gegevene vergelijking wezenlijk onder de aangenomenen vorm gebragt, en in twee bijzondere ſurdiſche factoren ontleedbaar zijn; zoo niet, dan zal het niet mogelijk zijn, om de gegevene vergelijking in twee vierde magts factoren te ontleden.

Omdat hier minder de bedoeling is, om deze vergelijkingen optelosſen, dan wel te bepalen, of de gegevene coefficienten zoodanig bepaald zijn, dat de aangenomene vorm mogelijk is, komt het 'er voornamelijk op aan, om 1° de voorwaarden, onder welken voor n eene waarde beſtaan kan, te bepalen, en 2°, de voorwaarden voor de coefficienten a, b, c, d, e, *enz.* te vinden, dat is, de omſtandigheden te onderzoeken, waaraan men herkennen zal, of de coefficienten A, B, C, *enz.* zoodanig geſteld zijn, dat de voorgeſtelde oplosſing mogelijk zij.

De eerſte vergelijking geeft $a = \frac{1}{2} A$.

Uit de tweede volgt: $b = \frac{1}{2} B - \frac{1}{8} A^2 + \frac{1}{2} ne^2$. Stellende dan $M = B - \frac{1}{4} A^2$; dan is $b = \frac{1}{2} M + \frac{1}{2} ne^2$.

De derde vergelijking geeft $c = \frac{1}{2} C - ab + nef$. Stelt men hier, in plaats van a en b, de zoo even gevondene waardijen, zal men, $C - \frac{1}{2} AM = N$ ſtellende, vinden $C = \frac{1}{2} N - \frac{1}{4} Ane^2 + nef$.

De vierde vergelijking geeft $d = \frac{1}{2} D - \frac{1}{2} b^2 - ac + \frac{1}{2} nf^2 + neg$, en voor b, a en c, hare waarde ſtellende, en $O = D - \frac{1}{2} AN - \frac{1}{4} M^2$

 ma-

makende, $d = \frac{1}{2}C - \frac{1}{4}Mne^2 + \frac{1}{8}A^2ne^2 - \frac{1}{8}n^2e^2 - \frac{1}{2}Anfe + \frac{1}{2}nf^2 + neg$.

Uit de vijfde vergelijking volgt: $d = (E - 2bc + 2neh + 2nfg) : A$, of bij nadere ontwikkeling, (voor b en c hare waarde stellende,) $d = [E - \frac{1}{2}MN + \frac{1}{4}AMne^2 - Mnef - \frac{1}{2}Nne^2 + \frac{1}{4}An^2e^4 - n^2e^3f + 2neh + 2nfg] : A$.

Men stelle nu: $ef - \frac{1}{4}Ae^2 = p$, voorts $\frac{1}{8}A^2e^2 - \frac{1}{2}Aef - \frac{1}{2}ME^2 - \frac{1}{8}ne^2 + eg + \frac{1}{2}f^2 = q$; en $\frac{1}{4}AMe^2 - \frac{1}{2}Ne^2 - Mef + \frac{1}{4}Ane^4 - ne^3f + 2eh + 2fg = r$; dan zullen de waarde van c, en de twee waarden van d, zoo even gevonden, worden:

$$c = \frac{1}{2}N + np;\ d = \frac{1}{2}O + nq;\ d = [E - \frac{1}{2}MN + nr] : A$$

Vergelijkt men deze twee waarden van d met elkander, dan zal men, $2(An - r) = [2E - MN - AO] : n$ vinden, en hieruit blijkt dan: *dat* $2E - MN - AO$, *door* n *deelbaar moet zijn.*

Uit de zesde vergelijking volgt, na voor b en c de bovenstaande waarden, en voor d de eerste waarde $\frac{1}{2}O + nq$ gesteld te hebben,

$$n[8fh + 4g^2 - 4Mq - 2Oe^2 - 4Np - 4nqe^2 - 4np^2] = N^2 + 2MO - 4F$$

en daaruit blijkt: *dat* $N^2 + 2MO - 4F$ *door* n *deelbaar moet zijn.*

Maakt men, in de zesde vergelijking, dezelfde substitutie, met dit onderscheid, dat men in plaats van d hare tweede waarde ...... $[E - \frac{1}{2}MN + nr] : A$ stelt: dan zal men vinden:

$$n[8Afh + 4Ag^2 - 4Mr - (4e - 2MN)e^2 - 4nre^2 - 4ANp - 4Anp^2] = M \times [4E - 2MN] + AN^2 - AF$$

waaruit blijkt: *dat ook* $M \times [4E - 2MN] + AN^2 - 4AF$ *door* n *deelbaar moet zijn.*

Neemt men, in de zevende vergelijking, voor c en d hare waarden: maar eerst $d = \frac{1}{2}O + nq$, en daarna $d = [E - \frac{1}{2}MN + nr] : A$, dan zal men vinden:

1° .... $n[Nq + 2Op + 4npq - 4gh] = 2G - BC$

2° $n[Nr + (4E - 2AB)p + 4npr - 4Agh] = 2AG - N(2E - MN)$

en hieruit blijkt: *dat de waarden van* $2G - BC$ *en* $2AG - \ldots N(2E - MN)$ *beiden ook door* n *deelbaar moeten zijn.*

Stelt men eindelijk in de achtste vergelijking de gevondene waarden van d; dan zal het blijken: *dat* $4H - O^2$ en $4A^2H - (2E - MN)^2$ *ook beide door* n *deelbaar moeten zijn.*

§. 955. Men make dan $M = B - \frac{1}{4}A^2$; $N = C - \frac{1}{2}AM$ en $O =$

$0 = D - \frac{1}{2}AN - \frac{1}{4}M^2$; indien dan de waarden van de volgende zeven uitdrukkingen:

1° . . . . $2E - MN - AO$
2° . . . . $N^2 + 2MO - 4F$
3° . . . $M \times [4E - 2MN] + AN^2 - 4AF$
4° . . . . $2G - BC$
5° . . . . . $2AG - N[2E - MN]$
6° . . . . $4H - O^2$
7° . . . . . $4A^2H - [2E - MN]^2$

eenen gemeenen deeler hebben, zal die deeler, of een van zijne factoren de waarden van n kunnen zijn. Bestaat 'er geen gemeene deeler, zal n niet anders dan ± 1 kunnen genomen worden, en dan zal voor $+1$ de gegevene vergelijking misschien in meetbare factoren, en voor $n = -1$ in factoren, die onbestaanbare coefficienten hebben, ontleedbaar zijn. Stellen wij nu, dat 'er een gemeene deeler n bestaat; dan zal men denzelven positief of negatief moeten nemen, en aan de volgende omstandigheden toetsen.

1° De twee eerste vergelijkingen geven:

$$b = \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{\left\{\frac{A^2 - 4B + 8b}{n}\right\}} = \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{\left\{\frac{8b - 4M}{n}\right\}}$$

men zal dan b zoodanig moeten nemen, dat 1° $8b - 4M$ door n deelbaar, en dat 2° het quotient een volkomen vierkant zij. (Men moet hier in aanmerking nemen, dat b, c, d, gebrokens kunnen zijn, welke twee tot noemer en een oneven getal tot teller hebben, en dat zij voorts positief of negatief kunnen zijn.)

2° De achtste vergelijking geeft $h = \pm\sqrt{\left[\frac{d^2 - H}{n}\right]}$. De waarde van d moet dan zoodanig genomen worden: dat $d^2 - H$ door n deelbaar, en het quotient een volkomen vierkant zij.

3° Doch, de waarde van d is niet slechts aan deze voorwaarde alleen verbonden. Wij hebben boven gevonden $d = \frac{1}{2}O + nq = [E - \frac{1}{2}MN + nr] : A$. De waarde van d moet derhalve nog zoodanig genomen worden, dat

$$q = [d - \tfrac{1}{2}O] : n \quad \textit{en} \quad r = [Ad - E + \tfrac{1}{2}MN] : n$$

geheele getallen zijn.

4° Uit de zevende vergelijking volgt $c = \frac{G + 2ngh}{2d}$, en wanneer men deze waarde van c in de zesde vergelijking overbrengt, zal men hebben:

$$4(nh^2-f^2)q^2+4Ggh-8g^2hf=\frac{4q^2F-G^2-8d^2}{n}$$

welke waarde bewijst, dat $4g^2F-G^2-8d^2$ ook door n deelbaar moet zijn.

5° Behandelt men deze vergelijking als de vierkants vergelijkingen, dan zal men vinden:

$$2g-\frac{2Gh}{H}=\pm\sqrt{\left\{\frac{2401\,h^2}{H2}+\frac{G^2+8d^2b-4d^2F}{nH}-\frac{8d^2h}{H}\times f\right\}}$$

in welke zoodanig moet genomen worden, dat het tweede lid een volkomen vierkant worde.

6° De waarde, welke hieruit voor g volgt, moet in $c=\ldots\ldots(G+2ngh):2d$ overgebragt worden: en deze moet dan, met de waarde van f, in $C=2ab+2c-2nef$, het teeken, dat aan e gegeven moet worden, bepalen, welke fubftitutie tevens zal doen zien, of de waarden van c en f naar behooren genomen zijn, moetende daarenboven $2ab+2c-C$ door n deelbaar zijn.

7° Voldoen nu de waarden, welke men voor a, b, c, d, n, e, f, g en h, gevonden heeft, ook aan de vierde en vijfde vergelijkingen, dan zal de gegevene vergelijking, onder den aangenomen vorm gebragt, en in twee furdifche factoren ontleedbaar zijn.

§. 956. Het zou kunnen gebeuren, dat $n=1$ ware, en dit heeft altijd plaats, wanneer de waarden der bovenftaande uitdrukkingen geen gemeenen deeler hebben: wanneer men nu in dit geval, in de onderftelling van $n=1$, de waarden van a, b, c, d, e, f, g en h onderzoekt, zal het daaruit blijken, of de gegevene vergelijking in twee meetbare factoren ontleed kan worden.

§. 957. Wanneer men E, F, G, H, c, d en g, h, gelijk nul neemt, zullen dezelfde regels voor het onderzoek van de factoren der vierde magts vergelijkingen dienen. Voor de factoren eener zesde magts vergelijkingen, indien G, H, d en h gelijk nul gefteld worden.

§. 958. Nemen wij tot een voorbeeld de vergelijking:

$$y^8-\tfrac{1}{2}y^7-\tfrac{7}{4}y^6+\tfrac{6}{8}y^5+\tfrac{15}{16}y^4-\tfrac{10}{32}y^3-\tfrac{10}{64}y^2+\tfrac{4}{128}y+\tfrac{1}{256}=0$$

in welke $y=Cof.\frac{1}{17}.180°$ is. Wanneer men in deze $\frac{1}{2}x=y$ ftelt, verkrijgt men in geheele getallen de vergelijking:

$$x^8-x^7-7x^6+6x^5+15x^4-10x^3-10x^2+4x+1=0$$

en men zal vinden, dat zij in de factoren

$$x^4-\left\{\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right\}x^3-\left\{\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right\}x^2-[2-\sqrt{17}]x-1=0$$

4^4 —

$$x^4-\left\{\frac{1-\sqrt{17}}{2}\right\}x^3-\left\{\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right\}x^2-[2+\sqrt{17}]x-1=0$$

ontleedbaar is; ja zelfs dat elk dezer factoren wederom in twee tweede magts factoren kan ontleed worden, te weten, nadat men in plaats van x gesteld heeft $2y$.

$$y^2-\left\{\frac{1-\sqrt{17}+\sqrt{(34-2\sqrt{17})}}{8}\right\}y-\left\{\frac{1+\sqrt{17}+\sqrt{(34+2\sqrt{17})}}{16}\right\}=0$$

$$y^2-\left\{\frac{1-\sqrt{17}-\sqrt{(34-2\sqrt{17})}}{8}\right\}y-\left\{\frac{1+\sqrt{17}-\sqrt{(34+2\sqrt{17})}}{16}\right\}=0$$

$$y^2-\left\{\frac{1+\sqrt{17}+\sqrt{(34+2\sqrt{17})}}{8}\right\}y-\left\{\frac{1-\sqrt{17}-\sqrt{(34-2\sqrt{17})}}{16}\right\}=0$$

$$y^2-\left\{\frac{1+\sqrt{17}-\sqrt{(34+2\sqrt{17})}}{8}\right\}y-\left\{\frac{1-\sqrt{17}+\sqrt{(34-2\sqrt{17})}}{16}\right\}=0$$

Hieruit vindt men, voor de Cosinus van $\frac{1}{17}$ van $180°$, de uitdrukking $1-\sqrt{17}+\sqrt{(34-2\sqrt{17})}+\sqrt{[68+12\sqrt{17}+8\sqrt{(34+2\sqrt{17})}+4\sqrt{(34-2\sqrt{17})}]}:16$. Zijnde deze dezelfde uitdrukking, welke GAUSS, op de aangehaalde plaats, verkregen heeft. Indien men de overige vergelijkingen oplost, zal men de Cosinussen $\frac{3}{17}$, $\frac{5}{17}$, $\frac{7}{17}$, enz. van $180°$ verkrijgen.

§. 959. Deze zijn de voornaamste kunstgrepen, waardoor men, indien het mogelijk is, eene gegevene vergelijking tot eene lagere magt kan brengen. Wanneer men nu den zamengestelden vorm van de wortels der algemeene derde en vierde magts vergelijkingen overweegt, kan men uit denzelven genoeg beoordeelen, hoe zamengesteld de uitdrukkingen voor de wortels der hoogere magts vergelijkingen, indien men immer in derzelver oplossing slaagde, zouden worden: doch deze oplossingen, kunnen, hoe zamengesteld zij zijn mogen, nogtans omstandigheden leeren kennen, welke bij de benadering zich schuil houden: alzoo heeft de oplossing van de vergelijking der voorgaande §. ons bij voorbeeld geleerd: dat de zijde van eenen regelmatigen zeventien hoek, in den cirkel beschreven, van den vierkants-wortel uit 17 afhangt, en dezelfde Leerwijze zou ons doen zien: dat de zijden van eenen drie, vijf, zeven, elf, en dertien hoek van $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{11}$ en $\sqrt{13}$, afhangen, enz. In dit opzigt blijft dan de algemeene oplossing der vergelijkingen eene wenschelijke zaak, schoon voor de werkdadige berekening der wortels, de benaderingen meer algemeen toepasselijk en veel bekwamer zullen blijven. Het zijn dus deze laatste, welke voor het werkdadige van het meeste gewigt zijn, en die men gevolgelijk moet beschaven en eenvoudiger maken. Wij hebben daarom ook aan deze laatste de voorkeur gegeven, en niet tegenſtaande wij het voornaamſte, hetwelk daartoe betrekking heeft, hebben voorgedragen, kunnen wij niet voorbij te berigten, dat wij, bij het afdrukken van dit blad, een werk van den Heere CANARD, getijteld: *Théorie élémentaire des inéquations*, ontvingen, in hetwelk deze ſtof op eene geheel-nieuwe wijze behandeld wordt; doch, hetwelk, hoewel de handelwijze ons fraai voorkomt, wij nog niet genoegzaam onderzogt hebben, om 'er ons oordeel over te vellen.

EERSTE BIJLAGE.

Betoog van den Regel van DESCARTES. *Zie* §. 276, *pag.* 182.

§. 960. De Regel van DESCARTES zal kunnen betoogd worden, indien men bewijzen kan; dat, *wanneer het voorſte lid eener hooge magts vergelijking*

$$x^n + A x^{n-1} + B x^{n-2} + C x^{n-3} + enz. = 0$$

met een factor $x+a$, *(welk met eenen negatieven wortel overëenſtemt,) vermenigvuldigd wordt, de nieuwe negatieve wortel, welke de vergelijking alsdan verkrijgt, in het product geen meer afwisſelingen van teekens, en, dat omgekeerd, het product van de gegevene vergelijking met eenen factor* $x+a$, *(die met eenen poſitieven wortel overëenkomt,) geen meer permanentien, dan in de gegevene vergelijking gevonden worden, kan te weeg brengen.*

§. 961. Vermits men, in dit betoog, met de waarde der coefficienten niets te doen heeft, zullen wij eene willekeurige rangorde van teekens in de termen der gegevene vergelijking, die wij altijd volkomen onderſtellen, aannemen, zoodanig, dat echter in deze rangordening alle mogelijke gevallen van opvolging voorkomen. Wij ſtellen dan voor die rangordening

$$+ + + + - + - - - + - + - - + + +$$

Wanneer dan de vergelijking, welker termen met die teekens zijn aangedaan, door $x+a$ vermenigvuldigt, en de gelijkſlachtige, zoo als het behoort, optelt; dan zal men hebben:

$$\begin{array}{lcccccccccccccccccc}
 & + & + & + & + & - & + & - & - & - & + & - & + & - & - & + & + & + & \\
 & & + & + & + & + & - & + & - & - & - & + & - & + & - & - & + & + & + \\
\hline
\textit{product} & + & + & + & + & \ast & \ast & \ast & - & - & \ast & \ast & \ast & \ast & - & \ast & + & + & +
\end{array}$$

Het is bekend, dat in de optelling van de kolommen der gelijkſlachtige partieele producten het teeken van de ſom + of − zal zijn, indien de teekens van de deelen der ſom beide + of beide − zijn;

maar,

maar, indien de teekens der deelen verfchillen, is het, algemeen genomen, onzeker, welk teeken de fom hebben zal? wij hebben daarom de teekens van die fommen met ☼ geteekend, hetgeen zeggen wil: dat zij + of — kunnen zijn: dit onbepaald zijn dezer teekens is een noodzakelijk gevolg van de onbepaalde waarde der coefficienten, en deze onbepaaldheid der coefficienten en teekens moet juist aan het betoog de grootfte algemeenheid bijzetten.

Het blijkt nu uit dit tafeltje: 1° dat zoo lang 'er in de eerfte termen der vergelijking eene permanentie van teekens beftaat, dezelve ook in het product beftaan zal; 2° maar, wanneer de permanentie in het vermenigvuldigtal ophoudt, de teekens van de overëénkomftige termen des products onzeker zullen worden, en zoo lang onzeker blijven, tot dat in twee of meer volgende termen eene permanentie plaats heeft, in welk geval het teeken in product op nieuw bepaald zal zijn. 3° Dat 'er even zoo vele onbepaalde teekens in het product zullen voorkomen als 'er afwisfelingen van teekens in het vermenigvuldigtal voorkomen. 4° Dat één enkeld onbepaald teeken tusfchen geene andere, dan de tegenovergeftelde teekens + en —, of — en + vallen kan. Het zij dan dit onbepaalde teeken + of — zij, zoo is het klaar: dat + ☼ —, of — ☼ +, in welk geval men het neme, eene afwisfeling en eene permanentie zal voortbrengen. 5° Dat, in het algemeen, een oneven aantal onbepaalde teekens, tusfchen twee tegenovergeftelde teekens + en —, of — en + vallen zal: men neme nu in dit geval, voor de onbepaalde teekens, zoodanige als men goedvindt; dan zal het grootfte getal afwisfelingen, dat men in + ☼ ☼ ☼ *enz.* of — ☼ ☼ ☼ en + brengen kan, ten hoogfte aan het aantal overëénkomftige afwisfelingen in het vermenigvuldigtal gelijk zijn. 6° Eindelijk blijkt het: dat een even getal onbepaalde teekens, tusfchen twee gelijke + en +, of — en —, vallen zal; dan welk eene rangorde van teekens men voor deze onbepaalde teekens aanneme, zal men ten hoogfte flechts even zoo vele afwisfelingen in + ☼ ☼ *enz.* +, of — ☼ ☼ *enz.* —, brengen kunnen, als 'er afwisfelingen in de overëénkomftige termen van het vermenigvuldigtal voorkomen. — In welk eene rangorde dan de teekens voorkomen, kunnen 'er in het product geen meer afwisfelingen dan in het vermenigvuldigtal voorkomen, 'er moet gevolgelijk in hetzelve ten minfte eene permanentie meer plaats hebben; want het aantal der termen is nu één meer geworden.

Vermenigvuldigen wij nu de vergelijking met $x - a$; dan zal men voor de teekens van het product verkrijgen:

+

+ + + + − + − − − + − + − − + + +
   − − − − + − + + + − + − + + − − −
+ ✻ ✻ ✻ − + − ✻ ✻ + − + − ✻ + ✻ ✻ −

en men zal hieruit op dezelfde wijze kunnen nagaan: dat in dit product geen meer permanentien, dan in de gegevene vergelijking kunnen plaats hebben, en dat hetzelve bijgevolg ten minste eene afwisseling meer dan de gegevene hebben zal.

§. 962. Stellen wij nu: dat al de wortels der vergelijking bestaanbaar zijn, en dat zij in alle hare eerste magts factoren ontleed zij geworden; stel de positieve wortels a, b, c, *enz.* dan zullen de overëënkomstige factoren $x-a$, $x-b$, $x-c$, *enz.* zijn: stel insgelijks de negatieve wortels $-p$, $-q$, $-r$, *enz.*; dan zijn de factoren, tot deze wortels behoorende, $x+p$, $x+q$, *enz.* Nu heeft het product van $(x-a)(x-b)$, *enz.* eene bestendige afwisseling, en het product $(x+p)(x+q)$, *enz.* eene bestendige permanentie van teekens. Vermenigvuldigen wij nu het eerste product, eerst met $x+p$, daarna met $x+q$, *enz.*; dan zullen 'er in het finale product, volgens het bewezene, geen meer afwisselingen van teekens, dan in het product $(x-a)(x-b)$, *enz.* kunnen voorkomen, vermenigvuldigt men omgekeerd het laatste product eerst met $x-a$, daarna met $x-b$, $x-c$, *enz.* dan zullen 'er in het product geen meer permanentien, dan in $(x+p)(x+q)$, *enz.* kunnen voorkomen. Nu is, indien de vergelijking volkomen is, het aantal van hare termen één meer dan het aantal van hare wortels, en het aantal van overgangen, van het eene teeken tot het andere, één minder dan het aantal van hare termen, gelijk derhalve aan het aantal van hare wortels. Stellen wij derhalve het aantal der positieve wortels gelijk p, dat der negatieve gelijk q; het aantal der teekens afwisselingen gelijk p', en dat van de blijving der teekens gelijk q'; dan moet $p+q=p'+q'$ zijn. Volgens het bewezene kan nu p' niet grooter dan p en q' niet grooter dan q zijn: derhalve moet $p=p'$ en $q'=q$ zijn, enz.

TWEEDE BIJLAGE.

Over het zamenstellen der Vergelijkingen, welke symetrieke functien van wortels eener gegevene vergelijking zijn.

§. 963. * Eene symetrieke functie van twee of meer grootheden a, b, c, *enz.* is zulk eene, welke dezelfde waarde behoudt, in welke eene

eene rangorde deze grootheden met elkander verwisfeld worden. Alzoo is $a^n + b^n + c^n + d^n$, eene fymetrieke functie van de grootheden a, b, c en d: fchrijft men $a^2 + 3b^2 - 3c^2$, zal deze niet fymetriek zijn; want zij zal de waarde veranderen, wanneer men twee of meer letters met elkander verwisfelt.

§. 964. De coefficienten van de termen eener hooge magts vergelijking, gelijk ook de fommen van de gelijknamige magten der wortels, welke met behulp van het Theorema van GIRARD gevonden worden, zijn gevolgelijk fymetrieke functien van hare wortels. Men kan nu, met behulp van dit Theorema, de waarden van vele andere fymetrieke functien der wortels vinden.

§. 965. †† *Laten a, b, c, d, enz. de wortels eener vergelijking zijn; dan zal men de waarde eener functie, welker termen van den vorm $a^p b^q$ zijn, vinden kunnen.* Dat wil zeggen, indien men de p^{de} magten der wortels op alle mogelijke wijzen met derzelver q^{de} vermenigvuldigt, dan zal de fom van alle deze producten in eene functie van de coefficienten der gegevene vergelijkingen kunnen bepaald worden.

Want men kan, volgens het Theorema van GIRARD, in het algemeen, de waarde van $\Sigma . a^p$ en $\Sigma . a^q$ in eene functie der coefficienten uitdrukken: wanneer men nu

$$a^p + b^p + c^p + d^p + e^p + enz. = \Sigma . a^p$$
$$a^q + b^q + c^q + d^q + e^q + enz. = \Sigma . a^q$$

met elkander vermenigvuldigd, dan zal men, in het product, twee foorten van termen verkrijgen: termen van den vorm $a^p b^q$, en termen van den vorm a^{p+q}, de fom van de termen van den laatften vorm zal door $\Sigma . a^{p+q}$ uitgedrukt, en, door het meer genoemd Theorema, in eene functie der coefficienten kunnen worden uitgedrukt: wanneer men de fom der termen van de tweede foort van het product aftrekt, dan zal men vinden:

$$\Sigma . a^p b^q = \Sigma . a^p \times \Sigma . a^q - \Sigma . a^{p+q} \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

en men zal gevolgelijk, door het Theorema van GIRARD, de waarde van $\Sigma . a^p b^q$, in eene functie van de coefficienten verkrijgen.

§. 966. Vermenigvuldigen wij deze laatfte vergelijking met $a^r + b^r + c^r + d^r + enz. = \Sigma . a^r$; dan zullen 'er in het product drieërlei onderfcheidene termen voorkomen: van den vorm $a^{p+q} b^r$; van den vorm $a^{p+r} c^q$, en van den vorm $a^p b^q c^r$, en men zal derhalve hebben

$$\Sigma . a^p b^q c^r + \Sigma . a^{p+q} b^r + \Sigma . a^{p+q} c^q = \Sigma . a^p \times \Sigma . a^q \times \Sigma a^r - \Sigma . a^{p+q} \times \Sigma . a^r$$

waar-

waaruit volgt:

$$\Sigma\,.\,a^p b^q c^r = \Sigma\,.\,a^p \times \Sigma\,.\,a^q \times \Sigma\,.\,a^r - \Sigma\,.\,a^{p+q} \times \Sigma\,.\,a^r - \Sigma\,.\,a^{p+q} b^r - \Sigma\,.\,a^{p+q} c^r$$

Maar volgens de voorgaande §, is

$$\Sigma\,.\,a^{p+q} \times \Sigma\,.\,b^r = \Sigma\,.\,a^{p+q} \times \Sigma\,.\,a^r - \Sigma\,.\,a^{p+q+r}$$

$$\Sigma\,.\,a^{p+r} \times \Sigma\,.\,c^q = \Sigma\,.\,a^{p+q} \times \Sigma\,.\,a^p - \Sigma\,.\,a^{p+q+r}$$

Deze waardijen in de voorgaande vergelijking overbrengende, zal men vinden:

$$\Sigma\,.\,a^p \times b^q \times c^r = \Sigma\,.\,a^p \times \Sigma\,.\,a^q \times \Sigma\,.\,a^r - \Sigma\,.\,a^{p+q} \times \Sigma\,.\,a^r - \Sigma\,.\,a^{p+r} \times \Sigma\,.\,a^q - \Sigma\,.\,a^{q+r} \times \Sigma\,.\,a^p + 2\,.\,\Sigma a^{p+q+r} \quad .\ .\ (2)$$

Gaat men op deze wijze voort; dan zal men ook de waarden van $\Sigma\,.\,a^p b^q c^r d^s$, $\Sigma\,.\,a^p b^q c^r d^s e^t$, *enz.* in functien van de coefficienten der gegevene vergelijking bepalen.

§. 967. Stellen wij in de vergelijking (1) successievelijk $p = q = 1$, $p = q = 2$, $p = q = 3$, *enz.*; dan zal men de sommen van de producten der gegevene vergelijking, twee aan twee, genomen, de sommen van de tweede, derde en volgende magten dezer producten kunnen bepalen, en uit deze de coefficienten eener vergelijking zamenstellen, welker wortels uit de producten van de wortels der gegevene vergelijking, op alle mogelijke wijzen, twee aan twee, genomen, zijn zamengesteld.

§. 968. Op dezelfde wijze zal men, met behulp van vergelijking (2), uit eene gegevene vergelijking, eene vergelijking kunnen afleiden, welker wortels de producten van de wortels der gegevene zijn, op alle mogelijke wijzen, drie aan drie, genomen, enz.

§. 969. Men zal voorts door de toepasfing van die zelfde beginselen, verscheidene andere vergelijkingen kunnen zamenstellen, als: 1° de vergelijking op de sommen der wortels, op alle mogelijke wijzen, twee aan twee, genomen. 2° De vergelijking op derzelver verschillen. 3° De vergelijking op de vierkanten der verschillen, en eene menigte anderen, welke wij, daar zij thans van minder gewigt geworden zijn, met stilzwijgen voorbijgaan.

Einde van den Tweeden Cursus.

Ter Drukkerij van G. POST, te UTRECHT.