Differentiëren : een manier om veranderingen bij te houden

https://hdl.handle.net/1874/10136

DIFFERENTIEREN

(EEN MANIER OM VERANDERINGEN BIJ TE HOUDEN)

wiskunde B

DIFFERENTIEREN

EEN MANIER OM

VERANDERINGEN

BIJ TE HOUDEN

Hawex - Wiskunde B

DIFFERENTIEREN

Een produktie ten behoeve van het project hawex.

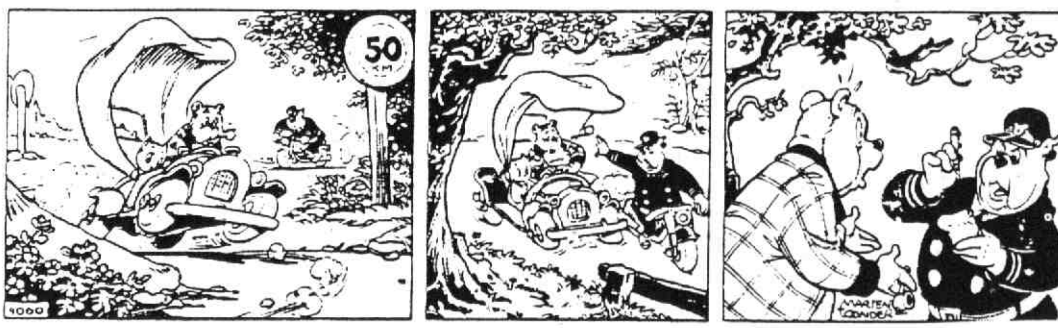
Ontwerper:	Martin Kindt
Met medewerking van:	Christiane Hauchart Henk van der Kooy Jan de Lange Martin van Reeuwijk Anton Roodhardt
Vormgeving:	Ada Ritzer

Utrecht, mei 1989

Inhoudsopgave

1 Verandering en snelheid

Heer Bommel was danig uit zijn humeur. Het verkeer in Rommeldam had hem veel oponthoud bezorgd en toen hij zich buiten de bebouwde kom waande, trapte hij het gaspedaal geheel in, zodat de Oude Schicht gierend over de weg vloog. Helaas ontging het hem dat hij zich op een weg bevond waar snelheidsbeperking geboden was en dat wreekte zich. Want daar naderde de commissaris van politie reeds op een brullende motor en stak een hand op.

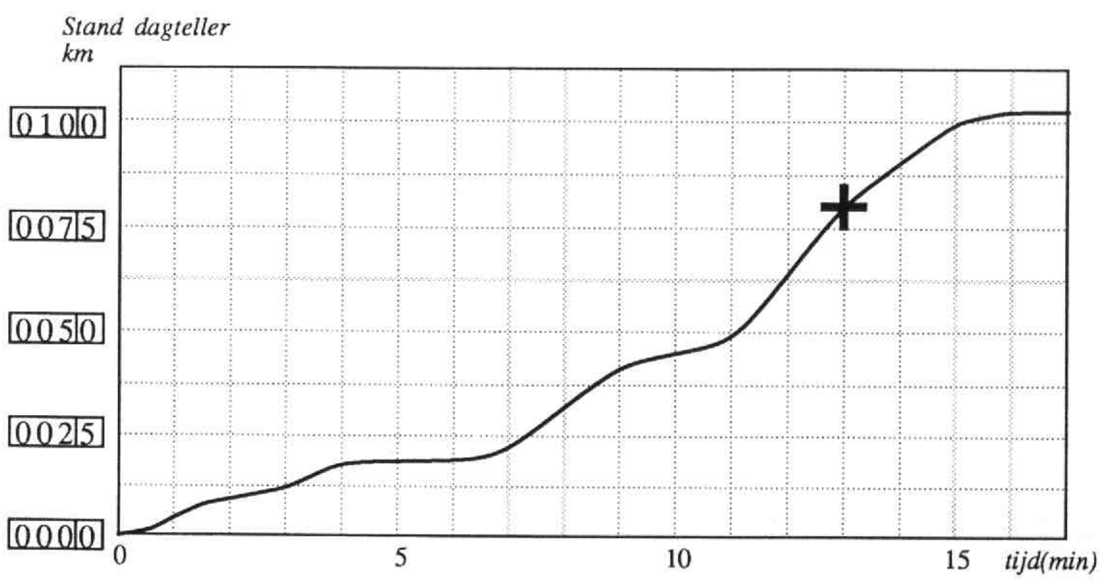


'Hebt u zo'n haast, huh?' vroeg Bulle Bas, een notitieboekje trekkend.
'Hebt u de borden niet gezien? Kunt u niet lezen?'
'Maar ik reed niet te snel!' riep heer Bommel op piepende toon. 'In het afgelopen kwartier heb ik niet meer dan 10 km gereden, dat is dus 40 km per uur'.

1. Inderdaad wees de dagteller in de Oude Schicht 10 km aan.
   Maar meer informatie over Bommel's autoritje geeft onderstaande grafiek.

   >a Wat zou Bulle Bas hebben geantwoord op het verweer van heer Bommel?

   >b Stel je voor dat heer Bommel gelijk zou hebben. Hoe zou die grafiek er dan hebben uitgezien?



In de gemeente Rommeldam zijn de boetes bij overtreding van de snelheidswet niet mals.

GEMEENTE ROMMELDAM

Politieverordening

De boetes die opgelegd dienen te worden bij overtreding van Art. 243 uit het Wegenverkeersreglement zijn:

— bij een overschrijding van de toegestane snelheid met ten hoogste 10 km/u bedraagt de boete 25 florijnen;
— bij een overschrijding van meer dan 10 km/u maar ten hoogste 20 km/u is de boete 50 florijnen;
— bij een overschrijding van meer dan 20 km/u maar ten hoogste 30 km/u betaalt de overtreder 100 florijnen.

Bij elke volgende 10 km/u boven de toegestane maximum snelheid, dient men de boete opnieuw te verdubbelen.

De burgemeester van Rommeldam

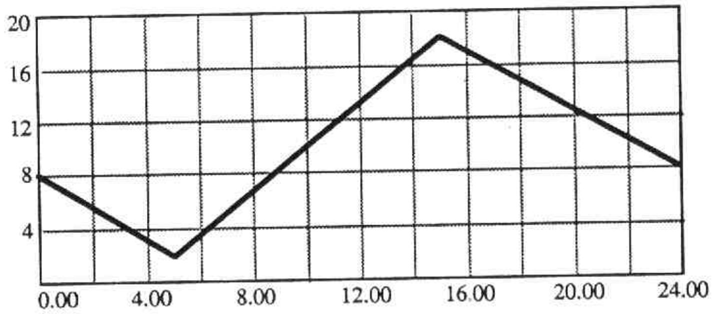
2. Bekijk de grafiek op blz. 1 van Bommels autoritje. Het aangekruiste punt geeft het moment (en de plaats) aan waar Bommels overtreding geconstateerd werd.

   >a Hoeveel boete moest Bommel betalen?
   >b Tom Poes die naast Bommel in de auto zat beweerde later nog dat zij bijna de helft van de weg te snel hadden gereden.
   Ben je het daarmee eens? Leg eens uit.

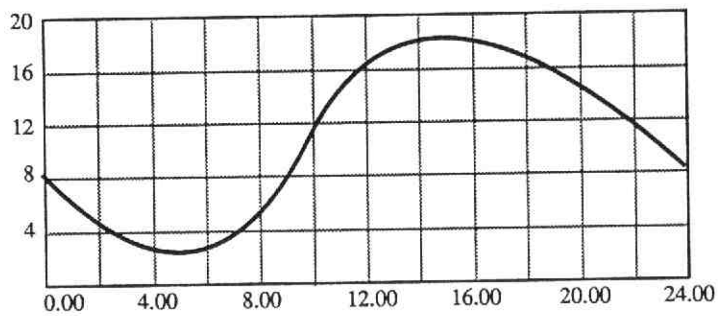
3. Op een heldere dag in mei werd in De Bilt 's nachts om 05.00 uur de minimumtemperatuur van 2° C gemeten. Overdag liep de temperatuur snel op tot 18° C. Dit maximum werd bereikt omstreeks 15.00 uur.

>a Hieronder staan drie grafieken.
Welke grafiek geeft naar jouw oordeel het beste het temperatuurverloop van die dag weer?

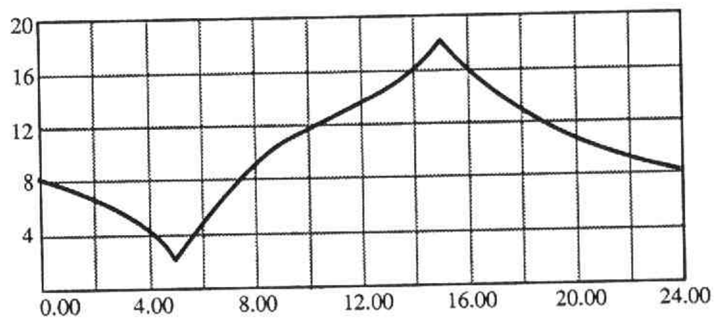
I



II



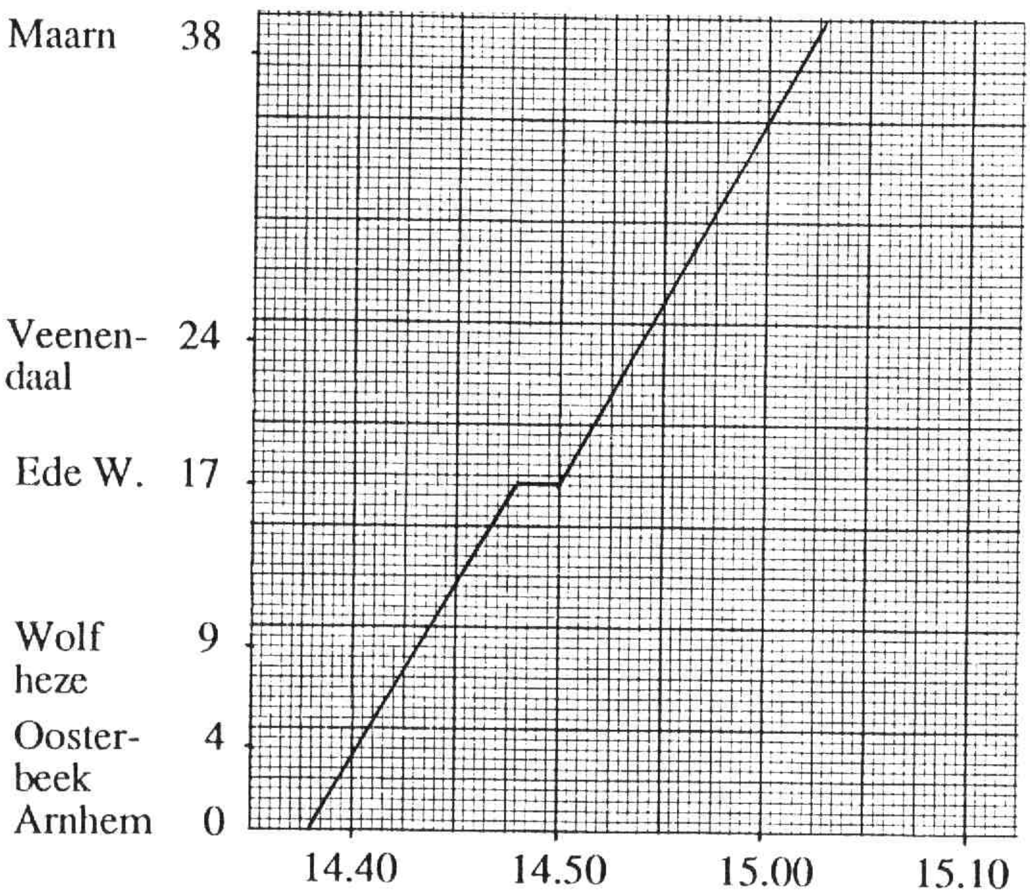
III



>b De temperatuur T (in ° C) is een functie van de tijd t (in uren).
Bereken $\frac{\Delta T}{\Delta t}$ voor de periode van 5 uur 's morgens tot 3 uur 's middags.
Wat is de betekenis van dit getal?

>c Rond welk uur van de dag stijgt de temperatuur het snelst?

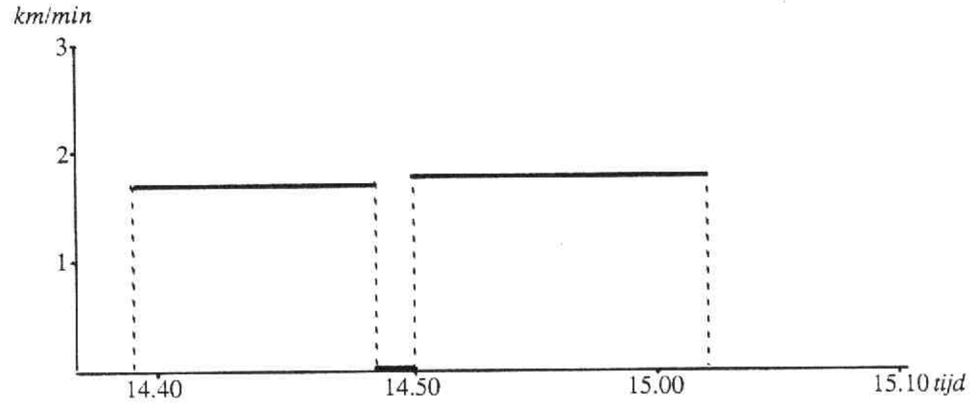
4. In het boekje Hellingen is de grafiek van de Intercity Arnhem-Utrecht bekeken.
Een stukje van die grafiek is hieronder enigszins vergroot weergegeven.



>a Waar aan kun je zien dat er in die grafiek geen rekening is gehouden met het optrekken en afremmen van de trein?

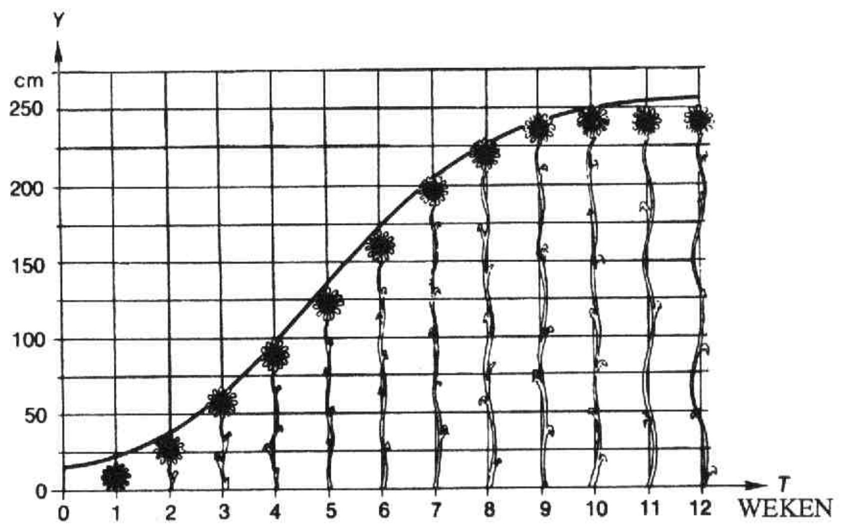
>b De tijd die de trein nodig heeft om de maximale snelheid van 120 km/u te halen is ongeveer 2 minuten. Het afremmen van de trein vergt minder tijd, ongeveer 1 minuut.
Probeer met behulp van deze gegevens de grafiek te verbeteren.

5. De helling van de hoekige treingrafiek (in opgave 4) is uitgezet in een grafiek.



>a Teken zelf een hellinggrafiek bij de verbeterde treingrafiek.
>b Wat is de betekenis van de hellinggrafiek in dit geval?

6. De groei van een zonnebloem in beeld gebracht.

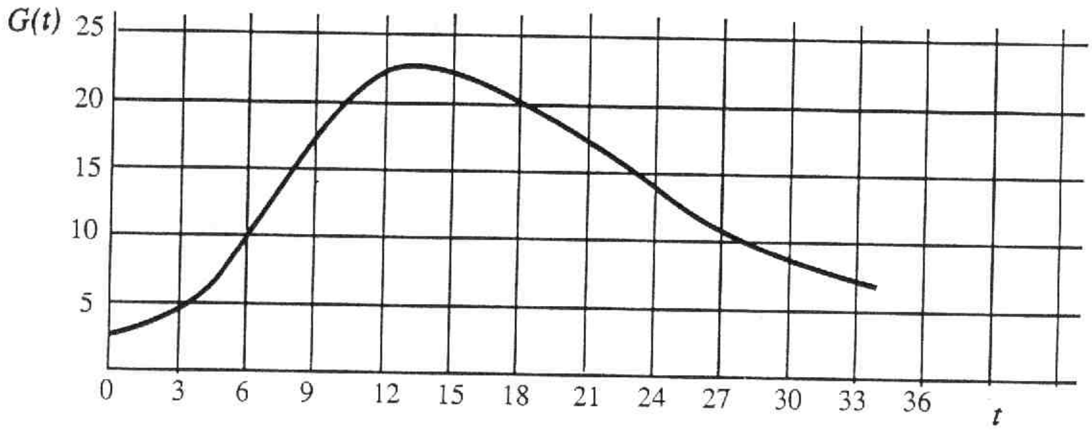


>a In welke week groeit de zonnebloemen het snelst?
>b Teken de hellinggrafiek bij de zonnebloemgrafiek.
>c Wat stelt de hellinggrafiek voor in dit geval?

TERUGBLIK

Hellingfuncties spelen een rol bij veranderingprocessen, zoals:
— voortbeweging van een voertuig (verandering van *plaats*)
— verhitting van een keteltje water (verandering van *temperatuur*)
— stijging van het water in de Rijn (verandering van *waterstand*)
In deze voorbeelden kunnen plaats, temperatuur en waterstand worden opgevat als *functies van de tijd.*
De hellingfunctie is in deze voorbeelden een *snelheidsfunctie*:
— snelheid van voortbeweging (eenheid bijvoorbeeld km/u)
— snelheid van verhitting (eenheid bijvoorbeeld ° C/min)
— snelheid van stijging van de waterstand (eenheid bijvoorbeeld m/dag).

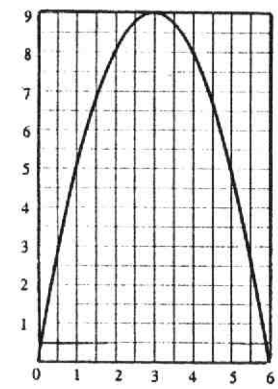
Opgave
Grafiek van het verloop van een griepepidemie.
$G(t)$ = het aantal grieppatienten op het tijdstip t.

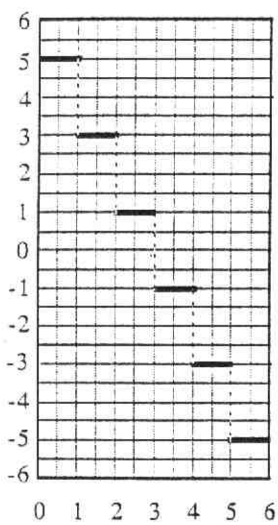


>a Op welk moment breidde de epidemie zich het sterkst uit?
>b Schets een grafiek van de hellingfunctie G' van G.
Welke betekenis kan je hier aan de hellingfunctie toekennen?

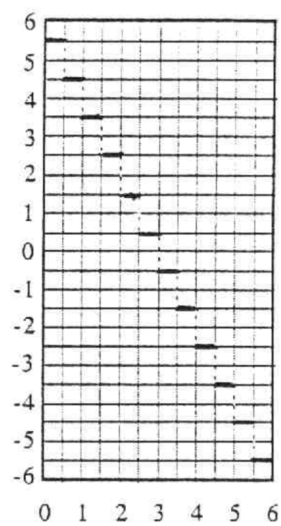
2 Berekening van hellingfuncties

Gegeven is de grafiek van $f(x) = -x^2 + 6x$ voor $0 \leq x \leq 6$.
In het boekje Hellingen is de hellinggrafiek bij deze bergparabool gevonden door de gemiddelde stijging te berekenen over deelintervallen.
De lengte van zo'n deelinterval noemen we Δx.
Hieronder zie je de hellinggrafieken voor $\Delta x = 1$, $\Delta x = 0{,}5$ en $\Delta x = 0{,}1$.

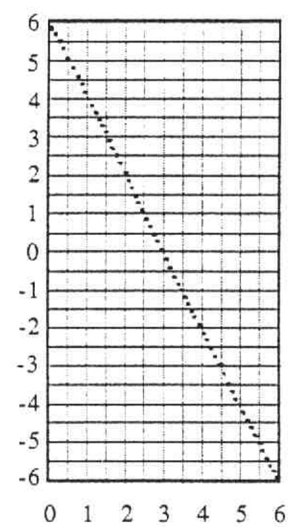




$\Delta x = 1$



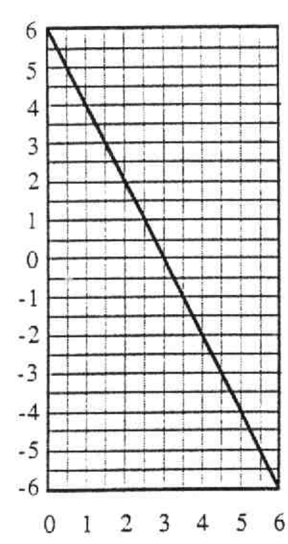
$\Delta x = 0{,}5$



$\Delta x = 0{,}1$

De hellinggrafiek gaat bij kleiner wordende Δx steeds meer lijken op een rechte lijn. Die rechte lijn is de grafiek van de *hellingfunctie* (of *afgeleide functie*) f' van f.

1. > Wat is volgens de grafiek, de formule waardoor f' wordt bepaald?



De formule voor de hellingfunctie f' bij $f(x) = -x^2 + 6x$ kan ook door berekening worden gevonden.
Met een computer kan over een serie intervallen de gemiddelde stijging worden berekend.
Hieronder zie je een BASIC-programma dat gemiddelde stijgingen berekent in de buurt van $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$.
Daarbij kan de intervallengte Δx (in het programma h genoemd) gevarieerd worden.

```
INPUT h
FOR x = 0 TO 6
y = -x * x + 6 * x
u = x + h
v = -u * u + 6 * u
d = v - y
gs = d/h
PRINT x, gs
NEXT x
```

De afgedrukte resultaten voor verschillende waarden van h.

	h = 0.01	h = 0.001	h = 0.0001
x	gs	gs	gs
0	5.99	5.999	5.9999
1	3.99	3.999	3.9999
2	1.99	1.999	1.9999
3	-0.01	-0.001	-0.0001
4	-2.01	-2.001	-2.0001
5	-4.01	-4.001	-4.0001
6	-6.01	-6.001	-6.0001

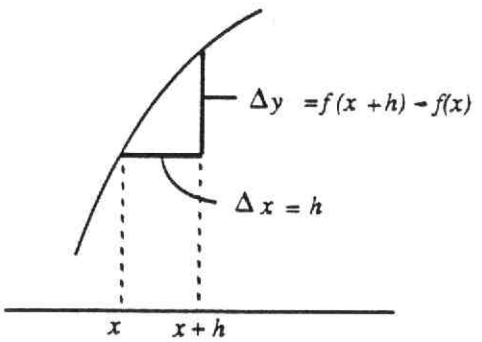
2. De gemiddelde stijging van f in een klein interval geeft een benadering voor de *exacte waarde* van de hellingscoëfficiënt.

>a Bekijk de gemiddelde stijgingen van $f(x) = -x^2 + 6x$ die door de computer zijn berekend.
Maak een tabel van de (exacte) hellingscoëfficiënt voor $x = 0,1...,6$.

>b Controleer je resultaat in de grafiek bij opgave 1.

De berekening van de computer kan worden beschreven met algebra.
De gemiddelde stijging van f op een interval $[x, x + h]$ is gelijk aan:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$



Er geldt:

$$\begin{array}{lll} f(x+h) & = -(x+h)^2 & + 6(x+h) \\ f(x) & = -x^2 & + 6x \quad - \\ \hline f(x+h) - f(x) & = -2hx & + 6h - h^2 \end{array}$$

Dus:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{-2hx}{h} + \frac{6h}{h} - \frac{h^2}{h} = -2x + 6 - h.$$

3. >a Werk $f(x+h)$ uit en controleer dat het verschil $f(x+h) - f(x)$ gelijk is aan $-2hx + 6h - h^2$.
   >b Controleer ook de berekening van de gemiddelde stijging $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.
   >c Voor h kan achtereenvolgens 0,01; 0,001; 0,0001; enz. worden gekozen.
   Welke uitkomst wordt door de gemiddelde stijgingen benaderd?

Uit opgave 3 kan worden geconcludeerd:

Bij de functie $f(x) = -x^2 + 6x$ hoort de hellingfunctie $f'(x) = -2x + 6$.

Opmerking:
De gemiddelde stijging $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ is het quotiënt van twee *differenties* (= verschillen) en wordt daarom *differentiequotiënt* genoemd.

Als Δx (of h) een klein getal is, geeft $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ een benadering voor de exacte waarde van de hellingscoëfficiënt van de grafiek (en dus van de raaklijn!)

4. Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + 2$.

>a Bereken de differentie $f(x+h) - f(x)$.

>b Bereken het differentiequotiënt $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ achtereenvolgens voor $h = 0{,}03$; $0{,}003$; $0{,}0003$.

>c Verklaar uit >b dat geldt: $f'(x) = \frac{2}{3}x$

>d Teken de grafieken van f en f' naast elkaar.

>e De grafiek van f snijdt de y-as in (0,2).
Hoe groot is de hellingscoëfficiënt van de grafiek in dat punt?

>f De grafiek van f snijdt de horizontale lijn door (0,5) in de punten A en B.
Bereken de hellingscoëfficiënt van de grafiek in elk van die punten.

>g Teken de raaklijnen in A en B aan de grafiek van f.
In welk punt snijden die elkaar?

De methode om via $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ de hellingfunctie te vinden kan ook op een willekeurige kwadratische functie worden toegepast:

Het resultaat is:

$$\text{Als } f(x) = ax^2 + bx + c\text{, dan } f'(x) = 2ax + b$$

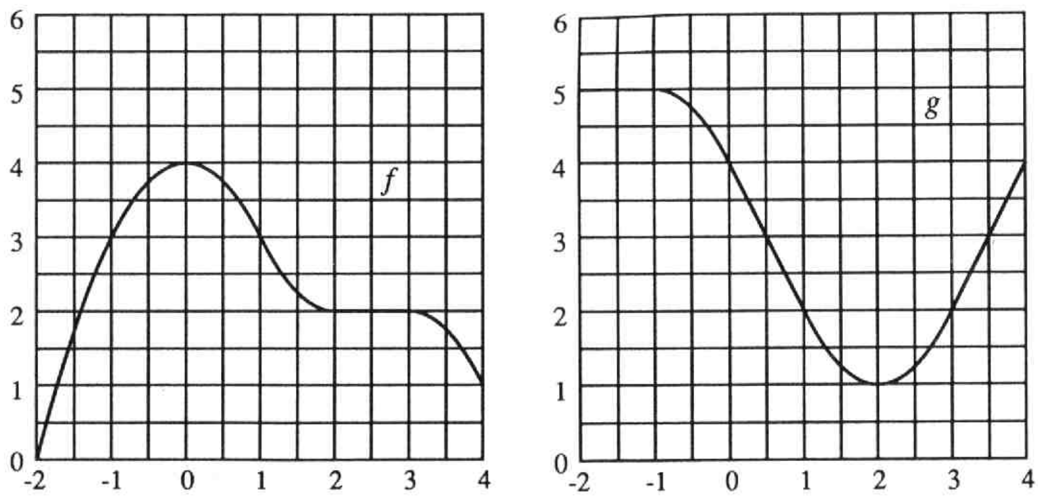
5. > Controleer of deze regel klopt voor de functies uit de vorige opgaven, dus voor $f(x) = -x^2 + 6x$ en voor $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + 2$.

6. Geef de formule voor de hellingfunctie f' in de volgende gevallen:

>a $f(x) = 10x^2 + 5x + 1$	>d $f(x) = x - x^2$
>b $f(x) = 3x^2 - 5x$	>e $f(x) = 1\frac{1}{2}x^2 - 2\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$
>c $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 18$	>f $f(x) = 3x - 5$

7. De functies f en g zijn opgebouwd uit stukjes parabool en rechte lijn.

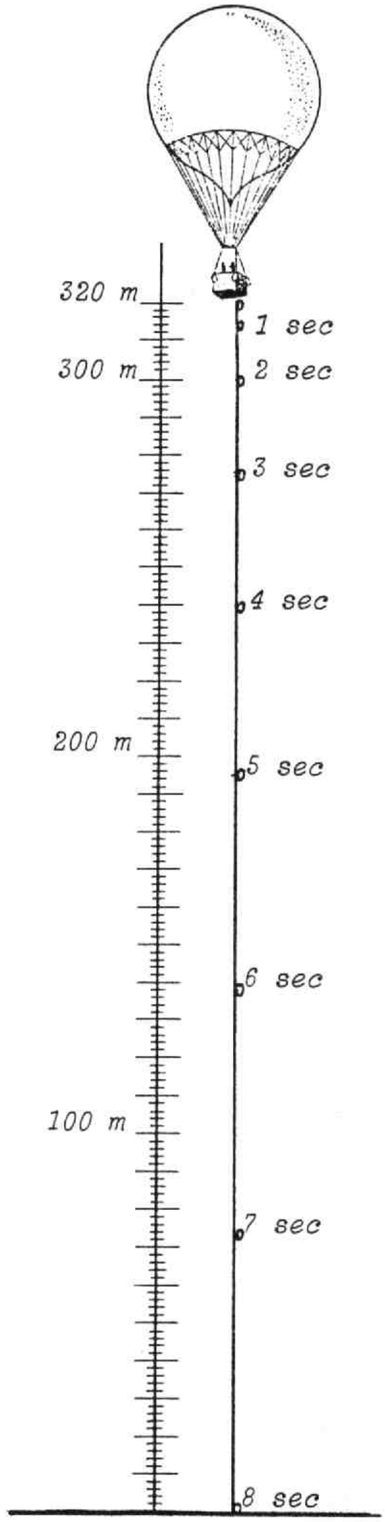
> Teken de grafieken van de hellingfunctie f' en g'.



Vrije val

Uit een ballon op 320 m hoogte wordt een zandzakje geworpen.
In de tekening kun je zien, waar dat zakje zich na 1, 2, 3, ... 8 seconden bevindt.

8. >a Teken een grafiek die het verband aangeeft tussen de tijd die het zakje onderweg is en de hoogte waarop het zich bevindt.
(Neem op de horizontale as 1 cm voor 1 sec. en op de verticale as 1 cm voor 20 m.)
>b Hoe kun je in die grafiek zien dat het zakje steeds sneller valt?



Bij een vrije val letten we meestal op de *valweg* (= gevallen afstand) als functie van de tijd.

9. >a Teken de grafiek van die functie.

Via experimenten is komen vast te staan dat de valweg s als functie van de tijd t bij benadering gegeven wordt door de formule:

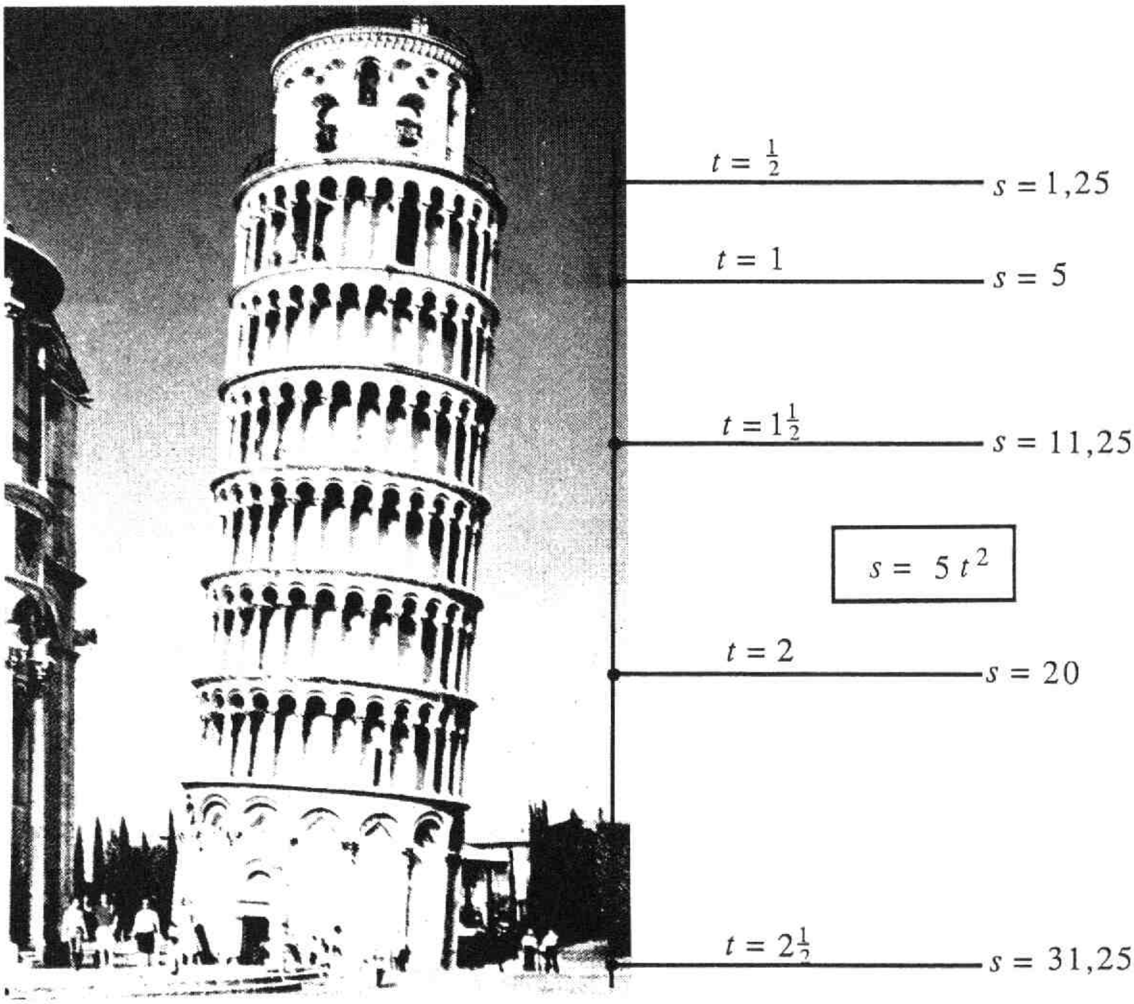
$$s = 5t^2$$

>b Hoe kun je nu de hoogte h van het zakje als functie van t met een formule beschrijven?

Precies 1 sec. na het loslaten van het eerste zakje laat men een tweede zakje uit de ballon vallen.

10. >a Teken in de figuur bij 9a de grafiek van de valweg van het tweede zakje als functie van de tijd.
>b Hoeveel seconden later dan het eerste zakje bereikt het tweede zakje de grond?
>c Teken de grafiek van het *hoogteverschil* tussen de twee zakjes als functie van de tijd, op het tijdsinterval van 1 tot en met 8 seconden.

De beroemde Italiaanse astronoom en natuurkundige Galileï ontdekte omstreeks het jaar 1585 de formule die de ongeremde val op aarde (de zogenaamde vrije val) beschrijft. Die formule luidt zoals op blz. 11: $s = 5t^2$. De constante 5 in de formule is door afronding verkregen (vaak werkt men met het meer nauwkeurige getal 4,9). Galilleï deed zijn ontdekking langs proefondervindelijke weg. Het verhaal zegt dat hij zijn proeven deed met kleine kanonskogels die hij liet vallen van de scheve toren van Pisa.



Bij de functie $s(t) = 5t^2$ hoort de hellingfunctie $s'(t) = 10t$.
In hoofdstuk 1 heb je gezien dat de hellingfunctie bij een tijd-afstand-functie de bijbehorende tijd-snelheidsfunctie is.
Omdat de snelheid meestal wordt genoteerd met de letter v, geldt voor de vrije val:

$$v = 10t$$

Men noemt dit de formule voor de *valsnelheid*.

11. > Met welke snelheid treft het zandzakje uit de vorige opgaven de grond?

12. > Als in de formule voor de vrije val gewerkt wordt met de constante 4,9, wat is dan de bijbehorende formule voor de valsnelheid?

13. De valsnelheid v bij vrije val kan ook worden uitgedrukt in de valweg s.

>a Welke formule levert dat op?
(Aanwijzing: gebruik de formules $s = 5t^2$ en $v = 10t$ en druk eerst t uit in s.)

>b Teken de grafiek van v als functie van s.

De foto toont een parachutiste in de zogenaamde kruishouding. In die houding ondervindt zij een maximale luchtweerstand, waardoor de valsnelheid niet hoger wordt dan zo'n 200 km/u. Als de parachutiste ca 800 m boven de aarde is, wordt het hoog tijd om de parachute te openen. Volgens de veiligheidsvoorschriften moet de parachute open zijn op 600 m afstand van de aarde! Om dit in de gaten te kunnen houden heeft zij een hoogtemeter aan de pols.

14. Lees de tekst bij de foto.
Veronderstel dat de parachutiste aanvankelijk een vrije val maakt en dat zij na het bereiken van de maximale snelheid in de kruishouding nog een poosje blijft vallen zonder de parachute te openen.

>a Schets de grafieken van zowel de valweg als de valsnelheid als functie van de tijd voor de eerste 10 seconden van de val zonder parachute.

>b Stel dat de parachutiste al na 10 seconden de parachute opentrekt. Daardoor wordt zij afgeremd tot een snelheid van 30 km/u.
Hoe kun je de grafieken van valweg en valsnelheid voortzetten?

TERUGBLIK

De (exacte) hellingscoëfficiënt in een punt van een grafiek, kan worden benaderd door de 'gemiddelde stijging' in een klein interval.
De gemiddelde stijging van de functie f op het interval $[x, x+h]$ is gelijk aan:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Dit quotient wordt ook wel *differentiequotient* genoemd.

Door nu te onderzoeken tot welke uitkomst $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ nadert als h zeer klein genomen wordt, kan men $f'(x)$ bepalen.

Bij een kwadratische functie $f(x) = ax^2 + bx + c$ levert dat op:
$f'(x) = 2ax + b$.

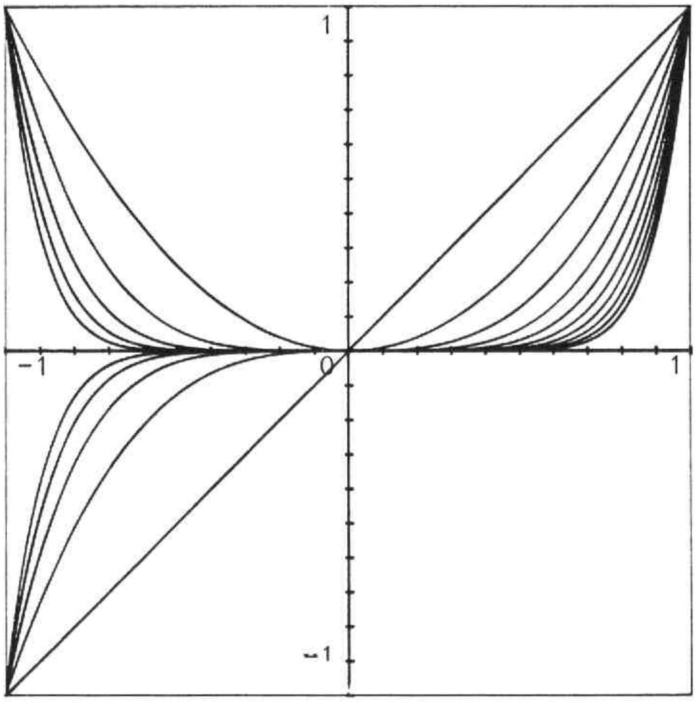
Het vinden van de hellingfunctie bij een door een formule gegeven functie f wordt *differentiëren* genoemd.

Opgave
De hoogte s van een vuurpijl die recht omhoog wordt geschoten voldoet aan de formule $s(t) = 60t - 5t^2$ (t is de tijd in seconden, verstreken na het afschieten).

>a Geef de formule van $s'(t)$.
>b Wat is de betekenis van $s'(t)$?
>c Zolang $s'(t)$ positief is, gaat de pijl omhoog.
Wanneer bereikt de pijl zijn hoogste punt? Hoe hoog is dat?

3 Het differentieren van machtsfuncties

1. Met een computer zijn de grafieken getekend van de functies $f(x) = x, x^2, x^3, ..., x^{10}$ op het interval [−1;1].
Kortom van $f(x) = x^n$ voor $n = 1, 2, ..., 10$.



>a Er zijn twee punten, namelijk (0,0) en (1,1) die op alle tien grafieken liggen. Verklaar dat door een berekening.

>b Verklaar ook waarom vijf grafieken door (-1,1) en vijf door (-1,-1) gaan.

>c Neem een velletje doorschijnend papier en trek de grafiek over van $f(x) = x^{10}$.

>d Dezelfde opdracht voor $f(x) = x^5$.

De functies waarvan je hierboven de grafieken ziet, zijn *machtsfuncties*.
In dit hoofdstuk leer je hoe je een hellingsfunctie kunt differentiëren, dat wil zeggen: hoe je de hellingfunctie bij een machtsfunctie kunt bepalen.

2. *De raaklijnmethode*
Gegeven is de functie $f(x) = x^3$.

>a Neem onderstaande tabel over en vul in:

x	0	1	2	3	4	5	-1	-2	-3	-4	-5
y											

>b Teken de grafiek van de functie voor $-5 \leq x \leq 5$.
Kies daarbij de schaalverdeling zo dat je horizontaal 10 cm en verticaal 25 cm nodig hebt.

>c Bepaal zo goed mogelijk met de raaklijnmethode de hellingscoëfficiënt van de grafiek in de punten met $x = 0, 1, 2, 3, 4$ (Denk er aan dat de schaal op de y-as 10 keer zo klein is als de schaal op de x-as).

>d Neem de tabel over en vul de geschatte hellingscoëfficiënt in.

x	0	1	2	3	4	-1	-2	-3	-4
hc									

>e Schets de hellinggrafiek bij f.
Neem weer de schaal op de verticale as 10 keer zo klein als op de horizontale as.

3. *De rekenmethode*
Bekijk opnieuw de functie $f(x) = x^3$.
Als je de hellingscoëfficiënt in $x = 1$ wilt berekenen, kun je een klein interval kiezen in de buurt van $x = 1$ en met je rekenmachientje het differentiequotiënt op dat interval (= de gemiddelde stijging) bepalen.

>a Neem het interval [1;1,01].
Bereken de gemiddelde stijging van f op dit interval.

>b Doe hetzelfde voor het interval [0,99;1].

Uit >a en >b zou je kunnen vermoeden dat de hellingscoëfficiënt van de grafiek in het punt met $x = 1$ gelijk is aan 3.
Een meer nauwkeurige benadering van die hellingscoëfficiënt kun je krijgen door een klein interval *aan weerszijden* van $x = 1$ kiezen.

>c Bereken het differentiequotiënt van f over het interval [0,99;1,01].
Pas op: de intervallengte is nu 0,2.

>d Gebruik de laatste methode om ook de hellingscoëfficiënt van de grafiek te schatten in de punten met $x = 2$ en $x = 4$.
Vergelijk je uitkomsten met die van opgave 2.

In hoofdstuk 2 heb je gezien hoe met een computer in één klap een hele serie hellingscoëfficiënten worden berekend. Daarbij kan de nauwkeurigheid verbeterd worden door de intervallen kleiner te maken.
Hieronder zie je een BASIC-programma dat hellingscoëfficiënten berekent voor $f(x) = x^3$ en waarbij de intervallengte (= h) gevarieerd kan worden.

```
INPUT h
FOR x = 0 TO 10
a = x + h/2
b = x - h/2
d = a * a * a - b * b * b
gs = d/h
PRINT x, gs
NEXT x
```

De afgedrukte resultaten voor verschillende waarden van h:

	h = 0.02	h = 0.01	h = 0.001
x	gs	gs	gs
0	0.0001	0.000025	0.00000025
1	3.0001	3.000025	3.00000025
2	12.0001	12.000025	12.00000025
3	27.0001	27.000025	27.00000025
4	48.0001	48.000025	48.00000025
5	75.0001	75.000025	75.00000025
6	108.0001	108.000025	108.00000025
7	147.0001	147.000025	147.00000025
8	192.0001	192.000025	192.00000025
9	243.0001	243.000025	243.00000025
10	300.0001	300.000025	.300.00000025

4. Uit de tabel kun je zien dat de exacte hellingscoëfficiënten van de grafiek van $f(x) = x^3$ in de punten met $x = 0, 1, 2, \ldots 10$ achtereenvolgens gelijk zijn aan 0, 3, 12, ..., 300.

>a Weet je nu ook de exacte hellingscoëfficiënten in de punten met $x = -1, -2, \ldots, -10$?

>b De hellingfunctie f' is een kwadratische functie.
Door welke formule wordt f' bepaald?

Later zullen we bewijzen:

Bij elke machtsfunctie hoort een hellingfunctie van een graad die 1 lager is dan de graad van de oorspronkelijke functie.

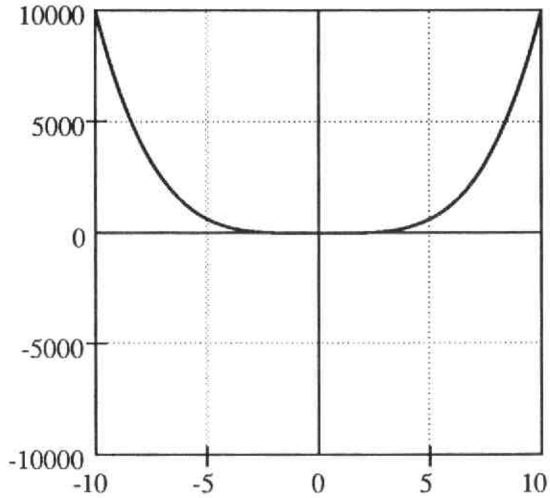
5. Computerplaatje van de grafiek van $f(x) = x^4$ op het interval $[-10;10]$.
De schaalverdeling op de y-as is om begrijpelijke redenen aangepast.

>a Het lijkt er op of de grafiek van f tussen pakweg -3 en 3 horizontaal is. Verklaar waarom schijn bedriegt.

>b De grafiek van f is natuurlijk symmetrisch.
Waarom is dat zo natuurlijk?

>c Bereken het differentiequotiënt van f in een klein interval om $x = 1$.
Ook om $x = 2$.

>d De hellingfunctie f' is van de vorm: $f'(x) = ax^3$.
Bepaal a.



Van de eerste vier machtsfuncties weet je nu de hellingfunctie:

$f(x)$	$f'(x)$
x	1
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
x^4	$4x^3$

6. Je mag aannemen dat de begonnen regelmaat zich voortzet.
Neem de tabel over en vul in:

$f(x)$	$f'(x)$
x^5	
x^6	
x^7	
x^8	
x^9	
x^{10}	

Opmerking:
Je kunt de resultaten van opgave 6 controleren met behulp van het programma VU-GRAFIEK. Op het menu van dat programma staat onder punt 4: differentiëren.
Via het differentiequotiënt produceert het programma een benaderende hellinggrafiek (in het programma 'differentiekromme' genoemd). Door de 'afgeleide functie' op te geven, kun je controleren of je vermoeden juist is.

7. >a Wat zal de hellingfunctie zijn van $f(x) = x^{1988}$?
>b En in het algemeen van $f(x) = x^n$ (n positief geheel)?

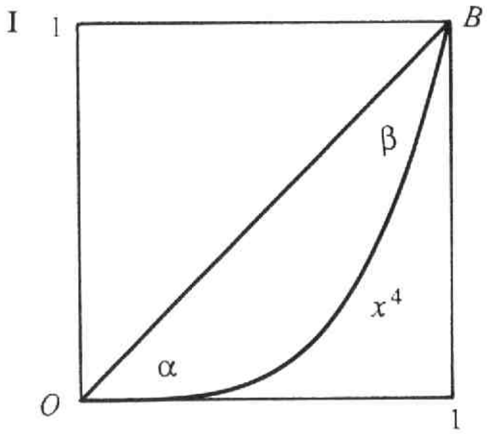
8. Teken de grafiek van $f(x) = x^3$ op het interval [0,1]. (Neem langs beide assen de eenheid 5 cm.)
P is het punt $(\frac{1}{2},\frac{1}{8})$, Q is het punt (1,1).
Gebruik bij de beantwoording van de volgende vragen de hellingfunctie van f.

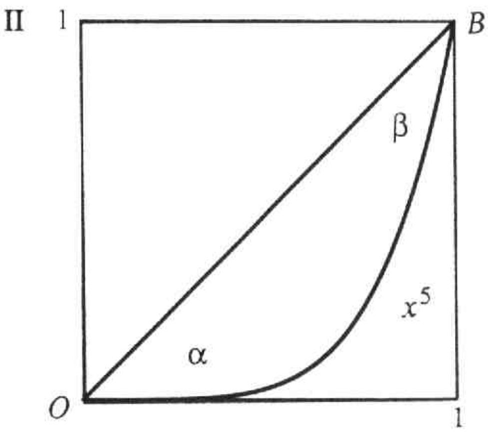
>a Hoe groot is de hellingscoëfficiënt van de grafiek van f in het punt P? En hoe groot is de hellingshoek van de grafiek in dat punt? (Controleer je uitkomst in de figuur!)

>b Hoe groot is de hellingshoek van de grafiek van f in het punt Q?

>c In het punt P is de hellingshoek kleiner dan 45°, in Q is de hellingshoek groter dan 45°.
Ergens tussen deze punten is er een punt op de grafiek waarin de hellingshoek van de grafiek precies gelijk is aan 45°.
Bereken de coördinaten van dat punt in twee decimalen nauwkeurig.

9. Hieronder zie je de grafiek van $f(x) = x^4$ (I) en van $f(x) = x^5$ (II) op het interval [0,1].





De grafieken snijden de lijn $y = x$ onder de hoeken α en β.
De hoeken α en β zijn de hoeken die de raaklijnen in O en B maken met de lijn OB.

> Bereken α en β in de beide gevallen.

10. >a Teken de grafiek van $f(x) = x^6$ op het interval $[-1,1]$ (neem de eenheid 5 cm).

>b Teken nauwkeurig de raaklijnen in de punten $A(1,1)$ en $B(-1,1)$ aan de grafiek.

>c Geef een vergelijking van elk van die raaklijnen.

>d In welk punt snijden die raaklijnen elkaar?

TERUGBLIK

Hellingfuncties (afgeleide functies) van de machtsfuncties $y = x^n$ worden gevonden door de *graad* van de functie met 1 te verlagen en de zo ontstane macht met de oorspronkelijke graad ($= n$) te vermenigvuldigen.

Kortweg:

$$\text{Als } f(x) = x^n, \text{ dan } f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

Met deze regel ben je in staat alle machtsfuncties vlot te differentiëren.

Opgaven

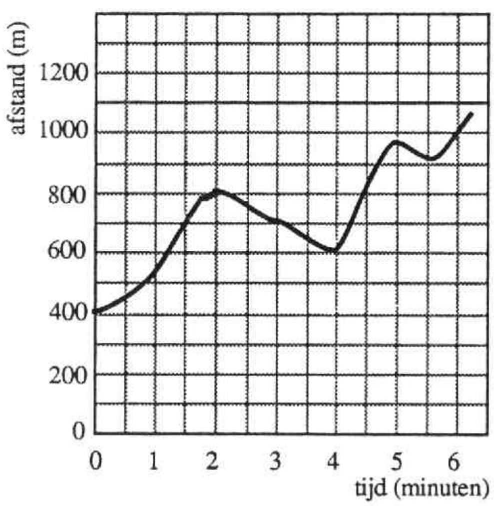
>a Klopt de regel ook voor $n = 1$?
>b Gegeven de functie $f(x) = x^8$.
Is de helling in het punt met $x = 2$ groter of kleiner dan 1000?
Is de helling in het punt met $x = \frac{1}{2}$ groter of kleiner dan 0,1?

4 Plus en maal een constante

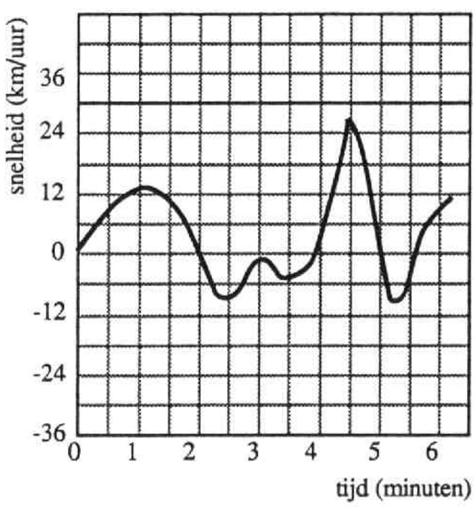
In dit hoofdstuk leer je wat er gebeurt met de hellingfunctie als bij een functie een constante wordt opgeteld of als een functie met een constante wordt vermenigvuldigd.
Aan de hand van enkele opgaven zul je de regels zelf ontdekken; die regels kun je vervolgens toepassen bij het differentiëren. Ook bij het omgekeerde probleem: hoe vind je bij een hellingfunctie de oorspronkelijke functie terug, zijn die regels erg nuttig.

1. Een goederentrein van 100 m lengte is aan het rangeren. In fig. 1 zie je de tijd-afstand-grafiek van de locomotief.

figuur 1



figuur 2



>a Hoe kun je in dezelfde figuur de tijd-afstand-grafiek van de laatste wagon tekenen?
>b In fig. 2 zie je de tijd-snelheid-grafiek van de locomotief. (De snelheid bij het achteruit-rijden is negatief gerekend.)
Wat weet je van de tijd-snelheid-grafiek van de laatste wagon?

2. >a Teken in één figuur de grafieken van de functies $y = x^3$; $y = x^3 + 2$; $y = x^3 - 4$.
>b Teken in een tweede figuur de grafieken van de hellingfucties bij deze functies.

3. Gegeven zijn twee functies, zeg f en g.
De functie g is gelijk aan de functie f plus een *constante*.

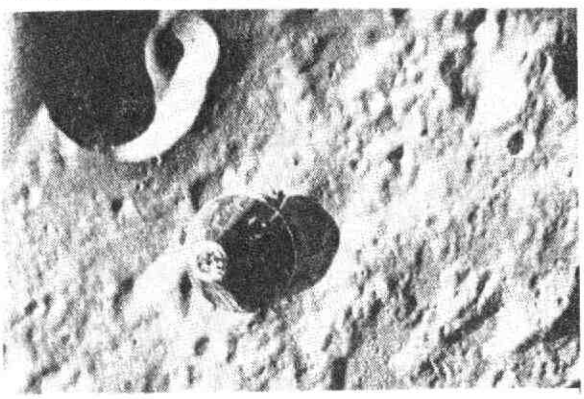
>a Wat weet je van de grafieken van f en g?
>b Wat weet je van de hellinggrafieken van f en g?

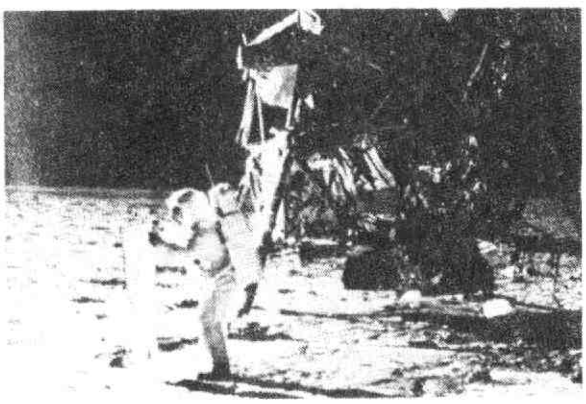
4. Zoals je weet, wordt voor de vrije val op aarde vaak de formule $s = 5t^2$ gebruikt.
Op de maan val je zachter dan op aarde.
De valtijd-valweg-functie beantwoordt op de maan (ongeveer) aan de formule:

$$s = 0{,}8t^2$$

Een ruimtevaarder laat van 80 meter hoogte een maansteen vallen.

> Met welke snelheid ploft die op de maan?





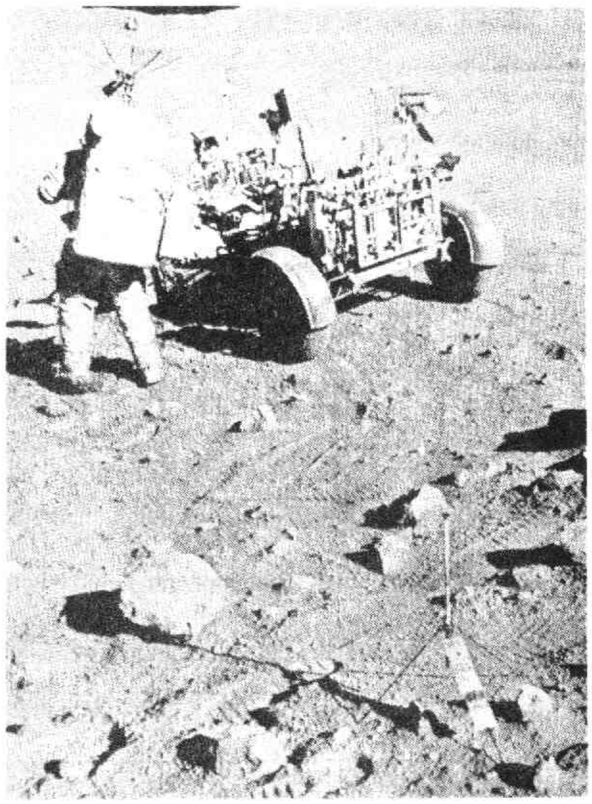
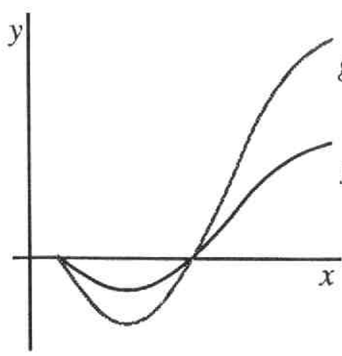


Foto links onder: Edwin Aldrin op de maanbodem gefilmd door Neil Amstrong die als eerste mens de maanbodem had betreden (juli 1969).
Foto links boven: Het besturings- en dienstcompartement van de Apollo-16 die in 1972 op de maan landde.
Foto rechts: Charles Duke met de maanauto van de Apollo-16.

5. Gegeven zijn twee functies, zeg f en g.
De tweede functie is tweemaal de eerste (zie figuur).

> Wat kun je zeggen over het verband tussen de hellingfuncties van g en f?

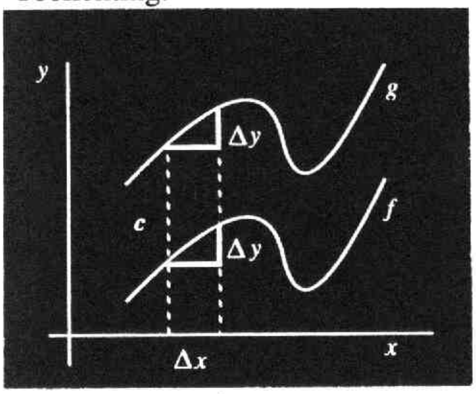


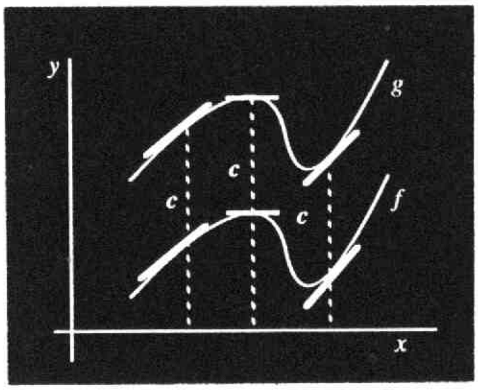
In de opgaven 1 t/m 5 zitten twee belangrijke regels verstopt.

Regel 1:

Als bij een functie een constante wordt opgeteld, verandert de hellingfunctie niet.

Toelichting:



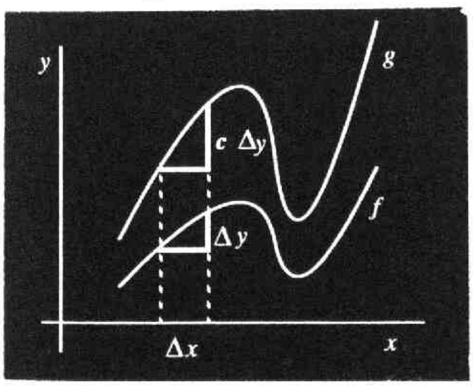


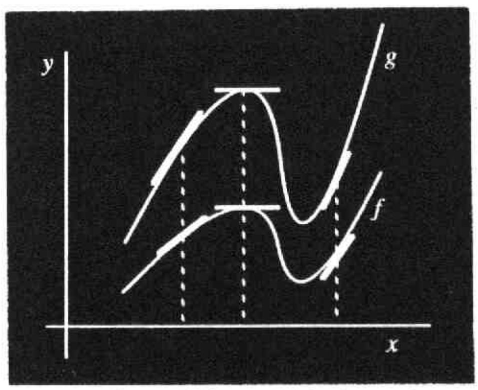
De toenames van f en g op elk interval (hoe klein ook) zijn gelijk. → De grafieken van f en g zijn overal even steil.

Regel 2:

Als een functie met een constante wordt vermenigvuldigd, wordt ook de hellingfunctie met die constante vermenigvuldigd.

Toelichting:





De toename van g is gelijk aan c maal de toename van f (op elk interval) → De grafiek van g is 'c maal zo steil' als de grafiek van f .

6. Pas de regels 1 en 2 toe en differentieer de volgende functies.

>a $f(x) = 25x^3$
>b $f(x) = x^4 + 25$
>c $f(x) = x^4 - 10$
>d $f(x) = -10x^4$
>e $f(x) = 25x^3 + 10$
>f $f(x) = 8 - x^4$
>g $f(x) = \frac{1}{8}x^4$
>h $f(x) = 3 - \frac{1}{6}x^6$

7. Dezelfde opdracht voor:

>a $f(x) = 10x^5$
>b $f(x) = (10x)^4$
>c $f(x) = \frac{x^3}{6} + 2$
>d $f(x) = (\frac{x}{2})^3 - 1$

8. Dezelfde opdracht voor:

>a $f(x) = (x-1)(x+1)$
>b $f(x) = (x-1)(x+1)(x^2+1)$
>c $f(x) = (x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$
>d $f(x) = (x-2)(x+2)(x^2+4)(x^4+16)$

9. Van een functie f is de hellingfunctie f' gegeven: $f'(x) = 3x^2$.

>a Teken een grafiek van f en een grafiek van f'.
>b Waarom zijn er verschillende mogelijkheden voor de grafiek van f?

10. Van een functie f is de hellingfunctie f' gegeven door: $f'(x) = 8x^3$.

>a Door welke formule wordt f gegeven?
>b Het is mogelijk dat alle leerlingen in je klas verschillende functies hebben gevonden, en dat toch alle antwoorden goed zijn. Verklaar.

11. Van een functie f is gegeven dat de grafiek door (0,1) gaat.
De hellingfunctie is bepaald door $f'(x) = 5x^4$.

> Welke formule past bij f?

12. > Dezelfde opdracht als 11, maar nu gaat de grafiek door (1,5) en geldt: $f'(x) = 15x^4$.

13. Gegeven is de functie $f(x) = 0{,}1x^4 + 2$.

>a Teken een grafiek van f.
>b A is het punt op de grafiek van f met x-coördinaat 2.
Teken de raaklijn aan de grafiek van f in het punt A.
Geef ook een vergelijking van die raaklijn.
>c Er is één raaklijn aan de grafiek van f die de raaklijn in A snijdt op de y-as. Welke raaklijn is dat?

TERUGBLIK

Regel voor het optellen van een constante:

$$\text{Als } s(x) = f(x) + c\text{, dan } s'(x) = f'(x)$$

Regel voor het vermenigvuldigen met een constante:

$$\text{Als } s(x) = c \cdot f(x)\text{, dan } s'(x) = c \cdot f'(x)$$

Bij een gegeven hellingfunctie zijn oneindig veel 'oorspronkelijke' functies (of 'primitieve' functies) te vinden.

Voorbeeld: als $f(x) = 2x^3$, dan kan gelden:
$f(x) = \frac{1}{2}x^4$, $f(x) = \frac{1}{2}x^4 + 3$, $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 5$, enz.

Kortom: $f(x) = \frac{1}{2}x^4 + c$
Deze formule geeft alle mogelijkheden voor f.

Opgave

\>a Differentieer $f(x) = cx^n + \text{d}$.
\>b Gegeven $f'(x) = 3x^4$.
Bepaal een formule voor alle mogelijke functies f.

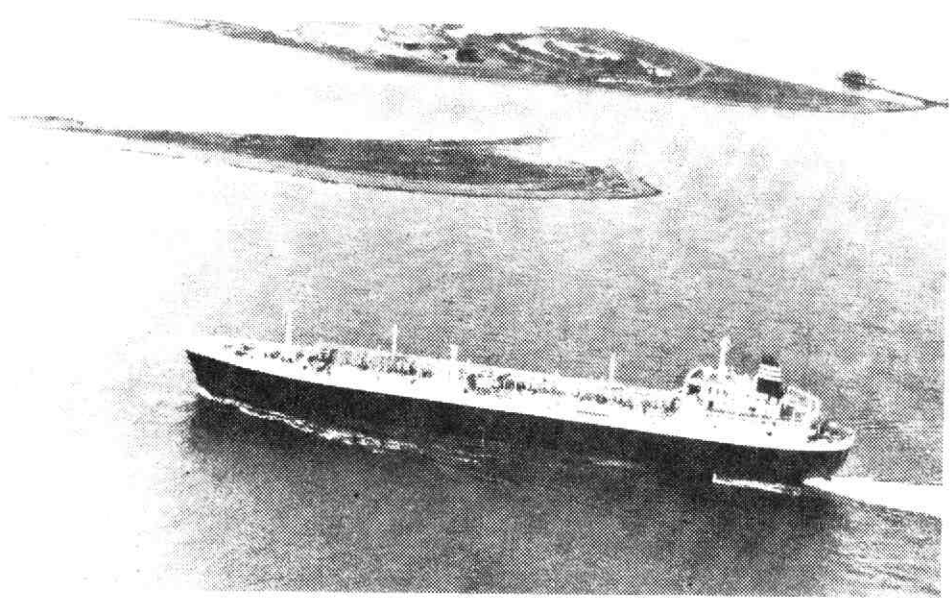
5 Veeltermfuncties

Functies van de vorm:

$$f(x) = 3 + 5x + 7x^2$$
$$f(x) = x - x^2 + 2x^3 - \tfrac{1}{2}x^4$$
$$y = x^6 - 50$$
$$y = (x^3 - 1)(x^6 + 1)$$

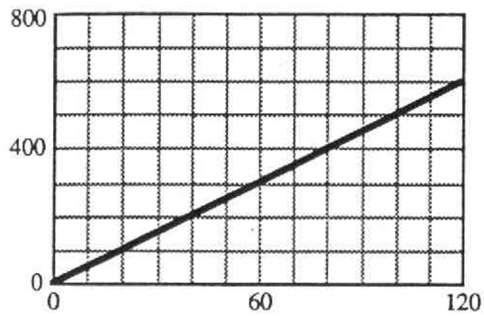
worden veeltermfuncties genoemd.
Veeltermfuncties zijn opgebouwd met behulp van machtsfuncties.
Door een aantal machtsfuncties stuk voor stuk te vermenigvuldigen met een constante en vervolgens op te tellen, ontstaat een veeltermfunctie.
De graad van een veeltermfunctie wordt bepaald door de term met de hoogste graad. De graad van de hierboven opgeschreven functies is achtereenvolgens: 2, 4, 6 en 9.
Omdat je al gezien hebt hoe je de termen van een veelterm stuk voor stuk kunt differentiëren, hoef je nog slechts te weten hoe de hellingfunctie van de *som* van een aantal functies wordt gevonden.

1. Een mammoet-tanker heeft een lengte van een paar honderd meter. De grootste ter wereld is ruim 400 m lang (en ruim 60 meter breed).
   Aan boord van zo'n tanker kan de bemanning beschikken over 'witte' fietsen.

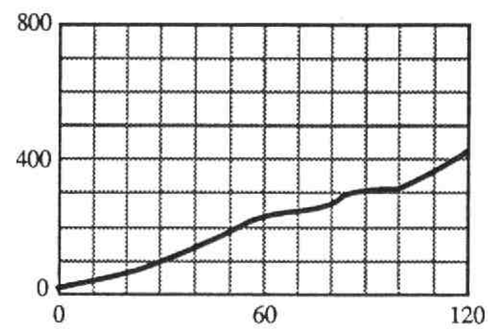


   In figuur 1 zie je de tijd-afstand-grafiek van de achtersteven van een mammoet-tanker gedurende twee minuten vaartijd.
   In diezelfde periode legt een bemanningslid op de fiets de afstand van achterdek naar voordek af (zie figuur 2).

figuur 1



figuur 2



>a Hoeveel meter heeft die fietser op het dek afgelegd in die twee minuten?
En hoeveel meter heeft hij hemelsbreed afgelegd?

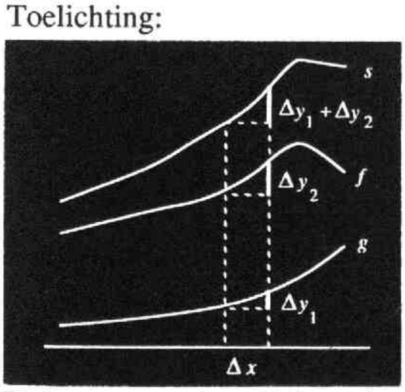
>b Stel:
$f(t)$ = de afgelegde afstand van de fietser op het dek (na t sec.);
$g(t)$ = de afgelegde afstand van de boot op zee (na t sec.);
$s(t)$ = de afgelegde afstand hemelsbreed van de fietser (na t sec.).
Welke betrekking bestaat er tussen $s(t)$, $f(t)$ en $g(t)$?

>c Wat stellen $f'(t)$, $g'(t)$, $s'(t)$ respectievelijk voor?
En welke betrekking bestaat er tussen $f'(t)$, $g'(t)$ en $s'(t)$?

De betrekking die in 1>c wordt bedoeld is de zogenaamde somregel van de differentiaalrekening.
De regel zegt dat de hellingfunctie van de som van twee functies wordt gevonden door de hellingfuncties op te tellen.
Kort en duidelijk:

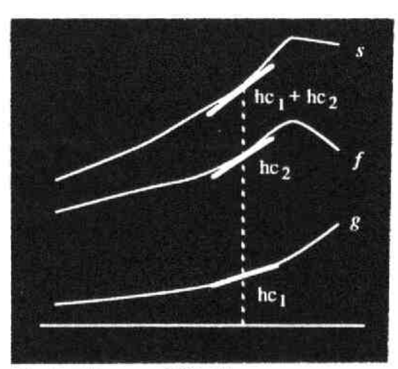
De hellingfunctie van $f + g$ is gelijk aan $f' + g'$.

Toelichting:



De toename van s op elk interval is gelijk aan de toename van f plus de toename van g.

→



De hellingscoëfficiënt van s is overal gelijk aan de som van de hellingscoëfficiënten van f en g.

De somregel geldt vanzelfsprekend ook voor de som van meer dan twee functies.
Voorbeeld:

$$s(x) = 5x^2 + x^4 - 3x^6$$

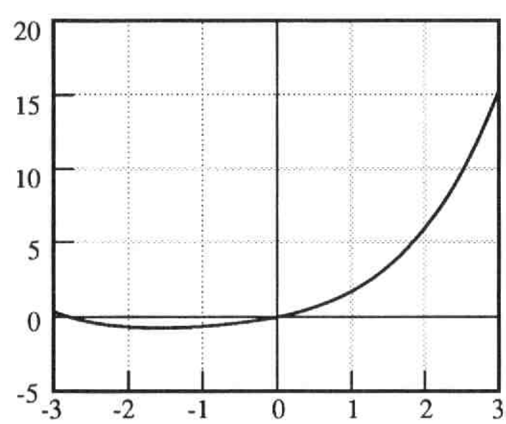
$$s'(x) = 10x + 4x^3 - 18x^5$$

2. > Differentieer de volgende functies:

$f(x)$	$f'(x)$
$x^2 + 10x$	
$2x^3 + 3x^2$	
$\frac{3}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 - 1$	
$-x^5 + x^3 - x + 2$	
$x^4 + 4x^2 + 4$	
$(x^2 + 2)^2$	
$1990x - 2000$	
$x^2(3x - 5)$	
$x(1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{5}x^4)$	
$ax^2 + bx + c$	

3. > Differentieer ook de veeltermfunctie die je op blz. 26 bent tegengekomen.

4. Met een computer is de grafiek getekend van $f(x) = \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x$.
De grafiek moet gaan door het punt (2,6).



>a Controleer dit door een berekening.
>b Bereken de hellingscoëfficiënt van de grafiek in (2,6).
>c Geef een vergelijking van de raaklijn in dat punt.

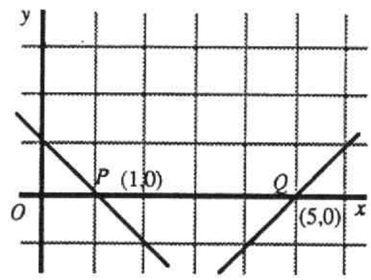
5. Van de functie f is de hellingfunctie f' gegeven door: $f'(x) = 2x - 3$.
De grafiek van f gaat door de oorsprong.
Teken de grafiek van f.

6. Van de functie f is gegeven: $f(3) = 2$.
De hellingscoëfficiënt in het punt (x,y) is gelijk aan $1 - x^2$.

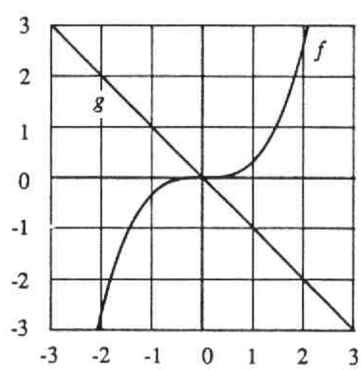
>a Bepaal de functie f.
>b In welke punten heeft de grafiek van f een horizontale raaklijn?

7. Van de parabool $y = ax^2 + bx + c$ zijn twee raaklijnen met de bijbehorende raakpunten (P en Q) gegeven.

>a Bepaal de hellingfunctie bij de parabool.
>b Teken de parabool.



8. In de figuur zijn getekend de grafieken van $f(x) = \frac{1}{3}x^3$ en $g(x) = -x$.



Met behulp van die grafieken ga je de grafiek van de somfunctie $s(x) = f(x) + g(x)$ tekenen.

>a Teken de grafieken van f en g over op mm-papier.
>b Bepaal de punten van de 'somgrafiek' voor 0, $\frac{1}{2}$, 1, $1\frac{1}{2}$, 2, $-\frac{1}{2}$, -1, $-1\frac{1}{2}$, -2.
>c Bereken de exacte waarden van x waarvoor geldt: $s(x) = 0$.
>d Bereken de coördinaten van de punten op de grafiek van s, waarin de raaklijk horizontaal is.
>e p is de produktfunctie van f en g,
dus $p(x) = f(x) \cdot g(x) = \frac{1}{3}x^3 . \ (-x) = -\frac{1}{3}x^4$.
Geldt $p'(x) = f'(x). \ g'(x)$? Waarom?
>f Teken de grafiek van p.

TERUGBLIK

Voor het differentiëren van veeltermfuncties wordt de *somregel* gebruikt.

Als $s(x) = f(x) + g(x)$, dan $s'(x) = f'(x) + g'(x)$

Uit de somregel volgt gemakkelijk ook de verschilregel:

Als $v(x) = f(x) - g(x)$, dan $v'(x) = f'(x) - g'(x)$.

Opgaven

>a In hoofdstuk 2 heb je al gezien:
Als $f(x) = ax^2 + bx + c$, dan $f'(x) = 2ax + b$.
Ga na dat dit in overeenstemming is met de regels.

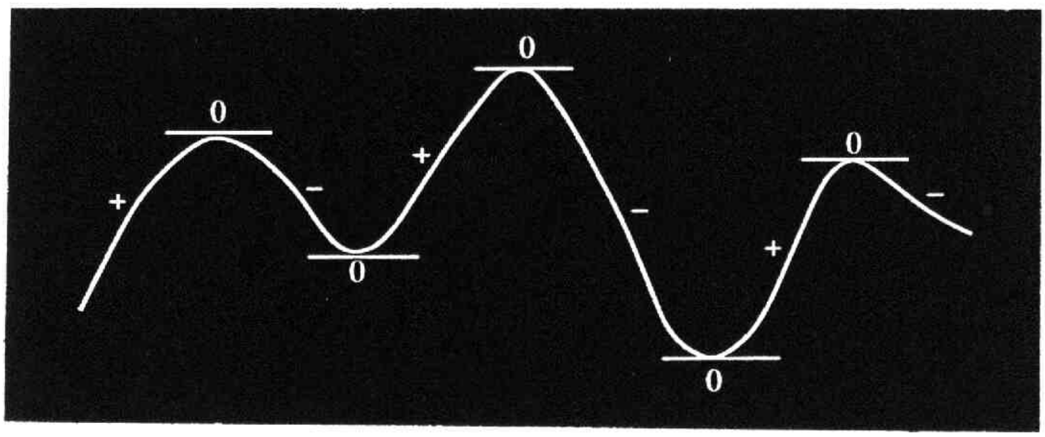
>b Misschien heb je vroeger geleerd dat je de top van de parabool $y = ax^2 + bx + c$ kunt vinden met $x = -\frac{b}{2a}$.
Hoe is dit te verklaren met differentiëren?

>c Vul in:
Als $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, dan $f'(x) = \ldots\ldots$
Als $f'(x) = ax + b$, dan $f(x) = \ldots\ldots$

6 Grafieken tekenen

Als je de grafiek van een functie f wilt tekenen, is het vaak verstandig om de hellingfunctie f' te bekijken.
Met behulp van f' kun je uitvinden in welke punten de hellingscoëfficiënt positief, nul of negatief is.

Hellingscoëfficiënt *positief* betekent: grafiek van f *stijgt*
Hellingscoëfficiënt *negatief* betekent: grafiek van f *daalt*
Hellingscoëfficiënt *nul* betekent: punt met *horizontale raaklijn*



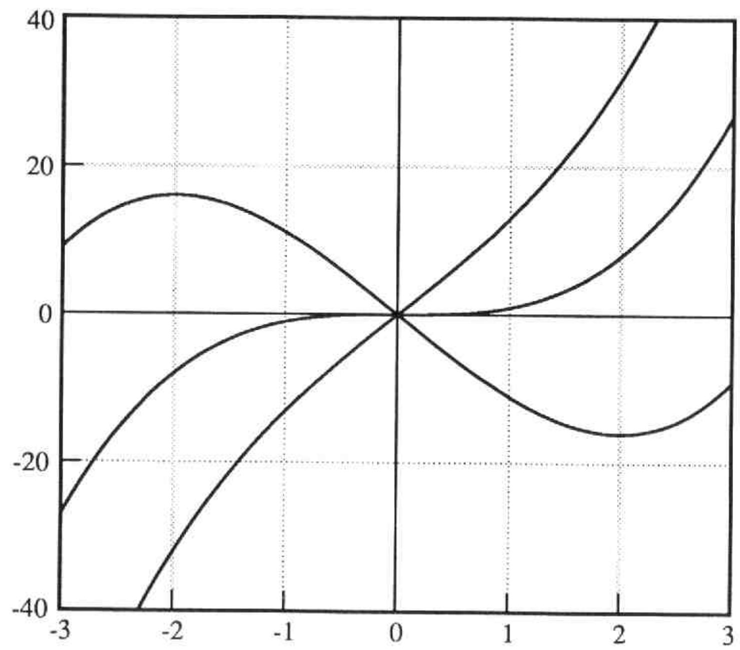
1. Gegeven: $f(x) = \frac{1}{5}x^2 - 2x + 6$.

>a Voor welke x geldt achtereenvolgens:
$f'(x) = 0, f'(x) < 0, f'(x) > 0$?
>b In welk punt van de grafiek van f is de raaklijn horizontaal?
Teken dat punt (= T) met een horizontaal stukje raaklijn.
>c Is het gedeelte van de grafiek van f dat links van T ligt stijgend of dalend?
>d Teken een grafiek van f.

2. Gegeven $f(x) = -0{,}05x^2 + x + 10$.

>a Ga met behulp van f' na in welke punten de hellingscoëfficiënt van de grafiek positief, nul of negatief is.
>b Teken de grafiek van f op het x-interval [0,25]. (Kies de eenheid op beide assen $\frac{1}{2}$ cm.)
>c Bereken de hoek die de grafiek van f met de y-as maakt.

3. Met de computer zijn de grafieken van een drietal *derdegraads functies* getekend, namelijk van $f(x) = x^3 - 12x$; $g(x) = x^3$; $h(x) = x^3 + 12x$.



>a Bereken de hellingfuncties f', g' en h'.

>b Hoe kun je met behulp van de hellingfuncties uitmaken welke grafiek bij f, welke bij g en welke bij h hoort?

>c Neem de figuur over en teken ook de grafiek van $j(x) = x^3 - 6x$ en $k(x) = x^3 + 6x$.

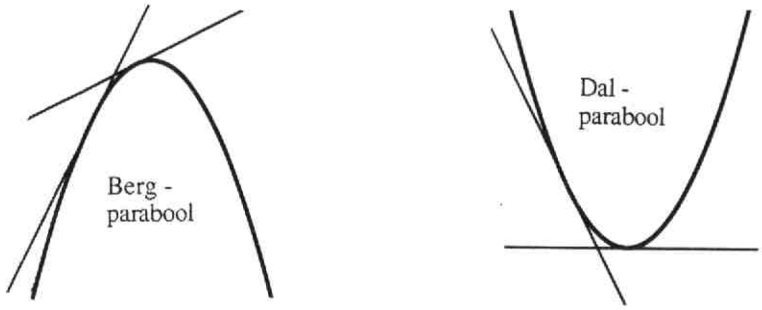
4. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 6x^2 + 27x$.

>a Er zijn twee punten op de grafiek waarin de raaklijn horizontaal is. Bereken de coördinaten van deze punten.

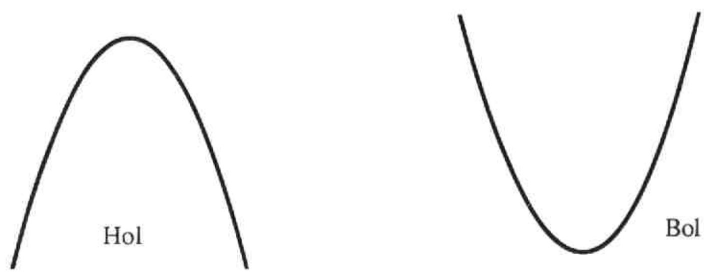
>b In welk(e) gebied(en) is de helling van de grafiek positief? En in welk(e) gebied(en) negatief.
(Aanwijzing: schets de hellinggrafiek van f.)

>c Teken de grafiek van f op het x-interval [0;15].
(Neem de schaal op de y-as 10 keer zo klein als op de x-as.)

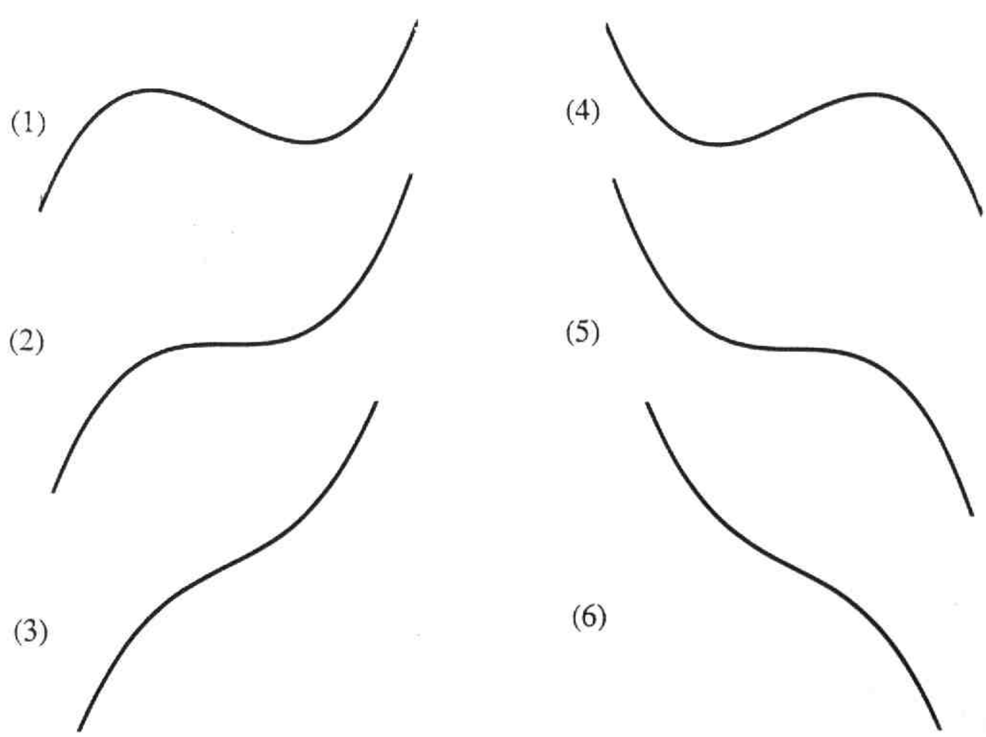
Grafieken van tweedegraads functies hebben altijd dezelfde vorm (parabool). Je kunt echter onderscheid maken in 'berg'- en 'dal'-parabolen.
Een bergparabool heeft de eigenschap dat hij 'onder' zijn raaklijnen ligt, een dalparabool ligt 'boven' zijn raaklijnen.



In het eerste geval is de grafiek met de *holle* kant naar beneden, in het tweede geval met de *bolle* kant.
Je zou dus ook van 'hol-parabool' en 'bol-parabool' kunnen spreken.

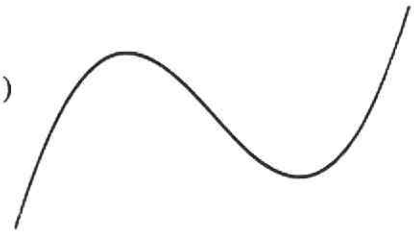


Grafieken van derdegraads functies hebben meer verschijningsvormen.
In de figuren bij opgave 3 heb je er al drie gezien en daar horen ook nog drie spiegelbeelden bij:

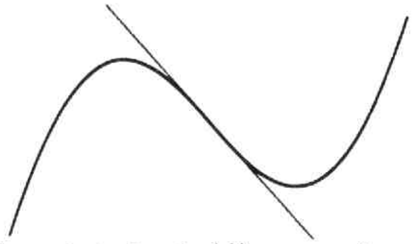


Bekijk plaatje (1).
De grafiek bestaat uit een stuk 'hol' en een stuk 'bol'.

(1)



Ergens moet een soort overgangspunt van *hol* naar *bol* zijn.
Dat punt wordt *buigpunt* genoemd.
De raaklijn in zo'n punt zit links boven en rechts onder de grafiek.
Zo'n raaklijn wordt *buigraaklijn* genoemd.



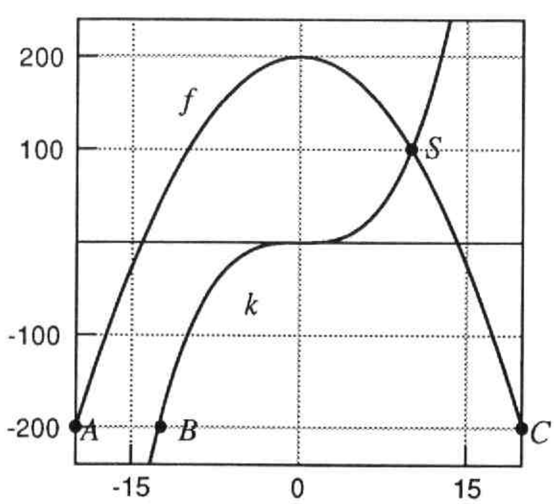
5. Bekijk opnieuw het plaatje bij opgave 3.
Het buigpunt van alle getekende grafieken is de oorsprong.

> Geef een vergelijking van de buigraaklijn voor elk van die grafieken.

6. Bekijk de grafiek bij opgave 4.
De 'toppen' van de grafiek van f liggen in (3,36) en (9,0).
Het buigpunt ligt precies midden tussen de toppen.

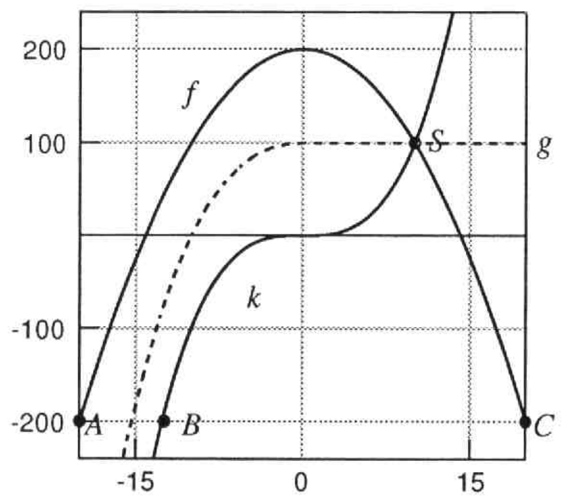
>a Geef een vergelijking van de buigraaklijn.
>b Het buigpunt op de grafiek van f is in dat geval het punt met de kleinste hellingscoëfficiënt.
Controleer dit.

7. Met de computer zijn de grafieken getekend van
$f(x) = 200 - x^2$ en $k(x) = 0{,}1x^3$



>a Lees uit de grafiek de coördinaten van het snijpunt S af en controleer je antwoord door een berekening.
>b Geef een vergelijking van de raaklijn in S aan de grafiek van f. Ook voor de raaklijn in S aan de grafiek van k.
>c De onderste grenslijn van het plaatje heeft als vergelijking $y = -200$. Bereken de coördinaten van de punten A, B en C.
>d Ga na dat de grafiek van k in het punt B steiler is dan de grafiek van f in het het punt A.

8. De functie g is het gemiddelde van de functies f en k uit opgave 7, dus: $g(x) = \frac{1}{2}(f(x) + k(x))$.
De grafiek van g loopt midden tussen de grafieken van f en k.
Iemand heeft de grafiek van g zo getekend:



Aan de hier getekende grafiek van g is van alles mis.

>a Wat is er mis met het gedeelte rechts van het snijpunt?
Moet g daar stijgen of dalen?
>b Bekijk het gedeelte tussen de y-as en het snijpunt.
Hoeveel punten met horizontale raaklijn moeten er op dat stuk liggen?
Welke coördinaten hebben die punten?
>c Waarom moet er een buigpunt zijn op dat stuk?
>d Verbeter de grafiek van g.

Gegeven zijn de vierde-graads-functies:
$y = x^4 - 4$, $y = x^4 - 4x$, $y = x^4 - 4x^2$ en $y = x^4 - 4x^3$.
Bij elke functie is een tabel gemaakt:

$y = x^4 - 4$

x	−2	−1	0	1	2	3
y	12	−3	−4	−3	12	77

$y = x^4 - 4x$

x	−2	−1	0	1	2	3
y	24	5	0	−3	8	69

$y = x^4 - 4x^2$

x	−2	−1	0	1	2	3
y	0	−3	0	−3	0	45

$y = x^4 - 4x^3$

x	−2	−1	0	1	2	3
y	48	5	0	−3	−16	−27

9. Bekijk de tabel van $y = x^4 - 4$.
Het lijkt er op of − 4 de kleinste mogelijke functiewaarde is (het *minimum* van de functie).

>a Hoe kun je aan de formule $y = x^4 - 4$ zien dat dit inderdaad zo is?
>b Wat weet je van de raaklijn aan de grafiek in het punt (0,−4)?
>c Teken de grafiek van $y = x^4 - 4$.
>d Bereken de snijpunten van de grafiek met de x-as.

10. Bekijk de tabel van $y = x^4 - 4x$.
Het lijkt er op dat −3 het minimum van de functie is. In dit geval is dat *niet* direct aan de formule te zien!

>a Hoe kun je met behulp van de hellingfunctie vaststellen dat −3 inderdaad het minimum is?
>b Teken de grafiek van $y = x^4 - 4x$.
>c De raaklijnen in de snijpunten met de x-as snijden elkaar in P. Bereken de coördinaten van P.

11. Bekijk de tabel van $y = x^4 - 4x^2$.
Net als in opgave 10 lijkt −3 het minimum van de functie te zijn.

>a Schijn bedriegt. Laat zien dat −3 niet het minimum kan zijn.
>b Bereken het minimum van de functie. Merk op dat dit minimum twee keer wordt bereikt.
>c In welke gebieden is de grafiek van $y = x^4 - 4x^2$ stijgend resp. dalend?
>d Teken de grafiek van $y = x^4 - 4x^2$.

Merk op: De functie $y = x^4 - 4x^2$ bereikt in $x = 0$ een *plaatselijk maximum* ($y = 0$).

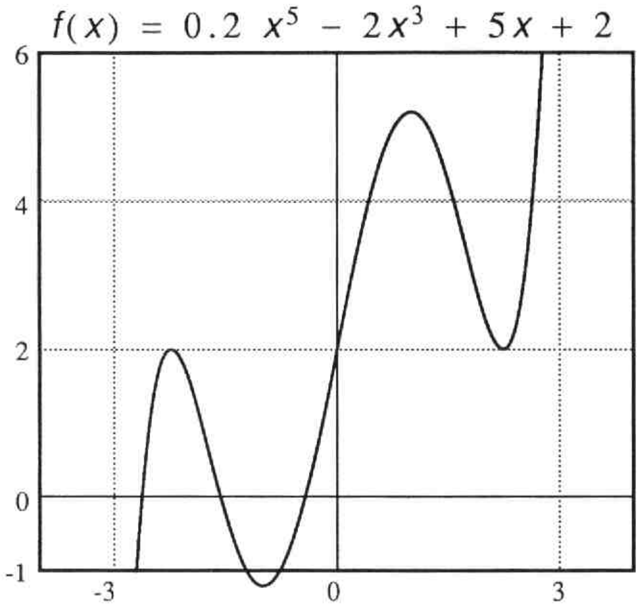
12. Bekijk de tabel van $y = x^4 - 4x^3$.

>a Toon aan dat -27 het minimum van de functie is.
>b Teken de grafiek van $y = x^4 - 4x^3$.
Let daarbij op het gedrag in de oorsprong!

13. Van de grafieken van
$y = x^4 - 4$, $y = x^4 - 4x$, $y = x^4 - 4x^2$ en $x^4 - 4x^3$
zijn de eerste en de derde symmetrisch ten opzichte van de y-as.

> Hoe kan je dat aan de formule zien?

14. Computerplaatje van de grafiek van een vijfde-graads functie:

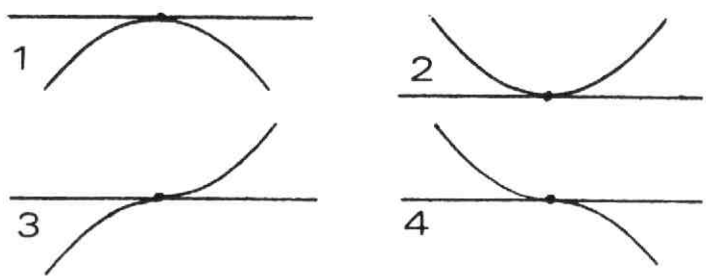


>a De grafiek van f heeft vier punten met horizontale raaklijnen.
Twee van die punten geven een *plaatselijk maximum* aan.
Bereken de exacte coördinaten van die twee punten.
>b Bereken ook de exacte coördinaten van de punten die een plaatselijk minimum aangeven.
>c Laat x variëren van -2 tot 3.
Welke waarden bereikt y?
>d Hoeveel buigpunten heeft de grafiek van f?

TERUGBLIK

Bij het tekenen van grafieken zijn de punten met horizontale raaklijn (*helling* = *0*) van bijzondere betekenis. Het zijn als het ware de 'rustpunten' in de verandering van een functie.

Er zijn vier mogelijkheden:



In geval 1 is er sprake van een (plaatselijk) maximum.
In geval 2 is er sprake van een (plaatselijk) minimum.
In de gevallen 3 en 4 is het punt met helling nul een 'buigpunt'; om te benadrukken dat het hier om een punt met horizontale raaklijn gaat, spreekt men wel van 'horizontaal buigpunt'.

De gebieden waarin een grafiek stijgt (daalt) zijn juist de gebieden waar de hellingfunctie positieve (negatieve) waarden aanneemt.

Een buigpunt is een punt waarin de overgang plaats vindt van 'hol' naar 'bol' (of omgekeerd).

Opgave
Op blz. 32 vind je de mogelijke verschijningsvormen van grafieken bij derdegraadsfuncties. In de plaatjes (1) en (4) op die blz. zijn er *twee* punten met horizontale raaklijn, in de plaatjes (2) en (5) is er *één* punt met horizontale raaklijn en in (3) en (6) zijn er *nul* punten met horizontale raaklijn.

>a Wat voor soort functie is de hellingfunctie van een derde-graadsfunctie?
>b Hoe kun je verklaren dat het aantal punten met horizontale raaklijn op de grafiek van een derde-graadsfunctie, gelijk is aan 0, 1 of 2.

7 Snelheid en versnelling

Bij de vrije val op aarde wordt de valweg s (in m) als functie van de tijd (in sec) gegeven door de formule $s = 5t^2$.
Door differentiatie vind je een formule voor de snelheid op het moment t:

$$v = s' = 10t$$

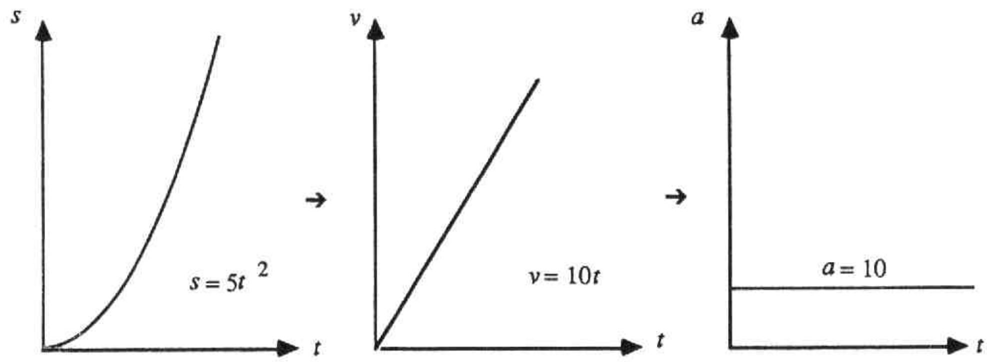
De snelheidsfunctie v kan op zijn beurt ook weer worden gedifferentieerd:

$$v' = 10$$

De *afgeleide functie* v' geeft de *verandering van snelheid* (afhankelijk van t) of wel de *versnelling* aan.
De versnelling wordt vaak aangeduid met a (= acceleratie).
Bij de vrije val geldt:

$$a = v' = 10$$

De versnelling, veroorzaakt door de zwaartekracht, is constant.



Opmerkingen:
I. a wordt verkregen uit s door tweemaal differentiëren.
Kortweg: $a = s''$.
II. De versnelling van een vallend object is *10m/sec per sec*.
In de natuurkunde drukt men dit zo uit: de versnelling is *10m/sec*^{2} (spreekt uit: 10 meter per seconde kwadraat).

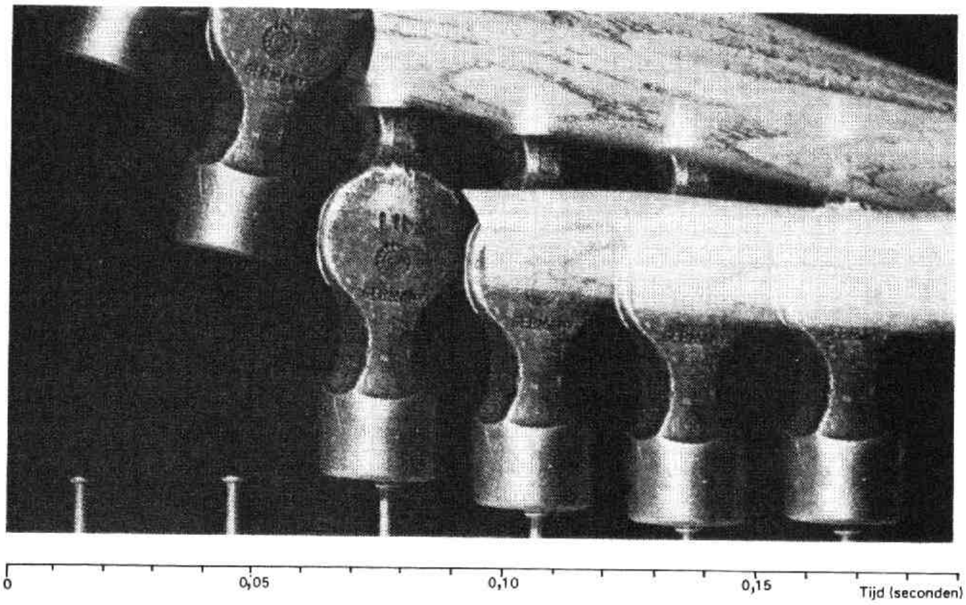
1. De vrije val op de maan wordt beschreven door de formule $s = 0{,}8t^2$.

   > Hoeveel m/sec^2 is de vrije-val-versnelling op de maan?

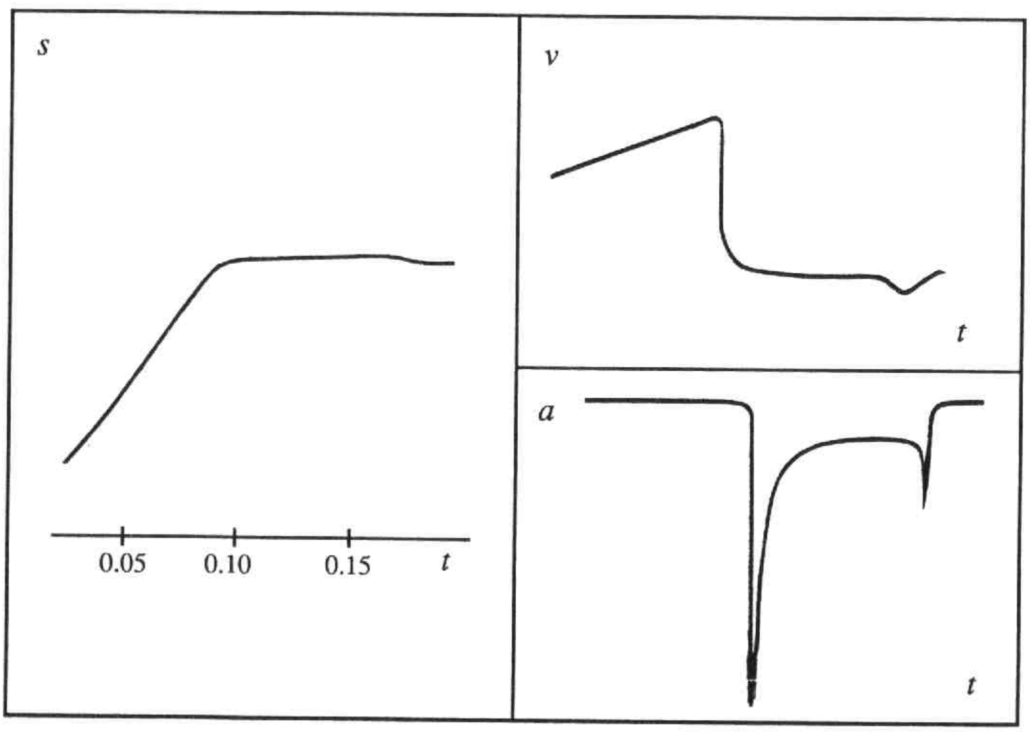
2. Op de planeet Mars is de vrije-val-versnelling 3,6 m/sec^2.

   > Aan welke formule beantwoordt de tijd-valweg-functie aldaar?

3. Een vallende hamer is afgebeeld in 6 opnamen met intervallen van 0,03 sec.



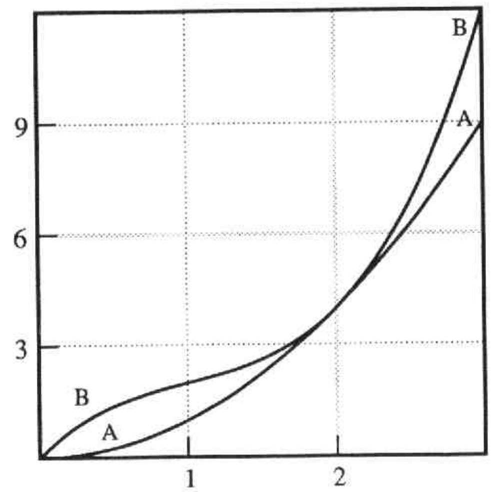
Hieronder zie je de grafieken van s, v en a als functie van t.



>a In welke periode is de versnelling constant?

>b Welke gebeurtenissen horen er bij de twee pieken in de versnellingsgrafiek?

4. Twee sportauto's A en B rijden een rally over een zeer afwisselend parcours. Met de computer is een gedeelte van de race in beeld gebracht.



Op de horizontale as is de *tijd* (in minuten) uitgezet, op de verticale as de *afstand* tot een bevoorradingspost (in eenheden van 250 meter). Op het moment $t = 0$ wordt A, die zojuist bijgetankt heeft, ingehaald door B. Voor $0 \leq t \leq 3$ wordt de plaats van A op het tijdstip t gegeven door: $s_A(t) = t^2$ en van B door: $s_B(t) = t^3 - 3t^2 + 4t$.

>a Druk de snelheden v_A en v_B van resp. A en B uit in t.

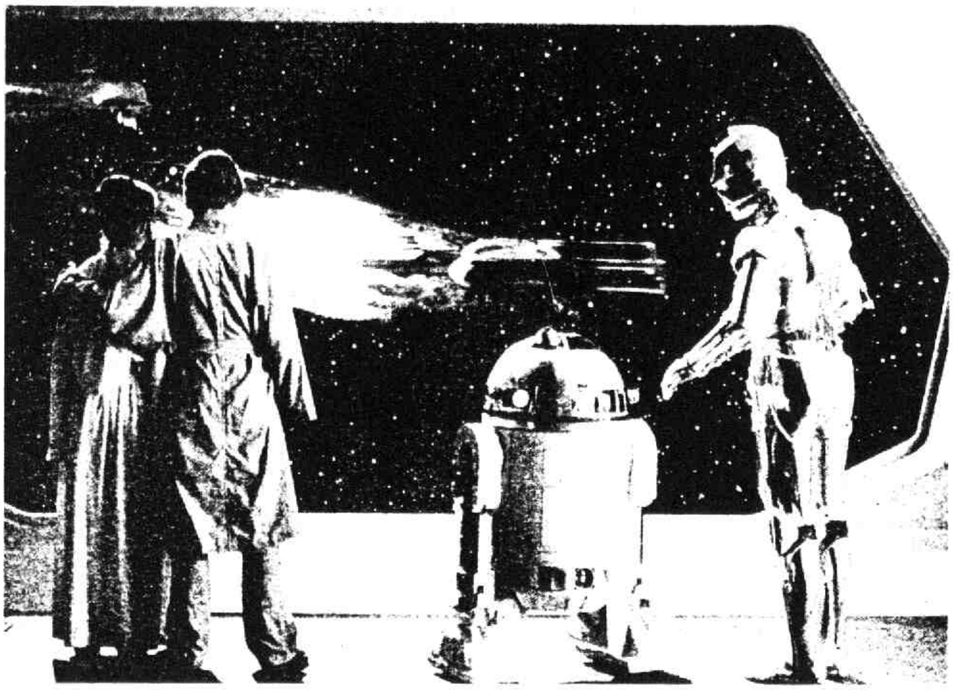
>b Op welke tijdstippen, tussen 0 en 3, reden de beide auto's precies even snel?

>c Geef een kort verslag van wat zich afspeelde rond het tijdstip $t = 2$.

>d Wat kun je zeggen van de versnelling van A gedurende het tijdsinterval [0,3]?

>e Bereken het tijdstip in de periode [0,3] waarop de snelheid van B het laagst was.
Hoe groot was de versnelling van B op dat tijdstip?

Doortocht door een klein Kenyaas dorp tijdens de Oostafrikaanse Safarirally.



De robots Artoo-Detoo en See-threepio staan Luke Skywalker bij in de filmtrilogie Star Wars.

5. Om een arm van een robot een gewenste beweging te laten maken, moet de snelheid van de aandrijfas van 0 omwentelingen per seconde (omw/sec) naar 10 omw/sec worden gebracht. Het tijdsverloop waarin dit moet gebeuren is 4 seconden.
De snelheid (v) is dus een functie van de tijd (t).
Om die beweging soepel te laten verlopen stellen we bepaalde eisen aan die functie. Niet alleen de snelheid moet zonder sprongen veranderen, maar ook de versnelling.
Bij de start is de versnelling 0 omw/sec^2 en aan het eind moet dat weer zo zijn.
Dit alles is te bereiken door een snelheidsfunctie te nemen van de vorm

$$v(t) = at^3 + bt^2 + ct + d.$$

>a Bereken de waarden van a, b, c en d en teken de grafiek van de gevonden functie. Die grafiek noemen we het *snelheidsprofiel.*

>b Wanneer is de versnelling maximaal en hoe is dat aan het snelheidsprofiel te zien?
Hoe groot zijn dan de snelheid en de versnelling?

>c Iemand maakt een snelheidsprofiel door van (0,0) tot (2,6) een deel van een parabool met top (0,0) te nemen en van (2,6) tot (4,10) een deel van een parabool met top (4,10).
Voldoet dat snelheidsprofiel aan alle eisen?

TERUGBLIK

De samenhang tussen plaats(afstand), snelheid, versnelling en tijd wordt gegeven door de formules:

$$s'(t) = v(t) \text{ en } v'(t) = a(t).$$

In woorden:
— de afgeleide van de tijd,plaats-functie geeft de snelheid afhankelijk van de tijd.
— de afgeleide van de tijd,snelheidsfunctie geeft de versnelling afhankelijk van de tijd.

De versnelling is dus de afgeleide van de afgeleide ('hellingfunctie van de hellingfunctie').
Zo'n *tweede afgeleide* wordt aangeduid met twee accenten.
Dus: $s''(t) = a(t)$.

Opgaven

>a Bij een beweging met constante versnelling a geldt:
$v(t) = v_0 + at$.
Hierbij is v_0 de beginsnelheid (snelheid op $t = 0$).
Leid hier uit een formule af voor $s(t)$ als nog gegeven is: $s(0) = 0$.

>b Het wegenverkeersreglement schrijft voor dat de remvertraging van een auto minstens 4 m/sec^2 moet zijn.
Stel je voor: een automobilist rijdend met 120 km/u moet plotseling op zijn rem gaan staan. Neem aan dat de auto hierdoor een eenparig vertraagde beweging krijgt ($a = -4$).
Hoeveel seconden na het indrukken van de rempedaal staat de auto stil?
En hoeveel meter is de remweg?

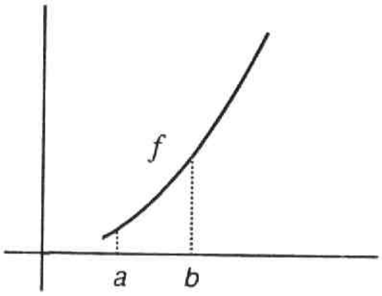
8 Hol en bol

1. Twee krantekoppen:

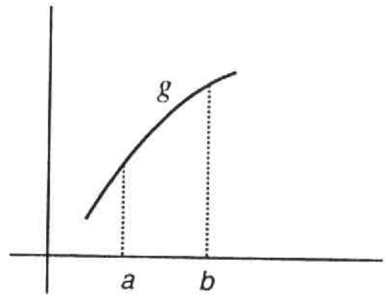
   DE WERKLOOSHEID NEEMT AF (1)
   DE STIJGING VAN DE WERKLOOSHEID NEEMT AF (2)

   > Is er verschil in betekenis tussen die beide beweringen? Licht je antwoord toe met behulp van een schetsje (grafiek).

2. Twee voorbeelden van stijgende functies:



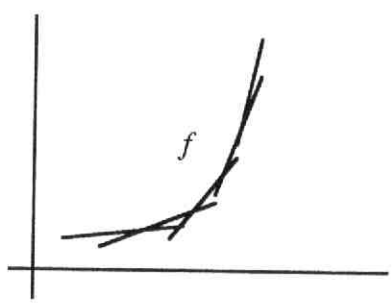
figuur 1.



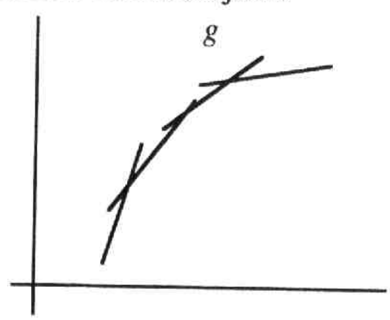
figuur 2.

> Schets de grafieken van de bijbehorende hellingfuncties f' en g'.

Figuur 1 laat een functie zien, waarbij de stijging naar rechts sterker wordt. Anders gezegd: de stijging neemt toe.
In figuur 2 is er sprake van afnemende stijging.
Toenemende of afnemende stijging kun je illustreren met raaklijnen.



figuur 3.



figuur 4.

In figuur 3 zie je hoe de hellingscoëfficiënt van de raaklijn van links naar rechts toeneemt.
Dat betekent ook dat de hellingfunctie f' *stijgend* is!.
En dat betekent weer dat de hellingfunctie van de hellingfunctie ($= f''$) positief moet zijn.

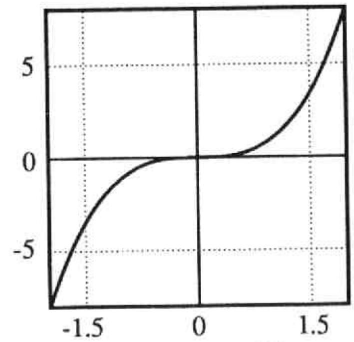
In figuur 1 geldt dus: $f'(x) > 0$ en $f''(x) > 0$.
In figuur 2 geldt: $g'(x) > 0$ (want g is stijgend), maar $g''(x) < 0$ (de hellingfunctie is dalend!)

3. Hiernaast zie je nog eens de grafiek van $f(x) = x^3$.

   >a Bepaal f' en f''.

   >b Ga na dat voor $x > 0$ geldt: $f'(x) > 0$ en $f''(x) > 0$.

   >c Ga na dat voor $x < 0$ geldt: $f'(x) > 0$ en $f''(x) < 0$.

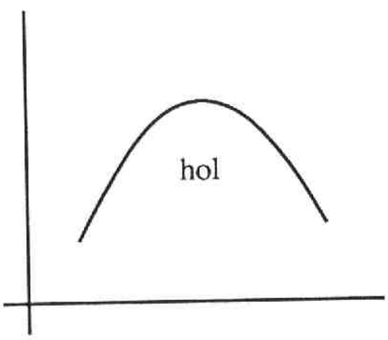


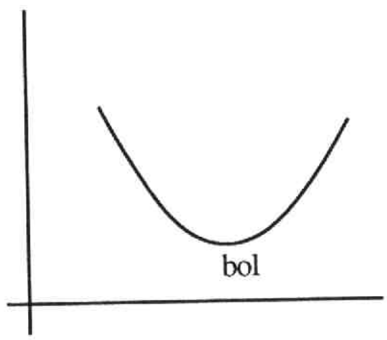
4. > Teken een grafiek van een functie f op het interval $[a,b]$ waarvoor geldt: $f'(x) < 0$ en $f''(x) > 0$.

5. > Dezelfde opdracht als opgave 4 maar nu geldt: $f'(x) < 0$ en $f''(x) < 0$.

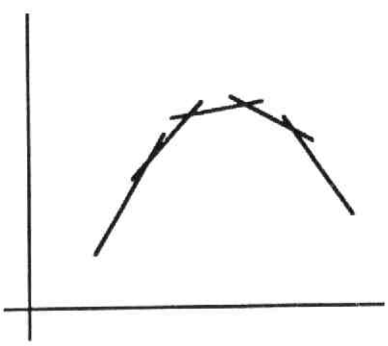
6. > Teken ook een grafiek van een functie f met $f'(x) > 0$ en $f''(x) = 0$.

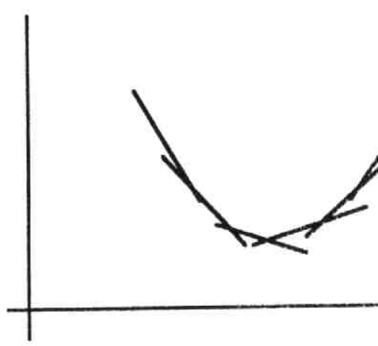
We kijken nog eens naar 'holle' en 'bolle' grafieken.





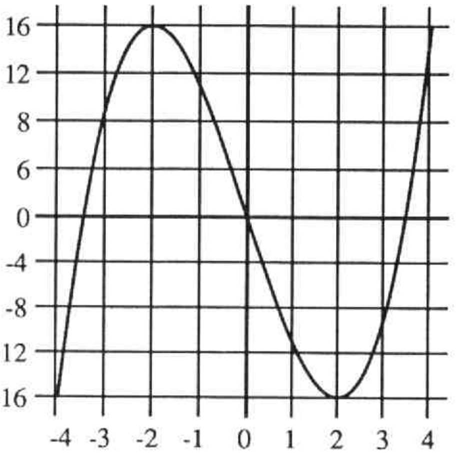
En naar de bijbehorende raaklijn-patronen.





Bij een 'holle' grafiek neemt de hellingscoëfficiënt voortdurend af.
Bij een 'bolle' grafiek neemt de hellingscoëfficiënt voortdurend toe.
Dus:
Grafiek van f *hol (naar beneden)*, dan $f''(x) < 0$.
Grafiek van f *bol (naar beneden)* dan $f''(x) > 0$.

7. Bekijk de grafiek van $f(x) = x^3 - 12x$.



>a Ga na dat voor $x < 0$ geldt: $f''(x) < 0$ en dat voor $x > 0$ geldt: $f''(x) > 0$.

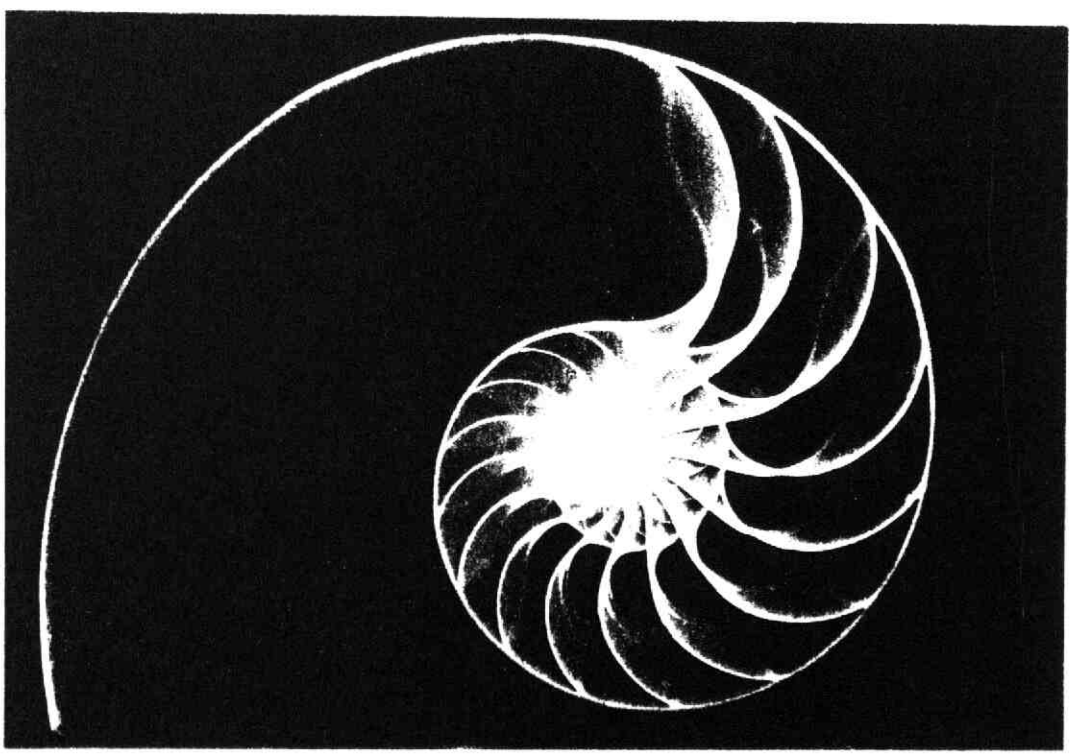
>b Hoe noem je het punt waarin geldt: $f''(x) = 0$?

8. In opgave 12 van hoofdstuk 6 heb je de grafiek getekend van $f(x) = x^4 - 4x^3$.

>a Los op: $f''(x) > 0$.

>b Controleer of je uitkomst in overeenstemming is met de grafiek die je getekend hebt.

>c De grafiek heeft twee buigpunten. Wat zijn de coördinaten daarvan?



TERUGBLIK

Met behulp van de afgeleide functie f' van een gegeven functie f kun je uitmaken of die functie *stijgt* of *daalt*.
Met behulp van de tweede afgeleide functie f'' kun je uitmaken of de grafiek *bol* of *hol* naar beneden is.

1	2	3	4
stijgend en bol naar beneden	stijgend en hol naar beneden	dalend en bol naar beneden	dalend en hol naar beneden
			
$f'(x)$ +	$f'(x)$ +	$f'(x)$ −	$f'(x)$ −
$f''(x)$ +	$f''(x)$ −	$f''(x)$ +	$f''(x)$ −

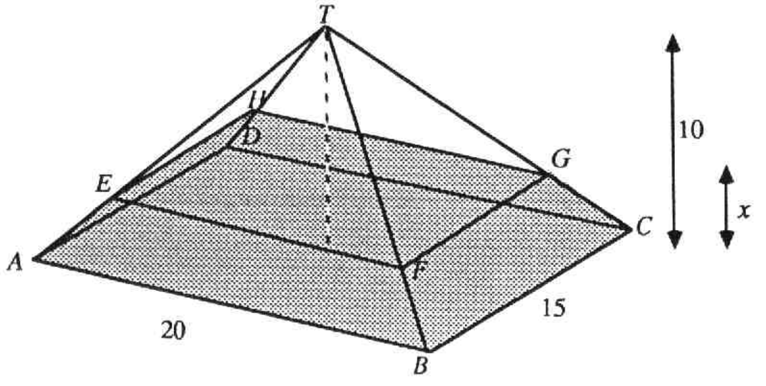
In 1 en 3 is de hellingfunctie stijgend.
In 2 en 4 is de hellingfunctie dalend.

Bij het passeren van een *buigpunt* wisselt de functie f'' van + naar − (of van − naar +).
In veel gevallen kun je het buigpunt vinden uit de vergelijking: $f''(x) = 0$.

Opgave
De grafiek van een derde-graads-functie heeft altijd één buigpunt.
Toon dit aan.
(Aanwijzing: stel $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$)

9 Inhoud en oppervlakte

1. In het boekje Verkenningen in de Ruimte ben je deze figuur tegengekomen.



>a Rechthoek $EFGH$ ligt op een hoogte x van de grond.
Ga na dat opp. $EFGH$: opp. $ABCD = (10-x)^2 : 100$.

>b Druk opp. $EFGH$ uit in x.

De inhoud van de afgeknotte piramide $ABCD.EFGH$ is een functie van de hoogte x van die afgeknotte piramide.
De formule is: $I(x) = 300x - 30x^2 + x^3$

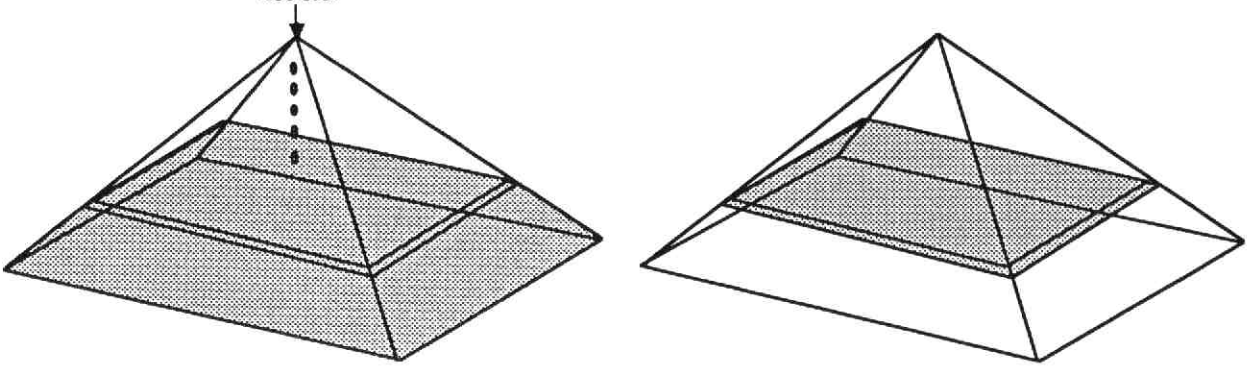
Die formule vind je door het verschil van de inhouden van de piramides $T.ABCD$ en $T.EFGH$ te berekenen.

Er geldt: inhoud $T.ABCD = \frac{1}{3} \cdot 10 \cdot 300 = 1000$
inhoud $T.EFGH = \frac{(10-x)^3}{1000} \times$ inh. $T.ABCD = (10-x)^3$

Dus: inhoud $ABCD.EFGH = 1000 - (10-x)^3$
$= 1000 - (1000 - 300x + 30x^2 - x^3)$
$= 300x - 30x^2 + x^3$.

2. >a Controleer bovenstaande berekening.
>b Bereken $I'(x)$.
>c Er geldt: opp. $EFGH = I'(x)$. Controleer dit.

Het resultaat van opgave 1 dat de afgeleide van de inhoud juist gelijk is aan de oppervlakte van het bovenvlak is geen toeval.
We kunnen dit als volgt laten zien.
Stel dat de piramide van opgave 1 van plexiglas is, waarbij in de top een klein gaatje is geboord; door dat gaatje wordt gekleurde vloeistof in de piramide gebracht.
Het volume van de vloeistof in de piramide (= I) is een functie van de hoogte (= x) van de vloeistofspiegel.
Ook de oppervlakte van de vloeistofspiegel (= O) is een functie van x.



Door een klein beetje vloeistof toe te voegen, stijgt de hoogte een beetje.
Stel $\Delta x = 0{,}0001$.
De toename van het volume is dan $\Delta I = I(x+0{,}0001) - I(x)$.

Die toename ΔI is het volume van een dun laagje vloeistof.
Het volume van het dunne laagje kun je bij benadering vinden uit 'hoogte maal grondvlak' ofwel $\Delta x \cdot O(x)$.

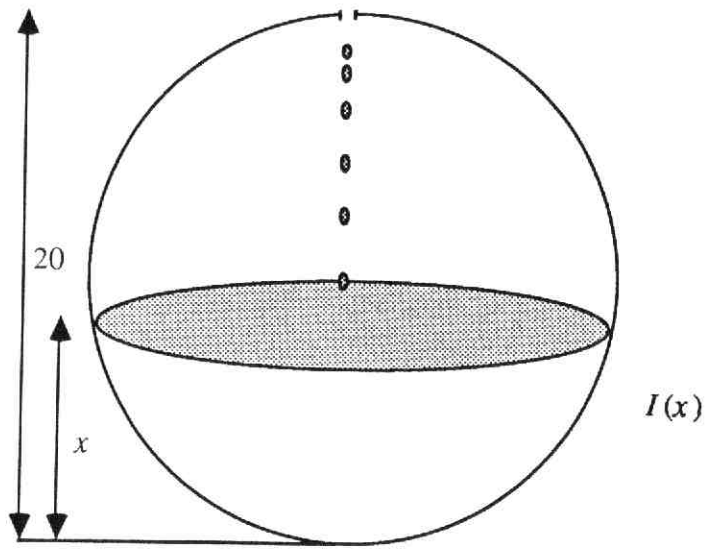
Dus: $\Delta I \approx \Delta x \cdot O(x)$.

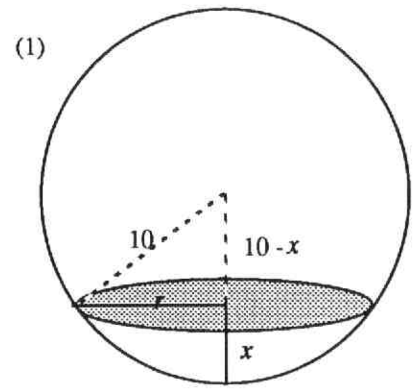
Dus: $\dfrac{\Delta I}{\Delta x} \approx O(x)$

De benadering is nauwkeuriger naarmate Δx kleiner is.

$O(x)$ is de waarde waartoe $\dfrac{\Delta I}{\Delta x}$ nadert als Δx in de buurt van nul komt.
Kortom: $O(x) = I'(x)$.

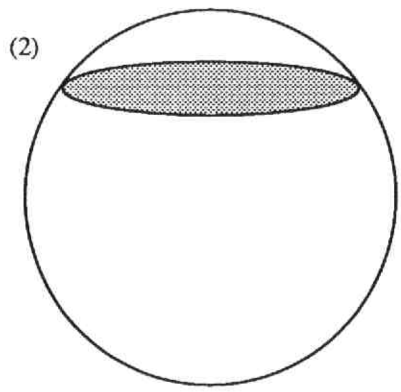
3. Een bolvormig glazen vat met straal 10 cm wordt gevuld met vloeistof. De oppervlakte O van de vloeistofspiegel en het volume I zijn functies van x.





>a Bekijk situatie (1), waarbij de vloeistofspiegel onder het midden ligt.
Met behulp van de stelling van Pythagoras kan $O(x)$ worden berekend.
Noem de straal van de vloeistofspiegel r en laat zien dat geldt: $r^2 = 20x - x^2$.

Hieruit volgt: $O(x) = \pi r^2 = \pi(20x - x^2)$



>b Ga na dat dezelfde formule voor $O(x)$ ook geldt voor het geval de vloeistofspiegel boven het midden ligt (2).

>c Teken nu de grafiek van O als functie van x voor $0 \leq x \leq 20$.

>d Hoe kun je het stijgen en dalen van de grafiek van O verklaren uit de vorm van de bol?

4. In opgave 2 heb je gezien: $O(x) = \pi(20x - x^2)$.

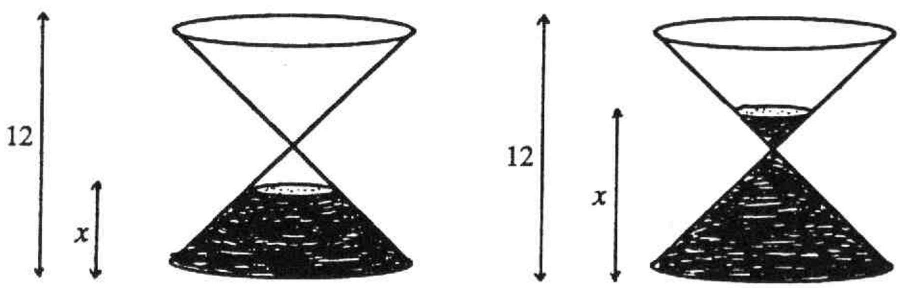
>a Met behulp van $O(x)$ kan I worden gevonden als functie van x.
Bedenk hierbij dat $I'(x) = O(x)$ en geef de formule voor $I(x)$.

>b Teken de grafiek van I als functie van x.
(Maak ook gebruik van de hellingfunctie O!)

>c De grafiek van I is eerst tamelijk 'vlak', wordt daarna steiler en op het laatst weer vlak.
In welk punt is de grafiek het steilst?

>d Hoe groot is de totale inhoud van het bolvormige vat?

5. Twee glazen kegels zijn met de punt aan elkaar gesmolten, zodat grond- en bovenvlak parallel zijn (zie figuur). De hoogte van elk van de twee kegels is 6, de straal van zowel grond- als bovencirkel is ook 6.
In de onderste kegel wordt vloeistof gebracht; zodra de onderste kegel vol is, wordt de bovenste kegel met vloeistof gevuld.



$O(x)$ = de oppervlakte van de vloeistofspiegel op hoogte x.
$I(x)$ = het totale volume van de vloeistof op hoogte x.

>a Toon aan dat geldt: $I(x) = \pi(\frac{1}{3}x^3 - 6x^2 + 36x)$.

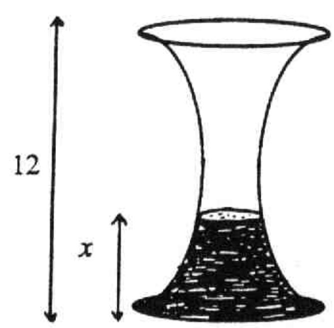
>b Bereken uit de formule voor I de formule voor O als functie van x.

>c Leid de formule voor O als functie van x ook rechtstreeks af uit de meetkundige figuur (dus zonder de formule van I te gebruiken).

>d Teken een grafiek van O als functie van x.

>e Teken een grafiek van I als functie van x.

6. Een ander vat (zie figuur) met dezelfde hoogte en dezelfde totale inhoud als de dubbele kegel, wordt eveneens met vloeistof gevuld.
De grafiek van het volume van de vloeistof als functie x, heeft net als in opgave 5 precies in het midden een buigpunt.
Wat is het verschil tussen deze volume-grafiek en die van opgave 5 in de directe omgeving van het buigpunt?



TERUGBLIK

Het *volume* van een hoeveelheid vloeistof in een vat is een functie van de *hoogte* van de vloeistof.
Hetzelfde geldt voor de *oppervlakte* van de vloeistofspiegel.
Noemen we de hoogte x, het volume $I(x)$ en de oppervlakt $O(x)$, dan geldt: $I'(x) = O(x)$.
De oppervlakte van de vloeistofspiegel is een maat voor de verandering van de inhoud bij (gelijkmatige) stijging van de vloeistofspiegel.

Opgaven

>a In de voorbeelden van de piramide bol en dubbele kegel was het volume steeds een derde-graadsfunctie van de hoogte (en de oppervlakte een tweede-graadsfunctie).
Kun je een vorm bedenken, waarbij het volume een lineaire functie van de hoogte is?

>b Kun je een vorm bedenken, waarbij het volume een tweede-graadsfunctie van de hoogte is?

>c De formule voor de inhoud van een bol met straal R is: $I = \frac{4}{3}\pi R^3$.
Deze formule kun je nu zelf afleiden als je de gedachtengang van de opgaven 3 en 4 volgt en daarin het getal 10 vervangt door R.