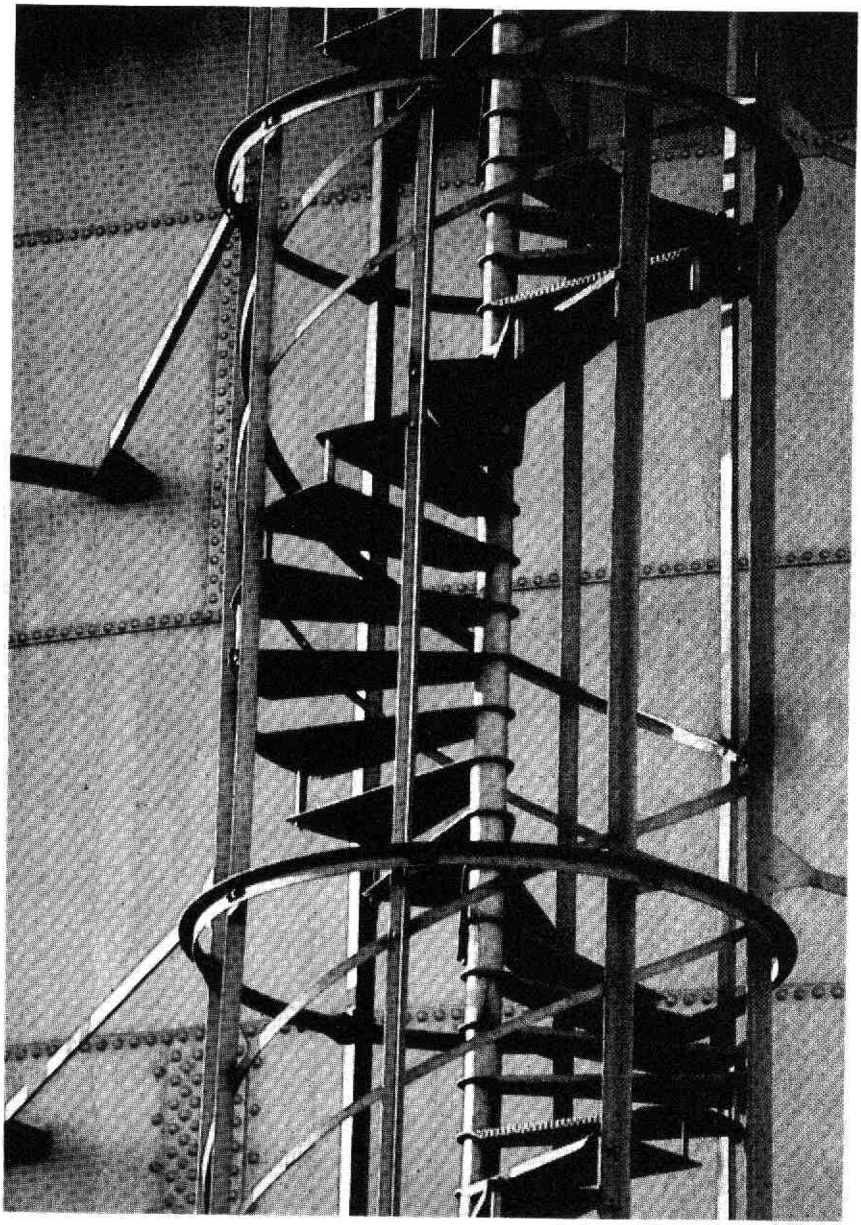
Sinus en Co

https://hdl.handle.net/1874/10133

SINUS EN CO



wiskunde B

Sinus en Co

Hawex - Wiskunde B

Sinus en Co.

Een produktie ten behoeve van het project Hawex.

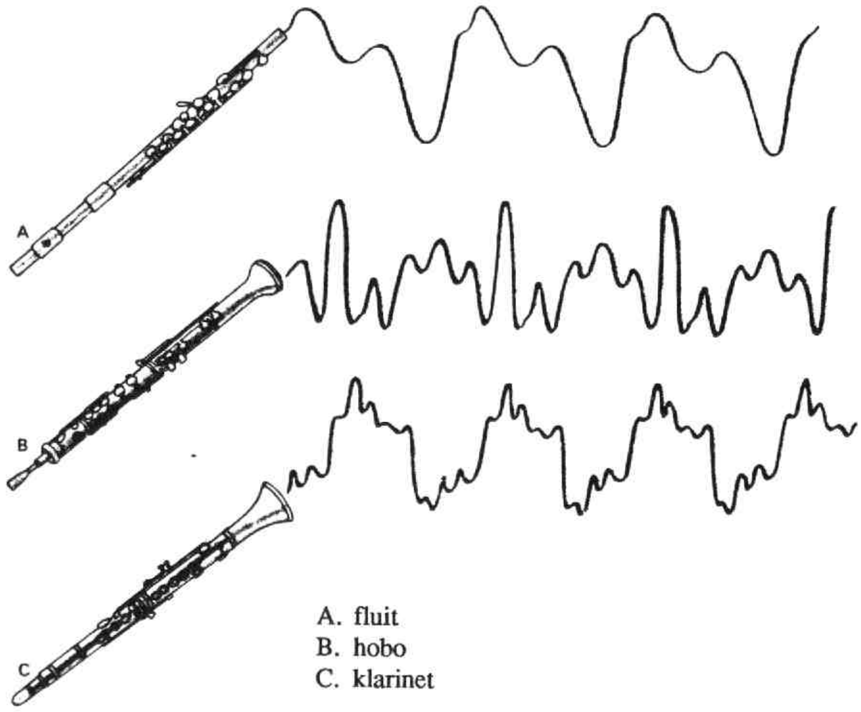
Ontwerper:	Martin Kindt
Met medewerking van:	Henk van der Kooy Martin van Reeuwijk Anton Roodhardt Jan de Jong
Vormgeving:	Ada Ritzer

ongewijzigde 3e versie

Inhoudsopgave

Inleiding.

Muziek kun je waarnemen doordat trillingen, veroorzaakt door een instrument, via de lucht je trommelvliezen bereiken en deze doen trillen.
Verschillende muziekinstrumenten brengen verschillende trillingspatronen voort.



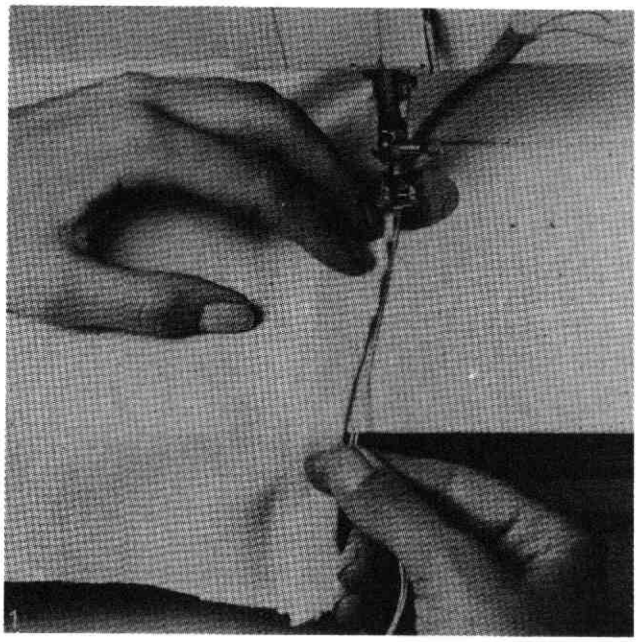
A. fluit
B. hobo
C. klarinet

De studie van dergelijke patronen berust op goniometrische functies.
Goniometrische functies spelen ook een belangrijke rol in de electronica.
In dit boekje wordt de basiskennis van goniometrische functies, in het bijzonder de *sinusfunctie,* behandeld.

1 Periodieke bewegingen

De trillingspatronen zoals die hiernaast zijn afgebeeld zijn *periodiek*.
Dat wil zeggen dat een zeker basispatroon steeds wordt herhaald.
Periodieke patronen zijn ook terug te vinden in de verschillende soorten steken die met een elektrische naaimachine kunnen worden gemaakt.

Zo'n steek kan worden geproduceerd door het heen- en weer bewegen van de naald en het gelijkmatig verplaatsen van de stof onder de naald.

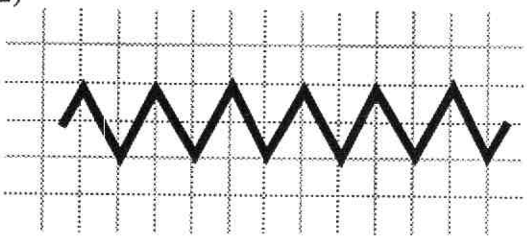


Stikkende zigzag	**Blindzoom**	**Rimpelsteek**	**Boognaad**
 Voor de meeste soorten stof Afwerken van los geweven stoffen, stofkanten versterken en verbeteren, siernaad	 Voor de meeste soorten stof Blindzoom, in zachte jersey en fijne stof, siernaad	 Voor allerlei soorten stof Inrijgen met parelgaren Voegnaad = omgevouwen stofkanten aan elkaar naaien	 Voor allerlei soorten stof Stoppen met de boognaad, stofkanten versterken etc.

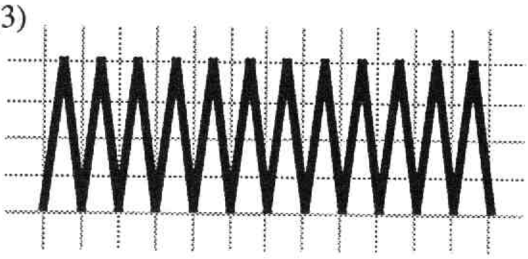
1. Hieronder zie je vier zig-zag-steken die met één machine kunnen worden gemaakt.

(1)

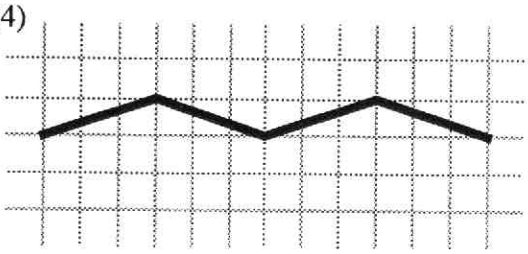
(2)



(3)



(4)

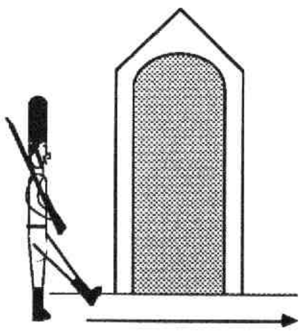


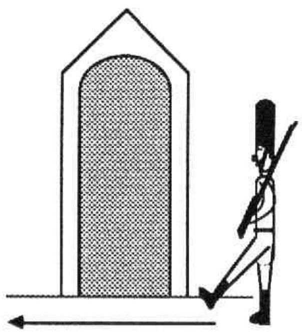
>a Waardoor worden de verschillen tussen de patronen (1), (2), (3) en (4) veroorzaakt?

>b In (1) is de maximale uitwijking van de naald naar boven of beneden 1 hokje.
We zeggen: de *amplitude* is 1.
Hoe groot is de amplitude van achtereenvolgens de patronen (2), (3) en (4)?

>c De lengte van steek (1) is 4 hokjes.
We zeggen ook: de *periode* van (1) is 4.
Hoe groot is de periode van achtereenvolgens (2), (3) en (4)?.

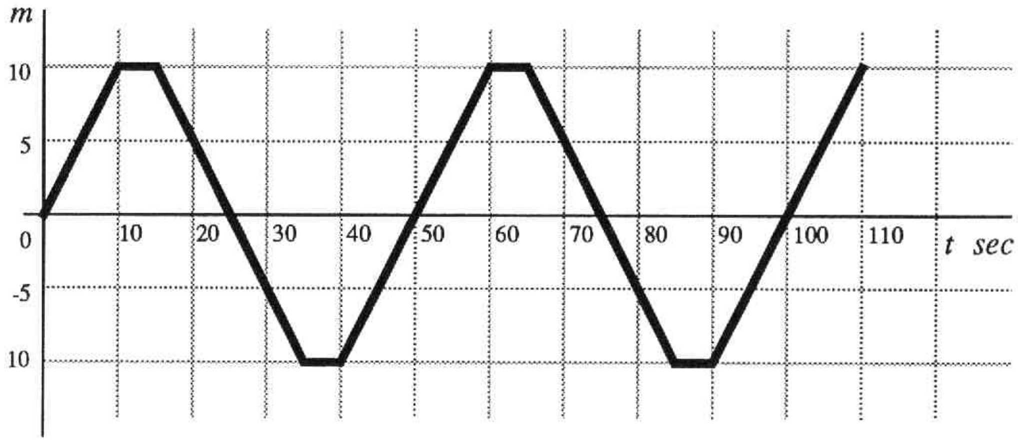
Een ander eenvoudig voorbeeld van een periodiek verschijnsel is de beweging van een schildwacht ('guard') die heen en weer marcheert voor het wachthuisje.





Bekijk de grafiek op bladzijde 3.
Het getal 0 op de verticale as geeft de plaats van het wachthuisje aan. De maximale afstand van de schildwacht tot het huisje is tien meter. 'Plaats 10' betekent tien meter rechts, 'plaats -10' betekent tien meter links van het huisje.

Tijd, plaats-grafiek van het wachtlopen:



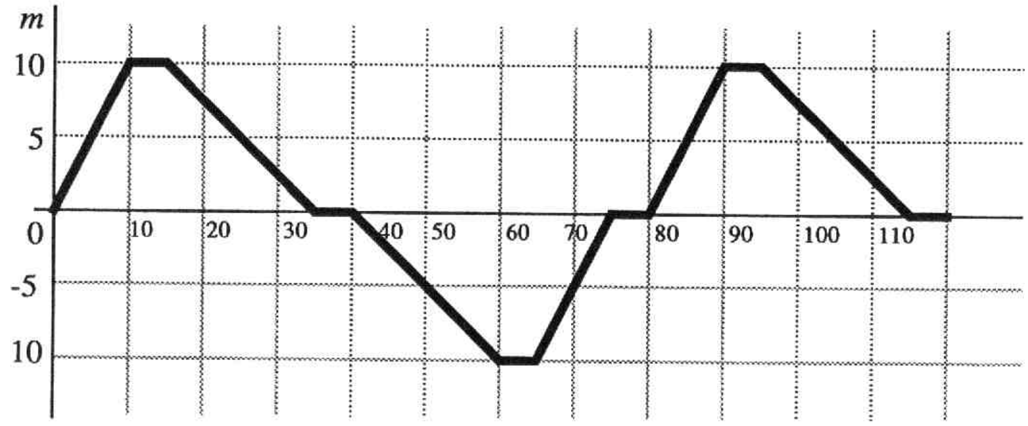
2. Bekijk de schildwacht-grafiek.
   - >a Verklaar de horizontale stukjes in de grafiek.
   - >b Met welke snelheid (km/u) marcheert de schildwacht?
   - >c De schildwacht wordt na twee uur wachtlopen afgelost. Hoeveel meter heeft hij dan in totaal gelopen?

3. De nieuwe schildwacht marcheert tot twintig meter aan weerszijden van het huisje. Zijn snelheid is gelijk aan die van zijn voorganger. Voor het keren neemt hij twee keer zoveel tijd (dus tien seconden).
   - >a Teken de grafiek van de mars van de nieuwe schildwacht gedurende de eerste drie minuten.
   - >b Op welke tijdstippen gedurende de twee uur wachtlopen passeert deze schildwacht het punt tien meter rechts van het wachthuisje?

4. Bij de schildwacht-grafiek van opgave 2 is de periode 50 en de amplitude 10.
   - > Hoe groot zijn periode en amplitude bij de schildwacht-grafiek van opgave 3?

5. Van een periodieke beweging ('heen-en-weer') met constante snelheid zijn de volgende gegevens bekend: de amplitude is 5 (m), de periode is 20 (sec) en de tijd nodig om te keren is 4 (sec).
   - > Teken een grafiek van deze beweging.

6. Bekijk onderstaande schildwacht-grafiek.

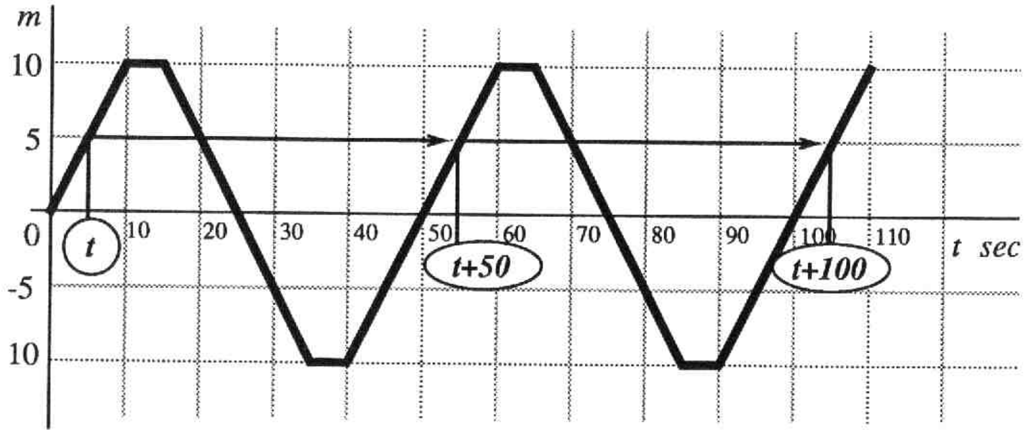


>a Wat kun je zeggen over de manier van wachtlopen?

>b Hoeveel m loopt deze schildwacht gedurende 2 uur?

>c Op het moment $t = 85$ bevindt de schildwacht zich op de plaats $y = 5$.
Op welke momenten tussen $t = 0$ en $t = 200$ bevindt die schildwacht zich op dezelfde plaats?

Opnieuw de eerste schildwacht.
De plaats op het tijdstip t noteren we als $s(t)$.
Dus bijvoorbeeld: $s(20) = 5$; $s(50) = 0$; $s(90) = -10$



Neem nu de positie op een willekeurig tijdstip t.
Omdat elke 50 sec de schildwacht zijn beweging herhaalt, geldt:
$s(t+50) = s(t)$ (zie figuur).
Weer 50 seconden later is de schildwacht opnieuw op dezelfde plaats,
dus: $s(t+100) = s(t)$.

7. Welk verband bestaat er tussen

>a $s(t+150)$ en $s(t)$?

>b $s(t+25)$ en $s(t)$?

>c $s(t+75)$ en $s(t+25)$?

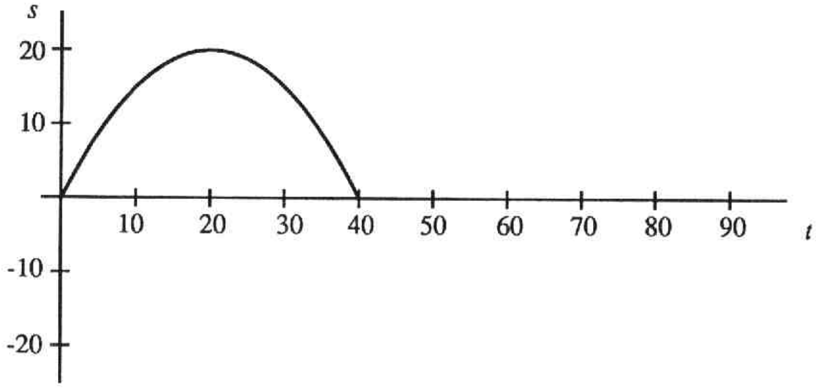
Bekijk de laatste grafiek op bladzijde 4. Er geldt:

$s(t) = s(t+50) = s(t+100) = s(t+150) = ...$

In woorden:
Je mag een geheel aantal keren de periode 50 bij t optellen, de waarde van s verandert dan niet.

8. > Schrijf iets dergelijks op bij de beweging van opgave 6.

9. Nu een heen-en-weer-beweging vanuit een startpunt 0, waarbij de snelheid een constante verandering ondergaat.
Voor $0 \leq t \leq 40$ geldt: $s(t) = -0{,}05\, t^2 + 2t$



>a Controleer de grafiek voor $t = 0$, 20 en 40.

Voor $40 \leq t \leq 80$ vindt eenzelfde beweging plaats aan de andere kant van het startpunt.
Kort gezegd: $s(t+40) = -s(t)$.

>b Teken het gedeelte van de grafiek van $40 \leq t \leq 80$.

Nadat op $t = 80$ het bewegend object weer terug is in het startpunt, herhaalt de beweging zich van voor af aan.
Kortom: $s(t+80) = s(t)$.

>c Op welke momenten tussen $t = 0$ en $t = 160$ bevindt het object zich op afstand 15 van het startpunt?

$v(t)$ is de snelheid van het object op het moment t.

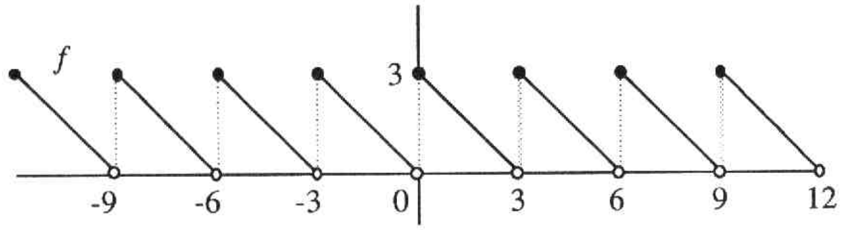
>d Teken de grafiek van v als functie van t voor $0 \leq t \leq 160$.

2 Rekenen met perioden

1. >a Een Himalaya-expeditie vertrekt op maandag en duurt precies 100 dagen. Op welke dag van de week eindigt die expeditie?

   >b Als er geen schrikkeljaar tussen zit, verschuift 25 december één jaar later naar de volgende dag in de week. Bekend feit natuurlijk.
   Maar hoe kun je dit verklaren door een berekening?

2. Hieronder staat een zogenaamde zaagtand-grafiek.
   Die grafiek hoort bij een periodieke functie f en kan naar beide kanten worden voortgezet.
   De zwarte stippen horen bij de grafiek, de witte niet.
   Bijvoorbeeld: $f(6) = 3$ (en niet $f(6) = 0$) !!



   >a Verklaar: $f(301) = f(1) = 2$.

   >b Bepaal: $f(15)$; $f(19)$; $f(50)$; $f(731)$; $f(1000)$

   >c Ook: $f(-10)$; $f(-100)$; $f(-165)$; $f(-1000)$

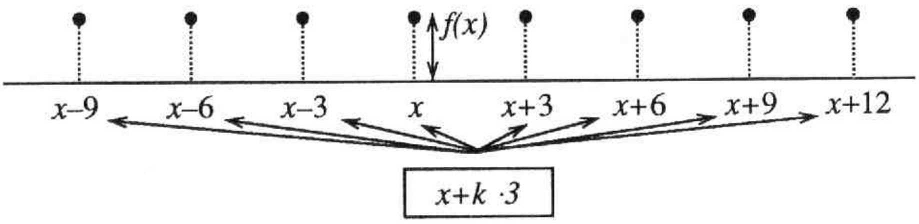
   >d Bepaal $f(\frac{1}{2} + k \cdot 3)$ voor $k = 35$, $k = 107$ en $k = -20$.

De functie van opgave 2 is periodiek met periode 3.
De grafiek bevat een eenvoudig 'patroon' dat zich als maar herhaalt.

Patroon èn periode geven alle informatie over de functie.
Die informatie kan ook in formulevorm worden gegeven:

patroon: $f(x) = 3 - x$ voor $0 \leq x < 3$
herhaling: $f(x + k \cdot 3) = f(x)$ voor $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

De eerste formule is gemakkelijk te doorzien (een stukje 'lineaire functie').
De herhalingsformule is lastiger. De formule drukt uit dat de functiewaarde niet verandert als de x met een aantal sprongen van 3 verandert.



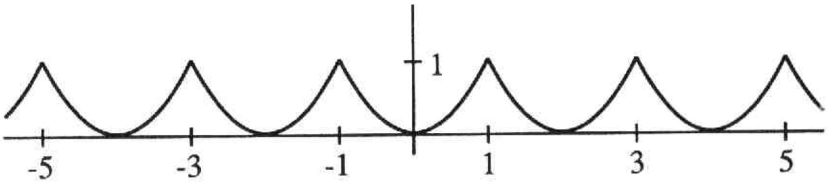
3. Een zaagtand-grafiek als in opgave 2 kan betrekking hebben op de in een fabriek aanwezige voorraad van een bepaalde grondstof.
De voorraad neemt lineair af, maar wordt periodiek aangevuld.

>a Teken een zaagtand-grafiek van de volgende situatie:
- de grondstof wordt om de 4 weken aangevuld;
- de voorraad in het begin van elke 4 weekse periode is 100;
- de voorraad neemt lineair af en wordt in 4 weken geheel verbruikt.

>b Beschrijf de voorraad Q als functie van de tijd t (in weken) door middel van twee formules, (één voor het patroon, één voor de herhaling)

>c Bereken: Q (13), Q (138), Q (-17), Q (-99).

4. Grafiek van de periodieke functie f



>a Het grondpatroon is een stukje parabool op het interval $-1 \leq x \leq 1$.
Welke formule hoort bij het grondpatroon?

>b Met welke formule kun je de herhaling beschrijven?

>c Bereken: $f(16)$; $f(20\frac{1}{2})$; $f(\sqrt{2})$.

5. Langs een autoweg staan 'praatpalen' met een onderlinge afstand van 3 km. Een automobilist die pech heeft, moet dan maximaal 1,5 km lopen naar de dichtsbijzijnde praatpaal. Bij een snelheid van 6 km/u komt dat neer op 15 minuten. Op de weg staan praatpalen bij $x = 0, 3, 6, 9, \ldots$ enz.

De benodigde tijd om de dichtsbijzijnde praatpaal te bereiken vanuit x noemen we $T(x)$. Hierbij gaan we uit van een snelheid van 6 km/u.
Er geldt bijvoorbeeld: $T(4\frac{1}{2}) = 15$.

>a Bepaal: $T(1)$; $T(2)$; $T(3)$; $T(10\frac{1}{2})$; $T(48\frac{1}{2})$.

>b Teken een grafiek van T als functie van x.

>c Beschrijf die functie door middel van drie formules.

>d Voor welke x tussen 0 en 19 geldt: $T(x) = 10$?

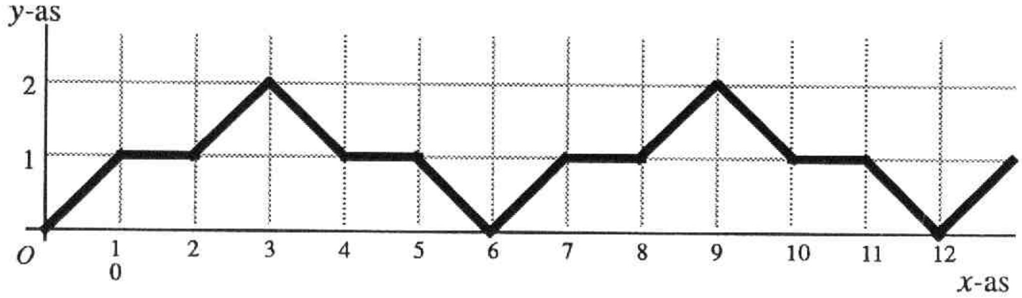
TERUGBLIK

Een periodieke beweging wordt gekenmerkt door een *basispatroon* dat zich herhaalt. Bij het basispatroon hoort een (tijds)interval. De lengte van dat interval is de *periode* van de beweging.

Een periodieke beweging met periode p laat zich (in veel gevallen) beschrijven door middel van formules.

- de formule(s) voor het basispatroon: $f(x) = ...$
- de formule voor de herhaling: $f(x + k \cdot p) = f(x)$, (k is geheel)

Opgave
In een Oxy-stelsel is het patroon van een 'rimpelsteek' getekend.



Het basispatroon kan worden beschreven met een aantal formules.

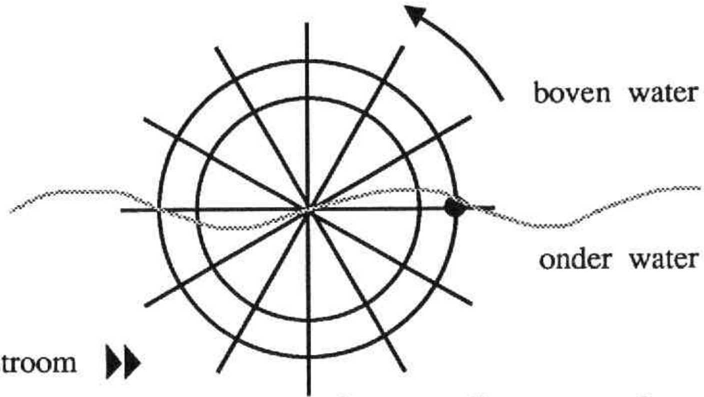
>a Vul de formules voor het basispatroon aan

$f(x) = x$ voor $0 \leq x \leq 1$
$f(x) = 1$ voor $1 \leq x \leq 2$
$f(x) = ...$ voor $2 \leq x \leq 3$
....

>b Beschijf de herhaling van het patroon door middel van een formule.

>c Kun je bij dit patroon spreken van een *amplitude*?
Zo ja, hoe groot is die?

3 Sinus als periodieke functie



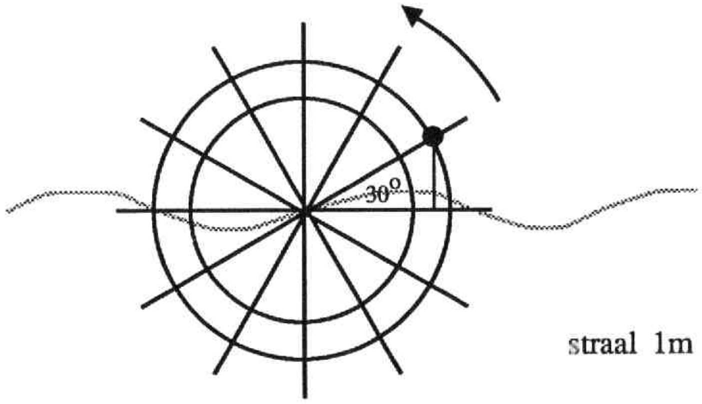
een waterrad met een diameter van 2 m;
de straal is dus 1 meter.

Dit is een schematische weergave van een waterrad op schaal 1 : 50. Door de stroom van het water draait het waterrad rond. Als de rivier waarin dit waterrad zich bevindt regelmatig stroomt, dan draait het rad ook regelmatig rond. Voor het gemak nemen we aan dat dit het geval is.

Bekijk de plaats van de stip ● op het waterrad ten opzichte van de waterspiegel. Je ziet dat de stip de ene keer boven water en de andere keer onder water is.
Na één rondje is de stip weer terug op de plek waar hij begon.

1. De stip maakt in één compleet rondje een draaiing over 360° .

   >a Wat is de hoogte (in m) boven het wateroppervlak als de stip over een hoek van 30° gedraaid is?



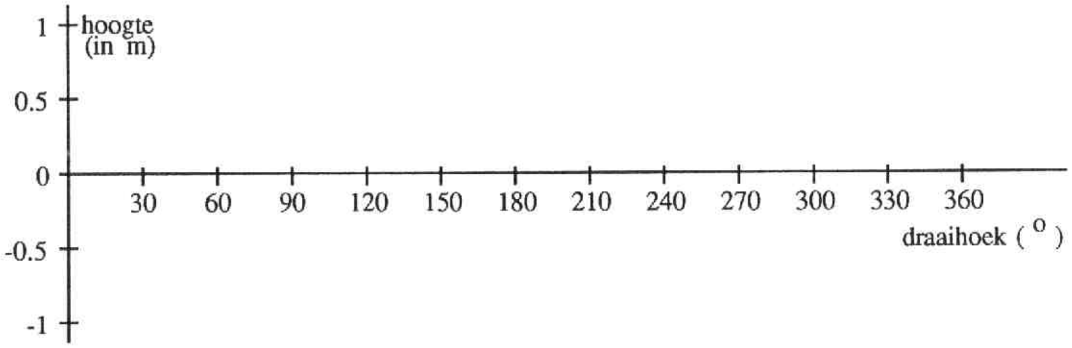
   >b Met je rekenmachientje kun je vinden dat bij een draaihoek van 60° een hoogte boven de waterspiegel van 87 cm hoort. Hoe kun je dat vinden?

2. Bekijk opnieuw het draaiende waterrad (straal 1m).
   Als de stip onder water is, rekenen we de hoogte van de stip negatief.

   >a Neem de tabel over en vul de hoogten (in 2 decimalen nauwkeurig) in.

draaihoek (in °)	hoogte t.o.v. waterspiegel (in m)
0	0
30	...
60	...
90	1
120	...
150	...
180	...
210	...
240	...
270	–1
300	...
330	...
360	...

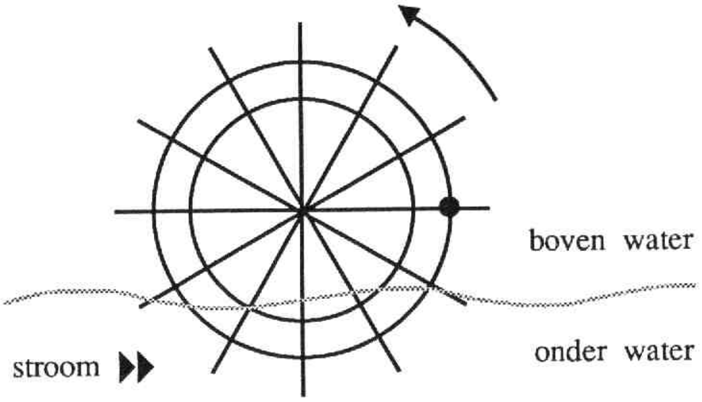
   >b Zet de gegevens van de tabel uit in een assenstelsel zoals hieronder is getekend.



   >c Verbind de punten van je grafiek door een vloeiende lijn.
   Je hebt nu een grafische voorstelling van de hoogte van de stip boven de waterspiegel afhankelijk van de draaihoek.

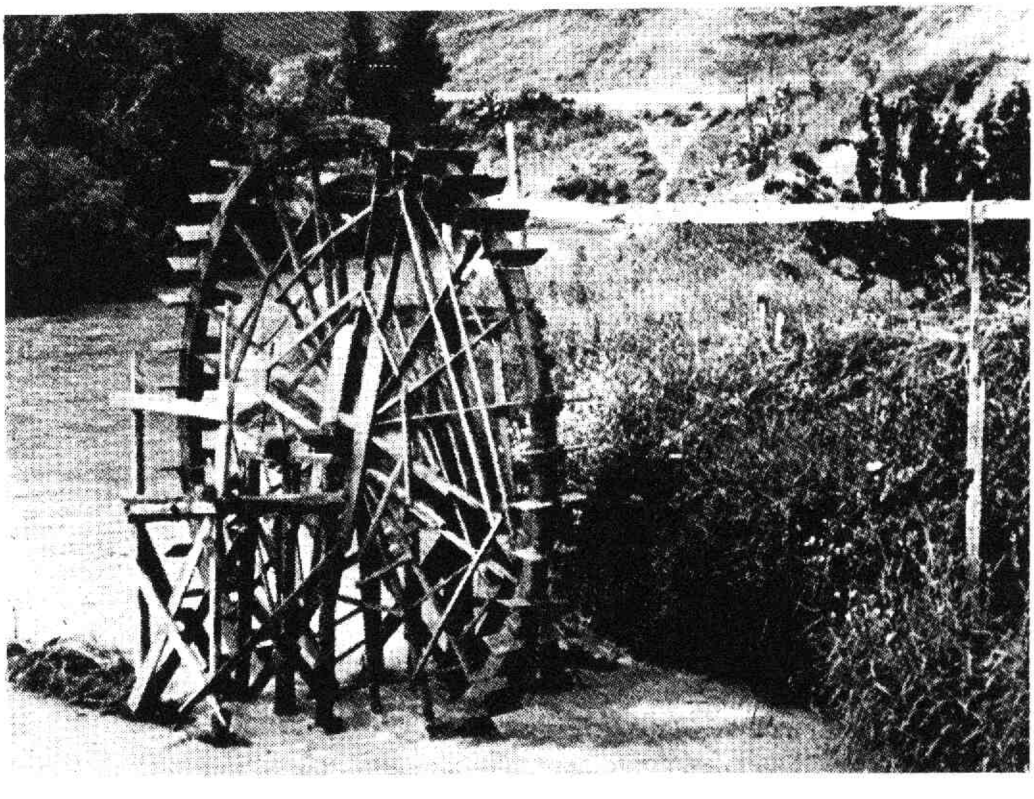
3. > Teken in de figuur van opgave 2 ook de grafiek van de hoogte (van de stip boven de waterspiegel) afhankelijk van de draaihoek, voor het geval het waterrad een dubbel zo grote straal heeft.

4. In het plaatje zie je weer een waterrad met een straal van 1 m, maar het is nu minder ver ondergedompeld. Het rad hangt nu $\frac{1}{2}$ m onder water.



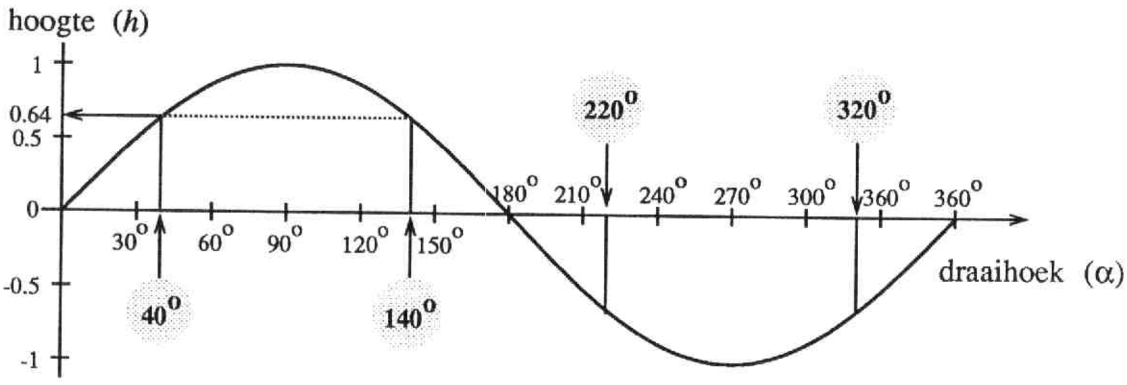
De beginstand van de stip is aangegeven in de figuur.

\> Teken nu de grafiek van de hoogte (van de stip boven de waterspiegel) afhankelijk van de draaihoek.



Het watterrad is een van de oudste vindingen van de mens voor de bevloeiing van land. Evenals alle andere oude hulpmiddelen voor bevloeiing werd het ontworpen om water omhoog te brengen uit bronnen, rivieren, poelen en reservoirs om het via goten en greppels op de velden te brengen.

We keren terug naar het half ondergedompelde waterrad met straal van 1 m.
De grafiek van de hoogte (van de stip boven de waterspiegel) afhankelijk van de draaihoek ziet er zó uit:



- De hoogte bij een draaihoek van 40° kun je aflezen uit de figuur.
- Precies berekenen kan ook: sin 40° = 0,6427....

We noemen nu de draaihoek α en de hoogte h.
Voor $0 \leq \alpha \leq 90$ geldt: $h = \sin \alpha$

De formule $h = \sin \alpha$ is ook van kracht voor alle andere draaihoeken!

Er geldt dus bijvoorbeeld (zie grafiek!):
sin 140° = 0,6427...
sin 220° = -0,6427...
sin 320° = -0,6427...

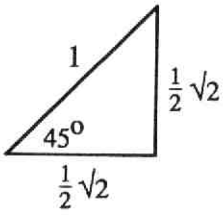
5. >a Controleer of je rekenmachientje bij 140°, 220° en 320° deze uitkomsten geeft.

   >b Bereken sin 75°
   Voor welke hoek α tussen 90° en 180° geldt: $\sin \alpha = \sin 75°$?

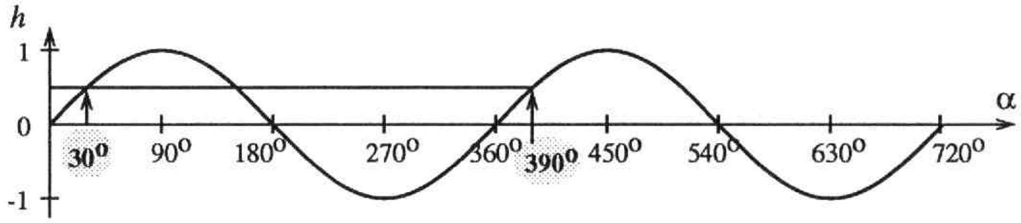
   >c Voor welke hoeken α tussen 180° en 360° geldt: $\sin \alpha = -\sin 75°$?

6. Zoals bekend is de sinus van 45° exact gelijk aan $\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

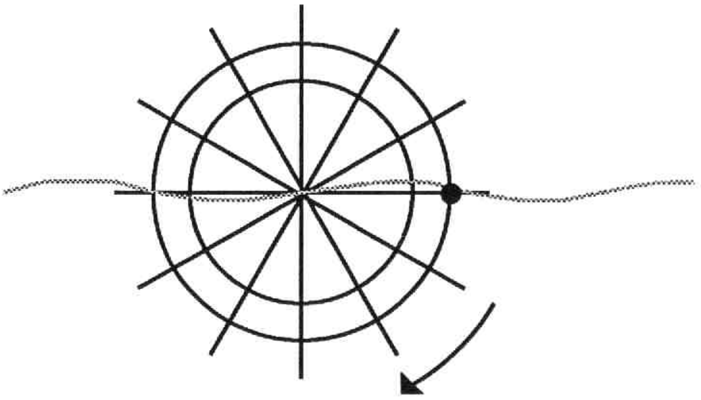
   \> Geef de exacte waarde van:
   sin 135°, sin 225° en sin 315°.



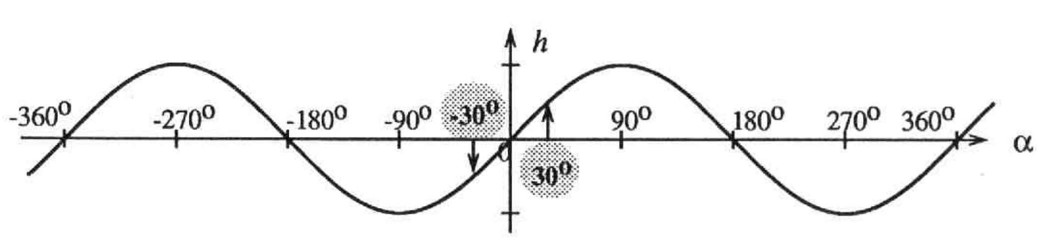
De grafiek op blz. 13. hoort bij één omwenteling van het waterrad.
Voor twee omwentelingen krijgen we deze grafiek:



De grafiek kan natuurlijk naar *rechts* worden voortgezet voor meer dan twee omwentelingen.
Als het rad terug draait, wordt de draaihoek negatief gerekend.



Dat betekent dat de grafiek ook naar *links* kan worden uitgebreid.



Bij al deze draaihoeken (groter dan 360° of kleiner dan 0°) blijft de formule
$h = \sin \alpha$ van kracht!
Zo geldt bijvoorbeeld: $\sin 390° = 0,5$ (zie eerste grafiek)
$\sin(-30°) = -0,5$ (zie tweede grafiek)

7. >a Bepaal eerst uit de grafiek en controleer vervolgens je antwoord met je rekenmachientje:
   sin 450°; sin 510°; sin (-210°); sin 630°;
   sin 690°; sin 750°; sin (-750°); sin 1080°.

   >b Sommige rekenmachientjes gaan niet verder dan het berekenen van sin α voor 4 omwentelingen (in positieve en in negatieve zin).
   Hoeveel graden komen overeen met 4 omwentelingen?

   >c Bij welk aantal graden (positief) geeft jouw machientje voor het eerst ERROR?
   Wat is de waarde van de sinus in dat geval?

8. Door de uitbreiding van de sinus voor hoeken groter dan 360° en kleiner dan 0° is de sinus een periodieke functie geworden.

   >a Wat is de periode van de sinusfunctie?

   >b Verklaar: sin 11886° = sin 6°

   >c Bereken: sin 12001°; sin 120001°; sin 359999°.

   >d Hoe kun je de periodiciteit van een sinusfunctie uitdrukken in een formule?

Bekijk nog eens de opgaven 3 en 4.
In opgave 3 heb je de grafiek van $h = 2 \sin \alpha$ getekend van $0 \leq \alpha \leq 360$.
In opgave 4 heb je dat gedaan van $h = \sin \alpha + \frac{1}{2}$.

9. Teken voor $0 \leq \alpha \leq 360$ de grafieken van:

   >a $h = \frac{1}{2} \sin \alpha$

   >b $h = \sin \alpha + 1$

   >c $h = -2 \sin \alpha$

   >d $h = -2 + \sin \alpha$

10. >aTeken de grafiek van $h = 2 \sin \alpha + 1$.

    >b Deze grafiek hoort bij een waterrad.
    Hoe groot is de straal van dit waterrad?

    >c Hoe diep steekt het rad in het water?

    >d Voor welke draaihoeken α geldt: $h = 2$?

4 Hoeken in radialen

Als je berekeningen met goniometrische functies op je rekenmachientje maakt, moet je letten op de *hoekeenheid.*
Op de meeste machientjes is er keuze uit drie:

DEG GRAD RAD

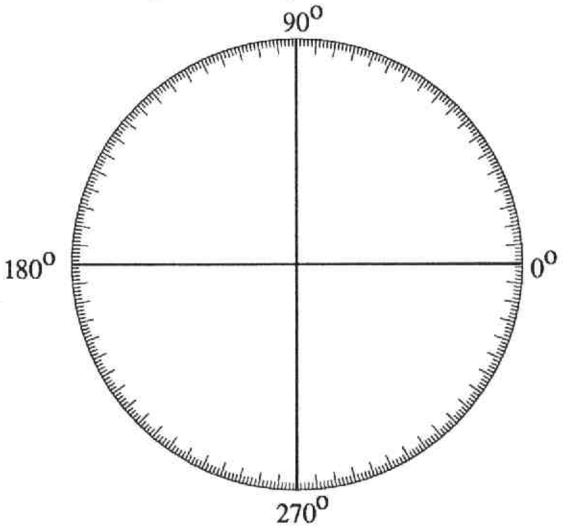
DEG ('degree') is de aanduiding voor de graden zoals je die gewend bent.
GRAD is de aanduiding voor graden (of decigraden) die in de landmeetkunde worden gebruikt.
RAD is de aanduiding voor *radialen.*

1. Toets in op je rekenmachientje $\boxed{1}$ $\boxed{\text{INV}}$ $\boxed{\text{sin}}$ achtereenvolgens in de stand DEG, GRAD en RAD.
   Noteer de uitkomsten.

Als je opgave 1 goed hebt uitgevoerd, heb je gezien dat een rechte hoek 100 decigraden en ongeveer 1,57 radialen is.
Hoe kwamen we ook al weer aan de 'gewone' graad als hoekmaat?
Een cirkel wordt verdeeld in 360 gelijke boogjes.

> Een *middelpuntshoek* van 1° hoort bij een boogje dat $\frac{1}{360}$ deel is van de cirkelomtrek.

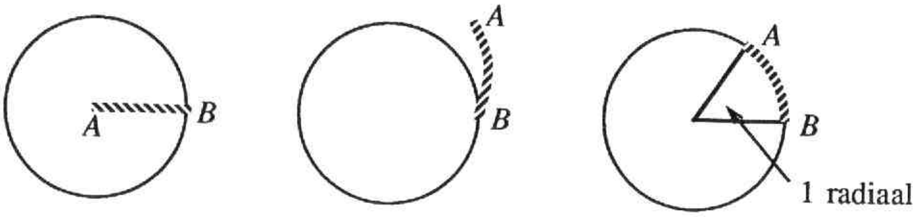
Op dit principe berust de gradenboog.



Bij de hoekmaat GRAD wordt de cirkel niet in 360 maar in 400 gelijke boogjes verdeeld. Een middelpuntshoek van 1 GRAD hoort dus bij een boogje dat $\frac{1}{400}$ deel is van de cirkelomtrek. Vandaar dat een rechte hoek 100 GRAD is.
De hoekmaat GRAD zullen we in het vervolg nooit gebruiken. We werken alleen maar met DEG en RAD.

De hoekmaat RAD.

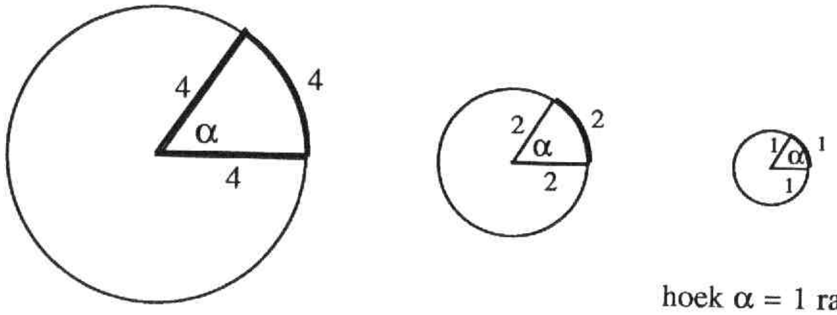
Bij radialen is niet uitgegaan van een mooie verdeling van de cirkel in een geheel aantal boogjes. De afspraak luidt in populaire bewoording:
Neem een touwtje dat precies even lang is als de straal. Leg dat touwtje langs de cirkelomtrek. Bij de boog die je zo afpast, hoort dan een middelpuntshoek van 1 radiaal.



In wat meer officiële taal:

> Een middelpuntshoek van 1 radiaal hoort bij een boog die precies even lang is als de straal van de cirkel.

Het woord 'radiaal' is afgeleid van 'radius' (= straal).



hoek α = 1 radiaal

Zoals je weet kun je de straal meer dan 6 keer op de omtrek van de cirkel afpassen. Wat preciezer: 6,28 keer.
Nog preciezer: de straal past 2π keer in de omtrek.
Daaruit volgt:

> Een middelpuntshoek van 1 radiaal hoort bij een boog die $\frac{1}{2\pi}$ deel is van de cirkelomtrek.

2. In de drie plaatjes zie je een hoek α van 1 radiaal.

   >a Hoeveel graden is hoek α?

   >b Met je rekenmachientje kun je je antwoord als volgt controleren: Bereken de sinus van een hoek van 1 radiaal, verander de stand RAD in DEG en toets vervolgens in: $\boxed{\text{INV}}$ $\boxed{\text{sin}}$.

3. De middelpuntshoek *PMQ* is gelijk aan 1 radiaal (fig. 1).
De middelpuntshoek *RMS* (fig. 2) is gelijk aan 60^o.

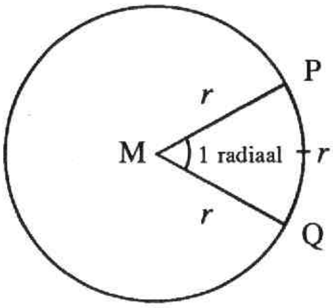


fig. 1

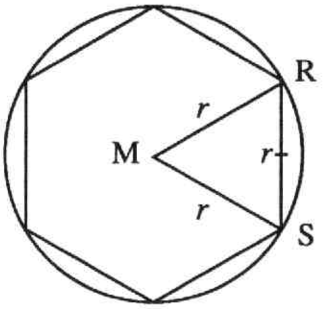
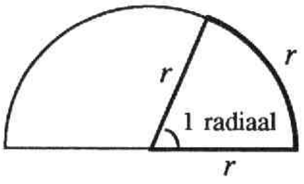


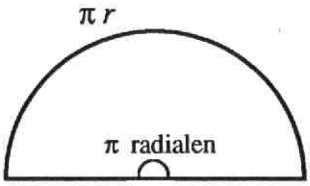
fig. 2

\> Hoe kun je zonder enige rekenwerk direct zien dat een hoek van 1 radiaal iets kleiner is dan 60^o?

Omrekenen van graden naar radialen en omgekeerd.

Vergelijk een hoek van 1 radiaal met de gestrekte hoek.





Bij de hoek van 1 radiaal hoort een boog met lengte *r*.
Bij de gestrekte hoek hoort een boog met lengte π*r*.
De gestrekte hoek is dus π radialen.

Conclusie: $\boxed{180^o \text{ komt overeen met } \pi \text{ radialen}}$

4. \> Verklaar nu waarom je bij opgave 1 met je rekenmachine voor de rechte hoek 1,57 radialen vond.

Bovenstaande regel van de gestrekte hoek is de sleutel voor het omrekenen van graden naar radialen en omgekeerd.

Voorbeelden:

		exact	benaderd
1^o	komt overeen met	$\frac{1}{180}\pi$	(≈ 0.017 RAD)
7^o	komt overeen met	$\frac{7}{180}\pi$	(≈ 0.112 RAD)
57^o	komt overeen met	$\frac{57}{180}\pi$	(≈ 0.995 RAD)

5. In de tabel zijn de meest populaire hoeken in graden vermeld. Schrijf bij elke hoek de exacte waarde in radialen (exact, dus π laten staan).

DEG	0	30	45	60	90	120	135	150	180
RAD	0								π

Omgekeerd kan het natuurlijk ook.

		exact	benaderd
1 RAD	komt overeen met	$\frac{1}{\pi} \cdot 180^o$	$(\approx 57{,}3^o)$
2 RAD	komt overeen met	$\frac{2}{\pi} \cdot 180^o$	$(\approx 114{,}6^o)$
0,3 RAD	komt overeen met	$\frac{0{,}3}{\pi} \cdot 180^o$	$(\approx 17{,}2^o)$

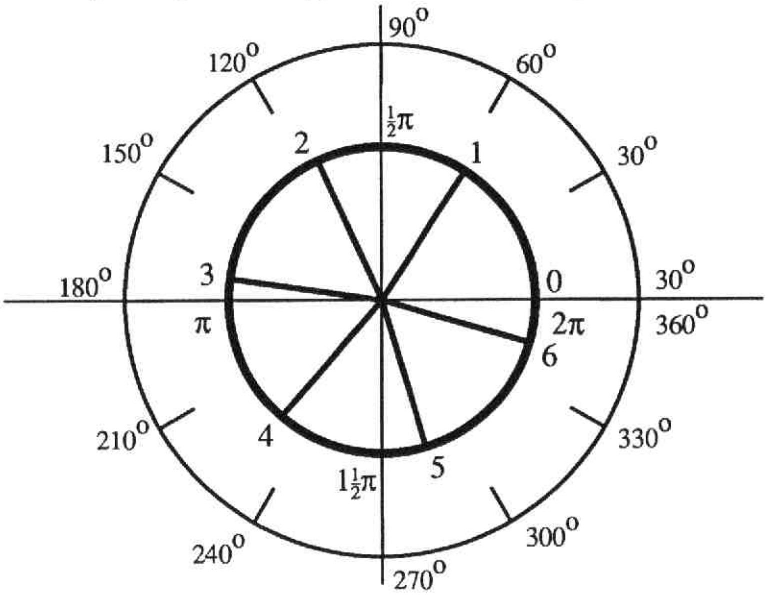
en ook:

		exact
$\frac{1}{2}\pi$ RAD	komt overeen met	$\frac{1}{2} \cdot 180^o = 90^o$
$\frac{1}{5}\pi$ RAD	komt overeen met	$\frac{1}{5} \cdot 180^o = 36^o$
$\frac{1}{30}\pi$ RAD	komt overeen met	$\frac{1}{30} \cdot 180^o = 6^o$

6. >a Hoeveel graden is een hoek van $\frac{2}{5}\pi$ radialen?

   >b En een hoek van $\frac{2}{5}$ radialen?

7. Hieronder zie je een gradenboog en een radialenboog.



>a In de figuur zie je bijvoorbeeld dat een hoek van 4 radialen overeenkomt met een hoek tussen 210° en 240°.
Bereken hoeveel graden een hoek van 4 radialen is (afgerond in één decimaal achter de komma).

>b Je ziet ook dat een hoek van 150° overeenkomt met een hoek tussen 2 en 3 radialen.

Hoeveel radialen is een hoek van 150° exact? Geef ook een benadering van het aantal radialen in twee decimalen nauwkeurig.

sin $\frac{1}{5}\pi$ kun je nu op twee manieren berekenen met je machientje:

(1) $\frac{1}{5}\pi = 36^{\circ}$

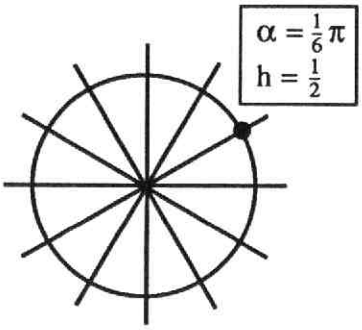
Stand DEG: $\boxed{36}$ $\boxed{\sin}$ uitkomst (in 4 decimalen) 0,5878.

(2) Stand RAD: $\boxed{\pi}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{5}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\sin}$ uitkomst (in 4 dec.) 0,5878.

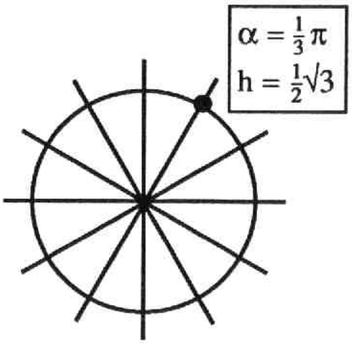
8. > Bereken op twee manieren met je rekenmachientje:
sin $\frac{1}{9}\pi$; sin $\frac{4}{5}\pi$; sin $\frac{4}{5}\pi$; sin $\frac{5}{8}\pi$.

9. Op blz. 20 zie je opnieuw het waterrad met straal 1 m.
Er zijn een paar standen getekend, met vermelding van de draaihoek in radialen. Bij elke stand hoort een sinuswaarde.

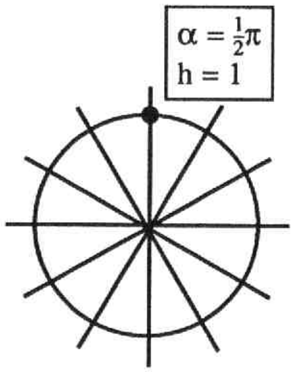
> Bepaal uit zo'n plaatje: sin $\frac{1}{4}\pi$; sin $\frac{3}{4}\pi$; sin π; sin $1\frac{1}{2}\pi$; sin 2π.



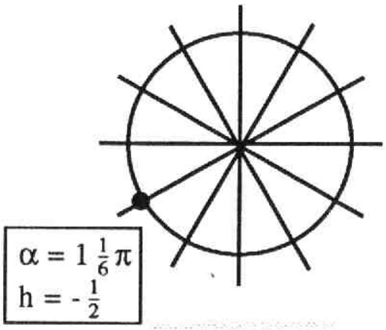
$\sin \frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2}$



$\sin \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{3}$



$\sin \frac{1}{2}\pi = 1$



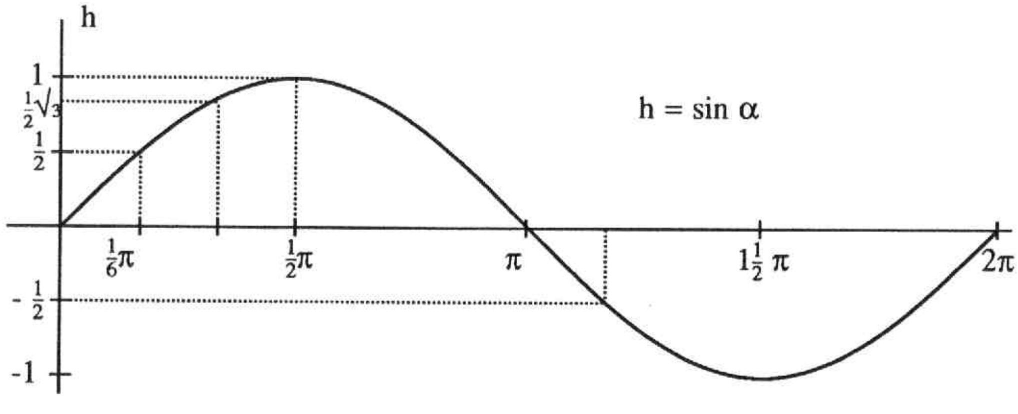
$\sin 1\frac{1}{6}\pi = -\frac{1}{2}$

10. Bekijk de grafiek van $h = \sin \alpha$ waarbij α uitgedrukt is in radialen. Die grafiek kan naar links en rechts worden voortgezet.

>a Wat is de periode van de grafiek?

>b Geef de exacte waarde van: $\sin(2\frac{1}{2}\pi)$; $\sin(3\frac{1}{3}\pi)$; $\sin(4\frac{1}{4}\pi)$.

>c Evenzo van: $\sin(1{,}25\,\pi)$; $\sin(12{,}5\,\pi)$; $\sin(125\,\pi)$.



TERUGBLIK

De twee in wis- en natuurkunde gebruikte hoekmaten zijn: graad (DEG)
en radiaal (RAD)

Een middelpuntshoek van 1 graad hoort bij een boogje dat een lengte heeft van $\frac{1}{360} \times$ cirkelomtrek.
Een middelpuntshoek van 1 radiaal hoort bij een boog die even lang is als de straal.
Omdat een halve cirkelomtrek π keer zo lang is als de straal, geldt:

180^{o} komt overeen met π radialen.

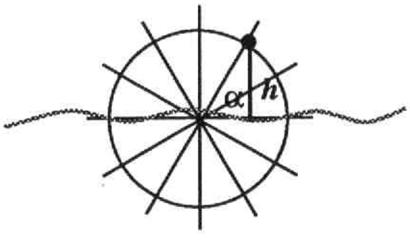
(π is gelijk aan een oneindig voortlopende breuk: 3,141592653.....)

Opgave
Een cirkel heeft een straal van 1 meter.

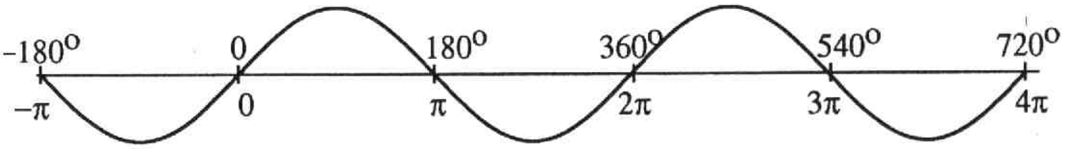
>a Hoeveel cm is het boogje dat hoort bij een middelpuntshoek van 1^{o} ?

>b En hoeveel cm is het boogje dat hoort bij een middelpuntshoek van 0,01 radiaal?

Bij een half ondergedompeld waterrad met straal 1 m wordt de hoogte h van een punt afhankelijk van de draaihoek α gegeven door de formule: $h = \sin \alpha$
De functie is periodiek. Afhankelijk van de hoekmaat is de periode 360^{o} of 2π.



$h = \sin \alpha$



De grafiek van $h = \sin\alpha$ wordt *golflijn* of *sinusoïde* genoemd.
Het periodieke karakter van de sinusfunctie kan worden beschreven door:

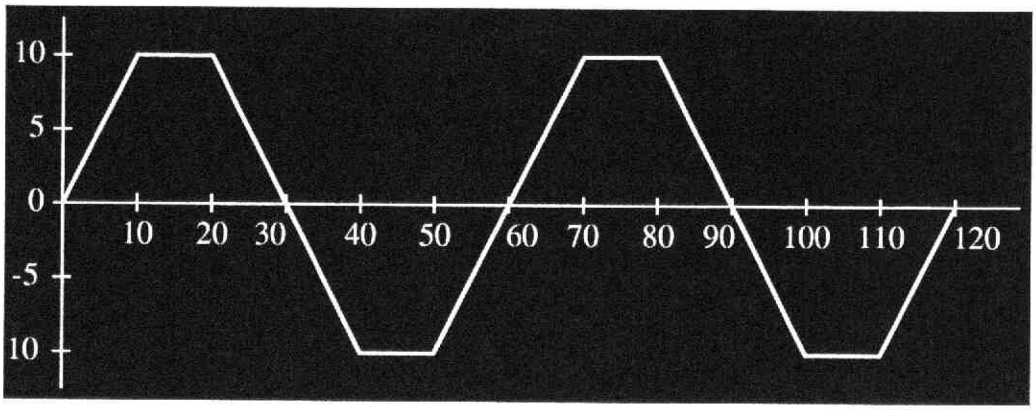
$\sin(\alpha + k \cdot 360^{o}) = \sin \alpha$
of $\sin(\alpha + k \cdot 2\pi) = \sin \alpha$ $(k = 0, \pm1, \pm2, ...)$

Opgave
Voor vier hoeken α tussen 0 en 720^{o} geldt: $\sin \alpha = \frac{1}{2}$

\> Welke hoeken zijn dat?
Geef die hoeken ook in radialen.

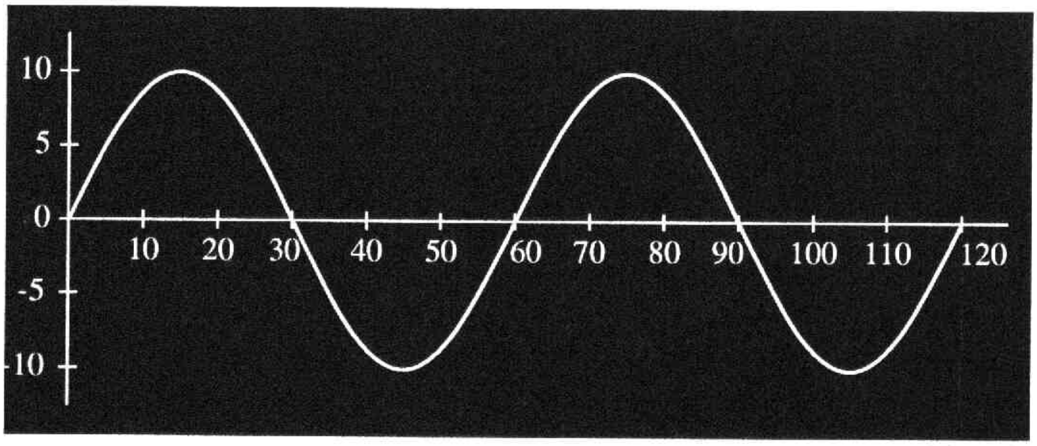
5 Harmonische beweging

Nog eens een grafiek van een heen en weer marcherende schildwacht.



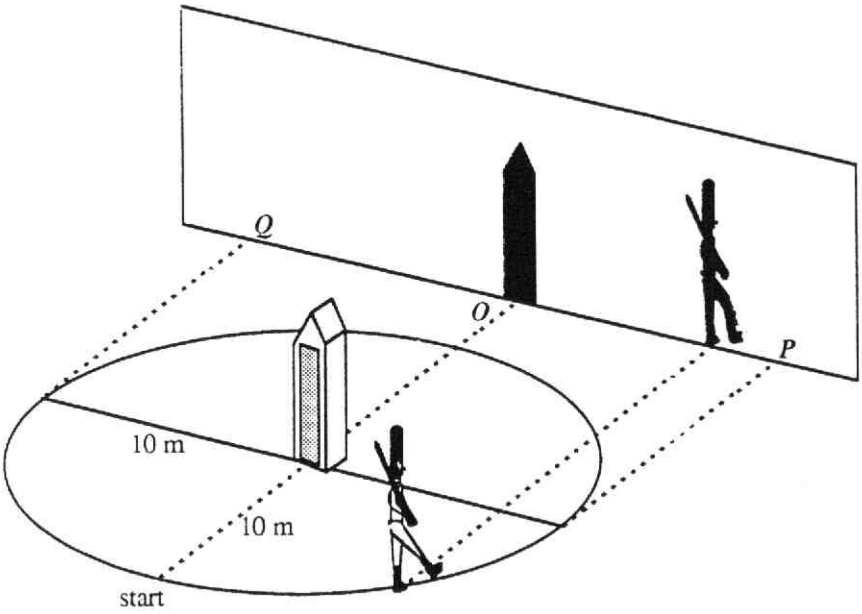
Figuur 1

De grafiek heeft iets 'houterigs' (evenals de schildwacht zelf).
Dat komt omdat de snelheid van de schildwacht *constant* is en omdat hij *abrupt* stopt bij het keren.
Een meer 'soepel' ogende grafiek krijgen we in het geval dat het afremmen (voor het omkeren) heel geleidelijk gaat.



Figuur 2

Deze grafiek lijkt verdacht veel op de grafiek van de sinusfunctie.
Om een schildwacht een dergelijke beweging te laten uitvoeren, maken we een gedachtenexperiment, waarbij we de schildwacht met een constante snelheid rondjes (met een straal van 10 meter) om het wachthuisje laten maken. Achter het wachthuisje staat een witte muur waarop de schaduw van de schildwacht te zien is.
De zon staat erg laag. We doen net alsof de zonnestralen loodrecht op de muur staan.
De schaduw van de schildwacht 'loopt' nu heen en weer op de muur, tussen P en Q. Bekijk de figuur op blz. 23.



1. Veronderstel dat de schildwacht precies 60 seconden over één rondje doet. Op het tijdstip $t = 0$ is de schaduw in O.

   >a Waar bevindt de schaduw zich op het tijdstip $t = 15$?
   En op $t = 30$? En op $t = 45$? En op $t = 60$?

   >b Op $t = 5$ is de schaduw al precies halverwege O en P.
   Verklaar dat.

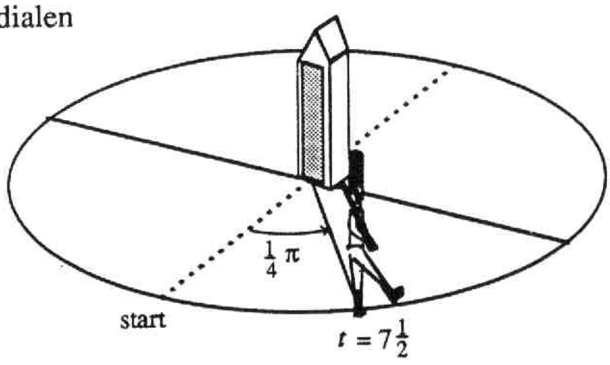
2. De grafiek van figuur 2 past bij de heen en weer beweging van de schaduw.

   >a Hoe kun je in de grafiek van figuur 2 zien dat de snelheid van de schaduw voortdurend verandert?

   >b Op welke tijdstippen is de snelheid van de schaduw 0?

   >c Op welke tijdstippen is de snelheid van de schaduw (in absolute waarde) maximaal?

3. Bij elke positie van de schildwacht op de cirkel hoort een draaihoek, uitgedrukt in radialen

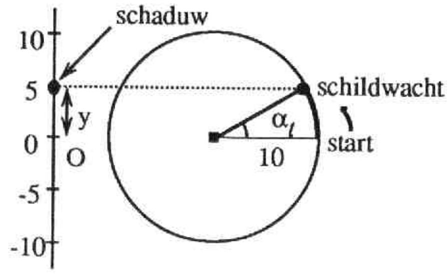


Zo is op $t = 7\frac{1}{2}$ de draaihoek $\frac{1}{4}\pi$ radialen.

>a Hoe groot is de draaihoek (in radialen) op $t = 10$?

>b En op $t = 22\frac{1}{2}$? En op $t = 65$? En op $t = 1$?

4. Bij de berekening van de positie van de schaduw ten opzichte van O gebruik je de sinus van de draaihoek α.



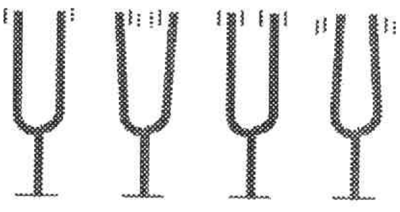
>a Na t seconden is de draaihoek α_t.
Er geldt: $\alpha_t = \frac{1}{30}\pi\, t$. Verklaar dit (aanwijzing: zie opgave 3).

>b Er geldt (zie figuur): $y = 10 \cdot \sin \alpha_t$, dus $y = 10 \cdot \sin \frac{1}{30}\pi\, t$.
Bereken y voor $t = 5$, $t = 25$, $t = 35$ en $t = 55$.

>c Hoe groot is de periode van de functie $y = 10 \cdot \sin \frac{1}{30}\pi\, t$?

In opgave 3 heb je gezien dat de heen- en weer-beweging van de schaduw (van de rondlopende schildwacht) beschreven wordt door een sinusfunctie. De grafiek van de beweging is een *golflijn* of *sinusoïde*. Een heen- en weer-beweging waarvan de grafiek en sinusoïde is, noemt men een *harmonische beweging*.

Voorbeeld van een harmonische beweging.
Als een stemvork wordt aangeslagen, maken de benen een heen-en-weer gaande beweging.
Hoe groter de uitwijking van de stemvorkbenen, hoe meer de vork wordt vervormd. Door de *veerkracht* van het staal wordt die vervorming tegengegaan. De veerkracht wordt groter naarmate de uitwijking groter is en daardoor remt de beweging steeds sterker af.



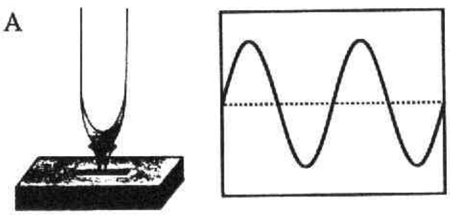
De snelheid neemt af tot nul in de uiterste stand en daarna zorgt de veerkracht voor een steeds snellere beweging naar de evenwichtsstand. Door de vaart die de benen dan hebben, schieten ze door de evenwichtsstand heen en worden vervolgens weer afgeremd door de veerkracht. Enzovoort.

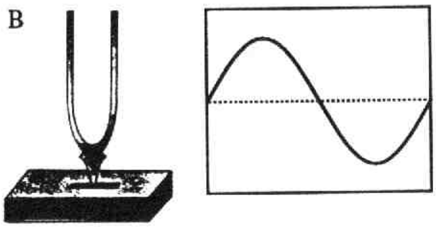
Je kunt bij de beweging van een stemvorkbeen een trillingspatroon maken via het volgende experiment. Bevestig een fijne stift aan een van de stemvorkbenen en beweeg de stemvork met constante snelheid over een carbonpapiertje of een beroete glasplaat

Het trillingspatroon heeft de vorm van een sinusoïde.
Merk op:

- Als de stemvork harder wordt aangeslagen zal de uitwijking groter zijn. Het trillingspatroon heeft dan een grotere *amplitude*.
  De amplitude van een trillingspatroon is een maat voor de geluidssterkte.
- De *periode* van het patroon is een maat voor de toonhoogte. Hoe kleiner de periode (dus hoe hoger de *frequentie*), hoe hoger de toon.

5. Twee stemvorken (A en B) met bijbehorende trillingspatronen.

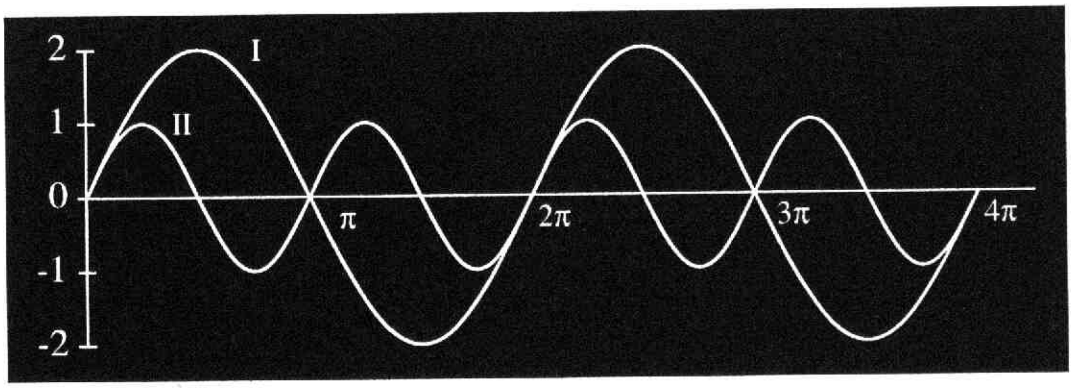




>a Welk van de twee stemvorken klinkt het hardst?

>b Welke klinkt het hoogst?

6. Hiermee zie je in één figuur twee patronen van harmonische trillingen.



>a Wat is de amplitude van I? En van II?

>b Wat is de periode van I? En van II?

>c Bij I hoort de formule: $y = 2 \sin t$.
Enig idee welke formule bij II hoort?

7. Een zekere harmonische beweging wordt beschreven door de formule:
$y = 4 \sin t$

>a Teken het trillingspatroon (over één periode).

>b Bekijk het moment na $t = 0$ waarop voor het eerst de maximale uitwijking wordt bereikt. Welk gedeelte van de periode is nu verstreken?

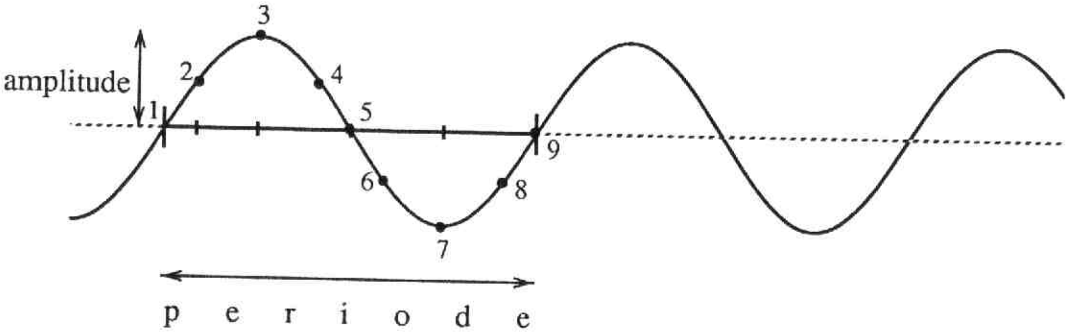
>c Na hoeveel tijd (welk gedeelte van de periode) wordt voor het eerst de *helft* van de maximale uitwijking bereikt?

TERUGBLIK

De schaduw van een rondlopende schildwacht op de muur maakt dezelfde soort beweging als het trillende been van een stemvork: bij het passeren van de evenwichtsstand is de snelheid het grootst, bij het bereiken van de maximale uitwijking is de snelheid het kleinst (namelijk 0).
Zo'n harmonische beweging heeft als grafiek een golflijn of sinusoïde.

De kenmerken van een sinusoïde zijn:

- de grafiek passeert de evenwichtsstand met tussenpozen van $\frac{1}{2}$ periode;
- van een evenwichtspunt naar een punt met maximale uitwijking, dat kan in een stap van $\frac{1}{4}$ periode;
- de beweging van de evenwichtsstand af gaat minder snel naarmate de uitwijking groter is;
- de helft van de maximale uitwijking wordt al bereikt na een stap van $\frac{1}{12}$ periode.



Praktijktip:
Bij het tekenen van een sinusoïde met amplitude a kun je gebruik maken van de punten met uitwijking 0, $\frac{1}{2}\,a$, a.
(voor één periode de punten 1 t/m 9 in bovenstaande figuur)

Opgave
Bij de harmonische beweging is de evenwichtsstand E en de uiterste stand aan één kant U. Halverwege ligt M.

\> Hoe verhoudt de gemiddelde snelheid op het traject EM zich tot de gemiddelde snelheid op het traject MU ?

6 Sinusoïden

De grafiek bij een harmonische beweging is een sinusoïde.
In dit hoofdstuk zullen we ons systematisch bezig houden met het tekenen van een sinusoïde bij een gegeven formule en met het opstellen van een formule bij een gegeven sinusoïde.
Daarbij zal achtereenvolgens worden gelet op het effect van:

- verandering van *amplitude*;
- verandering van *evenwichtsstand*;
- verandering van *frequentie* (in samenhang met de *periode*);
- verandering van *fase*.

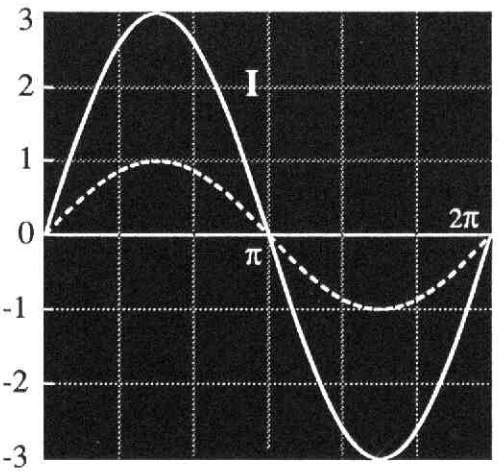
De variabele langs de horizontale as kan zijn:

- *hoekgrootte* (gemeten in *radialen*);
- *tijd* (gemeten in seconden, minuten, ...).

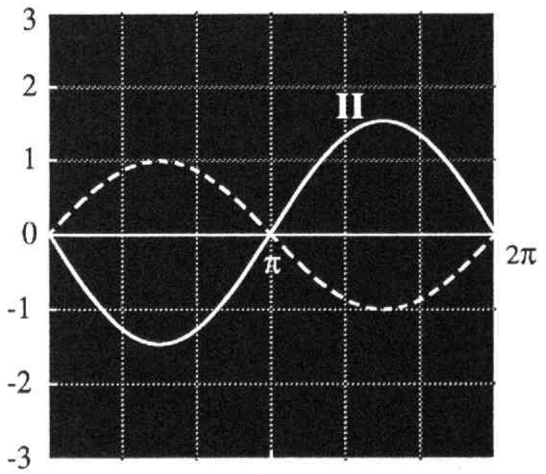
De meeste voorbeelden in dit hoofdstuk zijn neutraal, dat wil zeggen dat je zelf mag kiezen of je aan hoeken of tijdstippen wilt denken. Bij verandering van frequentie of van fase ligt het meer voor de hand om de horizontale as als tijd-as op te vatten.

1. Twee sinusoïden in samenhang met de gestippelde grafiek van $y = \sin x$.

   > Welke formule past bij I? Welke bij II?



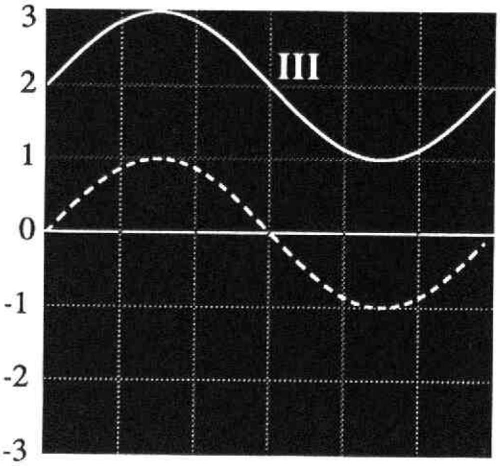
amplitude I = 3



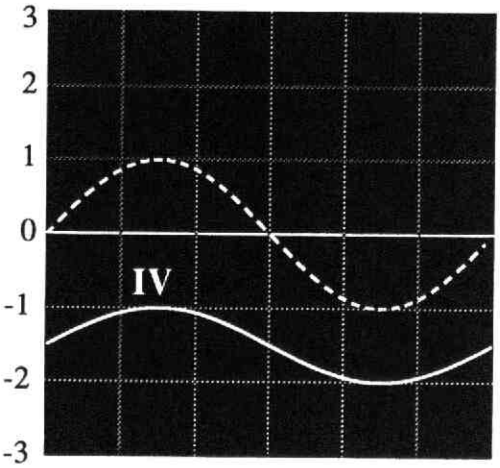
amplitude II = $1\frac{1}{2}$

2. Bekijk de grafieken hieronder.

   \> Welke formule past bij III? Welke bij IV?



evenwichtsstand III = 2



evenwichtsstand IV = $-1\frac{1}{2}$

3. \>a Teken de grafiek van $y = 5 \sin x - 2$ voor $0 \leq x \leq 2\pi$.

   \>b Teken de grafiek van $y = 2 - 1\frac{1}{2} \sin x$ voor $0 \leq x \leq 2\pi$.

De functies van de opgaven 1, 2 en 3 zijn van het type:

$$y = a \,.\, \sin x + c$$

a bepaalt de amplitude,
c bepaalt de evenwichtsstand.

Opmerking:
de amplitude wordt altijd positief gerekend; de amplitude van $y = a \cdot \sin x + c$ is gelijk aan de *absolute waarde* van a (dus aan $|a|$).

4. \>a $f(x) = 3 \sin x + 4$ voor $0 \leq x \leq 2\pi$.
   Hoe groot is het maximum van f? En het minimum?

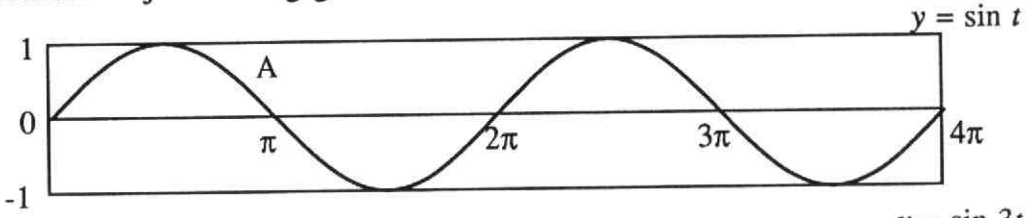
   \>b Dezelfde vraag voor $f(x) = 4 \sin x + 3$.

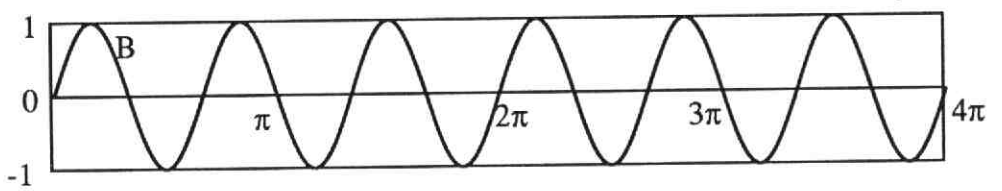
De sinusoïden die je tot nu toe in dit hoofdstuk hebt gezien, hebben alle de periode 2π. We gaan nu ook sinusoïden met een andere periode bekijken.
Vergelijk de harmonische trillingen gegeven door:

$$y = \sin t \quad (A) \quad \text{en} \quad y = \sin 3t \quad (B)$$

Op blz. 29 zie je de grafieken daarvan.

Hieronder zie je de trillingsgrafieken:





Bij *B* gebeurt alles als het ware '3 keer zo vaak' als bij *A*.

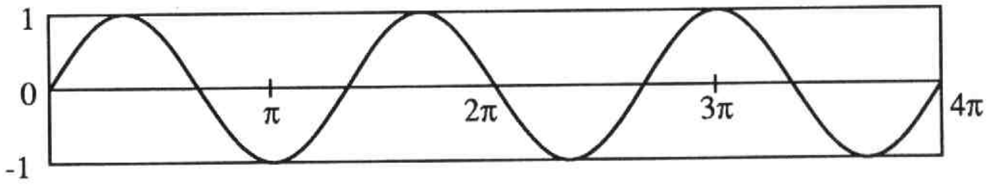
Voorbeelden:
bij *A* is de uitwijking maximaal op $t = \frac{1}{2}\pi$; $t = 2\frac{1}{2}\pi$; enz.
bij *B* is dat het geval op $t = \frac{1}{6}\pi$; $t = \frac{5}{6}\pi$; enz.
We zeggen:
de *frequentie* van *B* is 3 keer zo hoog als die van *A*.

5. >a Wat is de periode van trilling *B* in bovenstaand voorbeeld?

   >b Teken de trillingsgrafiek bij $y = \sin \frac{1}{2}t$ (*C*).

   >c Hoe is de frequentie van *C* in verhouding tot die van *A*?
   En de periode?

6. Bekijk de trillingsgrafiek *D*.



>a Wat is de periode van *D*?

>b Hoe is de frequentie van *D* in verhouding tot die van *A*?

>c Beschrijf *D* met een formule.

Bij de functie: $y = \sin bx$ $(c > 0)$ is c maatgevend voor de frequentie en de periode.
De frequentie is b maal de frequentie van $y = \sin x$.
De periode is $\frac{1}{b}$ maal de periode van $y = \sin x$.
Er geldt dus:

$$\boxed{\text{de periode van } y = \sin bx \quad \text{is} \quad \frac{2\pi}{b}}$$

7. $f(x) = 4 \sin 2x - 1$.
   >a Geef de periode, amplitude en evenwichtsstand van de grafiek van f.
   >b Teken de grafiek van $0 \leq x \leq 2\pi$

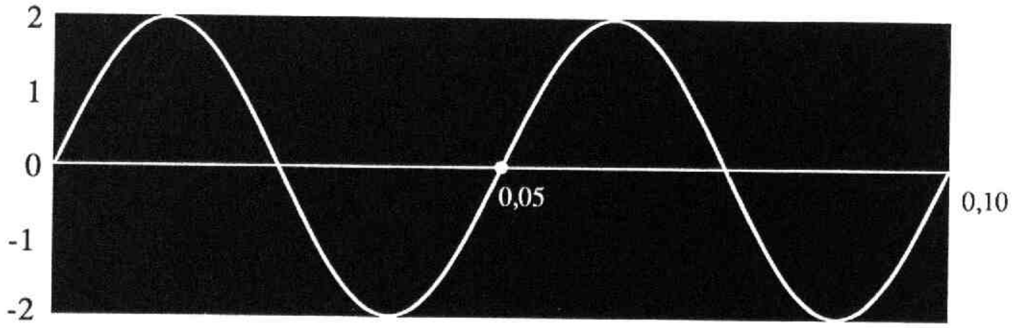
8. $f(x) = \sin \pi x$
   >a De periode van f is 2. Verklaar dat.
   >b Teken de grafiek van f.
   >c Voor welke x geldt: $f(x) = 0$?

9. Een harmonische trilling wordt beschreven door de formule:

   $y = 2 \sin (20\pi t)$ (t is de tijd in seconden).

   >a Hoe groot is de amplitude?
   >b Hoe lang is de periode (= tijd van één trilling)?
   >c Hoe groot is de frequentie (= aantal trillingen per seconde)?
   >d Teken het trillingspatroon.

10. Gegeven een harmonisch trillingspatroon met 20 trillingen per seconde



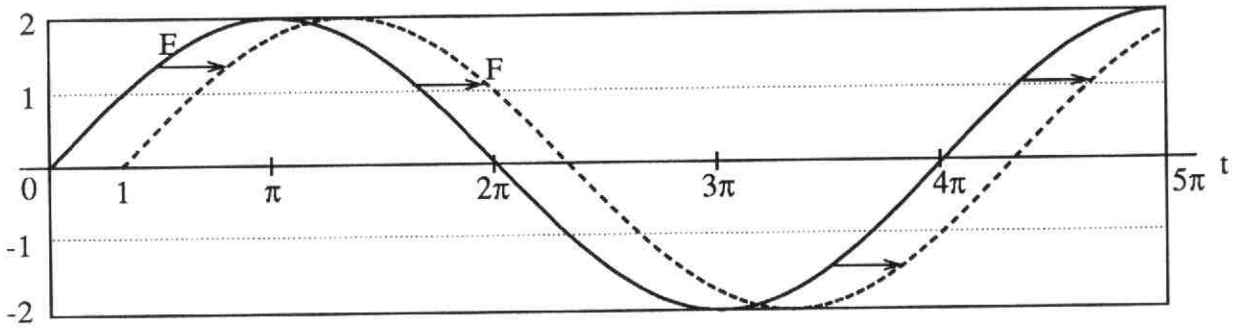
\> Beschrijf dit patroon met een formule.

Vergelijk de harmonische trillingen:

$y = 2\sin\frac{1}{2}t$ (*E*) en $y = 2\sin\frac{1}{2}(t-1)$ (*F*) (t is de tijd in sec).

Beide trillingen hebben dezelfde amplitude (= 2) en dezelfde periode (= 4π)
Trilling F loopt als het ware één seconde *achter* bij E.
Op bijvoorbeeld het tijdstip $t = 5$ is de uitwijking van F gelijk aan de uitwijking van E op het tijdstip $t = 4$.

In een grafiek komt dit achterlopen tot uiting, doordat het patroon F één eenheid *rechts* van E ligt.



Men zegt ook: er is een verschil in *fase* tussen *E* en *F* van één seconde.

11. Gegeven is weer de harmonische trilling I: $y = 2\sin\frac{1}{2}t$ (t in sec).

   \> Geef een formule voor de harmonische trilling met dezelfde amplitude en dezelfde periode die 2 seconden vóór loopt op de gegeven trilling.

12. $f(x) = \sin x$, $g(x) = \sin(x - \frac{2}{3}\pi)$ en $h(x) = \sin(x + \frac{1}{3}\pi)$.

   \>a Bereken $f(\frac{2}{3}\pi)$, $g(\frac{4}{3}\pi)$, $h(\frac{1}{3}\pi)$.

   \>b Teken in één figuur de grafieken van *f, g, h*.

13. $f(x) = \sin\pi x$, $g(x) = \sin\pi(x+1)$ en $h(x) = \sin\pi(x-1)$.

   \>a Bereken $f(-1)$, $g(-1)$, $h(-1)$.

   \>b Teken in één figuur de grafieken van *f, g, h*.

Bij de functie $y = \sin a(x+d)$ is d maatgevend voor het verschil in fase met $y = \sin ax$.

$d > 0$: *voorsprong* in fase, grafiek schuift naar *links*.
$d < 0$: *achterstand* in fase, grafiek schuift naar *rechts*.

14. Gegeven zijn de functies $f(x) = \sin 3x$ en $g(x) = \sin(3x + \pi)$.
    - >a Teken in één figuur de grafieken van beide functies. (Aanwijzing: $3x + \pi = 3(x + \frac{1}{3}\pi)$!)
    - >b De grafiek van een derde functie h wordt verkregen door de f-grafiek $\frac{1}{2}\pi$ naar rechts te verschuiven. Door welke formule wordt h bepaald?

15. Gegeven is de functie: $f(x) = 3 \sin 2(x - \frac{1}{4}\pi) + 1$.
    - >a Hoe ligt de grafiek van f ten opzichte van de grafiek van $g(x) = 3 \sin 2x$?
    - >b Teken de grafiek van f.

In het voorgaande heb je formules bekeken van de vorm:

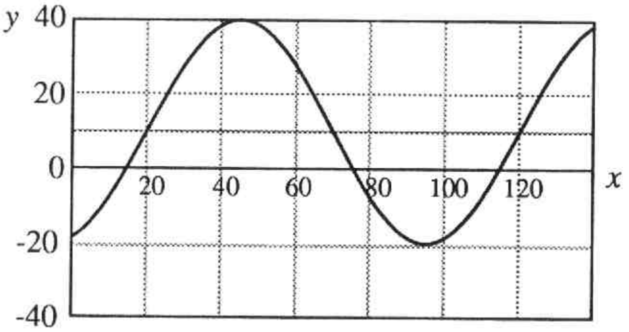
$$y = a \cdot \sin b(x + d) + c$$

Als $a \neq 0$, dan is de grafiek een sinusoïde of golflijn.
Je moet goed weten wat de invloed van elk van de constanten a, b, c, d op de grafiek is. We herhalen nog even:

constante	is maatgevend voor
a	amplitude
b	frequentie en periode
c	evenwichtsstand
d	faseverschuiving

Omgekeerd kan elke sinusoïde worden beschreven met een formule van bovenstaand type.

Gevraagd de formule bij de sinusoïde hiernaast:

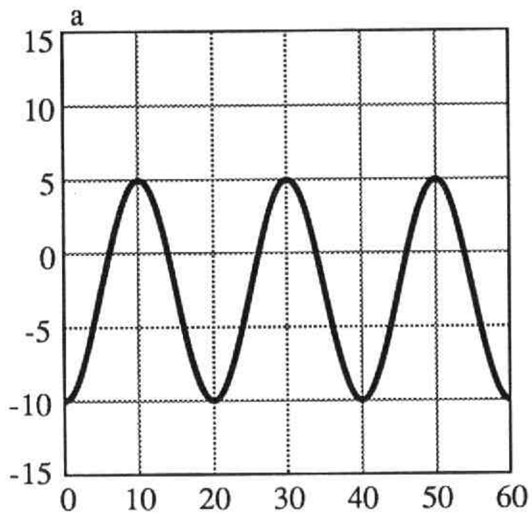


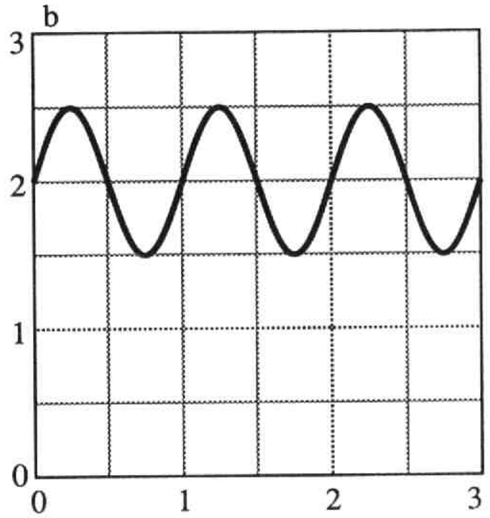
Oplossing:	evenwichtsstand	$= \frac{1}{2}(40 + (-20)) = 10$
	amplitude	$= \frac{60}{2} = 30$
	periode	$= 120 - 20 = 100$
	achterstand in fase	$= 20$

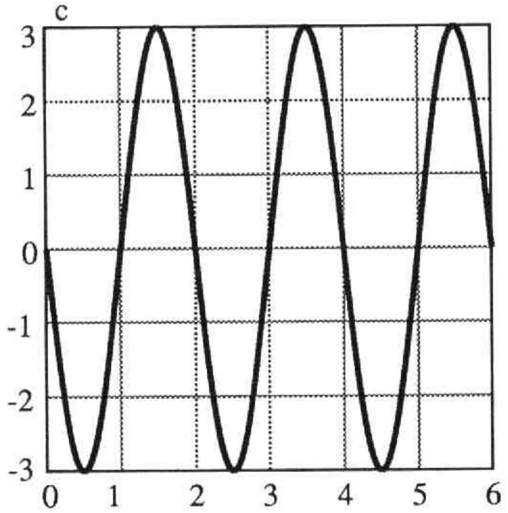
dus: $a = 30$, $\frac{2\pi}{b} = 100$, $c = 10$ en $d = -20$

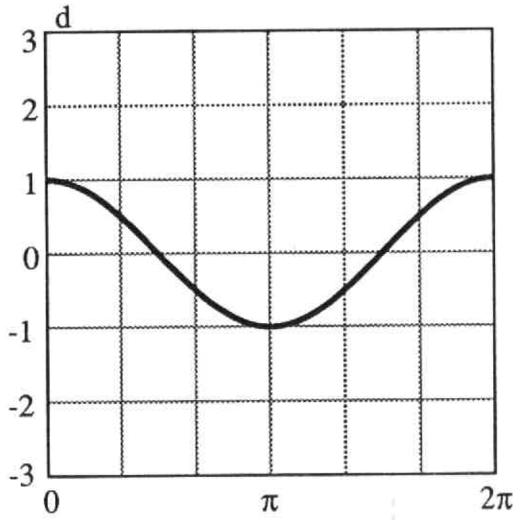
De formule wordt: $y = 30 \cdot \sin 0{,}02\,\pi(x-20) + 10$.

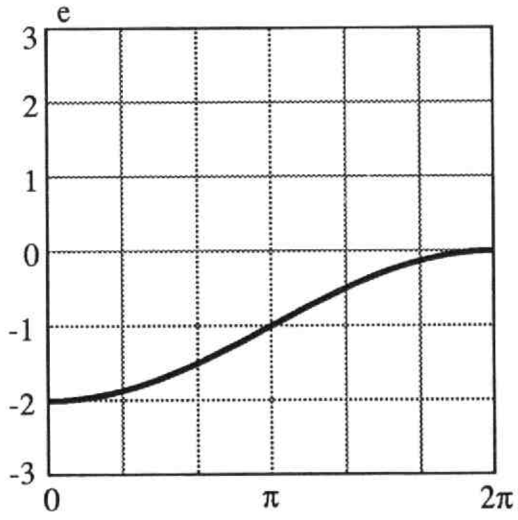
16. Geef bij elk van de volgende sinusoïden de passende formule:

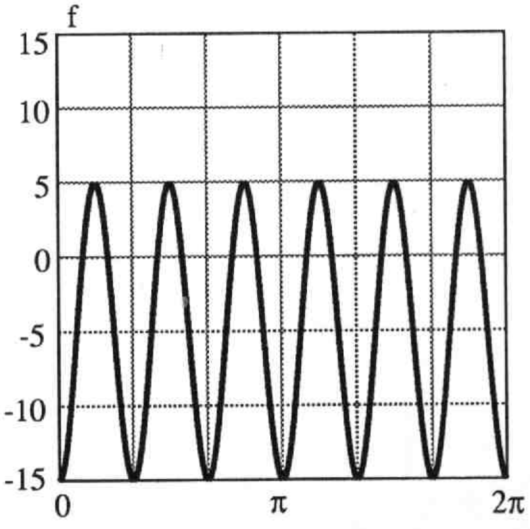












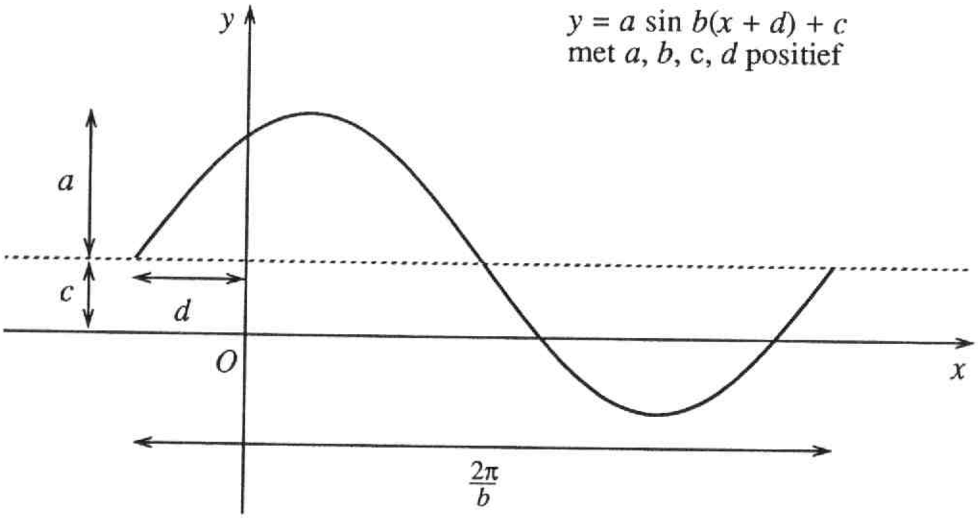
TERUGBLIK

Functies van het type

$f(x) = a \sin b(x + d) + c$

hebben als grafiek een sinusoïde (mits $a \neq 0$)

- De *amplitude* van de sinusoïde is gelijk aan $|a|$
  ($| \ |$ betekent: absolute waarde; als bijvoorbeeld $a = -3$, dan $|a| = 3$)
- De *periode* van de sinusoïde is omgekeerd evenredig met $|b|$.
  Als $b > 0$, dan geldt: periode $= \frac{2\pi}{b}$
- De *evenwichtsstand* van de sinusoïde ligt op een afstand $|c|$ van de x-as.
  Als $c > 0$, dan boven de x-as; als $c < 0$, dan onder de -as.
- Het *faseverschil* van de sinusoïde met de grafiek van $y = a \sin bx$ is $|d|$
  Als $d > 0$, dan is er een voorsprong in fase; de grafiek schuift naar links.
  Als $d < 0$, dan is er een achterstand in fase; de grafiek schuift naar rechts.



Opgave

Als je in $y = p \sin x$ de coëfficiënt p laat variëren, krijg je een verzameling sinusoïden.

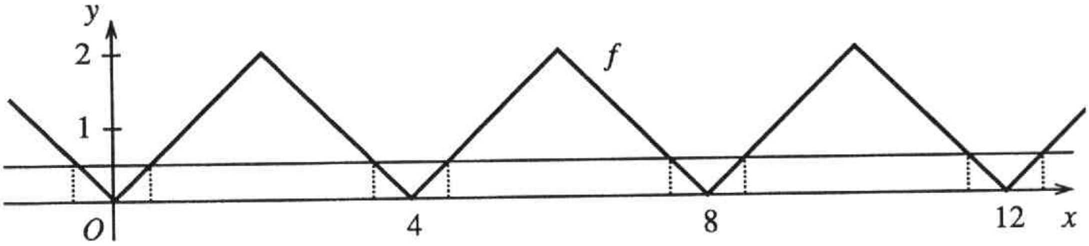
>a Teken een aantal (minstens drie) sinusoïden van die verzameling.

>b Dezelfde vraag voor: $y = \sin px$ en voor $y = \sin (x + p)$

7 Vergelijkingen met periodieke oplossingen

Als f een periodieke functie is, dan heeft een vergelijking van het type $f(x) = c$ vaak oneindig veel oplossingen.

Voorbeeld:
De periodieke functie f is gedefinieerd door onderstaande grafiek:



De vergelijking $f(x) = \frac{1}{2}$ heeft de oplossingen:

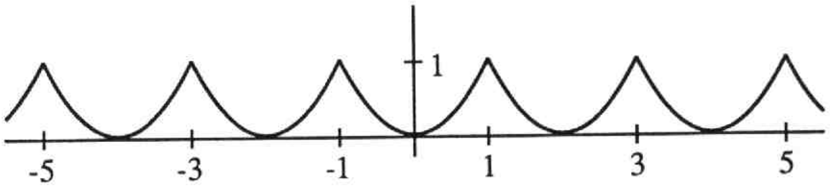
$$x = \ldots, -3\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 3\tfrac{1}{2}, 4\tfrac{1}{2}, 7\tfrac{1}{2}, 8\tfrac{1}{2}, 11\tfrac{1}{2}, 12\tfrac{1}{2}, 15\tfrac{1}{2}, \ldots$$

Deze verzameling oplossingen kan worden verdeeld in twee periodieke rijen:

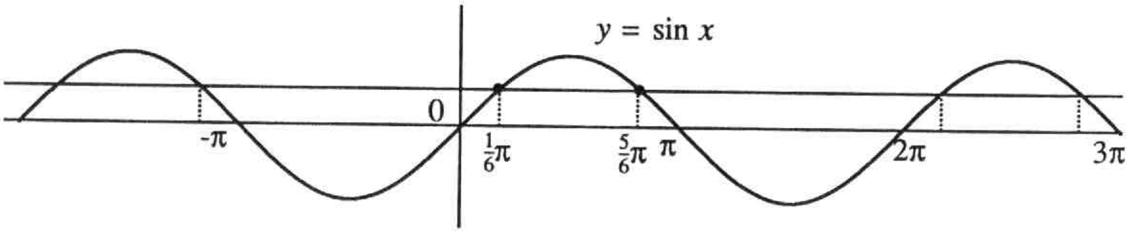
$$x = \ldots, -3\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 4\tfrac{1}{2}, 8\tfrac{1}{2}, 12\tfrac{1}{2}, \ldots$$
$$x = \ldots, -\tfrac{1}{2}, 3\tfrac{1}{2}, 7\tfrac{1}{2}, 11\tfrac{1}{2}, 15\tfrac{1}{2}, \ldots$$

1. f is de functie van bovenstaand voorbeeld.
   - >a De vergelijking $f(x) = 1\frac{1}{2}$ heeft twee periodieke rijen van oplossingen. Welke rijen zijn dat?
   - >b De vergelijking $f(x) = 2$ heeft één periodieke rij van oplossingen. Welke?
   - >c De oplossingen van de vergelijking $f(x) = 1$ vormen ook één periodieke rij. Wat is de periode van die rij?
   - >d Hoeveel snijpunten heeft de grafiek van f met de lijn $y = \frac{1}{10}x$?

2. Bekijk de periodieke functie f van opgave 4 bladzijde 6.



   - >a De vergelijking $f(x) = 0{,}64$ heeft twee periodieke rijen van oplossingen. Welke zijn dat?
   - >b Voor welke c heeft de vergelijking $f(x) = c$ slechts één periodieke rij als oplossing? Welke periode heeft die rij? (N. B. er zijn drie mogelijkheden)



3. Bekijk de vergelijking $\sin x = \frac{1}{2}$.

   >a Tussen 0 en π heeft de vergelijking de oplossingen $\frac{1}{6}\pi$ en $\frac{5}{6}\pi$. Controleer dat.

   >b Welke oplossingen heeft die vergelijking tussen 2π en 3π? En tussen -2π en $-\pi$?

   >c Heeft de vergelijking oplossingen tussen 17π en 18π? En tussen 50π en 51π?

   >d De vergelijking $\sin x = \frac{1}{2}$ heeft twee periodieke rijen van oplossingen. Welke rijen zijn dat?

Periodieke oplossingsrijen worden vaak beschreven met één formule.
In plaats van bijvoorbeeld:

$$x = \ldots, -3\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 4\tfrac{1}{2}, 8\tfrac{1}{2}, 12\tfrac{1}{2}, \ldots$$

kun je schrijven: $x = \frac{1}{2} + k \cdot 4$

vertegenwoordiger van de rij

periode

k is de 'periodenteller'
k = 0, ± 1, ± 2, ± 3, ...

Nog een voorbeeld:
de vergelijking $\sin x = 1$ heeft de oplossingsrij (zie grafiek):

$$x = \ldots, -1\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{1}{2}\pi, 2\tfrac{1}{2}\pi, 4\tfrac{1}{2}\pi, 6\tfrac{1}{2}\pi, \ldots$$

In formule: $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$)

4. >a Schrijf de oplossingsrij $x = \ldots, -\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}, 7\frac{1}{2}, 11\frac{1}{2}, 15\frac{1}{2}, \ldots$ in één formule.

   >b Schrijf de oplossingsrijen van $\sin x = \frac{1}{2}$ (opgave 3>d) elk met één formule.

   >c De formules $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$ en $x = 10\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$ stellen dezelfde oplossingsrij voor. Verklaar dit.

   >d Welke oplossingsrij wordt beschreven door de formule:
   $x = k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$).
   Bedenk een vergelijking waarvan dit de oplossingsrij is.

De vergelijking $\sin x = \frac{1}{2}$ is een eenvoudig voorbeeld van een *goniometrische vergelijking*.
In dit geval zijn de oplossingen exact (als veelvouden van π) te bepalen. Dat is lang niet altijd zo.

Bij de vergelijking $\sin x = \frac{3}{4}$ kun je de oplossingen niet zo mooi in π uitdrukken.
In zo'n geval kun je met je rekenmachientje een benadering vinden.
Als je $\boxed{\text{INV}}\,\boxed{\text{sin}}$ 0.75 in toetst verschijnt er 0,8480621.
Dat betekent dat, afgerond in twee decimalen nauwkeurig, 0,85 één van de (oneindig veel) oplossingen is van $\sin x = \frac{3}{4}$.

5. >a Ga met behulp van een grafiek na dat π - 0,85 (≈ 2,29) ook een oplossing is van $\sin x = \frac{3}{4}$.

   >b De vergelijking $\sin x = \frac{3}{4}$ heeft twee periodieke rijen van oplossingen:
   $$x = 0{,}85 + k \cdot 2\pi$$
   $$x = \pi - 0{,}85 + k \cdot 2\pi$$
   Welke waarden kan k hier aannemen?

   >c Welke oplossingen van $\sin x = \frac{3}{4}$ liggen tussen 2π en 3π?

6. Gegeven is de vergelijking: $5 \sin x = 4$.

   >a Bepaal met behulp van je rekenmachientje de oplossing tussen 0 en $\frac{1}{2}\pi$ in 3 decimalen nauwkeurig.

   >b Welke oplossing heeft de vergelijking tussen $\frac{1}{2}\pi$ en π?

   >c De vergelijking $5 \sin x = 4$ heeft twee periodieke rijen van oplossingen. Beschrijf elk van die rijen met een formule.

7. Gegeven is de vergelijking: $5 \sin x = -3$.

   \> Bepaal de oplossingen van deze vergelijking die tussen 0 en 4 π liggen.

8. Geef de exacte oplossingen (in veelvouden van π):

   a. $\sin x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$
   c. $2 \sin x = -1$
   b. $\sin x = -1$
   d. $\sin x = 2$.

Bekijk nog eens de vergelijking $\sin x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ (opgave 7a).
Omdat $\sin \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ kun je die vergelijking ook schrijven als: $\sin x = \sin \frac{1}{4}\pi$.
Eén rij van oplossingen volgt dan onmiddellijk:

$$x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \quad (k = 1, \pm 1, \pm 2, ...)$$

De tweede rij oplossingen vind je door $\frac{1}{4}\pi$ van π af te trekken:

$$x = \pi - \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \text{ ofwel } x = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$$

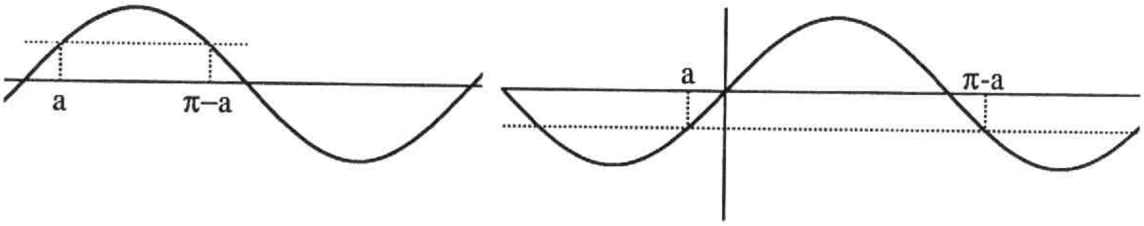
Schematisch:

$$\begin{tikzcd}
& \sin x = \sin \frac{1}{4}\pi \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi & & x = (\pi - \frac{1}{4}\pi) + k \cdot 2\pi \arrow[d] \\
& & x = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi
\end{tikzcd}$$

Schema van de 'sinus-standaardvergelijking':

$$\begin{tikzcd}
& \sin x = \sin c \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
x = c + k \cdot 2\pi & & x = \pi - c + k \cdot 2\pi
\end{tikzcd}$$

Illustratie:



Merk op dat de regel ook geldt als sin a (of a) negatief is!

9. Pas het schema van de 'sinus-standaardvergelijking' toe op de volgende vergelijkingen:

>a $\sin x = \sin \frac{1}{8}\pi$

>b $\sin x = \sin 1\frac{1}{5}\pi$

>c $\sin x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

>d $\sin x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

>e $2 \sin x = -\sqrt{2}$

>f $2 \sin x + 1 = 0$

Om het schema van de 'sinus-standaardvergelijking' te kunnen toepassen, hoeft er niet persé sin x te staan aan één van de kanten. Je kunt het schema ook toepassen op vergelijkingen als $\sin 3x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ of $\sin(x - \frac{1}{3}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.
Daartoe schrijven het schema zo:

$$\boxed{\begin{tikzcd}
 & \sin \square = \sin \bigcirc \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\square = \bigcirc + k \cdot 2\pi & \text{of} & \square = \pi - \bigcirc + k \cdot 2\pi
\end{tikzcd}}$$

Toegepast op $\sin 3x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ levert dit op:

$$\begin{tikzcd}
 & \sin 3x = \frac{1}{2}\sqrt{3} \arrow[d] & \\
 & \sin 3x = \sin \frac{1}{3}\pi \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
3x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \arrow[d] & & 3x = \pi - \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \arrow[d] \\
x = \frac{1}{9}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi & & x = \frac{2}{9}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi
\end{tikzcd}$$

10. >a Teken de grafiek van $y = \sin 3x$ voor $0 \leq x \leq 2\pi$
>b Teken de lijn $y = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.
Wat zijn de x-coördinaten van de snijpunten van deze lijn met de grafiek van $y = \sin 3x$?
>c De oplossingsrijen bij de vergelijking $\sin 3x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ zijn periodiek met periode $\frac{2}{3}\pi$. Had je dat kunnen voorzien?

11. >a Los op: $\sin 2x = \frac{1}{2}$.
>b Controleer je oplossingen met een grafiek.

12. >a Teken in één figuur de grafieken van $y = \sin(x - \frac{1}{3}\pi)$ en van $y = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.
>b Wat zijn de x-coördinaten van de snijpunten tussen 0 en 2π?
>c Los de vergelijking $\sin(x - \frac{1}{3}\pi) = \sin \frac{1}{3}\pi$ volgens het schema van de sinus-standaardvergelijking en controleer je oplossing met een grafiek.

13. >a Los op: $\sin(x + \frac{1}{4}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$
>b Controleer je oplossing met behulp van een grafiek

14. Gebruik het schema van de sinus-standaardvergelijking;

>a $\sin 5x = \sin \frac{4}{5}\pi$

>b $\sin (x - \frac{2}{5}\pi) = \sin \frac{3}{5}\pi$

>c $\sin 4x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

>d $\sin \pi x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

>e $\sin \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}$

>f $\sin (x + 1) = \frac{1}{2}$

>g $\sin (2x - \pi) = 1$

>h $\sin (2x - \frac{1}{3}\pi) = 0$

15. Gegeven is de vergelijking: $\sin (2x - 1) = \frac{3}{5}$.

>a Vertegenwoordigers van de beide rijen van oplossingen zijn (afgerond in 2 decimalen): 0,82 en 1,75.
Ga dit na.

>b Geef de volledige oplossing van deze vergelijking.

16. >a Teken de grafiek van $f(x) = 5 \sin 0{,}1\pi(x - 2)$.

>b Los op: $f(x) = 2{,}5$.

>c Voor welk x tussen 0 en 10 geldt: $f(x) > 2{,}5$?

17. In een vochtig land als Nederland is de lengte van het groeiseizoen van belang. Het groeiseizoen bestaat uit de dagen met een middagtemperatuur boven 5° C. De jaarlijkse temperatuurschommeling in Nederland wordt hier beschreven door de formule:

$$T = 9{,}5 + 10{,}5 \sin \tfrac{\pi}{6}(t - 4)$$

T is de middagtemperatuur in Nederland in ° C, t is de tijd in maanden gerekend vanaf het begin van het jaar, $t = 0$ valt samen met 1 januari.
Voor het gemak mag je aannemen dat alle maanden 30 dagen lang zijn.

>a Welke middagtemperatuur is in Nederland volgens bovenstaande formule te verwachten op 1 april?

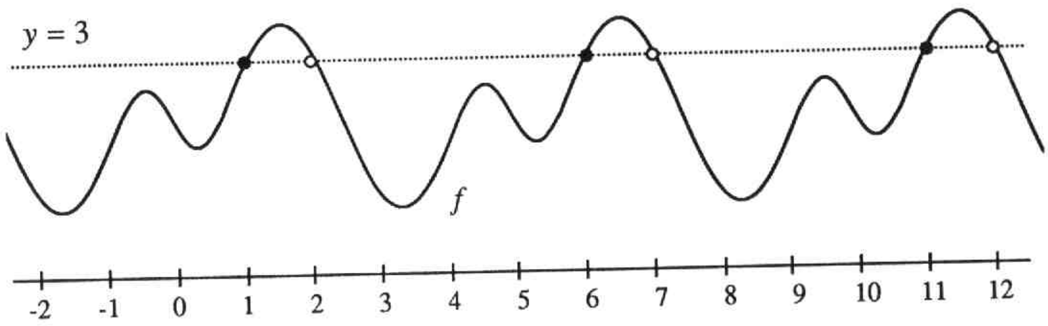
>b Op welke data (ongeveer) in het jaar is de middagtemperatuur ongeveer 5° C? Beantwoord deze vraag met behulp van een sinus-standaardvergelijking.

>c Teken een grafiek van T als functie van t.

>d Lees uit je grafiek af hoeveel dagen het groeiseizoen in Nederland ongeveer duurt.

TERUGBLIK

Als f een periodieke functie is, dan heeft de vergelijking $f(x) = c$ periodieke oplossingsrijen (mits c in het bereik van f ligt).
Voorbeelden:



Bij de functie f uit het plaatje zie je dat de vergelijking $f(x) = 3$ periodieke oplossingen (• en ∗) heeft.

•	$x = ... , -4, 1, 6, 11, ...$	ofwel $x = 1 + k \cdot 5$	
o	$x = ... , -3, 2, 7, 12, ...$	ofwel $x = 1 + k \cdot 5$	(k geheel)

Opgave.
Zie bovenstaande grafiek.

\> Hoeveel verschillende oplossingen heeft de vergelijking $f(x) = 2$?
En de vergelijking $f(x) = 1$?

Het oplossingsschema van de snius-standaardvergelijking is:

sin ▨ = sin ●

▨ = ● $+ k \cdot 2\pi$ of ▨ $= \pi -$ ● $+ k \cdot 2\pi$

Opgave.

\>a Voor welke waarden van c heeft de vergelijking $\sin x = c$ slechts één periodieke oplossingsrij met periode 2π?

\>b Voor welke waarden van c heeft de vergelijking $\sin x = c$ geen oplossingen?

8 De functie cosinus

Tot nu toe draaide veel in dit boekje om de sinusfunctie. De kracht van de sinus is dat zij als wiskundig model gebruikt kan worden bij veel periodieke verschijnselen. Hoewel we in principe aan de sinus genoeg hebben, is het toch handig om ook haar 'compagnon', de cosinus, te gebruiken.
Echt nieuw is de cosinus niet. Het gaat er om dat je goed het verband weet met de sinus.

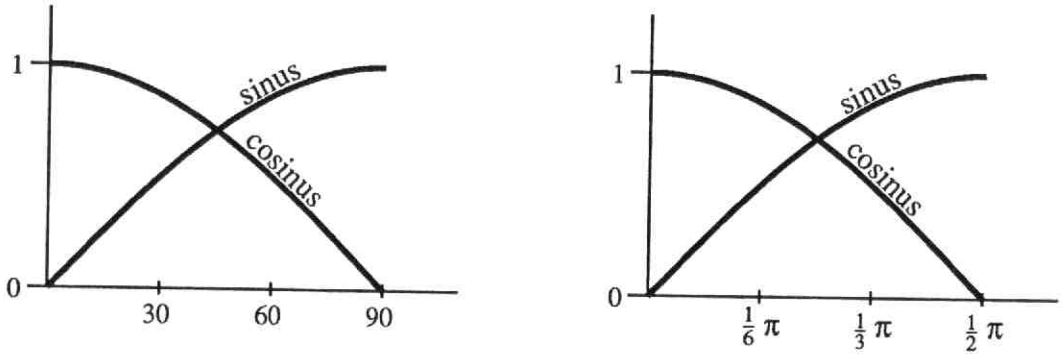
Dat verband bekijken we eerst voor hoeken van 0° tot en met 90°.

hoek	sin(us)	cos(inus)
0°	0	1
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
45°	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
60°	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
90°	1	0

Je ziet: als je de hoek laat groeien van 0° tot 90° dan groeit de sinus van die hoek van 0 tot 1. De cosinus maakt een soort tegenbeweging en daalt van 1 naar 0.

In onderstaande figuur zie je dat geïllustreerd: links met gebruikmaking van graden, rechts met radialen.

De grafieken zijn elkaars spiegelbeeld t.o.v. $\alpha = 45°$ (of $\alpha = \pi$).



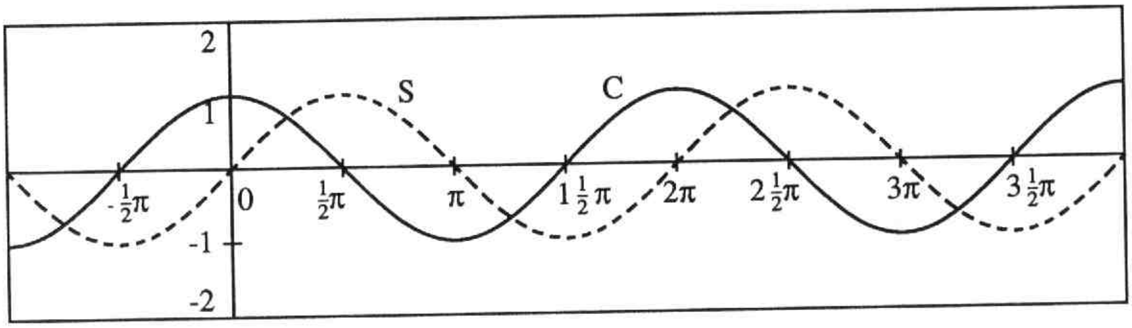
1. >a Controleer met je rekenmachine:
   cos 15° = sin 75°.

   >b Verklaar uit bovenstaand plaatje:
   $\cos\alpha = \sin(90° - \alpha)$

   >c Hoe luidt het verband tussen cosinus en sinus met gebruikmaking van de radiaal als hoekmaat?

   >d Stel je voor dat de cos-knop op je rekenmachientje ontbreekt. Hoe kun je dan toch de cosinus van 1 radiaal berekenen?

Zoals de sinusfunctie uit te breiden is voor waarden groter dan $\frac{1}{2}\pi$ of kleiner dan 0, zo kan dat ook met de cosinusgrafiek.



S = grafiek van sinus
C = grafiek van cosinus

Je ziet dat S en C verschoven liggen ten opzichte van elkaar.
De voorsprong van C op S in fase is $\frac{1}{2}\pi$.
Voor S geldt: $y = \sin x$
Voor C geldt dus: $y = \sin(x + \frac{1}{2}\pi)$.
Conclusie:

Voor elke reële waarde van x geldt:
$$\cos x = \sin(x + \tfrac{1}{2}\pi)$$

2. Kijk naar de grafiek van de cosinusfunctie.
   - >a Voor welke waarden van x geldt: $\cos x = 0$?
   - >b Voor welke waarden van x geldt: $\cos x = 1$?
   - >c Voor welke waarden van x geldt: $\cos x = -1$?

3. Teken voor $0 \leq x \leq 2\pi$ de grafieken van:
   - >a $y = 2\cos x$
   - >b $y = \cos 2x$
   - >c $y = 1 + \cos x$
   - >d $y = \cos(x - \frac{1}{3}\pi)$

4. Voor $0 \leq x \leq 2\pi$ is de functie f gegeven door:
$$f(x) = 2\cos(x + \tfrac{1}{4}\pi) - 1$$
   - >a Bereken $f(0), f(\frac{1}{4}\pi), f(\frac{1}{2}\pi), f(\frac{3}{4}\pi)$.
   - >b Teken de grafiek van f.

De 'cosinus-standaardvergelijking' heeft de gedaante: $\cos x = \cos c$

Uit de symmetrie van de cosinusgrafiek ten opzichte van de y-as volgt:

$$\begin{tikzcd} & \cos x = \cos c \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ x = c + k \cdot 2\pi & & x = -c + k \cdot 2\pi \end{tikzcd}$$

ofwel

$$\begin{tikzcd} & \cos \text{▨} = \cos \text{●} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \text{▨} = \text{●} + k \cdot 2\pi & \text{of} & \text{▨} = -\text{●} + k \cdot 2\pi \end{tikzcd}$$

5. Pas het schema van de cosinus-standaardvergelijking toe op:

>a $\cos x = \cos \frac{3}{5}\pi$

>b $\cos x = \cos 1$

>c $\cos x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

>d $\cos (x - \frac{1}{5}\pi) = \cos \frac{1}{5}\pi$

>e $\cos (x + \frac{1}{4}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

>f $\cos 2x = 1$

>g $2 \cos x = 1$

>h $\cos (2x + \pi) = \frac{1}{2}$

6. Nog een serie vergelijkingen:

>a $2\cos x + 3 = 4$

>b $\cos (2x + 3) = 4$

>c $3 \cos 4x = 5$

>d $5 \cos 4x = 3$

>e $\cos x - \cos 1 = 0$

>f $\cos (x - 1) = 0$

>g $\cos \frac{1}{4}\pi x = -1$

>h $2 \cos (x + \frac{1}{4}\pi) = 1$

7. Hoe kun je je oplossing van 6>h controleren met behulp van de grafiek uit opgave 4?

8. In het voorgaande heb je gezien: $\cos x = \sin (x + \frac{1}{2}\pi)$.
De vergelijking $\cos x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ is gelijkwaardig met $\sin (x + \frac{1}{2}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

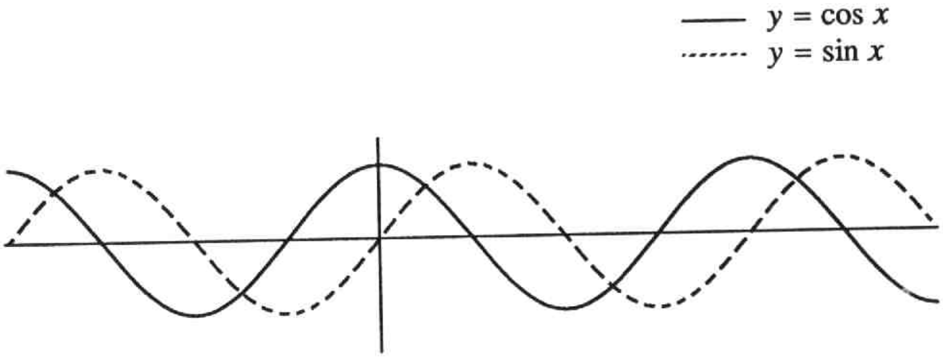
> Los die vergelijking op met behulp van het schema voor de sinus-standaardvergelijking; vergelijk je oplossingen met die bij opgave 5>c.

TERUGBLIK

De cosinus heeft een fasevoorsprong van $\frac{1}{2}\pi$ op de sinus.

In formule:

$$\boxed{\cos x = \sin (x + \tfrac{1}{2}\pi)}$$



Het schema voor het oplossen van de cosinus-standaardvergelijking luidt:

cos ▒ = cos ●

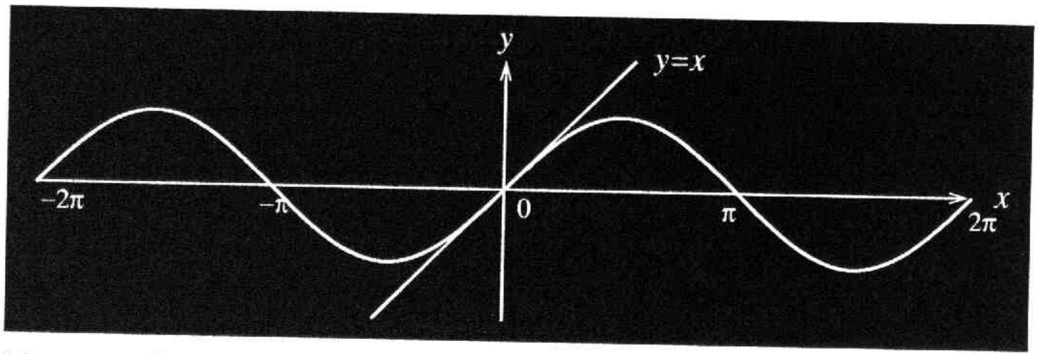
▒ = ● + $k \cdot 2\pi$ of ▒ = −● + $k \cdot 2\pi$

Opgave.

\>a Van een sinusoïde is de amplitude 5 en de periode $\frac{1}{4}\pi$. De grafiek de evenwichtsstand 3 en het hoogste punt (top) ligt op de y-as.
Geef een formule bij deze sinusoïde.

\>b Teken in één figuur de grafieken van $y = \sin 2(x - \frac{1}{4}\pi)$ en $y = \cos 2(x + \frac{1}{2}\pi)$.

9 Het differentiëren van goniometrische functies



Met een rekenmachientje zijn de waarden van sin x uitgerekend voor x in de buurt van 0.

x	sin x
-0.005	-4.9999 -03
-0.004	-3.9999 -03
-0.003	-2.9999 -03
-0.002	-1.9999 -03
-0.001	-9.9999 -04
0	0
0.001	9.99999 -04
0.002	1.99999 -03
0.003	2.99999 -03
0.004	3.99998 -03
0.005	4.99997 -03

1. Bekijk de uitkomstenkolom.
   -4.9999 -03 kun je schrijven als -0,0049999

   >a Van welke van de uitkomsten (0 niet meegerekend) zijn de meeste decimalen gegeven?

   >b Controleer dat de uitkomsten in de sin x-kolom *bijna* gelijk zijn aan de bijbehorende x-waarden.

   >c Zoek een x-waarde ($\neq 0$) in de buurt van 0, waarbij je rekenmachientje als uitkomst geeft dat sin x *gelijk is aan* x.

Als x in de buurt van 0 zit, dan zijn sin x en x bij benadering aan elkaar gelijk.
Als het venster van je rekenmachientje groter zou zijn, dan zou je ook in het voorbeeld dat je bij 1 c gevonden hebt zien, dat er een klein verschil is tussen x en sin x. Vandaar de toevoeging 'bij benadering'.

$$\boxed{\sin x \approx x \quad \text{voor } x \text{ in de buurt van } 0}$$

Wat onderaan blz. 46 staat, kan ook zo worden gezegd:
De grafiek van $y = \sin x$ valt in de buurt van de oorsprong vrijwel samen met de lijn $y = x$.
Er geldt:

> De lijn $y = x$ is de raaklijn in de oorsprong aan de grafiek van $y = \sin x$.
> De hellingscoëfficiënt van de grafiek van $y = \sin x$ in (0,0) is gelijk aan 1.

2. Bekijk de grafiek van $f(x) = \sin x$.
   - \>a Geef de hellingscoëfficiënt van die grafiek achtereenvolgens in de punten $(\frac{1}{2}\pi, 1)$; $(\pi, 0)$; $(1\frac{1}{2}\pi, -1)$; $(2\pi, 0)$.
   - \>b Schets de grafiek van de hellingsfunctie f' tussen $x = -\pi$ en $x = 3\pi$.
   - \>c Veronderstel dat de grafiek van f' ook een sinusoïde is, welke bekende functie is dat dan?

3. Bekijk de grafiek van $g(x) = \cos x$.
   - \>a Vul in:
     $g'(0) = \ldots$; $g'(\frac{1}{2}\pi) = \ldots$; $g'(\pi) = \ldots$; $g'(1\frac{1}{2}\pi) = \ldots$; $g'(2\pi) = \ldots$
   - \>b De hellinggrafiek van g is een sinusoïde.
     Door welke formule wordt g' gegeven?

In opgave 2 heb je gezien dat de hellingscoëfficiënt van $y = \sin x$ schommelt tussen -1 en 1 en dat de hellingfunctie van $y = \sin x$ veel op de cosinusfunctie lijkt.
Om dit laatste te checken, hebben we de hellingscoëfficiënt uitgerekend in kleine omgevingen van achtereenvolgens $x = 1, 2, \ldots\ldots, 6$. Ook hebben we de waarden van $\cos x$ uitgerekend.
Resultaat:

x	$\frac{\sin(x+0.001) - \sin(x-0.001)}{0.002}$	$\cos x$
1	0.5403	0.5403
2	-0.4161	-0.4161
3	-0.9900	-0.9900
4	-0.6536	-0.6536
5	0.2837	0.2837
6	0.9602	0.9602

Je ziet:
In vier decimalen nauwkeurig zijn de uitkomsten van $\frac{\sin(x+0.001) - \sin(x-0.001)}{0.002}$ en $\cos x$ aan elkaar gelijk.

De tabel is een sterke aanwijzing voor de regel:

$$\boxed{\text{Als } f(x) = \sin x, \text{ dan } f\,'(x) = \cos x}$$

Evenzo kan de in opave 3 gesuggereerde formule worden nagerekend:

$$\boxed{\text{Als } g(x) = \cos x, \text{ dan } g'(x) = -\sin x}$$

4. Iemand zou kunnen tegenwerpen:
als ik bijvoorbeeld $\frac{\sin 5.001 - \sin 4.999}{0\ .002}$ in zeven decimalen uitreken, dan zie ik dat de uitkomst niet precies gelijk is aan cos 5.

>a Controleer of dat zo is.

>b Wat is je commentaar op die tegenwerping?

5. > Geef de hellingfunctie $f\,'$ van f in elk van de volgende gevallen:

$f(x)$	$f\,'(x)$
$5 \sin x$	
$1 + \cos x$	
$1 - \cos x$	
$\sin x - \cos x$	
$2 \sin x + 3 \cos x$	

6. Het punt $A(\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{2}\sqrt{3})$ ligt op de grafiek van $y = \sin x$.

>a Hoe groot is de hellingscoëfficiënt van de raaklijn in A aan de sinusgrafiek.

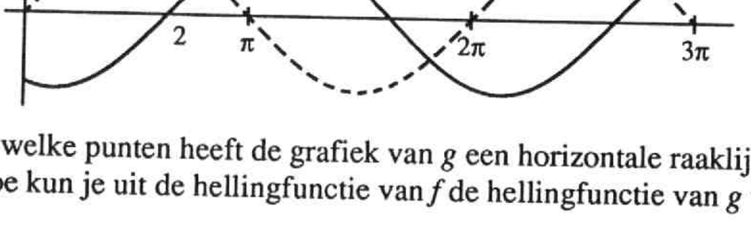
>b Geef een vergelijking van die raaklijn.

7. De raaklijnen in de punten $(-\frac{1}{2}\pi,0)$ en $(\frac{1}{2}\pi,0)$ aan de grafiek van $y = \cos x$ snijden elkaar in een punt P.

> Bepaal de coördinaten van P.

8. De punten waarin de grafiek van $y = \sin x$ de x-as snijdt, zijn buigpunten van die grafiek. Toon dat aan.

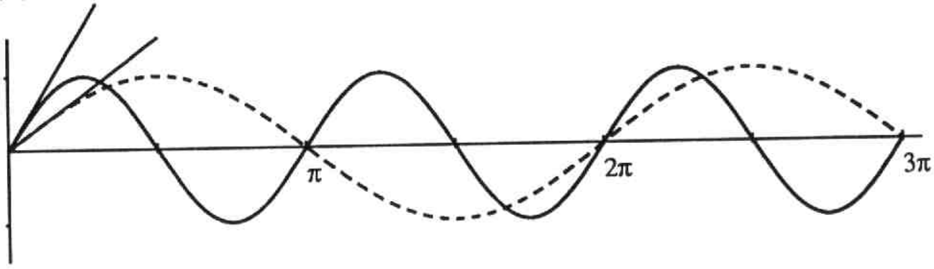
9. In één figuur zijn de grafieken getekend van:
$f(x) = \sin x$ en $g(x) = \sin (x-2)$



>a In welke punten heeft de grafiek van g een horizontale raaklijn?

>b Hoe kun je uit de hellingfunctie van f de hellingfunctie van g vinden?

10. In één figuur zijn de grafieken getekend van
$f(x) = \sin x$ en $g(x) = \sin 2x$



>a Verklaar: $g(x) \approx 2x$ voor x in de buurt van 0.

>b Welke vergelijking heeft de raaklijn in de oorsprong aan de grafiek van g?

>c De hellinggrafiek van g is een sinusoïde.
Hoe groot is de periode van die sinusoïde?

>d En hoe groot is de amplitude van de hellinggrafiek van g?
(Anders gevraagd: hoe groot is de maximale hellingscoëfficiënt van g?)

>e Geef een formule bij de hellingfunctie g'.

Wat in de opgaven 9 en 10 is ontdekt, kan algemeen zo worden gezegd:

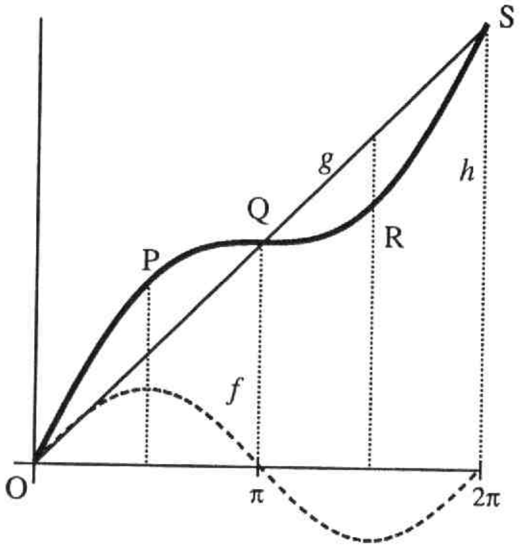
Als $f(x) = \sin(x+d)$, dan $f'(x) = \cos(x+d)$
Als $f(x) = \sin(bx)$, dan $f'(x) = b \cdot \cos(bx)$

11. Analoge regels kunnen worden gegeven voor het differentiëren van $\cos(x+d)$ en $\cos(bx)$.
> Geef die regels.

12. > Differentieer de volgende functies:

$f(x)$	$f'(x)$
$\sin 1\frac{1}{2} x$	
$\cos (x - \frac{1}{4}\pi)$	
$10 \sin(\frac{1}{30}\pi x)$	
$3 \sin 2x - 1$	
$3 \sin(x+2) + x$	
$2 \sin 5x + 5 \cos 2x$	
$5x - \cos(x-1)$	

13. In één figuur zijn voor $0 \leq x \leq 2\pi$ de grafieken getekend van:
$f(x) = \sin x$, $g(x) = x$ en $h(x) = x + \sin x$



>a Op de grafiek van h zijn de punten O, P, Q, R en S aangegeven.

>b Bereken de hellingscoëfficiënt van de raaklijn in O en S aan de grafiek van h.

>c Bewijs dat de raaklijn in Q aan de grafiek van h horizontaal is.

>d Bewijs ook dat Q een buigpunt is van de grafiek van h.

>e Welke lijnen evenwijdig aan de grafiek van g raken aan de grafiek van h?

>f Bereken de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van h met de lijn $y = x + \frac{1}{2}$.

14. Herhaald differentiëren.

Voobeeld:	$f(x) = x^4$	(functie)
	$f'(x) = 4x^3$	(eerste afgeleide)
	$f''(x) = 12x^2$	(tweede afgeleide)
	$f'''(x) = 24x$	(derde afgeleide)
	$f''''(x) = 24$	(vierde afgeleide)

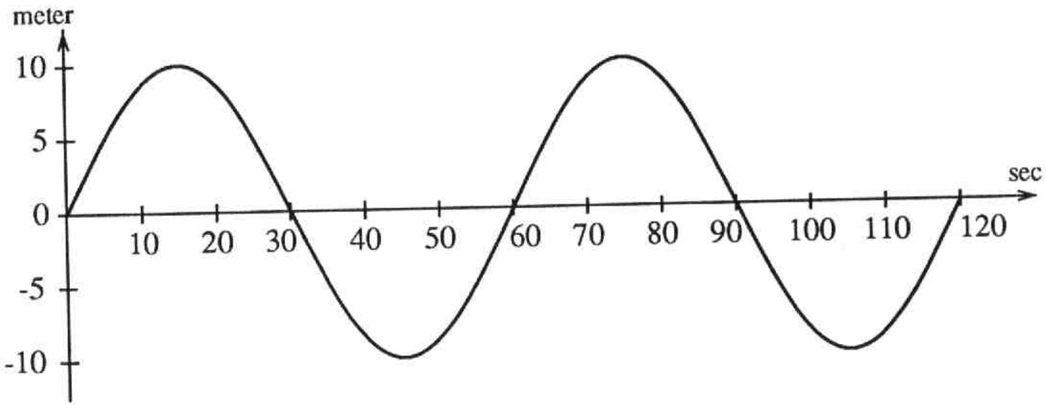
>a Maak zo'n rijtje voor $f(x) = \sin x$.

>b Ook voor $f(x) = \cos 2x$

>c Welke functie is de tiende afgeleide van $f(x) = \sin x$?

>d Welke functie is de tiende afgeleide van $f(x) = \cos 2x$?

15. Bekijk de tijd, plaats-grafiek van de schaduw van de schildwacht uit hoofdstuk 5.



De grafiek beantwoordt aan de formule: $s(t) = 10 \cdot \sin \frac{1}{30}\pi\, t$.

>a Bereken $s\,'(t)$.

>b Hoeveel m/s is de snelheid op $t = 10$?

>c Hoeveel m/s is de maximale snelheid?

>d Druk de versnelling $a(t)$ uit in t.

>e Op welke momenten geldt: $a(t) = 0$?

16. Gegeven de functie $f(x) = 2 \sin (x - \frac{1}{4}\pi)$.

>a Teken de grafiek van f.

>b Bereken de coördinaten van de punten tussen de lijnen $x = 0$ en $x = 2\pi$, waarin de raaklijn aan de grafiek de hellingscoëfficiënt 1 heeft.

TERUGBLIK

De hellinggrafiek van een sinusoïde is zelf ook een sinusoïde.
Er geldt:

$f(x)$	$f'(x)$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin (x + d)$	$\cos (x + d)$
$\cos (x + d)$	$-\sin (x + d)$
$\sin bx$	$b \cos bx$
$\cos bx$	$-b \sin bx$

Opgave.

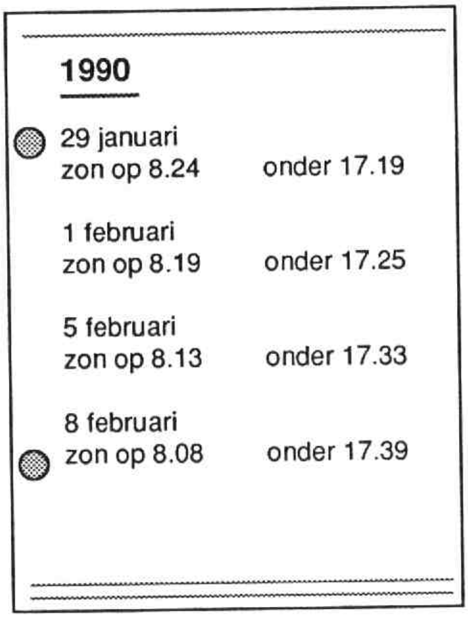
>a Welke functie is de afgeleide van $f(x) = a \sin bx + c$?
En welke van $f(x) = a \cos bx + d$?

>b Bij een harmonische beweging met periode p en amplitude q is de versnelling tegengesteld evenredig met de uitwijking. (Je kunt ook zeggen: de vertraging is evenredig met de uitwijking).
Laat dit zien met behulp van de differentieerregels.

10 Sinus als model

In dit boekje heb je voorbeelden gezien van verschijnselen die met een sinusfunctie kunnen worden beschreven.
Hierbij moet je 'sinus' niet al te 'letterlijk' opvatten. Neem de beweging van de stemvork. Als die zou beantwoorden aan de sinusfunctie zou de stemvork eeuwig blijven bewegen .... Wel geeft de sinusfunctie een redelijke benadering van de beweging. In zo'n geval wordt de sinusfunctie als *model* gebruikt.
In dit hoofdstuk zullen we nog een paar voorbeelden bekijken van de sinusfunctie als *model* van een periodiek verschijnsel.

1. *Daglengte*



1990

29 januari
zon op 8.24 onder 17.19

1 februari
zon op 8.19 onder 17.25

5 februari
zon op 8.13 onder 17.33

8 februari
zon op 8.08 onder 17.39

De daglengte in Nederland varieert nogal gedurende het jaar. In de figuur op blz. 53 staan de tijdstippen van zonsondergang en zonsopgang.

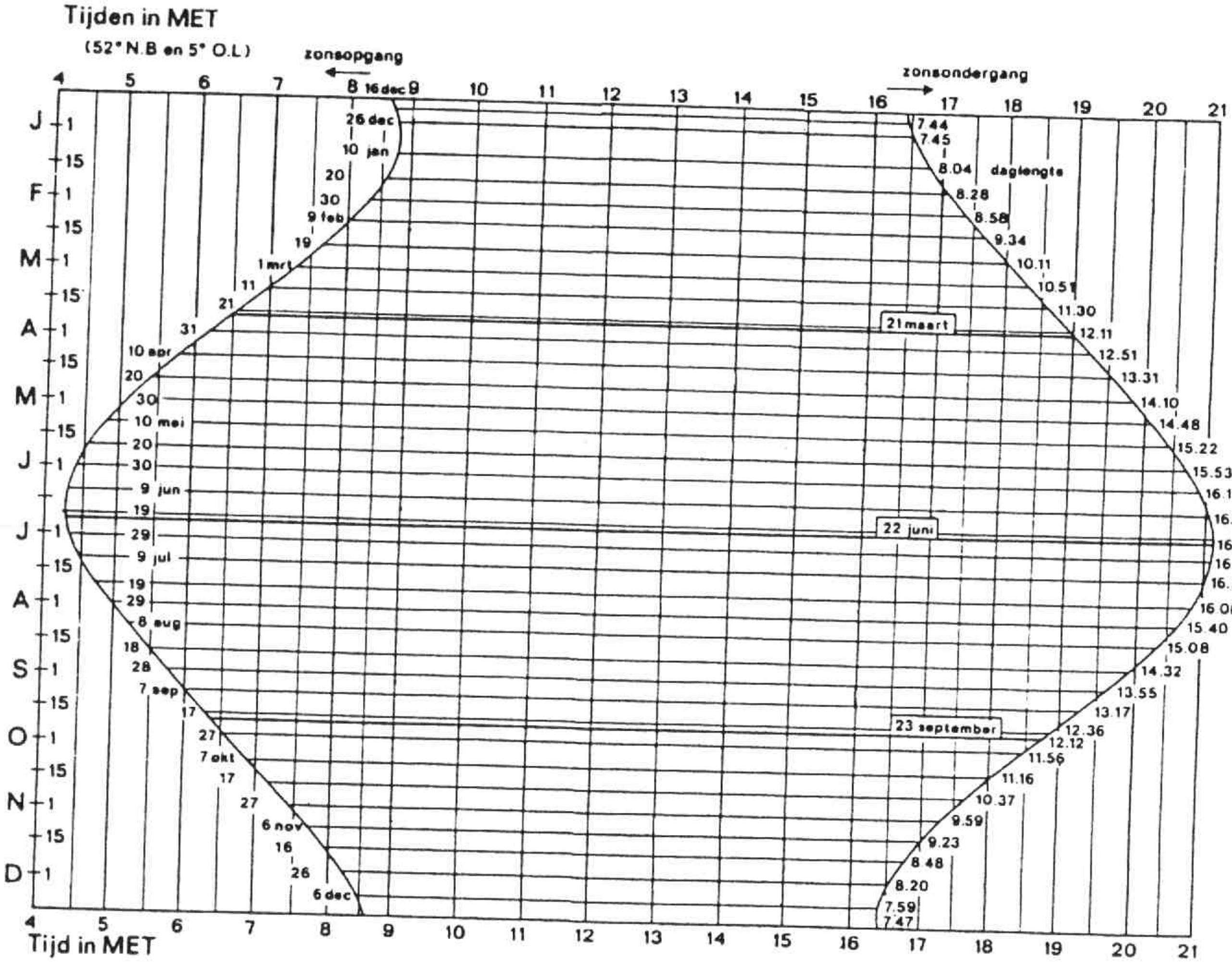
Langs de verticale as staat de datum.
Langs de horizontale as staat de Middeneuropese tijd (MET), dit is de Nederlandse wintertijd. Er is geen rekening gehouden met de zomertijd.

Als je de figuur een kwartslag draait, zie je dat de grafieken van zonsopgang en zonsondergang beide ongeveer de vorm hebben van een sinusoïde.

Voor de zonsopgang wordt een benadering gegeven door de volgende formule:

$$\mathbf{Z}_{op} = 6{,}5 - 2{,}25 \sin \tfrac{2\pi}{365}(t - 88) \qquad (1)$$

t is het aantal dagen na 1 januari.
$\mathbf{Z}_{op}$ is het tijdstip in decimale uren (wintertijd).



>a Ga na of formule (1) redelijk in overeenstemming is met de grafiek van het tijdstip van zonsopgang.

>b Wat is volgens de *formule* het vroegst mogelijke tijdstip van zonsopgang? Licht je antwoord toe.

>c Volgens een kalender valt de meest late zonsopgang op 29 december.
Ga na, of de dag waarop de meest late zonsopgang volgens de formule valt meer dan 1 dag afwijkt van 29 december.

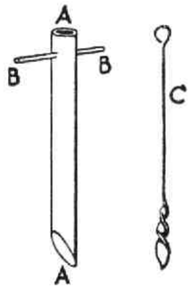
>d Volgens dezelfde kalender valt de duisternis het vroegst op 13 december. Leid uit dit gegeven en uit de figuur een soortgelijke formule als (1) af voor het tijdstip van zonsondergang ($\mathbf{Z}_{\text{onder}}$).

>e In de figuur kun je ook het verloop van de daglengte ($\mathbf{Z}_{\text{onder}}$ - $\mathbf{Z}_{\text{op}}$) aflezen.
Maak een grafiek en een formule van de daglengte afhankelijk van de tijd in het jaar.

>f Hoeveel dagen per jaar is in Nederland de zon meer dan 16 uur op?

2. *Grondtemperatuur*

Het wetenschappelijk onderzoek van de grondtemperaturen gebeurt als volgt: Men neemt verscheidene thermometers, waarvan elk op een zeer bepaalde diepte geplaatst wordt. Wij kunnen ook op die wijze werken; ook goedkope thermometers zijn daartoe voldoende, *mits we ze eerst onderling hebben vergeleken*. Voor de thermometers die het diepst zitten boren we gaten in de grond met een grondboor, een schuin afgezaagd stuk gasbuis, waaruit we de aarde telkens met het ijzertje *c* verwijderen; we plaatsen hier onze traagste thermometers, en halen die voor elke aflezing met behulp van touwtje *snel* omhoog.



Eenvoudige grondboor.

Zet nu eens de temperaturen uit tegen de tijd. We krijgen voor elke diepte een kromme, die min of meer sinusvormig is. We kunnen nu prachtig bestuderen hoe de warmte door de grond wordt voortgeleid. Naarmate we dieper komen wordt de *amplitude* der temperatuursschommeling verrassend snel geringer en verschuift de *fase*. In zandgrond is op 7 cm diepte de amplitude al tot de helft gedaald! Daar ligt de zgn. 'halveringslaag'. Op 40 cm diepte komen de maxima en minima al bijna een half etmaal te laat! Blijkbaar is er beneden 50 cm niet veel meer te merken van 'de dagelijkse golf'. We zien dus dat deze golf ongeveer 40 cm in 12 uur heeft afgelegd, haar voortplantingssnelheid is ongeveer 4 cm/uur. Inderdaad is de warmtegeleiding van zand en aarde slechts zeer gering.

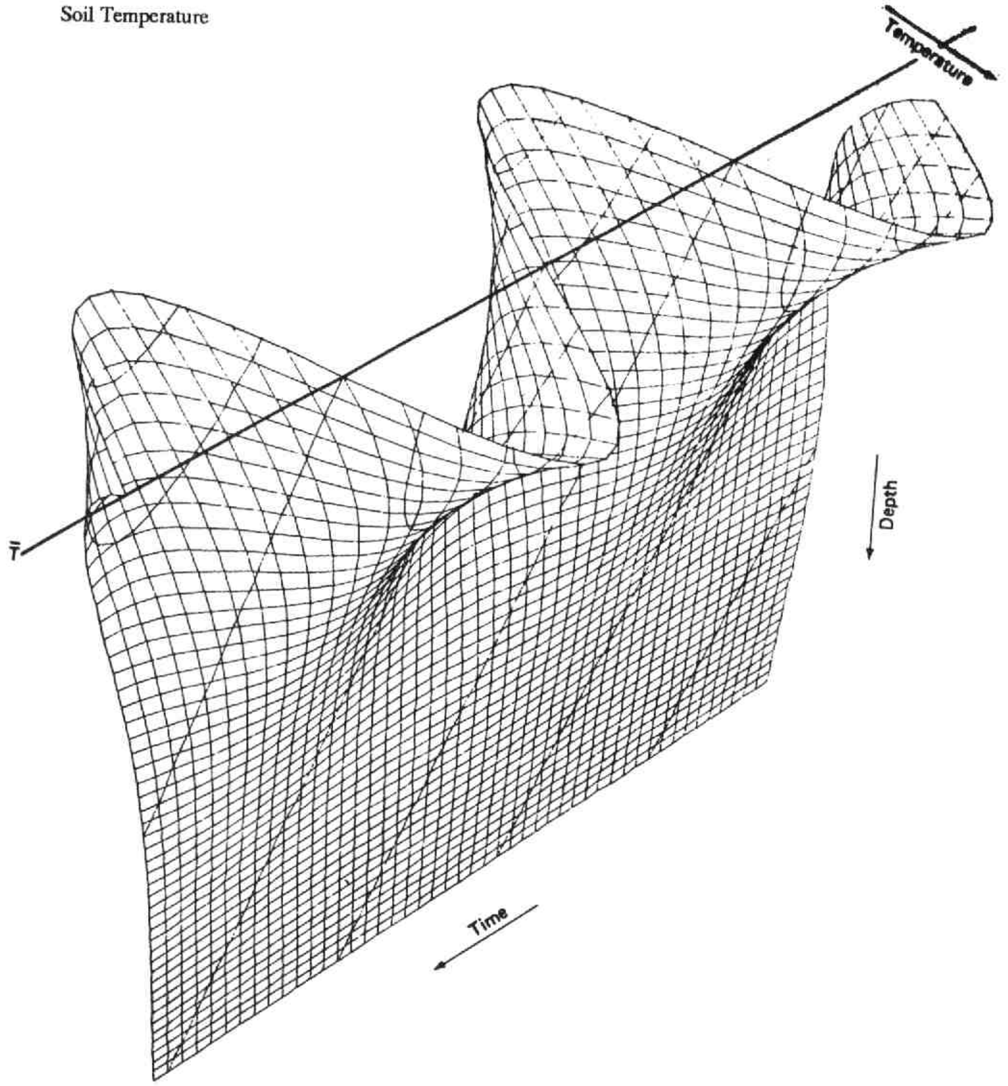
>a Lees bovenstaand stukje tekst uit 'Natuurkunde van het vrije veld' van prof. M. Minnaert.

De sinusvormige temperatuurgrafiek waar Minnaert over schrijft, zijn in de figuur op blz. 55 getekend en verenigd in één drie-dimensionaal plaatje.

>b Bekijk de ruimtelijke grafiek en ga na of die globaal in overeenstemming is met wat Minnaert zegt over de verandering van amplitude en fase, naarmate er dieper in de bodem wordt gemeten.

>c De temperatuurgrafiek met de grootste amplitude hoort bij het grondoppervlak (diepte 0).
De temperatuur aan het grondoppervlak schommelt (op zekere plaats) in een etmaal van 10°C (01.00 uur) tot 26°C (om 13.00 uur).
Ga na dat een sinusmodel van de grondtemperatuur wordt gegeven door de formule:

$$T = 8 \sin \tfrac{\pi}{12}(t - 7) + 18$$



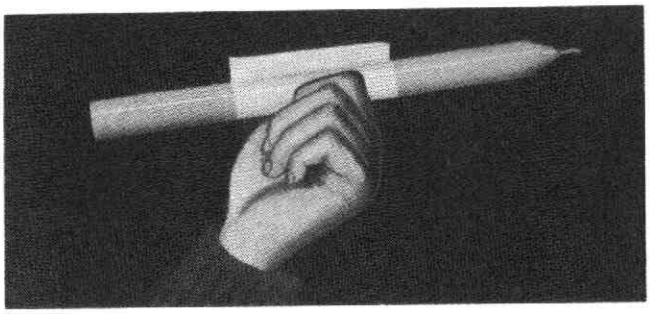
>d Neem aan dat de faseverschuiving lineair afhangt van de diepte.
Stel uit de gegevens van de tekst van Minnaert een sinusmodel op voor de temperatuur op 7 cm diepte.

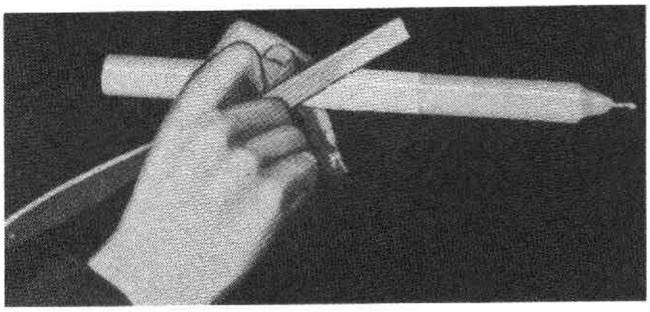
Er is nog gegeven dat de gemiddelde temperatuur daar 2° lager is dan aan de oppervlakte.

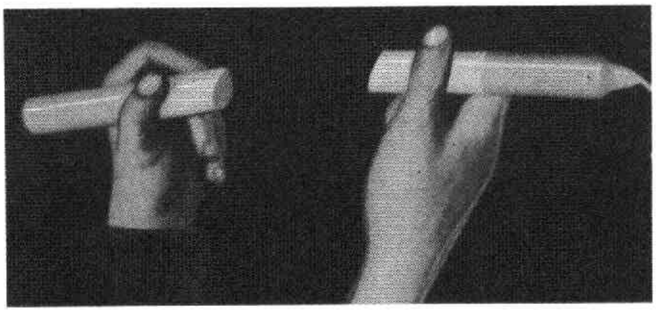
>e Op 40 cm diepte is het verschil tussen minimum en maximum nog slechts 1°C en is de gemiddelde temperatuur 15°C.
Geef een formule voor de temperatuur afhankelijk van de tijd op 40 cm diepte.

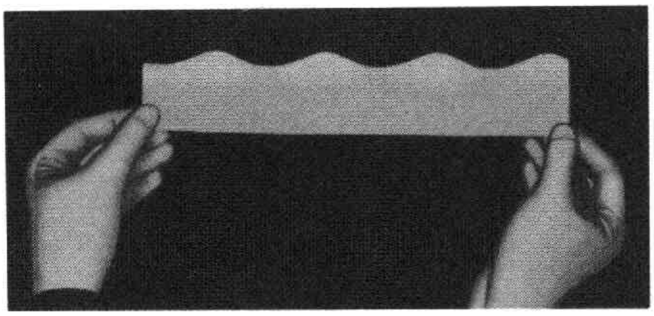
3. *Sinus om een mouw aan te passen*

Rol een stuk papier om een cilindervormige kaars.
Snijd kaars en papier scheef door met een scherp mes.
Rol één van de helften papier uit: je krijgt een .... sinusoïde.
Als je het niet gelooft, proberen maar.

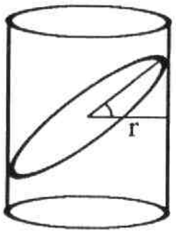


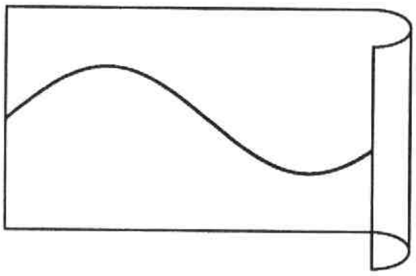






Bij doorsnijding van een cilinder met een vlak dat scheef op de as van de cilinder staat, komt er een elipsvormige snijkromme.
Het experiment met de kaars laat zien dat bij uitrollen van de cilindermantel, die kromme zich ontwikkelt als een golflijn.





Als het papier één keer om de kaars is gewikkeld, krijg je precies één golf.

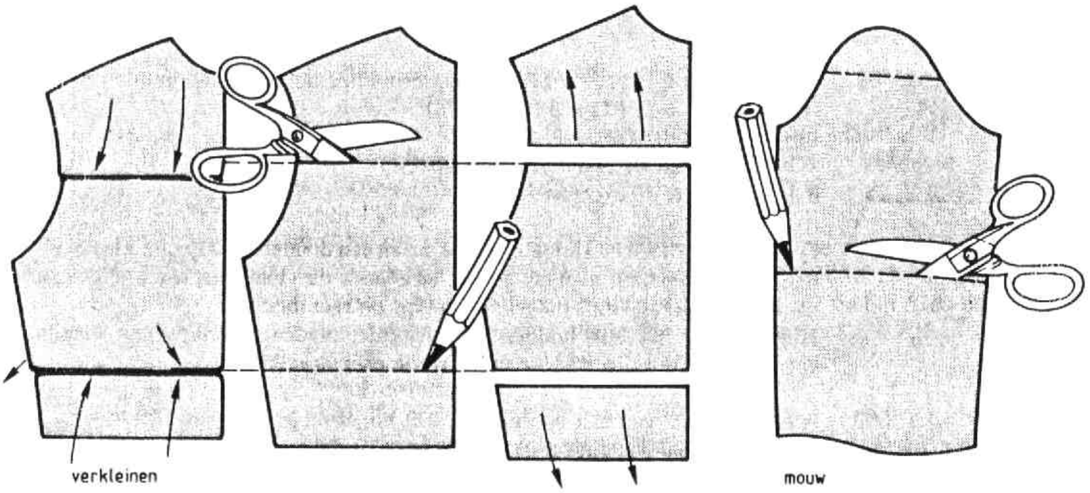
>a Neem aan dat de straal van de kaars *r* cm is.
Hoe lang is de periode (golflengte) van de golflijn?

>b Hoe groot is de amplitude van de golf als de hoek waaronder de kaars wordt doorgesneden gelijk is aan 45°?

>c Veronderstel dat de snijkromme bij uitrollen een echte sinusoïde is.
Welke vergelijking past er (na geschikte keuze van het assenstelsel) bij die sinusoïde?

>d Onder welke hoek moet je de kaars doorsnijden om de golflijn een twee keer zo grote amplitude te geven als bij een hoek van 45°?

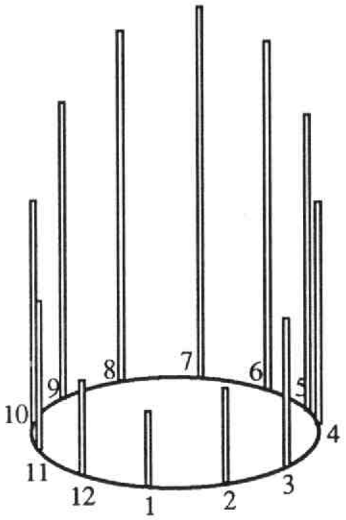
>e Krijg je bij elke hoek van het snijvlak een golflijn?



>f Bekijk het knippatroon hierboven en let speciaal op de inzet van de mouw.
Wat heeft dat met het voorgaande te maken?

4. Deze opgave is een vervolg van opgave 3. Er wordt aangetoond dat de golflijn die ontstaat door een cilinder scheef door te snijden, inderdaad een sinusoïde is.

In de figuur hiernaast zie je 12 paaltjes opgesteld in een cirkel. De onderlinge afstanden tussen de paaltjes zijn gelijk. De paaltjes zijn zo afgezaagd, dat de toppen in één plat vlak liggen.
De hellingshoek van dat vlak is 45°.

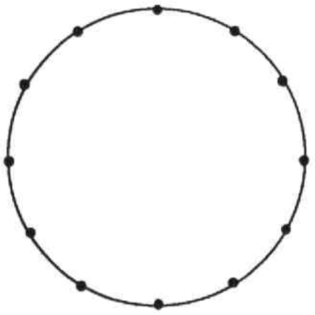


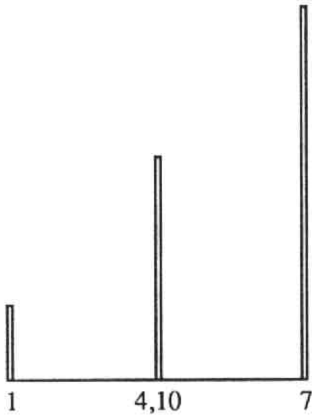
>a De straal van de cirkel waarin de paaltjes zijn opgesteld is 2 m.
Hoe groot is de lengte van het boogje van de cirkel tussen twee opvolgende paaltjes?

>b Het kleinste paaltje (nr. 1) is 1 m hoog.
Hoe hoog is het langste paaltje (nr. 7)?

>c En hoe hoog zijn de paaltjes 4 en 10?

Bekijk het bovenaanzicht en het gedeelte van het zijaanzicht van de 12 paaltjes. In het zijaanzicht zie je de paaltjes 1, 4, 7 en 10.
De paaltjes 2, 3, 5, 6, 8, 9 , 11 en 12 ontbreken.

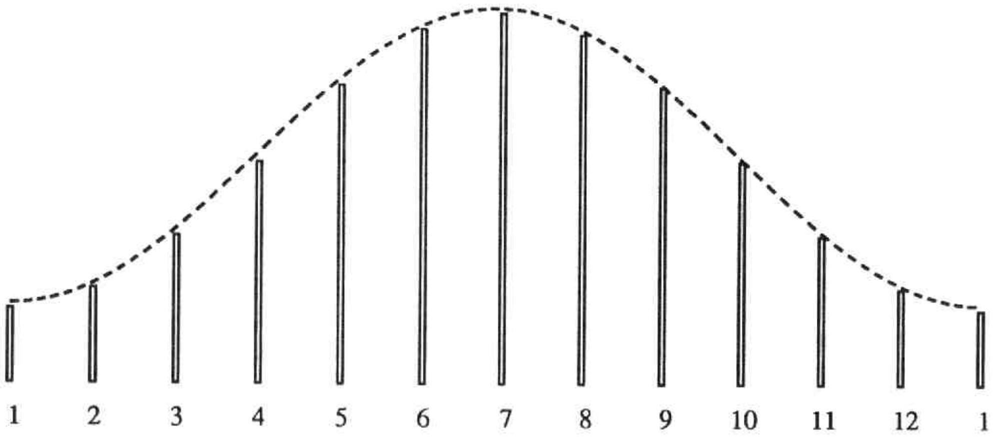

bovenaanzicht



zijaanzicht

>c Teken het zijaanzicht over en maak het compleet.

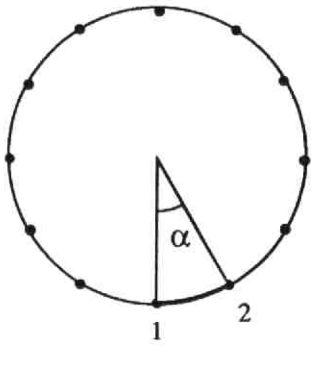
De 12 paaltjes worden nu in één rechte lijn met gelijke tussenruimte geplaatst. Het paaltje 1 is één keer extra neergezet.



>d Laat zien dat de hoogte van elk paaltje wordt gegeven door de formule

$$h = 3 - 2 \cos \alpha$$

Hierbij is α de hoek in het bovenaanzicht die de straal naar een betreffend paaltje maakt met de straal naar paaltje 1 (zie figuur).



Conclusie:

De paaltjes die bij de eerste opstelling als het ware een scheef afgezaagde cilinder vormen, maken bij opstelling op één lijn een echte sinusoïde.