



De techniek van het differentiëren

<https://hdl.handle.net/1874/10128>

DE TECHNIEK VAN HET DIFFERENTIËREN



wiskunde B

DE TECHNIEK VAN HET DIFFERENTIËREN

Hawex - Wiskunde B

DE TECHNIEK VAN HET DIFFERENTIËREN

Een produktie ten behoeve van het project Hawex.

Ontwerper: Martin Kindt

Met medewerking van: Anton Roodhardt
Jan de Jong
Henk van der Kooy
Jan de Lange
Martin van Recuwijk

Vormgeving: Ada Ritzer

© 1994 Freudenthal instituut, Utrecht
ongewijzigde 3e versie

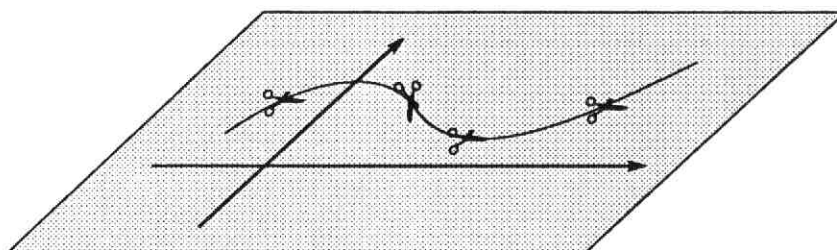
Inhoudsopgave

1. Differentiëren, geknipt voor jou	1
2. Differentiaalquotiënten	8
3. De produktregel	14
4. Differentiëren van machtsfuncties	22
5. Kettingregel	29
6. Gebroken lineaire functies	42
7. De Quotiënt-regel	47
8. Een bekende goniometrische functie	53
9. Oefeningen	57

1 Differentiëren, geknipt voor jou

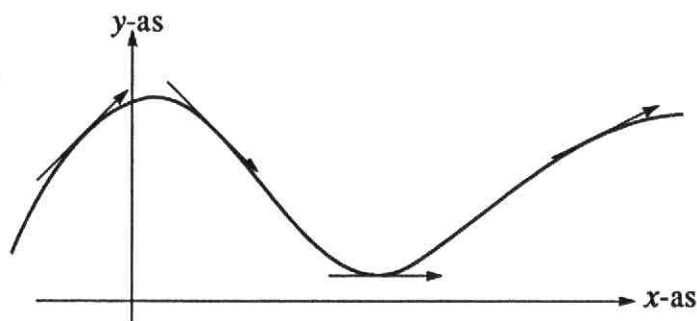
In het boekje 'Differentiëren' *) heb je leren omgaan met *hellingfuncties* of, wat hetzelfde is: *afgeleide functies*.

We frissen de begrippen en rekenmethoden die hierbij horen nu wat op. Stel dat je met een (gewone) schaar precies langs de grafiek van een functie f wilt knippen.

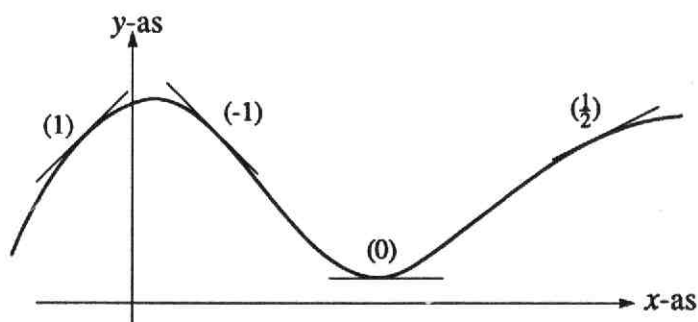


Tijdens het knippen verandert de schaar steeds van richting. In elk punt wordt de 'ideale kniprichting' aangegeven door de *raaklijn* aan de grafiek in dat punt.

Raaklijnen
aan de grafiek van f

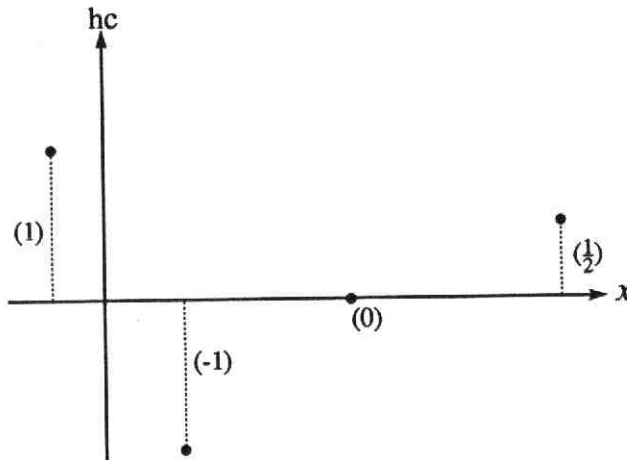


De helling (of richting) van een rechte lijn in het Oxy -vlak wordt uitgedrukt in een getal: de *hellingscoëfficiënt* (of *richtingscoëfficiënt*) van die lijn. In de tekening zijn de bijbehorende hellingscoëfficiënten tussen haakjes genoteerd.

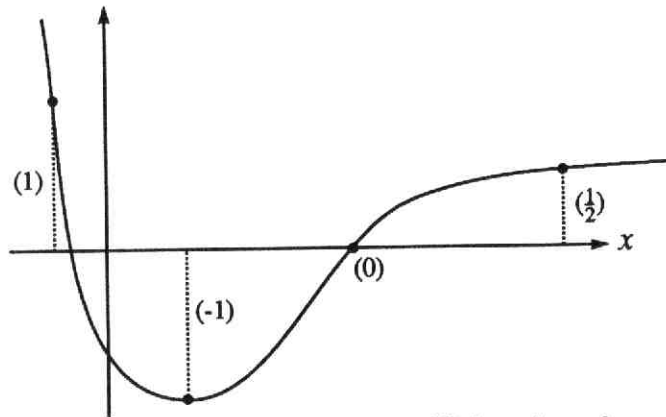


*) De volledige titel luidt: Differentiëren, een manier om veranderingen bij te houden.

Je kunt nu de hellingscoëfficiënt (van de raaklijn) van een grafiek uitzetten tegenen x :



Zo ontstaat de hellinggrafiek bij f .



De functie die bij elke x -waarde de hellingscoëfficiënt (van f) geeft, is de *hellingfunctie* of *afgeleide functie* f' .

f' geeft dus aan hoe je bij elk punt (x, y) op de grafiek van f zou moeten knippen als je met een schaar precies die grafiek wilt volgen.

Van een aantal functies heb je geleerd hoe je snel de hellingfunctie kunt berekenen. Het berekenen van de hellingfunctie wordt *differentiëren* genoemd.

Voorbeelden:

$$\begin{array}{lcl} f(x) = 4x^3 & \xrightarrow{\text{differentiëren}} & f'(x) = 12x^2 \\ f(x) = x^5 + 4x & \xrightarrow{\hspace{2cm}} & f'(x) = 5x^4 + 4 \\ f(x) = \sin x & \xrightarrow{\hspace{2cm}} & f'(x) = \cos x \end{array}$$

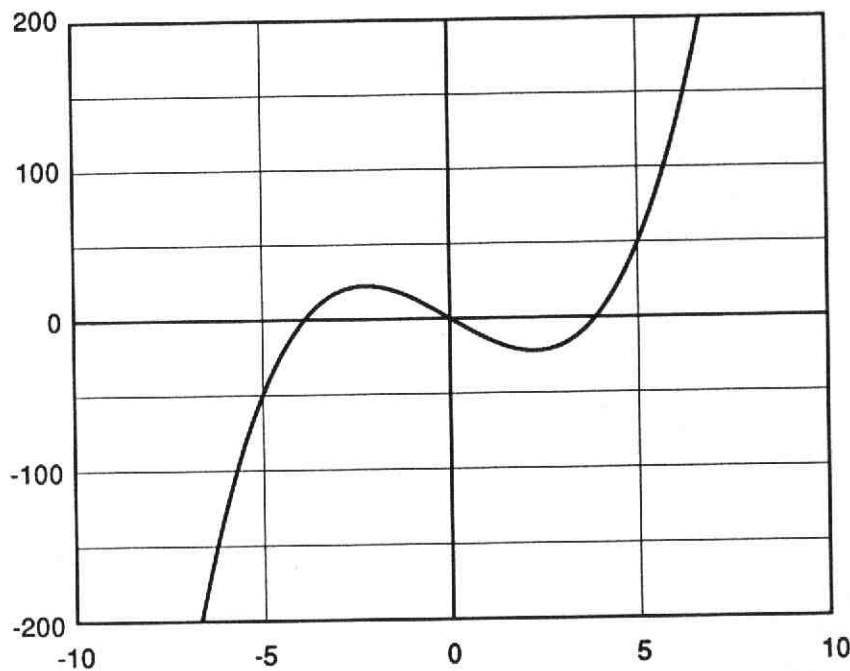
In de terugblik bij dit hoofdstuk (blz. 7) vind je een volledig overzicht van de regels voor het differentiëren die je tot nu toe hebt gehad.

Opgaven

1. Differentieer: (raadpleeg zo nodig blz. 7)

>a.		>b.		>c.	
$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$11x^3$		$5 \sin x$		$1000x^{10} - 10$	
$x^3 - 11$		$\sin x + 5$		$\frac{1}{2}x^4 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{3}$	
$x^3 + 11x$		$\sin(x + 5)$		$\cos x + \sin 2x$	
$3 - x^{11}$		$\sin 5x$		$\frac{2}{3}x - \cos \frac{1}{3}x$	

2. Door een computer is de grafiek van $y = x^3 - 15x$ getekend.



Iemand wil met een schaar precies langs de grafiek knippen.

- >a Op een gegeven moment is de schaar in het punt (5,50).
Door welk getal wordt de (ideale) kniprichting in dat punt bepaald?
 - >b In twee punten van de grafiek is de kniprichting evenwijdig met de x-as.
Welke punten zijn dat?
3. Van een functie f is gegeven dat, bij het knippen langs de grafiek, de schaar niet van richting verandert.
- >a Wat voor soort functie is f ?
 - >b Wat weet je van f' ?

4. Gegeven is de functie: $f(x) = x^3 - x^2 - x$

>a Vul in:

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$					
$f'(x)$					

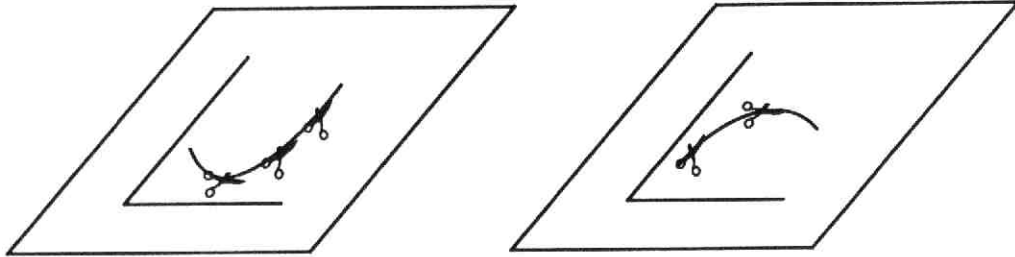
>b In welke punten heeft de grafiek van f een horizontale raaklijn?

>c In welk interval is de grafiek van f dalend?

>d Teken de grafiek van f .

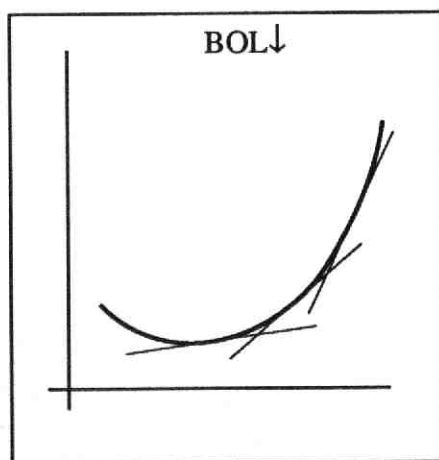
Hol en bol

Bij het knippen langs een kromme lijn verandert de kniprichting:

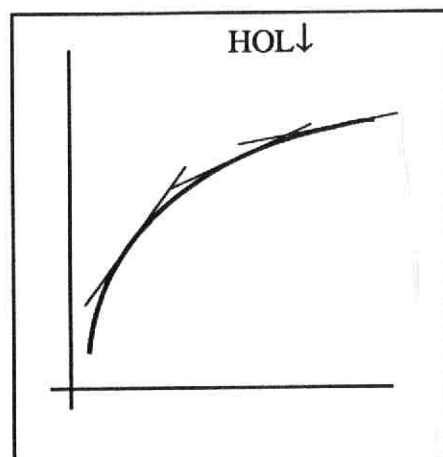


Wordt de hellingscoëfficiënt van de kniprichting steeds groter (t.o.v. de x -as) dan is de kniplijn *bol naar beneden* (of hol naar boven).

Wordt de hellingscoëfficiënt steeds kleiner, dan is de kniplijn *hol naar beneden* (of bol naar boven).

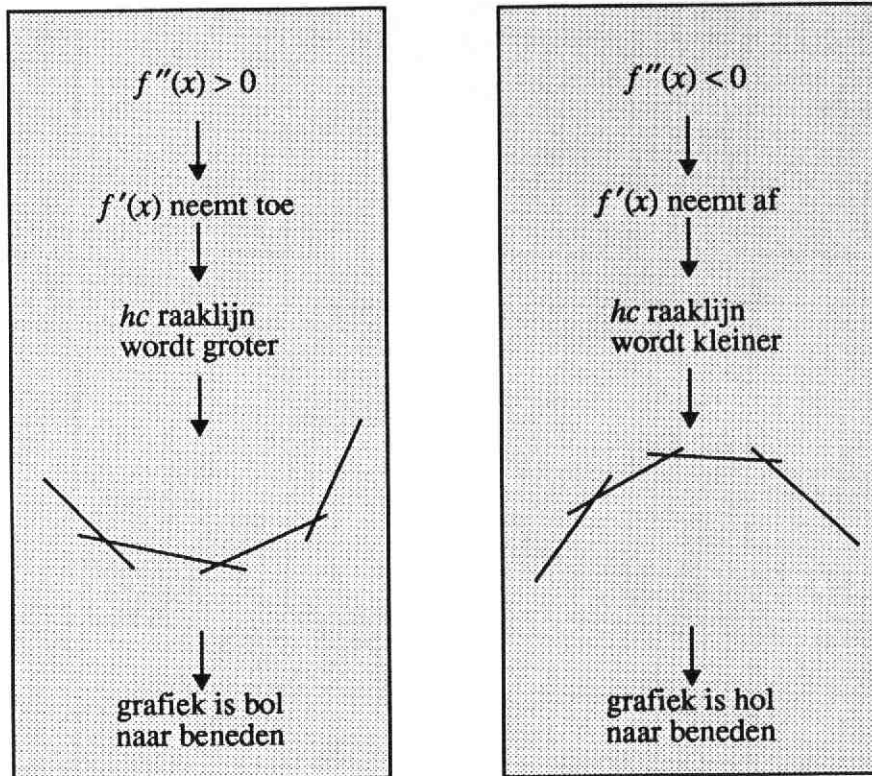


$f'(x)$ neemt toe

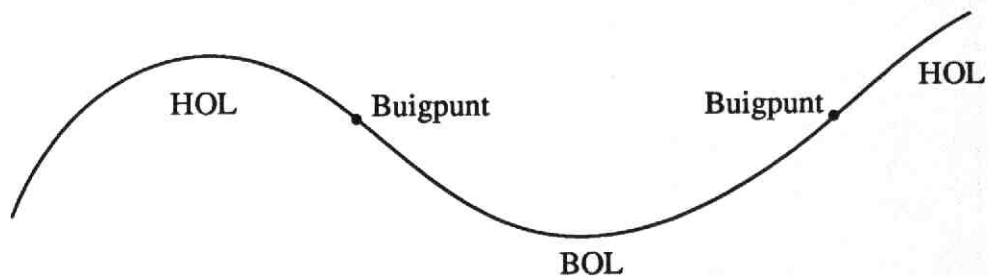


$f'(x)$ neemt af

Het gedrag van de draaiende raaklijn kan worden bepaald met behulp van de afgeleide van f' , dus met de tweede afgeleide f'' van f . Er geldt:



Een punt van overgang van hol naar bol (of omgekeerd) heet buigpunt).



Buigpunten worden meestal berekend uit $f''(x) = 0$.

Pas op:

als $P(x_p, y_p)$ op de grafiek van f ligt en $f''(x) = 0$,

dan hoeft P niet persé een buigpunt te zijn.

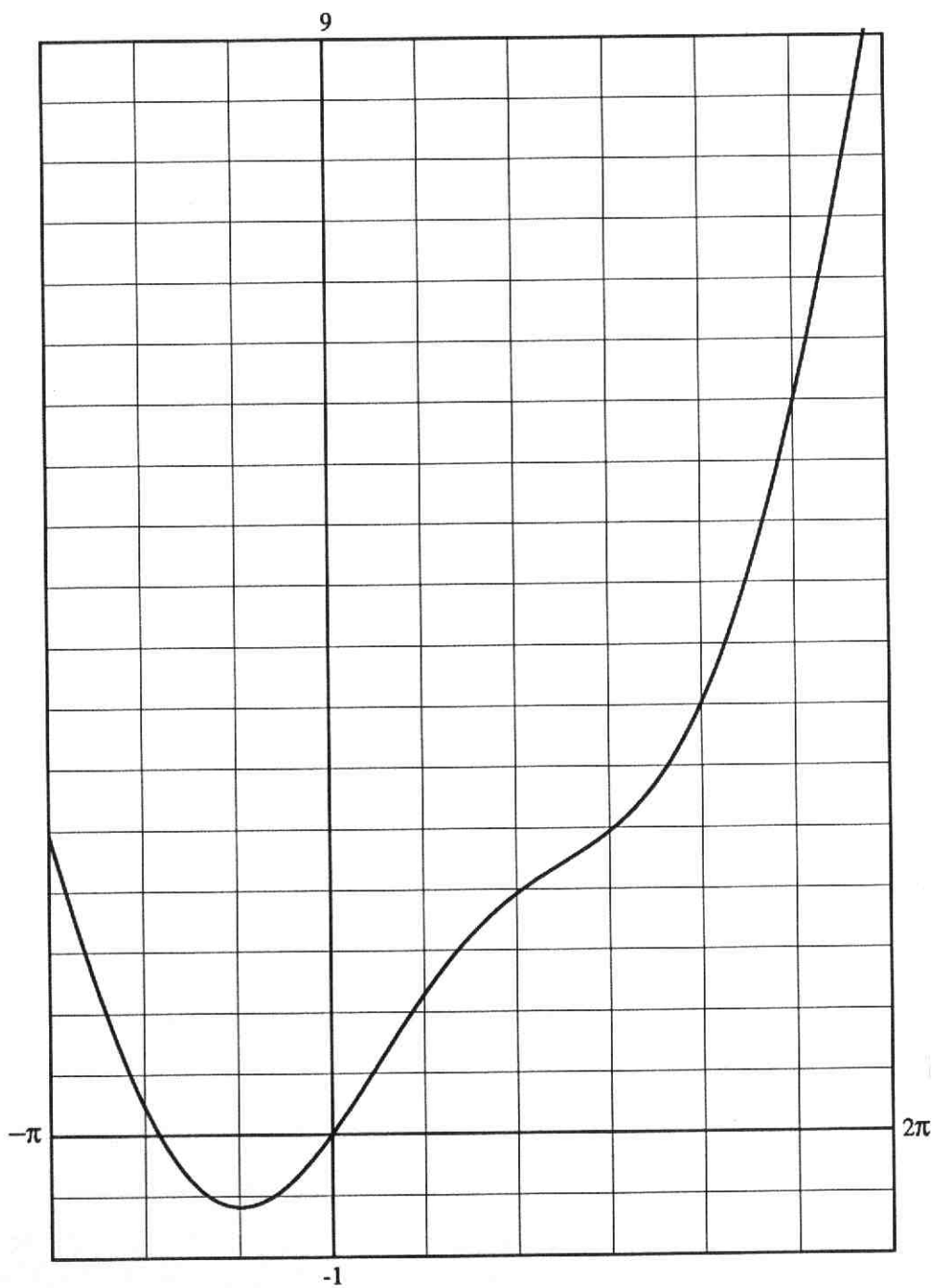
f'' moet van teken wisselen in x_p .

5. $f(x) = x^4$.

>a Los x op uit $f''(x) = 0$.

>b Heeft de grafiek van f een buigpunt?

6. De grafiek van de functie f uit opgave 4 heeft één buigpunt. Bereken de coördinaten van dat buigpunt.
7. Hieronder is de grafiek getekend van $f(x) = \sin x + \frac{1}{4}x^2$ voor $-\pi \leq x \leq 2\pi$. Bereken de coördinaten van de buigpunten.



Terugblik

Regels voor het differentiëren.

a. Speciale functies:

functie	afgeleide
$x \rightarrow x^n$	$x \rightarrow n \cdot x^{n-1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$
$x \rightarrow \sin x$	$x \rightarrow \cos x$
$x \rightarrow \cos x$	$x \rightarrow -\sin x$

b. Werken met een constante (c)

functie	afgeleide
$x \rightarrow f(x) + c$	$x \rightarrow f'(x)$
$x \rightarrow c \cdot f(x)$	$x \rightarrow c \cdot f'(x)$

c. Speciaal voor sinus en cosinus

functie	afgeleide
$x \rightarrow \sin(x + c)$	$x \rightarrow \cos(x + c)$
$x \rightarrow \sin cx$	$x \rightarrow c \cdot \cos cx$
$x \rightarrow \cos(x + c)$	$x \rightarrow -\sin(x + c)$
$x \rightarrow \cos cx$	$x \rightarrow -c \cdot \sin cx$

d. Som- en verschilfunctie

functie	afgeleide
$x \rightarrow f(x) + g(x)$	$x \rightarrow f'(x) + g'(x)$
$x \rightarrow f(x) - g(x)$	$x \rightarrow f'(x) - g'(x)$

Stijgen en dalen

Bij het tekenen van grafieken is het vaak handig f' te gebruiken. Met behulp van f' kun je uitvinden waar de grafiek stijgt en daalt en waar de toppen liggen.

$f'(x) > 0$	grafiek van f stijgt in (x, \dots)
$f'(x) = 0$	grafiek van f heeft horizontale raaklijn in (x, \dots)
$f'(x) < 0$	grafiek van f daalt in (x, \dots)

Hol en bol

f'' is een maat voor de verandering van f' .

$f''(x) > 0$	$f'(x)$ neemt toe	grafiek van f bol naar beneden
$f''(x) < 0$	$f'(x)$ neemt af	grafiek van f hol naar beneden.

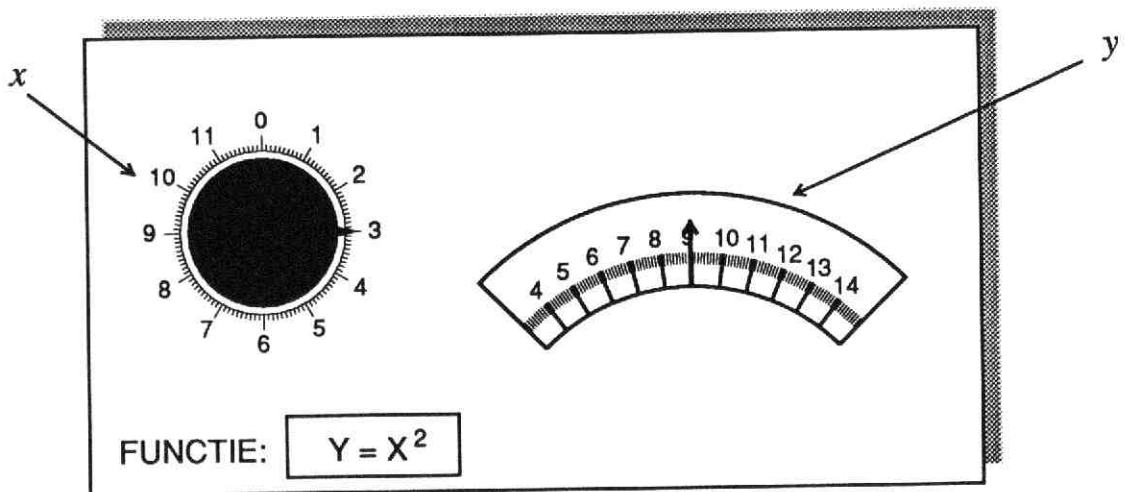
De overgang van hol naar bol (of omgekeerd) wordt gemarkeerd door een **buigpunt**.

2 Differentiaalquotienten

De ondertitel van het boekje 'Differentiëren' luidt: 'een manier om veranderingen bij te houden'. Met veranderingen wordt dan bedoeld: zeer kleine veranderingen. In dit hoofdstuk gaan we hier wat dieper op in. Als denkmodel daarbij gebruiken we een soort machine.

Op die machine kun je naar keuze een functie instellen.

Het paneel van die machine:



De machine is ingesteld op de functie $y = x^2$.

Met de knop x stel je een getal in, bijvoorbeeld 3.

De wijzer y slaat dan uit naar 9 ($=3^2$).

Een kleine verdraaiing van knop x geeft een kleine verandering van de stand van wijzer y .

1. >a Knop x wordt vanuit bovenstaande situatie één streepje doorgedraaid, dus van 3 naar 3,1.
Controleer door berekening dat de wijzer y ongeveer 6 streepjes naar rechts zal verspringen.
- >b Hoeveel streepjes verspringt de wijzer y naar links als knop x vanuit stand 3 één streepje naar links wordt gedraaid?
- >c En hoe verspringt wijzer y als knop x vanuit 3 twee streepjes naar rechts wordt gedraaid?
- >d Nu is de beginstand van knop x niet 3, maar 4.
Hoeveel streepjes verspringt de wijzer y in dat geval als x één streepje naar links of rechts gedraaid wordt?

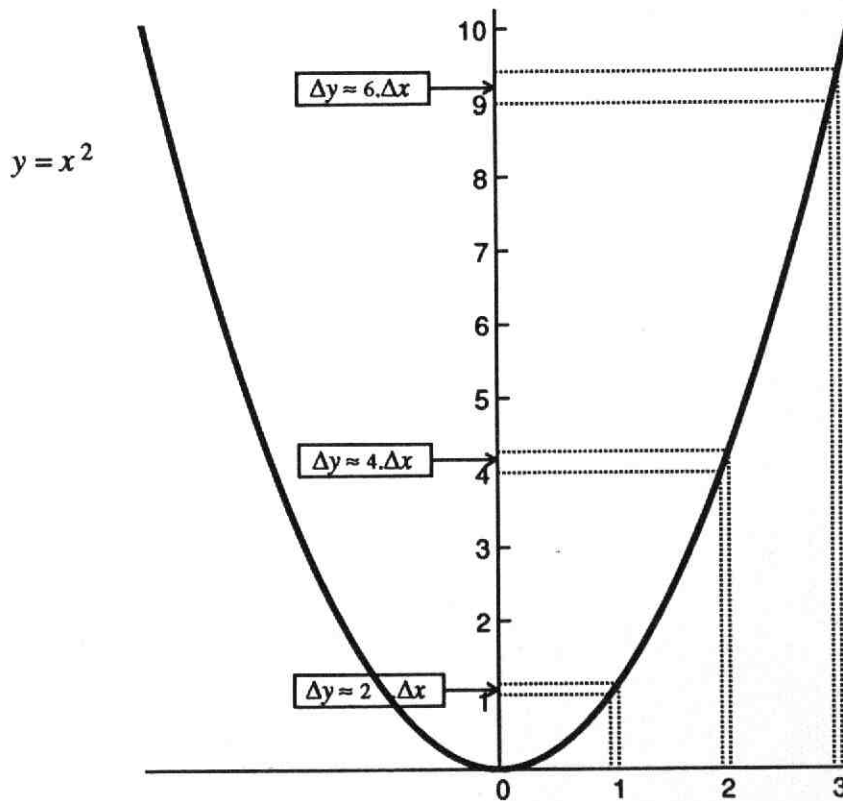
De verdraaiing van knop x geven we aan met Δx , de verandering van wijzer y met Δy . De resultaten van opgave 1 kunnen nu worden genoteerd in tabelvorm:

beginstand x	Δx	Δy (afgerond in 1 dec)
3	0,1	0,6
3	-0,1	-0,6
3	0,2	1,2
4	0,1	0,8
4	-0,1	-0,8

Uitgaande van $x = 3$ geldt voor 'kleine' waarden van Δx : *)

Δy is ongeveer 6 maal Δx ofwel: $\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx 6$.

2. Hoe kun je in de grafiek van $y = x^2$ de betrekking $\Delta y \approx 6 \cdot \Delta x$ (voor $x = 3$) controleren?



)* met 'klein' wordt in dit hoofdstuk steeds bedoeld: dicht bij 0

3. Gegeven: $y = x^2$.

Vul in:

Als $x = 8$ en $\Delta x = 0,1$ dan $\Delta y \approx 16 \cdot \Delta x = 1,6$

Als $x = 12$ en $\Delta x = 0,05$ dan $\Delta y \approx \dots\dots\dots$

Als $x = 4$ en $\Delta x = -0,01$ dan $\Delta y \approx \dots\dots\dots$

Als $x = -2$ en $\Delta x = -0,1$ dan $\Delta y \approx \dots\dots\dots$

4. De machine is weer ingesteld op $y = x^2$.

Knop x wordt vanuit een zekere beginstand één streepje naar rechts gedraaid.

Het effect hiervan is dat de y -wijzer ongeveer 20 streepjes naar rechts springt.

Welke was de beginstand van knop x ?

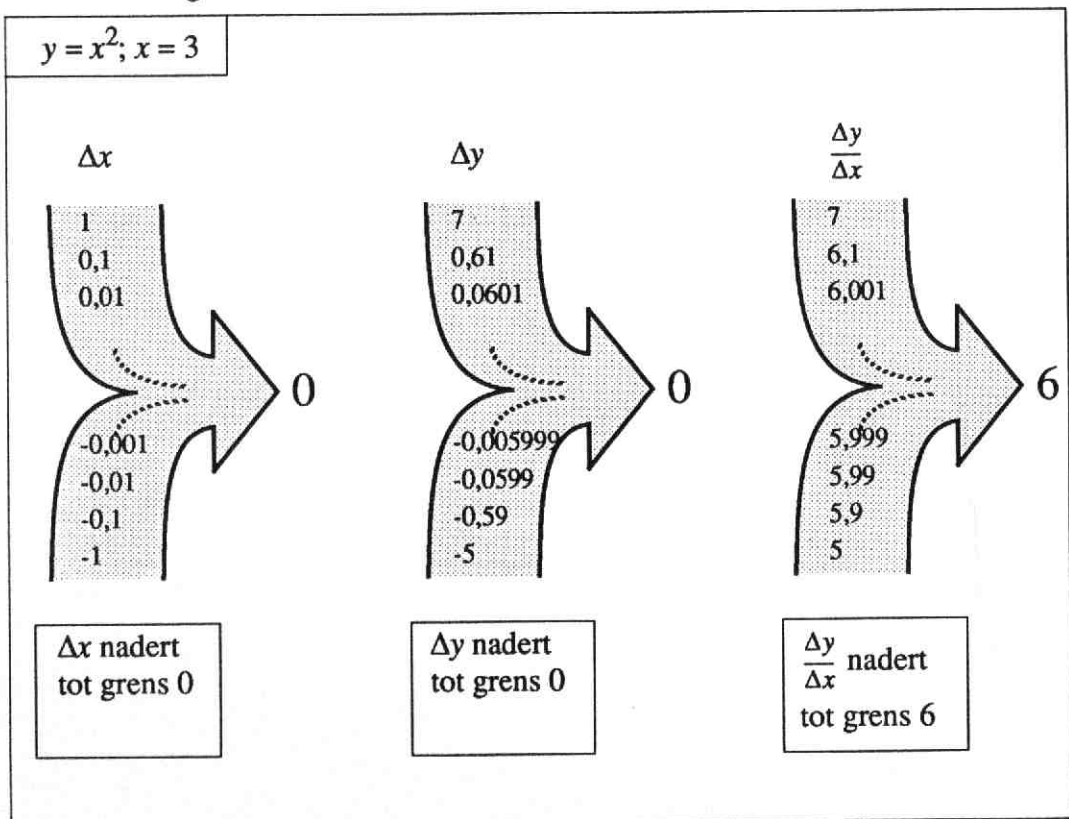
5. De machine wordt ingesteld op $y = x^3$.

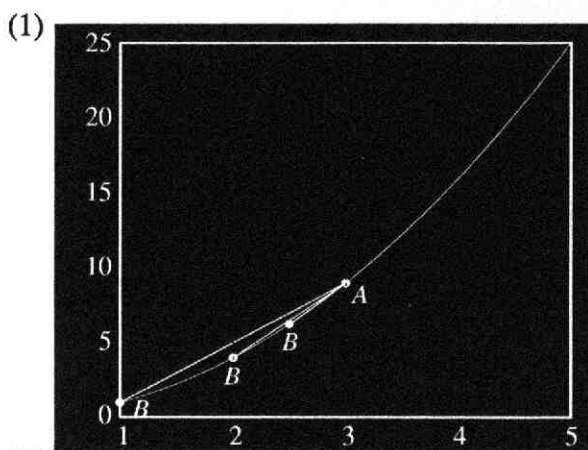
a Knop x wordt vanuit stand 2 één streepje naar rechts gedraaid. Wijzer y slaat dan ongeveer 12 streepjes naar rechts uit.

Verklaar dit met behulp van de hellingfunctie van $y = x^3$.

b Hoeveel streepjes slaat y uit als x vanuit stand 5 één streepje naar rechts wordt gedraaid?

Terug naar de functie $y = x^2$. Uitgaande van de stand $x = 3$, vonden we $\Delta y \approx 6 \cdot \Delta x$. Die benadering is beter, naarmate Δx dichter bij nul zit.



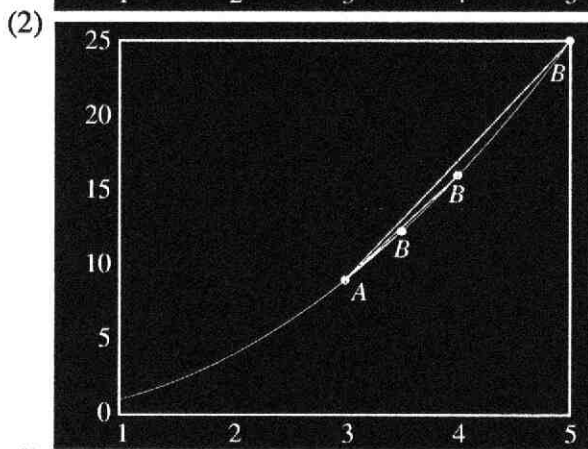


B kruipt (over de grafiek) van onder naar *A*.

Δx en Δy naderen tot 0.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{hc koorde } AB.$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ nadert tot } 6.$$

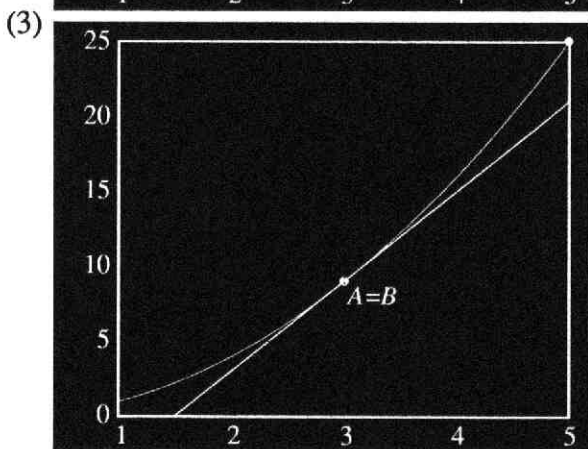


B kruipt van boven naar *A*.

Δx en Δy naderen tot 0.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{hc koorde } AB.$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ nadert tot } 6.$$



$B = A$.

$$\frac{dy}{dx} = \text{hc raaklijn } AB.$$

$$\frac{dy}{dx} = 6.$$

In de figuren (1) en (2) draait de koorde *AB* om het punt *A*.

De *limietstand* (grensstand) van de koorde *AB* is de raaklijn in *A*.

De hellingscoëfficiënt van de koorde is steeds $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

De *limiet* (grenswaarde van $\frac{\Delta y}{\Delta x}$) is de hellingscoëfficiënt van de raaklijn. Die limiet noteren we als $\frac{dy}{dx}$.

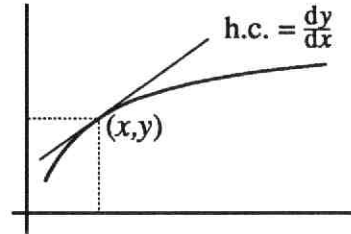
Samengevat:

De hellingscoëfficiënt van de raaklijn kan willekeurig dicht worden benaderd door het differentiequotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

De limiet van $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ wordt vaak ook genoteerd als quotiënt, nl. $\frac{dy}{dx}$.

Dit quotiënt wordt *differentiaalquotiënt* genoemd.

Het differentiaalquotiënt $\frac{dy}{dx}$ is de hellingscoëfficiënt van de grafiek in het punt (x,y) .



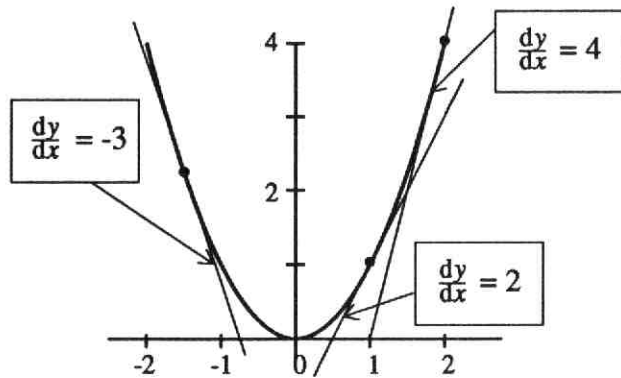
Voor de functie $y = x^2$ geldt:

Als $x = 3$, dan $\frac{dy}{dx} = 6$.

Als $x = 1$, dan $\frac{dy}{dx} = 2$.

Als $x = 10$, dan $\frac{dy}{dx} = 20$.

Kortom: $\frac{dy}{dx} = 2x$.



Als f' de afgeleide functie is van f , dan geldt: $\frac{dy}{dx} = f'(x)$.

Dus bijvoorbeeld:

Voor $y = x^3$ geldt $\frac{dy}{dx} = 3x^2$.

Voor $u = \sin t$ geldt $\frac{du}{dt} = \cos t$.

6. Gegeven $y = 0,25 x^4$.

>a Druk $\frac{dy}{dx}$ uit in x .

>b Bereken de hellingscoëfficiënt van de grafiek van $y = 0,25 x^4$ in het punt met $x = 2$.

>c Neem $x = 10$ en $\Delta x = 0,1$. Hoe groot zal Δy ongeveer zijn?

7. Het volume V van een bol met straal r wordt gegeven door de formule:

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

>a Bereken $\frac{dV}{dr}$

Een stalen bol heeft een straal van 20 cm.

Door verhitting zet de bol uit, naar alle kanten met 0.1 mm.

>b Met hoeveel cm^3 neemt het volume van de bol toe?
(Bereken je antwoord op twee verschillende manieren).

Nog een nieuwe notatie.

Je weet: als $y = 4x^3 + 19x - 7$ dan $\frac{dy}{dx} = 12x^2 + 19$.

Dit kun je één formule schrijven: $\frac{d(4x^3 + 19x - 7)}{dx} = 12x^2 + 19$

Meer gebruikelijk is:

$$\frac{d}{dx} [4x^3 + 19x - 7] = 12x^2 + 19$$

$\frac{d}{dx}$ (spreek uit: dé-dé-iks) moet je lezen als: 'voer de handeling differentiëren uit.)

8. Bereken:

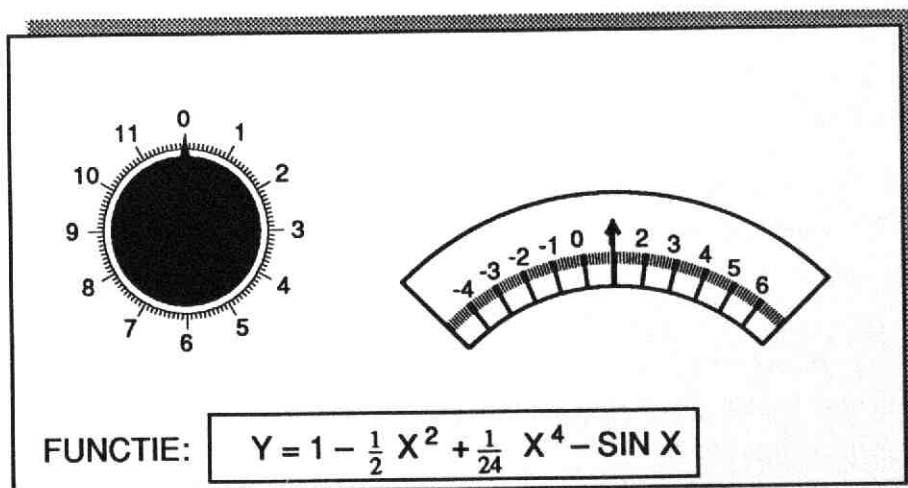
>a $\frac{d}{dx} [x^2 + \cos x].$

>c $\frac{d}{dq} [q^8 - q^5 - 85].$

>b $\frac{d}{dx} [\frac{3}{4} x^4 - 1\frac{1}{3} x^6].$

>d $\frac{d}{dt} [10t^2 + 20t + 30 \sin t].$

9.

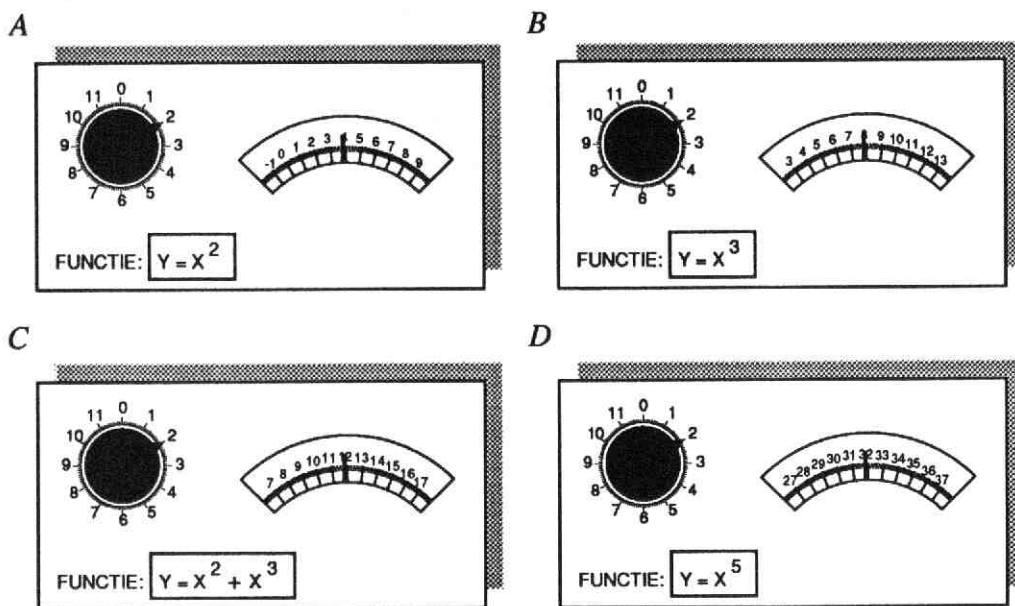


Vanuit $x = 0$ wordt knop x één streepje (= 0,1) naar rechts gedraaid.

> Zal de wijzer naar rechts of naar links uitslaan? Hoeveel streepjes?

3 De produktregel

Vier functies, vier machines: A, B, C en D.



1. Knop x wordt bij alle vier de machines op hetzelfde getal ingesteld. De volgende twee beweringen zijn waar bij elke instelling van x :
 - wijzer y wijst bij C het getal aan dat de *som* is van de getallen, aangewezen bij A en B
 - wijzer y wijst bij D het getal aan dat het *produkt* is van de getallen, aangewezen bij A en B.

> De eerste bewering spreekt vanzelf, gelet op de formule. De tweede ook?

2. Knop x wordt vanuit 2 één streepje (= 0,1) naar rechts gedraaid.
 - >a Hoeveel streepjes ongeveer slaat de wijzer uit bij resp. A, B, C en D? Waar of onwaar?
 - >b De uitwijking van de wijzer bij C is de som van de uitwijkingen van de wijzers bij A en B.
 - >c De uitwijking van de wijzer bij D is het produkt van de uitwijkingen van de wijzers bij A en B.

De opgaven 1 en 2 hebben betrekking op de som en het produkt van twee functies. Eerder heb je geleerd dat je de *som* van twee (of meer) functies kunt differentiëren, door *termsgewijs* te differentiëren.

Bijvoorbeeld:

$$\frac{d}{dx} [x^2 + x^3] = 2x + 3x^2$$

Dit is ook in overeenstemming met het resultaat van opgave 2 >b.

3. Een dergelijke mooie regel geldt niet voor produkten van functies. Bij een produkt mag je *niet* factorsgewijs differentiëren.

Laat zien dat bijvoorbeeld $\frac{d}{dx} [x^2 \cdot x^3]$ niet gelijk is aan $2x \cdot 3x^2$.

Om te komen tot een regel voor het differentiëren van een produkt van twee (of meer) functies, kijken we eerst in drie opgaven hoe een produkt verandert als de beide factoren veranderen.

4. De gemiddelde afmetingen van een voetbalveld zijn 60 bij 100 m. In een zeker land heeft de voetbalbond bepaald dat lengte en breedte niet meer dan 5% hiervan mogen afwijken. Hoeveel % wijkt de oppervlakte maximaal af?

5. Lancering van de Saturnus V-raket. Een wet uit de natuurkunde zegt dat de voortstuwingskracht (= F) gelijk is aan het produkt van de massa (= m) en de versnelling (= a).

In formule: $F = m \cdot a$.

Door brandstofgebruik neemt de massa van de raket af: m is een dalende functie van de tijd t . Ook F en a zijn functies van t . Aanvankelijk zullen F en a toenemen, maar later als gevolg van het opraken van de brandstof weer afnemen.

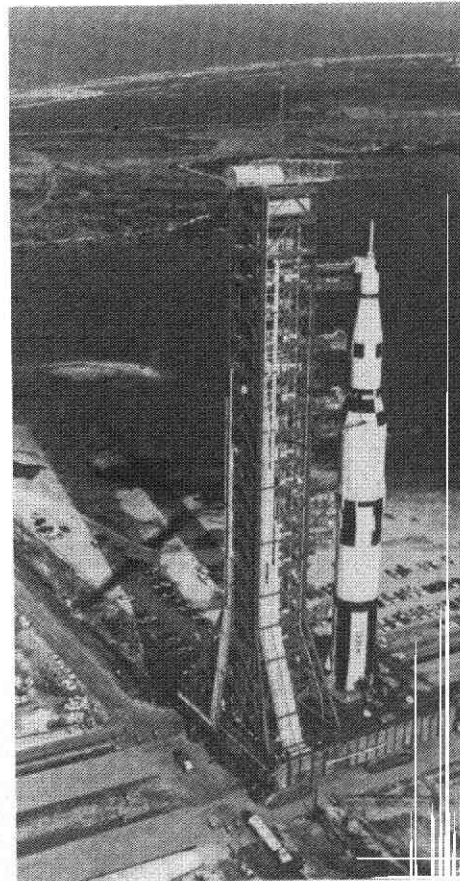
- >a Veronderstel dat in een zeker tijdsinterval de massa afneemt met 2% en de versnelling met 1%.

Met hoeveel % is de voortstuwingskracht afgenomen?

- >b Veronderstel dat de massa verandert met Δm en de versnelling met Δa .

Toon aan:

$$\Delta F = \Delta m \cdot a + m \cdot \Delta a + \Delta m \cdot \Delta a$$



Met de Saturnus V werden zes bemande Apollo vluchten naar de maan uitgevoerd. Op de foto hierboven wordt een Saturnus V-raket naar het lanceerplatform gereden

6. De verkoop van sportschoenen van het type Superrunner is afhankelijk van de prijs. Gaat de prijs omlaag (omhoog), dan zal de verkoop stijgen (dalen).
Stel p = de prijs van een paar Superrunners en N = het door een warenhuisconcern verkochte aantal per week.

De omzet per week is: $R = N \cdot p$.

- >a Veronderstel dat de prijs stijgt met 5% en de verkoop daalt met 2%.
Met hoeveel % verandert de omzet?

- >b Bij een verandering Δp van de prijs en een verandering ΔN van de verkoop hoort een verandering ΔR van de omzet.

Toon aan: $\Delta R = \Delta N \cdot p + N \cdot \Delta p + \Delta N \cdot \Delta p$

Nu de produktregel.

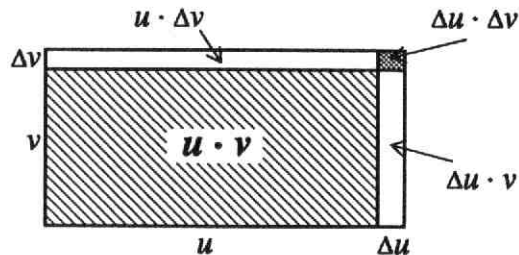
Stel u en v zijn functies van x en stel $y = u \cdot v$

Bij een verandering Δx van x horen veranderingen Δu , Δv (en Δy).

Er geldt (zie ook de opgaven 5 en 6):

$$\Delta y = \Delta u \cdot v + u \cdot \Delta v + \Delta u \cdot \Delta v \quad (1)$$

Deze formule voor de verandering van een produkt kun je bij positieve waarden van u , v , Δu , Δv mooi 'zien' in onderstaand plaatje:



De termen $u \cdot \Delta v$ en $\Delta u \cdot v$ zijn de witte staafjes in de figuur.

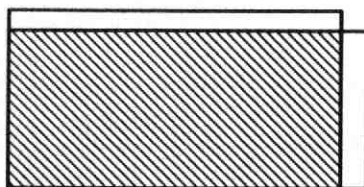
De term $\Delta u \cdot \Delta v$ is het grijze blokje in de hoek.

Als door een verkleining van Δx , de toename Δu en Δv beide bijvoorbeeld ongeveer 100 keer zo klein worden, dan worden de staafjes $u \cdot \Delta v$ en $v \cdot \Delta u$ ongeveer 100 keer zo dun.

Het blokje $\Delta u \cdot \Delta v$ wordt dan in *twee* richtingen verkleind en ongeveer 10.000 keer zo klein!

Daarom mag in de formule (1) de term $\Delta u \cdot \Delta v$ worden verwaarloosd en komt er:

$$\Delta y \approx \Delta u \cdot v + u \cdot \Delta v \quad (2)$$



Na deling, links en rechts door Δx komt er:

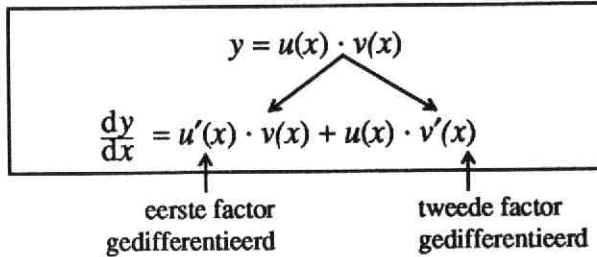
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v + u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} \quad (3)$$

De benadering is in het algemeen nauwkeuriger naarmate Δx kleiner is. In de limiet zijn linker- en rechterlid exact gelijk:

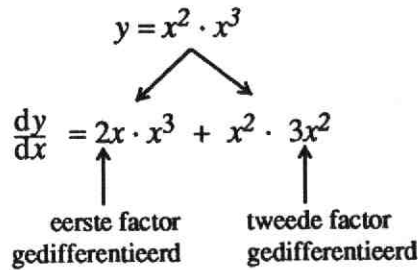
Kortom: $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \cdot v + u \cdot \frac{dv}{dx}$ (4)

Bij het differentiëren van een produkt $u \cdot v$ worden beiden factoren u en v dus wél gedifferentieerd, maar níét gelijktijdig.

Je kunt de produktregel ook in deze vorm onthouden:

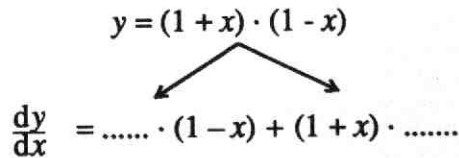


7. Bekijk het schema:



> Hoe kun je controleren dat je echt de afgeleide van $x^2 \cdot x^3$ te pakken hebt?

8. >a Neem het schema over en vul in:



>b Hoe kun je het resultaat controleren?

9. Als $y = 3 \cdot \sin x$ dan $\frac{dy}{dx} = 3 \cdot \cos x$

Als $y = 5 \cdot \sin x$ dan $\frac{dy}{dx} = 5 \cdot \cos x$

Als $y = 8\frac{1}{2} \cdot \sin x$ dan $\frac{dy}{dx} = 8\frac{1}{2} \cdot \cos x$

enzovoort.

Iemand concludeert nu:

$$\text{Als } y = x \cdot \sin x \quad \text{dan } \frac{dy}{dx} = x \cdot \cos x$$

Aardig gevonden, maar die vlieger gaat niet op.
De factor x is namelijk niet constant!

>a Wat vind je voor $\frac{dy}{dx}$ na toepassing van de produktregel?

(maak een schema als bij opgave 7 en 8).

>b Gaat de produktregel op voor het geval $y = 3 \cdot \sin x$?

10. Maak een schema als in de opgaven 7 en 8 bij het differentiëren van de volgende functies.

>a $y = 7x^2 \cdot (\frac{1}{4}x^2 + 17)$

>b $y = 7x^2 \cdot \sin x$

>c $y = (2 + 3x) \cdot (4 - 5x + 6x^2)$

>d $y = (2 + 3x) \cdot \cos x$

11. $u(x) = 5x^2 + 1$; $v(x) = 4x^3 + 1$; $p(x) = u(x) \cdot v(x)$
Bereken op twee manieren $p'(x)$:

>a met behulp van de somregel;

>b met behulp van de produktregel.

12. >a Bereken $\frac{d}{dx} [(x^2 + 2x + 3)^2]$ voor $x = 1$.

>b Bereken $\frac{d}{dx} [\sin^2 x]$ *) voor $x = \frac{1}{4}\pi$.

>c Bereken $\frac{d}{dx} [(x - \sin x)^2]$ voor $x = \frac{1}{2}\pi$.

13. In het boekje 'sinus en co' heb je gezien:

$$\frac{d}{dx} [\sin(ax)] = a \cdot \cos ax$$

$$\frac{d}{dx} [\cos(ax)] = -a \cdot \sin ax$$

Bereken: $\frac{d}{dx} [\sin 2x \cdot \cos 3x]$ voor $x = \frac{1}{6}\pi$.

*) $\sin^2 x$ betekent: $(\sin x)^2$, ofwel $\sin x \cdot \sin x$

14. Neem onderstaande tabel over en vul in (vereenvoudig waar mogelijk):

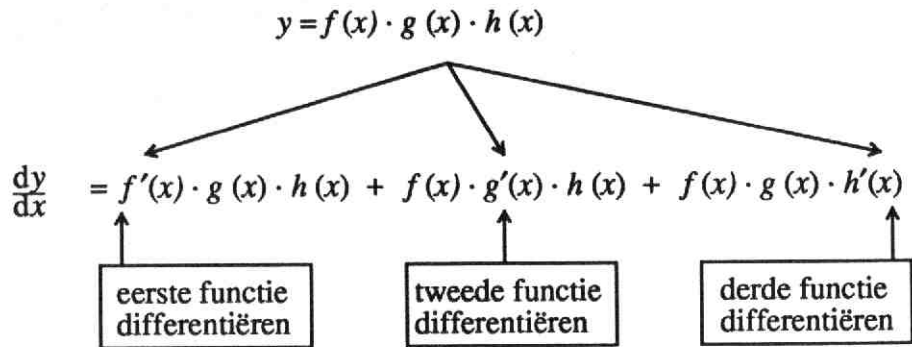
$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
x^2	$2x$	2
$\cos x$
$x^2 + \cos x$
$x^2 - \cos x$
$x \cdot \sin x$
$x^2 + x \sin x$
$(x^2 + x) \sin x$

15. De prijs van een zeker artikel is onderhevig aan flinke schommelingen. Een econoom, die de prijsbeweging heeft bestudeerd, beweert dat de prijs zich bij benadering gedraagt volgens de formule:

$$P = 100 + 45 \sin \frac{\pi t}{15} \quad (t \text{ is de tijd in dagen})$$

- >a Tussen welke bedragen schommelt P ?
Hoeveel dagen duurt één periode van die prijsbeweging?
- >b Verklaar: $\frac{dP}{dt} = 3\pi \cos \frac{\pi t}{15}$
- >c Het verband tussen het aantal verkochte artikelen per dag en de prijs per stuk wordt volgens de genoemde econoom gegeven door de formule:
 $N + P = 160$.
Tussen welke aantallen schommelt N ?
- >d Druk $\frac{dN}{dt}$ uit in t .
- >e Laat R de omzet op het tijdstip t zijn: $R = N \cdot P$
Druk $\frac{dR}{dt}$ uit in t .
- >f Toon aan: $\frac{dR}{dt} = 0$ geeft $\cos \frac{\pi t}{15} = 0$ of $\sin \frac{\pi t}{15} = -\frac{4}{9}$
- >g Schets het tekenverloop van $\frac{dR}{dt}$ voor $0 \leq t \leq 30$.
- >h Bereken de maximale waarde die de omzet kan hebben.

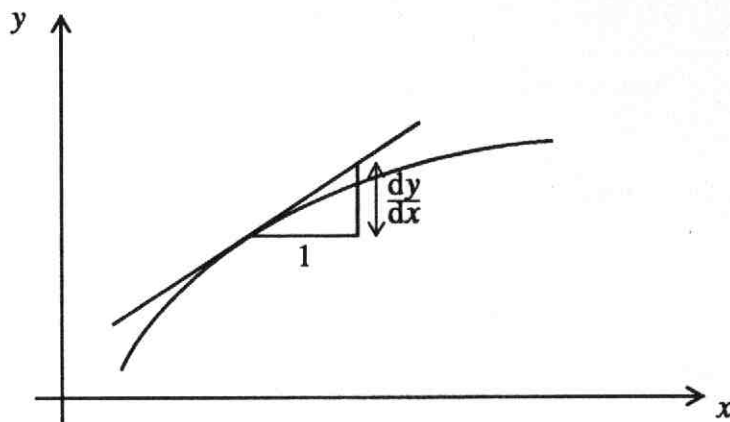
De produktregel kan worden uitgebreid voor een produkt van meer dan twee functies. In schema:



16. Je kunt bovenstaande regel vinden door twee keer de produktregel van twee functies toe te passen.
> Laat dit zien.
17. >a Bereken de hellingfunctie van:
 $p(x) = (x^2 + 1)(x^3 + 2)(x^4 + 3)$
>b Ook van
 $p(x) = x \sin x \cos x$
>c En ook van
 $p(x) = \cos^3 x$
18. Hoe luidt de produktregel voor een produkt van 4 functies,
zeg $y = a(x) \cdot b(x) \cdot c(x) \cdot d(x)$?
19. De grafiek van de functie $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)$ snijdt de x -as in 4 punten.
>a Bereken de hellingscoëfficiënt van de raaklijn in elk van die 4 punten.
>b Als je opgave a goed hebt uitgerekend vind je afwisselend een negatieve en een positieve hellingscoëfficiënt.
Licht dat toe door een ruwe schets van de grafiek van f te maken.
>c Hoeveel oplossingen zal $f'(x) = 0$ hebben?
20. Gegeven: $f(x) = (2x + 1)^4$.
> Bereken $f'(-1)$

Terugblik

$$\boxed{f'(x)} = \boxed{\text{hc grafiek } f \text{ in } (x,y)} = \boxed{\text{hc raaklijn in } (x,y)} = \boxed{\frac{dy}{dx}}$$



$\frac{dy}{dx}$ (in een zeker punt) wordt *exact berekend* door differentiëren (en invullen van de x -coördinaat).

$\frac{dy}{dx}$ (in een zeker punt) wordt *benaderd* door $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ te berekenen in een klein interval (om dat punt).

Produktregel

Laat u , v , w functies zijn van x .

Voor het differentiëren van de produkten $u \cdot v$ en $u \cdot v \cdot w$ gelden de regels:

$$\frac{d}{dx} [u(x) \cdot v(x)] = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

$$\frac{d}{dx} [u(x) \cdot v(x) \cdot w(x)] = u'(x) v(x) w(x) + u(x) v'(x) w(x) + u(x) v(x) w'(x)$$

Kortweg:

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$$

Opgaven

a. $y = (1-x)(1+x)(1+x^2)$

Bereken $\frac{dy}{dx}$ voor $x = 1$.

b. $f(x) = (1-x)\sin x + (1+x)\cos x$.

Laat zien dat geldt: $f'(x) = (2-x)\cos x - (2+x)\sin x$

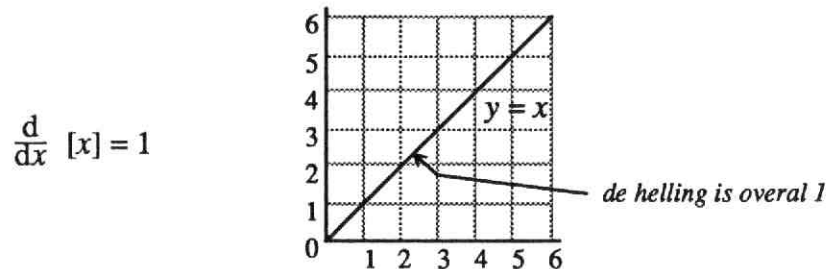
4 Differentieren van machtsfuncties

De zo zoetjes aan welbekende regel voor het differentiëren van machtsfuncties luidt:

$$\frac{d}{dx} [x^n] = n x^{n-1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

Deze regel kun je vrij gemakkelijk 'herontdekken' met behulp van de (uitgebreide) produktregel.

Voor $n = 1$ is de regel direct aan de grafiek te zien.



Voor $n = 2, 3, 4$, enz. werkt de produktregel:

$$\frac{d}{dx} [x^2] = \frac{d}{dx} [x \cdot x] = 1 \cdot x + x \cdot 1 = 2x$$

$$\frac{d}{dx} [x^3] = \frac{d}{dx} [x \cdot x \cdot x] = 1 \cdot x \cdot x + x \cdot 1 \cdot x + x \cdot x \cdot 1 = 3x^2$$

$$\frac{d}{dx} [x^4] = \frac{d}{dx} [x \cdot x \cdot x \cdot x] = 1 \cdot x \cdot x \cdot x + x \cdot 1 \cdot x \cdot x + x \cdot x \cdot 1 \cdot x + x \cdot x \cdot x \cdot 1 = 4x^3$$

en zo verder, en zo voort.

In dit hoofdstuk gaat het vooral over machtsfuncties met negatieve en/of gebroken exponenten.

Dus functies als:

$$y = x^{-1}, y = x^{\frac{1}{2}}, y = x^{-2\frac{1}{3}} \text{ enz.}$$

De vraag is nu of voor deze functies dezelfde regel van kracht is, dus of geldt:

$$\frac{d}{dx} x^n = n \cdot x^{n-1} \text{ voor } n = -1, \frac{1}{2}, -2\frac{1}{3} \text{ enz.}$$

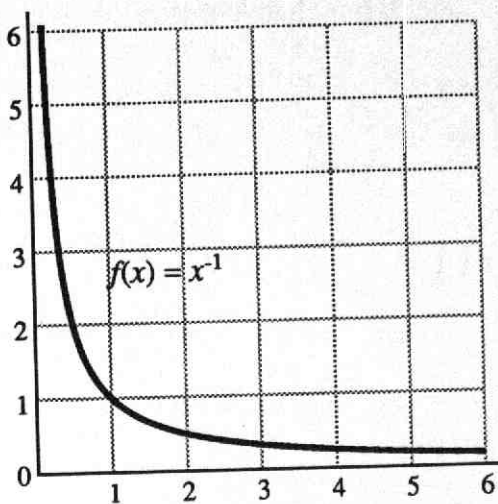
De eerstvolgende opgaven en stukjes theorie willen je overtuigen dat dit inderdaad het geval is. De latere opgaven van dit hoofdstuk zijn bedoeld als oefeningen en toepassingen van de regel.

1. Voor $n = -1$ zou de regel betekenen: $\frac{d}{dx}[x^{-1}] = -1 \cdot x^{-2}$

a Bekijk de grafiek van $f(x) = x^{-1}$.
 Meet de helling in $(1,1)$ en in $(2, \frac{1}{2})$
 en ga na of de regel in die gevallen
 zo'n beetje klopt.

>b Neem het interval $[4,99; 5,01]$ en
 bereken het differentiequotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$
 op dit interval.

>c Ga na of de uitkomst ongeveer
 gelijk is aan $-1 \cdot x^{-2}$ voor $x = 5$



Het lijkt er op of de regel $\frac{d}{dx}[x^n] = n \cdot x^{n-1}$ klopt voor $n = -1$.
 Voor het bewijs gebruiken we het volgende principe:

Voorbeeld:

$$\begin{array}{ccc} x^2 \cdot x & = & x^3 \\ \swarrow \quad \searrow & & \downarrow \\ 2x \cdot x + x^2 \cdot 1 & = & 3x^2 \end{array}$$

Differentieer twee vormen die aan elkaar gelijk zijn en je krijgt weer twee gelijke vormen!

Neem nu: $x^2 \cdot \frac{1}{x} = x$

Als je nu linkerlid en rechterlid wil differentiëren, zit je met het probleem dat je de afgeleide van $\frac{1}{x}$ niet kent.

$$\begin{array}{ccc} x^2 \cdot \frac{1}{x} & = & x \\ \swarrow \quad \searrow & & \downarrow \\ 2x \cdot \frac{1}{x} + x^2 \cdot \boxed{?} & = & 1 \quad (*) \end{array}$$

Op de plaats van $\boxed{?}$ past de afgeleide van $\frac{1}{x}$.

Je kunt die afgeleide nu vinden door (*) op te vatten als een vergelijking met $\boxed{?}$ als *onbekende* en de vormen met x als *bekende*.

$\boxed{?}$ opgelost geeft \longrightarrow

$$2x \cdot \frac{1}{x} + x^2 \cdot \boxed{?} = 1$$

$$2 + x^2 \cdot \boxed{?} = 1$$

$$x^2 \cdot \boxed{?} = -1$$

$$\boxed{?} = -\frac{1}{x^2}$$

Dus: $\frac{d}{dx} \left[\frac{1}{x} \right] = -\frac{1}{x^2}$ ofwel: $\frac{d}{dx} [x^{-1}] = -1 \cdot x^{-2}$

2. Bekijk het voorgaande bewijs goed.

> Hoe kun je $\frac{d}{dx} \left[\frac{1}{x} \right]$ ook vinden door uit te gaan van $x \cdot \frac{1}{x} = 1$?

3. $\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}$

>a Laat met behulp van de produktregel zien dat $\frac{d}{dx} \left[\frac{1}{x^2} \right] = \frac{-2}{x^3}$

>b Is dit resultaat in overeenstemming met $\frac{d}{dx} [x^n] = n \cdot x^{n-1}$?

>c Wat zal de afgeleide functie zijn van $f(x) = \frac{1}{x^4}$?

4. De grafiek van $f(x) = \frac{1}{x^2}$ is symmetrisch ten opzichte van de y-as.

>a Hoe kun je dat zien aan de formule?

>b Welke asymptoten heeft de grafiek?

>c Teken de grafiek van f .

>d De raaklijnen in de punten $(\frac{1}{2}, 4)$ en $(-\frac{1}{2}, 4)$ snijden elkaar in A en de x-as respectievelijk in B en C .

Bereken de oppervlakte van driehoek ABC .

5. Hiernaast zie je de grafiek van $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$

>a Neem de grafiek van $y = x^{\frac{1}{2}}$ over en teken in dezelfde figuur ook de grafiek van $y = x^2$ voor $x \geq 0$.

De twee grafieken zijn elkaars spiegelbeeld. Ten opzichte van welke spiegel-as?

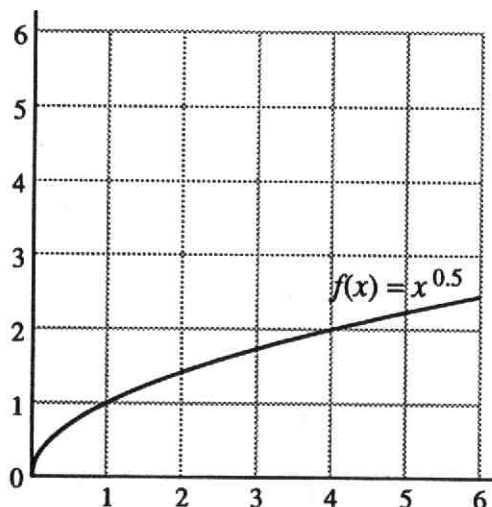
>b De hellingscoëfficiënt van de raaklijn aan $y = x^2$ in het punt $(1,1)$ is gelijk aan 2. Als je die raaklijn spiegelt in de lijn

$y = x$ krijg je de raaklijn aan $y = x^{\frac{1}{2}}$.

Hoe groot is de hellingscoëfficiënt van dat spiegelbeeld?

>c De hellingscoëfficiënt van $y = x^2$ in het punt $(5,25)$ is 10.

Hoe kun je hier uit de hellingscoëfficiënt van $y = x^{\frac{1}{2}}$ vinden in het punt $(25,5)$?



De regel $\frac{d}{dx} [x^n] = n \cdot x^{n-1}$ is ook geldig voor $n = \frac{1}{2}$.

De resultaten van opgave 5>b en >c wijzen in die richting (controleer!).
Het bewijs gaat weer met de produktregel.

Er geldt:

$$\begin{array}{l} \sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = x \\ \swarrow \quad \searrow \\ \boxed{?} \cdot \sqrt{x} + \sqrt{x} \cdot \boxed{?} = 1 \\ 2 \sqrt{x} \cdot \boxed{?} = 1 \\ \boxed{?} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{array}$$

Dus $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ is de afgeleide van \sqrt{x} .

Kortom: $\frac{d}{dx} [\sqrt{x}] = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

of: $\frac{d}{dx} [x^{\frac{1}{2}}] = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}$

6. Op dezelfde manier kun de afgeleide functie van $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ vinden.

Je begint nu zó: $x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{1}{3}} = x$.

>a Differentieer nu met de produktregel en laat zien dat geldt:

$$\frac{d}{dx} [x^{\frac{1}{3}}] = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} .$$

>b Wat zal de afgeleide functie zijn van $f(x) = x^{\frac{1}{4}}$?

En van $f(x) = x^{\frac{1}{5}}$?

7. Bekijk opnieuw de grafiek van $y = x^{\frac{1}{2}}$ (opgave 5).

> In welk punt van de grafiek heeft de ~~maximale~~ ...

8. $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ kun je differentiëren met de produktregel, immers:

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{1}{3}}.$$

> Voer de berekening uit en laat zien dat $\frac{d}{dx} [x^n] = n \cdot x^{n-1}$ ook klopt voor $n = \frac{2}{3}$.

Voortaan mag je direct de volgende regel toepassen.

Voor alle *positief gehele*
negatief gehele
positief gebroken
negatief gebroken
exponenten r geldt:

$$\frac{d}{dx} [x^r] = r x^{r-1}$$

Voorbeelden:

(1) $f(x) = 6\sqrt[3]{x^2}$

Om te kunnen differentiëren, schrijf je: $f(x) = 6 \cdot x^{\frac{2}{3}}$

Er volgt: $f'(x) = 6 \cdot \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} = \frac{4}{\sqrt[3]{x}}$

(2) $f(x) = \frac{3}{x^4}$.

Om te kunnen differentiëren, schrijf je: $f(x) = 3x^{-4}$.

Er volgt: $f'(x) = 3 \cdot -4x^{-5} = -12x^{-5} = \frac{-12}{x^5}$

9. Differentieer nu de volgende functies.

>a $f(x) = \sqrt[4]{x^3}$

>c $f(x) = 10 \cdot x^{0,2}$

>e $f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{4}{x}$

>b $f(x) = \frac{5}{x^3}$

>d $f(x) = 0,2 \cdot x^{10}$

>f $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$

10. Voorbeeld: $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x}$.

Om f te kunnen differentiëren, kun je eerst als volgt herleiden:

$$f(x) = \frac{x^2}{x} + \frac{x}{x} + \frac{1}{x} = x + 1 + x^{-1}$$

Er volgt nu: $f'(x) = 1 + 0 - x^{-2} = 1 - \frac{1}{x^2}$

Herleid en differentieer:

>a $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x}$

>c $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{\sqrt{x}}$

>b $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2}$

>d $f(x) = \frac{x^3 + 4x^2 - 3x}{x\sqrt{x}}$

11. Je kunt $y = x\sqrt{x}$ op twee manieren differentiëren.

(i) fdoor $x\sqrt{x}$ op te vatten als het produkt van x en \sqrt{x} .

(ii) door $x\sqrt{x}$ op te vatten als macht van x ($= x^{1\frac{1}{2}}$).

> Differentieer de functie op beide manieren en laat zien dat je resultaten gelijk zijn.

12. $f(x) = \frac{1}{x}$ en $f(x) = \sqrt{x}$.

> Bereken $f''(x)$ en $g''(x)$

13. Bereken:

>a $\frac{d}{dx} [\sqrt{x^5}]$ voor $x = 1$

>c $\frac{d}{dx} [x^2\sqrt{x}]$ voor $x = 9$

>b $\frac{d}{dx} [(\sqrt{x})^5]$ voor $x = 4$

>d $\frac{d}{dx} [\frac{\sqrt{x}}{x^2}]$ voor $x = 9$

14. $f(x) = 2\sqrt{x}$, $g(x) = x$, $v(x) = f(x) - g(x)$.

>a Teken in één figuur de grafieken van f , g en v .

>b Toon aan dat de maximale waartde van $v(x)$ gelijk is aan 1.

15. $f(x) = x^{1,5} - 3x$ ($x \geq 0$).

>a Vul in:

x	0	1	4	9	16
$f(x)$					
$f'(x)$					

>b Teken een grafiek van f

>c Wat is het bereik van f ?

16. In een destilleerderij kan per dag 1000 liter jonge jenever worden gestookt. De produktiekosten K (in guldens) en de opbrengst O (in guldens) zijn functies van de geproduceerde hoeveelheid q (in liters).

De economisch adviseur van het bedrijf heeft een wiskundig model opgesteld:

$$K = q^{\frac{2}{3}} \text{ en } O = 4q^{\frac{1}{2}}$$

- >a Teken de grafieken van K en O als functie van q .
- >b Teken ook een grafiek van de winst $W (= O - K)$ als functie van q .
- >c Bij welke productieomvang is W maximaal?
17. Op de emballage-afdeling van een fabriek vervaardigt men onder andere kartonnen dozen met een inhoud van 36 dm^3 . De dozen zijn aan de bovenkant open. De bodem van zo'n doos moet een vaste vorm hebben (lengte en breedte moeten zich verhouden als 2 : 1)
- >a Stel de breedte van de doos $x \text{ dm}$.
- Toon aan dat de hoogte van de doos gelijk moet zijn aan $\frac{18}{x^2} \text{ dm}^3$.
- >b Druk de benodigde hoeveelheid karton ($=k$) voor de zijanten en bodem uit in x .
- >c Bereken $\frac{dk}{dx}$.
- >d De fabrikant concludeert dat hij het voordeligst uit is als hij dozen produceert die 3 dm breed, 6 dm lang en 2 dm hoog zijn.
Hoe volgt dit uit >b en >c?

18. Zestien functies in een tabel.

Differentieer ze alle zestien en vereenvoudig zo mogelijk de resultaten.

$\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$	$\sqrt{x^{-1}}$	$\frac{1}{x}\sqrt[4]{x}$	$\sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}$
$\frac{1}{x\sqrt{x}}$	$\frac{1}{x^{-3}}$	$10x^{0,7}$	$\frac{12}{x^{0,3}}$
$\frac{x+1}{\sqrt{x}}$	$(\sqrt{x})^{-3}$	$\sqrt[3]{8x}$	$\sqrt[3]{x^{-8}}$
$\frac{1}{x} + \sin x$	$\frac{1}{x} \cdot \sin x$	$\frac{2}{\sqrt{x}} \cos x$	$\frac{2 \cos x}{\sqrt{x}}$

5 Kettingregel

Dit hoofdstuk gaat over het differentiëren van functies als:

$$y = \sqrt{x^2 + 64}$$

$$y = \sin(x^2)$$

$$y = \frac{1}{\cos^4(3x)}$$

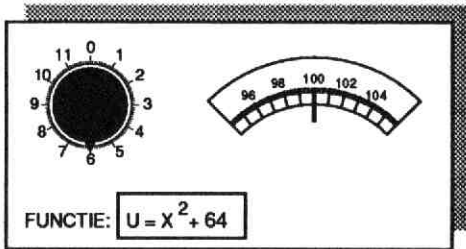
enz.,

kortom over het differentiëren van kettingfuncties.

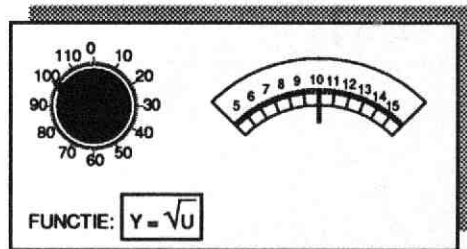
De regel die hierop betrekking heeft, de zogenaamde *kettingregel*, kan worden duidelijk gemaakt met behulp van machines, zoals je die in hoofdstuk 2 bent tegengekomen.

Hieronder zie je twee van zulke machines.

A



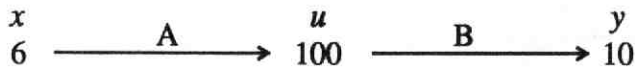
B



De afspraak is nu dat de 'uitvoer' van machine A als 'invoer' van B wordt gekozen. Zo is bij de invoer $x = 6$ op machine A, de uitvoer $u = 100$.

Deze waarde, als invoer bij B gebruikt, levert daar de uitvoer $y = 10$ op.

Schematisch:



1. We gaan nu de invoerknop van A een beetje verdraaien, bijvoorbeeld 0,1 naar rechts. Kort gezegd: $\Delta x = 0,1$.

Bij $\Delta x = 0,1$ hoort een uitslag Δu van de wijzer.

>a Verklaar: $\Delta u \approx 1,2$.

De invoerknop van B draaien we mee met de uitvoerwijzer van A.

Dat levert een wijzeruitslag Δy bij B op.

>b Verklaar: $\Delta y \approx 0,06$

>c Ga na dat bij kleine verandering Δx vanuit de stand $x = 6$ geldt:

$$\Delta u \approx 12 \cdot \Delta x \text{ en } \Delta y \approx 0,05 \cdot \Delta u$$

>d De bewering van >c houdt verband met:

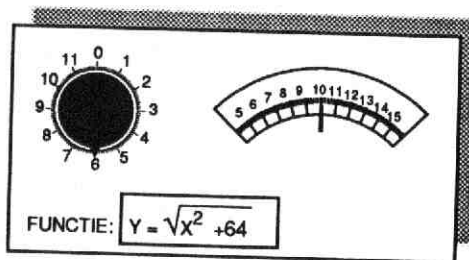
$$\frac{du}{dx} = 12 \text{ voor } x = 6 \text{ en } \frac{dy}{du} = 0,05 \text{ voor } u = 10.$$

Hoe kun je hieruit $\frac{dy}{dx}$ berekenen voor $x = 6$?

De afspraak uitvoer A = invoer B voor de machines A en B uit het vorige voorbeeld, komt neer op het schakelen van die twee machines.

De aan elkaar geschakelde machines A en B kunnen worden vervangen door één machine C.

C



In opgave 1 heb je gezien hoe je $\frac{dy}{dx}$ kunt berekenen voor $x = 6$ door vermenigvuldiging van de differentiaalquotiënten $\frac{du}{dx}$ en $\frac{dy}{du}$. Dat zijn de differentiaalquotiënten van de beide schakels waaruit de functie $y = \sqrt{x^2 + 64}$ is opgebouwd. Dit geldt natuurlijk niet alleen voor $x = 6$, maar voor elke waarde van x .

In formule:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \cdot \frac{dy}{du}} \quad \leftarrow \textit{kettingregel}$$

↓

In woorden:

de verandering van y ten opzichte van x =
de verandering van u ten opzichte van x
maal
de verandering van y ten opzichte van u .

2. Bekijk nogmaals de functie $y = \sqrt{x^2 + 64}$

>a Bereken $\frac{dy}{dx}$ voor $x = 4$.

>b Laat zien dat voor $x = 9$ geldt: $\frac{dy}{dx} = \frac{9}{\sqrt{145}}$ en dat voor $x = 10$ geldt:
 $\frac{dy}{dx} = \frac{10}{\sqrt{164}}$.

>c Enig idee hoe $\frac{dy}{dx}$ kan worden uitgedrukt in x ?

Voor je nu verder leert, hoe je de kettingregel kunt gebruiken in uiteenlopende situaties, eerst nog een tweede voorbeeld om de kettingregel duidelijk te maken.

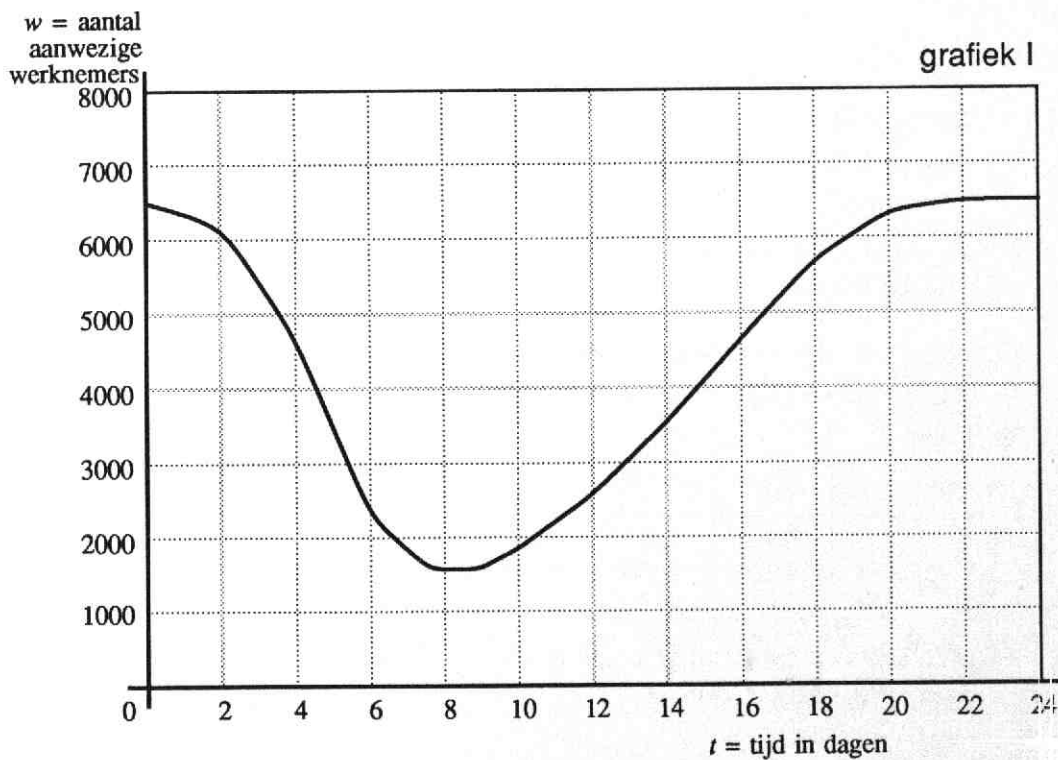
3. Een groot bedrijf werd getroffen door een hevige griepgolf. Toen de epidemie zijn top bereikte, was zo'n 80% van het totale werknemersbestand geveld door de griep.

In de volgende figuur (I) zie je de grafiek van het aantal aanwezige werknemers (= w) als functie van de tijd in dagen (= t) in de dagen na het uitbreken van de epidemie.

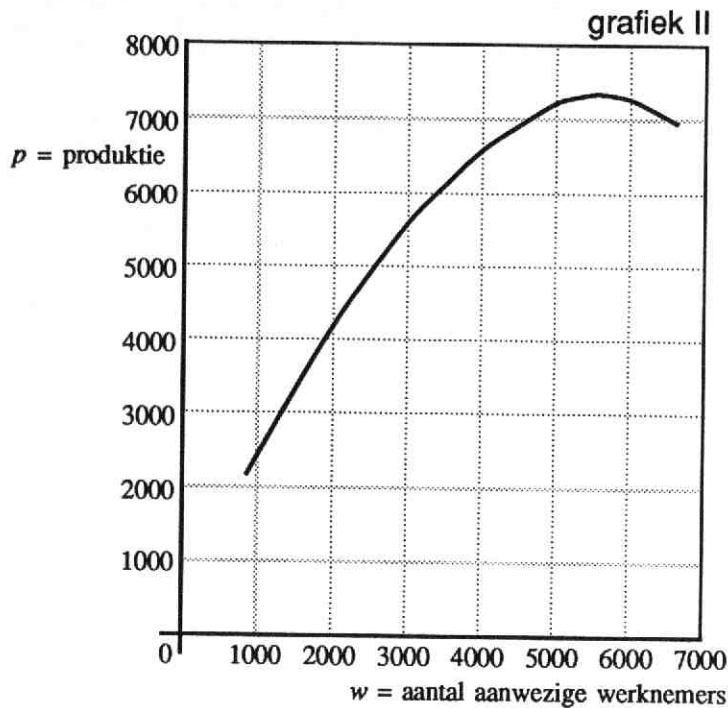
>a Hoeveel werknemers telt het bedrijf ongeveer?

>b Wanneer was het ziekteverzuim het grootst?

>c Wanneer nam het ziekteverzuim het sterkst toe?



4. De bedrijfsleider was de eerste dagen nauwelijks verontrust door het ziekteverzuim. Hij beschikte namelijk over de gegevens betreffende de produktie (= p) als functie van het aantal werknemers (zie grafiek II).



- >a Verklaar waarom de bedrijfsleider de eerste dagen nog niet zo somber gestemd was.
 - >b Hoeveel dagen na het uitbreken van de epidemie bereikte de produktie een maximum?
 - >c Schets de grafiek van p als functie van t (voor de desbetreffende periode van 22 dagen).
5. Let nog eens op het verband tussen w en t (grafiek I). In drie punten van de grafiek is de helling gemeten. Resultaat:

t	w	$\frac{dw}{dt}$
2	6200	-300
4	4500	-1200
10	1800	300

- >a Welke betekenis kun je hechten aan de getallen in de derde kolom (dus aan -300, -1200, 300)?

Ook in grafiek II is op drie plaatsen de helling gemeten.
 Resultaat:

w	p	$\frac{dp}{dw}$
6200	7190	-0,1
4500	6750	0,6
1800	3670	1,7

- >b Beredeneer dat op het tijdstip $t = 4$ de productie afnam met 720 stuks per dag.
- >c Op het tijdstip $t = 10$ nam de productie weer toe.
 In welke mate?
- >d Nam de productie op het tijdstip $t = 2$ toe of af?
 In welke mate?
- >e Welk verband bestaat er tussen $\frac{dp}{dt}$, $\frac{dw}{dt}$ en $\frac{dp}{dw}$?

De kettingregel zegt dat je het differentiaalquotiënt van een kettingfunctie kunt bepalen door de differentiaalquotiënten van de schakels te berekenen en die met elkaar te vermenigvuldigen.

Daarbij zullen de schakels functies zijn die *direct* te differentiëren zijn, dus bijvoorbeeld machtsfuncties, veeltermfuncties, sinus of cosinus.

Neem $y = \sqrt{x^2 + 64}$ ofwel $y = (x^2 + 64)^{\frac{1}{2}}$
 Als ketting genoteerd:

$$x \longrightarrow x^2 + 64 \longrightarrow (x^2 + 64)^{\frac{1}{2}}$$

Als we de uitvoer van de eerste schakel u noemen, dan is de uitvoer van de tweede schakel ook te schrijven als $u^{\frac{1}{2}}$:

$$\begin{array}{ccccc} x & \longrightarrow & x^2 + 64 & \longrightarrow & (x^2 + 64)^{\frac{1}{2}} \\ & & \parallel & & \parallel \\ & & u & \longrightarrow & u^{\frac{1}{2}} \end{array}$$

Die laatste uitvoer noemen we ook y .
 Het complete schema wordt nu:

$$\begin{array}{ccccc} x & \longrightarrow & x^2 + 64 & \longrightarrow & (x^2 + 64)^{\frac{1}{2}} \\ & & \parallel & & \parallel \\ & & u & \longrightarrow & u^{\frac{1}{2}} \\ & & & & \parallel \\ & & & & y \end{array}$$

We berekenen voor $u = x^2 + 64$ het differentiaalquotiënt $\frac{du}{dx}$ en van $y = u^{\frac{1}{2}}$ het differentiaalquotiënt $\frac{dy}{du}$.

Resultaat: $\frac{du}{dx} = 2x$ en $\frac{dy}{du} = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{u}}$

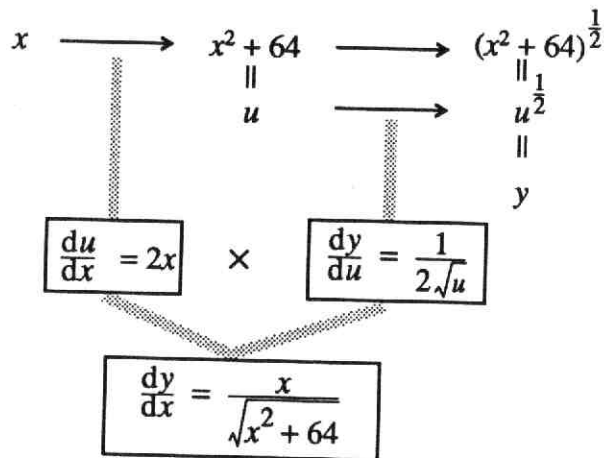
Die twee vermenigvuldigd levert $\frac{dy}{dx}$ op.

$$\frac{dy}{dx} = 2x \cdot \frac{1}{2\sqrt{u}} = \frac{x}{\sqrt{u}}$$

Omdat we $\frac{dy}{dx}$ graag willen uitdrukken in x , vervangen we u door $x^2 + 64$.

Er komt dan $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 64}}$.

In schema:



6. Gegeven is de functie $y = \sin(x^2)$.

Vier leerlingen vonden vier verschillende antwoorden voor $\frac{dy}{dx}$.

Dit zijn die vier antwoorden:

(1) $\frac{dy}{dx} = \sin(2x)$

(3) $\frac{dy}{dx} = \cos(2x)$

(2) $\frac{dy}{dx} = \cos(x^2)$

(4) $\frac{dy}{dx} = 2x \cdot \cos(x^2)$

Als je goed naar de antwoorden kijkt, zie je wel hoe elk van die leerlingen gedacht heeft.

>a Schrijf bij elk van de vier antwoorden op, hoe de gedachtengang (vermoedelijk) is geweest.

>b Welk van de vier antwoorden is het juiste? Waarom?

7. Bekijk onderstaande ketting:

$$x \longrightarrow x^2 + x + 1 \longrightarrow (x^2 + x + 1)^{-1}$$

>a Stel $u = x^2 + x + 1$ en $y = u^{-1}$ en bereken $\frac{du}{dx}$ en $\frac{dy}{du}$.

>b Druk vervolgens $\frac{dy}{dx}$ uit in x .

8. Bereken $\frac{dy}{dx}$ voor:

>a $y = (5x + 2)^3$ >b $y = \sqrt{4-x}$ >c $y = (2 - \sqrt{x})^{-1}$

Voorbeeld: $\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\sin x} \right)$.

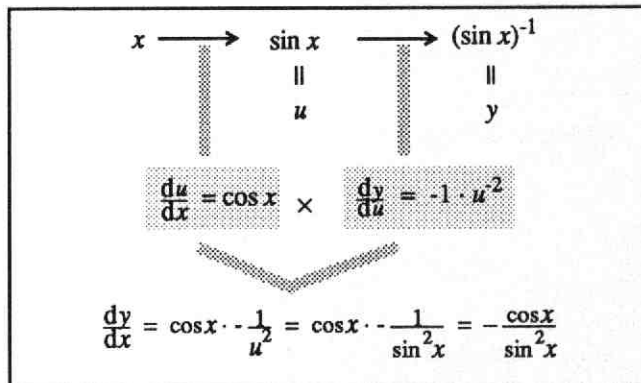
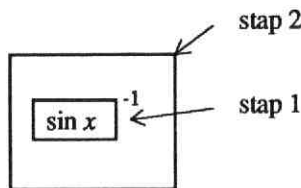
$x \longrightarrow \frac{1}{\sin x}$, ofwel $x \longrightarrow (\sin x)^{-1}$ is een ketting van twee schakels:

$$x \longrightarrow \boxed{\sin x}^{-1}, \text{ ofwel } x \longrightarrow \boxed{\sin x} \longrightarrow \boxed{\sin x^{-1}}.$$

Het kleine hok staat voor de functie 'sinus', het grote voor 'tot de macht -1'. Bij het toepassen van de kettingregel zijn er twee manieren: 'van binnen naar buiten' en 'van buiten naar binnen'.

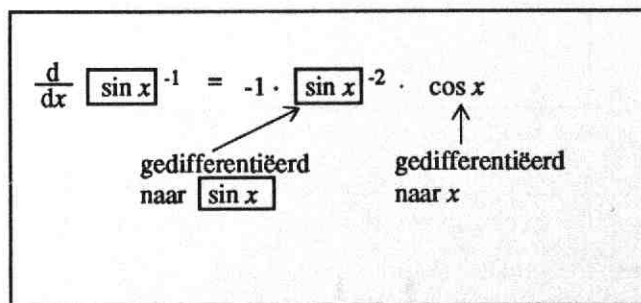
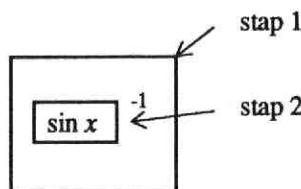
manier 1:

'van binnen naar buiten', de manier die hier al is behandeld:



manier 2:

'van buiten naar binnen':



9. Vergelijk de bovenstaande manieren om de kettingregel toe te passen.

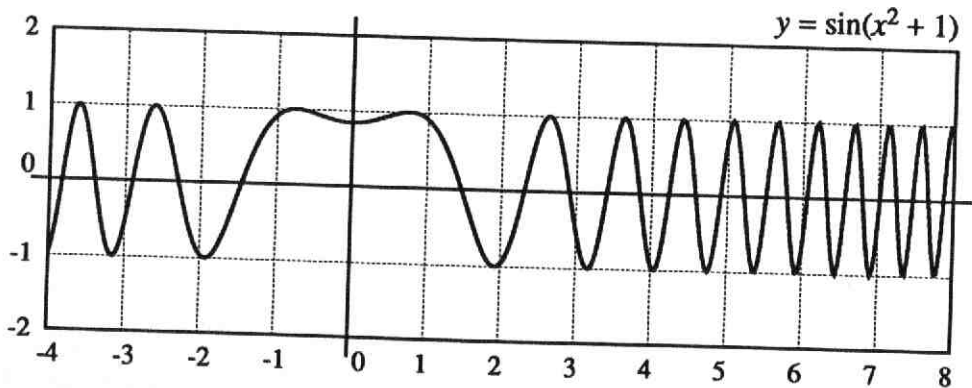
Kies de methode die je het beste ligt en bereken achtereenvolgens:

>a $\frac{d}{dx} (\cos^3 x)$. >b $\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\cos^2 x} \right)$. >c $\frac{d}{dx} \left(\frac{3}{\sqrt[3]{\sin x}} \right)$.

9. Gegeven de functie $y = \sin(x^2 + 1)$.
 Met een computer zijn de hellingscoëfficiënten berekend voor $x = 1, 2, \dots, 10$.
 Verder zijn ook de waarden van $\sin(x^2 + 1)$ en $\cos(x^2 + 1)$ voor $x = 1, 2, \dots, 10$ afgedrukt.

	(1)	(2)	(3)
x	$\sin(x^2+1)$	$\frac{d}{dx}$	$\cos(x^2+1)$
1	0,909	-0,832	-0,416
2	-0,959	1,134	0,284
3	-0,544	-5,033	-0,839
4	-0,961	-2,202	-0,275
5	0,763	6,489	0,647
6	-0,644	9,223	0,765
7	-0,262	13,534	0,965
8	0,827	-9,010	-0,562
9	0,313	17,067	0,950
10	0,452	17,950	0,892

- >a Controleer met je rekenmachientje de drie resultaten bij $x = 2$.
 Benader $\frac{dy}{dx}$ door een differentiequotient te berekenen op een geschikt interval.
- >b Deel de uitkomsten van kolom (2) achtereenvolgens door de bijbehorende uitkomsten van kolom (3).
 Had je het resultaat kunnen voorspellen?
- >c Hieronder zie je de grafiek van de $y = \sin(x^2 + 1)$.
 Hoe kun je aan de formule zien dat de grafiek symmetrisch moet zijn?



- >d Je ziet dat de 'schommelperiode' steeds kleiner wordt, naarmate je vanuit 0 meer naar rechts gaat. Hoe kun dat verklaren met behulp van de formule?
- >e De grafiek snijdt de y -as in een punt P met horizontale raaklijn. Laat zien hoe je dit kunt concluderen uit de hellingfunctie.
- >f In het plaatje zie je nog een aantal punten met horizontale raaklijn. Bereken de x -coördinaten van de twee punten met horizontale raaklijn die het dichtst bij P liggen.

10. Differentieer $y = [f(x)]^3$ naar x , achtereenvolgens voor:

>a $f(x) = x^2 + 4$

>c $f(x) = \frac{1}{1+2x}$

>b $f(x) = \sin x$

>d $f(x) = \sqrt[3]{1-x}$

De kettingregel moet vaak worden toegepast in combinatie met som-, verschil-, of produktregel.

Voorbeeld:

Gegeven: $y = \sqrt[3]{1+2x} + 2\sqrt{3+x^2}$

Gevraagd: $\frac{dy}{dx}$

Oplossing: y is de som van twee functies die ieder met de kettingregel worden gedifferentieerd.

$$y = (1+2x)^{\frac{1}{3}} + 2 \cdot (3+x^2)^{\frac{1}{2}}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3} \cdot (1+2x)^{-\frac{2}{3}} \cdot 2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (3+x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3\sqrt[3]{(1+2x)^2}} + \frac{2x}{\sqrt{3+x^2}}$$

11. Bereken $\frac{dy}{dx}$ als:

>a $y = \sqrt{(x^2-4x)} + 5x$

>c $y = 5x - \sqrt{x^2-4x}$

>b $y = \sqrt{(x^2-4x)} - 5x$

>d $y = 5x \cdot \sqrt{x^2-4x}$

12. Bereken $\frac{dy}{dx}$ als:

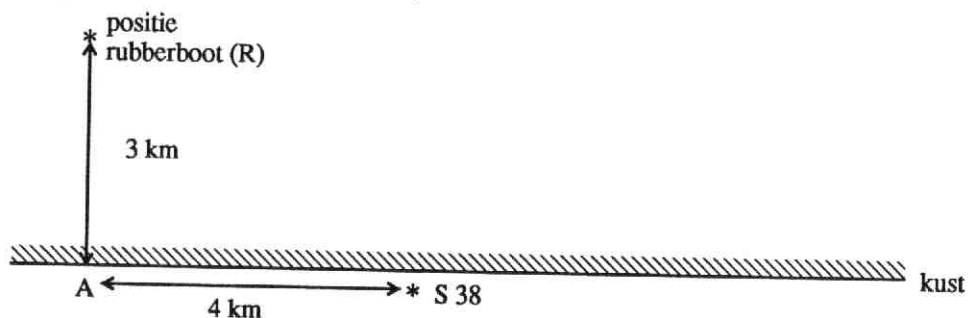
>a $y = \sin(x^2) + \cos(x^3)$

>c $y = \sin x \cdot \sqrt{\cos x}$

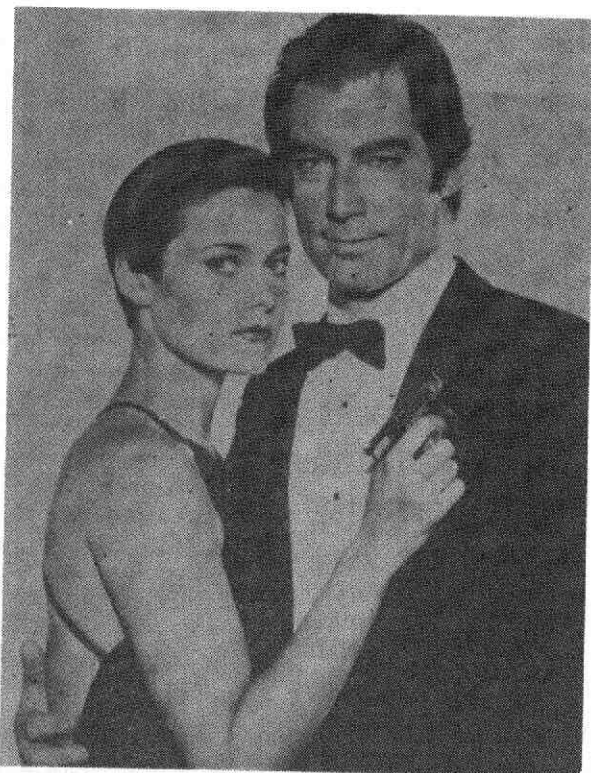
>b $y = \sin(x^2) \cdot \cos(x^3)$

>d $y = \sqrt{\sin x \cdot \cos x}$

13. Agent 007 is op 3 km afstand van de kust gedropt. Met een rubberboot wil hij de kust bereiken om bij strandpaal 38 een geheime boodschap achter te laten. Natuurlijk is het zaak dat hij zo snel mogelijk dit klusje klaart. Met de rubberboot kan hij zich roeiend verplaatsen met een snelheid van 4 km/u. Het water is zo rustig dat de vaarrichting niet van invloed is op zijn snelheid. Op het strand kan hij een lange poos een snelheid van 8 km/u volhouden. In onderstaande situatieschets zie je nog dat de strandpaal 4 km verwijderd is van de plaats (A) op het strand die James Bond zou bereiken als hij de kortste weg naar het strand zou nemen.



- >a Veronderstel dat James Bond inderdaad de kortste weg naar het strand neemt en 4 km loopt.
Hoeveel tijd heeft hij nodig om paal 38 te bereiken?
- >b Hoeveel tijd heeft hij nodig als hij in schuine richting rechtstreeks naar de strandpaal roeit?
- Misschien kan hij tijd sparen door ergens tussen A en paal 38 aan land te gaan.
- >c Stel dat hij precies halverwege (dus op 2 km van paal 38) de kust bereikt.
Hoeveel minuten tijdwinst boekt hij ten opzichte van de vorige routes?



Met behulp van differentiaalrekening kun je dit berekenen.

Stel dat hij x km van A aan land gaat (plaats B). De tijd die hij nodig heeft om S38 te bereiken is een functie van x . Vandaar dat we noteren: $t(x)$.

>d Laat zien dat geldt:

$$t(x) = 15\sqrt{9+x^2} + 30 - 7\frac{1}{2}x.$$

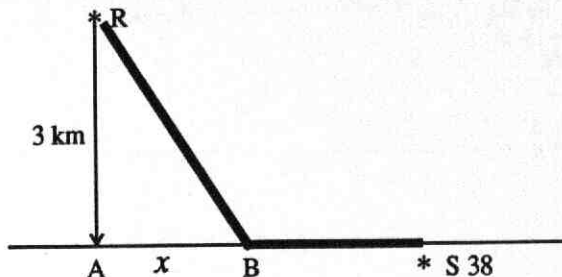
>e Bereken $t'(x)$ en los op:

$$t'(x) = 0.$$

>f Bereken (in seconden nauwkeurig) de minimale tijd die James Bond nodig heeft om paal 38 te bereiken.

>g Welke hoek moet bij de snelste route de vaarkoers RB maken met de lijn RA?

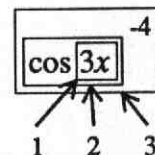
>h Verandert het antwoord op de vorige vraag als S38 meer dan 4 km van A af ligt?



Een functie die een ketting is van drie of meer schakels kan ook met de kettingregel worden aangepakt.

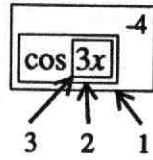
Voorbeeld: $y = \frac{1}{\cos^4(3x)}$

Oplossing: Volgens de van 'binnen naar buiten' methode:



x	\longrightarrow	$3x$	\longrightarrow	$\cos(3x)$	\longrightarrow	$\cos^4(3x)$
		u		w		y
		↓		↓		↓
		<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> $\frac{du}{dx} = 3$ </div>	×	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> $\frac{dw}{du} = -\sin u$ </div>	×	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> $\frac{dy}{dw} = -4w^{-5}$ </div>
		↓				
		$= 3 \cdot (-\sin u) \cdot (-4w^{-5})$				
		$= 3 \cdot (-\sin 3x) \cdot (-4\cos^{-5} 3x)$				
		$= \frac{12 \sin 3x}{\cos^5 3x}$				

Oplossing volgens de van 'buiten naar binnen' methode:



$$y = \cos 3x^{-4}$$
$$\frac{dy}{dx} = -4 \cdot \cos 3x^{-5} \cdot -\sin 3x \cdot 3$$

gedifferentieerd naar $\cos 3x$ gedifferentieerd naar $3x$ gedifferentieerd naar x

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{4}{(\cos 3x)^5} \cdot -3\sin 3x = \frac{12\sin 3x}{\cos^5 3x}$$

15. Kies één van beide methoden en differentieer met behulp van de kettingregel:

>a $y = \sin^3(x^2 + 1)$

>c $y = 4\sqrt{\cos\sqrt{x}}$

>b $y = \sqrt{\sin\frac{1}{x}}$

>d $y = \frac{1}{\sin\frac{1}{x}}$

Terugblik

Regel voor het differentiëren van machtsfuncties:

$$\frac{d}{dx} x^r = r \cdot x^{r-1}$$

Kettingregel

Bij een ketting van twee (of meer) functies wordt het differentiaalquotiënt berekend door vermenigvuldiging van de differentiaalquotiënten van elk van de schakels.

Voor een ketting van twee functies betekent dat:

als y een functie is van u en u een functie is van x ,

dus als $x \longrightarrow u \longrightarrow y$

dan:
$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \cdot \frac{dy}{du}$$

Opgaven

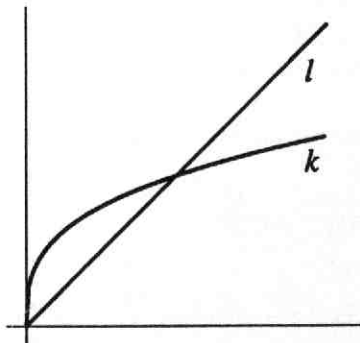
>a Bereken achtereenvolgens:

$$\frac{d}{dx} [(x^2 + 1)^4], \quad \frac{d}{dx} [\sqrt[4]{(x^2 + 1)}], \quad \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{(x^2 + 1)^4} \right]$$

>b $f(x) = \sin^3(5x)$

Bereken $f'(0,05\pi)$

>c In een figuur zijn getekend de grafieken van $y = x$ (l) en $y = x^{\frac{1}{3}}$ (k)



Aanvankelijk stijgt k sneller dan l , later langzamer.

In welk punt van k vindt de 'ommekeer' plaats (dat wil zeggen: heeft k dezelfde hellingscoëfficiënt als l)?

6 Gebroken lineaire functies

1. Twee zusjes schelen nagenoeg 5 jaar in leeftijd. Toen de oudste 10 werd zei ze trots tegen haar zusje: 'Nu ben ik twee keer zo oud als jij.' Vijf jaar later, toen de oudste opnieuw haar verjaardag vierde, herinnerde de jongste zich dit voorval plotseling en zei: 'Nu ben je nog maar $1\frac{1}{2}$ keer zo oud als ik.' (Naar een oud kinderraadsel.)
 - >a Hoe groot is de verhouding van de leeftijden als de oudste 25 jaar wordt?
 - >b Na hoeveel jaar is de oudste nog maar $1\frac{1}{10}$ keer zo oud als de jongste?
 - >c Teken de grafiek van $f(x) = \frac{x+5}{x}$ voor $1 \leq x \leq 10$.
 - >d Wat heeft het verhaal van de twee zusjes met het verloop van de grafiek te maken?
 - >e Hoe zet de grafiek zich voort voor $x > 10$?
 - >f Wat kun je zeggen van de verhouding van de leeftijden van beide zusjes als die het 'eeuwige' leven zouden hebben?

De functie $f(x) = \frac{x+5}{x}$ is een voorbeeld van een *gebroken* functie, waarbij teller en noemer elk *lineaire* functies zijn.

Daarom noemen we f een *gebroken lineaire functie*.

De algemene vorm van een gebroken lineaire functie is:

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

In bovenstaand voorbeeld geldt: $a = 1, b = 5, c = 1, d = 0$.

Verderop zal blijken dat a, b, c en d aan enige voorwaarden moeten voldoen, wil er sprake zijn van een 'echte' gebroken lineaire functie.

2. De meest eenvoudige gebroken lineaire functie f is die waarvoor geldt: $a = 0, b = 1, c = 1, d = 0$.
 - >a Geef de formule van die functie f .
 - >b Teken de grafiek van f .
 - >c Welke asymptoten heeft die grafiek?
3. Bekijk de functies $f(x) = \frac{5}{x}$ en $g(x) = \frac{x+5}{x}$.
 - >a Toon aan dat geldt: $g(x) = f(x) + 1$
 - >b Bereken $f'(x)$ en $g'(x)$
 - >c Teken (voor $x \neq 0$) de grafieken van f en g in één plaatje.

4. Gegeven: $f(x) = \frac{3x+4}{2x}$.

>a f is een gebroken lineaire functie.

Welke waarden hebben a , b , c en d ?

>b Laat zien dat geldt: $f(x) = 1\frac{1}{2} + \frac{2}{x}$ en teken vervolgens de grafiek van f .

>c Welke asymptoten heeft die grafiek?

5. Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{6}{x}$ en $g(x) = \frac{6}{x-2}$.

>a Welke lijnen zijn de asymptoten van f ? En welke van g ?

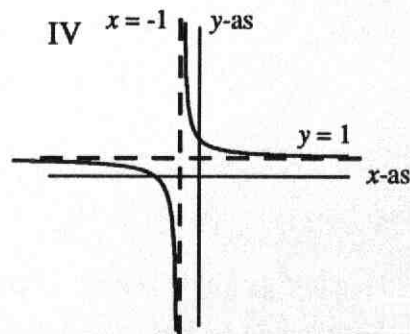
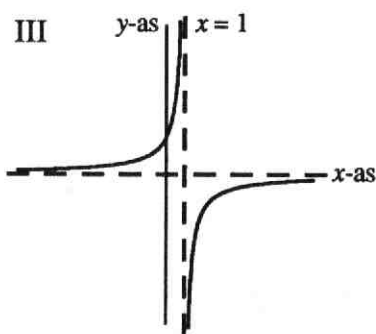
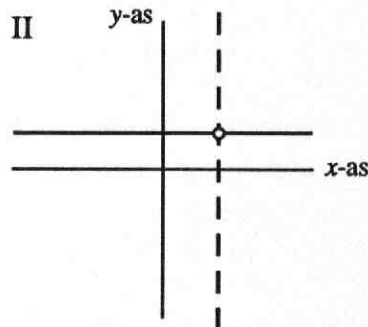
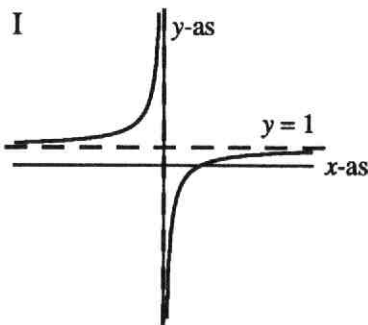
>b Teken in één figuur de grafieken van f en g .

>c Bereken $f'(x)$ en $g'(x)$.

6. Vier functies:

$$f(x) = \frac{-2}{x-1}; \quad g(x) = \frac{x+2}{x+1}; \quad h(x) = \frac{2x-6}{x-3}; \quad k(x) = \frac{x-2}{x}$$

vier grafieken:



De grafieken I, II, III en IV passen bij de functies f , g , h en k .

>a Zoek uit welke grafiek bij welke functie hoort.

>b Hoe kun je de verticale asymptoten in I, II, III en IV vinden?

De grafiek van een functie van de vorm:

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \quad (\text{waarbij } c \neq 0 \text{ en } a : b \neq c : d)$$

is een *hyperbool*; zo'n hyperbool heeft één horizontale asymptoot en één verticale asymptoot.

De horizontale asymptoot kun je vinden door voor x grote waarden in te vullen (bijvoorbeeld: $x = 1$ miljard).

De verticale asymptoot kun je vinden door na te gaan in de buurt van welke x de functiewaarde zeer groot wordt. Daarbij is het gedrag van de noemer van belang.

7. Gegeven de functie: $f(x) = \frac{15x+45}{3x-18}$.

>a Verklaar: de verticale asymptoot is de lijn $x = 6$

>b Vul in: de horizontale asymptoot is de lijn $y = \dots$

>c Teken de grafiek van f .

Als je in de functie van opgave 7 een heel groot getal voor x invult, bijvoorbeeld $x = 1\,000\,000\,000$, dan hebben de constanten 45 en -18 nauwelijks invloed op de uitkomst:

$$\frac{15\,000\,000\,000 + 45}{3\,000\,000\,000 - 18} \approx \frac{15\,000\,000\,000}{3\,000\,000\,000}$$

Je ziet zo dat de uitkomst ongeveer gelijk moet zijn aan $5 (= \frac{15}{3})$.

In het algemeen geldt dat je de horizontale asymptoot van een *gebroken lineaire functie* kunt vinden als je de tellercoëfficiënt van x deelt door de noemercoëfficiënt van x . Waarschuwing: deze opmerking is dus alleen geldig voor functies van dat type.

8. In opgave 6 heb je gezien dat de grafiek van $f(x) = \frac{2x-6}{x-3}$ een horizontale lijn is met een 'gaatje'.

Verklaring: $\frac{2x-6}{x-3} = \frac{2(x-3)}{x-3} = 2$ voor $x \neq 3$.

$\frac{2x-6}{x-3}$ heeft geen betekenis voor $x = 3$.

Bekijk nu de functie: $g(x) = \frac{2x-5}{x-3}$.

>a Verklaar: $g(x) = 2 + \frac{1}{x-3}$.

>b Hoe kun je uit de laatste formule de horizontale asymptoot van g vinden?

>c Bereken de hellingscoëfficiënt van de grafiek van g in het punt $(1, 1\frac{1}{2})$.

9. Noem de asymptoten en teken de grafiek van

>a $f(x) = \frac{3x+2}{x+1}$.

>c $f(x) = \frac{x}{x+1}$.

>b $f(x) = \frac{2x}{x+1}$.

>d $f(x) = \frac{4x-3}{2x+1}$.

10. Gegeven zijn de functies $t(x) = \frac{1}{2}x + 2$ en $n(x) = \frac{1}{3}x + 1$.

>a Teken de grafieken van t en n in één figuur.

De functie f wordt gedefinieerd door: $f(x) = \frac{t(x)}{n(x)}$

>b Bekijk het snijpunt T van de grafiek van t met de x -as.
Wat levert punt T voor informatie over de grafiek van f ?

>c Bekijk het snijpunt N van de grafiek van n met de x -as.
Wat levert punt N voor informatie over de grafiek van f ?

>d Hoe gedraagt $f(x)$ zich voor zeer grote waarden van x ?
En voor zeer kleine (zeer negatieve) waarden?

>e Teken de grafiek van f .

11. Op blz 46 staat een foto die je je misschien herinnert uit Teken en wat je weet.
De afstanden tussen opvolgende palen zijn in werkelijkheid gelijk, zeg 1 meter.

De afstand in de tekening tussen opvolgende palen varieert.

In 'Teken en wat je weet' heb je gezien hoe je meetkundig kunt controleren dat de palen werkelijk even ver van elkaar staan.

We gaan nu een formule opstellen die het verband aangeeft tussen de werkelijke afstand en de afstand op de foto.

Stel de afstand in werkelijkheid tot de voorste paal is x meter.

Voor de palen in de tekening geldt dus: $x = 0, 1, 2, 3, \dots$

De afstand tussen de palen op de foto meten we langs de onderrand van het raam.

Stel de afstand op de foto van een paal tot de voorste paal is y cm.

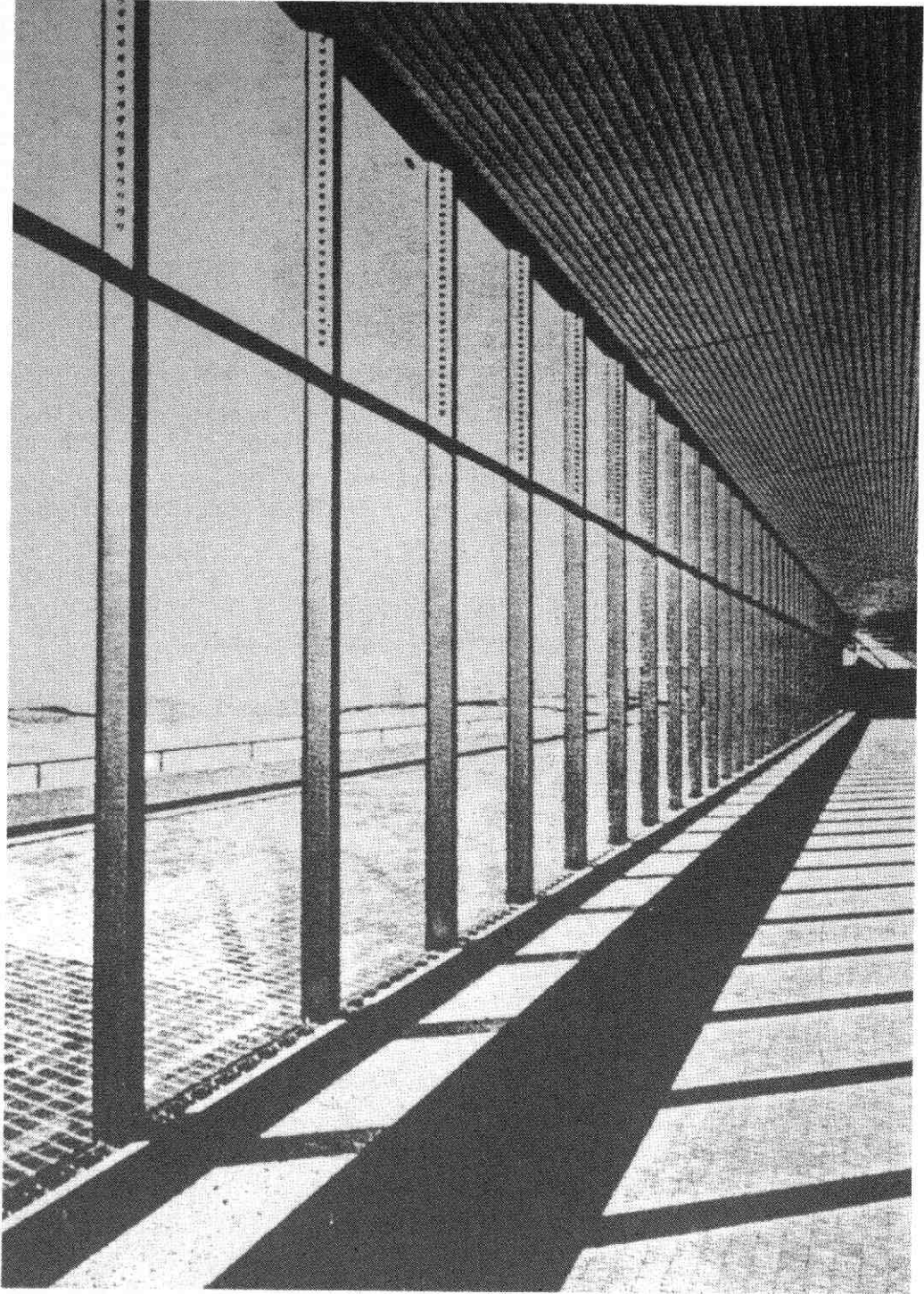
De formule is nu $y = \frac{14x}{x+3}$.

>a Controleer deze formule voor $x = 0, 1, 2, 3$.

>b Teken de grafiek van y als functie van x voor $x \geq 0$.

>c De voetpunten van de palen liggen op één rechte lijn.
Het verdwijnpunt van die lijn noemen we V .
Meet de afstand van V tot de voorste balk (in cm).

>d Hoe had je die afstand ook uit bovenstaande formule kunnen aflezen?
Verklaar dit!



7 De Quotiënt-regel

In het voorgaande heb je regels geleerd voor het differentiëren van som, verschil, produkt en ketting van twee functies.

Wat nog ontbreekt is een regel voor het differentiëren van een quotiënt.

$$\text{Stel } f(x) = \frac{t(x)}{n(x)}.$$

(t is 'tellerfunctie', n is 'noemerfunctie').

We bekijken eerst een voorbeeld: $t(x) = 3x + 4$ en $n(x) = 2x - 5$

In plaats van $f(x) = \frac{t(x)}{n(x)}$ kun je ook schrijven: $f(x) = t(x) \cdot n(x)^{-1}$

$$\text{Dus: } f(x) = (3x + 4) \cdot (2x - 5)^{-1}$$

Het differentiëren van f kun je nu uitvoeren door een combinatie van produkt- en kettingregel.

1. >a Laat zien dat geldt: $f'(x) = \frac{3}{2x-5} - \frac{6x+8}{(2x-5)^2}$.

>b De formule van $f'(x)$ kan nog worden vereenvoudigd door de twee breuken onder de noemer $(2x - 5)^2$ te brengen. Ga je gang.

Je kunt je bij het differentiëren van het quotiënt van twee functies altijd redden met produkt- en kettingregel.

Er is echter ook een regel om de afgeleide van een quotiënt rechtstreeks te vinden: de *quotiëntregel*.

Die regel luidt:

$$\text{Als } f(x) = \frac{t(x)}{n(x)}, \text{ dan } f'(x) = \frac{t'(x) \cdot n(x) - t(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2}$$

Of in telegramstijl:

$$\left(\frac{t}{n}\right)' = \frac{t' \cdot n - t \cdot n'}{n^2}$$

2. >a Neem $t(x) = 3x + 4$ en $n(x) = 2x - 5$ en bereken:

$$\frac{t'(x) \cdot n(x) - t(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2}$$

>b Controleer of de uitkomst gelijk is aan de afgeleide van $f(x) = \dots$ je die in opgave 1 hebt gevonden.

3. $f(x) = \frac{x^3}{x^2}$

Doe even net of je niet ziet dat de breuk te vereenvoudigen is.

> Stel $t(x) = x^3$ en $n(x) = x^2$ en pas de quotiëntregel toe om $f'(x)$ te vinden. Alles goed?

4. $y = \frac{x^3-1}{x^2+1}$

> Laat zien dat uit de quotiëntregel volgt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^4 + 3x^2 + 2x}{(x^2 + 1)^2}$$

Je hebt de quotiëntregel al een paar keer toegepast, zonder dat aangetoond is dat de regel echt klopt. Er zijn verschillende methoden om de regel te bewijzen:

(1) Schrijf $\frac{t(x)}{n(x)}$ als $t(x) \cdot n(x)^{-1}$ en pas produkt- en kettingregel toe.

(2) Als $f(x) = \frac{t(x)}{n(x)}$ dan $f(x) \cdot n(x) = t(x)$ (*)

Links en rechts gedifferentieerd in (*) geeft gelijke functies:

$$f'(x) \cdot n(x) + f(x) \cdot n'(x) = t'(x) \text{ of korter: } f'n + fn' = t'$$

Hiermee kan f' worden uitgedrukt in t, n, t' en n' .

(3) Tenslotte kun je nagaan of $(\frac{t}{n})' = \frac{t'n - tn'}{n^2}$ klopt, door uit te gaan van:
 $\frac{t}{n} \cdot n = 1$.

Links en rechts differentiëren geeft:

$$(\frac{t}{n})' \cdot n + \frac{t}{n} \cdot n' = 0$$

Je kunt nu controleren of $(\frac{t}{n})'$ inderdaad vervangen mag worden door $\frac{t'n - tn'}{n^2}$.

5. Kies uit (1), (2) en (3) de methode die je het meest aanspreekt en bewijs de quotiëntregel.

6. Vergelijk de quotiëntregel met de produktregel:

$$(a \cdot b)' = a'b + ab' \text{ en } (\frac{a}{b})' = \frac{a'b - ab'}{b^2}$$

Ze hebben wel wat van elkaar weg, maar de produktregel is 'evenwichtiger'. De 'a' en de 'b' in de produktregel zijn volkomen gelijkwaardig, je kunt ze tegen elkaar uitwisselen. Logisch, want $a \cdot b = b \cdot a$.

Bij de quotiëntregel is dat niet het geval.

>a Wat gebeurt er met de waarde van $\frac{a}{b}$ als je a en b vermenigvuldigt met dezelfde factor?

>b Druk $(\frac{b}{a})'$ uit in a' , b' , a en b vergelijk de uitkomst met die van $\frac{b'}{a'}$.
Waar zitten de verschillen?

De moraal van opgave 6:

Bij het differentiëren met de quotiëntregel is de *volgorde* belangrijk: eerst de tellerfunctie differentiëren (en de noemer ongewijzigd laten), daarna andersom.

7. Differentieer de functie f in het geval $f(x) =$

>a $\frac{x^2+1}{3x+1}$

>e $\frac{4x}{x^2+1}$

>b $\frac{x}{\sin x}$

>f $\frac{x^2+1}{4x}$

>c $\frac{3x^2+x+1}{2x^2-x+1}$

>g $\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}}$

>d $\frac{3x-4}{4x-5}$

>h $\frac{\cos x}{x^2}$

8. $f(x) = \frac{3}{x^2-3}$ en $g(x) = \frac{x^2}{x^2-3}$

>a Bereken $f'(x)$ en $g'(x)$.

>b De functies f en g zijn verschillend maar hebben dezelfde afgeleide.
Hoe kan dat?

9. $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2+1}$ en $g(x) = \frac{x^2+1}{x^2+x+1}$

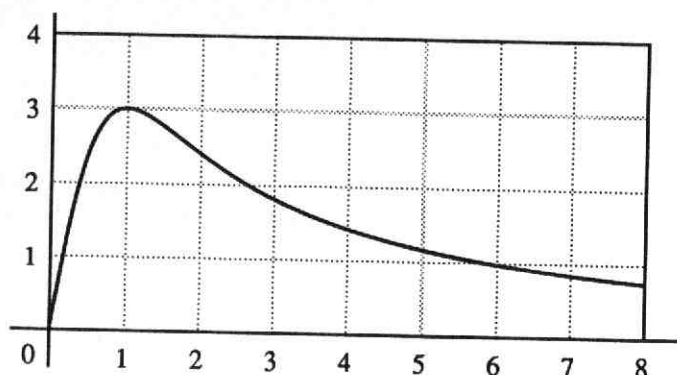
>a Stel een vergelijking op van de lijn die de grafiek van f raakt in het punt met x -coördinaat 0.

>b Dezelfde vraag voor g .

>c In welke intervallen is f stijgend en in welke dalend?

>d Overall waar f stijgend is, is g juist dalend.
Bewijs dit.

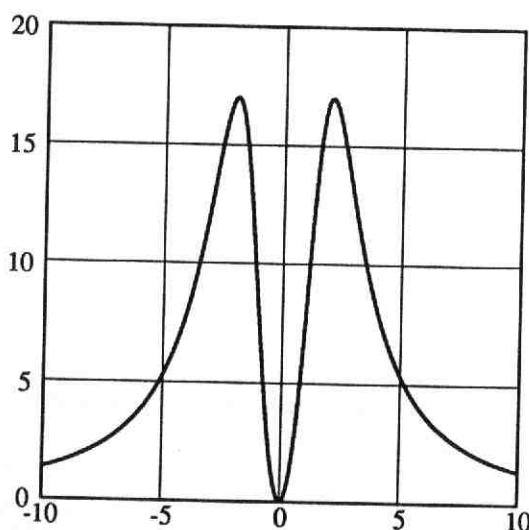
10. Hieronder zie je de grafiek van $f(x) = \frac{6x}{x^2+1}$ voor $x \geq 0$.



- >a Volgens de tekening is het maximum van $f(x)$ gelijk aan 3.
Hoe kun je dat bewijzen met behulp van de afgeleide functie?
- >b Bereken $f''(x)$.
- >c Laat zien dat de grafiek een buigpunt heeft bij $x = \sqrt{3}$.
- >d Teken de grafiek van f in het gebied $x \leq 0$.

11. Gegeven is de functie $f(x) = \frac{136x^2}{x^4+16}$ voor $-10 \leq x \leq 10$.

De grafiek van die functie is hieronder getekend.



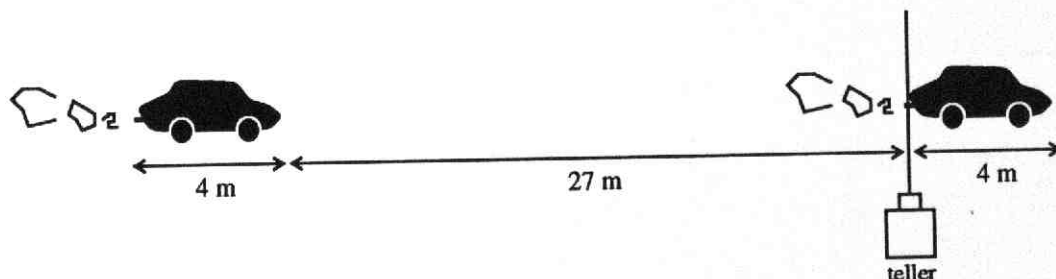
- >a Bereken de kleinste en de grootste functiewaarde.
- >b Los op: $f(x) \geq 8$.
- >c De grafiek van de functie $g(x) = f(x) + c$ raakt de lijn $y = 10$.
Lees uit de figuur af voor welke waarde(n) van c dit het geval is.

Een te groot verkeersaanbod op een te smalle weg . . . weer een file.
Hoe drukker het is, des te langzamer de file rijdt.
Blijkbaar kunnen bij lage snelheden meer auto's worden verwerkt.
Toch gek, want bij een snelheid van 0 km/u stroomt geen enkele auto door.
Is er een optimale snelheid van een file?
Over dit probleem gaat de volgende opgave:

12. Belangrijk bij het fileprobleem is de onderlinge afstand van de auto's. Hoe groter de snelheid van de file, hoe groter de onderlinge afstand moet zijn, en dat is van invloed op de doorstroming. Anderzijds is de onderlinge afstand bij lage snelheid wel klein, maar in een slakkegangetje kan er ook niet veel doorstromen.

De onderlinge afstand bepalen we met behulp van de vuistregel ($r = \text{remweg}$):
 $r = 0,0075 v^2$ (v in km/u, r in m).

- >a Hoeveel m afstand tot zijn voorligger zou een automobilist tenminste moeten aanhouden bij een snelheid van 60 km/u?
En bij een twee keer zo grote snelheid?
- >b Stel je voor dat een file een snelheid van 60 km/u heeft en uit louter personenauto's bestaat. Neem voor het gemak aan dat elke auto 4 m lang is en dat iedere automobilist de voorgeschreven remafstand in acht neemt.
Op een zeker punt heeft de politie een teller geplaatst.



Laat zien dat er per minuut ongeveer 32 auto's de teller passeren.

- >c Hoe groot is het aantal auto's dat de teller passeert bij een snelheid van 120 km/u?
- >d Het aantal auto's ($=N$) dat de teller per minuut passeert is een functie van de snelheid v (in km/u).

Toon aan dat geldt:
$$N = \frac{1000v}{0,45v^2 + 240}$$

>e Bereken $\frac{dN}{dv}$.

>f Toon aan dat de optimale snelheid van een file onder de hierboven beschreven voorwaarden ongeveer 23 km/u is.

Terugblik

Een gebroken lineaire functie is van de vorm:

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

De grafiek van f is een *hyperbool* (tenzij $c = 0$ of $a : c = b : d$). Zo'n hyperbool heeft twee *asymptoten*.

De *horizontale* asymptoot wordt gevonden door de verhouding van $ax + b$ en $cx + d$ te bekijken voor x wordt 'heel groot' (x 'nadert tot oneindig'). Die verhouding nadert tot $\frac{a}{c}$. De lijn $y = \frac{a}{c}$ is de horizontale asymptoot.

De *verticale* asymptoot wordt gevonden door te onderzoeken voor welke x de functiewaarden 'heel groot' worden ('tot oneindig naderen'). Dit gebeurt als de noemer van de gebroken vorm tot nul nadert.

Uit $cx + d = 0$ volgt $x = -\frac{d}{c}$ en dit is meteen de vergelijking van de verticale asymptoot.

Quotiëntregel

Laat u en v functies zijn van x .

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{u(x)}{v(x)} \right] = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$$

Kortweg

$$\left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Opgaven

>a Bereken $\frac{d}{dx} \left[\frac{x^2 + 3}{x + 1} \right]$ en $\frac{d}{dx} \left[\frac{x^2 + x + 4}{x + 1} \right]$

>b $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0$)

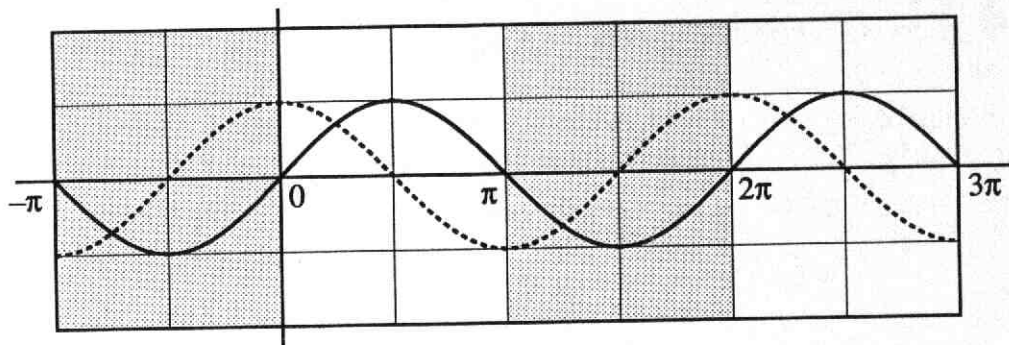
Toon aan: $f'(x) = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}$

>c Wat kun je zeggen van $f'(x)$ in de vorige opgave in het geval $a : c = b : d$.

8 Een bekende goniometrische functie

1. Gegeven is de functie: $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$.

Omdat f samensteld is uit de functies sinus en cosinus zie je hieronder de grafieken van die twee getekend.



- >a Welke informatie geven de oplossingen van de vergelijking $\sin x = 0$ over de grafiek van $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$?
- >b Dezelfde vraag maar nu voor de vergelijking: $\cos x = 0$.
- >c Heeft de grafiek van f asymptoten?
- >d Vul in onderstaande tabel de *exacte waarden* in:

x	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	$1\frac{1}{6}\pi$	$1\frac{1}{4}\pi$	$1\frac{1}{3}\pi$
$\sin x$									
$\cos x$									
$f(x)$									

>e Bereken ook: $f(-\frac{1}{6}\pi)$; $f(-\frac{1}{4}\pi)$; $f(-\frac{1}{3}\pi)$.

>f Uit de antwoorden bij >c en >d kun je vermoeden dat de periode van

$f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$ niet 2π is, maar verrassenderwijs π .

Bestudeer bovenstaande figuur. Hoe kun je daaruit afleiden dat f inderdaad de periode π moet hebben?

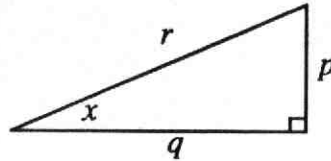
>g Teken de grafiek van f voor het interval $-\frac{1}{2}\pi < x < 2\frac{1}{2}\pi$

2. In een rechthoekige driehoek met een scherpe hoek van x radialen geldt:

$$\sin x = \frac{p}{r}$$

$$\cos x = \frac{q}{r}$$

$$\tan x = \frac{p}{q}$$



- > Bewijs dat hieruit volgt: $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

Het in opgave 2 genoemde verband tussen sinus, cosinus en tangens geldig voor scherpe hoeken, kan worden gebruikt om de tangensfunctie ook voor alle andere x -waarden te definiëren (met uitzondering van $\dots, -1\frac{1}{2}\pi, -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi, 1\frac{1}{2}\pi, 2\frac{1}{2}\pi, \dots$)

Voor alle $x \neq \frac{1}{2}\pi + k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) geldt:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

In opgave 1 heb je al studie gemaakt van de tangensfunctie en ontdekt dat tangens een kleinere periode heeft dan sinus en cosinus.

tan is een periodieke functie met periode π
ofwel:

$$\tan(x + k\pi) = \tan x \text{ voor } k = \pm 1, \pm 2, \dots$$

3. $\tan x$ is niet gedefiniëerd voor $x = \dots, -1\frac{1}{2}\pi, -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi, 1\frac{1}{2}\pi, \dots$

>a Waarom eigenlijk niet?

>b Bereken met je rekenmachine enkele waarden van $\tan x$ voor x in de buurt van $\frac{1}{2}\pi$.

Conclusie?

4. Je kunt $f(x) = \tan x$ differentieren met behulp van de quotiëntregel.

>a Controleer deze berekening:

$$f'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2 = 1 + \tan^2 x$$

>b Uit het resultaat van >a volgt dat de grafiek van de tangens een buigpunt heeft in $(0,0)$. Hoe?

>c Welke vergelijking heeft de buigraaklijn in $(0,0)$?

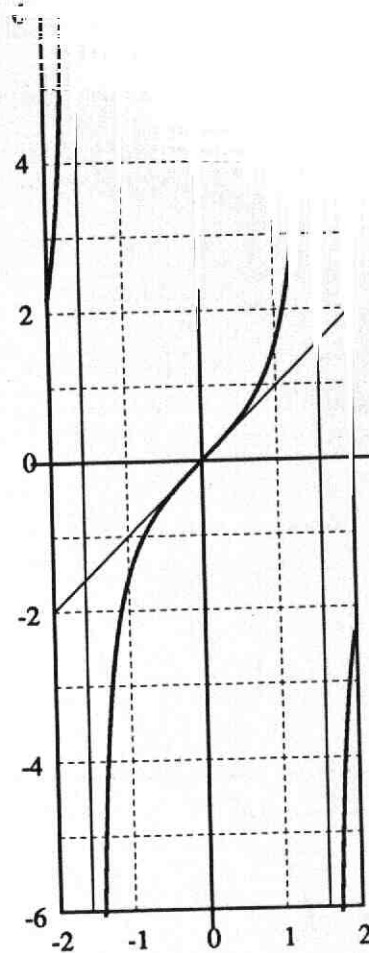
>d Welke andere buigpunten heeft de tangensgrafiek?

5. Hiernaast zie je de tangensgrafiek voor $-\frac{1}{2}\pi < x < \frac{1}{2}\pi$ met de buigraaklijn in $(0,0)$.

In de buurt van $(0,0)$ valt de tangensgrafiek bijna samen met de lijn $y = x$.

Er geldt: $\tan x \approx x$ voor $x \approx 0$.

- > Controleer dit met je rekenmachientje (neem enkele waarden van x in de buurt van 0).
6. Bekijk de grafiek van $f(x) = \tan x$ (opgave 1).
- > Voor welke x geldt: $\tan x = 1$?
7. Gebruik het resultaat van 4>a en bereken:
- >a $\frac{d}{dx} [\tan 2x]$
- >b $\frac{d}{dx} [\tan^2 x]$
- >c $\frac{d}{dx} \left[\frac{1}{\tan x} \right]$
- >d $\frac{d}{dx} [\tan(1-x)]$
8. Welk interval bereikt:
- >a $1 + \tan 2x$ als $-\frac{1}{6}\pi < x < \frac{1}{4}\pi$?
- >b $1 + \tan^2 x$ als $-\frac{1}{6}\pi < x < \frac{1}{4}\pi$?
- >c $\tan^2 x - 2\tan x$ als $0 \leq x < \frac{1}{2}\pi$?



Terugblik

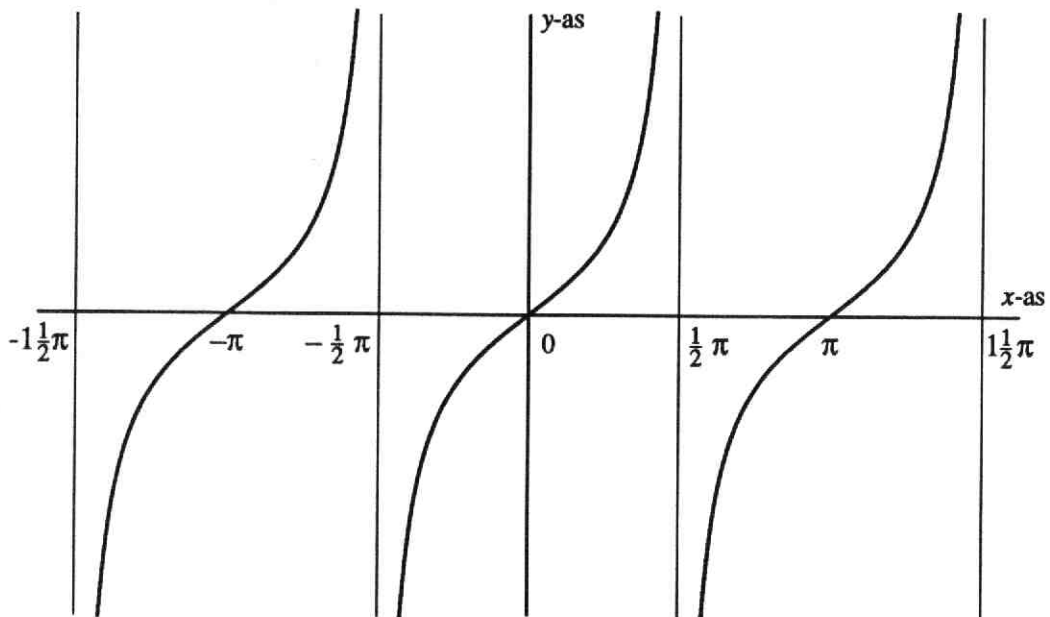
In hoofdstuk 8 heb je een nieuwe standaardfunctie leren kennen: de functie *tangens*, kortweg *tan*.

Voor alle $x \neq \frac{1}{2}\pi + k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) geldt:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

De functie *tan* is periodiek met periode π .

De grafiek van *tan* heeft (oneindig veel) verticale asymptoten; de vergelijkingen hiervan zijn: $x = \frac{1}{2}\pi + k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).



Voor het differentiëren van de functie *tan* kun je gebruik maken van de regel:

$$\frac{d}{dx} [\tan x] = 1 + \tan^2 x$$

Opgaven

- >a In welke punten tussen $x = -\frac{1}{2}\pi$ en $x = \frac{1}{2}\pi$ heeft de grafiek van $y = \tan x$ de hellingcoëfficiënt 4?
- >b Welke periode heeft de functie $f(x) = \tan 2x$?
Teken de grafiek van $0 \leq x \leq 2\pi$.

9 Oefeningen

Oefeningen in differentiëren

1. Bereken $\frac{dy}{dx}$ in de volgende gevallen.

>a $y = 4(x^3 + x)^2$

>b $y = \sqrt[3]{2x^5 - 4x^2}$

>c $y = \sin(x^2 + x)$

>d $y = x \cdot \tan x$

>e $y = \frac{4x+1}{3x+2}$

>f $y = \frac{1}{x - \cos x}$

>g $y = x\sqrt{2-x^2}$

>h $y = \frac{x}{\sqrt{1-x}} + 3$

2. Bereken f' en schrijf de formule voor f' in een vorm zonder negatieve of gebroken exponenten.

>a $f(x) = x^{23} \cdot \sqrt[5]{\frac{1}{x^2}}$

>b $f(x) = \sqrt[3]{\tan x}$

>c $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$

>d $f(x) = \frac{\sqrt[4]{x^3}}{x+1}$

>e $f(x) = (x^2 + x - 1)^{-2}$

>f $f(x) = (x^2 - \sin 2x)^{1\frac{1}{2}}$

>g $f(x) = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{x}}}$

>h $(x-2)^{\frac{1}{2}} + (5-x)^{\frac{1}{2}}$

3. >a $f(x) = \sqrt{x^3} + \frac{81}{\sqrt{x}}$

Bereken $f'(9)$

>b $f(x) = \frac{x^2+1}{\sqrt[3]{x}}$

Bereken $f'(8)$

>c $f(x) = \tan^3 x$

Bereken $f'(1\frac{1}{3}\pi)$

>d $f(x) = \sin 3x \cdot \cos 4x$

Bereken $f'(1\frac{1}{6}\pi)$

4. Bereken f'' voor:

>a $f(x) = \sqrt{3x+2}$

>b $f(x) = \sqrt{3x+2}$

>c $f(x) = \tan x$

>d $f(x) = \tan 3x$

>e $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$

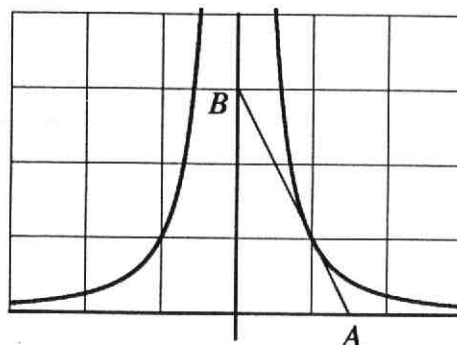
>f $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

>g $f(x) = \sin \pi x$

>h $f(x) = \sin \frac{\pi}{2} x$

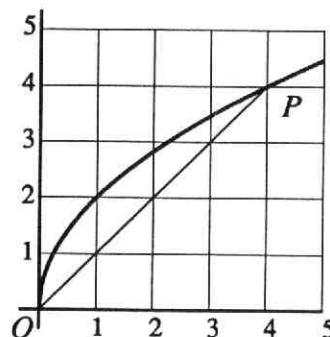
Oefeningen over raaklijnen aan grafieken

5. De raaklijn in $(1,1)$ aan de grafiek van $y = \frac{1}{x^2}$ snijdt de x -as in A en de y -as in B .
Bereken de lengte van AB .



6. Teken in één figuur de grafieken van $y = \frac{1}{x^2}$ en $y = x^3$.
Het snijpunt van die grafieken is S .
De hoek waaronder de grafieken elkaar in S snijden is per definitie gelijk aan de hoek tussen de raaklijnen in S .
Bereken die hoek.

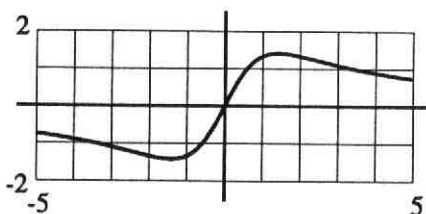
7. $O(0,0)$ en $P(4,4)$ liggen op de grafiek van $y = 2\sqrt{x}$.
Tussen O en P is er één punt Q op de grafiek waarin de raaklijn aan de grafiek evenwijdig is met OP .
Welk punt is dat?



8. De grafiek van $y = x^3 + 3x^2 + 4x + 2$ heeft één buigpunt (B).
De buigraaklijn van de grafiek is de raaklijn in B .
Stel een vergelijking op van die buigraaklijn.

9. $f(x) = \frac{4x}{x^2 + 2}$.

- >a Bewijs dat de lijn $y = 2x$ een raaklijn van de grafiek is.
>b Bereken de (exacte) coördinaten van de punten op de grafiek waarin de raaklijn horizontaal is.



Oefeningen over berekeningen van maximum

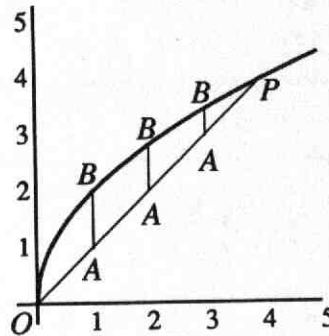
10. $y = \frac{1}{2}x^4 - \frac{2}{3}x^3$

- >a Bereken $\frac{dy}{dx}$ en schets het tekenverloop hiervan.
- >b Bereken de minimale waarde die y kan hebben.

11. Bereken het maximum van $f(x) = (x^2 + x + 1)^{-1}$

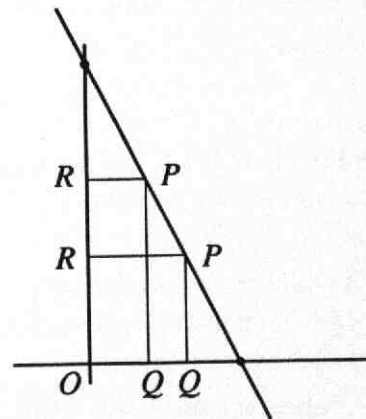
12. Nogmaals de figuur bij opgave 7.
De punten A en B bewegen resp. over het lijnstuk OP en het deel van de grafiek tussen O en P .
Daarbij is het lijnstuk AB steeds verticaal.

- >a Druk de lengte van AB uit in x .
- >b Bereken de maximale lengte van AB .



13. Het punt P doorloopt de lijn $y = -2x + 2$ tussen $(1,0)$ en $(0,2)$.
 Q en R lopen mee over de x -as en de y -as zodat $OQPR$ steeds een rechthoek is.

- >a Druk de oppervlakte van de rechthoek uit in x .
- >b Bereken de maximale oppervlakte van de rechthoek.



14. Van een rechthoek is de oppervlakte 12 cm^2 .

Er zijn natuurlijk verschillende afmetingen mogelijk.
De omtrek van de rechthoek ligt dus niet vast (16 cm , 14 cm).

- >a Stel één zijde van een rechthoek uit in x .
- >b Bereken (exact) de minimale waarde van de omtrek van de rechthoek.
- >c Hoe kun je verklaren dat de omtrek niet vast is?

Toepassingen

15. De lengte L (in cm) van een metalen staaf is afhankelijk van de temperatuur t (in $^{\circ}\text{C}$).

De zogenaamde uitzettingscoëfficiënt van de staaf bij $t^{\circ}\text{C}$ is gelijk aan $\frac{dL}{dt}$ (hierbij is L_0 de lengte van de staaf bij 0°C).

Er is nog gegeven: $L = L_0 \cdot (1 + at + bt^2)$ met $a = 2 \cdot 10^{-5}$ en $b = 3,5 \cdot 10^{-8}$.

> Bereken de uitzettingscoëfficiënt van de staaf bij 50°C .

16. Tussen de verkochte hoeveelheid q van een zeker artikel en de prijs P bestaat het volgende verband:

$$P = 500 + \frac{1}{6}q - \frac{1}{3600}q^2 \quad (\text{voor } q \geq 300)$$

>a Ga na dat volgens de formule geldt: q stijgt als P daalt.

>b De omzet R is gelijk aan $q \times P$.

Bereken de prijs van het artikel waarvan de omzet maximaal is.

17. Om 24.00 uur vaart het schip de Bruinvis 125 km precies ten zuiden van het schip de Albatros.

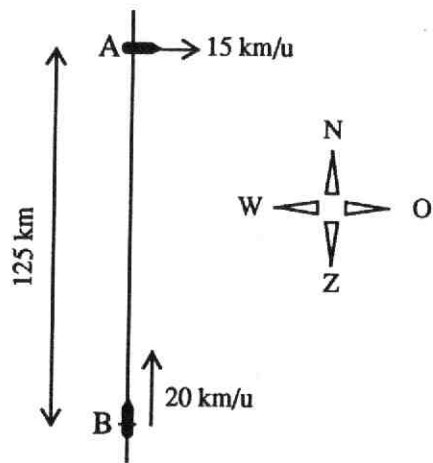
De Bruinvis vaart in noordelijke richting met een snelheid van 20 km/u, de Albatros gaat oostwaarts met 15 km/u.

>a Teken op schaal de posities van A en B om 02.00 uur en om 04.00 uur.

Bereken ook de onderlinge afstand van beide schepen op die tijden.

>b Druk de onderlinge afstand van A tot B, t uur na middernacht, uit in t .

>c Bereken op welk tijdstip de afstand tussen de beide schepen minimaal is.



18. Een boot nadert de kust met een snelheid van 9 m/sec. Op een gegeven moment ($t = 0$) worden de motoren afgezet. De snelheid t seconden na het afzetten van de motor wordt gegeven door de formule: $v(t) = (3 - \frac{1}{2}t)^2$

>a Leg uit dat de afgelegde afstand van de boot, na het afzetten van de motor gegeven wordt door de formule: $s(t) = 18 - \frac{2}{3}(3 - \frac{1}{2}t)^3$

>b Hoeveel meter drijft de boot uit?