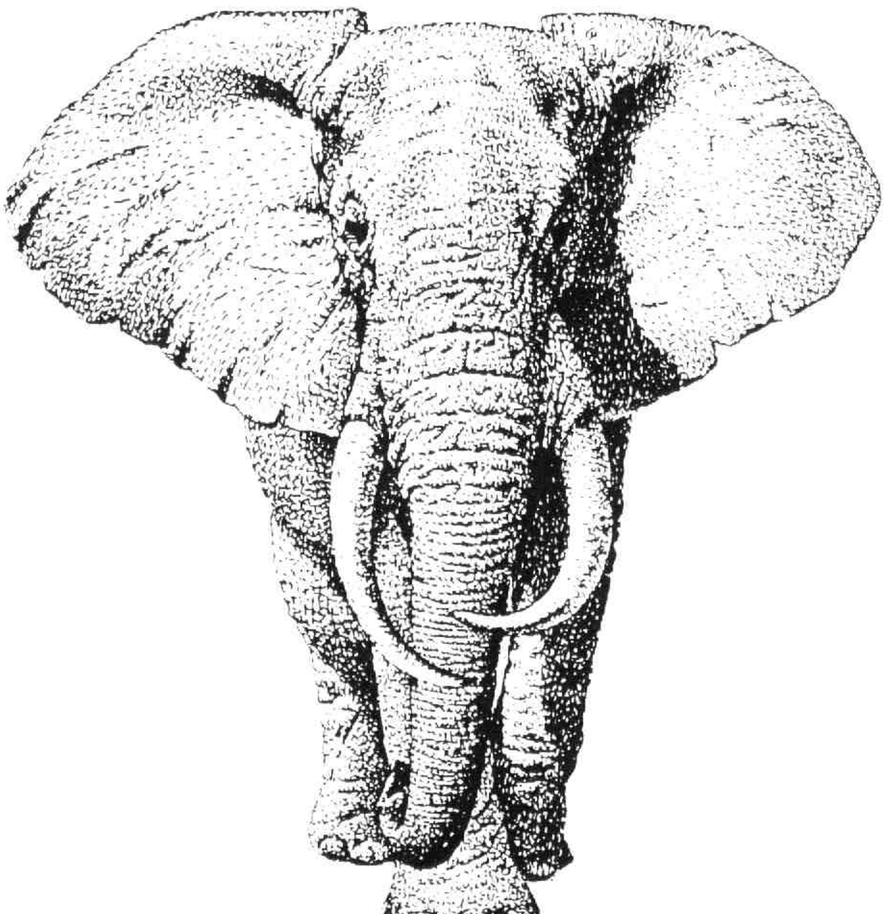
Werken met standaardfuncties

https://hdl.handle.net/1874/10132

WERKEN MET STANDAARDFUNCTIES



Wiskunde B

WERKEN MET STANDAARDFUNCTIES

Hawex -Wiskunde B

WERKEN MET STANDAARDFUNCTIES

Een produktie ten behoeve van het project Hawex.

Ontwerper: Martin Kindt

Met medewerking van: Jan de Jong
Henk van der Kooij
Martin van Reeuwijk
Anton Roodhardt

Vormgeving: Ada Ritzer

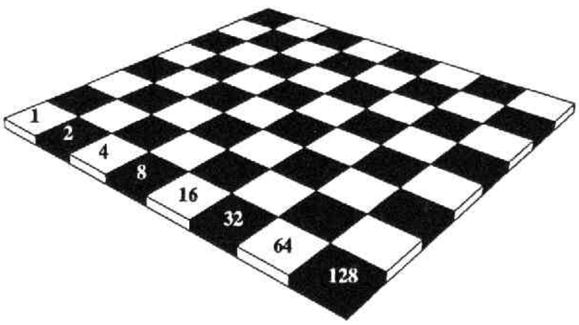
Utrecht, juni 1990

Inhoudsopgave

1 Machten met natuurlijke exponent

Volgens een oud verhaal toonde de uitvinder van het schaakspel zijn vinding aan de koning. Deze was zo verrukt van de schoonheid van het spel, dat hij de man vorstelijk wilde belonen. De uitvinder mocht zelf zijn beloning kiezen.
Dit was wat de slimmerik wenste:

1 graankorrel op het eerste veld;
2 graankorrels op het tweede veld;
4 graankorrels op het derde veld;
8 graankorrels op het vierde veld;
enzovoorts tot en met het vierenzestigste veld.



1. De koning was verbaasd over zoveel bescheidenheid, maar daar kwam hij snel van terug.

   >a Ga na dat het elfde veld ongeveer 1000 graankorrels moet opleveren.

   >b Laat zien dat bij het in vervulling gaan van de wens van de uitvinder, het vierenzestigste veld ruw geschat 9.000.000.000.000.000.000 graankorrels moet opleveren.

De machtige vorst bleek niet bij machte te voldoen aan de wens van de uitvinder.
De overmacht van de steeds terugkerende verdubbeling had hij niet voorzien:

$$1 \xrightarrow{\times 2} 2 \xrightarrow{\times 2} 4 \xrightarrow{\times 2} 8 \xrightarrow{\times 2} 16 \xrightarrow{\times 2} \ldots \xrightarrow{\times 2} 1024 \xrightarrow{\times 2} 2048 \xrightarrow{\times 2} 4096 \xrightarrow{\times 2} \ldots$$

Na bijvoorbeeld 12 stappen is het aantal graankorrels 4096. We noteren $2^{12} = 4096$.
De *macht* 2^{12} *) is een afkorting van $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$
Bij 2^{12} is 2 het *grondtal* en 12 de *exponent.*
Bovenstaande 'ketting' wordt met machten aldus:

$$1 \xrightarrow{\times 2} 2 \xrightarrow{\times 2} 2^2 \xrightarrow{\times 2} 2^3 \xrightarrow{\times 2} 2^4 \xrightarrow{\times 2} \ldots \xrightarrow{\times 2} 2^{10} \xrightarrow{\times 2} 2^{11} \xrightarrow{\times 2} 2^{12} \xrightarrow{\times 2} \ldots$$

Na n stappen in de ketting krijgen we de n^e *macht van 2* ($= 2^n$)
We spreken af dat dit ook geldt voor $n = 1$ en voor $n = 0$.
Dus $2^1 = 2$ (na 1 stap) en $2^0 = 1$ (na 0 stappen).

*) In computertaal wordt wel de notatie 2^12 gebruikt.

In het algemeen kunnen we zo machten definiëren met grondtal a en exponenten 0, 1, 2, 3, 4, ...

$$a^0 = 1$$
$$a^1 = a$$
$$a^2 = a \cdot a$$
$$a^3 = a \cdot a \cdot a$$
enz.

Hieruit volgen de volgende regels voor $m = 0, 1, 2, 3, \ldots$ en $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

I	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	
II	$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$(m \geq n, a \neq 0)$
III	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	
IV	$(ab)^n = a^n \cdot b^n$	

2. >a Hoe leg je aan iemand die regel I niet kent, uit dat: $a^3 \cdot a^4 = a^7$?
   En dat $(a^3)^4 = a^{12}$?

   >b Leg uit dat de afspraak $a^0 = 1$ in overeenstemming is met regel II.

3. Vereenvoudig met behulp van bovenstaande regels:

$$\frac{x^5 \cdot x^3}{x^2 \cdot x^4} = \ldots\ldots \qquad \frac{(y^5)^3}{(y^2)^4} = \ldots\ldots \qquad \frac{(a^2)^5 \cdot a^3}{a^{13}} = \ldots\ldots \qquad \frac{(pq)^5}{p^2q^3} = \ldots\ldots$$

4. Ook:

$$\frac{x^3 \cdot 64x^2}{(2x)^5} = \ldots\ldots \qquad \frac{(3y^2)^4}{81y^3} = \ldots\ldots \qquad \frac{((p^2)^3)^4}{p^2 \cdot p^3 \cdot p^4} = \ldots\ldots \qquad \frac{(a^2b)^3 \cdot b}{a^5b} = \ldots\ldots$$

5. Schrijf als één macht van 2 ; k, m, n zijn natuurlijke getallen.
   voorbeeld: $8 \cdot 2^m = 2^3 \cdot 2^m = 2^{3+m}$

$32 \cdot 2^k = \ldots\ldots$	$2 \cdot 2^n = \ldots\ldots$	$2^m \cdot 2^m = \ldots\ldots$	$8^k = \ldots\ldots$
$1024^m = \ldots\ldots$	$16^n \cdot 32^n = \ldots\ldots$	$2^k \cdot 4^m = \ldots\ldots$	$(128^k)^m = \ldots\ldots$

6. Onderzoek welke van de volgende beweringen waar zijn voor *elk* natuurlijk getal n.

>a $3 \cdot 9^n = 27^n$

>b $3 \cdot 9^n = 3^{2n+1}$

>c $32^n : 64 = (\frac{1}{2})^n$

>d $2^n \cdot 2^n = 2^{2n}$

>e $2^n + 2^n = 2^{n+1}$

>f $3^n + 3^n + 3^n = 3^{n+1}$

Even terug naar de graankorrels op het schaakbord. De uitkomst van 2^{63} (het aantal korrels op het laatste veld) is een 'astronomisch getal'.
Voor zulke grote getallen wordt vaak de *wetenschappelijke notatie* gebruikt.
Als je met je rekenmachientje 2^{63} uitrekent, krijg je op het venster:

`9.22337 18`

Dat betekent: $\underbrace{9{,}22337}_{\text{getal tussen 1 en 10}} \times \underbrace{10^{18}}_{\text{macht van 10}}$

7. De wetenschappelijke notatie wordt bijvoorbeeld gebruikt om afstanden in het heelal aan te geven.
Zoals je misschien weet is de snelheid van het licht 300.000 km/sec.
Men zegt ook: 1 *lichtseconde* = $3 \cdot 10^5$ km
(1 lichtseconde is dus de afstand die het licht aflegt in 1 sec)

>a Ga na dat 1 *lichtminuut* gelijk is aan $1{,}8 \cdot 10^7$ km.

>b Hoeveel km is 1 *lichtjaar*?
Geef je antwoord in wetenschappelijke notatie.

>c De (gemiddelde) afstand van de aarde tot de zon is $1{,}495 \cdot 10^8$ km.
Hoeveel minuten heeft het licht van de zon nodig om ons te bereiken?

>d De zon staat naar aardse begrippen ver van ons weg, naar de maatstaven van het heelal is dat anders.
Vergelijk maar eens met de afstand tot de andere sterren. De dichtsbijzijnde ster (Proxima Centauri) is 4,3 lichtjaar van ons verwijderd.
Hoeveel km is dat?

8. Het totale aantal, door de uitvinder gevraagde, korrels op het schaakbord is:
$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots\ldots + 2^{63}$
Als je hier 1 graankorrel aan toevoegt, wordt het totaal 2^{64} korrels.

>a Toon dit aan. (Gebruik de bewering in 6 >e)

>b 1000 graankorrels wegen ongeveer 30 gram.
De huidige wereldproduktie graan is ruim 1,3 miljard ton per jaar.
Onderzoek of de vraag van de uitvinder de wereldproduktie van nu overtreft. (Reken 1 ton = 1000 kg)

2 Machten met gebroken exponent

In de wiskunde en in toepassingen van de wiskunde komen ook machten met *gebroken* exponenten voor.
Een mooi voorbeeld is een formule uit de sterrenkunde, afkomstig van de astronoom Kepler. Er bestaat in ons zonnestelsel een verband tussen de omlooptijd van een planeet en haar afstand tot de zon.

Dat verband luidt: $T = 0{,}2 \cdot R^{\frac{3}{2}}$

(R = afstand tot de zon in miljoenen km, T = omlooptijd in dagen).

1. >a Raadpleeg opgave 7 van het vorige hoofdstuk en ga na dat voor de aarde geldt: $R = 149{,}5$.

   >b Toets in op je rekenmachine: 149,5 $\boxed{x^y}$ 1,5 en vermenigvuldig de uitkomst met 0,2.
   Is de formule voor de aarde redelijk kloppend?

   >c Saturnus ligt veel verder van de zon dan de aarde, bijna 10 keer zo ver, namelijk $1{,}427 \cdot 10^9$ km.
   Hoeveel dagen is de omlooptijd van Saturnus volgens de formule?
   Hoeveel jaar is dat ongeveer?

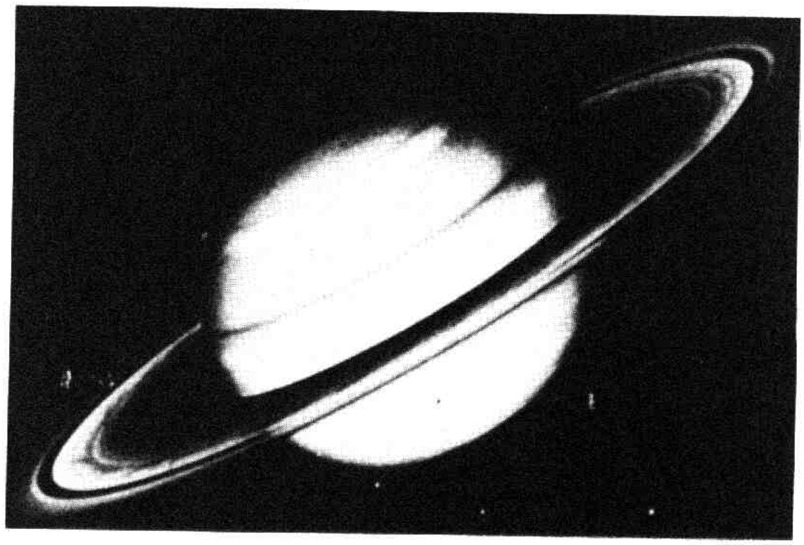


Foto van Saturnus, samengesteld uit opnames van het ruimtevaartuig Voyager 2 op 4 augustus 1981 op een afstand van 21 miljoen kilometer

2. >a Bereken met je rekenmachine: $100^{\frac{1}{2}}$; $64^{\frac{1}{2}}$; $25^{\frac{1}{2}}$.

   >b Wat is volgens jou de betekenis van 'tot de macht $\frac{1}{2}$ verheffen?'

3. >a Bereken (rekenmachine): $1000^{\frac{1}{3}}$; $64^{\frac{1}{3}}$; $125^{\frac{1}{3}}$.

   >b Wat is volgens jou de betekenis van 'tot de macht $\frac{1}{3}$ verheffen'?

Uitgangspunt voor het maken van afspraken over de betekenis van machten met een gebroken exponent, is dat de regels I tot en met IV (zie bladzijde 2) geldig blijven.
Letten we op regel III dan komt er voor $m = \frac{1}{2}$ en $n = 2$:

$$(a^{\frac{1}{2}})^2 = a^{\frac{1}{2} \cdot 2} = a^1 = a$$

Het moet dus zo zijn dat:

$$(a)^{\frac{1}{2}} \xrightarrow{\text{tot de } 2^{\text{e}} \text{ macht}} a$$

Evenzo bijvoorbeeld:

$$(a)^{\frac{1}{5}} \xrightarrow{\text{tot de } 5^{\text{e}} \text{ macht}} a$$

4. > Bereken zonder rekenmachientje:

$$144^{\frac{1}{2}} \ ; \ 32^{\frac{1}{5}} \ ; \ 1000000^{\frac{1}{6}} \ ; \ 64^{\frac{1}{3}}$$

Er moeten ook afspraken gemaakt worden voor machten met exponenten als $\frac{2}{3}$; $\frac{5}{4}$; 2,34 ; enzovoort. Met als uitgangspunt regel III spreken we af (voor $a \geq 0$):

$$a^{\frac{1}{n}} \xrightarrow{\text{tot de } n^{\text{e}} \text{ macht}} a \quad \text{ofwel} \quad \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a$$

$$a^{\frac{2}{n}} \xrightarrow{\text{tot de } n^{\text{e}} \text{ macht}} a^2 \quad \text{ofwel} \quad \left(a^{\frac{2}{n}}\right)^n = a^2$$

$$a^{\frac{3}{n}} \xrightarrow{\text{tot de } n^{\text{e}} \text{ macht}} a^3 \quad \text{ofwel} \quad \left(a^{\frac{3}{n}}\right)^n = a^3$$

enzovoort

5. >a Bereken zonder rekenmachientje:

$$64^{\frac{1}{2}} \ ; \ 64^{\frac{1}{3}} \ ; \ 64^{\frac{1}{6}} \ ; \ 64^{\frac{5}{6}} \ ; \ 64000^{\frac{1}{3}}$$

>b Onderzoek nu of geldt:

(1) $64^{\frac{1}{2}} \cdot 64^{\frac{1}{3}} = 64^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}$ (3) $64^{\frac{1}{2}} : 64^{\frac{1}{3}} = 64^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}$

(2) $(64^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}} = 64^{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}$ (4) $(64 \cdot 1000)^{\frac{1}{3}} = 64^{\frac{1}{3}} \cdot 1000^{\frac{1}{3}}$

Er kan worden bewezen dat de regels I t/m IV geldig blijven bij boven genoemde afspraken van machten met gebroken exponenten. Die regels kunnen handig worden gebruikt bij het berekenen van machten.

> Voorbeeld:
>
> $$125^{\frac{2}{3}} = (5^3)^{\frac{2}{3}} = 5^{3 \cdot \frac{2}{3}} = 5^2 = 25$$

6. > Bereken zonder rekenmachientje:

$27^{\frac{2}{3}}$; $10000^{\frac{3}{4}}$; $625^{1\frac{1}{4}}$; $32^{0,6}$; $128^{\frac{3}{7}}$

7. > Vereenvoudig tot één macht:

$$\frac{(a^4)^{\frac{1}{2}}}{(a^{\frac{1}{4}})^5} \; ; \; \frac{(b^2 \cdot b^{\frac{1}{3}})^3}{(b^{\frac{1}{2}})^6} \; ; \; \frac{(c^{12})^{\frac{2}{3}}}{c^{\frac{1}{2}} \cdot c^{\frac{1}{3}} \cdot c^{\frac{1}{6}}} \; ; \; \frac{(d^{\frac{4}{3}})^{\frac{3}{2}}}{(d^{\frac{2}{5}})^{\frac{5}{2}}} \, .$$

In het voorgaande heb je ontdekt dat $a^{\frac{1}{2}}$ hetzelfde is als $\sqrt{a}$.

In woorden: $a^{\frac{1}{2}}$ is de (tweede-machts)wortel uit a.

Evenzo wordt $a^{\frac{1}{3}}$ de derde-machtswortel uit a genoemd. Notatie: $a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$.
In het algemeen geldt voor $a \geq 0$

> $a^{\frac{1}{n}}$ is de n^e machtswortel uit a ; $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ *)

8. Wortels kun je dus schrijven als machten met breuk-exponenten.

Voorbeeld: $\sqrt{x^3} = (x^3)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{2}}$

$\sqrt[3]{y^4} = (y^4)^{\frac{1}{3}} = y^{\frac{4}{3}}$

> Schrijf als macht met breuk-exponent:

$\sqrt{a}$; $\sqrt[3]{b^2}$; $\sqrt[4]{c^5}$; $\sqrt{\sqrt{d}}$

9. > Bereken zonder rekenmachientje en gebruik de wetenschappelijke notatie voor je antwoord:

> $\sqrt{1{,}44 \cdot 10^{16}}$; $\sqrt[3]{8 \cdot 10^{18}}$; $(8 \cdot 10^{18})^{\frac{2}{3}}$; $\sqrt[4]{(625 \cdot 10^{12})^3}$

10. Een regel als $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ is een bijzonder geval van regel III voor het rekenen met machten. Immers: $(ab)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{2}}$.
Verklaar de volgende regels voor het rekenen met wortels uit de regels I tot en met IV:

>a $\sqrt[3]{xy} = \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y}$ >b $\sqrt[3]{\sqrt[4]{p}} = \sqrt[12]{p}$

>c $\sqrt{ab^2} = b\sqrt{a}$ >d $\sqrt[4]{c^5} = c\sqrt[4]{c}$

*) In het geval $n = 2$ schrijft men meestal $\sqrt{}$ (dus niet $\sqrt[2]{}$)

11. >a Verklaar dat voor elke $x \geq 0$ geldt: $x^{1\frac{1}{2}} = x\sqrt{x}$

>b Teken op het interval [0,4] in één figuur de grafieken van $y = x$, $y = x^2$ en $y = x^{1\frac{1}{2}}$.

12. > Schrijf als macht van x met een breuk-exponent:

$x^2\sqrt{x}$; $x \cdot \sqrt[3]{x}$; $\sqrt[3]{x^9}$; $\sqrt{x\sqrt{x}}$

13. >a Teken de grafiek van $y = x^{\frac{1}{2}}$ op het interval [0,9].

>b Vergelijk de grafiek met die van $y = x^2$ op het interval [0,3]. Conclusie?

>c Los x op uit: $x^{\frac{1}{2}} > 2$

Een voorbeeld van een vergelijking waarin machten met gebroken exponenten staan:

$$x^{\frac{1}{2}} = 2x^{\frac{1}{3}}$$

Oplossing:
breng zowel linker als rechterlid tot de macht 6 om de breuk-exponenten weg te werken:

$$(x^{\frac{1}{2}})^6 = (2x^{\frac{1}{3}})^6$$

$$x^3 = 64x^2$$

$$x = 0 \qquad x = 64$$

14. Los de volgende vergelijkingen op voor $x \geq 0$.

>a $x^{\frac{2}{3}} = 4$

>b $x^{1\frac{1}{2}} = 4$

>c $x^{1\frac{1}{2}} = 4x$

>d $x^{1\frac{1}{2}} = 4x^2$

>e $x^2 = 8\sqrt{x}$

>f $x\sqrt{x} = 1$

>g $\frac{x}{100} = \sqrt[3]{x}$

>h $\sqrt[4]{x^3} = \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{x^2}$

15. Van een kubus is de ribbe r, de totale oppervlakte O en de inhoud V.

>a Druk O en V uit in r.

>b Bewijs: $O = 6 \cdot V^{\frac{2}{3}}$.

>c Van een kubus is de oppervlakte 42 cm^2.
Bereken het volume (in één decimaal nauwkeurig).

16. Het warmteverlies van een dier is afhankelijk van de huidoppervlakte. Biologen zijn daarom geïnteresseerd in het verband tussen de huidoppervlakte H (in m^2) en het lichaamsgewicht G (in kg) voor de verschillende diersoorten.

Dat verband wordt gegeven door de formule: $H = c \cdot G^{\frac{2}{3}}$
De constante c is per diersoort verschillend en afhankelijk van de vorm van het dier.
Een paar voorbeelden:

koe: $c = 0{,}09$
aap: $c = 0{,}12$
egel: $c = 0{,}075$
muis: $c = 0{,}09$

Voor de koe en de muis geldt bij benadering dezelfde formule: $H = 0{,}09\, G^{\frac{2}{3}}$
Een koe weegt gemiddeld 500 kg en een muis zo'n 0,05 kg.

>a Bereken de gemiddelde huidoppervlakte van de koe en de muis.

>b Hoe verhouden zich de lichaamsgewichten van koe en muis? En hoe de huidoppervlakten?

>c Grote dieren kunnen gemakkelijker extreme kou verdragen dan kleine dieren. Hoe verklaar je deze bewering?

17. Voor de mens heeft een zekere Dubois een formule opgesteld die het verband weergeeft tussen huidoppervlakte, lichaamsgewicht en lichaamslengte. Die formule luidt:

$$H = 0{,}007 \cdot G^{0{,}425} \cdot L^{0{,}725}$$

Hierbij geldt:

H = huidoppervlakte in m^2
G = gewicht in kg.
L = lengte in cm.

>a Bereken volgens deze formule je eigen huidoppervlakte.

>b Iemand heeft een huidoppervlakte van 2 m^2 en is 80 kg zwaar. Hoe lang is die persoon?

>c Een manier om de exponenten 0,425 en 0,725 in de formule te controleren is de volgende:

Het is aannemelijk dat H evenredig is met L^2 en dat G evenredig is met L^3.
(Dus: $H = c \cdot L^2$ en $G = d \cdot L^3$)
Vul deze uitdrukkingen in de formule in en controleer of de exponenten van de machten van L in linker en rechterlid hetzelfde zijn.

3 Machten met negatieve exponent

In hoofdstuk 2 heb je gezien hoe er betekenis kan worden gegeven aan machten met een gebroken exponent. In dit hoofdstuk willen we ook machten met *negatieve* exponent introduceren. Uitgangspunt daarbij is weer dat de machtseigenschappen I tot en met IV (zie blz. 2) geldig blijven.

1. Kijk eerst eens wat je rekenmachientje er van zegt.
   >a Bereken met behulp van de x^y-knop:
   10^{-1} ; 5^{-1} ; 4^{-1} ; $0{,}5^{-1}$.

   >b Wat, denk je, is de betekenis van a^{-1}?

   >b Bereken ook: 10^{-2} ; 5^{-2} ; 4^{-2} ; $0{,}5^{-2}$.

   >c Wat zal de betekenis van a^{-2} zijn?

2. Wat je in opgave 1 ontdekt hebt, is in overeenstemming met eigenschap I.
   Volgens die eigenschap zou moeten gelden:

$$a^{-1} \cdot a^{1} = a^{-1+1}$$
$$a^{-2} \cdot a^{2} = a^{-2+2}$$
$$a^{-3} \cdot a^{3} = a^{-3+3}$$

   enzovoort.

   >a Hoe kun je hieruit de betekenis van a^{-1}, a^{-2}, a^{-3} , enz. afleiden?

   >b Waarom moet a voldoen aan de beperking: $a \neq 0$?

3. Bekijk eigenschap II: $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
   Kies $m = 5$ en $n = 8$.

   > Welke conclusie kun je hieruit trekken?
   Is dat in overeenstemming met wat je in de vorige opgave hebt ontdekt?

4. Bekijk eigenschap III: $(a^m)^n = a^{mn}$
   Kies $m = -2$ en $n = -1$.

   > Laat zien dat het resultaat klopt met wat je in opgave 2 over de betekenis van 'tot de macht -2' en 'tot de macht -1' hebt ontdekt.

Afspraak:
voor $a \neq 0$ geldt:

a^{-1} is het omgekeerde van a ofwel $a^{-1} = \frac{1}{a}$
a^{-2} is het omgekeerde van a^2 ofwel $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$
a^{-3} is het omgekeerde van a^3 ofwel $a^{-3} = \frac{1}{a^3}$
enz.

Door deze afspraak blijven de afspraken I tot en met IV geldig.

5. Bekijk onderstaande ketting:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
\ldots & \xrightarrow{\times 3} & \ldots & \xrightarrow{\times 3} & 1 & \xrightarrow{\times 3} & 3 & \xrightarrow{\times 3} & 9 & \xrightarrow{\times 3} & 27 & \xrightarrow{\times 3} & 81 & \xrightarrow{\times 3} & 243 \\
| & & | & & | & & | & & | & & | & & | & & | \\
3^{-2} & & 3^{-1} & & 3^{0} & & 3^{1} & & 3^{2} & & 3^{3} & & 3^{4} & & 3^{5}
\end{array}$$

> Vul passende breuken in: $3^{-1} = \ldots$; $3^{-2} = \ldots$; $3^{-3} = \ldots$; $3^{-4} = \ldots$; $3^{-5} = \ldots$

6. >a Bereken eerst zonder rekenmachientje en controleer daarna je antwoord: 5^{-3} ; 10^{-3} ; 2^{-5} ; 2^{-10}.

>b Vul in: $\frac{1}{64} = 2^{\cdots}$; $\frac{1}{625} = 5^{\cdots}$; $\frac{1}{121} = 11^{\cdots}$; $\frac{2}{3} = 1{,}5^{\cdots}$

>c Vul in: $0{,}0001 = 10^{\cdots}$; $0{,}125 = 2^{\cdots}$; $0{,}04 = 5^{\cdots}$; $0{,}008 = 5^{\cdots}$

7. > Vereenvoudig:

$$\left(\frac{a^2b}{ab^2}\right)^{-1} \quad ; \quad \frac{(x^2y)^{-1}}{(xy^2)^{-2}} \quad ; \quad \frac{(c^{-1}d)^{-3}}{c^2d^{-4}} \quad ; \quad \frac{((p^{-1})^{-2})^{-3}}{p^{-1}\cdot p^{-2}\cdot p^{-3}}$$

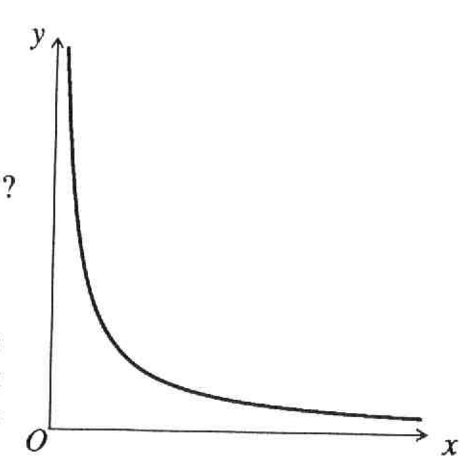
8. Hiernaast zie je de grafiek van $y = x^{-1}$ voor $x > 0$.

>a Voor welke $x \neq 0$ geldt: $x^{-1} > 100$?

>b Voor welke $x \neq 0$ geldt: $0 < x^{-1} < 0{,}0001$?

De x-as en de y-as zijn de zogenaamde *asymptoten* van de grafiek van $y = \frac{1}{x}$.

De grafiek benadert de x-as (horizontale asymptoot) als x heel groot wordt en benadert de y-as (vertikale asymptoot) als x heel dicht bij 0 komt.



9. > Teken de grafiek van $y = x^{-2}$ voor $x > 0$.
Welke asymptoten heeft die grafiek?

Als je 3^{-25} uitrekent op je rekenmachientje komt er:

$\boxed{1.18023 \quad -12}$

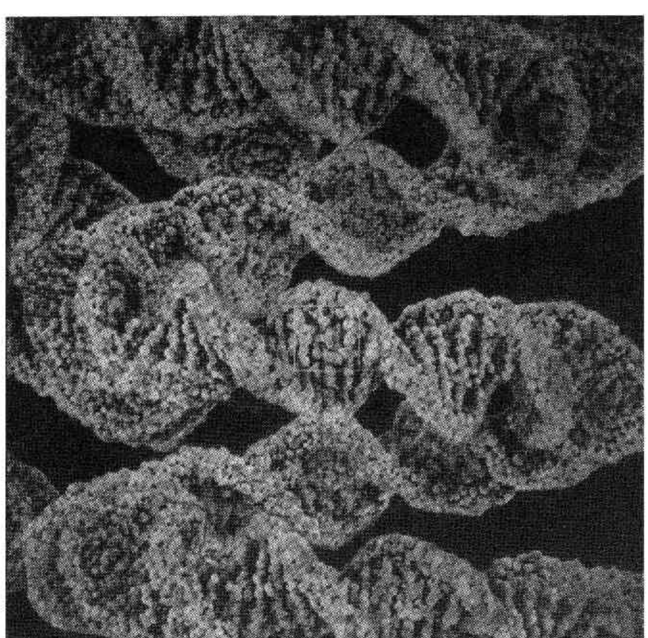
Dit is weer een voorbeeld van de wetenschappelijke notatie en betekent:

$$\underbrace{1{,}18032}_{\boxed{\text{getal tussen 1 en 10}}} \times \underbrace{10^{-12}}_{\boxed{\text{macht van 10}}}$$

Deze notatie kan op deze wijze worden gebruikt om getallen die dicht bij 0 liggen overzichtelijk te noteren.
Nog een voorbeeld: $0{,}000000000183 = 1{,}83 \times 10^{-10}$

10. De massa van één elektron $= 9{,}1 \cdot 10^{-28}$ gram.
Een waterstofatoom heeft een massa die ongeveer 200 keer zo groot is als de massa van een elektron.
> Bereken de massa van een waterstofatoom.
Geef je uitkomst in wetenschappelijke notatie.

11. De zijden van onderstaand vierkant hebben in werkelijkheid een lengte van 10^{-8} meter (= 100 angström).
> Hoeveel cm^2 is de oppervlakte van het vierkant in werkelijkheid?



In deze close-up zien we het DNA als een lange gedraaide ladder, de dubbele spiraal.
De individualiteit van het organisme ligt vast in de volgorde van de verschillende sporten.

Tot nu toe zijn de negatieve exponenten geheel geweest.
Uit de evenredigheidseigenschap I volgt onmiddellijk hoe je ook machten met negatief-gebroken exponent zinvol kunt definiëren.

Bijvoorbeeld: $a^{-\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^0 = 1$, dus $a^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{a^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{a}}$

evenzo: $a^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{a^{\frac{2}{3}}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$

Om problemen met wortels te voorkomen stellen we voor het grondtal de beperkende voorwaarde: $a > 0$
Voor de gedefinieerde machten gelden weer de eigenschappen I tot en met IV.

12. > Vereenvoudig

$$\frac{(a^{-\frac{1}{3}})^2 \cdot a}{a^{\frac{1}{3}}} \quad ; \quad \frac{(x^{-3}y^2)^{-\frac{1}{2}}}{x\sqrt{x}} \quad ; \quad \left(\frac{p\sqrt{q}}{q\sqrt{p}}\right)^{-2} \quad ; \quad \frac{u^{-\frac{3}{5}}v^{\frac{1}{5}}}{(u^2v)^{-\frac{4}{5}}}$$

13. Een vorm als $\dfrac{x^2}{\sqrt[3]{x}}$ kan worden geschreven als één macht met x als grondtal.

    Dat gaat zo: $\dfrac{x^2}{\sqrt[3]{x}} = x^2 \cdot x^{-\frac{1}{3}} = x^{1\frac{2}{3}}$

    Herleid elk van de volgende vormen tot één macht met x als grondtal:

    $$\frac{1}{x} \cdot \sqrt{x} \; ; \; x\sqrt{x^5} \; ; \; \sqrt{\frac{1}{x^3}} \; ; \; \frac{1}{x^2 \cdot \sqrt[3]{x}} \; ; \; \frac{\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[4]{x}}{x} \; ; \; \sqrt{x^3\sqrt{x}}$$

14. De (normale) hartslag S van een rustend zoogdier is afhankelijk van het lichaamsgewicht G van het dier.
    Die afhankelijkheid wordt uitgedrukt door een formule van de gedaante:

    $S = k \cdot G^{-\frac{1}{4}}$ (S = aantal slagen per minuut, G = gewicht in kg)
    De bioloog Stahl vond voor de constante k de waarde 241.

    >a Het gewicht van een volwassen olifant is 4000 kg.
    Hoeveel slagen per minuut maakt het hart van een slapende volwassen olifant.

    >b Hoe veel weegt een zoogdier dat in rustende toestand een 2 keer zo snelle hartslag heeft als de in >a bedoelde olifant?

Terugblik

In de hoofdstukken 1, 2 en 3 is de betekenis van x^p (p geheel of gebroken, positief of negatief) uit de doeken gedaan.
Voorbeelden:

machten van x:

$$x^2 = x \cdot x$$
$$x^3 = x \cdot x \cdot x$$
$$\cdots\cdots$$
$$x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$$
$$x^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{x^3}$$
$$\cdots\cdots$$
$$x^{-1} = \frac{1}{x}$$
$$x^{-2} = \frac{1}{x^2}$$

De belangrijkste eigenschappen voor het rekenen met machten, zijn:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{I} & x^p \cdot x^q = x^{p+q} \\ \text{II} & x^p : x^q = x^{p-q} \\ \text{III} & (x^p)^q = x^{p \cdot q} \\ \text{IV} & (xy)^p = x^p y^p \end{array}}$$

Deze eigenschappen zijn in elk geval geldig voor positieve *grondtallen* x en y. Als de *exponenten* p en q geheel zijn, mogen x en y ook negatief zijn.

Opgaven

>a Schrijf als macht met 2 als grondtal:
$2\sqrt{2}$; 64^{-1} ; $\frac{1}{2}\sqrt{2}$; $\sqrt[3]{128}$; $\frac{1}{8\sqrt{2}}$; 1

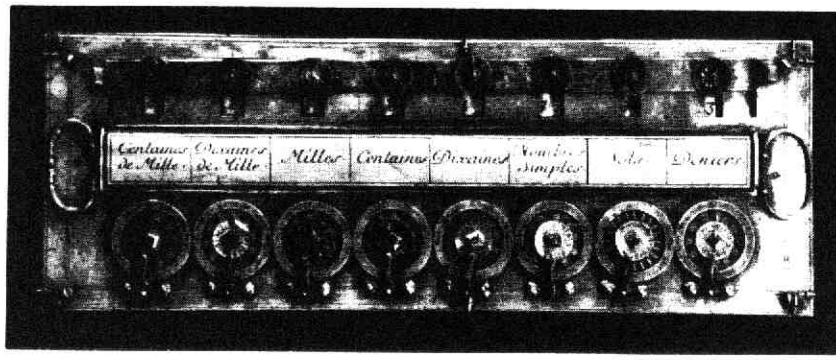
>b Los x op uit:
$x^{-1} = 3$; $x^{1\frac{1}{2}} = 1000$; $x^{-\frac{1}{2}} = 0{,}2$; $x^{-2} = 0{,}2x^{-1}$; $x^{-2} = (0{,}2x)^{-1}$

Op verschillende hoogten op een seintoren is de windsnelheid gemeten. Het verband tussen de windsnelheid W (in m/sec) en de hoogte h (in m) wordt voor $2 \le h \le 250$ gegeven door de formule: $W = 2{,}9 \cdot h^{0{,}2}$

>c Bereken de windsnelheid op een hoogte van 32 meter.

>d Op welke hoogte is de windsnelheid het dubbele van de windsnelheid op het laagste meetpunt (2 meter hoog)?

4 Kettingfuncties



DE EERSTE MECHANISCHE COMPUTER was waarschijnlijk deze optelmachine, ontworpen in 1642 door de Fransman Blaise Pascal.

Op een zakrekenmachientje gebruik je voor een beetje berekening al gauw een serie van bewerkingen.
Voorbeeld:

$$\underset{\text{IN}}{\overset{\dots}{\uparrow}} \quad \boxed{x^2} \to \boxed{+} \to \boxed{5} \to \boxed{=} \quad \underset{\text{UIT}}{\overset{\dots}{\uparrow}}$$

Met IN (of *invoer*) wordt bedoeld: het ingevoerde getal.
Met UIT (of *uitvoer*) wordt bedoeld: de uitkomst op het venster.

1. >a Voer een zelf gekozen getal in en toets de hierboven genoteerde knoppen in de juiste volgorde in. Schrijf je uitkomst op.

   >b Kies hetzelfde invoergetal als bij >a, maar toets nu in:

   $$\boxed{+} \to \boxed{5} \to \boxed{=} \to \boxed{x^2}$$

   Hoewel het om dezelfde bewerkingen gaat als in >a (namelijk '5 bijtellen' en 'kwadrateren') krijg je hoogstwaarschijnlijk een andere uitkomst.
   Hoe kun je dat verklaren?

   >c Het is mogelijk om één getal te vinden, dat bij intoetsen van de eerste serie knoppen dezelfde uitkomst geeft als bij de tweede serie.
   In schema:

   $$\text{IN} \begin{array}{l} \nearrow \; \boxed{x^2} \to \boxed{+} \to \boxed{5} \to \boxed{=} \; \searrow \\ \searrow \; \boxed{+} \to \boxed{5} \to \boxed{=} \to \boxed{x^2} \; \nearrow \end{array} \text{UIT}$$

   Zoek uit welk getal dat is.

2. Bekijk de twee series A en B.

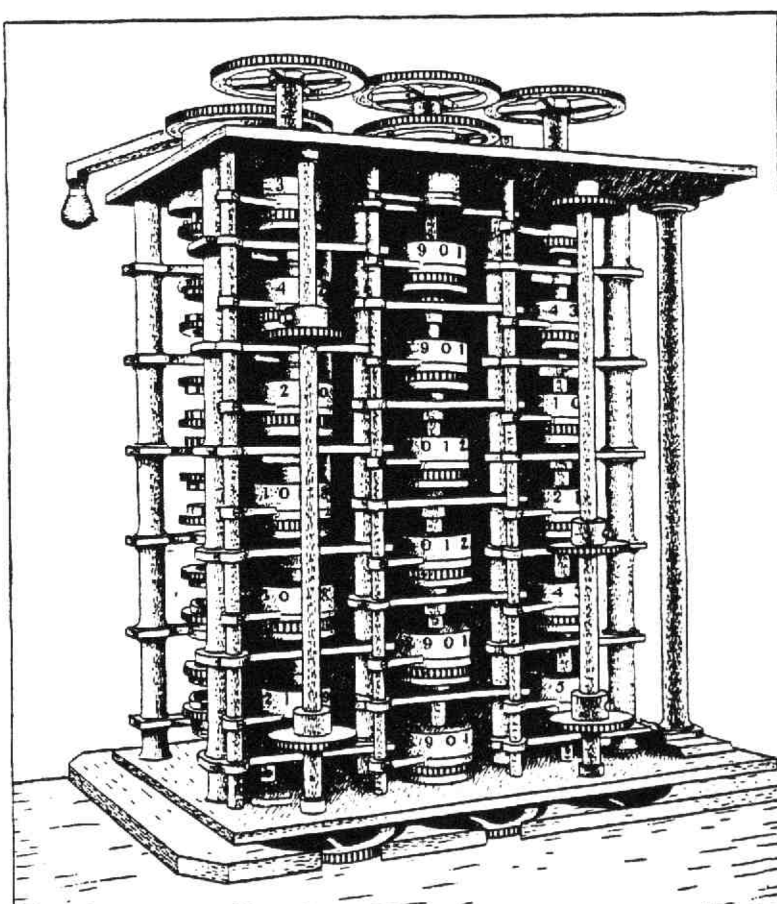
A: $\boxed{+} \rightarrow \boxed{4} \rightarrow \boxed{=} \rightarrow \boxed{1/x}$

B: $\boxed{1/x} \rightarrow \boxed{+} \rightarrow \boxed{4} \rightarrow \boxed{=}$

>a Bereken de uitvoer van A bij achtereenvolgens de invoer: 1, -1, 3, -3.

>b Dezelfde vraag voor B.

>c Stel je voor dat je $\frac{1}{x+4}$ moet uitrekenen op je rekenmachine voor diverse waarden van x.
Welke van de twee series A of B zul je gebruiken?



DE VERSCHIL MACHINE, ontworpen in 1820 door de Engelse wiskundige Charles Babbage, was de eerste moderne mathematische machine. Het apparaat heeft nooit gewerkt omdat men in die tijd de kleine onderdelen van de machine niet kon maken.

3. Bekijk de serie S.

S: $\boxed{x^2} \to \boxed{+} \to \boxed{9} \to \boxed{=} \to \boxed{\sqrt{\ }}$ *) $\to \boxed{-} \to \boxed{5} \to \boxed{=}$

>a Voer in het getal 0. Welke uitkomst krijg je?

>b Welk getal moet je invoeren om 0 als uitkomst te krijgen? (Er zijn twee mogelijkheden!)

4. >a Stel je voor dat je $\sqrt{x^2-13} + 3$ op je rekenmachine wilt uitrekenen voor diverse waarden van x.
Welke serie toetsen gebruik je? (Denk aan de volgorde.)

>b Dezelfde opdracht voor: $(\sqrt{x+3} - 13)^2$
Welk getal moet je invoeren om de uitkomst 0 te krijgen?

Korte terugblik.
In de opgaven 1 tot en met 4 heb je voorbeelden gezien van zogenaamde *kettingberekeningen.*
Zo'n kettingberekening kan worden genoteerd door de toetsen van de rekenmachine in de juiste volgorde op te schrijven.
Een andere notatie is een schema met pijlen.
Voor de serie S van opgave 3 komt er:

$$x \xrightarrow[\text{kwadrateren}]{} x^2 \xrightarrow[\text{9 bijtellen}]{} x^2+9 \xrightarrow[\text{worteltrekken}]{} \sqrt{x^2+9} \xrightarrow[\text{5 aftrekken}]{} \sqrt{x^2+9} - 5$$

Men spreekt in dit geval ook van een *ketting* van functies of kortweg een *kettingfunctie.*

De kettingfunctie $x \to \sqrt{x^2+9} - 5$ bestaat uit vier 'schakels'; die vier schakels zijn voorbeelden van zogenaamde *standaardfuncties* (zie bladzijde 17).

5. >a Schrijf de kettingfunctie van opgave 1 met de pijlnotatie.

>b Welke kettingfunctie krijg je als je in deze volgorde intoetst:
5 aftrekken, worteltrekken, 9 bijtellen, kwadrateren.

>c Dezelfde vraag voor:
4 optellen, het omgekeerde nemen, 2 aftrekken, het omgekeerde nemen.

---

*) Op sommige rekenmachientjes moet je $\boxed{\text{INV}}$ $\boxed{x^2}$ intoetsen voor $\boxed{\sqrt{\ }}$

Een voorlopige lijst van *standaardfuncties*:

pijlnotatie	rekenmachientje
$x \to x+4$	IN $\boxed{+}$—$\boxed{4}$—$\boxed{=}$ UIT
$x \to x-4$	IN $\boxed{-}$—$\boxed{4}$—$\boxed{=}$ UIT
$x \to 4x$	IN $\boxed{\times}$—$\boxed{4}$—$\boxed{=}$ UIT
$x \to -x$	IN $\boxed{+/-}$ UIT of IN $\boxed{\text{CHS}}$ UIT
$x \to x^2$	IN $\boxed{x^2}$ UIT
$x \to \frac{1}{x}$	IN $\boxed{1/x}$ UIT
$x \to \sqrt{x}$	IN $\boxed{\sqrt{\ }}$ UIT of IN $\boxed{\text{INV}}$ $\boxed{x^2}$ UIT
$x \to x^4$	IN $\boxed{x^y}$ $\boxed{4}$ $\boxed{=}$ UIT
$x \to \sin x$	IN $\boxed{\sin}$ UIT (stand rad)
$x \to \cos x$	IN $\boxed{\cos}$ UIT (stand rad)

In de lijst is op vier plaatsen het getal 4 gebruikt. Natuurlijk mag je daar elk ander getal (geheel of gebroken, positief of negatief) voor kiezen.

6. Een vuistregel die bij het berekenen van de remweg van een auto wel gebruikt wordt is:
   - neem de snelheid in km/uur en deel dit getal door 10;
   - kwadrateer de uitkomst;
   - vermenigvuldig tenslotte met $\frac{3}{4}$ en je krijgt de remweg in meters.

   >a Hoeveel meter is de remweg bij een snelheid van 120 km/u?

   >b Beschrijf de vuistregel als kettingfunctie.

   >c Bij een ongeluk binnen de bebouwde kom werd een remspoor van 48 m geconstateerd. Met welke snelheid had de automobilist gereden?

Het aan elkaar schakelen van een aantal standaardfuncties levert een kettingfunctie op. Omgekeerd kunnen bij een gegeven kettingfunctie de 'schakels' worden teruggevonden.

Voorbeeld:

De functie $x \rightarrow (x^3 + 4)^2$
kan als volgt worden opgebouwd met standaardfuncties:

$$x \xrightarrow[\text{tot de 3e macht verheffen}]{} x^3 \xrightarrow[\text{4 bijtellen}]{} x^3 + 4 \xrightarrow[\text{kwadrateren}]{} (x^3 + 4)^2$$

7. Schrijf als ketting van standaardfuncties:

>a $x \rightarrow \sin(x-1) + 2$

>b $x \rightarrow (\sin x + 1)^{0,75}$

>c $x \rightarrow \dfrac{1}{x-5}$

>d $x \rightarrow \dfrac{1}{2 + \frac{1}{x}}$

>e $x \rightarrow 3 + \sqrt{\dfrac{1}{x}}$

>f $x \rightarrow 3 - \sqrt{\dfrac{1}{x}}$

>g $x \rightarrow \cos^3 x + 1$

>h $x \rightarrow \cos 3(x + 1)$

8. De ketting: $$x \xrightarrow[\text{kwadrateren}]{} x^2 \xrightarrow[\text{omkeren}]{} \frac{1}{x^2} \xrightarrow[\text{3e machtswortel trekken}]{} \sqrt[3]{\frac{1}{x^2}}$$

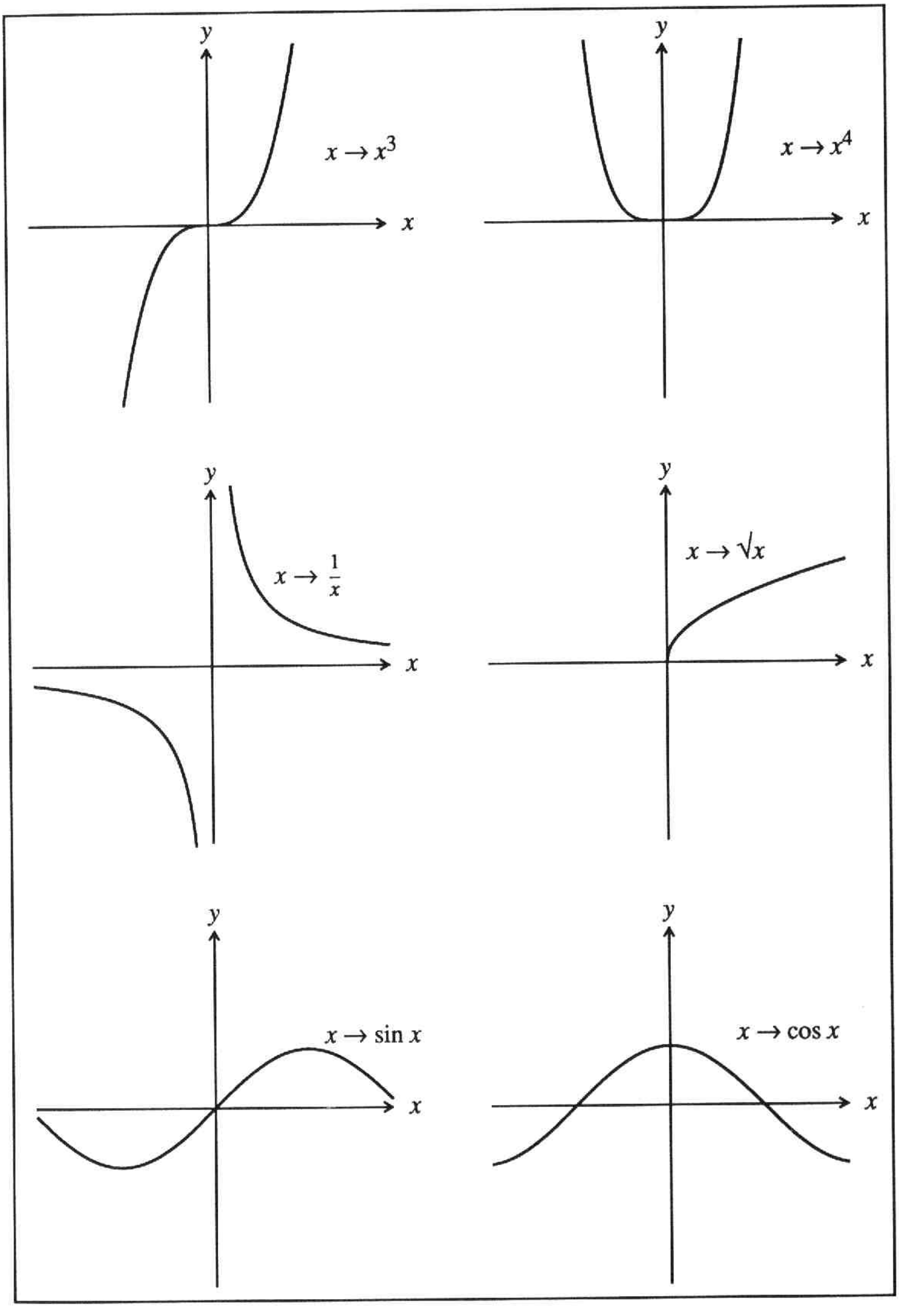
kun je als één standaardfunctie opvatten.

\> Welke?

Bepaalde vragen over het gedrag van kettingfuncties kun je beantwoorden met behulp van de standaardfuncties waarmee de ketting is opgebouwd. Om iets te kunnen zeggen over het gedrag van standaardfuncties is het goed de grafiek te raadplegen. Op blz. 19 zijn van enige standaardfuncties de grafieken getekend.

9. >a De grafiek van $y = \dfrac{1}{x}$ heeft twee asymptoten.
Welke zijn dat?

>b Je zou kunnen denken dat de grafiek van $x \rightarrow \sqrt{x}$ een horizontale asymptoot heeft. Leg uit dat dit niet het geval is.


y
x
$x \to x^3$
$x \to x^4$
$x \to \frac{1}{x}$
$x \to \sqrt{x}$
$x \to \sin x$
$x \to \cos x$

Een type vraag die je gemakkelijk kunt beantwoorden uit de grafiek is: 'welke functiewaarden worden bereikt als x varieert van a tot b' of 'wat is het *bereik* van de functie als x het interval $[a,b]$ doorloopt'.
Zo kun je uit de eerste twee grafieken van blz. 19 aflezen:
- als x het interval [-1,2] doorloopt, dan bereikt x^3 het interval [-1,8]
- als x het interval [-1,2] doorloopt, dan bereikt x^4 het interval [0,16].

10. Raadpleeg bij de volgende vragen een grafiek!
Welk interval bereikt:

>a $\frac{1}{x}$ als x het interval [2,4] doorloopt?

>b $\sqrt{x}$ als x het interval [0,100] doorloopt?

>c $\sin x$ als x het interval $[\frac{1}{6}\pi , \frac{5}{6}\pi]$ doorloopt?

>d x^2 als x het interval [-5,5] doorloopt?

>e x^3 als x het interval [-5,5] doorloopt?

>f $\cos x$ als x het interval $[0,2\pi]$ doorloopt?

Vragen van bovenstaand type kunnen natuurlijk ook worden gesteld bij kettingfuncties.

Voorbeeld:

Welk interval bereikt $4 \sin^2 x + 3$ als x het interval $[0,2\pi]$ doorloopt?

Oplossing:
Schrijf als ketting van standaardfuncties en bepaal stap voor stap het bereik.

$$x \xrightarrow{\text{sin}} \sin x \xrightarrow{\text{kwadraat}} \sin^2 x \xrightarrow{\text{maal 4}} 4\sin^2 x \xrightarrow{\text{plus 3}} 4\sin^2 x + 3$$

Als x het interval $[0,2\pi]$ doorloopt, dan bereikt $\sin x$ het interval [-1,1], dan bereikt $\sin^2 x$ het interval [0,1], dan bereikt $4 \sin^2 x$ het interval [0,4], dan bereikt $4 \sin^2 x + 3$ het interval [3,7]

Schematisch:

$$[0,2\pi] \xrightarrow{\text{sin}} [-1,1] \xrightarrow{\text{kwadraat}} [0,1] \xrightarrow{\text{maal 4}} [0,4] \xrightarrow{\text{plus 3}} [3,7]$$

Elke stap kan via de grafiek van een standaardfunctie worden gecontroleerd!

11. Welk interval bereikt

>a $\frac{1}{\cos x + 2}$ als x het interval $[0,2\pi]$ doorloopt?

>b $\frac{1}{x^2 + 2}$ als x het interval $[-1,2]$ doorloopt?

>c $\sqrt{8 \sin x + 17}$ als x het interval $[0,2\pi]$ doorloopt?

>d $\sqrt{8x^5 + 17}$ als x het interval $[-1,1]$ doorloopt?

>e $\frac{1}{1 + \frac{1}{x+1}}$ als x interval $[0,1]$ doorloopt?

>f $(x^3 - 2)^4 + 1000$ als x het interval $[-2,2]$ doorloopt?

12. Gegeven de functie $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$

>a Voor welke waarden van x heeft $\sqrt{25 - x^2}$ betekenis?

>b Bepaal de maximale en de minimale waarde die $\sqrt{25 - x^2}$ kan bereiken (Anders gevraagd: bepaal het maximum en het minimum van f).

13. Gegeven de functie $f(x) = 5 \cos^2 x + 2$ met domein $[0,2\pi]$.

> Bepaal de extreme waarden (maximum en minimum) van f.

Het ontleden van een kettingfunctie in standaardfuncties kan ook helpen bij het oplossen van vergelijkingen.

Voorbeeld 1:

Los op: $(x^2 + 4)^3 = 125$

Het probleem kun je als volgt herformuleren:

Gegeven de ketting $x \rightarrow x^2 \rightarrow x^2 + 4 \rightarrow (x^2 + 4)^3$; de uitvoer is 125.

Wat kan de invoer zijn?

Door stap voor stap terug te rekenen vanuit de uitvoer 125 kun je de invoer bepalen.

$$x \xrightarrow{\text{kwadraat}} x^2 \xrightarrow{\text{plus 4}} x^2 + 4 \xrightarrow{\text{tot de derde macht}} (x^2 + 4)^3$$

1e stap: $5 \longrightarrow 125$

2e stap: $1 \longrightarrow 5$

3e stap: $1 \rightarrow 1$, $-1 \rightarrow 1$

De oplossingen van $(x^2 + 4)^3 = 125$ zijn dus $x = 1, x = -1$.
Het oplossingsschema (*van rechts naar links opschrijven!*) kan korter worden genoteerd:

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[dr] & & & \\
\text{kwadraat} & 1 \arrow[r, "\text{plus } 4"'] & 5 \arrow[r, "\text{tot de derde macht}"'] & 125 \\
-1 \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}
$$

Vertaald in algebra staat er:

$$
\begin{aligned}
(x^2 + 4)^3 &= 125 \\
x^2 + 4 &= 5 \\
x^2 &= 1
\end{aligned}
$$

$$x = 1 \qquad x = -1$$

Voorbeeld 2:

Los op: $\sin^2 x = \frac{1}{4}$ voor $0 \leq x \leq 2\pi$

Oplossing:

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, "\sin"'] & \sin x \arrow[r, "\text{kwadraat}"'] & \sin^2 x \\
\frac{1}{6}\pi \arrow[dr, "\sin"'] & & \\
& \frac{1}{2} \arrow[ddr] & \\
\frac{5}{6}\pi \arrow[ur] & & \\
& & \frac{1}{4} \\
1\frac{1}{6}\pi \arrow[dr, "\sin"'] & & \\
& -\frac{1}{2} \arrow[uur, "\text{kwadraat}"] & \\
1\frac{5}{6}\pi \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}
$$

De oplossingen zijn dus: $x = \frac{1}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi, 1\frac{1}{6}\pi, 1\frac{5}{6}\pi$

14. Neem de vergelijking van voorbeeld 2.
    >a Schrijf het oplossingsschema in 'algebra-taal'.
    >b Wat gebeurt er als de beperking $0 \leq x \leq 2\pi$ opgeheven is?

15. Los de volgende vergelijkingen op met behulp van een pijlenschema. Schrijf vervolgens de oplossing in algebra-taal.

    >a $\sqrt{x^2 + 16} = 5$
    >b $(x^3 - 14)^2 = 169$
    >c $\dfrac{1}{2 + \cos x} = \dfrac{2}{5} \quad (0 \leq x \leq 2\pi)$
    >d $\sqrt{\sin x + 5} = 2$
    >e $(3 + \sqrt{\tfrac{1}{x}})^2 = 25$

5 Inverse functies

1. Bekijk de drie series A, B en C.

A: $\boxed{+} \to \boxed{5} \to \boxed{=} \to \boxed{-} \to \boxed{5} \to \boxed{=}$

B: $\boxed{x^2} \to \boxed{\sqrt{\ }}$

C: $\boxed{1/x} \to \boxed{1/x}$

>a Je voert een willekeurig getal in.
Welke betrekking bestaat er tussen invoer en uitvoer bij A?

>b Hoe zit dat met B als je een willekeurig *positief* getal invoert?
En als je een *negatief* getal invoert?

>c Dezelfde vragen voor C.

2. > Bedenk een ketting van twee standaardfuncties (anders dan in opgave 1) met de eigenschap dat de invoer altijd gelijk is aan de uitvoer.

Als bij een ketting van twee functies invoer en uitvoer steeds aan elkaar gelijk zijn, dan zeggen we dat die functies elkaars *inverse* zijn.
Voorbeelden van inverse functies zijn:

$x \to x + 8$	en	$x \to x - 8$
$x \to 5x$	en	$x \to \frac{x}{5}$
$x \to x^3$	en	$x \to \sqrt[3]{x}$

Inverse functies neutraliseren elkaar.
Op veel rekenmachientjes kun je de aanduiding INV vinden.

3. Bekijk de lijst met standaardfuncties (bladzijde17)

>a Geef bij elke functie uit de lijst, op de laatste twee na, de inverse functie.

>b Welke functies uit de lijst zijn hun eigen inverse?

Opmerking:
Bij het bepalen van een inverse functie moet het domein soms worden aangepast. Namelijk als het zo is dat bij verschillende invoerwaarden dezelfde uitvoer optreedt.
Voorbeeld: De inverse van $x \to \sqrt{x}$ is de functie $x \to x^2$ met de beperking $x \geq 0$.

Van een kettingfunctie kan de inverse worden gevonden door de opbouw met standaardfuncties bloot te leggen.

Bijvoorbeeld: $x \rightarrow (5x - 2)^3$

Als ketting geschreven:

$$x \xrightarrow[\text{maal 5}]{} 5x \xrightarrow[\text{min 2}]{} 5x - 2 \xrightarrow[\text{tot de 3e macht}]{} (5x - 2)^3$$

De inverse functie van de schakels zijn achtereenvolgens:

gedeeld door 5 , plus 2 , 3e machtswortel

Omdat je bij de ketting terug moet van uitvoer naar invoer moet er in *omgekeerde volgorde* worden geschakeld!

$$x \xrightarrow[\text{3e machtswortel}]{} \sqrt[3]{x} \xrightarrow[\text{plus 2}]{} \sqrt[3]{x}+2 \xrightarrow[\text{gedeeld door 5}]{} \frac{\sqrt[3]{x}+2}{5}$$

Dit principe is hetzelfde als bij een route heen en terug.

De route 'eerst linksaf, dan twee keer rechtsaf' wordt op de terugweg 'eerst twee linksaf, dan rechtsaf'.

4. Neem bij $x \rightarrow (5x - 2)^3$ het getal 1 als invoer.
   >a Welk getal is de uitvoer?

   >b Gebruik het getal van >a als invoer bij de functie $x \rightarrow \frac{\sqrt[3]{x}+2}{5}$. En?

5. Bepaal de inverse functie van:

   >a $x \rightarrow 2x + 5$

   >b $x \rightarrow \sqrt{x} + 4$

   >c $x \rightarrow \frac{1}{x-3}$

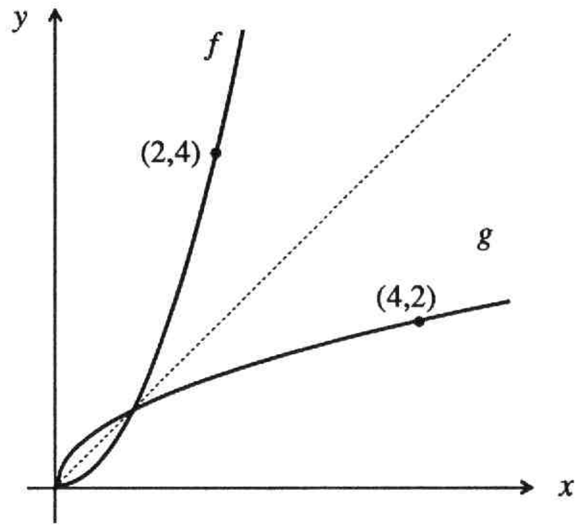
   >d $x \rightarrow \sqrt{x-2}$

   >e $x \rightarrow 10x^3 + 1$

   >f $x \rightarrow \frac{1}{x^3+1}$ $(x \geq 0)$

6. Bekijk opgave 6 van het vorige hoofdstuk.
   Met de gegeven vuistregel kan bij gegeven snelheid de remweg steeds worden berekend.
   Voor de politie is het interessant om ook een vuistregel te hebben die het omgekeerde doet en bij een gegeven remweg de snelheid oplevert.
   > Hoe luidt die tweede vuistregel?

De functies f: $x \rightarrow x^2$ en g: $x \rightarrow \sqrt{x}$ met domein $x \geq 0$, zijn elkaars inverse.
Hieronder zie je de grafieken in één figuur:



Het punt (2,4) ligt op de grafiek van f en het punt (4,2) op de grafiek van g.
De punten (2,4) en (4,2) zijn elkaars spiegelbeeld ten opzichte van de lijn $y = x$.
Zo kun je bij elk punt op de grafiek van f het spiegelbeeld (t.o.v. de lijn $y = x$) op de grafiek van g vinden.

De grafieken van een functie en zijn inverse zijn, bij gebruik van dezelfde schalen op de x-as en y-as, elkaars spiegelbeeld ten opzichte van de lijn $y = x$.

7. >a Toon aan (via een ketting) dat de functies $x \rightarrow 3x - 2$ en $x \rightarrow \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ elkaars inverse zijn.
   >b Teken de grafieken van beide functies in één figuur en controleer dat zij elkaars spiegelbeeld zijn t.o.v. de lijn $y = x$.
   >c Hoe kun je handig de lijn $y = x$ gebruiken om het snijpunt van de beide grafieken te berekenen?

8. >a Teken de grafiek van $f(x) = -x^2 + 6$ voor $x \geq 0$.
   >b Teken in dezelfde figuur de grafiek van de inverse functie g van f.
   >c Welke formule past er bij g?
   >d Bereken de coördinaten van het snijpunt van de grafieken van f en g.

Terugblik

De functietoetsen op je rekenmachientje horen bij de *standaardfuncties*.
Door het (aan elkaar) schakelen van standaardfuncties ontstaat er een *kettingfunctie*.
De volgorde van de schakels is daarbij van groot belang.
Voorbeeld:

$$x \xrightarrow[\text{maal 3}]{} 3x \xrightarrow[\text{plus 2}]{} 3x+2 \xrightarrow[\text{wortel}]{} \sqrt{3x+2}$$

Opgaven

>a De drie standaardfuncties 'maal 3', 'plus 2' en 'wortel' kunnen in verschillende volgorden worden geschakeld.
Zo kunnen zes verschillende functies ontstaan (als je elke schakel één keer gebruikt).
Eén van die zes kettingfuncties is: $x \to \sqrt{3x+2}$
Geef de andere vijf kettingfuncties.

>b Reken voor elk van de zes kettingfuncties (dus inclusief het voorbeeld) uit bij welke invoer de uitvoer gelijk is aan 1.

Twee functies zijn elkaars *inverse* als ze elkaar als het ware neutraliseren.
Voorbeelden van paren inverse functies zijn:

$$x \to 8x \quad \text{en} \quad x \to \frac{x}{8}$$

$$x \to x^5 \quad \text{en} \quad x \to \sqrt[5]{x}$$

$$x \to \frac{1}{x} \quad \text{en} \quad x \to \frac{1}{x}$$

De grafieken van een functie en zijn inverse zijn elkaars spiegelbeeld ten opzichte van de lijn $y = x$.

Opgaven

>c De functies $x \to \frac{1}{x} + 2$ en $x \to \frac{1}{x-2}$ zijn elkaars inverse.
Verklaar dit.

>d Welke asymptoten heeft de grafiek van $x \to \frac{1}{x} + 2$?

En welke asymptoten heeft de grafiek van $x \to \frac{1}{x-2}$?

6 Formules uit formules

De valweg bij ongeremde vrije val wordt gegeven door de formule $s = 5t^2$ (s is valweg in m, t = tijd in seconde). De valsnelheid v is zoals bekend de afgeleide van s, dus $v = 10t$ (met v in m/s).
Het is duidelijk dat er ook een verband bestaat tussen de valsnelheid en de reeds afgelegde valweg. Dat verband wordt gevonden via de ketting:

valweg $\rightarrow$ valtijd $\rightarrow$ valsnelheid

ofwel

$$s \rightarrow t \rightarrow v$$

De eerste functie vind je uit $s = 5t^2$ door t uit te drukken in s.

Er komt dan: $t^2 = \frac{s}{5} = 0{,}2s$ dus $t = \sqrt{0,2s}$

De tweede functie is al bekend: $v = 10t$

Combinatie van deze formules levert: $v = 10\sqrt{0,2s}$

1. >a Teken de grafiek van v als functie van s.

   >b Na hoeveel meter vrije val wordt er een valsnelheid van 108 km/uur bereikt?

2. Hoe groter een vogelsoort, hoe groter de eieren.
   Na een onderzoek van 800 vogelsoorten kwam de ornitholoog Rahn tot een formule die het verband legt tussen het gewicht van een ei en het gewicht van een moedervogel.
   Enigszins vereenvoudigd luidt de formule: $E = 0{,}3 \cdot G^{\frac{3}{4}}$
   (G is het lichaamsgewicht in gram, E is het eigewicht in gram)
   Het aantal dagen dat nodig is om een ei uit te broeden (T) varieert ook met de vogelsoort. Een formule die het verband legt tussen T en het lichaamsgewicht G is:

$$T = 9{,}1 \cdot G^{\frac{1}{6}}$$

   >a Een kolibrie heeft 11 dagen nodig om zijn eitjes uit te broeden.
   Hoe zwaar (of beter hoe licht) is een kolibrie volgens deze formule?

Helikoptertje. De Lafresnaykolibrie *Lafresnaya lafresnayi* staat stil in de lucht om nectar uit een bloem te zuigen, waarna hij vaak achteruit wegvliegt. Alleen kolibries verstaan deze kunst.

>b Het ei van de prehistorische vogel Aepyornis die op Madagascar leefde, woog ongeveer 10 kg.

AEPYORNIS

ei van de AEPYORNIS

Bereken op grond van bovenstaande formule de tijd die de Aepyornis nodig had voor het uitbroeden van zijn monsterei.

>c Er bestaat ook een verband tussen T en E van de vorm: $T = a \cdot E^b$.
Bereken a en b.

>d De hier beschreven formules hebben het bezwaar dat ze een soort gemiddelde geven van enkele honderden vogelsoorten. Dat betekent dat er per vogelsoort behoorlijke afwijkingen kunnen voorkomen.
Neem, om dicht bij huis te blijven, de kip.
Eigewicht zo'n 60 gram, tijd voor het uitbroeden 3 weken.
Hoeveel zou die tijd volgens de gegeven formule moeten zijn?

3. Tussen de grootheden x en t en y en t zijn de volgende verbanden gegeven:

$$x = 3t^2 \text{ en } y = \frac{1}{t+2}$$

>a Druk y uit in x.

>b Druk x uit in y.

4. Druk a uit in c in elk van de volgende situaties:

>a $a = b^3$ en $c = 2b - 1$

>b $a = b^2 + 2b$ en $c = b + 1$

>c $a = 5b + 3$ en $b = 0{,}2c - 0{,}6$

>d $a = \sqrt{4b+5}$ en $b + c = 10$

>e $a = \sin b$ en $2b + c = \frac{1}{2}\pi$

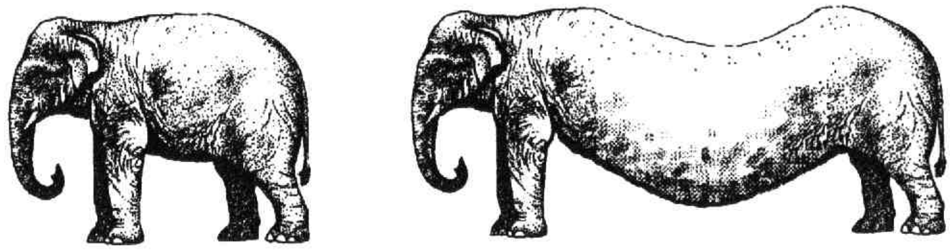
>f $a = b^2 - 1$ en $b = 3\sin c$

5. Gegeven: $u = v^2 - v$, $v = w^2 + \frac{1}{2}$, $w = \frac{1}{x}$.

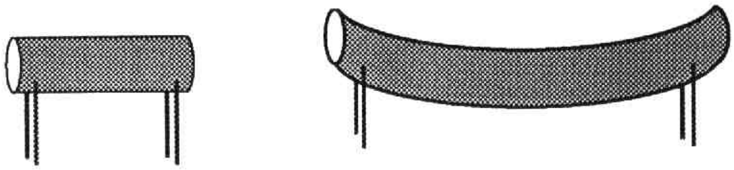
>a Druk u uit in x.

>b Druk x uit in v (voor het geval $x > 0$).

6.



Bij een bepaalde 'dikte' en 'lichaamsgewicht' van een viervoeter zijn er beperkingen voor de 'lengte', vanwege het doorzakeffect.
Enig idee hiervan krijgt men door het dier te beschouwen als een staaf die aan de uiteinden ondersteund wordt.



Iemand heeft het volgende systeem van formules opgesteld voor het grensgeval, waarbij G (= lichaamsgewicht in gram), L (= lengte in cm) en D (dikte in cm) een rol spelen.

(1) $\frac{GL^2}{D^4} = 680$

(2) $LD^2 = G$

(3) $L = a \cdot G^{\frac{1}{4}}$

(4) $D = b \cdot G^{\frac{3}{8}}$

(5) $\frac{L}{D} = c \cdot G^{-\frac{1}{8}}$

(6) $D = d \cdot L^{\frac{3}{2}}$

>a Als het gewicht van een dier bekend is, kunnen uit de formules (1) en (2) de maximaal mogelijke lengte en dikte worden berekend.
Neem een Indische olifant van 5000 kg.
Wat zijn de maximaal mogelijke lengte en dikte van zo'n olifant volgens formules (1) en (2)?

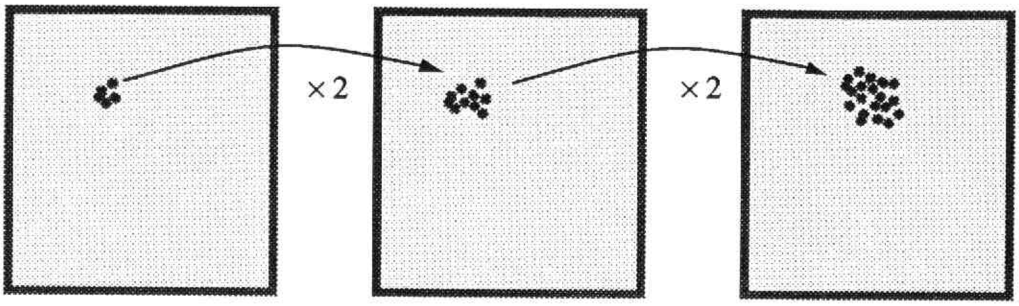
>b De formules (3) tot en met (6) zijn af te leiden uit (1) en (2).
Controleer dat en bereken a, b, c en d.

7 Exponentiële functies

1. In een grote vijver groeit een kwaadaardig soort waterlelie. De lelie breidt zich zo snel uit, dat elke dag de oppervlakte van het door de waterlelie overdekte deel van de vijver wordt verdubbeld. Als de lelie ongestoord kan groeien, bedekt zij in 30 dagen de gehele vijver. Daarbij zullen dan alle andere levensvormen in de vijver verstikken. Kortom een catastrofe dreigt. Geruime tijd ziet de toestand in de vijver er echter lang niet verontrustend uit en maakt de tuinman geen aanstalten om in te grijpen. Pas als de helft van de vijver is bedekt, komt hij in actie.

   >a Hoeveel dagen heeft die tuinman dàn nog de tijd om te voorkomen dat de vijver geheel overwoekerd raakt?

   >b En hoeveel dagen heeft hij werkeloos toegezien?



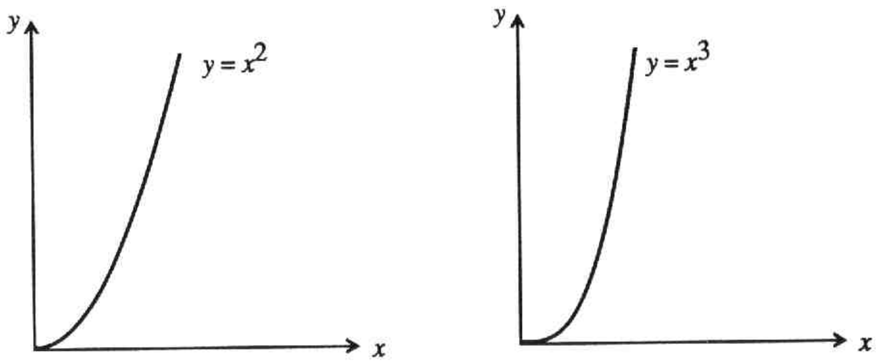
Het verhaal over de graankorrels op het schaakbord (hoofdstuk 1) en de vijver met het zich verdubbelende kroos (bovenstaande opgave) zijn klassieke voorbeelden van wat men *exponentiële groei* noemt. In de jaren '70 verscheen er een rapport van een groep verontruste wetenschappers uit alle delen van de wereld (de 'Club van Rome') getiteld: grenzen aan de groei. In dat rapport werden problemen aangesneden die nog niets aan aktualiteit hebben ingeboet, integendeel.
Om er een paar te noemen:

- de explosief toenemende vervuiling van het milieu;
- de groei van de wereldbevolking;
- de sterk stijgende behoefte aan landbouwgrond;
- het sterk toenemende verbruik van energie.

Bij de gesignaleerde problemen is er sprake van een groei zoals die bij het waterlelie probleem of in het verhaal van de graankorrels op het schaakbord. Het lijkt een poos mee te vallen, maar ineens rijst het de pan uit...

De groei van de waterlelie in de vijver wordt beschreven door de functie $x \to 2^x$; dit is een zogenaamde *exponentiële functie.*
Een kenmerk van zo'n exponentële functie is dat de toename bij elke stap sterk wordt beïnvloed door de hoeveelheid die er al is.

Er zijn ook andere groeiprocessen waarbij de toename sterker wordt, naarmate het bereikte niveau hoger is. Denk bijvoorbeeld aan groei volgens machtsfuncties zoals: $x \rightarrow x^2$, $x \rightarrow x^3$, enzovoort.



Grafiek stijgt sneller, naarmate y (en ook x) groter wordt.

Toch is er een wezenlijk verschil tussen een machtsfunctie als $x \rightarrow x^2$ en een exponentiële functie zoals $x \rightarrow 2^x$. Merk eerst op dat bij $x \rightarrow x^2$ het grondtal varieert en de exponent vast is; bij een exponentiële functie is het andersom, grondtal is constant, exponent varieert. We vergelijken nu de twee functies voor $x \geq 0$.

Tabel bij $y = x^2$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144

Tabel bij $y = 2^x$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096

2. >a Controleer de beide tabellen.

   >b Teken voor $0 \leq x \leq 7$ in één figuur de grafieken van $y = x^2$ en $y = 2^x$. Neem als eenheid op de x-as 1 cm en op de y-as 1 mm.

   >c Voor welke x tussen 0 en 4 geldt: $2^x < x^2$? Lees je antwoord af uit de figuur en controleer de ongelijkheid voor een drietal waarden voor x.

3. In de tabel en in de grafiek zie je dat, het begin niet meegerekend, 2^x sneller groeit dan x^2. Zo groeit x^2 op het interval [10, 11] met 21%, terwijl 2^x op datzelfde interval met 100% toeneemt.

   \> Hoe groot zijn de groeipercentages van x^2 en 2^x op het interval [100, 101] ?

Er zijn verschillende manieren om de groei van twee functies te vergelijken. In opgave 2 heb je dat gedaan door het *groeipercentage* te nemen. Een ander instrument is de *groeifactor*.

Op het interval [1, 2] groeit x^2 van 1 naar 4, dat is met een groeifactor 4;
op [2, 3] is de groeifactor van x^2 gelijk aan $9 : 4 = 2{,}25$
op [2, 4] is de groeifactor van x^2 gelijk aan $16 : 4 = 4$, enzovoort.

4. >a Hoe groot is de groeifactor van x^2 op het interval [10, 11] ?
En op het interval [100, 101]?

>b Op welk interval $[100, p]$ is de groeifactor van x^2 gelijk aan die op het interval [10, 11]?

>c Toon aan dat de groeifactor van x^2 op het interval $[x, x + 1]$ gelijk is aan $1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}$

>d Wat gebeurt er met de groeifactor van x^2 op $[x, x + 1]$ als x heel groot wordt?

>e Wat weet je van de groeifactor van 2^x op de intervallen [1, 2]; [2, 3]; [3, 4]; enzovoort?

>f Wat gebeurt er met de groeifactor van 2^x op $[x, x + 1]$ als x heel groot wordt?

5. Vergelijk de functies $f(x) = x^{10}$ en $g(x) = 10^x$.

>a Bereken de groeifactor van f op [1,2], [2,3], [3,4], [4,5] en [5,6].

>b Dezelfde opdracht voor g.

Als je bij een machtsfunctie (zoals $x \to x^2$ of $x \to x^{10}$) de groeifactor meet over een aantal gelijke intervallen, dan zie je dat die groeifactor *afneemt* bij toenemende x.

> Kenmerkend voor een exponentiële functie (zoals $x \to 2^x$ of $x \to 10^x$) is dat de groeifactor over gelijke intervallen *constant* is.

6. De grafiek van $y = 2^x$ (opgave 2) kun je voortzetten naar links (dus voor negatieve x).

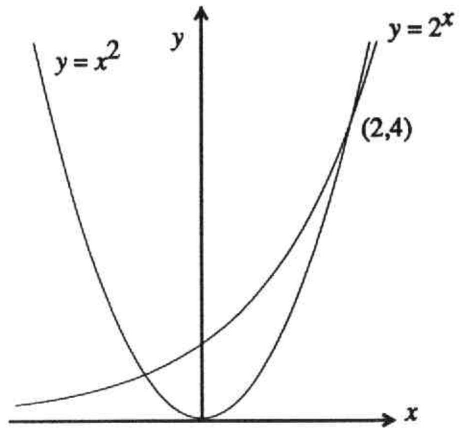
>a Teken de grafiek voor $-3 \leq x \leq 3$.
(neem op x-as en y-as nu een eenheid van 1 cm)

>b Hoeveel cm moet je vanuit 0 op de x-as naar links gaan om een y-waarde kleiner dan 0,001 te vinden?

>c Welke asymptoot heeft de grafiek van $y = 2^x$?
(als x niet aan grenzen is gebonden)

7. In opgave 1 heb je gezien dat de grafieken van $y = x^2$ en $y = 2^x$ rechts van de y-as elkaar in twee 'mooie' punten snijden: (2,4) en (4,16)
Links van de y-as bevindt zich nog een derde snijpunt.
   > Bepaal met behulp van je zakrekenmachine de x-coördinaat in 2 decimalen nauwkeurig.

   Opmerking: Dat snijpunt is niet exact met algebra te bepalen.



8. >a Teken in één figuur de grafieken van $y = 2^x$ en $y = 3^x$.
   >b Welk snijpunt hebben die grafieken?
   >c Lees de oplossingen van de volgende ongelijkheden rechtstreeks af uit het plaatje: $2^x < \frac{1}{8}$; $\frac{1}{9} < 3^x < 3$; $2^x < 3^x$; $3^x - 2^x \geq 1$

9. $f(x) = 2 \cdot (1\frac{1}{2})^x$ voor $-3 \leq x \leq 3$
   >a Neem onderstaande tabel over en vul in:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

   >b Wat is de groeifactor van f over de intervallen [-3,-2], [-2,-1], ..., [2,3] ?
   >c Teken de grafiek van f.

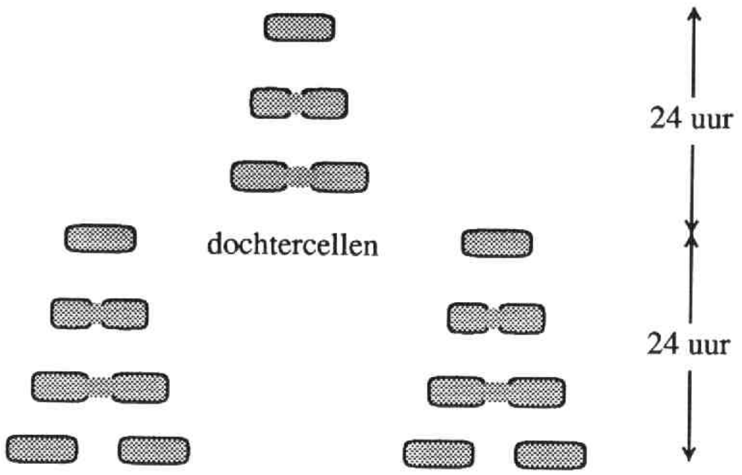
10. >a Teken in één figuur de grafieken van $f(x) = 3 \cdot 2^x$ en $g(x) = 2 \cdot 3^x$.
    (Neem op de x-as de schaal 2 keer zo groot als op de y-as)
    >b Wat is de groeifactor van f op een interval met lengte 1?
    En wat is de groeifactor van g op zo'n interval?
    >c Voor welke x geldt: $f(x) < g(x)$?

11. >a Teken in één figuur de grafieken van $y = 2^x$ en $y = (\frac{1}{2})^x$.
    >b Die grafieken zijn elkaars spiegelbeeld. Welke lijn is de spiegelas?
    >c Voor welke x geldt: $2^x \geq 32$? En voor welke x geldt: $(\frac{1}{2})^x \geq 32$?

12. $f(x) = 2^x + 1$ en $g(x) = 2^x - 3$.
    >a Teken in één figuur de grafieken van f en g.
    >b Welke asymptoten hebben die grafieken?

8 Groei en verval volgens exponentiële functies

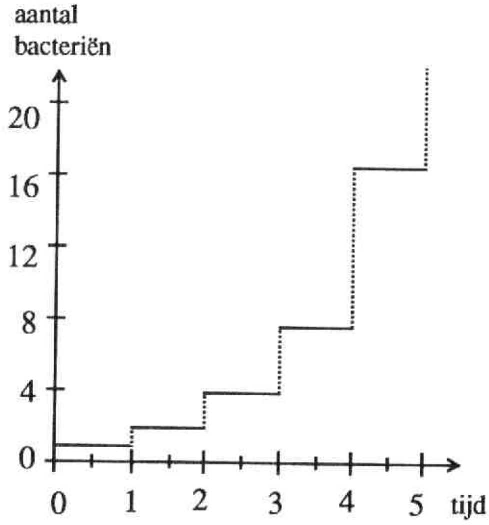
1. Onder gunstige omstandigheden deelt een bacterie van een zeker type zich ieder etmaal in tweeën.

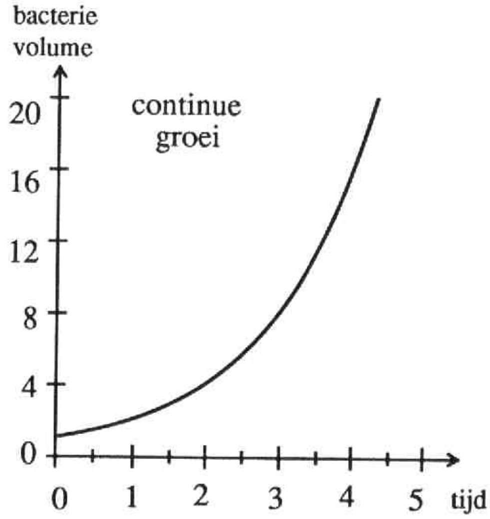


>a Hoeveel bacteriën brengt één bacterie voort in één week?

>b En hoeveel in t etmalen (t geheel)?

Bij de bacteriën uit opgave 1 vindt er ieder etmaal plotseling verdubbeling van het aantal plaats. De grafiek van deze 'sprongsgewijze' groei zie je links hieronder.





De groei naar volume (of gewicht) van een kolonie gaat niet sprongsgewijs, maar geleidelijk. In het plaatje bij opgave 1 zie je dat iedere cel twee maal zo groot wordt, alvorens zich te delen. De groei van een bacteriekolonie kan dus ook worden opgevat als *continue groei*, zoals de rechter grafiek hierboven aangeeft.

2. Blaasontsteking bij mensen wordt veroorzaakt door de coli-bacterie, (Eschirichia Coli). Een kolonie van zulke bacterieën groeit snel: in een tijd van 20 minuten is hun aantal verdubbeld.
Stel bij een zeker persoon bevonden zich op het tijdstip $t = 0$ zo'n 1000 colibacterieën in de urinewegen. Het aantal bacterieën dat hij na t uur bij zich draagt noemen we $N(t)$.

   >a Verklaar: $N(t) = 1000 \cdot 8^t$

   >b De infectie wordt pas door de drager opgemerkt als hij zo'n 10^8 bacterieën bij zich heeft.
   Ga na dat dit ruim $5\frac{1}{2}$ uur na $t = 0$ het geval is.

   >c Bij het legen van een volle blaas wordt 90% van de 10^8 bacterieën uitgestoten. Hoeveel tijd heeft de bacteriekolonie hierna nodig om weer op het peil van 10^8 te komen?

   Omdat het moeilijk is om alleen door middel van veel drinken van een blaasontsteking af te komen, wordt meestal een medicijn gebruikt.
   Stel dat door het gebruik van de medicijn de omvang van de bacteriekolonie elk uur met 65% afneemt. $M(t)$ is het aantal bacterieën, t uur na het eerste gebruik van het medicijn en uitgaande van 10^8 bacterieën op $t = 0$.

   >d Verklaar de formule: $M(t) = 10^8 \cdot 0{,}35^t$

   >e Na hoeveel uur is de bacterie uitgeroeid?
   (Bepaal met je rekenmachientje wanneer voor het eerst geldt: $M(t) < 1$)

In opgave 2 is er zowel sprake van *exponentiële groei* (N als functie van t) als van *exponentieel verval* (M als functie van t). In het eerste geval is er sprake van een groeifactor 8 per uur, in het tweede geval is de 'groeifactor' 0,35 per uur.
Men spreekt in het laatste geval ook wel van negatieve groei.

3. Een bekend voorbeeld van negatief-exponentiële groei is de afname van de stralingsintensiteit van een radio-actieve stof.
Bij de kernramp in Tsjernobyl (1986) kwamen vooral de radio-actieve elementen Jodium (131), Cesium (137) en Strontium (91) vrij.

   >a Jodium (131) heeft de eigenschap dat de straling snel afneemt, namelijk met 8,3 % per 24 uur. Toon aan dat de straling na 8 dagen gehalveerd is.
   Men zegt: de 'halveringstijd' (of 'halfwaardetijd') van Jodium (131) is 8 dagen.

   >b Van Cesium en Strontium is bekend dat het schadelijke effect veel langer in stand blijft: de halveringstijd is zo'n 30 jaar! De straling van beide stoffen gedraagt zich volgens de formule:
   $$S(t) = S(0) \cdot r^t \quad (t \text{ is de tijd in jaren})$$
   Bepaal r.

   >c Met hoeveel % per jaar neemt de straling van die stoffen af?

4. In 1960 telde de wereldbevolking circa 3 miljard mensen. In 1970 was dat aantal gegroeid tot 3,6 miljard.
Veronderstel dat de wereldbevolking groeit volgens een exponentiële functie.

>a Hoe groot is de groeifactor per 10 jaar?

>b Komt een groei van 20% per 10 jaar op hetzelfde neer als een groei van 2% per jaar? Verklaar je antwoord.

>c Laat het aantal mensen op aarde (in miljarden) op het tijdstip t gelijk zijn aan $N(t)$. (t is de tijd in decennia*), $t = 0$ komt overeen met 1 januari 1960) Druk $N(t)$ uit in t.

>d Bekijk onderstaand artikel uit de Volkskrant.
Controleer of het bereiken van 'de 5 miljard' halverwege het jaar 1987 in overeenstemming is met de bij >c gevonden formule.

>e Bekijk ook de voorspellingen over de stand van de wereldbevolking in de jaren 2000 en 2100.
Blijft volgens die voorspellingen de komende eeuw de groeifactor constant, neemt ze toe of neemt ze af?

Een krantebericht (Volkskrant van 13 juli 1987).

Wereldbevolking passeert grens van vijf miljard

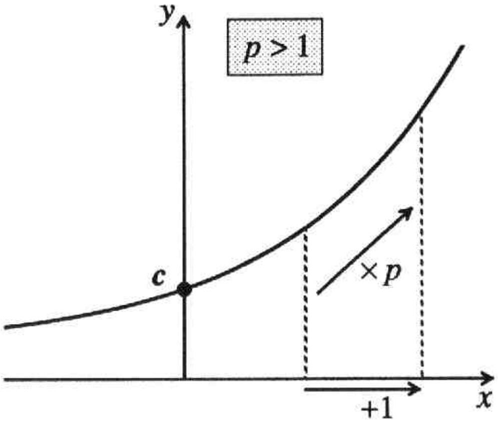
ZAGREB (AP) - De zaterdagochtend om 8.35 in Zagreb geboren Matej Gaspar is door de VN symbolisch verkozen tot vijf-miljardste aardbewoner. In diezelfde minuut werden volgens de statistieken elders op de wereld nog 149 andere kinderen geboren.

VN-secretaris-generaal Perez de Cuellar bracht meteen na de geboorte een bezoek aan moeder en kind. Het VN-fonds voor Bevolkingsactiviteiten had afgelopen zaterdag uitgeroepen tot de 'Dag van de Vijf miljard' om de aandacht te vestigen op de snelle groei van de wereldbevolking. Volgens het fonds worden er iedere dag 220.000 babies geboren. De VN voorspelt dat de wereldbevolking tegen het jaar 2000 zal zijn gestegen tot zes miljard en aan het begin van de 22ste eeuw tot 10 miljard. De chinese provincie Sichuan - met een bevolking van 100 miljoen - maakte zaterdag bekend dat er strengere controle zal worden uitgeoefend op de naleving van het verbod om meer dan een kind per gezin te hebben. Het Chinese Volksdagblad meldde dat er alleen al in 1986 in die provincie 300.000 kinderen 'te veel' geboren zijn.
Het Vaticaan heeft vrijdag nog weer eens herhaald dat anticonceptie en sterilisatie als geboortebeperkende maatregelen in de Derde Wereld uit den boze zijn. Dergelijke geboortebeperkende praktijken verdoezelen alleen maar het echte probleem van 'een oneerlijke verdeling van de welvaart'.

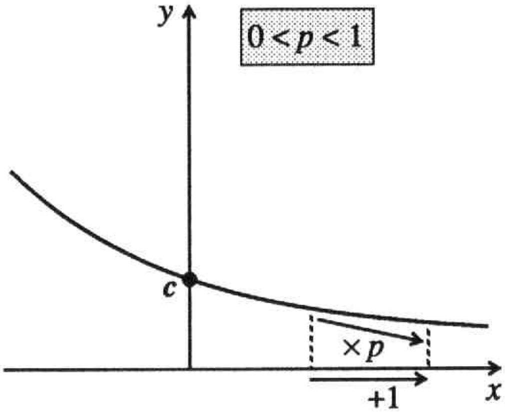
*) decennium = periode van 10 jaar

TERUGBLIK

Functies van het type $y = c \cdot p^x$ (c, p constant, $p > 0$ en $p \neq 1$) worden exponentiële functies genoemd. We onderscheiden twee gevallen.



De functie is stijgend en beschrijft exponentiële groei.



De functie is dalend en beschrijft exponentieel verval.

Het grondtal p is de groeifactor over een interval met lengte 1.
De constante c is de functiewaarde bij $x = 0$ (soms 'beginwaarde' genoemd).
De grafiek van $y = c \cdot p^x$ heeft een horizontale asymptoot.
Dat betekent: De grafiek benadert de x-as willekeurig dicht bij afnemende x (in het geval $p > 1$) of bij toenemende x (in het geval $0 < p < 1$).

Opgave

$f(x) = 2 \cdot 5^x$

>a Teken de grafiek van f voor $-2 \leq x \leq 2$.
(Neem als eenheid op de x-as 1 cm en op de y-as 1 mm)

>b Als je de grafiek van f spiegelt t.o.v. de y-as, krijg je de grafiek van een functie $g(x) = a \cdot b^x$
Bepaal a en b.

>c Voor welke x geldt: $f(x) \geq 250$? En voor welke x geldt: $g(x) \geq 250$?

>d De functie f beschrijft een exponentieel groeiproces.
Controleer dat in een tijdsinterval met lengte 0,43 de groeifactor ongeveer 2 is.
(Men zegt: de 'verdubbelingstijd' is 0,43)

>e Hoe lang is de 'halveringstijd' van de functie g?

9 Exponentiële grafieken en vergelijkingen

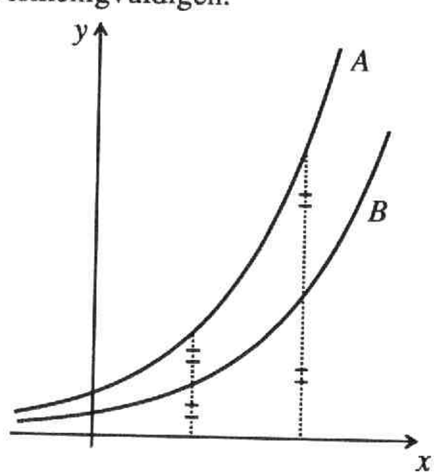
Bij het tekenen van grafieken en oplossen van vergelijkingen waarbij exponentiële functies optreden, kan vaak gebruik worden gemaakt van de 'exponentiële' eigenschappen:

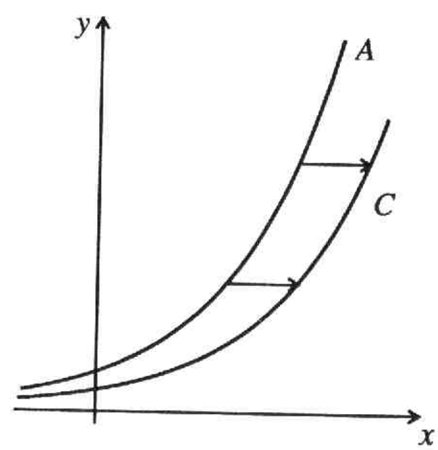
I	$p^x \cdot p^t$	$= p^{x+t}$
II	$p^x : p^t$	$= p^{x-t}$
III	$(p^x)^t$	$= p^{xt}$
IV	$(pq)^x$	$= p^x \cdot q^x$

Voorbeeld

Uit de grafiek van $y = 2^x$ (A) kan de grafiek van $y = \frac{1}{2} \cdot 2^x$ (B) worden verkregen door de punten van A in verticale richting met $\frac{1}{2}$ te vermenigvuldigen.

Uit de grafiek van $y = 2^x$ (A) kan de grafiek van $y = 2^{x-1}$ (C) worden verkregen door de punten van A in horizontale richting naar rechts te verschuiven.





Het lijkt er op in de plaatjes dat B en C hetzelfde zijn.
Met algebra kan die gelijkheid gemakkelijk worden aangetoond:

$$\tfrac{1}{2} \cdot 2^x = 2^{-1} \cdot 2^x = 2^{-1+x} = 2^{x-1}$$

1. $f(x) = 2^x$ en $g(x) = \frac{1}{8} \cdot 2^x$

   >a Teken in één figuur de grafieken van f en g.

   >b De grafiek van g is op te vatten als het resultaat van een horizontale verschuiving, toegepast op de grafiek van f. Toon dit aan.

   >c Teken in dezelfde figuur ook de grafiek van $h(x) = 2^{x+1}$

   >d De grafiek van h kan worden gevonden door de grafiek van f in verticale richting te vermenigvuldigen. Toon dit aan.

2. $f(x) = 2^{x}$ en $g(x) = 2^{1-x}$

   >a Teken in één figuur de grafieken van f en g.

   >b Bereken de coördinaten van het snijpunt van beide grafieken.

3. $f(x) = 4^{-x}$ en $g(x) = 2^{x+1}$

   >a Teken in één figuur de grafieken van f en g.

   >b Het snijpunt van beide grafieken heeft de x-coördinaat $-\frac{1}{3}$.
   Controleer dit door substitutie.

Het opsporen van het snijpunt van de grafieken van f en g uit opgave 3 leidt tot de *exponentiële vergelijking*: $\quad 4^{-x} = 2^{x+1}$

Bij het oplossen van een dergelijke vergelijking is het zaak om linker- of rechterlid zo te herleiden dat de grondtallen gelijk worden. Hier komt er dan:

$$(2^2)^{-x} = 2^{x+1}$$

$$2^{-2x} = 2^{x+1}$$

Op de nu verkregen vergelijking kan het volgende schema worden toegepast:

$$\boxed{\; p^{\boxed{}} = p^{\bigcirc} \quad \longrightarrow \quad \boxed{} = \bigcirc \;}$$

Dus

$$2^{\boxed{-2x}} = 2^{x+1} \quad \longrightarrow \quad \boxed{-2x} = x+1$$

$$-3x = 1$$

$$x = -\tfrac{1}{3}$$

4. Werk in elk van de volgende vergelijkingen er naartoe dat in linker- en rechterlid machten van hetzelfde grondtal komen.
   Los vervolgens de vergelijking op met bovenstaand schema.

   >a $16^{x} = \frac{1}{2}$

   >b $16 \cdot 2^{x} = \sqrt{2}$

   >c $4 \cdot 2^{x} = 8 \cdot 2^{-x}$

   >d $4^{x+1} = 8^{x-1}$

   >e $10^{x} = 100^{1-x}$

   >f $100^{2x-5} = 1000^{1-3x}$

   >g $25^{2x} = 125$

   >h $0{,}2^{x} = \sqrt{5} \cdot 5^{x}$

5. >a Teken in één figuur de grafieken van $f(x) = 2^{x+3}$ en $g(x) = 0{,}25^{x}$.

   >b De grafieken van f en g snijden de lijn $y = 128$ respectievelijk in A en B.
   Bereken de lengte van AB.

   >c Bereken de coördinaten van het snijpunt van de grafieken van f en g.

   >d Voor welke x geldt $f(x) < g(x)$?

6. Bekijk de kettingfunctie:

$$x \xrightarrow[\text{kwadraat}]{} x^2 \xrightarrow[\text{tegengesteld}]{} -x^2 \xrightarrow[\text{plus 3}]{} -x^2+3 \xrightarrow[\text{2 tot de macht}]{} 2^{-x^2+3}$$

>a Laat x het interval [-2, 2] doorlopen.
Welke waarden bereikt 2^{-x^2+3}?

>b Teken de grafiek van $y = 2^{-x^2+3}$.

>c Welke asymptoot heeft de grafiek?

>d Los x op uit: $2^{-x^2+3} > 4$

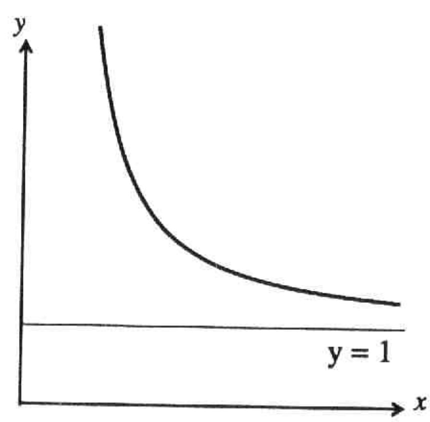
7. Hiernaast zie je de grafiek van $f(x) = 5^{\frac{1}{x}}$ voor $x > 0$. De grafiek heeft twee asymptoten:
de y-as en de horizontale lijn door (0, 1)

>a Hoe kun je dit verklaren?

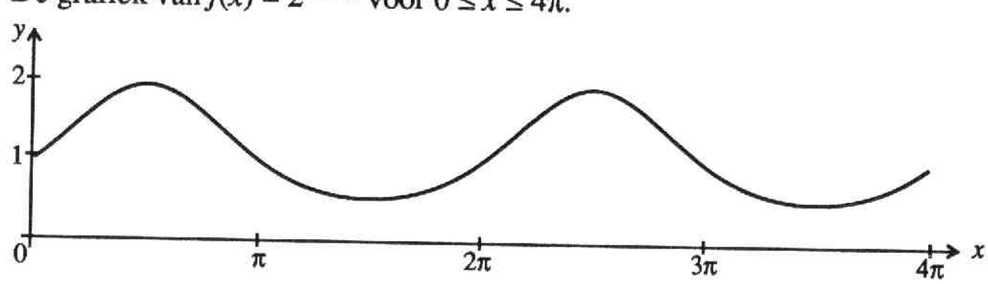
>b Los x op uit: $f(x) = \sqrt{5}$

>c Verklaar: als x de negatieve getallen doorloopt, dan bereikt $f(x)$ alle waarden tussen 0 en 1.

>d Teken de grafiek van f voor $x < 0$.



8. De grafiek van $f(x) = 2^{\sin x}$ voor $0 \leq x \leq 4\pi$.



>a Welk interval is het bereik van f?

>b Voor welke x tussen 0 en 4π geldt: $f(x) = \sqrt{2}$?

>c Teken de grafiek van $g(x) = 3^{\cos x}$ voor $-2\pi \leq x \leq 2\pi$.

>d Voor welke x tussen -2π en 2π geldt: $g(x) = \frac{1}{3}\sqrt{3}$?

TERUGBLIK

De eigenschappen die gebruikt worden bij de 'algebra' van exponentiële functies zijn:

I	$p^x \cdot p^t$	$= p^{x+t}$
II	$p^x : p^t$	$= p^{x-t}$
III	$(p^x)^t$	$= p^{xt}$
IV	$(pq)^x$	$= p^x \cdot q^x$

Opgaven

$f(x) = 3^{x+1}$ en $g(x) = 3^x$

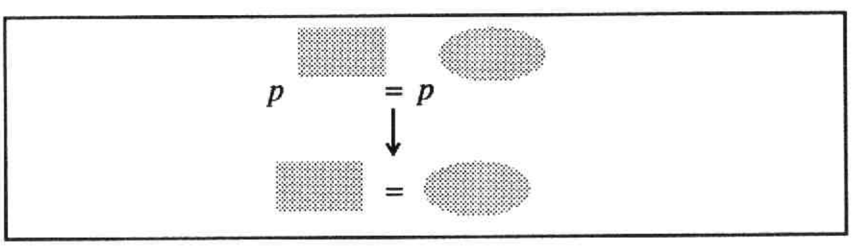
>a Teken in één figuur de grafieken van f en g.

>b Teken in dezelfde figuur ook de grafiek van de verschilfunctie:
$v(x) = f(x) - g(x)$

>c De functie v is ook een exponentiële functie met grondtal 3:
$v(x) = c \cdot 3^x$. Hoe groot is c?

>d Los x op uit: $3^{x+1} - 3^x = 162$

Bij exponentiële vergelijkingen is het streven gericht op het toepassen van het schema:



Hierbij moeten de machten in linker- en rechterlid hetzelfde grondtal hebben!

Opgave

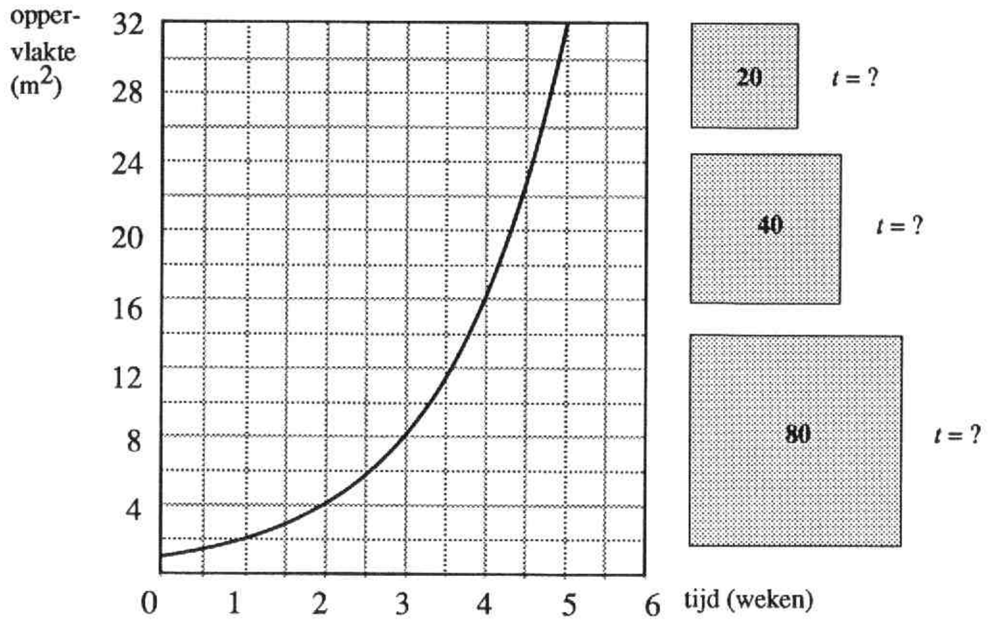
>e Los elk van de volgende vergelijkingen op:

$36^{x+1} = (\frac{1}{6})^{x-2}$ $\qquad$ $5^x = 25^{\sqrt{x}}$

$6^{\frac{1}{x}} = 6\sqrt{6}$ $\qquad$ $5^{\frac{x+2}{x}} = 125$

10 Logaritmen

De grafiek van een exponentieel groeiende waterplant in een vijver, uitgaande van 1 m^2 waterplant:



1. Zoals je in de grafiek kunt zien is de verdubbelingstijd van de waterplant 1 week.

   >a Uit de grafiek kun je schatten dat na 4,3 weken de hoeveelheid waterplanten 20 m^2 is. Controleer dit.

   >b Na hoeveel weken ligt er dus 40 m^2 waterplant in de vijver? En na hoeveel weken 80 m^2?

   >c Het verband tussen oppervlakte en tijd (in *weken*) kun je vastleggen in een tabel:

oppervlakte	5	10	20	40	80
tijd in weken	...	...	4,3	...	...

   >d Wat is er opmerkelijk in de tabel?

2. >a Controleer met je rekenmachientje dat na 5,6 weken (t = 5,6) de hoeveelheid planten, naar beneden afgerond, 48 m^2 is.

   >b Neem onderstaande tabel over en vul in:

oppervlakte	3	6	12	24	48	96
tijd in weken	...	...	...	...	5,6	...

De functie die bij een gegeven tijdstip t de oppervlakte van de aanwezige hoeveelheid waterplanten (in m^2) geeft, is een exponentiële functie, en wel de functie: $t \rightarrow 2^t$.
De functie die bij een gegeven oppervlakte aan waterplanten het bijbehorende tijdstip geeft is een zogenaamde *logaritmische* functie.
Dus

$$\boxed{\text{tijdstip}} \xrightarrow[\text{functie}]{\text{exponentiële}} \boxed{\text{oppervlakte}}$$

$$\boxed{\text{oppervlakte}} \xrightarrow[\text{functie}]{\text{logaritmische}} \boxed{\text{tijdstip}}$$

Voor een logaritmische functie gebruikt men de afkorting log.
Om aan te geven dat het hier om de groeifactor 2 gaat, noteren we: ${}^2\log$.
Dus

$$\boxed{\text{oppervlakte}} \xrightarrow{{}^2\log} \boxed{\text{tijdstip}}$$

Voorbeeld (zie opgave 2)

$$48 \xrightarrow{{}^2\log} 5{,}6$$

ofwel ${}^2\log 48 = 5{,}6$
spreek uit: de 2-logaritme van 48 is 5,6.

3. Het tijdstip waarop de oppervlakte aan waterplant 64 m^2 bedraagt, is 6.
Anders gezegd: de 2-logaritme van 64 is 6.
Kortweg: ${}^2\log 64 = 6$

> Vul in

${}^2\log 128 = \ldots$	${}^2\log 4 = \ldots$
${}^2\log 32 = \ldots$	${}^2\log 2 = \ldots$
${}^2\log 16 = \ldots$	${}^2\log 1 = \ldots$
${}^2\log 8 = \ldots$	${}^2\log \frac{1}{2} = \ldots$

4. De logaritmen in opgave 3 komen allemaal 'mooi' uit.
Meestal is dat niet zo. Bijvoorbeeld: ${}^2\log 7 \approx 2{,}807$.

>a Controleer dat $2^{2{,}807}$ ongeveer gelijk is aan 7.

>b Laat zien dat hieruit volgt: ${}^2\log 14 \approx 3{,}807$.

>c Bereken ook: ${}^2\log 28$; ${}^2\log 56$; ${}^2\log 3{,}5$

Uit het voorgaande volgt:

Als $^{2}\log 5 = t$, dan $2^t = 5$

Anders gezegd:

$^{2}\log 5$ is de oplossing van de vergelijking $2^t = 5$

Het getal 2 wordt ook het *grondtal* van de logaritme genoemd.
Een regel als hierboven kan ook voor andere grondtallen worden opgeschreven.
Zo geldt: $^{5}\log 125 = t \;\rightarrow 5^t = 125$.
Hieruit volgt onmiddellijk: $^{5}\log 125 = 3$.

5. Geef bij elk van de volgende logaritmen een passende vergelijking en vervolgens een uitkomst.

logaritme	vergelijking	uitkomst
$^{5}\log 25$	$5^t = 25$	2
$^{3}\log 81$	...	...
$^{10}\log 1000$	...	...
$^{4}\log 64$	...	...
$^{6}\log 1$	...	...
$^{10}\log 0{,}1$	...	...
$^{2}\log 0{,}25$	...	...
$^{5}\log 0{,}04$	...	...

6. > Geef de uitkomsten van de volgende logaritmen:

$^{7}\log 49$; $^{3}\log \sqrt{3}$; $^{\frac{1}{2}}\log 16$; $^{16}\log \frac{1}{2}$; $^{5}\log 125$; $^{0{,}2}\log 125$

7. Gegeven: a is een natuurlijk getal, groter dan 1.

> Bereken: $^{a}\log a^2$; $^{a}\log \sqrt[3]{a}$; $^{a}\log \frac{1}{a}$; $^{\frac{1}{a}}\log a$; $^{a^2}\log a^3$

Terug naar de waterplanten aan het begin van dit hoofdstuk.
De functies 'tijd → oppervlakte' en 'oppervlakte → tijd' werken precies omgekeerd. We zeggen: die functies zijn elkaars inverse.
Als je die functies schakelt, is de invoer gelijk aan de uitvoer:

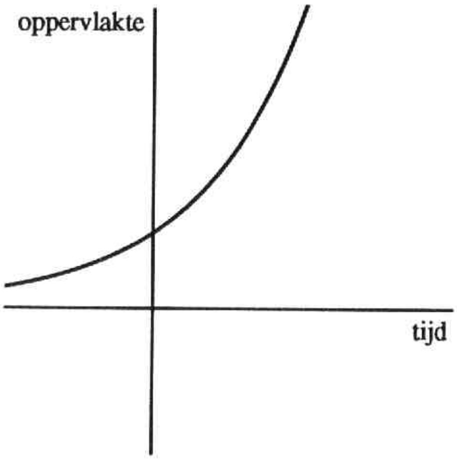
$$\text{tijd} \longrightarrow \text{oppervlakte} \longrightarrow \text{tijd}$$

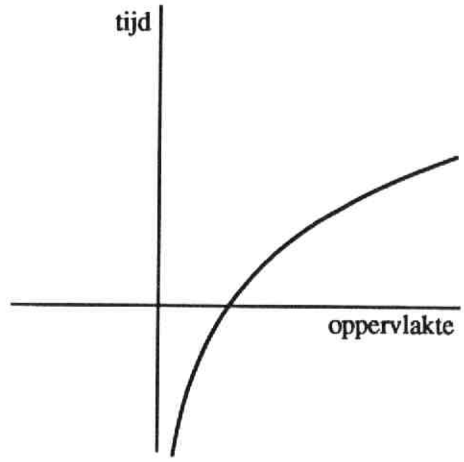
ofwel:

$$t \xrightarrow{\text{2 - macht}} 2^t \xrightarrow{^{2}\log} t$$

De 2-logaritme neutraliseert de 2-macht.

Hieronder zie je naast elkaar de grafieken van beide functies.





Als we in beide plaatjes de horizontale as de x-as noemen en de verticale as de y-as, staan naast elkaar de grafieken van:

$$y = 2^x \qquad \text{en} \qquad y = {}^2\log x$$

8. >a Teken in één figuur de grafieken van $y = 2^x$ en $y = {}^2\log x$.
(neem op de x-as en de y-as dezelfde schaal)

>b De grafieken zijn elkaars spiegelbeeld. Ten opzichte van welke as?

>c Voor welke x geldt ${}^2\log x = 10$?
En ${}^2\log x = -10$?

>d Welke asymptoot heeft de grafiek van $y = {}^2\log x$?

>e Wat is de uitkomst van ${}^2\log (2^x)$?
En van $2^{\,{}^2\log x}$?

9. >a Teken in één figuur de grafieken van $y = 3^x$ en $y = {}^3\log x$.

>b Vul in: ${}^3\log (3^x) = ...$
$3^{\,{}^3\log x} = ...$

>c De lijn $y = \frac{1}{3}$ snijdt de grafiek van $y = 3^x$ in A en die van $y = {}^3\log x$ in B.
Bereken de lengte van lijnstuk AB.

10. >a Teken in één figuur de grafieken van $y = 0{,}5^x$ en $y = {}^{0,5}\log x$.

>b Voor welke x geldt: ${}^{0,5}\log x = 5$?
En ${}^{0,5}\log x = -6$?

>c Teken de grafiek van 1^x. Verklaar waarom het niet zinvol is te spreken van een logaritme met grondtal 1.

Aan de grafieken van opgaven 8, 9, 10 zie je dat het domein van de functies uitsluitend positieve getallen bevat. We zeggen ook: $x \to {}^2\log x$, $x \to {}^2\log x$, $x \to {}^{0,5}\log x$ zijn alleen gedefinieerd voor $x > 0$.
Bovendien moet het grondtal van een logaritme positief zijn en $\neq 1$.

Kortom:

${}^a\log x$ is alleen gedefinieerd voor $a > 0, a \neq 1$ en $x > 0$

11. Bekijk de kettingfunctie:.

$$x \xrightarrow[\text{min } 3]{} x - 3 \xrightarrow[{}^2\log]{} {}^2\log (x - 3)$$

>a Bereken de uitkomst bij de invoerwaarde respectievelijk: 11, 5, 4, $3\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{8}$

>b Voor welke x-waarden is ${}^2\log (x - 3)$ gedefinieerd?

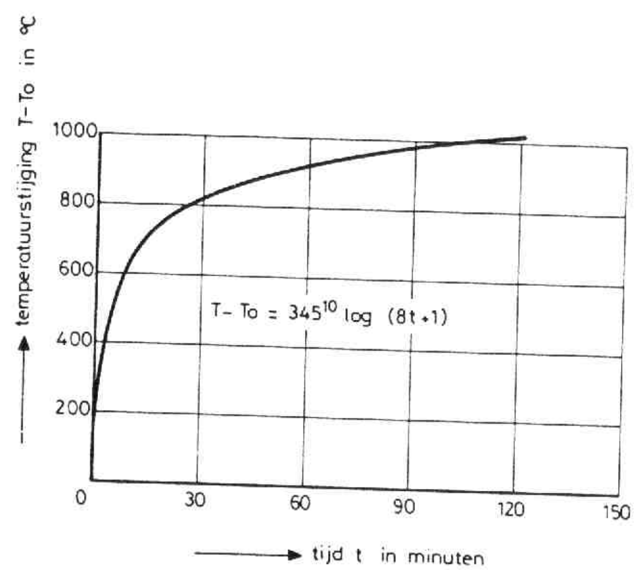
>c Teken een grafiek van $y = {}^2\log (x - 3)$.

>d Welke lijn is asymptoot van die grafiek?

>e Voor welke x geldt: ${}^2\log (x - 3) = 4$?

12. Een voorbeeld van een logaritmische functie in de praktijk is de *standaardbrandkromme*.
Bij voorzieningen voor de brandveiligheid van een gebouw is het van belang te weten hoe de hitte bij een standaardbrand zich ontwikkelt.

De grafiek geeft het verloop van de temperatuurstijging $T - T_0$ in de tijd.
(T_0 is de temperatuur op het moment dat de brand ontstaat)



>a Bekijk de formule bij de grafiek. Controleer dat $T = T_0$ voor $t = 0$.

>b In de grafiek zie je dat in het vierde halve uur na het ontstaan van de brand, de temperatuur met 1000 °C is opgelopen.
Bereken met de formule na hoeveel minuten dat is.

TERUGBLIK

De a logaritme van b wordt genoteerd als ${}^a\log b$.

$$\boxed{\text{Als } {}^a\log b = t, \text{ dan } a^t = b}$$

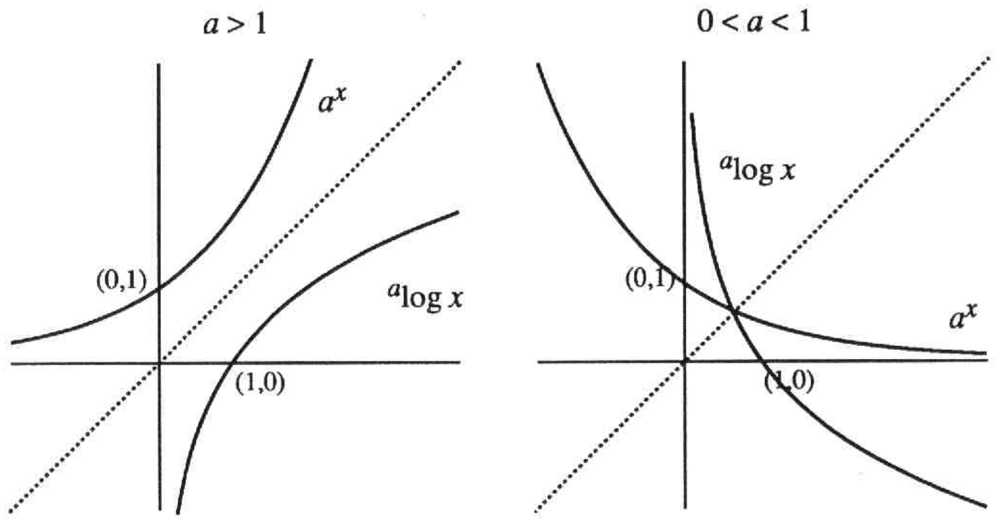
Ofwel

$$\boxed{{}^a\log b \text{ is de oplossing van de vergelijking } a^t = b}$$

${}^a\log b$ is alleen gedefinieerd als a en b beide positief zijn en als bovendien $a \neq 1$.

De functies $x \rightarrow a^x$ en $x \rightarrow {}^a\log x$ zijn elkaars inverse.

De grafieken van $y = a^x$ en $y = {}^a\log x$ zijn elkaars spiegelbeeld ten opzichte van de lijn $y = x$.



De grafiek van $y = {}^a\log x$ heeft een verticale asymptoot, namelijk de y-as.

Opgaven

>a Bereken: ${}^2\log 1$; ${}^4\log 2$; ${}^8\log 4$; ${}^{16}\log 8$

>b Bereken: ${}^3\log 3^{10}$; ${}^3\log 9^{10}$; ${}^9\log 3^{10}$; ${}^9\log 9^{10}$

>c In welk punt snijdt de grafiek van $y = {}^2\log (x + 4)$ de x-as?
En in welk punt de y-as?

>d Teken de grafiek van $y = {}^2\log (x + 4)$ en los op: ${}^2\log (x + 4) < 4$
(Denk ook aan de beperkende voorwaarde voor x)

11 Logaritmen met grondtal 10

De functies $x \to a^x$ en $x \to {}^a\log x$ (grondtal $a > 0$, $a \neq 1$) behoren tot de groep van standaardfuncties. Welke toetsen op je rekenmachientje passen bij deze functies?
Voor de exponentiële functies kun je op de meeste rekenmachientjes drie knoppen vinden:

$\boxed{x^y}$ te gebruiken voor alle exponentiële functies, met welk grondtal dan ook.

$\boxed{10^x}$ voor de exponentiële functies met grondtal 10.

$\boxed{e^x}$ voor de exponentiële functies met grondtal 2,71828 ...... (= e)
Op de speciale betekenis van e komen we terug in een volgend boekje.

Voor de logaritmische functies beperkt de rekenmachine zich tot de grondtallen 10 en e.

$\boxed{\text{log}}$ te gebruiken voor de logaritmische functies met grondtal 10.

$\boxed{\text{ln}}$ te gebruiken voor de logaritmische functies met grondtal e.

In dit boekje gebruiken we alleen de toets voor 10-logaritmen. We gebruiken ook de kortere notatie $\log x$ in plaats van ${}^{10}\log x$.
Met behulp van de 10-logaritmen kun je ook logaritmen met een ander grondtal berekenen, zoals je in dit hoofdstuk zult leren.

1. >a Bereken met je rekenmachientje het rijtje:
   log 1, log 10, log 100, log 1000.

   >b Bereken ook het rijtje:
   log 5, log 50, log 500, log 5000.

2. Met je rekenmachientje vind je: $\log 3 \approx 0{,}4771$.
   Dat betekent: de exponent van de 10-macht met uitkomst 3, is ongeveer 0,4771.
   Kortweg: $10^{0,4771} \approx 3$.

   >a Controleer dit laatste op je rekenmachientje.

   >b Vul passende exponenten, afgerond in 4 decimalen, in:

$2 \approx 10^{....}$;	$5 \approx 10^{....}$;	$25 \approx 10^{....}$
$200 \approx 10^{....}$;	$0{,}2 \approx 10^{....}$;	$250 \approx 10^{....}$
$1990 \approx 10^{....}$;	$1{,}99 \approx 10^{....}$;	$123456 \approx 10^{....}$

3. >a Bereken log 4 en vervolgens $10^{\log 4}$. Verrassing?

   >b Wat is de uitkomst van $10^{\log x}$?

   >c Bereken zonder rekenmachientje:

   $10^{\log 12}$; $(10^{\log 5})^3$; $10^{-\log 2}$; $100^{\log 3}$;

   $10^{\log 2} . 10^{\log 3}$; $10^{\log 2 + \log 3}$; $10^{\log 6}$; $6^{\log 10}$.

De log-toets kan worden gebruikt voor exponentiële vergelijkingen die niet 'mooi' uitkomen.

Voorbeeld:

$2^x = 6$

Oplossing: schrijf 2 en 6 als machten van 10.

Met je rekenmachientje vind je: $2 \approx 10^{0,3010}$ en $6 \approx 10^{0,7781}$

Bij benadering geldt nu:

$(10^{0,3010})^x = 10^{0,7781} \rightarrow x = \frac{0,7781}{0,3010} = 2,2850$

Je kunt de oplossing ook als volgt noteren:

$2^x = 6$

$(10^{\log 2})^x = 10^{\log 6}$

$(\log 2) \cdot x = \log 6 \rightarrow x = \frac{\log 6}{\log 2} = \frac{0,7781}{0,3010} = 2,2850$

4. > Controleer met je rekenmachientje dat $2^{2,5850}$ ongeveer gelijk is aan 6.

5. Benader de oplossingen in vier decimalen nauwkeurig van:

   >a $3^x = 5$

   >b $5^x = 3$

   >c $2^x = 1000$

   >d $10^x = 18$

   >e $5^x = 0,01$

   >f $3^x = 60000$

6. Uit bovenstaand voorbeeld volgt: ${}^2\log 6 = \frac{\log 6}{\log 2}$.

   >a Toon dit aan.

   >b Hoe kun je ${}^a\log b$ uitdrukken in 10-logaritmen?

   >c Bereken in vier decimalen nauwkeurig:

   ${}^3\log 5$; ${}^{30}\log 50$; ${}^2\log 0,1$; ${}^{0,5}\log 0,01$

   >d Bereken zo nauwkeurig mogelijk:

   ${}^{0,5}\log 0,03125$; ${}^3\log 59049$; ${}^7\log 2401$; ${}^7\log \frac{1}{2401}$

7. >a Beantwoord zonder rekenmachientje te gebruiken:

   Tussen welke twee opvolgende gehele getallen ligt ${}^2\log 100$?

   En ${}^3\log 100$?

   >b Bereken ${}^2\log 100$ en ${}^3\log 100$ met je rekenmachientje.

Bij exponentiële groei is men vaak geïnteresseerd in de zogenaamde verdubbelingstijd.

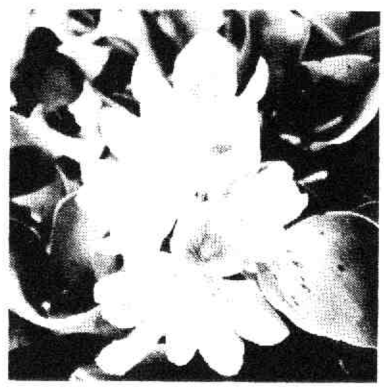
Voorbeeld:

Een waterhyacint in een meer groeit exponentieel met 35% per jaar.
De groeifactor is dus 1,35.
In t jaar groeit de waterplant met factor $(1{,}35)^t$.
De verdubbelingstijd wordt gevonden uit de vergelijking:

$$1{,}35^t = 2$$

Dit geeft: $t = {}^{1,35}\log 2 = \frac{\log 2}{\log 1{,}35} \approx 2{,}3096854$

De verdubbelingstijd is dus zo'n 2,3 jaar.



Waterhyacint

8. Iemand zet een flinke geldsom vast op de spaarbank tegen een rente van 5% per jaar. De rente die jaarlijks wordt bijgeschreven levert ook weer rente op. Kortom: het kapitaal groeit exponentieel met 5% per jaar.

   > Na hoeveel jaar ongeveer is het kapitaal verdubbeld?

9. De stralingsintensiteit van een zekere radio-actieve stof neemt exponentieel af met 10% per maand.

   > Hoeveel maanden is de halfwaarde-tijd?
   (Dat is de tijd die nodig is om de stralingsintensiteit te halveren)

10. >a Geef een benaderende oplossing van $3^{x-2} = 7$.

    >b Ook van $3^{x-2} = 7^x$.

11. Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{{}^2\log x}{{}^3\log x}$ $(x > 0, x \neq 1)$.

    >a Bereken $f(x)$ voor enige waarden van x.

    >b Walt valt je op? Verklaar dat.

12 Logaritmische eigenschappen

1. >a Bereken in 1 decimaal nauwkeurig: ${}^{2}\log 3$, ${}^{2}\log 5$ en ${}^{2}\log 15$.

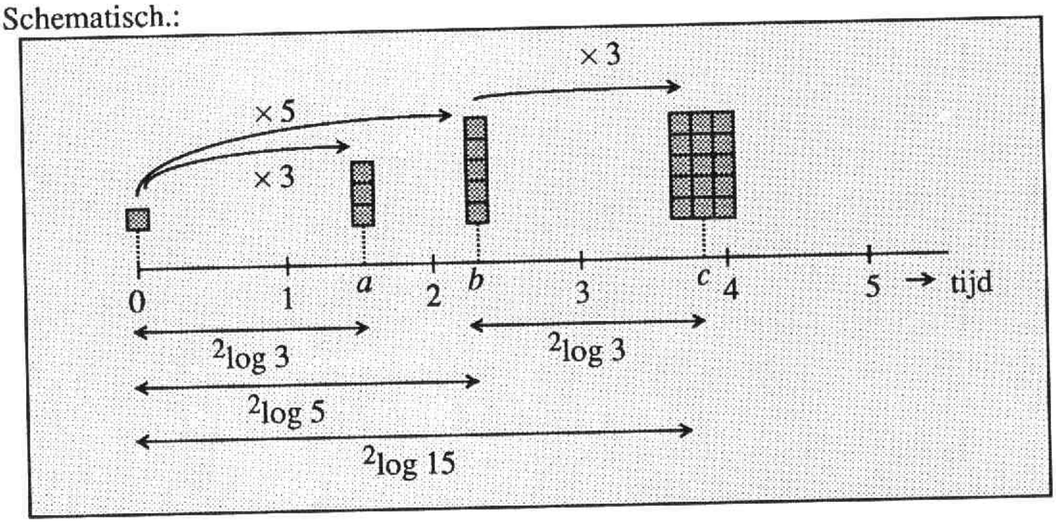
   >b Welk verband lijkt er tussen deze drie logaritmen te bestaan?

   >c Iemand beweert: ${}^{2}\log 3 + {}^{2}\log 5 = {}^{2}\log 8$. Klopt dat?

Het verband dat je in opgave 1 hebt gezien, kan worden uitgelegd met behulp van de groeiende waterplant van hoofdstuk 6. (groeifactor 2 bij tijdsinterval met lengte 1).
Er geldt:

${}^{2}\log 3$ = lengte tijdsinterval waarin groeifactor 3 is
${}^{2}\log 5$ = lengte tijdsinterval waarin groeifactor 5 is
${}^{2}\log 15$ = lengte tijdsinterval waarin groeifactor 15 is

Schematisch.:



2. >a Verklaar uit bovenstaand schema: ${}^{2}\log 5 + {}^{2}\log 3 = {}^{2}\log 15$

   >b Je kunt de betrekking ook met algebra afleiden.
   Stel ${}^{2}\log 3 = a$, ${}^{2}\log 5 = b$ en ${}^{2}\log 15 = c$.
   Er geldt dus: $2^{a} = 3$, $2^{b} = 5$ en $2^{c} = 15$.
   Hoe volgt nu: ${}^{2}\log 3 + {}^{2}\log 5 = {}^{2}\log 15$?

In opgave 2 is het bewijs geleverd van de zogenaamde *hoofdeigenschap* van de logaritmen: ${}^{2}\log p + {}^{2}\log q = {}^{2}\log pq$
In woorden:
De som van twee logaritmen (met grondtal 2) is de logaritme van het produkt.
Deze eigenschap geldt natuurlijk ook voor andere grondtallen dan 2.
Algemeen geformuleerd luidt de eigenschap:

$$\boxed{{}^{a}\log p + {}^{a}\log q = {}^{a}\log pq}$$

3. Neem over en vul $\square$ en $\bigcirc$ in:

   >a $^{6}\log 4 + {}^{6}\log 9 = {}^{6}\log \square = \bigcirc$

   >b $^{21}\log 3 + {}^{21}\log 7 = {}^{21}\log \square = \bigcirc$

   >c $\log 40 + \log \square = \log 1000 = \bigcirc$

4. Bekijk nog eens de ingevulde tabel bij opgave 2 van blz 42.

oppervlakte	3	6	12	24	48	96
tijd in weken	1,6	2,6	3,6	4,6	5,6	6,6

   Uit de tabel zie je bijvoorbeeld: $^{2}\log 6 + 1 = {}^{2}\log 12$

   >a Wat heeft dit te maken met de hoofdeigenschap: $^{2}\log p + {}^{2}\log q = {}^{2}\log pq$?

   >b Hoe volgt: $^{2}\log 12 + 3 = {}^{2}\log 96$ uit de hoofdeigenschap?

In de tabel hierboven zie je ook: $^{2}\log 48 - {}^{2}\log 12 = {}^{2}\log 4$

$^{2}\log 6 - {}^{2}\log 3 = {}^{2}\log 2$

Kortom: $^{2}\log p - {}^{2}\log q = {}^{2}\log \frac{p}{q}$

Deze regel volgt onmiddellijk uit de hoofdeigenschap (kijk ook naar 3 >c).
In woorden luidt de regel:
Het verschil van twee logaritmen (met grondtal a) is de logaritme van het quotiënt.
In formule:

$$\boxed{^{a}\log p - {}^{a}\log q = {}^{a}\log \frac{p}{q}}$$

5. Bereken zonder rekenmachientje:

   >a $^{2}\log 72 - {}^{2}\log 9$

   >b $^{2}\log 240 - {}^{2}\log 12 - {}^{2}\log 5$

   >c $\log 2 + \log 4 + \log 5 + \log 25$

   >d $^{5}\log 6 - {}^{5}\log 5 - {}^{5}\log 4 - {}^{5}\log 3 + {}^{5}\log 2$

Voorbeeld:

Los x op uit:	$^{2}\log x + {}^{2}\log 8$	$= {}^{2}\log 12$	
Oplossing:	$^{2}\log 8x$	$= {}^{2}\log 12$	$\rightarrow 8x = 12 \rightarrow x = 1\frac{1}{2}$
Volgens het schema	$^{2}\log \bigcirc$	$= {}^{2}\log \square$	$\rightarrow \bigcirc = \square$

6. Los x op uit:

   >a $^{2}\log x + {}^{2}\log 5 = {}^{2}\log 95$

   >b $^{3}\log x = {}^{3}\log 24 + {}^{3}\log 0{,}5$

   >c $^{5}\log x - {}^{5}\log 2 = {}^{5}\log 7$

   >d $\log x + \log 40 = 4$

   >e $\log x - \log 5 = \log 4 + \log 7$

   >f $^{2}\log x - {}^{2}\log 3 = {}^{2}\log 12 - {}^{2}\log x$

7. Hoe presteert een lange-afstand loper op een korte afstand?
En wat is een sprinter waard op bijvoorbeeld de 5000 meter?

De beroemde Tsjechische hardloper Emil Zatopek blonk uit op de 5000 meter, de 10.000 meter en de marathon (ruim 41 km).
Hier komt hij het Olympisch stadion van Helsinki binnen. Hij won goud (1952).

Iemand beweert een formule te hebben gevonden waarmee uit een prestatie op een bepaalde afstand de prestatie op een andere afstand kan worden voorspeld.

Die formule luidt: $v_1 - v_2 = {}^2\log s_2 - {}^2\log s_1$

Hierin zijn s_1 respectievelijk s_2 afstanden in *meters* en v_1 respectievelijk v_2 de bijbehorende gemiddelde snelheden in *km per uur*.
Een lange-afstand loper loopt de 10 km in 30 minuten.
Hij gebruikt de formule om een voorspelling te doen over zijn prestatie op de 400 m.

>a Bereken zijn gemiddelde snelheid in km per uur op de 400 m.
Rond je antwoord af op een geheel getal.

>b Hoe kun je in de formule zien dat bij een langere afstand een lagere gemiddelde snelheid hoort?

>c Wat voor effect heeft verdubbeling van de afstand op de gemiddelde snelheid?

Er is nog een derde formule die belangrijk is bij het rekenen met logaritmen.
Kijk eens naar: $\log x + \log x + \log x = \log xxx$

Ofwel: $3 \cdot \log x = \log x^3$

Dit is (na verwisseling van linker- en rechterlid) een bijzonder geval van de regel:

$$\boxed{{}^a\log x^r = r \cdot {}^a\log x}$$

In woorden:
De a-logaritme van een macht van x is gelijk aan de exponent van die macht, vermenigvuldigd met de a-logaritme van x.

Een paar voorbeelden van het gebruik van deze regel:

$$^{5}\log \sqrt{x} = {}^{5}\log x^{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2} \cdot {}^{5}\log x$$
$$^{2}\log \tfrac{1}{x} = {}^{2}\log x^{-1} = -1 \cdot {}^{2}\log x = -\, {}^{2}\log x$$

8. > Hoe kun je het laatste resultaat ook uit een andere regel verkrijgen?

9. In deze opgave bewijs je de regel $^{a}\log x^{r} = r \cdot {}^{a}\log x$ voor het geval $a = 10$.

   >a Stel $\log x = p$ en druk x en x^{r} beide uit in p.

   >b Stel $\log x^{r} = q$ en druk x^{r} uit in q.

   >c Laat zien dat uit de resultaten van >a en >b volgt $q = rp$ ofwel $\log x^{r} = r \cdot \log x$.

10. Gegeven is $^{a}\log b = 5$ en $^{a}\log c = \frac{1}{2}$.

    > Bereken achtereenvolgens:

    $^{a}\log b^{2}$; $\quad ^{a}\log \frac{b}{c}$; $\quad ^{a}\log b\sqrt{c}$; $\quad ^{a}\log \frac{1}{c}$;

    $^{a}\log bc^{2}$; $\quad ^{a}\log \frac{1}{b^{3}}$; $\quad ^{a}\log \sqrt[3]{c}$; $\quad ^{a}\log \sqrt{bc}$

11. a, b, c zijn positieve getallen.

    >a Bewijs: $\log ab + \log bc + \log ac = 2 \log abc$

    >b Bewijs: $\log \frac{a}{b} + \log \frac{b}{c} + \log \frac{c}{a} = 0$

12. Los x op uit:

    >a $\log x = 3 \cdot \log 6$

    >b $3 \log x = \log 6$

    >c $2 \log \frac{1}{x} = 3 \log 4$

    >d $\log 6 + \log \frac{1}{x} = \log x$

13. $f(x) = {}^{2}\log \sqrt{x}$ en $g(x) = \frac{2}{3} + {}^{2}\log x$.

    >a Teken in één figuur de grafieken van f en g

    >b Bereken de exacte coördinaten van het snijpunt van beide grafieken.

    >c Voor welke x geldt: $f(x) - g(x) > \frac{1}{3}$?

14. >a Teken de grafiek van $y = {}^{2}\log \frac{1}{x-2}$

    >b Los x op uit: $^{2}\log \frac{1}{x-2} > -3$

TERUGBLIK

Voor het rekenen met logaritmen zijn de volgende regels belangrijk:

$$(1)\quad {}^a\log x + {}^a\log y = {}^a\log xy$$

$$(2)\quad {}^a\log x - {}^a\log y = {}^a\log \tfrac{x}{y}$$

$$(3)\quad {}^a\log x^r = r \cdot {}^a\log x$$

$$(4)\quad {}^a\log x = \frac{\log x}{\log a}$$

Regel (4) stelt je in staat om logaritmen met willekurig welk grondtal terug te brengen tot logaritmen met grondtal 10.

Bij logaritmische vergelijkingen werk je vaak toe naar het schema

$$\begin{array}{c} {}^a\log \bigcirc = {}^a\log \square \\ \downarrow \\ \bigcirc = \square \end{array}$$

Opgaven

>a Stel dat de log-knop op je rekenmachientje niet werkt.
Hoe kun je dan toch met behulp van $\log 2 \approx 0{,}3010$ de volgende logaritmen vinden (in twee decimalen nauwkeurig):
$\log \sqrt{2}$; $\log 0{,}25$; $\log (4 \cdot 10^8)$; $\log (8 \cdot 10^{-4})$

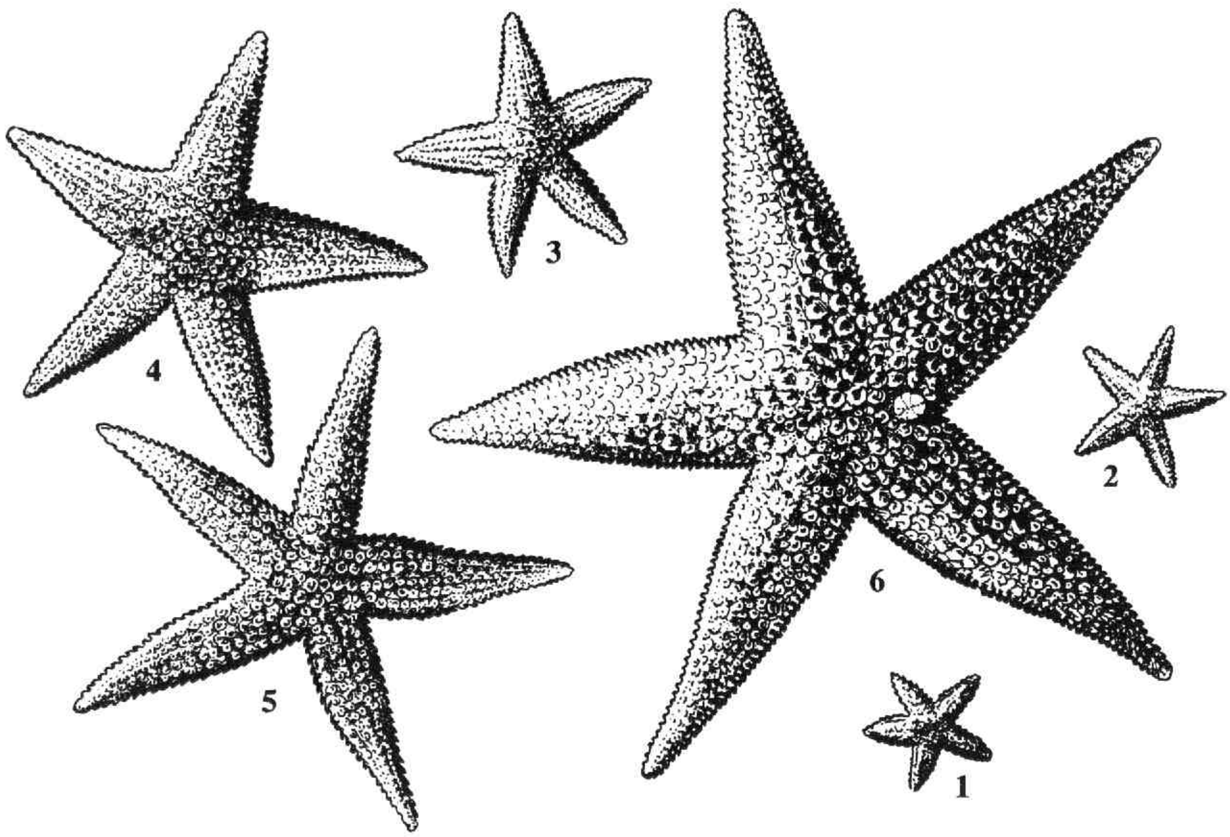
>b Als je met je rekenmachientje 2^{100} uitrekent krijg je de uitkomst in de notatie: $1.26765 \cdot 10^{30}$. Verklaar de exponent 30 uit het gegeven van >a.

>c Voor welke $x > 3$ geldt: ${}^4\log (x - 3) + {}^4\log (x + 3) = 2$?

>d Tussen de grootheden x en y bestaat het verband: $\log y = 3 \log x$.
Teken de grafiek van y als functie van x.

>e Bewijs dat ${}^2\log 3$ en ${}^3\log 2$ elkaars omgekeerde zijn.

13 Logaritmische transformaties



Zes momentopnamen van de groei van een zeester.
Van elke zeester is de armlengte gemeten (vanuit het midden van de ster).
Het resultaat kun je vinden in onderstaande tabel.

nummer	datum	armlengte
1	26 juli	9 mm
2	2 aug	11 mm
3	18 aug	16 mm
4	12 sept	26 mm
5	26 sept	34 mm
6	19 okt	57 mm

1. Om na te gaan of er sprake is van exponentiële groei ga je een grafiek maken. Neem $t = 0$ op 26 juli en neem als tijdseenheid 10 dagen.

   >a Teken een grafiek van de armlengte a als functie van de tijd t.

   >b Aangenomen dat er sprake is van exponentiële groei, hoe groot ongeveer is dan de groeifactor per 10 dagen?

De kromme die je bij opgave 1 krijgt, lijkt wel wat op een exponentiële kromme. Erg overtuigend klinkt dit niet; het is nu eenmaal lastig om aan een kromme te zien tot welke familie zij behoort.
Er is een handige manier om meer zekerheid te krijgen. Met logaritmen kun je een exponentiële functie namelijk omvormen tot een lineaire functie.
Dat gaat zo:

Ga uit van $y = c \cdot p^x$ en neem links en rechts de 10-logaritme.
Volgens de eigenschappen van de logaritme komt er:

$$y = c \cdot p^x$$

$$\log y = \log c + \log p^x$$

$$\log y = \log c + x \cdot \log p$$

Omgekeerd volgt de bovenste regel uit de onderste.

Dus y is een *exponentiële* functie van x, als $\log y$ een *lineaire* functie van x is.
Omdat de grafiek van een lineaire functie wel direct herkenbaar is (rechte lijn!), is het handig om in het geval van de zeester $\log a$ uit te zetten tegen t.

2. >a Vul onderstaande tabel in:

nummer	t	$\log a$ (in 2 decimalen)
1	0	
2	0,7	
3	2,3	
4	4,8	
5	6,2	
6	8,5	

>b Laat zien dat de grafiek van $\log a$ als functie van t goed benaderd wordt door een rechte lijn.

De hellingscoëfficiënt van de rechte lijn die je in opgave 2 gevonden hebt, kan worden geschat op 0,094. De betrekking tussen $\log a$ en t wordt dan:

$$\log a = 0{,}95 + 0{,}094 \cdot t$$

Daaruit volgt:

$$a = 10^{0{,}95 + 0{,}094 \cdot t}$$

$$a = 10^{0{,}95} \cdot (10^{\,0{,}094})^t$$

$$a = 9 \cdot 1{,}24^{\,t}$$

Kortom: a groeit exponentieel met een groeifactor (per 10 dagen) die (ongeveer) gelijk is aan 1,24.

3. De oppervlakte en het gewicht van de zeester groeien ook volgens exponentiële functies.

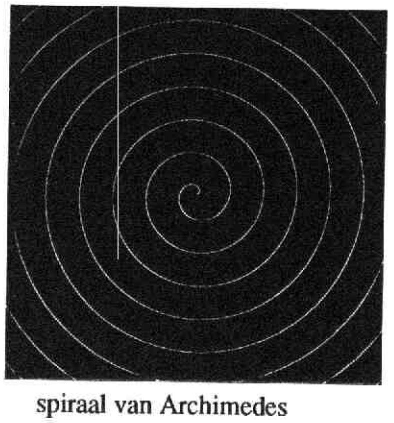
   >a Hoe groot is de groeifactor (per 10 dagen) van de oppervlakte?

   >b En van het gewicht?

4. *Spiralen*

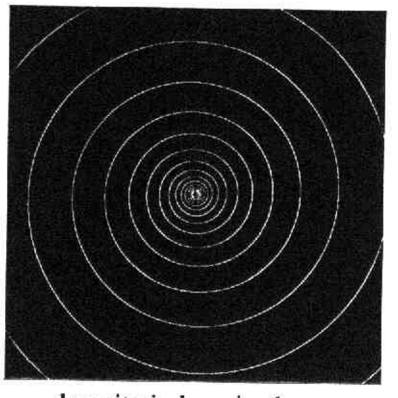
Een spiraalvormige kromme ontstaat door een beweging rond een centrum, waarbij de afstand tot het centrum geleidelijk groter (of geleidelijk kleiner) wordt. Hieronder zie je twee voorbeelden van beroemde spiralen.

(1)



spiraal van Archimedes

(2)



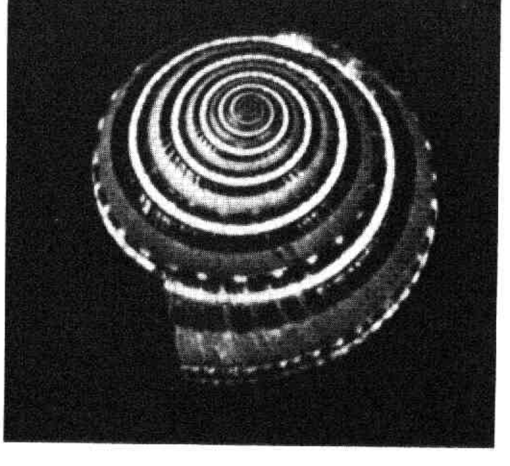
logaritmische spiraal

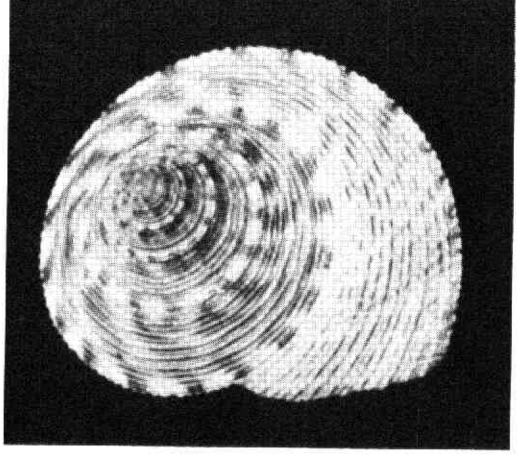
>a Bij de spiraal van Archimedes verandert de afstand tot het centrum (O) in een vaste richting lineair met het aantal windingen.
Controleer dat in figuur 1.

>b Bij de logaritmische spiraal verandert de *logaritme* van de afstand tot O in een vaste richting lineair.
Controleer dat in figuur 2.

>c Vul in: bij een logaritmische spiraal groeit de afstand tot O in een vaste richting volgens een .... functie.

De Archimedische spiraal vind je op elke grammofoonplaat en compact disc. Logaritmische spiralen tref je in de natuur aan; er zijn vele fraaie schelpen met zulke spiraalpatronen.





Onderstaande tabel geeft het verband tussen de omlooptijd van een planeet en de afstand tot de zon.

planeet	omlooptijd T (dagen)	gemiddelde afstand tot de zon R (km $\times 10^6$)
Mercurius	88	57,9
Venus	225	108,2
Aarde	365	149,6
Mars	687	227,7
Jupiter	4329	778,3
Saturnus	10753	1427,0
Uranus	30660	2870,0
Neptunus	60150	4497,0
Pluto	90670	5907,0

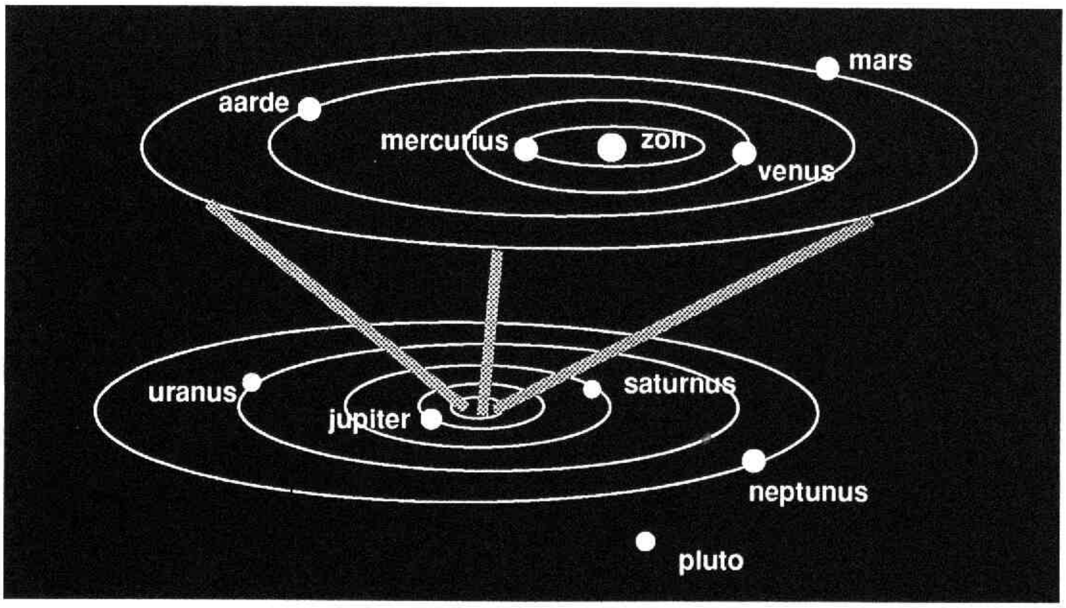
5. >a Maak een tabel van log T en log R.

planeet	log T	log R
Mercurius	1,94	1,76
......	....	....

>b Zet in een grafiek log T uit tegen log R.

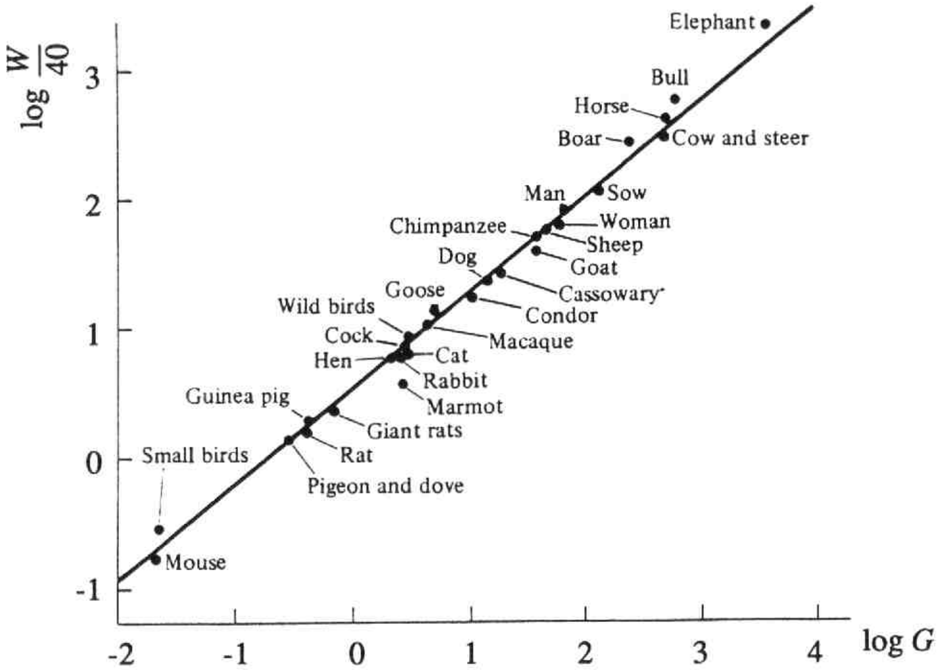
>c Uit de grafiek blijkt dat er een lineair verband bestaat tussen log T en log R, dus: $\log T = a \cdot \log R + b$
Bepaal a en b.

>d In hoofdstuk 2 werd als formule meegedeeld: $T = 0{,}2 \cdot R^{1,5}$
Controleer of deze formule in overeenstemming is met de resultaten van vraag >c



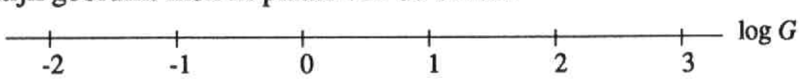
6. De (verwachte) levensduur van een zoogdier in gevangenschap (de mens niet meegerekend) is afhankelijk van de grootte van het dier.
Sachs vond de benaderende formule: $\log T = 1{,}07 + 0{,}20 \log G$
(T is de levensduur in jaren, G is het levensgewicht in kg)
   >a Bereken de verwachte levensduur van een olifant in Artis van 4000 kg.
   >b De formule drukt $\log T$ uit in $\log G$.
   Je kunt natuurlijk ook T uitdrukken in G. Welke formule krijg je?

7. Hieronder zie je de grafiek die het verband geeft tussen het lichaamsgewicht G (in kg) van warmbloedige dieren en de warmteproduktie W (in Joule).

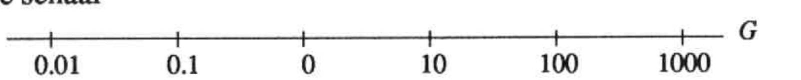


Op de horizontale as is $\log G$ uitgezet en op de verticale as $\log \frac{W}{40}$
>a Hoe zwaar is een cavia (Guinea pig) volgens deze grafiek?
>b Hoeveel warmte produceert de (gemiddelde) man per dag?
>c Stel een (benaderende) formule op die het verband geeft tussen W en G.

Opmerking
In de praktijk gebruikt men in plaats van de schaal



ook wel de schaal



Die tweede schaal wordt de *logaritmische schaal* genoemd.