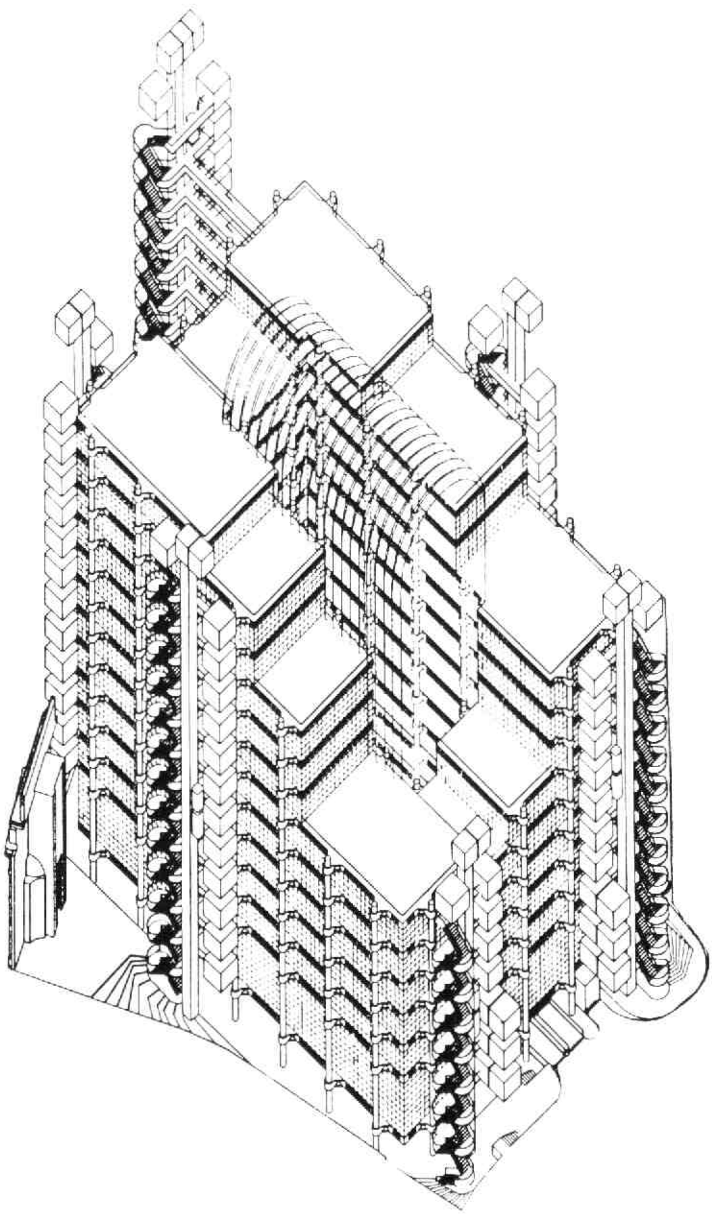
Tekenen wat je weet

https://hdl.handle.net/1874/10134

TEKENEN WAT JE WEET



wiskunde B

TEKENEN WAT JE WEET

Hawex - Wiskunde B

TEKENEN WAT JE WEET

Een produktie ten behoeve van het project Hawex.

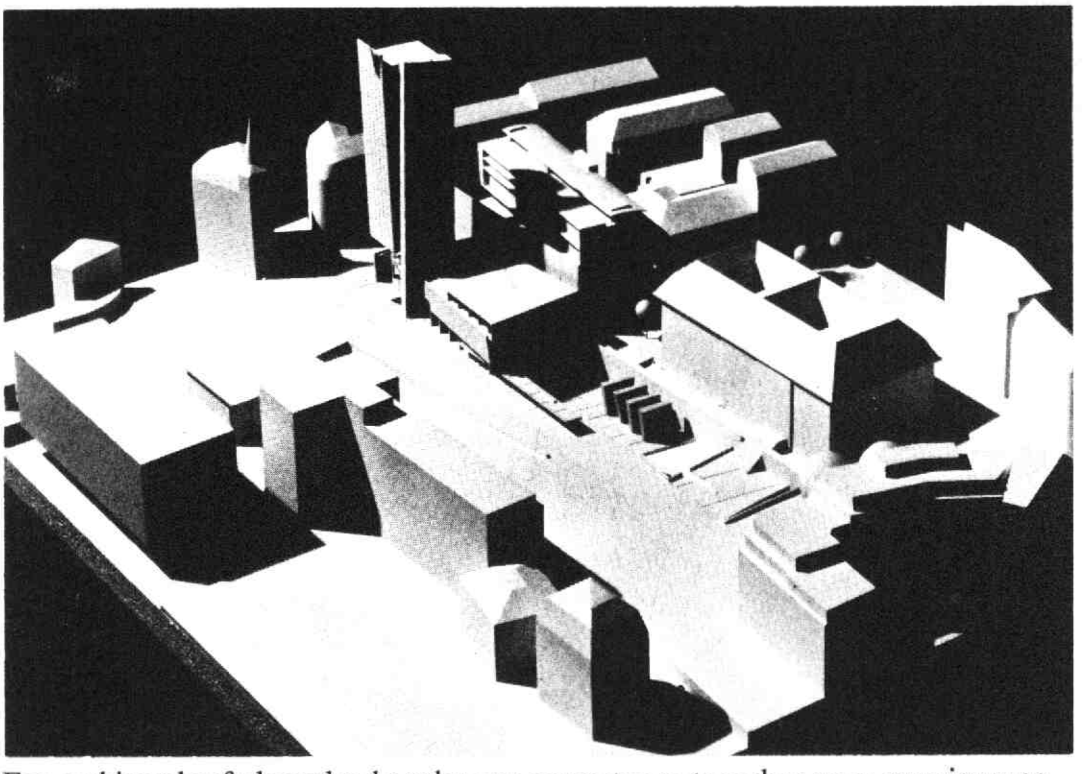
Ontwerper:	Anton Roodhardt
Met medewerking van:	Jan de Jong Martin Kindt Henk van der Kooy Martin van Reeuwijk
Vormgeving:	Ada Ritzer

Utrecht, maart 1990

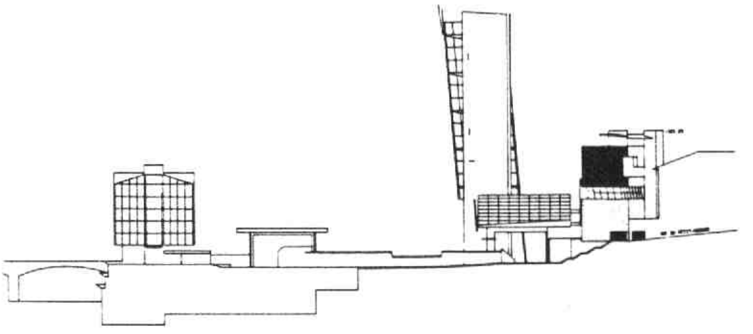
Inhoudsopgave

Bij opgaven gemerkt met ■ hoort een werkblad

1 Afbeeldingen van ruimtelijke objecten



Een architect heeft de opdracht gekregen een ontwerp te maken voor een nieuw gebouw dat goed past in een bestaand complex.
Zijn ruimtelijke ideeën heeft hij tot uitdrukking gebracht in een maquette van het geheel. Van deze afbeelding van de 'werkelijkheid' is in een volgende stap ook weer een afbeelding gemaakt in de vorm van een foto.
Hoewel niet alle eigenschappen van het origineel in de afbeeldingen terug te vinden zijn, is de overeenkomst tussen 'werkelijkheid' en plaatje voor veel doeleinden groot genoeg. Maar voor detaillering en inwendige constructies moet er aanvullende informatie komen met behulp van goede tekeningen

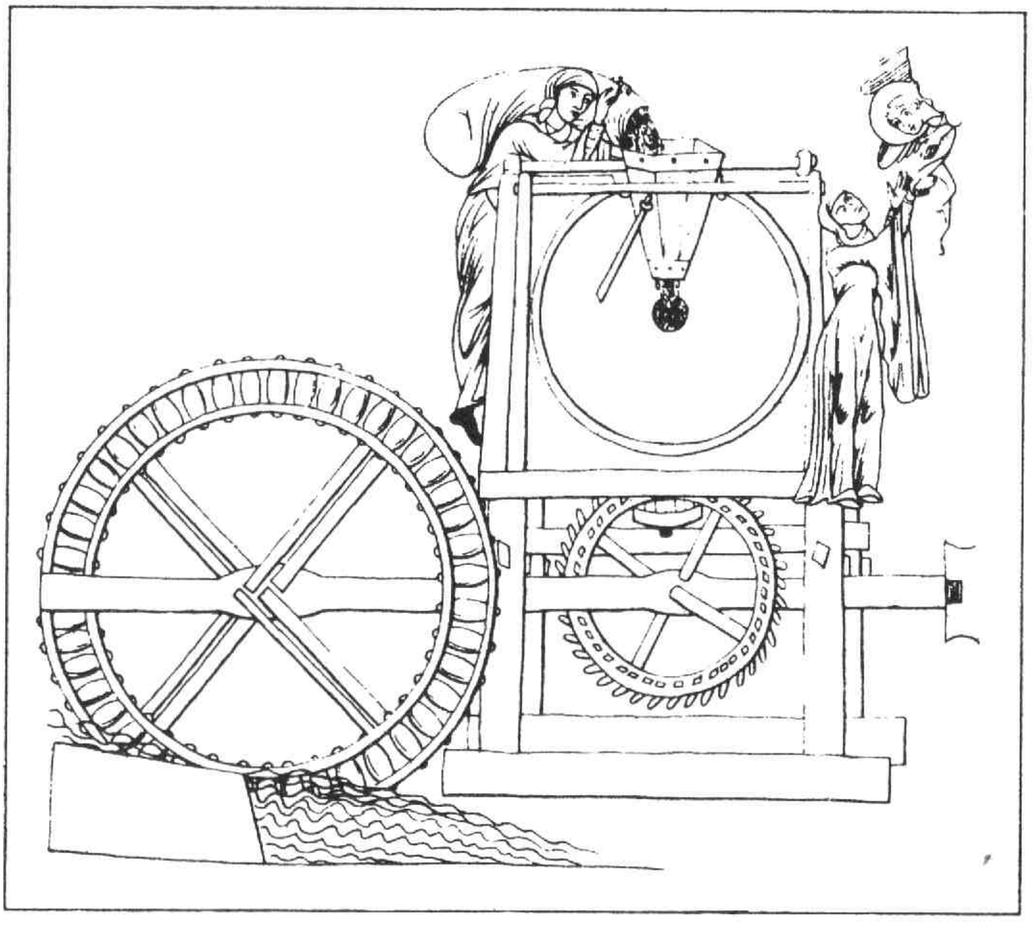


1. >a Heeft de eenzijdige, sterke belichting van de maquette een bedoeling?

   >b Geeft de tekening een zij-aanzicht of een dwarsdoorsnede van de maquette?

In dit boekje zullen we ons voornamelijk bezig houden met het probleem van goede tekeningen.
Wat is een goede tekening? Het lukt nu eenmaal niet een echt ruimtelijk voorwerp geheel waarheidsgetrouw op een vlak weer te geven.
Dat betekent dat we moeten kiezen welke bijzonderheden van het origineel we, indien mogelijk, willen behouden in de afbeelding en welke we desnoods willen opofferen. Die keus is afhankelijk van het doel waarvoor we de tekeningen willen gebruiken.

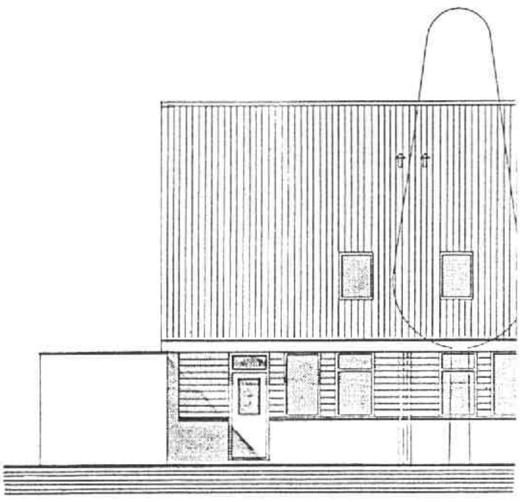
2. Een 'technische' tekening uit de middeleeuwen.



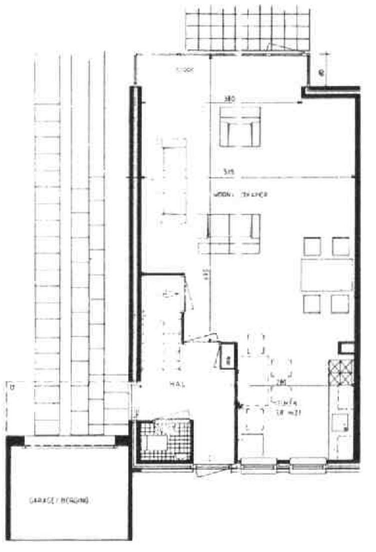
Tekening van een korenmolen, aangedreven door een waterrad, uit de
'Hortus deliciarum' van Herrad von Landsperg (± 1610).
Zoals alle middeleeuwse machinetekeningen, is het geen constructietekening,
maar een illustratie van hoe de onderdelen in samenhang functioneren.
Zo'n molenrad deed het werk van 100 slaven.

> Het doel van de tekening is de werking van de korenmolen te verduidelijken. Welke merkwaardigheden kun je in de tekening ontdekken?

3. Voor de verkoop is de presentatie van het artikel belangrijk.



voorgevel



begane grond

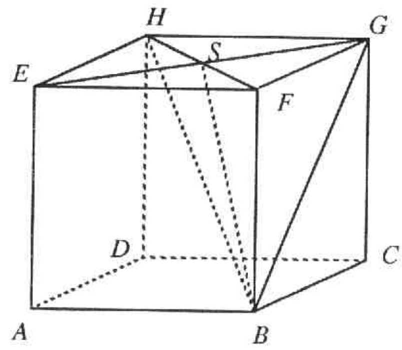
artist's view

> Teken een zijaanzicht in hoofdlijnen van het rechterhuis. Probeer daarbij rekening te houden met de afmetingen uit de bovenstaande figuren.

Gelukkig hoeven we niet alle gewenste bijzonderheden rechtstreeks in een tekening te geven. Heel veel afmetingen zijn wel uit een tekening af te leiden.

Voorbeeld

Uit een traditionele manier om een kubus te tekenen is via de ware grootte van *AB* de ware grootte van *BG, BH* en *BS* af te leiden.



4. Neem in de tekening van het voorbeeld voor *AB* een lengte van 5 cm.

   >a Bereken de lengten van *BG, BH*, en *BS*, waarbij *S* het snijpunt van *EG* en *FH* is.

   >b Gebruik berekeningsresultaten om tekeningen op ware grootte te maken van het diagonaalvlak *ABGH* en van driehoek *BCS* (op 1 mm nauwkeurig).

   Het is mogelijk *BG, BH* en *BS* op ware grootte te tekenen, zonder eerst berekeningen te maken. Je begint met een eenvoudig te tekenen figuur op ware grootte. De lengten en hoeken die daarin voorkomen kunnen dan gebruikt worden om een volgende figuur te tekenen.

   >c Teken op ware grootte vierkant *ABCD*. Haal hieruit de benodigde lengten om diagonaalvlak *ABGH* op ware grootte te tekenen.

   >d Begin weer met het vierkant *ABCD* en maak van hieruit de ware grootte tekeningen van *BG, BH* en *BS*.
   Bij zulke constructies is wel een korte toelichting nodig.

In de volgende hoofdstukken bekijken we eerst een aantal gangbare tekenmethoden. Om details van het hoe en waarom te begrijpen is vervolgens enige theoretische kennis over punten, lijnen en vlakken nodig en daarna wordt de draad weer opgenomen.

2 Perspectief

Wanneer we kiezen voor een 'natuurlijk' uiterlijk, dan kunnen we gebruik maken van *perspectief.* De tekening die dan ontstaat is vergelijkbaar met een foto.

Een tekening en een vergelijkbare foto

Het 'net echt' van deze manier van afbeelden slaat op onze manier van kijken, niet op de waarheidsgetrouwheid. Zoals je kunt zien gaat er nogal wat mis met lengten, hoekgrootten en richtingen.

1. >a Zoek enkele voorbeelden van deze fouten.

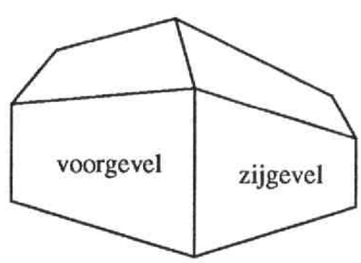
   >b Waarom raken we hierdoor niet hopeloos in de war?

Bij een goed plaatje moet het mogelijk zijn de van belang zijnde eigenschappen van de werkelijkheid te *reconstrueren.*

Een reconstructieprobleem is:

Wat is breder, de voorgevel of de zijgevel?

In dit kale plaatje is dat moeilijk te zien.



2. > Kun je dit wel 'zien' in de tekening links bovenaan de bladzijde?

Bij perspectieftekeningen en foto's gaan verhoudingen van afstanden en juiste groottes van hoeken verloren, zoals je goed kunt zien aan de zes even grote vierkante tegels op onderstaande foto.

Er is weer hoop voor de Amsterdamse grachten. Onlangs werd het laatste huis dat nog op de grachten loosde, op de hoek van het Singel en de Heiligeweg, op de stadsriolering aangesloten. Zes doorzichtige tegels en een gedenksteen in het trottoir aldaar memoreren de sluiting van het open riool dat de grachtengordel eeuwenlang is geweest. De stank moet vreselijk zijn geweest. Reizigers van alle eeuwen spreken hun verbazing uit over de vreemde combinatie van properheid en onwelriekendheid die kenmerkend was voor de Amsterdamse binnenstad.

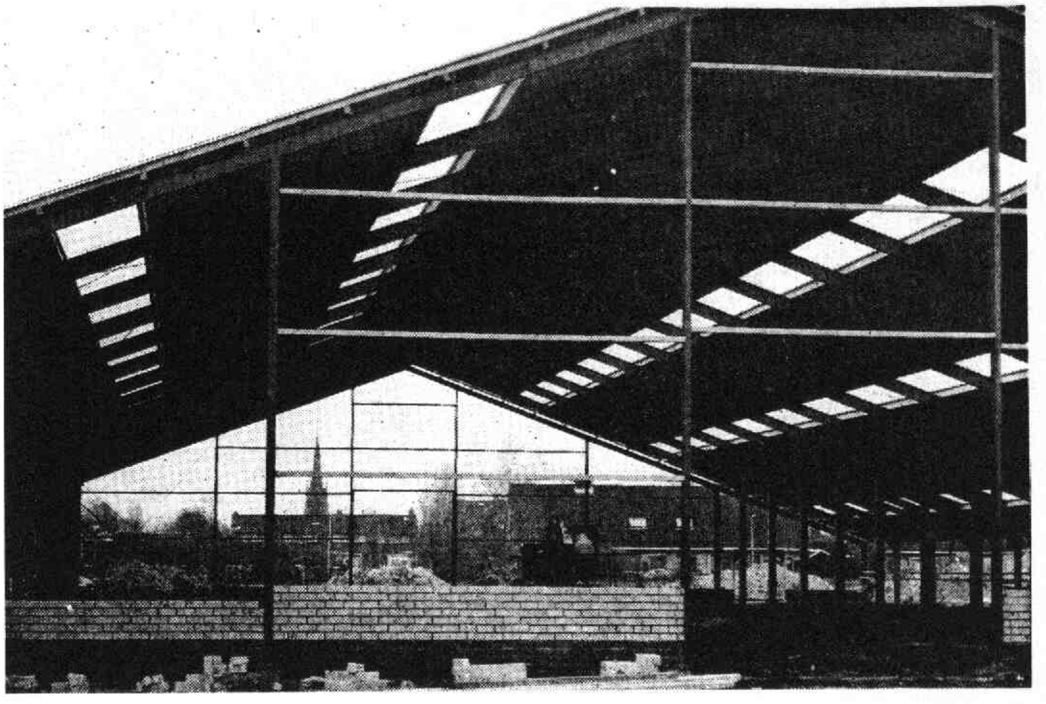
Na deze negatieve opmerkingen over perspectief valt er ook nog iets positiefs te zeggen:

$$\boxed{\text{rechte lijnen blijven rechte lijnen}}$$

Verder kan er voor gezorgd worden dat de verticale lijnen verticaal blijven.
De vervorming van de werkelijkheid is minder storend als we precies weten hoe die vervorming heeft plaatsgevonden.
Hiervoor bestaat een streng gereglementeerde methode: de *perspectiefleer*.

We illustreren enkele regels met behulp van foto's.

Een manege in aanbouw.



De open voorgevel is op schaal. De achtergevel ook, maar de schaal is niet dezelfde. Dat kan in een tekening bereikt worden, door het papier parallel met die gevel te denken. Eigenlijk zijn er aanzichten getekend.

Dit levert de regel:

> Een figuur die parallel is met het vlak van de tekening houdt de juiste verhoudingen. Maar wel: hoe verder weg, hoe kleiner de figuur.

■ 3. De voorgevel is op te vatten als het resultaat van een vermenigvuldiging van de achtergevel.

>a Teken in de foto op het werkblad het centrum van die vermenigvuldiging.

>b Wat is de vermenigvuldigingsfactor?

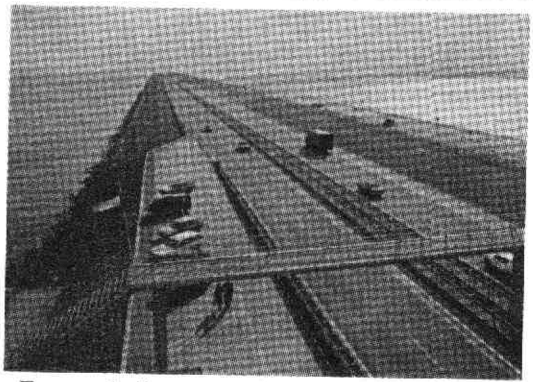
>c De foto is aan de bovenkant afgesneden.
Teken de top van de voorgevel.

De lijnen die door overeenkomstige punten van voor- en achtergevel [illegible]te door het centrum van vermenigvuldiging gaan, kun je voorstellen al[illegible]lijke lijnen in de manege.

>d Wat kun je zeggen van de werkelijke richting van die lijnen?

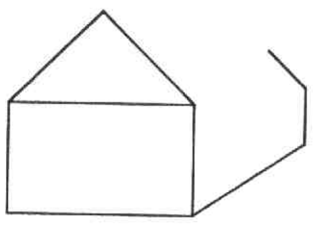
Uit opgave 3 is deze regel af te leiden:

Lijnen die loodrecht op het vlak van tekening staan gaan (bij verlenging) allemaal door één punt. Zo'n punt waar evenwijdige lijnen schijnbaar samenkomen wordt *verdwijnpunt* genoemd.



Een verdwijnpunt op de horizon

■ 4. Dit is een begin van een perspectieftekening van een huis (een vijfzijdig prisma).



>a Maak de tekening op het werkblad af. Teken de niet zichtbare hoofdlijnen als streepjeslijnen.

>b Construeer een venster in de voorgevel, in de zijgevel en in het dak. Verklaar de constructiemethode.

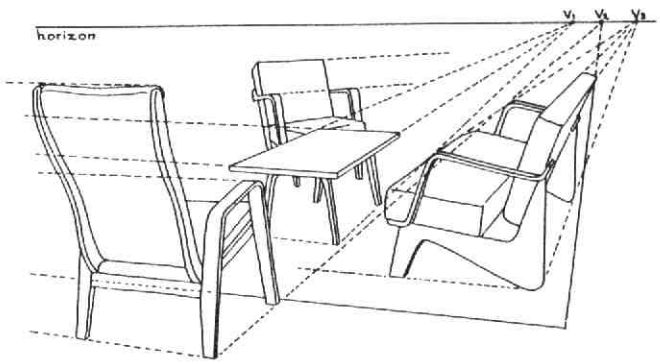
De regel over de lijnen loodrecht op het vlak van tekening is een bijzonder geval van een algemene regel:

Elke bundel van parallelle lijnen die niet parallel met het vlak van tekening zijn, heeft een verdwijnpunt.

5. > Controleer deze uitspraak in de foto's op bladzijde 5 en 6.

Van de tekenlessen is je misschien de rol bekend die de horizon speelt bij het perspectieftekenen.

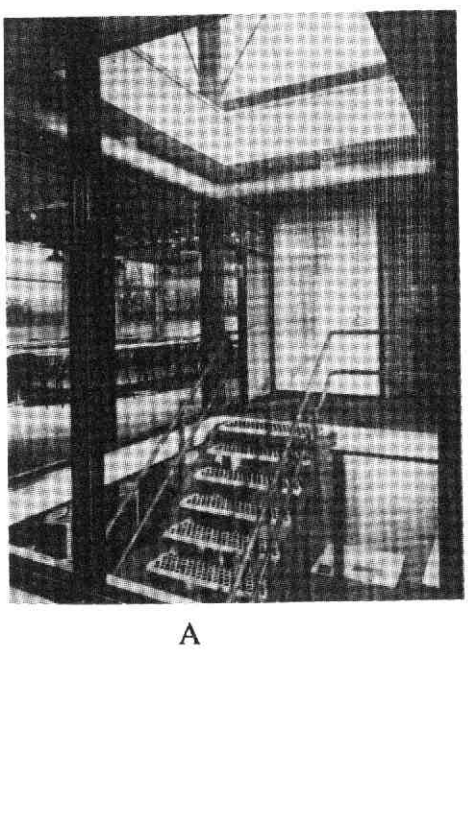
> Elke bundel van parallelle lijnen die evenwijdig zijn met het grondvlak -maar niet evenwijdig zijn met het tafereel- heeft een verdwijnpunt op een vaste lijn: de horizon.
> De horizon is dus door twee verdwijnpunten vastgelegd.



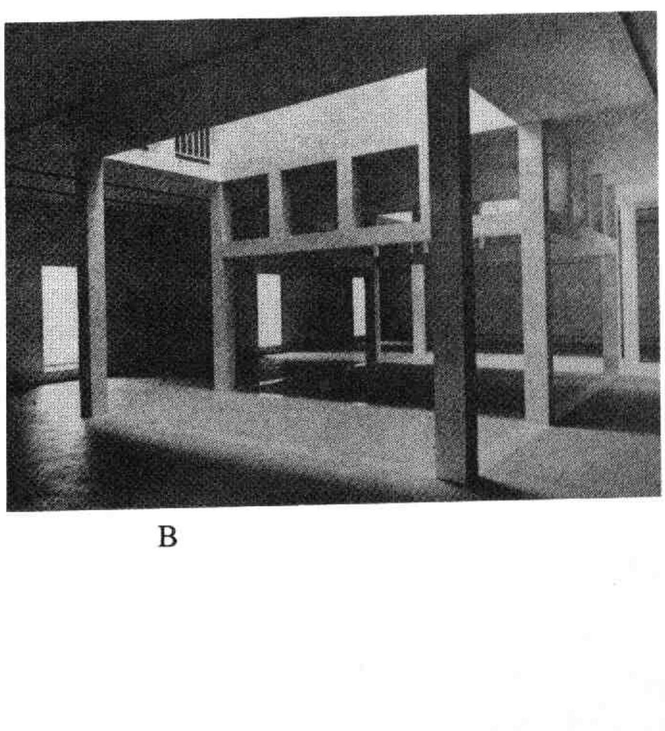
■ 6. >a Bepaal met behulp van twee paar evenwijdige lijnen op de foto's A en B de horizon.

>b Controleer met een draaiende lijn door een verdwijnpunt of alle lijnen van de bewuste bundel hier doorgaan.

>c Op foto B zijn paren evenwijdige lijnen ook te krijgen door de onderkanten en bovenkanten van schuin tegenover elkaar staande pilaren met elkaar te verbinden.
Controleer of de verdwijnpunten op de horizon liggen.

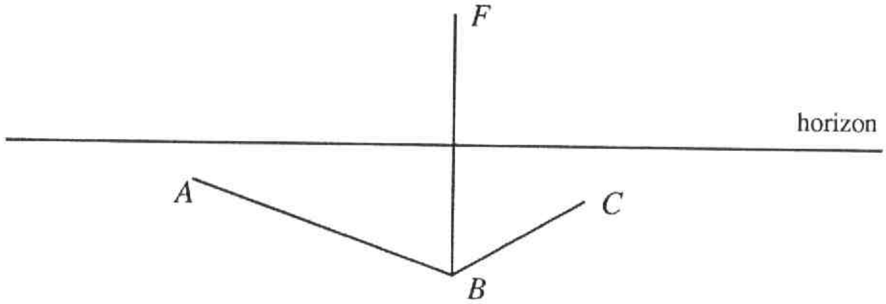


A



B

■ 7.



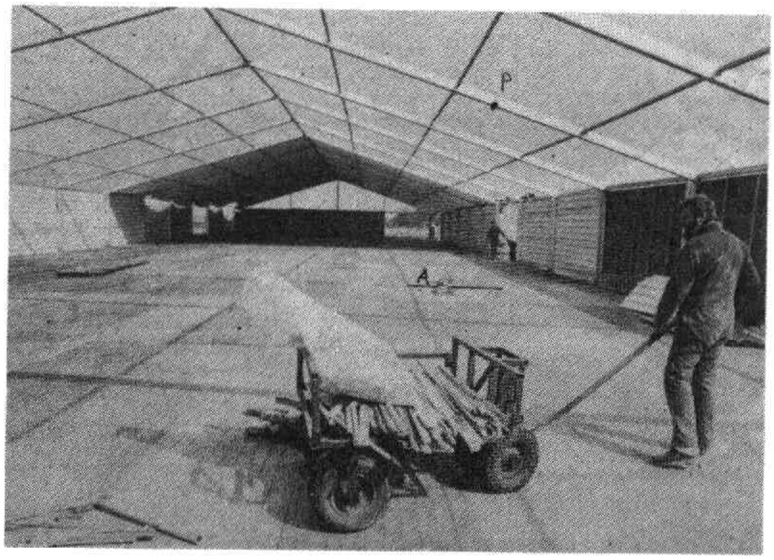
Van de balk $ABCD.EFGH$ zijn vier punten in een perspectieftekening gegeven.

>a Teken op het werkblad de ontbrekende ribben.

>b In het probleem van de manege bleken de voorgevel en achtergevel gelijkvormig te zijn.
Is dat ook zo bij deze balk, als je $ABFE$ als voorgevel beschouwt?

>c Teken in dezelfde figuur op het werkblad het horizontale vlak dat de balk middendoor deelt.

■ 8.



>a Bepaal het verdwijnpunt van de plafondbalken die in de lengte van de hal lopen.

>b De man op de voorgrond loopt in de lengterichting van de hal tot het lijntje bij A.
Geef daar in de *tekening* met een lijntje de lengte van de man aan.

>c Het dak lekt. De druppels vallen vanaf punt P. Teken zo precies mogelijk de plaats waar ze op de vloer neerkomen.

>d De balken in de breedte van het dak lopen op de foto niet precies parallel. Hoe kan dat?

9. Een perspectivische tekenmethode is soms te bedenken door een plaatje op schaal te vergelijken met een perspectieftekening.

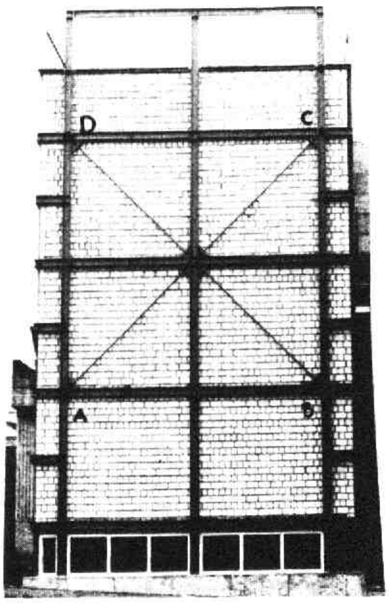


foto 1

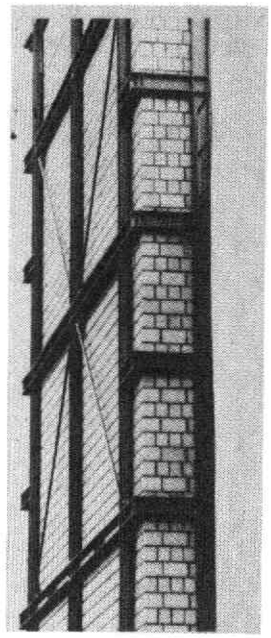
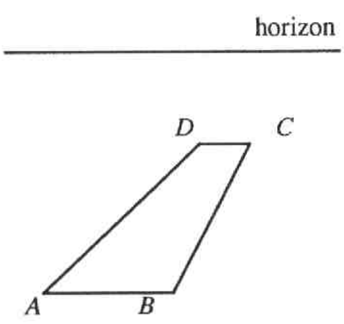
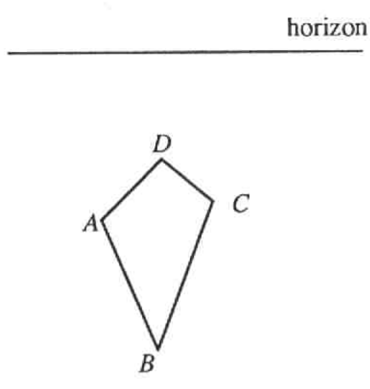


foto 2

> Ga na wat er met vierkant *ABCD* (foto 1) en de zijden en diagonalen daarin is gebeurd (foto 2).

10. Bekijk de perspectieftekeningen van deze horizontaal liggende vierhoeken.



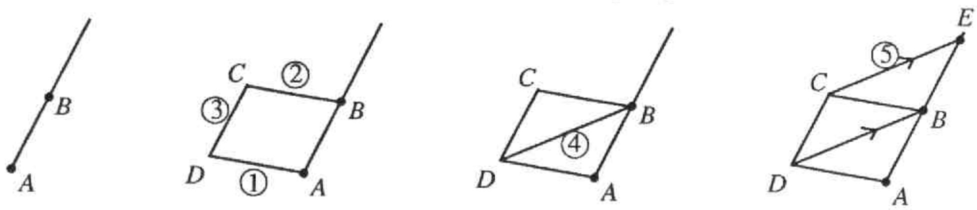


>a Hoe weet je dat dit afbeeldingen zijn van parallellogrammen?

■ >b Construeer de middens van de vier zijden.

Aanwijzing: laat je inspireren door de foto's bij opgave 9.

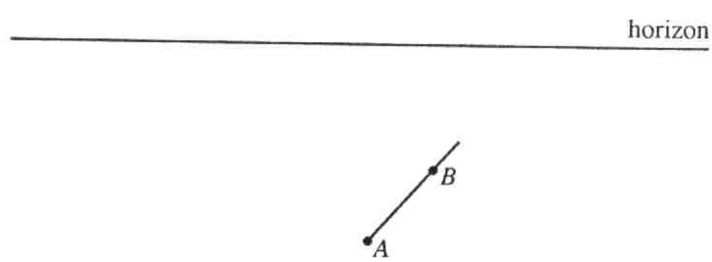
11. Bekijk de foto op de volgende bladzijde.
Om een dergelijke tekening te maken kun je de voetpunten van de eerste en tweede balk naar believen tekenen. Maar voor de derde balk heb je dan geen keus meer. We moeten proberen een methode te vinden om afstanden te verdubbelen. Gewoon meten gaat meestal niet in perspectief. Wat we wel kunnen is slim gebruik maken van evenwijdige lijnen. We doen dat eerst in een gewone tekening. Daarna vertalen we de werkwijze naar perspectief.



Werkwijze om AB te verdubbelen:
- Maak een parallellogram $ABCD$
- Trek DB (4)
- Trek $CE//DB$ (5)

>a Verklaar dat nu $AB = BE$.

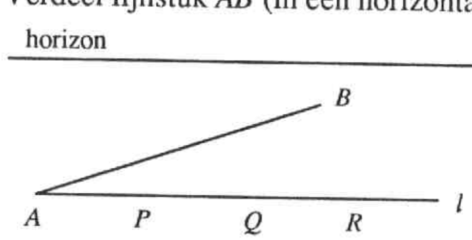
>b Speel in onderstaande figuur deze methode na in perspectief.



Door herhaling is de rij balken te maken.

Bovenstaande methode faalt helaas als de afstand die in gelijke stukken verdeeld moet worden al vast staat.

>c Verdeel lijnstuk AB (in een horizontaal vlak!) in drie gelijke stukken.



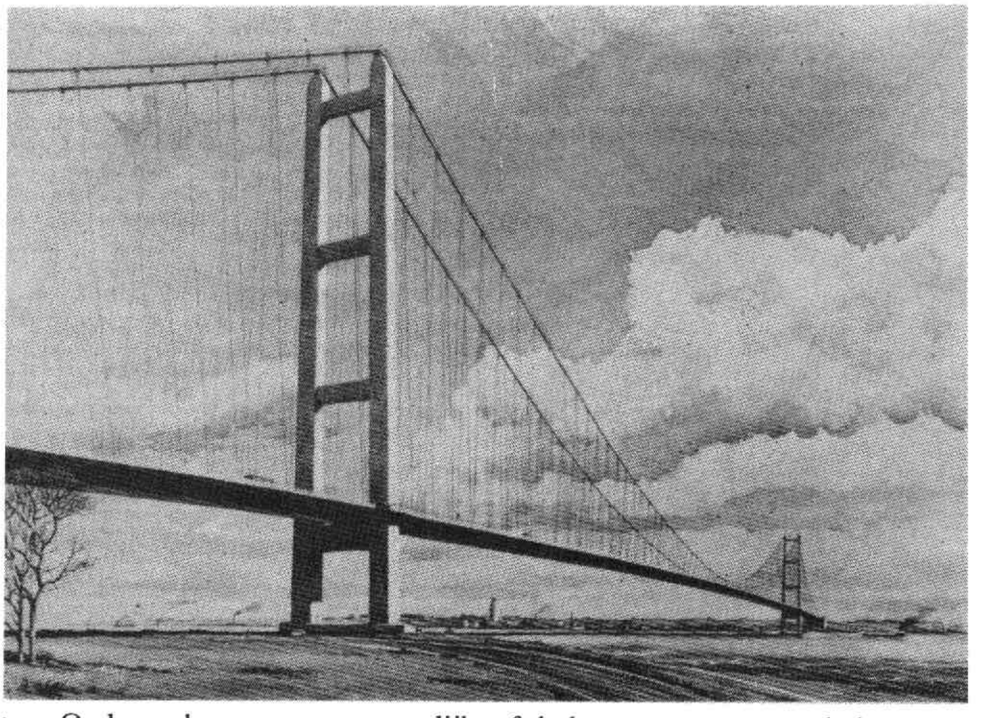
Aanwijzing:
– Gebruik de lijn parallel met de horizon en
– maak $AP = AQ = AR$

>d Hoe zou je een lijnstuk in perspectief in de verhouding 3:2 kunnen verdelen?

>e Controleer de afstanden van de eerste vijf balken op de foto.

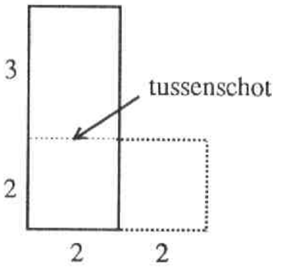
De gelijke afstanden tussen de staande balken worden op de foto steeds korter. De meetlat krimpt! Met een verdubbelingsconstructie is dat precies te tekenen.

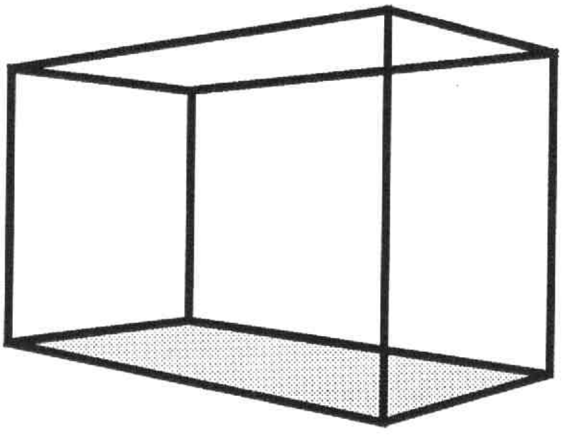
■ 12.



> Onderzoek, voor zover mogelijk, of de laagste punten van de bogen door de artiest op de juiste plaatsen zijn getekend.

13. *Vitrine*

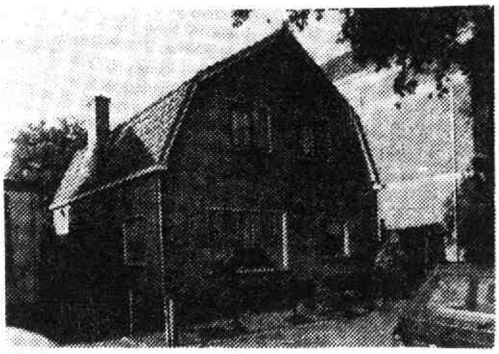




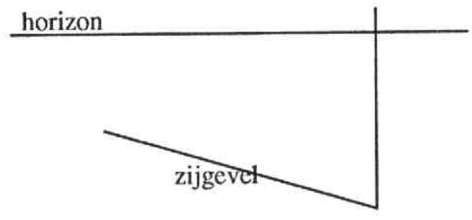
In dit deel van de vitrine moet een vertikaal tussenschot geplaatst worden. Daarna wordt de vitrine uitgebreid met een extra deel aan de rechterkant. Op de plattegrond zie je hoe de vitrine verbouwd moet worden.
Het aangebouwde deel moet even hoog als de oorspronkelijke vitrine zijn.

■ > Voltooi de tekening van de vitrine op het werkblad door het tussenschot en het extra deel er in te tekenen.

■ 14.



Huis met een mansarde dak

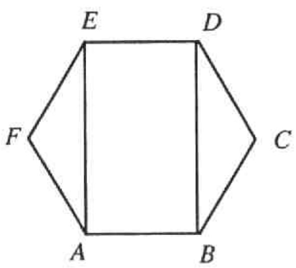


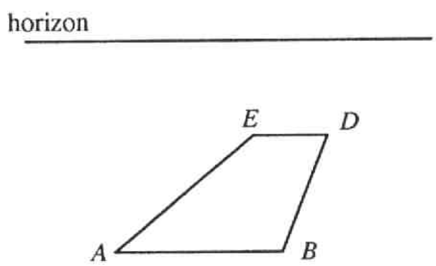
>a Voltooi op het werkblad de tekening van de voorgevel van een huis met een mansarde dak. Je kunt zelf aanvullende gegevens kiezen. Verklaar je constructie.

>b Teken ook de rest van het huis.

Aanwijzing: De lijnen in het grondvlak die loodrecht onder de lijnen van het dak liggen kunnen belangrijk zijn als hulplijnen.

■ 15. Van de regelmatige zeshoek is een deel van de perspectief tekening gegeven.





> Voltooi de tekening op het werkblad.

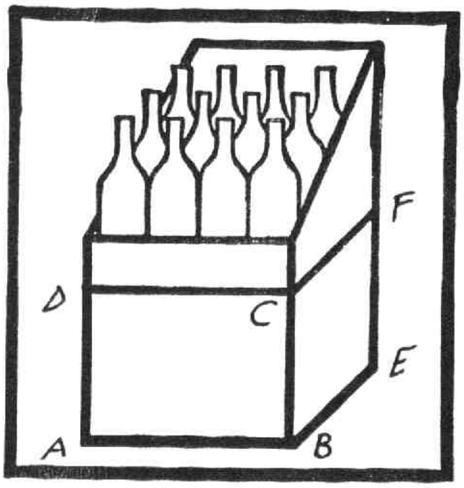
Bij het perspectief tekenen zijn aan de orde gekomen:

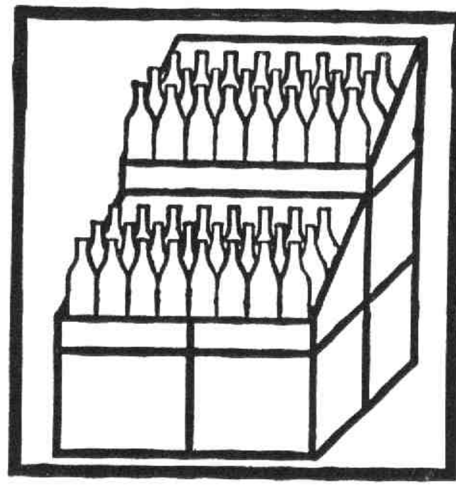
- de beelden van verticale en horizontale lijnen
- de rol van verdwijnpunten bij evenwijdige lijnen met de horizon
- het verdelen van lijnstukken in een bepaalde verhouding (speciaal geval: het vinden van het midden van een lijnstuk)

Er is *niet* behandeld hoe uit een ware grootte tekening, bijvoorbeeld een plattegrond, de perspectieffiguur kan worden gevonden, want dat behoort niet tot het programma (het kan natuurlijk geen kwaad als je er toch iets van weet).
Er komt nog wel een vervolg over de achtergronden van de methode.

3 Scheve projectie

Een tekenmethode waarbij meer duidelijkheid over richtingen en afstanden wordt gegeven, is de al bekende *scheve projectie.*
Bij deze tekenmethode wordt echter wel enige natuurlijkheid opgeofferd.





Het blad papier waarop we tekenen (ook hier weer het tafereel genoemd) wordt parallel met een vlak van het object (of een verkleinde uitgave van het object) gedacht.
Hier bijvoorbeeld parallel met het vlak *ABCD*.
Figuren in dat vlak worden in ware vorm overgenomen.
Nu komt het grote verschil met perspectieftekenen: Figuren in andere vlakken die parallel zijn met het tafereel worden ook in ware vorm overgenomen.
Hier bijvoorbeeld het achtervlak.
Het streven is nu om *alle lijnen* die in werkelijkheid parallel lopen ook parallel te tekenen. Dat lijkt wel handig, maar of dat uitvoerbaar is moeten we afwachten.

1. >a Welke eigenschappen van rechthoek *BEFC* van de flessendoos zijn behouden gebleven en welke zijn verloren gegaan?

   >b Teken in de linkerdoos ook de vijf onzichtbare lijnen.

   >c De parallelliteit heeft de test in vraag >b goed doorstaan. Maar het had mis kunnen gaan met een lijn naar het vierde hoekpunt van het grondvlak. Hoe dan?

De keuze voor *behoud van parallelliteit* heeft een aantal gevolgen voor de vrijheid van het tekenen. In de volgende vraagstukken komt daarvan het een en ander aan de orde.

2. *ABCD.EFGH* is een kubus

>a Teken hiervan een perspectivische afbeelding en een scheve projectie met in beide gevallen het tafereel parallel met vlak *ABFE*.

>b De zijvlaksdiagonalen *AH* en *BG* zijn in werkelijkheid parallel.
Toon aan dat ze dat in de platte tekening in scheve projectie ook zijn.

>c Hoe kun je in beide tekeningen op dezelfde manier het punt vinden dat het midden van de echte *BG* voorstelt?

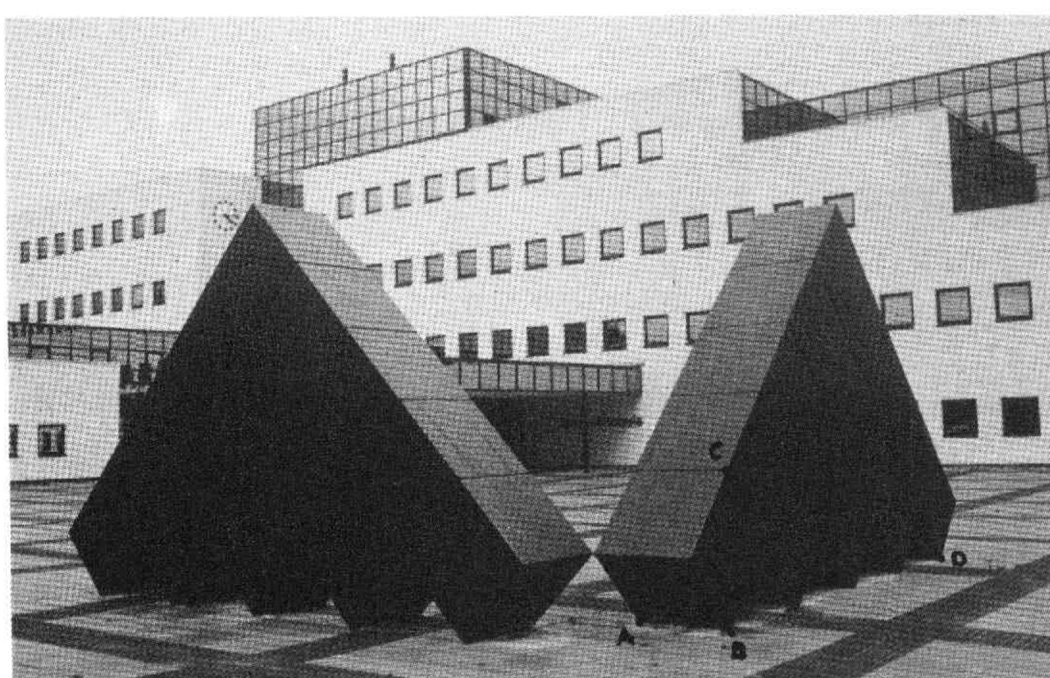
>d Is dat punt in de scheve projectie ook het midden van *BG*?

>e In de scheve projectie heeft het 'verderaf' liggen van het achtervlak, vergeleken met het voorvlak, *geen* invloed op de grootte.
Als dat wel zo zou zijn, dan was het streven van de scheve projectie mislukt.
Waarom?

In opgave 2>d heb je een voorbeeld gezien van een algemene regel:

Het midden van een lijnstuk wordt in de tekening ook het midden

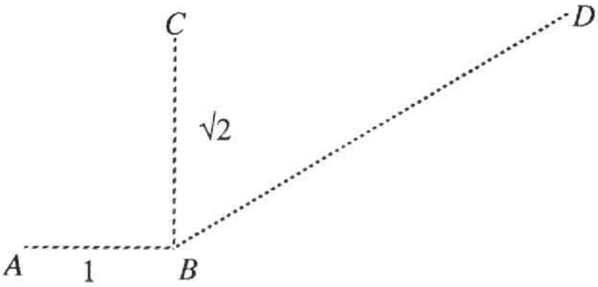
3.



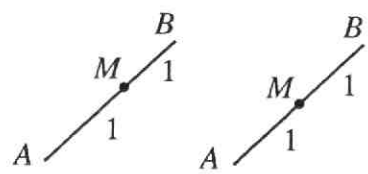
Het stadhuis van de gemeente Smallingerland in Drachten

De kunstwerken die voor het stadhuis staan zijn opgebouwd uit balken, waarvan de kleinste de kubusvorm heeft.

Van de punten A, B, C en D (bij het object rechts op de foto) is de tekening in scheve projectie gegeven.



> Voltooi de tekening van het object.



perspectief scheef

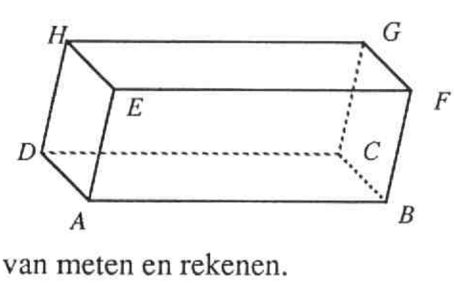
M is het midden van AB. Als AM verplaatst wordt naar MB, dan moet in de perspectieftekening de meetlat als het ware inkrimpen, terwijl dat bij de scheve projectie niet het geval is.

Ook in de tekening van opgave 3 is te zien dat je de meetlat gewoon kunt verschuiven, zolang die maar op dezelfde lijn is of op een lijn die daarmee parallel is. Voor een andere richting is meestal wel een andere meetlat nodig.
Een gevolg is:

De verhoudingen van lijnstukken die dezelfde richting hebben blijven in de tekening behouden.

4. $ABCD.EFGH$ is een scheef vierzijdig prisma.
$ABFE$ is parallel met het tafereel.

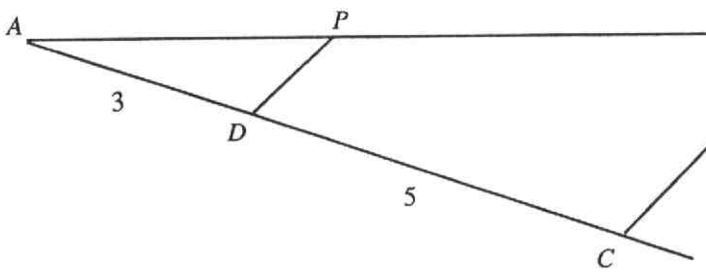
P ligt op HF zo, dat
$HP : PF = 3 : 5$.



>a Bepaal de plaats van P met behulp van meten en rekenen.

>b Het verdelen van een lijnstuk in een bepaalde verhouding kan ook zonder dat gereken. Op de volgende bladzijde staat een methode uit de vlakke meetkunde die misschien nog wel bekend is. Controleer deze methode.

Verdeel AB in de verhouding 3 : 5.

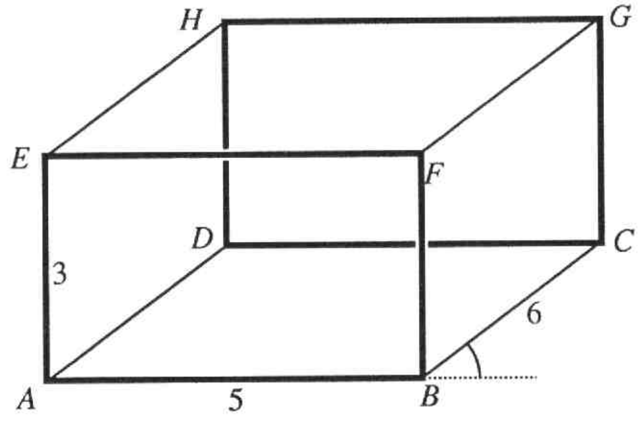


- Trek een hulplijn door A en pas daar 8 gelijke stukken op af (C).
- Trek CB.
- Trek door D een lijn parallel met CB (P).
- PA en PB zijn de gewenste stukken.

Opmerking: Met behulp van deze methode kunnen verhoudingen uit een ware grootte tekening worden overgebracht naar een figuur in scheve projectie.

>c De lijn door P parallel met HA snijdt het vlak $ABFE$.
Construeer in de figuur dat snijpunt en beschrijf de constructie.
(soms wordt het woord *construeren* gebruikt om nadruk te leggen op de vereiste precisie)

5.



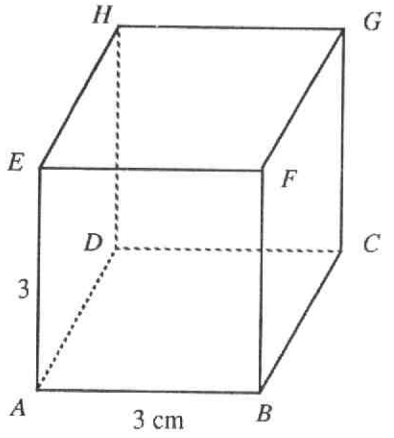
Van de balk $ABCD.EFGH$ (echte afmetingen 5 x 6 x 3) zijn in scheve projectie eerst het voor- en achtervlak getekend. Voor BC is nu geen keus meer.
De lijn BC staat in werkelijkheid loodrecht op het voorvlak $ABFE$. In de tekening is dat een andere richting geworden.

>a Meet de hoek die BC nu maakt met het verlengde van AB.
Deze hoek heet de *wijkhoek*.

De lengten op zulke "loodlijnen" op het tafereel worden verkort weergegeven. Stel bijvoorbeeld de werkelijke lengte 10 eenheden en de lengte in de tekening gemeten 7. Dan is de *verkortingsverhouding* $\frac{7}{10}$.

>b Hoe groot is hier de verkortingsverhouding?

6. Deze tekening is een scheve projectie van een balk. De verkortingsverhouding is 0,5.



>a Bereken de inhoud van de balk in cm^3.

>b BG en AG zijn in de tekening ook niet op ware grootte afgebeeld. Welk van die twee is verhoudingsgewijs het sterkst veranderd?

Samengevat:

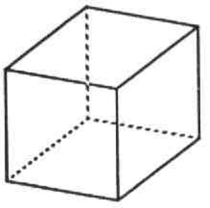
- Een lijn loodrecht op het vlak van tekening wordt wijkend weergegeven.
- De hoek met de 'horizontale lijn' is de wijkhoek.
- De lengte in de tekening is:
  de verkortingsverhouding x de oorspronkelijke lengte

7. Om een scheve projectie van een kubus te tekenen kan ook wel een diagonaalvlak parallel met het vlak van tekening worden genomen.

   > Teken zo'n kubus onder de voorwaarden:
   - de ribbe is 5 cm.
   - de wijkhoek is 45 ^{o}.
   - de verkortingsverhouding is $\frac{3}{4}$.

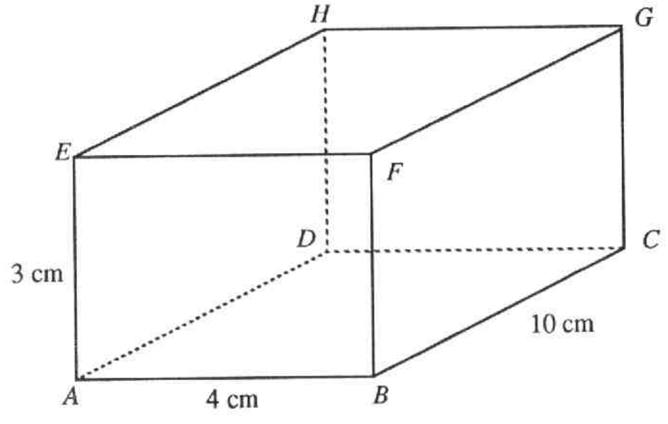
Opmerking
Er zijn twee standen van de scheve projectie van een kubus aan de orde gekomen: het tafereel parallel met een zijvlak en het tafereel parallel met een diagonaalvlak.
Maar elke andere stand mag natuurlijk ook. Het aflezen van bijzonderheden wordt dan natuurlijk weer moeilijker.

bijvoorbeeld



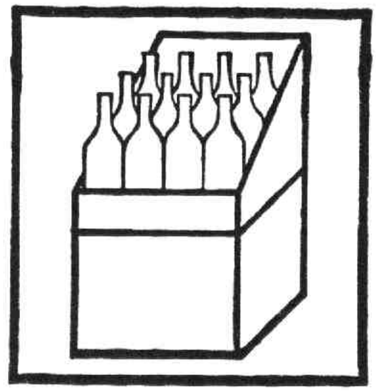
8. *T.ABCD* is een regelmatige vierzijdige piramide. De ribbe *AB* is 6 en de hoogte is 8.
   Maak de volgende scheve projecties:
   >a Tafereel loodrecht op *BC*, wijkhoek 30^o, verkortingsverhouding $\frac{1}{2}$
   >b Tafereel loodrecht op *BD*, wijkhoek 60^o, verkortingsverhouding $\frac{2}{3}$.

9. Dit is een scheve projectie van een balk die op een tafelblad ligt.
   Bij de ribben staan de *werkelijke* afmetingen.



   >a Bepaal de wijkhoek en de verkortingsverhouding.
■ >b De balk wordt om de ribbe *BC* gekanteld zodat zijvlak *BCGF* op de tafel komt te liggen. Vul de gegeven figuur aan met een tekening van de nieuwe stand van de balk.
   >c Teken de scheve projectie van deze balk die aan de volgende eisen voldoet:
   - Diagonaalvlak *ACGE* is op ware grootte
   - *EF* is op tekening 3 cm lang
   - *FG* is op de tekening 9 cm lang.

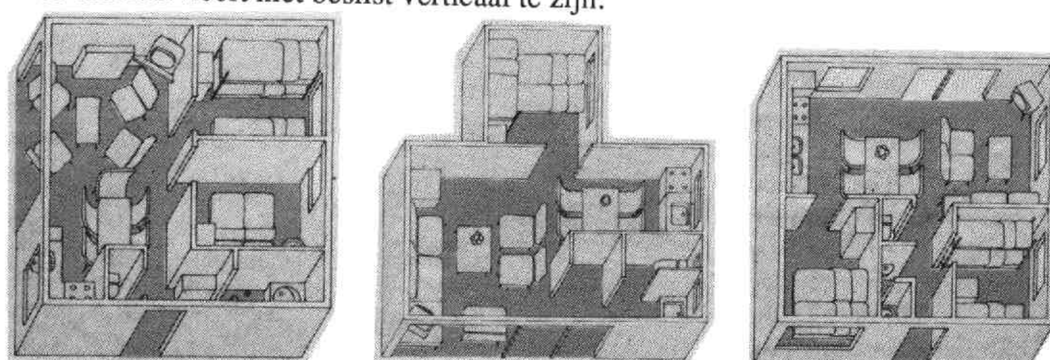
10. Bij metingen in deze tekening kun je het beste het midden van de dikke lijnen aanhouden.



>a Bepaal de verkortingsverhouding.

>b Bepaal de hellingshoek van de rechterbovenrand van de doos.

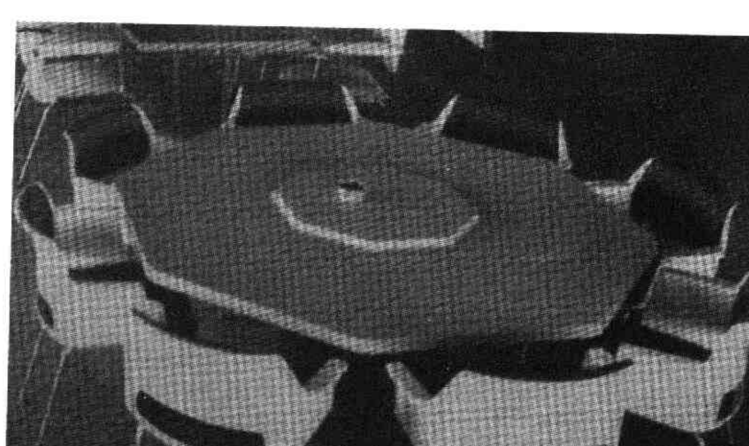
Het tafereel hoeft niet beslist verticaal te zijn:



Bij deze variant is de bodem onveranderd gelaten. De rest van de constructie is wel duidelijk. Op deze manier is uit een plattegrond, door optillen van gedeelten, gemakkelijk een projectiefiguur te maken.

11. In een vierkante zaal staat precies in het midden een tafel als op de foto.

> Maak hiervan een tekening in de stijl van de voorbeelden.



12. Voor het tekenen van gebouwen is het prettiger dat de muren rechtop staan, zoals in dit voorbeeld.

>a Een balk, zoals bijvoorbeeld de garage in de tekening, heeft drie hoofdrichtingen. Hoe zijn die hier getekend?

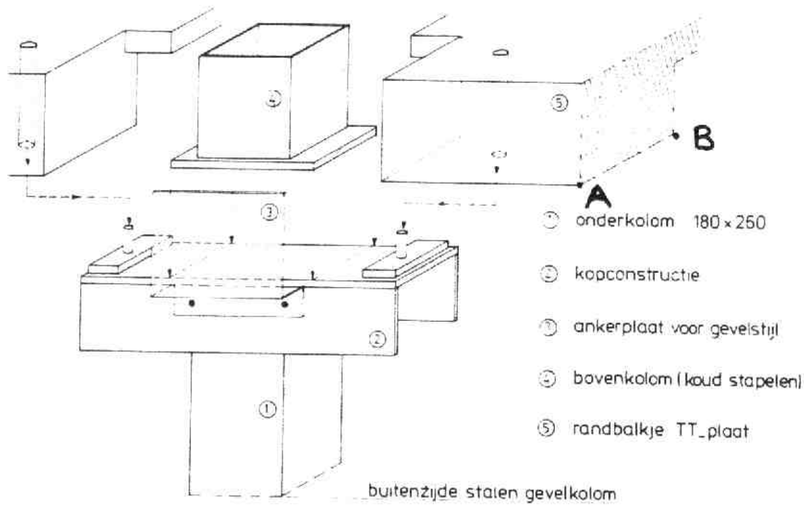
Elke hoofdrichting is op dezelfde schaal getekend:
1 cm komt overeen met 2 m.

>b Bepaal de werkelijke afstanden AB en CD.

>c Hoe groot is de hellingshoek van dat gedeelte waarop A, B, C en D liggen?

>d Hoe hoog is het huis?

13. Bij deze "uit elkaar getekende" gevelkolom is de scheve projectie gebruikt.



>a Bepaal de wijkhoek.

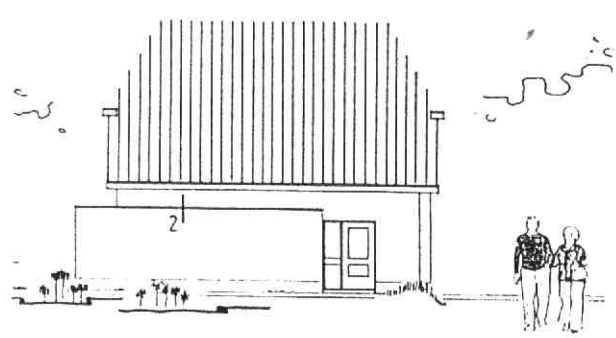
>b Bekijk onderdeel ①. Welke afmeting (180 of 260) hoort bij het wijkende lijntje?

>c Wat is de verkortingsverhouding?

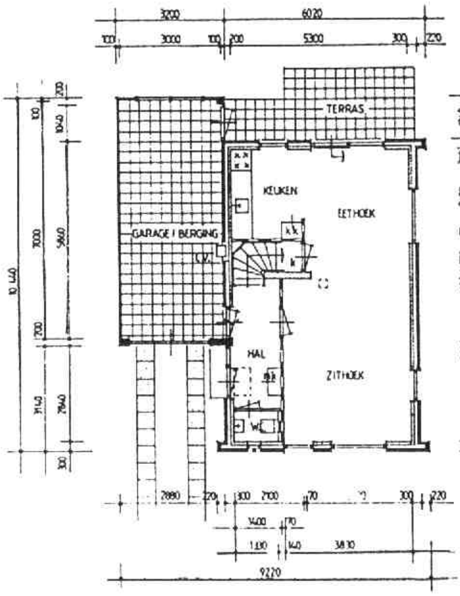
>d Hoe lang is AB uit onderdeel ⑤?

14. *Constructie van een huis.*
Hierna zie je enkele tekeningen uit het ontwerp van een huis. Straks volgen twee tekenopdrachten. Mocht je gegevens nodig hebben die niet zo maar uit de tekeningen te halen zijn, dan doe je zelf maar een redelijke keus. Omdat het vooral om de manier van tekenen gaat, hoef je niet al te streng rekening te houden met de bekende afmetingen.
Het kan verhelderend werken als je beide tekeningen gelijk op maakt.

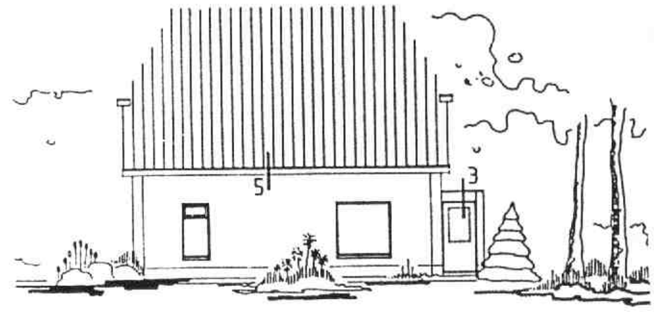
voorgevel



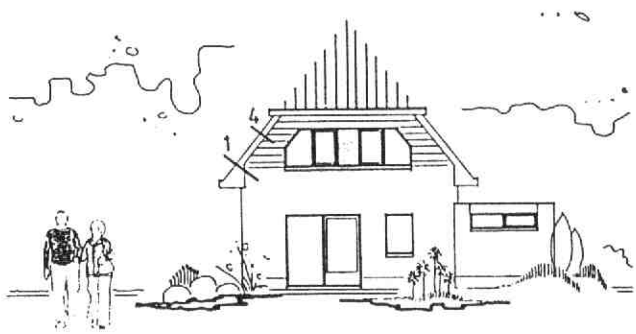
linker zijgevel



begane grond



rechter zijgevel



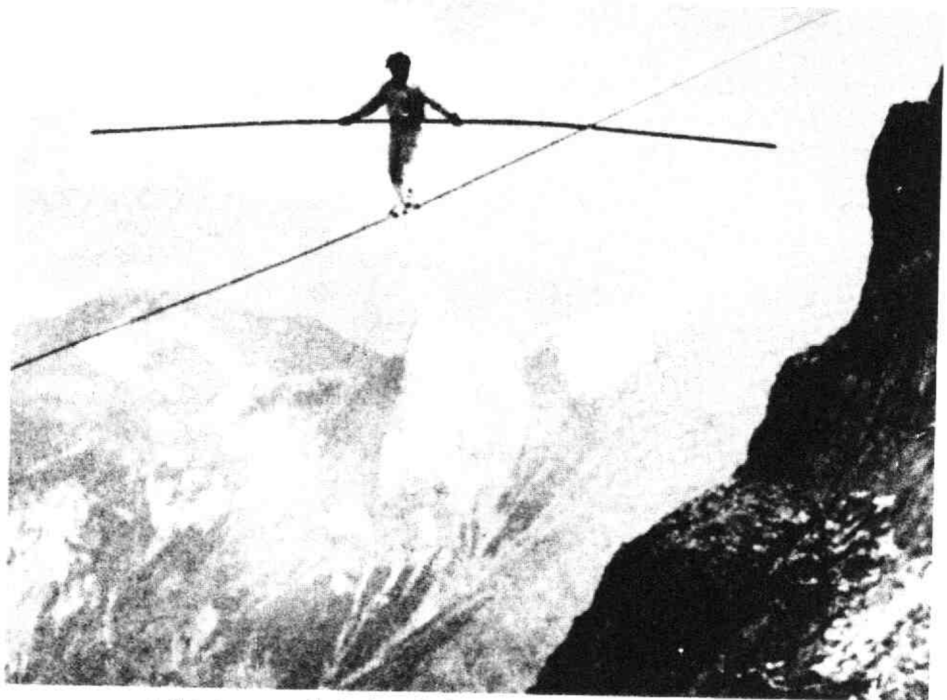
achtergevel

>a Maak een perspectivische schets van het huis met garage, uitgaand van de gegeven tekening met voorgevel. Het werkt makkelijker als je de tekening wat groter maakt.

>b Maak ook een tekening in *scheve* projectie met dezelfde stand van de voorgevel.

Voor beide tekenopdrachten geldt: Alleen de hoofdlijnen zijn belangrijk, hoewel een nadere detaillering wel gewaardeerd wordt.

4 De ligging van lijnen ten opzichte van elkaar



Alléén perfektie...leidt tot topprestaties

Voor twee lijnen in het platte vlak zijn er maar twee mogelijkheden: ze snijden elkaar of ze zijn evenwijdig. Het plaatje laat zien dat er in de ruimte nog een derde mogelijkheid is: twee lijnen kunnen elkaar kruisen.

We leggen kenmerken van deze drie soorten ligging vast:

- Als bij twee lijnen de ene uit de andere kan ontstaan door een verschuiving, dan noemen we die lijnen *evenwijdig* of *parallel*. (zie figuur **A** op de volgende bladzijde).

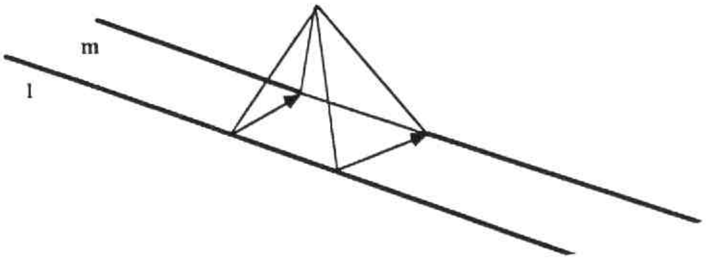
  Omgekeerd is bij elk paar evenwijdige lijnen zo'n verschuiving aan te wijzen.

Als er *geen* passende verschuiving is, dan zijn er verder twee mogelijkheden:

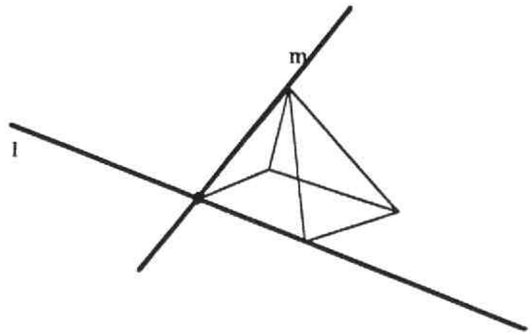
- De lijnen hebben een gemeenschappelijk punt. We spreken dan van *snijdende* lijnen (zie figuur **B** op de volgende bladzijde).
- De lijnen hebben geen gemeenschappelijk punt, We spreken dan van *kruisende* lijnen (zie figuur **C**)

Drie composities van een regelmatige piramide en twee lijnen.

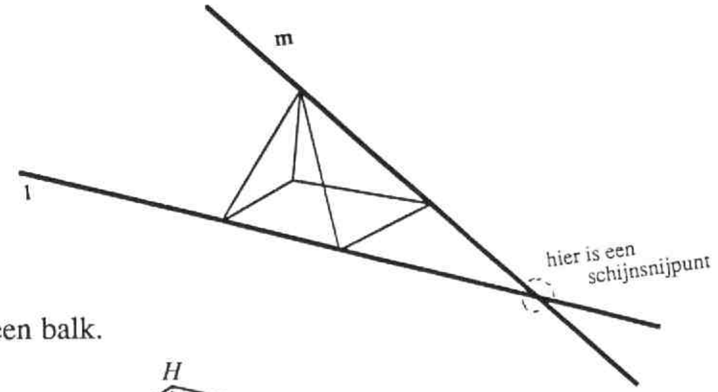
A. Evenwijdige lijnen



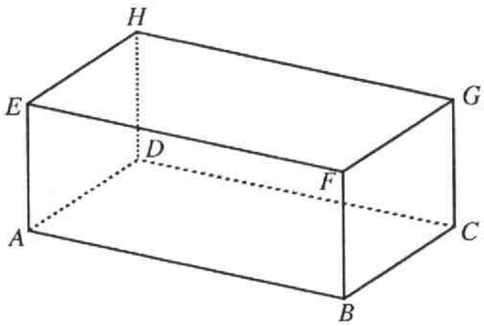
B. Snijdende lijnen



C. Kruisende lijnen



1. *ABCD.EFGH* is een balk.



Stel voor elk paar lijnen de ligging vast:

>a *AD* en *FG*

>b *AE* en *CD*

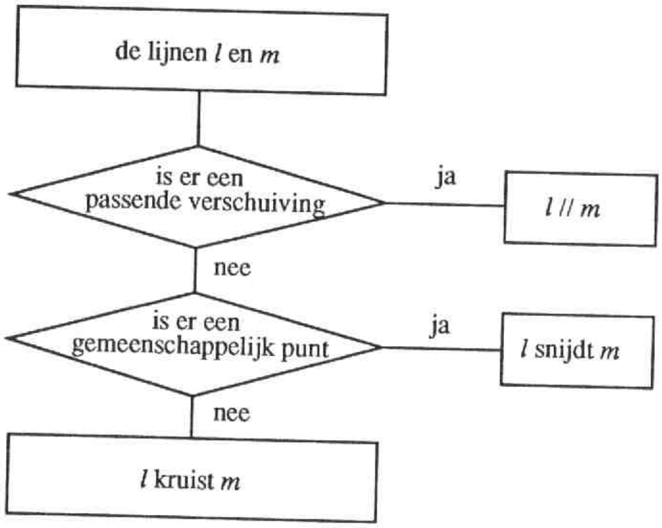
>c *HG* en *FG*

>d *AH* en *BG*

>e *AG* en *CH*

Je moet elke beslissing kunnen verantwoorden.

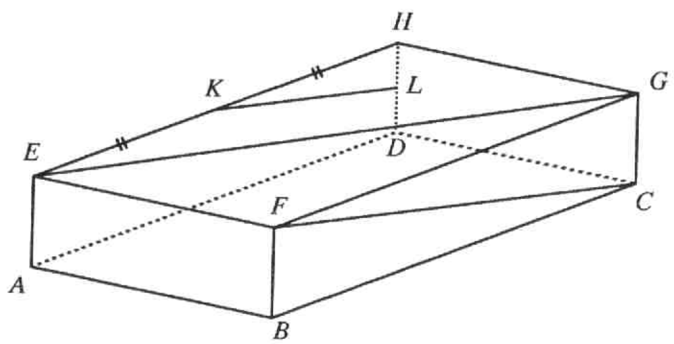
2. Met behulp van dit stroomdiagram (blokschema) kan de ligging van de lijnen worden bepaald.



>a Bedenk een andere invulling van het schema waarmee de ligging ook kan worden vastgesteld.

>b Bedenk een definitie van kruisende lijnen.

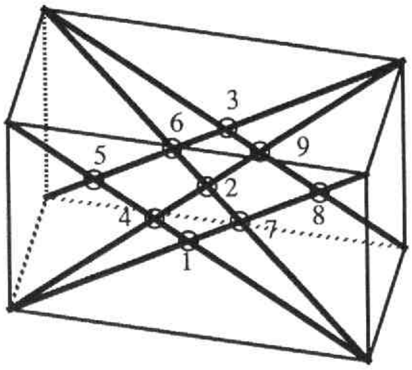
3. *ABCD.EFGH* is een balk. *L* is het midden van *HD*. *K* is het midden van *EH*. De ligging van de lijn *FC* ten opzichte van een aantal lijnen moet worden vastgesteld.



> Geef aan of er sprake is van snijden, parallel lopen of kruisen ten opzichte van *FC* voor achtereenvolgens *BC*, *ED*, *LK*, *EG* en *EH*.

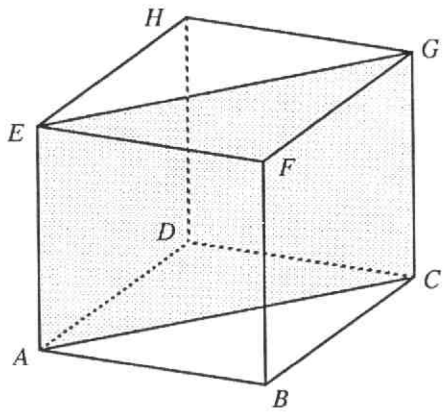
Uit opgave 3 blijkt dat het 'zien' van meetkundige bijzonderheden niet altijd genoeg is. Er is nog een beetje redeneren nodig. Of voor je eigen zekerheid òf om anderen van de juistheid van jouw opvatting te overtuigen.
Om te kunnen redeneren zijn er meetkundige spelregels nodig. Daarom komen er in dit hoofdstuk en de volgende veel definities, herkenningsregels en dergelijke voor. Die moet je begrijpen en kennen.

4. In een scheef prisma zijn enkele zijvlaks- en lichaamsdiagonalen getekend.



> Welke van de 9 aangegeven snijpunten zijn 'echt'?

■ 5.



In de kubus $ABCD.EFGH$ (zie werkblad) is de lengte van de ribbe 6.
P is het zwaartepunt van ΔBDE en Q het zwaartepunt van ΔCFH.
Opfrissertje: de zwaartelijnen in een driehoek snijden elkaar in het zwaartepunt. Het zwaartepunt verdeelt elke zwaartelijn in stukken met de verhouding 2 : 1.

>a Toon aan dat P en Q in het diagonaalvlak $ACGE$ liggen.

>b Denk je dit diagonaalvlak uit de kubus gelicht en op het papier gelegd. Maak op ware grootte een tekening van dat vlak met P en Q.

>c Toon aan dat AP en GQ dezelfde richting hebben.

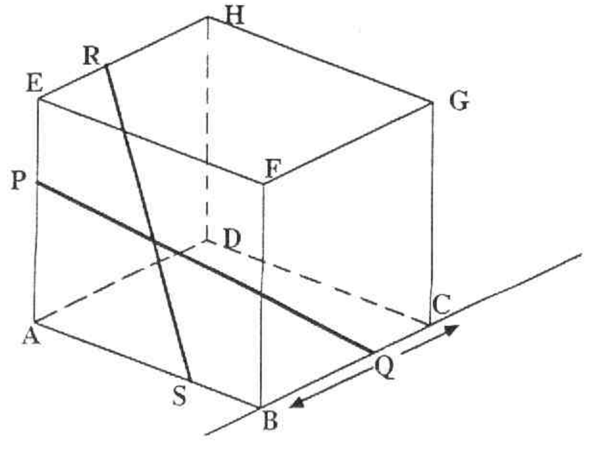
>d Onderzoek of AP en GQ wel of niet deel uit maken van dezelfde lijn.

■ 6. > Teken in piramide $T.ABCD$ op het werkblad een lijn evenwijdig aan TA, die bovendien BD en TC snijdt.

7. >a Teken in een coördinatenstelsel de punten:
B (-4,0,0); C (0,2,0); D (3,0,0); E (-4,0,5); F (0,-2,3).
Onderzoek door een berekening de ligging van de lijnen DE en CF.

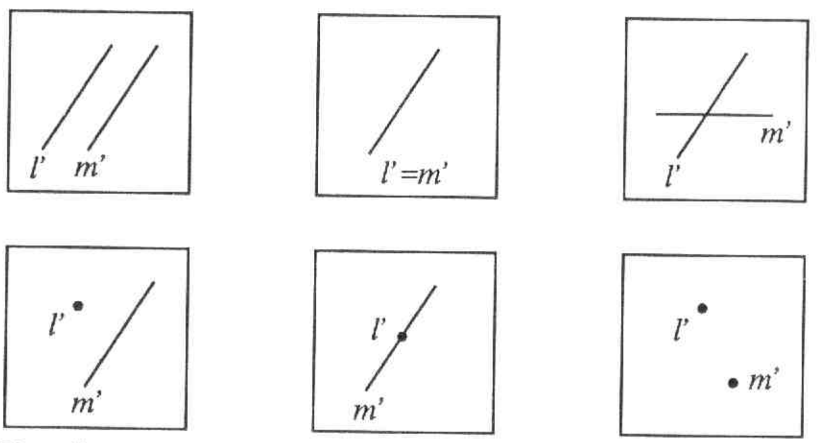
>b Het punt A heeft de coördinaten (0,a,0). Bereken a zo, dat de lijnen AF en DE elkaar snijden.

8. *ABCD.EFGH* is een kubus. De punten *P, R* en *S* liggen vast. Het punt *Q* is variabel op de lijn *BC* (het mag dus ook op de verlengden van de ribbe *BC* liggen).
In de meeste gevallen zullen de lijnen *PQ* en *RS* elkaar *kruisen.*
De vraag is of *Q* zo gekozen kan worden dat ze elkaar *snijden.*
En ook of parallel zijn mogelijk is.



> Probeer de antwoorden op de gestelde vragen te vinden met *redeneringen.*

9. Twee lijnen l en m zijn loodrecht op het papier geprojecteerd.
$l \rightarrow l'$ en $m \rightarrow m'$.



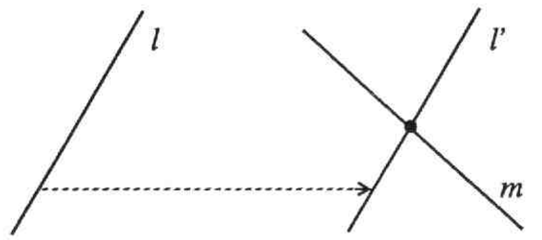
Het zijn dus bovenaanzichten.

>a Zeg bij elk plaatje welke liggingen van l en m hierbij mogelijk zijn.

Eén plaatje geeft niet altijd voldoende informatie om tot een bepaalde ligging te kunnen besluiten. Door de stand van het papier ten opzichte van de lijnen te veranderen en daarop weer te projecteren, kunnen er meer plaatjes van hetzelfde lijnenpaar worden verkregen. Misschien is de informatie dan voldoende.

>b Geef twee voorbeelden van zulke plaatjes van een lijnenpaar waaruit ondubbelzinnig blijkt dat ze elkaar kruisen.

Als twee lijnen elkaar snijden ontstaan er vier hoeken: twee scherpe en twee stompe hoeken òf vier rechte hoeken.
Voor *de* hoek tussen twee lijnen spreken we af dat we de *niet*-stompe nemen.
Voor kruisende lijnen kunnen we ook een hoek afspreken.

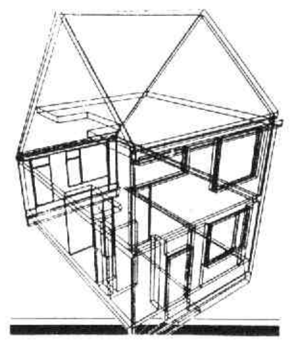


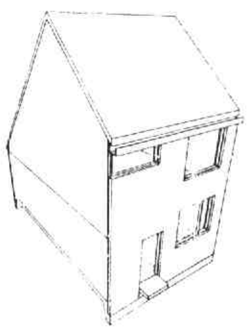
In de figuur kruisen de lijnen l en m elkaar.
Verschuif l tot l', waarbij l' de lijn m snijdt.
Voor de hoek tussen de kruisende lijnen l en m nemen we de hoek tussen de snijdende lijnen l' en m.

Opmerking: De grootte van de hoek blijkt niet afhankelijk te zijn van de keus van de verschuiving.

Als twee lijnen l en m loodrecht op elkaar staan ($l \perp m$), dan kan dat betekenen: l en m *snijden* elkaar onder een hoek van 90° òf l en m *kruisen* elkaar onder een hoek van 90°.

10. >a Teken een kubus $ABCD.EFGH$ waarbij $ACGE$ parallel is met het tafereel.
    >b Bepaal de grootte van de hoek tussen: AH en BC, AC en FH, BE en AC.
    >c Welke ribben kruisen AE loodrecht?
    >d Welke zijvlaksdiagonalen kruisen AE loodrecht?

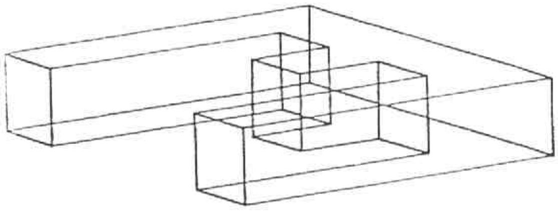


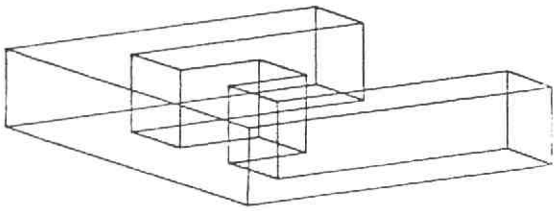


Het draadmodel links is ontstaan bij het ontwerpen met behulp van een computer. Voor de presentatie is dat plaatje niet zo fraai. De computer kan de verborgen lijnen (hidden lines) wegwerken en dat heeft het model rechts opgeleverd. Hiervoor moet o.a. bij elk snijpunt in de tekening worden vastgelegd of het ontstaan is uit snijdende of kruisende lijnen.
Met coördinaten kan dat worden uitgerekend.

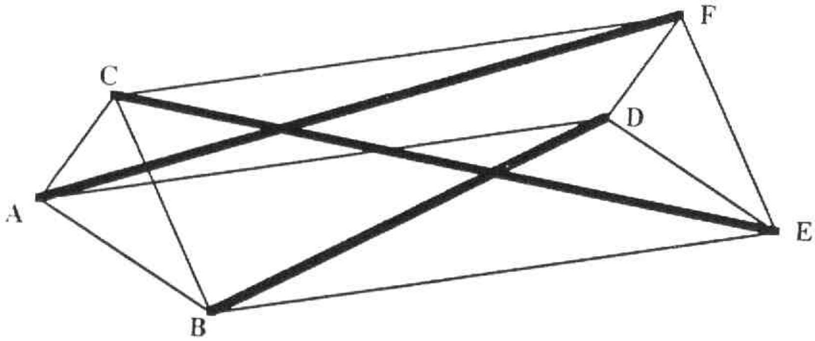
11. >a Maak van onderstaande figuren tekeningen waarbij de verborgen lijnen zijn weggelaten. Het gebruik van overtrekpapier kan nuttig zijn.

>b De gegeven figuren zijn precies gelijk. Vergelijk de resultaten.





12. *ABC.DEF* heeft de vorm van een regelmatig driezijdig prisma.



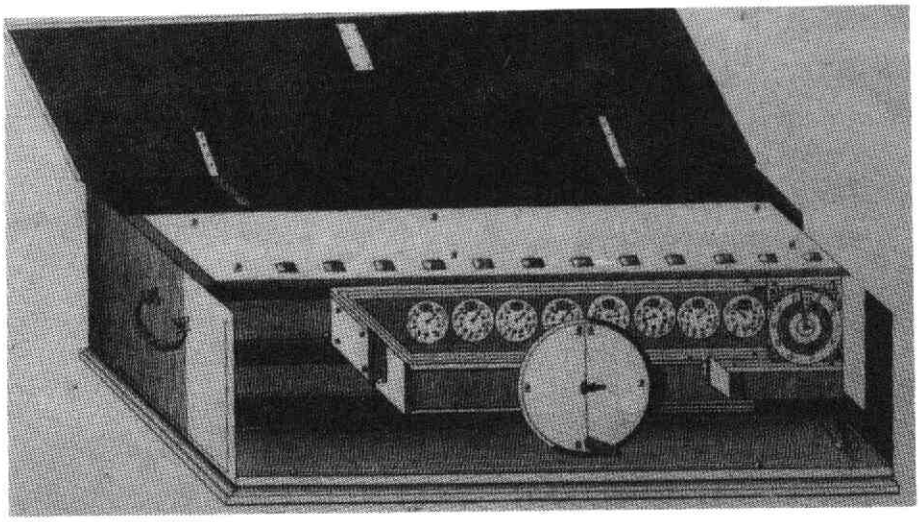
De drie zijvlaksdiagonalen *AF, BD* en *CE* worden vervangen door stokjes. Die stokjes worden onderling verbonden met touwtjes die de plaats van de negen ribben innemen.
Als *ABED* op een horizontaal vlak wordt geplaatst dan blijft deze constructie intact (zegt men). Dit principe wordt wel gebruikt om grote overkappingen met weinig gewicht te maken.
Voor het opzetten van een tent is dit knutselwerk ook zeer bruikbaar: Stoot je er tegenaan dan stort de zaak niet in, maar verandert van vorm om daarna weer in de oude toestand terug te keren.

>a Verklaar waarom de 'stok-diagonalen' elkaar twee aan twee kruisen.

>b Door driehoek *ABC* langs *AD* te verschuiven, ontstaan de veranderlijke snijpunten *P, Q, R* met de drie genoemde diagonalen.
Bespreek wat daarbij met driehoek *PQR* gebeurt.

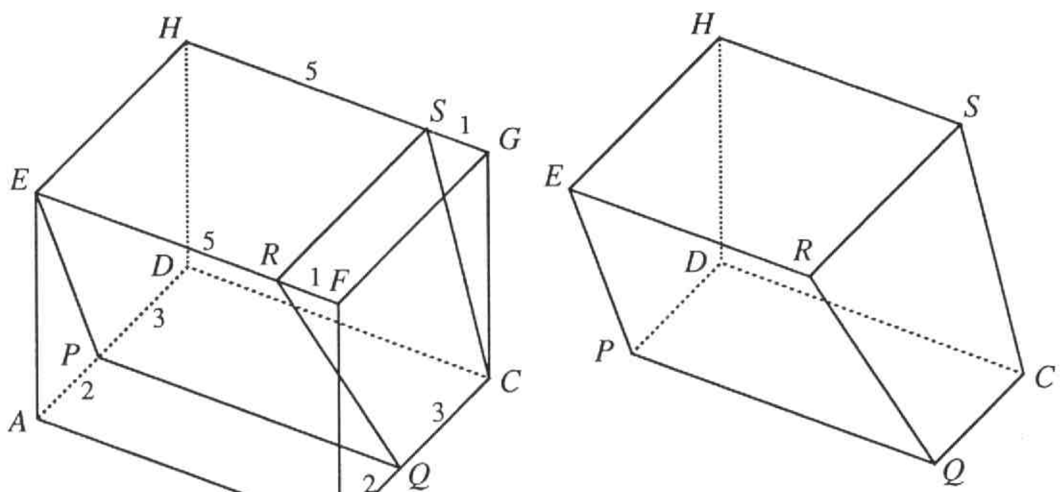
5 Vlakken

Dit hoofdstuk bevat niet zoveel toepassingen. Het is vooral bedoeld om later bij volgende onderwerpen te kunnen raadplegen.



1. Waarom is dit een vreemde tekening?

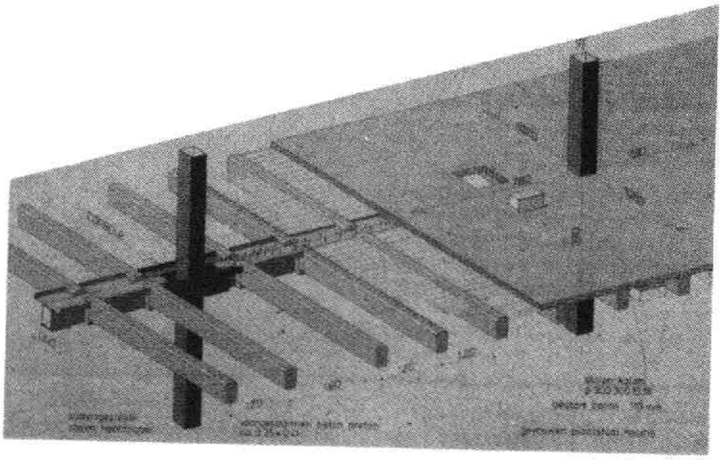
Dit brengt ons op het volgende technische probleem:



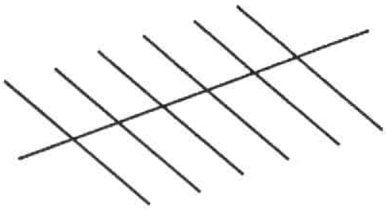
Van het houten blokje *ABCD.EFGH* moet het lichaam *PQCD.ERSH* worden gemaakt. Dat zou het gemakkelijkst gaan door middel van zagen, als *PQRE* en *QCSR* tenminste platte vlakken zijn. Maar het is niet ondenkbaar dat ze een beetje verwrongen zijn.

Het probleem is dus: Hoe kun je vaststellen of een figuur een (deel van een) plat vlak vormt.

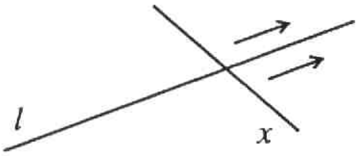
Opmerking
In het volgende gebruiken we het woord 'vlak' steeds in de betekenis van 'plat vlak'. Strikt genomen heeft een vlak geen begrensde oppervlakte. Toch spreekt men ook vaak van 'vlak' wanneer een 'vlakdeel' bedoeld wordt. De bedoeling is uit de situatie wel op te maken.
We proberen eerst een antwoord te geven op een andere vraag: Hoe kun je een vlak produceren?



De evenwijdige balken, verbonden door een lange balk, vormen de grondslag voor de vlakke vloer.
Door 'verdunning' kunnen we het ons zo voorstellen:



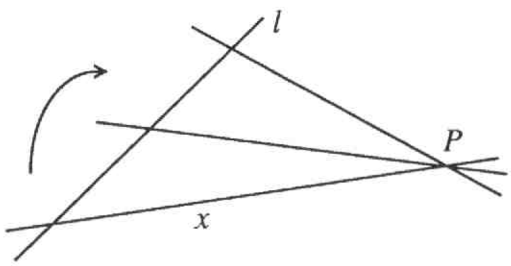
Evenwijdige lijnen die eenzelfde lijn snijden, liggen in één vlak.
Hetzelfde idee is ook met een beweging voor te stellen:
Neem een vaste lijn l en schuif de variabele lijn x langs l.
Dan ontstaat een vlak.



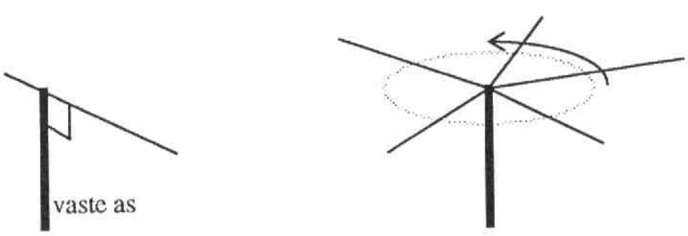
Op deze manier is bijvoorbeeld een zijvlak van een prisma ontstaan door een lijnstuk langs een lijn te verschuiven.

2. >a Maakt het iets uit als l en x van rol verwisselen?
   >b Waarom kun je nu zeggen dat een vlak door twee snijdende lijnen is vastgelegd?
   >c Twee van de evenwijdige lijnen zijn bekend. Verklaar waarom hierdoor ook een vlak is vastgelegd.

Nog een manier om door een beweging een vlak te produceren:



P ligt niet op l. x is een lijn door P die l snijdt.
Door x om P te draaien zó, dat het snijpunt langs l schuift, ontstaat een vlak.
Zo'n waaiervlak kun je ook krijgen door een rechte hoek te wentelen.



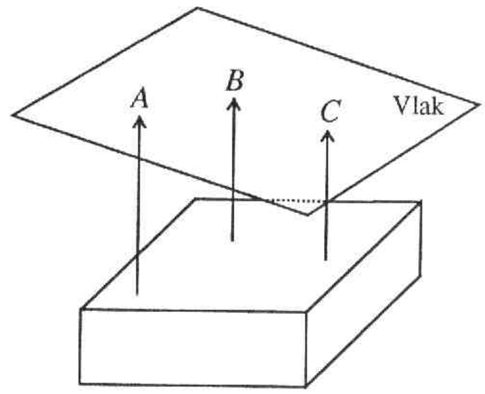
We hebben nu drie manieren om een vlak te produceren. Het bewijs dat je met een vlak hebt te maken is geleverd als je kunt aantonen dat het op een van die manieren geproduceerd kan worden.

3. Nu terug naar het vreemde blokje (zie bladzijde 33)
   > Zijn $PQRE$ en $QCSR$ vlakken?

In het voorbeeld van het blokje is het twijfelachtige vlak $PQRE$ voorgesteld door vier lijnen die erin moeten liggen. Zo wordt een vlak ook vaak voorgesteld door een combinatie van punten of lijnen. Het is dan maar de vraag of zo'n vlak werkelijk bestaat.

Hiervoor bekijken we de zaak eens anders door uit te gaan van een vlak dat we kunnen bewegen.

A, *B* en *C* zijn de eindpunten van drie pinnen.
Op die pinnen kan precies één vlak worden gelegd.



We zeggen: Het vlak is door deze drie punten vastgelegd. (ook wel 'bepaald')

Dat houdt twee dingen in: er bestaat zo'n vlak *en* er is er maar één.

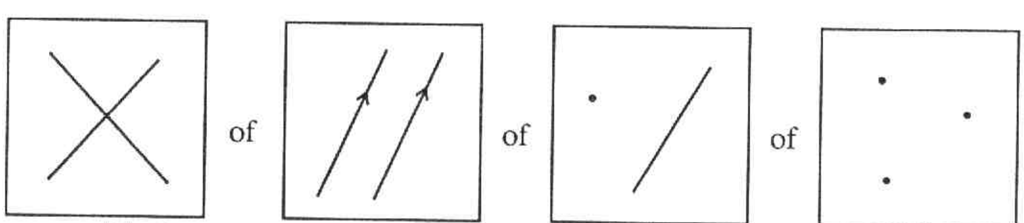
4. >a Hoe wordt de situatie als één van de drie pinnen wordt weggehaald?
   >b En als er een vierde pin wordt toegevoegd?
   Er zijn meerdere mogelijkheden.

5. *ABCD.EFGH* is een kubus.
   Welke bewegingsvrijheid heeft een vlak in deze gevallen?
   >a Het vlak gaat door *E*.
   >b Het vlak gaat door *E* en *F*.
   >c Het vlak gaat door *E*, *F* en *C*.
   >d Het vlak gaat door *E*, *F*, *C* en *A*.
   >e Het vlak gaat door lijn *AB* en *H*.
   >f Het vlak gaat door *A*, *G*, *HB* en *HG*

   Eigenlijk stel je voorwaarden aan een vlak. Het aantal voorwaarden kan te klein, precies goed of te groot zijn om een vlak te bepalen. Men zegt dan: het vlak is onderbepaald, bepaald of overbepaald.

   >g Deel de situaties in >a tot en met >f in deze drie groepen in.

Uit het tot nu toe behandelde lichten we de meest voorkomende manieren om een vlak te bepalen. Een vlak is bepaald door:



twee snijdende lijnen — twee evenwijdige lijnen — een lijn en een punt buiten die lijn — drie niet op een rechte lijn gelegen punten

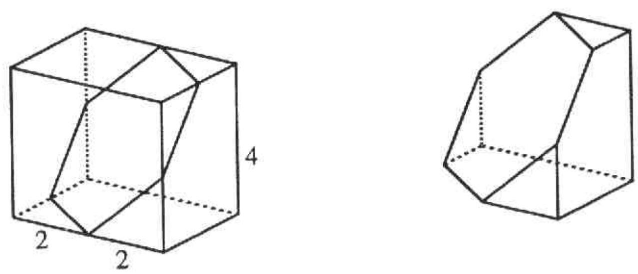
6. > Ga in deze vier gevallen de bewegingsvrijheid maar eens na.

7. Deze vier 'herkenningsregels' zijn natuurlijk niet onafhankelijk van elkaar.
   > Laat zien dat er in de eerste drie gevallen steeds drie punten zijn aan te wijzen die aan de vierde eis voldoen (dwz. dat ze niet op één lijn liggen).

Behalve de vraag of een voorgesteld vlak werkelijk bestaat, kan ook nog gevraagd worden of andere punten en lijnen eveneens in dat vlak liggen.

8. Een gedeelte van een bekend inhoudsprobleem. Dat probleem gaan we niet oplossen.

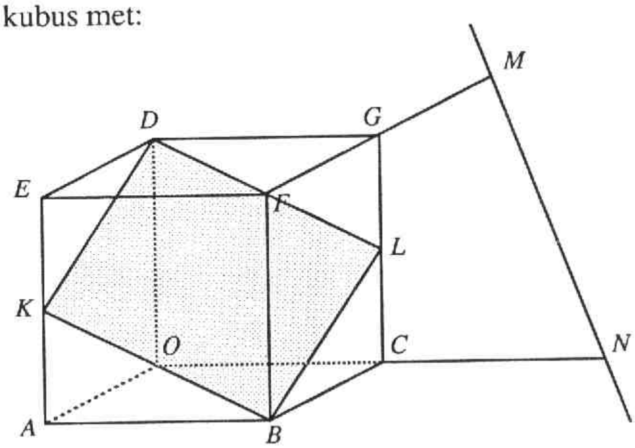
In een kubus met ribbe 4 worden zes middens van ribben verbonden. Je mag zonder bewijs aannemen dat hierdoor een vlakke regelmatige zeshoek wordt gevormd.
De kubus is nu verdeeld in twee lichamen waarvan het rechter apart is getekend.



>a Toon aan dat de zeshoekige doorsnijding inderdaad vlak is.

>b Is dat ook nog het geval als de uitgangsfiguur een willekeurige balk is?

9. *OABC.DEFG* is een kubus met:
   $KA = KE$
   $LC = LG$
   $GM = GF$
   $CN = CO$



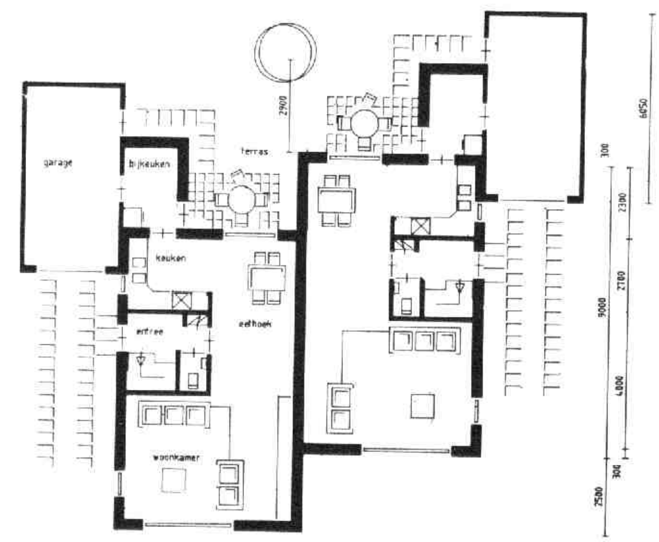
>a De punten B, L, D, K zijn tot een vierhoek verbonden
Maar is die vierhoek wel vlak?

>b Een recept om te bewijzen dat een lijn in een vlak ligt is:
Neem twee punten van die lijn en bewijs dat ze in dat vlak liggen.
Onderzoek of de lijn MN in het vlak KBL ligt.

6 Ligging van vlakken

Het huis hieronder wordt door een groot aantal vlakken begrensd.

Ter verduidelijking (of verwarring) is het plaatje van de begane grond toegevoegd.



Twee *verschillende* vlakken snijden elkaar (er is dan een snijlijn) of zijn parallel (er zijn dan geen gemeenschappelijke punten). Daarmee zijn dan de mogelijkheden uitgeput.

■ 1. > Zeg bij de vlakken of ze elkaar snijden of parallel zijn ('vlak' in de onbegrensde betekenis). Bij snijding moet de snijlijn genoemd of getekend worden (zie werkblad).

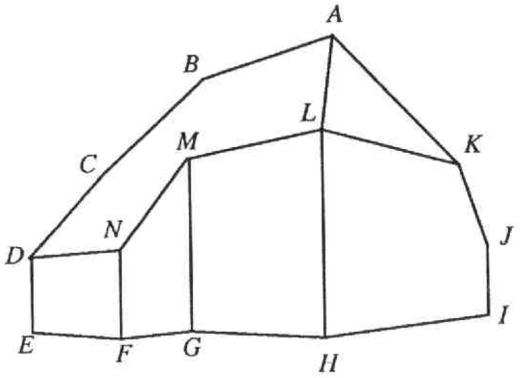
>a *DNM* en *AKL*

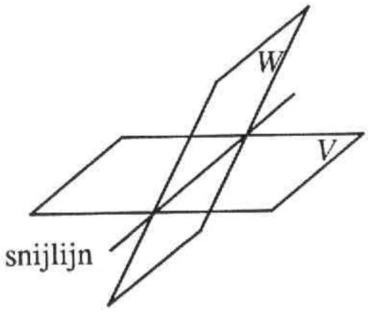
>b *FGM* en *LKJ*

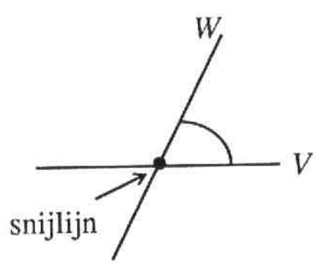
>c *DEF* en *HIJ*

>d *DEF* en *GHL*

>e *CDN* en *GHI*







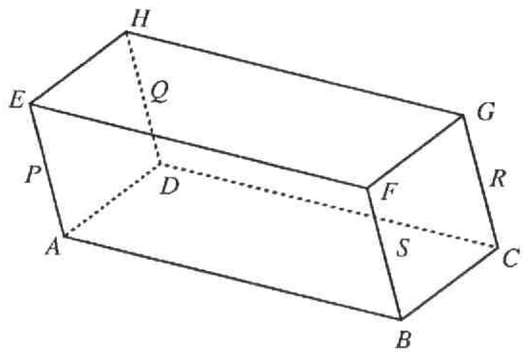
Door de snijdende vlakken in de richting van de snijlijn te bekijken tekenen zich twee snijdende lijnen af. De hoek daar tussen heet de hoek tussen *V* en *W*. Als die hoek recht is, zeggen we dat de vlakken loodrecht op elkaar staan. Zo staan de zijmuren van het huis uit opgave 1 loodrecht op de grond.

2. Bekijk de figuur bij opgave 1.

>a Welke zichtbare vlakken staan loodrecht op vlak *FGM?*

>b Staan de vlakken *LMN* en *HKL* loodrecht op elkaar?

Van het lichaam $ABCD.EFGH$ is bekend:
$AE \parallel DH \parallel BF \parallel CG$ en $AE = DH = BF = CG$.
Je kunt dan vlak $ABCD$ verschuiven tot vlak $EFGH$.
Die vlakken zijn dan parallel. ($ABCD \parallel EFGH$).



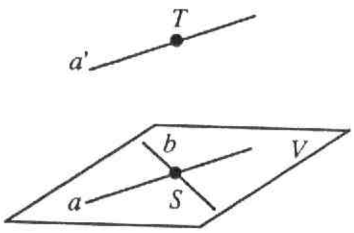
Algemeen:

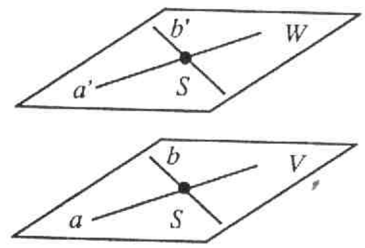
Twee vlakken zijn parallel als er een verschuiving bestaat waarbij het ene vlak in het andere vlak overgaat.
Omgekeerd is er bij twee parallelle vlakken steeds een passende verschuiving te vinden.

3. De voorgaande tekening stelt een prisma voor.
   P, Q, R en S zijn de middens van de opstaande ribben.
   > Toon aan dat $ADRS$ en $PQGF$ vlakken zijn die bovendien evenwijdig zijn.

De verschuivingen zijn niet steeds zo gemakkelijk te vinden. De op zichzelf ware uitspraak dat twee evenwijdige vlakken gekenmerkt worden door het feit dat ze geen gemeenschappelijke punten hebben, zal ons niet altijd wijzer maken.
We gaan daarom op zoek naar een nieuwe herkenningsregel die ook duidelijk aangeeft wat je moet doen om achter de waarheid te komen.

4. In vlak V liggen de lijnen a en b. Door punt T loopt de lijn a' parallel met a. Door a' gaat een vlak W.





>a Welke standen kan W innemen ten opzichte van V?

>b Door T wordt de lijn b' parallel met b getekend.
W moet bovendien door b' gaan
Wat is nu het antwoord over de standen?

>c $V \parallel W$, want als V en W elkaar zouden snijden, dan is dat in strijd met $a \parallel a'$ of $b \parallel b'$ of beide. Beredeneer dat.

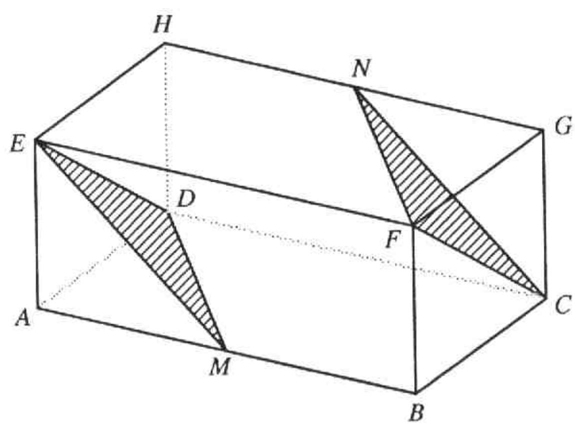
We komen tot deze herkenningsregel:

> Als een paar snijdende lijnen in het ene vlak parallel is met een paar snijdende lijnen in het andere vlak, dan zijn die vlakken evenwijdig.

5. In deze regel is de voorwaarde van snijden beslist nodig

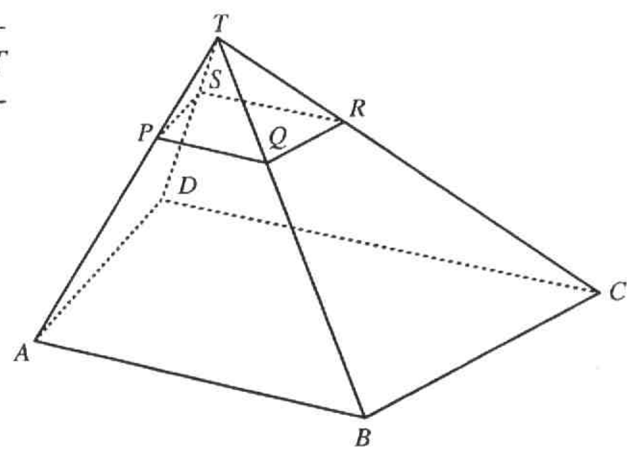
   > Teken een voorbeeld dat niet aan de voorwaarde voldoet en waarin het dan mis gaat.

6. *ABCD.EFGH* is een balk.
   M is het midden van *AB*.
   N is het midden van *GH*.



   > Toon aan: vlak *DEM* // vlak *CNF*.

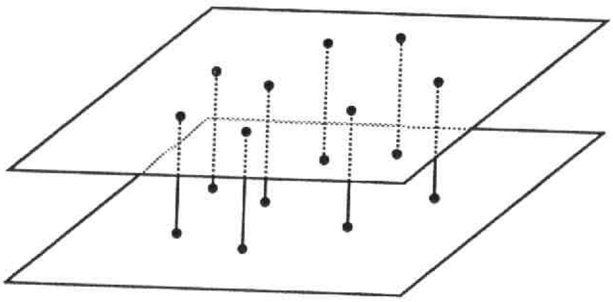
7. De punten *P*, *Q*, *R*, *S* zijn gevonden door *A*, *B*, *C*, *D* uit *T* met de factor $\frac{1}{3}$ te vermenigvuldigen.



Je hebt vroeger al stilzwijgend gebruik gemaakt van het feit dat *PQRS* weer een vlak is en dat *PQRS* parallel is met *ABCD*.
Iemand die zulke zaken niet zomaar 'ziet' twijfelt aan de waarheid van deze bijzonderheden.

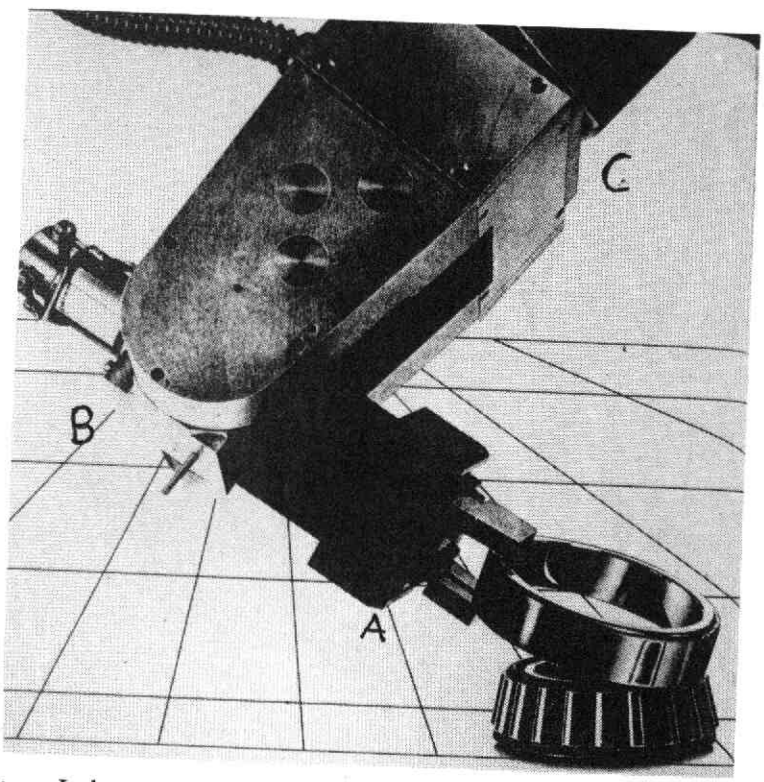
> Hoe kun je hem overtuigen?

8. Tussen twee evenwijdige vlakken zijn loodlijntjes getekend. Die hebben allemaal dezelfde lengte. Bij twee evenwijdige vlakken kan dan ook gesproken worden over de 'afstand' van die vlakken.
Omgekeerd zou je ook via gelijke loodlijntjes kunnen besluiten tot evenwijdigheid.



> Hoeveel van die loodlijntjes zijn daarvoor nodig?

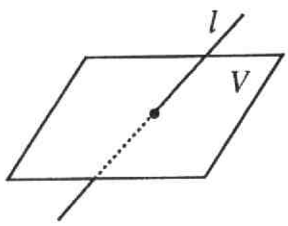
9. Op de vloer ligt een rollager. De robot moet hierom een ring plaatsen. Daarvoor moet de ring eerst in een stand evenwijdig met de vloer worden gebracht. Er zijn draaimogelijkheden bij *A*, *B* en *C*. De beweging bij *A* kun je vergelijken met die van de pols en de beweging bij *B* met die van de elleboog.



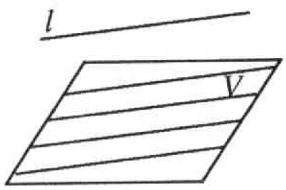
> Is het mogelijk die evenwijdigheid door middel van de bewegingen bij *A* en *B* te bereiken?

7 Lijnen en vlakken

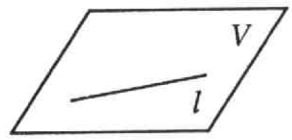
De ligging van lijnen ten opzichte van vlakken is zo tussendoor meermalen aan de orde geweest. We vatten het belangrijkste samen en geven een uitbreiding.



l snijdt V



l is parallel met V
(l // V)

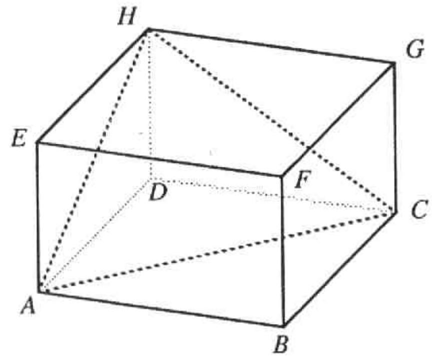


l ligt in V
(dit rekent men soms bij l // V)

kruisende lijnen:
Voor twee lijnen in één vlak geldt: òf ze snijden elkaar òf ze zijn parallel.
Hieruit volgt een belangrijke regel:

Twee kruisende lijnen kunnen niet in één vlak liggen

1. *ABCD.EFGH* is een balk



>a Bepaal de ligging van de lijnen *BF, BG, EG, EF* ten opzichte van vlak *ACH*.

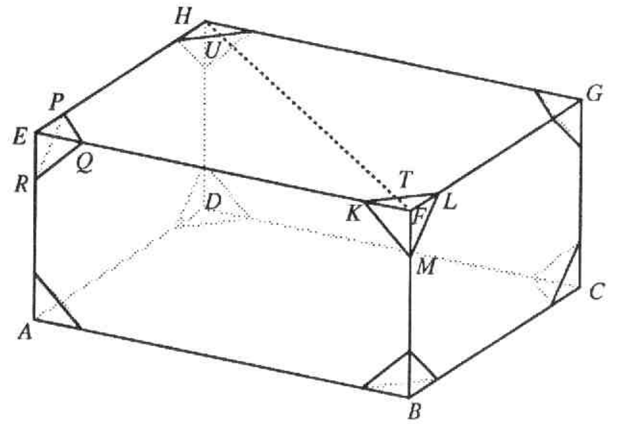
>b '*AH* en *BC* kruisen elkaar want het vlak door *A, H, B* gaat ook door *G* en *C* ligt duidelijk niet in dat vlak.'
Is deze redenering correct?

2. Twee kruisende lijnen kunnen niet in één vlak worden 'verpakt', maar wel in twee evenwijdige vlakken.

>a Neem de figuur van opgave 1. Noem twee evenwijdige vlakken waarin de kruisende lijnen *BC* en *FH* verpakt kunnen worden.

>b Is er nog zo'n vlakkenpaar te vinden?

■ 3. De scherpe puntjes eraf (uit een schoolonderzoek).
Gegeven is een balk met afmetingen 8, 6 en 4. Bij elk hoekpunt is het puntje afgesneden zoals aangegeven in de figuur. De stukjes *EP*, *EQ*, *ER*, *FK*, enz. hebben lengte 1.



Het overgebleven lichaam is een 14-vlak. *FH* snijdt twee ribben van dat 14-vlak respectievelijk in *T* en *U*.

>a Maak een tekening waarin het lijnstuk *TU* op ware grootte voorkomt.

De oorspronkelijke balk had 12 ribben. Door het afzagen van de puntjes zijn er 24 ribben bijgekomen. De volgende vragen gaan over die 24 nieuwe ribben. Bekijk de lijn *KL*.

>b Hoeveel van de nieuwe ribben snijden *KL* (eventueel na verlenging)?

>c Hoeveel zijn evenwijdig met *KL?*

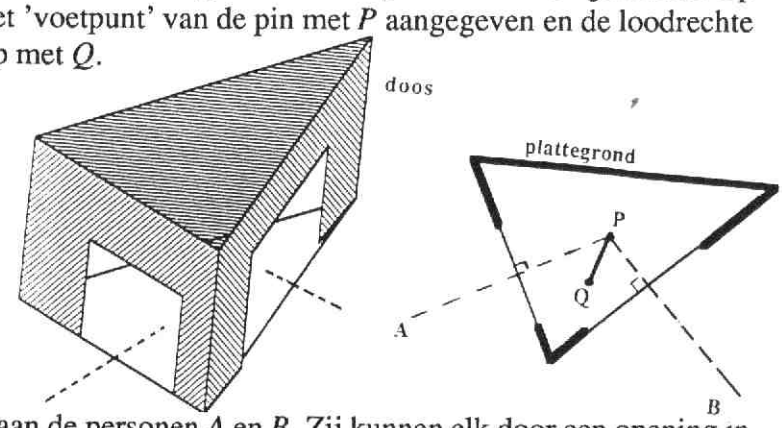
>d Hoeveel kruisen *KL* loodrecht?

Als de vlakjes *KLM* en *PQR* worden uitgebreid snijden ze elkaar volgens een lijn *s*. Die snijlijn *s* snijdt vlak *ABFE* in een punt *S*.

>e Hoe hoog ligt *S* boven vlak *EFGH?*

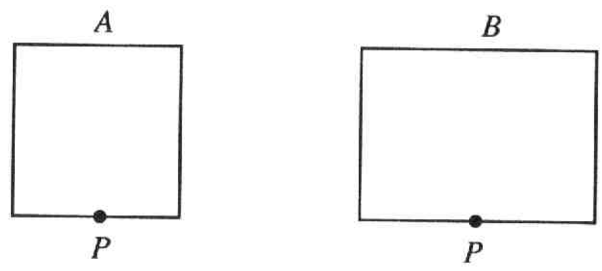
>f Teken de snijlijn *s*.

4. Door de bodem van deze driehoekige doos is een pin naar binnen gestoken. Op de plattegrond is het 'voetpunt' van de pin met *P* aangegeven en de loodrechte projectie van de top met *Q*.

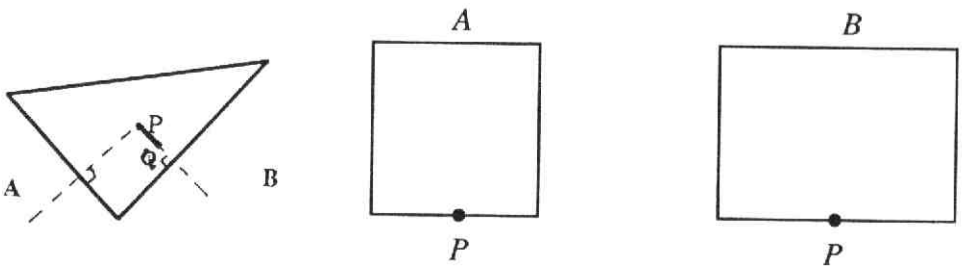


Op enige afstand staan de personen *A* en *B*. Zij kunnen elk door een opening in de doos een deel van de pin zien. De top *Q* is niet zichtbaar.

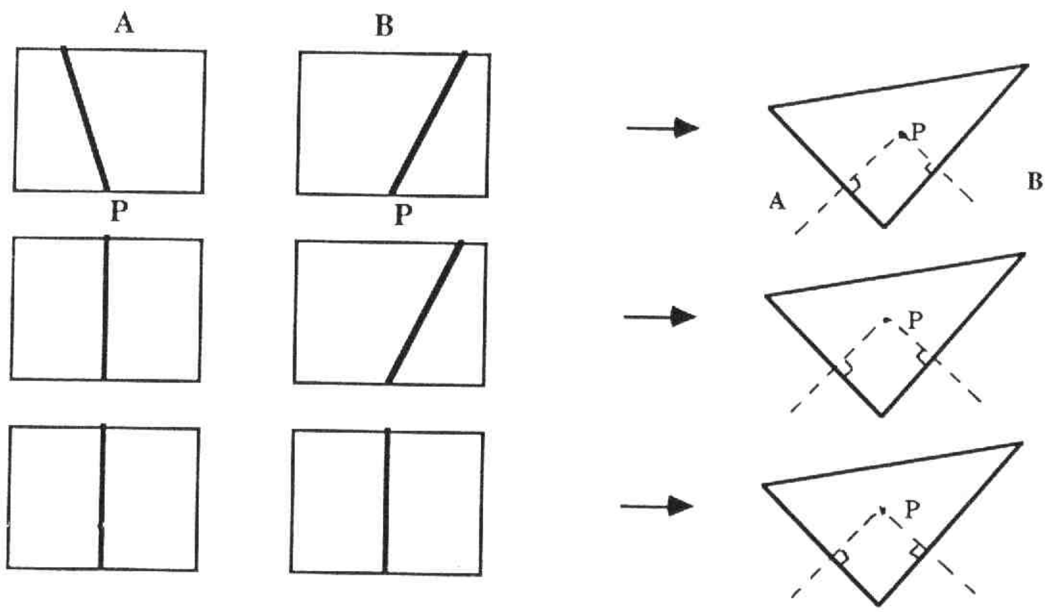
■ >a Schets in deze openingen wat *A* en *B* zien.



■ >b Doe hetzelfde bij deze plattegrond



De stand van de pin wordt veranderd. *A* en *B* maken tijdens de beweging drie keer een tekening van wat ze zien. Uit de tekening proberen ze een redelijke plaats voor *Q* in de plattegrond te vinden.



>c Bepaal in elk van de plattegronden zo'n plaats.

>d Waarom kun je in de laatste situatie zeggen dat *PQ* loodrecht op de bodem staat?

Uit deze opgave volgt de regel:

> Als een lijn loodrecht staat op twee snijdende lijnen van een vlak, dan staat die loodrecht op dat vlak

>e Welke lijnen zijn dat in deze opgave?

Je kunt in een plaatje vaststellen dat PQ nu ook loodrecht staat op alle lijnen in het vlak die door P gaan.

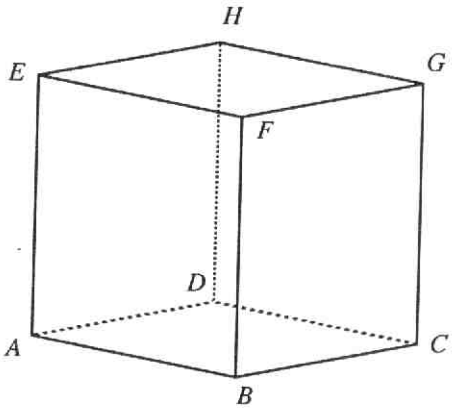
5. >a Is het snijden van de lijnen, zoals het in de regel staat, nodig?

   >b De formulering van de regel is zo ruim, dat een lijn die twee snijdende lijnen loodrecht *kruist* er ook onder valt.
   Is dat terecht?

   >c Als $l \perp V$ en m een *willekeurige* lijn in V is, dan geldt ook $l \perp m$.
   Klopt dat?

Recept om aan te tonen dat lijn l loodrecht op vlak V staat:
Zoek twee lijnen a en b met $l \perp a$ en $l \perp b$.
Stel vast dat a en b elkaar snijden: klaar!

6. *ABCD.EFGH* is een kubus.



>a Gebruik de regel om aan te tonen dat $AE \perp ABC$ staat.

>b Toon aan dat $EF \perp ADH$.

>c Toon ook aan dat $BG \perp DFC$.

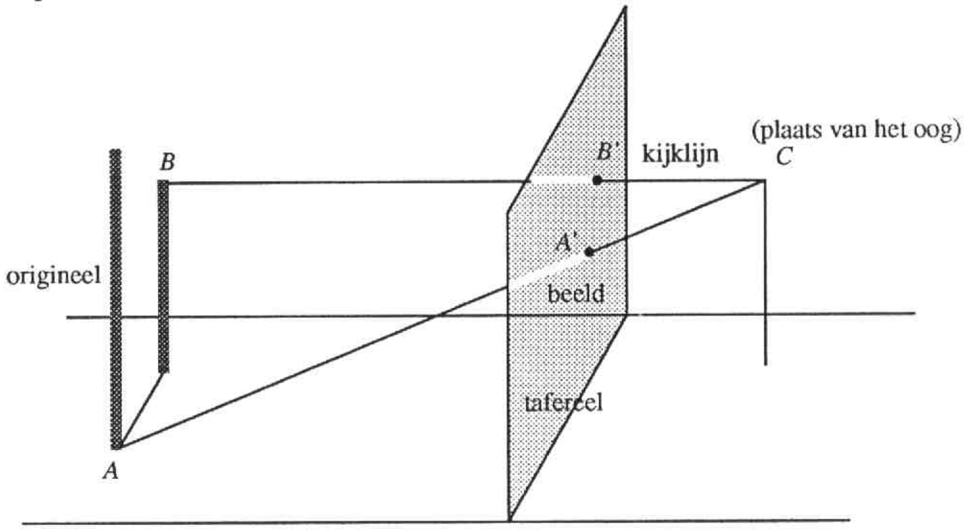
>d Bewering: $EC \perp BDG$.
Van het bewijs van deze uitspraak is een fragment bekend:

$$BD \perp ACGE \quad \rightarrow BD \perp EC$$

Voltooi het bewijs.

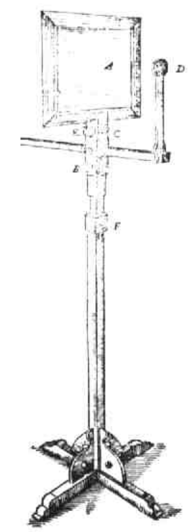
8 Centrale projectie

We hebben voorbeelden gezien van het tekenen volgens perspectiefregels. In dit hoofdstuk gaan we wat dieper in op het idee achter deze tekenwijze. Het is het beste de beschreven handelingen met eenvoudige hulpmiddelen echt uit te voeren. Hier behelpen we ons meestal met tekeningen in scheve projectie.



We bekijken de werkelijkheid door een plaat van glas of kunststof (tafereel). Het oog moet daarbij een vaste positie (C) houden. Een punt van het origineel (A) wordt door een *kijklijn* met het oog verbonden (AC). De kijklijn snijdt het tafereel in het beeld A'.
Zo kan van elk punt en dus van elke figuur een beeld worden geconstrueerd.

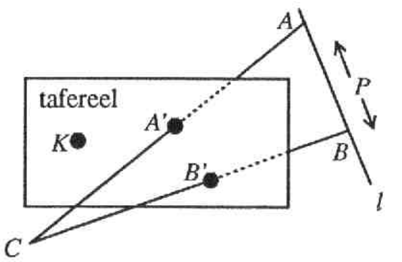
1. De moeilijkheid van het perspectief tekenen is het op dezelfde plaats houden van het gebruikte oog. Simon Stevin beschrijft al een praktisch hulpmiddel.



Ick heb erghens gheleſen , en dat na mijn beſte onthoudt in *Albert Durer*, alwaer hy willende verclaren wat eyghentlicke verſchaeuwing is, ſeght datmen de verſchaeulicke ſaeck ſoude ſien deur een plat glas , en ſich inbeelden dat tgene men ſoo int glas ſiet, daer in gheſchildert is , want dats de ware volcomen ſchaeu gheſien vant oogh op die plaets. Deſe beſchrijving der ſchaeu (welcke ons hier vooren beweeghde een glas te bepalen) heeft ſijn VORSTELICKE GHENADE ſoo bequaem ghedocht , dat hy ſulcke ſchaeu niet alleen in een glas en heeft willen bedencken , maer dadelick daer in teyckenen , doende tot dien eynde bereyden een glas , inder voughen als de byghevoughde form anwijſt, alwaer A het glas bediet (t'welck was t'glas van een groote criſtalijne ſpieghel) draeyende op de carniere B, om dat ſoo recht of ſcheef te ſtellen alſmen wil, en wort vaſt ghemaeckt mettet ſchroefken C: T'gaetken daermen deurſiet is D, t'welcmen naerder en verder vant glas can ſchuijven, en dat hechten mettet ſchroefken E: T'glas can oock hoogher en legher gheſtelt worden , en dan vaſt ghemaeckt mettet ſchroefken F.

> Hoe moet je dit apparaat gebruiken?
Het lezen van de tekst is voor de beantwoording niet noodzakelijk

■ 2. Van de punten A en B zijn de beelden A' en B' gegeven. Door A en B is de lijn l getrokken.



De plaats C van het oog is het centrum waardoor alle kijklijnen gaan

>a Het variabele punt P doorloopt lijn l.
Waarom liggen alle kijklijnen CP in één vlak?

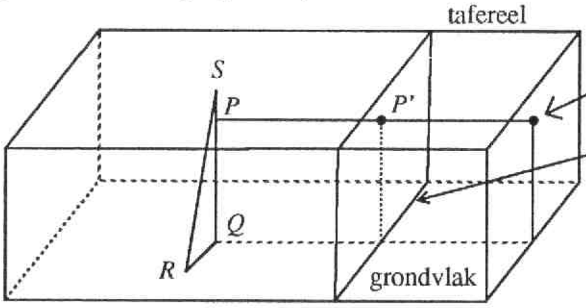
>b Waarom is het beeld van l weer een rechte lijn?

>c Teken in de figuur nog twee lijnen die hetzelfde beeld hebben als l.

>d Zijn er punten die tegelijkertijd origineel en beeld zijn?

>e Teken een *lijnstuk* dat het *punt* K als beeld heeft.

3. Om de plaatsen van punten, lijnen en vlakken duidelijker te kunnen aangeven, sluiten we het wereldje op in een kijkdoos (balk).
(We werken in scheve projectie. De zo constructies zijn tevens van belang als oefening in de scheve projectie.)



CP staat loodrecht op het tafereel. PQ is een loodlijn op het grondvlak. Via een belangrijke hulplijn in het grondvlak is P' gevonden. (Ga dat na!).
Het vlak $PQRS$ is parallel met het tafereel.
Waarschuwing: In een echte kijkdoos kunnen de perspectiefconstructies met bijv. draadjes worden uitgevoerd. Hiervan hebben we dus een tekening in scheve projectie. Er is dus een echt tafereel en een in de scheve projectie vertekend tafereel. Uit de situatie in de opgaven blijkt wel wat bedoeld wordt.

■ >a Construeer in de kijkdoos het beeld van QRS en geef een beschrijving van de constructie. Voer naar behoefte nieuwe namen in.

>b Welk meetkundig verband bestaat er tussen QRS en $Q'R'S'$ (het beeld)? Wat betekent dat voor hoeken en lengten van lijnstukken?

>c Veronderstel: $CP' = 40$; $PP' = 50$; $QS = 30$; $QR = m$.
Bereken de lengten van $Q'S'$, $Q'R'$ en $R'S'$.

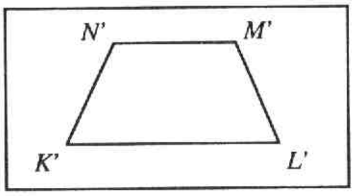
>d Op welke afstand moet C van het tafereel genomen worden om van het lijnstuk QS een beeld met lengte 2 te krijgen?

>e Op QRS kunnen diverse afbeeldingen worden toegepast.
Bijvoorbeeld verschuiven, spiegelen, draaien of combinaties daarvan, waarbij de driehoek wel in hetzelfde vlak blijft.
Heeft dat invloed op de antwoorden van vraag >b?

>f QRS wordt verschoven in een richting loodrecht op het tafereel.
Heeft dat invloed op de antwoorden van vraag >b?

■ 4. Neem de balk uit de vorige opgave en teken in het grondvlak een rechthoek $KLMN$ met KL parallel aan de grondlijn.

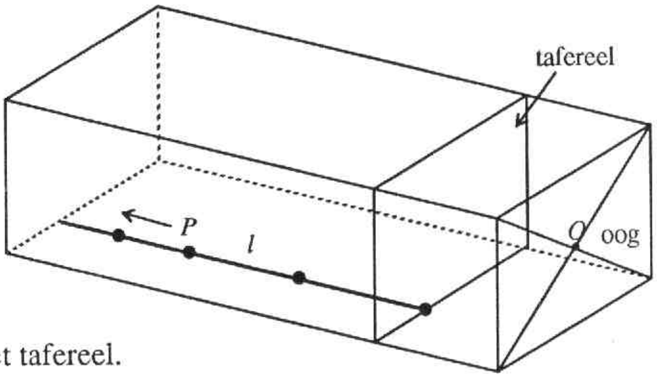
>a Construeer het beeld van $KLMN$.
Veronderstel dat dit in het echte tafereel een beeld van $KLMN$ is:



Het oog wordt nu zijwaarts verplaatst (hoogte en afstand tot het tafereel veranderen niet). Daardoor ontstaan er ook andere beelden van $KLMN$.

>b Teken in dat echte tafereel nog enkele andere beelden van $KLMN$.
Verklaar waarom de antwoorden goed zijn.
Aanwijzing: Het is vaak nuttig aanzichten van de kijkdoos te tekenen.

■ 5.



l staat loodrecht op het tafereel.

>a Teken in deze figuur het beeld van l met de beelden van de vier aangegeven punten.

>b Het punt P wordt langs l verschoven. Wat gebeurt er met het beeldpunt P'?

>c Door P steeds verder te verschuiven buiten de balk gaat P' naar een grenspunt. Waar ligt in het tafereel dat grenspunt?

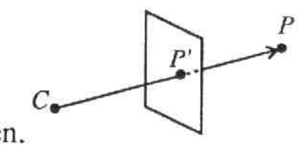
>d Dit grenspunt heet het verdwijnpunt van l (en ook van l').
Beredeneer dat elke lijn die parallel is met l hetzelfde verdwijnpunt heeft.

>e Hoe kun je in het tafereel de horizon krijgen?

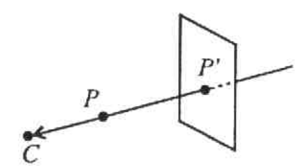
Je hebt een aantal bijzonderheden van het perspectieftekenen uit hoofdstuk 2 kunnen terugvinden. Daarover nog een laatste vraag.

>f Onderzoek dezelfde situaties voor het geval dat l wel horizontaal is, maar scheef op het tafereel staat.
Welke rol speelt de horizon?

Dit is de kern van een perspectivische afbeelding:
Een punt en een vlak dienen als centrum en tafereel.
P' is het snijpunt van de lijn CP met het vlak.

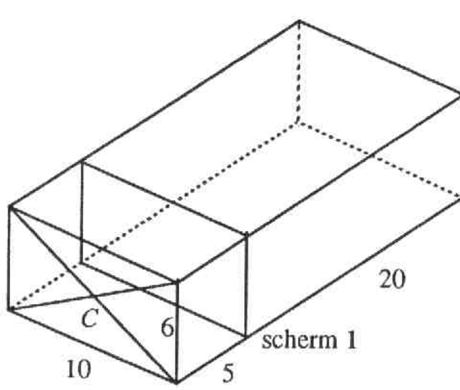


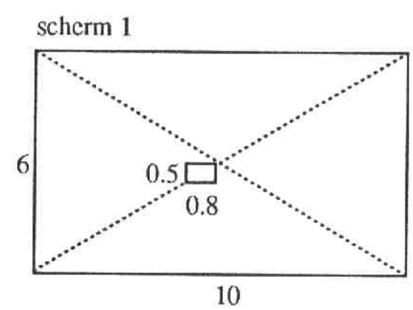
P en C kunnen ook aan dezelfde kant van het tafereel liggen.
Dan is er ook een andere opvatting over het plaatje mogelijk:
C is een puntvormige lichtbron, P een punt van een voorwerp en P' de schaduw van P op het tafereel.



Bij het ontwerpen van objecten met behulp van de computer kan die opvatting bijvoorbeeld van belang zijn in verband met zichtbaarheidsproblemen.
Beide opvattingen passen in hetzelfde systeem, dat de toepasselijke naam *centrale projectie* draagt.

6.



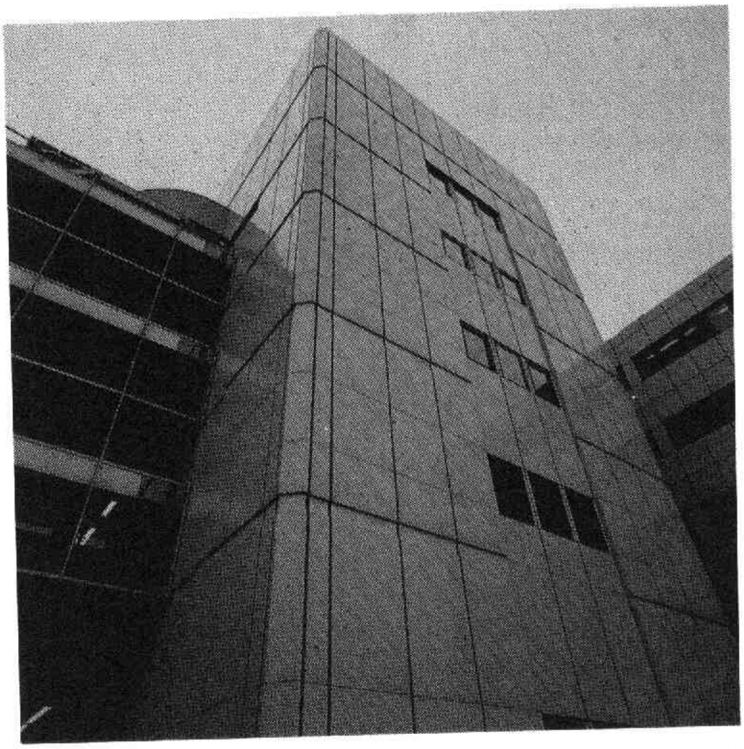


In het ondoorzichtige scherm bevindt zich een kleine rechthoekige opening waardoor het licht van de lamp C valt.
Hierdoor ontstaat er een lichtvlek op de achterwand van de balk.

>a Maak een schaaltekening van de achterwand met de lichtvlek.

Op 10 cm van scherm 1 wordt het doorzichtige scherm 2 geplaatst. Op dit scherm wordt een stukje zwart gemaakt, zodat op de achterwand de linkerhelft van de lichtvlek verdwijnt.

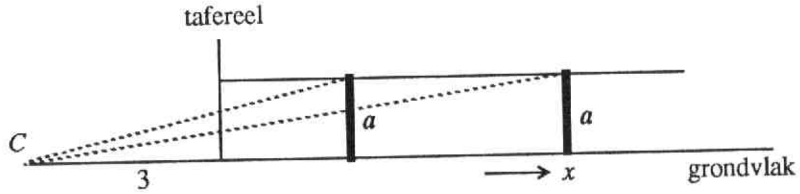
>b Maak een schaaltekening van scherm 2 met een zo klein mogelijk zwart stuk.

7. 

> Verklaar de stand van de verticale lijnen met behulp van een hellend tafereel in een kijkdoos.

8. *Het in de verte verdwijnen van een auto*

We bestuderen dit verschijnsel met een principeberekening.



Het lijnstuk $\boldsymbol{a}$ met lengte 1 wordt naar rechts verplaatst. Daardoor wordt het beeld steeds kleiner. De afstand van $\boldsymbol{a}$ tot C noemen we x.
$\boldsymbol{a}$ verplaatst zich met een snelheid van 5 lengte-eenheden per tijdseenheid. Dus we kunnen stellen $x = 5t + 3$, als we bij het tafereel $t = 0$ nemen.

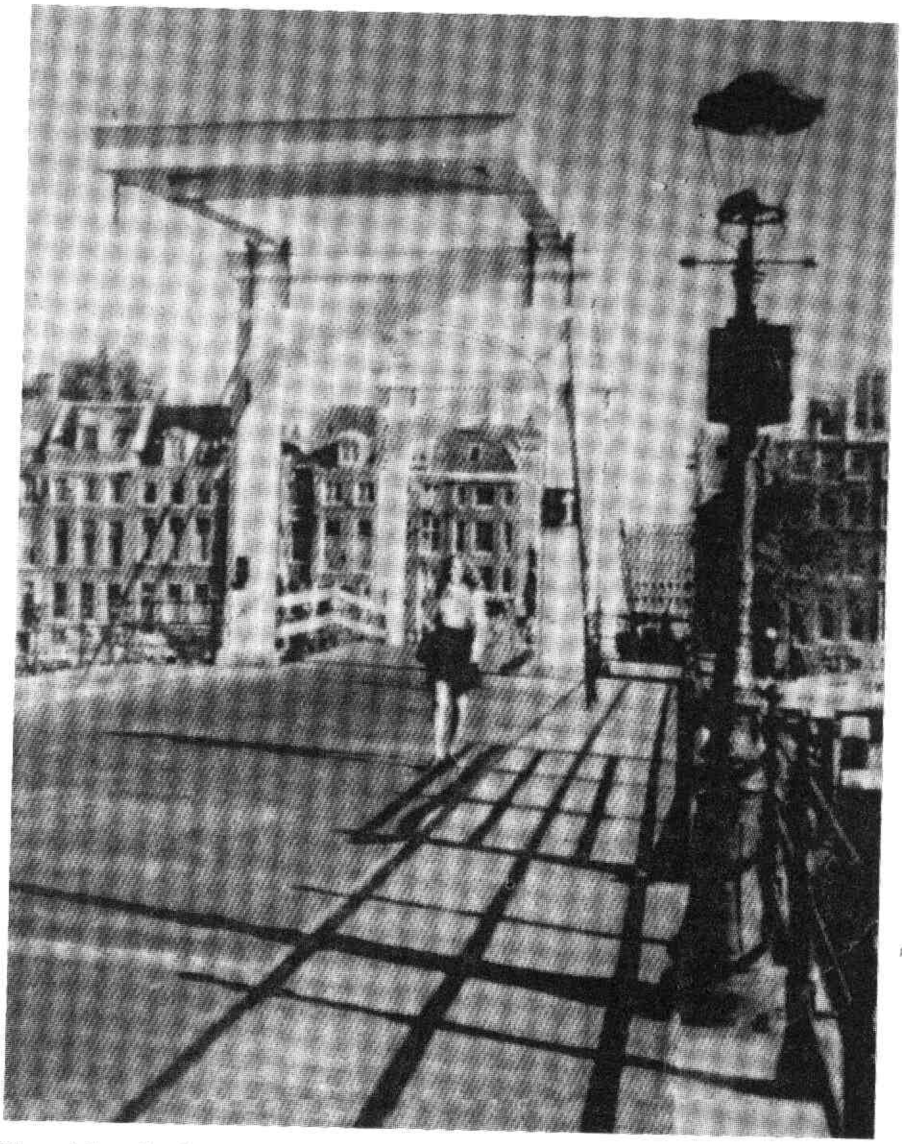
>a Druk de hoogte h van het beeld uit in t.

>b Met welke snelheid 'krimpt' het beeld in?

>c Verklaar algebraïsch dat de *auto* op grote afstand stil lijkt te staan.

9 Parallelprojecties

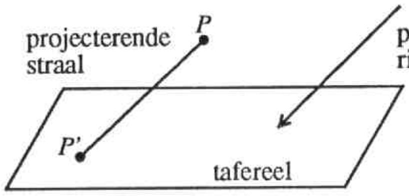
Je zou kunnen zeggen dat de centrale projectie gegroeid is uit het tekenen van perspectief en van schaduwen van een lamp. Die projectie werd vastgelegd door een voorschrift te geven over de wijze waarop een punt in de ruimte een beeldpunt op het tafereel krijgt toebedeeld.
Ook voor de scheve projectie is zo'n voorschrift te geven dat uit de werkelijkheid voort komt.
Als aanloopje bestuderen we deze foto.



Het object is de brugleuning, het tafereel de weg ernaast en het beeld de schaduw.
De zonnestralen zijn te beschouwen als een bundel evenwijdige lijnen.

De foto suggereert dit voorschrift:

Gegeven zijn een tafereel (vlak) en een richting (lijn).
Trek door een punt P een lijn parallel met de lijn die de projectierichting aangeeft. Het snijpunt met het tafereel is het beeldpunt P' van P.



Omdat de projecterende stralen parallel zijn heet dit een *parallelprojectie*.

1. Een lijn l is niet evenwijdig met de projectierichting. Toon aan:

   >a Alle projecterende stralen van de punten van l liggen in één vlak (het projecterende vlak).

   >b Het beeld van l is weer een rechte lijn.

   >c Verhoudingen van lengten van lijnstukken op l blijven bewaard.

2. De brugleuning op de foto bestaat uit twee stelsels evenwijdige lijnen: horizontale en verticale. In de schaduwbeelden lijkt die evenwijdigheid te zijn behouden, als we tenminste rekening houden met de perspectivische vertekening.

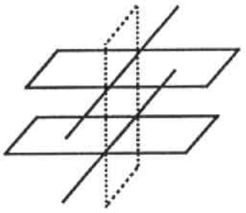
   >a Hoe is die evenwijdigheid op de foto te testen?

   Ook voor lijnen in een andere stand lijkt die evenwijdigheid te zijn behouden. Op deze foto is dat iets minder duidelijk te zien, maar wel op de foto bij opgave 8.

   >b Zoek in beide foto's een voorbeeld.

Om aan te tonen dat deze eigenschap een gevolg is van het projectievoorschrift hebben we een fragmentje theorie nodig.

Als twee parallelle vlakken door een derde vlak gesneden worden, dan ontstaan er twee parallelle snijlijnen.

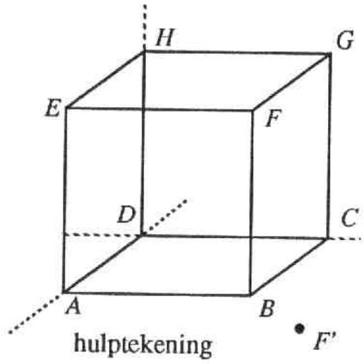


3. >a Bewijs dat, uitgaande van de drie mogelijkheden die er voor de ligging van twee lijnen zijn.

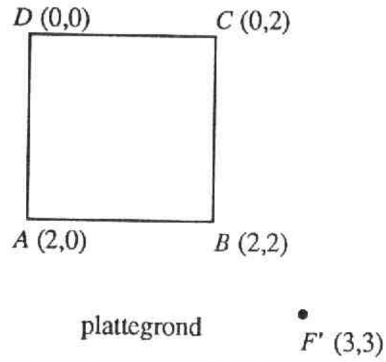
   >b Beredeneer aan de hand van schetsjes:

   Bij een parallelprojectie zijn de beelden van parallelle lijnen ook parallel.

4.



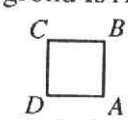
hulptekening



plattegrond

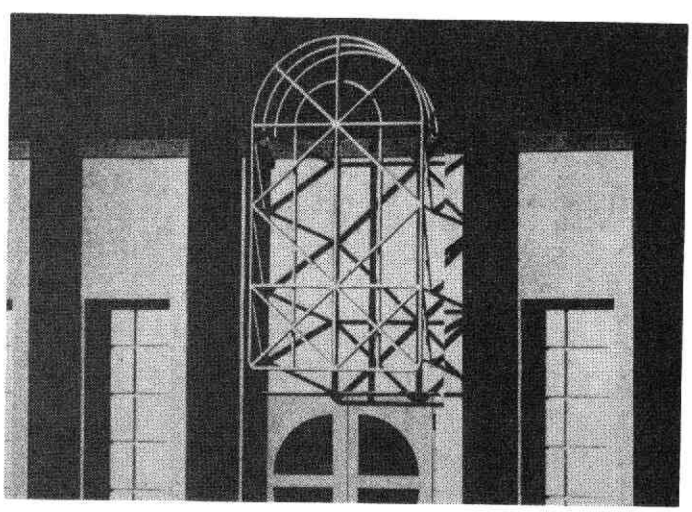
ABCD.EFGH is een draadmodel van een kubus. Het vlak door *ABCD* is het tafereel voor een parallelprojectie waarbij *F'* het beeld van *F* is.

- >a Teken in de plattegrond het beeld van de kubus.
- >b Veronderstel nu dat de kubus massief is en dat de projectierichting de richting van de zonnestralen is.
  Maak een hulptekening van de kubus met de schaduw. Gebruik daarbij de scheve projectiefiguur op het werkblad.
- >c In de hulptekening is het tafereel vervormd weergegeven. *ABCD* zou als een vierkant getekend moeten zijn. Waarom?
- >d In de schaduwtekening in de plattegrond is *ABCD* wel echt.
  Draai deze tekening in deze stand



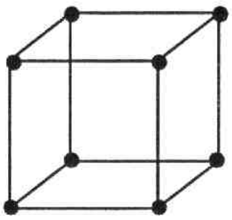
  Je ziet dan een scheve projectie van de kubus in een vertrouwde vorm.
  Hoe groot zijn de wijkhoek en de verkortingsverhouding?

5. De zaak is minder ingewikkeld als het tafereel rechtop staat zoals in dit plaatje van een buizenstelsel met schaduwen.



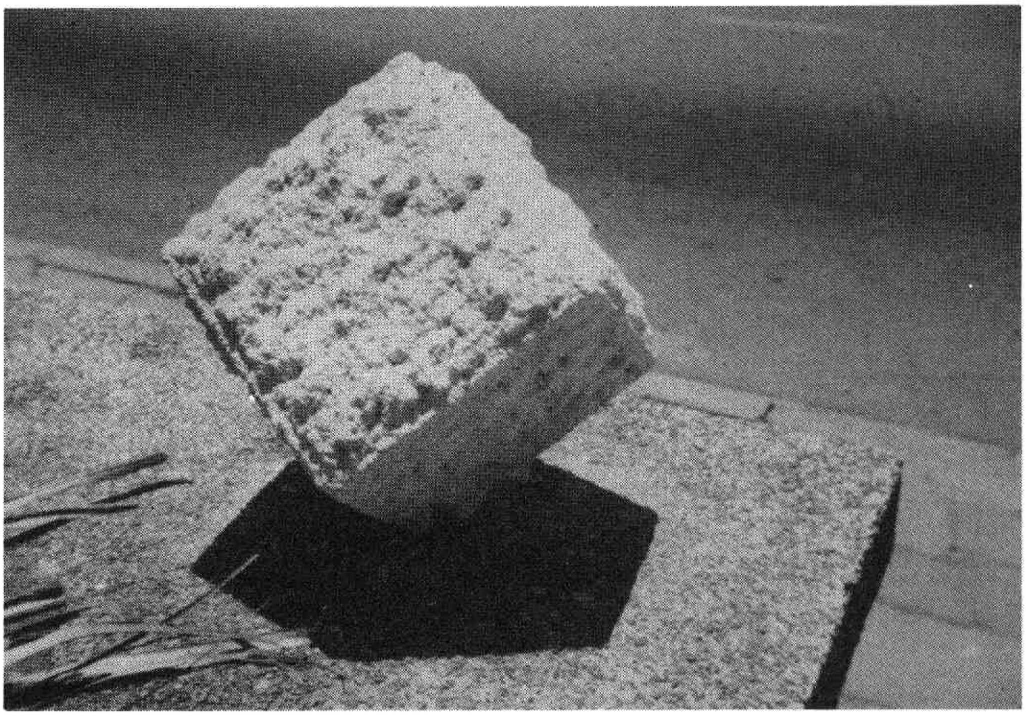
> Probeer enkele punten met hun beelden te vinden.

6. Door een draadmodel van een kubus met een zijvlak parallel met een muur te houden en er zonlicht op te laten vallen, ontstaat er een scheve projectie die het bekende plaatje oplevert.



> Kun je iets zeggen over de richting van de projectie?

7. Bij dit vraagstuk kan de computer voor ondersteuning zorgen.



>a De schaduw van deze kubus is maar gedeeltelijk te zien.
Hoe verloopt de schaduw 'achter' de kubus?

>b Maak een schets van de kubus, gezien uit de richting van de zonnestralen, zodat je hiermee de vorm van de schaduw kunt verklaren.

Door de stand van de zon en de stand van de kubus te veranderen, kun je de schaduw een andere vorm geven.

>c Is het mogelijk een vijfhoekige schaduw te krijgen?

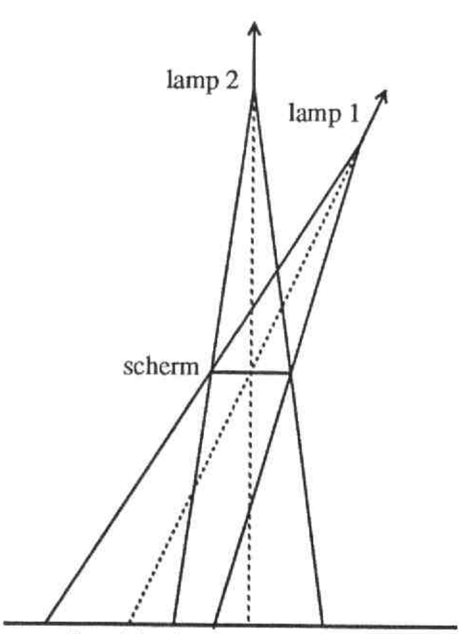
>d Bij welke stand van de zon en van de kubus is de schaduw een vierkant, waarvan de zijde gelijk is aan 1, aangenomen dat de ribbe van de kubus 1 is?

>e Ontwerp een situatie waarbij de schaduw een vierkant is met zijde $\sqrt{2}$.

8. 

>a Maak een of meer tekeningen waarmee je de richting van de knik in de schaduw van het hek kunt verklaren.

>b Op diezelfde dag is de schaduw ook zonder knik geweest. Was dat vroeger of later?

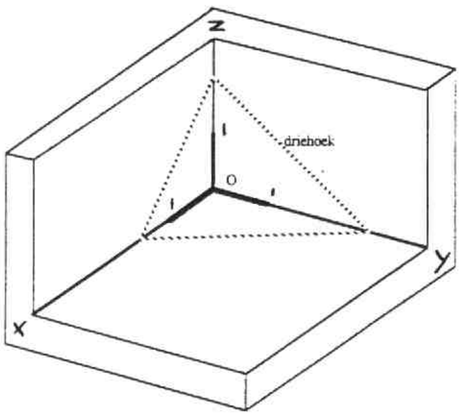


Dit is een 'bovenaanzicht' van een tweetal centrale projecties.
Door de lampen ver in de aangegeven richtingen te verplaatsen worden de lichtstralen nagenoeg parallel. Er ontstaan zo (bij benadering) parallelprojecties.
In het eerste geval staat de projectierichting scheef op het tafereel. Vandaar de naam scheve projectie.
Bij de tweede parallelprojectie staat de projectierichting loodrecht op het tafereel: loodrechte projectie.

Soms gebruikt men voor deze laatste projectie de vakterm *axonometrie*, maar men laat daar ook nog wel eens andere projecties onder vallen.

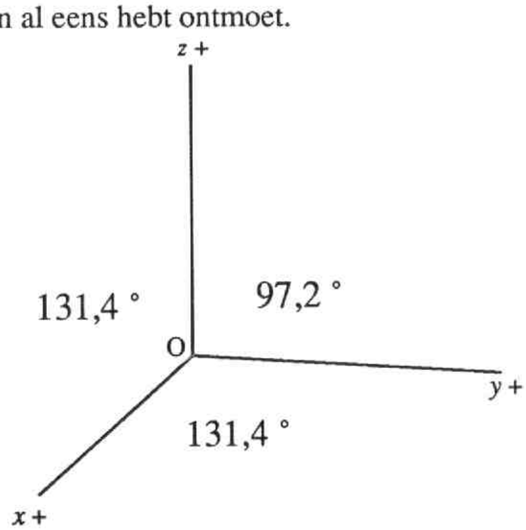
Dat er verschil gemaakt wordt tussen deze twee soorten parallelprojecties is niet toevallig. Als we naar een niet te groot voorwerp kijken, dan zien we dat voorwerp als het ware op een vlak loodrecht op de kijkrichting en niet scheef.
De loodrechte projectie is dus 'echter' dan de scheve projectie.

Het werken met de axonometrie is het gemakkelijkst te begrijpen via een coördinatenstelsel. (Hierbij hoort een praktikum).



'HOEK'
gevormd door een assenstelsel en coördinaatvlakken.

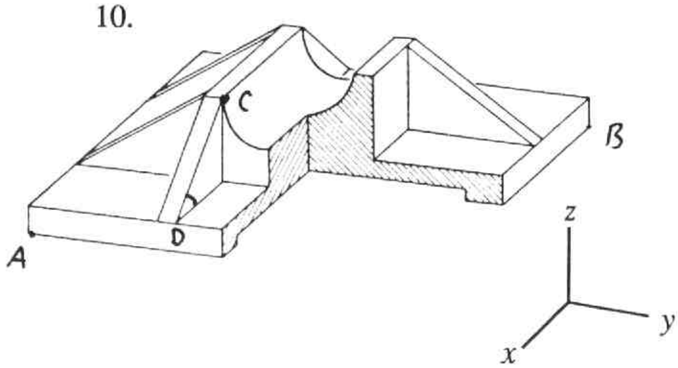
De driehoek is het tafereel. Daar kijken we loodrecht op. Op het tafereel tekenen zich zo drie lijnstukken af, met daarop de verkort waargenomen lengte-eenheden. De hoeken tussen de assen zijn natuurlijk ook veranderd. Bij een andere stand van het tafereel wijzigt zich alles weer.
Er is minder vrijheid dan bij de scheve projectie.
Niet elke stand van de beelden van de assen is mogelijk. En als een stand wel kan, dat staan de verkortingsverhoudingen vast.
Er bestaat dus een vast verband tussen de hoeken tussen de getekende asrichtingen en de verkortingsverhoudingen in die asrichtingen.
Een voorbeeld daarvan is de *ingenieursprojectie* die je bij het computerwerk misschien al eens hebt ontmoet.



De verkortingsverhoudingen in de x-, y- en z-richting zijn:
$\frac{1}{3}\sqrt{2}$, $\frac{2}{3}\sqrt{2}$, $\frac{2}{3}\sqrt{2}$ of bij benadering 0,47, 0,94 en 0,94.

■ 9. > Teken in de ingenieursprojectie een kubus met ribben van 5 cm.

10.



Dit ijzeren onderdeel is in de ingenieursprojectie getekend.
Neem eerst aan dat de afmetingen in de tekening met behulp van de verkortingsverhoudingen rechtstreeks uit die van het voorwerp zijn afgeleid.

>a Bepaal de grootste afmetingen van het voorwerp in de y- en in de z-richting.

>b Bepaal de afstand van A tot B en van A tot C.

>c Hoeveel graden is hoek D?

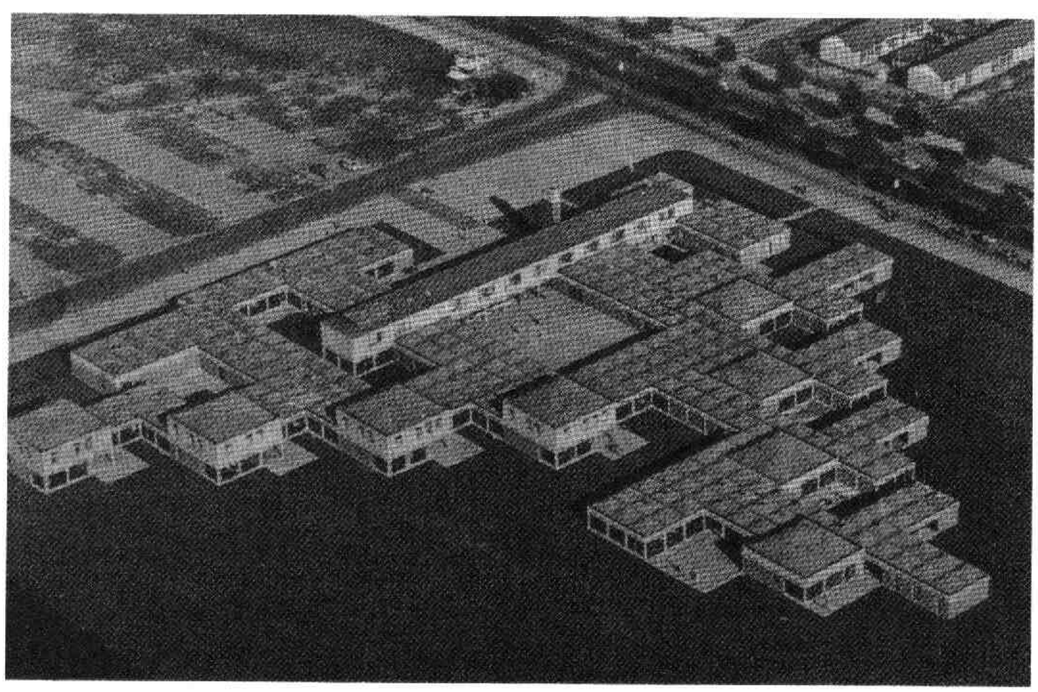
>d Wat worden de grootste afmetingen in de y- en z-richting als die in de x-richting in werkelijkheid 120 cm is?

11. >a Hoe zou je de tafereeldriehoek moeten kiezen om te zorgen dat de verkortingsverhoudingen op alle assen gelijk zijn?

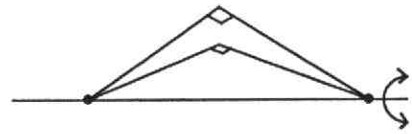
>b Hoe groot moeten in dat geval de hoeken tussen de assen getekend worden?

Deze loodrechte projectie draagt de naam *isometrie.*
Dat wil zoveel zeggen als: in de drie hoofdrichtingen wordt gelijk gemeten.

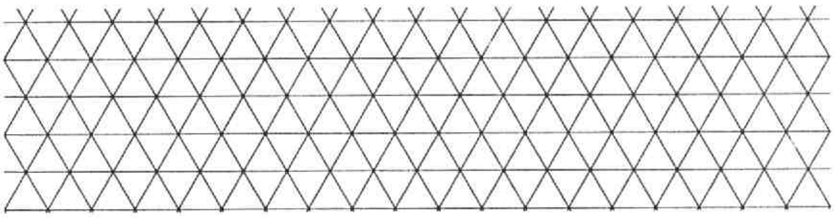
>c Ga na dat de foto hieronder al aardig op een isometrie lijkt.



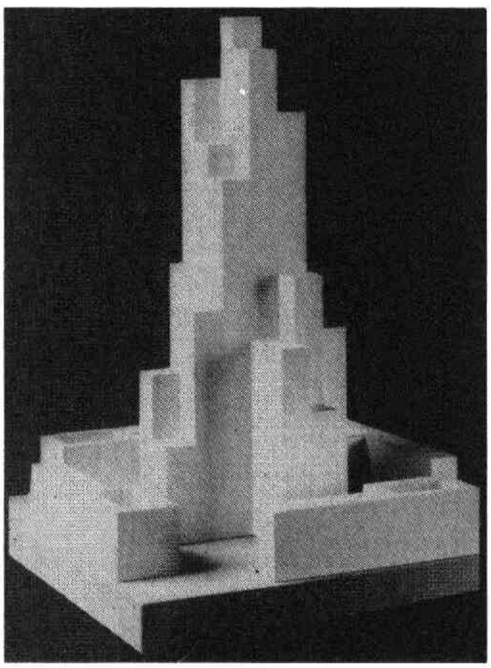
12. De naam isometrie wordt ook wel gebruikt voor scheve projecties die op alle assen dezelfde schaalverdeling hebben.
Vaak is een van de hoeken tussen de assen recht. (Bijv. de tekening in hoofdstuk 3 opgave 12).
Uit die rechte hoek blijkt dat het geen loodrechte projectie kan zijn.
   > Toon dat aan door een draaiende rechte hoek op redelijke afstand te bekijken.



■ 13. Voor de isometrische projectie is speciaal papier in de handel.



>a Teken op isometrisch papier een kubus met alleen de zichtbare lijnen.



Maquette van het nooit uitgevoerde eerste volledig abstracte beeld van Theo van Doesburg

>b Teken op isometrisch papier een kunstwerk in deze stijl.

We hebben in dit boekje kennis gemaakt met een aantal nauwkeurig omschreven tekenmethoden. Lang niet voor elke opgave is zo'n precieze tekening nodig. Heel vaak schatten we bijvoorbeeld verkortingen om een redelijk ogend plaatje te krijgen.