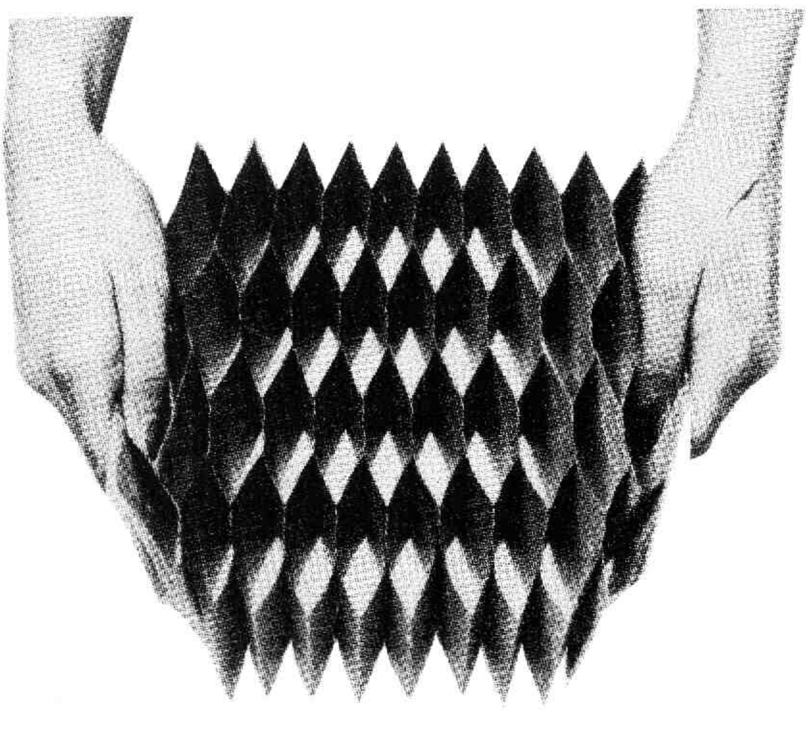
Werken met goniometrische functies

https://hdl.handle.net/1874/10130

WERKEN MET GONIOMETRISCHE FUNCTIES



wiskunde B

WERKEN MET GONIOMETRISCHE FUNCTIES

Hawex - Wiskunde B

WERKEN MET GONIOMETRISCHE FUNCTIES

Een produktie ten behoeve van het project Hawex.

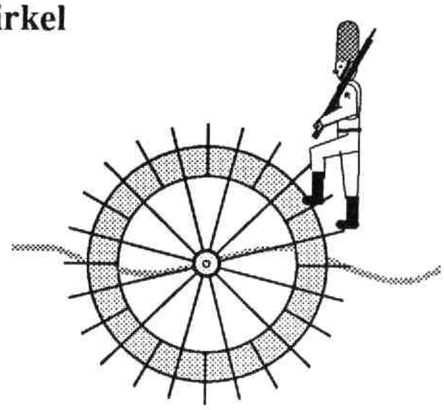
Ontwerper:	Martin Kindt
Met medewerking van:	Anton Roodhardt Jan de Jong Henk van der Kooy Jan de Lange Martin van Reeuwijk
Vormgeving:	Ada Ritzer

Utrecht, januari 1990

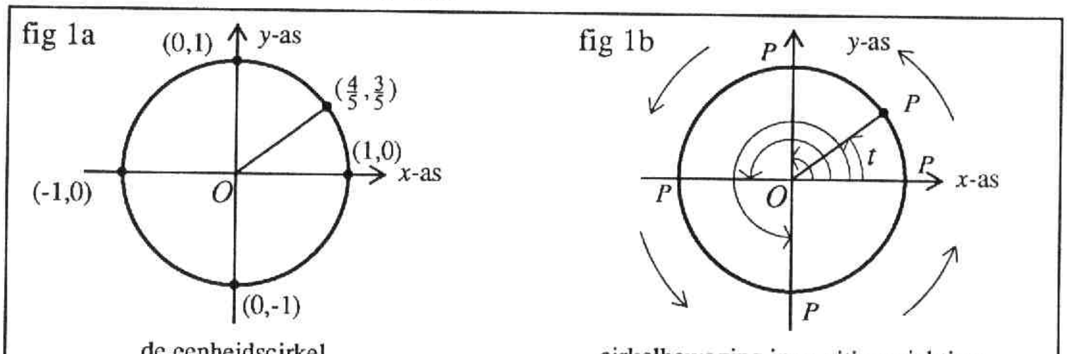
Inhoudsopgave

1 De sinus, de cosinus en de eenheidscirkel

In het boekje 'sinus en co' heb je gezien dat de sinusfunctie alles te maken heeft met een zogenaamde cirkelbeweging. Denk bijvoorbeeld aan het waterrad of aan de rondjeslopende schildwacht. In dit hoofdstuk zullen we het verband tussen de cirkelbeweging en de beide functies sin en cos nog eens precies bekijken. Voor een deel herhaling, maar toch ook weer een paar nieuwe dingen. . .



Voor het gemak beperken we ons tot een beweging over een cirkel met straal 1. Als zo'n cirkel geplaatst is in een assenstelsel, met zijn middelpunt in de oorsprong, spreekt men van de *eenheidscirkel*.



de eenheidscirkel | cirkelbeweging in *positieve* richting

1. De eenheidscirkel gaat natuurlijk door de punten (1,0); (0,1); (-1,0) en (0,-1) (zie figuur 1a), maar bijvoorbeeld ook door het punt $(\frac{4}{5},\frac{3}{5})$.

   >a Verklaar dat laatste.

   >b Zonder rekenwerk te verrichten is het nu mogelijk zeven andere punten van de eenheidscirkel op te geven. Welke punten zijn dat?

Stel je nu voor dat het punt P over de eenheidscirkel beweegt in *positieve* richting (dat wil zeggen: tegen de wijzers van de klok in; andersom is negatief).
De plaats van P op de eenheidscirkel wordt volledig bepaald door de draaihoek t van de *voerstraal OP* ten opzichte van de positieve x-as (zie figuur 1b). Meestal zullen we de draaihoek meten in radialen. Zo geldt bijvoorbeeld:

draaihoek	0	$\frac{1}{2}\pi$	π	$1\frac{1}{2}\pi$	2π	$2\frac{1}{2}\pi$	enz.
plaats P	(1,0)	(0,1)	(-1,0)	(0,-1)	(1,0)	(0,1)	enz.

2. >a Bereken de coördinaten van P voor $t = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$ ($k = 0, 1, 2, 3$).

   >b Bereken de draaihoek t (in radialen tussen 0 en 2π) voor het geval P de plaats $(\frac{4}{5},\frac{3}{5})$ inneemt.

Let nu op de afstand van het draaiende punt P tot de x-as. Omdat we die afstand negatief rekenen als P onder de x-as ligt, kunnen we ook zeggen: Let op de y-coördinaat van het draaiende punt P (= y_P). y_P varieert tussen -1 en 1 (inclusief de grenzen) en is zo een functie van de draaihoek t. Het verband tussen y_P en t wordt voor $0 \leq t \leq 2\pi$ weergegeven door de bekende sinusgrafiek (of sinusoïde), zie figuur 3.

Er geldt: $\boxed{y_P = \sin t}$

fig 2

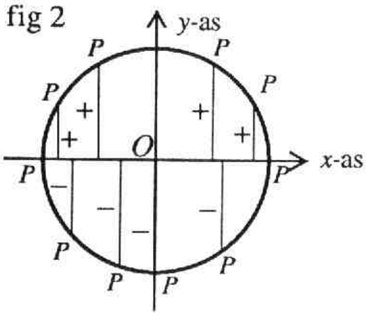
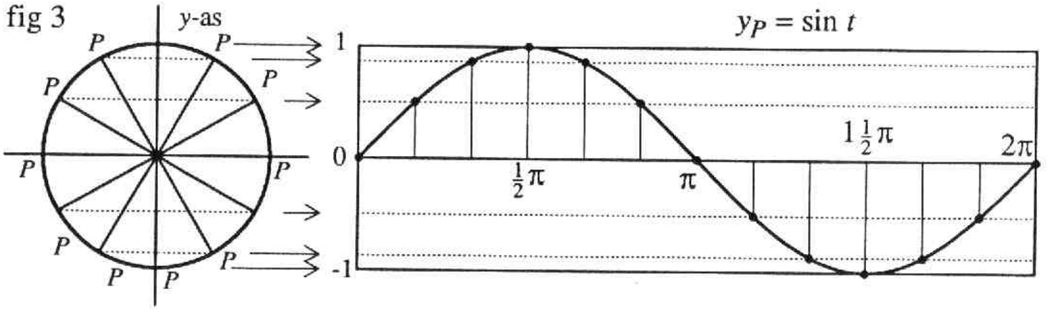


fig 3



3. In figuur 3 is uitgegaan van de verdeling van de eenheidscirkel in 12 gelijke boogjes.

   >a Welke draaihoeken, uitgaande van de x^+-as, zijn er dus gebruikt?

   >b Welke y_P-waarden horen daarbij?

   >c Hoe verandert de sinusoïde als we het punt P in negatieve richting over de eenheidscirkel laten lopen?

   >d En hoe verandert de sinusoïde als we het punt P in positieve richting over de cirkel met middelpunt O en straal 2 laten lopen?

Zowel in de eenheidscirkel als in de sinusgrafiek kun je zien dat elke y_P-waarde tussen 0 en 1 en tussen -1 en 0 precies twee keer wordt bereikt voor $0 \leq t \leq 2\pi$.
Dit maakt dat een vergelijking als $\sin t = \frac{3}{5}$ precies twee oplossingen heeft tussen 0 en 2π.

4. >a Geef de beide oplossingen van $\sin t = \frac{3}{5}$ tussen 0 en 2π in twee decimalen nauwkeurig.

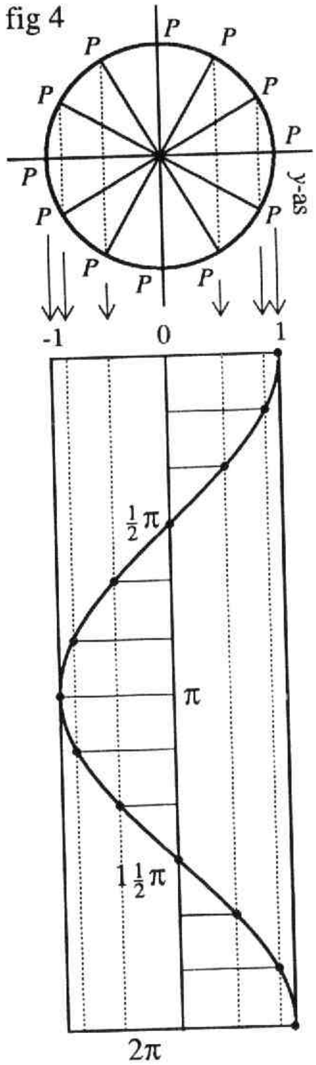
   >b Doe hetzelfde voor de oplossingen van $\sin t = \frac{3}{5}$ tussen 10π en 12π.

   >c Geef formules in de vorm $t = \ldots + k \cdot \ldots$ voor *alle* oplossingen van $\sin t = \frac{3}{5}$

   >d Zonder rekenmachientje te gebruiken kun je nu ook alle oplossingen geven van $\sin t = -\frac{3}{5}$. Doe dit.

Zoals we in figuur 3 het verband tussen y_P en draaihoek t hebben uitgezet, zo kunnen we dat ook doen met het verband tussen de x-coördinaat van P ($= x_P$) en draaihoek t, zie figuur 4.
Voor $t = 0, \frac{1}{2}\pi, \pi, 1\frac{1}{2}\pi, 2\pi$ geldt nu achtereenvolgens $x_P = 1, 0, -1, 0, 1$.
De grafiek van het verband tussen t en x_P is weer een sinusoïde.
Als je deze bladzijde 90^o draait, zo, dat de t as horizontaal komt te liggen zie dat dit de grafiek is van de cosinus!
Dus: $\boxed{x_P = \cos t}$

fig 4



5. >a Geef de oplossingen van de vergelijking $\cos t = \frac{1}{2}$ voor $0 \leq t \leq 2\pi$.

>b Ook voor $-2\pi \leq t \leq 0$.

>c Voor welke t tussen 0 en 2π geldt:

$$\cos t < -\tfrac{1}{2}?$$

(Gebruik eenheidscirkel en/of grafiek)

>d Hoe verandert de sinusoïde in figuur 4 als het punt P in negatieve richting over de eenheidscirkel beweegt?

Als we P in negatieve richting over de eenheidscirkel laten lopen, betekent dat een tegengesteld maken van alle draaihoeken t.
In opgave 3>c heb je kunnen zien dat de grafiek van y_P als functie van t gespiegeld wordt in de t-as. En als je opgave 4>d goed hebt, dan weet je dat het voor de grafiek van x_P als functie van t geen verschil maakt in welke richting P beweegt. Dit leidt tot de twee formules:

$$\boxed{\begin{aligned} \sin(-t) &= -\sin t \\ \cos(-t) &= \cos t \end{aligned}}$$

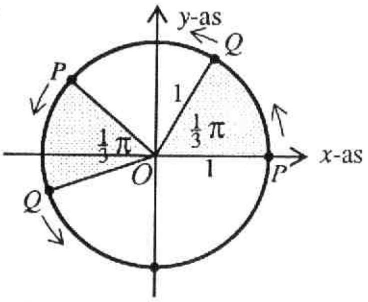
Bij tegengestelde draaihoeken horen *tegengestelde sinus*-waarden en *gelijke cosinus*-waarden.
Zo geldt bijvoorbeeld:

$$\sin \tfrac{1}{6}\pi = \tfrac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \sin(-\tfrac{1}{6}\pi) = -\tfrac{1}{2}$$

$$\cos \tfrac{1}{6}\pi = \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \rightarrow \cos(-\tfrac{1}{6}\pi) = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}.$$

6. Tegelijk met P laten we een punt Q in positieve richting over de eenheidscirkel lopen, en wel zo dat Q steeds precies een boog van $\frac{1}{3}\pi$ vóór ligt op P.
Als de draaihoek van de voerstraal OP gelijk is aan t radialen, dan is de draaihoek van OQ gelijk aan $(t + \frac{1}{3}\pi)$ radialen.

fig 5



>a Kijk goed naar het plaatje:
Voor welke draaihoeken t (tussen 0 en 2π) geldt: $y_Q = y_P$?

>b Welke oplossingen tussen 0 en 2π heeft dus de vergelijking $\sin t = \sin(t + \frac{1}{3}\pi)$?

>c Lees uit figuur 5 af welke oplossingen tussen 0 en 2π de vergelijking $\cos t = \cos(t + \frac{1}{3}\pi)$ heeft.

7. Dezelfde situatie als in opgave 6, met dit verschil dat Q nu steeds precies één halve cirkel voor ligt op P.

>a Ga na dat voor elke positie van P en van Q geldt:
$y_Q = -y_P$ en $x_Q = -x_P$.

>b Leg nu uit waarom de volgende formules gelden:

$$\boxed{\begin{aligned}\sin(t + \pi) &= -\sin t\\ \cos(t + \pi) &= -\cos t\end{aligned}}$$

>c Hoe kun je bovenstaande formule uitleggen met behulp van een verschuiving van sinusoïden?

8. De formules voor $\sin t(-t)$ en $\cos(-t)$ van bladzijde 3 kunnen worden gecombineerd met de formules van opgave 7. Na herleiding komt er dan:

$$\boxed{\begin{aligned}\sin(\pi - t) &= \sin t\\ \cos(\pi - t) &= -\cos t\end{aligned}}$$

> Voer die herleiding uit. Aanwijzing: $\pi - t$ is hetzelfde als $(-t) + \pi$.

9. Met een rekenmachientje kun je vinden:
$\sin \frac{1}{5}\pi \approx 0{,}59$ en $\cos \frac{1}{5}\pi \approx 0{,}81$
Met behulp van de formules op de bladzijden 3 en 4 kun je hieruit voor een aantal andere hoeken de sinus en de cosinus afleiden.
Bijvoorbeeld: $\sin 1\frac{1}{5}\pi = \sin(\pi + \frac{1}{5}\pi) = -\sin(\frac{1}{5}\pi) \approx -0{,}59$.

>a Geef op soortgelijke wijze benaderingen van:
$\cos 1\frac{1}{5}\pi$; $\sin\frac{4}{5}\pi$; $\cos\frac{4}{5}\pi$; $\sin(-\frac{1}{5}\pi)$; $\cos(-\frac{1}{5}\pi)$.

>b Teken de eenheidscirkel met de vier punten op de cirkel die corresponderen met $t = \frac{1}{5}\pi,\ \frac{4}{5}\pi,\ 1\frac{1}{5}\pi,\ -\frac{1}{5}\pi$.
Controleer nu of de tekens van je uitkomsten in vraag >a kloppen.

10. Twee punten P en Q bewegen over de eenheidscirkel.
De beweging van P wordt beschreven door de formules:

$$\begin{cases} x_P = \cos \pi t \\ y_P = \sin \pi t \end{cases}$$

De beweging van Q wordt beschreven door:

$$\begin{cases} x_P = \cos 3\pi t \\ y_P = \sin 3\pi t \end{cases}$$

t is de tijd in minuten.
Op het tijdstip $t = 0$ bevinden beide punten zich in (1,0).
De posities van P en Q op het tijdstip $t = \frac{1}{6}$ (dus na 10 seconden) zijn aangegeven in figuur 6.

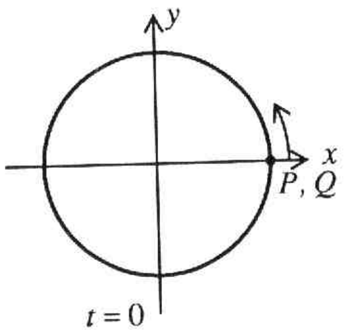
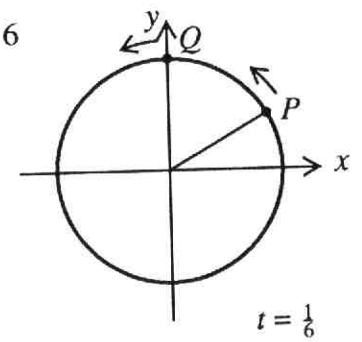


fig 6



>a Bereken de coördinaten van de plaats van P en Q, 20 seconden na $t = 0$.

>b Hoe lang doet P over één compleet rondje? En Q?

Bovenstaande figuren zijn bovenaanzichten van de beweging van P en Q.
We bekijken nu ook een vooraanzicht (kijkrichting parallel met de y-as) en een zij-aanzicht (kijkrichting parallel met de x-as).

fig 7

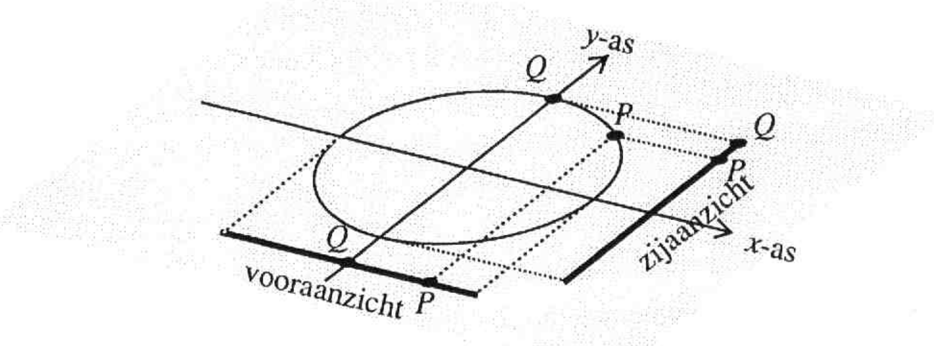
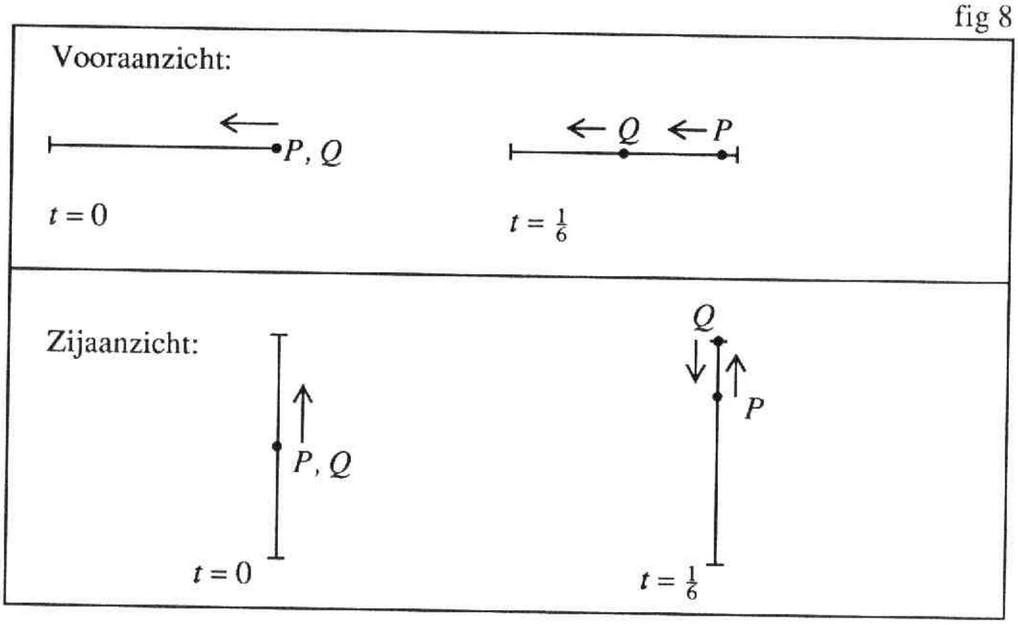


fig 8



P en Q bewegen in voor- en zijaanzicht heen en weer langs een rechte lijn.

>c Bekijk het vooraanzicht. Op $t = 0$ vallen P en Q samen. Ga na dat dit op $t = \frac{1}{2}$ weer gebeurt.

>d Wat zijn de eerstvolgende twee tijdstippen waarop P en Q in het vooraanzicht samenvallen?

>e Ga met behulp van het bovenaanzicht (de eenheidscirkel) ook na wanneer het eerste moment na de start is waarop P en Q samenvallen in het zijaanzicht.

>f Wat zijn de eerstvolgende twee momenten waarop dat opnieuw gebeurt?

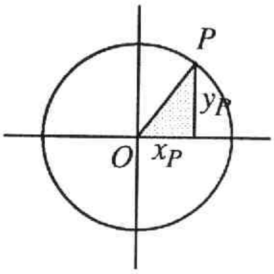
>g Uit het voorgaande kun je afleiden wat de oplossingen zijn van de vergelijkingen $\cos \pi t = \cos 3\pi t$ en
$\sin \pi t = \sin 3\pi t$
Geef de oplossingen van beide vergelijkingen m.b.v. formules van de vorm $t = \ldots. + k \cdot \ldots.$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Opmerking: Het oplossen van vergelijkingen zoals in opgave 6 en opgave 9 met behulp van de eenheidscirkel vereist nogal wat hersengymnastiek. Zeker als de getallen in de vergelijking wat minder 'mooi' zijn. Daarom is het zaak dat we een systematische aanpak van dit soort problemen leren. In de hoofdstukken 4 en 5 wordt alle aandacht gericht op die systematische manier van oplossen.

2 De sinus, de cosinus en de stelling van Pythagoras

In hoofdstuk 1 heb je gezien hoe de coördinaten van een punt P op de eenheidscirkel kunnen worden uitgedrukt in de draaihoek van de voerstraal:

$$\begin{cases} x_P = \cos t \\ y_P = \sin t \end{cases}$$



Anderzijds geldt volgens de stelling van Pythagoras:

$$x_P{}^2 + y_P{}^2 = OP^2 = 1 \quad *)$$

Het gevolg is dat voor elke draaihoek t geldt:

$$\boxed{\cos^2 t + \sin^2 t = 1}$$

Je zou dit 'de formule van Pythagoras voor goniometrische functies' kunnen noemen.

Voorbeeld: $\sin\frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2}$

$\cos\frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

inderdaad geldt $(\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2}\sqrt{3})^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$.

1. >a Controleer met je rekenmachientje dat geldt: $\sin^2 1 + \cos^2 1 = 1$.
   >b Ook dat: $\sin^2(\pi - 1) + \cos^2(\pi - 1) = 1$.

2. Gegeven: $\sin t = 0{,}6$ en $0 < t < \frac{1}{2}\pi$.
   >a Bereken $\cos t$ met je rekenmachientje (eerst t berekenen, dan $\cos t$).
   >b Bereken $\cos t$ met behulp van de formule $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$.

3. Gegeven: $\sin t = \frac{1}{3}$.
   >a Bereken de exacte waarde van $\cos t$ voor het geval $0 < t < \frac{1}{2}\pi$.
   >b Ook voor het geval $\frac{1}{2}\pi < t < \pi$.

4. Als $\cos u = \frac{1}{3}\sqrt{5}$ zijn er twee waarden mogelijk voor $\sin u$.
   > Welke waarden zijn dat?

5. Gegeven: $\cos t = -\frac{21}{29}$ en $\pi < t < 1\frac{1}{2}\pi$.
   > Bereken de exacte waarde van $\sin t$.

6. Omdat $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ moet gelden $\frac{d}{dt}[\sin^2 t + \cos^2 t] = 0$.
   > Controleer dit door $\sin^2 t + \cos^2 t$ te differentiëren volgens de regels.

*) Dat geldt ook als één van de coördinaten negatief of nul is. Als bijvoorbeeld $x_P < 0$ en $y_P > 0$, dan heeft de rechthoekige driehoek met OP als schuine zijde, de rechthoekszijden $-x_P$ en y_P.
Uit $(-x_P)^2 + (y_P)^2 = OP^2$ volgt dan $x_P{}^2 + y_P{}^2 = 1$.

Soms kun je een vorm waarin sinussen en cosinussen voorkomen eenvoudiger maken door aan te sturen op $\sin^2 t + \cos^2 t$ en dat te vervangen door 1. Bijvoorbeeld:

$\cos t\,(6\cos t - \sin t) + 2\sin t\,(\cos t + 3\sin t) =$
$6\cos^2 t - \cos t \sin t + 2\sin t \cos t + 6\sin^2 t =$
$6(\cos^2 t + \sin^2 t) + \sin t \cos t = 6 \cdot 1 + \sin t \cos t = \boxed{6 + \sin t \cos t}$

7. Herleid tot een zo eenvoudig mogelijke vorm:

>a $(1 - \sin x)^2 + \cos^2 x$

>b $(\sin x - \cos x)^2 + \sin x \cos x$

>c $(\sin t + 1)(\sin t - 1) + \cos t\,(\cos t + 2)$

>d $(2\sin t + \cos t)^2 + (\sin t - 2\cos t)^2$

8. Bewijs dat voor elke u geldt:

>a $\sin^3 u + \sin u \cos^2 u = \sin u$.

>b $\sin^2 3u - \sin^2 u = \cos^2 u - \cos^2 3u$.

9. Bewijs dat geldt: $\dfrac{\sin x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{\sin x} = \dfrac{1}{\sin x \cos x}$ (mits $x \neq k \cdot \frac{\pi}{2}$ ($k = 0, \pm 1, \ldots$).

10. Eerder heb je gezien dat geldt: $\dfrac{d}{dx}[\tan x] = 1 + \tan^2 x$ *)

In veel wiskundeboeken kom je deze regel tegen: $\dfrac{d}{dx}[\tan x] = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

> Laat zien dat dit op hetzelfde neerkomt.

Bij een gegeven waarde van $\tan x$ is een waarde van x te vinden en daardoor ook een waarde van $\cos x$ en $\sin x$. Maar de tussenstap over x kan vermeden worden, zoals uit dit voorbeeld blijkt:

Gegeven: $\tan x = -\frac{3}{4}$

Gevraagd: $\cos x$ en $\sin x$

Oplossing: $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} = -\frac{3}{4} \rightarrow \quad \sin x = -\frac{3}{4}\cos x$

$\downarrow$

$\boxed{\sin^2 x + \cos^2 x = 1}$

$\downarrow$

$(-\frac{3}{4}\cos x)^2 + \cos^2 x = 1$

$\ldots\ldots + \cos^2 x = 1$

$\cos^2 x = \ldots\ldots$ enz.

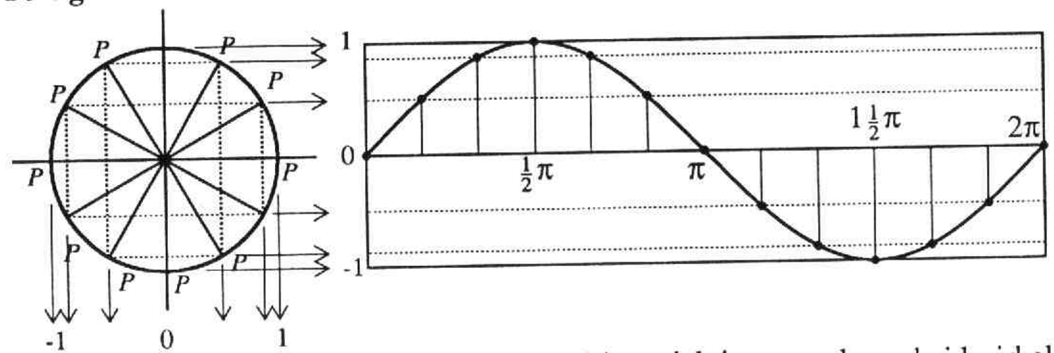
11. > Bekijk bovenstaand voorbeeld en bereken $\cos x$ voor het geval $\frac{1}{2}\pi < x < \pi$.

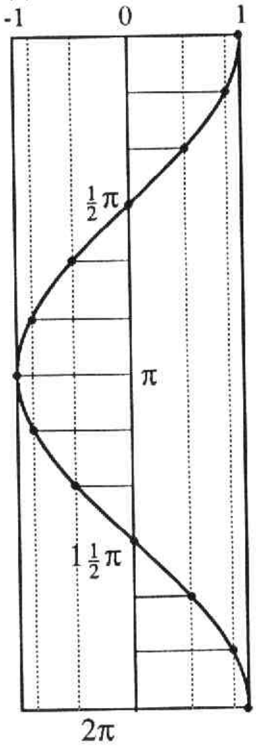
12. Gegeven: $\sin x = p$ en $0 < x < \frac{1}{2}\pi$.

> Druk $\cos x$ en $\tan x$ uit in p.

*) Zie: 'De Techniek van het Differentiëren'

Terugblik





P beweegt in positieve richting over de eenheidscirkel. De coördinaten x_P en y_P zijn afhankelijk van de draaihoek t (t.o.v. de x^+-as)

Er geldt:

$$\boxed{\begin{aligned} x_P &= \cos t \\ y_P &= \sin t \end{aligned}}$$

Beide grafieken laten dit verband zien voor $0 \leq t \leq 2\pi$.

Omdat steeds geldt $x_P{}^2 + y_P{}^2 = 1$ volgt de formule:

$$\boxed{\cos^2 t + \sin^2 t = 1}$$

Andere formules die met de cirkelbeweging van P kunnen worden afgeleid zijn:

$$\boxed{\begin{aligned} \sin(-t) &= -\sin t \\ \sin(t+\pi) &= -\sin t \end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned} \cos(-t) &= \cos t \\ \cos(t+\pi) &= -\cos t \end{aligned}}$$

met als gevolg

$$\boxed{\sin(\pi - t) = \sin t} \ ^{*)} \qquad \boxed{\cos(\pi - t) = -\cos t} \ ^{*)}$$

De hier genoemde formules kunnen worden gebruikt bij het oplossen van 'goniometrische vergelijkingen', zoals zal blijken in de hoofdstukken 3,4 en 5.

*) De laatste twee formules zijn de zgn. *supplementformules*.
Het supplement van een hoek t is de aanvulling tot 180° of π radialen.
Kortweg: supplement van $t = \pi - t$.

3 Goniometrische vierkantsvergelijkingen

Voorbeeld: $2 - 2\sin^2 x = 3\sin x$.
ofwel: $2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$.

Deze vergelijking kan worden opgevat als een vierkantsvergelijking met $\sin x$ als onbekende.
Volgens de *a,b,c*-formule komt er nu:

$$\sin x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{4}$$

Dus: $\sin x = \frac{-3+5}{4} = \frac{1}{2}$ of $\sin x = \frac{-3-5}{4} = -2$.

Uit $\sin x = \frac{1}{2}$ volgt: $x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ of $x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$.

Aan $\sin x = -2$ voldoet geen enkele x (immers $-1 \leq \sin x \leq 1$!).

Conclusie:
De oplossingen van $2 - 2\sin^2 x = 3\sin x$ zijn $x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$; $x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$.

1. > Controleer door substitutie dat $\frac{1}{6}\pi$ en $\frac{5}{6}\pi$ inderdaad voldoen aan $2 - 2\sin^2 x = 3\sin x$.

2. Los x op uit:
   >a $4\sin^2 x - 4\sin x + 1 = 0$
   >b $\cos^2 x + \frac{1}{2}(\cos x - 1) = 0$

Bekijk nu de vergelijking: $2\cos^2 x = 3\sin x$.

Het vervelende hier is dat er zowel cos als sin voorkomen.
Geen nood: uit $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ volgt $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$.

Vervangen we nu in de vergelijking $\cos^2 x$ door $1 - \sin^2 x$ dan komt er een vierkantsvergelijking in $\sin x$, namelijk $2(1 - \sin^2 x) = 3\sin x$, oftewel $2 - 2\sin^2 x = 3\sin x$, en dat is juist de vergelijking van het voorbeeld bovenaan deze bladzijde.

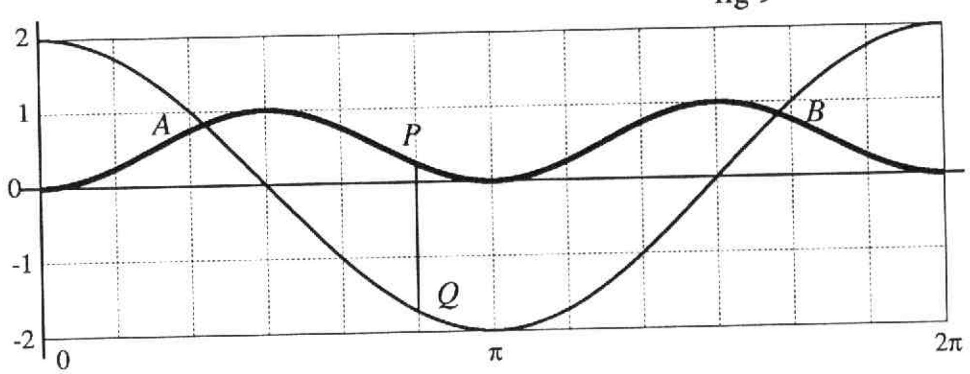
3. Los op in $[0,2\pi]$:
   >a $\sin^2 x + \sin x = 0$
   >b $\cos^2 x + \sin x = 1$
   >c $2\cos^2 x - \cos x = 1$
   >d $2\sin^2 x - \cos x = 1$

4. Los op in $[0,2\pi]$:
   >a $3\cos^2 x + 8\cos x - 3 = 0$
   >b $\sin^2 x = 3\cos^2 x$
   >c $\cos^2 x - \sin^2 x = \frac{1}{2}$
   >d $\sin^2 x + 2\cos^2 x + 4\sin x + 1 = 0$.

5. $f(x) = -\cos^2 x - 1\frac{1}{2}\sin x + 1\frac{1}{2}$ voor $0 \leq x \leq 2\pi$.
   >a Bereken de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f met de x-as en de y-as.
   >b Bereken de coördinaten van de punten op de grafiek van f waarin de raaklijn horizontaal is.
   >c Teken de grafiek van f.

6. In figuur 9 zijn voor $0 \leq x \leq 2\pi$ de grafieken getekend van $y = \sin^2 x$ en $y = 2\cos x$.

fig 9



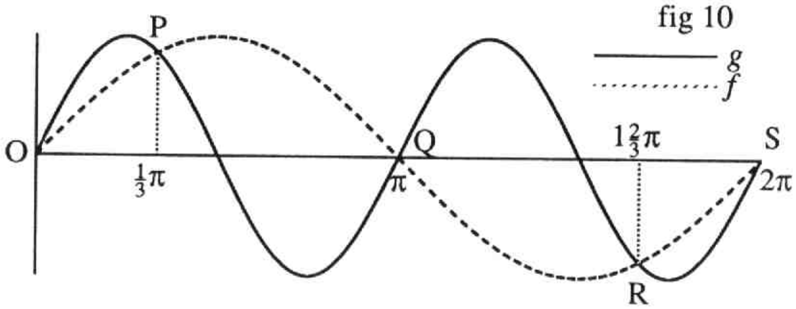
   >a Bereken de x-coördinaten van de snijpunten A en B in 2 decimalen nauwkeurig.

   P doorloopt de grafiek van $y = \sin^2 x$ tussen A en B en Q die van $y = 2\cos x$. We bekijken alle verticale lijnstukken PQ.

   >b Bewijs dat PQ maximaal de lengte 2 heeft.

4 Snijpunten van grafieken

fig 10



1. In figuur 10 zie je de grafieken van $f(x) = \sin x$ en $g(x) = \sin 2x$ voor $0 \le x \le 2\pi$. In de figuur zijn ook de vijf snijpunten O, P, Q, R en S aangegeven.

   >a De x-coördinaten van O, P, Q, R en S zijn achtereenvolgens 0, $\frac{1}{3}\pi$, π, $1\frac{2}{3}\pi$ en 2π.
   Controleer door substitutie in de formules dat die vijf x-waarden inderdaad bij snijpunten van de grafieken van f en g horen.

   >b De punten P, Q en R liggen op één rechte lijn.
   Geef een vergelijking van die lijn.

   >c Voor welke x tussen 0 en 2π geldt: $\sin x > \sin 2x$?

In bovenstaande opgave zijn de snijpunten van de beide grafieken af te lezen uit de figuur. Controle door substitutie in de functie-formules geeft zekerheid.
Een andere manier om de snijpunten te vinden is het oplossen van de vergelijking $\sin x = \sin 2x$.
Bij een vergelijking van dit type kun je gebruik maken van de regel die je in het boekje 'sinus en co' hebt geleerd, namelijk:

$$\sin \boxed{} = \sin \bigcirc$$

$$\boxed{} = \bigcirc + k \cdot 2\pi \quad \text{of} \quad \boxed{} = \pi - \bigcirc + k \cdot 2\pi$$

Vullen we nu x en $2x$ in, respectievelijk in $\boxed{}$ en $\bigcirc$, dan komt er

$$\sin x = \sin 2x$$

$$x = 2x + k \cdot 2\pi \qquad x = \pi - 2x + k \cdot 2\pi$$

$$-x = k \cdot 2\pi \qquad 3x = \pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = -k \cdot 2\pi \qquad x = \tfrac{1}{3}\pi + k \cdot \tfrac{2}{3}\pi$$

$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$$

2. De rijen van oplossingen van $\sin x = \sin 2x$ zijn dus:

$$x = -k \cdot 2\pi \quad (1)$$

$$\text{en } x = \tfrac{1}{3}\pi + k \cdot \tfrac{2}{3}\pi \quad (2)$$

>a De x-coördinaten van de punten O, P, Q, R en S van opgave 1 zijn terug te vinden in de beide rijen.
Ga voor elk van die punten na in welke rij de x-coördinaat te vinden is.

>b Waarom kan je in plaats van $x = -k \cdot 2\pi$ even goed schrijven: $x = k \cdot 2\pi$?

3. >a Teken voor $0 \leq x \leq 2\pi$ de grafieken van $f(x) = \sin x$ en $g(x) = \sin 3x$.

>b Bereken met behulp van een vergelijking de x-coördinaten van de snijpunten van beide grafieken.

4.

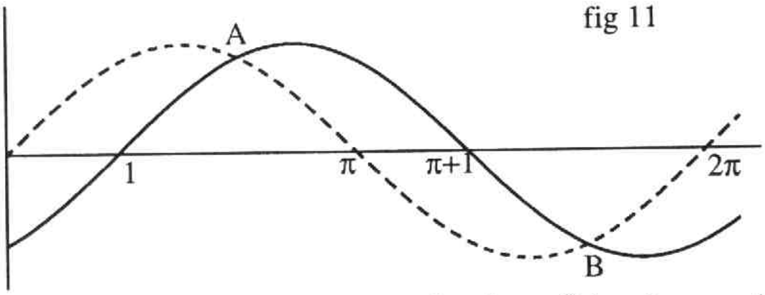


fig 11

In figuur 11 zijn de grafieken getekend van $f(x) = \sin x$ en $g(x) = \sin(x-1)$, met de snijpunten A en B.
De x-coördinaten van A en B vinden we uit:

$$\sin x = \sin(x-1)$$

$x = x - 1 + k \cdot 2\pi$ (1) $\qquad$ $x = \pi - (x-1) + k \cdot 2\pi$ (2)

>a Verklaar dat (1) geen oplossingen oplevert, voor $k = 0$.
Hoe zit dat voor andere waarden van k?

>b Ga na dat nu uit (2) volgt: $x = \tfrac{1}{2}\pi + \tfrac{1}{2} + k \cdot \pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$

>c Bereken de x-coördinaten van A en B.

>d Voor welke x uit $[0, 2\pi]$ geldt: $\sin x \leq \sin(x-1)$?

5. >a Laat met behulp van de regel voor het oplossen van 'cosinus-vergelijkingen' zien dat de oplossingen van de vergelijking

$$\cos x = \cos 2x$$

gegeven worden door de formules:

$$x = k \cdot 2\pi$$

$$x = k \cdot \tfrac{2}{3}\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

>b Controleer deze oplossingen ook met behulp van twee grafieken.

6. In opgave 5 van hoofdstuk 1 heb je de vergelijkingen

   $\sin t = \sin(t + \tfrac{1}{3}\pi)$ en $\cos t = \cos(t + \tfrac{1}{3}\pi)$

   opgelost met behulp van de eenheidscirkel.

   \> Probeer deze vergelijkingen nu op te lossen volgens de standaard-methode en vergelijk je antwoorden met die van de eerder genoemde opgave.

7. In hoofdstuk 1 opgave 8 kreeg je te maken met de vergelijkingen

   $\cos \pi t = \cos 3\pi t$ en $\sin \pi t = \sin 3\pi t$

   \> Los deze vergelijkingen op volgens de standaard-methode.

8. \>a Teken voor $0 \leq x \leq 2\pi$ de grafieken van $y = -\sin x$ en $y = \sin(x - \tfrac{1}{4}\pi)$ in één figuur.

   \>b Bereken de x-coördinaten van de snijpunten.
   Aanwijzing: $-\sin x$ kan worden vervangen door $\sin(-x)$.

9. In opgave 8 heb je gezien dat een vergelijking van twee sinussen, waarvan er één een minteken draagt, tot het standaardtype kan worden teruggebracht.
   Dat geldt ook voor de vergelijking:

   $-\cos x = \cos(x - \tfrac{1}{4}\pi)$

   Met dit verschil dat je nu niet $-\cos x$ kunt vervangen door $\cos(-x)$.

   \>a Waarom niet?

   \>b Gebruik één van de formules uit hoofdstuk 1 om $-\cos x$ te vervangen door $\cos(\ldots)$. Je kunt kiezen uit twee mogelijkheden.

   \>c Los de vergelijking op en controleer je uitkomsten met grafieken.

10. Een andere variant is een vergelijking waarin links een sinus en rechts een cosinus staat (of andersom).

    Bijvoorbeeld: $\sin x = \cos(x - \tfrac{1}{4}\pi)$.

    In dat geval kun je de 'cos' omvormen tot een 'sin' met behulp van de regel: $\cos x = \sin(x + \tfrac{1}{2}\pi)$.

    Er komt dan:

    $$\sin x = \cos(x - \tfrac{1}{4}\pi)$$
    $$\sin x = \sin((x - \tfrac{1}{4}\pi) + \tfrac{1}{2}\pi)$$
    $$\sin x = \sin(x + \tfrac{1}{4}\pi)$$

    ....

    \> Los deze vergelijking verder op.

11. >a Teken in één figuur de grafieken van $y = \sin x$ en $y = 2\cos x$ voor $0 \le x \le 2\pi$.

Noem de snijpunten van die grafieken S en T. Het berekenen van de x-coördinaten van S en T leidt tot de vergelijking: $\sin x = 2\cos x$

Vanwege de '2' voor '$\cos x$' kan deze vergelijking niet op de manier van opgave 10 worden aangepakt.

Er bestaat een manier om de vergelijking terug te brengen tot een ander standaardtype: 'deel linker- en rechterlid door $\cos x$'.

Er komt dan: $\dfrac{\sin x}{\cos x} = 2$, ofwel: $\tan x = 2$

>b Met behulp van een rekenmachientje kun je nu direct de oplossing tussen 0 en $\frac{1}{2}\pi$ vinden.
Geef die oplossing (in 2 decimalen nauwkeurig) en controleer het resultaat in je grafiek.

>c Hoe kun je nu met >b de x-coördinaat van het andere snijpunt vinden?

Omdat de tangensfunctie periodiek is met periode π en omdat $\tan x$ elke waarde op een periode-interval precies éénmaal bereikt (zie figuur 12) geldt voor oplossingen van 'tangensvergelijkingen' de regel:

$$\tan \square = \tan \bigcirc$$
$$\square = \bigcirc + k \cdot \pi$$

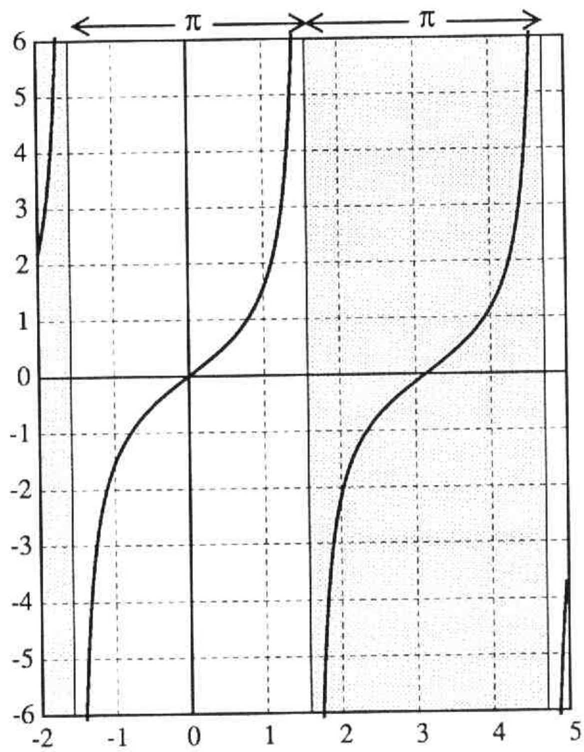


fig 12

12. >a Controleer of de twee snijpunten van opgave 7 op een afstand π van elkaar liggen.

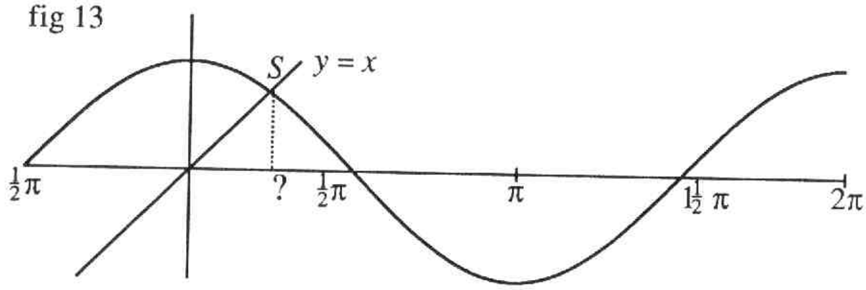
>b De y-coördinaten van de snijpunten S en T van opgave 8 kun je natuurlijk vinden met je rekenmachientje.
Je krijgt dan benaderingen. Welke y-coördinaten vind je op deze wijze?

>c De exacte y-coördinaten vind je door $\sin x = 2\cos x$ te combineren met $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$!
Bereken op deze manier de y-coördinaten en kijk of je uitkomsten kloppen met die van >b.

13. Los x op uit:
   >a $\sin x = \sqrt{3} \cdot \cos x$
   >b $2\sin x = 3\cos x$
   >c $\sin x = -\cos x$
   >d $\cos x - 4\sin x = 0$
   >c Controleer naar keuze je oplossingen bij twee van de vier vergelijkingen met behulp van grafieken.

Het berekenen van het snijpunt van twee grafieken via een vergelijking heeft lang niet altijd succes.
Voorbeeld: de grafieken van $y = \cos x$ en $y = x$ hebben één snijpunt S.

fig 13



De vergelijking $\cos x = x$ kan echter niet exact worden opgelost!
Met je rekenmachientje kun je in dit geval een benadering van de oplossing vinden.
Je kan dat doen door schatten, invullen en kijken of het klopt, verbeteren, enz.
Voor het voorbeeld $\cos x = x$ bestaat er een heel aardige en tamelijk snelle methode.

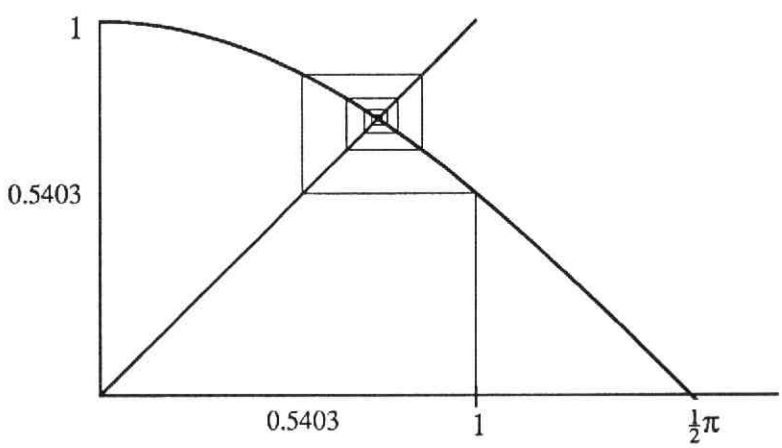
14. In figuur 13 zie je dat de oplossing van $\cos x = x$ in de buurt van $x = 0{,}75$ ligt.
   >a Controleer met je rekenmachientje:
   $\cos 0{,}75 = 0{,}73168\ ...$
   en laat dit antwoord in het venster staan.
   >b Aan dit resultaat kun je zien dat 0,75 net niet voldoet aan $\cos x = x$.
   Druk (met 0,73168... in het venster) een aantal malen achter elkaar op de cos-toets.
   Ga hier mee door tot de uitkomst niet meer verandert.
   Je hebt nu de benadering van de oplossing van $\cos x = x$ in zeven decimalen nauwkeurig!
   >c Je had ook een andere startwaarde dan 0,75 kunnen nemen.
   Toets in: $\boxed{1}$ $\boxed{\cos}$ $\boxed{\cos}$ $\boxed{\cos}$ $\boxed{\cos}$ ...
   net zo lang tot de uitkomst niet meer verandert.
   >d Bedenk zelf nog een andere startwaarde en doe hetzelfde als in de vorige opdracht.

Het effect van het herhaald indrukken van de toets $\boxed{\cos}$ is blijkbaar dat je de oplossing van cos x = x benadert. Uitgaande van startwaarde 1 komt er:

x	y(=cos x)
1	0,5403....
0,5403....	0,8575....
0,8575....	0,6542....
0,6542....	0,7934....
0,7934....	0,7013....
0,7013....	0,7639....
0,7369....	0,7221....
enz...	

In de grafiek ziet dit zig-zag-proces er zo uit:

fig 14



Toelichting:
Vanuit 1 op de x-as bereik je via de grafiek van $y = \cos x$ de lijn $y = x$ in het punt (0,5403..., 0,5403...).
Van daar uit bereik je weer via $y = \cos x$ de lijn $y = x$ in (0,8575..., 0,8575...).
Van daar uit bereik je weer via $y = \cos x$ de lijn $y = x$ in (0,6542..., 0,6542...).
In figuur 14 zie je dat de zo gevolgde weg om het snijpunt heen loopt, maar er bij elke stap dichterbij komt.

5 Overzicht goniometrische vergelijkingen

Het aantal typen vergelijkingen dat met de leerstof van dit boekje en van 'sinus en co' kan worden opgelost is niet onbeperkt.
In dit hoofdstuk geven we een overzicht van alle typen vergelijkingen die je moet kunnen oplossen.
We onderscheiden hierbij vier soorten.

1. *Standaardvergelijkingen.*

   Dit zijn de vergelijkingen $\sin A = \sin B$, $\cos A = \cos B$ en $\tan A = \tan B$ waarbij A en B uitdrukkingen in één variabele (zeg x) voorstellen.

2. *Vergelijkingen die met behulp van goniometrische formules na één stap tot een standaardvergelijking kunnen worden teruggebracht.*

   Bijvoorbeeld het wegwerken van een minteken in $-\sin A = \sin B$ of het omvormen tot een sinus van $\cos B$ in $\sin A = \cos B$.

3. *Vergelijkingen die, bijvoorbeeld via ontbinding in factoren, uiteenvallen in standaardvergelijkingen (of vergelijkingen van type 2)*

   Bijvoorbeeld:
   $$\sin A \cos B - \sin^2 A = 0$$
   $$\sin A (\cos B - \sin A) = 0$$
   $$\sin A = 0 \qquad \cos B = \sin A$$

4. *Vergelijkingen waarin sin A, cos A of tan A kunnen worden opgevat als een nieuwe variabele (onbekende).*

   Bijvoorbeeld: $3\cos^2 A + 2\cos A + 1 = 0$ is een vierkantsvergelijking met $\cos A$ als onbekende.
   Deze methode is behandeld in hoofdstuk 3.

We geven nu een overzicht van de diverse methoden.
Het overzicht bestaat uit twee kolommen. In de linkerkolom staan de regels al of niet voorzien van aanvullende uitleg. In de rechterkolom staat een voorbeeld dat je verder zelf kunt uitwerken.

De standaardvergelijkingen.

① $\sin A = \sin B$ $A = B + k \cdot 2\pi$ $\quad$ $A = \pi - B + k \cdot 2\pi$	$\sin 3x = \sin(\frac{1}{4}\pi - x)$ $3x = \frac{1}{4}\pi - x + k \cdot 2\pi$ $\quad$ $3x = \ldots\ldots\ldots\ldots$ .... $\quad$ .... $\quad$ ....
② $\cos A = \cos B$ $A = B + k \cdot 2\pi$ $\quad$ $A = -B + k \cdot 2\pi$	$\cos 3x = \cos(\frac{1}{4}\pi - x)$ .... $\quad$ .... $\quad$ ....
③ $\tan A = \tan B$ $\downarrow$ $A = B + k \cdot \pi$	$\tan 3x = \tan(\frac{1}{4}\pi - x)$ $\downarrow$ ....

Een variatie op de hoofdvormen krijg je als voor één van de beide goniometrische verhoudingen een minteken staat.

$$\sin A = -\sin B \longrightarrow \sin A = \sin C$$

$$\cos A = -\cos B \longrightarrow \cos A = \cos C$$

$$\tan A = -\tan B \longrightarrow \tan A = \tan C$$

④ $\sin A = -\sin B$ We kunnen deze vorm terugbrengen tot ① door gebruikmaking van de formule: $\sin(-B) = -\sin B$ (pag 9, hst 1) Er komt dan: $\sin A = \sin(-B)$	$\sin 3x = -\sin(\frac{1}{4}\pi - x)$ $\sin 3x = \sin(-\frac{1}{4}\pi + x)$ .... $\quad$ .... $\quad$ ....

<table>
<tr>
<td>⑤ $\cos A = -\cos B$
Helaas gaat de in ④ toegepaste methode hier niet op.
Immers: $\cos(-B) = \cos B$!
(zie pag 3, hst 1).
Op pagina 4, hst 1 staan twee formules waarin -cos t voorkomt.
We kiezen hier voor de eerste, dus:
$\cos(B + \pi) = -\cos B$
Vervangen we nu $-\cos B$ door $\cos(B + \pi)$ dan wordt de vergelijking:
$$\cos A = \cos(B + \pi)$$
en kan deze verder volgens ② worden afgewikkeld.</td>
<td>$\cos 3x = -\cos(\tfrac{1}{4}\pi - x)$
$\downarrow$
$\cos 3x = \cos(\pi + (\tfrac{1}{4}\pi - x))$
$\downarrow$
$\cos 3x = \cos(1\tfrac{1}{4}\pi - x)$
$\swarrow \quad \searrow$
....
....
....</td>
</tr>
<tr>
<td>⑥ $\tan A = -\tan B$
Omdat $\tan B = \dfrac{\sin B}{\cos B}$
volgt $\tan(-B) = \dfrac{\sin(-B)}{\cos(-B)}$
$= \dfrac{-\sin B}{\cos B}$
$= -\tan B$.
Deze vergelijking kan dus net zo worden behandeld als ④.
We krijgen dan:
$$\tan A = \tan(-B)$$
en verder op de manier van ③</td>
<td>$\tan 3x = -\tan(\tfrac{1}{4}\pi - x)$
$\downarrow$
$\tan 3x = \tan(-\tfrac{1}{4}\pi + x)$
$\downarrow$
....
....
...............</td>
</tr>
</table>

Het inruilen van een of meer goniometrische functies voor een andere.

$$\left.\begin{matrix}\sin A = \cos B \\ \sin A = -\cos B\end{matrix}\right. \longrightarrow \sin A = \sin C$$

$$\sin A = p\cos A \longrightarrow \tan A = p$$

⑦ In het ene lid staat een sinusvorm, in het andere een cosinusvorm. Dus: $\sin A = \cos B$ Als we de cosinusvorm omwerken naar een sinus (of omgekeerd) zijn we terug bij een bekend type. In 'sinus en co' heb je gezien: $\cos B = \sin\left(B + \frac{1}{2}\pi\right)$ Hiervan gebruikmakend komt er: $\sin A = \sin\left(B + \frac{1}{2}\pi\right)$ en verder volgens ①	$\sin 3x = \cos(\frac{1}{4}\pi - x)$ $\sin 3x = \sin(\frac{1}{2}\pi + (\frac{1}{4}\pi - x))$ $\downarrow$ $\sin 3x = \sin(\frac{3}{4}\pi - x)$ ....
⑧ Als ⑦, maar met een minteken voor één van de beide leden. Dus: $\sin A = -\cos B$ Pas eerst het principe van ⑤ toe $\sin A = \cos(B + \pi)$ Daarna ⑦: $\sin A = \sin(B + \pi + \frac{1}{2}\pi)$ Daarna ①.	$\sin 3x = -\cos(\frac{1}{4}\pi - x)$ $\downarrow$ $\sin 3x = \cos(\frac{1}{4}\pi - x)$ $\downarrow$ $\sin 3x = \sin(1\frac{3}{4}\pi - x)$ ....
⑨ Tenslotte het type: $\sin A = p \cdot \cos A$ Hierbij is p een constante. Merk op dat sin en cos nu beide op *dezelfde* vorm werken. Links en rechts delen door cos A leidt tot een 'tangensvergelijking' $\frac{\sin A}{\cos A} = p$ $\tan A = p$ Verder volgens ③	$\sin 3x = \frac{2}{5}\cos 3x$ $\downarrow$ $\frac{\sin 3x}{\cos 3x} = \frac{2}{5}$ $\downarrow$ $\tan 3x = \frac{2}{5}$ $\downarrow$ $\tan 3x = \tan(.....)$ $\downarrow$ ....

1. Herleid tot een standaardvergelijking en los op.

>a $\sin 2x = -\sin x$ >c $\sin 2x = \cos(\frac{1}{3}\pi + x)$

>b $\cos(\frac{1}{3}\pi + x) = -\cos x$ >d $-\sin x = -\cos x$

2. $\cos^2 x - \sin^2 3x = 0$ kan als volgt tot standaardvergelijkingen worden teruggebracht:

$$\cos^2 x - \sin^2 3x = 0$$
$$(\cos x + \sin 3x)(\cos x - \sin 3x) = 0$$

$$\cos x + \sin 3x = 0 \qquad \cos x - \sin 3x = 0$$
$$\cos x = -\sin 3x \qquad \cos x = \sin 3x$$
$$\boxed{\sin(x + \tfrac{1}{2}\pi) = \sin(-3x)} \qquad \boxed{\sin(x + \tfrac{1}{2}\pi) = \sin 3x}$$

Breng elk van de volgende vergelijkingen terug tot één of meer standaardvergelijkingen. Je hoeft daarna niet verder op te lossen.

>a $\sin^2 x - \frac{1}{2}\sin x = 0$ >b $\sin^2 4x = \cos^2 x$

>b $\sin^2 x + \sin x \cos x = 0$ >d $4\sin^2 x = \cos^2 5x$

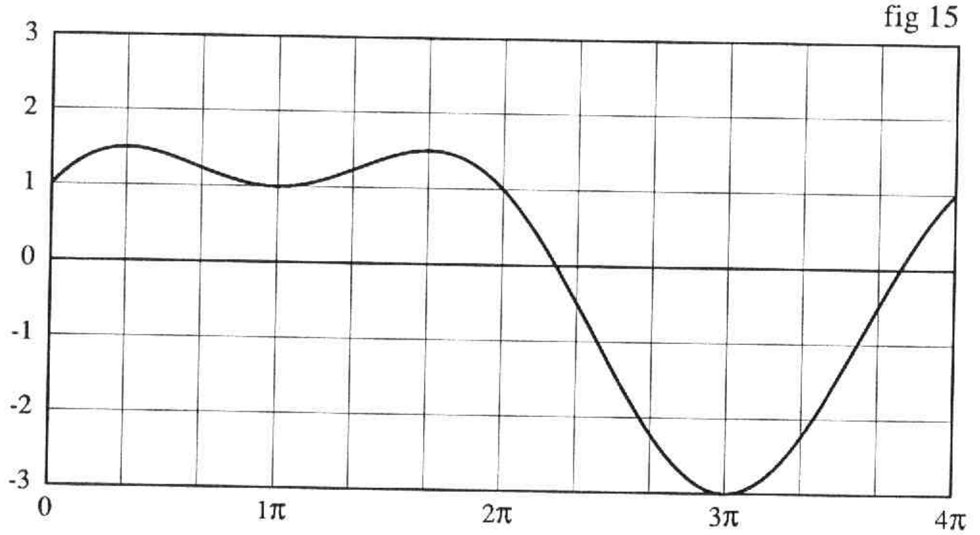
3. Geef de oplossingen tussen 0 en 2π van:

>a $4\sin x = 3\cos x$ >c $2\cos x = 3\tan x$

>b $4\sin x = 3\tan x$ >d $2\tan x = 3\tan x$

4. In figuur 15 zie je de grafiek van $f(x) = 2\sin \frac{1}{2}x + \cos x$ voor één periode.

fig 15



>a Beredeneer dat de periode van f gelijk is aan 4π.

>b Bereken op het interval $[0,4\pi]$ de x-coördinaten van de punten met horizontale raaklijn.

5. Geef alle oplossingen van:

>a $\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x}{\sin x}$ >c $\frac{1}{\sin x} = \frac{2}{\cos x}$

>b $\tan x = \frac{1}{\tan x}$ >d $\tan x \cdot \cos x = \sin x$

6. Ook van:

>a $100\cos^2 x - 10\sin x - 98 = 0$

>b $\sin^2 x + 4\cos x + 4 = 0$

>c $\tan^2 x + 4\tan x + 4 = 0$

7. $f(x) = \sin x + \frac{1}{\sin x}$.

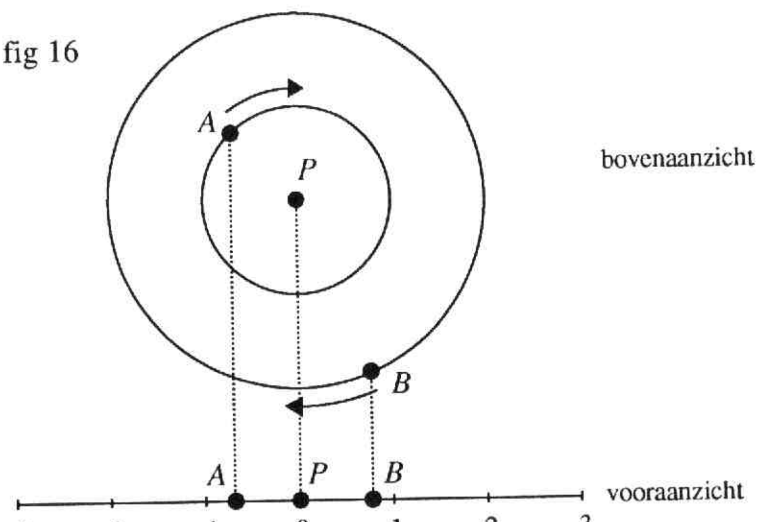
>a Los x op uit: $f(x) = 2\frac{1}{2}$

>b Los x op uit: $f'(x) = 0$

Tot slot van dit hoofdstuk een vraagstuk ontleend aan het examen 1989:

8. Voor een animatiefilm wordt de beweging van twee manen A en B rond een planeet P gesimuleerd.
De banen worden als cirkels in één vlak gekozen. In figuur 16 zie je het bovenaanzicht en het vooraanzicht van een situatie op een bepaald moment. A en B bewegen in de richting van de pijl.

fig 16



In het vooraanzicht bewegen A en B zich over een rechte lijn volgens de formules:

$$x_A = \sin 2\pi t \text{ en } x_B = 2\sin \pi t \text{ (t is de tijd in seconden)}$$

Hierin geven x_A en x_B de plaatsen van A respectievelijk B ten opzichte van P aan in het vooraanzicht.

>a Neem de figuur met de beide aanzichten over en teken in deze aanzichten de posities van A en B op het tijdstip $t = 0{,}75$.

>b Teken in één figuur de grafieken van x_A en x_B als functie van t voor $0 \leq t \leq 2$

In het bovenaanzicht zie je voortdurend de werkelijke verhouding van de afstanden AP en BP, namelijk 2 : 1, in het vooraanzicht meestal niet.

>c Op welke tijdstippen, in het tijdsinterval [0,2], zie je in het vooraanzicht B twee keer zo ver van P als van A? Beschouw zowel de situaties waarbij A en B aan dezelfde kant van P liggen, als waarbij ze aan weerszijden van P liggen; dit levert twee vergelijkingen.

Er is een kunstmaan C gelanceerd. Deze kunstmaan is bedoeld om A van dichtbij te bestuderen. C bevindt zich in dezelfde baan als A en cirkelt met dezelfde snelheid als A en in dezelfde richting rond P. C ligt 0,1 seconde voor op A.
C wordt toegevoegd aan de animatiefilm.

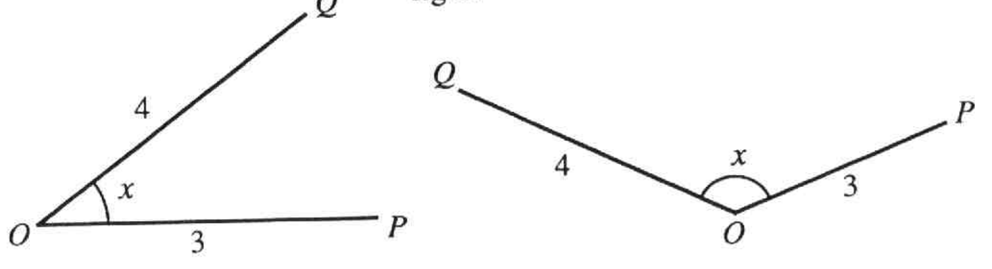
>d Geef een formule voor de plaats x_C in het vooraanzicht als functie van t.

>e Op welke tijdstippen, in het interval [0,2], lijkt het in het vooraanzicht of A en C in botsing komen?

6 Het werken met goniometrische functies in diverse situaties

1. Twee staven met lengte 4 dm en 3 dm kunnen draaien om een punt O.

fig 17



Als de eindpunten P en Q van de staven worden verbonden, ontstaat een driehoek OPQ.
De oppervlakte van die driehoek is afhankelijk van de hoek x tussen OP en OQ.

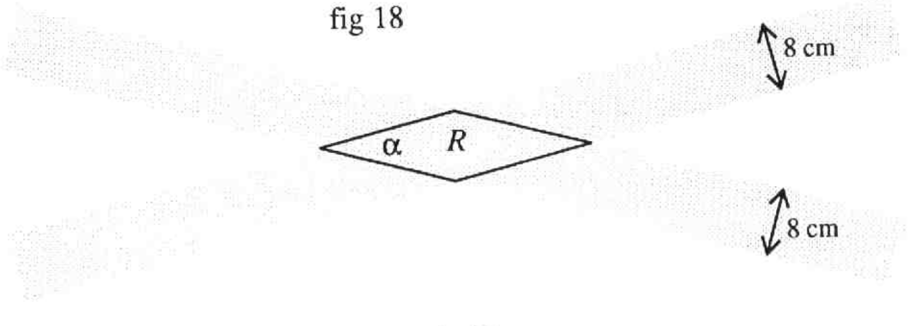
>a Voor welke hoeken x is de oppervlakte van "driehoek OPQ" gelijk aan nul?

>b Toon aan dat geldt: opp. $OPQ = 6 \sin x$.

>c Welke vorm heeft driehoek OPQ in het geval dat de oppervlakte van de driehoek maximaal is?

2. Twee lange stroken papier met een breedte van 8 cm worden over elkaar gelegd (zie figuur 18).
Er ontstaat een vierhoekig overlappingsgebied R.

fig 18



>a Wat voor een soort vierhoek is R?

>b Bereken de oppervlakte van R (= O_R) in het geval de hoek α die de stroken met elkaar maken gelijk is aan 45^o.

>c Hoe verandert O_R als de stroken een scherpere hoek met elkaar maken?

>d Hoe groot moet α zijn om R een oppervlakte van 1000 cm^2 te geven?

>e Druk O_R uit in α.

>f Schets de grafiek van O_R als functie van α voor $0 \le \alpha \le 180^o$.

>g Welke conclusies kun je uit die grafiek trekken over het verloop van O_R?

3. Een buis heeft een loodrechte doorsnede in de vorm van een ruit.

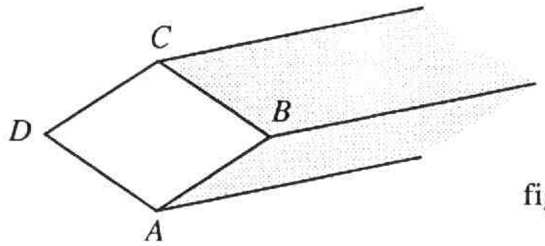
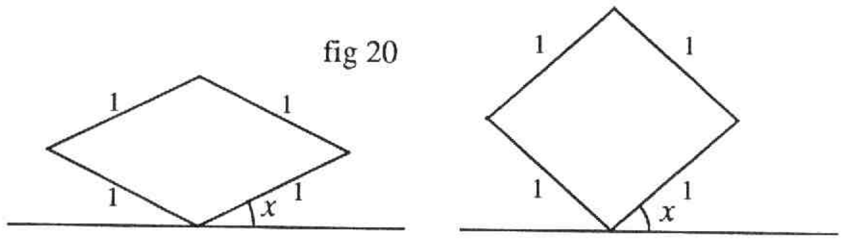


fig 19

De buis kan worden ingedrukt en samengetrokken, waardoor het vooraanzicht verandert.

fig 20



Daardoor verandert de oppervlakte van de doorsnede van de buis en de doorstromingscapaciteit.
Metingen hebben de volgende tabel voor de oppervlakte van de doorsnede, afhankelijk van de x opgeleverd.

x	oppervlakte
20°	0,64
40°	0,98
60°	0,87
80°	0,34

>a Controleer deze tabel voor $x = 20^{\circ}$.

>b Druk de oppervlakte van de doorsnede uit in x.

>c Bereken voor welke x de oppervlakte van de doorsnede maximaal is.

4. In de buis van opgave 2 wordt een vierkante balk gestoken.
De buis wordt samengedrukt tot de balk precies past.
Stel de zijde van het vierkant is $2p$.

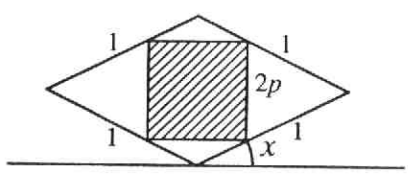


fig 21

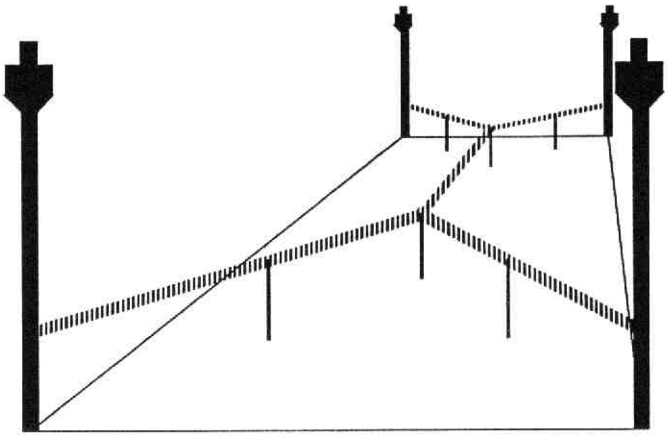
>a Bewijs: $p = \dfrac{\sin x}{1 + \tan x}$. ($x$ in radialen)

>b Bewijs: $\dfrac{dp}{dx} = \dfrac{\cos^3 x - \sin^3 x}{\cos^2 x\,(1 + \tan x)^2}$

>c Voor welke x tussen 0 en $\frac{1}{2}\pi$ geldt: $\dfrac{dp}{dx} = 0$?

>d Hoe kun je het antwoord van >c meetkundig verklaren?

5. Op de hoekpunten van een vierkant veld van 100 bij 100 m staan vier uitkijktorens. Via loopbruggen kan men vanuit elke toren elke andere bereiken.



In het bovenaanzicht:

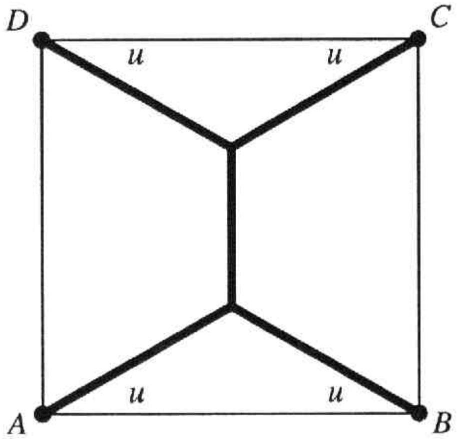


fig 22

>a Bewijs dat de totale lengte L van de loopbrug uitgedrukt wordt in de hoek u, volgens de formule:

$$L = 100 - 100\tan u + \frac{200}{\cos u}$$

>b Hoe ziet het loopbruggenpatroon er uit voor $u = \frac{\pi}{4}$?
Hoe groot is de totale lengte in dat geval?

>c Onderzoek voor welke u de totale lengte minimaal is.

6. BC is een as met een vaste arm AB en een draaibare arm CP. AB en CP maken rechte hoeken met CB. Het vlak door B loodrecht op CB heet V.

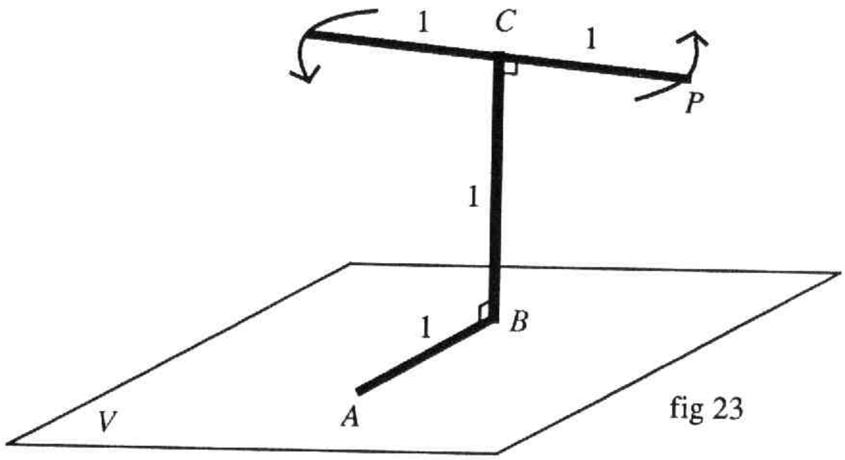


fig 23

x is de rotatiehoek van CP, gemeten in radialen ($0 \leq x \leq 2\pi$).
In de stand 'P recht boven A' geldt: $x = 0$.
In figuur 23 is de draairichting aangegeven.
De afstand tussen A en P varieert.
AP is een functie van de draaihoek. Stel: $AP = f(x)$.

>a Toon aan: $f(x) = \sqrt{3 - 2\cos x}$.

>b Leid uit deze formule af voor welke x de afstand AP minimaal resp. maximaal is.

>c Controleer je antwoorden bij >b met behulp van een ruimtelijke figuur.

>d De lengte AP kan ook als volgt worden berekend: projecteer P loodrecht op V (geeft P') en trek de bissectrice uit B in driehoek ABP'.

Laat op deze wijze zien dat geldt: $f(x) = \sqrt{4\sin^2\frac{1}{2}x + 1}$.

>e Controleer je antwoorden bij >b met deze nieuwe formule.

>f Als je in een bepaalde richting naar het apparaat kijkt, lijkt het of de lengte van AP gelijk is aan $2 \sin \frac{1}{2}x$.
In welke richting moet je dan kijken?

>g Teken de grafiek van $g(x) = 2 \sin \frac{1}{2}x$.

>h Bij welke x wijkt $g(x)$ het meest af van $f(x)$?
Hoe groot is die afwijking?

7.

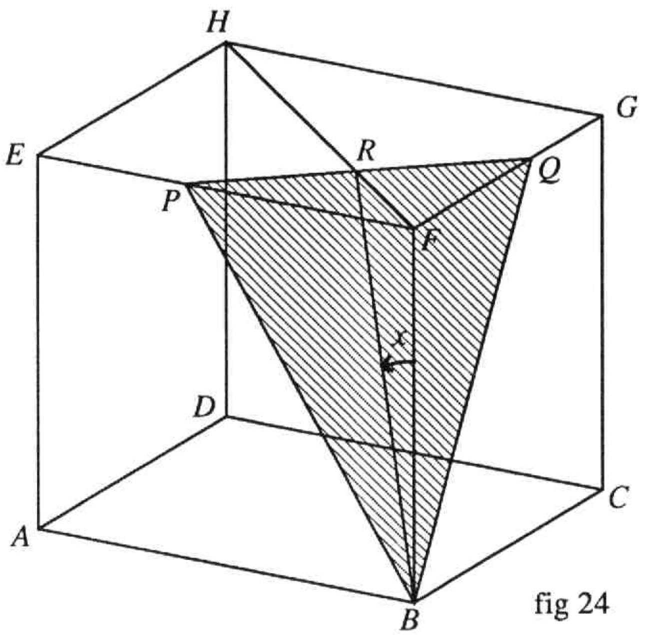


fig 24

Gegeven de kubus $ABCD.EFGH$ met ribbe 1.
Vlak V gaat door B en is evenwijdig met diagonaal EG.
Vlak V draait zo, dat de hoek x (in radialen) van dat vlak met de ribbe BF (zie figuur) verandert. Bij die draaiing blijft het vlak evenwijdig met EG.

>a Er worden alleen standen toegelaten waarbij het vlak de kubus volgens een driehoek BPQ snijdt.
Welke waarden kan x aannnemen?

>b Voor welke x is driehoek BPQ gelijkzijdig?

>c De oppervlakte van driehoek BPQ is afhankelijk van x.

Toon aan: opp. $\Delta BPQ = \dfrac{\sin x}{1 - \sin^2 x}$.

>d Stel $\sin x = s$ en $y = \dfrac{s}{1 - s^2}$.
Welke waarden kan s aannemen?

>e Bereken $\dfrac{dy}{ds}$.

>f Hoe kun je in de ruimtefiguur zien dat $\dfrac{dy}{ds}$ positief moet zijn voor iedere toegestane waarde van s.

Onderstaande opgave is voor een deel gelijk aan een examenopgave van 1990.

8. Voor het kweken van plantjes gebruikt een tuinder een cellenstructuur zoals in figuur 25a is afgebeeld. Iedere afzonderlijke cel heeft zes zijden van 3 cm. Door de hele structuur uit te rekken, in de richting zoals aangegeven in figuur 25b, verandert de vorm van iedere cel. Daarbij blijven EF en CB evenwijdig. Die verandering kan worden beschreven met behulp van de variabele hoek DAB.

Stel de grootte van hoek DAB is x radialen.

fig 25a

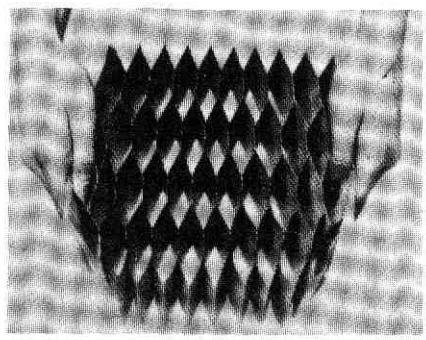
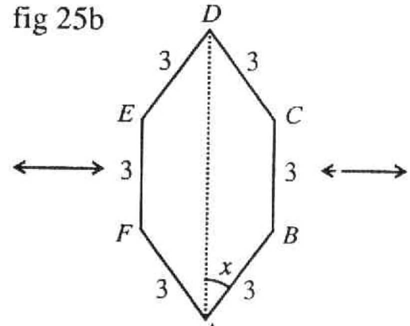


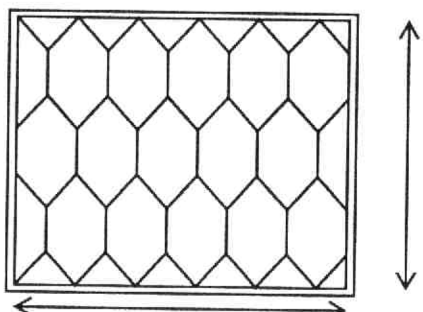
fig 25b



>a Bereken x in radialen (in 2 decimalen nauwkeurig) in het geval dat $BF = 4$.

In figuur 26 is een dergelijke cellenstructuur aangebracht in een plantenbak.

fig 26



>b De binnenbreedte van de plantenbak is 22 cm.
Bereken de binnenlengte van de plantenbak.

De cellenstructuur van figuur 14 wordt uit de plantenbak genomen en horizontaal uitgerekt totdat de hoek $x = \frac{1}{2}\pi$.

>c Teken voor dit geval het bovenaanzicht van de cellenstructuur.

Het verband tussen de oppervlakte van de cel (S) en de hoekgrootte (x) wordt voor elke hoek x gegeven door

$$S = 18 \sin x + 18 \sin x \cos x$$

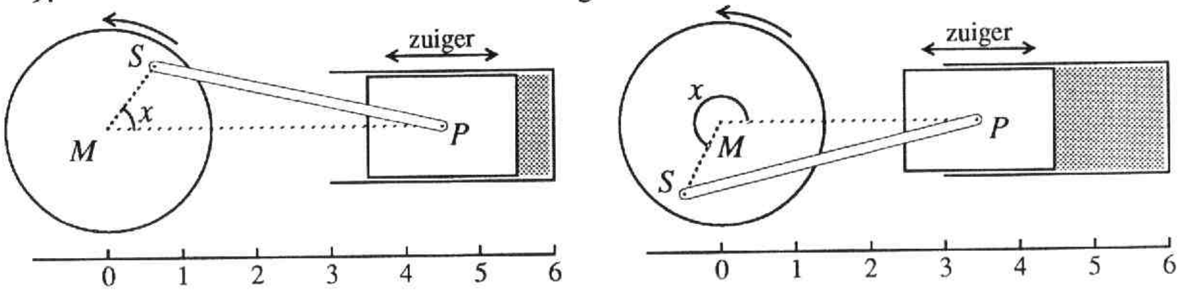
>d Bewijs de juistheid van deze formule.

>e Druk $\dfrac{dS}{dx}$ uit in $\cos x$.

>f Bereken voor welke waarde van x de oppervlakte van de cel maximaal is en teken de cel met maximale oppervlakte.

Nog een examenopgave (1990, tijdvak 2):

9. fig 27



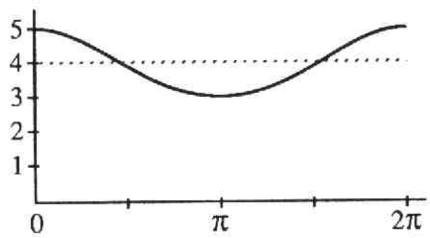
Een zuiger is door middel van een drijfstang verbonden met een draaiende schijf. Als de schijf draait beweegt de zuiger horizontaal heen en weer.
M is het middelpunt van de schijf, *S* is het (scharnierende) verbindingspunt van de drijfstang en de schijf. Bij punt *P* is de drijfstang ook scharnierend met de zuiger verbonden. $MS = 1$ en $PS = 4$.
Stel de grootte van de hoek *PMS* is x radialen.
De afstand *PM* is afhankelijk van de hoekgrootte x; stel $PM = a(x)$.

Voor iedere hoekgrootte x geldt: $a(x) = \cos x + \sqrt{16 - \sin^2 x}$

>a Bewijs deze formule voor $0 < x < \frac{1}{2}\pi$.

In figuur 28 staat de grafiek van a als functie van x, voor $0 \leq x \leq 2\pi$.

fig 28



In de grafiek zie je dat het minimum van $a(x)$ gelijk is aan 3 en het maximum gelijk is aan 5.

>b Hoe kun je dat beredeneren aan de hand van figuur 27?

Bij één rondgang van de schijf zal de lengte *PM* op twee momenten gelijk zijn aan de lengte van de drijfstang *PS*.

>c Hoe groot zijn de hoeken *PMS* waarbij zich dat voordoet?
Geef je antwoord in radialen en in 1 decimaal nauwkeurig.

De afstand $a(x)$ kan benaderd worden door de formule:
$b(x) = 4 + \cos x$.

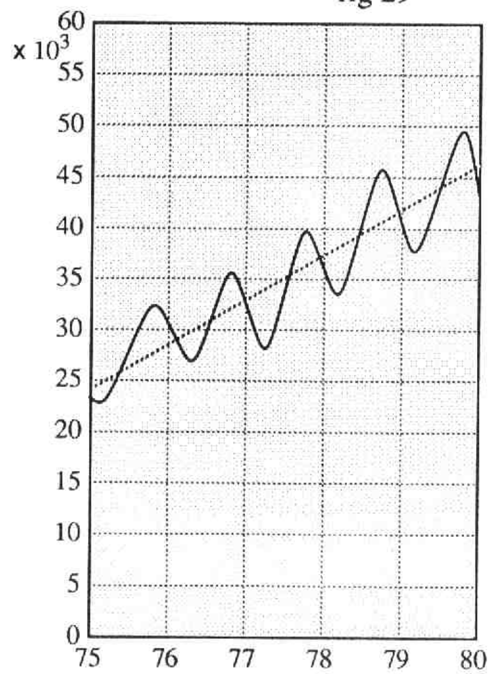
>d Teken de grafiek van b.

>e Onderzoek voor welke x het verschil tussen $b(x)$ en $a(x)$ maximaal is en bereken dat maximale verschil in 2 decimalen nauwkeurig.

7 Somgrafieken

Verschijnselen met een periodiek karakter kunnen worden beschreven met behulp van sinusfuncties.
Als eerste voorbeeld bekijken we de grafiek van het aantal bij een arbeidsbureau ingeschreven werklozen, behorend tot de groep kantoor- en onderwijzend personeel in de periode 1975-1980.

fig 29



1. > De werkloosheid onder kantoor- en onderwijzend personeel is in de periode '75-'80 niet steeds gestegen. Hoe is dat te verklaren?

Hoewel de bovenstaande grafiek afwisselend stijgend en dalend is, kunnen we zeggen dat die grafiek een stijgende 'neiging' heeft.
Men spreekt van een *stijgende trend.* Die trend kan redelijk worden aangegeven door een rechte lijn, 'trendlijn', waar de grafiek omheen slingert.

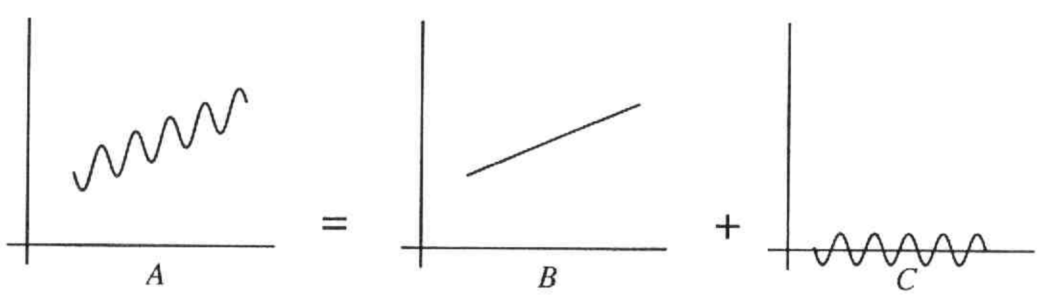
2. Geef een passende formule bij die trendlijn in t en w. (w = aantal werklozen in 1000-tallen, t = de tijd in jaren vanaf 1975).

Een wiskundig model dat past bij de werkelooosheidsgrafiek wordt gevonden door het verschijnsel te ontleden in twee componenten:

- de lineaire stijging (trendlijn)
- de fluctuatie per jaar (sinusoïde)

Schematisch:

fig 30



Grafiek A ontstaat door *superpositie* (= 'optelling van grafieken') uit de grafieken B en C.

3. Als wiskundig model bij het verloop van de werkloosheid kiezen we nu de formule:

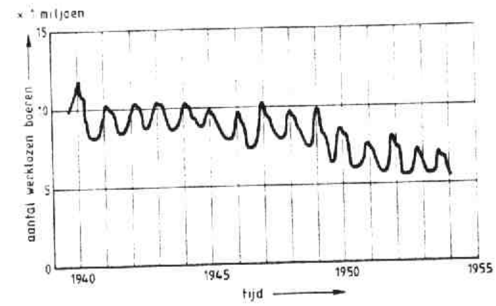
$$w = 4t + 23 - 7\sin 2\pi t$$

(w = aantal werklozen in 1000-tallen; t = tijd in jaren na '75)

> Ga na dat deze formule redelijk past bij de werkeloosheidsgrafiek op blz. 32.

4. Hieronder zie je een werkloosheidsgrafiek met een dalende trend. Het is de werkloosheidsgrafiek voor de Amerikaanse boerenbevolking in de periode 1940-55.

> Geef een formule die het aantal werkloze boeren (w) als functie van de tijd (t) beschrijft.



5. Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{1}{2}x$, $g(x) = \sin x$ en $s(x) = f(x) + g(x)$.

>a Teken in één figuur de grafieken van f, g en s voor $0 \leq x \leq 4\pi$.

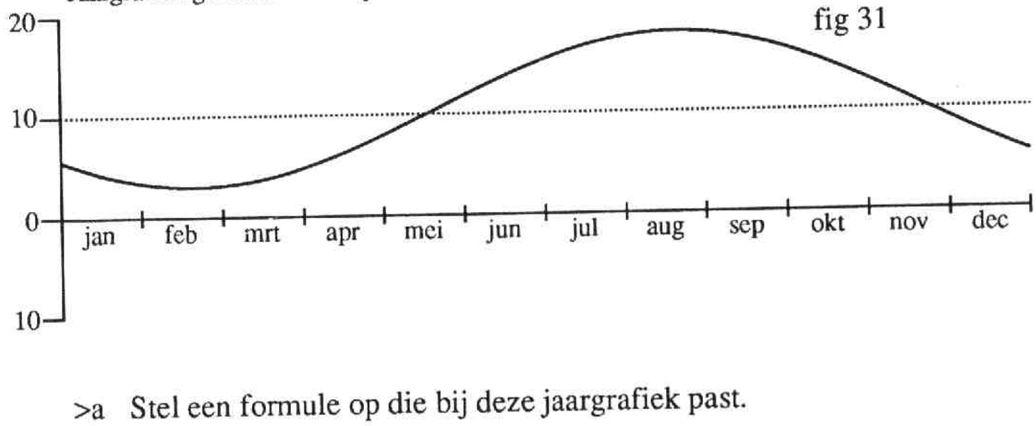
>b Bereken de x-coördinaten van de punten met horizontale raaklijn tussen $x = 0$ en $x = 4\pi$.

6. > Dezelfde opdracht als 5 voor $f(x) = x + 1$, $g(x) = \cos x$ en $s(x) = f(x) + g(x)$.

7. De trendlijn bij een verschijnsel met periodieke effecten kan zelf ook weer een golflijn zijn. Afgezien van toevallige omstandigheden ('het weer') wordt het temperatuurverloop op een zekere plek op aarde bepaald door twee effecten: de seizoenwisselingen en het dag-nachtritme. Beide effecten zijn periodiek; het ene met een periode van een jaar, het andere met een periode van 24 uur.

Jaargrafiek gemiddelde temperatuur

fig 31



>a Stel een formule op die bij deze jaargrafiek past.

Een model voor de dagelijkse temperatuurschommeling ontstaat uit superpositie van twee sinusoïden.

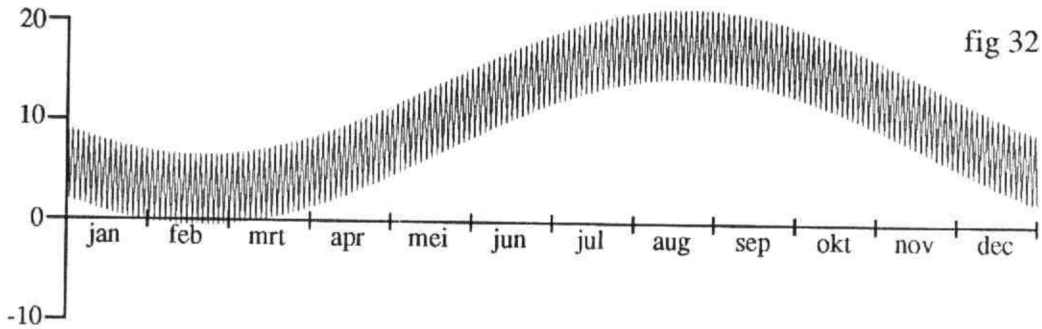


fig 32

>b Welke formule denk je dat er bij deze grafiek past?

8. In figuur 33a zijn de grafieken van $f(x) = \sin x$ en $g(x) = 0{,}2\sin 5x$ getekend, in figuur 33b zie je de grafiek van de somfunctie.

fig 33a

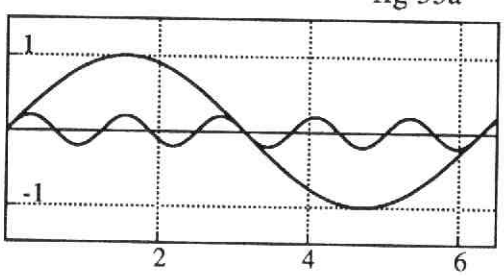
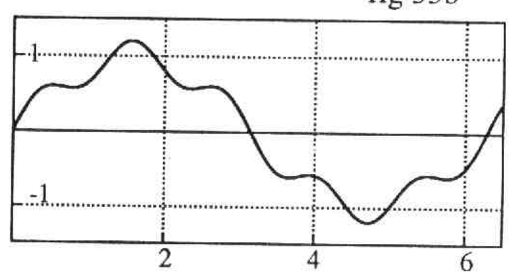


fig 33b



> Zo te zien zijn er zes punten tussen $x = 0$ en $x = 2\pi$ op de grafiek van s waarin de raaklijn horizontaal is. Bereken de coördinaten van die punten.

9. Twee stemvorken worden in trilling gebracht, zodanig dat de trillingen dezelfde frequentie en amplitude hebben, maar in fase verschillen. Een wiskundige voorstelling van dit gegeven is bijvoorbeeld:

trilling I: $u = \sin t$
trilling II: $u = \sin(t - 1)$.

Op blz 35 zie je de trillingspatronen van I, II en van de resultante ('I + II'), zoals die bijvoorbeeld op een oscilloscoop kan worden waargenomen.

>a In welke tijdsintervallen tussen 0 en 2π versterken de beide trillingen elkaar? (Trillingen versterken elkaar als de uitwijkingen hetzelfde teken hebben).

>b Het trillinspatroon van de resultante lijkt verdacht veel op een sinusoïde. Neem aan dat dit inderdaad zo is. Welke formule hoort daar dan bij? Lees je antwoord af uit figuur 34c.

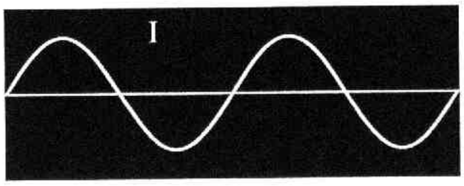


fig 34a

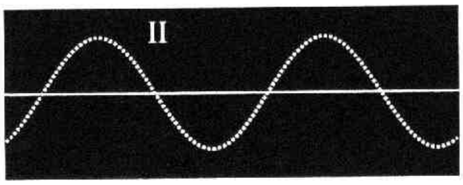


fig 34b

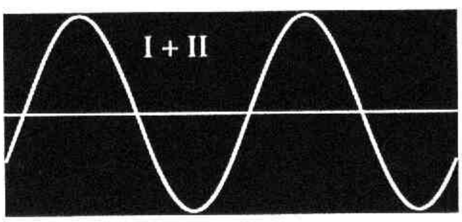


fig 34c

>c Ter controle van de formule bij >b kun je de tijdstippen waarop de evenwichtsstand wordt bereikt, exact vinden.
Stel namelijk $\sin t + \sin(t-1) = 0$ en los hieruit t op.
Welke tijdstippen vind je op deze manier?

>d Ook de amplitude van de resultante I + II is exact te bepalen.
Bereken de uiterste waarden van de functie $t \to \sin t + \sin(t-1)$ met behulp van differentiaalrekening.
Vergelijk je uitkomsten met de formule van >b.

Bij >b mocht je er van uitgaan dat de grafiek van $u = \sin t + \sin(t-1)$ een sinusoïde is. Om dit wiskundig te bewijzen hebben we een formule nodig die niet behandeld is in dit boek (en die je verder niet hoeft te kennen). Dit is een van de zogenaamde formules van Simpson:

$$\sin A + \sin B = 2 \cdot \sin \tfrac{1}{2}(A+B) \cdot \cos \tfrac{1}{2}(A-B)$$

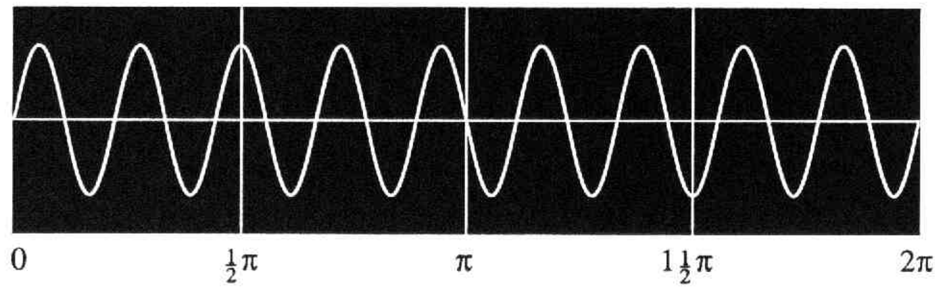
>e Vervang A door t en B door $t-1$ en leid zó de formule voor de 'sinustrilling' af.

Uit de formule van Simpson volgt dat de resultante van twee harmonische trillingen met dezelfde frequentie en dezelfde amplitude, ook weer een harmonische trilling is. Dit is niet het geval als de frequenties van de beide trillingen verschillen, ook al is dat verschil heel klein.
In opgave 10 zie je daarvan een voorbeeld.

10. Gegeven zijn de trillingen I: $u = \sin 9t$ en II: $u = \sin 10t$.
De resultante (I + II) is duidelijk niet harmonisch.

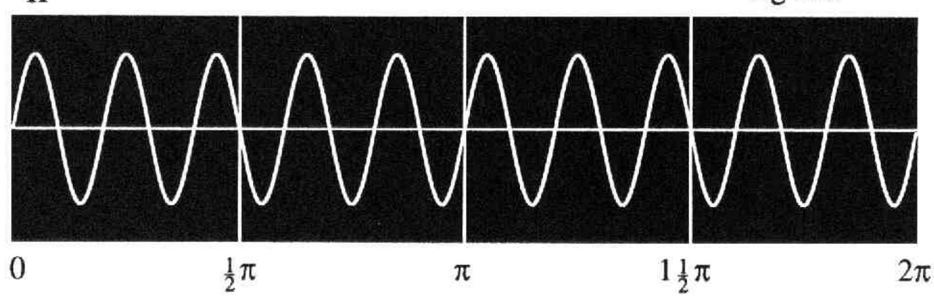
I

fig 35a



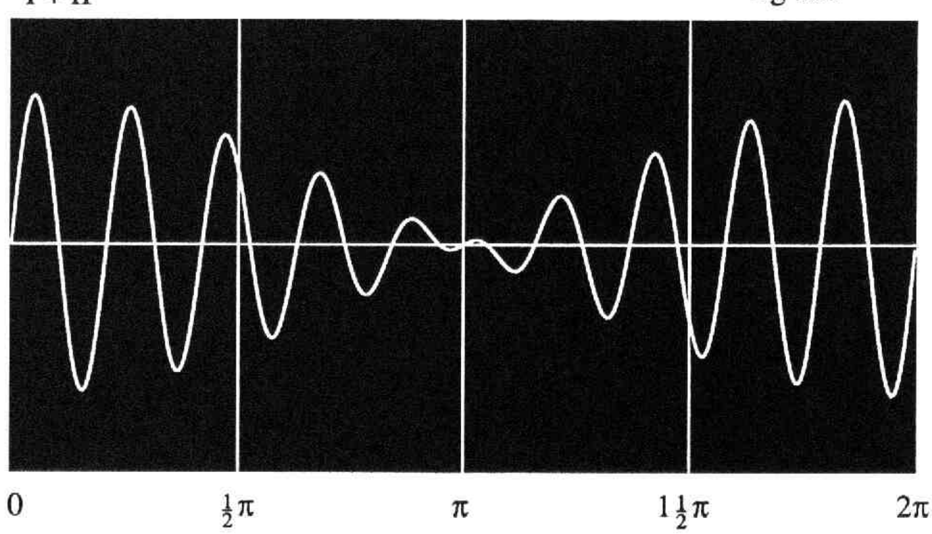
II

fig 35b



I + II

fig 35c



>a Hoe groot is het verschil in frequentie van I en II?
(N.B. frequentie = $\dfrac{1}{\text{periode}}$).

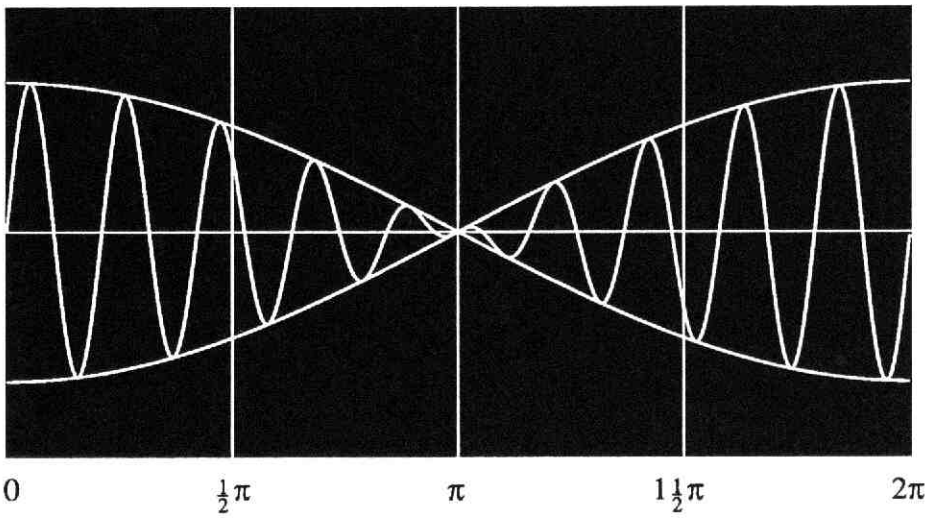
>b Hoe groot is de periode van de resultante?

>c Pas de formule van Simpson toe met $A = 10t$ en $B = 9t$.

Het trillingspatroon van I + II kenmerkt zich door een variabele amplitude. Voor het geluid betekent dit een afwisselende versterking en verzwakking. Dit verschijnsel wordt *zweving* genoemd.

>d Het lijkt er in figuur 36 op dat het trillingspatroon ingeklemd zit tussen twee sinusoïden.
Welke formules horen bij deze sinusoïden?

fig 36



8 De tangens en de eenheidscirkel

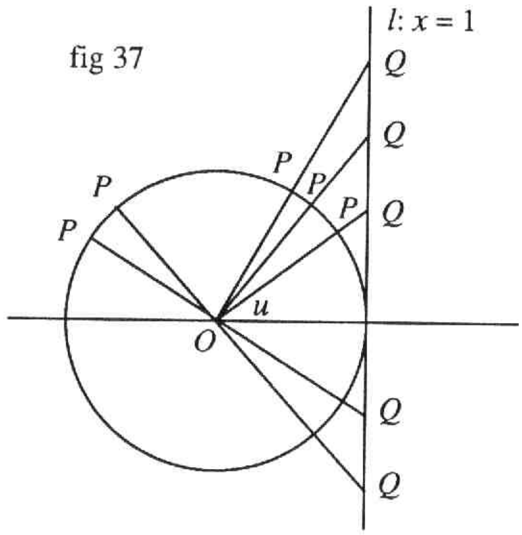
De functies 'sinus' en 'cosinus' zijn gedefinieerd met behulp van een cirkelbeweging. De functie 'tangens' is in het boekje 'De Techniek van het differentiëren' algebraïsch ingevoerd, namelijk door middel van de formule:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Uit die formule kunnen eigenschappen van de tangensfunctie, zoals periodiciteit en asymptotisch gedrag, worden afgeleid.

Er bestaat ook een manier om de tangensfunctie meer 'meetkundig' in te voeren, met behulp van de eenheidscirkel.

fig 37



In het punt (1,0) van de eenheidscirkel trekken we de raaklijn l aan deze cirkel (de lijn $x = 1$). Het punt P beweegt weer in positieve richting over de eenheidscirkel en wordt daarbij steeds geprojecteerd vanuit O op de lijn l. Die projectie noemen we Q. De plaats van P en dus ook die van Q wordt bepaald door de draaihoek u die de straal OP maakt met de x^+-as.

Er geldt:

$x_P = \cos u$	$x_Q = 1$
$y_P = \sin u$	$y_Q = \tan u$

1. > Verklaar $y_Q = \tan u$ voor $0 < u < \frac{1}{2}\pi$.

2. Bekijk figuur 38.

   >a Verklaar uit de ligging van de driehoeken OAP en OBQ:

   $$\frac{y_P}{x_P} = \frac{y_Q}{x_Q}$$

   >b Ga na dat hieruit volgt:

   $$\tan u = \frac{\sin u}{\cos u}$$

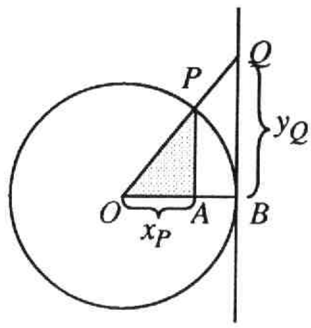


fig 38

Je ziet dus dat tan $u = y_Q$ een goede manier is om de tangens te definiëren. In feite heeft de tangens daar ook zijn naam aan te danken; het latijnse werkwoord 'tangare' betekent 'raken'. De waarden die de tangens voor verschillende hoeken bereikt, zijn gerichte afstanden op de raaklijn l.

3. >a Verklaar uit figuur 37 dat tan u niet gedefinieerd is voor $u = \frac{1}{2}\pi + k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\ldots$).

   >b Verklaar ook dat de tangensfunctie de periode π heeft.

   >c Hoe kun je zien dat de tangensfunctie niet, zoals sin en cos, een beperkt bereik heeft?

4. Zie figuur 38 en vergelijk de driehoeken OPA en OQB.

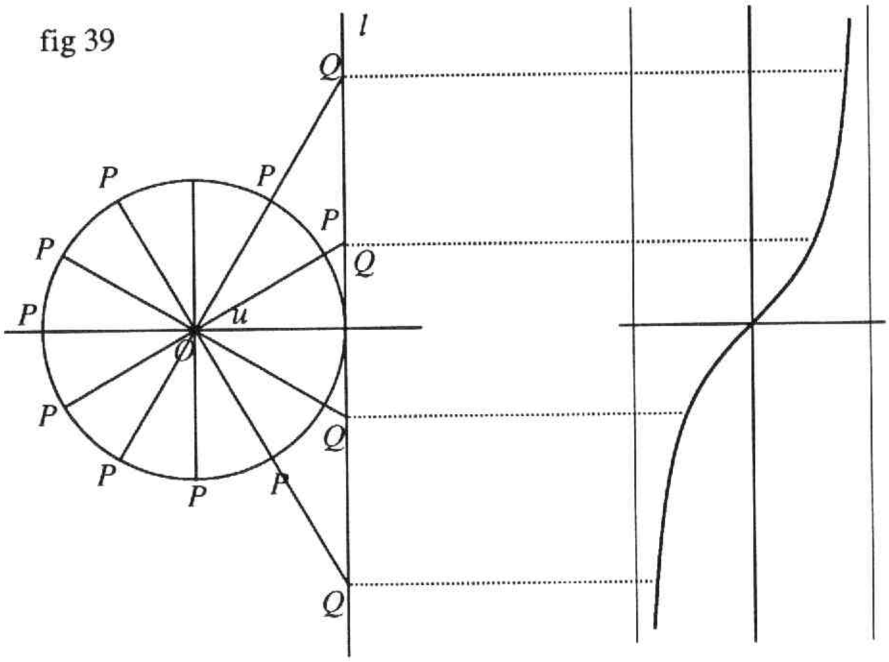
   >a Met welke factor moet je driehoek OPA vermenigvuldigen om driehoek OQB te krijgen?

   >b Hoe volgt hieruit: $OQ = \dfrac{1}{\cos u}$?

   >c Bewijs nu de formule: $\tan^2 u + 1 = \dfrac{1}{\cos^2 u}$.

Op de volgende bladzijde is een eenheidscirkel gebruikt om een tangensgrafiek te tekenen tussen $u = -\frac{1}{2}\pi$ en $u = 1\frac{1}{2}\pi$. Daarbij is de cirkel verdeeld in 12 even grote boogjes. Als P de positie (0,1) of (0,-1) inneemt, dan is het bijbehorende punt Q 'onbereikbaar' geworden.

fig 39



5. Als P met constante snelheid de eenheidscirkel doorloopt, dan doorloopt Q met veranderende snelheid de verticale lijn l.

> Op welke plaats op l is de snelheid van Q het kleinst?