Verkenning in de ruimte

https://hdl.handle.net/1874/10135

VERKENNING IN DE RUIMTE

wiskunde B

VERKENNING

IN DE

RUIMTE

Hawex - Wiskunde B

VERKENNING IN DE RUIMTE

Een productie ten behoeve van het project Hawex.

Ontwerper:	Anton Roodhardt
Met medewerking van:	Christiane Hauchart Martin Kindt Henk van der Kooy Jan de Lange Martin van Reeuwijk
Vormgeving:	Ada Ritzer

Utrecht, maart 1989

Inhoudsopgave

Inleiding ruimtemeetkunde

Het toneel is de driedimensionale ruimte. De spelers zijn onder andere punten, lijnen, vlakken en lichamen. Het spel gaat over vormen, afmetingen en onderlinge relaties.
We bekijken eerst een aantal ruimtelijke vormen en proberen daaruit, door middel van nadenken, allerlei bijzonderheden af te leiden.
Hiermee kunnen we aan het tekenen, berekenen en het verklaren gaan.
Daarna wordt een reeks veel voorkomende lichamen nader onderzocht.

Ruimtemeetkunde steunt op twee pijlers:

— *kennis van de vlakke meetkunde;*
— *ruimtelijke inzicht.*

Bij dit laatste doen zich nog al eens problemen voor. Een van de oorzaken kan zijn een gebrek aan *ruimtelijke ervaring*.
Men zou het vreemd vinden biologie uit een boek te leren, zonder ooit eens echte planten en dieren te bekijken. Zo is het eigenlijk ook vreemd ruimtemeetkunde alleen uit een boek te leren.
In een boek moeten we ons noodgedwongen behelpen met platte afbeeldingen. Maar je moet je er wel ruimtelijke zaken bij voorstellen. Daarom heb je pas werkelijk profijt van een boek als je daarvoor en daarnaast ervaring opdoet met echte ruimtelijke voorwerpen. Het is dan ook verstandig voorwerpen om je heen als modellen te gebruiken. En nog beter is het zelf modellen te *ontwerpen* en te maken.
Met papier, stokjes, klei, koperdraad, piepschuim, enz. kun je vaak eenvoudig iets bruikbaars fabriceren.
Hoe groter de problemen met ruimtelijk inzicht, hoe belangrijker deze hulpmiddelen.

Bij opgaven gemerkt met ■ hoort een werkblad.

1 Kijken naar ruimtelijke vormen

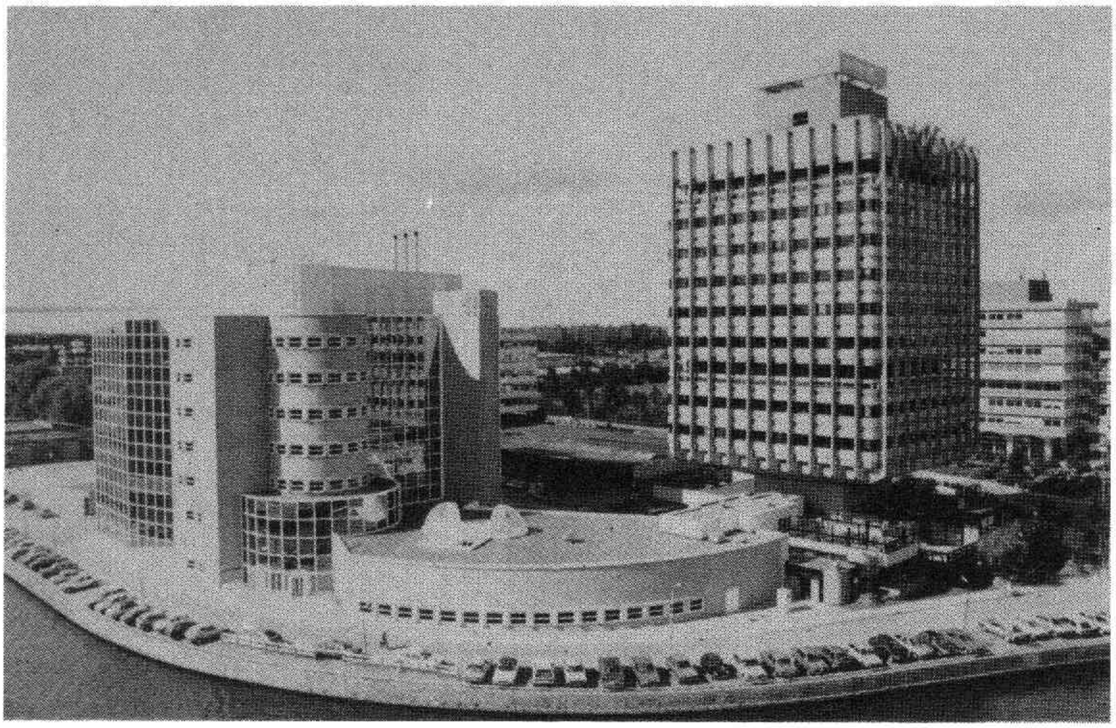
Het kantoor van de postbank in Leeuwarden (foto 1)

1. >a Het gebouw van de postbank in Leeuwarden bestaat uit delen van bekende meetkundige lichamen.
Welke lichamen herken je?
Maak enkele schetsen van die lichamen.

>b Hoe hoog is het gebouw ongeveer?

Ter herinnering:
In de wiskunde is een antwoord als regel een antwoord met een verklaring. De vraag naar een verklaring staat er dan vaak ook niet bij, maar moet er wel bijgelezen worden. Als er uitdrukkelijk om een verklaring gevraagd wordt, dan is die verklaring erg belangrijk.

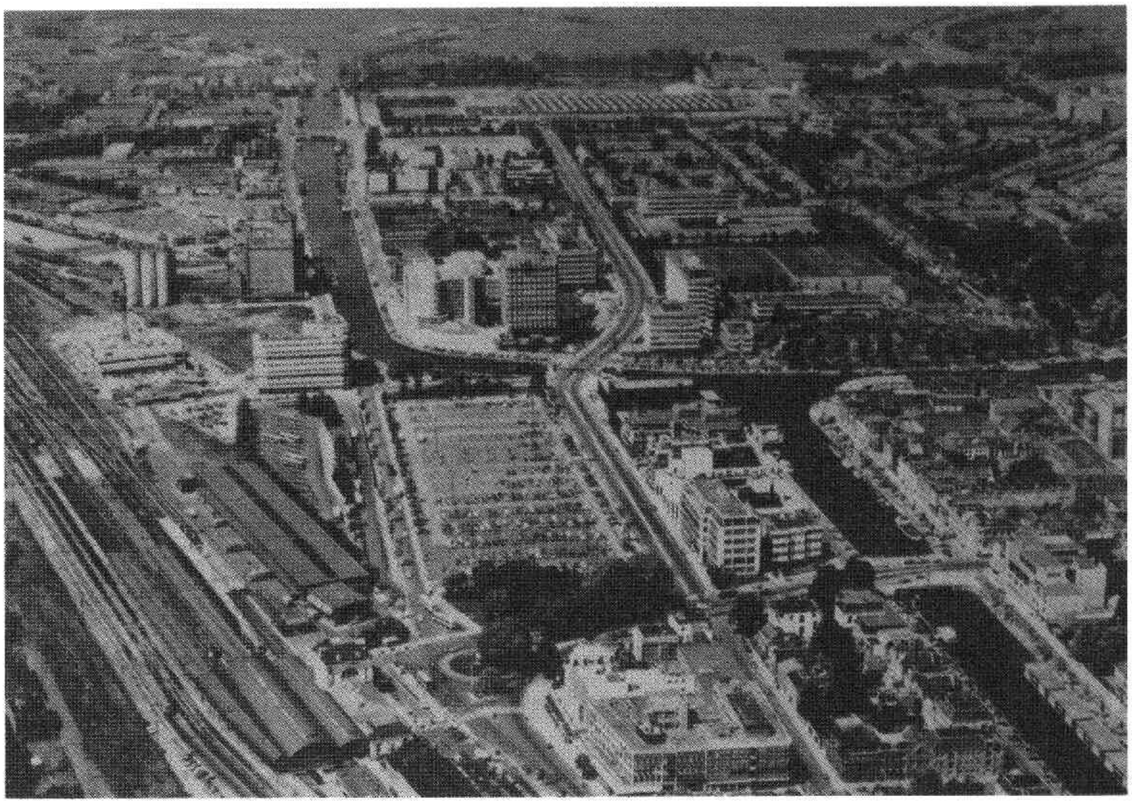
De postbank in Leeuwarden vanuit een ander punt gezien.



(foto 2)

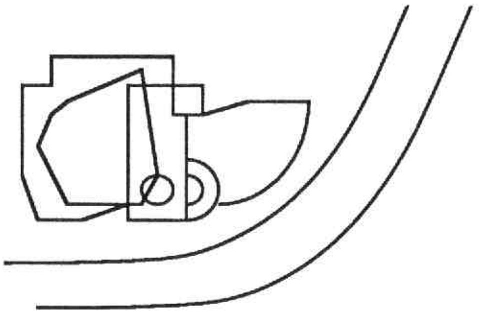
>c De hoogte van het standpunt van de fotograaf is bij de twee foto's niet gelijk.
Hoe kun je de hoogten van die standpunten aangeven ten opzichte van het gebouw van de postbank?

Een luchtfoto vanuit het oosten genomen.



(foto 3)

>d Bepaal met behulp van deze luchtfoto vanuit welke richting de fotograaf de tweede opname heeft gemaakt.



situatietekening

■ >e Op foto 2 is rechts een hoog gebouw te zien. Probeer eerst vast te stellen of het bovenaanzicht van dit gebouw langgerekt rechthoekig of vierkant is.
Plaats het daarna in de situatietekening (zie werkblad).

2.

A B

Op de voorgrond is een pilaar (*A*) te zien, waarop vier balken van deze dakconstructie steunen. Deze balken zijn aan de andere uiteinden verbonden door horizontale balken.
Hierop rust de rest van de constructie, maar die laten we bij de vragen >a t/m >d buiten beschouwing.
In de lengterichting van het gebouw staan nog meer van die pilaren met een bovenbouw.

>a Als je de balken als lijnen beschouwt, welke lichamen kun je dan in de constructie 'zien'?

>b Schets het lichaam dat op de eerste pilaar steunt.

>c

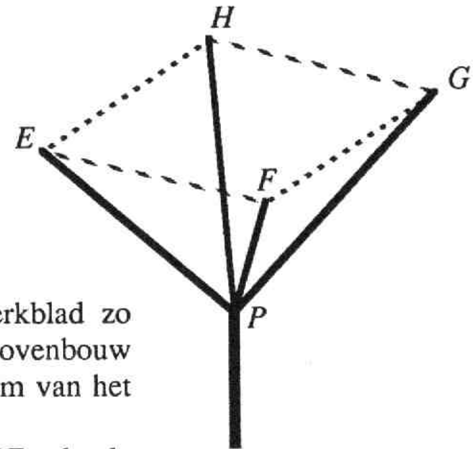
A

Dit is het *vooraanzicht* van pilaar *A* met bovenbouw. (Een 'aanzicht' van een object, is wat je ziet als je op zeer grote afstand van dat object staat.)
Hoeveel balken van die bovenbouw zijn in deze stand *niet* te zien?

>d Teken een zijaanzicht van de pilaren *A* en *B* met de bovenbouw.

>e Teken nu het zijaanzicht van de pilaren *A* en *B* met de volledige constructie die daar op steunt.

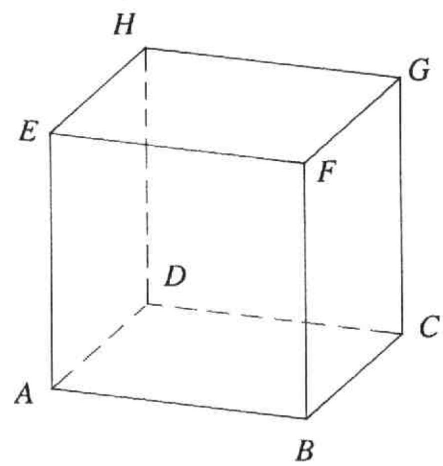
3. Nogmaals de balkenconstructie van opgave 2.
Dit is een andere kijk op een pilaar met een deel van de bovenbouw.



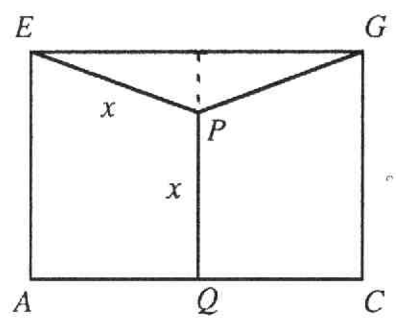
■ >a Teken in de kubus op het werkblad zo nauwkeurig mogelijk de bovenbouw $P.EFGH$. Kies P in het centrum van het grondvlak van de kubus.

>b Bereken ook de lengte van PE als de ribbe van de kubus 4 meter is.

■ >c Dezelfde opdrachten als in >a en >b, met dit verschil dat P nu in het centrum van de kubus ligt.



>d Het diagonaalvlak $ACGE$ is uit de kubus gehaald en hier getekend.
Hoe verhouden de zijden EA en AC zich?



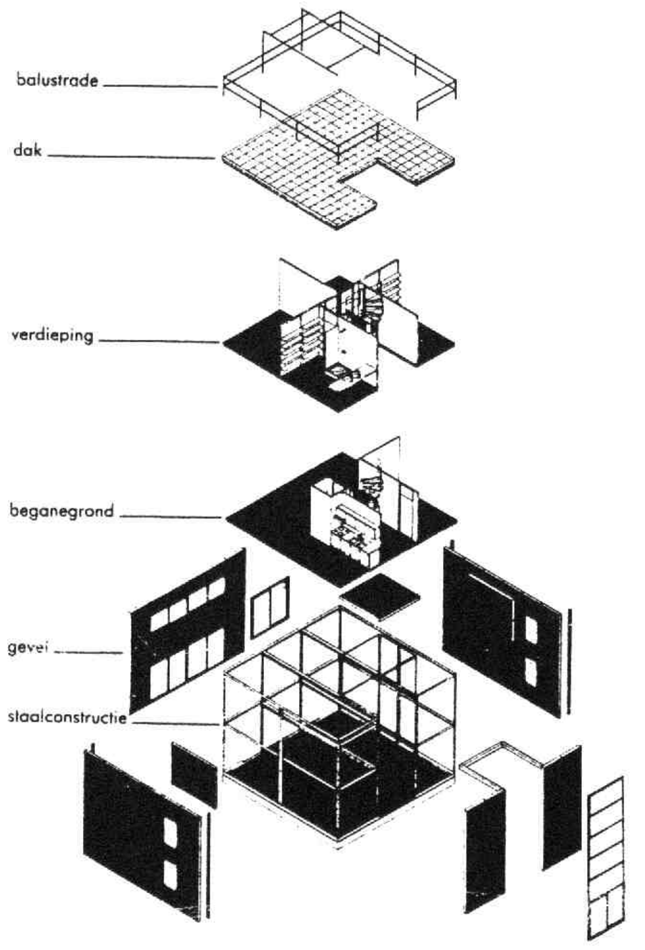
>e Het punt P is nu zo gekozen dat de lengte op de pilaar PQ gelijk is aan de lengte van de schuine balk PE.
Bereken PQ.

Aanwijzing: Stel $PQ = x$. Maak een vergelijking in x en los die op.

4.

In de Haarlemse Zuiderpolder bestaan plannen voor een wijk met experimentele woningen. Het lag in de bedoeling een wijk met woningwetwoningen te realiseren, en de behoefte ontstond om eens na te gaan of er binnen de sociale woningbouw niet wat meer mogelijkheden aanwezig zijn om tot een grotere verscheidenheid aan woningtypen te komen.	Voor de Zuiderpolder werd daarom een negental architecten uitgenodigd eens een ontwerp te maken voor een woningwetwoning, die afwijkt van het geijkte ontwerp. De ontwerpen zijn inmiddels klaar en enige tijd geleden waren maquettes en een model op ware grootte te bewonderen op de Haarlemse markt.

Eén ervan, het ontwerp van Cepezed, is een vrijstaande kubusvormige woning, die geheel in staal is uitgevoerd; skelet, vloeren en wanden hebben allemaal staal als basismateriaal.
Deze tekening van het ontwerp is ontstaan door het uiteenschuiven van onderdelen.

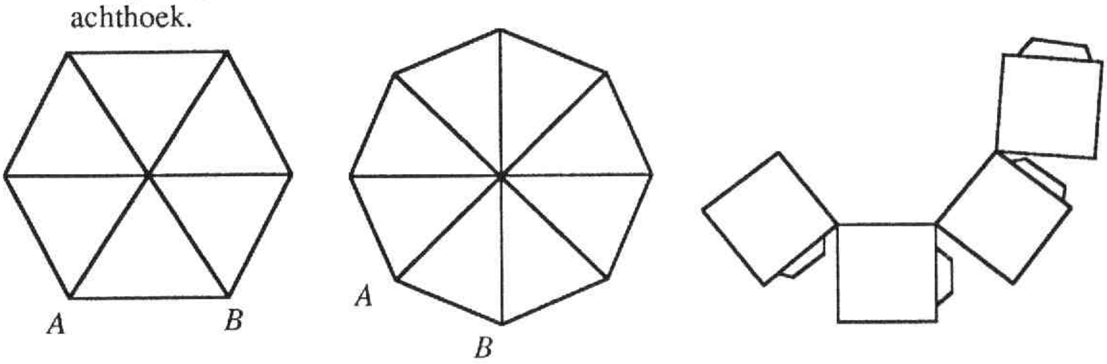


>a In welke richtingen zijn de verschuivingen uitgevoerd?
>b Maak een tekening van de buitenkant van de woning, waarbij je de stand van de gegeven tekening aanhoudt.

5. *De N.H. kerk te Smilde*

>a Staan de muren loodrecht op de grond?

Het grondplan van dergelijke kerken is meestal een regelmatige zeshoek of achthoek.



Dit vraagstuk gaat over de zes of acht zijmuren. Modelletjes kunnen daarbij van nut zijn. Je kunt ze ook zelf van papier maken.
Voorlopig nemen we geen beslissing over zes- of achthoekig.

>b Als je je standpunt overal rond de kerk kunt kiezen, dan zijn er verschillende mogelijkheden voor het aantal zichtbare zijmuren.
Welke aantallen zijn er mogelijk bij de zeshoek?
En welke bij de achthoek?

>c Teken bij elk van de grondplannen hiervoor het gebied van waaruit alleen muur *AB* zichtbaar is.

>d Als je niet buiten dat gebied mag komen, kun je dan beslissen over zeshoek of achthoek?

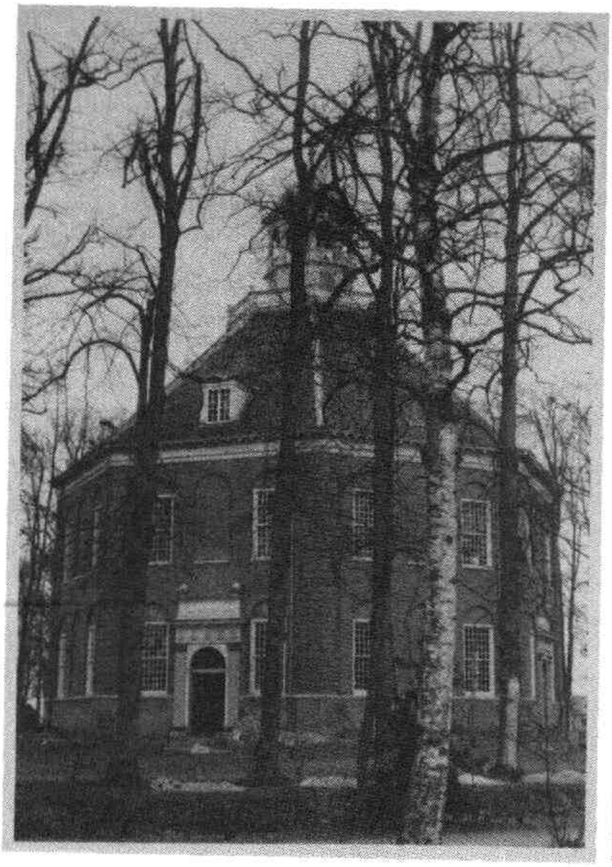


foto 2

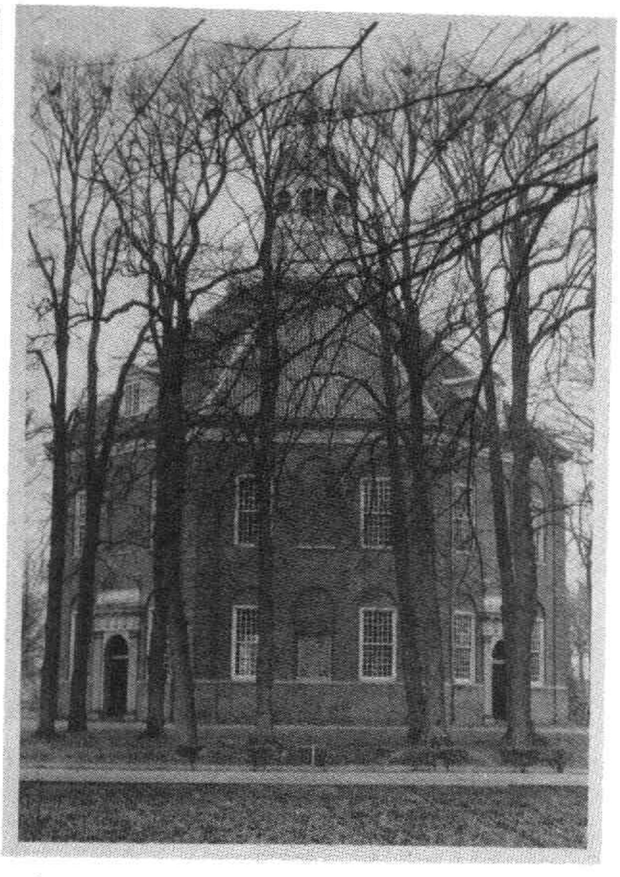


foto 3

De fotograaf is voor het nemen van foto 2 iets opzij gegaan en de verticale vertekening is bijna weggehaald, zodat foto 2 bijna een zijaanzicht van het kerkje is.

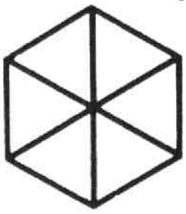
>e Kun je nu vaststellen wat voor veelhoek het grondplan is?

Op foto 3 zijn maar drie muren zichtbaar. Ook deze foto is niet helemaal een zijaanzicht; door de perspectivistische verkorting zijn de buitenste muren iets te klein weergegeven. Maar door tekenen, meten en rekenen is alleen met deze foto te beslissen of de kerk zeshoekig of achthoekig is.

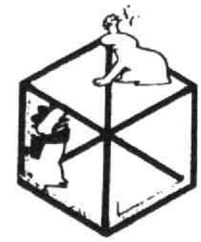
>f Bedenk daarvoor een methode

Meetkunde is in de ruimte veel moeilijker dan in het platte vlak, doordat de 'diepte' erbij komt. Bovendien kunnen wij diepte niet rechtstreeks waarnemen. Onze ogen krijgen een vlak beeld van de wereld. Richtingen en afstanden zijn vertekend en vanuit één standpunt kunnen we voorwerpen niet meer volledig zien. De problemen worden nog groter als het uitgangspunt een foto of tekening is.
Om toch te begrijpen wat we zien, gebruiken we, vaak onbewust, allerlei aanwijzingen die ons iets zeggen over de afstanden of over de meest waarschijnlijke vorm van een voorwerp.
We kijken dus met onze hersenen: we denken en we gebruiken onze ervaring.

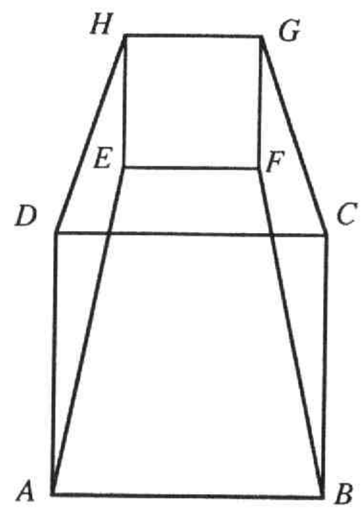
Nog een voorbeeldje:



Door kleine toevoegingen wordt de platte zeshoek ruimtelijk.



6. We zien $EFGH$ hoger dan $ABCD$. Dat kan betekenen dat $EFGH$ hoger ligt, maar ook dat $EFGH$ verder af ligt. Zonder verdere aanwijzingen kan geen beslissing worden genomen. Het gevolg is dat we afwisselend twee verschillende lichamen kunnen zien.



>a Beschrijf de lichamen die je in het plaatje kunt zien.
>b Teken die lichamen. Veronderstel daarbij dat ze niet-doorzichtig zijn en gebruik voor de onzichtbare lijnen stippellijnen.

TERUGBLIK

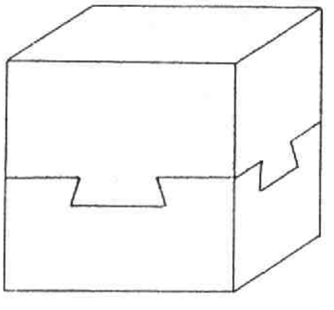
Het hoofddoel van dit hoofdstuk is *het leren bewust te kijken* naar ruimtelijke objecten, zodat er 'verstandige' dingen gezegd kunnen worden over de daarbij betrokken lijnen, vlakken en lichamen. Bij nieuwe plaatjes moet je je dus kunnen redden.
Daarnaast heb je kunnen kennismaken met enkele meetkundige onderwerpen die later in de cursus uitvoeriger aan de orde komen.
Behalve de algemene (en daardoor ietwat vage) zaken, is er ook een lijst te geven van onderwerpen die je alvast kunt onthouden.
We noemen:

— herkennen van lichamen;
— het vaststellen van het uiterlijk van lichamen en andere constructies, vanuit verschillende standpunten;
— het maken van aanzichten en plattegronden;
— enkele manieren om een kubus te tekenen;
— tekenen in een lichaam, waarbij gebruik gemaakt wordt van bijzondere punten;
— rekening houden met de zichtbaarheid/onzichtbaarheid van lijnen;
— een vlak uit een lichaam lichten;
— het op schaal tekenen;
— berekeningen met de stelling van Pythagoras maken;
— verschuivingen van ruimtelijke objecten.

Een *puzzel* uit het tijdschrift 'De ingenieur'.

Zwaluwstaarten

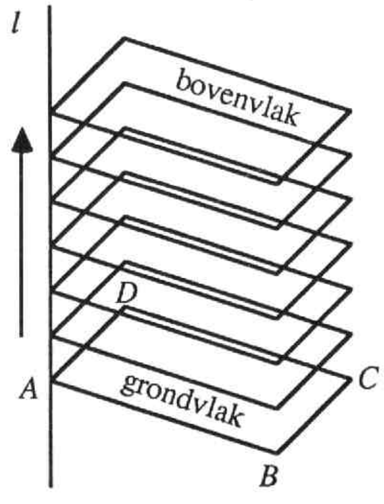
Een houten kubus is opgebouwd uit twee delen. Het onderste deel bestaat uit eikenhout, het bovenste uit een andere houtsoort. Als men de kubus draait ziet men dat alle vier de opstaande vlakken een zwaluwstaartverbinding bevatten. Hoe is deze kubus uit *twee* stukken hout geconstrueerd, zodanig dat deze dus rondom gezwaluwstaart is?

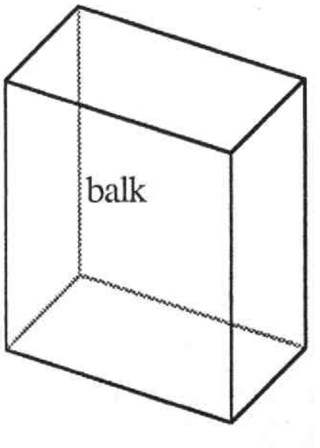


2 Prisma's

De hoofdvorm van een aantal gebouwen op de foto is een *balk*.

Wat is nu precies een balk?
Verschillende boeken geven verschillende definities. Meestal vermeldt zo'n definitie iets over zijvlakken en ribben en hun onderlinge ligging.
Een andere manier is om te beschrijven hoe zo'n lichaam uit een eenvoudige figuur door beweging kan ontstaan.
Met behulp van het computer-programma RUIMFIG kan deze beweging aanschouwelijk worden gemaakt.



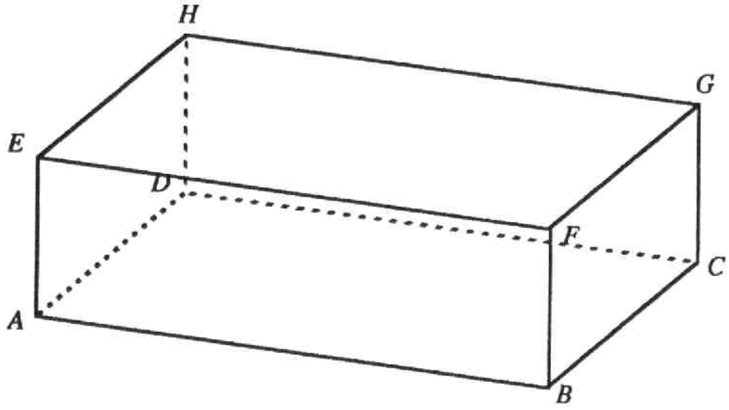


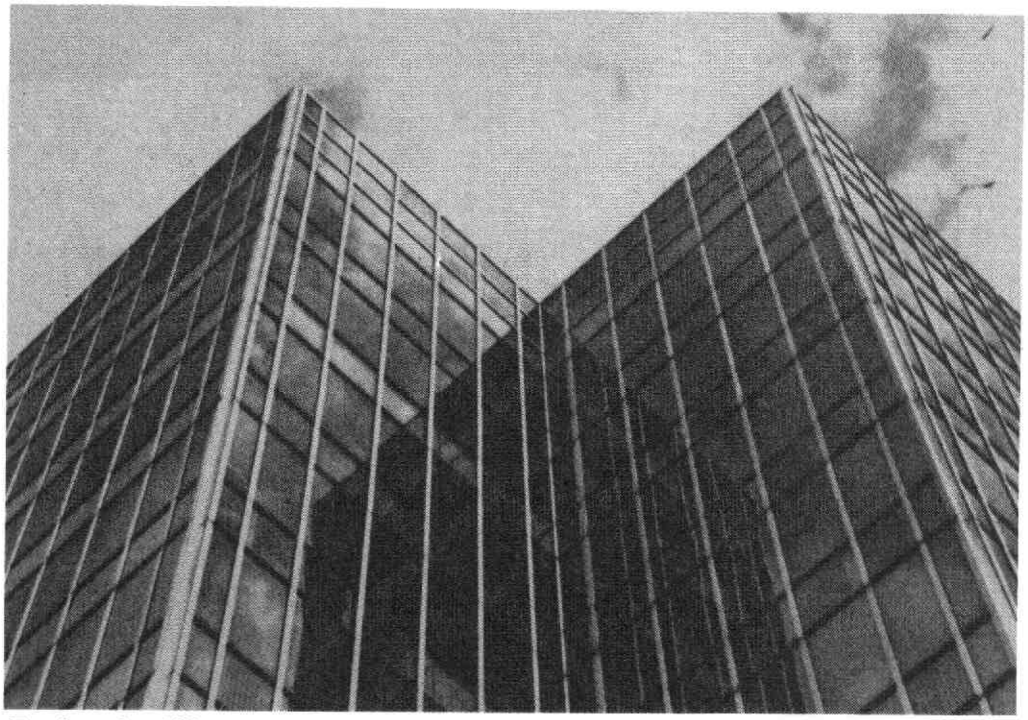
Recept voor het maken van een balk:

1. *Neem een rechthoek ABCD.*
2. *Neem een lijn l die loodrecht op het vlak van de rechthoek staat. Bijvoorbeeld door een hoekpunt van die rechthoek.*
3. *Schuif de rechthoek langs de lijn l, zonder de stand in de ruimte te veranderen.*

Hoe meer tussenstappen, hoe duidelijker de balk.
De lijn *l* noemen we de *schuiflijn.*

1. >a Hoe ontstaan de opstaande ribben *AE*, *BF*, *CG* en *DH* van de balk?
   >b En hoe de zijvlakken?





Een beperkte kijk op twee balken.

2. Als gevolg van de schuifconstructie kun je een hele serie bijzonderheden van de balk vaststellen. Doe dat voor de volgende onderwerpen.

   >a De ligging van de opstaande ribben ten opzichte van elkaar.
   >b De lengten van de opstaande ribben.
   >c De ligging, vorm en grootte van het grondvlak en bovenvlak.
   >d De vorm van de zijvlakken en de ligging ten opzichte van elkaar.

3. 

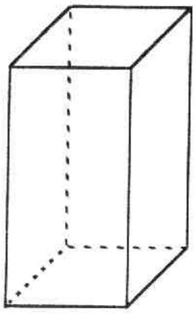
   >a Deze stacaravan in aanbouw heeft de vorm van een balk *ABCD.EFGH*.
   Maak een tekening van de balk in deze stand, maar wel zo dat lijnen die in werkelijkheid evenwijdig zijn, dat in de tekening ook zijn.
   >b Je kunt de balk laten ontstaan uit de verschuiving van *ABCD* over bijvoorbeeld *AE*.
   Is het ontstaan ook mogelijk uit *ABFE* en *ADHE*?
   >c Deze afmetingen zijn bekend: AB = 3,5 m; FH = 8 m; CG = 2,5 m.
   Bereken in cm nauwkeurig de lengten van AD en DF.

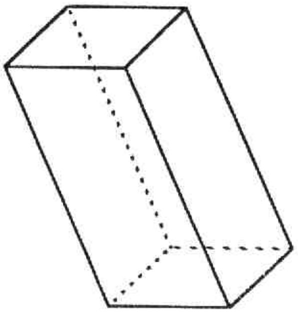
Door veranderingen in het recept aan te brengen, kunnen andere lichamen ontstaan. Andere opdrachten kunnen bijvoorbeeld strenger of soepeler zijn.

4. > Hoe moet het recept gewijzigd worden om als resultaat een kubus te krijgen? Is dat nog steeds een balk?

5. > We laten in het oorspronkelijke recept de eis van de loodrechte stand van de lijn vallen. Schets enkele lichamen, met een paar tussenstanden van de schuivende rechthoek, die zo kunnen ontstaan. Zijn dat balken?

6. > We vergelijken het nieuwe lichaam uit opgave 5 met de balk. De meeste bijzonderheden zoals die in opgave 2 zijn gevonden, blijven geldig. Maar wat moet er veranderd worden?

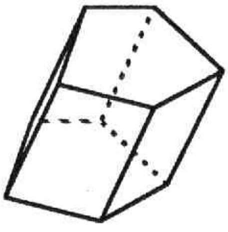


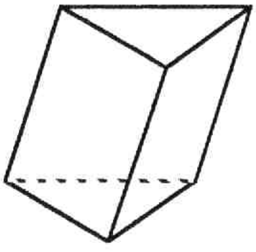


Een nog verdergaande versoepeling is het toestaan van elke veelhoek als grondvlak.

Massieve modellen:

Draadmodellen:





De laatste zeven lichamen hierboven zijn allemaal voorbeelden van *prisma's*.

De algemene regel waar ze onder vallen is:

Een prisma onstaat door een veelhoek (grondvlak) evenwijdig aan de beginstand langs een lijn te schuiven.

Zo'n recept heet ook een *definitie*.

Opmerking: De schuiflijn moet natuurlijk niet in het grondvlak liggen.

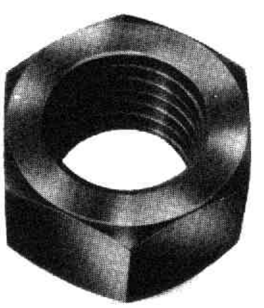
7. Weer terug naar de bijzonderheden van opgave 2.

   > Welke regels gelden voor *elk* prisma?

De eenvoudigste prisma's kun je krijgen door voor de veelhoek te kiezen uit driehoeken, vierhoeken, vijfhoeken, enz.
We spreken dan van driezijdige prisma's, vierzijdige prisma's, enz.

8. > Teken een draadmodel van een 'staand' en van een 'liggend' driezijdig prisma waarin de schuiflijn loodrecht op het grondvlak staat.
   Idem met de schuiflijn scheef op het grondvlak (scheef driezijdige prisma).

Fraaie resultaten ontstaan als voor het grondvlak een *regelmatige veelhoek* wordt gekozen en de schuiflijn daar *loodrecht* op staat.



De hoofdvorm van deze moer is zo'n voorbeeld: een *regelmatig* zeszijdig prisma.

9. In Nederland wordt voor bewoning veel gebruik gemaakt van vijfzijdige prisma's die niet regelmatig zijn.

   >a Teken een voorbeeld.
   >b Om de éénvormigheid te verbreken, bedenken architecten allerlei maniertjes, om dat vijfzijdige karakter minder te laten opvallen. Noem of teken eens enkele.

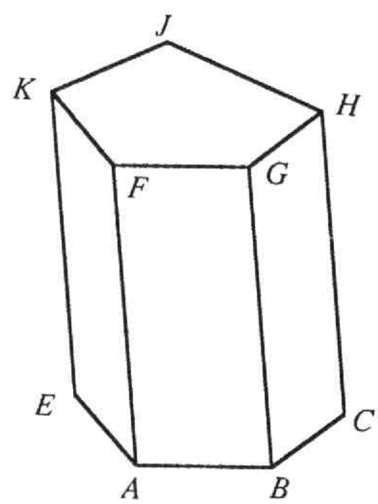
10. > In een oud meetkundeboek staat deze definitie van een prisma:
    'Een prisma is een lichaam begrensd door enige vlakken, die elkaar volgens evenwijdige lijnen snijden, en twee evenwijdige vlakken.'
    Klopt dat met onze definitie?

11. > Kunnen alle ribben van een vierzijdig prisma evenlang zijn en toch geen kubus vormen?

12. > Hoe kan je van een vierzijdig prisma twee driezijdige prisma's maken?
Licht je antwoord toe met een tekening.

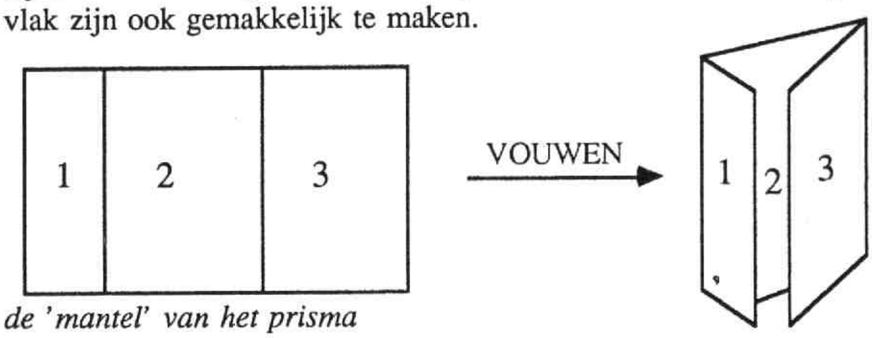
13. > Twee driezijdige prisma's moeten aan elkaar gelijmd worden, om een vierzijdig prisma te krijgen.
Dat kan niet altijd. De twee prisma's zullen op zijn minst een paar congruente zijvlakken moeten hebben. Is het genoeg als aan die voorwaarde is voldaan?

14. *ABCDE.FGHJK* is een massief vijfzijdig prisma. Door tweemaal zagen, te beginnen in *FJ* en *GJ* is het te verdelen in drie driezijdige prisma's.



■ > Teken die drie prisma's los van elkaar volgens het begin op het werkblad.
De manier van tekenen is hier niet vrij – lijnen die in werkelijkheid evenwijdig zijn, worden dat in de tekening ook.
Teken alleen de *zichtbare* lijnen.

15. Voor een stand op een tentoonstelling moet je enkele grote ruimtelijke objecten bouwen. Onder andere een paar prisma's. Het materiaal is spaanplaat, maar om de maten zo te krijgen dat alles past, kun je beter eerst in het klein met papier experimenteren.
Onder- en bovenvlak zijn driehoeken. Dat geeft weinig problemen. De zijkanten van een prisma met de opstaande ribben loodrecht op het grondvlak zijn ook gemakkelijk te maken.



de 'mantel' van het prisma

De nog platliggende mantel is een deel van de *'uitslag'* van het prisma. De driehoeken van grond- en bovenvlak kunnen er aan vast getekend worden om die uitslag compleet te maken.

>a Teken zo'n uitslag met de maten.
deel 1: 3 x 7; deel 2: 4 x 7; deel 3: 5 x 7, terwijl de driehoeken verbonden zijn met deel 2.

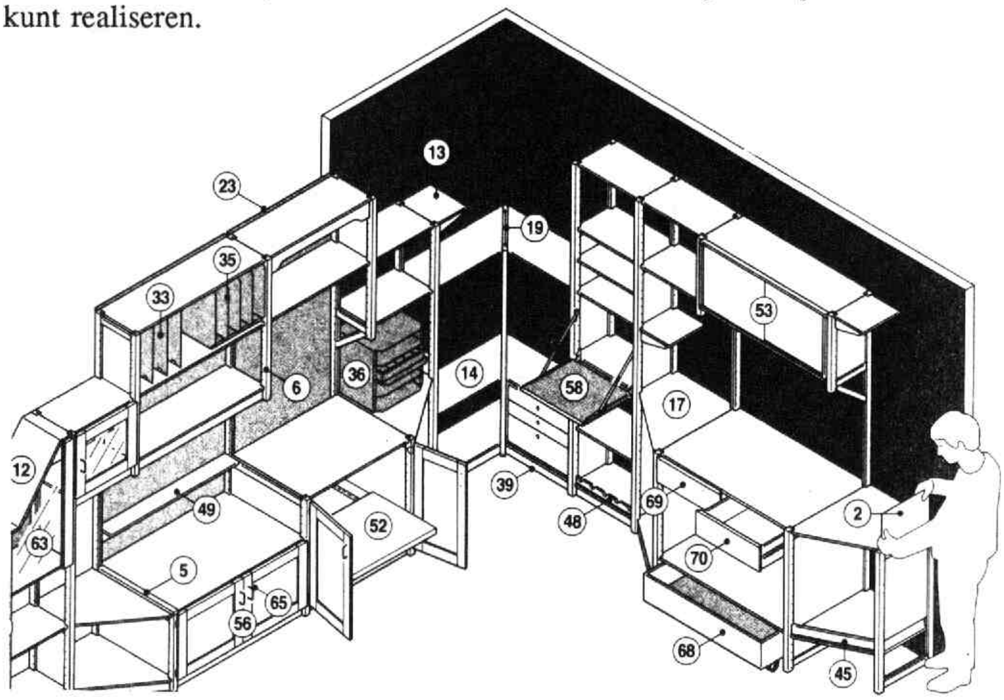
>b Teken de uitslag ook door met een driehoek te beginnen en aan elke zijde een zijvlak te verbinden.

16. Vervolg van opgave 15. Er zijn ook scheve prisma's nodig. We stellen geen eisen aan de maten.

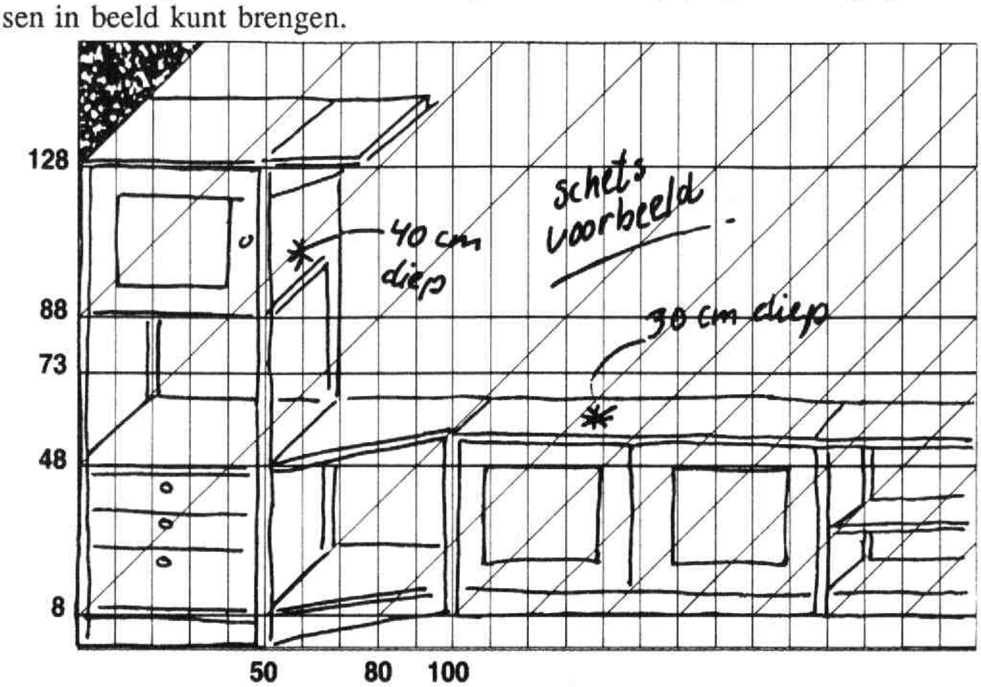
De opdracht luidt: Knip de mantel van zo'n scheef prisma uit. Laat de vlakken aan elkaar zitten en maak vouwlijnen langs de grenzen. Geef ook het algemene recept voor dit karweitje.

Aanwijzing:
- Probeer eerst zo'n gevouwen papier sluitend te maken.
- Maak van het resultaat een tekening.
- Probeer hierin bijzonderheden te vinden, zodat je een tekening voor een nieuw prisma kunt opzetten.
- Beredeneer dat je methode goed is.

17. *Ontwerp je eigen woonwand*
Lundia levert een systeem van onderdelen waarmee je zelf je woonideeën kunt realiseren.



In de catalogus is een tekenblad afgedrukt waarop je gemakkelijk je wensen in beeld kunt brengen.



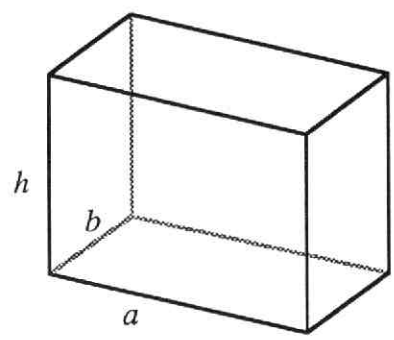
■ > Maak op het werkblad een eigen ontwerp voor een kastenwand. Je moet zelf nog een redelijke schaal voor de diepte kiezen. Gebruik alleen de toegestane maten:
diepte: 30, 40, 60
breedte: 50, 80, 100
hoogte: 48, 73, 128, 168, 208, 248

3 Inhouden van prisma's

In dit hoofdstuk gaat het om twee dingen:

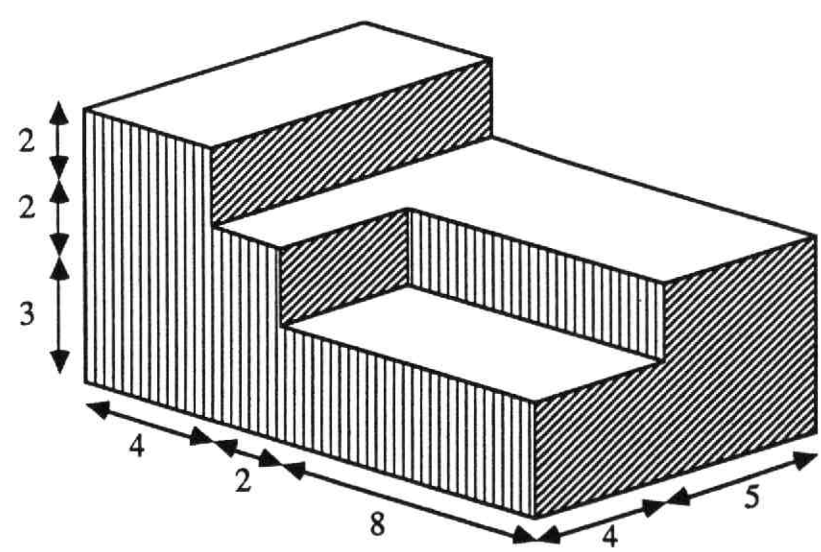
— Hoe kun je, uitgaande van de inhoudsformule van de balk, een inhoudsformule bedenken die voor *elk* prisma geldt?
— Het toepassen van de gevonden formules.

We onderzoeken eerst prisma's waarbij het grondvlak geen rechthoek is, maar de opstaanden ribben nog wel loodrecht op het grondvlak staan. Daarna laten we ook die laatste voorwaarde vallen.

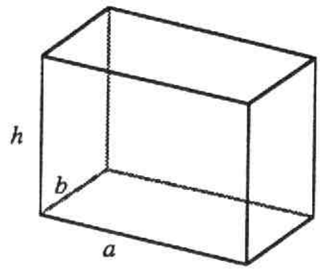


De inhoud van een balk is gelijk aan
lengte × *breedte* × *hoogte*,
hier $a \times b \times h$

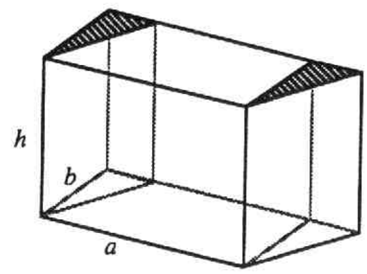
1. > Bereken de inhoud van dit uit balken bestaande lichaam.



Door van de balk links een driezijdig prisma af te halen en rechts een kopie daarvan bij te plaatsen, ontstaat een prisma dat geen balk meer is. Immers, het grondvlak is geen rechthoek, maar een gewoon parallellogram.



(grondvlak rechthoek)



(grondvlak parallellogram)

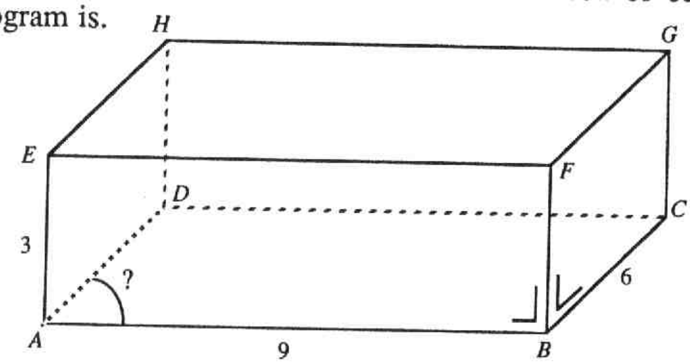
De inhoud is echter wel gelijk gebleven, dus die is weer $a \times b \times h$. In de nieuwe situatie heeft $a \times b$ een aanwijsbare betekenis: het is de oppervlakte van het parallellogram dat als grondvlak dient (controleren!)

Voor beide lichamen kunnen we dus dezelfde inhoudsformule gebruiken:

$$Inhoud = Oppervlakte\ grondvlak \times hoogte \quad \text{ofwel} \quad I = G \times h$$

Deze formule is bruikbaar voor elk prisma waarvan het grondvlak een parallellogram is en de opstaande ribben loodrecht op het grondvlak staan, want door in het voorbeeld de weg terug te volgen, is er steeds een overstap op een balk mogelijk.

2. Aan deze tekening van een prisma met de opstaande ribben loodrecht op het grondvlak is niet te zien of $ABCD$ een rechthoek of een willekeurig parallellogram is.



Dit is aanleiding tot een veelgemaakte fout: $G = 9 \times 6$.
Er is nu extra gegeven: $\angle BAD = 60°$

>a Teken het grondvlak $ABCD$ op ware grootte met daarin een hoogtelijn van dit parallellogram.

>b Bereken de inhoud van het prisma.

>c $BCGF$ is wel een rechthoek. Was de inhoudsberekening dan misschien mogelijk geweest met oppervlakte $BCGF \times AB$?

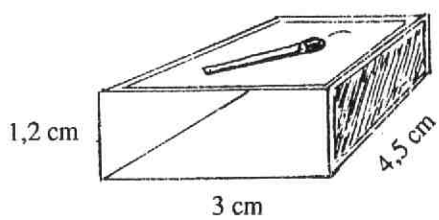
3. > Teken in een $Oxyz$-stelsel het prisma $ABCD.EFGH$ met $A(5,0,0)$; $B(5,6,0)$; $C(0,8,0)$; $D(0,2,0)$; $E(5,0,6)$ en bereken de inhoud van dit prisma.

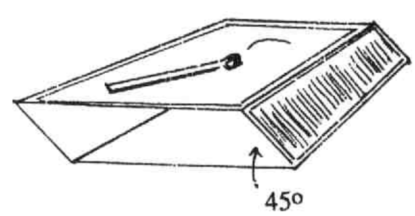
4. De punten $A(4,0,0)$; $B(4,6,0)$; $C(0,6,1)$; $D(0,0,1)$ $E(4,0,4)$; $F(4,6,4)$; $G(0,6,5)$; $H(0,0,5)$ vormen de hoekpunten van een 'blokachtig' lichaam.

   >a Teken dit lichaam in een assenstelsel.
   >b Toon aan dat het een prisma is.
   >c Bereken de inhoud.

5. De huls van een luciferdoosje wordt vervormd tot er aan de voorkant een hoek van 45° ontstaat.

   > Hoeveel cm^3 is nu de omsloten ruimte?



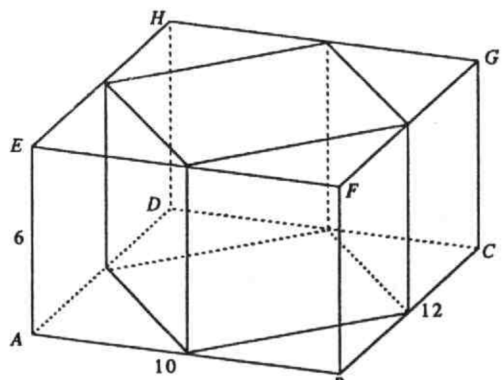


6. Een kartonnen doos heeft een ruitvormige bodem. De zijden van die ruit zijn 6 dm lang en één van de hoeken is 60°.
De zijwanden staan loodrecht op de bodem en hebben in werkelijkheid een hoogte van 2 dm.

   >a Maak op schaal een bouwplaatje van die doos (zonder deksel).
   >b Bereken de inhoud van de doos.
   >c Hoe kan het bouwplaatje worden aangevuld met een draaibaar deksel?

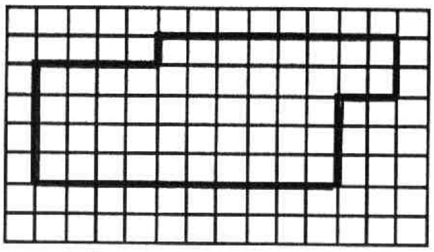
7. $ABCD.EFGH$ is een balk met $AE = 6$, $AB = 10$, $BC = 12$.
Van de balk worden vier driezijdige prisma's afgezaagd, zodat de hoekpunten van het overblijvende lichaam de middens van 8 balkribben vormen.

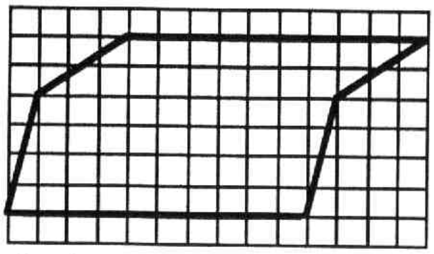
   >a Bereken de inhoud van het overblijvende lichaam. Het antwoord is snel te vinden door nog even door te zagen.



   >b Voor deze driezijdige prisma's zou ook wel eens kunnen gelden dat de inhoud gelijk is aan $G \times h$. Klopt dat met de berekening uit >a?

8. Dit zijn grondvlakken van prisma's met opstaande ribben hier loodrecht op.

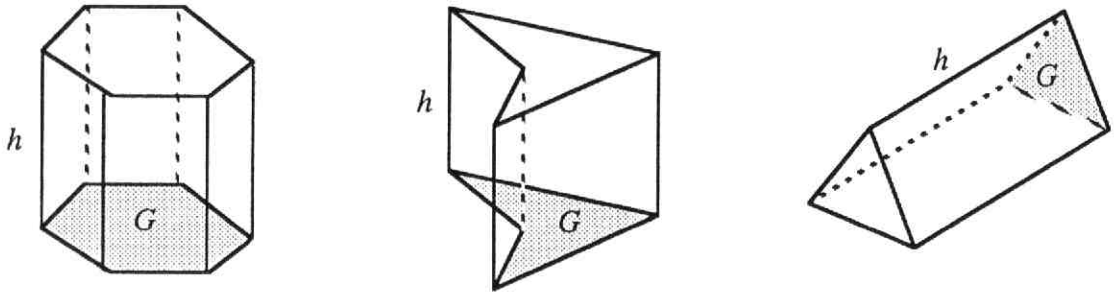




> Bij gegeven hoogte is de inhoudsberekening gemakkelijk uit te voeren. Waarom?

We vermoeden:

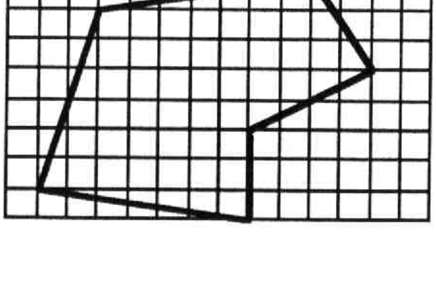
Voor elk prisma waarvan de opstaande ribben loodrecht op het grondvlak staan geldt de formule $I = G \times h$.



9. > Beredeneer dat deze formule waar is en illustreer je betoog met tekeningen.

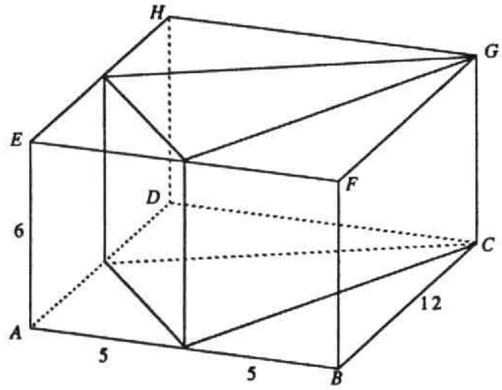
Aanwijzingen:
- Door het grondvlak in driehoeken te verdelen kan het prisma gesplitst worden in driezijdige prisma's
- Een driezijdig prisma heeft als inhoud de helft van een prisma met een parallellogram als grondvlak.

10. > Bereken de inhoud van het prisma waarvan het grondvlak hier getekend is, en waarvan de hoogte gelijk is aan de langste zijde van het grondvlak

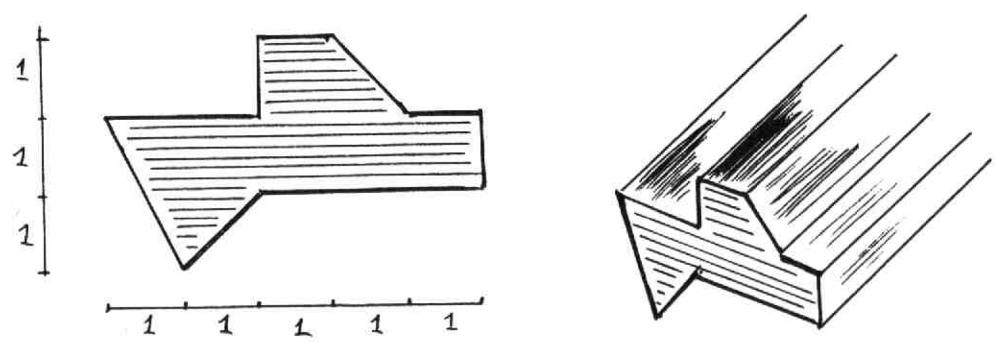


11. Van dezelfde balk als in opgave 7. worden nu drie driezijdige prisma's afgezaagd zodat een driezijdig prisma overblijft.

> Bereken de inhoud van het overblijvende prisma.



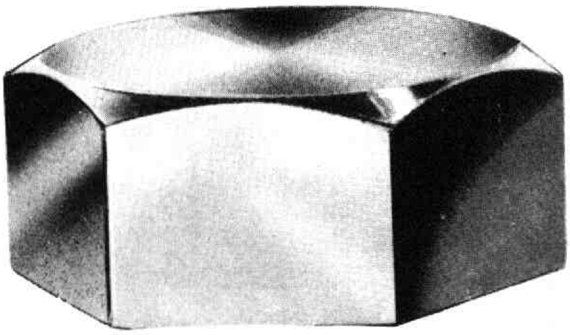
12. > Een aluminium profiel heeft een lengte van 240 cm.
Bereken het gewicht (1 cm^3 aluminium weegt 2,7 gram).



13. Van een zeszijdig prisma in een *Oxyz*-stelsel hebben de hoekpunten achtereenvolgens de volgende coördinaten:
(0,0,0); (1,0,0); (3,1,0); (2,3,0); (1,3,0); (-1,2,0); (0,0,8); (1,0,8); (3,1,8); (2,3,8); (1,3,8) en (-1,2,8).

> Bereken de inhoud van het prisma.

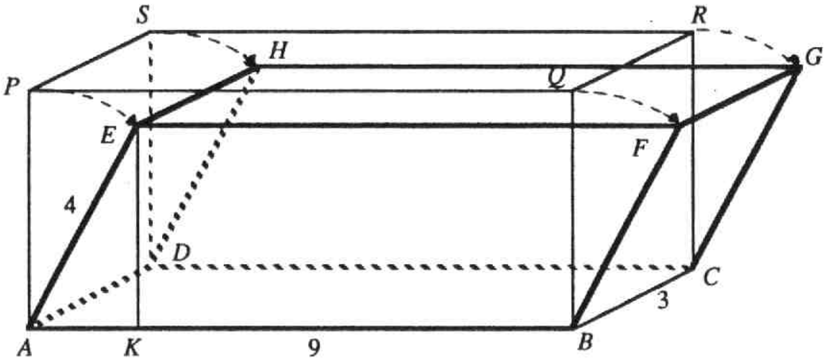
14. Dit is de kop van een bout.
Er is gestart met een regelmatig zeszijdig prisma. Je ziet dat daar later iets is afgeslepen. De voorkant op de foto is op ware grootte.



> Bereken het gewicht voor het afslijpen (1 cm^3 weegt 7,2 gram).

We gaan verder met prisma's waarvan de opstaande zijden scheef op het grondvlak staan. Voor een eerste verkenning nemen we enkele bijzondere gevallen en bekijken die op verschillende manieren.

15. *ABCD.PQRS* is een draadmodel van een balk. Door verbuiging is hiervan het prisma *ABCD.EFGH* te maken.

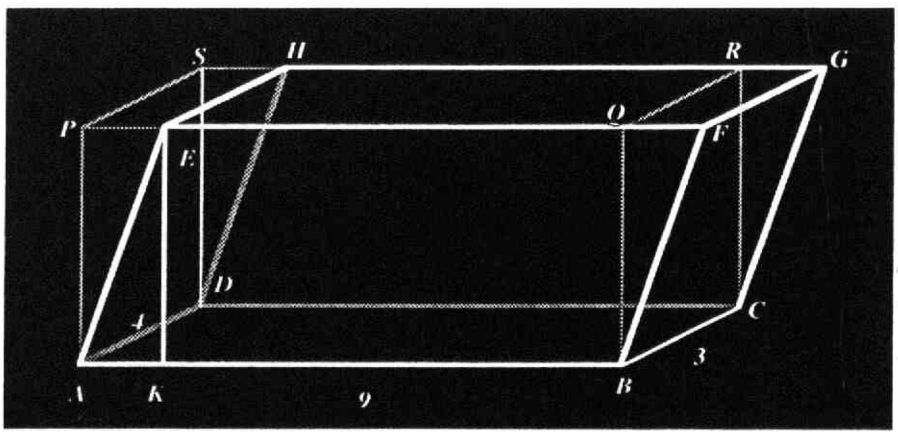


>a De inhoudsberekening $9 \times 3 \times 4$ voor dit prisma geeft een antwoord dat te groot of te klein is. Wat is het geval? Beredeneer dat.

EK staat loodrecht op AB (K op AB). EK is de 'hoogte' van het scheve prisma. $(AB \times BC) \times EK$ is nu op te vatten als 'oppervlakte grondvlak $\times$ hoogte' van het scheve prisma.

>b De formule $I = (AB \times BC) \times EK$ blijkt hier het juiste antwoord te geven.
Toon dat aan door het produkt anders te groeperen.

16. In opgave 15 werd PS gedraaid om de as AD tot de stand EH.
In deze opgave is PS verschoven langs PQ tot de stand EH.
Het nieuwe prisma heeft nu dezelfde hoogte als de balk ($EK = PA$).

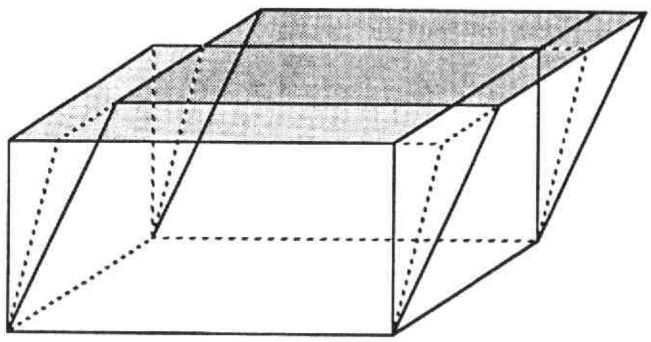


> Toon aan dat de inhoudsberekening $9 \times 3 \times 4$ voor het nieuwe prisma nu wel correct is.

In de opgaven 15 en 16 bleek de formule

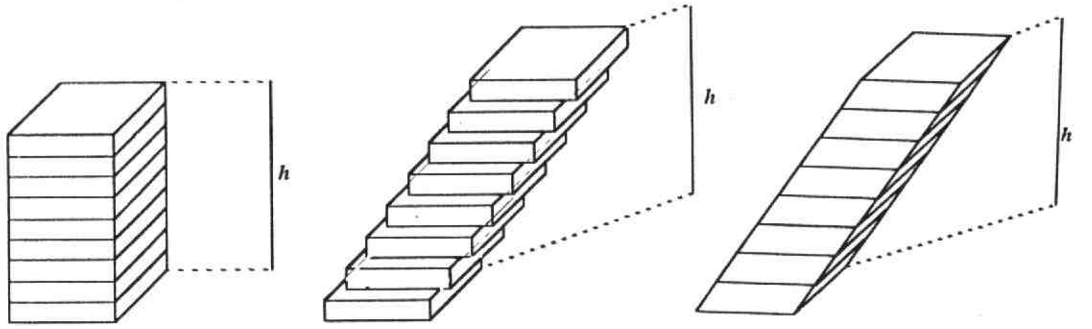
$$\boxed{\text{Inhoud prisma} = \text{Grondvlak} \times \text{hoogte}}$$

ook te gelden voor *scheve* prisma's.
De gevallen die we hebben bekeken zijn niet algemeen genoeg.
In onderstaande figuur zie je een situatie, waarbij de opstaande ribben niet alleen naar rechts, maar ook naar achteren hellen.



Ook in dit geval geldt: $I = G \times h$.

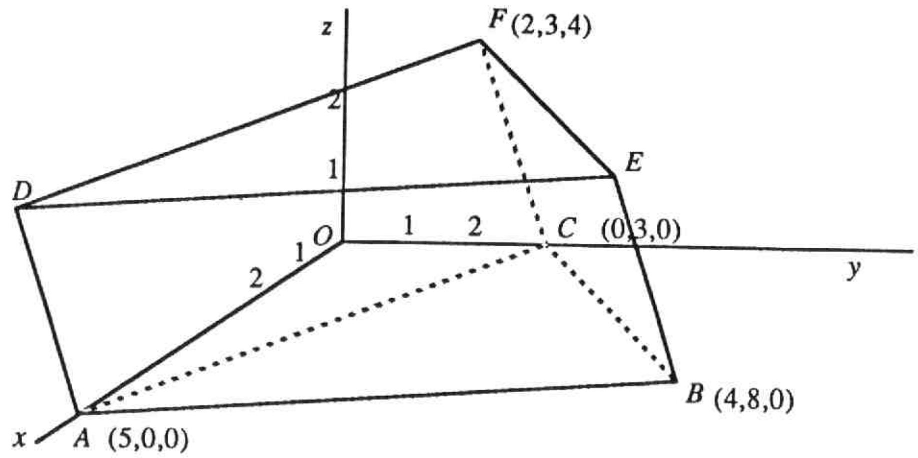
Zo'n scheef prisma heeft dezelfde inhoud als een recht prisma met eenzelfde grondvlak en dezelfde hoogte.



Dit geldt ook voor driezijdige prisma's, vijfzijdige prisma's, enz.

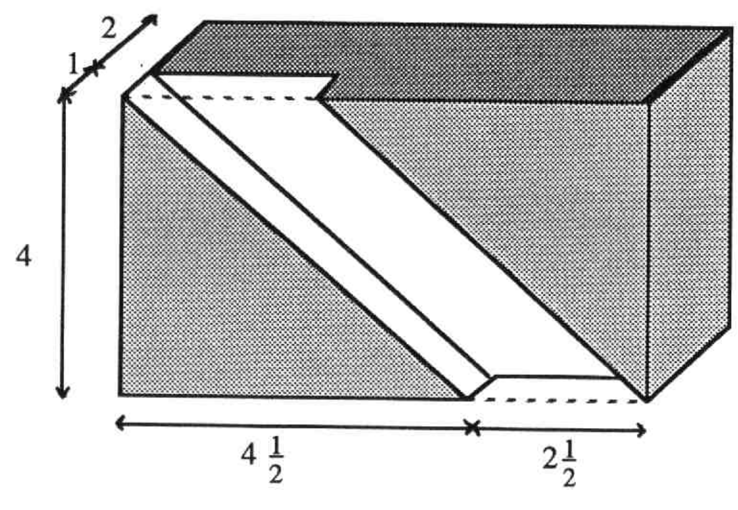
Let op bij het berekenen van inhouden van prisma's:
— de hoogte is lang niet altijd een ribbe van het lichaam
— de hoogte is lang niet altijd verticaal in de tekening (het grondvlak hoeft namelijk niet horizontaal te zijn).

17. *ABC.DEF* is een driezijdige prisma.



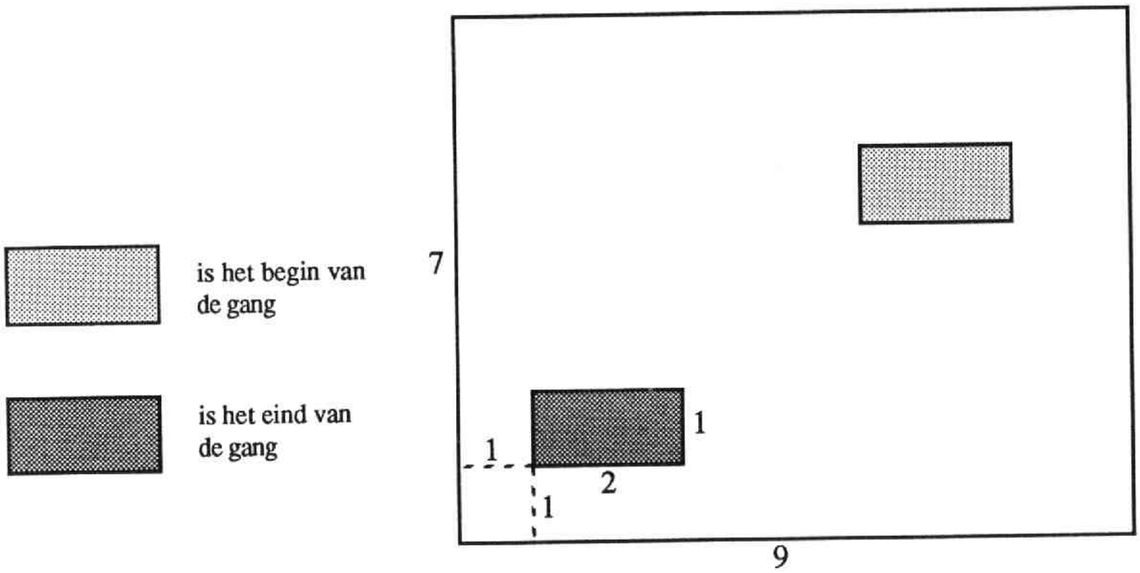
>a Wat zijn de coördinaten van *D*? En van *E*?
>b Bereken de inhoud van het prisma.

18. De maten van dit blokje (een balk) zijn in cm.
Aan de voorkant is er een sleuf in de vorm van een prisma uitgestoken.

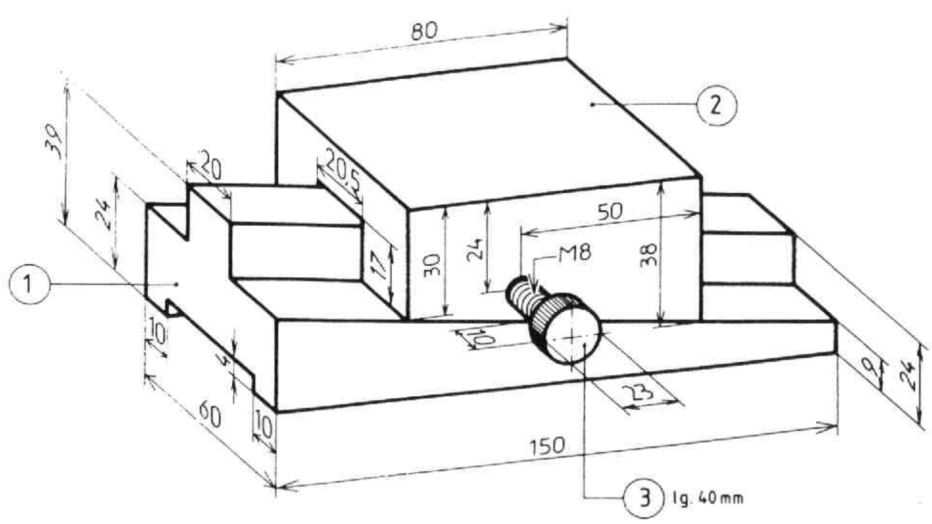


> Hoeveel procent is het volume van het blokje daardoor kleiner geworden?

19. Dwars door een ander blokje is een scheve prismavormige gang gemaakt.
Hoeveel procent is het gewicht van het blokje daardoor verminderd?
Het bovenaanzicht ziet er zo uit:



20.

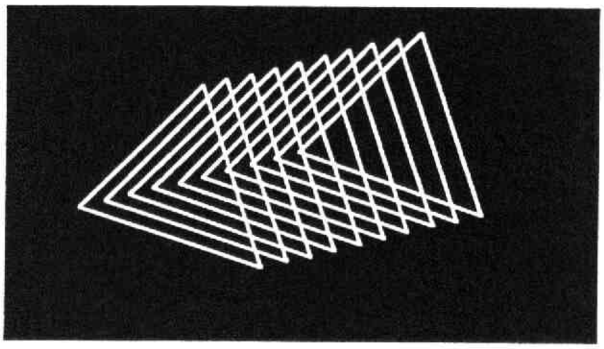


Het onderste deel van dit verstelbaar vulstuk blijft op zijn plaats. Het bovenste deel kan verschuiven tot de gewenste stand en dan met de schroef worden vastgezet.
De uitsparing met hoogte 4 die aan de linkerkant te zien is loopt onder het hele stuk door met dezelfde hoogte en dezelfde breedte.
Om het gewicht van het vulstuk te kunnen bepalen, wil men de inhoud weten.

> Bereken de inhoud van het onderste deel (in cm^3).

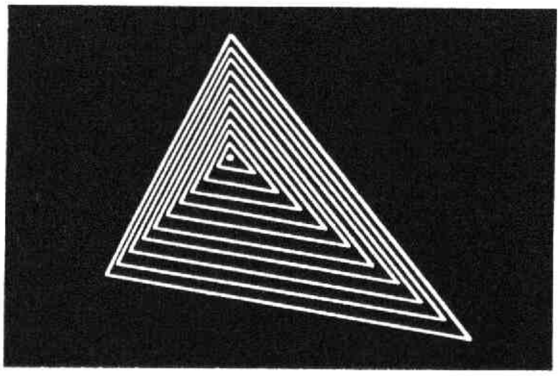
4 Piramiden

In hoofdstuk 2 heb je gezien hoe prisma's ontstaan door een rechthoek te verschuiven langs een schuiflijn. Om bijvoorbeeld een regelmatig driezijdig prisma te maken kun je een gelijkzijdige driehoek laten schuiven langs een lijn loodrecht op het vlak van die driehoek.

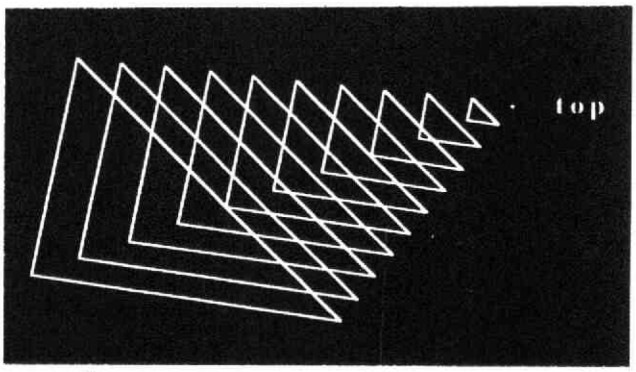


Bij dit proces verandert de driehoek niet en blijft ook de *stand* in de ruimte hetzelfde; alleen de *plaats* van de driehoek verandert.

In dit hoofdstuk wordt de verschuiving gecombineerd met een gelijkmatige verkleining van de veelhoek.
Voorbeeld:



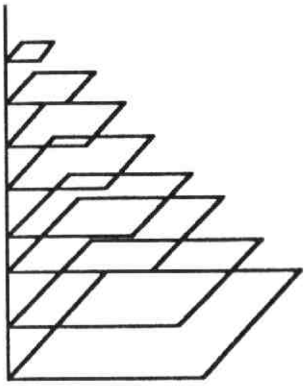
a

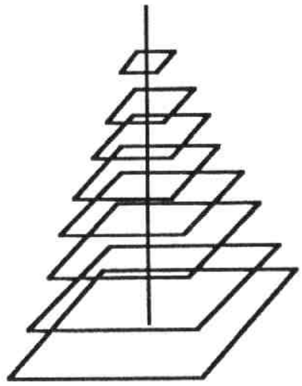


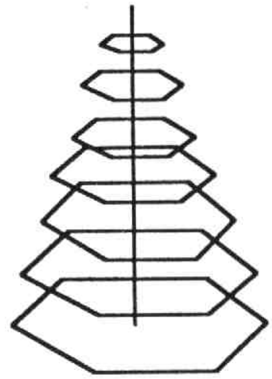
b

In figuur a is de driehoek gelijkmatig ingekrompen met behoud van vorm. Tenslotte is de driehoek ingeschrompeld tot een punt. In figuur b is de inkrimping gecombineerd met een verschuiving langs een rechte lijn.
Inkrimping en verschuiving zijn zo op elkaar afgestemd dat er een *piramide* is ontstaan. Het eindpunt van de schuiflijn is de *top* van die piramide.

Nog een paar voorbeelden:


d

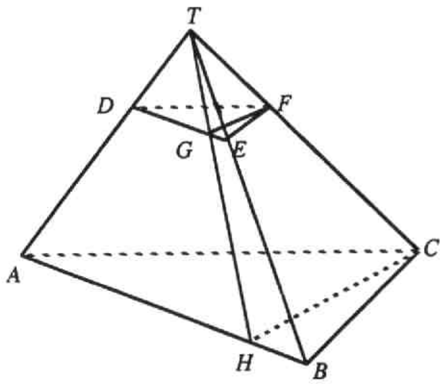

e


f

In figuur d gaat de schuiflijn door een hoekpunt van een rechthoek en staat zij loodrecht op het vlak van de rechthoek. Er is een vierzijdige piramide ontstaan. In figuur e gaat de schuiflijn door het snijpunt van de diagonalen van een rechthoek en staat zij loodrecht op het vlak van de rechthoek. Met als resultaat een vierzijdige piramide.
In figuur f gaat de schuiflijn door het middelpunt van een regelmatige zeshoek en staat zij loodrecht op het vlak van de zeshoek. De zo verkregen piramide is een *regelmatige* zeszijdige piramide.

In het vervolg zal blijken dat deze methode om een piramide te laten ontstaan een grote verscheidenheid van gelijkvormige figuren kan opleveren. Met de daarbij behorende evenredigheden kunnen allerlei berekeningen worden uitgevoerd. Veel van die berekeningen kunnen bekort worden, doordat er een ruimtelijke uitbreiding van het onderwerp 'vermenigvuldigen van figuren' te bedenken is.

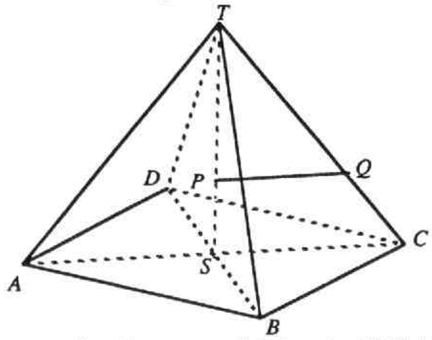
1. $T.ABC$ is een driezijdige piramide, ook wel *viervlak* genoemd. DEF is zo'n tussenvlak.



Neem over en vul in:

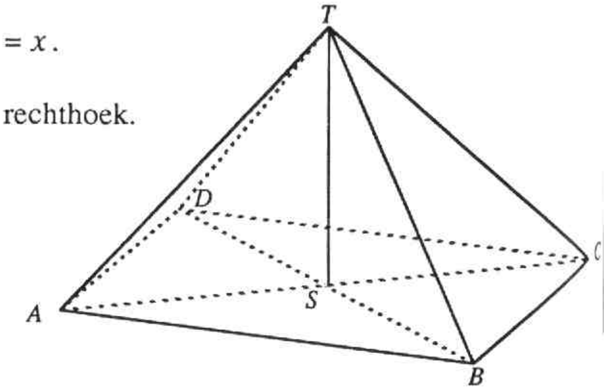
>a EF // .....; HC // .....
>b Met welk driehoek is TDF gelijkvormig? En TGF?
>c Neem over en vul in: $\frac{GE}{HB} = \frac{TG}{.....}$; $\frac{GF}{HC} = \frac{.....}{TC}$

2. Van piramide $T.ABCD$ is het grondvlak een rechthoek;
$TS \perp ABCD$
$SC = 6$
$TS = 8$
$PS = 2$
$PQ // SC$.



>a Maak een aparte tekening van driehoek ATC in ware gedaante.
>b Bereken PQ, TQ en QC.
>c Stel je voor dat piramide is ontstaan door verschuiving en inkrimping van rechthoek $ABCD$ met schuiflijn TS.
Er is dan een 'tussenrechthoek' waarin lijnstuk PQ ligt.
Teken deze rechthoek in de piramide.
Hoe groot zijn de zijden van deze rechthoek in verhouding tot de overeenkomstige zijden van $ABCD$?
>d Hoe verhouden zich de oppervlakten van die tussenrechthoek en rechthoek $ABCD$?
>e Bereken PQ ook als gesteld is $TP = x$.

3. $T.ABCD$ is een piramide, $ABCD$ is een rechthoek.
$TS \perp ABCD$.
$AB = 12$; $BC = 6$; $TS = 8$.



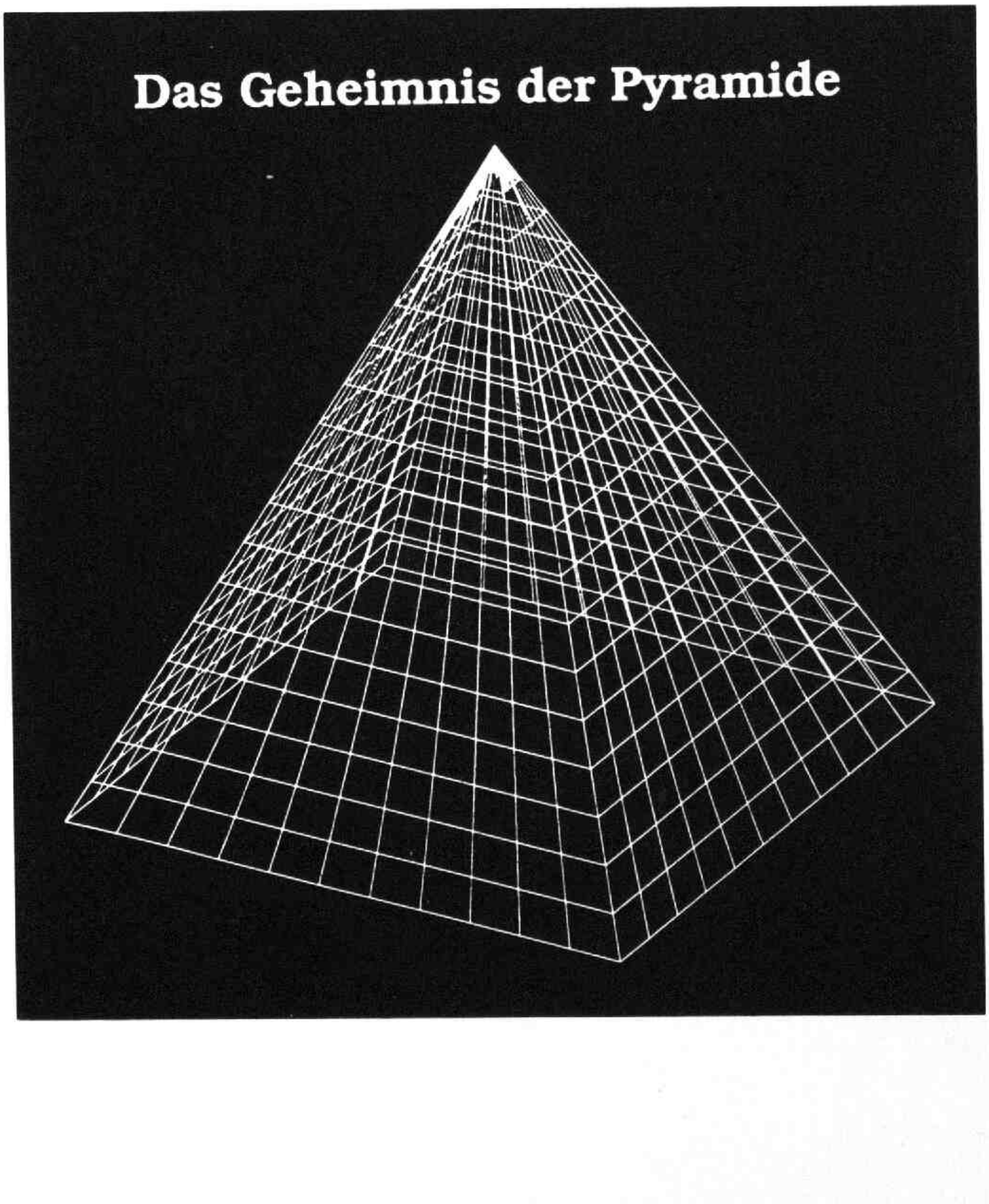
Lijnstuk TS wordt in vier gelijke stukken verdeeld. Door de deelpunten gaan tussenrechthoeken.

>a Bereken van deze rechthoeken de lengten van de zijden en de oppervlakte.
>b Teken deze rechthoeken met $ABCD$ op schaal in één figuur zodat een 'hoogtekaartje' van de piramide ontstaat. (Eigenlijk is dat een bovenaanzicht.)
>c In het hoogtekaartje is goed te zien dat zijvlak TAB steiler ten opzichte van het grondvlak is dan zijvlak TBC.
Bereken van beide zijvlakken de (hellings-)hoek die zij met het grondvlak maken.

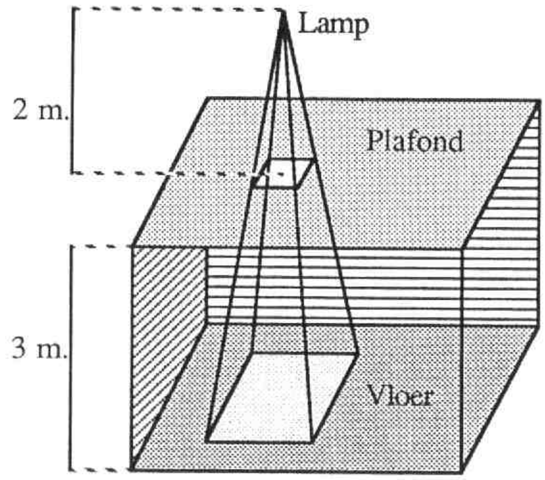
In de 'vlakke meetkunde' heb je geleerd hoe figuren vanuit een centrum vermenigvuldigd kunnen worden.
Dit kan natuurlijk ook in de ruimte. In feite is dat toegepast op blz. 27 om een piramide te laten ontstaan uit een veranderende driehoek.
Bekijk de witte piramide hieronder.
Het kleine vierkantje dat het dichtst bij de top ligt, is achtereenvolgens vermenigvuldigd met factor 2,3,4,...,17.
De zijden van de vierkanten die zo ontstaan zijn achtereenvolgens 2,3,4,...,17 keer zo lang als de zijde van het eerste vierkantje.
De oppervlakte van die vierkanten zijn dan 4,9,16,...,289 keer zo groot als de oppervlakte van het eerste vierkantje.

In het algemeen geldt:

Bij een vermenigvuldiging vanuit een centrum met factor k wordt: elke lengte met k vermenigvuldigd elke oppervlakte met k^2 vermenigvuldigd.



4. Een lamp bevindt zich 2 m boven een zeer dun plafond. De lamp schijnt door een rechthoekig gat van 0,6 bij 0,4 m in het plafond. Daardoor ontstaat op de vloer, 3 m onder het plafond, een lichtvlek.

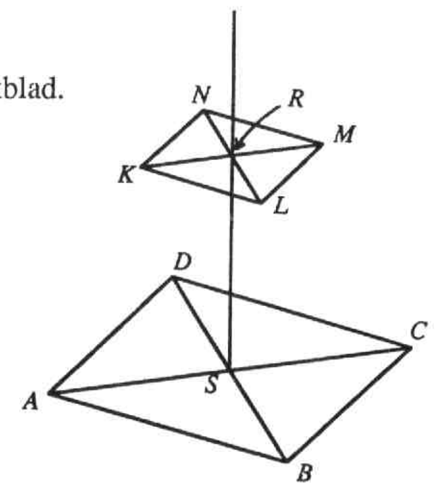


>a Bereken de afmetingen van de lichtvlek.
De lamp kan traploos (dat is geleidelijk) verschoven worden en wel: òf 0,2 m naar voren, òf 0,2 m naar rechts.
Daardoor verplaatst zich natuurlijk de lichtvlek.
>b Maak een schaaltekening van het gebied op de vloer dat zo verlicht kan worden.

In de opgaven 5 t/m 11 wordt gewerkt met een vierzijdige piramide waarvan het grondvlak *ABCD* een rechthoek is en waarvan de top *T* recht boven het middelpunt *S* van dit rechthoek ligt. Lengtematen kunnen per opgave verschillen. Om niet steeds hetzelfde verhaal te moeten afdrukken wordt naar zo'n figuur verwezen door PIRAMIDE.

5. *KLMN* is een tussenvlak in PIRAMIDE. $AS = 8$; $KR = 3$; $RS = 10$.

■ >a Teken de volledige piramide op het werkblad.
>b Bereken TR en TS.



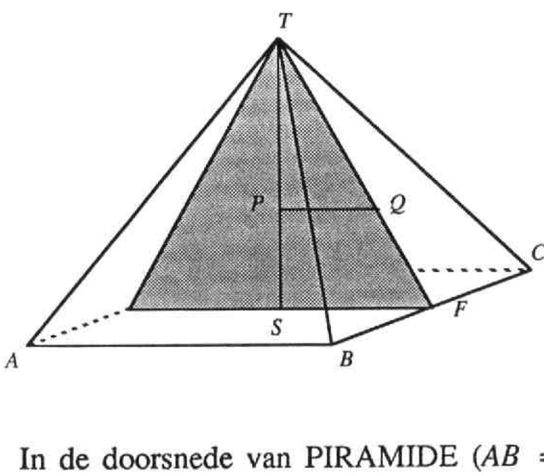
6. Bekijk de figuur bij opdracht 5.
Door R langs de centrale lijn te verplaatsen verandert ook de plaats van de top T. Als we de plaats van T voor veel posities van R nodig hebben, dan is het handig om een formule te hebben waar je de hoogte van R in stopt en de hoogte van T uit krijgt. h = hoogte van R

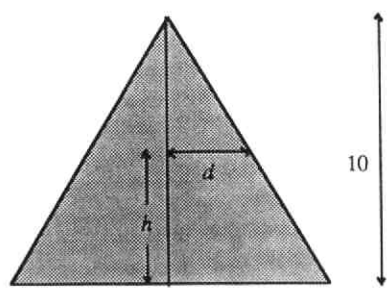
>a Druk de hellingscoëfficiënt van AT uit in h.
>b Druk TR en TS uit in h.

We kunnen ook de lengte van KR variëren.
Noem die lengte d.

>c Laat zien dat geldt: $TR = \frac{d}{d-8} \cdot h$
Controleer hiermee je antwoord van >b.
>d Wat valt er te zeggen van PIRAMIDE als d bijna gelijk is aan 8 (bijvoorbeeld $d = 7.999$)?
>e We gaan weer terug naar de situatie
$AS = 8$; $KR = 3$ maar voor RS stellen we niets vast.
Noem $TR = x$. Druk TR en RS uit in x.

In het begin van deze paragraaf is al gezegd dat, bij het ontstaan van een piramide, inkrimping en verschuiving van de basisveelhoek goed op elkaar dienen te worden afgestemd.
Dat 'afstemmen' gaan we nu wat nader bekijken.
In PIRAMIDE is een doorsnede getekend van het vlak loodrecht op ribbe BC.





7. In de doorsnede van PIRAMIDE ($AB = 12$, $TS = 10$) zijn de driehoeken TPQ en TSF gelijkvormig.

>a Laat zien dat geldt: $d = 6 - 0{,}6h$.
>b Controleer deze formule van $h = 0$ en voor $d = 0$.
>c Teken de grafiek van d als functie van h.
(h-as horizontaal, d-as verticaal)

8. Van PIRAMIDE is nu bekend dat in driehoek *TSF* geldt: $d = 10 - \frac{2}{7}h$.

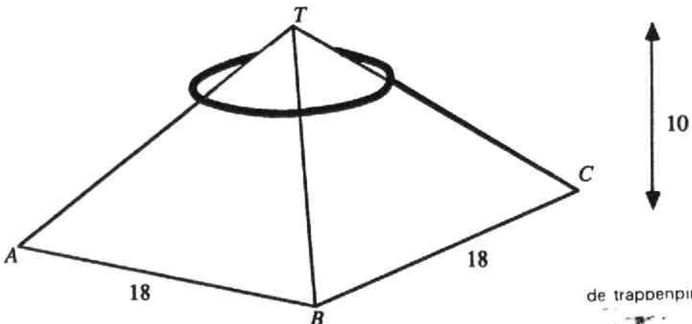
>a Bereken *AB*
>b Op welke hoogte *h* heeft de tussenrechthoek een zijde die evenwijdig is met *AB* en die de lengte 8 heeft.
>c Bereken de hoogte *TS* van de piramide.

9. Gegeven PIRAMIDE met $AB = 20$; $BC = 12$; $TS = 10$.
Bekijk een tussenrechthoek op hoogte *h*.

>a Druk lengte en breedte van de tussenrechthoek uit in *h*.
>b Druk de oppervlakte van de tussenrechthoek uit in *h*.
>c Op welke hoogte is de oppervlakte van de tussenrechthoek de helft van de oppervlakte van *ABCD*?

10. Gegeven PIRAMIDE waarbij *ABCD* en vierkant is met zijde 18.
De hoogte $TS = 10$.
Het vlak evenwijdig aan het grondvlak op hoogte *h* snijdt *TA* in *P* en *TS* in *Q*.

>a Druk de lengte van *PQ* uit in *h*.
>b Datzelfde vlak snijdt *TB* in *R*. Druk de lengte van *PR* uit in *h*.
>c Welk verband bestaat er tussen de lengten van *PQ* en *PR*?
>d Over de top van PIRAMIDE laat men horizontaal een dunne ring zakken met een diameter van 10.
Op welke hoogte blijft die ring liggen?



11. Van PIRAMIDE is het grondvlak *ABCD* een vierkant met zijde 16. De hoogte $TS = 8$. De zijde van het vierkant op hoogte *h* heeft een lengte van $16 - 2h$. De vierkanten op hoogten $h = 2$, $h = 4$, $h = 6$ vormen de bovenkanten van de bouwlagen van een trappenpiramide

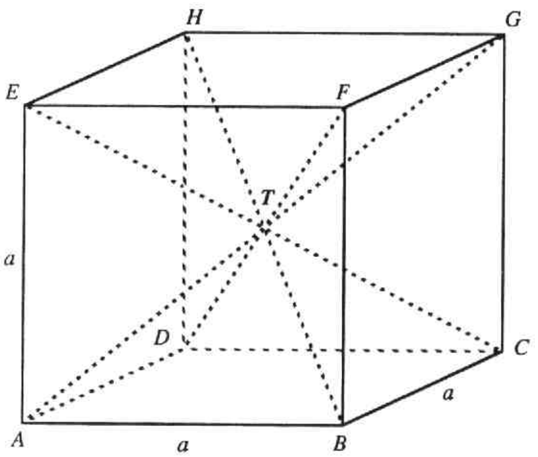
de trappenpiramide van Djoser te Sakkara

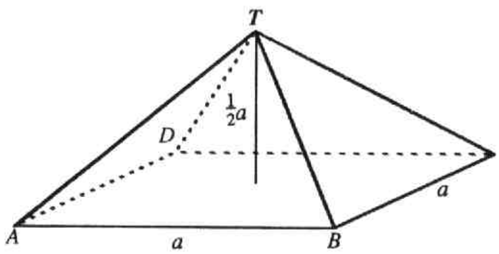
>a Bereken de totale inhoud van de trappenpiramide.
>b Het antwoord van >a is te beschouwen als een zeer ruwe benadering van de inhoud van de piramide. Hoe kan dat antwoord worden verbeterd?

5 Inhouden van piramiden

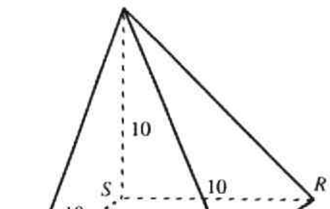
1. In de kubus $ABCD.EFGH$ met ribbe a zijn de vier lichaamsdiagonalen getekend. Zo is te zien dat de kubus kan worden opgebouwd uit een aantal regelmatige vierzijdige piramiden met hoogte $\frac{1}{2}a$ en grondvlaksribbe a. Eén van die piramiden is $T.ABCD$.

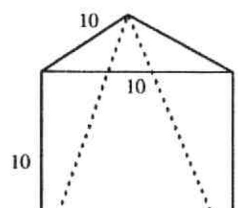
   \> Druk de inhoud van $T.ABCD$ uit in a.

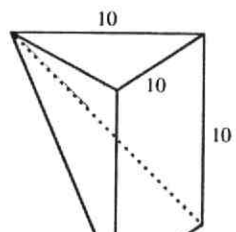




De inhoud van de piramide met bijzondere afmetingen uit opgave 1 is dus via een ruimtelijke legpuzzel te berekenen. Er bestaan verschillende van deze puzzels.
Hier is er nog één.





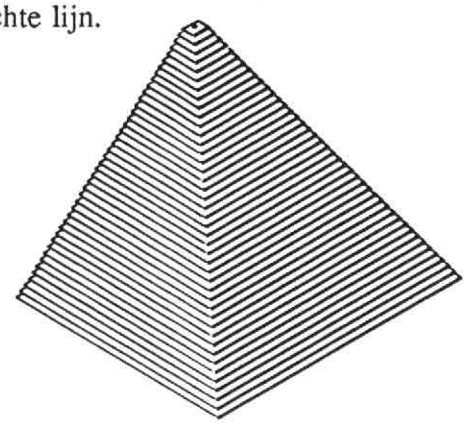


2. \>a Bereken de inhoud van deze piramide.
   $PQRS$ is een vierkant met zijde 10.
   TS staat loodrecht op $PQRS$ en heeft de lengte 10.

   \>b Wat wordt het antwoord als 10 vervangen wordt door x?

Het is echter lang niet voor elke piramide mogelijk om op een dergelijke manier de inhoud te vinden.
Daarom is een geheel andere aanpak nodig om tot een 'inhoudsformule' voor de piramide te komen.

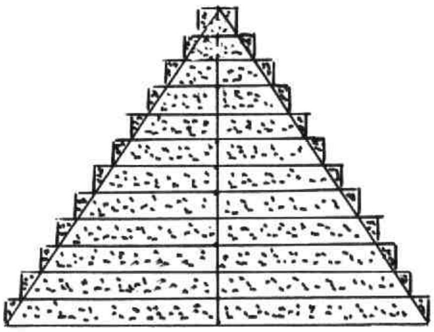
In paragraaf 4 heb je gezien hoe een piramide kan ontstaan, door een veelhoek al krimpend te verschuiven langs een rechte lijn.



Als dit proces van krimpen en verschuiven met 'horten en stoten' verloopt, ontstaat een zogenaamde 'trappenpiramide' zoals op reclameplaat.

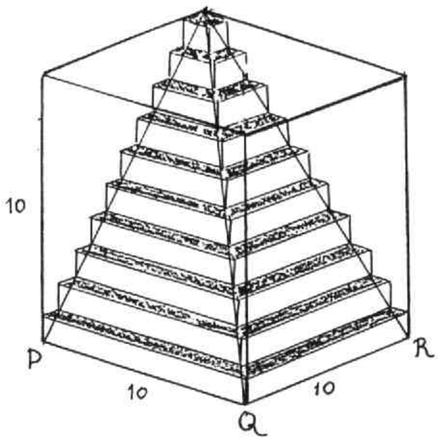
De trappenpiramide is een stapeling van dunnen plakjes die elk de vorm van een recht prisma hebben.
De som van die inhouden van alle plakjes is een benadering van de inhoud van de 'echte' piramide.
Als de trappenpiramide een 'buitentrap' is, is de benadering te groot, bij een 'binnentrap' is de benadering te klein, zoals deze illustratie voor een vierzijdige piramide laat zien.

dwarsdoorsnede van
piramidetrap met buitentrap



dwarsdoorsnede van
piramide met binnentrap

3. Volgens opgave 2. is de inhoud van de piramide $T.PQRS$ in de kubus met ribbe 10 gelijk aan $333\frac{1}{3}$.



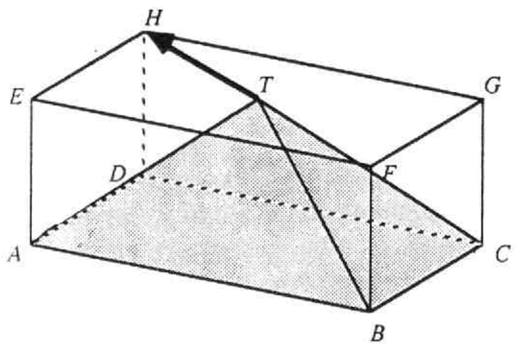
> Reken na dat bij een verdeling van de hoogte TS in tien gelijke stukjes, de inhoud van de buitentrap gelijk aan 385 en van de binnentrap gelijk aan 285 is.

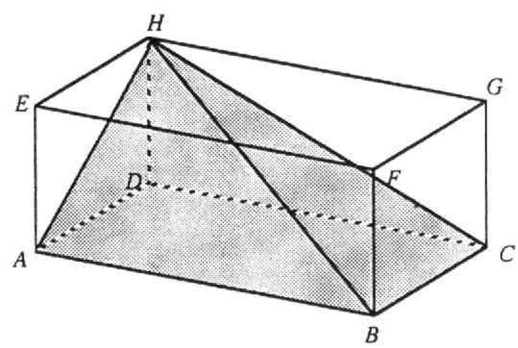
Door de plakjes van de trappenpiramide dunner te maken wordt de inhoud van de echte piramide beter benaderd.
Met een computer is de inhoud van buitentrap en binnentrap berekend bij de piramide van opgave 2. Daarbij is de hoogte achtereenvolgens verdeeld in 100, 1000, 10000 en 100000 stukjes.

Aantal stukjes waarin hoogte is verdeeld	Dikte van een plakje	Inhoud buiten-trap	Inhoud binnen trap
100	0.01	338.35	328.35
1000	0.001	333.83	332.83
10000	0.0001	333.38	333.28
100000	0.00001	333.34	333.33

Het resultaat laat zien dat bij een zeer fijne verdeling van de hoogte, de inhoud van de trappenpiramide (zowel buiten als binnen) nauwelijks nog afwijkt van de inhoud van de echte piramide. Er geldt zelfs dat de inhoud van de piramide *in elke gewenste nauwkeurigheid* door de inhoud van een trappenpiramide kan worden benaderd.

4. Piramide $T.ABCD$ is in een balk geplaatst met T in het bovenvlak. Een nieuwe piramide $H.ABCD$ is ontstaan door T naar H te verschuiven.





Bij elke tussenrechthoek van $T.ABCD$ hoort een tussenrechthoek van $H.ABCD$ op dezelfde hoogte.

>a Ga na dat de tussenrechthoeken van van $T.ABCD$ en $H.ABCD$ op elke hoogte dezelfde afmetingen hebben.

>b Welke conclusie kun je trekken over de inhouden van beide piramides?

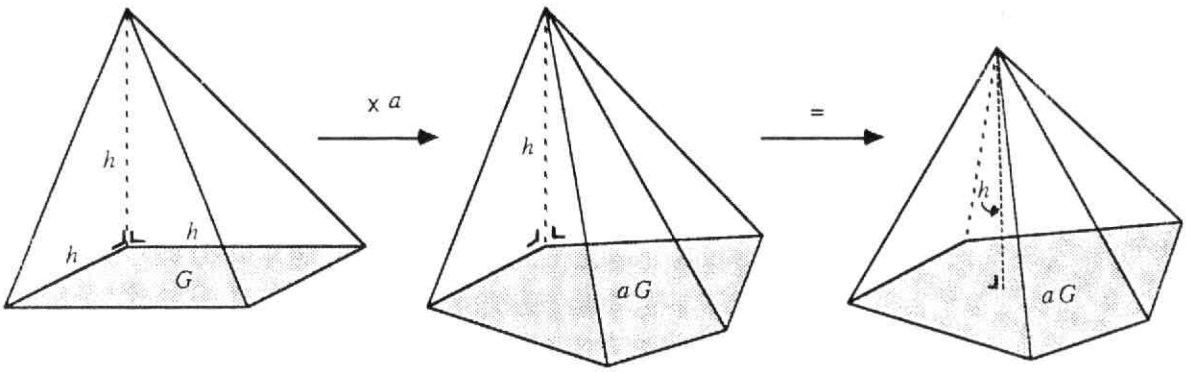
Een overeenkomstig verhaal kan voor elke piramide, ongeacht de vorm van het grondvlak, verteld worden.

Er geldt:

> Als de top van een piramide zo verplaatst wordt dat de hoogte van een piramide gelijk blijft, dan blijft de inhoud ook gelijk.

We kunnen dus van elke piramide overstappen op een piramide met een opstaande ribbe loodrecht op het grondvlak. Als we kans zien daar de inhoud van te berekenen, kunnen we elke piramide aan.
Dat wordt de volgende stap.

5. Volgens opgave 2 is de inhoud van deze piramide $\frac{1}{3}\ h^3$.
Anders gezegd: $I = \frac{1}{3}\ h^3 = \frac{1}{3}.h.h^2 = \frac{1}{3}.h.G$
Deze formule is alleen maar zeker voor deze speciale afmetingen.



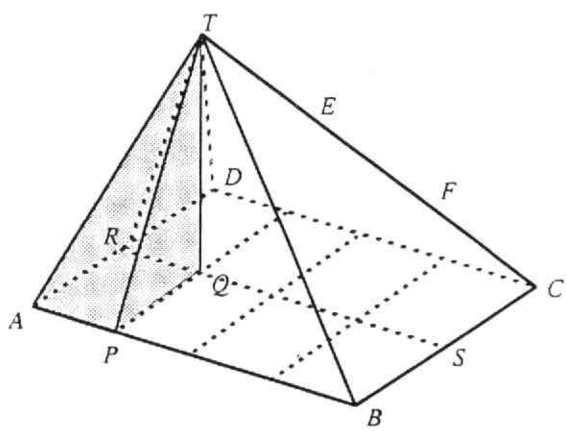
>a Beredeneer met het plakjes verhaal dat een andere piramide met dezelfde hoogte en met als grondvlak een veelhoek met een 2-maal zo grote oppervlakte een inhoud heeft die ook 2-maal zo groot is.
>b Waarom geldt nu weer $I = \frac{1}{3}.h.G$?
>c Waarom geldt deze formule voor elke piramide?

Resultaat:

De inhoud van een piramide is $\frac{1}{3}$ × hoogte × oppervlakte grondvlak.
Kortweg: $I = \frac{1}{3}.h.G$

6. Het grondvlak van de piramide $T.ABCD$ in een rechthoek die verdeeld is in acht congruente stukjes.
De ribbe TC is verdeeld in drie gelijke delen: TE, EF en FC.
De inhoud van de piramide $T.APQR = 8$.

> Bereken de inhoud van achtereenvolgens: piramide $T.ABCD$, piramide $E.APQR$ en piramide $F.PBSQ$



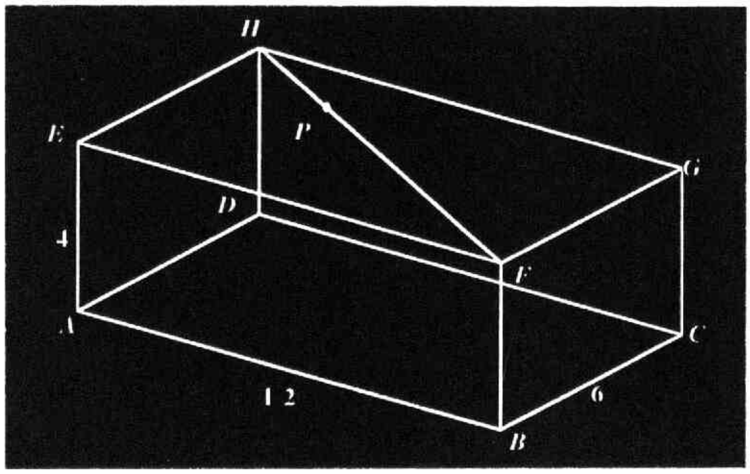
7. Van een driezijdige piramide $T.ABC$ zijn de hoekpunten in een $Oxyz$-stelsel gegeven door:

$$T(0,0,4);\ A(5,0,0);\ B(0,6,0);\ C(0,0,0)$$

>a Bereken de inhoud van $T.ABC$.

>b Het punt C verschuift langs de negatieve x-as, waardoor de inhoud van $T.ABC$ toeneemt.
Bij welke positie van C is de inhoud van $T.ABC$ gelijk aan 50?

8. $ABCD.EFGH$ is een balk met ribben, 4, 6 en 12 en P is een punt op de diagonaal HF.

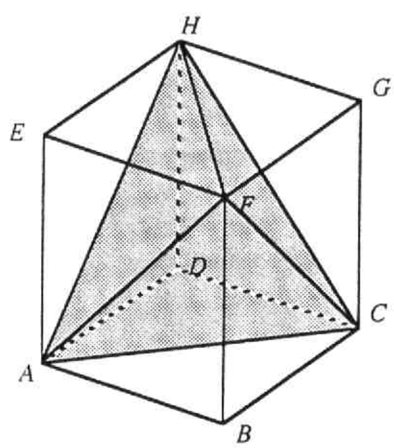


>a Bereken de inhoud van de piramide $P.ABCD$.

>b Bereken de som van de inhouden van de piramiden $P.ADHE$ en $P.BCGF$.

9. In een kubus met ribbe a is het viervlak $AFCH$ getekend.

> Bewijs dat de inhoud van $AFCH$ gelijk is aan $\frac{1}{3}$ van de inhoud van de kubus.
(Aanwijzing: Ga na hoe het viervlak $AFCH$ uit de kubus kan worden verkregen door het afsnijden van piramidevormige punten).



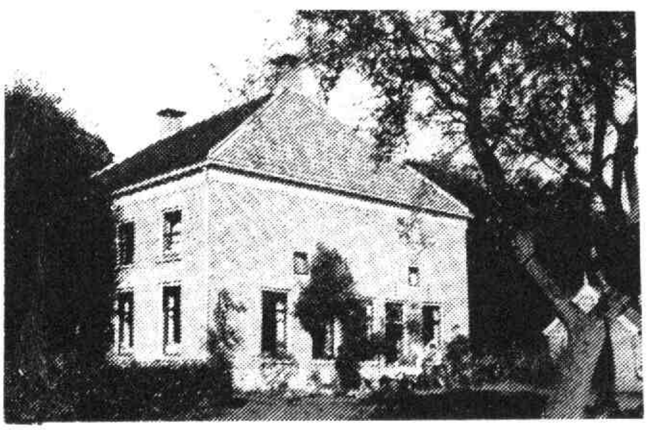
10. TS is de loodlijn uit de top van de piramide $T.ABC$ op het grondvlak.
Een vlak evenwijdig aan het grondvlak snijdt de piramide volgens driehoek DEF en de lijn TS in het punt R.
Verder is gegeven: $TR = 3$; $RS = 5$; opp. $ABC = 32$.
De piramiden $T.DEF$ en $T.ABC$ zijn gelijkvormig.

>a Hoe verhouden zich de overeenkomstige ribben TD en TA?
>b Hoe verhouden zich de oppervlakten van de grondvlakken $T.DEF$ en $T.ABC$?
>c Hoe verhouden zich de inhouden van $T.DEF$ en $T.ABC$?
>d Hoe luiden de antwoorden op de vragen a, b, c indien gegeven: $TR = p$ en $TS = q$?

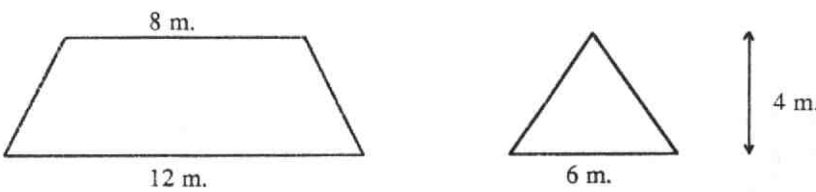
11. Een zeszijdige piramide wordt uit de top vermenigvuldigd met factor k ($k > 1$).

>a Hoe verhouden zich de oppervlakten van de grondvlakken van de kleine en de grote piramide?
>b Hoe verhouden zich de inhouden?
>c Bereken k in 2 decimalen nauwkeurig in het geval de inhoud van de grote piramide precies het dubbele is van de inhoud van de kleine.

12.



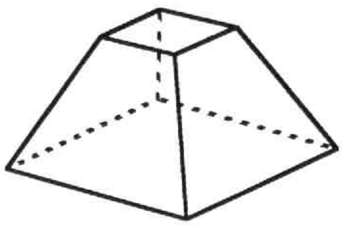
Het huis op de foto heeft een zogenaamd schilddak. Twee aanzichten van het dak zijn:



>a Teken een draadmodel van het dak.
>b Bereken de inhoud van het dakgedeelte van het huis.

6 Afgeknotte piramiden

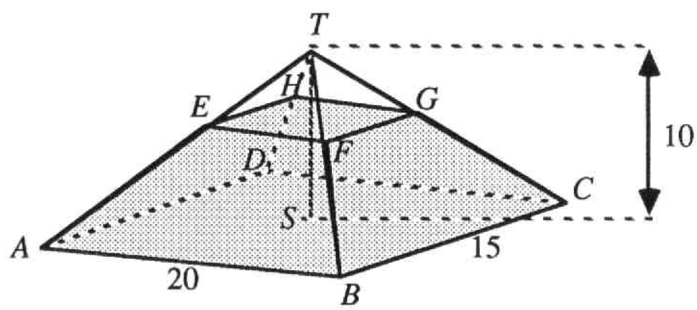
We hebben gezien dat een piramide kan ontstaan door een geschikte combinatie van verschuiven en inkrimpen van een veelhoek. Als dat proces voortijdig beëindigd wordt ontstaat een lichaam dat we 'afgeknotte piramide' noemen.



De naam verwijst naar een andere ontstaanswijze: snij van een piramide met behulp van een vlak parallel met het grondvlak het deel met de top weg.

Veel problemen over afgeknotte piramiden kunnen worden opgelost door het topgedeelte er weer bij te nemen.

1. Van piramide $T.ABCD$ is het grondvlak een rechthoek van 20 bij 15. De hoogte TS van de piramide is 10.



Van de piramide wordt een kleine piramide afgesneden door een vlak op hoogte 5, waardoor de afgeknotte piramide $ABCD.EFGH$ ontstaat.

>a Hoe verhouden zich de inhouden van de kleine en de grote piramide? Bereken de inhoud van de afgeknotte piramide.

>b Dezelfde vragen voor het geval dat de hoogte van de afgeknotte piramide 8 is.

>c Veronderstel nu dat de hoogte van de afgeknotte piramide gelijk is aan h.
Toon aan dat de inhoud I van de afgeknotte piramide als volgt in h kan worden uitgedrukt:

$$I = 300\,h - 30\,h^2 + h^3$$

>d Controleer de formule voor $h = 5$, $h = 8$, $h = 0$ en $h = 10$.

2. Van de afgeknotte piramide *ABC.DEF* zijn de hoekpunten in een *Oxyz*-stelsel gegeven door:
$A(4,0,0)$; $B(0,5,0)$; $C(0,0,0)$; $D(1,0,9)$; $E(0,1\frac{1}{4},9)$; $F(0,0,9)$.

>a *AD, BE* en *CF* snijden elkaar bij verlenging in punt *T*. Bepaal de coördinaten van *T*.

>b Bereken de inhoud van *ABC.DEF*.

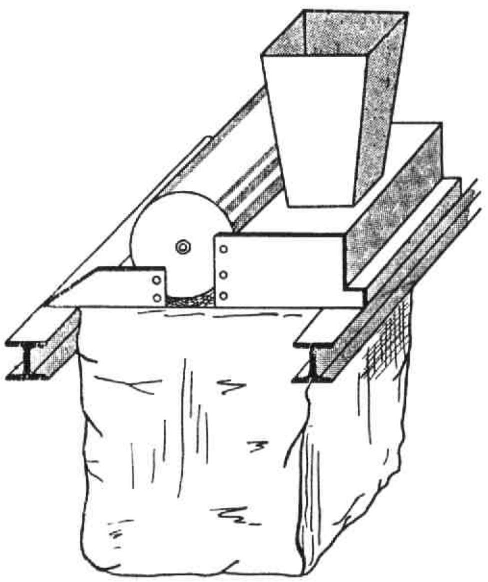
3. Van de afgeknotte piramide *ABC.DEF* is gegeven:
Opp. $ABC = 180$; opp. $DEF = 20$
De hoogte van de afgeknotte piramide is 10.

>a Driehoek *ABC* kan uit driehoek *DEF* worden verkregen door vermenigvuldiging vanuit een punt *T* met factor *k*. Hoe groot is *k*?

>b Bereken de hoogte *T* boven het vlak *ABC*.

>c Bereken de inhoud van *ABC.DEF*.

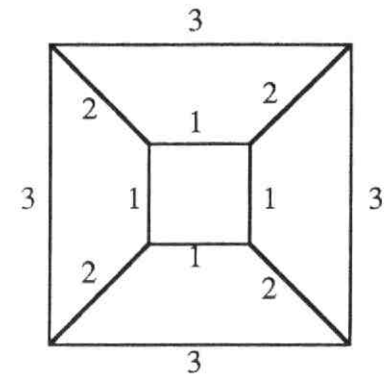
4. De invoerbak van de graanmolen heeft de vorm van een afgeknotte piramide. Op de buitenzijde van de bak staat aangegeven: 220 l.



De eigenaar van de graanmolen wil controleren of de inhoud inderdaad 220 l is. Hij meet de zijden van de vierkanten onder en boven: (40 resp. 60 cm) en hij meet de hoogte van de bak (90 cm).

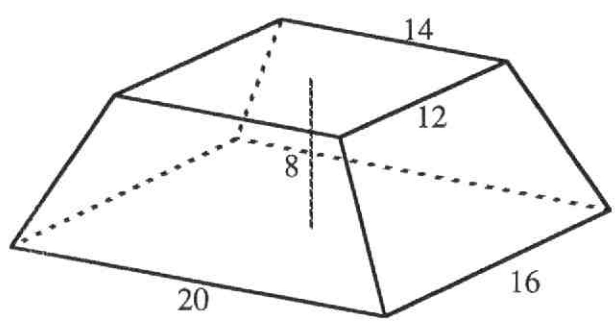
> Ga na of de inhoud van de invoerbak redelijk klopt.

5. Bovenaanzicht van een afgeknotte piramide met vermelding van de werkelijke afmetingen.



>a Laat zien dat de hoogte van de afgeknotte piramide gelijk is aan $\sqrt{2}$.
>b Bereken de inhoud.

6. Het kan voorkomen dat een figuur bedrieglijk veel lijkt op een afgeknotte piramide, maar het niet is.
Voorbeeld:



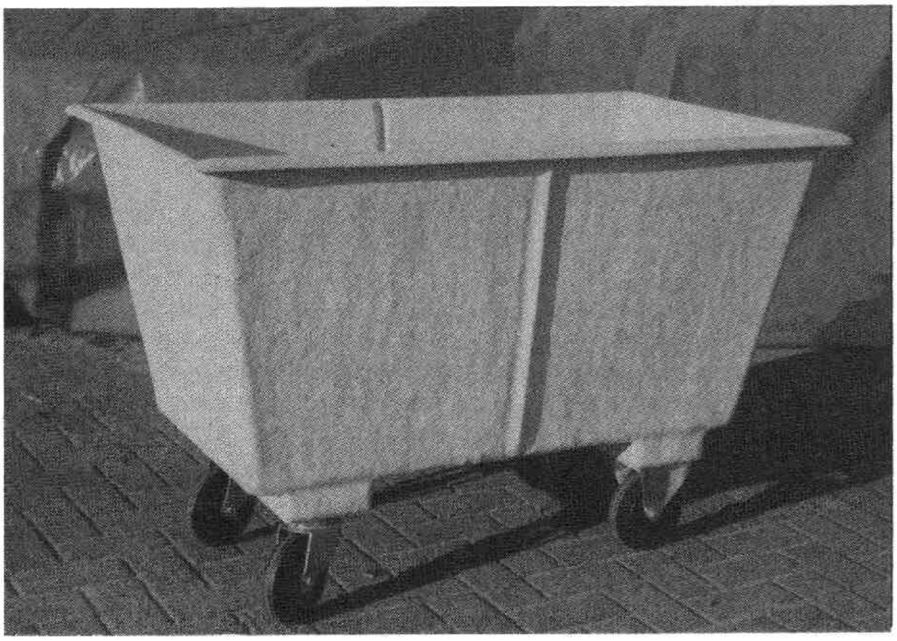
>a Hoe kun je aan de afmetingen van grond- en bovenvlak onmiddellijk zien dat dit geen afgeknotte piramide is?
>b Teken nauwkeurig een bovenaanzicht van het lichaam en controleer in de tekening dat *AE, BF, CG* en *DH* bij verlenging niet door één punt gaan.

De inhoud van *ABCD.EFGH* kan worden gevonden door het lichaam te verdelen in geschikte stukken, waarvan de inhoud kan worden bepaald.

>c Verdeel het lichaam in één balk, 4 driezijdige prisma's en 4 vierzijdige piramiden.
Geef die verdeling aan in het bovenaanzicht.
>d Bereken de inhoud van elk van die delen en bereken tenslotte de inhoud van *ABCD.EFGH*.

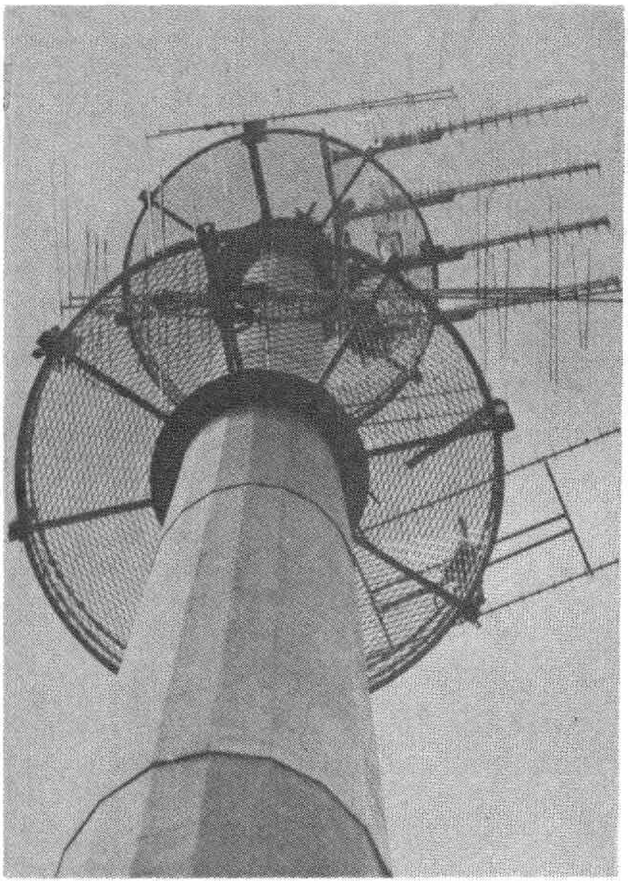
7. De binnenmaten van de hier afgebeelde afvalcontainer zijn als volgt:

boven	125 bij 70 cm
bodem	100 bij 50 cm
diepte	60 cm



>a Geef een schatting van de inhoud van de container in liters.
>b Onderzoek of de container een afgeknotte piramide is.
>c Bereken nauwkeurig de inhoud van l.

7 Ronde lichamen



Deze mast is een prisma met veel zijden. Toch lijkt de omtrek bijna rond. Door het aantal zijvlakken zeer groot te maken wordt de ronde vorm steeds beter benaderd. Die benadering kan zover gaan, dat het prisma niet meer van een *cilinder* te onderscheiden is.

We kunnen een cilinder beschouwen als een grensgeval van regelmatige prisma's.

Daardoor zijn veel bijzonderheden van prisma's over te dragen op cilinders.

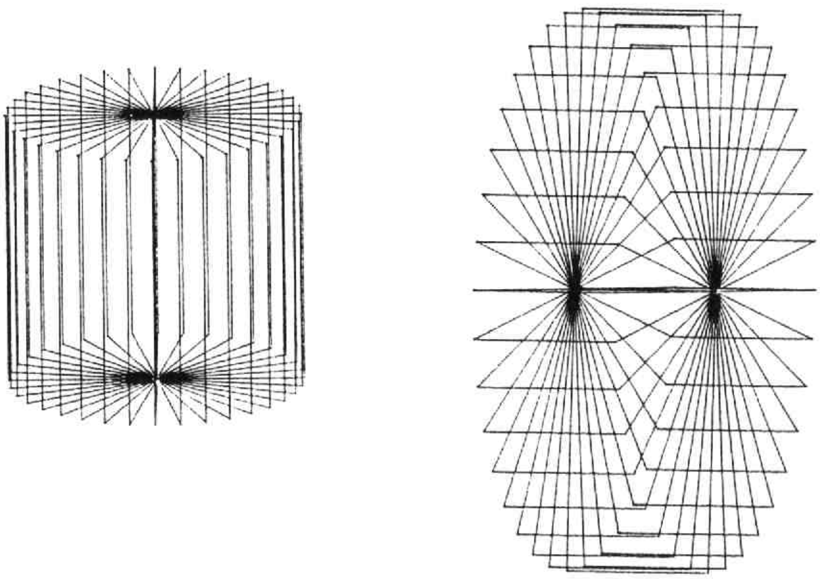
1. >a Hoe kan een cilinder ontstaan volgens de verschuifmethode?
   >b Geef een formule voor de inhoud van een cilinder?

2. Van een cilinder is de hoogte h en de straal van de grondcirkel r.

   >a Hoe groot is de oppervlakte van de cilindermantel (opgerolde rechthoek)?
   >b Hoe groot is de totale oppervlakte van de cilinder?

3. > In een kubus met ribbe 4 past een cilinder met de as loodrecht op het grondvlak van de kubus en om een kubus met ribbe 4 past een cilinder met de as loodrecht op het grondvlak van de kubus.
Bereken de inhoud van de ruimte tussen deze cilinders.

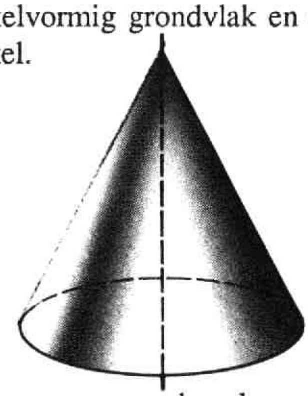
4. Een cilinder kan ontstaan door een rechthoek om één van de zijden rond te draaien.



Bij een rechthoek met breedte 2 en lengte 4 kan dat op twee manieren.

>a Is er verschil tussen de inhouden van beide cilinders?
>b En tussen de oppervlakte van de cilindermantels?

Zoals een veelzijdig prisma een benadering van een cilinder is, is een veelzijdige piramide een benadering van een kegel.
We beperken ons tot het gebruik van regelmatige piramiden. Daardoor krijgen we een kegel met een cirkelvormig grondvlak en een as hier loodrecht op door het middelpunt van de cirkel.

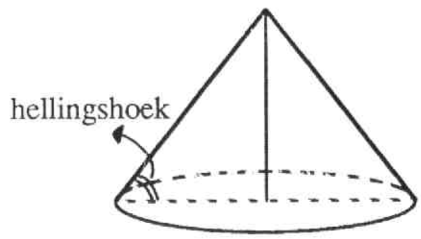


5. >a Beschrijf het ontstaan van een kegel vanuit een cirkel.
>b Beschrijf ook het ontstaan van een kegel vanuit een driehoek.

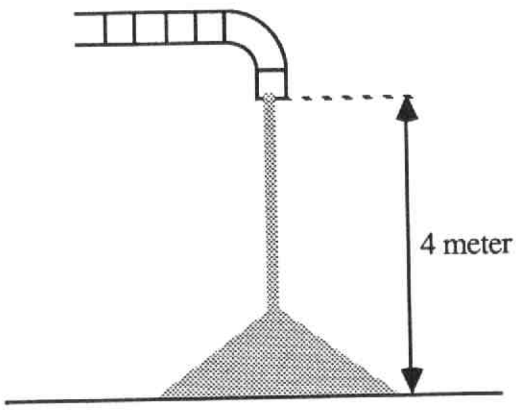
Ook bij een kegel zijn weer eigenschappen over te dragen, nu afkomstig van de piramide.
Bijvoorbeeld: Inhoud kegel = $\frac{1}{3} \cdot$ h · oppervlakte grondvlak.
Een afgeknotte kegel is het 'verschil' van twee kegels.

6. >a Door een papieren kegelmantel langs een lijn door de top open te snijden, kan die mantel plat gelegd worden.
Verklaar waarom het resultaat een cirkelsector is.
>b Hoe groot is de oppervlakte van de kegelmantel als de hoogte gelijk is aan 8 en de straal van de grondcirkel gelijk is aan 6?

7. Door korrelig materiaal te storten kan een kegel ontstaan. De vorm daarvan is afhankelijk van het materiaal en de vochtigheid van dat materiaal. De vorm van de kegel is aan te geven met de hellingshoek.



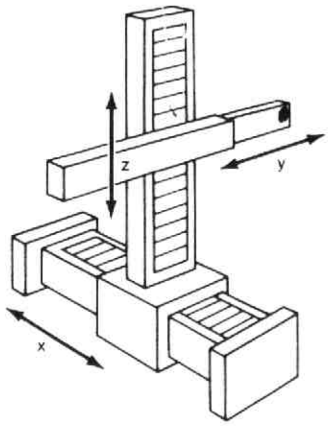
>a Maak een schatting van de hellingshoek van de stortkegel op de voorgrond en bereken de hoogte en de diameter als de inhoud ongeveer $200 m^3$ is.



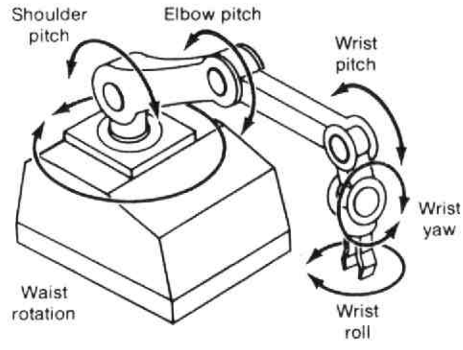
>b De hellingshoek van de stortkegel is 35°. De stortpijp kan niet hoger worden ingesteld dan 4 m.
Bereken de maximale hoeveelheid die gestort kan worden.

8. Wat voor lichaam ontstaat er als een cirkel om een middellijn wordt rondgedraaid?

9.

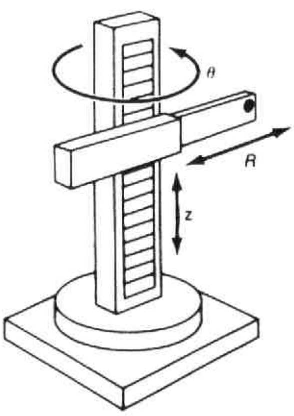


figuur 1

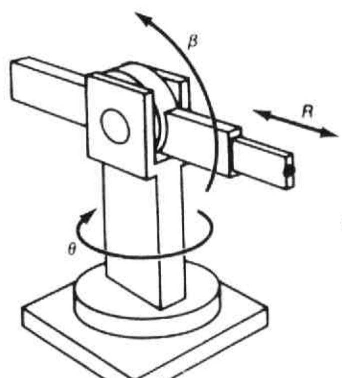


figuur 2

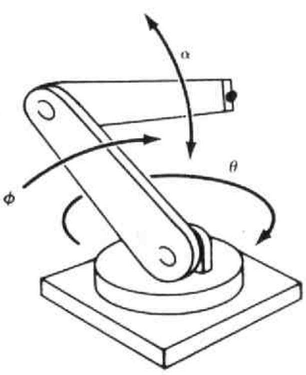
Dit is een sterk vereenvoudigde weergave van de arm van een industrierobot, met de bewegingen die kunnen worden uitgevoerd.
Van belang is de positie in de ruimte van de stip op het uiteinde van de arm. Daar kun je bijvoorbeeld een grijper denken. Alle punten waar die grijper kan komen vormen samen de *werkruimte*.
>a Welke vorm heeft de werkruimte?
>b Welke vormen hebben de werkruimten van de robots in de figuren 3, 4 en 5?



figuur 3



figuur 4



figuur 5

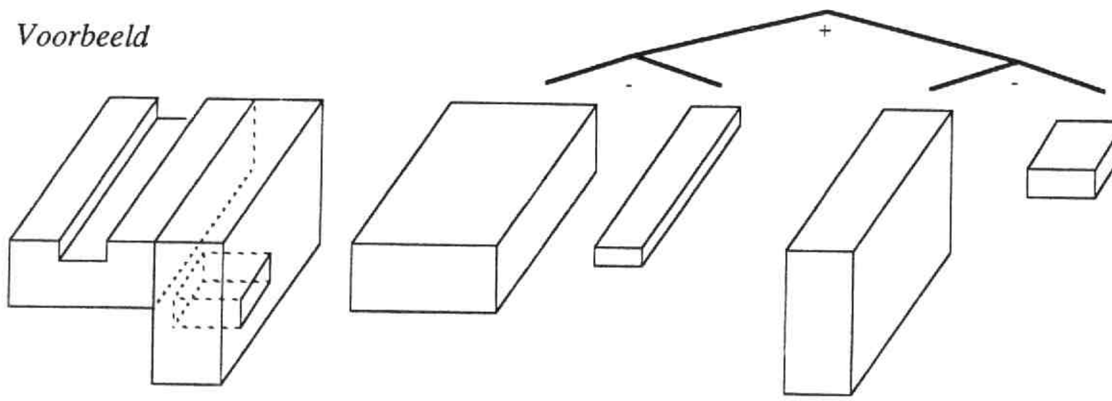
8 Keuze opgaven

Voor speciale toepassingen bestaan er speciale methoden om ruimtelijke objecten te analyseren en te beschrijven.
In dit hoofdstuk worden enkele voorbeelden behandeld.

Een lichaam als combinatie van andere lichamen:

Een taak van 'kunstmatige intelligentie' is het herkennen van soms zeer ingewikkelde lichamen. Daarvoor worden zulke lichamen op een bepaalde manier ontleed.

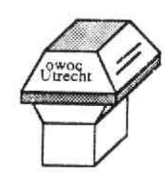
Voorbeeld



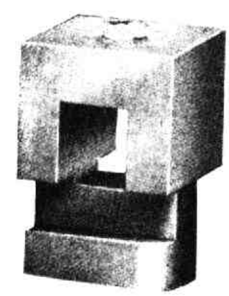
+ betekent de samenvoeging van *twee* lichamen.
− betekent het ene lichaam (*r*) uit het andere lichaam (*l*) halen.
(Bijvoorbeeld een gat maken, een deel wegschaven.)

De eindvormen zijn dus materiële lichamen of denkbeeldige lichamen (holten).
Omgekeerd kan zo'n ontleding weer helpen bij de beschrijving van het fabricageproces van zo'n ingewikkeld lichaam.

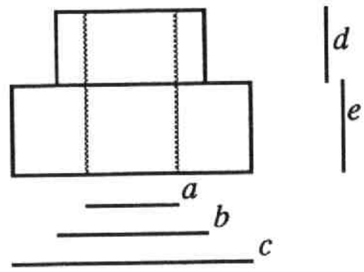
1. > De eindvormen van de ontleding zijn piramiden en balken in verschillende maten.
Maak de ontleding van deze ANWB-paddestoel.



2. > Maak van dit lichaam een ontleding in balken.
(Met de rondingen in het onderste gedeelte hoef je geen rekening te houden.)

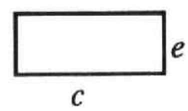


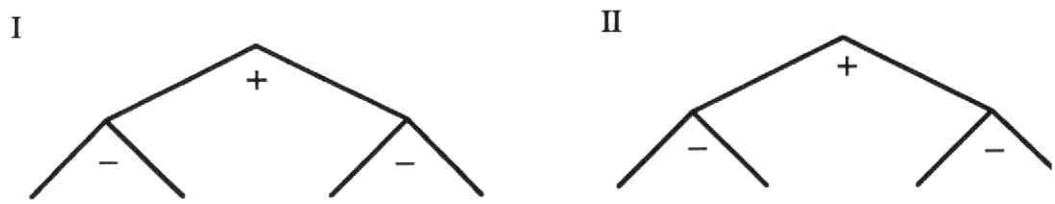
3.



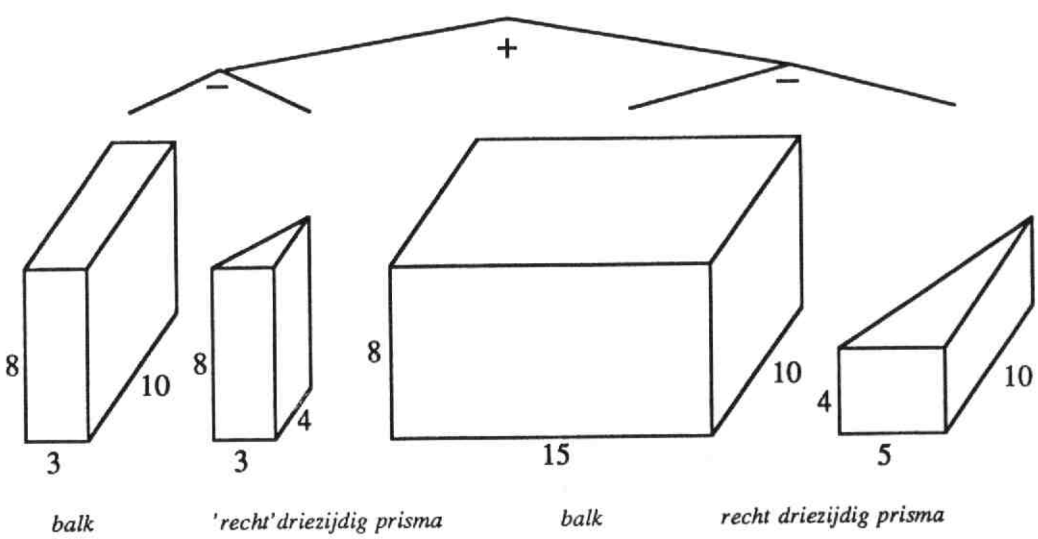
De hoofdvorm van dit onderdeel is op verschillende manieren te ontleden in cilinders.

\> Geef die ontledingen volgens de getekende bomen en schrijf de maten van de gebruikte cilinders erbij, bijvoorbeeld:





4. Dit is de ontleding van een lichaam met negen zijvlakken.

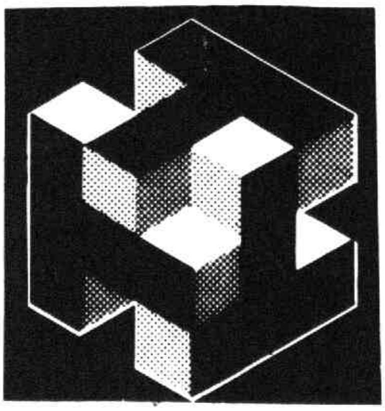


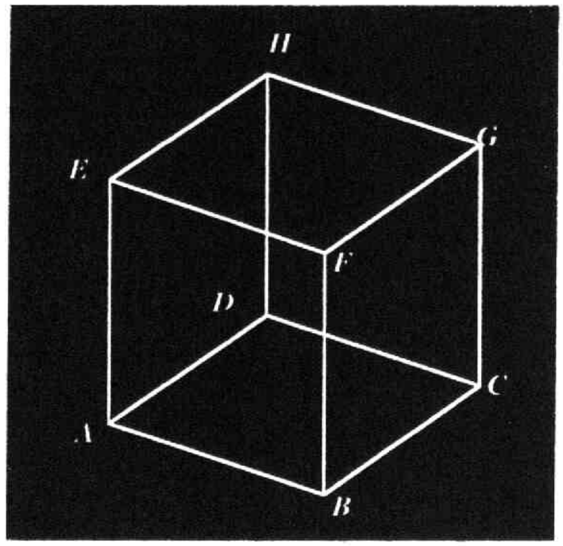
'recht' wil zeggen dat de opstaande ribbe loodrecht staat op het grondvlak.

\>a Bereken de inhoud van dat lichaam.
\>b Teken twee lichamen die bij deze ontleding passen.

5.

Tecmedia

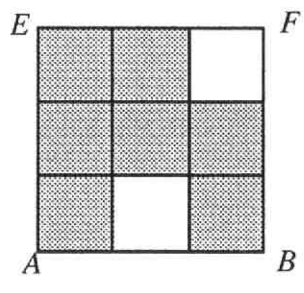




Dit embleem van een firma bestaat uit drie T's. We kunnen ons voorstellen dat dit de afbeelding is van een ruimtelijke figuur die is opgebouwd uit drie houten T's. Het geheel zou dan in de kubus *ABCD·EFGH* passen. Deze opgave gaat over die ruimtelijke voorstelling.

>a De T's zijn door een paar rotaties uit elkaar te verkrijgen.
Welke rotaties zijn dat? (Assen en draaihoeken.)

>b Van het zijvlak *ABFE* is deze tekening te maken.



Laat zien dat de vlakken *BCGF* en *EFGH* dezelfde opbouw hebben.

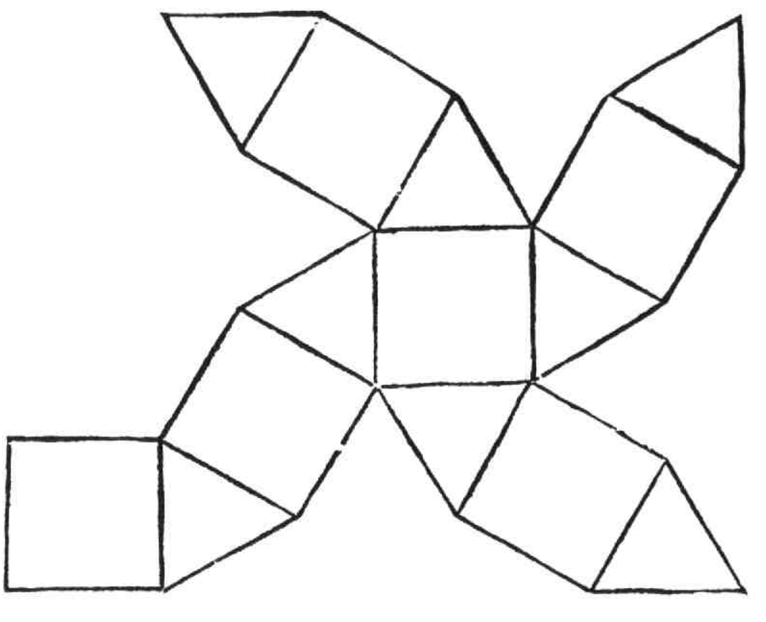
>c Een voor de hand liggende vraag is, of de niet-zichtbare zijvlakken dezelfde opbouw hebben als de zichtbare.
Los dat probleem op door tekeningen te maken van *CDHG, DAEH* en *ABCD*.

>d Los hetzelfde probleem op zonder die tekeningen, maar met behulp van telling van de kleine vierkantjes.

6. Simon Stevin (1548-1620) was een Nederlander die zich op veel gebieden verdienstelijk heeft gemaakt. Om eens een paar te noemen: wiskunde (uitvinding van kommabreuken); waterbouwkunde; taalkunde (hij vond het Nederlands zeer geschikt als taal voor de wetenschap; voerde veel nieuwe termen in, zoals wiskunde en meetkunde; in oeroude tijden, toen de mensen nog wijs waren, werd volgens hem uiteraard Nederlands gesproken).
In de wiskunde was al vanaf de Oudheid studie gemaakt van de regelmatige veelvlakken; lichamen die congruente zijvlakken hebben. Stevin bracht daar enige variatie in: de halfregelmatige veelvlakken.
Hier staat de uitslag van zo'n lichaam. (Hij schreef toen nog Latijn.)

Diſtinctio 15.

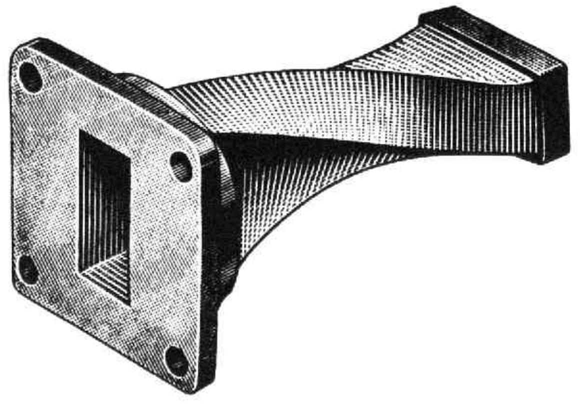
Diſponantur vt infra pro truncato Octoedro per laterum media, ſex quadrata, & octo trianguli, quorum ſingula latera æqualia ſint rectæ Q.



■ >a Geef in de figuur op het werkblad de ribben die op elkaar aansluiten met hetzelfde symbool (bijvoorbeeld een cijfer) aan.

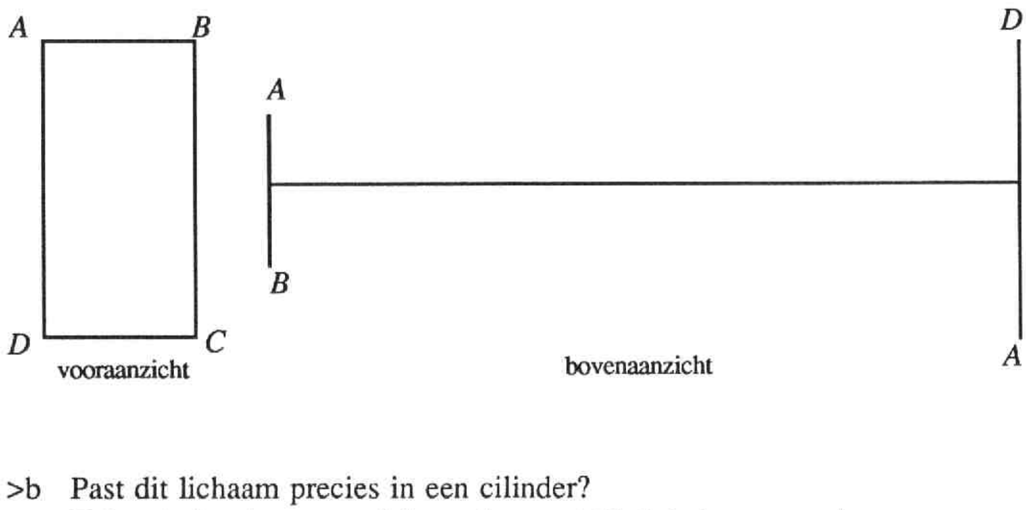
>b Probeer een tekening van het lichaam te maken.

7. Door een rechthoek langs een lijn te verschuiven en daarbij gelijkmatig te roteren, kan het middenstuk van dit object ontstaan.
Dit vraagstuk gaat alleen over dit middenstuk.



ELECTRONIC
WAVE GUIDE

■ >a Hieronder zie je de rechthoek in de beginstand.
Teken in het vooraanzicht op het werkblad de rechthoek in de eindstand.
Teken ook de 25e rechthoek (neem aan dat er 75 rechthoeken zijn).



>b Past dit lichaam precies in een cilinder?

■ >c Teken in het bovenaanzicht op het werkblad de baan van A.

>d Het is mogelijk door het lichaam heen te kijken, maar de opening is natuurlijk niet rechthoekig. Teken die opening.

>e De afstand tussen de eerste en de laatste rechthoek is 10. Probeer de inhoud van het lichaam te berekenen. Verklaar je methode.