Dissertatio physico-mathematica inauguralis de celeritate soni per fluida elastica propagati

https://hdl.handle.net/1874/10089

DISSERTATIO PHYSICO-MATHEMATICA
INAUGURALIS

DE

CELERITATE SONI
PER FLUIDA ELASTICA PROPAGATI,

QUAM,

ANNUENTE SUMMO NUMINE,

EX AUCTORITATE RECTORIS MAGNIFICI

HERMANNI ROYAARDS,

S. S. THEOL. DOCT. ET PROF.

AMPLISSIMIQUE SENATUS ACADEMICI CONSENSU, ET NOBILISSIMI ORDINIS MATHESEOS ET PHILOSOPHIAE NATURALIS DECRETO,

PRO GRADU DOCTORATUS,

SUMMISQUE IN MATHESI ET PHILOSOPHIA NATURALI HONORIBUS ET PRIVILEGIIS RITE AC LEGITIME CONSEQUENDIS,

PUBLICO ET SOLEMNI EXAMINI SUBMITTIT

RICHARDUS VAN REES,

NEOMAGENSIS,

DIE XVII DECEMBRIS MDCCCXIX, HORA XI.

TRAJECTI AD RHENUM,

EX OFFICINA JOH. ALTHEER.

MDCCCXIX.

COGNATIS,

PRAECEPTORIBUS,

AMICIS

SACRUM.

* * *

Inter varia physices capita pauca sane inveniuntur, quae argumenti jucunditate et ubertate animos magis delectent, quam illud, quo soni proprietates exponuntur. Sive enim indagemus, qualis sit ejus origo in corporibus sonoris, sive investigemus, qua ratione inde per aërem aut alia corpora propagetur, sive tandem exquiramus, quo modo auditus organon afficiat et sensum excitet, perpetuo nova et miranda detegimus phaenomena. Neque mirum igitur, maxime praestantes Physicos et Mathematicos in illud incubuisse, ut soni phaenomena tum exactius definirent institutis experimentis, tum vero illa a firmis repeterent principiis, ex quibus omnes illorum conditiones computatione mathematica possent elici. Hoc in primis valet de propagatione soni, quam Newtonus calculo subjicere aggressus est, et Lagrangius atque Eulerus post eum magis explorarunt. His viris contigit, minimas aëris vibrationes, quibus sonus propagetur, aequationibus analyticis definire, et inde plurima soni phaenomena perfecte explicare, quorum ratio alioquin numquam exponi potuerit.

Argumenti autem difficultas effecit, ut in omnibus ejus partibus tractandis non eadem usi sint felicitate. Praecipue vero in definienda soni celeritate ab experientia recessit illorum computatio; experimenta enim sonum celerius per aërem propagari docebant, quam quidem calculus indicaret. Hanc labem tollere, et soni theoriam omni dubio majorem reddere diu frustra tentaverunt Physici; tandem autem summus Laplacius veram ostendit causam, cui illud discrimen sit tribuendum, et omnem difficultatem hac in re sustulit.

Quum igitur per aliquot jam annos in Academia Ultrajectina praeter studia medica, quibus me praecipue devovi, disciplinis quoque Mathematicis et Physicis operam dedissem, et nunc ad summos honores in hisce disciplinis ambiendos accederem, illud argumentum mihi non incongruum neque injucundum visum fuit, quod dissertatione Academica exponeretur. Quapropter in sequenti specimine ea, quae et theoria et experimenta de soni celeritate docent, colligere et comparare, atque eorum opiniones, qui illa inter sese conciliare conati sunt, recensere in animo habui. Hunc autem juvenilem meum laborem ut Viri, harum rerum periti, benevole judicent, etiam atque etiam rogo.

Quas autem gratias optimis debeam praeceptoribus, Viris Clarissimis de Fremery, Moll, Schröder, Kops, quorum scholis interesse, et quorum institutione frui mihi contigit, eas hoc loco reticere nefas puto. Illi enim studia mea promovere, et monitis atque exemplo mihi veram, quae ad cognitionem ducat, viam ostendere non desierunt, quare, quae in hisce studiis profecerim, ex illis omnia me debere publice testor. Illis quidem, quas debeo gratias, referre non licet; beneficiorum autem, quibus me ornaverunt, jucunda recordatio semper eum in me grati animi sensum excitabit, ut, quamvis illorum scholas reliquerim, eos tamen per totum vitae decursum discipuli amore prosequi non desinam.

Ordinem autem pertractandae hujus dissertationis sequentem mihi proposui, ut

Capite I. Generales fluidorum elasticorum proprietates tradam.

Capite II. Analyticam exponam theoriam propagationis soni per illa fluida, et inde soni celeritatem in aëre atmosphaerico definiam.

Capite III. Experimenta recenseam, quibus soni celeritas in aëre atmosphaerico determinata est.

Capite IV. Varias adducam Physicorum opiniones de dissensu, qui inter theoriam et experimenta adest.

Capite V. Speciatim Laplacii sententiam de hoc argumento exponam.

Capite VI. Ea experimenta, quae de celeritate soni in aliis fluidis elasticis prostant, cum soni theoria conferam, et quae ipse institui, illis addam.

C A-

CAPUT PRIMUM.

GENERALIA QUAEDAM DE FLUIDIS ELASTICIS.

§. 1. Antequam ad ipſum, quod tractandum mihi ſumſi, argumentum transeam, fluidorum elasticorum proprietates generatim exponere utile duxi. Ex his enim omnis theoria de motu, quo illa fluida affici posſint, repetenda est.

Elastica dicuntur illa fluida, quae perpetuo ſeſe in majus ſpatium extendere, et limites, quibus comprehenduntur, removere conantur; quapropter, ſi externa vi in minus ſpatium coacta ſunt, ſublatâ illâ vi denuo pristinum volumen occupant. Distinguuntur haec fluida in *gazformia* ſeu *permanenter elastica*, quae hucusque neque temperaturae decremento, neque etiam aucta presſione in fluida ſtillantia redigi potuerunt, et in fluida *non permanenter elastica* ſeu *vapores*, quae, ſi caloricum iis detrahitur, aut ſi auctae ſubjiciuntur presſioni, facile in ſtatum fluidi ſtillantis redeunt.

§. 2. Elasticitas horum fluidorum multis nominibus ab elasticitate corporum rigidorum differt. His enim figuram pristinam forte mutatam restituendi facultas est; fluida elastica ſpatium, quod implent, extendere conantur. — Corpora rigida numquam perfecte ſunt elastica, ſed diu compresſa ſenſim elasticitatem amittunt; fluida autem elastica hanc vim perfecte ſervant, quantumvis diu compressa fuerint. — Tandem, restituta in corporibus rigidis pristina forma, vis elastica non ulterius agit; fluida autem elastica nunquam desinunt nisum exserere, quo spatium suum augeant.

§. 3. De elasticitatis causa proxima multum disputarunt Physici; veram autem ejus rationem nemo hucusque perspectam habuit. (1) Fluidorum quidem elasticorum vim plures ex antiquioribus Physicis motu quodam rotatorio minimarum molecularum explicare studuerunt, Cartesium secuti, qui in omnibus naturae phaenomenis gyratorium motum sibi fingebat (2); alii subtilius fluidum in auxilium vocarunt, quod, interstitiis fluidi elastici contentum et per ea celerrime motum, elasticitatis phaenomena produceret. Postea vero, positis praesertim Chemiae recentioris fundamentis, calorico, cui forsan elasticitas primaria tribuenda sit, vis elasticorum fluidorum adscripta fuit. Et certe multa sunt quae huic sententiae favent, qualia sunt vaporum genesis ex fluidis stillantibus addito calorico; porro elasticitatis incrementum in omnibus fluidis elasticis, si caloricum in iis augetur, quod eo magis observatu dignum est, quia vis elastica diversorum fluidorum elasticorum eodem temperaturae augmento eadem proportione increscit. (3) Illud enim indicare videtur, formam aut indolem molecularum ipsius fluidi nihil conferre ad ejus elasticitatem, sed esse causam generalem extraneam, quae fluidis accedens elasticitatem provocat, et quam facile in calorico invenimus. Tandem quoque ingens calorici proportio, quae ex fluidis elasticis evolvitur, si quacunque demum ratione, sive aucta pressione aut refrigerio (in vaporibus), sive affinitate chemica formam elasticam amittunt, optime ex illa sententia explicatur. Quamvis autem valde probabilis sit haec opinio, tamen non praebet absolutam phaenomenorum explicationem, et difficultatem potius removet quam tollit; superest enim quaestio, undenam tandem oriatur ipsius calorici elasticitas, quae quaestio experientiae limites excedere videtur.

§. 4. Tutiori via summus Newtonus, ab omni hypothetica explicatione alienus, ex ipsis phaenomenis elasticitatis leges determinare studuit, et, quem-

ad-

(1) Gehler, Phys. Wörterb. voce *Elasticität*. Th. I. p. 695.

(2) Cartesius, Princip. Phil. §. 47. p. 157.

(3) Gay-Lussac, Annal. de Chim. Tom. XLIII. p. 174.

admodum omnia principia, quae in rerum natura motum producunt, Phyficis *virium* nomine veniunt, fic quoque Newtonus proprietatem fluidorum elasticorum, qua in majus fpatium fefe extendere conantur, ex vi repellente derivat, qua imbutae minimae fluidi moleculae fefe mutuo fugent. Haec autem Newtoni fententia non ita intelligi debet, quafi prudentisfimus Vir ultimam elasticitatis caufam illa vi indicare voluerit; verum, quoniam haec caufa intellectum humanum fugere videtur, vim illam potius tanquam loquendi formulam propofuit, quo facilius et accuratius in investigandis elasticitatis phaenomenis pergi posfet. Id ipfum perfpicuis verbis indicat, quando, demonftrato ex lege Mariottii, vires centrifugas particularum esfe reciproce proportionales diftantiis centrorum fuorum, haec fubjungit: „ An vero „ fluida elastica ex particulis fe mutuo fugantibus conftent, quaestio phyfica „ est. Nos proprietatem fluidorum, ex ejusmodi particulis conftantium, ma„ thematice demonftravimus, ut philofophis anfam praebeamus quaestionem „ illam tractandi." (1)

§. 5. Celeberrimus Kantius, qui ex notione materiei vires primarias, repellentem et attrahentem, quibus conftat, repetiit, non putat fluidorum elasticorum vim habendam esfe pro vi primaria repellente, cujus intenfitas eo judice crescit in ratione inverfa cubica diftantiarum minimarum, dum vis fluidorum elasticorum in ratione inverfa diftantiarum agat. Hanc ergo vim potius calorico tribuit, quod non tantum inter eorum moleculas penetret, fed illas fimul vibrationibus fuis incitet, ut fefe mutuo fugiant. (2)

§. 6. Recentiores in exponendis phyficis fluidorum elasticorum proprietatibus Newtoni fere fententiam fequuntur, et minimas horum fluidorum moleculas imbutas fibi proponunt vi repellente, cujus leges deinde determinare ftudent. Haec enim agendi ratio explicandis illorum fluidorum phaenomenis utique fufficit, et, fi rite intelligitur, nihil hypotheticum habet.

§. 7. Fluida elastica, majus perpetuo fpatium implere nitentia, hunc ni fum

(1) Newton, Phil. Nat Princ. Math. Lond. 1726. Lib. II. prop. 23. — Cf. Ejusd. Optice. Lond. 1740. Quaest. 31. p. 303.

(2) Kant, Metaph. Anfangsgr. der Naturwisf. Leipz. 1800. p. 63, qui tamen Philofophus, eadem prudentia ufus ac Newtonus, hanc fententiam non nifi dubitanter proponit.

fum exferunt fi externa obftacula non adfunt, quibus ulterior eorum dilatatio impediatur; fi vero talia obftacula adfunt, vi fua elastica in illa premere pergunt. Hinc oritur presfionis notio, quam nunc ulterius perfequemur.

§. 8. Ex ipfa fluiditatis notione confequitur, et experientia confirmatur, presfionem fluido illatam per totam ejus masfam aequabiliter propagari. (1) Haec proprietas bafin theoriae aequilibrii et motus fluidorum conftituit. Fluidum ergo elasticum, vafe comprehenfum, et certa vi compresfum, in omnibus fuis punctis aequalem presfionem fustinet; eadem autem vi, qua compresfum fuit, in latera vafis reagit, et illa fuâ vice premit, quare vis elastica fluidi aequalis esfe dicitur presfioni externae, quam fustinet.

§. 9. Quo melius haec intelligantur, fingamus partem quandam laterum vafis esfe fublatam, et ejus loco fubftitutum esfe embolum, qui aperturam perfecte claudat, et libere in ea moveatur. Ne embolus vi elastica fluidi contenti extrorfum pellatur, ille vi aequali et contraria introrfum adigi debet; quo facto aequilibrium aderit. Sit vis qua embolus adigitur $= \mathrm{P}$ et bafis emboli $= \mathrm{A}$; P defignabit presfionem quam fustinet pars laterum vafis, cujus fuperficies est A; et quoniam presfiones quas fingula puncta fuperficiei vafis fustinent funt aequales, presfiones in varias fuperficies erunt inter fe ut ipfae fuperficies, i. e. fuperficies A′ presfionem fustinebit $= \frac{\mathrm{PA}'}{\mathrm{A}}$. Si ergo p est presfio constans, quam fustinet area plana, aequalis unitati fuperficiei, habebimus $\mathrm{A}' = 1$ et $p = \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{A}}$

§. 10. Exprimatur vis P, qua embolus introrfum adigitur, pondere columnae ex fluido homogeneo conftantis, cujus altitudo fit a et cujus bafis aequalis fit bafi emboli $= \mathrm{A}$. Ergo ejus volumen est $= \mathrm{A}a$. Denfitas fluidi fit unitas denfitatis, et fit vis gravitatis, qua fingulae ejus moleculae urgentur, $= g$. Pondus columnae aequale est producto ex ipfius denfitate, volumine et vi quae in eam agit, ideoque, quoniam denfitas est $= 1$, erit $\mathrm{P} = \mathrm{A}ag$,

$$\text{unde} \quad p = \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{A}} = ga$$

In

(1) Newton, Phil. Nat. Princ. Math. Lib. II. prop. 19. Euler de ftatu aequilibrii fluidorum. Comm. Petrop. Nov. XIII. p. 305. Bosfut, Hydrodynamique, Par. 1786. Tom. I. p. 10. De fluiditatis notione cf. Kant, l. l. p. 141 fqq.

In hac aequatione a et g ſunt numeri ſimplices, relati ad unitatem extenſionis linearis et unitatem virium. Unitatem linearem in ſequentibus metro aequalem habebimus. Et quoniam vires acceleratrices conſtantes sunt inter ſe uti celeritates quas corpus, iis agitatum, post certum tempus acquirit, unitas virium dici potest illa vis acceleratrix, qua agitatum corpus post unitatem temporis celeritatem acquirat, aequalem unitati ſpatii (1). His poſitis, ſi pro unitate temporis habetur unum minutum ſecundum, vis gravitatis g exprimitur duplo numero metrorum, quae corpus grave, libere cadens, primo minuto ſecundo percurrit, quoniam celeritas, quam hoc tempore acquiſivit, duplo illi numero aequalis est.

§. 11. Eadem quoque aequatio adhibenda est, ſi fluidum elasticum nullo vaſe incluſum est, ſed liberum, qualis est aër atmosphaerae nostrae; tunc autem mercurius in barometro vices excipit illius columnae fluidae, cujus presſione elasticitatem fluidi mox definivimus. Nam ſuperficies mercurii, quae aëri vel alii fluido elastico patet, illud premit pondere columnae mercurii, cujus altitudo aequalis est altitudini ipſius in barometro, quapropter, ſi mercurii denſitas pro unitate denſitatis habetur, illa altitudo aequalis est quantitati a, quae in aequatione $p = g a$ occurrit.

§. 12. Haec presſio p, quam fluidum elasticum quaquaverſum exſerit, et quae, ex ejus elasticitate orta, etiam eius *vis elastica* vel *elasticitas abſoluta* dicitur, differt pro diverſa fluidi indole, pro ratione denſitatis, et temperaturae. Et primum quidem de denſitate videamus.

§. 13. Si fluidum elasticum, certae presſioni ſubmisſum, in aequilibrio verſatur, et dein presſio augetur, vis elastica fluidi non par est ſustinendae auctae presſioni, ſed fluidum in minus ſpatium redigitur, ideoque denſius evadit, donec intenſitas vis elasticae, quae nunc in minus ſpatium agit, tantum aucta ſit, ut illa denuo presſioni externae aequet, quo facto aequilibrium reſtitutum est. Auctâ igitur presſione, quam ſustinet fluidum elasticum, illius denſitas augetur, et rurſus, aucta ejus denſitate, intenditur vis elastica. Boyle et Mariotte inſtitutis experimentis legem invenerunt, qua a ſe invicem pendent denſitas et elas-

(1) Poiſſon Traité de Mecanique. Par. 1811. Tom. I. §. 198.

elasticitas seu pressio fluidi elastici, et quae ab iis *lex Boyleana* vel *Mariottiana* vocatur (1). Haec lex eo redit, ut, si reliqua sunt eadem, pressio ejusdem fluidi elastici sit proportionalis densitati ejus specificae, ideoque inverse ut spatium, quod implet; adeo quidem ut, si designamus pressionem per p, densitatem per q, sit in singulis fluidis $p = \varkappa q$, ubi $\varkappa$ est coëfficiens constans in eodem fluido et eadem temperatura, sed alia in aliis fluidis et alio temperaturae gradu. Haec coëfficiens $\varkappa$ vocatur quoque *elasticitas specifica*, et denotat rationem inter pressionem seu elasticitatem absolutam fluidi elastici, ejusque densitatem.

§. 14. Nonnulli Physici opinati sunt, illam Mariottii legem omni dubio non vacare. Quoniam enim ex illa concludimus, fluidum elasticum pressione magis magisque aucta in spatium quantumvis parvum redigi posse, illa autem fluida tantummodo comprimi possunt, donec moleculae constituentes in mutuum contactum pervenerunt, crediderunt illi, Mariottii legem veritate destitutam esse quotiescunque de ingentibus pressionibus agatur. (2) Haec autem refutatio, ex atomorum doctrina petita, veritatem illius legis vix sollicitat.

§. 15. Praeterea vero adducuntur nonnullorum experimenta, ex quibus pateat, aërem traditae regulae non amplius auscultare, quando in volumen quadruplo vel sextuplo minus redigitur, sed eo in casu elasticitatem citius augeri quam densitatem. (3) His autem contraria experimenta ab aliis instituta sunt. (4) Id saltem constat, Mariottii legem accuratam esse in iis pressionibus, quae non nimium a solita pressione recedunt. Nuperrime Du Long et Petit illam legem in diversis quoque temperaturis verissimam esse invenerunt. (5)

Al-

(1) Boyle defensio doctrinae de grav. et elat. aëris p. 42. Oper. omn. Gen. 1680. Vol. I. — Mariotte, Essai sur la nature de l'air, Par. 1676. tom. I. p. 155.

(2) D'Alembert, traité des fluides, Lib. I. Cap. 6. — Euler de statu aequilibrii fluidorum. Comm. Petrop. Nov. XIII. p. 319.

(3) Rondellus, Comment. Bonon. Vol. I. p. 209. — Muschenbroek, Introd. ad Phil. Nat. Vol. II. §. 2107. — Sulzer, Mem. de l'Acad. de Berlin 1753. p. 116.

(4) Winkler, Untersuchungen der Natur und Kunst, Leipz. 1765. p. 98.

(5) Du Long et Petit, Ann. de Chimie et de Phys. VII. p. 122. — Cf. de lege Mariottii v. Swinden Posit. Phys. II. p. 134 sqq.

§. 16. Altera caufa, quae elasticitatem fluidorum elasticorum mutare valet, est varia eorum temperatura. Prouti caloricum cetera corpora omnia, fic etiam fluida elastica expandere conatur, quare, fi presfio externa manet eadem, fluida illa temperaturae augmento majus volumen implent, i. e. eorum denfitas imminuitur; fi autem volumen, quod implent, non mutatur, fi v. c. in vafe claufo calefiunt, elasticitas increscit. Hinc patet, effectum auctae temperaturae confiftere in augmento elasticitatis fpecificae feu coëfficientis $\varkappa$. — Docuit autem Gay-Lusfac, diverfa fluida elastica, fub eadem presfione iisdem temperaturae augmentis fubjecta, eodem gradu dilatari; hanc autem dilatationem inde a temperatura 0° ad temperaturam 100° (1) aequalem esfe parti 0,375 voluminis primitivi, atque illam intra hos limites proportionalem esfe dilatationi mercurii in thermometro, quapropter quodcunque fluidum elasticum, cujus temperatura uno gradu thermometri centigradi augetur, exacte dilatatur parte 0,00375 voluminis quod in temperatura 0° implebat. (2) Si igitur elasticitas fpecifica alicujus fluidi in temperatura 0° exprimitur per $\varkappa$, ejus elasticitas in temperatura t est $= (1+0,00375\,t)\varkappa$, et aequatio inter presfionem et denfitatem evadit: $p = (1+0,00375\,t)\,\varkappa q$. Coëfficiens $\varkappa$ in diverfis fluidis elasticis diverfos valores habet, qui valores reciproce funt uti denfitates fpecificae horum fluidorum.

§. 17. Quum in aëre, quo ambimur, atmofphaerico perpetuo vapor aqueus haereat, et quum fluida elastica, quibus in experimentis phyficis utimur, plerumque hoc vapore faturata funt, videndum quoque est, quantum ille denfitatem fluidorum elasticorum mutet. — In eo praecipue vapores a fluidis permanenter elasticis differunt, quod horum denfitas auctâ presfione in infinitum augeri posfit, vapores autem non nifi certum presfionis gradum ferre valeant, ultra quem fi

(1) Divifionem thermometri in 100 gradus ubique adhibebimus; gradus autem thermometri Fahrenheitiani aut Reaumuriani, quando opus erit, adjecta litera F aut R indicabimus.

(2) Gay-Lusfac, Ann. de Chim. XLIII. p. 137. Biot Traité de Phyfique, Par. 1816. Tom. I. p. 182. Daltoni experimenta, eodem fere tempore inftituta, inveniuntur in Gilberts Ann. der Phyfik. XII. p. 310. Porro conferantur Du Long et Petit l. c p. 107. fqq. qui in altioribus etiam temperaturis dilatationes aëris et mercurii comparaverunt.

ſi comprimuntur, ſtatum elaſticum amittunt. Ille limes presſionis vaporum diverſus eſt pro varia temperatura (1); inde vero fit, ut ſpatium quoddam non niſi certam vaporum quantitatem continere valeat, quae ceterum eadem eſt, ſive illud ſpatium ſit vacuum, ſive impletum alio fluido elaſtico. Fluidum elaſticum, cui tanta vaporis quantitas admixta eſt, quantam finit temperatura, hoc vapore ſaturatum eſſe dicitur, et, ſi vapor eſt aqueus, hygrometra fluidis elaſticis immisſa varium ſaturationis gradum indicant, ex quo dein presſio vaporis in quavis temperatura deduci poteſt. (2)

§. 18. Sit jam presſio, quam ſuſtinet miſcela ex fluido permanenter elaſtico et vapore aqueo, $= p$, et presſio vaporis in hac miſcela $= p'$, erit presſio quam ſuſtinet ipſum fluidum permanenter elaſticum $= p - p'$. Si porro denſitates illius fluidi elaſtici et vaporis aquei in presſione p, ſunt q et q', erit

denſitas fluidi permanenter elaſtici in miſcela $= \frac{p-p}{p} q$

—— vaporis aquei $= \frac{p'}{p} q'$

et quum harum denſitatum ſumma aequet denſitati miſcelae, erit

$$\text{denſitas miſcelae} = \frac{p-p'}{p} q + \frac{p'}{p} q'$$
$$= q - \frac{p'}{p} (q - q')$$

(1) Tabulam presſionis vaporis aquei pro ſingulis gradibus thermometri centigradi habet Biot, Traité de Phyſique. Tom. I. p. 531.

(2) Biot, l. l. Tom. II. p. 199 ſqq.

CAPUT SECUNDUM.

THEORIA MOTUS FLUIDORUM ELASTICORUM, QUO SONUS PROPAGATUR.

§. 19. Ut bene perſpiciatur illa motus ſpecies in fluidis elasticis, qua ſonus ex loco, in quo excitatus fuit, ad remotas plagas perſertur, primo dicendum est generatim, qua ratione ſonus excitetur.

§. 20. *Sonum* vocamus vibrationes corporis elastici, quae auditus organon afficiunt. Si nimirum corpora elastica impulſu externo ex ſitu primitivo dimota ſunt, ſimul atque ille impulſus tollitur ad pristinum ſtatum redire nituntur, unde ab utraque axeos parte oriuntur continuae vibrationes, quae per vicinum aërem aliudve medium elasticum propagantur, et illa ratione, ſi ſatis celeres et ſatis intenſae fuerint, ſonum producunt.

§. 21. Prae ceteris Celeb. Chladni leges examinavit, ſecundum quas vibrationes ſonorae in corporibus elasticis oriantur; invenit autem tres esſe vibrationum ſonorarum ſpecies, varia motus directione diſtinctas, transverſales nempe, longitudinales, et gyratorias. Transverſales vibrationes ſunt, in quibus directio motus axi perpendicularis est; obſervantur in chordis et membranis tenſis, virgis, discis, campanisque elasticis. In vibrationibus vero longitudinalibus ſiunt continuae compresſiones et expanſiones corporis ſonori in directione longitudinis; tali motu aër in tubis muficis agitatur, eodemque corpora rigida quoque agitari posfunt, fi vis impellens iis in directione longitudinis applicatur. Vibrationes tandem gyratoriae non nifi in virgis elasticis obfervatae funt. (1)

§. 22. Quacumque autem vibrationum fpecie agitetur corpus fonorum, facile intelligitur, illius vibrationibus aërem vicinum ad motum impelli; de ratione, qua motus fonorus per aërem ita propagetur, ut tandem auditum nostrum afficiat, nunc agendum est. Quod ut melius fiat, impulfum, una tantum vibratione corporis fonori productum, confiderabimus; vibrationum enim continuitas phaenomenon propagationis foni non mutat, fed finguli impulfus, aëri illati, per eum ita propagantur, ac fi plures non fuisfent.

§. 23. Quando moleculae aëreae, corpori tremulo vicinae, hoc impelluntur, eadem vi, qua impulfae fuere, in proximas fibi moleculas premunt, illasque verfus remotiora aëris ftrata urgent, donec compresfi aëris elasticitas tantum aucta fit, ut inter hanc et impellentis corporis vim aequilibrium oriatur. Haec primo accidunt temporis momento; fequente vero aër compresfus vi elasticitatis fuae verfus omnes partes fefe expandit, ideoque non tantum moleculae, antea motae, ad pristina loca redeunt, fed illa quoque aëris ftrata, quae hucusque mota non fuerant, agitantur et compresfionem patiuntur fimilem illi, quam aër, corpori fonoro vicinior, jam pasfus fuit. His ergo continuis condenfationibus et dilatationibus motus fonorus ulterius per totam aëris masfam propagatur. Quae autem de aëre dicta funt, illa ad medium quodvis elasticum pertinere fponte patet.

§. 24. Newtonus aliique adnotaverunt, hanc motus aëris fpeciem quodammodo convenire cum motu undarum in fuperficie aquae. Uti enim prima aquae agitatio, qualiscumque tandem fuerit ejus directio, in modum circulorum concentricorum ulterius propagatur, ita motus, corpore vibrante aëri vicino impresfus, a corpore illo tanquam a centro fecundum fuperficies propemodum fphaericas undique propagatur. Tamen cavendum est, ne illa fimilitudo inter utram-

(1) Chladni, Die Akustik. Leipf. 1802. §. 47-50. Phyfices partem, quae generalem foni theoriam exponit, primus a mufica distinxit et *Acustices* nomine defignivit Sauveur, a quo plures quoque proprietates vibrationum fonorarum in chordis detectae fuerunt. Mém. de l'Acad. de Paris 1701. p. 299.

utramque motus ſpeciem nimis extendatur. In motu undarum vis motrix est gravitas; in motu autem aëris ſonoro elaſticitas est cauſa, cur motus propagetur. Praeterea motus undarum fit in ſuperficie aquae, aër autem ſonorus undique vicino aëre cingitur.

§. 25. Hoc capite nobis propoſitum est mathematice inquirere in celeritatem, qua ſonus in medio elaſtico propagetur. Prius vero nobis obſervandum est, duplicem in theoria motus ſonori occurrere celeritatis notionem. Altera celeritas, de qua nobis hoc loco dicendum est, est illa, qua motus ſonorus per medium propagatur; cognoscenda ex tempore, quod ſonus impendit, ut a loco, in quo oritur, ad disſita loca perveniat. Altera celeritas in cenſum venit, quando de motu ipſarum molecularum medii agitur. Vidimus enim ſonum ita in medio elaſtico propagari, ut primum ſingula medii ſtrata, urgente undâ ſonorâ, in vicina et remotiora propellantur, dein vero ad priſtina ſua loca redeant; jam vero celeritas, qua hanc vibrationis ſpeciem peragunt, prorſus diverſa est ab ea celeritate, qua motus ſenſim ad diverſa medii ſtrata pergit.

§. 26. Plura docent, ſingulas aëris moleculas, dum ſonum propagant, admodum parum a locis ſuis recedere, unde ſequitur, celeritatem illam, de qua ultimo loco diximus, aeque exiguam esſe, adeoque denſitatem aëris vix mutari. Nam vibrationes corporum elaſticorum ſonum excitantium adeo exiguae esſe ſolent, ut viſui non pateant; neque ulla ratio est, cur illae vibrationes in aëre ampliorem motum efficiant; imo potius agitatio, prius in parvo ſpatio excitata, intenſitate imminui debet, quando in omnes directiones per aëris masſam propagatur, ita quidem ut, etiamſi priſtina agitatio, corporis ſonori impulſu in vicinum aërem producta, ſenſibilis esſet, tamen agitatio aëris in exigua a corpore ſonante diſtantia jam ita debilitaretur, ut pro infinite parva habenda esſet. Hinc quoque forſitan explicandum est, cur ſoni intentisſimi quoque in barometrum non agant (1), cur flammam non extinguant, cur nullum

(1) Benzenberg in Gilb. Ann. Neue Folge. IX. p. 129. Illa autem, quae Auctor ad explicandum hoc phaenomenon proponit, minus congrua ſunt. Nam primo opinatur, undas ſonoras in aëre ſibi adeo propinquas esſe, ut plures ſimul in ſuperficie mercurii adſint, et, quoniam inter undas condenſatas adſint undae rarefactae, has priorum tollere effec-

lum producant ventum. Magnum hinc oritur emolumentum in calculo analytico de propagatione soni, quoniam spatia, a singulis aëris moleculis percursa, et celeritates, quibus hunc motum peragunt, ut infinite parva considerari possunt, et ideo in calculo prae quantitatibus finitis evanescunt. Hac saltem hypothesi usi sunt fere omnes, qui mathematice in proprietates soni inquisiverunt, et vires analyseos nondum sufficiunt, ad problema de propagatione motus in medio elastico sine illa hypothesi generatim solvendum.

§. 27. Ante Newtonum nemo theoriam motus fluidorum mathematico calculo subjicere potuerat. Immortalis ille Vir, argumentum hoc primus aggressus, posteris physicis illud ulterius elaborandi viam stravit. Continetur ejus theoria *sectione* 8ª. *libri II. Principiorum*, in qua agit de motu per fluida propagato. Postquam prop. 42 et 43 demonstravit, motum quemcunque, in fluidis excitatum, per illa versus omnes partes propagari, ita quidem ut undae sonorae, in medio elastico vibrationibus corporis tremuli excitatae, et inde ulterius propagatae, sphaericam fere formam habeant, et aequalibus circiter spatiis inter se distent, Newtonus pergit ad determinandas leges, secundum quas moleculae aëreae, dum motum vibratorium propagant, ipsae moveantur. Hunc in finem unam tantum medii elastici dimensionem spectans, illud constare censet ex numero infinito molecularum physicarum, in recta linea aequali spatio a se distantium. Ut oscillandi rationem horum punctorum inveniat, *prop.* 47. (1) fingit, medium elasticum a quacunque demum causa ita moveri, ut

fectum. Verum Newtonus jam docuit in Principiis, Libr. II. Prop. 50. undarum sonorarnm distantias admodum notabiles esse. Cf. Chladni l. c. §. 195. Praeterea Benzenbergius addit, in columna aërea, superficiei mercurii ad perpendiculum insistenti, strata adesse alia condensata, alia dilatata, quae ergo simul sumta aequilibrium non turbant. At vero ex omnibus illis stratis illud tantum in censum venit, quod mercurio proximum est; mercurius enim in barometro non sustinetur pondere aëris incumbentis, sed ejus elasticitate. Meliori forsan jure a Benzenbergio tertia adducitur explicatio, undas condensatas et dilatatas tali velocitate sese insequi, ut propter solam mercurii inertiam nullum sensibilem effectum in illud possint exercere. Tamen illud phaenomenon facile quoque explicatur, si condensationes et dilatationes aëris sonori sint admodum exiguae.

(1) Newton Phil. Nat. Princ. Mathem. Lond. 1726. In prioribus Principiorum editionibus propositiones 47ª. et 48ª. inverso ordine collocatae sunt.

ut fingulae moleculae, fua vice agitatae, eodem motu ferantur ac pendulum, in cycloide oscillans; quam hypothefin demonftrat perfecte convenire cum legibus mechanicis, quae pendent ab actione mutua molecularum elasticarum; unde concludit, harum motum revera talem esfe, qualem illum finxit, i. e. motui penduli analogum. Ex his tandem *prop.* 49. fpatium deducit, quod fonus intra datum tempus percurrit, dum fpeciatim *prop.* 48. docet, foni in variis fluidis elasticis propagati velocitates esfe in ratione fubduplicata vis elasticae, divifae per denfitatem i. e. in ratione fubduplicata elasticitatis fpecificae.

§. 28. Quamvis hae propofitiones fummum Newtoni ingenium luce clarius demonftrent, methodus tamen fynthetica, qua ufus est, et quae disquifitionibus hujus generis minus est idonea, juncta brevitati ftyli Newtoniani, effecit, ut plures hanc operis ejus partem intelligere prorfus non potuerint. (1) Alii, post accuratius examen, vitium in demonftratione latere fufpicati funt, quod Cramerus dein manifeste probavit ostendendo, Newtoni ratiocinium etiam valere ad demonftrandas propofitiones, oppofitas illis, quas ipfe pofuerat. Ita v. c. Cramerus, illo ratiocinio ufus, demonftravit, moleculas oscillantes medii elastici moveri juxta legem gravium libere adfcendentium et defcendentium, unde patebat, in ipfo ratiocinio Newtoniano vitium adesfe. (2)

§. 29. Acutisfimus de la Grange in Miscellaneis Taurinenfibus, in quibus egregie de phaenomenis foni egit, antequam ad exponendam fuam methodum transiit, Newtoni theoriam accuratisfime ad examen revocavit, eamque in eo a vera norma aberrare ostendit, quod nimis reftrictae hypothefi fuperftructa fuisfet. (3) Newtonus enim cum fingeret, moleculas medii elastici moveri pro lege penduli in cycloide moti, et dein demonftraret, hanc hypothefin convenire cum

(1) Illud de fe ipfo fasfus est Joh. Bernouilli fil. Vide d'Alembert, traité des fluides, §. 219.

(2) Cramer in Comment. ad Newton. princ. ed. P. P. Jacquier et le Sueur, Genev. 1739. Vol. II. p. 364.

(3) De la Grange, fur la nature et la propag. du fon, in Miscell. Taurin. 1759. Tom. I. parte 2. p. 1. fqq. — Id. Nouvelles recherches etc. l. l. Tom. II. parte 2. p. 11. fqq.

cum legibus mechanicis fundamentalibus, nihil aliud docuerat, nisi ejusmodi motum in aëre adesse posse, et minime inde concludere licebat, illum motum revera in aëre sonoro adesse. Hoc naevum in Newtoni opere Lagrangius eo jam loco emendare studuit, et dein in Commentariis Berolinensibus soni theoriam denuo methodo synthetica secundum Newtoni rationem proposuit, saepius ipsius verbis usus, sed nullam specialem hypothesin circa motum minimarum molecularum admittens. (1)

§. 30. Post Newtonum theoria soni magis analytice tractari incepit. Praeivit eam problema de motu chordarum vibrantium, in quo solvendo summi mathematici, Taylor, d'Alembert, Euler, D. Bernouilli, analyseos vires tentaverant et auxerant, et in quo simul, praeëunte d'Alemberto, prima vice calculus differentialium partialium ad mechanicam applicatus fuit. Soluto hoc problemate, ad affine illi problema de motu aëris sonori transierunt Eulerus et Lagrangius. Hic quidem inventa sua de soni theoria duabus praecipue dissertationibus divulgavit, quae locis jam citatis reperiuntur. In prima dissertatione, praemisso examine theoriae Newtonianae, transit Auctor ad determinandas oscillationes partium intimarum fibrae sonorae, ac invenit, has oscillationes iisdem aequationibus differentialibus definiri, quibus definitur motus oscillatorius chordae tensae. Quas quidem aequationes deinde subtili et ingeniosa analysi ad integrationem reduxit, et formulam integralem adhibuit, ad explicandas varias soni proprietates, inter quas soni celeritas quoque memoratur. Hoc loco Lagrangius Euleri sententiam tuetur, functiones arbitrarias, quae in integrandis ejusmodi aequationibus occurrunt, utcunque irregulares esse posse, et nulla continuitatis lege adstrictas esse.

§. 31. Quum autem d'Alembert adversus illam sententiam plura dubia moveret (2), Lagrangius in altera dissertatione novam integrandi methodum

(1) De la Grange Mém. de l'Acad de Berlin, 1786 p. 181.

(2) d'Alembert fuse hac de re egit in Opusc. Mathem. Par. 1761. Tom. I. p. 1. et Tom IV. p. 128., quibus in locis praecipue de problemate chordarum vibrantium agit. Tomo vero V. p. 138. speciatim nonnulla de soni celeritate habet, et quum functiones discontinuas ex analysi rejiciat, eo loco demonstrare conatur, calculum analyticum non posse adhiberi ad determinandam soni celeritatem, nisi aër initio ita agitatus sit, ut velocitates

dum docuit, quam ab illis difficultatibus immunem censet, et usus aequationibus generalibus, quas Eulerus pro motu fluidorum elasticorum invenerat, non tantum de propagatione soni in linea recta sive in una directione disputavit, sed etiam determinavit, quales forent soni proprietates, si aëri verus esset motus undulatorius, omnesque igitur moleculae, aeque a corpore sonoro distantes, eadem velocitate ferrentur, earumque motus semper fieret in recta, ab illo corpore tanquam e centro ducta. Utraque in hypothesi Lagrangius eandem soni celeritatem invenit, quam antea Newtonus repererat. Quum vero ille valor non prorsus conveniat cum experimentis, ea de re institutis, Lagrangius inquirit, num forsitan error in eo situs sit, quod agitationes cujuscunque particulae censeantur esse minimae; instituto vero calculo hypothesis agitationum infinite parvarum ipsi sola esse videtur, quae in theoria propagationis soni possit adhiberi.

§. 32. Eulerus quoque multum ad amplificandam soni theoriam contulit, et variis in locis fuse de ea disquisivit (1); accuratissime vero in illo opere, quo, universam hydrostaticam et hydrodynamicam complexus, leges aequilibrii et motus fluidorum exposuit (2). Postquam sectione prima et secunda principia posuit, quibus omnes quaestiones de aequilibrio et motu fluidorum superstruere oportet, sectione tertia casum specialem considerat, in quo fluidum solo motu lineari movetur, atque igitur omnes fluidi moleculae, in eadem sectione perpendiculari ad motus directionem sitae, eadem celeritate feruntur. Ejus-

tes initiales diversarum molecularum exprimi possint curvâ, quae legi continuitatis obediat; id quod vix in natura fieri potest. — Litem hanc optime diremit, et Euleri sententiam confirmavit Arbogast, mémoire sur la nature des fonctions arbitraires etc. St. Petersbourg 1790.

(1) Euler, lettre à M. de la Grange. Miscell. Taurin. Tom. I. part. 2. p. 1. — De propagatione soni etc. Nov. Comm. Acad. Petrop. Tom. I. p. 67. — De la propagation du son. Mém. de Berlin, 1759. p. 185. — Eclaircissemens plus détaillés etc. Mém. de Berlin, 1765. p. 335.

(2) Euler, Sect. 1. de statu aequilibrii fluidorum. Nov. Comm. Acad. Petrop. Tom. XIII. p. 305. — Sect. 2. de principiis motus fluidorum. Tom. XIV. part. 1. p. 270. — Sect. 3. de motu fluidorum lineari, potissimum aquae Tom. XV. p. 219. — Sect. 4. de motu aëris in tubis. Tom. XVI. p. 281.

Ejusmodi motu lineari agitantur fluida, quae tubis quidem longis, ſed non nimis amplis continentur, quoniam latera horum tuborum omnem motum lateralem impediunt. In eadem ſectione hanc hypotheſin applicat ad proprietates motus fluidorum, quae comprimi non posſunt, qualis est aqua; tandem vero ſectione quarta de motu fluidorum elasticorum, tubis non nimis amplis contentorum, agit.

§. 33. Eulerus, ut difficultates calculi integralis ſuperet, eadem iterum hypotheſi utitur, quam antea adhibuerant Newtonus et Lagrangius, agitationem nempe particularum fluidi elastici quam minimam esſe. Hac autem poſita, Eulerus celeritatem ſoni per aërem, tubis contentum, propagati ſemper invenit aequalem esſe formulae Newtonianae, ſive tubi fuerint ubique ejusdem amplitudinis, ſive alius formae; ex his autem concludit, eandem quoque inventum iri ſoni celeritatem in aëre libero. Nam quoniam aër conſiderari potest tanquam diviſus in infinitos tubos conicos, quorum apices ad corpus ſonorum conveniant, pulſus ſonorus per quemlibet ex illis tubis perinde propagabitur ac per liberum aërem, quia quâ duo hujusmodi tubi ſe mutuo tangunt, illâ denſitas ac propterea etiam presſio est eadem (1).

§. 34. Postquam recentiori tempore calculus integralis magis magisque perfectus fuerat, tandem eo pervenerunt mathematici, ut aequationem generalem, qua motus ſonori aëris affectiones et conditiones indicantur, ad integrationem reducerent (2). Prae ceteris autem nobis commemoranda ſunt illa, quae Cl. Poisſon inventis Euleri et Lagrangii nuper addidit. Hic enim non tantum aequationem propagationis ſoni in aëre libero, poſita agitatione molecularum quam minima, perfecte integravit, ſed caſum quoque conſideravit, in quo excurſiones molecularum non ponuntur esſe minimae, et integrale particulare invenit, quod aequationi differentiali, hunc caſum indicanti, ſatisfaciat et cujus ope demonſtravit, velocitatem ſoni hac hypotheſi non mutari. Illud quoque ipſi proprium est, quod primus Laplacii hypotheſin calculo illustravit, quae tem-

(1) Euler, Comm. Petrop. XVI prob 95 ſchol. 2.

(2) M. A. Parſeval, Intégration générale et complète des équations de la propagation du ſon etc. Mém. préſentés à l'Inſtitut. 1805. Tom. I. p. 379.

temperaturam aëris ſubita compresſione per pulſus ſonoros augeri utique ſtatuit; omnes vero, qui eum praeiverunt, temperaturam masſae aëris, per quam propagatur ſonus, pro conſtante habuerunt. (1)

§. 35. Disſertationis Academicae limites non ſinunt, ſoni theoriam analyticam uberius hoc loco exponi, quum ad difficillima Phyſices Mathematicae capita pertineat, et ad aequationes differentiales ducat, quarum integratio longiori demum calculo perfici posſit. Satius ergo duxi, ſola hypotheſi agitationum infinite parvarum uſus formulas exponere, quibus medii elastici motus definiatur, et dein harum formularum uſum indicare, ad determinandam ſoni celeritatem in illo caſu, in quo una ſola medii dimenſio ſpectatur. In ſequenti autem disquiſitione temperaturam conſtantem ponemus per totam fluidi masſam, prouti fecerunt omnes, qui ante Laplacium de ſono egerunt; hujus enim ſententiam deinde capite 5. melius perſequi poterimus. (2)

§. 36. Fluidi elastici omnia puncta referantur ad tres axes perpendiculares OA, OB, OC. (Fig. 1.) Sint X, Y, Z coördinatae rectangulares, quae determinant poſitionem cujuscunque moleculae in initio motus, quando $t = 0$, et ponamus, has coördinatas post tempus t evadere $X + x$, $Y + y$, $Z + z$, ubi x, y, z, ex hypotheſi quantitates infinite parvas deſignant. Vocetur porro Q denſitas cujuslibet particulae initio motus, et q ejus denſitas post tempus t. Hisce poſitis, Q est functio ſolius ſitus initialis ſive variabilium X, Y, Z, quae illum ſitum determinant, dum x, y, z, q ſunt functiones tam coördinatarum initialium X, Y, Z, quam temporis t, post initium motus elapſi; pendent enim ab X, Y, Z, quoniam eodem temporis momento agitatio diverſarum molecularum diverſa est pro vario ſitu; et pendent ſimul a tempore t, quia eadem molecula temporis progresſu diverſa loca occupat, et diverſam denſitatem habet.

§. 37. Dividamus nunc masſam fluidam in elementa infinite parva per plana pa-

(1) Poisſon, Mémoire ſur la théorie du ſon. Journ. de l'école Polytechn. VII. 319.

(2) In hac expoſitione theoriae ſoni potius Lagrangii et Euleri rationem ſecuti ſumus, quam Poisſoni, qui molecularum motum definit functionibus temporis et coördinatarum loci, quo post illud tempus ſunt. Haec quidem methodus magis generales et abſolutas aequationes motus fluidorum largitur; illa vero citius ad finem ducit, quando agitatio fluidi infinite parva ponitur.

parallela tribus planis coördinatarum, et sibi proxima; haec elementa sunt parallelopipeda rectangula, quorum latera sunt parallela axibus, et aequalia differentialibus coördinatarum. Sit FGHIKLMN tale parallelopipedum differentiale, et coördinatae puncti F in initio motus sint $OD = X, DE = Y, EF = Z$, atque latera $FG = dX$, $FH = dY$, $FK = dZ$; quare ejus volumen est $dX\,dY\,dZ$; massa autem est producta ex volumine et densitate, unde

$$\text{Massa parallelopipedi} = Q\,dX\,dY\,dZ \qquad (I)$$

§. 38. Elapso post motus initium tempore t, sit illud parallelopipedum translatum in locum infinite vicinum; ita quidem ut coördinatae puncti F evadant $X+x$, $Y+y$, $Z+z$; quoniam vero omnia parallelopipedi puncta eodem tempore novum situm acquirunt, latera, quae fuerant dX, dY, dZ, evadunt:

$$dX + \frac{dx}{dX}dX \qquad dY + \frac{dy}{dY}dY \qquad dZ + \frac{dz}{dZ}dZ$$

$$\text{aut } dX\left(1+\frac{dx}{dX}\right) \qquad dY\left(1+\frac{dy}{dY}\right) \qquad dZ\left(1+\frac{dz}{dZ}\right) \qquad (II)$$

Nam initio motus coördinatae puncti F sunt X, Y, Z; et puncti G sunt $X+dX$, Y, Z. Si jam puncta F et G simul novum situm acquirunt, quo in situ coördinatae puncti F fiunt $X+x$, $Y+y$, $Z+z$, coördinatae puncti G, quod punctum ab F non nisi quantitate dX differt, erunt

$$X+x+dX+\frac{dx}{dX}dX \qquad Y+y+\frac{dy}{dX}dX \qquad Z+z+\frac{dz}{dX}dX.$$

ideoque evadit

$$\begin{aligned} FG &= \sqrt{\left(dX+\frac{dx}{dX}dX\right)^2+\frac{dy^2}{dX^2}dX^2+\frac{dz^2}{dX^2}dX^2} \\ &= \sqrt{dX^2+2.\frac{dx}{dX}dX^2} \\ &= dX\sqrt{1+2.\frac{dx}{dX}} \\ &= dX\left(1+\frac{dx}{dX}\right) \end{aligned}$$

Simili modo valores reliquorum laterum determinantur.

§. 39. Porro facile patet, figuram parallelopipedi per hanc infinite parvam translationem non fuisse mutatam, quapropter volumen ejus post tempus t erit

$$= dX\,dY\,dZ\left(1+\frac{dx}{dX}\right)\left(1+\frac{dy}{dY}\right)\left(1+\frac{dz}{dZ}\right) = dX\,dY\,dZ\left(1+\frac{dx}{dX}+\frac{dy}{dY}+\frac{dz}{dZ}\right),$$

si

ſi producta ex quantitatibus infinite parvis $\frac{dx}{dX}$, $\frac{dy}{dY}$, $\frac{dz}{dZ}$, negligimus, ideoque masſa post tempus t erit

$$= q\,dX\,dY\,dZ\left(1 + \frac{dx}{dX} + \frac{dy}{dY} + \frac{dz}{dZ}\right)$$

et quoniam masſa ejusdem particulae omni tempore eadem manet, habemus, aequationem hanc cum (I) conjungendo,

$$Q\,dX\,dY\,dZ = q\,dX\,dY\,dZ\left(1 + \frac{dx}{dX} + \frac{dy}{dY} + \frac{dz}{dZ}\right)$$

$$\text{aut } Q = q\left(1 + \frac{dx}{dX} + \frac{dy}{dY} + \frac{dz}{dZ}\right)$$

$$\text{unde } q = Q\left(1 - \frac{dx}{dX} - \frac{dy}{dY} - \frac{dz}{dZ}\right) \qquad \text{(III)}$$

§. 40. Jam videamus, qualis ſit vis acceleratrix, ex varia presſione in variis fluidi locis orta. Parallelopipedum FGHIKLMN premitur undique a fluido ambiente. Sit p presſio, quam elapſo tempore t patitur planum FHMK, relata ad unitatem ſuperficiei, i. e. ſit p presſio, quam patitur area plana, aequalis unitati ſuperficiei, ſi omnia ejus puncta premuntur eadem vi, qua premitur planum infinite parvum FHMK. Presſio autem p est functio tam coördinatarum initialium X, Y, Z, quam temporis t, quoniam eodem tempore in variis locis, et in eodem loco diverſo tempore diverſa est. Ergo presſio, quam eodem tempore t patitur planum GINL, plano FHMK oppoſitum, et cujus utriusque plani ſitus initialis tantummodo differt dX, est $= p + \frac{dp}{dX}dX$, et, quum illorum area ex (II) ſit $= dY\,dZ\left(1 + \frac{dy}{dY}\right)\left(1 + \frac{dz}{dZ}\right) = dY\,dZ$, ſequitur, presſiones contrarias, quibus haec plana urgentur, esſe $p\,dY\,dZ$ et $p\,dY\,dZ + \frac{dp}{dX}dX\,dY\,dZ$, quapropter vis motrix, orta ex differentia presſionum in ea, atque parallelopipedum in directione FG ſive OA urgens, est $= -\frac{dp}{dX}dX\,dY\,dZ$. Eodem modo invenimus, parallelopipedum urgeri in directione OB vi $-\frac{dp}{dY}dX\,dY\,dZ$, et in directione OC vi $-\frac{dp}{dZ}dX\,dY\,dZ$. Vis autem acceleratrix cognoscitur dividendo vim motricem per masſam; quum ergo masſa parallelopipedi ſit $= Q\,dX\,dY\,dZ$ (I), vires acceleratrices ex presſione ortae, et agentes in directionibus OA, OB, OC, ſunt $-\frac{1}{Q}\frac{dp}{dX}$, $-\frac{1}{Q}\frac{dp}{dY}$, $-\frac{1}{Q}\frac{dp}{dZ}$.

§. 41. Aliae vires acceleratrices in fluidum elasticum non agunt. Nam vis gravitatis omnes ejus particulas aeque afficit; motus enim fonorus plerumque propagatur in linea horizontali, atque, etiamfi ab hac linea recedat, tamen vis gravitatis in parvis a tellure diftantiis pro conftante habenda est. Quum ergo ex principiis Dynamices notum fit, vires acceleratrices fecundum tres coördinatarum axes generatim exprimi formulis $\frac{d^2 x}{d t^2}$, $\frac{d^2 y}{d t^2}$, $\frac{d^2 z}{d t^2}$, hae formulae aequales fint oportet viribus acceleratricibus, quas ex presfione varia deduximus. Hinc oriuntur fequentes aequationes.

$$\frac{d^2 x}{d t^2} = -\frac{1}{Q}\frac{dp}{dX} \qquad \frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{1}{Q}\frac{dp}{dY} \qquad \frac{d^2 z}{dt^2} = -\frac{1}{Q}\frac{dp}{dZ} \qquad \text{(IV)}$$

§. 42. In fluidis elasticis est $p = \varkappa q$ (§. 13.). Coëfficiens $\varkappa$, quae, non mutata temperatura, in fingulis illis fluidis conftans est, definiri potest fi cognita est denfitas b fluidi elastici, quae tum obtinet, quando mercurii altitudo in barometro, presfionem fluidi indicans, est a. Tunc enim ipfa presfio est $g a$, (§. 11.) et aequatio $p = \varkappa q$ dat $g a = \varkappa b$, unde $\varkappa = \frac{g a}{b}$. In aliis ergo presfionibus erit $p = \frac{g a}{b}\, q$, quo valore aequationes (IV) fiunt:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{g a}{bQ}\frac{dq}{dX} \qquad \frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{g a}{bQ}\frac{dq}{dY} \qquad \frac{d^2 z}{dt^2} = -\frac{g a}{bQ}\frac{dq}{dZ} \qquad \text{(V)}$$

Invenimus autem (III)

$$q = Q\left(1 - \frac{dx}{dX} - \frac{dy}{dY} - \frac{dz}{dZ}\right)$$

hinc $\frac{dq}{dX} = \frac{dQ}{dX}\left(1 - \frac{dx}{dX} - \frac{dy}{dY} - \frac{dz}{dZ}\right) - Q\left(\frac{d^2 x}{dX^2} + \frac{d^2 y}{dX\,dY} + \frac{d^2 z}{dX\,dZ}\right)$

aut, quoniam $\frac{dx}{dX}$, $\frac{dy}{dY}$, $\frac{dz}{dZ}$ prae unitate evanescunt,

$$\frac{dq}{dX} = \frac{dQ}{dX} - Q\left(\frac{d^2 x}{dX^2} + \frac{d^2 y}{dX\,dY} + \frac{d^2 z}{dX\,dZ}\right)$$

et eadem ratione

$$\frac{dq}{dY} = \frac{dQ}{dY} - Q\left(\frac{d^2 x}{dX\,dY} + \frac{d^2 y}{dY^2} + \frac{d^2 z}{dY\,dZ}\right)$$

$$\frac{dq}{dZ} = \frac{dQ}{dZ} - Q\left(\frac{d^2 x}{dX\,dZ} + \frac{d^2 y}{dY\,dZ} + \frac{d^2 z}{dZ^2}\right).$$

Ex-

Ergo ſi harum aequationum ope quantitatem q ex (V) eliminamus, fit:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 x}{d t^2} &= -\frac{g\,a}{b\,Q}\,\frac{d\,Q}{d\,X} + \frac{g\,a}{b}\left(\frac{d^2 x}{d\,X^2} + \frac{d^2 y}{d\,X\,d\,Y} + \frac{d^2 z}{d\,X\,d\,Z}\right)\\
\frac{d^2 y}{d t^2} &= -\frac{g\,a}{b\,Q}\,\frac{d\,Q}{d\,Y} + \frac{g\,a}{b}\left(\frac{d^2 x}{d\,X\,d\,Y} + \frac{d^2 y}{d\,Y^2} + \frac{d^2 z}{d\,Y\,d\,Z}\right) \qquad \text{(VI)}\\
\frac{d^2 z}{d t^2} &= -\frac{g\,a}{b\,Q}\,\frac{d\,Q}{d\,Z} + \frac{g\,a}{b}\left(\frac{d^2 x}{d\,X\,d\,Z} + \frac{d^2 y}{d\,Y\,d\,Z} + \frac{d^2 z}{d\,Z^2}\right)
\end{aligned}$$

§. 43. Habemus hac ratione tres aequationes differentiales partiales ſecundi ordinis et quatuor variabilium, ex quibus per integrationem eliciendae ſunt x, y, z. Quoniam vero illae aequationes admodum implicatae ſunt, ad magis ſimplicem aequationem eas reducamus, adhibendo unam tantum ſpatii dimenſionem, quod fit ponendo $y = 0$, $z = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$. Ita acquirimus

$$\frac{d^2 x}{d t^2} = -\frac{g\,a}{b\,Q}\,\frac{d\,Q}{d\,X} + \frac{g\,a}{b}\,\frac{d^2 x}{d\,X^2}$$

Sit brevitatis cauſa $\frac{g\,a}{b} = c^2$; aequatio differentialis, cujus ope motus ſonorus fluidi elastici investigandus est, erit

$$\frac{d^2 x}{d t^2} = -\frac{c^2}{Q}\,\frac{d\,Q}{d\,X} + c^2\,\frac{d^2 x}{d\,X^2} \qquad \text{(VII)}$$

Qua in aequatione x ſive ſpatium infinite parvum, quo molecula post tempus t a ſitu initiali distat, functio est variabilium X et t, dum Q, ſeu denſitas moleculae initio motus, tantummodo a coördinata initiali X pendet.

§. 44. Ad integrandam hanc aequationem ponamus: (1)

$$\begin{aligned}
d x &= \alpha\,d X + \beta\,d t\\
d \alpha &= \gamma\,d X + \delta\,d t\\
d \beta &= \delta\,d X + \varepsilon\,d t
\end{aligned}$$

ſive $\alpha = \frac{d\,x}{d\,X}$, $\beta = \frac{d\,x}{d\,t}$, $\gamma = \frac{d^2 x}{d\,X^2}$, $\delta = \frac{d^2 x}{d\,X\,d\,t}$, $\varepsilon = \frac{d^2 x}{d\,t^2}$.

His

(1) Haec integrandi methodus propoſita fuit a Cl. de la Grange in Mém. de l'Acad. de Berlin 1779. p. 152. qui vero eam tantummodo adhibuit ad integrandas aequationes differentiales lineares primi ordinis. Cl. Monge in Mém. de l'Acad. de Paris 1784. p. 118. eadem methodo aequationes differentiales lineares cujuscunque ordinis integrare docuit, et vera principia expoſuit, quibus illa nititur.

His positis, aequatio nostra (VII) fit

$$\varepsilon = -\frac{c^2}{Q}\,\frac{dQ}{dX} + c^2\,\gamma. \qquad \text{(VIII)}$$

Si nunc inter hanc aequationem et aequationes $d\alpha = \gamma\, dX + \delta\, dt$, $d\beta = \delta\, dX + \varepsilon\, dt$ eliminamus γ et δ, acquirimus:

$$c^2 \left(d\alpha\, dX - d\beta\, dt - \frac{1}{Q}\, dQ\, dX\right) = \varepsilon\, (dX^2 - c^2\, dt^2)$$

§. 45. Hac in aequatione ε prorsus est indeterminata. Nam ad cognoscendas variabiles γ et ε una tantum aequatio adest, nempe $\varepsilon = -\frac{c^2}{Q}\,\frac{dQ}{dX} + c^2\,\gamma$, quae quoniam duas variabiles continet, solam earum relationem indicat, et de earum valore definito nihil docet. Quare, cum ε sit indeterminata, et tamen praecedens aequatio obtineat, qualiscumque sit ε, bini aequationis termini simul evanescant oportet, unde fit

$$d\alpha\, dX - d\beta\, dt - \frac{1}{Q}\, dQ\, dX = 0 \qquad \text{(IX)}$$

$$\text{et } dX^2 - c^2\, dt^2 = 0 \qquad \text{(X)}$$

Secunda aequatio dat $dX = c\, dt$, unde

$$X - ct = C \qquad \text{(XI)}$$

ubi C est constans indefinita. Valore $dX = c\, dt$ in aequationem (IX) introducto fit, dividendo per dt

$$c\, d\alpha - d\beta - \frac{c}{Q}\, dQ = 0$$

cujus integrale, posita densitate media fluidi elastici, antequam moveri inciperet, $=$ B, est

$$c\alpha - \beta - c \operatorname{Log} \frac{Q}{B} = C' \qquad \text{(XII)}$$

C′ est nova constans indefinita. Hoc loco constantem B in aequationem integralem induximus, ut terminus $c \operatorname{Log} \frac{Q}{B}$ foret semper valde parvus. Oportet enim, ut aequatio integralis satisfaciat hypothesi, agitationes molecularum sonum conducentium esse infinite parvas; videbimus autem deinceps, huic conditioni satisfactum iri, si densitas media B praedicta ratione in formula integrali adhibeatur.

§. 46. Quoniam aequationes (IX) et (X) conjunctim verae sunt, eadem

con-

conditio tribuenda est illorum integralibus (XI) et (XII), i. e. oportet formulas $X - ct$ et $c\alpha - \beta - c \,\mathrm{Log}\,\frac{Q}{B}$ ſimul conſtantes esſe. Id autem indicat, harum formularum alteram, alterius esſe functionem, ſive

$$c\alpha - \beta - c \,\mathrm{Log}\,\tfrac{Q}{B} = \phi\,(X - ct) \qquad \text{(XIII)}$$

quae est aequatio differentialis partialis primi ordinis, eadem ratione integranda atque aequatio (VIII). Si nempe ope aequationis $dx = \alpha dX + \beta dt$ ex ea eliminatur α, habemus

$$c dx - c dX \,\mathrm{Log}\,\tfrac{Q}{B} - dX\,\phi\,(X - ct) = \beta\,(dX + c dt)$$

β autem est iterum prorſus indeterminata; oportet ergo ſimul ſit:

$$c dx - c dX \,\mathrm{Log}\,\tfrac{Q}{B} - dX\,\phi\,(X - ct) = 0$$
$$\text{et } dX + c dt = 0$$

quarum aequationum integralia ſunt

$$cx - c\int dX \,\mathrm{Log}\,\tfrac{Q}{B} - \phi\,(X - ct) = C$$
$$X + ct = C'$$

Igitur priores termini ſimul ſunt conſtantes, ergo ſunt functiones altera alterius, quare

$$cx - c\int dX \,\mathrm{Log}\,\tfrac{Q}{B} - \phi\,(X - ct) = \psi\,(X + ct)$$

$$\text{aut } x = \int dX \,\mathrm{Log}\,\tfrac{Q}{B} + \phi\,(X - ct) + \psi\,(X + ct) \qquad \text{(XIV)}$$

Haec jam est aequatio integralis primaria, motus ſonori proprietates complectens, in qua nimirum x ſive ſpatium exiguum, quo ſingulae moleculae a ſitu initiali recesſerunt, per functionem illius ſitus initialis et temporis elapſi definitur. Quoniam vero illud ſpatium x ponitur esſe quam minimum, functiones arbitrariae ϕ et ψ ſemper quoque exiguae ſint oportet; terminus enim $\int dX \,\mathrm{Log}\,\frac{Q}{B}$ jam ſponte ſua valorem exiguum habet, quum denſitas initialis Q vix a denſitate B in quiete recedere cenſeatur.

§. 47. Ceterae motus ſonori conditiones nunc facile determinantur. Nam ut denſitas q fluidi elastici post tempus t cognoſcatur, adhibenda est aequatio $q = Q\left(1 - \frac{dx}{dX}\right)$ (III), quae, adhibita aequatione (XIV), mutatur in hanc:

$$q = Q\left(1 - \mathrm{Log}\,\tfrac{Q}{B} - \phi'\,(X - ct) - \psi'\,(X + ct)\right) \qquad \text{(XV)}$$

Et

Et fi celeritas, qua molecula movetur, per v exprimitur, est

$$v = \frac{dx}{dt} = c\psi'(X + ct) - c\phi'(X - ct) \qquad \text{(XVI)}$$

§. 48. Nunc videndum restat, qua ratione definiri posfint functiones arbitrariae ϕ et ψ, fi denfitates et celeritates initiales molecularum fluidi cognitae funt. Sit ergo Υ celeritas, qua molecula, cujus abfcisfa est X, initio motus incitata fuit; Q autem est ejus denfitas initialis; quare, fi in aequationibus (XV) et (XVI) ponitur $t = 0$, fit $q = Q$ et $v = \Upsilon$, unde oriuntur hae aequationes:

$$\text{Log}\,\frac{Q}{B} = -\phi'(X) - \psi'(X)$$
$$\frac{1}{c}\,\Upsilon = -\phi'(X) + \psi'(X)$$

ex quibus acquirimus:

$$\left.\begin{aligned} \phi'(X) &= -\frac{1}{2c}\,\Upsilon - \tfrac{1}{2}\,\text{Log}\,\frac{Q}{B} \\ \psi'(X) &= +\frac{1}{2c}\,\Upsilon - \tfrac{1}{2}\,\text{Log}\,\frac{Q}{B}. \end{aligned}\right\} \text{(XVII)}$$

§. 49. Hos valores fequenti modo conftruere licet. Sit AB (Fig. 2.) directio motus, et A origo abfcisfarum. Quoniam notae funt celeritates Υ molecularum in initio motus, et variae earum denfitates Q, defcribatur fuper axe AB curva ejusmodi DEF, ut, fumta abfcisfa $AC = X$, ordinata CE fit $= \text{Log}\,\frac{Q}{B}$. Haec curva erit fcala denfitatum initalium. Deinde altera conftruatur curva GHI ea lege, ut fi abfcisfa AC fit $= X$, ordinata CH ei respondens fumatur $= \frac{1}{c}\,\Upsilon$ Erit haec fcala celeritatum initialium. Quodfi jam refpicimus ad aequationes (XVII), patet, functiones ϕ et ψ his curvis ita definiri, ut, fumta $AC = X$, fit

$$\phi'(X) = -\tfrac{1}{2}(CH + CE)$$
$$\psi'(X) = \tfrac{1}{2}(CH - CE)$$

Multiplicando per dX et integrando habemus,

$$\phi(X) = -\tfrac{1}{2}(AGHC + ADEC)$$
$$\psi(X) = \tfrac{1}{2}(AGHC - ADEC)$$

§. 50.

§. 50. Hae aequationes obtinent pro quacunque abſciſſa X, quare, ſi ab utraque parte puncti C abſcinduntur ſpatia aequalia $CP = Cp = ct$, erit quoque

$$\phi\,(X - ct) = \phi\,(Ap) = -\tfrac{1}{2}(AGnp + ADmp)$$
$$\psi\,(X + ct) = \psi\,(AP) = \tfrac{1}{2}(AGNP - ADMP)$$
$$\phi'(X - ct) = \phi'(Ap) = -\tfrac{1}{2}(pn + pm)$$
$$\psi'(X + ct) = \psi'(AP) = \tfrac{1}{2}(PN - PM)$$

Qui valores ſi ponuntur in aequationibus (XIV), (XV), (XVI), habemus

$$\left.\begin{aligned} x &= ADEC - \tfrac{1}{2}(AGnp + ADmp) + \tfrac{1}{2}(AGNP - ADMP) \\ &= \tfrac{1}{2}\,pnNP + \tfrac{1}{2}\,pmEC - \tfrac{1}{2}\,CEMP \\ q &= Q\,(1 - CE + \tfrac{1}{2}pn + \tfrac{1}{2}pm - \tfrac{1}{2}PN + \tfrac{1}{2}PM \\ v &= \tfrac{1}{2}c\,(pn + pm + PN - PM) \end{aligned}\right\}(\text{XVIII}).$$

Hac ratione omnes conditiones motus fluidi elaſtici poſt tempus quodcunque determinari poſſunt, cognitis denſitate et celeritate ſingularum molecularum initio motus. Ad noſtrum autem propoſitum illud tantum pertinet, ut ex his aequationibus celeritatem propagationis ſoni definiamus.

§. 51. Sit AB (Fig. 3.) directio ſoni, et initio motus aër agitatus ſit in ſpatio DE. Curva DNE ſit ſcala celeritatum initialium, et curva DME ſcala denſitatum, in qua cum ordinatae aequales ſint valoribus Log $\frac{Q}{B}$, denſitates ſolito majores exprimuntur ordinatis poſitivis, denſitates vero ſolito minores ordinatis negativis. Ab utraque parte punctorum D et E aër initio motus in quiete verſatur, quare ordinatae utriusque ſcalae ultra intervallum DE nullae ſunt. Jam quaestio eo redit, ut determinetur, poſt quodnam tempus fluidum elaſticum in loco quocunque C, cujus abſciſſa $AC = X$, motu ſonoro agitari incipiat.

§. 52. Quoniam quantitates x, q, v, quae motum puncti C definiunt, exprimuntur ordinatis ſcalarum in punctis, quorum abſciſſae ſunt $X - ct$ et $X + ct$ (XVIII), et quoniam praeterea ordinatae utriusque ſcalae verſus B nullae ſunt, facile patet, punctum C in quiete eſſe verſaturum, donec fiat $X - ct = AE$, ſive $ct = CE$; illud deinde in motu futurum, quamdiu eſt $ct > CE$ et $< CD$; poſtea vero iterum quieturum eſſe. Intelligitur ergo, agitationem puncti E per ſpatium EC propagari tempore $t = \frac{EC}{c}$; et agitationem puncti D per ſpatium DC tempore $t = \frac{DC}{c}$; quum vero tempus ſit uti ſpatium, diviſum

D per

per celeritatem, sequitur, divisorem c esse celeritatem, qua unda sonora progreditur, sive, qua motus sonorus per fluidum elasticum propagatur. Est autem $c = \sqrt{\frac{ga}{b}}$ (§. 43.), ergo formula $\sqrt{\frac{ga}{b}}$ indicat soni celeritatem in fluido elastico. (1)

§. 53. Formula $\sqrt{\frac{ga}{b}}$ non pendet a condensationibus aut celeritatibus initialibus, sed a sola gravitatis vi et ab elasticitate specifica fluidi, unde concludimus, sonum in fluido elastico homogeneo, cujus temperatura sit constans, aequabiliter progredi, et praeterea sonos graves acutosve in eo aequali velocitate propagari. Porro celeritatis valor $\sqrt{\frac{ga}{b}}$ non differt pro varia barometri altitudine, dummodo temperatura non mutatur. Nam eo in casu densitas b proportionalis est pressioni a, quapropter ratio $\frac{ga}{b}$ eadem manet. Aucta vero vel imminuta temperatura, soni celeritas increscit vel decrescit in ratione subduplicata elasticitatis specificae.

§. 54. Quaeramus nunc numericum valorem celeritatis soni, per aërem atmosphaericum propagati. In temperatura $0°$, et pressione $0^m, 76$ mercurii, densitas aëris sicci est ad densitatem mercurii $= 1 : 10463$ (2), quare ratio $\frac{a}{b} = 10463 . 0^m, 76$. In alia temperatura, in qua thermometrum centigradum t gradus indicat, eadem ratio $\frac{a}{b}$ est $= 10463 . 0^m, 76 . (1 + 0, 00375\, t)$ (§. 16.). Porro g, sive duplum spatium, quod corpus grave libere cadens primo minuto secundo percurrit, est $= 9^m, 8088$. (3) Ergo est

$$\text{celeritas soni in temp. } t = \sqrt{10463 . 0^m, 76 . 9^m, 8088 . (1 + 0, 00375\, t)}$$
$$= 279^m, 29 \sqrt{1 + 0, 00375\, t}$$

§. 55. Haec valent de aëre sicco; densitas autem aëris humidi paulo minor est. Si p est pressio, quam sustinet aër, p' pressio vaporis aquei, q et q' densi-

(1) Omnes, qui, posita temperatura fluidi, per quod sonus propagatur, constante, hujus celeritatem mathematice determinaverunt, ad eandem formulam pervenerunt, unde patet, quantopere illi errent, qui affirmant, computationes mathematicorum non tantum ab experimentis, sed etiam inter se differre. Illud egit v. c. T. Cavallo, Handbuch der Experimental-Naturlehre. Erfurt 1805. Tom. II. p. 337.

(2) Biot, traité de Physique Tom. I. p. 406.

(3) Poisson, traite de Mécanique. Tom. I. p 404.

fitates aëris ficci et vaporis in presfione p, denfitas aëris humidi est $= q - \frac{p'}{p}(q - q')$ (§. 18.). Pofita $q = 1$, est $q' = 0,62349$ (1), ideoque $q - q' = 0,37651$, et denfitas aëris humidi $= 1 - 0,37651 . \frac{p'}{p}$, ejusque ratio ad denfitatem mercurii $= 1 - 0,37651 . \frac{p'}{p} : 10463$, ex quibus patet, fore in aëre humido

$$\text{Celer. foni in temp. } t = 279^m,29 \sqrt{1 + 0,00375\, t} . \frac{1}{\sqrt{\left(1 - 0,37651 . \frac{p'}{p}\right)}}$$

§. 56. Elastica vis p' vaporis aquei in atmosphaera diverfa est tum pro varia temperatura, tum pro varia hygrometri indicatione. Ut vero appareat, num vapores notabilem effectum in foni propagatione habeant, fingamus aërem vaporibus aqueis perfecte faturatum esfe, et fit altitudo barometri $= 0^m,76$. His pofitis est (2)

in temp.	Elasticitas vaporis p'	Factor $\frac{1}{\sqrt{\left(1 - 0,37651 \frac{p'}{p}\right)}}$
0°	$0^m,005059$	1, 00126
10°	$0^m,009475$	1, 00235
20°	$0^m,017314$	1, 00432
30°	$0^m,030643$	1, 00768

Patet ex hac tabula, celeritatem foni majorem esfe in aëre humido, quam in aëre ficco; hanc autem differentiam adeo exiguam esfe, ut, etiamfi aër in temperatura 30° C. (86° F.) vaporibus aqueis plane faturatus fit, tamen foni celeritas in eo nonnifi $\frac{1}{130}$ fui parte celeritatem in aëre ficco fuperet.

(1) Biot, l. c. Tom. I. p. 383.
(2) Id. p. 531.

CAPUT TERTIUM.

EXPOSITIO EXPERIMENTORUM, QUIBUS CELERITAS SONI IN AËRE ATMOSPHAERICO DETERMINATA EST.

§. 57. In univerſo Phyſices ambitu ſummae necesſitatis est perpetua experimentorum cum inquiſitionibus mathematicis conjunctio. Hac enim ratione, eaque ſola, patet, an principia, quae calculis mathematicis fundamentum praebent, firma ſint atque ſtabilia. Eo presſius autem huic regulae adhaerendum esſe cenſemus, quo difficiliores ſunt quaestiones, quas tractamus, et quo uberiores ſunt errorum fontes. Quod etiam nostri argumenti ratio confirmat; vidimus enim, quomodo mathematice ſoni celeritas investigetur, videbimus mox, quantum ſit discrimen hujus theoriae et experimentorum rite inſtitutorum.

§. 58. Celerrima lucis propagatio, quae ad peragrandas terrestres diſtantias vix ullum tempus impendit, ad optimam ducit methodum, ſoni celeritatem in aëre atmosphaerico exacte metiendi. Hunc in finem talis excitetur ſonus, qui ſatis ſit vehemens, ut e longinquo audiri posſit, et quocum ſimul flagrans lumen ſit conjunctum, quod ſit, ſi tormenta bellica exploduntur. Obſervator, cujus diſtantia a loco exploſionis cognita est, tempus notet, quo lumen exploſi tormenti ab eo percipitur, dein quoque tempus, quo ſonus ſimul excitatus aures ejus ferit. Quia lumen eo ipſo momento ad eum pervenit, quo ſit exploſio,

ſio, intervallum temporis inter obſervatum ab ipſo lumen et ſonum indicat tempus, quo ſonus ſpatium inter locum exploſionis et locum obſervatoris percurrit, quapropter, ſi illud ſpatium per tempus elapſum dividitur, cognoscitur media celeritas, qua ſonus eo tempore ad obſervatorem pervenit. Inſtitutis ſimilibus experimentis in aliis diſtantiis a loco exploſionis, ſi eadem perpetuo ſoni celeritas invenitur, illud manifeste docet, ſonum motu aequabili progredi, ſive celeritatem, qua propagatur, eandem esſe in omni diſtantia a corpore ſonoro.

§. 59. Haec autem experimenta tum demum accurate posſunt inſtitui, ſi et ſpatia, quae ſonus percurrit, ſatis longa et bene cognita ſint, et tempus quoque, quo ſonus illa ſpatia percurrit, exacte definiatur. Quo longior est baſis, quae inter locum exploſionis et obſervatorem interest, eo magis diminuitur error, ex minus accurata temporis menſura oriundus; et rurſus, quo exactius tempus definire potest obſervator, eo breviori baſi indiget. Praeterea convenit, haec experimenta ſaepius et iteratis vicibus inſtitui, quo magis conjunctim veram ſoni celeritatem indicent. Et quum fieri posſit, ut ipſorum ſonorum et aëris, per quem propagantur, diverſae conditiones celeritatem ſoni mutent, hae omnes ſimul adnotari, et earum efficacia ad examen revocari debet.

§. 60. Pauci ex iis, qui hunc experimentorum campum ingresſi ſunt, indicatis conditionibus ſatisfecerunt. Qui ante ſeculum 18.^{m} obſervationes ſuas fecerunt, male confectis horologiis aut pendulis uſi, et ſoni propagationem in exiguis et non bene cognitis ſpatiis obſervantes, non potuerunt ad exactam pervenire concluſionem, et multum a vero tramite aberrarunt, unde explicanda est ingens diverſitas, quae inter eorum obſervationes obtinet. Recentiores in determinanda ſoni celeritate magis inter ſe conveniunt, quod melioribus adminiculis, quibus in inſtituendis experimentis uſi ſunt, tribui debet; pauci tamen ea cura, qua par est, hac in re procesſerunt, ita quidem, ut plures ne ipſam temperaturam aëris, ſonum propagantis, adnotaverint. Antequam autem ad recenſenda eorum omnium experimenta, et deducendam ex iis veram ſoni, per aërem propagati, celeritatem, accedimus, inquirendum nobis videtur in efficaciam cauſarum, quae illam mutare posſunt.

§. 61. Ipſius ſoni duae praecipue affectiones in cenſum veniunt, primo ejus intenſitas, deinde tonorum diverſitas. Soni *intenſitatem* cognoscimus

mus ex vi, qua moleculae aëris vibrantes in organum auditus impellunt; haec a variis conditionibus pendet, quarum praecipuae sunt magnitudo corporis sonori, amplitudo et numerus vibrationum, distantia, in qua observatur sonus, ventus, alia. *Tonus* autem definitur numero vibrationum, quibus corpus sonorum certo temporis intervallo agitatur, adeo quidem ut, quo major sit ille numerus, eo *acutior*; quo minor vero, eo *gravior* dicatur tonus. Docet vero experientia, soni celeritatem non differre, neque pro varia ejus intensitate, neque pro tono. Derhamus, et Academiae Parisinae sodales observarunt (1), sonos variae intensitatis certum spatium eodem tempore percurrere. Invenerunt quoque, et alii confirmarunt, celeritatem soni aequabilem esse, sive propagetur per magna spatia, sive per minora; quum autem intensitas soni eo magis decrescat, quo major sit distantia a loco, in quo sonus excitatur, aequabilis haec propagatio esse nequit, nisi soni celeritas a varia intensitate non pendeat. — Et si diversi toni diversa propagarentur celeritate, series tonorum, e longinquo audita, admodum confuse auribus perciperetur, quoniam ob varias celeritates, quibus soni ad aures pervenirent, aequabilis ratio inter intervalla musica destrueretur; id autem experientia refutatur. In Russia musicae species habetur, ex cornuum sonis composita, quae, tranquillo aëre, in distantia ¾ milliarii Germanici audiri potest; ibi vero non minus concinna est ac in loco, quo luditur. (2) Similia observavit Cl. Biot in aquae ductibus Parisinis. Quum enim ad alteram eorum extremitatem musicum collocasset, qui tibiis caneret, ipse in altera extremitate, quae a priore 951 metrorum spatio aberat, exacte observans, quomodo soni ad eum pervenirent, intervalla musica perfecte regularia invenit. (3)

§. 62. Aliae autem sunt causae, quarum efficacia in soni celeritate determinanda est; illae nempe, quae ex varia conditione aëris, qui sonum conducit, oriuntur.

Ventorum diversam directionem et intensitatem in celeritatem soni agere, uti theoretice jam concludimus, ita quoque experientia docet. Derhamus et Aca-

de-

(1) Derham, Phil. Transact. 1708. 1709. n°. 313. p. 16. — Cassini de Thury, Mém. de l'Acad. 1738. p. 142.

(2) Chladni, Akustik. p. 224.

(3) Biot, Traité de Physique. Tom. II. p. 7.

demici Parisini (1) invenerunt, soni celeritatem augeri, si directio venti propagationi soni faveat; imminui, si ei sit adversa; non mutari, vento aut non flante, aut perpendiculari ad directionem soni. Benzenbergii experimenta illud quoque confirmant. (2) Si theoriae credimus, ventus soni celeritatem tantundem auget vel imminuit, quanta est celeritas, qua ipse vel in directione soni vel ei adversum flat. Quum vero venti celeritatem exacte definire nondum possimus, experientia illud theorema confirmare non valet. Attamen ejus veritas adeo perspicua est, ut jure assumatur; quo facto, experimenta de soni celeritate sua vice venti celeritati inveniendae inservire possunt, quod ex experimentis Parisinorum Gilbertus (3) docuit.

§. 63. Examinato, quaenam sit vis venti in soni celeritatem, inquirenda est vis caloris. Mirandum certe, plerosque ex illis, qui de soni celeritate experimenta instituerunt, nullam hujus conditionis rationem habuisse; Newtonus enim ex sua theoria caloris efficaciam in mutanda soni celeritate indicaverat (4), quapropter summi momenti erat, hac de re experimenta consulere. Haec physicorum omissio facile explicatur iis temporibus, quo thermometra male constructa mutuam comparationem nondum admittebant; deinde vero praecipuam ejus causam in eo quaeram, quod non credidisse videntur Physici, se in determinanda soni celeritate tantum ad veritatem accedere posse, ac Benzenbergius recentiori tempore demonstravit. Ita Derhamo satis fuit, tempus, quo sonus milliarium Anglicum percurrit, ad quartam minuti secundi partem determinare, quae autem ratio errorem 20 pedum et ultra admittit; Parisini sibi proponebant soni celeritatem adeo exacte determinare, ut error non esset unius hexapedi, etc. Limites ergo erroris tales erant, ut celeritatis differentiae, ex diverso caloris gradu ortae, vix possent animadverti, praesertim si ille caloris gradus in diversis experimentis non multum differebat, quod v. c. Parisinis contigit. Quum ergo nullam

(1) Derham, l. c. p. 26. — Cassini, l. c. p. 136.

(2) Gilbert, Annal. Neue Folge. V. 399. in nota.

(3) Id. Tom. XIV. p. 203.

(4) Newton, Princ. Prop. 50. Schol. „ Hybero tempore, ubi aër per frigus condensatur, et ejus vis elastica remittitur, motus sonorum tardior esse debet in subduplicata ratione densitatis; et vicissim aestivo tempore debet esse velocior."

lam curam in determinanda caloris efficacia ponerent, facile explicatur, cur illis haec efficacia nullius momenti visa fuerit. Derhamus affirmat, soni motum aeque velocem esse, sive aestus vel frigus, sive dies vel nox sit, aestas vel hyems; Parisini ex unico tantum experimento concludunt, soni celeritatem interdiu et noctu aequalem esse; plerique reliqui de caloris vi ne quaesiverunt quidem. (1)

§. 64. Blanconus primus anno 1740 hanc vim satis magnam esse, experimentis docuit. Quum enim temporis intervallum inter perceptum lumen et sonum tormentorum, in distantia 13000 passuum (2) explosorum, aestivo et hyemali tempore observaret, illud media aestate, ventis quietis, in temperatura 20 graduum thermometri Reaumuriani, invenit esse 76″; hyeme vero 79″, in temperatura 1°, 2 R. infra punctum congelationis, dum ventus sono secundus erat; unde concludi poterat, hyeme soni celeritatem minorem esse, quam aestate. (3) Postea autem nemo similia experimenta instituit, donec Benzenbergius, felici usus occasione, soni celeritatem diversis caloris gradibus observandi, Blanconi sententiam plane confirmavit. Hujus autem experimenta mox plenius exponemus.

§. 65. Praeter varium caloris gradum sunt aliae quoque diversitates et mutationes aëris atmosphaerici; tempestas enim potest esse vel serena, vel nebulosa, vel pluvialis; barometri altitudo, hygrometri et electrometri indicationes differre possunt; nullus autem ex observatoribus soni celeritatem his conditionibus mutatam vidit, quod quamvis non probet, eas revera nihil in sonum valere, tamen demonstrat, earum vim, si aliqua sit, admodum exiguam esse.

§. 66. His praemissis, ex ipsis experimentis soni celeritatem determinemus. Diversitas autem, quae inter variorum experimenta obtinet, ex sequenti tabula perspicitur, in qua mensuras Anglicas et Gallicas veteres ad metra reduximus.

Ob-

(1) Derham, l. c. p. 11. — Cassini, l. c. p.

(2) Indicari videntur passus geometrici, quorum mille aequant uno milliario Italico, sive quartae parti unius milliarii geographici. J. T. Mayer, practische Geometrie, Gött. 1792. Tom. 1. p. 80.

(3) Comment. Bonon. Vol. II. p. 365.

Obfervatores.		Annus.	Regio.	Bafis.	Celeritas foni.
Mersenne.	(1)		Gallia.		448 metr.
Florentini.	(2)	1660	Italia.	1800 metr.	361
Walker.	(3)	1698	Anglia.	800	398
Cassini, Huyghens, al.	(4)		Gallia.	2105	351
Flamsteed et Halley.	(5)		Anglia.	5000	348
Derham.	(6)	1704.5.	Anglia.	1600 ad 20000	348
Cassini de Thury, al.	(7)	1738	Gallia.	22913 et 28526	337
Blanconus.	(8)	1740	Italia.	24000	318
De la Condamine.	(9)	1740	Quito.	20543	339
Idem.	(10)	1744	Cayenne.	39429	358
J. T. Mayer.	(11)	1778	Germania.	1040	336
G. E. Müller.	(12)	1791	Germania.	2600	338
de Espinosa et Banza.	(13)	1794	Chili.	16345	371
Benzenberg.	(14)	1809.11.	Germania.	9072	334

(1) Mersenne, Tract. de arte Ballist. prop. 39. Prima haec obfervatio falfo a plerisque Gassendo tribuitur, qui illam folnmmodo memorat in opere de Philof. Epicuri. L. B. 1675. Tom. I. p. 150.

(2) Tentam. experim. in Acad. del Cimento. L. B. 1731. part. II. p. 106.

(3) Walker, Philof. Transact. ann. 1698. n. 247.

(4) Du Hamel, Hift. Acad. Reg. Lib. II. fect 3. cap. 2.

(5) Apud Derhamum, l. c.

(6) Derham, l. c. p. 12.

(7) Cassini de Thury, Mém. de l'Acad. de Paris 1738. p. 128. — 1739. p. 126.

(8) Blanconus, l. c. Adhibuimus obfervationem factam media aestate, quieto aëre. Diftantia locorum non accurate erat determinata.

(9) De la Condamine, Introduction hiftorique etc. Par. 1751. p. 98.

(10) Idem, Mém. de l'Acad. de Par. 1745. p. 488.

(11) J. T. Mayer, Practifche Geometrie. Gött. 1792. Tom. I. p. 166.

(12) Müller, Gött. Gelehrt. Anz. 1791. St. 159. — Voigt's Magazin. Band. VIII, St. I. p. 170.

(13) de Espinosa et Banza, Ann. de Chim. et de Phyf. Tom. VII. p. 93. Media temperatura, in qua haec experimenta funt inftituta, fuit 23°,5 C. Ipfa autem experimenta multum inter fe, et magis etiam ab aliorum obfervationibus differunt.

(14) Benzenberg in Gilbert's Ann. der Phyfik. Neue Folge. Tom. V. p. 383. Tom. XII. p. 1. Hae obfervationes reductae funt ad temperaturam 0°.

§. 67. Has observationes omnes seorsim recensere, et quid illis deficiat, aut qua in re aliae aliis praestent, fuse ostendere, propositi ratio non postulat, eo minus, quum jam antea causas adduxerimus, quae plerasque minus certas reddant. Quare solas illas, quae ceteris omnibus praestare nobis videntur, et quibus soni celeritas accurate determinari potest, paucis exponemus. Huc autem referimus illas, quae anno 1738 ab Academicis Parisinis institutae sunt, et eas, quas Benzenbergius recentiori tempore retulit.

§. 68. Anno 1738 summi Astronomi, Cassini III de Thury, Maraldi, la Caille, al., quibus ab Academia Parisina provincia tradita erat, soni celeritatem exactius, quam eo usque factum fuerat, determinandi, plures de propagatione soni observationes in vicinia urbis Parisiorum instituerunt. Tales elegerant observationum locos, quorum distantiae per mensuras geodeticas, quas ipsi brevi ante instituerant ad metiendum arcum meridiani, exacte erant cognitae. In singulis illis locis certo tempore explodebantur tormenta bellica, in ceteris autem accurate notabatur temporis intervallum, inter visam flammam et auditum sonum elapsum. His experimentis per plures dies sese tradiderunt memorati viri, et plures propositiones physicas de soni theoria, inter quas inprimis aequabilis soni celeritas, et ventorum vis in illam pertinent, egregie confirmaverunt. Ipsam soni celeritatem, vento non flante, invenerunt esse 173 hexapedarum (*toises*), sive 1038 pedum Parisinorum. Magnam in definienda illa celeritate curam non posuerunt; sufficiebat iis, si error hexapedi longitudinem non superaret. Nobis autem accuratius videndum est, quid illorum observationes hac de re doceant, et quantum illis fidere possimus.

§. 69. Certum judicium de soni celeritate ex illis demum Parisinorum observationibus elici potest, quae in magnis distantiis sunt institutae. Nam quum iis, quibus utebantur, horologiis, non minora temporis intervalla, quam dimidia minuta secunda determinarent, errores, inde orti, in parvis distantiis nimiam vim acquirebant. Ita v. c. sonus tormenti, in colli Montmartre explosi, audiebatur in observatorio Parisino elapsis post visum lumen $16''$ aut $16''\frac{1}{2}$, quare error dimidii minuti secundi celeritatem soni $\frac{1}{32}$ sui parte augebat vel imminuebat. — Porro nullae observationes sunt adhibendae, nisi in quibus aut aër perfecte tranquillus erat, aut saltem ventus directionem soni ad perpen-

di-

diculum fecabat. Quodfi ergo, his principiis ufi, obfervationes, quas adnotavit Cassini, ad examen revocamus, patet, ex magno illarum numero octo tantum determinandae foni celeritati infervire posfe, quae nempe diebus 14. et 16. Martii inter obfervatorium Parifinum, collem Montmartre et vicum Montlehery factae funt. Diftat hic vicus ab Obfervatorio 11756 hexapedis, et a colli Montmartre 14636 hexapedis.

Dies	Locus explofionis	Locus obfervatoris	Tempus elapfum	Celeritas foni in minuto fecundo
14 Martii	Obfervatorium	Mont-lehery	1′ 8″ $\frac{1}{2}$	171,6 hexap.
eod.	Montmartre	Mont-lehery	1′ 25″	172,2
eod.	Mont-lehery	Obfervatorium	1′ 7″ $\frac{1}{2}$	174,2
eod.	Mont-lehery	Obfervatorium	1′ 8″	172,9
16 Martii	Obfervatorium	Mont-lehery	1′ 8″ $\frac{1}{2}$	171,6
eod.	Montmartre	Mont-lehery	1′ 24″ $\frac{1}{2}$	173,2
eod.	Montmartre	Mont-lehery	1′ 24″ $\frac{1}{2}$	173,2
eod.	Mont-lehery	Obfervatorium	1′ 8″	172,9

Conjungendis his obfervationibus, media foni celeritas invenitur esfe 172, 725 hexapedarum five 1036, 35 pedum Parifinorum.

§. 70. Temperatura aëris in his experimentis erat inter gradum 4.um et 6.um R. Quum autem foni celeritas in diverfa temperatura diverfa fit, fummi momenti est, illam ad certum terminum, v. c. ad initium fcalae centigradae reducere, ex qua deinde in alia quavis temperatura cognosci posfit. Quod ut fiat, in ufum vocandum est theorema, a Newtono jam demonftratum, foni nempe celeritatem esfe in ratione fubduplicata elasticitatis fpecificae aëris. (§. 53.) Theoria quidem, cui illud theorema nititur, in determinanda foni celeritate ab experientia recedit, quare illius quoque veritas in dubio poni posfit. Attamen, quaecunque fit caufa, cur foni celeritas experimentis major inveniatur, quam theoria, vero fimile videtur, illam caufam foni celeritatem in quavis temperatura eadem ratione augere, adeoque allatum theorema non turbare. Benzenbergii obfervationes, mox memorandae, illud quoque confirmant.

Elasticitates ſpecificae aëris in temperaturis $0°$ et $t°$ ſunt inter ſe, ut unitas ad $1 + 0,00375\,t$; ſi ergo c est ſoni celeritas in $0°$, ejus celeritas in temp. $t°$ est $= c\sqrt{(1+0,00375\,t)}$, unde $c = \frac{\text{cel. in temp. } t°}{\sqrt{(1+0,00375\,t)}}$. In experimentis Pariſinorum media temperatura erat $= 6°$ C., et celeritas ſoni $= 1036,35$ ped. Par., quapropter

$$\text{Celer. ſoni in temp. } 0° = \frac{1036,35}{\sqrt{(1,02250)}}$$
$$= 1024,9 \text{ ped. Par.}$$

§. 71. Sequenti anno iidem Viri, denuo menſuris geodeticis in Gallia Meridionali intenti, haec experimenta ulterius proſecuti ſunt. Quoniam vero ad eadem pervenirent corollaria, operae pretium non putarunt, novas ſuas obſervationes eadem cura, qua priores, exponere, adeoque paucas tantum ex illis memorant, et ne tempus quidem notant, quo illas inſtituerunt. Quod certe dolendum est, quum haec experimenta in diſtantiis inſtituerint, quae prioribus multo esſent longiores.

§. 72. Benzenbergii experimenta, recentiori tempore prope urbem Düsſeldorf inſtituta, ceteris omnibus, ipſis quoque Pariſinis, praeferri merentur. Quamvis enim baſis, per quam ſonus in illis propagabatur, multo minor esſet quam baſis in experimentis Pariſinis, illud optime compenſavit majori obſervationum numero, et magis accurata temporis menſura per horologium, ſumma cura confectum et minuta tertia indicans. Praeterea ipſi contigit, haec experimenta admodum diverſis caloris gradibus inſtituere, et ea ratione illius efficaciam in augenda ſoni celeritate demonſtrare.

§. 73. Ex iis autem, ipſo Benzenbergio judice, illa tantummodo determinandae ſoni celeritati inſervire posſunt, quae facta ſunt die 3 Dec. 1809 tempore matutino, et die 8 Junii 1811. (1) Cetera enim inſtituta fuerunt vel ejusmodi tempestate, qua ventus ſonum accelerabat aut retardabat; vel ſoni exploſorum tormentorum varia de cauſa adeo debiles erant, ut difficulter ab aliis ſo-

(1) Benzenberg, in Gilbert's Annal. Neue Folge. Tom. XII. p. 6.

ſonis distinguerentur, et obſervator, ſaepius incertus, utrum revera ſonum audiret, ejus initium debito tardius notaret. Sequens tabula illa experimenta, in diſtantia 27927 ped. Par. inſtituta, exhibet. Addidimus ſimul celeritatem ſoni in o°, ex iis deductam ope aequationis, §ᵒ. 70. inventae, quae in thermometro Reaumuriano fit:

$$\text{Celer. ſoni in temp. } o^\circ = \frac{\text{celer. in temp. } t^\circ}{\sqrt{(1 + 0{,}0046875\, t)}}$$

Dies.	Numerus obſervationum.	Medium tempus elapſum.	Media ſoni celeritas.	Temperatura.	Celeritas ſoni in temp. o°.
3 Dec. 1809.	26	27″, 062	1031,9	1°, 5 R.	1028, 3
8 Jun. 1811.	18	25″, 857	1080, 0	22°, 7	1026, 8
eod.	12	25″, 866	1079, 7	22°, 4	1027, 1

Sumto medio valore, celeritas ſoni in temp. o° ex 56 obſervationibus Benzenbergii invenitur eſſe = 1027, 4 ped. Par. = 333, 7 metris. Eandem ex Pariſinorum experimentis $2\frac{1}{2}$ pedibus minorem invenimus; conveniunt autem utrique, ſi media temperatura Pariſinis non fuerit 6° C, ſed 4° C.

§. 74. Quum vero Benzenbergii obſervationes, ad eandem temperaturam reductae, tam parum inter ſe differant, vero ſimile eſt, ſoni celeritatem, ex iis definitam, longitudine unius pedis a vero valore non aberrare. Quodſi ergo ille valor in uſum adhibetur, ſequentes inveniuntur ſoni celeritates in aliis temperaturis:

Temperatura.	Celeritas foni.		Temperatura.	Celeritas foni.	
	ped. Par.	metr.		ped. Par.	metr.
— 10° C.	1007,9	327,4	+ 11° C.	1048,3	340,5
9	1009,8	328,0	12	1050,2	341,1
8	1011,8	328,7	13	1052,0	341,7
7	1013,7	329,3	14	1053,9	342,4
6	1015,7	329,9	15	1055,8	343,0
5	1017,7	330,6	16	1057,7	343,6
4	1019,7	331,2	17	1059,6	344,2
3	1021,6	331,8	18	1061,5	344,8
2	1023,5	332,5	19	1063,3	345,4
1	1025,5	333,1	20	1065,2	346,0
0	1027,4	333,7	21	1067,1	346,6
+ 1	1029,3	334,3	22	1068,9	347,2
2	1031,2	335,0	23	1070,8	347,8
3	1033,1	335,6	24	1072,6	348,4
4	1035,0	336,2	25	1074,5	349,0
5	1036,9	336,8	26	1076,3	349,6
6	1038,8	337,4	27	1078,1	350,2
7	1040,7	338,1	28	1080,0	350,8
8	1042,6	338,7	29	1081,8	351,4
9	1044,5	339,3	30	1083,6	352,0
10	1046,4	339,9			

CAPUT QUARTUM.

VARIAE OPINIONES DE DISSENSU INTER THEORIAM ET EXPERIMENTA IN DEFINIENDA SONI CELERITATE.

§. 75. Quando ea, quae in capite praecedenti ex observationibus, fide dignis, circa soni celeritatem attulimus, cum iis conferimus, quae in capite secundo ex principiis motus fluidorum analyseos sublimioris ope deducta sunt, videmus ea multis rebus convenire. Prouti enim theoria, sic etiam experientia docet, diversitatem primae agitationis aëris hac in re nihil facere, et sonos, intensitate aut tono diversos, eadem celeritate propagari. Utraque porro confirmat, praeter ventos solum temperaturae discrimen illam celeritatem mutare; ceteras aëris diversitates, quae elasticitatem ejus specificam non afficiant, hac in caussa nullius momenti esse. At vero summum adest discrimen in numerico valore, qui secundum utramque celeritati soni competit. Quamvis enim variorum experimenta non prorsus congruant, tamen Benzenbergii opera res jam eo perducta videtur, ut in determinanda soni celeritate vix error longitudinis unius pedis relictus sit. Ab altera parte exactissime notae sunt densitas aëris sicci sub certa pressione, ejus expansio per auctam temperaturam, et densitatis mutatio, quam admixtus aëri vapor aqueus inducit, quapropter nullus metus est, ne formula $\sqrt{\frac{ga}{b}}$, qua soni celeritas analytice exprimitur, non bene sit computata. Quid ergo caussae est, cur priori via celeritatem soni in temperatura 0° invenerimus esse 333,7, altera vero 279,29 metrorum?

§. 76.

§. 76. Recta ratio docet, priorem valorem, quem experientia duce invenimus, unice verum esse; quare vitium quoddam in analytica examinis parte adsit oportet. Calculo autem ipsi illud inesse non potest, sed situm esse debet aut in quadam precaria hypothesi, cui calculus superstructus est, aut in male neglecta aliqua causa physica, cujus efficacia in motu fluidorum elasticorum negligenda non fuisset.

§. 77. Newtonus, qui memoratum discrimen primus animadvertit, duplicem affert illius causam. Altera est crassitudo solidarum particularum aëris, per quas sonum in instanti propagari affirmat, et quarum nulla in computo habetur ratio. Alteram causam, eo judice, constituit vaporum in aëre praesentia, qui cum sint alius elateris et alius toni quam moleculae aëreae, a Newtono dicuntur vix ac ne vix quidem participare motum aëris veri, quo soni propagantur; his autem quiescentibus, motus ille celerius propagabitur per solum aërem verum, idque in subduplicata ratione minoris materiae (1). De utroque argumento seorsim videndum est.

§. 78. Vapores in aëre praesentes quamvis elasticitate sua specifica ab aëre differant, tamen cum eo participes sunt illius motus, quo soni propagantur. Namque in propagatione soni in miscela ex variis fluidis elasticis singulorum elasticitas specifica in censum non venit, sed elasticitas specifica totius miscelae. Quum enim et aër, et vapor, et cetera fluida elastica omni vibrationum genere affici possint, vibrationes particulae aëris similem motum vibratorium producunt, non tantum in particulis vicinis aëreis, sed etiam in vaporibus, qui simul adsunt. Newtonus in errorem incidisse videtur comparando vibrationes molecularum aëris cum vibrationibus chordarum tensarum, quae certis tantum modis fiunt; harum vero legibus motus aëris sonorus non est adstrictus. Quam parum autem densitas specifica aëris ab admixto vapore mutetur, et quam parva differentia in soni celeritate inde oriatur, §. 56. vidimus.

§. 79. Prius Newtoni argumentum majoris esse momenti videtur, et plures, eum secuti, in illo praecipuam difficultatis solutionem quaesiverunt. (2)

Ejus

(1) Newton, Phil. Nat. Princ. Math Libr. II. prop. 50 Schol.

(2) Euler, Mém. de l'Acad. de Berlin. 1765. p 335. Comm. Petrop. Nov. Tom. XVI. p. 312. — Prechtl in Gilbert's Ann. der Physik. Tom. XXI. p. 449.

Ejus ſententia huc redit, calculo mathematico definiri propagationem ſoni in medio elastico, quod ex punctis mathematicis, nullius crasſitudinis, conſtet; aërem vero ex moleculis ſolidis conſtare, et ſonum nullo indigere tempore, ut per illas moleculas propagetur, adeo, ut ſi diameter molecularum ſit v. c. ad distantiam inter duas moleculas = 1 : 10, ſonus decima parte celerius propagetur quam calculus indicet. Re autem accuratius perſpecta, apparet, nullam molecularum ſolidarum, ex quibus aër conſtare ſingatur, rationem in calculo habendam esſe.

§. 80. Nam theoria mathematica de motu fluidorum elasticorum certo fundamento nititur, legi Mariottii, quae rationem virium, quibus moleculae ſeſe repellunt, et diſtantiae inter illarum centra definit. Haec lex quum omnibus fluidis elasticis communis ſit, a numero aut magnitudine molecularum, ex quibus illa conflata esſe cenſentur, non pendet, quapropter proprietates phyſicae, quae ex illa lege demonſtrari posſunt, verae ſunt, quaecunque ſit molecularum conditio. Idem quoque valet de celeritate ſoni; quae ſi ſemel rite ex theoria deducta est, non amplius ad molecularum crasſitudinem est recurrendum.

§. 81. Vix aliqua notanda ſunt de ſententia illorum, qui memoratum diſcrimen explicent ex moleculis heterogeneis, in aëre volitantibus. In primis Lambertus hanc rem fuſe expoſuit, et vitium in eo haerere arbitratus est, quod ad determinandam aëris denſitatem adhibeatur aër impurus, particulis alienis onustus. Hae particulae, ex ejus ſententia, mechanice tantum in aëre ſuſpenſae, et inter ejus poros collocatae ſunt; quapropter illius quidem pondus et denſitatem augent, non vero elasticitatem, atque vera inter utramque ratio, ſive elasticitas ſpecifica aëris, major est illa, quae ex experimentis cognoscitur; qua aucta, augetur ſimul ſoni celeritas. (1) — Accuratior aëris analyſis docuit, particulas tales heterogeneas in aëre non adesſe. Vapores enim aquei, qui in eo forte adſunt, elasticitate non multum ab eo differunt. Moleculae autem ſalinae et oleoſae, quas in aëre adesſe olim ſingebant, in eo non inveniuntur.

§. 82.

(1) Lambert, ſur la viteſſe du ſon. Mém. de Berlin. 1768. p. 70.

§. 82. Lagrangius, in eodem argumento versatus, dubium movet, num elasticitas particularum aëris exacte proportionalis sit densitati; si enim, ait, elasticitas celerius increscat quam densitas, theoria et experimenta inter sese conciliari possunt. (1) Quum vero constet, illam legem saltem veram esse in pressionibus, quae non multum a solita atmosphaerae pressione differunt, illa tutissime adhiberi potest in soni propagatione, in qua aëris condensationes et dilatationes admodum exiguae sunt.

§. 83. Eulerus, qui Newtono adsentitur, solidas particulas aëris sonum accelerare posse, praeterea conjicit, discriminis causam forsitan in eo haerere, quod in calculo aëris agitatio tantum minima admittatur. Illi enim soni, quorum propagatio experimentis est definita, admodum vehementes fuerunt, quapropter fieri possit, ut soni maxime debiles ea ipsa celeritate progrediantur, quam indicet theoria. (2) Huic autem conjecturae et experientia et ipsa theoria repugnat. Experientia quidem docet, sonos intensos eadem celeritate propagari, ac debiliores (§. 61.). Ab altera parte Cl. Poisson, calculo illum casum prosecutus, in quo agitationes molecularum fluidi elastici non infinite parvae ponuntur, hac hypothesi soni celeritatem non mutari ostendit. (3)

§. 84. Celeb. Chladni in libro de Acustica, postquam ostendit, admitti non posse rationes, quibus ad ejus usque tempora hanc difficultatem solvere tentaverant Physici, nonnulla affert experimenta de soni celeritate in aliis fluidis elasticis, mox exponenda; ex quibus illi videtur concludendum, celeritatem, qua propagatur sonus, ex sola elasticitate specifica non posse determinari, sed etiam pendere a chemica quadam horum fluidorum proprietate, ipsi incognita. (4) Haec quidem conjectura non satis definita est, ut ad explicandam rem multum conferat.

§. 85. Postquam recentiori tempore Daltonus novam proposuerat theoriam de miscela fluidorum aëriformium, et de constitutione aëris atmosphaerici, haec

(1) De la Grange, in Miscell. Taurin. Tom. II. part. 2. p. 152.

(2) Euler, Comm. Acad. Petrop. Nov. Tom. XVI. p. 311. Schol. 1.

(3) Poisson, Journ. de l'école Polytechn. Tom. VII. p. 364.

(4) Chladni, Akustik. p. 226.

haec quoque theoria in doctrina de ſono adhibita fuit. Secundum Daltonum diverſa fluida gazformia, ex quibus aër atmosphaericus compoſitus est, *chemice* conjuncta non ſunt, ſed tantummodo *mechanice* mixta, et quidem tali ratione, ut in ſe mutuo prorſus non agant, molecula, v. c., oxygenii ſolas oxygenii, non azoti moleculas repellat. Quodvis ergo fluidum elasticum ita in aëre adest, ac ſi alia fluida in eo non ſimul adesſent, et atmosphaera ex quatuor diverſis atmosphaeris, oxygenii, azoti, acidi carbonici et vaporis aquei conſtat, quae ſingulae in mercurium barometri premunt, et conjuncta presſione illum ſustinent. (1)

§. 86. Hujus theoriae adverſarius, Cl. Gough, animadverterat, ſonum in hac hypotheſi ſeorſim per illas atmosphaeras propagari, et celeritatem propagationis in ſingulis atmosphaeris differre; inde vero necesſe esſe, duplicem ſaltem in tubis muſicis audiri tonum; graviorem, oxygenii; acutiorem, azoti vibrationibus productum. (2) Benzenbergius autem opinatus est, hanc hypotheſin idoneam esſe ad difficultatem tollendam, quae hucusque ſoni theoriam premeret; ſi ſonus diverſa celeritate per ſingula fluida elastica, quae atmosphaeram conſtituunt, propagetur. (3)

§. 87. Celeritas ſoni in illis fluidis ope formulae $\sqrt{\frac{ga}{b}}$ (§. 52.) determinatur. Si ponimus $a = 0{,}76$ metr., est (4)

denſitas b vaporis aquei ad denſ. mercurii	$=$	1 :	16781
—— — azoti — — ——	$=$	1 :	10796
—— — oxygenii — — ——	$=$	1 :	9481
—— — acidi carbon. — — ——	$=$	1 :	6885

et

(1) Dalton, Memoirs of Manchester. Vol. V. Gilbert's Annal. Tom. XII. p. 385. Tom. XXI. p. 382. Fuſius theoriam ſuam expoſuit in opere: A new Syſtem of Chemical Philoſophy, cujus verſio Germanica prodiit Berol. 1812. inſcripta: Ein neues ſyſtem des chemiſchen Theiles der Naturwisſenſchaft von John Dalton, aus dem Engliſchen überſetzt von Fr. Wolff. Tom. I. p. 170.

(2) Gough in Gilbert's Annal. Tom. XXI. p. 403.

(3) Benzenberg in Gilbert's Annal. Neue Folge. Tom. XII. p. 156.

(4) Hi valores cognoscuntur ex tabula, expoſita a Cl. Biot, traité de Phyſique, Tom. I. p. 383., et ex ratione denſitatis ſpecificae aëris atmosphaerici ad denſitatem ſpecificam mercurii $= 1 : 10463$. Cl. Benzenberg alios numeros indicat.

et. soni celeritas in temperatura o°

in vapore aqueo	=	353, 7	metris
in gaz azoto	=	283, 7	——
in gaz oxygenio	=	265, 9	——
in gaz acido carb.	=	226, 6	——

Inventa soni celeritas in vapore aqueo non multum differt ab observata, quae est 333, 7 metrorum. Benzenbergius, qui vapori aqueo elasticitatem paulo minorem tribuit, vix ullam differentiam inter hos valores invenit. Quoniam vero sonus, qui e longinquo auditur, aliquamdiu durat, et initio magis debilis est, deinde intenditur, tandem lente evanescit, suspicatur Benzenbergius, utrum forsitan primum ad nos perveniat sonus, per vaporem aqueum propagatus, dein ille, qui fertur per gaz azotum, et qui magis intensus est propter majorem densitatem hujus gaz in atmosphaera, tandem vero audiatur sonus, per gaz oxygenium allatus. Acidi carbonici nimis parva copia illi adesse videtur, quam ut sonum ad nos deferat, qui percipi possit. — Ipse autem confitetur, magnam difficultatem contra hanc hypothesin ex theoria tuborum musicorum peti posse, qui unicum tonum edere non possent, si vapor aqueus, azotum, et oxygenium in illis seorsim vibrarent.

§. 88. Ab hac vero hypothesi Benzenbergius deinde recessit, auditis argumentis, a Cl. Olbers ei oppositis, quae praecipue huc redeunt. (1)

1.) Primum argumentum cum eo convenit, quod §. 78. contra Newtoni sententiam attulimus. Illud tamen in Daltoni theoria minorem vim habet, quoniam hic moleculis vim tribuit, qua solas moleculas homogeneas repellant, et in reliquas prorsus non agant, nec suis vibrationibus illas ad similem motum incitent. — Quae autem sequuntur argumenta, majoris sunt momenti, et satis indicant, illam theoriam hoc loco in usum adhiberi non posse.

2.) Quum in medio mari nulla corpora vicina sint, quae sonum reflectant aut turbent, in eo saltem triplex sonus distincte audiatur, si illa hypothesis vera sit.

3.)

(1) Benzenberg in Gilbert's Ann. Neue Folge. Tom. XIX. p. 154.

3.) Intervallum temporis elapſi ab initio ad finem ſoni, qui e longinquo adfertur, numquam tantum est, quantum foret, ſi oriretur ex differentia celeritatis ſoni in vapore aqueo et gaz oxygenio.

4.) Quum vaporis aquei minima tantum copia in atmosphaera adſit, ſonus, per ſolum vaporem propagatus, adeo debilis foret, ut in magnis diſtantiis audiri non posſet.

§. 89. Ex iis, quae hoc capite dicta ſunt, ſatis liquet, rationes, quibus Phyſici conati ſunt, ſoni theoriam cum experimentis conciliare, huic rei non ſufficere. Summo autem Laplacii ingenio contigit, veram, ut nobis quidem videtur, difficillimi hujus argumenti ſolutionem invenire, quam ſequenti capite uberius exponere, et, quantum fieri posſit, computatione mathematica illustrare in animo est.

* *

*

CAPUT QUINTUM.

EXPOSITIO SENTENTIAE LAPLACII DE HOC ARGUMENTO.

§ 90. Caloricum duplicem in corporibus, quae penetrat, effectum producit; partim enim eorum temperaturam auget, partim ipſa dilatat. Illa pars, quae temperaturam auget, et ideo in thermometrum agit, caloricum *liberum* dicitur; altera vero, quae dilatando agit, vocatur caloricum *latens*, quoniam thermometro detegi non potest. Partem autem aliquam calorici hoc ſenſu in corporibus latere, plures docent obſervationes. Illud praecipue cernitur, quando corpora ſolida, adhibito calore, in fluida ſtillantia, aut haec in fluida elastica vertuntur; tunc enim illa notabilem calorici quantitatem abſorbent, temperatura interim non mutata. Aliud hujus rei documentum est temperaturae decrementum, quod aër ſubito dilatatus patitur; illa enim calorici pars, quae thermometrum non amplius afficit, augendo fluidi elastici volumini inſervit.

§. 91. Rurſus, ſi corpus quovis modo comprimitur, ſive fricando, ſive percutiendo, ſive ſola presſione, calorici copia, cui pristinam ſuam expanſionem debet, evolvitur et libera redditur, quapropter ſimul temperatura corporis augetur. Hujus generis phaenomena praebent percusſi ferri calor, flamma,

quae

quae ex lignis, fortiter fibi mutuo adfrictis, exfiftit, etc. In primis vero fluida elastica fubito compresfa magnum calorem emittunt, quae proprietas cernitur in iis machinulis, in quibus boleti fomentarii, aliave corpora facile inflammabilia, ope aëris compresfi accenduntur.

§. 92. Quodfi phyficam hanc legem applicamus ad phaenomena foni, qui continuis et celerrimis aëris condenfationibus et rarefactionibus propagatur, patet, qualibet aëris condenfatione aliquod caloricum, prius latens, liberum reddi; et quum diffufio calorici liberi per aërem admodum lenta fit, fi rationem habeamus celeritatis pulfuum fonororum, errorem vix admittimus ponendo, caloricum, hac ratione evolutum, non diffundi per aërem vicinum, fed penitus impendi, ad augendam aëris, e quo evolutum fuit, temperaturam. Ergo elasticitas undae fonorae condenfatae duplici de caufa augetur; primum, quia repulfio mutua molecularum increscit in ratione inverfa distantiae; deinde, quia temperatura ipfa fimul augetur, et fua vice elasticitatem auget. Priorem caufam refpexerunt Newtonus et ceteri Phyfici, qui foni propagationem examinarunt; ad alteram Laplacius demum attendit. (1)

§ 93. Sonorum in vaporibus propagatio argumentum praebet, quo Cl. Biot ufus est ad veritatem hujus fententiae confirmandam; illa enim propagatio fieri non posfet, nifi ictibus fonoris evolveretur caloricum. Novimus enim, vaporis copiam, quae in fpatio aliquo ex aqua attollitur, in eadem temperatura huic fpatio proportionalem esfe, quare fi illud compresfione imminuitur, vaporis pars in aquam redit, donec reliquus vapor fit in ratione minoris fpatii. E contrario, fi fpatium augetur, non tantum expanditur vapor, fed fimul, fi aqua adest, nova vaporis copia ex ea adscendit, donec pristina denfitas rediit. Corpus fonorum folo impulfu elasticitatem ejusmodi medii mutare non valet, nam ab ea parte, qua in vaporem impellit, nonnihil vaporis in aquam tranfit, ab altera vero parte, qua dilatatur vapor, novus continuo ex vicina aqua asfurgit. Ergo differentiae denfitatis non ulterius propagantur, quam in proxima vicinitate corporis fonori, ultra quam vapor quiescere pergit, et nullus ideo fonus propagatur. Si vero corpus tremulum celerrimis fuis ictibus, quibus vaporem condenfare co-

m-

(1) La Place, in Gilbert's Annal. Tom. XVIII. p. 385.

natur., ex eo ſimul aliquid caloricum latens elicit, alia oriuntur phaenomena. Caloricum enim evolutum impedit, ne pars vaporis condenſati in aquam coëat, quoniam per auctam temperaturam vaporis elasticitas ſimul augetur. Qua autem parte vapor rareſit, ea caloricum liberum partim latens evadit, et, temperatura imminuta, non accedit novus vapor, qui amisſam denſitatem reſtituat.

§. 94. Si igitur experimentis novimus, in vaporibus quoque propagari ſonum, concedamus oportet, in undis condenſatis aliquod caloricum latens evolvi, in undis rarefactis caloricum liberum ligari. Biotius autem, ſuspenſa campanula in globo vitreo clauſo, ſolo vapore aqueo repleto, obſervavit, ſonum campanulae, in medio vapore excitatum, extra globum vitreum audiri; eo vero debiliorem esſe ſonum, quo minor esſet temperatura, et, quae ab ea pendet, vaporis elasticitas. Intenſitas ſoni major erat in vapore alcoholis; major etiam in vapore aetheris; augebatur ergo in variis vaporibus pro ratione majoris presſionis, quam illi in eadem temperatura ſustinere posſunt. (1)

Quum ergo conſtet, in vaporibus ſonum propagantibus caloricum evolvi et ligari, analogia jubet, ut caloricum eodem modo in fluidis permanenter elasticis evolvi admittamus; in his enim prorſus eadem est ſoni propagatio, ac in vaporibus.

§. 95. Videamus jam, quomodo aequationes motus fluidi elastici, quas capite II. invenimus, Laplacii hypotheſi mutentur. Hunc in finem redeundum est ad aequationes generales motus fluidi cujuscunque, §^{is}. 39 et 41 expoſitas, quae autem ſimpliciores redduntur adhibendo unam tantum ſpatii dimenſionem. Si ergo X est abſcisſa initialis moleculae fluidae, Q ejus denſitas initialis, $X + x$ abſcisſa ejusdem moleculae elapſo tempore t; p et q ejus presſio et denſitas eodem tempore, erit:

$$q = Q\left(1 - \frac{dx}{dX}\right) \qquad (A)$$

$$\text{et } \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{1}{Q}\frac{dp}{dX} \qquad (B)$$

§. 96.

(1) Biot, Nouveau Bulletin de la Soc. Philom. Janv. 1808. p. 76. Gilbert's Ann. Neue Folge. Tom. III. p. 237.

§. 96. Sit jam τ temperatura aëris quiescentis, b densitas ejus media, a altitudo mercurii in barometro, quae huic densitati conveniat. Ponatur porro densitas aëris post tempus t, sive

$$q = b\,(1 + \gamma) \tag{C}$$

ita ut γ denotet condensationem moleculae aëris in motu, et sit ω numerus graduum, quo ejus temperatura condensatione augetur. In moleculis dilatatis quantitates γ et ω opposito signo notandae sunt. — Secundum legem Mariottii foret $p = \frac{ga}{b}\,q$ (§. 42.) $= ga\,(1 + \gamma)$, si temperatura esset constans. Verum quoniam temperatura, quae fuerat τ graduum, nunc evasit $\tau + \omega$ graduum, pressio sit (1)

$$p = ga\,(1+\gamma)\,\frac{1 + 0{,}00375\,(\tau + \omega)}{1 + 0{,}00375\,\tau} = ga\,(1+\gamma)\left(1 + \frac{0{,}00375\,\omega}{1 + 0{,}00375\,\tau}\right)$$

§. 97. Quum in propagatione soni condensatio γ infinite parva esse ponitur, augmentum temperaturae ω, quod illa condensatione efficitur, illi est proportionalis. (2) Sit igitur $\omega = m\gamma$, ubi m est coëfficiens constans pro temperatura τ. Hoc posito, praecedens aequatio, in qua quadratum quantitatis infinite parvae γ negligitur, sit

$$p = ga\left(1 + \gamma + \frac{0{,}00375\,m}{1 + 0{,}00375\,\tau}\,\gamma\right)$$

Sit brevitatis causa $\dfrac{0{,}00375\,m}{1 + 0{,}00375\,\tau} = \varkappa$ (D)

$$\text{ergo } p = ga\,(1 + \gamma + \varkappa\gamma) \tag{E}$$

§. 98. Hos valores nunc in aequationibus (A) et (B) adhibeamus. Posito in aequatione (A) valore $q = b\,(1 + \gamma)$ (C), illa evadit

$$b\,(1+\gamma) = Q\left(1 - \frac{dx}{dX}\right)$$

un-

(1) Sequitur ex §. 16., pressiones aëris ejusdem densitatis in temperaturis diversis t et t' esse inter se $= 1 + 0{,}00375\,t : 1 + 0{,}00375\,t'$.

(2) Nam ω est talis functio condensationis γ, ut nulla sit, posita $\gamma = 0$. Ergo exprimi potest serie, disposita juxta potentias ipsius γ, hujus formae: $\omega = m\gamma + n\gamma^2 + o\gamma^3 +$ etc., quare si γ infinite parva est, altiores ejus potentiae prae priori evanescunt, et sit $\omega = m\gamma$.

unde per differentiationem fit

$$b\,\frac{d\gamma}{dX} = \frac{dQ}{dX} - Q\frac{d^2x}{dX^2} \qquad \text{(F)}$$

Ex aequatione (E) invenimus

$$\frac{dp}{dX} = ga\,(1+\varkappa)\,\frac{d\gamma}{dX}$$

quae si cum (F) conjungitur, est

$$\frac{dp}{dX} = \frac{ga\,(1+\varkappa)}{b}\left(\frac{dQ}{dX} - Q\,\frac{d^2x}{dX^2}\right)$$

hinc vero aequatio (B) evadit, posito $\frac{ga\,(1+\varkappa)}{b} = c^2$.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\,\frac{c^2}{Q}\,\frac{dQ}{dX} + c^2\,\frac{d^2x}{dX^2}$$

§. 99. Haec aequatio similis est illi, quam §. 44. sqq. integravimus, et non differt ab ea, nisi diverso valore constantis c. Ergo soni celeritas etiam ex hac invenitur esse $= c = \sqrt{\frac{ga\,(1+\varkappa)}{b}}$. (§. 52.) Et quum quantitas $\sqrt{\frac{ga}{b}}$ sit in temperatura τ graduum centigradorum $= 279^m,29\,\sqrt{(1+0,00375\;\tau)}$ (§. 54.), vera soni celeritas in eadem temperatura, juxta Laplacii sententiam, est

$$= 279^m,29\,\sqrt{(1+0,00375\;\tau)}\,\sqrt{(1+\varkappa)}$$

Quantitas $\varkappa$ determinanda foret ex augmento temperaturae aëris, subito compressi; illud autem augmentum physici nondum exacte metiri potuerunt, quare quantitas $\varkappa$ potius definienda est, comparando aequationem praecedentem cum observata soni celeritate. Et quum non constet, $\varkappa$ esse ejusdem valoris in omni temperatura, de hac quoque re experimenta consulenda sunt. Cognita autem $\varkappa$, erit $m = \frac{1+0,00375\,\tau}{0,00375}\,\varkappa$ (D), et $\omega = m\gamma$.

§. 100. Poisfonus, qui Laplacii sententiam computatione mathematica munivit, quantitates $\varkappa$ et ω experimentis Academicorum Parisinorum determinavit, et invenit $\varkappa = 0,4254$ et $\omega = 115,99\;\gamma$. (1) Deest autem illis experimentis accurata temperaturae mensura, ideoque praestat Benzenbergii ob-

(1) Poisson, Journ. de l'école Polytechn. Tom. VII. p. 362.

obfervationes adire, §. 73. allatas, in quibus fi temperaturam gradibus thermometri centigradi, et foni celeritatem metris definimus, invenimus

Temp. τ	Obfervata foni celeritas.	$\varkappa$	ω
$1^{\circ},9$ C.	$335^{m},20$	0,4303	$115,56\,\gamma$
$28^{\circ},0$	$350^{m},73$	0,4272	$125,88\,\gamma$
$28^{\circ},4$	$350^{m},83$	0,4260	$125,70\,\gamma$

§. 101. Quantitas $\varkappa$ decrescere videtur, quo magis augetur temperatura; quamvis experimentorum quoque erroribus leves ejus differentiae tribui posfint. Si $\varkappa$ revera est conftans in omni temperatura, celeritates foni in variis temperaturis funt in ratione fubduplicata elasticitatis fpecificae aëris; fi vero $\varkappa$ cum temperatura mutatur, illa ratio non est prorfus accurata. Tabula celeritatum foni, quam §. 74. computavimus, priori hypothefi nititur; errores vero, inde oriundi, non nifi levisfimi esfe posfunt.

§. 102. Ex valoribus inventis ω patet, fi compresfio γ, quam aër fubit, dum fonum propagat, fuerit $\frac{1}{115}$ aut $\frac{1}{125}$, temperaturae incrementum in aëre compresfo esfe unius gradus thermometri centigradi. Idem erit vicisfim temperaturae decrementum in aëre, fimili proportione dilatato.

Tantum augeri posfe temperaturam aëris compresfi, alia experimenta docent. Boletus fomentarius (*zwam*) in apparatu congruo flammam capit, aëre fubito in volumen, pristino quinquies minus, compresfo. Ille autem boletus in aëre libero incenditur in fuperficie plumbi fufi, non vero in fuperficie bismuthi fufi, i. e. inter gradum 223 m et 283um C. (1) Ad hunc ergo gradum evehitur quoque ejus temperatura in illo apparatu. Quodfi jam attendimus ad ingentem illius masfam, ratione habita masfae aëris compresfi, facile patet, incrementum temperaturae in illo aëre multo etiam majus esfe. 433° à 541° F.

§. 103. Ex dictis liquet, temperaturae mutationem, fubita aëris compresfione et dilatatione effectam, certe unam esfe ex caufis, cui discrimen, quod tamdiu in-

(1) Gay-Lussac, in Schweigger's Journ. Band. XXV. p. 192.

inter theoriam et experimenta obſervatum fuit, ſit tribuendum. Et quoniam ceterum nihil deëſse videtur calculis analyticis, quibus ſoni celeritas determinatur, illa temperaturae mutatio tanquam unica diſcriminis cauſa agnoscenda videtur. Illud certisſime conſtaret, ſi experimenta inſtitui posſent, quibus temperaturae augmentum in aëre, ſubito compreſso, exacte innotesceret, et ſi hoc augmentum aequale inveniretur illi, quod mox ex experimentis de celeritate ſoni deduximus.

§. 104. Quum autem inſtituendis ejusmodi experimentis gravia obſint impedimenta, aliam viam inivit ſummus Laplacius, et temperaturae augmentum in aëre compreſso determinare ſtuduit ex ratione caloris ſpecifici aëris, ſi alias volumen, alias presſio ejus conſtans esſe ponitur. (1) Hac ratione ad duo theoremata pervenit, quae plurimum valent in theoria ſoni, et quae nunc expoſituri ſumus. Laplacius illa tradit tanquam corollaria ſuae computationis; methodum autem, qua ad illa pervenit, non adjunxit, quapropter omni opera conati ſumus illorum demonſtrationem ipſi eruere, quod tandem nobis contigisſe opinamur.

§. 105. Calor ſpecificus corporis dicitur calorici copia, quae unitati masſae vel voluminis ejus addi debet, ut temperatura uno gradu augeatur. In fluidis elasticis ille ad unitatem voluminis referri ſolet. In his autem duplex est ejus notio. Nam quando temperatura fluidi elastici definita quantitate augenda est, major calorici quantitas illi addi debet, ſi fluidum, conſtanti presſioni ſubjectum, dilatatur dum temperatura ejus increscit; minor vero, ſi pristinum volumen ſervat, ſi v. c. vaſe clauſo continetur; unde patet, calorem ejus ſpecificum utroque in caſu diverſum esſe, et majorem quidem, ſi presſio est conſtans et volumen augetur; minorem vero, ſi, volumine non aucto, presſio fluidi increscit.

§. 106. Sit calor ſpecificus aëris in temperatura t, volumine conſtante, $= c$; et calor ejus ſpecificus, presſione conſtante, $= c'$. Jam vero quaeritur, cognitis c et c', determinare numerum ω graduum, quo temperatura aëris ſubito condenſati augeatur. In ſoni theoria condenſatio γ, et, quod inde oritur, temperaturae incrementum admodum exigua esſe ponuntur, quapropter calores ſpecifici c' et c inter temperaturae limites t et $t + \omega$ conſtantes ſunt.

§. 107.

(1) La Place, Ann. de Chim. et de Phyſ. Tom. III. p. 238.

§. 107. Illud problema sequenti ratione solvi potest. Sit X quantitas calorici, quam in temperatura $t - \frac{(1+0,00375\,t)\gamma}{0,00375\,(1+\gamma)}$ continet volumen aëris $\frac{V}{1+\gamma}$, pressioni p subjectum. Ille aër jam calesiat, primum volumine constante, deinde pressione constante, donec temperatura fiat t.

Si ergo illius temperatura fit $= t$, volumine constante, pressio evadit p. 49. not. 1.)

$$= p\,\frac{1+0,00375\,t}{1+0,00375\left(t-\frac{(1+0,00375\,t)\gamma}{0,00375\,(1+\gamma)}\right)}$$

$$= p\,(1+\gamma)$$

Si contra aëris pressio manet $= p$, volumen ejus in temperatura t fit $= V$.

§. 108. In utroque casu temperatura aëris augetur numero graduum $\frac{(1+0,00375\,t)\gamma}{0,00375\,(1+\gamma)}$; verum in priori casu calor specificus aëris est c, in altero est c'. Ergo calorici quantitates, volumini aëris $\frac{V}{1+\gamma}$ addendae, ut ejus temperatura fiat $= t$, sunt

$$\text{in priori casu} = \frac{c\,V\gamma\,(1+0,00375\,t)}{0,00375\,(1+\gamma)^2}$$

$$\text{in altero casu} = \frac{c'\,V\gamma\,(1+0,00375\,t)}{0,00375\,(1+\gamma)^2}$$

Ergo quantitas calorici, quae continetur volumine aëris V, in temperatura t, et pressione p, est $= X + \frac{c'\,V\gamma\,(1+0,00375\,t)}{0,00375\,(1+\gamma)^2}$

Quantitas vero calorici, quam in eadem temperatura continet volumen aëris $\frac{V}{1+\gamma}$, pressioni $p\,(1+\gamma)$ subjecti, est $= X + \frac{c\,V\gamma\,(1+0,00375\,t)}{0,00375\,(1+\gamma)^2}$

Quapropter, si in temperatura t volumen aëris V, pressioni p subjectum, comprimitur in volumen $\frac{V}{1+\gamma}$, tantum caloricum ex illo evolvitur, quanta est differentia inter valores inventos, i. e. calorici quantitas $\frac{(c'-c)\,V\gamma\,(1+0,00375\,t)}{0,00375\,(1+\gamma)^2}$

§. 109. Illud caloricum evolutum in theoria Laplacii omne impendi censetur ad augendam aëris compressi temperaturam. Hujus autem volumen est $= \frac{V}{1+\gamma}$, idque constans; ergo calor specificus est c. Numerus graduum, quo ejus temperatura addito calorico augetur, cognoscitur dividendo illud caloricum per productum $\frac{cV}{1+\gamma}$ ex volumine et calore specifico, quo facto, ille numerus invenitur esse $= \frac{(c'-c)(1+0,00375\,t)\gamma}{0,00375\,c\,(1+\gamma)}$. Hunc numerum §. 96. litera ω designavimus.

Est autem celeritas soni $= \sqrt{\frac{ga}{b}}\sqrt{(1+x)}$, et $x = \frac{0,00375\,\omega}{(1+0,00375\,t)\gamma}$ (§. 99. 97.), quare, substituto valore ω, et neglecto factore $1+\gamma$ (quoniam γ infinite parva esse censetur), est

$$x = \frac{c'-c}{c}$$

$$\text{et cel. soni} = \sqrt{\frac{ga}{b}}\sqrt{\left(1+\frac{c'-c}{c}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{ga}{b}}\sqrt{\frac{c'}{c}} \qquad (1)$$

§. 110. Caloricum specificum diversorum fluidorum aëriformium, pressione constante, accuratissimis Larochii et Berardi experimentis exploratum est. (2) Illi autem non definiverunt calorem specificum, si volumen constans est. Id solum invenerunt, calorem specificum aëris atmosphaerici augeri, si pressio augetur, sed minori proportione; et uno experimento rationem, quae inter augmentum caloris specifici aëris et augmentum pressionis ipsius adest, determinaverunt. Laplacius, ut ex his rationem $\frac{c'}{c}$ determinet, hypo-

(1) Laplacius l. c. hanc aequationem sequentibus verbis enuntiat: „*La vitesse réelle du son est égale au produit de la vitesse que donne la formule Newtonière, par la racine carrée du rapport de la chaleur spécifique de l'air soumis à la pression constante de l'atmosphère et à diverses températures, à sa chaleur spécifique, lorsque son volume reste constant.*"

(2) De la Roche et Bérard, Annal. de Chim. Tom. LXXXV. p. 72.

pothefin adhibet de quantitate calorici, quam eadem aëris masfa in diverfis temperaturis continet, et inde alterum deducit theorema, nulla iterum demonftratione addita. (1) Antequam autem ipfi illud demonftrare aggredimur, primum praecipua corollaria, quae ex illa hypothefi cofequuntur, exponemus.

§. 111. Ipfa hypothefis haec est: *caloricum, quod eadem aëris masfa, conftanti presfioni fubmisfa, in variis temperaturis continet, est in ratione voluminis ejus.* Si ergo in temperatura o° volumen quoddam aëris V, presfioni conftanti p fubjectum, continet calorici quantitatem A; illud in alia temperatura t, in qua volumen fit $(1 + 0{,}00375\,t)\,V$, continebit calorici quantitatem $(1 + 0{,}00375\,t)\,A$.

§. 112. Calor fpecificus aëris invenitur, fi calorici copia, quae cuidam volumini addita ejus temperaturam uno gradu auget, per ipfum volumen dividitur. Secundum illam vero hypothefin quantitates calorici, quas aër in temperaturis t et $t + 1$ continet, funt $(1 + 0{,}00375\,t)\,A$ et $(1 + 0{,}00375\,(t + 1))\,A$. Earum differentia est $= 0{,}00375\,A$, et quoniam volumen in temp. t est $= (1 + 0{,}00375\,t)\,V$, erit calor fpecificus in presf. conftante p et temp. $t = \dfrac{0{,}00375\ A}{(1 + 0{,}00375\,t)\,V}$

Definiamus nunc calorem fpecificum aëris, alii presfioni q fubjecti. Quod ut fiat, ponamus, volumen aëris V′, presfioni q fubjectum, in temperatura o° continere calorici copiam A′; invenitur eodem prorfus modo:

Calor fpecif. in presf. conft. q et temp. $t = \dfrac{0{,}00375\ A'}{(1 + 0{,}00375\,t)\,V'}$

Defignatis ergo caloribus fpecificis aëris in presfionibus conftantibus p et q per c' et c'', erit in temperatura t.

c′

(1) Laplacius, l. c. „*Si l'on fuppofe, avec plufieurs Phyficiens, que la chaleur „contenue dans une masfe d'air, foumife à une presfion conftante et à des températures diverfes, est proportionnelle à fon volume, (ce qui doit s'écarter peu de la verité;) la racine „carrée précédente devient celle du rapport de la differenee de deux presfions, à la difference des quantités de chaleur que développent deux volumes égaux d'air atmosphérique, foumis refpectivement à ces presfions, en pasfant d'une température donnée à une même température inférieure, la plus petite de ces quantités de chaleur et la plus petite de ces presfions étant prifes pour unités.*"

$$c' = \frac{0,00375\ A}{(1+0,00375\,t)\,V} \qquad c'' = \frac{0,00375\ A'}{(1+0,00375\,t)\,V'}$$

$$\text{unde } \frac{c'}{c''} = \frac{A\,V'}{A'\,V}$$

Quoniam valor $\frac{A\,V'}{A'\,V}$ a temperatura t non pendet, fequitur, *rationem inter calores fpecificos aëris, variis presfionibus fubmisfi, non differre in diverfa temperatura.*

§. 113. Ex hac aequatione porro fit $\frac{A}{A'} = \frac{c'}{c''}\,\frac{V}{V'}$

$$\text{aut } \frac{(1+0,00375\,t)\,A}{(1+0,00375\,t)\,A'} = \frac{c'}{c''}\,\frac{(1+0,00375\,t)\,V}{(1+0,00375\,t)\,V'}$$

Quum autem $(1+0,00375\,t)\,A$ et $(1+0,00375\,t)\,A'$ fint quantitates calorici, quas in temperatura t continent volumina aëris $(1+0,00375\,t)\,V$ et $(1+0,00375\,t)\ V'$, presfionibus p et q fubjecta, fequens lex ex hypothefi, a Laplacio adhibita, deduci poteſt.

Ratio inter quantitates calorici, quas in eadem temperatura continent duo volumina aëris, presfionibus diverfis fubmisfa, producta est ex ratione calorum fpecificorum aëris in illis presfionibus, et ratione voluminum ipforum.

§. 114. In temperatura t aëris volumen $(1+0,00375\,t)\,V$, presfioni p fubjectum, continet calorici quantitatem $(1+0,00375\,t)\,A$ (§. 111.); in temperatura vero $t+t'$ quantitatem $(1+0,00375\,(t+t'))\,A$. Differentia earum, five calorici quantitas, qua temperatura illius aëris numero t' graduum augetur, est $= 0,00375\,t'\,A$. Verum $0,00375\ A = (1+0,00375\,t)\ V\,c'$ (§. 112.), ergo illa quantitas est $=(1+0,00375\,t)\,V\,c'\,t'$. Hinc patet, *quantitatem calorici, qua temperatura aëris t, presfione conftante, numero t' graduum augetur, esfe productam ex hoc numero, atque calore fpecifico et volumine in temperatura t.*

§. 115. His praemisfis, ad demonftrationem theorematis Laplacii pergamus. Hunc in finem nobis proponamus quandam aëris masfam in quatuor conditionibus, in quibus ejus presfio et temperatura differunt, atque quaeramus rationes inter calorici quantitates, quas haec masfa in illis conditionibus continet. Has autem fequentes esfe ponimus.

Pres-

Presſio.	Temperatura.	Volumen. (1)	Caloricum contentum.
p	t	V	U
$(1+\gamma)\,p$	t	$\frac{1}{1+\gamma}\,V$	X
p	$(1+\gamma)\,t+\frac{\gamma}{0{,}00375}$	$(1+\gamma)V$	Y
$(1+\gamma)\,p$	$(1+\gamma)\,t+\frac{\gamma}{0{,}00375}$	V	Z

Notamus, hoc loco γ non deſignare quantitatem admodum exiguam, uti in praecedentibus poſuimus, ſed quamlibet.

§. 116. Quia U et Y ſunt quantitates calorici, quas eadem masſa aëris, aequali presſioni p ſubmisſa, in diverſis temperaturis continet, illae ſunt inter ſe, uti volumina aëris (§. 111.). Idem valet de X et Z, quapropter

$$Y = (1+\gamma)\,U \tag{I}$$
$$Z = (1+\gamma)\,X \tag{II}$$

Sit iterum c calor ſpecificus aëris in presſione p, ſi volumen est conſtans, atque ſint c', c'', calores ſpecifici in presſionibus p et $(1+\gamma)\,p$, ſi presſio est conſtans. Illi calores ſpecifici pertinent ad temperaturam t. His autem poſitis, ratio inter quantitates U et X est (§. 113.)

$$\frac{X}{U} = \frac{c''}{c'}\,\frac{1}{1+\gamma}$$

$$\text{aut}\quad (1+\gamma)\,X = \frac{c''}{c'}\,U \tag{III}$$

Eodem modo est $(1+\gamma)\;Z = \frac{c''}{c'}\,Y$. Quum vero haec aequatio ex prioribus deducatur, nihil novi docet.

Quar-

(1) Volumina, quae eadem masſa aëris in temperaturis t et t' et presſionibus p et p' implet, ſunt inter ſe uti $(1+0{,}00375\,t)\,p'$ ad $(1+0{,}00375\,t')\,p$. Haec lex est corollarium §. 16.

§. 117. Quartam vero aequationem hoc modo conſtituere licet. Si maſſa aëris in prima conditione, in qua preſſio est p, temperatura t, volumen V, calefit, donec temperatura fit $(1+\gamma)\,t + \frac{\gamma}{0,00375}$, et preſſio est conſtans, ejus volumen evadit $(1+\gamma)\mathrm{V}$; ſi vero volumen est conſtans, preſſio fit $(1+\gamma)\,p$. Ergo aëris maſſa aequali temperaturae augmento ex prima in tertiam aut quartam conditionem tranſit, preſſione aut volumine conſtante. Calorici quantitates, quibus illud temperaturae augmentum perficitur, ſunt, in priori caſu, $\mathrm{Y}-\mathrm{U}$, et in altero, $\mathrm{Z}-\mathrm{U}$. Ex §. 114. apparet eſſe

$$\mathrm{Y}-\mathrm{U} = c'\mathrm{V}\left(\gamma t + \frac{\gamma}{0,00375}\right)$$

Praeterea veroſimile est, calorem ſpecificum c aëris, volumine conſtante, non differre in varia temperatura (1), quare

$$\mathrm{Z}-\mathrm{U} = c\mathrm{V}\left(\gamma t + \frac{\gamma}{0,00375}\right)$$

$$\text{ergo}\quad \frac{c'}{c} = \frac{\mathrm{Y}-\mathrm{U}}{\mathrm{Z}-\mathrm{U}} \qquad \text{(IV)}$$

§. 118. Nunc eliminandae ſunt ex his aequationibus quantitates U, X, Y, Z. Si valores Y et Z ex (I) et (II) in (IV) transferimus, habemus

$$\frac{c'}{c} = \frac{\mathrm{U}\gamma}{(1+\gamma)\,\mathrm{X}-\mathrm{U}}$$

Verum ex (III) est $(1+\gamma)\mathrm{X} = \frac{c''}{c'}\,\mathrm{U}$, ergo

$$\frac{c'}{c} = \frac{\gamma}{\frac{c''}{c'} - 1}$$

Po-

(1) Haec hypotheſis nobis viſa fuit admittenda, ut theorema Laplacii poſſit demonſtrari. Inter alios Phyſicos Daltonus eam defendit, et ad ipſa corpora ſolida et liquida extendit; cenſet enim, calorem ſpecificum cujusvis corporis ideo tantum in variis temperaturis differre, quoniam corpus ſimul expanditur, dum temperatura increſcit; quodſi vero non expanderentur corpora, omnium calorem ſpecificum conſtantem fore. Cf. Ejus Syſtem des Chem. Theils der Naturw. Vol. I. Cap. 1.

Ponatur $(1+\gamma)p=q$, erit $\gamma=\frac{q}{p}-1$, et

$$\frac{c'}{c}=\frac{\frac{q}{p}-1}{\frac{c''}{c'}-1} \qquad (V)$$

§. 119. Hac in aequatione p et q ſunt presſiones quaecunque, c' et c'' calores ſpecifici aëris, his presſionibus in temperatura t ſubjecti. Ratio autem $\frac{c''}{c'}$ aequalis est rationi inter quantitates calorici, quae evolvuntur ex duobus voluminibus aequalibus aëris atmosphaerici, presſionibus p et q ſubmisſis, dum eorum temperatura eodem graduum numero imminuitur; quapropter aequatio nostra idem continet theorema, quod pag. 55. Laplacii verbis expoſuimus.

§. 120. Quodſi jam ad Larochii et Berardi experimenta redimus, ex iis videmus, calorem ſpecificum aëris in presſione $1^m,0058$ esſe $=1,2396$, ſi calor ſpecificus ejusdem aëris in presſione $0^m,7405$ unitati aequatur. (1) Habemus ergo $q=1,0058$, $p=0,7405$, $c''=1,2396$, $c'=1$, ideoque $\frac{q}{p}=1,3583$, et

$$\frac{c'}{c}=\frac{0,3583}{0,2396}=1,4954$$

$$\sqrt{\frac{c'}{c}}=1,2229$$

et quum in temp. o° ſit $\sqrt{\frac{ga}{b}}=279^m,29$, erit

Vera ſoni celeritas in temp. o° $=\sqrt{\frac{ga}{b}}\sqrt{\frac{c'}{c}}=341^m,54$

Hic valor tam parum differt a celeritate obſervata $333^m,7$, ut differentia facile erroribus in determinando calore ſpecifico fluidorum gazformium tribui posſit. Laplacius ergo hac ratione plane evictum esſe cenſet, caloricum, per ſubitam aëris compresſionem evolutum, ſolam esſe cauſam, cur calculus mathematicus veram ſoni celeritatem non indicaverit.

§. 121. Difficultatem autem hac in re animadvertimus, quae reticenda non vi-

(1) De la Roche et Bérard, l. l. Sect. V. p. 132.

videtur. In aequatione (V), qua Laplacii theorema analytice exprimitur, ratio $\frac{c''}{c'}$ est conſtans in quavis temperatura, ſi presſiones p et q ſunt conſtantes. (§. 112.) Praeterea illud theorema non poteſt demonſtrari, niſi c quoque in omni temperatura ſit conſtans, quod inde patet, quia ex aequatione (V) conjuncta cum aequationibus (I), (II), (III), quae ſola hypotheſi, a Laplacio adhibita, nituntur, aequatio (IV) ſequitur; haec vero esſe non poteſt, niſi c ſit conſtans. Quoniam ergo quantitates c, $\frac{q}{p}$ et $\frac{c''}{c'}$ in aequatione (V) conſtantes ſunt, quantitas c' quoque conſtans ſit oportet, quaecunque ſit temperatura t. Verum antea vidimus, valorem c' in diverſa temperatura differre; eſt enim $= \frac{0{,}00375\,A}{(1+0{,}00375\,t)\,V}$ (§. 112.), atque A et V ſunt quantitates conſtantes. Ergo ad abſurdum pervenimus, demonſtrantes, c' esſe conſtantem in diverſa temperatura, et ſimul, eam esſe variabilem.

§. 122. Hypotheſis ergo, cui Laplacius alterum ſuum theorema ſuperſtruxit, non perfecte veritati conſentanea esſe videtur. Ex ipſis autem Laplacii verbis apparet, illum huic hypotheſi plenam fidem non tribuere, ſed tantum opinari, eam parum a vero recedere, quare ſummi viri ſententia integra manet. Nam ſimodo in hypotheſi, qua nititur calculus mathematicus, aliquis ſit a vero recesſus, plerumque in calculo ad abſurdum pervenire posſumus, quamvis fieri posſit, ut, ſi ille recesſus ſit exiguus, theoremata, quae ex tali hypotheſi conſequantur, vero quam proxima ſint.

C A

CAPUT SEXTUM.

EXPERIMENTA DE CELERITATE SONI IN ALIIS FLUIDIS ELASTICIS, CUM THEORIA SONI COMPARATA.

§. 123. Aër atmosphaericus prima fronte unicum esse videtur fluidum elasticum, in quo soni celeritas experimentis determinari possit. Praeter illum enim nullibi magna alicujus fluidi gazformis copia invenitur. Arte autem spatium, quod satis longum sit, ut experimenta de soni celeritate in eo instituantur, ejusmodi fluido impleri nequit. Cum ergo hac in re methodus, quae directo ad scopum tendat, adhiberi nequeat, acutissimus Chladni, cui doctrina Acustices tot et tanta inventa debet, indirectam proposuit viam, qua illa celeritas in omnibus fluidis elasticis, in ipsis quoque vaporibus, inveniri possit.

§. 124. In theoria tuborum musicorum, quam Lagrangius, Daniel Bernouilli et Eulerus (1) exposuerunt, docemur, aërem in tubo musico, ad utramque partem aperto, eodem tempore semel vibrare, quo sonus in aëre per spatium, longitudini tubi aequale, propagatur. Ergo numerus vibrationum, quas aër in tubo tempore unius minuti secundi peragit, invenitur dividendo spatium,

(1) La Grange, Miscell. Taurin. 1759. Tom. I. II. D. Bernouilli, Mém. de l'Acad. de Par. 1762. p. 431. Euler, de motu aëris in tubis. Comm. Petrop. Nov. 1771. Tom. XVI. p. 281.

tium, per quod ſonus in aëre intra idem tempus propagatur, per longitudinem tubi. Idem de ceteris fluidis elasticis valet. Quodſi ergo in eodem tubo diverſa fluida elastica deinceps vibrant, erunt numeri vibrationum, quas illa fluida in tubo tempore unius minuti ſecundi peragunt, in ratione directa ſpatiorum, quae ſonus eodem tempore in illis fluidis percurrit, i. e. in ratione directa celeritatum, quibus ſonus in illis propagatur. Quum autem tonus, quem edit tubus muſicus, a numero vibrationum pendeat, ratio celeritatum ſoni in aëre et aliis fluidis elasticis cognoscitur ex ratione tonorum, quos edit idem tubus muſicus, ſi illa fluida ſeorſim in eo vibrant.

§. 125. Apparatus, quo Chladni uſus est ad hos tonos producendos, ſimilis est illi, quem Fig. 4. delineavimus. Nimirum vas recipiens A et adjunctam veſicam E primum in cupa hydropneumatica fluido quolibet gazformi replebat, deinde, preſſa veſica, illud per tubum organicum B adigebat, qui, hac ratione inflatus, tonum ſatis diſtinctum edebat. Hunc tonum accurate notabat Chladni, et, quum notus illi esſet tonus, quem tubus, aëre inflatus, ederet, ex ratione vibrationum, quibus illi toni perficiuntur, rationem celeritatis ſoni in aëre et fluido elastico adhibito definiebat.

§. 126. Vidimus §. 52., omnes Mathematicos, qui ante Laplacium de ſoni propagatione in fluidis elasticis egerunt, ejus celeritatem aequalem invenisſe formulae $\sqrt{\frac{g\,a}{b}}$, unde ſequebatur, hanc celeritatem in diverſis fluidis elasticis esſe in ratione ſubduplicata elasticitatis ſpecificae. Chladni autem ſua experimenta huic theorematI repugnare invenit; toni enim, qui in variis fluidis producebantur, admodum diverſi erant ab illis, qui juxta theoriam audiri debuisſent; quapropter opinatur, praeter elasticitatem ſpecificam illorum fluidorum esſe chemicam quandam proprietatem, nondum definitam, quae celeritatem propagationis ſoni in illis mutet. Hanc ſententiam §. 84. jam attigimus.

§. 127 Similia experimenta postea inſtituerunt Phyſici Angli, Kerby et Merrick, aliam tamen rationem ſequentes. (1) Nimirum ope antliae pneumaticae aërem ex vaſe recipiente exhauriebant, et deinde illud fluido quolibet elas-

(1) Kerby et Merrick in Nicholſon's Journ. of Natur. Philoſ. Decemb. 1810. Gilbert's Annal. Neue Folge. Tom. IX. p. 438.

elastico implebant. Huic vasi immissa erant tubus organicus et follis, congruo apparatu ita conjuncta, ut, moto folli, tubus inflaretur fluido elastico, quod in vase recipiente esset. Haec autem experimenta non valde accurate aut instituta aut adnotata fuisse videntur.

§. 128. Majoris momenti est Benzenbergii de eodem argumento labor. (1) Hic eadem fere ratione experimenta sua instituit, ac Chladni; maximam autem in determinandis tonis tubi curam posuit, et quae observavit, exactissime retulit. Praeterea non tantum rationem tonorum in variis fluidis permanenter elasticis definire studuit, sed etiam inquisivit, quid contingat, si tubus vapore aqueo infletur. Ex his experimentis idem effecit, quod priores observatores jam animadverterant, rationem celeritatum soni in variis fluidis elasticis differre ab ea, quam theoria indicat. In solo vapore aqueo celeritas soni, quam experimentis suis inveniebat, aequalis erat valori ejus, juxta theoriam computati.

§. 129. Quamvis autem in eo conveniant observatores, experimenta hac in re theoriae repugnare, tamen admodum differunt in definienda ipsa soni celeritate in variis fluidis elasticis, quod ex sequenti tabula optime intelligitur, in qua adscriptae sunt soni celeritates in temperatura o°, ex illorum experimentis deductae, posita celeritate soni in aëre atmosphaerico = 333,7 metris.

	Chladni.	Kerby et Merrick.	Benzenberg.
in gaz oxygenio	304	318	306, 1 metr.
— — azoto	315	351	336, 3
— — hydrogenio	670 ad 800	708	667, 4
— — acid. carb.	265	281	277, 5
— — nitroso	315	375	—

§ 130. Praecipua hujus discriminis causa videtur tribuenda difficultati, fluida elastica tali ratione parandi, ut prorsus pura sint, et nulla alia fluida elastica cum iis sint mixta. Illud enim non facile cuiquam contingit, nisi qui omnibus admini-

cu-

(1) Benzenberg in Gilbert's Annal. Neue Folge. Tom. XII. p. 12. et 30.

culis chemiae recentioris ſit inſtructus, et admodum prudenter in opere procedat. Quum ergo mihi, benevolentia Viri Clarisſimi N. C. de Fremery, optima praeberetur occaſio, illa fluida in laboratorio chemico hujus Academiae omnia quantumpote pura praeparandi, hanc praetermittendam esſe non duxi, ſed allata experimenta omni diligentia repetere, et, quae deficiebant, ſupplere mihi propoſui. Qua in re peragenda omni opera me quoque adjuvit Vir Clarisſimus G. Moll, qui non tantum monitis ſuis ſusceptum laborem promovere, ſed etiam plerisque experimentis ipſe adesſe non recuſavit.

§ 131. Triplex methodus, qua fluida elastica parari debent, triplicem apparatum, ad inſtituenda experimenta aptum, requirebat; unum pro fluidis, aqua non ſolubilibus; alterum pro illis, quae aqua ſolvuntur et ideo; ſupra mercurium colligi debent; tertium pro vaporibus.

Primum apparatum exhibet Fig. 4. Conſtat ex vaſe recipiente A, cujus collo adjungitur veſica E. Illo autem apparatu ita utebamur. Recipiens A primum, clauſo epistomio C, in cupa hydropneumatica fluido quovis elastico replebatur, dein adjungebatur veſica E, machinae pneumaticae ope aëre exhausto; tum vero, apertis epistomiis, recipiens infra aquam deprimebatur, ut presſione aquae fluidum elasticum in veſicam intraret; qua repleta, denuo replebatur ipſum recipiens. Tandem vero, presſa veſica, fluidum cogebatur transire per tubum B, collo campanae immisſum, unde tonus oriebatur, debilis quidem, qui tamen rite distingui poterat.

§ 132. Si fluida, quae examini ſubmittere volebamus, aqua ſolubilia erant, utebamur apparatu, in Fig. 5. delineato. Conſtat ille recipiente A, clauſa extremitate deorſum, aperta ſurſum poſitis. Haec circumdatur cingulo cupreo F, quocum cochleae ope discus cupreus conjungitur, qui vas recipiens a ſuperiore parte claudit. In illo disco tria ſunt foramina. Per unum penetrat tubus barometricus I, presſionem fluidi in recipiente indicans. Alterum, epistomio G inſtructum, per tubum H communicat cum machina pueumatica, eo fine, ut aer ex recipiente extrahi posſit. Per tertium tandem via patet ex veſica E in tubum muſicum B, eadem ratione ac in Fig. 4.

§. 133. Hunc autem apparatum inverſo ordine fluido elastico replebamus. Nam primum veſica E replebatur, et tum cum recipiente conjungebatur, ex quo

jam

jam omnis aër antliae pneumaticae ope exhaustus erat, quapropter, apertis epistomiis C et D, fluidum elasticum ex vesica in recipiens transgrediebatur. Hoc facto, iterum replebatur vesica, donec hac ratione et recipiens et vesica repleta essent. Quum autem pleraque fluida elastica, quae ab aqua facile absorbentur, acris sint indolis, brevi vesicas, quibus continebantur, corrodebant, aut per earum poros penetrabant, unde magna oriebatur in instituendis his experimentis difficultas. Melius succedebant, adhibitis vesicis bovinis, quarum utraque superficies vernice, ex succino parata, inuncta, et deinde bene siccata erat. Ipse quoque tubus illis fluidis arrodebatur; quum vero non diu in mutuo contactu relinquerentur, eodem tubo omnia nostra experimenta absolvere potuimus.

§. 134. Figura 6. apparatum repraesentat, quo toni in variis vaporibus producebantur. A est globus metallicus, cui immittebatur fluidum explorandum. Illud ope lampadis C calefiebat, vapores autem adscendentes nullam aliam viam inveniebant, nisi per tubum B. Hic circumdabatur cylindro vitreo D, qui disco ligneo E, margine eminente instructo, insistebat. In cylindro simul ponebatur thermometrum, ut temperatura vaporis in tubo cognosceretur. Superior apertura cylindri partim tegebatur, ita tamen ut vapori exitus pateret. Tonus, quem vapor in tubo producebat, non definiebatur, antequam omnis aër ex cylindro expulsus erat.

§. 135. In his experimentis summi est momenti, ut vis, qua fluidum elasticum in tubum impellatur, constans sit. Quamvis enim facile sit, fluidi impulsum ita dirigere, ut tonus sit infimus sive primus eorum, quos tubus edere potest, neque tonus, ab illo octavus, producatur; tamen experientia docet, primum illum tonum aliquantum varium esse pro varia magnitudine vis, qua inflatur tubus, quapropter experimenta, in diversis fluidis facta, comparari nequeunt, nisi illa vis in omnibus sit eadem. Huic autem conditioni ut satisfieret, vesica non majori vi premebatur, quam quae distinctum produceret sonum, quo audito, pressio non ulterius intendebatur. Eodem vero modo agere non potuimus in vaporibus, quapropter tonus, his productus, aliquantum differebat pro varia intensitate, qua fluidum ebulliebat; huic autem incommodo quantum pote obviam ivimus cavendo, ne nimia vi ebulliret fluidum, et tonum tum demum determinando, quando ille modicus esset et diu sibi aequalis.

 §. 136.

§. 136. Ad determinandos tonos usi sumus auxilio Viri Doctissimi J. C. Schröder, A. L. M. Ph. Doct., rei musicae peritissimi, cui pro insigni benevolentia, quam in instituendis his experimentis ab eo expertus sum, publice gratias ago. Nonnullis etiam adfuit J. Batz, ingeniosus organorum musicorum hac in urbe artifex. Tonus, quem tubus edebat, in monochordio definiebatur longitudine chordae, quae tonum, priori unisonum, edebat. Quum autem chorda semper esset eadem, et aeque tensa, haec longitudo erat in ratione inversa numeri vibrationum, quibus tonus peragebatur. Hac ratione tonus plerumque repetitis vicibus definiebatur, et media longitudo adnotabatur; raro autem fiebat, ut diversae longitudines centesima parte a se invicem differrent. Cognito tono tubi in fluido elastico, statim tonus in aëre atmosphaerico definiebatur, quem in finem apparatum eodem modo aëre, ac prius alio fluido, implebamus. Deinde longitudines chordae, his tonis convenientes, exacte metiebamur. Si autem vapores adhibiti fuerant, tonus tubi in aëre solo oris flatu producebatur.

§. 137. Sequenti tabula experimenta, a nobis instituta, continentur. In singulis experimentis longitudinem chordae, quae tonum in aëre definiebat, unitati aequalem posui. Adjunxi, qualis ex illis inveniatur esse celeritas soni in singulis fluidis elasticis, in usum adhibito theoremate, §. 124. exposito, quod docet, illas celeritates esse in ratione directa vibrationum, quas fluida in eodem tubo aequali tempore peragunt. Vibrationum autem numeri sunt in ratione inversa longitudinum chordae; quare, cum celeritas soni in aëre cognita sit (§. 74.), illa in aliis quoque fluidis elasticis ex ratione longitudinum chordae definiri potest. — Hac in re nulla ratio habenda est temperaturae, in qua experimenta facta sunt, si de fluidis permanenter elasticis agitur, quoniam in singulis experimentis aër et fluidum adhibitum aeque calida erant. Id vero non contingebat, quando vapores adhibebantur, quare in his experimentis longitudines chordae ad eandem temperaturam reducendae sunt. Sint ergo l et l' longitudines chordae, tonis in aëre et vapore productis convenientes; t, t' temperatura aëris et vaporis in tubo. Si, uti theoria docet, celeritates soni in eodem saltem fluido sunt in ratione subduplicata elasticitatis specificae, longitudines chordae, convenientes tonis, qui in aëre et vapore producerentur, si utriusque temperatura esset $0°$, sunt $l\sqrt{(1+0{,}00375\, t)}$ et $l'\sqrt{(1+0{,}00375\, t')}$; celeritates autem soni sunt inter se in ratione inversa illarum longitudinum, unde

Ce-

$$\text{Celer. soni in vapore} = 333^{m},7 \cdot \frac{l\sqrt{(1+0{,}00375\,t)}}{l'\sqrt{(1+0{,}00375\,t')}}$$

Ultimo tandem loco celeritates indicavi, quibus sonus in fluidis elasticis propagetur, si illae ponantur esse in ratione subduplicata elasticitatis specificae eorum.

Fluida elastica,	Parandi ratio.	Temperatura.	Longit. chordae.	Celeritas soni in o°, computata	
A. *Supra aquam collecta.*				ex longit. chordae.	ex elast. specif.
Gaz oxygenium.	ex peroxyd. mangan.	15°, 6 C	1, 054	316, 6 metr.	317, 7
— azotum.	combust. phosphori.	12, 8	0, 987	338, 1	339, 0
— hydrogenium.	ex zinco et ac. sulf.	16, 1	0, 365	914, 2	1233, 3
— acid. carbonicum.	ex marmore et ac. sulf.	14, 4	1, 212	275, 3	270, 7
— oxydum carbonis.	ex creta et zinco.	10, 6	1, 053	316, 9	341, 1
— protox. azoti.	ex nitrate ammon.	17, 3	1, 186	281, 4	270, 6
— deutox. azoti.	ex cupro et ac. nitric	8, 0	1, 077	309, 8	327, 4
— hydrog. percarb.	ex alcoh. et ac. sulf.	10, 0	1, 050	317, 8	337, 4
B. *Supra mercurium collecta.*					
Gaz acid. hydrosulf.	ex sulfur. ferri et ac. sulf.	10, 0	1, 047	318, 7	305, 7
— — sulfurosum.	ex mercurio et ac. sulf.	8, 0	1, 456	229, 2	229, 2
— — hydrochloric.	ex mur. amm. et ac. sulf.	8, 9	1, 079	309, 3	298, 8
— ammoniacum.	ex mur. amm. et calce.	13, 3	0, 857	389, 4	432, 0
C. *Vapores.*					
Vapor aquae.	temper. vaporis = 54°, 0	10, 6	0, 830	369, 6	422, 6
— alcoholis.	— — = 48, 0	14, 0	1, 090	289, 1	262, 7

§. 138. Si experimenta aliorum Physicorum, §. 129. allata, cum nostris conferimus, haec ab illis iterum multum differre videmus. Unde saltem patet, hoc experimentorum genus tam facile non esse, ac Benzenbergius sibi persua-

 de-

debat, putans, celeritatem soni in fluidis elasticis hac ratione aeque accurate posse determinari, ac in ipso aëre atmosphaerico. Id quidem verum foret, si sola inveniretur difficultas in determinandis tonis, tubo editis; in nostris enim experimentis quoque observavimus, illos facile in monochordio definiri posse. Verum multo difficilius est, fluida elastica perfecte pura ex miscelis chemicis evolvere, et ea in ipsis experimentis pura servare; quam difficultatem quum Benzenbergius non animadverterit, non multum quoque hac in causa ejus experimentis fidendum esse videtur. Illius autem difficultatis conscii, in nostris experimentis debitas cautelas adhibere studuimus, ut fluida illa quam purissima acquireremus, quamobrem confidimus, ea, quae invenimus, non multum a vero recedere. Illis vero experimentis, quibus toni, in vaporibus producti, definiti sunt, minorem fidem habemus quam reliquis; primum, quia impetus, quo vapor in tubum impellebat, nimis varius erat; deinde, quia temperatura ipsius vaporis in tubo non bene erat cognita; thermometrum enim, prope tubum positum, nunquam eum gradum indicabat, quo ebullit fluidum adhibitum; ipsi autem tubo thermometrum immitti non poterat, quare non constabat, num vapor in tubo aeque calidus esset ac ille, qui reliquum cylindrum vitreum implebat. Quum porro toni in vaporibus aetheris sulfurici et olei therebinthinae, quos etiam experimento subjecimus, non satis distincti essent, eos non adnotare, quam falsa narrare maluimus.

§. 139. Comparatis autem valoribus celeritatis soni in singulis fluidis elasticis, quos tum ex longitudine chordae in nostris experimentis, tum ex elasticitate specifica illorum fluidorum computavimus, apparet, illos valores interdum sibi admodum propinquos esse, in plerisque autem fluidis notabili quantitate differre; quod quidem discrimen in nonnullis tantum est, ut experimentorum erroribus tribui nequeat. Neque etiam vapor aqueus, quo priora fluida elastica saturata erant, hac in re multum facit. Si enim juxta §. 18. densitatem specificam illorum, quando humida sunt, calculo definimus, illam parum a densitate siccorum differre videmus. Vera autem discriminis causa in eo sita est, quod theoreticae propositiones, quae ad computandum utrumque celeritatis valorem adhibentur, omni vitio immunes non sunt. (1)

§. 140.

(1) Mirus est Benzenbergii error in explicanda hac re, qui credit, Newtonum qui-

§. 140. Primum quidem videndum est de theoremate, quod §. 124. proposui, et quod rationem celeritatum soni in fluidis elasticis ex ratione tonorum, quos idem tubus, illis inflatus, edit, determinare docet. Illud theorema ideo admitti non potest, quoniam solita theoria tuborum musicorum, qua illud nititur, non prorsus cum experientia convenit. Namque in hac theoria totum orificium, quo tubus inflatur, apertum esse censetur; verum in tubis musicis, quales revera adhibentur, parva tantum rima adest, adeoque orificium non est prorsus apertum, sed partim clausum. Vibrationes sonorae in tubo produci nequeunt, nisi aër vel aliud fluidum elasticum per parvam aperturam in tubum adigatur; hac autem ratione in tubis musicis prima aëris strata non tota, sed partim tantum agitantur, quare motus in anteriore tubi parte inaequalis evadit, et non amplius convenit cum theoria, in qua aequabilis esse ponitur.

§. 141. Dan. Bernouilli, qui hanc observationem primus protulit, eam non tantum ratione, sed experimentis quoque confirmavit. Ex iis vero efficitur, tonum tubi, solita ratione inflati, graviorem esse tono, quem juxta theoriam edit idem tubus, i. e. tubum breviorem revera eundem tonum producere, qui juxta theoriam in tubo longiore producitur. Simul autem Bernouilli docuit, quomodo inveniri possit vera longitudo tubi longioris, qui, si ea ratione inflari censetur, quam ponit theoria, illum tonum edat. (1)

§. 142. Nulla autem ratio est, cur credamus, recessum a theoria, qui oritur ab inaequabili motu primorum stratorum fluidi, tubo contenti, in omnibus fluidis eundem esse. Quodsi ergo idem tubus aëre, et alio fluido elastico inflatur, fieri possit, ut longitudo, quam tubus juxta theoriam habere debeat, ut tonum, in aëre productum, edat, diversa sit a longitudine tubi, qui juxta theoriam tonum, in altero fluido productum, edit. Ergo hae longitudines praevio experimento sunt determinandae, antequam ex tonis, quos idem tubus musicus in

quidem demonstrasse, celeritates soni esse in ratione subduplicata elasticitatum specificarum, verum non constare, num elasticitates specificae sint in ratione inversa densitatum specificarum. In hunc errorem certe non incidisset Benzenbergius, si aut ipsum Newtonum in prop. 48. Libr. II. Principiorum adiisset, aut ad formulam $\sqrt{\frac{ga}{b}}$ attendisset, qua soni celeritas analytice exponi solet.

(1) D. Bernouilli, Mém. de l'Acad. de Paris 1762. p. 456. §. 29. 30.

in variis fluidis elasticis edit, celeritates soni in illis possint determinari, unde patet, methodum has celeritates computandi, §. 124. propositam, accuratam non esse, sed sequenti ratione esse emendandam.

§. 143. Sit c celeritas soni in aëre atmosphaerico, n numerus vibrationum toni, quem tubus aëre inflatus edit, l longitudo tubi, qui juxta theoriam illum tonum producit, c', n', l', quantitates analogae, si adhibetur fluidum elasticum. Quantitates l et l', uti diximus, praevio experimento cognitae esse censentur. His positis, est

$$n = \frac{c}{l} \qquad n' = \frac{c'}{l'}$$

$$\text{unde } c' = \frac{n' l'}{n l} c$$

Si $l = l'$, uti §. 124. ponitur, celeritates soni c et c' sunt inter se, uti numeri vibrationum n et n'; quae autem ratio pro vera adhiberi non potest, nisi prius aequalitas quantitatum l et l' experimentis definita est.

§. 144. Theoriam tuborum musicorum recentius experientiae magis analogam reddidit Clar. Poisson. (1) Mathematici enim, qui eum praegressi fuerant, problema de motu aëris in tubis sequenti ratione aggrediebantur. Aërem, tubo contentum, initio motus aliqua de causa a statu aequilibrii recessisse, dein autem sibi relictum fuisse ponebant, et ex illo motu initiali definire studebant, quali motu aër in tubo post tempus quodcunque agitetur. Praeterea, ut functiones arbitrarias, in aequatione integrali hujus problematis obvias, determinare possent, ex hypothesi statuebant, aërem in extremitatibus tubi apertis nullam condensationem aut dilatationem in motu subire; in extremitatibus clausis nullam ejus esse celeritatem. Ex illa vero theoria sequebatur, oscillationes fluidi sibi mutuo sine fine succedere, et fluidum numquam desinere in tubo eadem vi moveri, et tonum producere; id autem experientiae repugnat, quae docet, tonum, inflando tubo musico productum, brevi non amplius audiri, si tubus sibi relinquitur, unde patet, vibrationes fluidi in tubo brevi quoque ita imminui, ut sensibus non amplius pateant. Hujus rei causam Poissonus ex eo repetit, quod in

(1) Poisson, Mém. de l'Institut. 1817. Tom. II. p. 305.

in extremitatibus apertis aut claufis tuborum muficorum condenfationes vel celeritates fluidi non funt plane nullae, quales esfe ponit illa theoria.

§. 145. Quum autem experientia ostendat, tonum tubi mufici non esfe continuum, nifi tubus continuo infletur, i. e. nifi motus fluidi, in tubo vibrantis, promoveatur caufa, quae in illud agere non definat, facile patet, vibrationes fluidi multo minus pendere a ftatu ejus initiali, quam a caufa illa perpetuo agente. Quare Poisfonus problema fequenti ratione folvendum fibi propofuit. Celeritatem fluidi in orificio, quo inflatur tubus, quovis temporis momento cognitam esfe ftatuit, et eam defignat functione periodica temporis, cujus autem formam non definit; ex hac vero functione celeritatem et denfitatem fluidi in reliquo tubo deducit. (1) Hac ratione invenit, vibrationes fonoras fluidi elastici in tubo non adeo definitas esfe, quam in priori theoria esfe inveniebantur, fed admodum varias esfe posfe illarum fpecies pro varia ratione, qua infletur tubus, ita quidem, ut ratio celeritatum foni in variis fluidis elasticis definiri prorfus nequeat ex ratione tonorum, quos idem tubus, illis inflatus, edat, nifi antea methodo Bernouillii determinetur vis, quam modus inflandi in producendum tonum habeat, adeoque pro fingulis fluidis elasticis inveniatur longitudo tubi, qui eundem edat tonum, fi motus fluidi in eo prorfus congruus fit cum motu, quem vetus theoria esfe pofuit.

§. 146. Praeterea vero falfo ftatuitur, veram rationem inter celeritates foni in aëre et aliis fluidis elasticis eandem esfe atque rationem fubduplicatam elasticitatum fpecificarum. Ex iis enim, quae capite praecedente attulimus, patet, in definienda celeritate foni fimul rationem habendam esfe mutatae per fubitas compresfiones et dilatationes temperaturae aëris, quam ob caufam illa celeritas non est $= \sqrt{\frac{ga}{b}}$, fed $= \sqrt{\frac{ga}{b}(1+\varkappa)}$ (§. 99.). Quantitas autem $\varkappa$, quae a mutata temperatura pendet, diverfa esfe potest in diverfis fluidis elasticis. Sit jam c celeritas foni in aëre, ga ejus presfio (§. 11.), b denfitas, $\varkappa$ quantitas, a mutata temperatura pendens; et fint $c', ga', b', \varkappa'$, quantitates analogae in alio fluido elastico, erit

$$c = \sqrt{\frac{ga}{b}(1+\varkappa)} \qquad c' = \sqrt{\frac{ga'}{b'}(1+\varkappa')}$$

Si

(1) Poisfon, l. c. §. 12, 13.

Si porro β et β' ſunt denſitates aëris et alterius fluidi elastici in temperatura 0° et presſione $0^m,76$; t temperatura aëris, t' temperatura fluidi elastici; eorum denſitates b et b' in illis temperaturis t, t' et presſionibus ga, ga' ſunt juxta §. 16.

$$b = \frac{a\beta}{0^m,76\,(1+0,00375\,t)} \qquad b' = \frac{a'\beta'}{0^m,76\,(1+0,00375\,t')}$$

quibus valoribus ſubſtitutis in praegresſis aequationibus, est

$$c = \sqrt{\frac{0^m,76\,(1+0,00375\,t)\,g}{\beta}(1+\varkappa)} \qquad c' = \sqrt{\frac{0^m,76\,(1+0,00375\,t')\,g}{\beta'}(1+\varkappa')}$$

$$\text{hinc } \frac{c'}{c} = \sqrt{\frac{(1+0,00375\,t')(1+\varkappa')\beta}{(1+0,00375\,t)(1+\varkappa)\beta'}}$$

Quando temperatura utriusque fluidi eadem est, fit $t = t'$, unde

$$\frac{c'}{c} = \sqrt{\frac{\beta\,(1+\varkappa')}{\beta'(1+\varkappa)}}$$

Hac in formula quantitas $\frac{\beta}{\beta'}$ est ratio inverſa denſitatum ſpecificarum ſive ratio directa elasticitatum ſpecificarum. Quare celeritates ſoni non ſunt in ratione ſubduplicata elasticitatum ſpecificarum, niſi quantitates $\varkappa$ et $\varkappa'$ mutuo aequales ſunt; id autem non valde veroſimile est.

§. 147. Methodus, qua, cognito calore ſpecifico fluidi elastici, presſione conſtante et volumine conſtante, quantitas $\varkappa$ determinetur, §. 109. expoſita est. Deficiunt autem hucusque accurata experimenta de calore ſpecifico fluidorum elasticorum, volumine conſtante. Alia methodus, hanc quantitatem in aliis fluidis elasticis ex ejus valore in aëre (§. 100.) determinandi, ex illo experimentorum genere, quod hoc capite deſcripſimus, peti posſit. Nam ſi antea definitae ſunt longitudines l et l', est (§. 143.)

$$\frac{c'}{c} = \frac{n'l'}{nl}$$

quare, ſi toni in aëre et altero fluido in eadem temperatura producti fuerint, erit

$$\frac{n'l'}{nl} = \sqrt{\frac{\beta\,(1+\varkappa')}{\beta'(1+\varkappa)}}$$

un-

$$\text{unde } 1 + \varkappa' = (1 + \varkappa) \frac{\beta' n'^2 l'^2}{\beta n^2 l^2}$$

Si autem temperatura aëris et alterius fluidi non fuerit eadem, ſed in aëre fuerit t, in altero fluido t', erit

$$\frac{n' l'}{n l} = \sqrt{\frac{(1 + 0,00375\, t')\ (1 + \varkappa')\beta}{(1 + 0,00375\, t)\ (1 + \varkappa)\beta'}}$$

$$\text{unde } 1 + \varkappa' = (1 + \varkappa) \frac{(1 + 0,00375\, t)\ \beta' n'^2 l'^2}{(1 + 0,00375\, t')\ \beta n^2 l^2}$$

§. 148. Tempus, quod ad conſcribendam hanc disſertationem ſtudiorum meorum ratio mihi concesſit, non ſivit, allatis experimentis illa addere, quibus ſecundum agendi rationem Bernouillii tuborum longitudines liberentur ab omni efficacia modi, quo tubi inflantur. Haec autem experimenta, quibus ſolis et celeritates ſoni in fluidis elasticis, et quantitates calorici, in propagatione ſoni per illas evolutae, definiri posſunt, ut ab alio et peritiore Phyſico inſtituantur, vehementer opto.

* *

*

T H E S E S.

I.

Ut rerum externarum attributa ad ſpatium, atque ad materiam ſive maſſam, quae ſpatium complet, ita rerum internarum attributa ad tempus, atque ad intenſionem, ſive gradum vigoris referenda ſunt. Quatenus autem ad rerum externarum perceptionem ſenſus internus requiritur, tempus etiam ipſis est tribuendum.

II.

Metaphyſica aut animi aut corporum toto coelo differt a Phyſica eorum rationali.

III.

Senſum externum prius et facilius excoli, quam ſenſum internum, id etiam ex hoc colligi posſit, quod fere in omnibus linguis vocabula, res externas deſignantia, translata ſunt ad res internas; quod poëſis prius apud gentes exſtitit, quam proſa oratio; quod omnes fere antiqui philoſophi animum corpus eſſe existimarunt.

IV.

Hypotheſes phyſiologicae de tenſione, oſcillatione nervorum, de fluido nerveo etc., tantum explicare posſunt motum inter partes corporis, non vero id, quod ſummi momenti est, quomodo ex motu corporis animi mutatio, atque ex animi mutatione corporis motus oriatur. Ita mutatio nervorum, orta ex impulſu in illos, toto genere disjuncta est a ſenſu, ex hac ipſa mutatione oriundo.

V.

V.

Difficile est, eos, qui animo ſedem quandam, aut locum, quo incluſus ſit, in corpore tribuunt, non existimare animum esſe corpus. Alia tamen res est, indicare locum corporis, in quo praecipua et primaria actio mentis appareat.

VI.

Quamvis inter galvanica et electrica phaenomena multum ſit discriminis, tamen illa ex actione unius ejusdemque principii commode explicari posſunt.

VII.

Analogia inter propagationem ſoni et lucis optimum praebet argumentum, quo Newtoni *theoria de emisſione lucis impugnetur. Quare potius* Hughenii *ſententiam amplectimur, qui lucem ex vibrationibus fluidi elastici tenuisſimi, per ſpatia coelestia disperſi, oriri ſtatuit.*

VIII.

Utilisſimae ſunt obſervationes meteorologicae, quae in variis Europae locis ſumma cura inſtituuntur. Ex iis enim ſolis meteorologiae progresſus futuros ſperare posſumus. Errant igitur quam maxime, quicunque illas obſervationes parvi faciunt.

IX.

Aërolithos non in atmosphaera nostra produci, ſed originis cosmici esſe, vero ſimile est.

X.

Ut chlorici principii ſimplicitatem experimenta docere videntur, ita illa ſimplicitas reliquis phaenomenis chemicis non repugnat.

XI.

Doctrina de proportionibus determinatis, quibus elementa corporum chemica inter ſe junguntur, ſolidisſimum chemiae fundamentum est exhibitura, illamque doctrinam mathematicis principiis ſuperſtrui posſe evidenter demonſtrat.

XII.

XII.

Gaz acidum carbonicum, aqua ſolutum, est praecipuum plantarum nutrimentum. Illud in plantis in ſua principia ſolvitur, oxygenii pars ex plantis expellitur, carbonicum praecipue ſolidam earum materiem auget.

XIII.

Systemata botanica artificialia, in primis Linnaeanum, *ad dignoscendas; methodus vero naturalis ad cognoscendas plantas magis valet.*

XIV.

Definitione Kantiana, *corpus organicum esſe ejusmodi corpus, in quo omnia ſint ſimul et fines et media, illud optime distinguitur a corpore non organico.*

XV.

Corporum autem organicorum duo regna, animale et vegetabile, gradibus adeo exiguis ad ſe invicem accedunt, ut eorum limites conſtitui hactenus nullo modo potuerint.

XVI.

Corpora organica ſimpliciora per veram generationem aequivocam produci, recentioribus obſervationibus ſatis probabile est. Quomodo autem ipſa haec generatio demum fiat, hactenus nec explicatum ſuit, nec ſacile explicabitur.

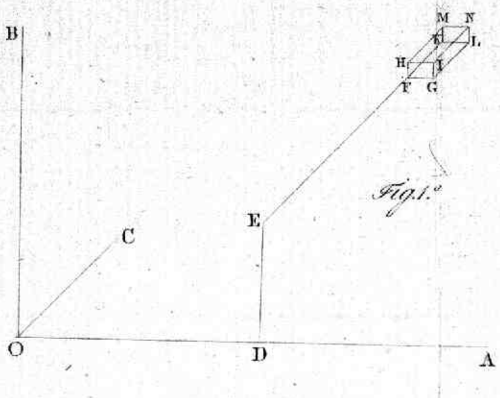


Fig. 1.º

Fig. 2.ª

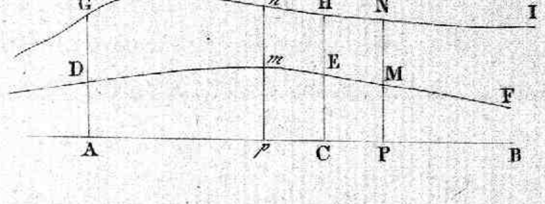


Fig. 3.ª

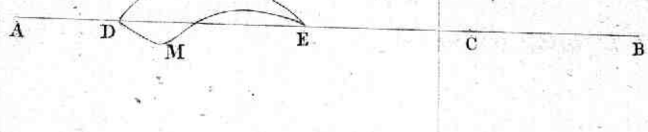


Fig. 4.ª

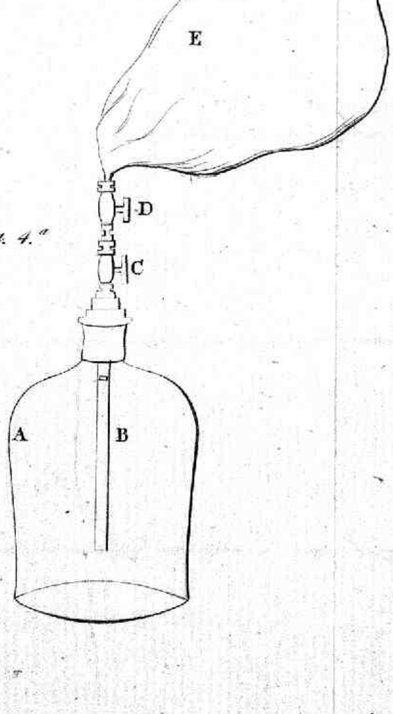


Fig. 5.ª

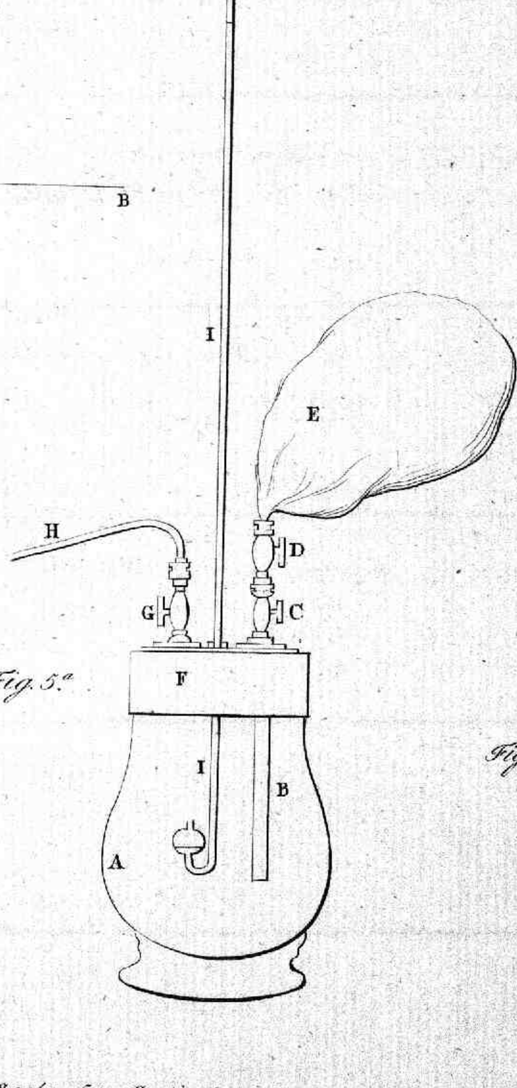
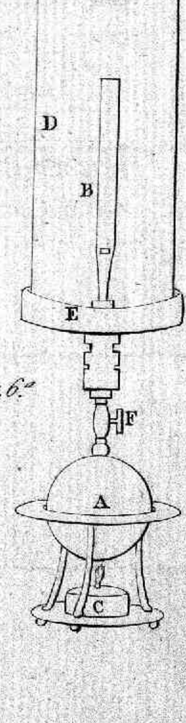


Fig. 6.ª



Scala 50 Centimetrorum.