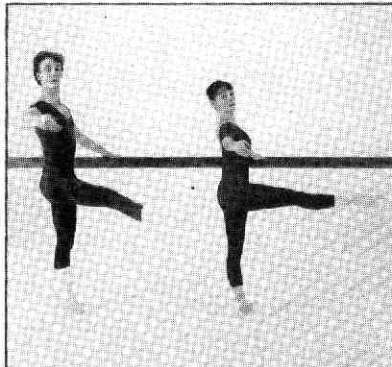
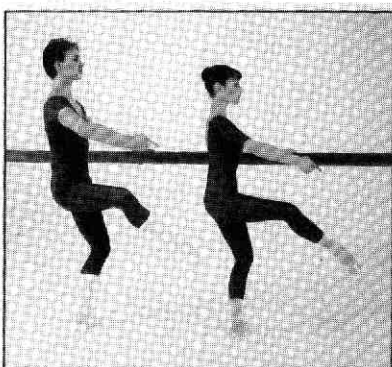


Oefenlessen

<https://hdl.handle.net/1874/10131>

OEFENLESSEN



Wiskunde B



Freudenthal instituut
Archief

OEFENLESSEN

Hawex -Wiskunde B

OEFENLESSEN

Een produktie ten behoeve van het project Hawex.

Ontwerper: Martin Kindt
Henk van der Kooij
Anton Roodhardt

Met medewerking van: Jan de Jong
Martin van Reeuwijk

Vormgeving: Ada Ritzer

© 1990: 3e versie
Utrecht, juli 1990

Inhoudsopgave

Oefenlessen bij 'Hellingen'

1. Goniometrische verhoudingen.....	1
2. Ontbinden in factoren.....	4
3. Lineaire functies.....	6
4. De a, b, c, formule.....	9
5. Kwadratische functies en parabolen.....	11
Denkertjes.....	14

Oefenlessen bij 'Verkenning in de Ruimte'

6 Oppervlakte.....	16
7. Gelijkvormige figuren.....	19
8. Evenredigheden in figuren.....	23
9. Functies in de meetkunde.....	26
10. Regelmatige figuren.....	29
Denkertjes.....	32

Oefenlessen bij 'Differentiëren, een manier om veranderingen bij te houden'

11. Vergelijkingen.....	34
12. Tekenverloop.....	36
13. Machtsfuncties en vergelijkingen.....	40
14. Ongelijkheden.....	43
15. Snijpunten met de x-as.....	46
Denkertjes.....	48

Oefenlessen bij 'Sinus en Co'

16. Gevels en vijfhoeken.....	50
17. Omtrek en oppervlakte van een cirkel.....	52
18. Verschuiven van grafieken.....	54
19. Vergelijkingen.....	56
20. Grafiek en tekenverloop.....	58
Denkertjes.....	62

Oefenlessen bij 'Tekenen wat je weet'

21. Het zwaartepunt van een driehoek.....	64
22. Hoogtelijnen in een driehoek.....	67
23. De cosinusregel.....	70
24. Lijnen en vlakken.....	72

Oefenlessen 'Algemeen'

25. Gebroken vormen.....	75
26. Gebroken vergelijkingen.....	78
27. Vergelijkingen met sinus en cosinus.....	81

Voorwoord

Bij het instuderen van een nieuw ballet heeft een danser(es) veel baat bij een perfecte beheersing van de basisbewegingen. Tijdens de opleiding worden die basistechnieken intensief geoefend aan de barre (zie voorplaat). Een professionele danser(es) werkt ook aan de barre, onder andere om de spieren soepel te houden. Het nieuwe ballet als geheel wordt ingestudeerd onder leiding van een choreograaf. Het werken aan de barre is een individuele activiteit.

Bij het werken aan een wiskundig probleem zijn er ook altijd momenten dat er een beroep gedaan wordt op de beheersing van een basistechniek, het oplossen van een vergelijking, het berekenen van een oppervlakte, ...

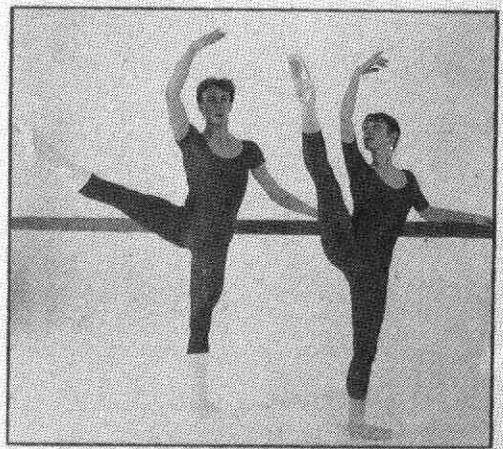
Dit oefenboek is bedoeld om zelfstandig bezig te zijn met technieken en vaardigheden. Deels gaat het om dingen die je vroeger al gehad hebt, deels bevat het (extra) oefenstof bij nieuw geleerde onderwerpen uit de 'gewone' boekjes.

In principe is er telkens een blokje van oefenlessen rond één boekje gegroepeerd. Ieder blokje wordt gevolgd door een serie Denkertjes: opgaven die net even wat meer creativiteit vragen dan de gewone oefeningen.

Het motto van dit boek is duidelijk:

Oefening baart kunst

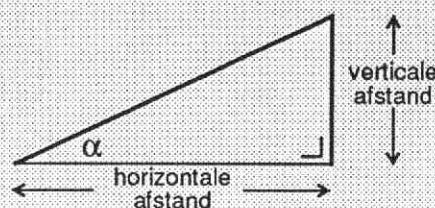
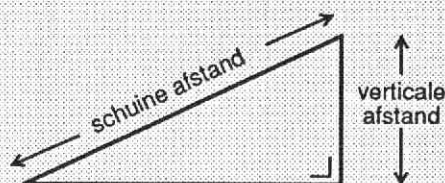
Daarbij hoeft je zeker niet gefrustreerd te raken als blijkt dat de een van nature wat hoger reikt dan de ander.



Grand battements naar opzij, waarin je kunt zien dat een meisje een natuurlijke extensie bezit.

OEFENLES 1: Goniometrische verhoudingen

Het verband tussen *hellingshoek* en *hellingspercentage**) wordt gelegd door *goniometrische verhoudingen*.

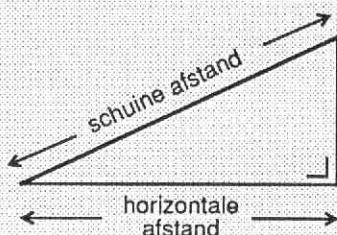


$$\sin \alpha = \frac{\text{verticale afstand}}{\text{schuine afstand}}$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{verticale afstand}}{\text{horizontale afstand}}$$

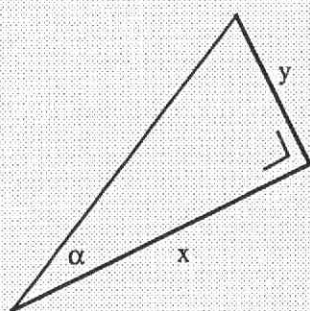
$\sin$ (voluit: sinus) en $\tan$ (voluit: tangens) worden goniometrische verhoudingen genoemd.

Er is nog een derde goniometrische verhouding: $\cos$ (voluit: cosinus)

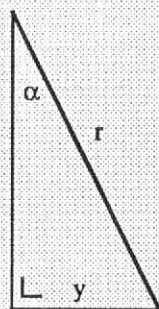


$$\cos \alpha = \frac{\text{horizontale afstand}}{\text{schuine afstand}}$$

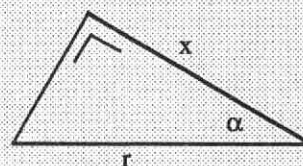
De aanduidingen 'horizontaal' en 'verticaal' moeten met een korreltje zout worden genomen bij een andere stand van de driehoek. Men zegt ook: *aanliggende zijde* (x), *overstaande zijde* (y) en *schuine zijde* (r).



$$\tan \alpha = \frac{y}{x}$$



$$\sin \alpha = \frac{y}{r}$$



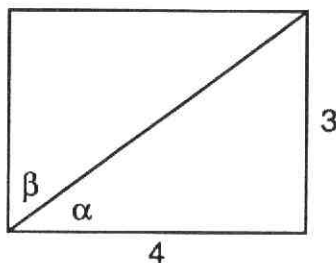
$$\cos \alpha = \frac{x}{r}$$

*) Zie het boekje 'Hellingen'.

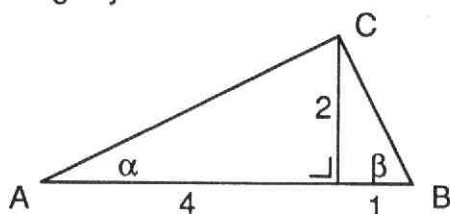
Opgaven

1. Rechthoek met diagonaal.

- Bereken $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\tan \alpha$.
- Bereken $\sin \beta$, $\cos \beta$, $\tan \beta$.
- Bereken α en β met je rekenmachientje.
(Geef je antwoorden in één decimaal nauwkeurig.)

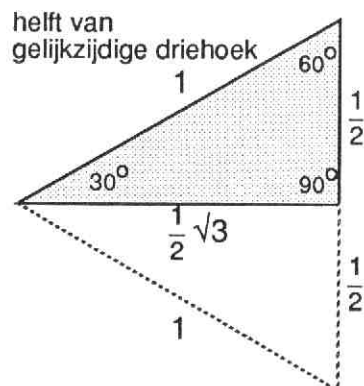
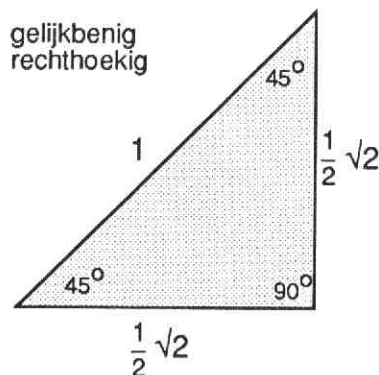


2. Driehoek met hoogtelijn.



- Bereken $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\tan \alpha$.
- Bereken $\sin \beta$, $\cos \beta$, $\tan \beta$.
- Bereken α en β (in 1 decimaal nauwkeurig).
- Hoe groot is de hoek tussen AC en BC ?

3. De 'tekendriehoeken'.

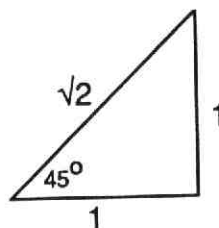


- Controleer de getallen bij de zijden met de stelling van Pythagoras.
- Vul in: $\sin 45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ $\sin 30^\circ = \dots$ $\sin 60^\circ = \dots$
 $\cos 45^\circ = \dots$ $\cos 30^\circ = \dots$ $\cos 60^\circ = \dots$
 $\tan 45^\circ = \dots$ $\tan 30^\circ = \dots$ $\tan 60^\circ = \dots$

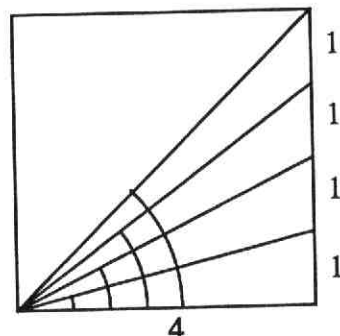
4. Iemand berekent $\sin 45^\circ$ met behulp van dit plaatje.

Resultaat: $\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Ogenschijnlijk een andere uitkomst dan bij 3b. Of toch dezelfde?

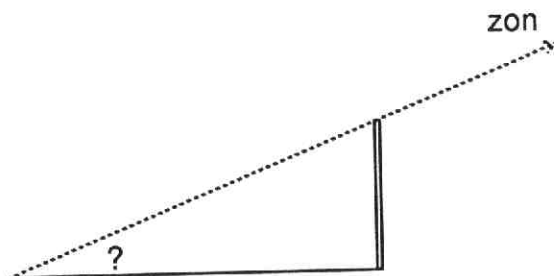


5. Vier lijnen in een vierkant maken vier hoeken met de basis van klein naar groot: α , β , γ , δ . Zij verdelen de rechterzijde van het vierkant in vier gelijke stukken.



- Bereken $\tan \alpha$, $\tan \beta$, $\tan \gamma$, $\tan \delta$.
- Is dit waar:
 $\beta = 2\alpha$, $\gamma = 3\alpha$ en $\delta = 4\alpha$?
- Als de hoek groter wordt, wordt ook de tangens van die hoek groter. Geldt dat ook voor de sinus? En voor de cosinus?

6. Een paaltje is 1 m hoog. De schaduw van het paaltje is 2 m lang. Hoe groot is de hoek die de zonnestralen met de grond maken? (Die hoek geeft de 'hoogte' van de zon aan.)



7. Iemand meet de hoogte van de zon met een hoekmeter: resultaat: 60° . Vervolgens meet hij dat de schaduw van de berk in zijn tuin 2,40 m lang is. Hoe hoog is die berk?
8. Een vliegtuig stijgt onder een hoek van 20° tot een hoogte van 5 km is bereikt. Hoeveel km heeft het vliegtuig afgelegd om die hoogte te bereiken?

OEFFENLES 2: Ontbinden in factoren

Voorbeeld:

$$(1) a^2 + 10a + 21 =$$

$$\begin{array}{l} 21 = 7 \times 3 \\ 10 = 7 + 3 \end{array}$$

$$(2) a^2 + 7a + 3a + 21$$

$$(3) a(a+7) + 3(a+7) =$$

$$(4) (a+3)(a+7)$$

De tussenstappen (2) en (3) worden meestal weggelaten. De tweede-graadsvorm $a^2 + 10a + 21$ is *ontbonden in factoren* van de eerste graad: $a + 3$ en $a + 7$.

Nog een voorbeeld:

$$a^2 + 10a - 24 =$$

$$(a - 2)(a + 12)$$

$$\begin{array}{l} -24 = 12 \times -2 \\ 10 = 12 - 2 \end{array}$$

Opgaven

1. Ontbind in factoren (van de eerste graad):

a. $a^2 + 10a + 24$

d. $x^2 - 100x + 900$

b. $x^2 + 20x - 44$

e. $x^2 + 103x + 300$

c. $y^2 - 15y + 50$

f. $y^2 - y + 90$

2. Ontbind in factoren, indien mogelijk

a. $a^2 + 8a$

d. $x^2 - 100$

b. $y^2 - 12y$

e. $y^2 - 1$

c. $p^2 + p$

f. $m^2 + 4$

3. Gegeven de vorm $x^2 + kx - 36$

Neem voor k achtereenvolgens 5, 9, 0 en 35 en ontbind in elk van die gevallen de vorm in factoren.

4. $x + 6 \xrightarrow{\text{kwadraat}} x^2 + 12x + 36 \xrightarrow{\text{min 1}} x^2 + 12x + 35 \xrightarrow{\text{ontbind}} (x + 5)(x + 7)$

a. Controleer deze berekening.

b. Doe hetzelfde met:

$$x + 4; x - 7; y + 11; y - 11; p + 1; p$$

Het ontbinden in factoren wordt gebruikt bij het oplossen van vergelijkingen.

Voorbeeld:

$$t^2 + 3t = 18$$

Oplossing:

$$t^2 + 3t - 18 = 0$$

← 18 is 'overgeboekt' naar het linkerlid

$$(t + 6)(t - 3) = 0$$

← linkerlid ontbonden in factoren

$$\begin{array}{cc} & \swarrow \quad \searrow \\ t + 6 = 0 & t - 3 = 0 \\ \downarrow & \downarrow \\ t = -6 & t = 3 \end{array}$$

$$\square \times \triangle = 0, \text{ dan } \square = 0 \text{ of } \triangle = 0$$

Deze manier van oplossen kan zo worden samengevat:

- Boek termen over van rechterlid naar linkerlid (of omgekeerd) tot één van beide leden nul is.
- Ontbind het andere lid in zoveel mogelijk factoren.
- Stel de factoren beurtelings nul en los de onbekende op.

Opgaven

5. Los op door ontbinding in factoren:

a. $t^2 + 45 = 18t$

c. $y^2 + 64 = 16y$

b. $4x + 45 = x^2$

d. $x^2 = 64x$

6. Er is één getal dat voldoet aan $x^2 - x = 12$ en ook aan $x^2 + 7x = -12$. Welk getal is dat?

7. Iemand lost $x^2 + 6x = 40$ als volgt op:

$$x(x + 6) = 40$$

$$x = 40 \text{ of } x + 6 = 40$$

$$x = 40 \text{ of } x = 34$$

Geef commentaar.

8. Los op en controleer je antwoorden door invullen in de vergelijking:

a. $x^2 + 12x = 85$

d. $(u - 11)(u + 11) = 104$

b. $x(x - 10) = 24$

e. $t(t + 99) = 100$

c. $(y - 7)(y + 3) = 39$

f. $(x - 5)^2 = 81$

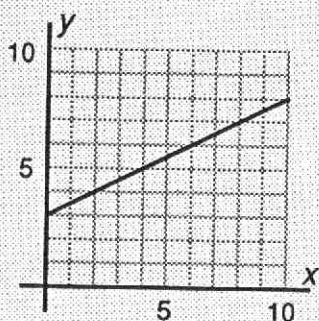
OEFFENLES 3: Lineaire functies

Een rechte lijn in het *Oxy*-vlak die scheef staat ten opzichte van de beide coördinaatassen, heeft een vergelijking van de vorm:

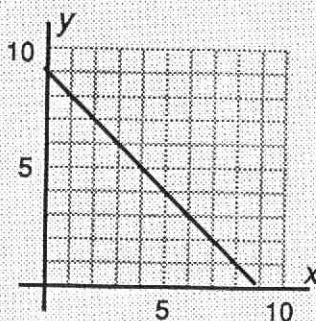
$$y = ax + b$$

In dit geval zeggen we: y is een *lineaire functie* van x

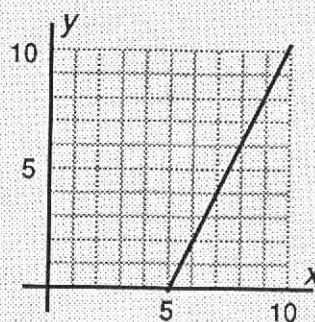
Voorbeelden:



$$y = \frac{1}{2}x + 3$$



$$y = -x + 9$$

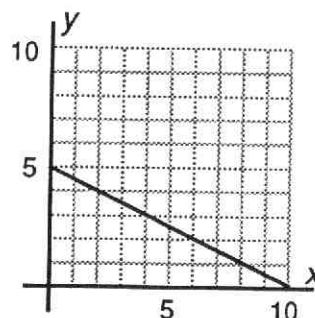
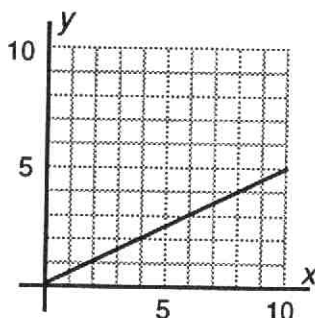
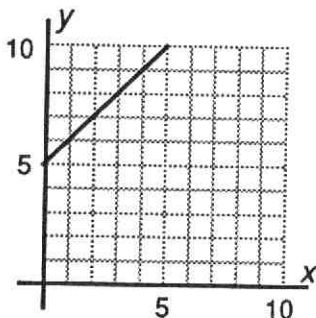


$$y = 2x - 10$$

De coëfficiënt a van x is bepalend voor de *helling* van de lijn en wordt daarom *hellingscoëfficiënt* (of *richtingscoëfficiënt*) genoemd.

De constante b is bepalend voor de *plaats* waar de lijn de y -as snijdt.

1. **a.** Controleer of de drie grafieken in overeenstemming zijn met de bijbehorende vergelijkingen.
- b.** Stel je voor dat de eerste twee grafieken in één rooster staan. Die grafieken hebben dan één snijpunt. Bereken de coördinaten van dat snijpunt.
- c.** Dezelfde vraag voor de tweede en de derde grafiek.
2. Geef bij elk van onderstaande grafieken een vergelijking van de vorm $y = ax + b$



Bij het noteren van een functie wordt vaak gebruik gemaakt van het functie-symbool f .

Een voorbeeld van een lineaire functie is: $f(x) = 3x + 18$ of $f: x \rightarrow 3x + 18$

3. Gegeven is de functie $f(x) = 3x + 18$.

- Bereken $f(4)$, $f(0)$, $f(18)$, $f(-6)$, $f(\frac{2}{3})$
- Welke getallen moeten op de plaats van de puntjes staan?
 $f(\dots) = 21$; $f(\dots) = 102$; $f(\dots) = 18$; $f(\dots) = 0$; $f(\dots) = 4$

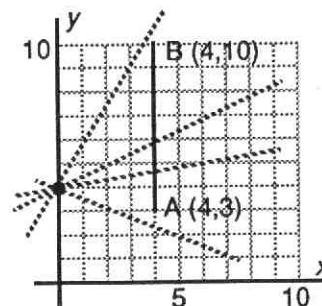
4. Gegeven de vergelijking: $y = ax + 4$.

- Kies voor a achtereenvolgens 2 , $\frac{2}{3}$, 0 , -4 en teken steeds de grafiek bij de zo ontstane functie (vier grafieken in één plaatje).

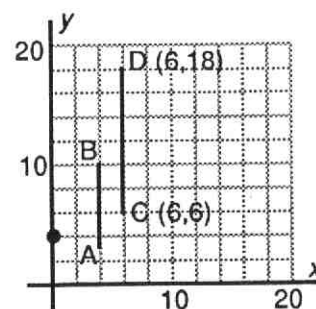
De lineaire functies van de vorm $y = ax + 4$ vormen een (oneindig grote) familie. Elk familielid heeft een grafiek die de y -as snijdt in het punt $(0,4)$. De familieleden onderscheiden zich van elkaar door de hellingscoëfficiënt van de grafiek.

- Er is één familielid waarvan de grafiek door het punt $(10,34)$ gaat. Welke hellingscoëfficiënt (dus, welke a) hoort bij die functie?

- Hiernaast zie je het lijnstuk AB . Vanuit het punt $(0,4)$ vertrekken oneindig veel recht lijnen. Sommige lijnen treffen AB , andere niet. Welke lijnen door $(0,4)$ treffen AB ? (Geef je antwoord in de vorm: $y = ax + 4$ waarbij voor a geldt:)



- Naast het lijnstuk AB is nu ook CD getekend. Welke lijnen uit $(0,4)$ treffen zowel AB als CD ? (Let op: de schaal van de tekening is verkleind).



5. Gegeven de vergelijking $y = 1,5x + b$

- Kies voor b achtereenvolgens 2 , 0 , -3 en teken de grafiek bij de zo ontstane functies.

De lineaire functies van de vorm $y = 1,5x + b$ vormen een familie.

- Van welke familieleden snijdt de grafiek de x -as tussen $(-10,0)$ en $(4,0)$?

Een rechte lijn is bepaald door *twee* punten.

Een lineaire functie is bepaald als bij twee x -waarden de y -waarden gegeven zijn.

Voorbeeld:

Gegeven: y is een lineaire functie van x (1)
als $x = 1$, dan $y = 3$ (2)
als $x = 6$, dan $y = 5$ (3)

Gevraagd: druk y uit in x

Oplossing 1:

Stel $y = ax + b$ (wegens (1))

Uit (2) volgt: $3 = a \cdot 1 + b$, (invullen!) dus $a + b = 3$ (4)

Uit (3) volgt: $5 = a \cdot 6 + b$, (invullen!) dus $6a + b = 5$ (5)

Je hebt nu een stelsel van twee vergelijkingen in a en b .

Dat kan bijvoorbeeld worden opgelost door (4) van (5) af te trekken.

Er komt dan:

$$5a = 2, \text{ dus } a = \frac{2}{5}$$

Uit $a + b = 3$ en $a = \frac{2}{5}$ volgt $b = 2\frac{3}{5}$.

Conclusie: $y = \frac{2}{5}x + 2\frac{3}{5}$

Oplossing 2 is wel handiger:

De hellingscoëfficiënt van de grafiek $= \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5-3}{6-1} = \frac{2}{5}$.

Dus: $y = \frac{2}{5}x + b$

Het punt $(1,3)$ ligt op de grafiek, dus $3 = \frac{2}{5} + b$ ofwel $b = 2\frac{3}{5}$.

6. Gegeven: y is een lineaire functie van x .

Bepaal een passende formule in elk van de volgende gevallen:

- De grafiek gaat door de punten $(5,10)$ en $(10,5)$.
- De grafiek gaat door de punten $(-3,4)$ en $(2,19)$.
- De grafiek snijdt de coördinaatassen in $(0,12)$ en $(24,0)$.
- De hellingscoëfficiënt van de grafiek is $1\frac{3}{4}$ en de grafiek gaat door het punt $(16,-7)$.
- De grafiek is evenwijdig met de lijn $x - 2y = 4$ en snijdt de lijn $x + y = 8$ in het punt $(10,-2)$.

OEFFENLES 4: De a, b, c-formule

Een vergelijking van de tweede graad in x kan worden herleid tot de standaardvorm:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (\text{met } a \neq 0)$$

Die standaardvorm wordt ook wel vierkantsvergelijking genoemd.

Als het ontbinden van factoren bij een vierkantsvergelijking niet gemakkelijk (of helemaal niet) lukt, kun je gebruik maken van de zogenaamde *a, b, c-formule*:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Deze formule geeft de oplossingen van de vierkantsvergelijking, mits het getal onder het wortelteken niet negatief is!

Dat getal, $b^2 - 4ac$, heet de *discriminant* van de vierkantsvergelijking.

Als de discriminant een negatieve waarde heeft, bestaan er geen getallen die aan de vierkantsvergelijking voldoen!*)

1.
 - a. Schrijf de vierkantsvergelijking op met $a = 3$, $b = 8$, $c = 28$.
 - b. Bereken de discriminant.
 - c. Bereken de twee oplossingen van de vergelijking.
2. Los de volgende vierkantsvergelijkingen op met behulp van de *a, b, c*-formule.

a. $2x^2 - 3x - 35 = 0$	e. $5x^2 + 6x = -1$
b. $x^2 - 26x + 69 = 0$	f. $6x^2 + 5x = -1$
c. $6x^2 + x - 57 = 0$	g. $x^2 + 22x + 122 = 0$
d. $x^2 + 7\frac{1}{2}x + 12\frac{1}{2} = 0$	h. $x^2 - 22x + 121 = 0$
3. Een vierkantsvergelijking waarbij x^2 de *coëfficiënt* 1 heeft, is van de vorm: $x^2 + px + q = 0$.
 - a. Geef een formule van de oplossingen van deze vergelijking, uitgedrukt in p en q .
 - b. Aan welke voorwaarde moeten p en q voldoen, wil de vergelijking twee (verschillende) oplossingen hebben?

*) In het door ons gebruikte getallensysteem

De oplossingen van een vierkantsvergelijking komen niet altijd 'mooi' uit. Voorbeeld:

$$x^2 + 2x = 1$$

$$x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{8}}{2}$$

$$x = -1 + \sqrt{2} \text{ of } x = -1 - \sqrt{2}$$

1 overgeboekt naar links

$$b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 8$$

$$\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = 2\sqrt{2}$$

De getallen $-1 + \sqrt{2}$ en $-1 - \sqrt{2}$ zijn de 'exacte' oplossingen van $x^2 + 2x = 1$. In de praktijk is men vaak geïnteresseerd in benaderingen van deze uitkomsten. Bijvoorbeeld in 2 decimalen: $x \approx 0,41$ en $x \approx -2,41$

4. Los de volgende vierkantsvergelijkingen op. Geef van de oplossingen die niet 'mooi' uitkomen, ook een benadering in 2 decimalen nauwkeurig.

a. $x^2 = x + 3$

e. $5x^2 + 1 = 4x$

b. $x^2 = x - 3$

f. $5x^2 = 4x$

c. $3x^2 + 1 = 4x$

g. $5x^2 = 4$

d. $4x^2 + 1 = 4x$

h. $x^2 + 0,01 = 0,25x$

5. Werk uit tot je een herkenbare vergelijking hebt en los op:

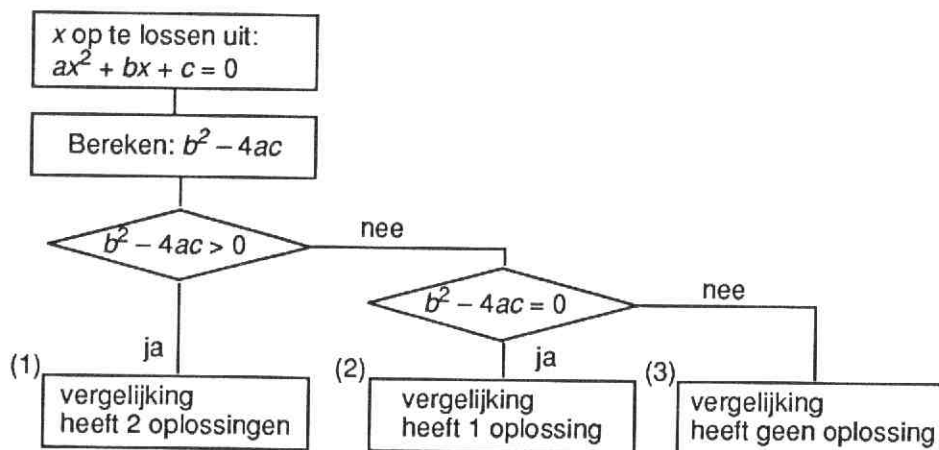
a. $(2x + 1)(3x + 2) = 4x + 3$

c. $(u - 4)^2 = (8 + u)(8 - u)$

b. $(y - 1)(y + 5) = (5 - y)(1 + y)$

d. $t(t - 8) + 32 = 4(t - 1)$

6. Bekijk onderstaand schema:



- a. Leg uit wat dit schema inhoudt.
 b. Bedenk zelf een vergelijking zodat geval (1) zich voordoet.
 c. Dezelfde vraag voor (2) en voor (3).

OEFENLES 5: Kwadratische functies en parabolen.

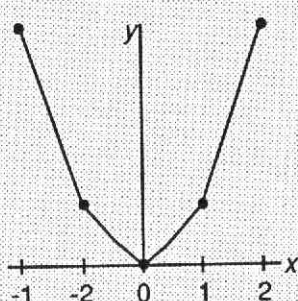
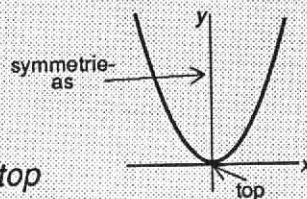
Meest eenvoudige vorm (standaardvorm):

$$y = x^2 \quad \text{of} \quad f(x) = x^2$$

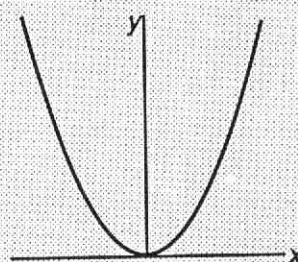
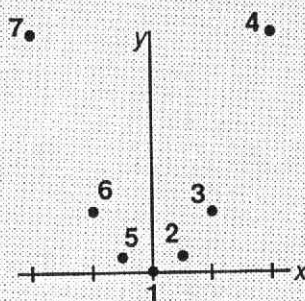
Grafiek: *parabool*

Een parabool heeft een *symmetrie-as* en een *top*

Bij het tekenen van een parabool is de plaats van symmetrie-as en top belangrijk. Verder is het raadzaam om een of meer punten in de buurt van de top te tekenen, zodat de kromming bij de top er redelijk goed uit ziet.



NIET ZO



MAAR ZO

1. Teken de grafieken van:

a. $y = \frac{1}{2}x^2$

c. $y = x^2 + 1$

b. $y = (\frac{1}{2}x)^2$

d. $y = (x + 1)^2$

2. a. Teken in één figuur de grafieken van:

$$y = \frac{1}{2}x^2 - 2 \quad \text{en} \quad y = -\frac{1}{2}x + 1$$

b. Bereken de coördinaten van de snijpunten van beide grafieken.

3. a. Teken in één figuur de grafieken van:

$$f(x) = -2x^2 + 5 \quad \text{en} \quad g(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2$$

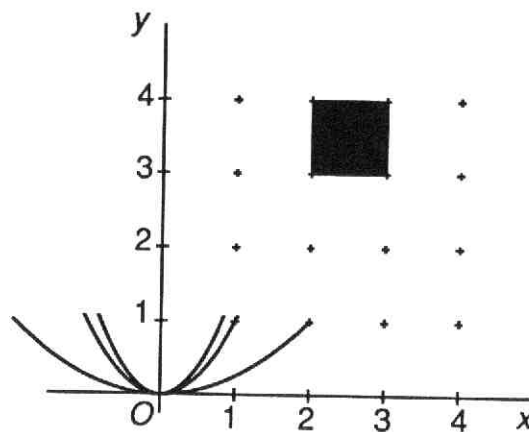
b. Een van beide grafieken is een *dalparabool*, de andere een *bergparabool*. Welke is dalparabool, welke is bergparabool?

c. Bereken de coördinaten van elk van de snijpunten van de grafieken van f en g .

4. Alle parabolen die de y -as als symmetrie-as hebben en de oorsprong als top vormen een familie. De familienaam is: $y = px^2$.

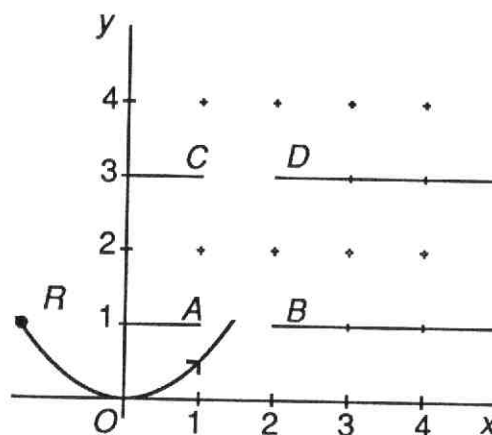
Familieleden zijn bijvoorbeeld: $y = 2x^2$, $y = \frac{1}{4}x^2$ en $y = -x^2$

Welke parabolen die deel uitmaken van de familie gaan door het zwarte vierkant?



5. Het ruimteschip R vliegt langs een parabolische baan $y = px^2$. De bemanning kan invloed op de baan uitoefenen door op het moment dat O gepasseerd wordt de p -waarde in te stellen.

Hoe zou je zelf de p -waarde instellen als je het ruimteschip door de beide openingen AB en CD moest sturen?
(Geef alle mogelijkheden)



De algemene vorm van een kwadratische functie is:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Voorbeelden:

$$a = \frac{1}{2}, b = 0, c = 0 \quad : \quad f(x) = \frac{1}{2}x^2 \quad (1)$$

$$a = 1, b = 0, c = -2 \quad : \quad f(x) = x^2 - 2 \quad (2)$$

$$a = -1, b = 4, c = 0 \quad : \quad f(x) = -x^2 + 4x \quad (3)$$

$$a = 1, b = -3, c = 5 \quad : \quad f(x) = x^2 - 3x + 5 \quad (4)$$

In de gevallen (1) en (2) valt de symmetrie-as van de grafiek samen met de y -as; immers: twee tegengestelde waarden van x (bijv. 6 en -6) leveren daar dezelfde y -waarde op!

In de gevallen (3) en (4) is dat niet het geval.

Een manier om de symmetrie-as te vinden is: *zoek twee x -waarden die dezelfde y -waarde opleveren!*

6. Bekijk geval (3): $f(x) = -x^2 + 4x$

Een begin van een x - y -tabel :

x	0	1	2	3	...
y	0	3	4	3	...



Twee punten die even hoog op de grafiek liggen zijn (1,3) en (3,3).

a. Welke lijn is symmetrie-as van de grafiek?

b. Welk punt is de top?

c. Teken de grafiek van $f(x) = -x^2 + 4x$

7. Bekijk geval (4): $f(x) = x^2 - 3x + 5$.

a. De grafiek snijdt de y -as in (0,5)

Welk ander punt (... ,5) ligt op de grafiek?

b. Welke lijn is de symmetrie-as?

c. Welk punt is de top?

d. Teken de grafiek van $y = x^2 - 3x + 5$

8. $f(x) = x^2 + 2x - 15$

a. Los x op uit: $f(x) = 0$

b. Teken de grafiek van f .

DENKERTJES

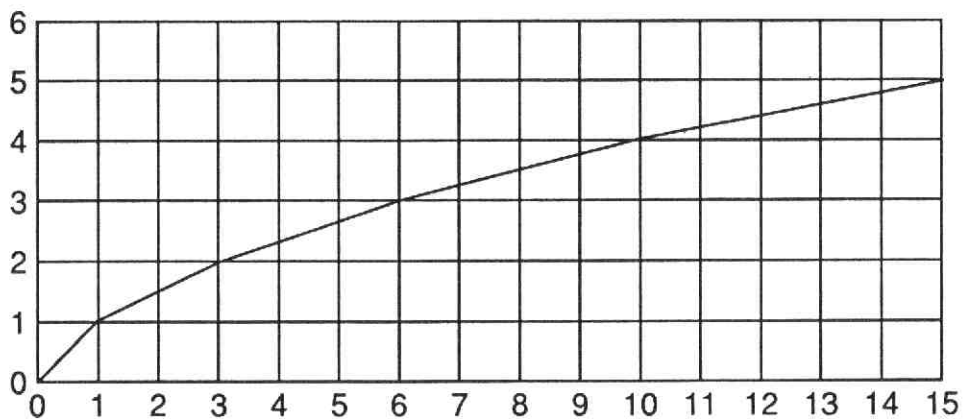
1. De vergelijking $x^3 - x = 120$ en $x^2 + x = 30$ hebben één gemeenschappelijke oplossing.
Welk getal is dat?

2. Een oprit van 200 m lengte heeft de eerste 100 m een hellingshoek van 20° en de tweede 100 m een hellingshoek van 10° .
Men wil de oprit verbouwen zodat er geen 'knik' meer inzit.
De opdrachtgever denkt dat de hellingshoek 15° moet worden.
Heeft die opdrachtgever gelijk? Zo nee, hoe groot moet de hellingshoek dan zijn en hoe lang wordt de oprit?

3. $(10^{12} + 25)^2 - (10^{12} - 25)^2 = 10^m$.
Bereken m .

4. Vanuit de oorsprong is een grafiek getekend, bestaande uit stukken rechte lijnen.

De hellingscoëfficiënten zijn achtereenvolgens $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$.

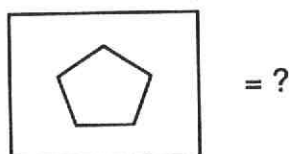
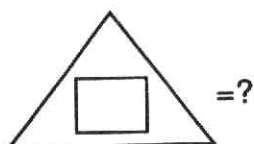
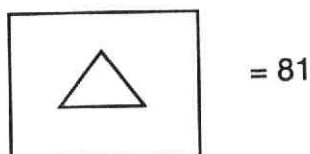
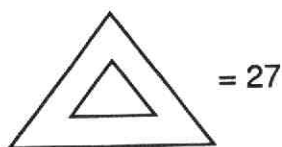


De grafiek wordt op deze wijze voortgezet tot en met het lijnstuk met hellingscoëfficiënt $\frac{1}{100}$.

Wat zijn de coördinaten van het eindpunt?

DENKERTJES

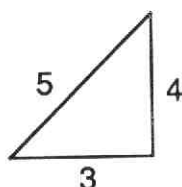
5.



6. In $x^2 + 13x + 42$ worden achtereenvolgens de getallen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, enz. ingevuld.
Wat je ook invult, de uitkomst is altijd een *even* getal. Bewijs dit.

7. Eén rechte lijn verdeelt het vlak in 2 gebieden.
Twee rechte lijnen verdelen het vlak in (maximaal) 4 gebieden.
- In hoeveel gebieden (maximaal) wordt het vlak verdeeld door 3 lijnen? En door 4 lijnen? En door 5 lijnen?
 - Hoeveel gebieden krijg je maximaal bij 1, 2, 3, 4 of 5 cirkels?

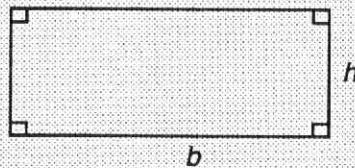
8. Je kent natuurlijk de stelling van Pythagoras.
Een beroemde rechthoekige driehoek is die met zijden 3, 4 en 5
($3^2 + 4^2 = 5^2$)



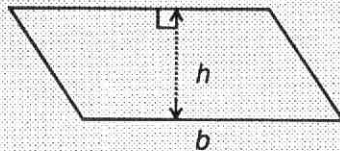
De vraag is nu: bestaat er meer rechthoekige driehoeken, waarvan de zijden drie opeenvolgende natuurlijke getallen zijn?
Aanwijzing: stel de kleinste zijde x

OEFEENLES 6: Oppervlakte

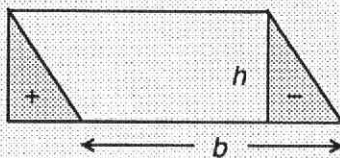
rechthoek: $Opp = \text{basis} \times \text{hoogte} = b \cdot h$



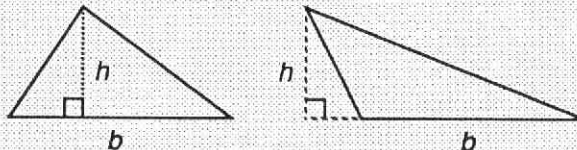
parallellogram: $Opp = \text{basis} \times \text{hoogte} = b \cdot h$



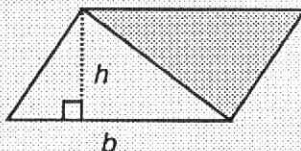
Verklaring:



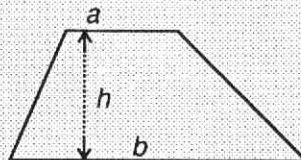
driehoek: $Opp = \frac{1}{2} \times \text{basis} \times \text{hoogte} = \frac{1}{2} b \cdot h$



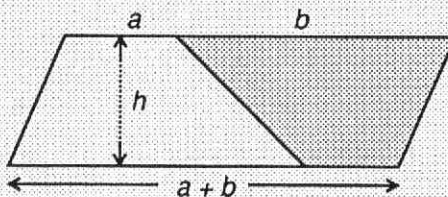
Verklaring:



trapezium: $Opp = \text{gemiddelde evenwijdige zijden} \times \text{hoogte} = \frac{1}{2} (a+b) \cdot h$

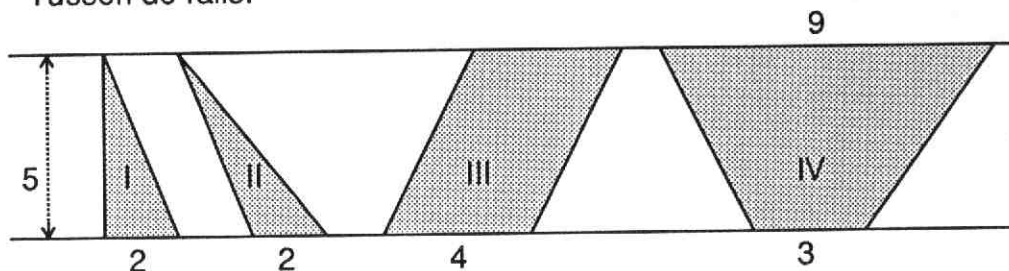


Verklaring:



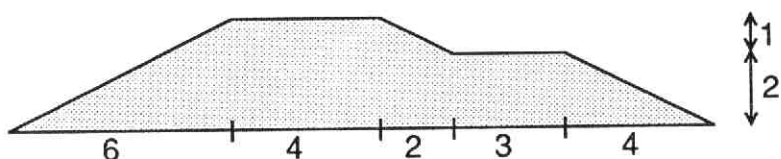
Oefeningen

1. Tussen de rails:



Bereken: opp. I ; opp. II ; opp. III ; opp. IV.

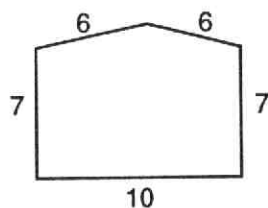
2. Dwarsdoorsnede van een dijk (maten in meters).



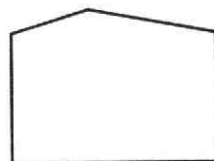
Bereken de oppervlakte van de dwarsdoorsnede.

3. a. Teken een scherphoekige driehoek met een oppervlakte van 12 cm^2 .
- b. Teken een stomphoekige driehoek met dezelfde oppervlakte.
- c. Teken ook een trapezium met een oppervlakte van 12 cm^2 .

4. a. Zijgevel van een huis.
Bereken de oppervlakte van deze gevel.
(antwoord in één cijfer achter de komma).



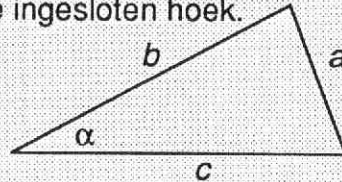
- b. Zijgevel van een huis dat even hoog en diep is.
De nok ligt 2 m uit het midden.
Bereken de oppervlakte van deze gevel.



Een tweede bekende formule voor de oppervlakte van een driehoek:

$$\text{Opp.} = \frac{1}{2} b c \sin \alpha$$

In woorden: de oppervlakte van een driehoek is het halve produkt van twee zijden en de sinus van de ingesloten hoek.

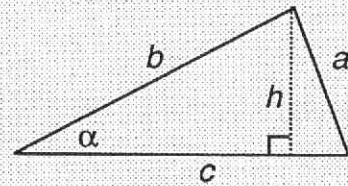


Bewijs van deze formule:

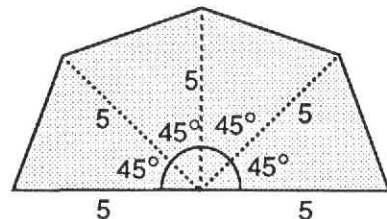
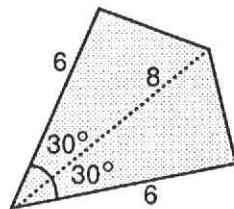
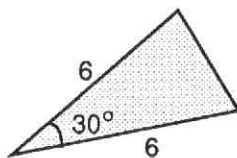
$$O = \frac{1}{2} h c$$

$$\sin \alpha = \frac{h}{b}, \text{ dus: } h = b \sin \alpha$$

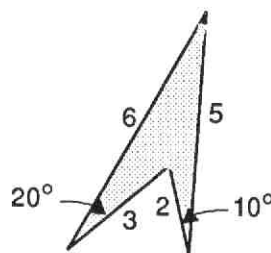
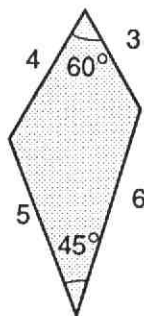
$$\text{Dus: } O = \frac{1}{2} \cdot b \sin \alpha \cdot c = \frac{1}{2} b c \sin \alpha$$



5. Controleer bovenstaande formules voor $\alpha = 90^\circ$.
6. Bereken de oppervlakte van elk van onderstaande figuren.



7. Bereken de oppervlakte van de onderstaande vierhoeken.



OEFENLES 7: Gelijkvormige figuren



A



B



C



D

De figuren A en B zijn *gelijkvormig*.

B is een vergroting van A: de zijden van B zijn 2 keer die van A.

We zeggen: de *vermenigvuldigingsfactor* van A naar B is 2.

Omgekeerd is A een verkleining van B.

De vermenigvuldigingsfactor van B naar A is $\frac{1}{2}$.

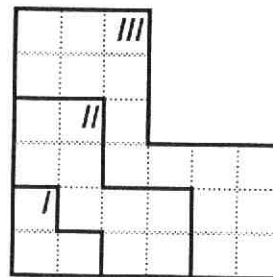
Opgaven

1.
 - a. De figuren A en D zijn ook gelijkvormig.
Hoe groot is de vermenigvuldigingsfactor van A naar D?
 - b. Waaraan kun je zien dat A en C niet gelijkvormig zijn?
 - c. Alle lengte-afmetingen bij B zijn 2 keer zo groot als de overeenkomstige afmetingen bij A.
Bijvoorbeeld: de spanwijdte van de vleugels van de zwaluw op B is 2 keer zo groot als de overeenkomstige spanwijdte op A.
Hoe zit dat met de overeenkomstige hoeken op beide figuren (bijvoorbeeld de hoek van de zwaluwstaart op A en op B)?
 - d. Hoe verhouden zich de oppervlakten van A en B? en van A en D?

2. *I*, *II* en *III* zijn gelijkvormige L-figuren.

a. Hoe groot is de vermenigvuldigingsfactor van *I* naar *II* ?
En van *II* naar *III* ?

b. Vul in: opp *II* = maal opp *I*.
opp *III* = maal opp *II*.

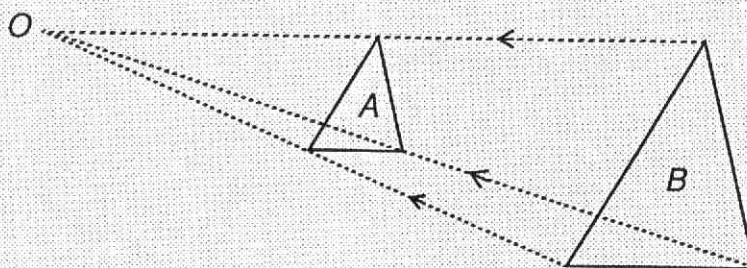
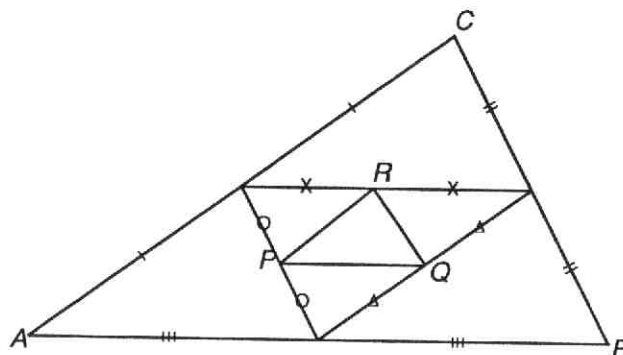


3. Driehoek *PQR* is gelijkvormig met driehoek *ABC*.

a. Hoe groot is de vermenigvuldigingsfactor van *ABC* naar *PQR*.

b. Trek de figuur over en controleer dat de lijnen *AP*, *BQ* en *CR* door één punt gaan.

c. Hoe verhouden de oppervlakten van *ABC* en *PQR* zich?

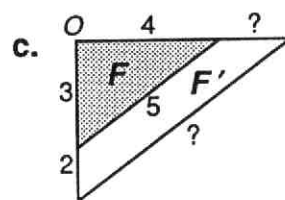
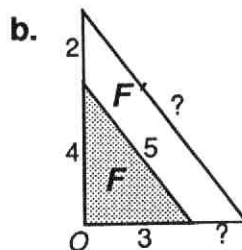
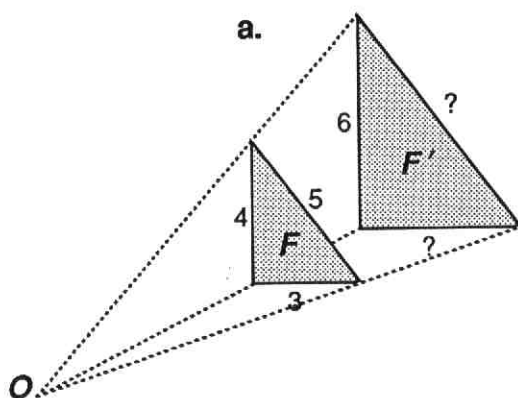


Als twee gelijkvormige figuren (die niet even groot zijn) zo worden geplaatst dat overeenkomstige zijden evenwijdig zijn, gaan de verbindingslijnen van overeenkomstige punten door een vast punt, zeg *O*.

In de hier getekende situatie zeggen we:

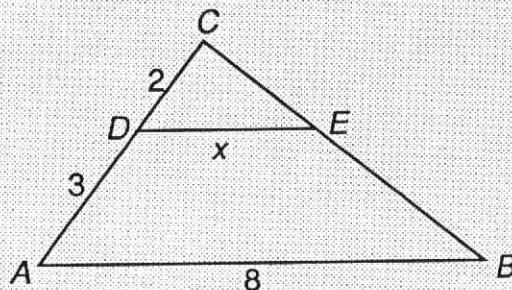
B is het beeld van *A* bij een *vermenigvuldiging vanuit het centrum O* met factor 2. (of: *A* is het beeld van *B* bij een vermenigvuldiging vanuit het centrum *O* met factor $\frac{1}{2}$).

4. Bekijk de figuur bij opgave 2.
De overeenkomstige zijden van I, II en III zijn evenwijdig.
Waar ligt het centrum van de vermenigvuldiging?
5. Driehoek F is vermenigvuldigd vanuit O . Het beeld is F' .
Vind in elk van de volgende situaties de vermenigvuldigingsfactor en bereken daarna de met ? gemerkte lijnstukken.



Voorbeeld.

In driehoek ABC is het dwarslijntje DE evenwijdig met zijde AB .



Te berekenen: lijnstuk DE .

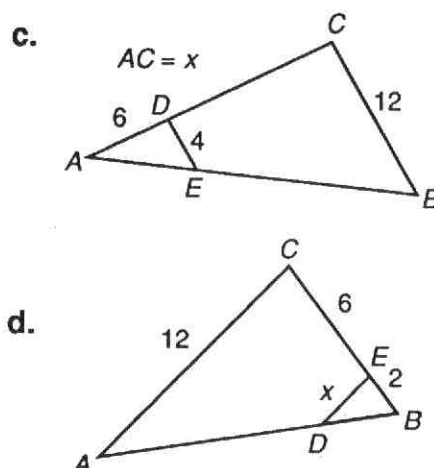
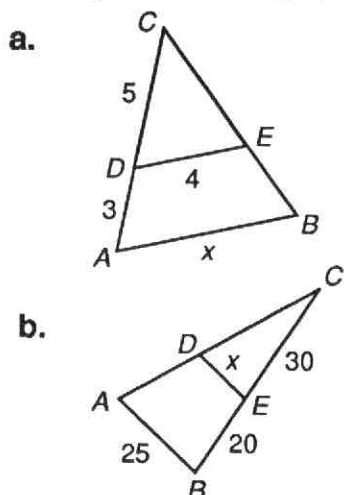
Oplossing: Vermenigvuldig CAB vanuit centrum C zo, dat CDE het beeld is.

De vermenigvuldigingsfactor is $\frac{CD}{CA} = \frac{2}{5}$.

Korte notatie: $CAB \xrightarrow{\times \frac{2}{5}} CDE$.

Daaruit volgt: $x = \frac{2}{5} \times 8$, dus $DE = 3\frac{1}{5}$.

6. In de volgende figuren is het dwarslijntje in de driehoek evenwijdig met een zijde. Bereken in elk van de gevallen lijnstuk x .
Aanwijzing: in elk van de situaties is een centrale vermenigvuldiging in het spel. Bepaal eerst het centrum en de vermenigvuldigingsfactor; stel vervolgens een vergelijking op met x als onbekende.



Nog een voorbeeld:

$DE \parallel AB$

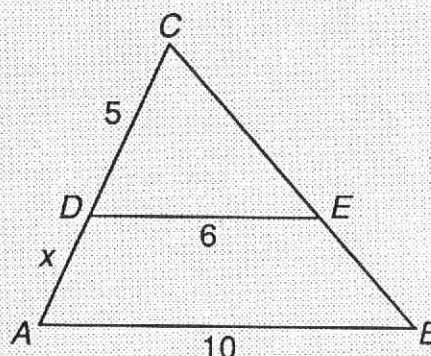
Te berekenen AD .

Oplossing: $CDE \xrightarrow{\times \frac{10}{6}} CAB$

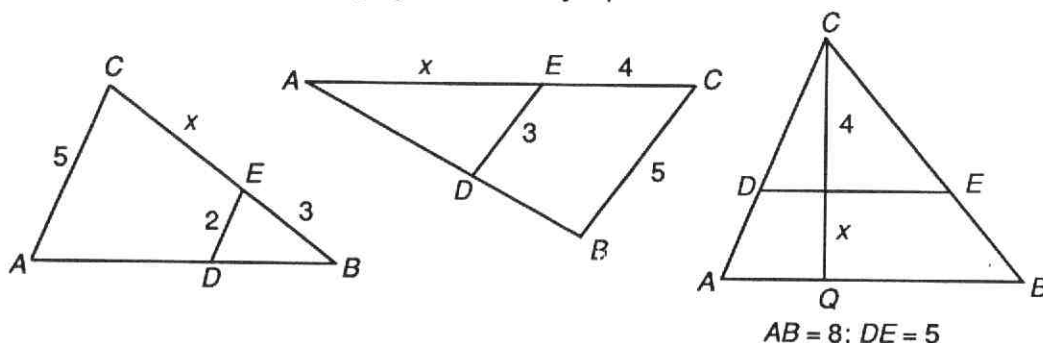
Gevolg: $AC = \frac{10}{6} \cdot DC$

$$x + 5 = \frac{10}{6} \cdot 5 \rightarrow x = \frac{50}{6} - 5$$

$$x = 3\frac{1}{3}$$



7. Bereken x in elk van de volgende situaties (het dwarslijntje in de driehoek is steeds evenwijdig met een zijde).



OEFEENLES 8: Evenredigheden in figuren

Voorbeeld:

Gegeven $PQ \parallel AB$

Gevolg:

ABC en APQ zijn gelijkvormig.

$$ABC \xrightarrow{\times \frac{4}{5}} APQ$$

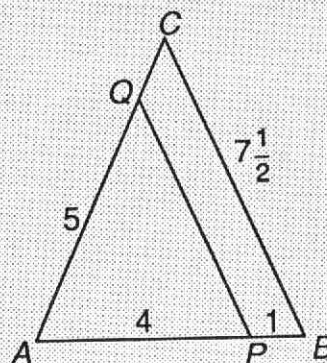
Hieruit volgt

$$\frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC} = \frac{PQ}{BC} = \frac{4}{5}$$

Een betrekking als $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$ wordt een *evenredigheid* genoemd.

PQ kan worden gevonden uit de evenredigheid:

$$\text{Conclusie: } \frac{PQ}{7\frac{1}{2}} = \frac{4}{5}, \text{ dus } PQ = 6$$



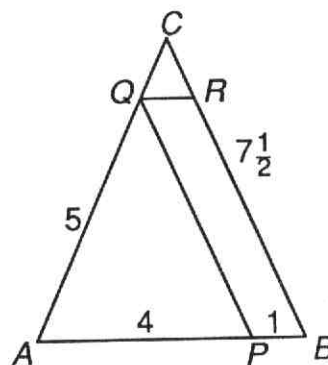
Opgaven

1. Bekijk bovenstaande figuur en stel $QC = x$.

a. Leid uit de evenredigheid $\frac{AQ}{AC} = \frac{4}{5}$ een vergelijking af in x en los x op.

b. In dezelfde figuur is de lijn $QR \parallel PB$ getekend. De driehoeken APQ en QRC zijn gelijkvormig. Wat is de vermenigvuldigingsfactor van APQ naar QRC ?

c. Verklaar de evenredigheid: $\frac{AQ}{QC} = \frac{AP}{PB}$ en bereken hiermee QC .



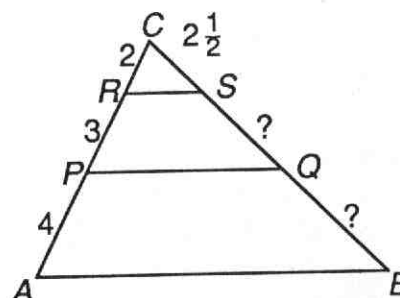
2. Gegeven: $RS \parallel PQ \parallel AB$.

a. Geldt: $\frac{CR}{RP} = \frac{RS}{PQ}$?

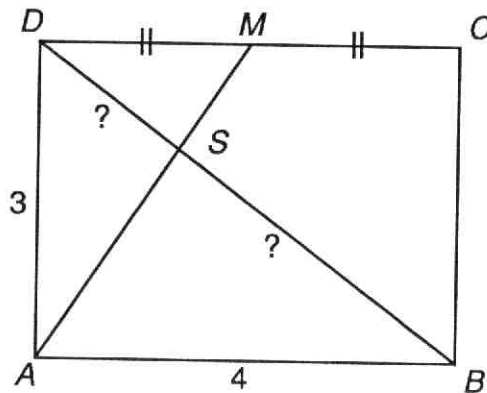
b. Geldt: $\frac{CR}{RP} = \frac{CS}{SQ}$?

c. Geldt: $\frac{CP}{CA} = \frac{PQ}{AB}$?

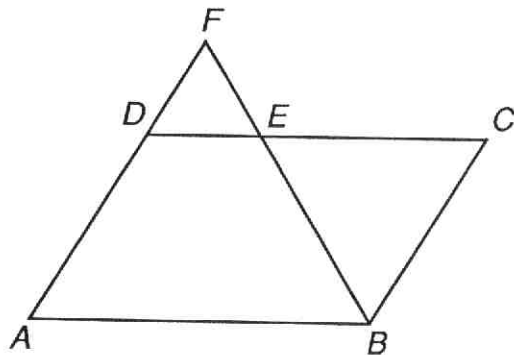
d. Bereken SQ en QB .



3. In rechthoek $ABCD$ met $AB = 4$ en $BC = 3$ is M het midden van DC . De driehoeken DSM en BSA zijn gelijkvormig.

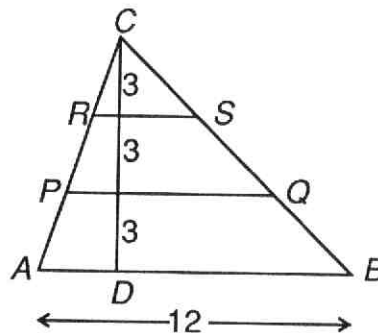


- a. Verklaar: $\frac{DS}{SB} = \frac{MS}{SA} = \frac{1}{2}$
- b. Bereken de stukken waarin de diagonaal BD wordt verdeeld door lijnstuk AM .
4. Gegeven: $ABCD$ is een parallellogram en $DE = \frac{1}{3} DC$
Hoe groot is elk van de volgende verhoudingen:
 $\frac{DE}{EC}$; $\frac{FE}{EB}$; $\frac{DF}{AF}$?



5. Gegeven: RS , PQ en AB loodrecht op CD .

- a. Bereken RS en PQ .
- b. Geldt: $\frac{\text{opp. CRS}}{\text{opp. CAB}} = \frac{CR}{CA}$?
- c. Bereken de verhouding van de oppervlakten van RSC , $PQSR$ en $ABQP$.



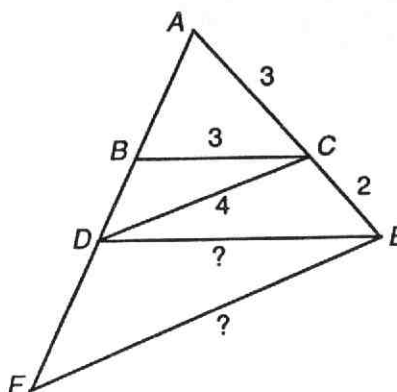
6. Gegeven: $BC \parallel DE$ en $DC \parallel FE$

a. Maak de evenredigheid af:

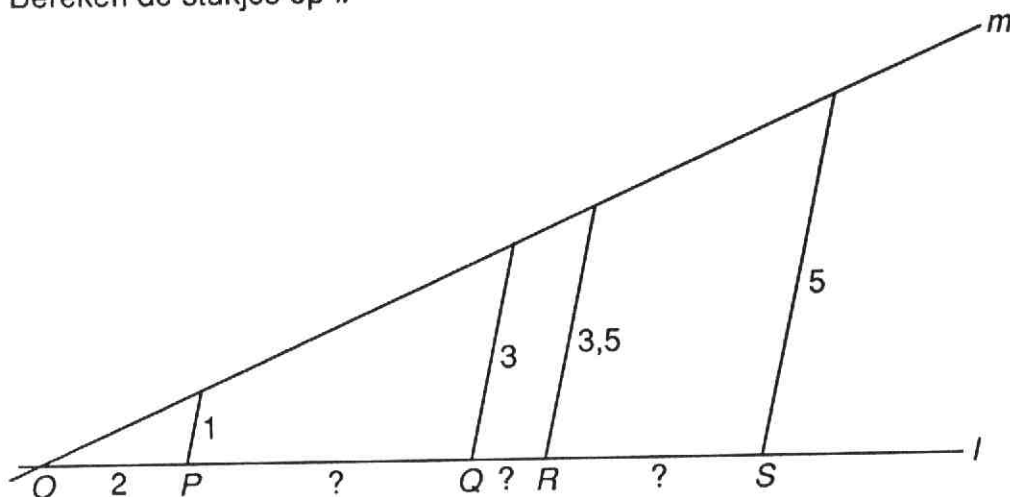
$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{\dots\dots} = \frac{BC}{\dots\dots}$$

b. Verklaar: $\frac{AB}{BD} = \frac{AD}{DF}$

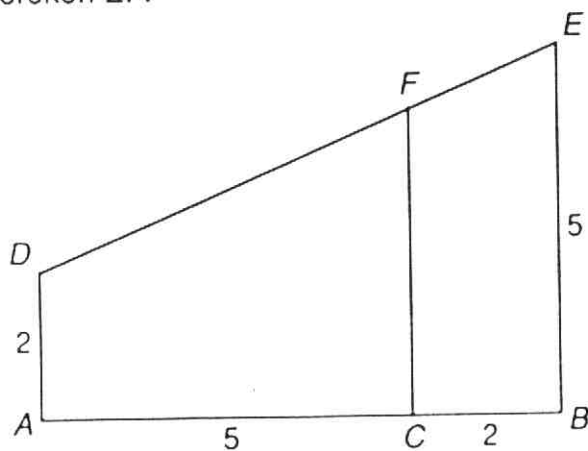
c. Bereken DE en EF .



7. Vier evenwijdige verbindingen van twee snijdende lijnen l en m .
Bereken de stukjes op l .

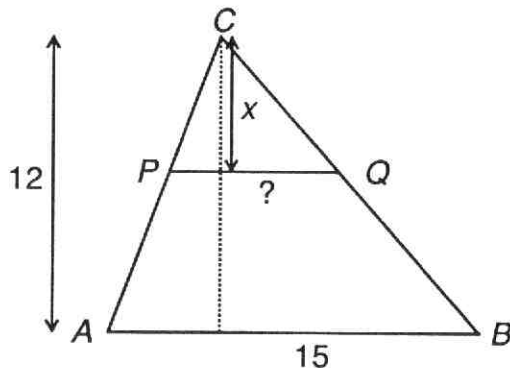


8. AD , BE en CF staan loodrecht op AB .
Bereken EF .



OEFENLES 9 Functies in de meetkunde

1. In een driehoek ABC met basis 15 en hoogte 12 liggen P en Q op de zijden AC en BC zodat $PQ \parallel AB$. PQ ligt op een afstand x van de top C .



- Bereken PQ in het geval $x = 3$.
- Bereken PQ ook voor $x = 6$.
- Druk PQ uit in x .
- Teken een grafiek van PQ als functie van x voor $0 \leq x \leq 12$.

De voorwaarde $0 \leq x \leq 12$ bij vraag **d.** is bepaald door de situatie; de hoogte van driehoek ABC is immers 12, dus PQ kan maximaal 12 van de top C liggen. Dat x niet negatief kan zijn, spreekt vanzelf.

We zeggen: het interval $0 \leq x \leq 12$ is het *domein* van de in vraag **1d.** bedoelde functie.

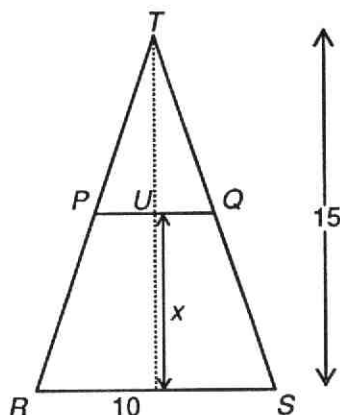
De lengte y van PQ varieert van 0 tot 15.

Het interval $0 \leq y \leq 15$ is het *bereik* van die functie.

2. Bekijk bovenstaand voorbeeld.
- Toon aan dat de oppervlakte van driehoek PQC gelijk is aan $\frac{5}{8}x^2$.
 - Druk de oppervlakte van vierhoek $ABPQ$ uit in x .
 - Controleer je formule voor $x = 0$ en voor $x = 12$.
 - Teken de grafiek van oppervlakte $ABPQ$ als functie van x . (denk aan het domein!)

3. In driehoek RST met basis 10 en hoogte 15 ligt lijnstuk $PQ \parallel RS$ op een afstand x van de basis RS .

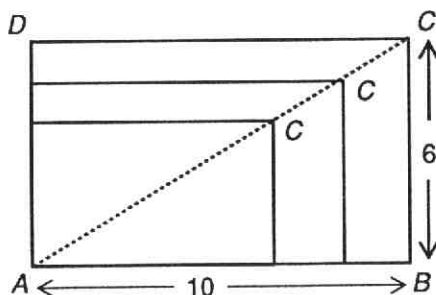
- Bereken PQ in het geval $x = 3$.
- Druk TU uit in x en teken de grafiek van TU als functie van x
- Druk PQ uit in x en teken ook de grafiek van PQ als functie van x .



4. Door rechthoek $ABCD$ vanuit A te vermenigvuldigen met een factor kleiner dan 1, schuift C over de diagonaal AC .

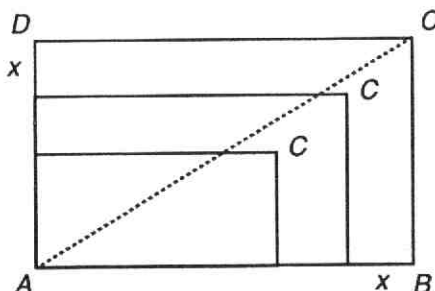
Hierbij ontstaat bijvoorbeeld een rechthoek met een oppervlakte die een kwart is van de oppervlakte van de oorspronkelijke rechthoek.

- Welke zijden heeft die nieuwe rechthoek?
- Laat x de vermenigvuldigingsfactor zijn ($0 \leq x \leq 1$).
Druk de oppervlakte van de nieuwe rechthoek uit in x .



5. Op dezelfde rechthoek van 10 bij 6 wordt nu een ander inkrimpingsproces toegepast: van de rechterkant en van de bovenkant worden even brede repen afgesneden. C beweegt nu niet langs diagonaal AC

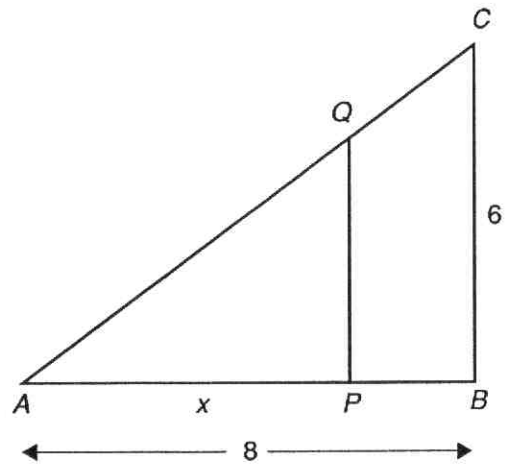
- Hoe beweegt C dan wel?
- Noem de breedte van de afgesneden repen x .
Druk de oppervlakte van de nieuwe rechthoek uit in x .
- Hoe breed moeten de afgesneden repen zijn om een rechthoek te maken met oppervlakte die een kwart is van de oppervlakte van de oorspronkelijke rechthoek?



(Los dit probleem op met behulp van een vergelijking!)

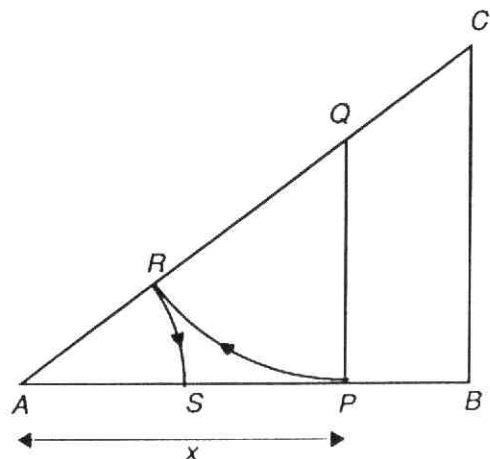
6. In de rechthoekige driehoek ABC beweegt het verticale lijnstuk PQ . De afstand van P tot A wordt x gesteld.

- Druk de *omtrek* van driehoek APQ uit in x .
- Voor welke x is de omtrek van APQ de helft van de omtrek van ABC ?
- Druk de *oppervlakte* van vierhoek $PBCQ$ uit in x .
- Voor welke x is de oppervlakte van $PBCQ$ de helft van de oppervlakte van ABC ?



7. In de situatie van opgave 6 wordt PQ omgecirkeld vanuit Q ; dat geeft het punt R op AC . Vervolgens wordt R omgecirkeld vanuit A ; dat geeft het punt S op AB .

Toon aan dat voor elke x het punt S precies in het midden van lijnstuk AP komt.



OEFENLES 10: Regelmatige veelhoeken



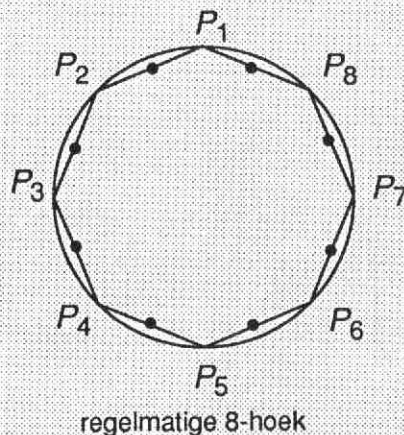
De eerste Philips grammofoon-versterker-luidspreker (1937)

De luidspreker op de foto heeft de vorm van een regelmatige zevenhoek: alle zijden zijn even lang en alle (binnen-)hoeken zijn even groot.

Een manier om een regelmatige veelhoek te tekenen is: verdeel een cirkel in een aantal gelijke bogen; verbind de opvolgende deelpunten met elkaar en je krijgt een regelmatige veelhoek.

Die cirkel is dan een *omgeschreven cirkel* van de veelhoek.

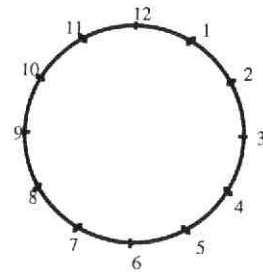
Voorbeeld:



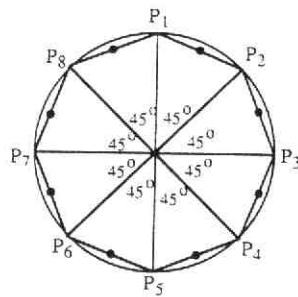
1. Met behulp van een 'klokverdeling' van de cirkel kun je vier verschillende regelmatige veelhoeken tekenen.

Maak een klokverdeling.

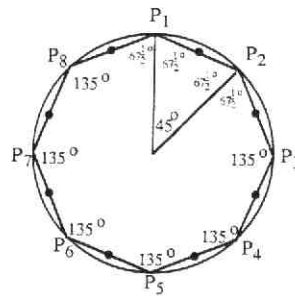
Neem een cirkel met straal 3 cm en teken daarin de bedoelde veelhoeken.



2. Van een regelmatige achthoek is een *middelpuntshoek* 45° .
Daaruit volgt dan dat de hoeken van de achthoek gelijk zijn aan 135° .



middelpuntshoeken



hoeken van de veelhoek

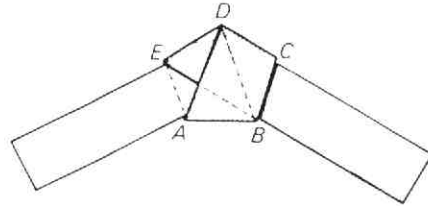
- a. Bereken middelpuntshoeken en hoeken achtereenvolgens van een regelmatige 3-hoek, 4-hoek, 5-hoek, 6-hoek, n -hoek.
- b. Een andere manier om de hoeken van een regelmatige veelhoek te berekenen is door gebruik te maken van de hoekensom:

veelhoek	hoekensom
3-hoek	180°
4-hoek	360°
5-hoek	540°
6-hoek	720°

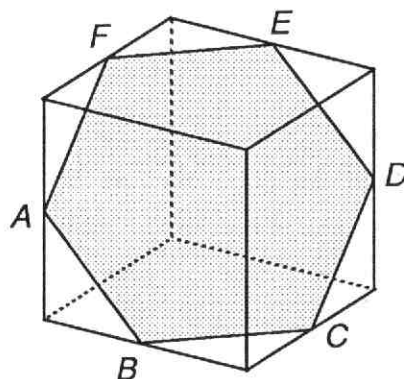
Bereken via de hoekensom de hoeken van een regelmatige 5-hoek, 6-hoek, 8-hoek, n -hoek.

- c. Ga na of de formules die je bij **a** en **b** voor de n -hoek hebt gevonden, dezelfde uitkomst geven voor $n = 3, 4, 5, \dots$
3. Een regelmatige 8-hoek is beschreven in een cirkel met straal r .
Toon aan dat de oppervlakte van de 8-hoek gelijk is aan $2r^2\sqrt{2}$.
(Aanwijzing: verdeel de achthoek in 8 driehoeken.)

4. Hieronder zie je hoe een regelmatige vijfhoek kan worden geknoopt.



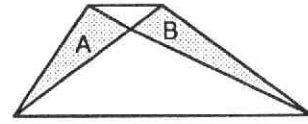
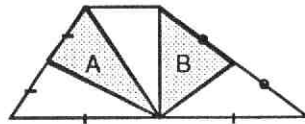
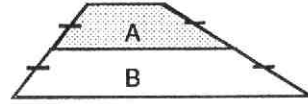
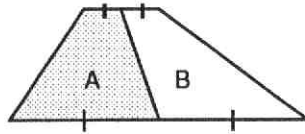
- a. Teken een regelmatige 5-hoek met behulp van je gradenboog.
- b. Teken alle diagonalen in de 5-hoek. Er ontstaat dan de bekende 5-punts-ster. Hoe groot zijn de hoeken van de punten van die ster?
- c. Van een regelmatige 5-hoek is gegeven dat hij precies past in een cirkel met een straal van 10 cm. Bereken de oppervlakte van de 5-hoek, afgerond op een geheel aantal cm^2 .
5. a. Geef de exacte uitdrukking voor de oppervlakte van een regelmatige 6-hoek en van een regelmatige 12-hoek (beide in een cirkel met straal r).
- b. Bereken in twee decimalen nauwkeurig de oppervlakte van een regelmatige 36-hoek, in een cirkel met straal 30.
- c. Druk de oppervlakte van een regelmatige n -hoek uit in r (= straal van de omgeschreven cirkel) en n .
Wat kun je van die oppervlakte zeggen als n een heel groot getal is?
6. De middens A, B, C, D, E, F van zes ribben van de kubus zijn de hoekpunten van een regelmatige 6-hoek. De ribbe van de kubus heeft de lengte 2.



- a. Bereken de straal van de omgeschreven cirkel van de zeshoek.
- b. Bereken de oppervlakte van de zeshoek.

DENKERTJES

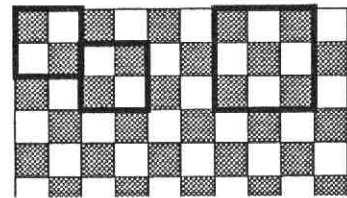
1. Onderzoek in elk van de onderstaande figuren of de gebieden A en B gelijk van oppervlakte zijn.



2. Bewijs:

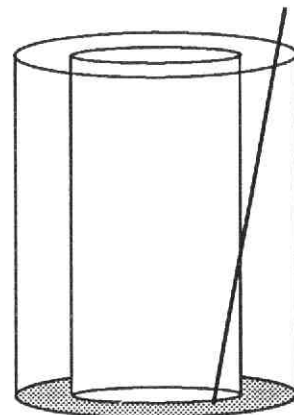
Als $a^2 + a - 10 = 0$ dan $a^4 + 2a^3 + a^2 - 100 = 0$

3. Een dambord heeft 100 velden.
Uit die velden kunnen vierkanten worden samengesteld, zoals de drie in de figuur hiernaast.



Hoeveel vierkanten kun je in totaal op een dambord vinden?

4. Een massieve cilinder (hoogte 6 cm, straal 3 cm) is precies in het midden geplaatst van een cilinder met dezelfde hoogte en straal 5 cm.
Tussen beide cilinders ontstaat een ringvormige ruimte. Daarin wordt een stokje opgeborgen.



Hoe lang is het langste stokje dat nog net in die ruimte past?

5. Bewijs dat voor elk viertal getallen a, b, c, d geldt:
 $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ad - bc)^2 + (ac + bd)^2$

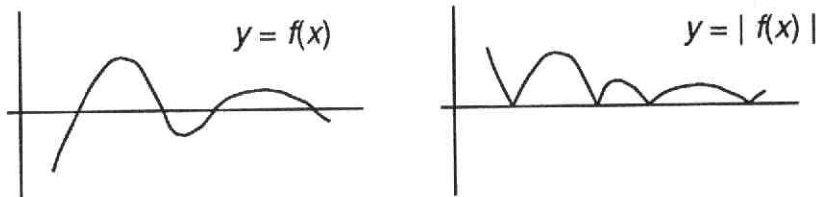
DENKERTJES

6. De ster bestaat uit twee gelijkzijdige driehoeken met zijde 3.

Bereken de oppervlakte van het overlappingsgebied



7. Door alle 'negatieve stukken' van de grafiek van een functie te spiegelen in de x -as ontstaat er de grafiek van 'de absolute waarde van f '.
Notatie zie plaatje.

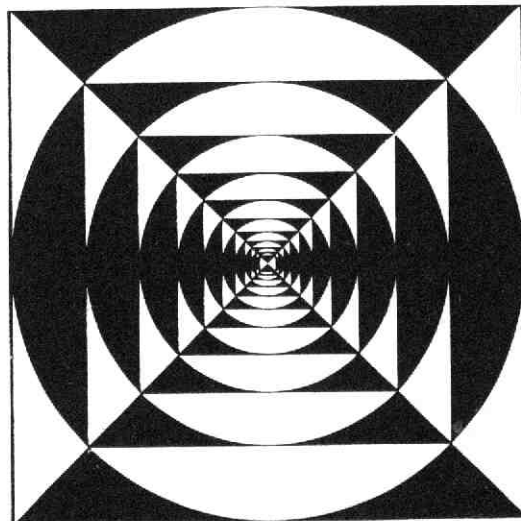


Teken de grafiek van :

$$y = |x - 2|; y = |x^2 - 4|; y = |x^3 - 1|; y = ||x^3 - 1| - 1|$$

8. Een patroon van vierkanten en cirkels.

- a. Beredeneer dat de vermenigvuldigingsfactor van het op één na grootste vierkant naar het grootste vierkant exact gelijk is aan $\sqrt{2}$.
- b. Bereken de vermenigvuldigingsfactor van het allerkleinste vierkant naar het allergrootste.



OEFEENLES 11: Vergelijkingen

Opgaven

1. Los x op uit:

a. $x^2 = 25(x - 4)$

e. $3x^2 = 14x$

b. $24 + 3x^2 = 27x$

f. $3x^2 = 14x + 5$

c. $12 - x = \frac{1}{2} x^2$

g. $(x - 8)(x + 3) = 26$

d. $\frac{1}{9} x^2 + \frac{2}{3} x = -1$

h. $x(x + 1) = 1$

2. a. Van de vergelijking $(x - 5)(x + 2)(2x - 1) = 0$ kun je de drie oplossingen direct zien.
Welke zijn dat?

b. Los t op uit: $(2t - 5)(3t + 18)(2 - t) = 0$

c. Los y op uit: $(y - 6)(6y + 1)(y^2 - 25) = 0$

d. Bedenk een vergelijking waarvan 3, -5 en 12 de oplossingen zijn.

3. Vier vergelijkingen en drie oplossingsplaatjes.

a. $(x - 4)(x + 1)^2 = 0$ (1) 

b. $(x - 4)(x^2 + 1) = 0$ (2) 

c. $(x^2 - 16)(x + 1) = 0$ (3) 

d. $x^2 + 3x - 4 = 0$

Welk oplossingsplaatje hoort bij welke vergelijking?

4. Los x op uit:

a. $(4x - 9)(x^2 + 4) = 0$

b. $(4x^2 - 9)(x^2 - 4) = 0$

c. $x(x + 3)(7x - 2) = 0$

d. $x(x + 3)^2(7x - 22)^3 = 0$

e. $(x - 9)(x^2 - 15x + 56) = 0$

f. $(x^2 - x - 56)(x^2 + 2x - 120) = 0$

Voorbeeld: $-x^3 = x^2 - 2x$

Oplossing:

$$0 = x^3 + x^2 - 2x$$

(x^3 is overgeboekt naar rechterlid)

$$x(x^2 + x - 2) = 0$$

(linker- en rechterlid verwisseld en x is buiten haakjes gebracht)

$$x(x+2)(x-1) = 0$$

($x^2 + x - 2$ ontbonden in factoren)

$$\begin{array}{c} \swarrow \quad \downarrow \quad \searrow \\ x = 0 \quad x = -2 \quad x = 1 \end{array}$$

5. Los op:

a. $x^3 - 17x^2 + 70x = 0$

e. $x^3 + 36x = 0$

b. $y^3 + 11y^2 + 18y = 0$

f. $y^3 + 36y^2 = 0$

c. $t^3 - 36t^2 = 0$

g. $t^3 + 2t = 2t^2$

d. $u^3 + 36u = 13u^2$

h. $u^4 + 22u^2 = 13u^3$

Voorbeeld:

$$(x-4)(x^2+1) = 10(x-4)$$

1e methode

Overboeken naar één kant en $(x-4)$ buiten haakjes brengen.

$$(x-4)(x^2+1) - 10(x-4) = 0$$

$$(x-4)(x^2+1-10) = 0$$

$$(x-4)(x^2-9) = 0$$

$$\begin{array}{c} \swarrow \quad \searrow \\ x = 4 \quad x^2 = 9 \\ \quad \swarrow \quad \searrow \\ \quad x = 3 \quad x = -3 \end{array}$$

Oplossingsplaatje:



2e methode

deel links en rechts door $x-4$, maar vergeet niet dat $x-4=0$ een oplossing geeft!

$$(x-4)(x^2+1) = 10(x-4)$$

$$\begin{array}{c} \swarrow \quad \searrow \\ x-4 = 0 \quad x^2+1 = 10 \\ x = 4 \quad x^2 = 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \swarrow \quad \searrow \\ x = 3 \quad x = -3 \end{array}$$

6. Maak het oplossingsplaatje bij:

a. $(x+5)(x^2+9) = 10(x+5)$

d. $x(x^2-8x+6) = -x$

b. $(x^2+1)(3x-5) = 5(x^2+1)$

e. $(x-1)^2 = (x-1)(6x+1)$

c. $(x^2-4)(3x-5) = x^2-4$

f. $(x-1)^3 = (x-1)(6x+1)$

OEFENLES 12: Tekenverloop

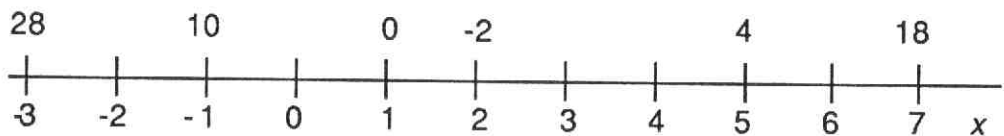
Bekijk het produkt $(x - 1) \cdot (x - 4)$.

Als je x laat variëren, varieert de uitkomst van dit produkt.

Er zijn allerlei manieren om die variatie van uitkomsten zichtbaar te maken. De meest bekende manier is het tekenen van een grafiek.

In deze oefenles beperken we ons tot het gebruik van de getallenlijn.

1. Dit plaatje hoort bij $(x - 1) \cdot (x - 4)$.

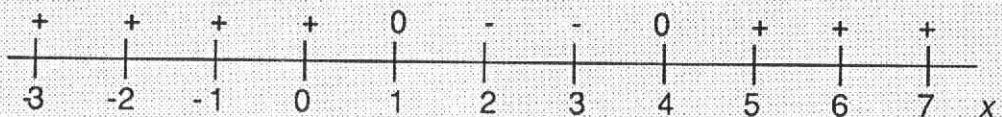


Bij de x -waarde $-3, -1, 1, 3, 5, 7$ zijn de waarden van het produkt $(x - 1) \cdot (x - 4)$ aan de bovenkant van de getallenlijn vermeld.

- Controleer die waarden.
- Neem het plaatje over en vul ook de waarden in bij $x = -2, 0, 3, 4, 6$.
- Op grond van de uitkomsten zou je kunnen vermoeden dat $(x - 1) \cdot (x - 4)$ alleen een negatieve uitkomst heeft als x tussen 1 en 4 ligt. Daarbij moet je bedenken dat x niet geheel hoeft te zijn. Hoe kun je *beredeneren* dat $(x - 1) \cdot (x - 4)$ inderdaad negatief moet zijn, als x tussen 1 en 4 ligt?

Als je alleen geïnteresseerd bent in het al of niet positief zijn van de uitkomst, geeft een getallenlijn met 'plussen' en 'minnen' voldoende informatie.

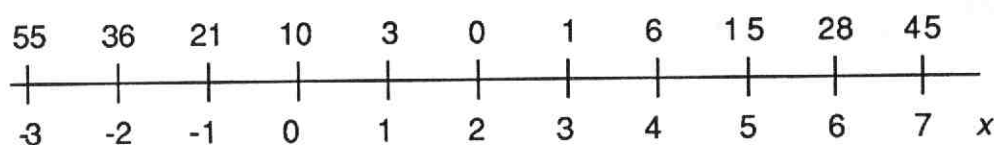
In het geval van $(x - 1) \cdot (x - 4)$.



Dit plaatje laat het *tekenverloop* van $(x - 1) \cdot (x - 4)$ zien

2. Bekijk het produkt $(x - 2)(2x - 5)$.

Plaatje:



- Controleer het plaatje.
 - Op grond van dit plaatje zou je kunnen denken dat het produkt $(x - 2) \cdot (2x - 5)$ geen negatieve uitkomst kan hebben. Dat is echter niet zo.
Laat zien dat $(x - 2) \cdot (2x - 5)$ wel degelijk negatief kan zijn.
 - Maak een plaatje van het tekenverloop van $(x - 2)(2x - 5)$.
3. Vier produkten, twee tekenverlopen.
Welk tekenverloop hoort bij welk produkt?

a. $(x - 1)(x - 3)$ (1) $\frac{+ \ + \ + \ 0 \ - \ - \ 0 \ + \ +}{1 \qquad 3}$

b. $(x - 1)(3 - x)$ (2) $\frac{- \ - \ - \ 0 \ + \ + \ 0 \ - \ -}{1 \qquad 3}$

c. $(1 - x)(x - 3)$

d. $(1 - x)(3 - x)$

Hoe schets je snel een tekenverloop?

Voorbeeld: $(x - 5)(2x - 1)$

Werkwijze:

Allereerst merk je op dat het produkt nul is voor $x = 5$ of $x = \frac{1}{2}$.

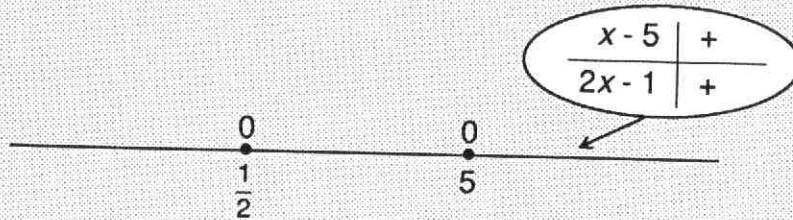
Dus: $\frac{? \qquad 0 \qquad ? \qquad 0 \qquad ?}{\qquad \frac{1}{2} \qquad \qquad 5}$

Je maakt nu als het ware een reisje langs de getallenlijn van rechts naar links. Je komt dan achtereenvolgens in drie 'gebieden':

het gebied rechts van 5, het gebied tussen $\frac{1}{2}$ en 5,

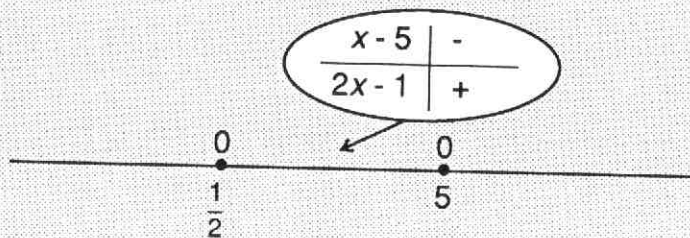
het gebied links van $\frac{1}{2}$.

(1) Gebied rechts van 5.



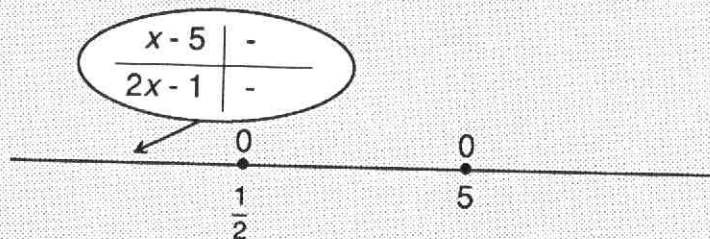
$x - 5$ en $2x - 1$ zijn hier allebei positief, het produkt is positief.

(2) Gebied tussen $\frac{1}{2}$ en 5.

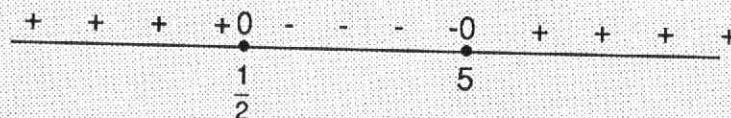


Als de grens 5 wordt gepasseerd verandert $x - 5$ van teken en $2x - 1$ niet. Het produkt telt nu één negatieve factor en één positieve factor en is dan negatief.

(3) Gebied links van $\frac{1}{2}$.



Als de grens $\frac{1}{2}$ wordt gepasseerd verandert $2x - 1$ van teken en $x - 5$ niet. Het produkt telt nu twee negatieve factoren en is positief. Het tekenverloop is dus:



4. Schets het tekenverloop van:

a. $(x - 2)(x - 3)$

b. $(x - 2)(x + 3)$

c. $(2 - x)(x - 8)$

d. $(3x - 5)(x - 1)$

e. $(4x + 7)(x + 1)$

f. $x(x - 6)$

g. $(x - 6)^2$

h. $(2x + 1)^2$

i. $(x - 4)(x - 1)(x + 2)$

j. $(x - 3)^2(2x + 3)$

5. Bedenk bij elk tekenverloop een produkt dat erbij past:

a. $\begin{array}{ccccccc} + & + & 0 & - & - & 0 & + & + & + \\ \hline & & 3 & & & 7 & & & \end{array}$

b. $\begin{array}{ccccccc} - & - & 0 & + & + & 0 & - & - & - \\ \hline & & 3 & & & 7 & & & \end{array}$

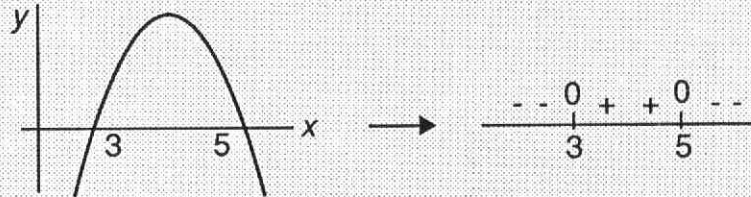
c. $\begin{array}{ccccccc} + & + & 0 & + & + & 0 & + & + & + \\ \hline & & 3 & & & 7 & & & \end{array}$

d. $\begin{array}{ccccccc} + & + & 0 & + & + & + & + & + & + \\ \hline & & 3 & & & 7 & & & \end{array}$

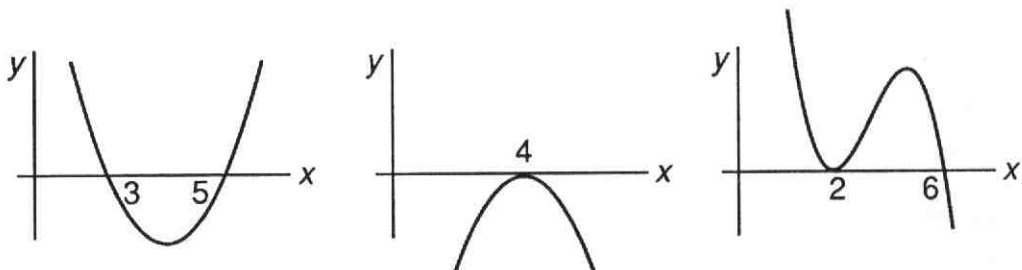
e. $\begin{array}{ccccccc} - & - & 0 & + & + & 0 & + & + & + \\ \hline & & 3 & & & 7 & & & \end{array}$

Bij een functie gegeven door een grafiek kan het tekenverloop worden afgelezen uit het plaatje.

Voorbeeld:



6. Geef bij elk van onderstaande grafieken het passende tekenverloop.



OEFFENLES 13: Machtsfuncties en vergelijkingen

1. De oplossingen van de volgende vergelijkingen zijn 'mooi', dat wil zeggen: het zijn gehele getallen. Je kunt ze vinden door proberen. Let ook op het verschil tussen vergelijkingen met even en oneven macht van x . Voorbeelden:

$x^2 = 225 \rightarrow$	$x = 15$ $x = -15$	$x^2 = -225$ geen oplossingen
$x^3 = 64 \rightarrow$	$x = 4$	$x^3 = -63 \rightarrow x = -4$

a. $x^2 = 625$

d. $x^5 = 243$

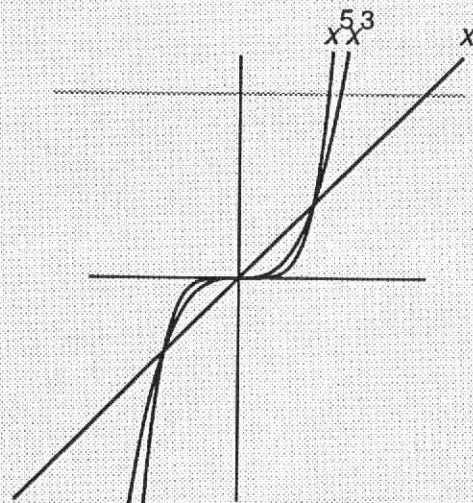
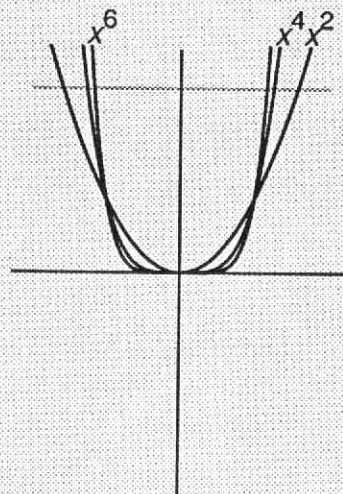
b. $x^3 = 125$

e. $x^6 = 1$

c. $x^4 = 10000$

f. $x^7 = 1$

Bovenstaande vergelijkingen zijn van het type: $x^n = a$. Het onderscheid tussen de gevallen ' n is even' en ' n is oneven' kun je mooi in de grafieken zien.



In het plaatje ' n is even' zie je hoe een horizontale lijn boven de x -as de grafieken van $y = x^2, x^4, x^6$ in twee punten snijdt; die snijpunten liggen gespiegeld ten opzichte van de y -as. Dat betekent:

Als n **even** is en a **positief**, dan heeft $x^n = a$ twee tegengestelde oplossingen

In het plaatje ' n is oneven' zie je hoe een horizontale lijn (die mag nu ook onder de x -as liggen) de grafieken van $y = x, x^3, x^5$ in één punt snijdt.

Dus:

Als n **oneven** is, heeft $x^n = a$ één oplossing (a mag positief, nul of negatief zijn)

2. Bekijk nog eens het plaatje 'n is even'.
- Verklaar uit het plaatje dat er geen enkel reëel getal is dat voldoet aan $x^6 = -1$.
 - Voor welke x geldt: $x^4 < 81$?
 - De lijn $y = a$ snijdt de grafiek van $y = x^4$ in twee punten die op afstand 3 van elkaar liggen. Bereken a .

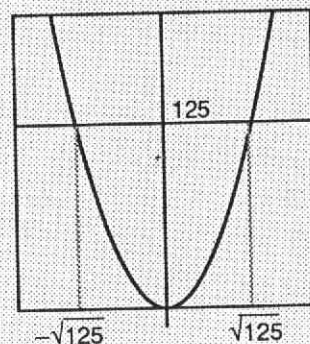
3. Bekijk nu het plaatje 'n is oneven'.

- Voor welke x geldt $x^3 < 27$?

In het algemeen verandert de oplossing van de vergelijking $x^n = a$ als n verandert en a gelijk blijft. Dus $x^3 = a$, $x^5 = a$, $x^7 = a$, enz. hebben verschillende oplossingen.

- Voor welke keuzen van a hebben $x^3 = a$, $x^5 = a$, $x^7 = a$, enz. allemaal dezelfde oplossing?

Vergelijkingen van het type $x^n = a$ hebben meestal niet zulke 'mooie' getallen als oplossing.
Neem bijvoorbeeld: $x^2 = 125$.



Je hebt geleerd dat de oplossingen kunnen worden geschreven als vierkantswortels:

$\sqrt{125}$ en $-\sqrt{125}$ (Je mag ook schrijven: $5\sqrt{5}$ en $-5\sqrt{5}$)

In principe mag je zo'n wortel die niet 'mooi' uitkomt, laten staan. Maar het is vaak handig te weten hoe groot de uitkomst ongeveer is.

In dit geval kun je meteen zien dat $\sqrt{125}$ iets groter is dan 11, immers 11 in het kwadraat is 121.

Op je rekenmachientje zit een worteltoets en daarmee kan een benadering in 8 decimalen worden gevonden: $\sqrt{125} = 11.18033989$.

4. a. De positieve oplossing van de vergelijking $x^4 = 125$ kan ook met de worteltoets worden berekend. Hoe?
- b. Bekijk de vergelijking $x^8 = 100$. Door drie keer de worteltoets te gebruiken vind je de positieve oplossing.
Geef die oplossing in 2 decimalen nauwkeurig

Met de worteltoets kun je dus oplossingen vinden van hogere machts vergelijkingen als $x^4 = 125$ en $x^8 = 100$. Maar lang niet alle hogere machts vergelijkingen kun je op die manier aanpakken.

Neem als voorbeeld: $x^5 = 28$.

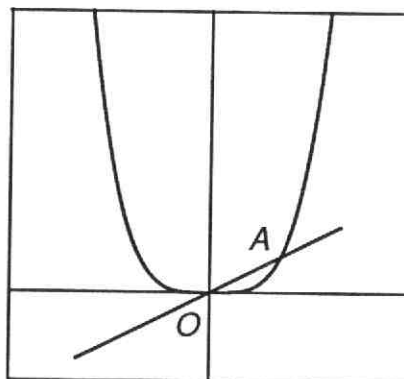
Toets in: 28 INV x^y 5 = en je vindt de oplossing:*)

$$x = 1,94729...$$

De toetst x^y werkt alleen voor positieve grondtallen.
 $x^5 = -28$ kun je oplossen door eerst te kijken naar $x^5 = 28$.
 $x^5 = -28$ heeft als oplossing $x = -1,94729...$

5. Geef de oplossing(en) (ook eventueel negatieve oplossingen) van de volgende vergelijkingen. Rond daarbij af op 2 decimalen.
- | | |
|----------------|------------------------|
| a. $x^3 = 100$ | d. $x^6 = \frac{1}{2}$ |
| b. $x^4 = 125$ | e. $x^3 = -12$ |
| c. $x^5 = 250$ | f. $x^5 = 2x$ |

6. Hiernaast zie je de grafiek van $y = x^4$ en $y = \frac{1}{2}x$. Die grafieken hebben twee snijpunten O en A. Bereken de coördinaten van A in 2 decimalen nauwkeurig.



7. Los op:
- | | |
|-----------------------------|------------------------------|
| a. $(x^2 - 5)(x^2 + 1) = 0$ | c. $(x^4 + 36)(x^2 - 6) = 0$ |
| b. $(x^3 - 5)(x^3 + 1) = 0$ | d. $(x^2 - 2)(x^4 - 4) = 0$ |

*) De oplossing wordt ook wel de 5-machtswortel uit 28 genoemd.
In het boekje 'werken met standaardfuncties' wordt hierop teruggekomen.

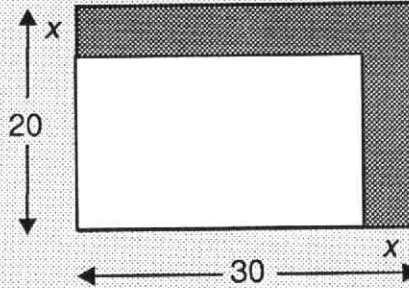
OEFENLES 14: Ongelijkheden

Voorbeeld:

Van een rechthoekige tuin zijn de afmetingen 20 en 30 meter. De tuinman wil langs twee zijden een border aanleggen die overal even breed is. De oppervlakte (= O) van het overblijvende stuk moet meer dan 375 m^2 zijn.

Kortweg: $O > 375$.

De vraag is nu: hoe breed mag de border zijn?



Oplossing:

Stel de breedte van de border is x meter.

Om te beginnen geldt dan: $0 < x < 20$ (het *domein* van x).

Van het overblijvende stuk tuin zijn de afmetingen $20 - x$ en $30 - x$.

Dus: $O = (20 - x)(30 - x) = x^2 - 50x + 600$.

Er moet nu gelden $O > 375$, dus: $x^2 - 50x + 600 > 375$ (met $0 < x < 20$).

De aanpak voor een dergelijke *ongelijkheid* kan zijn:

- (1) maak rechter lid nul
- (2) ontbind de vorm in het linkerlid in factoren
- (3) schets een tekenverloop van die vorm (denk aan domein!).
- (4) Trek de juiste conclusie

In dit geval:

$$x^2 - 50x + 225 > 0 \quad (1)$$

$$(x - 5)(x - 45) > 0 \quad (2)$$

$$\begin{array}{c} + \quad + \quad 0 \quad - \quad - \quad - \quad - \\ | \quad | \quad | \quad | \quad | \quad | \quad | \\ 0 \quad 5 \quad \quad \quad 20 \end{array} \quad (3)$$

$$\text{Van } 0 < x < 5 \text{ geldt: } (x - 5)(x - 45) > 0 \quad (4)$$

en dus $O > 375$.

De border mag dus tussen de 0 en 5 meter breed zijn.

1. Laat met deze methode ((1) t/m (4)) zien dat:

a. $x^2 + x > 12$ voor $x > 3$ of $x < -4$

b. $x^2 \leq 7x - 10$ voor $2 \leq x \leq 5$

5. Gegeven zijn de ongelijkheden:

$$6x - x^2 > 0 \quad (1) \qquad x(x - 6) < 0 \quad (4)$$

$$-x^2 > -6x \quad (2) \qquad x^3 > 6x^2 \quad (5)$$

$$x^2 > 6x \quad (3) \qquad x^3(x - 6)^3 < 0 \quad (6)$$

Vier van de zes hebben dezelfde oplossingsverzameling.
Welke zijn dat?

6. Bekijk opnieuw het voorbeeld van de tuinman.

De voorwaarde is nu dat het overblijvend stuk een oppervlakte van meer dan 400 m^2 moet hebben.

a. Ga na dat nu de ongelijkheid wordt:

$$x^2 - 50x + 200 > 0$$

b. Het linkerlid laat zich nu niet gemakkelijk ontbinden in factoren.

Stel daarom eerst: $x^2 - 50x + 200 = 0$

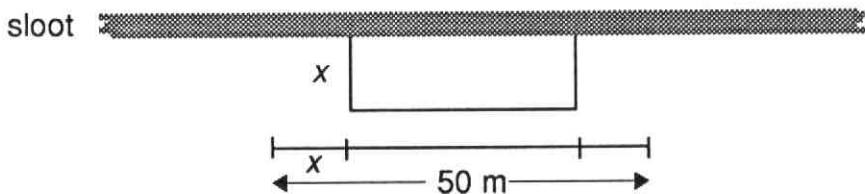
en los x (exact) op met de *abc*-formule.

c. Schets nu het tekenverloop van $x^2 - 50x + 200$.

(houd daarbij rekening met $0 < x < 20$)

d. Geef de maximale breedte van de border in dm nauwkeurig. *.)

7. Dido heeft een touw van 50 m lengte. Zij gebruikt dit om een rechthoekig stuk land aan drie zijden te begrenzen; de vierde zijde wordt door een sloot begrensd. Ze mag echter niet meer dan 200 m^2 grond uitzetten.



a. Noem de breedte van het stuk grond (in m) x .

Verklaar nu: $x(50 - 2x) \leq 200$

b. Los de ongelijkheid van a. op.

c. Welke breedten zijn toegestaan voor Dido's stuk land?

d. Hoe verandert het antwoord als zij niet meer dan 250 m^2 mag uitzetten? (geef de grenswaarden in dm nauwkeurig)

*) Voorbeelden van een uitkomst in dm nauwkeurig zijn: 2,7m of 27 dm.

OEFFENLES 15: Snijpunten met de x-as

1. $f(x) = 5(x - 2)(x - 6)$ is een kwadratische functie. De vorm is die van een ontbinding in factoren: één constante factor en twee lineaire factoren. Die vorm is handig als je de snijpunten van de grafiek met de x-as wilt weten.
 - a. Welke snijpunten heeft de grafiek met de x-as?
 - b. Hoe kun je hieruit de coördinaten van de top vinden?
 - c. Teken een grafiek van f .
(Neem op de x-as de eenheid 1 cm en op de y-as de eenheid 1 mm)
2.
 - a. Ontbind elk van de volgende kwadratische functies in lineaire factoren: $f(x) = x^2 + 2x - 15$, $g(x) = 3x^2 - 6x - 9$, $h(x) = -x^2 + 4x$
 - b. Bereken voor elk van die functies de snijpunten met de x-as.
 - c. Teken van elk van die functies een grafiek.

Hiernaast zie je de grafiek van een kwadratische functie getekend.

Omdat de grafiek de x-as snijdt in de punten met $x = 2$ en $x = 4$ kunnen we zeggen:

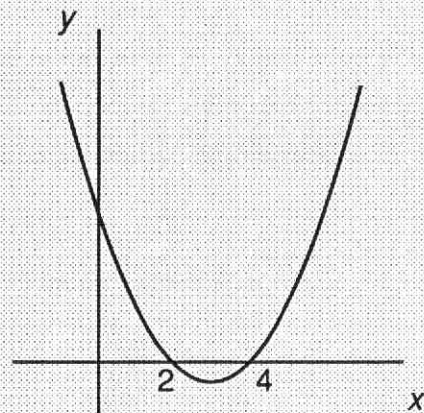
$$f(x) = a \cdot (x - 2)(x - 4)$$

Uit het snijpunt met de y-as kan nu a worden bepaald.

Uit $f(0) = 4$ volgt:

$$a \cdot (0 - 2)(0 - 4) = 4, \text{ dus } a = \frac{1}{2}$$

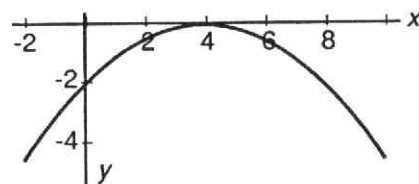
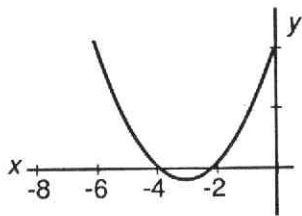
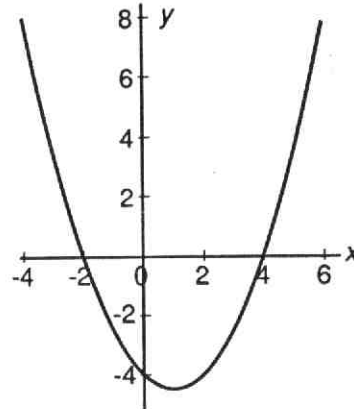
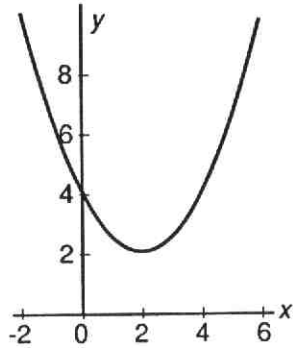
$$\text{Conclusie } f(x) = \frac{1}{2}(x - 2)(x - 4)$$



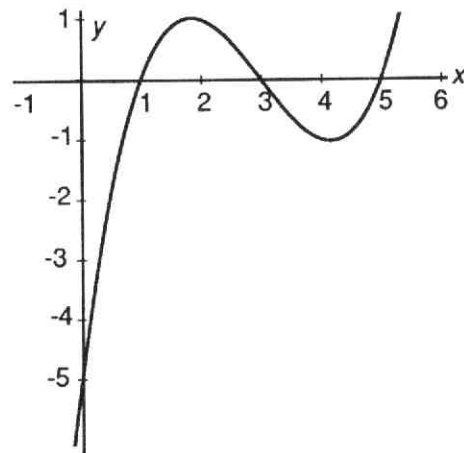
3. Bereken in bovenstaand voorbeeld de coördinaten van de top en controleer je antwoord in de grafiek.

4. Lang niet iedere kwadratische functie kan worden ontbonden in lineaire factoren.

Hieronder staan vier grafieken van kwadratische functies.



- Welke is zeker *niet* te ontbinden in lineaire factoren?
 - Geef bij de andere drie functies de ontbinding in factoren.
5. In de figuur hiernaast zie je de grafiek van een *derde-graadsfunctie* f . Een formule bij f is:
- $$y = a \cdot (x - 1)(x - 3)(x - 5)$$
- Verklaar dit.
 - Bereken a .
 - Spiegel de grafiek van f in de x -as. Hoe wordt de formule?
 - Dezelfde vraag voor spiegeling in de y -as.
 - De grafiek van f wordt in horizontale richting verschoven zo dat het middelste snijpunt met de x -as in de oorsprong komt. Welke formule hoort er bij de nieuwe grafiek?



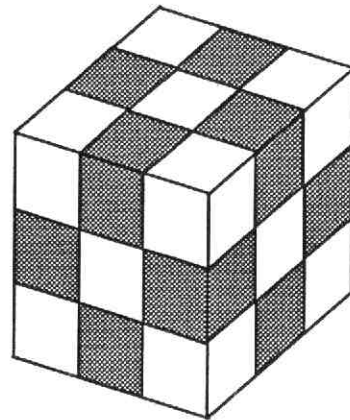
DENKERTJES

1. Wat is het volgende getal in de rij?
121, 441, 961, 1681, ...

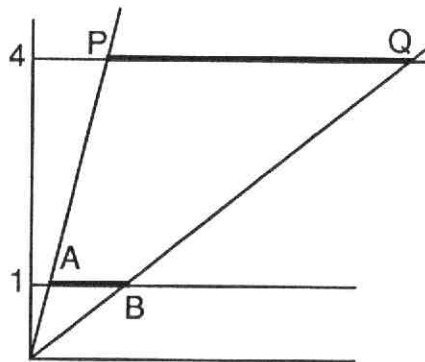
2. Los x en y op uit:
$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 72 \\ x + y = 6 \end{cases}$$

3. Een houten kubus is opgebouwd uit 13 zwarte en 14 witte kubusjes. Nergens liggen twee kubusjes van dezelfde kleur naast elkaar.

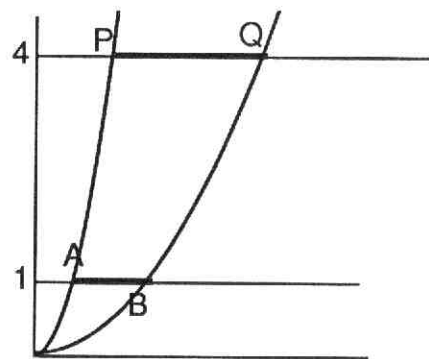
Een houtworm bevindt zich in het hart van de grote kubus. Hij wil zich een weg eten door de kubus en daarbij elk zwart en elk wit kubusje één keer aandoen. Kan dat? Kun je ook uitleggen waarom?



4.



figuur 1



figuur 2

In figuur 1 is lijnstuk AB (op $y = 1$) geprojecteerd door stralen vanuit O ; dat geeft lijnstuk PQ op $y = 4$.

In figuur 2 is AB geprojecteerd volgens halve parabolen.

In beide situaties heeft AB de lengte 1.

- a. Hoe lang is PQ in de eerste situatie?
Hangt de lengte van PQ af van de plaats van AB op de lijn $y = 1$?
- b. Dezelfde vragen voor de tweede situatie.

DENKERTJES

5. Hoeveel verschillende oplossingen heeft

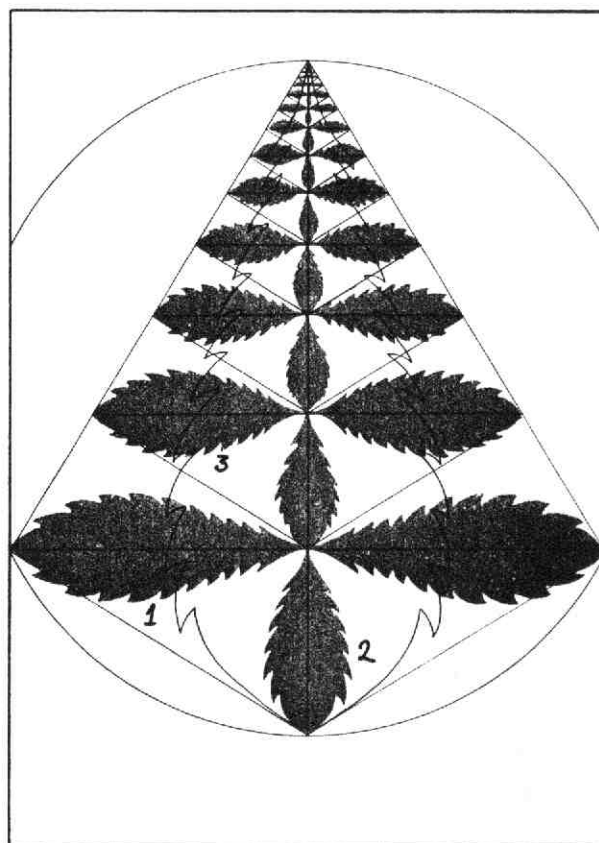
$$(x-1)(x^2-2)(x^3-3)(x^4-4)(x^5-5)(x^6-6)(x^7-7)(x^8-8)=0?$$

Welke oplossing is het grootst?

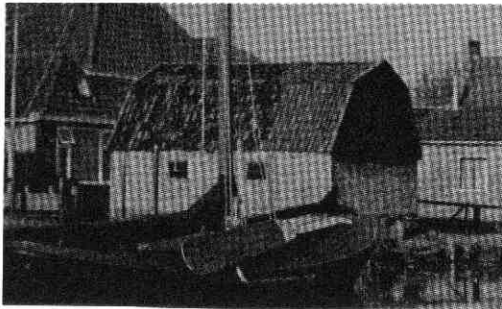
6. De boomblaadjes in onderstaande figuur zijn getekend op een stramien van rechthoekige driehoeken met hoeken van 30° en 60° .

Alle driehoeken en ook alle blaadjes zijn gelijkvormig.

- Bereken de (exacte) vermenigvuldigingsfactor van blaadje 1 naar blaadje 2.
- Op de as zijn 14 grijze blaadjes in verticale stand getekend. Bereken de vermenigvuldigingsfactor van het allerkleinste blaadje naar blaadje 2.
- Op de as is ook een groot wit boomblad getekend. Hoe verhoudt de oppervlakte van dat blad zich tot blaadje 1?

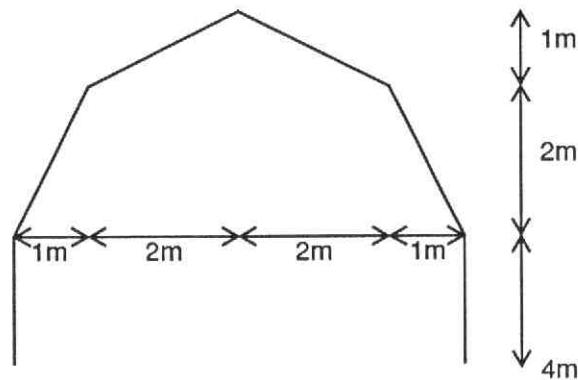


OEFFENLES 16: Gevels en vijfhoeken



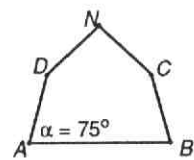
De speciale dakvorm van het huis op de foto wordt 'mansarde-dak' genoemd

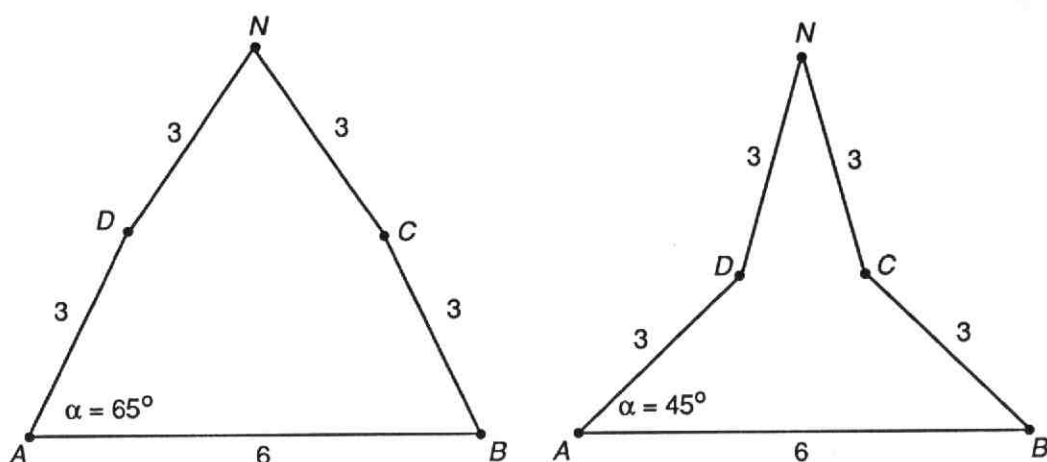
1. Hieronder zie je op schaal 1:100 het vooraanzicht van een huis met zo'n type dak getekend.



Het huis is 10 meter diep.

- Teken op schaal 1:100 het bovenaanzicht van het dak.
 - Bereken de oppervlakte van het dak.
 - Het dak bestaat uit vier delen met twee aan twee verschillende hellingshoeken.
Bereken die hellingshoeken.
2. Van een ander mansardedak zijn de vier schuine stukken elk 4 meter lang.
De breedte AB is 8.
De hellingshoek van het steilste stuk is 75° .
- Bereken de hoogte van D boven de zoldervloer AB .
 - Hoeveel % van de zoldervloer ligt onder de steile dakstukken AD en BC ?
 - Bereken de hellingshoek van de dakstukken DN en NC .
 - Hoe hoog ligt de nok boven de zoldervloer?





Van vijfhoek $ABCND$ heeft de basis AB de lengte 6 en zijn de andere zijden 3.

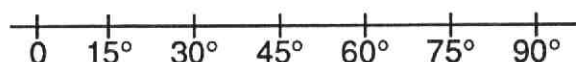
Stel je voor dat in de hoekpunten scharnieren zijn aangebracht.

Hoek $A (= \alpha)$ kan nu veranderen van 90° tot 0° . Daar bij moet de vijfhoek symmetrisch blijven en mag N niet lager komen dan D .

- Voor $\alpha = 90^\circ$ is $ABCND$ een vierhoek.
Kan $ABCND$ ook een driehoek zijn? Zo ja, voor welke hoek α ?
- Bereken (met behulp van je zakrekenmachine) voor de gevallen $\alpha = 75^\circ, 60^\circ, \dots, 0^\circ$ achtereenvolgens de hellingshoek β van DN en de hoogte van N boven AB .

hellingshoek AD ($= \alpha$)	hellingshoek DN ($= \beta$)	hoogte boven AB
90°	0°	3
75°	...	...
...	...	...

- De hoogte van N boven de basis AB is een functie van α .
Teken de grafiek van die functie.
Neem de horizontale as zo:

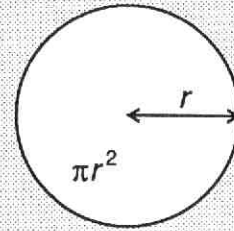
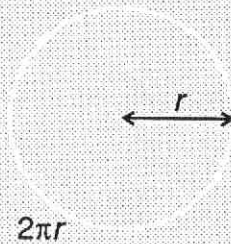


- Bij $\alpha = 75^\circ$ vind je een zekere hoogte van N .
Bij welke andere hoek α ligt N even hoog?

OEFFENLES 17: Omtrek en oppervlakte van een cirkel

Bekend zijn de twee formules voor een cirkel met straal r .

$$\begin{aligned} \text{omtrek} &= 2\pi r \\ \text{oppervlakte} &= \pi r^2 \end{aligned}$$



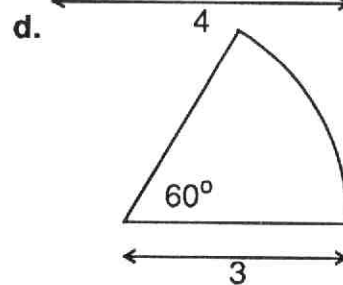
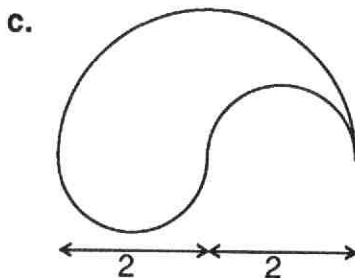
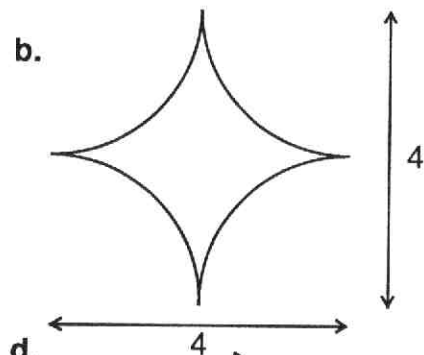
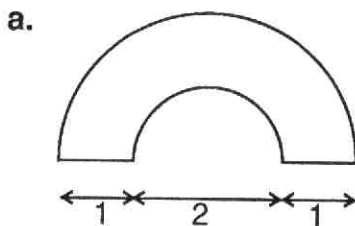
Je rekenmachientje geeft voor π een benadering in een aantal decimalen, bijv. $\pi = 3.1415927$.

Er is geen rekenmachine ter wereld die de exacte waarde van π kan geven; π heeft oneindig veel decimalen.

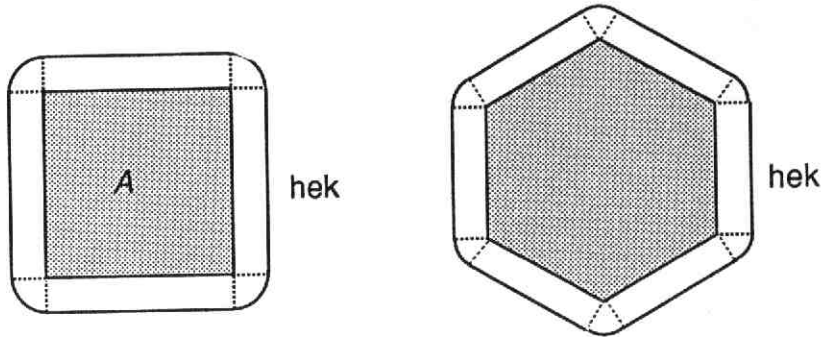
Bij wiskundige berekeningen laat men π vaak in het antwoord staan. Als uitdrukkelijk een benadering gevraagd wordt, moet je het antwoord geven in een aantal decimalen.

Opgaven

1. Bepaal de *omtrek* en *oppervlakte* van de volgende door cirkelstukken en lijnstukken begrensde gebieden.

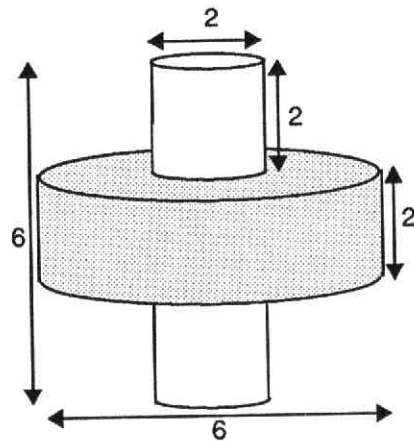


2.



Om het vierkante veld A is een hek geplaatst dat overal 1 meter van de rand van het veld afligt. Hetzelfde is gedaan om veld B (regelmatige zeshoek).

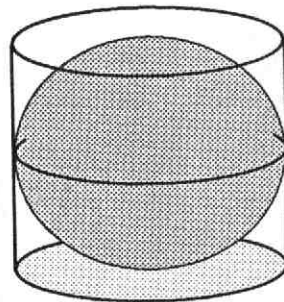
- Het hek is langer dan de omtrek van A . Hoe groot is het verschil?
 - Dezelfde vraag voor B .
3. Een lichaam bestaat uit drie cilinders. (zie het figuur hiernaast)
- Bereken de inhoud van dat lichaam.
 - Bereken de totale oppervlakte.



4. De oppervlakte van een bol met straal r is $4\pi r^2$ en de inhoud is $\frac{4}{3}\pi r^3$.

Een bol met straal r past in een cilinder. (raakt aan cilindermantel en aan grond en bovenvlak)

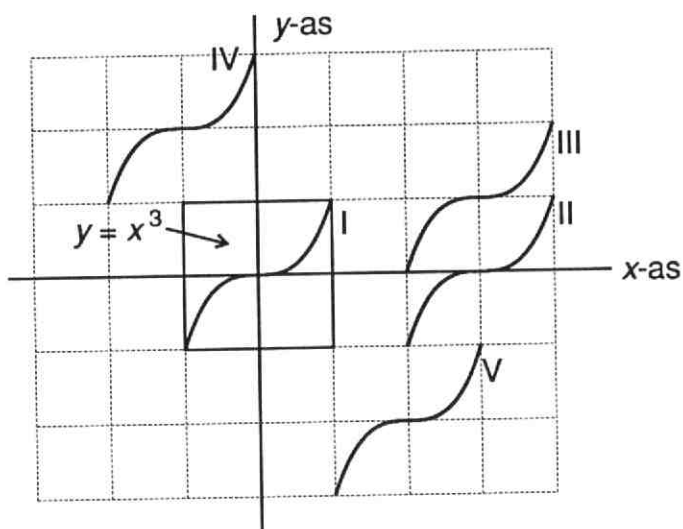
- Bereken de verhouding van de inhouden van cilinder en bol.
- Laat zien dat de oppervlakte van de bol gelijk is aan de oppervlakte van de cilindermantel.



OEFFENLES 18: Verschuiven van grafieken

1.
 - a. Teken de grafiek van $y = x^2$ voor $-2 \leq x \leq 2$ (I).
 - b. Verschuif de grafiek van $y = x^2$ in verticale richting 3 eenheden omhoog, zo krijg je grafiek II.
Welke formule hoort er bij II?
 - c. Verschuif de grafiek van $y = x^2$ in verticale richting $\frac{1}{2}$ eenheid omlaag, zo krijg je grafiek III.
Welke formule hoort er bij III?
2. Teken voor $-1 \leq x \leq 1$ in één figuur de grafieken van $y = -x^3$, $y = -x^3 + 2$ en $y = -x^3 - 1$.
3. Gegeven zijn de parabolen $y = x^2$ (I), $y = (x - 2)^2$ (II) en $y = (x + 1)^2$ (III).
 - a. Wat zijn de coördinaten van de top van I, van II en van III?
 - b. Teken I, II en III in één figuur tussen de lijnen $y = 0$ en $y = 4$.
 - c. II ontstaat uit I door een verschuiving in horizontale richting over 2 eenheden. Is de verschuiving naar rechts of naar links?
 - d. Door welke verschuiving ontstaat III uit I?
4. Gegeven de grafiek van $f(x) = x^4$.
De grafiek van g is ontstaan uit de grafiek van f door verschuiving over 100 eenheden naar rechts.
 - a. Bereken $g(101)$, $g(99)$, $g(102)$, $g(98)$.
 - b. Druk $g(x)$ uit in x (controleer je resultaat met de antwoorden bij a).
 - c. Hoe ontstaat de grafiek van $h(x) = (x + 50)^4$ uit de grafiek van $f(x) = x^4$?
5. Teken in één figuur de grafieken van $y = x^2$, $y = (x - 3)^2$ en $y = (x - 3)^2 + 2$.
6. Teken in één figuur de grafieken van: $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = \frac{1}{2}(x + 2)^2$ en $y = \frac{1}{2}(x + 2)^2 + 1$.

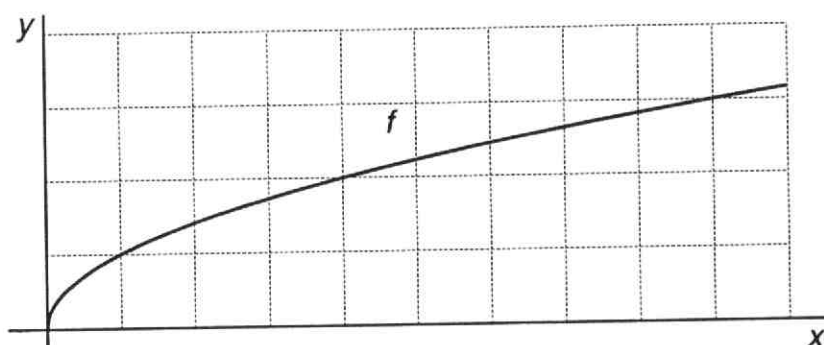
7.



I is de grafiek van $y = x^3$ voor $-1 \leq x \leq 1$

Geef bij elk van de grafieken II, III, IV en V een passende vergelijking.

8. Hieronder zie je de grafiek van $f(x) = \sqrt{x}$.



a. Controleer de grafiek voor $x = 1$, $x = 4$, $x = 9$.

b. In welk punt snijdt de grafiek de lijn $y = 4$?

c. Teken de grafiek van $g(x) = \sqrt{x-2}$.

d. Teken ook de grafiek van $h(x) = \sqrt{x+3} + 1$.

OEFENLES 19: Vergelijkingen

De vergelijking $x^2 = 324$ heeft 2 oplossingen, namelijk 18 en -18.

Het oplossingschema: $x^2 = 324$

$$\begin{array}{c} x^2 = 18^2 \\ \swarrow \quad \searrow \\ x = 18 \quad x = -18 \end{array}$$

In het algemeen:

$$\begin{array}{c} x^2 = c^2 \quad (c \text{ positief}) \\ \swarrow \quad \searrow \\ x = c \quad x = -c \end{array}$$

1. Los op:

a. $x^2 = 144$

d. $x^2 = 41$

b. $5x^2 = 405$

e. $x^2 + 41 = 0$

c. $\frac{1}{3}x^2 = 12$

f. $x^3 = 8$

Bovenstaand schema kan nog wat algemener:

$$\begin{array}{c} \boxed{}^2 = \bigcirc^2 \\ \swarrow \quad \searrow \\ \boxed{} = \bigcirc \quad \boxed{} = -\bigcirc \end{array}$$

Toegepast op

$(x + 41)^2 = 25$ komt er:

$$\begin{array}{c} \boxed{x + 41}^2 = \bigcirc 5^2 \\ \swarrow \quad \searrow \\ \boxed{x + 41} = \bigcirc 5 \quad \boxed{x + 41} = -\bigcirc 5 \\ \downarrow \quad \quad \downarrow \\ x = -36 \quad x = -46 \end{array}$$

2. Los op:

a. $(x + 25)^2 = 225$

d. $(x - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$

b. $(x - 10)^2 = 49$

e. $(3x + 2)^2 = 4$

c. $(2x - 1)^2 = 100$

f. $3 \cdot (x + 2)^2 = 192$

3. Maak zelf schema's voor:

a. $\boxed{}^3 = \bigcirc^3$

b. $\boxed{}^4 = \bigcirc^4$

c. $\sqrt{\boxed{}} = \sqrt{\bigcirc}$

4. Los op:

a. $(x+8)^3 = 27$

d. $(5x+1)^5 = 32$

b. $(x-1)^4 = 10000$

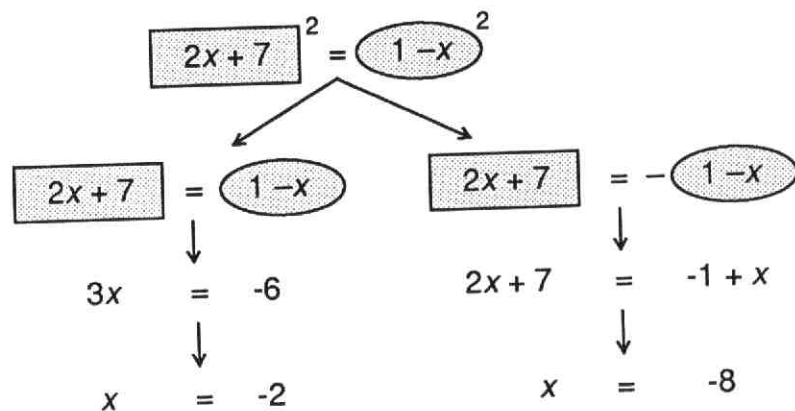
e. $\sqrt{30x-11} = 13$

c. $\sqrt{x+7} = 6$

f. $(6x-5)^4 = 1$

Voorbeeld:

Los op: $(2x+7)^2 = (1-x)^2$



5. Los op:

a. $(x-10)^2 = (4-3x)^2$

b. $(x-10)^3 = (4-3x)^3$

c. $(x^2-2x)^3 = (6-x)^3$

d. $(x^2+2)^4 = (8x-10)^4$

e. $(x^2-x-3)^2 = (3x^2+x-1)^2$

OEFFENLES 20: Grafiek en tekenverloop

1. De grafiek van $f(x) = x^2 + x - 2$.

a. Geef het *tekenverloop* bij deze functie.

b. De grafiek van f wordt verticaal verschoven. Het tekenverloop verandert hierdoor. Geef het tekenverloop in het geval dat de verschuiving

- (1) 4 eenheden omlaag is.
- (2) 2 eenheden omhoog is.

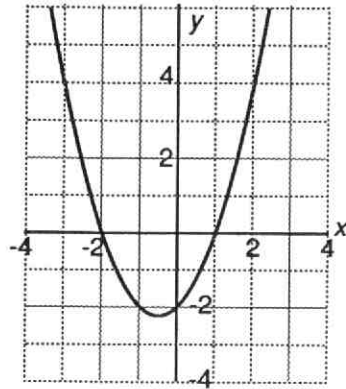
c. Dit tekenverloop past bij een verticale verschuiving van de grafiek:

$$\begin{array}{ccccccc} + & + & 0 & - & - & 0 & + & + \\ \hline & & -4 & & & 3 & & \end{array}$$

Over welke afstand is de grafiek verschoven?

d. Dezelfde vraag bij dit tekenverloop:

$$\begin{array}{ccccccc} + & + & 0 & + & + \\ \hline & & -\frac{1}{2} & & \end{array}$$



Grafieken en tekenverlopen kunnen gebruikt worden bij het oplossen van ongelijkheden.

Voorbeeld: Los op: $x^2 - 4x < 12$

Manier 1:

Gebruik de grafiek van $f(x) = x^2 - 4x$.

Kijk naar het deel van de grafiek *onder* de lijn $y = 12$.

De snijpunten van de grafiek met die lijn volgen uit:

$$\begin{aligned} x^2 - 4x &= 12 \rightarrow x^2 - 4x - 12 = 0 \\ (x + 2)(x - 6) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} \swarrow & & \searrow \\ x = -2 & & x = 6 \end{array}$$

Uit de grafiek lees je af: $x^2 - 4x < 12$ geldt voor $-2 < x < 6$

Manier 2:

met behulp van een tekenverloop:

$$x^2 - 4x - 12 < 0$$

$$(x + 2)(x - 6) < 0$$

$$\begin{array}{ccccccc} + & + & 0 & - & - & 0 & + & + \\ \hline & & -2 & & & 6 & & \\ & & \downarrow & & & & & \\ & & -2 & & & 6 & & \end{array}$$

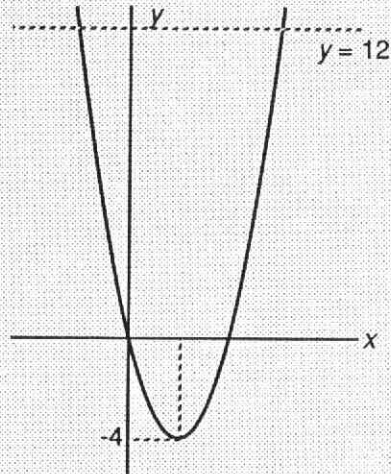
$$-2 < x < 6$$

(12 overgeboekt naar linkerlid)
(linkerlid ontbonden in factoren)

(tekenverloop)

(afgelezen uit tekenverloop)

Pas op! Het tekenverloop hoort niet bij de grafiek van $f(x) = x^2 - 4x$, maar bij de *verschoven* grafiek, dus bij de nieuwe functie g met: $g(x) = f(x) - 12$.



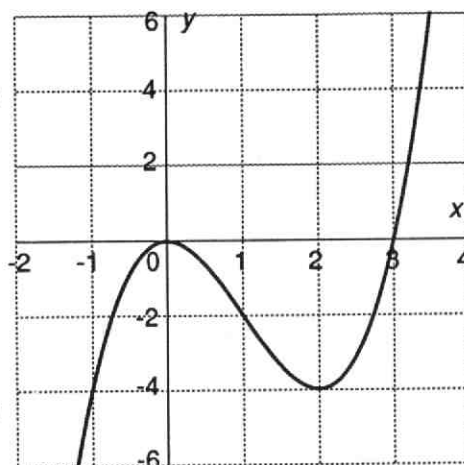
2. Gebruik de grafiek van het voorbeeld bij het oplossen van:

a. $x^2 - 4x > -3$.

b. $x^2 - 4x < -5$

3. De grafiek van $f(x) = x^3 - 3x^2$.

a. Geef het tekenverloop bij deze grafiek.

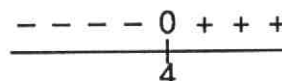


b. De grafiek van f wordt 4 eenheden omhooggeschoven.

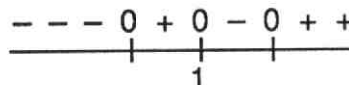
Geef het tekenverloop dat bij de verschoven grafiek past.

c. Dit tekenverloop krijg je bij een verticale verschuiving van de grafiek.

Over welke afstand is de grafiek verschoven?

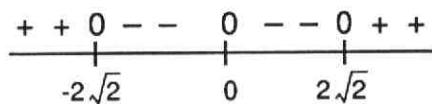


d. Dezelfde vraag bij dit tekenverloop.



4. Hiernaast zie je de grafiek van $f(x) = x^4 - 8x^2$

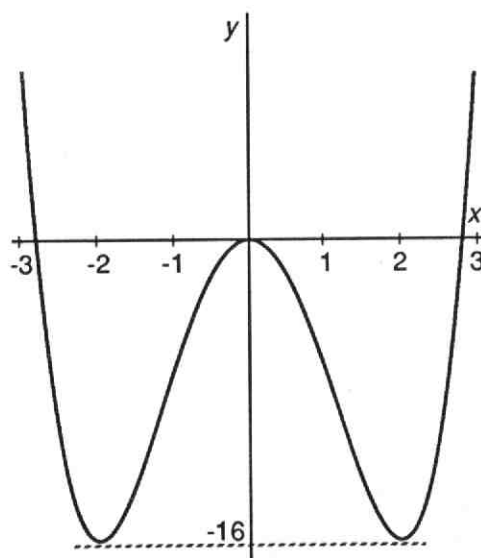
a. Het tekenverloop bij de grafiek:



Laat zien dat de getallen $2\sqrt{2}$ en $-2\sqrt{2}$ kloppen.

b. Los op: $x^4 - 8x^2 > -7$.
Gebruik daarbij de grafiek.

c. Los op: $x^4 - 8x^2 < 9$



- d. Bekijk alle verticale verschuivingen van de grafiek van f .
Iedere verschuiving geeft een ander tekenverloop.
Daarbij zijn 5 verschillende 'typen' te onderscheiden:

- (1) $\begin{array}{cccccc} + & + & + & + & + & + \\ \hline \end{array}$
- (2) $\begin{array}{cccccc} + & + & 0 & + & + & 0 & + & + \\ \hline \end{array}$
- (3) $\begin{array}{cccccccccccc} + & + & 0 & - & - & 0 & + & + & 0 & - & - & 0 & + & + \\ \hline \end{array}$
- (4) $\begin{array}{cccccccc} + & + & 0 & - & - & - & 0 & - & - & - & 0 & + & + \\ \hline \end{array}$
- (5) $\begin{array}{cccccccccccc} + & + & 0 & - & - & - & - & - & - & - & - & 0 & + & + \\ \hline \end{array}$

Geef bij ieder van de vijf typen aan welke verschuivingen van de grafiek erbij passen.

(Bij (1), (3) en (5) zijn er meerdere mogelijkheden!)

Voorbeeld:

Los op: $x^3 - 4x > -x^2 + 2x$

Manier 1:

Met de grafieken van
 $f(x) = x^3 - 4x$ en $g(x) = -x^2 + 2x$.
De snijpunten van de grafieken
volgen uit:

$$x^3 - 4x = -x^2 + 2x$$

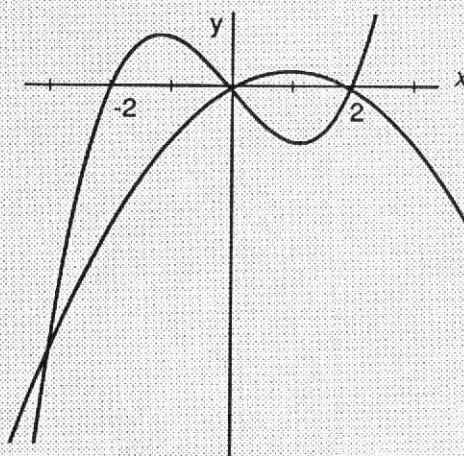
$$x^3 + x^2 - 6x = 0$$

$$x(x+3)(x-2) = 0$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$x = 0 \quad x = -3 \quad x = 2$$

In de figuur lees je nu af: $f(x) > g(x)$ voor $-3 < x < 0$ en voor $x > 2$.



Manier 2:

Met een tekenverloop:

$$x^3 - 4x > -x^2 + 2x$$

$$x^3 + x^2 - 6x > 0$$

$$x(x+3)(x-2) > 0$$

tekenverloop van $x(x+3)(x-2)$

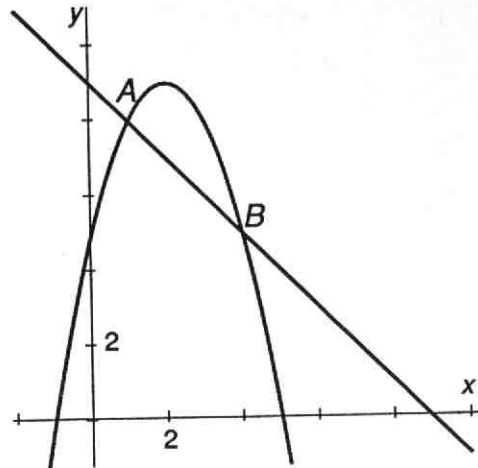
$$\begin{array}{cccccccc} - & - & 0 & + & + & 0 & - & - & 0 & + & + \\ \hline & & -3 & \downarrow & & 0 & & & 2 & \downarrow & \\ & & & & -3 < x < 0 & & & & x > 2 & & \end{array}$$

dus $x(x+3)(x-2) > 0$ geldt voor

Merk op: Dit tekenverloop hoort bij de *verschilfunctie* $V(x) = f(x) - g(x)$

5. Hiernaast zie je de grafieken van $f(x) = -x^2 + 4x + 5$ en $g(x) = -x + 9$.

- Bereken de coördinaten van de snijpunten A en B.
- Lees uit de grafiek af voor welke waarden van x geldt:
 $f(x) < g(x)$.
- Geef het tekenverloop van de verschilfunctie $V(x) = f(x) - g(x)$.

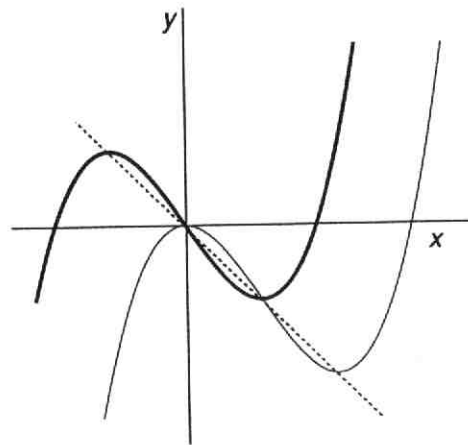


6. Drie grafieken in één figuur:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 3x \\ g(x) &= x^3 - 3x^2 \\ h(x) &= -2x \end{aligned}$$

- Los op:
 - $f(x) = g(x)$
 - $f(x) = h(x)$
 - $g(x) = h(x)$
- Geef het tekenverloop van

$$\begin{aligned} V_1(x) &= f(x) - g(x) \\ V_2(x) &= f(x) - h(x) \\ V_3(x) &= g(x) - h(x) \end{aligned}$$



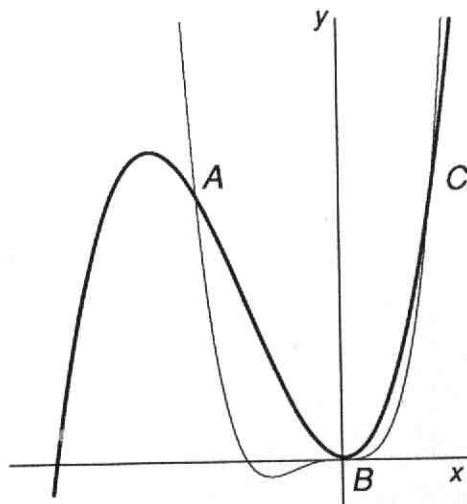
7. $f(x) = x^4 + 2x^3$, $g(x) = x^3 + 6x^2$

- Bereken de coördinaten van de snijpunten A, B en C.
- Tekenverloop van de verschilfunctie V.

$\begin{array}{cccccccc} - & - & 0 & + & + & 0 & + & + & 0 & - & - \end{array}$

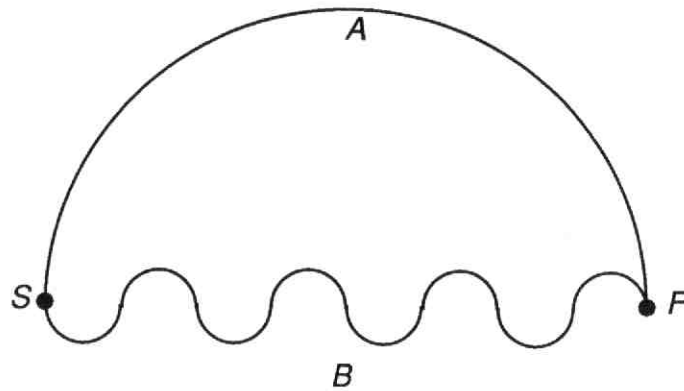
Welke verschilfunctie is dat:
 $V(x) = f(x) - g(x)$ of
 $V(x) = g(x) - f(x)$

- Voor welke x geldt:
 $x^4 + 2x^3 > x^3 + 6x^2$.



DENKERTJES

1.



Twee routes van S naar F .
 A is een halve cirkel met straal r .
 B bestaat acht even grote halve cirkels.

- Welke route is het langst?
- Tussen S en F is ook een route van 100 halve cirkeltjes. Hoe lang is die route?

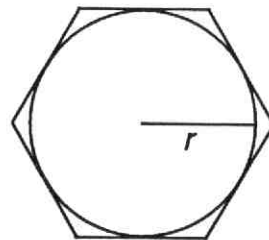
2. Welke oplossingen heeft de vergelijking:

$$\cos x = x^2 + 1 ?$$

3. De getallen $5\sqrt{2} - a$ en $5\sqrt{2} + a$ zijn elkaars omgekeerde. Bereken a .

4. De lijnen $l: y = (5 - 2\sqrt{6})x$ en $m: y = (5 + 2\sqrt{6})x$ zijn elkaars spiegelbeeld ten opzichte van de lijn $y = x$. Bewijs dit.

5. Een cirkel raakt aan de zijden van een regelmatige zeshoek. De straal van de cirkel is r . Druk de *omtrek* en de *oppervlakte* van de zeshoek uit in r .

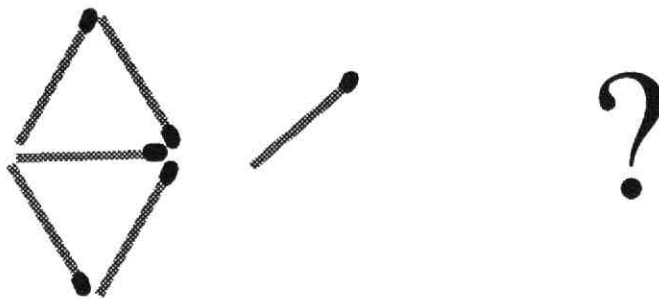


DENKERTJES

6. Als $f(x) = ax^2 + bx + c$ met $a \neq 0$
en $d = b^2 - 4ac$

dan: $f(x) = \frac{[f'(x)]^2 - d}{4a}$

7. Hoe kun je met 6 even grote lucifers vier gelijkzijdige driehoeken maken, waarvan de lucifers de zijden zijn?



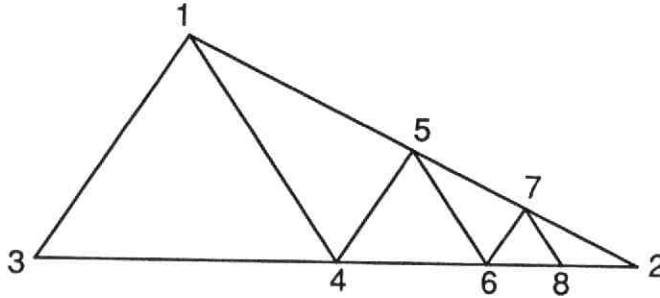
8. De aarde, bij benadering een bol met straal 6400 km, draait in 24 uur één keer om de as NZ.



- Hoeveel graden draait een punt van de evenaar in drie uur?
Hoeveel km legt dat punt ongeveer in drie uur af?
- Dezelfde vragen voor een punt in Oslo (dat ligt op 60° Noorderbreedte; zie tekening).

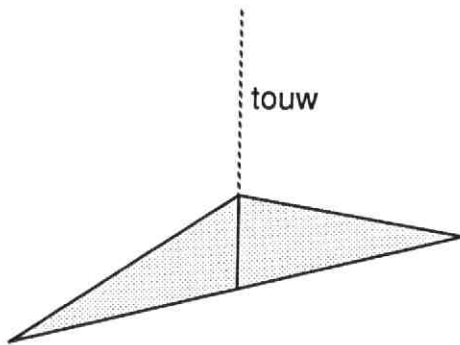
OEFENLES 21: Het zwaartepunt van een driehoek

1. In driehoek 123 is punt 4 het midden van lijnstuk 23, 5 het midden van 12, 6 van 24, 7 van 25 en 8 van 26.



Hoe verhouden zich de oppervlakten van de driehoeken 123 en 278?
Beredeneer je antwoord.

2. Aan het punt van een driehoek van stevig karton wordt een touwtje bevestigd. De driehoek wordt vervolgens aan dat touwtje opgehangen.



De stand van de hangende driehoek is nu zodanig dat de lijn in het verlengde van het touw de driehoek verdeelt in stukken met gelijke oppervlakte.

Beredeneer dat hieruit volgt dat die lijn de basis van de driehoek in gelijke stukken verdeelt.

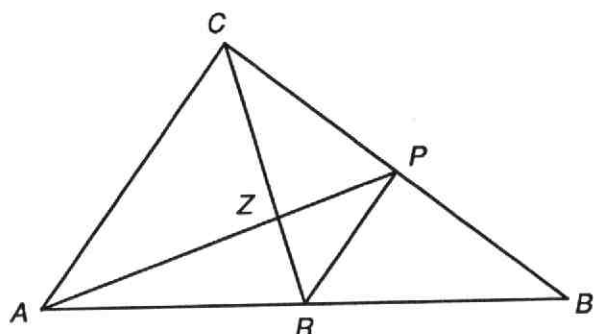
Afspraak: De lijn die door een hoekpunt van een driehoek gaat en die de tegenoverliggende zijde in twee gelijke stukken verdeelt, is een *zwaartelij*n van de driehoek.

In opgave 2 heb je gezien:

Een zwaartelij

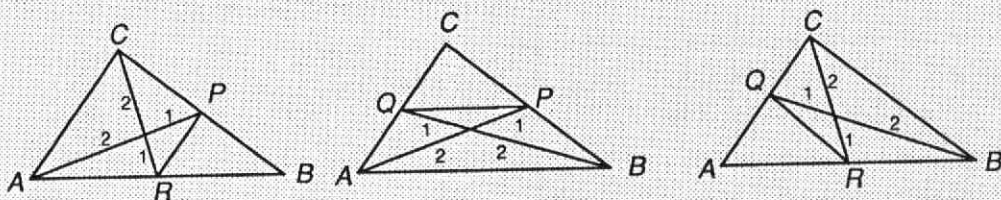
verdeelt de driehoek in twee delen met gelijke oppervlakte.

3. In driehoek ABC zijn de zwaartelijnen AP en CR met snijpunt Z getekend. Verder zijn P en R verbonden.



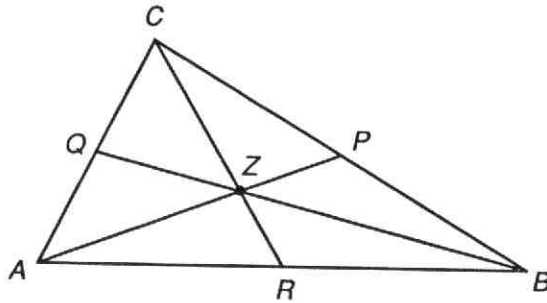
- Verklaar: $PR \parallel AC$.
- De driehoeken ACZ en PRZ zijn gelijkvormig.
Hoe verhouden zich de overeenkomstige zijden van de driehoeken ACZ en PRZ ?
- Hoe verhouden zich de oppervlakten van de driehoeken ACZ en PRZ ?
- Gegeven is nog dat de oppervlakte van driehoek ABC gelijk is aan 12. De lijnen AP , CR , en PR verdelen de driehoek in vijf delen.
Schrijf in elk deel hoe groot de oppervlakte van dat deel is.

Uit opgave 3 b. blijkt dat de zwaartelijnen AP en CR in driehoek ABC elkaar verdelen in stukken met verhouding $2 : 1$. Dat geldt natuurlijk ook voor het paar zwaartelijnen AP en BQ en voor het paar BQ en CR .



Gevolg: De drie zwaartelijnen van een driehoek gaan door één punt Z .
Dit punt Z wordt het zwaartepunt van de driehoek genoemd.

4. De drie zwaartelijnen AP , BQ en CR van driehoek ABC snijden elkaar in Z .

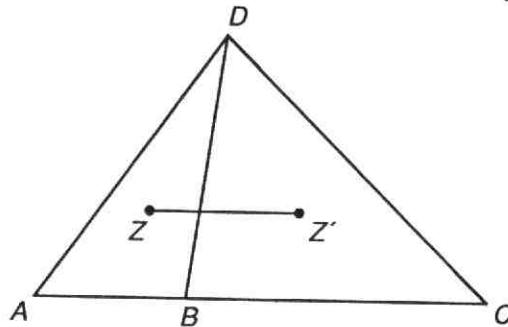


Beredeneer dat de oppervlakten van de deeldriehoekjes AZR , BZR , enz. aan elkaar gelijk zijn.

5. Gegeven zijn de punten A , B en C op één lijn en punt D buiten die lijn verbonden met A , B en C . Z en Z' zijn de zwaartepunten van ABC en BCD .

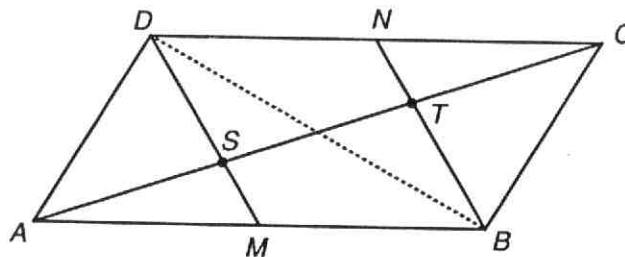
Bewijs dat geldt: $ZZ' \parallel AC$ en $ZZ' = \frac{1}{3} AC$.

(aanwijzing: trek twee geschikte zwaartelijnen).

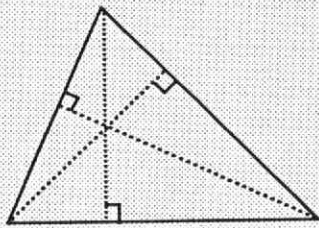


6. $ABCD$ is een parallellogram. M is het midden van AB en N is het midden van DC . AC snijdt DM in S en BN in T .

- Bewijs dat S het zwaartepunt is van driehoek ADB .
- Bewijs: $AS = ST = TC$.

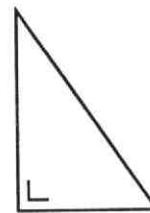
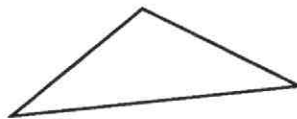
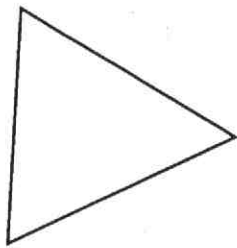


OEFENLES 22: Hoogtelijnen in een driehoek



Een hoogtelijn in een driehoek gaat door een hoekpunt en staat loodrecht op de overstaande zijde (soms het verlengde ervan). De drie hoogtelijnen van een driehoek gaan door één punt, het *hoogtepunt*, van de driehoek.

1. Teken de hoogtelijnen en het hoogtepunt bij deze driehoeken.



2. Van een gelijkbenige driehoek zijn de zijden 12, 12 en 8.
Bereken de lengte van de hoogtelijn uit de top.
3. Van driehoek ABC is gegeven: $AC = 20$ en hoek $A = 67^\circ$.
Bereken de hoogtelijn uit C (in een decimaal nauwkeurig).

Belangrijk zijn lengteberekeningen van hoogtelijnen, onder andere bij berekeningen van oppervlakte, inhoud en afstand.

De manier van berekenen is afhankelijk van de soorten gegevens.

In opgave 2 en 3 heb je al twee voorbeelden van zulke berekeningen gezien.

Een ander geval doet zich voor als de oppervlakte van de driehoek gegeven is.

Voorbeeld:

De oppervlakte van ABC

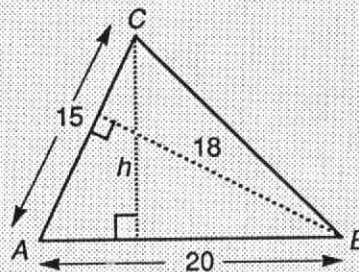
$$= \frac{1}{2} \times 15 \times 18 = 135$$

Hieruit kan de hoogte h (op AB) worden berekend.

$$\frac{1}{2} \times h \times 20 = 135^*)$$

$$10h = 135$$

$$h = 13,5$$



*) zowel links als rechts staat de oppervlakte van ABC .

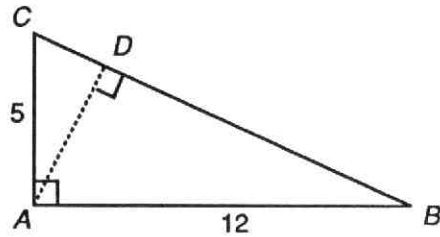
4. Van driehoek ABC zijn de zijden 13, 14 en 15; de oppervlakte van de driehoek is 84.
Bereken de drie hoogtelijnen in driehoek ABC .

5. AD is hoogtelijn in de rechthoekige driehoek ABC .

a. Verklaar:

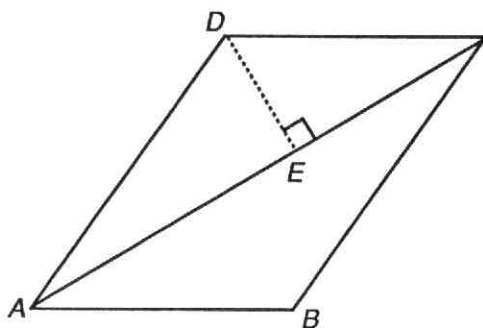
$$AD \times BC = CA \times AB$$

b. Bereken CB en vervolgens AD .



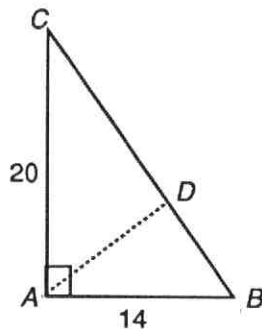
6. Van een gelijkbenige driehoek is de basis 6 en de hoogtelijn uit de top 4.
Bereken de beide andere hoogtelijnen van de driehoek.

7.



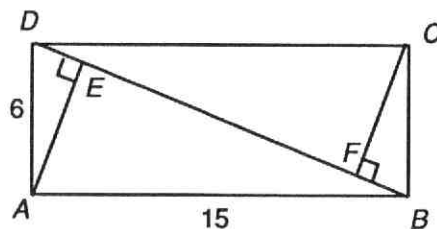
$ABCD$ is een parallellogram.
 $AC = 28$.
Oppervlakte $ABCD = 196$.
Bereken DE .

8.



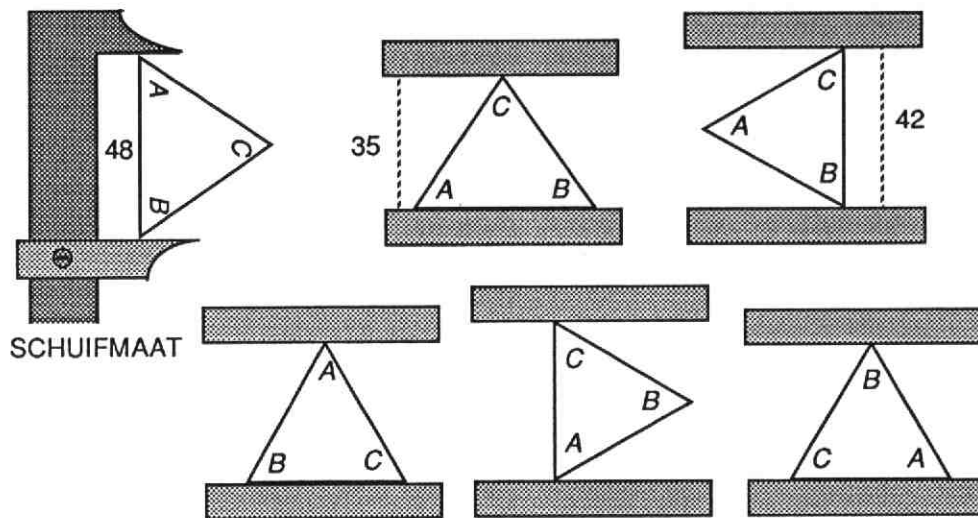
Bereken AD , BD , CD .

9.

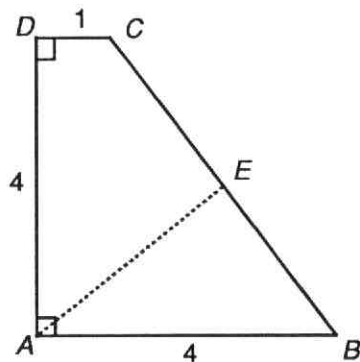


$ABCD$ is een rechthoek.
Bereken AE en EF .

10. Aan een recht afgezaagd driekantig staafje wordt een aantal metingen verricht. Van drie ervan is de uitkomst (in mm) inmiddels bekend. Bereken de uitkomsten die de overige metingen zullen geven.

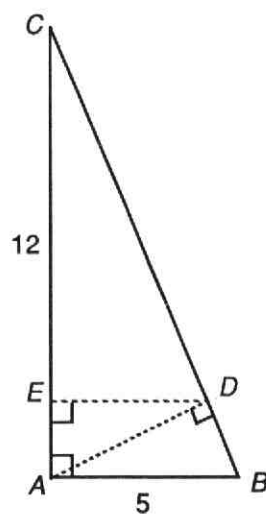


11.



Bereken AE

12.

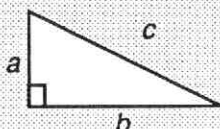


$AB = 5$ $AC = 12$
Bereken AD en DE.

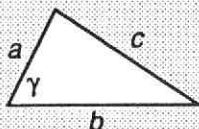
OEFENLES 23: De cosinusregel

De stelling van Pythagoras (1) geeft het verband tussen de drie zijden van een *rechthoekige* driehoek.

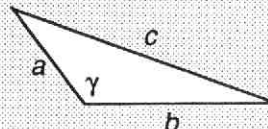
Voor een *scherphoekige* of *stomphoekige* driehoek is het verband wat ingewikkelder (2).



$$c^2 = a^2 + b^2 \quad (1)$$



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \quad (2)$$



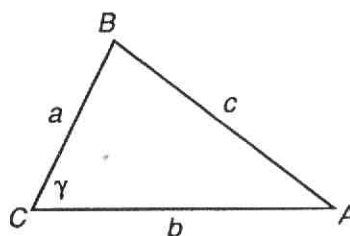
(2) is de zogenaamde cosinusregel.

Merk op: als je $\gamma = 90^\circ$ invult in (2) krijg je (1)!

De cosinusregel wordt gebruikt om:

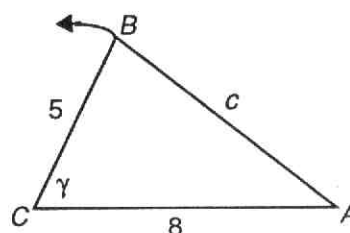
- (a) de zijden van een driehoek te berekenen als twee zijden en één hoek gegeven zijn
- (b) een hoek van een driehoek te berekenen als de zijden gegeven zijn.

1. Gegeven: $a = 5$, $b = 8$, $\gamma = 60^\circ$.
Laat met behulp van de cosinusregel zien dat c gelijk is aan 7.

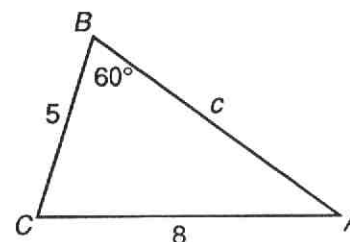


2. Als de zijde BC om C draait verandert AB van lengte.

- a. Hoe lang is AB als $\gamma = 90^\circ$?
- b. Hoe lang is AB als $\gamma = 120^\circ$?
- c. Hoe lang is AB als $\gamma = 180^\circ$?
Klopt de cosinusregel nu nog?

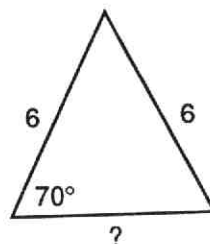
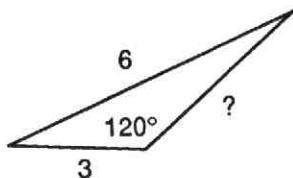
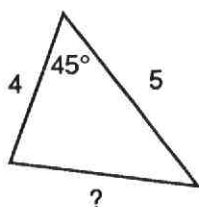


3. Gegeven: $a = 5$, $b = 8$, $\beta = 60^\circ$.
Te berekenen: c
Nu zit de gevraagde zijde niet tegenover de gegeven hoek.
Toch kan de cosinusregel worden gebruikt; niet met c^2 , maar met 8^2 in het linkerlid:
 $8^2 = 5^2 + c^2 - 2 \cdot 5 \cdot c \cdot \cos 60^\circ$.



Bereken c .

4. Bereken de ontbrekende zijde in elk van de volgende driehoeken.

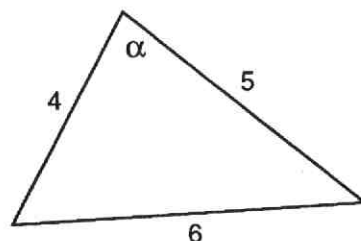


5. Als de drie zijden van een driehoek gegeven zijn, is elke hoek te berekenen.

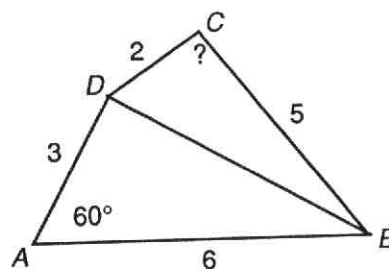
- a. Schrijf de cosinusregel op met 6^2 in het linkerlid en laat zien:

$$\cos \alpha = \frac{1}{8}.$$

- b. Bereken α in graden en in één decimaal nauwkeurig.

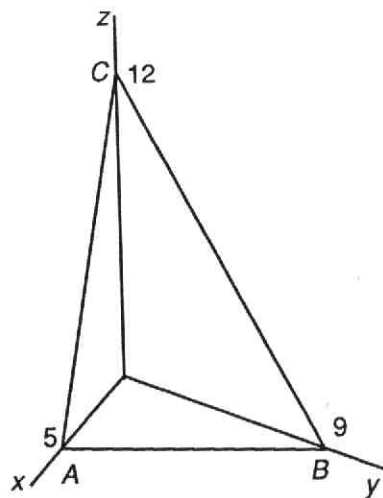


6. Bereken DB en vervolgens LC .



7. In een rechthoekig assenstelsel $Oxyz$ zijn gegeven de punten $A(5,0,0)$, $B(0,9,0)$ en $C(0,0,12)$

- a. Bereken AB , BC , CA .
b. Bereken de hoeken van driehoek ABC .

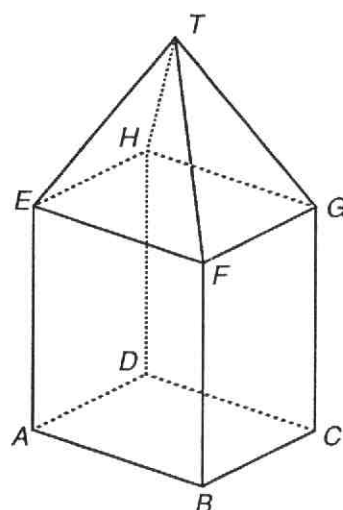


OEFENLES 24: Lijnen en vlakken

De tabel geeft een overzicht van mogelijkheden bij de onderlinge ligging van lijnen en vlakken in de ruimte.

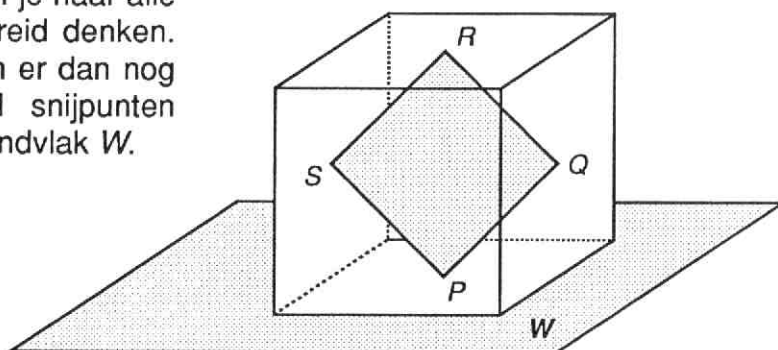
	lijn	vlak
lijn	-is evenwijdig met -snijdt -kruist	-ligt in -is evenwijdig met -snijdt
vlak	-gaat door (bevat) -is evenwijdig met -snijdt	-is evenwijdig met -snijdt

1. Vul in onderstaande regels passende ribben of zijvlakken van het torentje in:
 - a. lijn AB is evenwijdig met lijn
 - b. lijn AB kruist lijn
 - c. lijn CG is evenwijdig met vlak
 - d. lijn CG ligt in vlak
 - e. vlak EHT gaat door de lijn
 - f. vlak EHT snijdt lijn
 - g. vlak $BCGF$ is evenwijdig met vlak
 - h. vlak $BCGF$ snijdt vlak



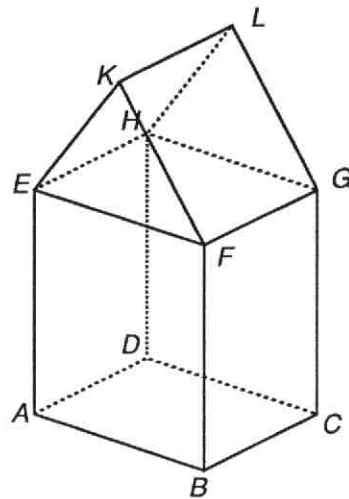
2. De middelpunten P , Q , R en S van vier grensvlakken van een kubus liggen in één vlak V .

Het vlak V kun je naar alle kanten uitgebreid denken. Behalve P zijn er dan nog oneindig veel snijpunten van V met grondvlak W .



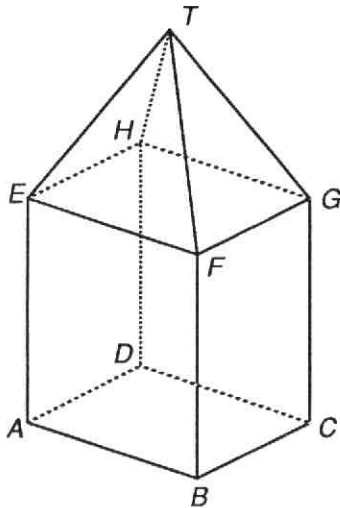
Wat weet je van de ligging van al die snijpunten?

3. Prisma op balk.
Vlak $KFGL$ snijdt vlak $BCFG$ in de lijn FG . Vlak $KFGL$ snijdt ook het vlak $ABCD$. ($KFGL$ en $ABCD$ kun je immers naar alle kanten uitbreiden).



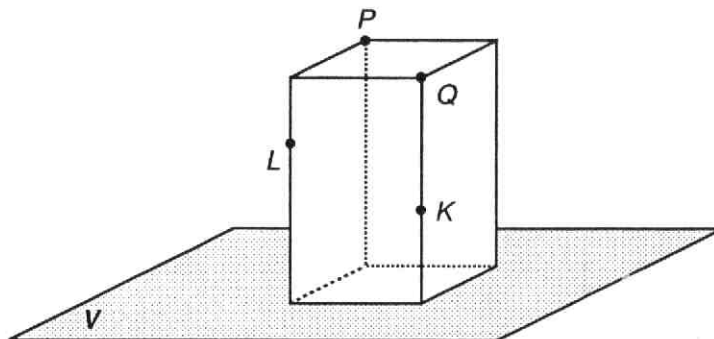
Teken de snijlijn van vlak $KFGL$ met het vlak $ABCD$.

4.



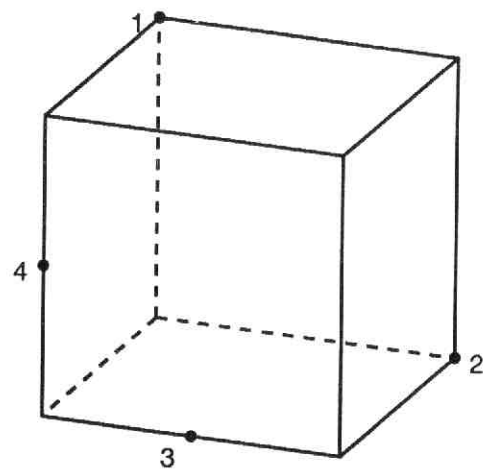
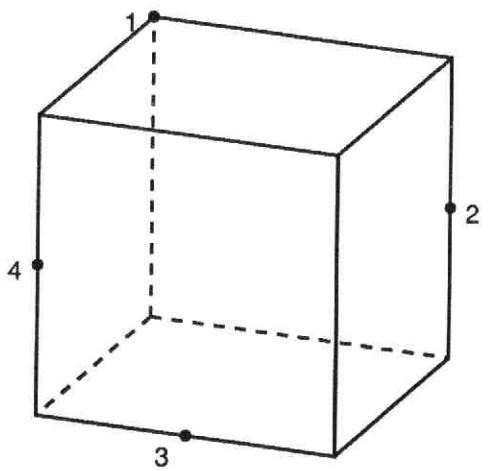
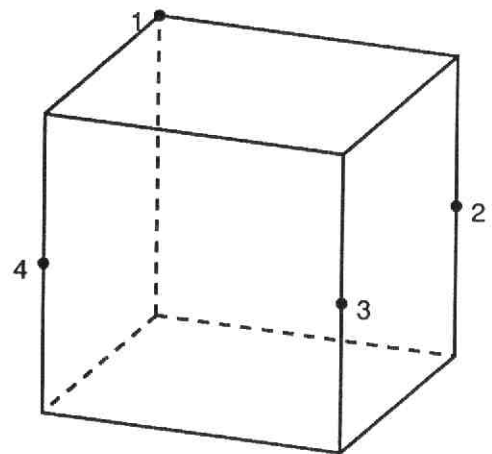
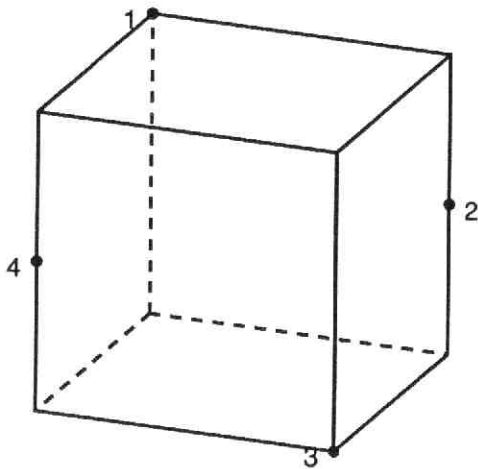
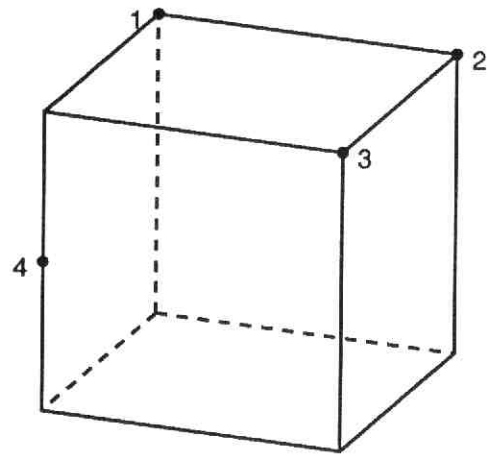
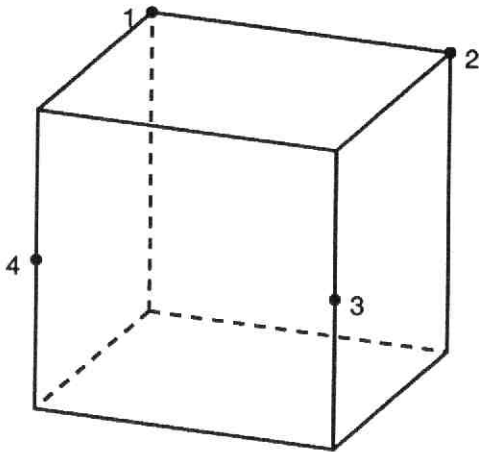
Piramide op balk.
Teken de snijlijnen van de vlakken TEF , TFG , THG en THE met het vlak $ABCD$.

5. Een balk staat op een vlak V .
 P en Q zijn hoekpunten van de balk.
 K en L liggen op ribben van de balk.



Teken de snijpunten van QL en van PK met vlak V .

6. 1, 2, 3 en 4 zijn hoekpunten of middelpunten van ribben van de kubus. Ga in elk van de gevallen na of 1, 2, 3 en 4 in één vlak liggen.



OEFEENLES 25: Gebroken vormen

1. Voorbeelden van gebroken vormen zijn $\frac{x+2}{x+5}$, $\frac{2x}{x+5}$, $\frac{2x}{5x}$.
- a. Bereken $\frac{x+2}{x+5}$ achtereenvolgens voor $x = 3$, $x = -1$, $x = \frac{1}{2}$.
- b. Dezelfde opdracht voor $\frac{2x}{x+5}$ en voor $\frac{2x}{5x}$.
2. a. Bereken $\frac{a}{a-4}$ voor $a = 1$, $a = 6$, $a = 4,1$ en $a = 4,01$.
- b. Bereken $\frac{a^2+4a}{a^2-16}$ voor $a = 1$, $a = 6$, $a = 4,1$ en $a = 4,01$.
- c. Kun je $\frac{a}{a-4}$ berekenen voor $a = 4$?
En voor $a = 0$?

Gebroken vormen zijn breuken met variabelen in teller en noemer. In deze oefenles ga je rekenen met zulke vormen. Zoals bekend mag de noemer van een breuk niet nul zijn. Daarom gaan we er steeds van uit dat de variabelen alleen die waarden aannemen, waarvoor de noemer $\neq 0$.

Voorbeeld:

als we het hebben over $\frac{x+2}{x+5}$, dan wordt stilzwijgend aangenomen: $x \neq -5$.

Bekijk de breuken van opgave 1.

De breuk $\frac{2x}{5x}$ is gelijk aan $\frac{2}{5}$ ongeacht de waarde van x ! (behalve natuurlijk voor $x = 0$).

Dat komt omdat teller en noemer beide gedeeld kunnen worden door x .

$$\frac{2 \cdot x}{5 \cdot x} = \frac{2}{5}$$

← teller en noemer delen door x

De breuken $\frac{2x}{x+5}$ en $\frac{x+2}{x+5}$ kun je niet verder vereenvoudigen!

3. Vereenvoudig, indien mogelijk:

$$\begin{array}{lll} \text{a.} & \frac{4y}{10y} & ; \quad \frac{4-y}{10-y} & ; \quad \frac{y+y}{y+y+y+y+y} \\ \text{b.} & \frac{x}{3x+4x} & ; \quad \frac{x}{3x+4} & ; \quad \frac{x^2}{7x} \\ \text{c.} & \frac{a}{8+a} & ; \quad \frac{a}{8a} & ; \quad \frac{a}{8a+a} \\ \text{d.} & \frac{5x}{10x} & ; \quad \frac{x^2}{xy} & ; \quad \frac{x+y}{y+x} \end{array}$$

4. a. $\frac{x+2}{x+5}$ kun je niet vereenvoudigen tot $\frac{2}{5}$.

Kun je wel een waarde van x vinden, waarvan $\frac{x+2}{x+5}$ 'toevallig' gelijk is aan $\frac{2}{5}$?

b. Dezelfde opdracht voor $\frac{2x}{x+5}$.

Bekijk opgave 2.

$\frac{a}{a-4}$ en $\frac{a^2+4a}{a^2-16}$ leveren dezelfde uitkomsten voor een aantal waarden van a ; sterker nog: voor *alle* waarden van a (mits de noemers $\neq 0$ zijn). Dat kun je als volgt inzien.

$$\frac{a^2+4a}{a^2-16} = \frac{a(a+4)}{(a+4)(a-4)} = \frac{a}{a-4}$$

↑

teller en
noemer
ontbonden
in factoren

↑

teller en
noemer
gedeeld
door $a+4$

5. Vereenvoudig de volgende breuken:

$$\begin{array}{lll} \text{a.} & \frac{x^2-x}{x^2+x} & ; \quad \frac{x^2-2x}{x^2+5x} & ; \quad \frac{x^2-25}{x^2+5x} \\ \text{b.} & \frac{2y-6}{3y-9} & ; \quad \frac{2y-6}{y^2-9} & ; \quad \frac{2y-6}{y^2-3y} \\ \text{c.} & \frac{a^2+2}{a^2+3a+2} & ; \quad \frac{a^2+4a+3}{a^2+6a+5} & ; \quad \frac{a^2-1}{a^2+a-2} \\ \text{d.} & \frac{x+6}{x^2+12x+36} & ; \quad \frac{x^2-x-6}{x^2+7x+10} & ; \quad \frac{3x^2-18x+24}{3x^2+9x-30} \end{array}$$

Bij het vereenvoudigen van breuken waarbij teller en noemer als produkt gegeven zijn, mogen teller en noemer door dezelfde vorm worden gedeeld. Je mag, als dat nuttig is, ook teller en noemer met dezelfde vorm vermenigvuldigen.

Dat is bijvoorbeeld handig bij 'samengestelde breuken'.

Voorbeelden van samengestelde breuken zijn:

$$\frac{2}{1+\frac{1}{x}}; \frac{1+\frac{3}{a}}{2+\frac{5}{a}}; \frac{y-\frac{1}{y}}{y+\frac{1}{y}}$$

Die breuken hebben de eigenschap dat teller of noemer (of beide) zelf weer breuken bevatten.

6. a. Bereken $\frac{2}{1+\frac{1}{x}}$ voor achtereenvolgens $x = 1, 2, \frac{1}{2}, -2$

b. Bereken ook $\frac{2x}{x+1}$ voor die waarden.

Opgave 6 doet vermoeden dat $\frac{2}{1+\frac{1}{x}}$ en $\frac{2x}{x+1}$ aan elkaar gelijk zijn.

De verklaring is niet moeilijk: vermenigvuldig teller en noemer van de samengestelde breuk met x

$$\frac{2}{1+\frac{1}{x}} = \frac{2 \cdot x}{(1+\frac{1}{x}) \cdot x} = \frac{2x}{x+1}$$

7. a. Laat zien dat geldt: $\frac{1+\frac{3}{a}}{2+\frac{5}{a}} = \frac{a+3}{2a+5}$

b. Ook: $\frac{y-\frac{1}{y}}{y+\frac{1}{y}} = \frac{y^2-1}{y^2+1}$

8. Vereenvoudig de samengestelde breuken:

a. $\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}$; $\frac{x}{1-\frac{1}{x}}$; $\frac{1-\frac{2}{x}}{x+2}$; $\frac{x-\frac{1}{x}}{x+1}$

b. $\frac{1+\frac{1}{y^2}}{1-\frac{1}{y^2}}$; $\frac{1+\frac{1}{y}}{1-\frac{1}{y^2}}$; $\frac{\frac{1}{y}+\frac{1}{y^2}}{1-\frac{1}{y^2}}$; $\frac{y-1-\frac{2}{y}}{y+1}$

OEFFENLES 26: Gebroken vergelijkingen

In oefenles 25 ('gebroken vormen') komt de volgende vraag voor:

voor welke x geldt: $\frac{2x}{x+5} = \frac{2}{5}$?

De oplossing kun je bijvoorbeeld zo vinden:

Deel linker- en rechterlid door 2.

Je krijgt dan: $\frac{x}{x+5} = \frac{1}{5}$.

De noemer van $\frac{x}{x+5}$ moet 5 keer zo groot zijn als de teller.

Dus: $x + 5 = 5x$

Gevolg: $5 = 4x$

$$x = 1\frac{1}{4}$$

Een veel gebruikte methode bij dit soort vergelijkingen is het zogenaamde *kruislings vermenigvuldigen*.

Dat gaat zo: $\frac{2x}{x+5} = \frac{2}{5} \longrightarrow 2x \cdot 5 = (x+5) \cdot 2$

$\frac{2x}{x+5} \times \frac{2}{5}$

$$10x = 2x + 10$$

$$8x = 10$$

$$x = 1\frac{1}{4}$$

Opgaven

1. Los de volgende vergelijkingen op.

Controleer steeds je antwoord door invullen

a. $\frac{x+2}{x-1} = \frac{5}{8}$

d. $\frac{x-4}{x-3} = 1$

b. $\frac{3x}{2x+1} = \frac{1}{4}$

e. $\frac{x-4}{3-x} = 1$

c. $\frac{3x-4}{x+2} = 2$

f. $\frac{x-5}{x-10} = \frac{1}{2}$

Kruislings vermenigvuldigen kan niet klakkeloos worden toegepast.

Bekijk het voorbeeld: $\frac{x-4}{4-x} = \frac{2}{3}$.

Kruislings vermenigvuldigen geeft: $3x - 12 = 8 - 2x$

$$5x = 20$$

$$x = 4$$

Maar ... , als je 4 invult in de vergelijking, komt er iets gekks: $\frac{0}{0} = \frac{2}{3}$

Het getal 4 voldoet *niet* aan de oorspronkelijke vergelijking.

Bij het kruislings vermenigvuldigen in het voorbeeld is er niet aan gedacht dat de noemer van de breuk $\neq 0$ moet zijn.

De correcte oplossing begint zó

$$\frac{x-4}{4-x} = \frac{2}{3}$$

$$3x - 12 = 8 - 2x \quad \text{mits } 4 - x \neq 0$$

$$\dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

De voorwaarde $4 - x \neq 0$ of wel $x \neq 4$, sluit vanzelf de oplossing 4 uit.

De vergelijking heeft dus geen oplossingen.

Achteraf kun je dat ook meteen zien:

$$\frac{x-4}{4-x} \text{ is te vereenvoudigen tot } -1 \text{ voor } x \neq 4.$$

De vergelijking wordt dan: $-1 = \frac{2}{3}$ en heeft geen oplossing.

2. Los de volgende vergelijkingen op (wees kritisch!)

a. $\frac{3x+30}{2x+20} = 2$

c. $\frac{x^2-9}{x^2-3x} = 1$

b. $\frac{x^2-4}{x-2} = 2$

d. $\frac{x^2-7x+10}{x^2-8x+15} = -1$

3. Los op en controleer je oplossing door invullen:

a. $\frac{3}{x} = \frac{x}{12}$

c. $\frac{3}{x+1} = \frac{x-1}{16}$

b. $\frac{2}{x-1} = \frac{x-1}{18}$

d. $\frac{x}{x+1} = \frac{x+1}{x-1}$

Gebroken vergelijkingen kunnen soms leiden tot een vierkantsvergelijking.

Voorbeeld:

$$\frac{x+3}{x+1} = 2x$$

Oplossing:

$$x+3 = 2x(x+1) \quad \text{mits } x+1 \neq 0, \text{ dus } x \neq -1$$

$$x+3 = 2x^2 + 2x$$

$$0 = 2x^2 + x - 3$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{4}$$

$$x = 1; \quad x = -1\frac{1}{2}$$

4. Controleer door invullen dat 1 en $-1\frac{1}{2}$ inderdaad voldoen aan $\frac{x+3}{x+1} = 2x$

5. Los x op uit:

a. $\frac{2x+5}{x} = x+6$

c. $\frac{x^2+4}{x} = 4$

b. $\frac{x}{x+2} = x-1$

d. $x+1 = \frac{4x}{x-1}$

Nog een voorbeeld:

$$x + \frac{2}{x} = 3$$

Oplossing:

$$x^2 + 2 = 3x \quad \text{mits } x \neq 0$$

(linker- en rechterlid zijn met x vermenigvuldigd)

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$(x-1)(x-2) = 0$$

$$\begin{array}{c} \swarrow \quad \searrow \\ x=1 \quad x=2 \end{array}$$

Controle:

$$1 + \frac{2}{1} = 3 ; 2 + \frac{2}{2} = 3$$

6. Los op:

a. $3x - \frac{1}{x} = 2$

c. $x + \frac{1}{x-1} = 3$

b. $2x + \frac{5}{x} = 7$

d. $\frac{1}{x} + \frac{1}{2-x} = 2$

7. a. Los t op uit: $\frac{t+\frac{1}{t}}{t-\frac{1}{t}} = 2$

b. Los u op uit: $\frac{1}{u^2} - \frac{1}{u} - 6 = 0$

c. Los y op uit: $\frac{1}{y^2 - y - 11} = 1$

d. Los x op uit: $\frac{x^2 - x - 90}{x^2 + x - 72} = 2$

OEFENLES 27: Vergelijkingen met sinus en cosinus

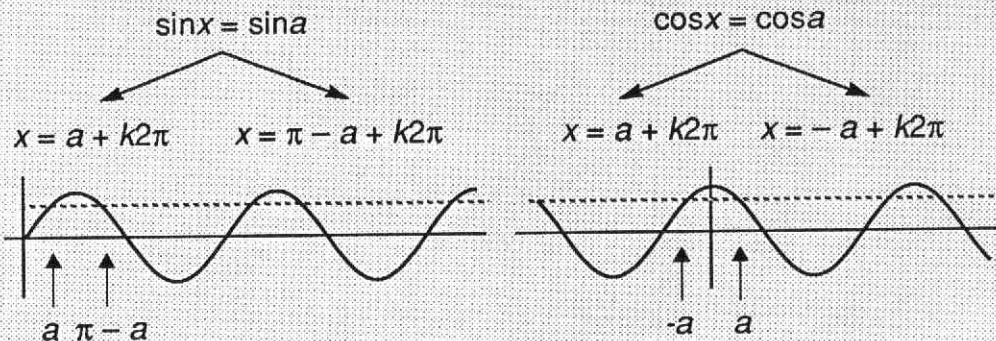
De standaardvergelijkingen voor sinus en cosinus zijn:

$$\sin x = \sin a \quad \text{en} \quad \cos x = \cos a$$

waarbij x de onbekende is.

Zo'n vergelijking levert in principe twee periodieke oplossingsrijen.

Er geldt:



In plaats van x kan er ook een vorm in x staan.

Bijvoorbeeld:

$$\sin(3x + 1) = \sin 2$$

$$\begin{aligned} 3x + 1 &= 2 + k \cdot 2\pi & 3x + 1 &= \pi - 2 + k \cdot 2\pi \\ x &= \frac{1}{3} + k \cdot \frac{2\pi}{3} & x &= \frac{1}{3}(\pi - 3) + k \cdot \frac{2\pi}{3} \end{aligned}$$

Merk op: De periode van de beide oplossingsrijen in dit voorbeeld is $\frac{2\pi}{3}$.

1. Los x op uit:

a. $\cos(3x + 1) = \cos 2$

c. $\sin(x - \frac{4}{5}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

b. $\sin 4x = \sin \frac{4}{5}\pi$

d. $\cos(2x - \frac{1}{4}\pi) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

2. Los x op uit:

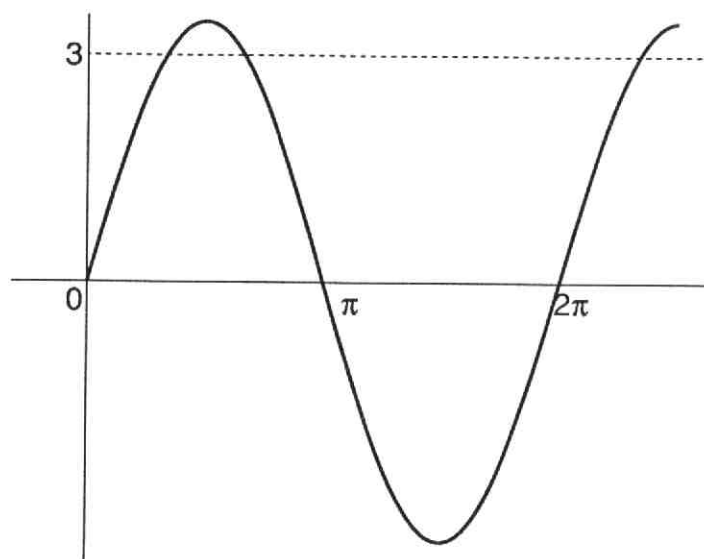
a. $8 \sin x = 4$

c. $2 \sin x - 1 = 3 \sin x$

b. $8 \cos 2x = -4$

d. $5 \cos x = 0$

3. a. Teken in één figuur de grafieken van $f(x) = 2 \sin x + 1$ en $g(x) = 2 - \sin x$
b. Bereken de x -coördinaten van de snijpunten tussen 0 en 2π .
4. a. Teken de grafiek van de functie $y = \cos(x - \frac{1}{4}\pi)$
b. Bereken de y -coördinaten van het snijpunt met de lijn $x = \frac{2}{3}\pi$ in twee decimalen nauwkeurig.
c. Bereken de x -coördinaten van de snijpunten met de lijn $y = \frac{2}{3}$ in twee decimalen nauwkeurig.
5. Hieronder zie je de grafiek van $f(x) = 2\sqrt{3} \sin x$



- a. Voor welke x tussen 0 en 2π geldt: $f(x) < 0$?
b. Voor welke x tussen 0 en 2π geldt: $f(x) > 3$?
6. Los x op uit:
- | | |
|----------------------------------|---|
| a. $\frac{1}{\cos x} = \sqrt{2}$ | c. $\frac{1}{\sin x} = -6$ |
| b. $\frac{1}{\sin 3x} = 2$ | d. $\frac{1}{\cos x + 2} = \frac{2}{3}$ |