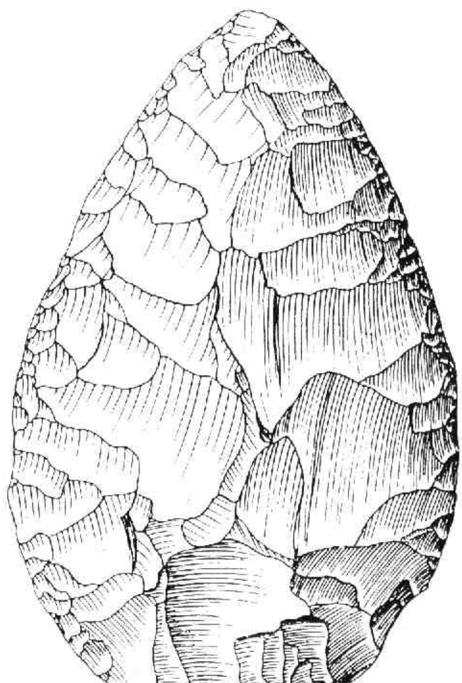
Wiskunde A : overzicht en thema's

OVERZICHT EN THEMA'S



WISKUNDE A

Wiskunde A

Overzicht en Thema's

WISKUNDE A, OVERZICHT EN THEMA'S

Een produktie ten behoeve van het project Hawex

Ontwerpers: Martin Kindt
Henk van der Kooij
Anton Roodhardt

Vormgeving: Ada Ritzer

Utrecht, februari 1991

Inhoudsopgave

Het gereedschap	1
Wiskunde A samengevat	2
Determineerbomen	25
Vuistbijlen	32
Zeg, heb je al gehoord dat	39
Broeikaseffect en klimaat	43
Antwoorden 'Wiskunde A samengevat'	52

Het gereedschap

Bij oudheidkundige opgravingen worden vaak primitieve, handgemaakte gereedschappen aangetroffen. Archeologen kunnen, bijvoorbeeld op grond van de vorm van zulke voorwerpen, nagaan uit welke periode ze stammen, wie de makers waren en waarvoor ze werden gebruikt.
Vuistbijlen (zie voorplaat) bewezen hun nut bij allerlei hak- en snijwerkzaamheden.

De gereedschappen van wiskunde A heb je leren kennen en gebruiken in de 11 voorgaande boekjes.
In het eerste gedeelte van dit boekje (de even bladzijden 2 t/m 22) wordt een beknopt overzicht gegeven van de wiskundige gereedschappen en wat je er mee moet kunnen doen. In veel gevallen wordt er verwezen naar een vraagstuk uit een van de boekjes. Op de oneven bladzijden (3 t/m 23) vind je een aantal oefenopgaven. De antwoorden daarvan zijn achterin het boekje opgenomen.

Een heel belangrijk aspect van het vak wiskunde A, zoals dat in de boekjes van tijd tot tijd aan de orde is gekomen, is het *kiezen van het juiste gereedschap* bij een gegeven probleemsituatie.
Dit aspect is niet opgenomen in het overzicht op de even bladzijden, maar komt vooral tot uiting in de thema's (vanaf blz. 25).

Het tweede gedeelte van dit boekje bevat een viertal thema's.
Bij ieder thema ('Vuistbijlen' is er een van) wordt getoond hoe in de praktijk verschillende wiskundige gereedschappen gebruikt kunnen worden bij onderzoek.
Dit gedeelte van het boekje kan je zien als een soort afronding op het vak wiskunde A.

TABELLEN

De plaats van tabellen

MAKEN

- waarnemingen 1.2.3a*)
- teksten 1.3.4a
- berekeningen 1.3.2a
- grafieken 2.4.15b
- tabellen 1.3.5b
- formules 3.1.1a

T A B E L L E N

GEBRUIKEN

- conclusies trekken uit aflezingen 1.1.2
- omzetting absoluut-procentueel 1.4.1abc
- berekeningen maken met goed gekozen getallen uit de tabellen 1.1.6c
- combineren van tabellen, zoals b.v.schakelen of gegevens uit verschillende tabellen halen 1.3.6a
- grafieken tekenen 1.5.1f
- interpoleren en extrapoleren 1.5.5
- formules opstellen 4.1.5
- in argumentatie gebruiken 1.7.3c

– let op het verband met STATISTIEK en MATRICES

REKENEN

- kritisch narekenen van tekst 1.6.2abc
- organiseren van een ingewikkelde berekening 1.6.3
- verhoudingen (o.a. bij interpolatie, procenten)
- interpolatie, extrapolatie 1.5.5, 6, 10

situaties									en varianten
voor lineaire	14	60	14	85	14	60	14	85	met bijvoorbeeld
inter- en	20	?	20	?	30	85	30	60	verwisselde
extrapolatie	30	85	30	60	37	?	37	?	kolommen

  – berekeningen met behulp van verhoudingen en/of grafieken.
  – nagaan of lineaire interpolatie verantwoord is.

- procenten
  – hoofdtypen:

gedeelte	is ..% van	totaal
?	8	450
631	?	2140
780	6	?

1.2.1

  – vooral bij teksten eerst vaststellen *waarvan* een gegeven percentage is genomen 1.2.12
  – procentuele toe- en afname
  oude hoeveelheid $\pm$ *p% daarvan = nieuwe hoeveelheid* 1.2.7
  een toename met 23% komt op hetzelfde neer als een vermenigvuldiging met 1,23 4.2.1
  een afname met 23% komt op hetzelfde neer als een vermenigvuldiging met 0,77

*) 1.2.3a betekent: Tabellen, Grafieken en Formules 1, hoofdstuk 2, opgave 3a.
De nummers verwijzen naar de vier boekjes TGF.

Waarde van huizen

Van onze verslaggever

BREDA – De waarde van huizen in Breda is in de periode 1984–1989 met 18 procent gestegen. De waarde van bijzondere gebouwen steeg met 15 procent. B en W zeggen dit in een voorstel tot verhoging van de gemeentelijke belastingen en tarieven in 1990.

In de periode '76-'79 steeg de waarde van het onroerend goed overigens met maar liefst 75 procent; de daarop volgende periode tot 1984 daalde hij met 30 procent. De onroerend-goed-belasting brengt volgend jaar in Breda ruim 31 miljoen op. In 1989 was dat ruim een miljoen minder.

Tarief

Iedere vijf jaar moet de economische waarde van huizen en bijzondere gebouwen opnieuw worden vastgesteld. In Breda moet dat dit jaar gebeuren. Wettelijk is ook bepaald dat een eventuele waardestijging geen invloed mag hebben op de hoogte van de onroerend-goed-belasting. In Breda is de waarde van gebouwen gemiddeld met 16 procent gestegen. Dat leidt dus tot een verlaging van het tarief met 16 procent.

Neem aan dat de percentages telkens van de waarde aan het begin van elke periode zijn genomen.

>a Waarde huis in 1989 = $k \times$ waarde huis in 1976. Bereken k.

>b Is de conclusie over de verlaging van het tarief juist?
Neem aan dat het tarief *f* 2,- per *f* 1000,- van de waarde is.

Wat kost te snel rijden

Wat kost te snel rijden?

Uitgaande van een maximumsnelheid van 50 kilometer per uur is er een marge van 10 kilometer. Van 61 tot en met 65 km p/u gaat de kassa rinkelen en moet f 50,- worden betaald. Van 66-70 gaat f 80,- kosten en van 71-75 kost f 120,-. Wie in de categorie van 76-80 kilometer zit moet f 140,- betalen. Hogere overtredingen van de maximimsnelheid kunnen niet meer per transactie worden afgedaan. Wel geldt de algemene regel dat elke te snel gereden kilometer f 6,- kost. Honderd kilometer op het klokje gaat f 240,- kosten.
Tijdens de maandag gehouden snelheidscontroles is er in elk geval een automobilist die f 222,- kwijt is.

>a Zit er misschien een fout in de eerste vier bedragen?

>b Hoe snel reed de automobilist die *f* 222,- moet betalen?

>c Als de krant de gegevens juist heeft vermeld, dan is dit systeem zeer onlogisch om niet te zeggen onredelijk. Waarom?

GRAFIEKEN

- Grafieken
  - zonder formules
    - uit metingen of berekeningen
    - globale grafieken 2.3.4
  - met formules

Grafieken zonder formules

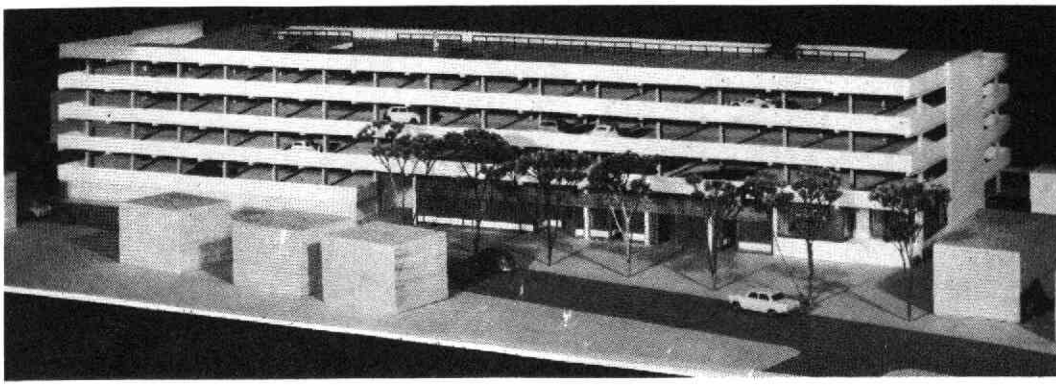
Aflezen en opmeten:

- bij elkaar horende waarden vinden (bijvoorbeeld x en y). 4.5.2abc
  ook tussen de schaalstrepen en bij logaritmische schaalverdelingen.
- gedrag van de grafiek 2.4.1e, 4.6
  (mate van) stijgen en dalen, maximum, minimum, asymptoot, wel of niet doorlopend, buigpunt, periodiciteit, trend
- mate van verandering
  - differentiequotiënt $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 2.4.13
  - toenamendiagram 2.4.5
- bij twee of meer grafieken
  - snijpunten (vergelijkingen) 3.2.3
  - groter of kleiner (ongelijkheden) 2.2.1c
- bundels van grafieken voor het bestuderen van een verschijnsel onder wisselende omstandigheden 2.6.1c
  voorbeeld: groei afhankelijk van de tijd bij verschillende temperaturen
- gebieden, begrensd door grafieken, voor bijv. het nemen van beslissingen 2.7.1a
- schakelen, optellen, aftrekken, vermenigvuldigen van grafieken 3.8.6a, 3.5.6
- aflezen van ruimtelijke grafieken 3.4.2

Grafieken met formules

- het voorgaande over aflezen is hier ook van toepassing, maar de aflezing of opmeting kan vaak vervangen worden door een berekening. (zie daarvoor bij Formules).
- bij een formule een grafiek tekenen
- bij bekende soorten grafieken formules opstellen.

Parkeergarage



De achterkant van de parkeergarage in maquettevorm.

Grondprijs en verwachte bezettingsgraad hebben grote invloed op het vaststellen van het uurtarief voor het parkeren.
Deze grafieken zijn indertijd gemaakt in de ontwerpfase van een parkeergarage.

>a Neem de grafiek 'zonder grondprijs'. Als de bezettingsgraad toeneemt van 1 naar 2, met welk bedrag daalt dan het uurtarief? (in centen nauwkeurig)

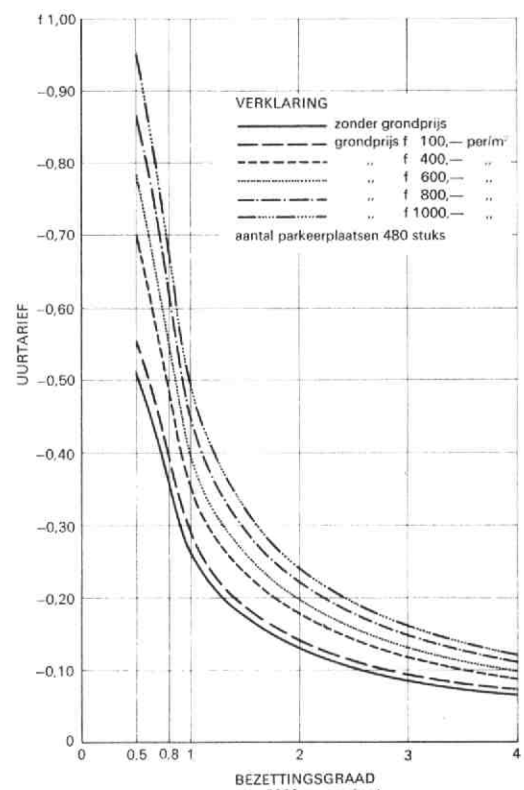
>b Waarom hebben de grafieken een dalende vorm?

>c Neem een bezettingsgraad van 1 bij een grondprijs van *f* 400 en bepaal het uurtarief. Hoe groot moet de bezettingsgraad worden om het uurtarief te kunnen halveren?

>d Geef een benaderingsformule voor de grafiek 'zonder grondprijs'.

>e Wat moet er in deze formule veranderen om benaderingsformules voor de andere grafieken te krijgen?

Parkeerkosten ten opzichte van grondprijs en bezettingsgraad.



FORMULES

Soorten

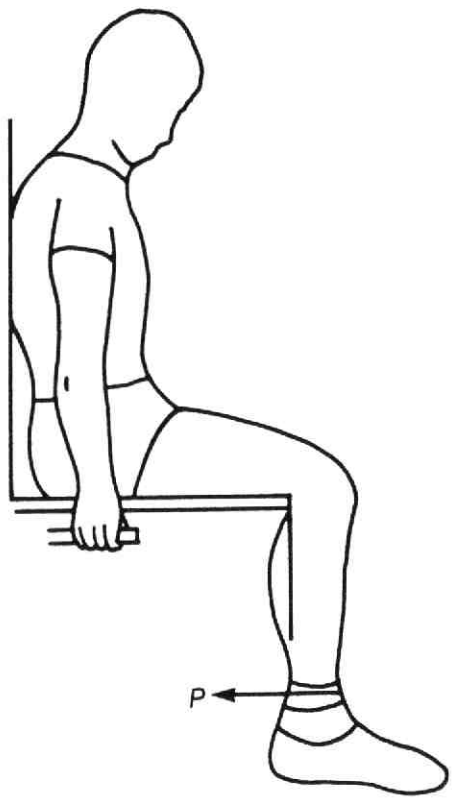
- lineaire functie (lineair verband) 2.5
  - $y = ax + b$
  - stuksgewijs lineair met aansluiting 3.2
    voorbeeld: voor $0 \leq x \leq 5$ geldt $y = 3x + 1$
    voor $5 < x \leq 20$ geldt $y = 2x + 6$
- machtsfuncties $y = a \cdot x^p$ $\begin{cases} y = 3x^6 & p \text{ is natuurlijk getal} \\ y = 3 \cdot x^{-4} & p \text{ is negatief geheel getal} \\ y = 3x^{5,7} & p \text{ is een gebroken getal} \end{cases}$ 3.6 / 4.7.na 2 / 4.7
- lineair gebroken functies
  $y = \frac{a}{x}$; $y = a + \frac{b}{x}$; $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ 3.7
- exponentiële functies $y = a \cdot g^x$, met grondtal g positief 4.3
  - verschil met machtsfunctie
    $y = 1{,}4 \cdot (3{,}2)^x$ is een exponentiële functie
    $y = 1{,}4 \cdot x^{3,2}$ is een machtsfunctie
- formules met meer ingangen: 3.3
  voorbeelden: $P = 0{,}1 \times D^2 \times V^3$ 3.6.9
  $s = \frac{1}{10}a + \frac{1}{15}b + \frac{1}{30}c$
- combinaties van verschillende functies 4.4
  voorbeelden: $y = 0{,}75^x + 3$
  $F = N(1 - 2^{-cA})$

Problemen die bij veel formules kunnen voorkomen

- vaststellen tot welke soort de formule behoort en welke vorm de grafiek kan hebben
- nagaan hoe de formule tot stand is gekomen ('kraken') 3.10.3b, 4.7.3c
- het opstellen van een formule op grond van
  - tabellen 3.7.7
  - grafieken 4.7.3a
  - teksten 4.2.4ab
  - andere formules 3.8.6b

Volhouden

Isometric endurance



– Seating position for isometric leg exercise.

De proefpersoon moet via een kabel om zijn enkel zo lang mogelijk een gewicht tegenhouden. De tabel geeft het resultaat van zo'n experiment.

Load (P kg)	Holding time (t sec)
7	470
10	288
21	84
31	52
41	32

>a Het verband tussen t en P kan benaderd worden door een formule van de vorm: $t = a \,.\, P^b$, met a en b constant.
Is b groter of kleiner dan 0?

Hoewel er te weinig gegevens zijn, is er toch een dure wiskundige techniek op toegepast. Het resultaat:

$$t = \frac{9259,45}{P^{1,5251}}.$$

>b Test deze formule voor $P = 10$ en $P = 40$

Gebruik van formules (soms in samenhang met grafieken)

- het tekenen van de grafieken
- het oplossen van vergelijkingen
  - aflezen uit grafiek, controleren met formule en zo nodig bijstellen
  - een oplossing schatten, testen, verbeteren

    voorbeeld: $2^x = 24$ $\quad x = 4 \rightarrow 2^x = 16$, te klein

    $x = 5 \rightarrow 2^x = 32$, te groot

    nieuwe poging: $x = 4{,}6$
  - algebraïsche herleidingen gebruiken

    voorbeelden: $3x^2 = 12 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = 2; x = -2$

    $4 \cdot 3^{0,5x} + 7 = 43$ stap voor stap met de *blokjesmethode:*

    $$y = \boxed{\boxed{4 \cdot \boxed{3^{\boxed{0,5x}}}} + 7} = 43$$

    voor de algebraïsche herleidingen gelden veel beperkingen.
    zie bladzijde 10 (de soorten functies apart)
  - de situatie bepaalt hoe nauwkeurig een benaderde oplossing moet zijn.
- het oplossen van ongelijkheden (met behulp van grafieken)

  voorbeeld: $2^{x-1} > x + 1$;

  waar ligt de grafiek van $y = 2^{x-1}$ 'boven' de grafiek van $y = x+1$
- het gedrag bepalen
  - stijgen, dalen
  - maximum, minimum, buigpunt
  - asymptotisch gedrag
  - beschrijven wat er gebeurt als de invoer verandert: als $x \nearrow$ dan 4.4.1a
  - de rol van de constanten. 3.1.8

Omvormingen

- veranderen van eenheid 3.8.7

  voorbeeld: $P = 5V^3$ met V in m/s omzetten in formule met V in km/uur
- veranderen van beginvoorwaarden (parameter krijgt andere waarden) 3.1.10b

  voorbeeld: $t_{\text{oranje}} = 1{,}5 + V/4$ met een reactietijd van 1,5

  een grotere reactietijd geeft bijvoorbeeld de formule:

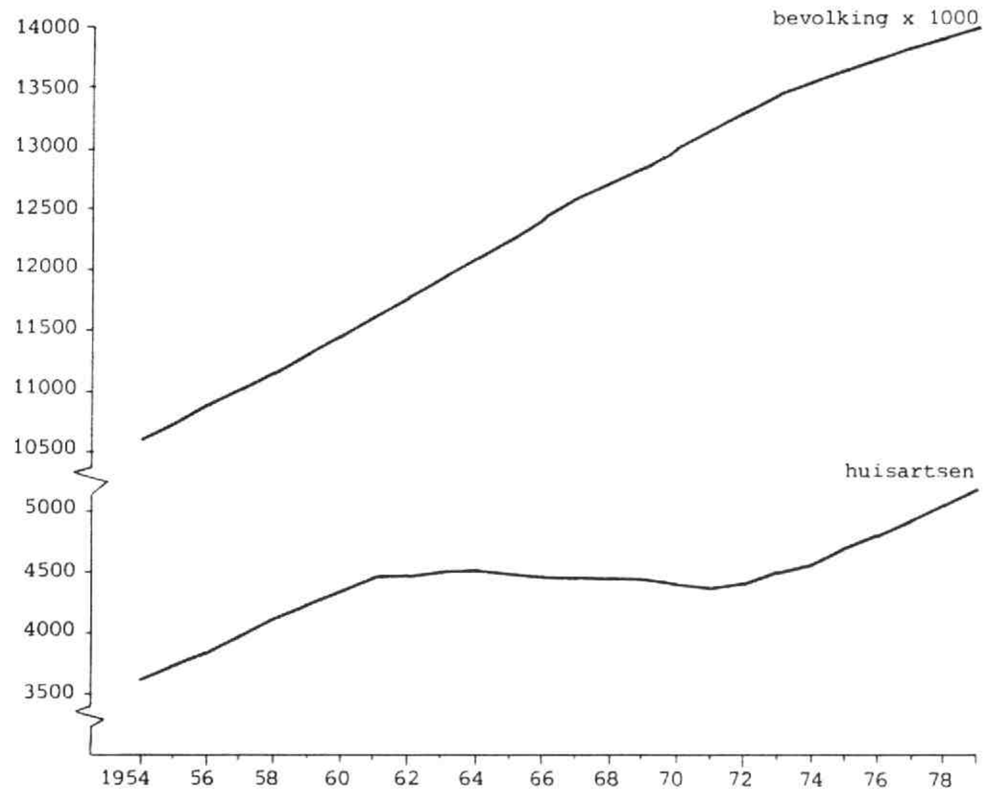
  $t_{\text{oranje}} = 2 + V/4$
- invoer en uitvoer verwisselen. 3.4.4d, 3.7.8g

  voorbeeld: $A = \frac{3}{B} + 4 \rightarrow B = \frac{3}{A-4}$

  $A = 3B + 2C \rightarrow B = \frac{1}{3}A - \frac{2}{3}C$

Huisartsendichtheid

Aantal huisartsen en omvang van de bevolking in de periode 1954-1979



Bron: 1954-1968 Jaarverslagen der Ziekenfondsraad.

Om de jaren beter te kunnen vergelijken is het begrip *huisartsendichtheid* ingevoerd. Daaronder verstaat men het aantal huisartsen per 10.000 inwoners.

>a Bereken de huisartsendichtheid in 1961 en laat met berekeningen zien dat de huisartsendichtheid toen een maximum vertoonde.

>b Beredeneer op grond van de grafieken dat de huisartsendichtheid toen maximaal was.

>c Teken de grafiek van de huisartsendichtheid voor de jaren 1958 tot 1964 en 1968 tot 1975.

>d Benader de grafieken met rechte lijnstukken en geef daarvoor formules. Neem als invoer het aantal jaren na 1954 (t) en als uitvoer het aantal huisartsen (h) en het aantal duizendtallen van de bevolking (b).

>e Bepaal een formule die de huisartsendichtheid uitdrukt in h en b.

>f Bepaal formules die de huisartsendichtheid geven voor $0 \leq t \leq 24$.

>g Teken het verloop van de huisartsendichtheid met behulp van deze formules.

- schakelen 3.8.6b

voorbeeld: $\left.\begin{array}{l} A = B^2 \\ B = 3C + 1 \end{array}\right\} \rightarrow A = (3C + 1)^2$

$\left.\begin{array}{l} A = 2^B \\ C = B - 1 \end{array}\right\} \rightarrow A = 2^{C+1}$

DE SOORTEN FUNCTIES APART

Lineaire functies:

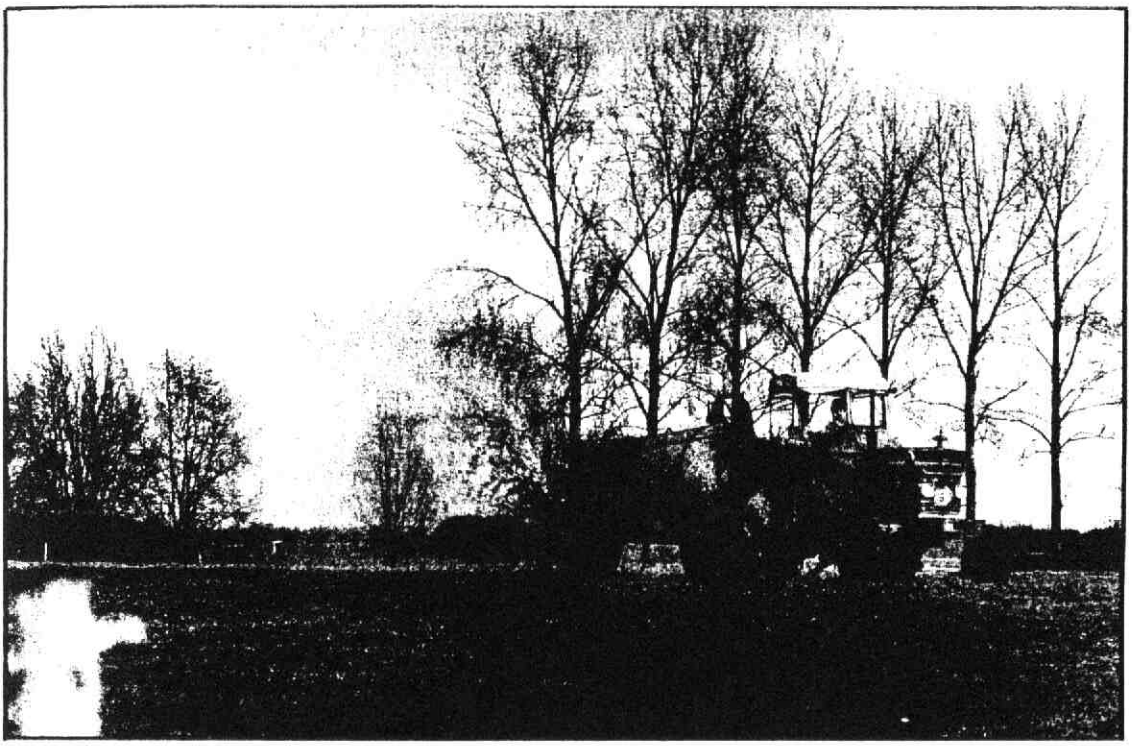
- $y = ax + b$; de rollen van a en b in de formule en in de grafiek 2.5
- herkenningsmiddel voor lineaire functies: gelijke toenamen van x geven gelijke toenamen van y
- tekenen van de grafiek op grond van de formule 2.5.2a
- opstellen van de formule 2.5.6
- verschil $y = ax$ en $y = ax + b$ 2.5.3
- het begrip *evenredig* 3.2.1c
- gebruik van de vorm $ax + by = c$ 2.5.14
- algebraïsche oplossing van lineaire vergelijkingen 2.5.2b
  voorbeeld: $3x - 11 = 7 \rightarrow 3x = 18 \rightarrow x = 6$
- snijpuntsberekening bij rechtlijnige grafieken 2.5.7c
- combineren van functies
  - optellen, aftrekken, vermenigvuldigen 3.5.4b
  - schakelen 3.8.3a
- bundels grafieken die ontstaan door in $y = ax + b$ de waarden van a en b te variëren 3.4.4g
- aansluiting van stuksgewijs lineaire functies  , hierbij formules bepalen. 3.2.3

Machtsfuncties

- kwadratische functies herkennen met verschillentabel 3.6.3a
- grafieken tekenen 4.7.2a
- vergelijkingen oplossen
  - door aflezen uit grafieken 4.7.2c
  - door schatten en vervolgens bijstellen
  - met de rekenmachine door de inverse van de machtsverheffing te gebruiken 3.6.4c

    voorbeeld: $x^3 = 20 \xrightarrow{\text{inv}\boxed{x^y}} x = 2{,}714...$
  - door eerst te herleiden tot een hanteerbare vorm ontstaat 4.7.5b
    voorbeeld: $3 \cdot x^{2,1} + 7 = 11 \rightarrow ... \rightarrow x^{2,1} = \frac{4}{3} \rightarrow ...$
- $y = x^{\frac{1}{2}}$ is dezelfde functie als $y = \sqrt{x}$ 4.7.3

Mestproblemen



Het overschot aan mest heeft een ongekende omvang gekregen. FOTO MICHIEL WIJNBERGH

Koker

De vierde en jongste tegenvaller komt uit de koker van het ministerie van landbouw, dat deze week een rapport naar buiten bracht van een internationaal adviesbureau dat de opdracht had gekregen te onderzoeken of er afzetmarkten zijn voor die korrels. Wanneer een ton korrels niet meer dan 150 gulden hoeft op te brengen, kan er - wanneer alles meezit - in het jaar 2 000 1,5 miljoen ton mestkorrels worden afgezet. Voornaamste markten: Japan, Californië, Frankrijk en Spanje.
Omdat voor de produktie van één ton korrels ongeveer acht ton mest nodig is, vergt een afzet van 1,5 miljoen ton korrels twaalf miljoen ton mest. Dat is dus maximaal 60 procent van wat volgens minister Braks noodzakelijk is. De vraag is echter of een ton mestkorrels voor 150 gulden kan worden geproduceerd. Promest in Helmond gaat uit van 200 tot 250 gulden (indien de investeringssubsidie doorgaat) en dan daalt volgens het adviesbureau de afzetmarkt naar 0,7 tot 0,3 miljoen ton, oftewel naar ruim 25 en ruim 10 procent van wat moet worden gehaald.

>a Teken een grafiek voor het verband tussen produktiekosten en afzetmarkt voor $150 \leq$ produktiekosten ≤ 250.

>b Kan het verband exponentieel zijn?

>c Waarom kan het verband (wiskundig gezien) kwadratisch zijn?
Voorspel in dat geval de grootte van de afzetmarkt bij *f* 300 produktiekosten.
Redelijk?

Lineair gebroken functies

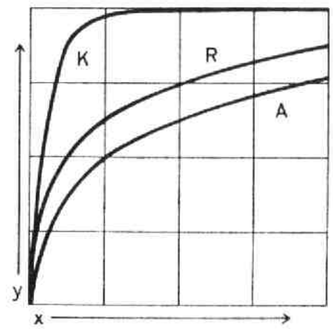
- horizontale asymptoot vinden
  - door proberen met grote waarden van x 3.7.3a
  - door herleiden en redeneren.3.7.5
    voorbeeld: $y = 3 + \frac{5}{x}$
    $\frac{5}{x}$ nadert tot 0 voor grote x-waarden, dus y nadert tot 3
- verticale asymptoot vinden
  - door proberen vaststellen wanneer y zeer groot (positief of negatief) wordt 3.7.3b
  - door redeneren vanuit het 0 worden van de noemer 3.7.5
    voorbeeld: $y = \frac{x-1}{3x-6}$ heeft verticale asymptoot $x = 2$
- grafieken tekenen 3.7.6a
- de praktische betekenis van de asymptoten 3.7.4a
- het begrip *omgekeerd evenredig* 3.7.4b
- vergelijkingen (en ongelijkheden) oplossen
  - met behulp van de grafiek 3.7.6b
  - met behulp van herleiding:
    voorbeeld: $\frac{x+3}{2x-5} = 6 \rightarrow x + 3 = 6\,(2x - 5) \rightarrow ....$
  - met de blokjesmethode 3.1.2
  - combinaties met machtsfuncties en exponentiële functies met de blokjesmethode. 4.4.2c

Exponentiële functies

- herkenningsmiddel voor type $y = b \cdot g^x$: gelijke toenamen van x geven vermenigvuldigingen van y met een *vast getal* 4.1.6b
- betekenis van b en g in concrete situatie. (beginwaarde en groeifactor) 4.2.1
- halfwaardetijd, verdubbelingstijd. 4.4.4a
- omzetten van procentuele groei per tijdseenheid in groeifactor 4.2.1
  - toename van 3% per jaar $\rightarrow$ groeifactor 1,03
  - afname van 3% per jaar $\rightarrow$ groeifactor 0,97
- asymptoot van grafiek vinden door in de formule het onderdeel van de vorm g^x te onderzoeken. (dit gaat naar 0 of naar ‘oneindig’, als x heel groot wordt) 4.3.12
- tekenen van grafiek 4.4.6b
- aflezen van logaritmische schaal 4.5.2a
- vergelijkingen oplossen
  - schatten, bijstellen 4.3.10a
  - met rekenmachine 4.3.10c
  - blokjesmethode 4.3.11
- de exponentiële functie met bijbehorende vergelijking komt ook in samengestelde vorm voor. 4.4.2c

Diersoorten tellen

Een bioloog wil het aantal soorten diertjes dat in een gebied voorkomt, vaststellen door een proefgebiedje te onderzoeken. Het lijkt redelijk dat men in een groter proefgebied meer van de aanwezige soorten op het spoor komt.
Voor deze situatie zijn verschillende formules bedacht. Van drie ervan zijn globale grafieken geschetst.



>a Verklaar de vorm van die grafieken.

Kylin stelde de volgende formule voor:

$$y = m\,(1 - e^{-nx})$$

met x = grootte van het proefgebied
y = aantal diersoorten
m en n zijn constanten die afhangen van de situatie
e = 2,718 (zie Rekenmachine)

De bijbehorende grafiek is met K(ylin) aangegeven.

>b Onderzoek of k positief of negatief is.

>c Waarom is $y = m$ een horizontale asymptoot?
Is het redelijk dat er een asymptoot optreedt?

>d Er is geen maat gegeven voor de grootte van het gebied
Tast dat de waarde van het voorstel aan?

Voor een denkbeeldige situatie gaan we over op de formule

$$y = 100\,(1 - 3^{-0,5x})$$

>e Teken eerst de grafiek van $v = 3^{-0,5x}$ voor $0 \le x \le 10$

>f Teken de grafiek van y als functie van x

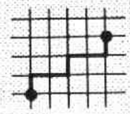
>g Voor welke waarde van x is de helft van het aantal soorten gevonden?

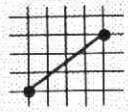
DISCRETE WISKUNDE
Verwijzingen naar de boekjes zijn afgekort tot:

T: Telproblemen — A: Afstanden, Grafen en Matrices
C: Codes en Kansen — R: Rekenen met matrices

Afstanden
Afstanden meten:

- bij 'gewone' afstanden, uitgedrukt in lengte of (reis)tijd
  geografisch (A 1.5): — in een rooster (A 4.4):

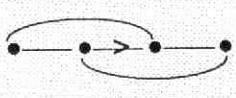
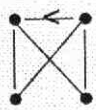
  – over de weg (auto-afstand) ⟷  afstand = 7

  – hemelsbreed (vlieg-afstand) ⟷  afstand = 5

- bij andere soorten afstanden
  – mate van verschil
  voorbeeld: afstand tussen opgravingen A 1.7
  – mate van overeenkomst
  voorbeeld: morsecode A 4.14
  – aantal verschillen
  voorbeeld: binaire codes C 1.11
- rekenen met een nieuw ingevoerde afstand
- afstanden in 'kaart' brengen
  – in een meetkundig verantwoorde kaart. (meestal slechts bij benadering mogelijk) A 4.7,4.21
  – met behulp van een graaf. (dit is altijd mogelijk)

Graaf en Matrix

- informatie uit een tekst, tabel of grafische voorstelling verwerken in een (gerichte) graaf en/of matrix. R 1.13
- informatie van een graaf verwerken in een matrix en omgekeerd A 6.4
- nagaan of twee grafen hetzelfde voorstellen A 2.5

  voorbeeld:  en 

- interpreteren van de verbindingen in een graaf (en de getallen in een verbindingsmatrix) binnen de concrete situatie R 5.18
- interpreteren van een element, een rij (bijvoorbeeld: de rijsom), een kolom (bijvoorbeeld: de kolomsom) van een matrix binnen de concrete situatie R 6.16
  let op het verband met TABELLEN

Neerslag en verdamping

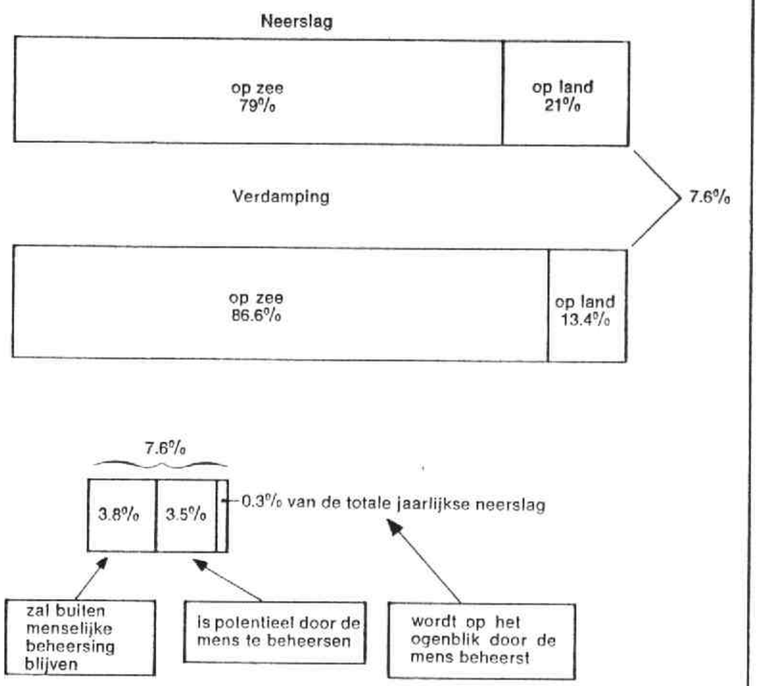
WATER, EVEN KOSTELIJK ALS KOSTBAAR

Als laatste spreker behandelde ir. Zuidema een aantal interessante zaken over het water in de wereld.

„Wist u”, vroeg hij om te beginnen, „dat maar ongeveer eenvijfde (21%) van alle neerslag, die in de vorm van regen, sneeuw en hagel op aarde valt, op het land terechtkomt? De rest belandt in zeeën en oceanen”.

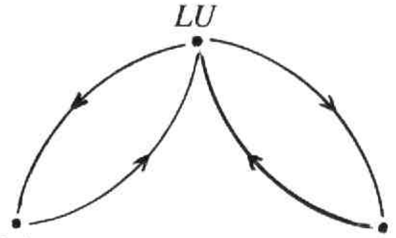
Ir. Zuidema legde uit dat bij de verdamping van water de verdeling nóg meer ten gunste van de zee uitvalt. 86,6% verdampt vanaf het zee oppervlak en maar 13,4% vanaf het land. Dat jaarlijkse verschil tussen neerslag en verdamping — het zogenaamde neerslagoverschot — van 7,6% van de totale neerslag (zie figuur 1) is niet gelijkmatig over de wereld verdeeld. Naast omvangrijke gebieden met een neerslagoverschot, zoals Nederland, kennen grote delen van de wereld een grotere verdamping dan neerslag per jaar.

Wanneer dit verdampingsoverschot in het groeiseizoen valt, zal aanvoer van water voor de vochtvoorziening van de gewassen nodig zijn,



Figuur 1. De betrokkenheid van de mens bij neerslag en verdamping in de wereld weerspiegelt zich duidelijk in deze cijfers

De voortdurende kringloop neerslag-verdamping kan met een graaf worden weergegeven. De knooppunten zijn Z(zee), LA(land) en LU(lucht).



>a Verklaar deze graaf en zet bij elk van de pijlen het bijhorende getal.

>b Deze graaf kan de werkelijke kringloop van water niet voldoende beschrijven. Leg dat uit.

>c Vul de graaf aan met de gegevens over het neerslagoverschot, zó dat de kringloop helemaal rond is.

- beslissingen nemen op basis van informatie die een matrix en/of graaf geeft — A 2.16b
- een matrix met relatieve frequenties (of kansen) gebruiken bij voorspellingen — R 6.blz.41
- bewerkingen met matrices
  - optellen van twee matrices (met dezelfde afmetingen) — R 1.blz.11
  - vermenigvuldigen van een matrix met een getal — R 2.7
  - vermenigvuldigen van twee matrices: $A \times B$ (voorwaarde: aantal kolommen van A = aantal rijen van B) — R 4.blz.27
  - interpreteren van de uitkomst van een matrixbewerking binnen de gegeven situatie — R 2.6,7en R 4.11,12

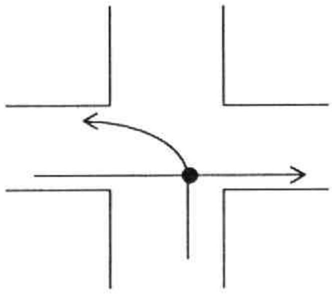
    bijzonder geval: produkt van twee verbindingsmatrices geeft de matrix van alle tweestapsverbindingen — R 5.12

Combinatorisch tellen

- telproblemen oplossen naar aanleiding van een tekst
- kiezen van een geschikte aanpak bij een telprobleem:
  - volledig (systematisch) uitschrijven — T 2.3
  - combinatie van (gedeeltelijk) uitschrijven en redeneren
  - Een plaatje gebruiken, eventueel gecombineerd met een redenering — T 6.3
  - faculteitsgetallen of combinatiegetallen gebruiken
- herkennen van het type telprobleem
  - rangschikking met of zonder herhaling — T 6.3
  - bij een steekproef van 5 uit een verzameling van 12
    is de volgorde *wel* van belang (*rangschikking* van 5 uit 12)
    is de volgorde *niet* van belang (*combinatie* van 5 uit 12) — C 2.10
- gebruiken van een plaatje:
  - boomdiagram — T 3.3
  - wegendiagram — T 5.9
  - rooster (driehoek van Pascal) — T 8.8
- interpreteren van een gegeven plaatje — T 1.6
- vertalen van telprobleem waarbij twee kenmerken worden onderscheiden, naar binaire codes (en daarna naar routes in een rooster) — C 2.24
- kritisch beoordelen van tellingen in een tekst — T 9.17

Kruispunten, conflictpunten

Bij een kruispunt van twee wegen, waarbij de verkeersstromen niet in goede banen worden geleid met behulp van stoplichten, zijn er een aantal situaties waarin verkeersdeelnemers elkaar 'ontmoeten'.
In de situatieschets is één voorbeeld getekend van wat wel een *conflictpunt* wordt genoemd.

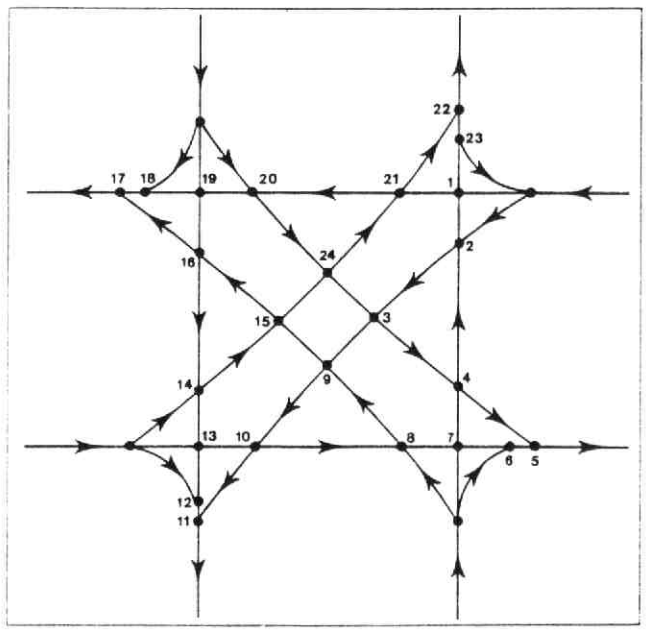


Bekijk alleen de mogelijke 'ontmoetingen' tussen auto's onderling.

>a Bereken het totale aantal conflictpunten bij dit kruispunt door middel van een combinatie van tellen en redeneren.

In het blad 'Verkeerskunde' stond het volgende plaatje.
De conflictpunten zijn genummerd:

Grafische weergave van conflictpunten op een kruispunt (bron: Hakkert & Mahalel, 1978)



>b Verklaar het aantal (24) vanuit de berekening bij vraag >a.

>c Hoeveel conflictpunten zijn er in totaal, als je ook de fietsers meeneemt? Mogelijke 'ontmoetingen' zijn dan auto-auto, auto-fiets en fiets-fiets.

STATISTIEK
Verwijzingen naar de boekjes zijn afgekort tot:

S: Statistiek	K: Kans en Verwachting
N: De Normale Verdeling	C: Codes en Kansen

Verzamelen van cijfermateriaal

- samenstellen van een steekproef, rekening houdend met
  - het representatief zijn voor de populatie — S 2.1
  - het aselect aanwijzen uit de populatie — S 2.4
- kritisch beoordelen van conclusies gebaseerd op steekproefresultaten — S 1.6,7
- betrouwbaarheidsmarge — S 2.7

Ordening van cijfermateriaal

ongeordende waarnemingen

tabelvorm:

- frequentietabel
  - alle waarnemingsgetallen apart. (absolute of relatieve frequenties)
- frequentietabel
  - waarnemingsgetallen gegroepeerd in klassen (absolute of relatieve frequenties)

grafisch:

- histogram
- frequentiepolygoon
- globale grafiek

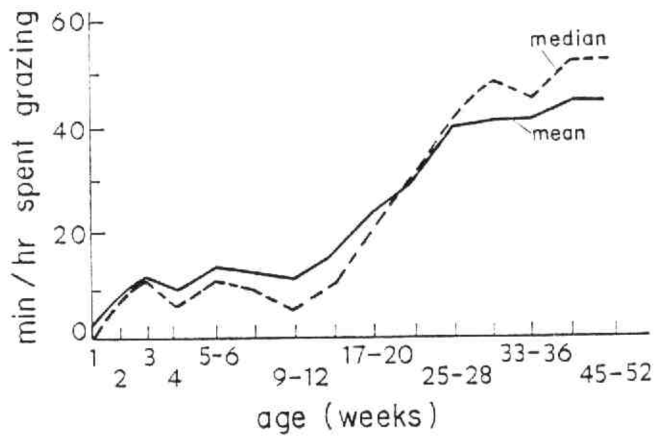
- histogram
- frequentie polygoon
- globale grafiek

- steel- en bladdiagram
- box-plot-grafiek

- twee (of meer) series waarnemingen vergelijken bijvoorbeeld: — S 4.2
  - met behulp van relatieve frequenties
  - met relatieve-frequentiepolygonen
  - met box-plot-grafieken
- andere grafische presentaties interpreteren — S 4.1
- grafische presentaties kritisch beoordelen op 'eerlijkheid' — S 4.3

Grazende veulens

Vrij kort na hun geboorte beginnen veulens al te grazen. Eerst maar een paar minuten, rond hun eerste verjaardag al zo'n 45 minuten per uur (alleen bij daglicht). Een onderzoeker die het graasgedrag van een groep veulens een jaar lang volgde, bracht de verzamelde gegevens als volgt in beeld:



Je kunt bijvoorbeeld aflezen dat in de 17^e t/m 20^e week veulens gemiddeld zo'n 25 minuten per uur grazen, terwijl de mediaan dan bij 20 minuten per uur ligt.

De informatie bij week 1 is verbazingwekkend:
gemiddelde 3,5 min/uur, mediaan: 0 min/uur

>a Hoe is dat mogelijk? Licht je antwoord toe met een getallen voorbeeld. Neem daarbij aan dat de groep 20 veulens omvat.

>b Let op de getallen langs de horizontale as. In zekere zin geeft de grafiek misleidende informatie. Hoe dan?

Opvallend is dat het gemiddelde (mean) aanvankelijke groter is dan de mediaan. Verderop is dat net omgekeerd.

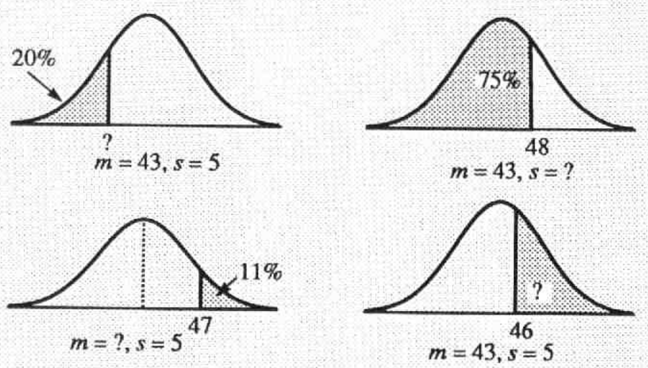
>c Teken voor de periode 9-12 weken en voor de periode 45-52 weken een globaal frequentiepolygoon dat past bij de gegevens uit de grafiek.
Langs de horizontale as komen de aantallen minuten grazen per uur te staan.

Karakteristieken van een frequentieverdeling

- een frequentieverdeling 'samenvatten' met behulp van een geschikte centrummaat en een daarbij passende spreidingsmaat
- berekenen (of uit een grafiek schatten) van de centrummaten — S 5
  - gemiddelde
  - mediaan
  - modus (modale klasse)
- berekenen van gemiddelde met behulp van klassemiddens — S 5.9, 10
- berekenen (of uit een grafiek schatten) van de spreidingsmaten — S 6
  - absolute spreiding
  - gemiddelde absolute afwijking
  - standaardafwijking
  - interkwartiele afstand
- invloed van uitschieters (of restklassen) op centrum- en spreidingsmaten — S 5.8
- schattingen met behulp van de vuistregels voor een klokvormige frequentieverdeling — S 6.11
- twee (of meer) series waarnemingen vergelijken met behulp van centrum- en spreidingsmaten

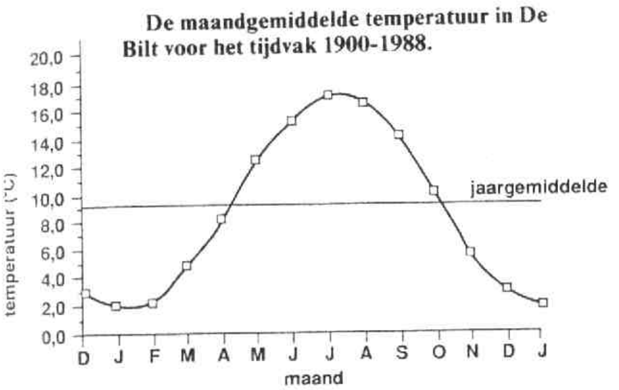
Normale verdeling

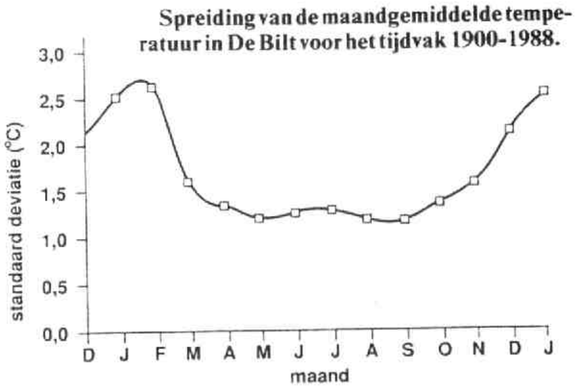
- normale verdeling gebruiken als rekenmodel bij klokvormige frequentieverdeling
- gebruiken van eigenschappen van de normale kromme
  - symmetrie rond het gemiddelde
  - oppervlakte onder de kromme: 100% — N 3 blz.24
- vertaling van normale verdeling (gemiddelde m en standaard-afwijking s) naar de standaard-normale verdeling (gemiddelde 0 en standaard-afwijking 1) en omgekeerd — N 4.3
- gebruik van de oppervlaktetabel behorend bij de standaard-normale kromme voor iedere normale kromme — N 4.6
- typen vragen: — N 4.12



Temperatuurschommelingen

In de twee grafieken zijn de maandtemperaturen van 89 jaren verwerkt.





>a Geef voor de linkergrafiek het gebied aan waarbinnen 95% van de voorgekomen maandtemperaturen zijn te vinden. Gebruik daarbij de vuistregel voor de SD.

In het bijbehorende artikel stond de uitspraak:
'De hoogte van de jaartemperatuur (= gemiddelde temperatuur over een heel jaar) wordt voornamelijk beïnvloed door de temperaturen in de wintermaanden.'
Bij wijze van toelichting werd verwezen naar de bovenstaande grafieken.

>b Hoe ondersteunen deze grafieken die uitspraak?

Neem aan dat de maandtemperatuur normaal verdeeld is.
Bijvoorbeeld (zie de grafieken): de temperatuur over januari is normaal verdeeld, met $m = 2{,}0^\circ$ C en $s = 2{,}5^\circ$ C

>c Hoe groot is voor januari de kans op een temperatuur onder 0° C?

>d Hoeveel jaren per eeuw mag je verwachten waarbij de temperatuur over de maand juli meer dan 19° C bedraagt?

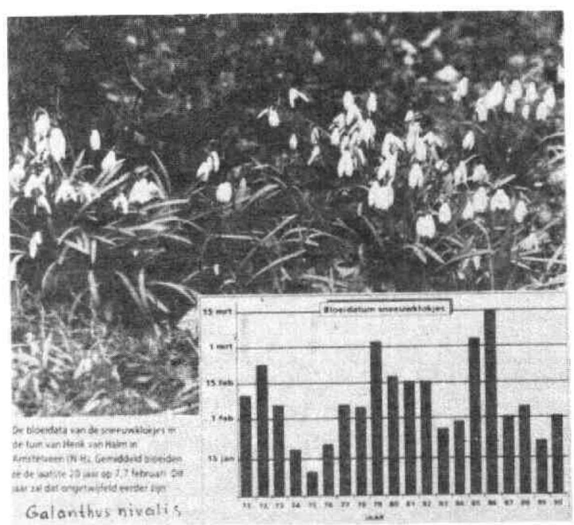
De bloeidatum van sneeuwklokjes zou een maat kunnen zijn voor de strengheid van een winter.

>e Welke winter zou dan het strengst zijn geweest in de periode 1971-1990?
En welke het mildst?

>f Is de bloeidatum een betrouwbare maat voor de strengheid van een winter?

In 1988 bereikte de jaar temperatuur een recordhoogte: 10,3° C.

>g Is dat niet in tegenspraak met de grafiek hiernaast?



KANSREKENING

Kans en verwachting

• berekenen van experimentele kansen op basis van	
– statistische gegevens	K 1.10
– herhaald uitvoeren van een experiment	K 2.12
– simulatie (toevalsgetallen, bord van Galton)	K 2.16,17
• berekenen van theoretische kansen op basis van	
– principe van het eerlijk verdelen	K 3.4
– symmetrie-overwegingen	
– uittellen van alle mogelijkheden	K 3.5
• verband tussen kans en verwachtingswaarde	K 7.1
• berekenen van kansen bij een opgelegde beperking op de verzameling van mogelijke uitkomsten	K 5.8
• vertalen van een kansexperiment naar een vaasmodel	K 5.7

Rekenen met kansen

• kansexperiment vertalen in een aantal trekkingen uit een vaas, met- of zonder terugleggen	K 6.3
• kansexperiment vertalen naar boom- of kansdiagram	K 6.7
• optellen en vermenigvuldigen van kansen	
• kansverdeling opstellen	
– (controle)eigenschap: som van alle kansen = 1	
– soms is de volgende eigenschap goed te gebruiken: kans dat A gebeurt = 1 – kans dat A *niet* gebeurt.	K 4.6e
voorbeeld: er worden 5 muntstukken gegooid. de kans dat Kop wordt gegooid (een of meer keer) = 1 – kans dat Kop *niet* voorkomt (dus 5 keer Munt)	
• verwachtingswaarde bij een kansverdeling berekenen	K 7.1e
• kanshistogrammen maken en interpreteren	C 3.8
Speciale kansverdeling: binomiale verdeling	
• binomiaal kansexperiment vertalen in een toevalswandeling in een rooster	C 3.3
• gebruiken van een 'formule' bij het berekenen van binomiale kansen	C 3.17
voorbeeld: $P(S = 4) = \binom{10}{4} \cdot (0,3)^4 \cdot (0,7)^6$	
• gebruiken van de binomiale kanstabel*)	C h4

*) voorlopig valt dit buiten de verplichte examenstof.

Wimbledon

De finales Wimbledon damestennis worden beslist op basis van 'the best of three'. Een partij duurt dus twee of drie sets.

>a Maak een boomdiagram waarin alle mogelijke spelverlopen van een finalepartij zijn af te lezen.

Veronderstel dat beide dames bij iedere set gelijke kansen hebben om die set te winnen.

>b Hoe groot is de kans dat de partij in twee sets wordt beslist? En in drie sets?

>c Bereken de kans dat de dame die de partij wint ook winnares was van de eerste set.

Van de 83 tot nog toe gespeelde finales is bekend:
A: 62 partijen werden in twee sets beslist, en dus 21 in drie sets.
B: bij 76 van de 83 partijen won de winnares van de partij ook de eerste set.

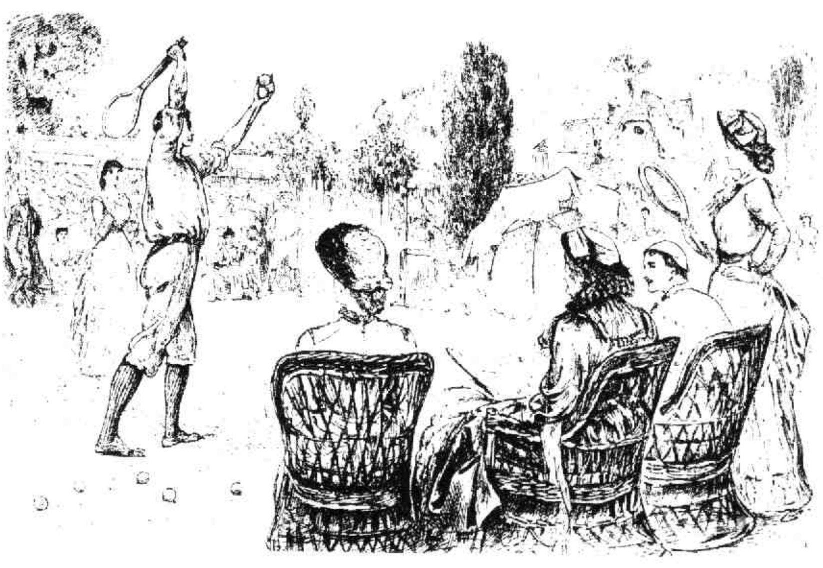
Deze gegevens passen niet bij de veronderstelling die voor >b werd gemaakt. Nieuwe veronderstelling: bij de eerste set hebben beide dames kans 0,5 op winst, maar de winnares van een set heeft een *grotere* kans op winst in de eerstvolgende set. Noem die kans p.

>d Verwerk deze informatie in het boomdiagram van vraag >a.

>e Welke waarde van p past bij gegeven A?
Hoe groot is dit geval de kans dat de eerste-set-winnares de hele partij winst?

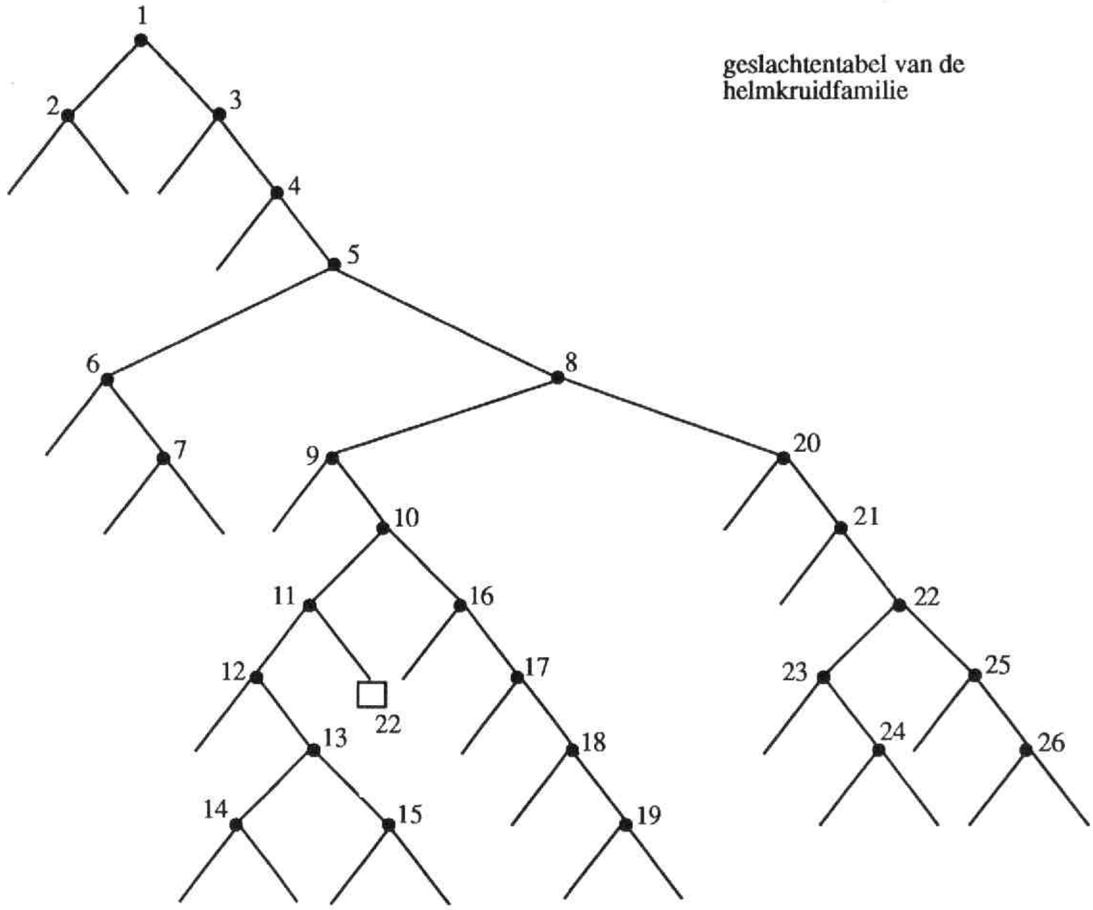
Het is ook mogelijk p te bepalen op basis van gegeven B

>f Laat zien dat dit leidt tot $p + (1 - p)^2 = 0{,}916$.
Zoek met behulp van je rekenmachine een benadering van p (in twee decimalen) die hieraan voldoet.



een partijtje **tennis** in Engeland (1882) anonieme tekening

DETERMINEERBOMEN



geslachtentabel van de helmkruidfamilie

112. HELMKRUIDFAMILIE, *Scrophulariaceae.*

8 (5)
a. Alle, of althans de meeste bladen staan kruiswijs. **9**
b. Alle of de meeste bladen staan verspreid (zelden kranswijs) of in een wortelrozet. **20**

9
a. Vlak onder de kelk nog 2 groene blaadjes, daardoor zijn er schijnbaar 7 kelkbladen; bloemkroon bleek lila, tweelippig, met vierkantige buis en vlakke zoom, zie fig.; twee van de 4 meeldraden brengen geen stuifmeel voort (zijn dus onvruchtbaar). Blz. 847, **Genadekruid**
b. Vier of vijf kelkbladen of- -slippen. **10**

10
a. Vijf kelkbladen of -slippen; bloemkroon tweelippig of bijna regelmatig. **11**
b. De meeste bloemen hebben vier kelkbladen of -slippen; bloemkroon duidelijk tweelippig. **16**

11
a. De bloemkroon is open; meeldraden en stamper zijn, althans bij oudere bloemen, zichtbaar. **12**
b. De bloemkroon is door een welving van de onderlip gesloten, zodat meeldraden en stamper van buiten niet te zien zijn. Zie fig. **22**

Bloemkroon door een welving der onderlip gesloten.

Determineerbomen

In de Geïllustreerde Flora van Nederland staan vragenlijsten waarmee planten op naam gebracht kunnen worden. We nemen het geslacht kanariegras als voorbeeld:

1 Geslacht: **Kanariegras,** ***Phalaris.***

a. Bloeiwijze een gelobde pluim. Hoog oevergras, dat op de manier van riet groeit en daar in niet bloeiende toestand zeer veel op lijkt. Het is ook dan te herkennen aan het duidelijk aanwezige tongetje. Juni—Juli. Fig. blz. 243. ♃ **Rietgras,** *Ph. arundinacea* L.

b. Bloeiwijze een dichte aarpluim. 2

2

a. Aarpluim eivormig; kiel der samengevouwen kelkkafjes breed gevleugeld, zie fig. hiernaast. 3

b. Aarpluim rolrond; kiel der kelkkafjes smal gevleugeld. 4

3

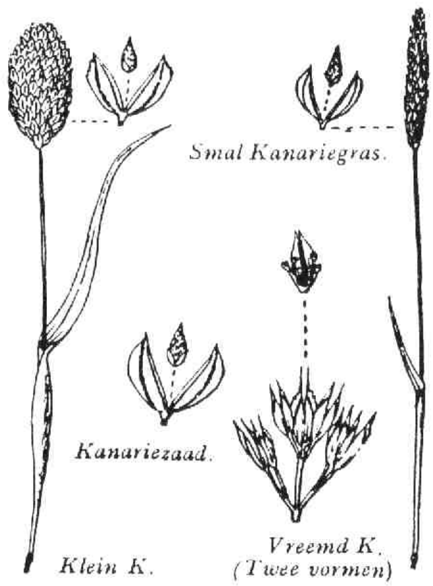
a. De wit-vliezige vleugels der kelkkafjes hebben een gave rand. Hier en daar verbouwd, verwilderd of opgekomen uit weggeworpen „wit vogeltjeszaad", ook adv. Mei—October. ⊙ **Kanariezaad,** *P. canariënsis* L.

b. Vleugelrand onregelmatig getand. Zie fig. Overigens zeer veel op de vorige gelijkend. Juni—Oct. Adv. z.z. ⊙ **Klein Kanariegras,** *Ph. minor* Retz.

4

a. Aartjes in groepen van 7 bij elkaar, waarvan alleen het middelste vruchtbaar is. Mei—Sept. Adv. **Zie fig.** z.z.z. ⊙ **Vreemd Kanariegras,** *Ph. paradoxa* L.

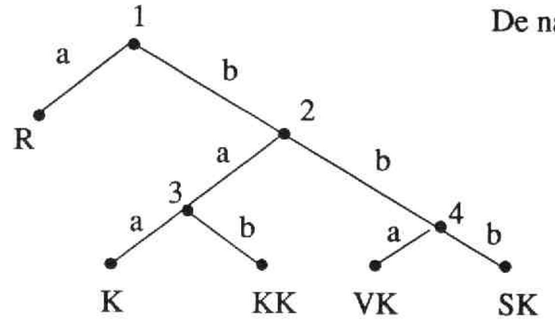
b. Aartjes alle vruchtbaar, kleiner dan bij de vorige drie soorten, hier **3—4** mm, daar **5—8** mm lang. Evenals deze adv. bij meelfabrieken, havens enz. **Fig. vor. blz.** z.z. ⊙ **Smal Kanariegras,** *Ph. angusta* Nees



Na vereenvoudiging en toelichting komt er:

beslissing 1.	a.	bloeiwijze gelobde pluim.	*dan* Rietgras.	
	b.	bloeiwijze dichte aarpluim	*ga naar beslissing*	2
2.	a.	aarpluim eivormig	,,	3
	b.	aarpluim rolrond	,,	4
3.	a.	vleugels kelkkafjes gave rand	*dan* Kanariezaad	
	b.	idem onregelmatig getand	*dan* Klein kanariegras	
4.	a.	aartjes 5-8 mm lang	*dan* Vreemd kanariegras	
	b.	aartjes 3-4 mm lang	*dan* Smal kanariegras.	

Deze serie keuzen met namen en verwijzingen kan ook met een boom worden voorgesteld: een *determineerboom.*



De namen van de planten zijn afgekort

Bij elke beslissing moet worden vastgesteld welke van twee bij elkaar horende, maar elkaar uitsluitende, eigenschappen de plant heeft.

1. bloeiwijze	gelobde pluim dichte aarpluim
2. vorm aarpluim	eivormig rolrond
3. rand kelkkafjes	gaaf getand
4. lengte aartjes	5-8 mm 3-4 mm

Om in twijfelgevallen toch te kunnen beslissen zijn soms extra eigenschappen opgenomen. Vergelijk daarvoor de wel en niet-vereenvoudigde vorm.

1. > Maak een lijst van de vijf planten van het geslacht Kanariegras en schrijf bij elke plant welke van de acht hierboven genoemde eigenschappen erbij horen.

Dit staat er in de flora over het geslacht Vossestaart:

Geslacht: **Vossestaart,** *Alopecurus.*

1 *a.* Meestal forse, rechtopstaande planten. Aartjes 4—7 mm lang. 2

b. Meestal minder forse planten met onderaan geknikte stengels. Aartjes 2—3½ mm lang. 3

2 *a.* Overblijvend, met uitlopers; aarpluim aan top en voet stomp; zijtakjes van de aarpluim met 4—6 aartjes; kelkkafjes met ongevleugelde kiel. Algemeen in wei- en hooilanden. Mei, Juni—Sept.
♃ **Vossestaart,** *A. pratensis* L.

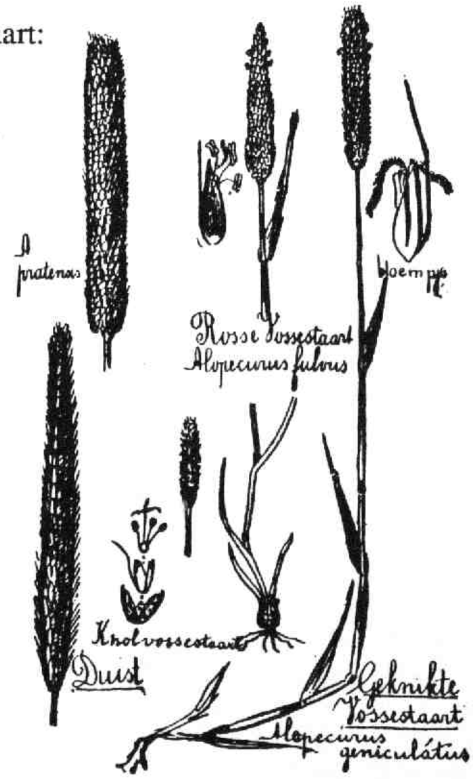
b. Een- of tweejarig, zonder uitlopers; aarpluim naar top en voet smal toelopend; zijtakjes van de aarpluim met 1 of 2 aartjes; kelkkafjes met gevleugelde kiel. Op kleiig bouwland, elders z. Juni—Sept.
⊙ en ⊙ **Duist,** *A. myosuroïdes* Huds.
(*A. agrestis* L.)

3 *a.* Stengel onderaan met knolvormige verdikking. Kelkkafjes spits met **3** groene nerven, enigszins gevleugeld. Veel op zilte kleigrond. Mei, Juni—September.
♃ **Knolvossestaart,** *A. bulbosus* L.

b. Geen **knol, kelkkafjes** stomp. 4

4 *a.* Helmknoppen geel of paars, ca 3 × zo lang als breed. Kafnaald tweemaal zo lang als het aartje. In vochtige weilanden. Mei—Sept.
⊙ **Geknikte Vossestaart,** *A. geniculatus* L.

b. Helmknoppen oranje, ca 1½ × zo lang als breed. Kafnaald nauwelijks buiten het aartje uit stekend. Op vochtige plaatsen. Mei, Juni—Sept.
z. ⊙ **Rosse Vossestaart,** *A. aequalis* Sobol.
(*A. fulvus* Sm.)



2. Maak voor het geslacht Vossestaart:

   >a een vereenvoudigde vorm

   >b de determineerboom

   >c een overzicht van de gebruikte eigenschappen

   >d de plantenlijst met de bijbehorende eigenschappen

We bekijken nog eens de boom voor het geslacht Kanariegras.
Elke keuze bij een belissingspunt is eigenlijk het antwoord op een vraag. Er zijn hier dus vier vragen gesteld.
Met elke vraag correspondeert een 'vertakkingspunt' en met elke plant een 'eindpunt'. Het aantal 'punten' is het aantal vertakkingspunten plus het aantal eindpunten.
De punten worden in rangen verdeeld:

0^e rang: het punt behorend bij de eerste vraag (startpunt).
1^e rang: de punten die bereikt kunnen worden *na* één vraag.
2^e rang: de punten die bereikt kunnen worden *na* twee vragen.
enz.

3. > Vul deze tabel voor Kanariegras in

rang	aantal punten	aantal vertakkingspunten	aantal eindpunten
0			
1			
2			
3			
totalen:			

4. > Doe hetzelfde voor Vossestaart.

De opgaven 3 en 4 kunnen dit vermoeden doen opkomen:

$$\boxed{\text{aantal eindpunten} = \text{aantal vertakkingspunten} + 1}$$

Het is natuurlijk verstandig dit in ingewikkelder bomen te controleren.

We gaan de waarheid van het vermoeden *bewijzen* voor bomen met als hoogste rang 4. Een gewone berekening zoals in de opgaven 3 en 4 is niet mogelijk. Daar is bijvoorbeeld te zien dat het aantal vertakkingspunten onder de punten van de 1^e rang niet vaststaat.
We lossen dat nu op door in zulke onzekere gevallen de aantallen met letters aan te geven. Daarbij zijn we zo zuinig mogelijk met het introduceren van zulke letters (wiskundig gesproken zijn het 'variabelen').
De berekening start in opgave 5.

5.

rang	aantal punten	aantal vertakkingspunten	aantal eindpunten
0	1	1	0
1	2	(b.v.)a	2 - a
2	2a	(b.v.)b	..
3	..	..	..
4	..	..	..
totalen:	..	..	..

Er is al een begin gemaakt met het invullen van de tabel.
>a Ga na waarom de keuze van *a* vertakkingspunten meteen twee andere vakjes vult.
>b Voltooi de tabel.

6. > Waarom is hiermee het bewijs voor deze soort bomen geleverd?

Op dezelfde manier kan ook voor bomen met een andere hoogste rang de regel worden aangetoond.

7. Uit de regel volgt:
Met *n* vragen kun je ..... planten vinden.
> Vul het ontbrekende in.

8. > Een geslacht heeft 14 planten. Hoeveel vragen zijn er nodig?

Het zelf schrijven van een stukje flora betekent eigenlijk het ontwerpen van een determineerboom. Om hierin enig inzicht in te krijgen, nemen we weer *kanariegras*. We gaan uit van de lijst uit opgave 1.
Er zijn vijf planten, dus er moeten vier vragen worden bedacht. En daarvoor zijn weer vier paren eigenschappen nodig.
(Opmerking: het is denkbaar dat minder paren toereikend zijn. Dezelfde vraag zou namelijk in verschillende takken kunnen voorkomen. Maar daar storen we ons niet aan.)

Voor de overzichtelijkheid zetten we de planten met hun eigenschappen in een matrix.
N.B.: We weten nu de volgorde van de vier paren eigenschappen niet.
Een 1 betekent dat alternatief *a* van toepassing is en een 2 alternatief *b*. Als we geen beslissing kunnen nemen of als de vraag niet van toepassing is, kiezen we een 0.

9. > Vul deze tabel in:

	lengte aartjes < 5-8 / 3-4	vorm aarpluim < eivormig / rolrond	bloeiwijze < gel.pluim / dichte aarpl.	rand.k. < gaaf / getand
K				
R				
VK				
KK				
SK				

10. > Probeer uit deze matrix een determineerboom te maken. Je kunt daarbij, herhaalde malen, gebruik maken van dit principe:

    Als de een of andere vraag *A* beantwoord moet worden, voordat een vraag *B* gesteld kan worden, dan zullen antwoorden op vraag *A* bij meer planten voorkomen dan de antwoorden op vraag *B*.

11. > Is uit de tabel van opgave 9 de rang van een eindpunt te vinden?

12. Van de planten van het geslacht Klaproos zijn deze bijzonderheden bekend:

    Slaapbol : bladen onbehaard.
    Klaproos : bloem tot 6 cm breed, bloem bloedrood, bladen behaard, helmdraden niet verbreed.
    Ruige Klaproos : bladen behaard, helmdraden verbreed, bloem tot 6 cm breed.
    Kleine Klaproos : helmdraden niet verbreed, bloem vuurrood, bloem tot 6 cm breed, bladen behaard.
    Oosterse Papaver : bloem 1-2 dm breed, bladen behaard.

    > Maak hierbij een determineerboom en schrijf een vereenvoudige tekst voor de flora.

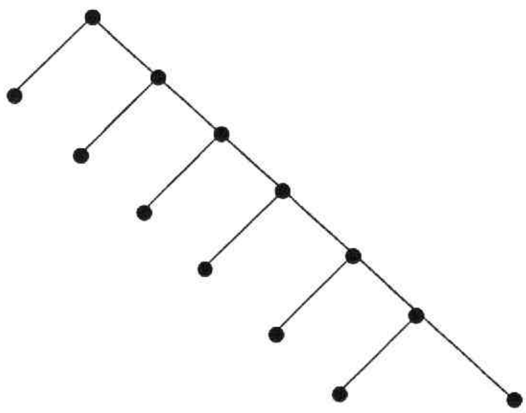
De gegevens die in de opgaven 10 en 12 werden gebruikt, waren al een beetje voorbewerkt: er stonden precies genoeg eigenschappen van de planten aangegeven.
In de volgende opgave zijn de gegevens realistischer.

13. Gemakshalve worden coderingen gebruikt.
    ①t/m ⑦ stellen planten voor; A, B, C, D paren van eigenschappen. $A1$ en $A2$ zijn de twee alternatieven voor A.

    ① : $B1, C2, D2$ ⑤ : $A2, B2, D2$
    ② : $A1, B1, C1$ ⑥ : $A2, B1, C1$
    ③ : $A2, B2, D1$ ⑦ : $A2, B1, D1$
    ④ : $B1, C2, D1$

    > Maak hiervoor een determineerboom.

14. Voor een plantengeslacht kunnen verschillende determineerbomen worden gemaakt, die allemaal dezelfde vorm hebben (zie tekening).
  > Heb je voorkeur voor een bepaalde plaatsing van de planten?



GEILLUSTREERDE FLORA VAN NEDERLAND

HANDLEIDING VOOR HET BEPALEN VAN DE NAAM DER IN NEDERLAND IN HET WILD GROEIENDE EN VERBOUWDE GEWASSEN EN VAN EEN GROOT AANTAL SIERPLANTEN

MET MEER DAN ZESDUIZEND FIGUURTJES

DOOR

E. HEIMANS, H. W. HEINSIUS EN JAC. P. THIJSSE

TWINTIGSTE DRUK
BEWERKT DOOR PROF. DR. J. HEIMANS, MET MEDEWERKING VAN
J. H. KERN, DR. G. KRUSEMAN JR. EN TH. J. REICHGELT

W. VERSLUYS N.V. — 1960 — AMSTERDAM—DJAKARTA

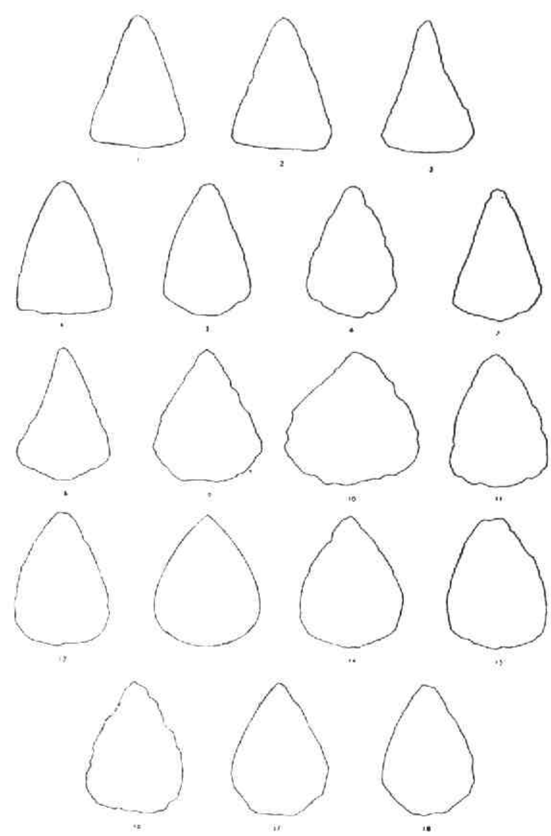
VUISTBIJLEN

Archeologen kunnen aan de vorm van een voorwerp vaak zien uit welke periode het stamt en wie de makers waren. Om dat te kunnen doen zijn grote verzamelingen van zulke voorwerpen op grond van bepaalde kenmerken in klassen (groepen) ingedeeld. Bij een nieuwe vondst kan men dan nagaan waar die in de indeling thuishoort. Zo'n indeling heet een *classificatie.*

In deze tekst gaat het over een classificatie van vuistbijlen.
Vuistbijlen zijn vaak gemaakt van vuursteen. De zijkanten zijn min of meer plat. Met zo'n bijl in de vuist geklemd kon men allerlei werkzaamheden verrichten zoals het in stukken verdelen van grotere dieren die op de jacht gevangen waren of het kapot maken van beenderen om het merg er uit te halen. De naam vuistbijl is wat misleidend, want er werd meer mee gesneden dan gehakt.

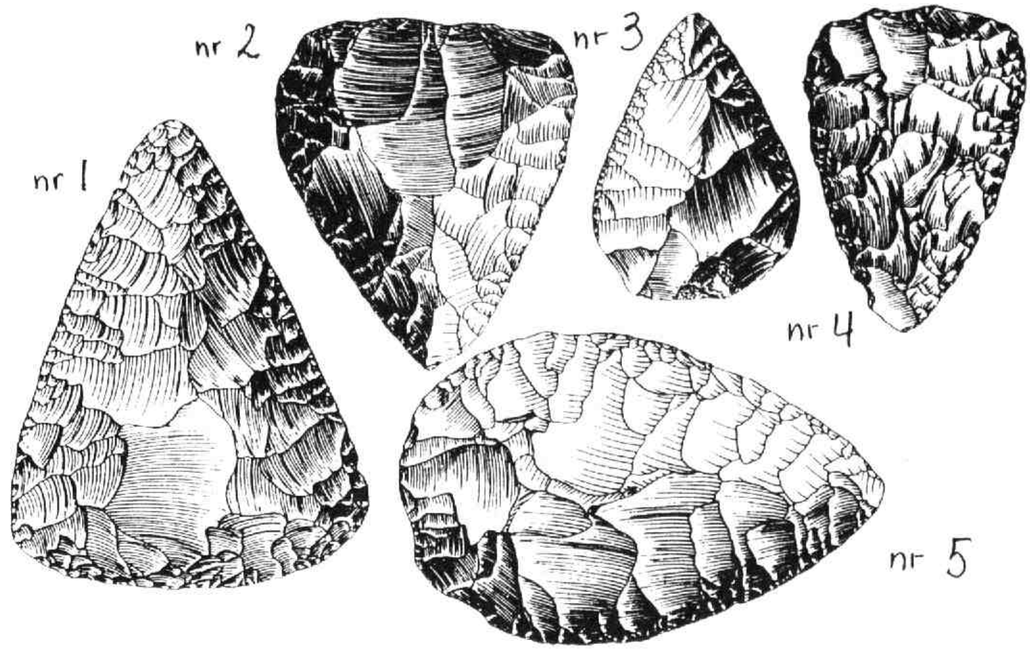
Er zijn verschillende vormen van vuistbijlen. Bijvoorbeeld driehoekige, hartvormige en eivormige. Deze eigenschappen worden gebruikt om een klassenindeling te maken. Het is niet altijd eenvoudig om te zeggen tot welke klasse een exemplaar behoort. Eigenlijk is dat werk voor deskundigen.

Een serie mogelijke vormen:



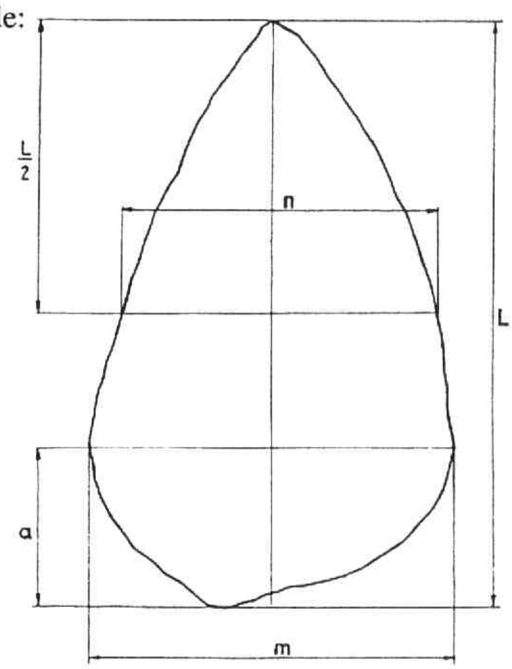
Contours de bifaces trangulaires (n^{os} 1 à 8), subtriangulaires (n^{os} 9 à 12) et cordiformes (n^{os} 13 à 18). Le n^{o} 13 est un cordiforme idéal, correspondant au point médian de la bande des cordiformes sur le diagramme.

Naar deze vuistbijlen wordt in sommige opgaven verwezen:



Nu heeft de Franse archeoloog Bordes geprobeerd die classificatie uit te voeren met behulp van metingen en eenvoudige berekeningen die iedereen kan doen. Het is wel de bedoeling dat de al bestaande klassenindeling er weer uit komt.

Methode:



Gemeten worden:

L : lengte

m : grootste breedte

a : afstand van de lijn op grootste breedte tot het stompe eind van de bijl.

n : breedte op halve lengte

Met de resultaten van deze vier metingen worden twee karakteristieke getallen x en y berekend.

$$x = \frac{n}{m} \times 100$$

$$y = \frac{L}{a}$$

Let op de plaatsen in de tekening waar m en n gemeten worden.

Hopelijk geven de getallen x en y voldoende informatie over de vorm om de klassenindeling mogelijk te maken.

1. > Bepaal x en y voor de vuistbijlen nr. 1 t/m nr. 5 op blz. 33.

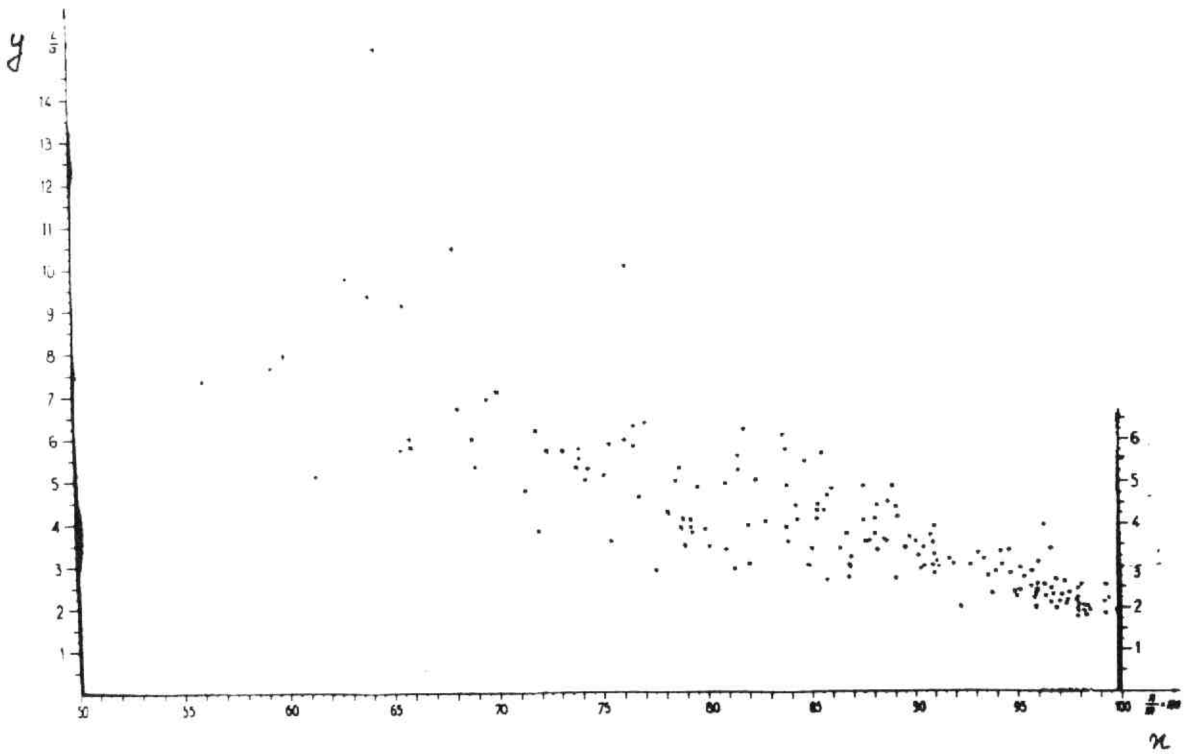
2. > De vuistbijlen zijn niet op ware grootte afgebeeld.
Het exemplaar rechtsboven op blz. 33 is bijvoorbeeld ruim 15 cm lang.
Heeft dat invloed op de waarden van x en y?

3. > Teken enkele vuistbijlen met $x = 82$ en $y = 6$. Neem daarbij $L = 60$ mm.
Waarom zijn er meerdere mogelijkheden?

4. > Als twee vuistbijlen dezelfde vorm hebben (ze heten dan gelijkvormig), maar in grootte verschillen, dan hebben ze toch dezelfde x- en y-waarden (zie vraag 2).
Is deze omkering ook waar?

   'Als twee vuistbijlen dezelfde x- en y-waarden hebben,
   dan zijn ze gelijkvormig'.

We zijn nu zover, dat we bij elke vuistbijl een getallenpaar (x, y) kunnen bepalen. Dat paar (x, y) kunnen we opvatten als de coördinaten van een punt in een assenstelsel met horizontaal de x-waarde en verticaal de y-waarde.
Hieronder staat zo'n grafische voorstelling van een grote verzameling.

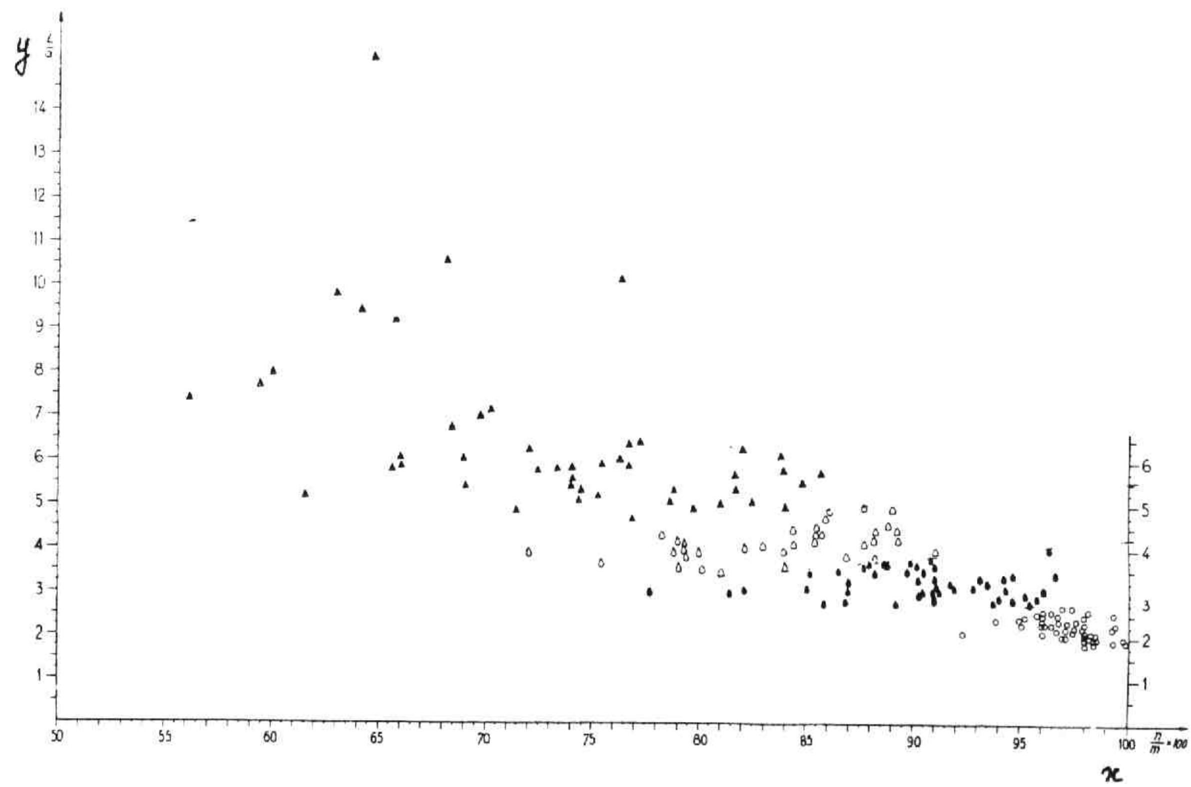


Deze grafiek, bestaande uit losse punten, is nog geen classificatie. Daarvoor gaat een aantal kenners de vuistbijlen uit deze verzameling op het oog classificeren. Er worden vier klassen gemaakt met elk een eigen tekentje.

▲ klasse I
△ klasse II
● klasse III
○ klasse IV

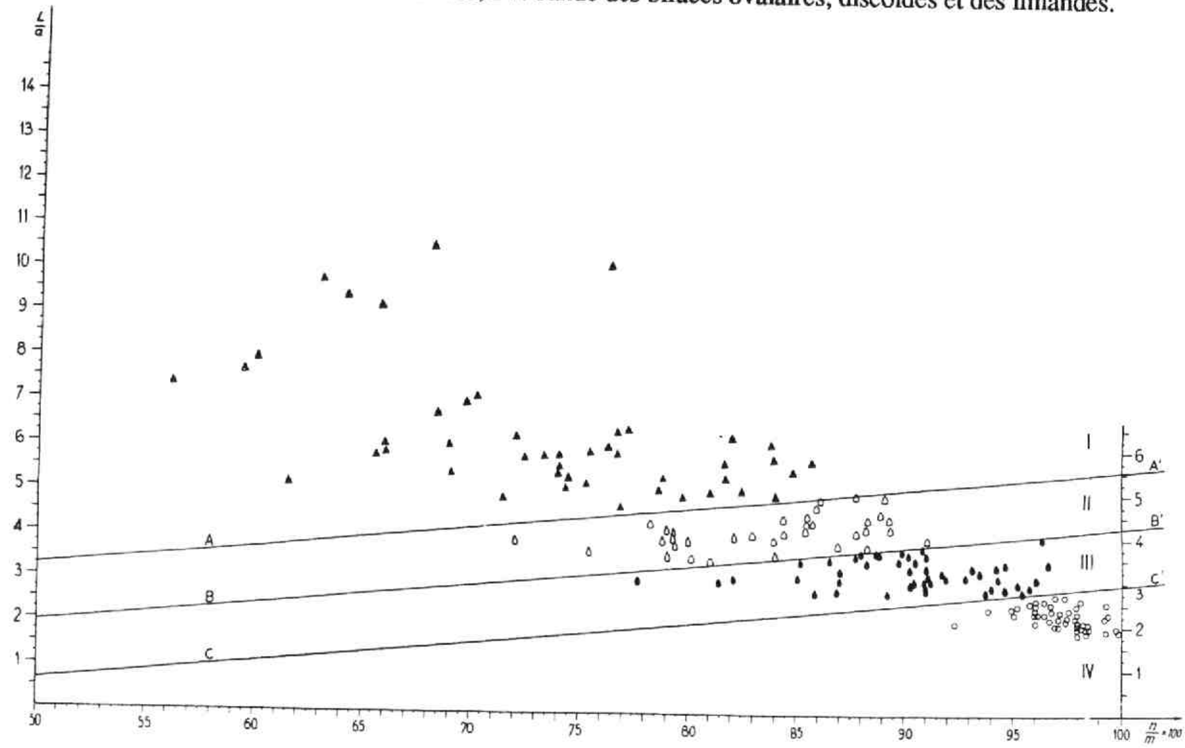
(De franse namen staan bij een van de volgende grafieken, maar wij gebruiken gemakshalve de aanduidingen I, II, III, IV.)

In de grafiek wordt nu elk punt door het passende tekentje vervangen, in de hoop dat zich dan bijzonderheden zullen aftekenen.
Dit is het resultaat.



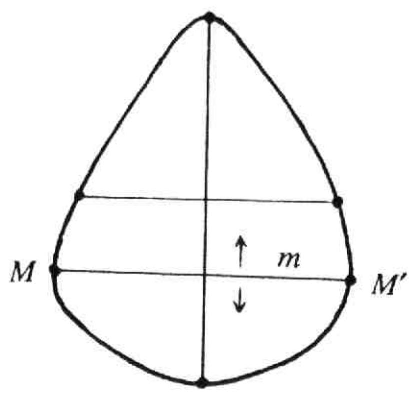
Dat ziet er veel belovend uit, want de exemplaren van dezelfde klasse liggen min of meer bij elkaar in de buurt. Het zou nog mooier zijn als op eenvoudige wijze de grenzen tussen de klassen kunnen worden getekend. Dat lukt met drie evenwijdige lijnen *AA′*, *BB′*, *CC′*.

Diagramme $\frac{L}{a}$; $\frac{n}{m} \times 100$: **I.** bande des bifaces triangulaires; **II.** bande des bifaces subtriangulaires; **III.** bandes des bifaces cordiformes; **IV.** bande des bifaces ovalaires, discoïdes et des limandes.



5. > In welke klassen (I, II, III, IV) horen de genummerde vuistbijlen van blz. 33?

6. In deze opgave staan L, m en n vast, maar a niet.
Dat betekent dat het lijnstuk MM' dat de grootste breedte aangeeft, volgens de pijlen kan worden verschoven.



> Teken voor drie verschillende standen van MM' een vuistbijl

7. > Door MM' met kleine stapjes te verschuiven ontstaat een hele serie bijlen. Daarbij hoort dan weer een serie punten (x, y) in het coördinatenstelsel. Hoe liggen die punten in die grafische voorstelling?

8. De getallen L, m, a en n staan niet helemaal los van elkaar. Als je voor zelfgekozen waarden een tekening zou proberen te maken, dan kun je voor onmogelijkheden of onwaarschijnlijkheden komen te staan.
Bijvoorbeeld $n > m$ kan niet en $m = 10 \times n$ is zeer onwaarschijnlijk.
> Verklaar dat.

9. De afspraken over de betekenis van L, m, a en n brengen nog meer beperkingen mee.
>a Welke waarden kan a hebben?
>b Wat is er te zeggen over de waarden van m en n bij een vuistbijl met een verhoudingsgewijs grote a-waarde?

10. > Welke waarden kunnen x en y aannemen?
Naast theoretische beschouwingen, kan er ook geredeneerd worden vanuit het overzicht van de vormen op blz. 32.

11. Omdat L, m, a en n op verschillende manieren met elkaar in verband staan, is het mogelijk dat de hieruit berekende getallen x en y ook niet volledig onafhankelijk van elkaar zijn.
> Zijn daarvoor in de grafiek aanwijzingen te vinden?

12. Het zou werkbesparend zijn als de kennis van één van de getallen x en y voldoende zou zijn voor de classificatie van een vuistbijl.
In welke van de volgende gevallen is dat zo?
>a $y > 6$
>b $x < 80$
>c $x < 70$

13. > Als $y < 2\frac{1}{2}$, dan behoort de vuistbijl tot IV.
Deze uitspraak lijk aannemelijk, maar hij is niet absoluut waar, want een nieuwe vondst kan met de uitspraak in strijd zijn. Hoe?

14. > 'Als voor een vuistbijl geldt $y > 6$, dan behoort die bijl tot I'.
Een blik op de grafiek bevestigt de waarheid van deze uitspraak. Daar twijfelen we dan ook niet meer aan.
Kan er echt geen vondst meer gedaan worden die ons ongelijk geeft?

15. Men kan proberen uit de regel over $y > 6$ verdere conclusies te trekken.
Enkele voorbeelden:
a: Als $y \leq 6$, dan behoort de bijl niet tot I.
b: Als de bijl tot I behoort, dan is $y > 6$.
c: Als de bijl niet tot I behoort, dan is $y \leq 6$.
> Veronderstel dat het niet mogelijk is de grafiek te raadplegen. Van welke conclusie(s) kan de juistheid door nadenken toch worden vastgesteld?

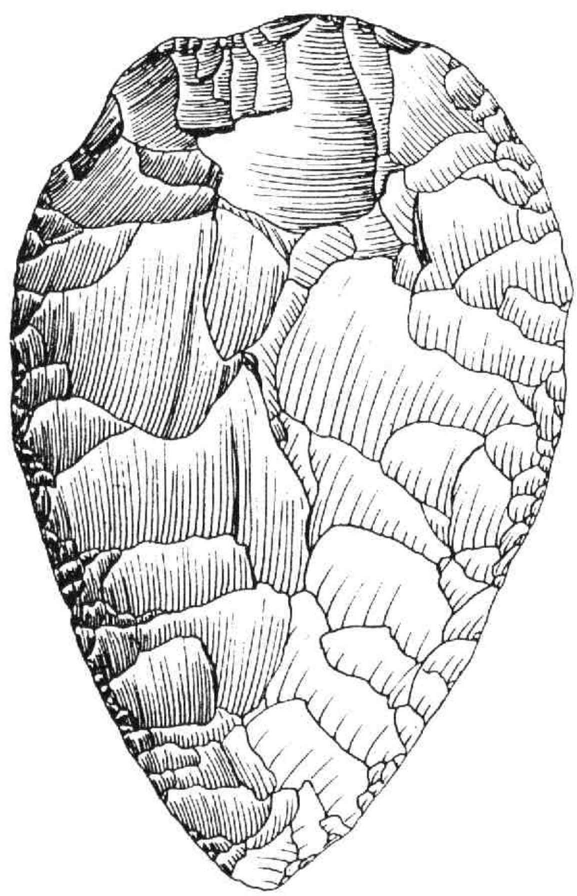
16. > Bepaal het wel of niet waar zijn van de bovenstaande uitspraken a, b, c met behulp van de grafiek.
Vergelijk de resultaten met opgave 15.

De classificatie kan ook zonder tekening, door gebruik te maken van de vergelijkingen van de lijnen AA', BB' en CC'.

17. > CC' heeft als vergelijking $y = 0{,}04575x - 1{,}625$.
Geef de vergelijkingen van AA' en BB'.

18. > Bedenk een methode om met behulp van die vergelijkingen de vuistbijl met $x = 80$ en $y = 4$ te classificeren.

19. > Gebruik deze methode om de vijf vuistbijlen van blz. 33 te classificeren.



ZEG, HEB JE AL GEHOORD DAT ...

Roddels en geruchten verspreiden zich vaak als een lopend vuurtje door de school. Meestal begint zoiets bij één persoon. Iemand die het bericht te horen krijgt, vertelt het op zijn (of haar) beurt weer verder.
Het lijkt bijna onvoorstelbaar dat er elke keer weer mensen zijn die 'het' niet te horen krijgen.
Toch is daar wel een verklaring voor te vinden.
Iemand die het bericht doorvertelt aan een ander loopt de kans dat die ander 'het' al weet. Om te voorkomen dat je nog een keer het risico loopt om 'oud nieuw' te vertellen, houd je verder je mond. Zo kan de situatie ontstaan dat er geen mensen meer zijn die het bericht doorvertellen. Op dat moment is de geruchtenverspreiding gestopt.

Bij de verspreiding van geruchten zijn er dus drie verschillende soorten personen te onderscheiden:

- de vertellers (verder aangeduid met V) : personen die het bericht hebben gehoord en nog doorvertellen.
- de onwetenden (verder aangeduid met O) : personen die 'het' (nog) niet weten.
- de zwijgers (verder aangeduid met Z) : personen die 'het' weten, maar niet meer doorvertellen.

Met behulp van kansrekening gaan we de verspreiding van een gerucht nabootsen. Dat gebeurt in een aantal stappen:

A: *Beschrijving en verkenning van het model.*
Om te kunnen rekenen zijn een paar afspraken noodzakelijk. Die afspraken kunnen de werkelijkheid een beetje geweld aandoen.

B: Een paar gevallen helemaal *doorrekenen.*
Voor kleine groepen mensen is het rekenwerk nog te doen.

C: Opstellen van een *vaasmodel* voor het probleem.

D: *Simulatie* van het probleem met behulp van de computer.

E: *Aanpassing* van het model.

A: het model

Bij de verspreiding van een gerucht hoeft alleen maar gelet te worden op ontmoetingen tussen twee mensen.

1. > Hoeveel verschillende ontmoetingen tussen twee mensen zijn er mogelijk bij een groep van 25 mensen?

Slechts een deel van alle mogelijke ontmoetingen is belangrijk voor de geruchtenverspreiding. Dat zijn de ontmoetingen waarbij een verteller (V) aanwezig is.
In die gevallen verandert er iets aan de samenstelling van de groep.

- Bij de ontmoeting $V \leftrightarrow V$ veranderen beide vertellers in zwijgers.
- Bij de ontmoeting $V \leftrightarrow O$ wordt de onwetende een verteller.
- Bij de ontmoeting $V \leftrightarrow Z$ verandert de V in een Z.

Alle andere ontmoetingen veranderen niets aan de groepssamenstelling.
Stel dat op een gegeven moment de groep van 25 mensen bestaat uit 8 V's, 12 O's en 5 Z's. Dit noteren we in het vervolg als (8, 12, 5).
Afhankelijk van het soort ontmoetingen dat plaatsvindt, wordt de samenstelling van de groep als volgt gewijzigd:

$$\begin{tikzcd} & (8, 12, 5) \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\ (6, 12, 7) & (9, 11, 5) & (7, 12, 6) \end{tikzcd}$$

2. > Verklaar dit schema.

Uit elk van de drie nieuwe situaties kunnen weer andere situaties ontstaan.

3. > Vul het bovenstaande schema aan met één serie nieuwe situaties.

Op deze manier kan de verspreiding van een gerucht beschreven worden als een opeenvolgende serie van situaties (+ wisselende groepssamenstellingen).

De verspreiding van het gerucht kan op twee manieren worden *beëindigd*:

- als er geen vertellers meer zijn
- als er geen onwetenden meer zijn

Als *beginsituatie* nemen we $V = 1$ en $Z = 0$. De rest van de groep is dan O(nwetend).

Bij elk van de drie mogelijke veranderingen die boven opgave 2 staan genoemd, hoort een kans.
Om die kans te kunnen bepalen, hebben we de volgende afspraak nodig:

- er zijn alleen maar ontmoetingen van twee mensen.
- iedere ontmoeting tussen twee mensen heeft dezelfde kans.

4. > Bekijk nog eens de situatie (8, 12, 5).
Hoeveel verschillende ontmoetingen $V \leftrightarrow V$ zijn daarbij mogelijk?
En hoeveel $V \leftrightarrow O$?
En $V \leftrightarrow Z$?

5. > Bepaal de kansen bij elk van de drie situatiewijzigingen, die zich kunnen voordoen bij de situatie (8, 12 5).

Tot slot van het eerste deel een volledige beschrijving van de verspreidingsmogelijkheden voor een groep van 3 mensen:

$$\begin{tikzcd} & (1, 2, 0) \arrow[d, "1"] & \\ & (2, 1, 0) \arrow[dl, "1/3"'] \arrow[dr, "2/3"] & \\ (0, 1, 2) & & (3, 0, 0) \end{tikzcd}$$

6. > Verklaar dit schema en de bijbehorende kansen.

B: Doorrekenen van twee gevallen

7. > Maak een schema voor de verspreiding van een gerucht voor een groep van 4 mensen. Ga uit van de beginsituatie met $V = 1, Z = 0$.

8. >a Bereken de kans dat er geen onwetenden meer zijn als de verspreiding is gestopt.
   >b Bereken ook de kansen op één, op twee en op drie onwetenden als de verspreiding is gestopt.
   >c Welk aantal onwetenden mag je verwachten bij een groep van 4?

9. > Dezelfde vragen voor een groep van 5 mensen.

C: Vaasmodel

In deel B is voor een kleine groep het hele model doorgerekend. Dat was al behoorlijk gecompliceerd. In principe is het mogelijk om het model door te rekenen voor een groep van bijvoorbeeld 20 mensen. Dat hoef je (gelukkig) niet te doen. In plaats daarvan gaan we het proces van de geruchtenverspreiding simuleren met een computer. Daarvoor is een vaasmodel nodig. De bedoeling is dat je dat zelf maakt.
Voor de verschillende soorten mensen nemen we verschillende kleuren ballen: vertellers zijn rood (vanwege de sensatielust), onwetenden zijn wit (de 'blanke onschuld') en de zwijgers zijn blauw (bang om een blauwtje te lopen).

10. Beschrijf:
   - de beginsamenstelling van de vaas
   - de manier van trekken
   - de verandering van de samenstelling na een trekking
   - bij welke samenstelling van de vaas het experiment stopt.

D: Simulatie op de computer

Het vaasmodel van deel C is vertaald naar een computerprogramma. Met dat programma ga je nu aan de gang.
Het werkt als volgt: Nadat het is opgestart (laat dat even doen door de docent), vraagt het programma eerst om de *groepsgrootte*. Als je die hebt gegeven, vraagt het programma om het *aantal simulaties* dat je wilt uitvoeren. Als dat aantal ook is gegeven, doet de computer braaf zijn werk.

Wanneer hij is uitgerekend, geeft de computer de uitkomsten van zijn gezwoeg. Een mogelijke uitkomst (bij groepsgrootte 20 en 200 simulaties):

aantal O's dat overblijft	aantal keren voorgekomen (van de 200)	aantal O's dat overblijft	aantal keren voorgekomen (van de 200)
0	11	10	4
1	24	11	3
2	31	12	1
3	31	13	0
4	29	14	1
5	21	15	2
6	12	16	2
7	11	17	1
8	5	18	7
9	4	19	0

Hieruit valt onder andere af te lezen dat bij de 200 simulaties 12 keer 6 onwetenden overbleven nadat de geruchtenverspreiding was gestopt.

11. > Controleer met het programma of je antwoorden bij deel B (opgave 8 en 9) in overeenstemming zijn met de uitkomsten van de simulatie.
Verklaar eventuele verschillen.

12. > Laat het programma een paar simulaties uitvoeren voor een groepsgrootte in de buurt van 20 personen.
Vergeet niet om de resultaten van het beeldscherm over te nemen!

Gebruik voor de beantwoording van de volgende twee vragen de resultaten van je simulaties.

13. > Hoeveel mensen zullen naar verwachting het gerucht nooit te horen krijgen, bij een groep van 20 mensen (dus: wat is de verwachtingswaarde van O).

14. Grote aantallen onwetenden komen bijna niet voor, afgaande op de simulatie. Daar is één uitzondering op: het aantal dat gelijk is aan de groepsgrootte min 2 (zie bovenstaande tabel bij $O = 18$).
> Hoe verklaar je dat?

15. Stel dat je een groep van 100 mensen hebt.
>Hoe groot is de kans dat de verspreiding stopt als er nog 98 onwetenden zijn?

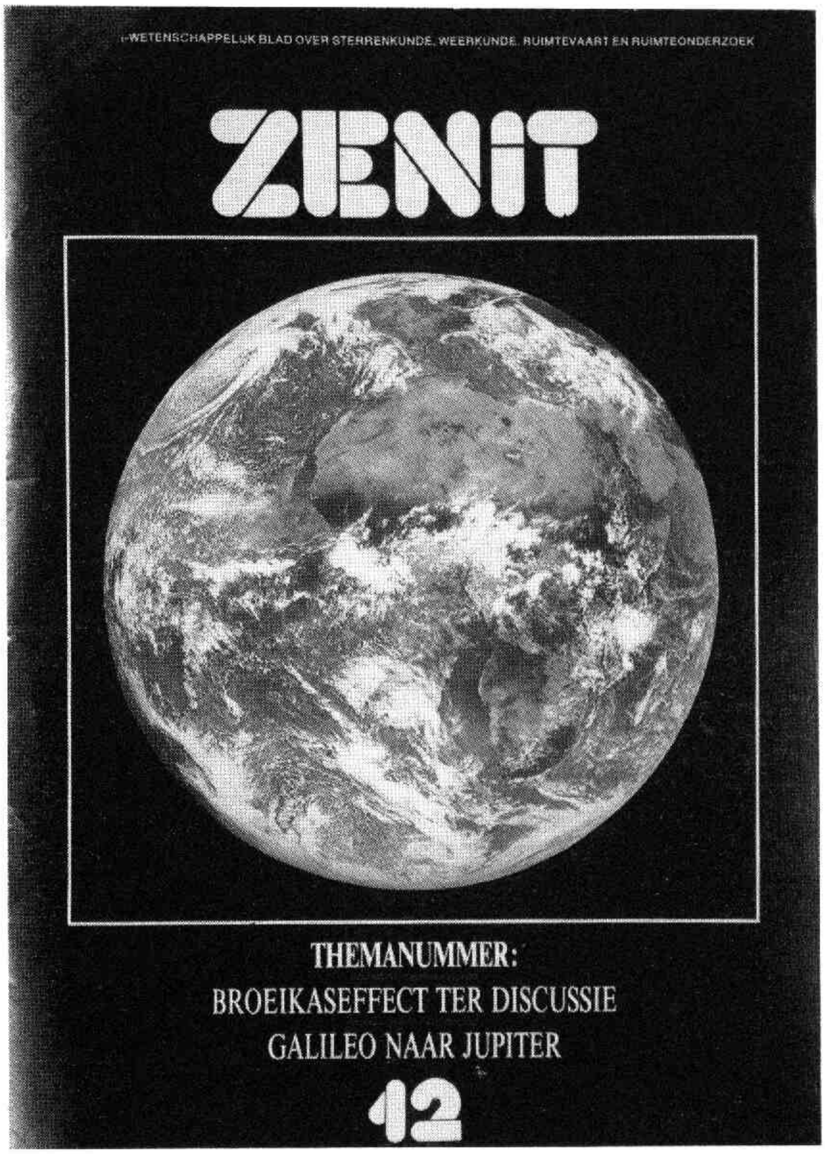
E: Aanpassing van het model

Om het rekenen met kansen mogelijk te maken, zijn in deel A een aantal afspraken gemaakt. Daardoor werd de werkelijkheid (een beetje) geweld aangedaan.

16. > Noem een aantal tekortkomingen van het gebruikte model.
Geef ook, waar mogelijk, aan hoe je het model zou kunnen aanpassen om het realistischer te maken.

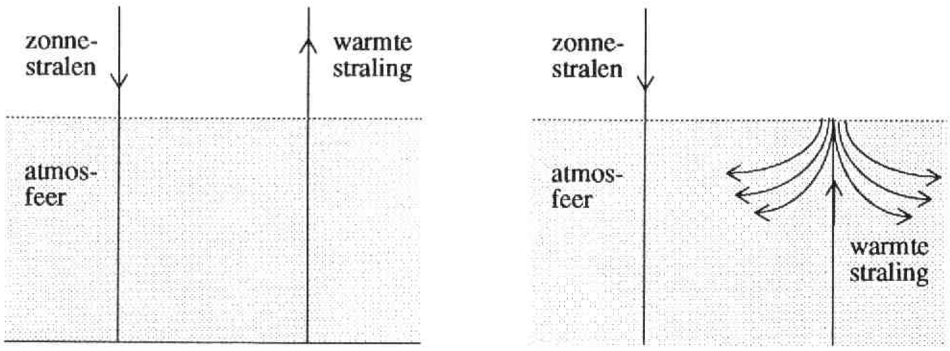
BROEIKASEFFECT EN KLIMAAT

In 1972 werd in het Rapport van de Club van Rome al gewaarschuwd voor mogelijke effecten van de sterk toenemende luchtvervuiling op het klimaat. Het duurde lang voordat politieke beleidsmakers bereid waren die waarschuwingen serieus te nemen. Begin 1989 was een ommezwaai te bespeuren. Oorzaak: de jaartemperatuur (gemiddelde temperatuur over het hele jaar) bereikte in 1988 een recordhoogte. Nog nooit in deze eeuw was het zo warm geweest. In een wat paniekerige reactie werd de 'schuld' van dat record bij het broeikaseffect gelegd.
Het eveneens warme jaar 1989 versterkte deze mening alleen maar. Reden voor het blad Zenit (populair-wetenschappelijk blad over sterrenkunde, weerkunde, ruimtevaart en ruimteonderzoek) om het decembernummer van 1989 geheel aan het broeikaseffect te wijden.
In dit thema volgen we twee artikelen uit dat blad.



Het broeikaseffect

Het klimaat op een planeet wordt vooral bepaald door de samenstelling van de atmosfeer. De aarde bijvoorbeeld zou gemiddeld zo'n 30 graden kouder zijn dan hij nu is, als de atmosfeer alleen maar stikstof en zuurstof zou bevatten. Momenteel vullen deze twee gassen 99% van de atmosfeer. De resterende 1% bestaat uit zogenaamde sporegassen, zoals waterdamp en kooldioxyde (CO_2). Deze sporegassen zorgen voor het *broeikaseffect.* Simpel gezegd komt het er op neer dat deze gassen wel de zonnestraling doorlaten, maar de warmtestraling van de aarde tegenhouden.



alleen stikstof en zuurstof

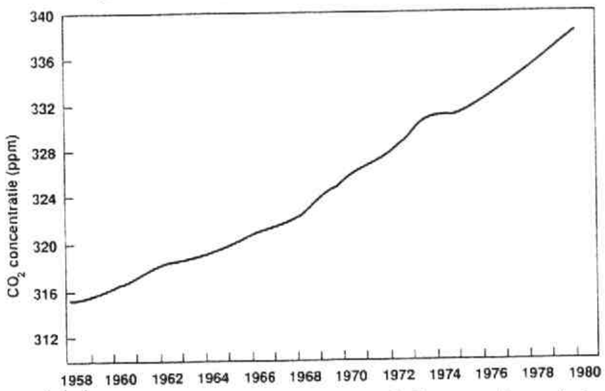
stikstof, zuurstof en sporegassen

Het broeikaseffect is gunstig voor het klimaat op aarde: de gemiddelde temperatuur is ongeveer 15°C.
Door de toename van de hoeveelheid sporegassen kan de temperatuur echter gaan stijgen. Men spreekt dan van een *versterkt* broeikaseffect.
Vanaf 1958 wordt de hoeveelheid CO_2 in de atmosfeer nauwkeurig bijgehouden. In 1958 was de CO_2-concentratie 315 ppm (= aantal volumedeeltjes CO_2 per miljoen volumedeeltjes lucht). Door sterke luchtverontreiniging (industrie, auto's) blijkt de CO_2-concentratie jaarlijks toe te nemen met ongeveer 0,5%.
Er wordt niet bij vermeld of dit 0,5% is van de hoeveelheid in 1958 (dus een constante toename) of dat de toename steeds 0,5% is van de hoeveelheid van het voorgaande jaar.

1. Neem aan dat de toename constant is.
   >a Hoe groot zou in dat geval de CO_2-concentratie in 1980 zijn?
   >b Stel een formule op die het verband legt tussen C (de CO_2-concentratie in ppm) en t (het aantal jaren na 1958).

2. Neem nu aan dat de groei exponentieel verloopt.
   >a Hoe groot is dan de groeifactor?
   >b Welke CO_2-concentratie vind je in dit geval voor 1980?
   >c Stel een formule op die het verband tussen C en t legt voor het exponentiële groeimodel.

Bij het artikel stond deze grafiek afgedrukt:



3. >a Op grond van de grafiek is het exponentiële groeimodel aannemelijker dan het lineaire. Waarom?
   >b De groei van 0,5% uit het artikel komt niet echt goed overeen met de grafiek: in 1958 geldt $C = 315$, in 1980: $C = 338$.
   Laat zien dat een groei van 0,32% per jaar beter bij de grafiek past.

In het vervolg gaan we uit van exponentiële groei van C met 0,32% per jaar.

Met behulp van ingewikkelde computermodellen hebben klimatologen de mogelijke gevolgen van het versterkte broeikaseffect voor het klimaat doorgerekend. Bij deze berekeningen wordt vaak gewerkt met de verdubbelingstijd.

4. >a Na hoeveel jaar is de CO_2-concentratie verdubbeld ten opzichte van 1980?
   >b Wat zou de verdubbelingstijd zijn geweest bij het lineaire groeimodel?

De verschillende klimaatmodellen komen tot een paar gelijkluidende aanwijzingen over klimaateffecten:

- de gemiddelde temperatuur op aarde zal 2 tot 4°C stijgen bij verdubbeling van de CO_2-concentratie in de atmosfeer.
- de oceanen zullen door de hogere temperaturen uitzetten, wat (versterkt door de afsmelting van de gletsjers) zal leiden tot een verhoging van het zeeniveau met 45 tot 75 cm (meest waarschijnlijke waarde 50 cm), bij een temperatuursverhoging van 2 tot 4°C.

Er worden dus nog behoorlijk ruime marges gehanteerd.

De tijd t (in jaren, $t = 0$ in 1958), de CO_2-concentratie C ($C = 338$ ppm in 1980), de temperatuur van de aarde T ($T = 15$°C in 1980) en het zeeniveau Z (in cm; stel: $Z = 0$ in 1980) hangen kennelijk allemaal samen. In formules is die samenhang als volgt:

(1) $C = 338 \cdot (1{,}0032)^t$ (2) $C = 338 \cdot 2^{\frac{T-15}{2}}$ (3) $Z = 25\,T - 375$

Bij deze formules is uitgegaan van

- verdubbeling van C geeft een temperatuurstijging van 2°C
- bij $\Delta T = 2$ hoort $\Delta Z = 50$

5. > Test de formules (2) en (3) op hun juistheid.

6. Op een gegeven moment zal de temperatuur gestegen zijn tot 16°C.
   >a Bij welke CO_2-concentratie is dat zo?
   >b Met hoeveel cm is het zeeniveau dan gestegen?
   >c In welk jaar mag je dit, volgens het model, verwachten?

7. > Geef een formule die C uitdrukt in Z.

8. >a Hoe luiden de formules (2) en (3) als er wordt uitgegaan van
   – verdubbeling van C geeft een temperatuurstijging van 4°C
   – bij $\Delta T = 4$ hoort $\Delta Z = 75$
   >b Bereken ook voor deze nieuwe formules in welk jaar de temperatuur is gestegen tot 16°C en wat dan het nieuwe zeeniveau is.

Duidelijk is dat de toenemende luchtverontreiniging op langere termijn gevolgen zal hebben voor het leefklimaat op aarde.
Hoewel het niet uitgesloten is dat het versterkte broeieffect ook op *korte* termijn gevolgen heeft voor het klimaat, lijkt het wat voorbarig om bij een recordwarmte zoals in 1988 meteen in paniek te raken. Dat gebeurde echter wel.

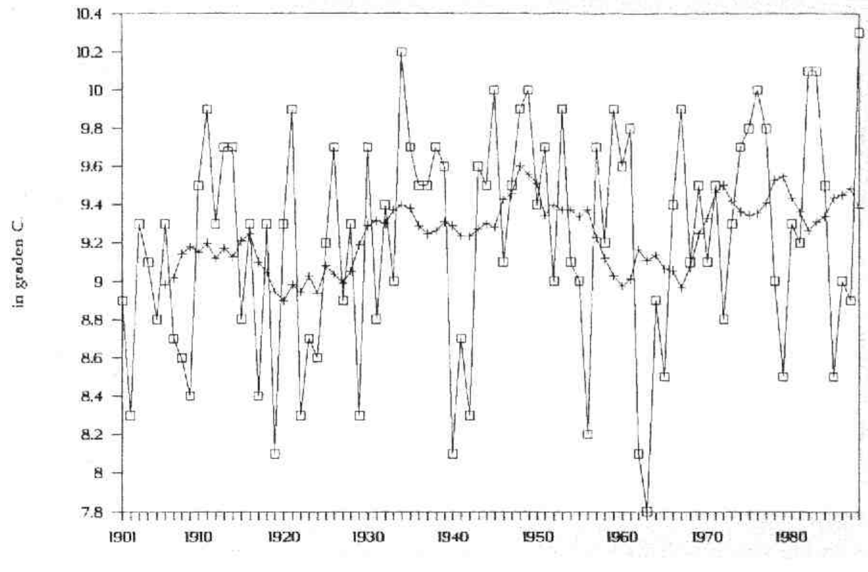
1988 in De Bilt het warmste jaar van de eeuw:

Hoe uitzonderlijk was deze warmte?

We hebben het allemaal uitvoerig in de kranten kunnen lezen: 1988 was voor De Bilt het warmste jaar van de eeuw. Dit gevoegd bij de berichten over bodem-, lucht- en waterverontreiniging, azijnzure regen, ozongaten en broeikaseffecten, doet een beeld ontstaan waarin alles mis is met ons milieu en speciaal met het weer. We zullen de warmte van 1988 als aanleiding gebruiken voor een discussie over het broeikaseffect. In hoeverre is het wetenschappelijk (en politiek) verantwoord om de warmte van 1988 (en van 1989) zonder enige reserve aan het broeikaseffect toe te schrijven?

verdeling is voornamelijk een gevolg van de scheve verdeling van de temperatuur in de wintermaanden. De wintermaanden domineren het jaargemiddelde omdat zij de grootste spreiding van de gemiddelde maandtemperaturen bezitten: het jaar 1963 is zo koud omdat januari en februari 1963 zo

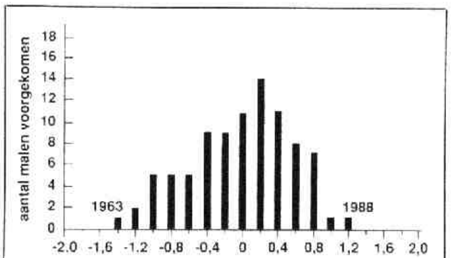
Bij het verschijnen van het themanummer waren de jaartemperaturen van 1989 en 1990 nog niet beschikbaar. De onderstaande grafiek wordt een *tijdreeks* genoemd. De tijdreeks laat duidelijk zien dat de jaartemperatuur in De Bilt door de jaren heen een grillig verloop heeft.
Het lijkt op een aselecte trekking uit een verzameling getallen met een gemiddelde van ongeveer 9°C en een spreiding van ongeveer 1,4°C.



Over de 89 jaren van deze eeuw is het gemiddelde GEM = 9,2 en de standaardafwijking SD = 0,6 (in de grafiek ontbreekt de temperatuur van 1900: 9,6°C).

9. > Verwerk de 89 jaartemperaturen in een box-plot-grafiek.

In de box-plot-grafiek is te zien dat de frequentieverdeling een kleine staart naar links (de koude kant) heeft. Dat is ook zichtbaar in het volgende histogram, waar de *afwijking* van de jaartemperatuur ten opzichte van het gemiddelde 9,2°C is uitgezet.



Frequentieverdeling van de jaargemiddelde temperatuur. Uitgezet is het aantal keren dat een bepaalde afwijking △T van de normale jaargemiddelde temperatuur in De Bilt voorkwam. De waarden hebben betrekking op het tijdvak 1900-1988.

Hoewel de frequentieverdeling niet precies klokvormig is, is het toch mogelijk dat deze jaartemperaturen 89 trekkingen uit een normale verdeling met $m = 9{,}2$ en $s = 0{,}6$ vormen.

Van de 89 jaren blijken er 13 te zijn met een afwijking van meer dan 0,7°C *onder* het gemiddelde.

10. > Hoeveel jaren met een afwijking van meer dan 0,7°C onder het gemiddelde had je mogen verwachten op basis van een normale verdeling?

Jaren met een jaartemperatuur die meer dan 1,1°C *boven* het gemiddelde uitstijgt, worden uitzonderlijk warm genoemd.

11. > Laat zien dat je drie van zulke 'uitzonderlijke warme' jaren per eeuw mag verwachten.

12. > Hoe groot is de kans dat er drie achtereenvolgende jaren sprake is van uitzonderlijke warmte?

Bij de veronderstelling van een normale verdeling van de jaartemperatuur is één heel belangrijk gegeven over het hoofd gezien: door het versterkte broeikaseffect kan de jaartemperatuur in de loop der tijd langzaam maar zeker stijgen.

13. >a Waarom volgt uit dit gegeven dat de normale verdeling met $m = 9{,}2$ en $s = 0{,}6$ geen geschikt model is?
    >b Hoe komt het dat in een box-plot en een histogram de informatie over het warmer-worden-door-de-jaren-heen niet kan worden weergegeven?

In een *tijdreeks* (zoals op blz. 47) zou dit gegeven wel zichtbaar moeten zijn. Door het grillige verloop van de jaartemperatuur valt ook daar een eventuele stijging niet echt op.
De grilligheid wordt minder als bij zo'n tijdreeks in plaats van alle afzonderlijke waarden het *voortschrijdend gemiddelde* wordt uitgezet.
Wanneer dat gemiddelde wordt berekend over 5 jaren (de twee voorgaande jaren, het jaar zelf en de twee opvolgende jaren) dan heet dat het *vijfjarig voortschrijdend gemiddelde*. Erg grillige verlopen worden als het ware weggefilterd, waardoor een mogelijke stijgende (of dalende) trend beter zichtbaar wordt.

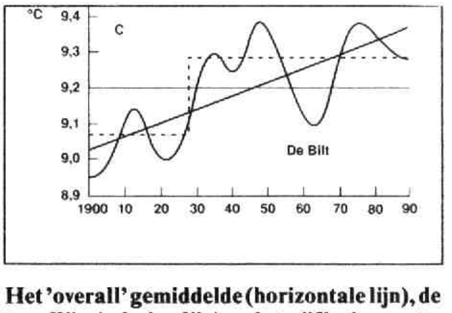
14. Bekijk de tijdreeks van blz. 47.
    > In welke jaren was het vijfjarig voortschrijdend gemiddelde erg hoog? En in welke jaren erg laag?

15. >a Bereken het vijfjarig voortschrijdend gemiddelde voor 1986.
    De jaartemperaturen van 1989 en 1990 waren resp. 10,7°C en 10,9°C.
    >b Bereken het vijfjarig voortschrijdend gemiddelde voor 1988.

De grafiek van het vijfjarig voortschrijdend gemiddelde:

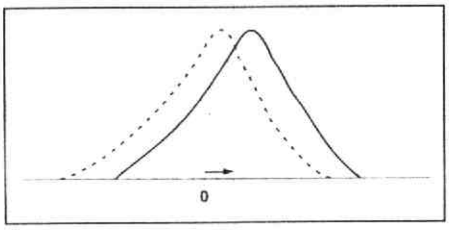
De trendlijn wordt bepaald door de rechte lijn te kiezen die het beste aansluit bij alle afzonderlijke jaartemperaturen.

16. Welke formule past bij de trendlijn? (T is de temperatuur in °C en t is de tijd in jaren, $t = 0$ in 1900).



Het 'overall' gemiddelde (horizontale lijn), de trendlijn (schuine lijn) en het vijfjarig voortschrijdend gemiddelde van de jaargemiddelde temperatuur in het tijdvak 1900-1988

Op grond van deze trendlijn wordt in het artikel gesteld: 'Als we deze trend aanvaarden, dan ontstaat het beeld dat hiernaast is geschetst. Terwijl in 1900 de natuur willekeurige trekkingen verrichtte uit de gestippelde frequentieverdeling, moeten we de jaartemperatuur anno 1988 opvatten als een willekeurige trekking uit de over 0,37°C naar rechts verschoven, maar overigens identieke, frequentieverdeling.'



Verschuiving van de frequentieverdeling van de jaargemiddelde temperatuur voor De Bilt van rond 1900 naar rond 1988. Het gebied waaruit de natuur na 88 jaar een trekking doet is 0,37° C naar rechts verschoven.

17. > Geef commentaar bij deze uitspraak.

Tot nu toe is steeds gezegd: *Als* we aannemen dat er een stijgende trend is, *dan* ...
Met een techniek die in de statistiek bekend staat als een 'randomnes test' (test op de toevalligheid van een tijdserie), proberen we nu nog wat meer zekerheid te krijgen (beter gezegd: twijfels te verminderen) bij de vraag of de jaartemperatuur nu echt stijgend is.

Aan de hand van een kleiner voorbeeld bekijken we eerst hoe zo'n test werkt.
Neem een tijdreeks van 11 jaren (zeg 1970 t/m 1980) met bijbehorende jaartemperaturen. Uit die reeks van 11 wordt een top-drie samengesteld van de drie warmste jaren.
Bestaat deze top-drie uit de jaren 1979, 1980 en 1978, dan lijkt het voor de hand liggend om te constateren dat het kennelijk de laatste jaren steeds warmer wordt. Bij een top-drie bestaande uit 1970, 1971 en 1972 lijkt de conclusie ook duidelijk. Maar wat te zeggen over een top-drie bestaande uit 1971, 1979 en 1976?

Veronderstel nu eens dat de natuur ieder jaar een willekeurige greep doet uit de verzameling van alle mogelijke temperaturen.
In dat geval is iedere top-drie even waarschijnlijk.

18. > Er zijn 165 mogelijkheden om een top-drie uit de 11 jaren samen te stellen. Laat dat zien.

Bij ieder top-drie wordt berekend hoeveel ieder van de drie jaartallen *afwijkt* van 1975 (de middelste van de 11). Daarna wordt de som R van deze drie afwijkingen berekend.

Voorbeeld:

Top-drie :	1972,	1979,	1976	
afwijkingen:	-3 ,	+4 ,	+1	dus $R = 2$

19. De waarde van R kan positief, nul of negatief zijn.
>a Wat is de grootst mogelijke waarde van R?
Bij welke top-drie treedt die op?
>b Het gemiddelde van alle 165 waarden van R is nul.
Logisch?

De frequentieverdeling van R:

waarde van R	-12	-11	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0
frequentie	1	1	2	3	4	5	7	8	10	11	12	12	13
waarde van R	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	

20. > $R = 6$ komt zeven keer voor. Bij welke top-drie's?

De frequentieverdeling van R lijkt erg veel op een normale verdeling. Het frequentiepolygoon is vrijwel een ideale klokvorm.
Wanneer we aannemen dat zo'n top-drie een volledig willekeurige greep is, dan is de kans dus erg groot dat R niet al te veel van nul verschilt.

21. >a Hoe groot is de kans op een top-drie waarbij R een waarde heeft tussen -5 en +5 (grenzen inbegrepen)?
    >b Stel: je vind een top-drie met R groter dan 9. Is dat uitzonderlijk?

Een grote waarde van R (bijvoorbeeld groter dan 9) is een aanwijzing om de aanname te verwerpen: vrijwel zeker is de bijbehorende top-drie niet zomaar een willekeurige greep. In zo'n geval lijkt het redelijk om aan te nemen dat de temperatuur in de loop der jaren stijgt.

Terug naar de 89 jaartemperaturen van deze eeuw. Er is een top-tien samengesteld van de warmste en van de koudste jaren (linker tabel).
In de rechtertabel staat de 'warme' top-tien nogmaals, met de afwijkingen ten opzichte van 1944 (het middelste jaartal) in kolom r en de som van deze afwijkingen in kolom R. Onder MaxR staat de som van de afwijkingen voor de ideale top-tien (1988 het warmst, gevolgd door 1987, 1986, enz.).

WARMSTE JAREN			KOUDSTE JAREN		
j	jaar	ΔT (°C)	j	jaar	ΔT (°C)
1	1988	1.13	1	1963	−1.38
2	1934	1.00	2	1956	−1.13
3	1959	0.89	3	1962	−1.11
4	1983	0.87	4	1940	−1.10
5	1949	0.82	5	1919	−1.03
6	1982	0.82	6	1942	−0.92
7	1945	0.77	7	1922	−0.91
8	1976	0.76	8	1929	−0.91
9	1921	0.72	9	1902	−0.88
10	1967	0.68	10	1917	−0.86

j	jaar	ΔT(°C)	r	R	MaxR
1	1988	1.13	44	44	44
2	1934	1.00	−10	34	87
3	1959	0.89	15	49	129
4	1983	0.87	39	88	170
5	1949	0.82	5	93	210
6	1982	0.82	38	131	249
7	1945	0.77	1	132	287
8	1976	0.76	32	164	324
9	1921	0.72	−23	141	360
10	1967	0.68	23	164	395

Het is ondoenlijk om alle mogelijkheden voor een top-tien, met bijbehorende waarde van R, apart te berekenen.

22. >a Hoeveel top-tien's van warmste jaren zijn er mogelijk?
    >b Welke waarden van R kunnen daarbij optreden?

Met de computer zijn 5.000 willekeurige top-tien's samengesteld. Daarmee is een goede benadering van de frequentieverdeling van R gevonden.
R blijkt normaal verdeeld te zijn met $m = 0$ en $s = 77$.

23. > Hoe groot is, bij een willekeurig samengestelde lijst van tien, de kans op een top-tien met $R > 160$?

Voor de werkelijke top-tien (zie tabel) geldt $R = 164$. Uitgaande van een willekeurige samenstelling, is de kans op zo'n top-tien minder dan 2%. Daarom is de veronderstelling dat de natuur een willekeurige trekking verricht erg onwaarschijnlijk. De conclusie lijkt dus gerechtvaardigd dat de jaartemperatuur een stijgende trend vertoont. Dat wordt nog versterkt als we de jaren 1989 (10,7°C) en 1990 (10,9°C) er bij betrekken.
In de reeks van 91 jaren (1900 - 1990) bezetten zij de eerste en tweede plaats. De top-tien moet dus aangepast worden.

24. > Wat wordt nu de eindwaarde van R?
En van MaxR?

De toevoeging van deze twee extra jaren heeft geen merkbare invloed op de frequentieverdeling van R.

25. > Hoe uitzonderlijk is deze top-tien, als je ervan uitgaat dat R normaal verdeeld is met $m = 0$ en $s = 77$?

De klimatologische gegevens van Nederland worden verwerkt in het KNMI te De Bilt.

Antwoorden herhalingsopgaven

Waarde van huizen (blz. 3)

>a $k = 1{,}75 \times 0{,}7 \times 1{,}18 \approx 1{,}45$

>b nieuw tarief = 0,84 × oud tarief
en nieuwe waarde = 1,16 × oude waarde
De conclusie zou juist zijn als 0,84 × 1,16 = 1, maar dat is *niet* zo.
Wel goed zou zijn $\frac{1}{1,16} = 0{,}862$ dus een verlaging met 13,8%

Wat kost te snel rijden

>a Aangenomen dat iedere te hardgereden km/u eenzelfde stijging in de geldboete oplevert, zou *f* 120,- vervangen moeten worden door *f* 110,-.
Onduidelijk is of dat systeem begint te tellen vanaf 50 km/u of vanaf 60 km/u.
'Iedere te snel gereden kilometer kost *f* 6,-' is zeker niet waar voor snelheden van 60 t/m 80 km/u.

>b Ligt eraan: 37 km/u harder dan 50 km/u dus 87 km/u
of dan 60 km/u dus 97 km/u

>c 1. Als die *f* 120,- klopt, dan wordt een snelheid tussen 76 en 80 km/u per te hard gereden km *lager* beboet dan bij een snelheid tussen 71 en 75 km/u.
2. Iemand die 80 km/u rijdt krijgt 'slechts' *f* 140,- boete.
Bij een snelheid van 81 km/u wordt dat opeens *f* 186,- (of *f* 216,- als het ten opzichte van 50 km/u wordt beboet).

Parkeergarage (blz. 5)

>a 13 cent

>b Naarmate er meer auto's parkeren (bezettingsgraad groter) kun je met een steeds lager tarief de onkosten dekken, want:
inkomsten = aantal parkeerders × tarief

>c *f* 0,35.
Op dezelfde grafiek hoort bij uurtarief *f* 0,17 (of *f* 0,18) een bezettingsgraad van ongeveer 2,1.

>d Uitgaande (zie >b) van bezettingsgraad × uurtarief = constant is te vinden:
1 × 0,26 = constant
2 × 0,13 = constant
dus uurtarief = $\frac{0,26}{\text{bezettingsgraad}}$

>e De grondprijs (een vast bedrag) moet dan verdeeld worden over de totale parkeertijd. Het getal 0,26 uit de formule moet daarom verhoogd worden.

Volhouden (blz. 7)

>a Voor $b > 0$ zou de formule steeds grotere waarde van t moeten geven als P toeneemt. Dat is niet zo. Bij $b < 0$ hoort (dalende) afname van t als P toeneemt.

>b $P = 10$: $t \approx 277$
$P = 40$: $t \approx 33{,}4$ en dat past redelijk bij de gegeven t-waarde behorend bij $P = 41$.

Huisartsendichtheid (blz. 9)

>a

jaar	huisartsen	bevolking (× 1000)	dichtheid
59	4200	11300	3,72
60	4350	11400	3,82
61	4450	11600	3,84
62	4450	11800	3,77
63	4500	11900	3,78

Ten opzichte van de omringende jaren levert 1961 dus een maximale dichtheid.

>b Vanuit de grafieken:

periode 1945 - 1961: aantal artsen neemt sterker toe dan bevolking (per 10.000!). Dus de dichtheid neemt *toe*.

periode 1961 - 1971: aantal huisartsen neemt (licht) af, bevolking neemt toe. Dus de dichtheid neemt *af*.

conclusie: in 1961 is de dichtheid het grootst.

>c de grafiek gaat door deze punten

t	68	69	70	71	72	73	74	75
$h.d$	3,49	3,45	3,39	3,33	3,31	3,37	3,37	3,47

voor de grafiek van 1958 tot 1964: zie >a.

>d De bevolkingsformule is gezet op $b = 10800$ in 1954
$b = 14000$ in 1979

Dan geldt: $b = 10800 + 128 \cdot t$

Bij de huisartsen is uitgegaan van $t = 0 \ : h = 3600$
$t = 7 \ : h = 4500$
$t = 17 : h = 4350$
$t = 25 : h = 5200$

$$\text{Dan volgt:} \begin{cases} h = 3600 + 128{,}6 \cdot t & \text{voor } 0 \le t \le 7 \\ h = 4605 - 15 \cdot t & \text{voor } 7 \le t \le 17 \\ h = 2543{,}75 + 106{,}25 \cdot t & \text{voor } 17 \le t \le 25 \end{cases}$$

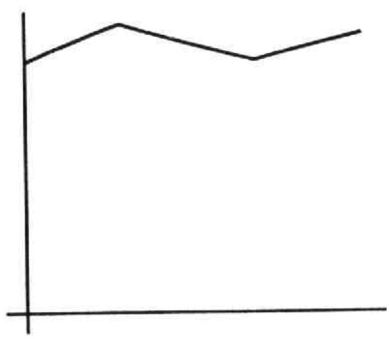
>e Dichtheid $= \frac{h}{b/10} = \frac{10.h}{b}$

>f $d = \frac{36000 + 1286t}{10800 + 128t}$ $(0 \le t \le 7)$

$d = \frac{46050 - 150t}{10800 + 128t}$ $(7 \le t \le 17)$

$d = \frac{25437{,}5 + 1062{,}5\,t}{10800 + 128t}$ $(17 \le t \le 25)$

>g



Mestproblemen (blz. 11)

>a Grafiek door de drie punten (150; 1,5), (200; 0,7) en (250; 0,3).

>b Gelijke toenamen van kosten moeten gelijke vermenigvuldigingsfactoren van markt opleveren $1{,}5 \to 0{,}7$ factor $\approx 0{,}47$
$0{,}7 \to 0{,}3$ factor $\approx 0{,}43$
Dat komt redelijk in de buurt van exponentieel gedrag.

>c verschillentabel:

1,5		
	− 0,8	
0,7		+ 0,4
	− 0,4	
0,3		+ 0,4
	0	
0,3		

Dat is vreemd, zeker als je nog een stap verder gaat: de afzetmarkt neemt toe bij verder stijgende produktiekosten.

Diersoorten tellen (blz. 13)

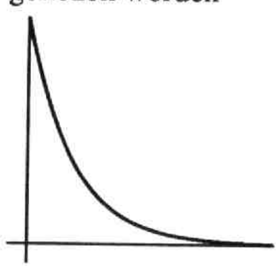
>a Hoe groter het proefgebied, hoe meer verschillende soorten er worden gevonden. Dat de stijging van de grafiek afnemend is, komt doordat het vergroten van het proefgebied op den duur steeds minder nieuw-ontdekte soorten zal opleveren.

>b Als n negatief zou zijn, wordt e^{-nx} groter naarmate x toeneemt.
$1 - e^{-nx}$ wordt dan steeds kleiner. Dat is in tegenspraak met de grafiek.
Bij n positief geldt e^{-nx} neemt af en dus $1 - e^{-nx}$ neemt toe, maar steeds minder snel.

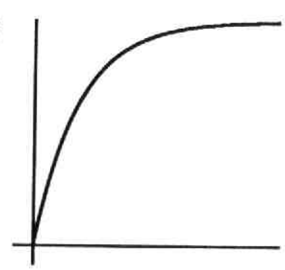
>c Als x erg groot wordt, nadert e^{-nx} tot nul, dus $1 - e^{-nx}$ tot 1. De waarde van y nadert tot m.
Asymptoot is redelijk want er is maar een eindig aantal soorten in een gebied aanwezig. De verschillende soorten zijn (zie >a) al (bijna) allemaal ontdekt op een redelijk groot gedeelte van het hele gebied.

>d Nee; in feite wordt hier een *globale* grafiek van een formule voorzien. Wanneer voor x een andere maateenheid wordt gekozen dan moet alleen de waarde van n worden aangepast.
Bijvoorbeeld: x eerst in m^2, daarna in km^2. Dan moet n 10^6 keer zo groot gekozen worden

>e



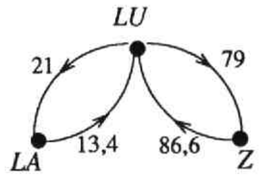
>f



>g Het aantal soorten is kennelijk 100 (de asymptoot voor y) dus:
$1 - 3^{-0{,}5x} = \frac{1}{2} \to 3^{-0{,}5x} = \frac{1}{2} \to -0{,}5x \approx -0{,}63 \to x \approx 1{,}26$

Neerslag en verdamping (blz. 15)

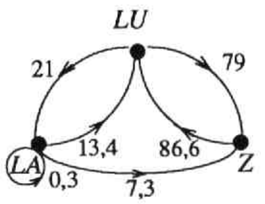
>a bij de pijlen zijn de percentages vermeld.



Verdamping en neerslag hebben beide met de lucht te maken.
Verdamping is naar *LU* gericht, neerslag van *LU* af.

>b Als dit de hele kringloop zou voorstellen, wordt het land steeds natter. Het neerslagoverschot moet ergens blijven.

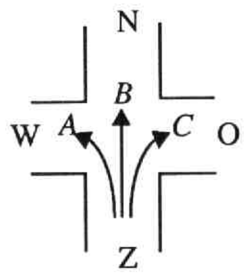
>c



De pijl van *LA* naar *Z* geeft de afvoer van water naar de zee, bijvoorbeeld via rivieren.

Kruispunten, conflictpunten (blz. 17)

>a Bekijk de situatie voor de stroom komend uit Z:

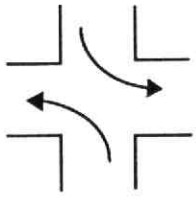


stroom *A* heeft 2(W) + 3(N) + 2(O) = 7 conflicten
stroom *B* heeft 2(W) + 1(N) + 3(O) = 6 conflicten
stroom *C* heeft 1(W) + 1(N) = 2 conflicten

totaal 15 conflicten

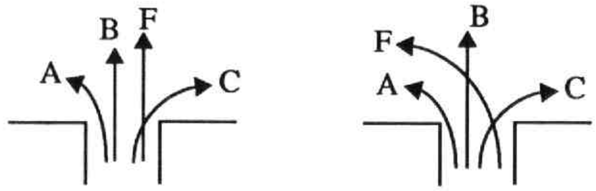
Dit geldt voor ieder van de vier richtingen (N, W, O, Z) dus $4 \times 15 = 60$. Daarbij wordt elk conflictpunt tweemaal gesteld, dus er zijn 30 conflictpunten.

N.B.:
28 is ook mogelijk, als de *A*-stroom uit Z en de *A*-stroom uit N elkaar niet hinderen:



>b In ieder geval zijn de *A*-stroom-conflicten niet meegeteld.
Verder blijkt in het plaatje het conflictpunt *C*-stroom uit Z en *A*-stroom uit N niet te bestaan: bij conflictpunt nr. 6 wordt de *C*-stroom uit Z opgeslokt door de *B*-stroom uit W.

>d Voor fiets-fiets geldt hetzelfde als voor auto-auto, dus dat levert 30 extra conflictpunten op.
De ontmoetingen fiets-auto leveren extra conflictpunten op, omdat een fietsstroom en een autostroom uit dezelfde richting elkaar dwarszitten.



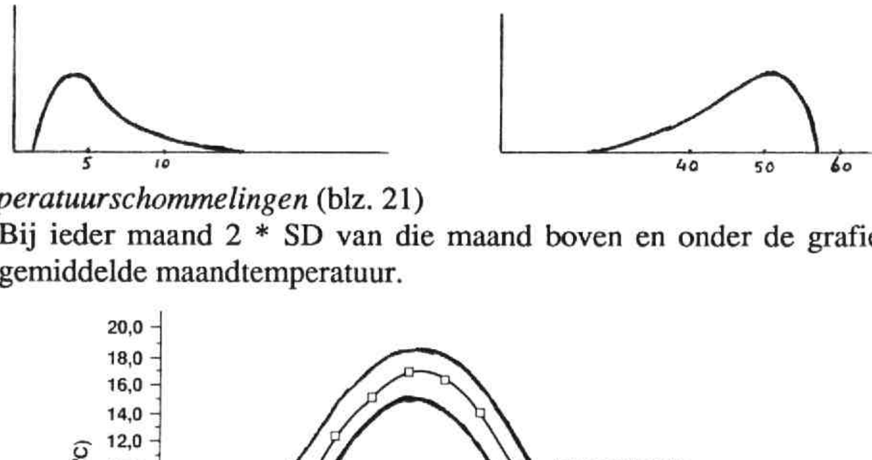
Per richting komen er drie conflictpunten bij.
Totaal dus: 30 + 30 + 42 = 102 conflictpunten

Grazende veulens (blz. 19)

>a Meer dan de helft graast nog niet (bijvoorbeeld 11 van de 20). De rest graast al zo lang dat het gemiddelde voor de 20 veulens op 3,5 komt. Dat lukt door de 9 andere veulens in totaal 3,5 × 20 = 70 minuten te laten grazen.

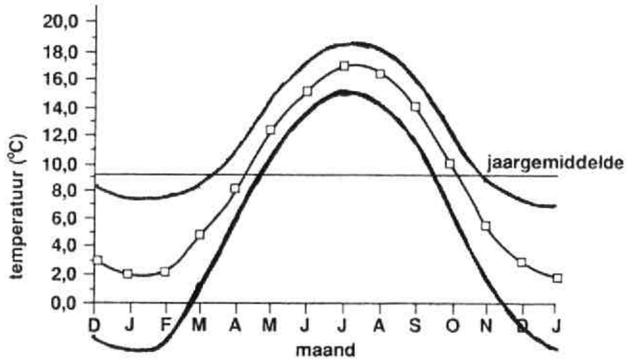
>b De tijdsintervallen waarover de informatie wordt gegeven, worden steeds groter. Bij het vluchtig bekijken van de grafiek lijkt de toename van de graastijd op latere leeftijd fors te stijgen.

>c 9 – 12: staart naar rechts 45 – 52: staart naar links



Temperatuurschommelingen (blz. 21)

>a Bij ieder maand 2 * SD van die maand boven en onder de grafiek van de gemiddelde maandtemperatuur.



>b De temperaturen van april t/m oktober hebben een kleine spreiding. De uitschieters die bij de wintermaanden optreden zijn veel groter. Deze hebben daardoor dus een behoorlijke invloed op het gemiddelde over het hele jaar.

>c Temperatuur onder 0°C betekent afwijking van meer dan 0,8 · SD *onder* gemiddelde. Φ (-0,8) = 0,2119, dus een kans van ongeveer 21%

>d Voor juli geldt: m = 17°C en s = 1,25.
Meer dan 19°C is dus meer dan 1,6 · s boven het gemiddelde.
$1 - \Phi(1,6) = \Phi(-1,6) = 0,0548$ dus per 100 jaar naar verwachting 5,48 keer (dus 5 à 6)

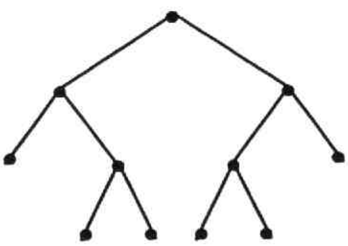
>e Vroege bloeidatum betekent weinig (of kort) winterweer, dus strengst: 1986; mildst: 1975

>f Nee, want het is mogelijk dat na aanvankelijke warmte (dus vroege bloeidatum) alsnog strenge vorst gaat heersen (februari, maart).

>g Nee. De winter was kennelijk niet erg warm. Dat kan in de loop van het jaar ruim gecompenseerd worden door hoge maandtemperaturen.

Wimbledon (blz. 23)

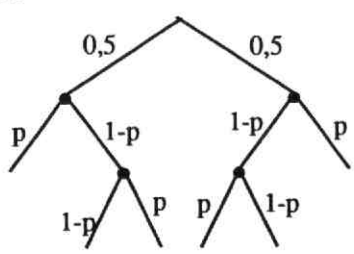
>a



>b Twee sets: $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
Of: eerste set doet er niet toe. De kans dat de tweede set gewonnen wordt door de winnares van de eerste set is $\frac{1}{2}$. De kans op 3 sets is *dus* ook $\frac{1}{2}$.

>c 0,75

>d



>e Kans op 2 sets is nu p. Volgens gegeven A moet dus gelden $p = \frac{62}{83} \approx 0,75$

>f De kans op partijwinst voor de eerste-set-winnares is $p + (1\text{-}p)^2$; dat moet, uitgaande van B, gelijk zijn aan $\approx 0,916$
Via proberen: $p \approx 0,91$ (precieser: $p = 0,90743$)