Brugboek differentiëren

BRUGBOEK
DIFFERENTIËREN

BRUGBOEK
DIFFERENTIËREN

WISKUNDE A

BRUGBOEK DIFFERENTIËREN
Een produktie ten behoeve van het project Hawex.

Ontwerpers:	Martin Kindt Henk van der Kooij Anton Roodhardt
Vormgeving:	Ada Ritzer

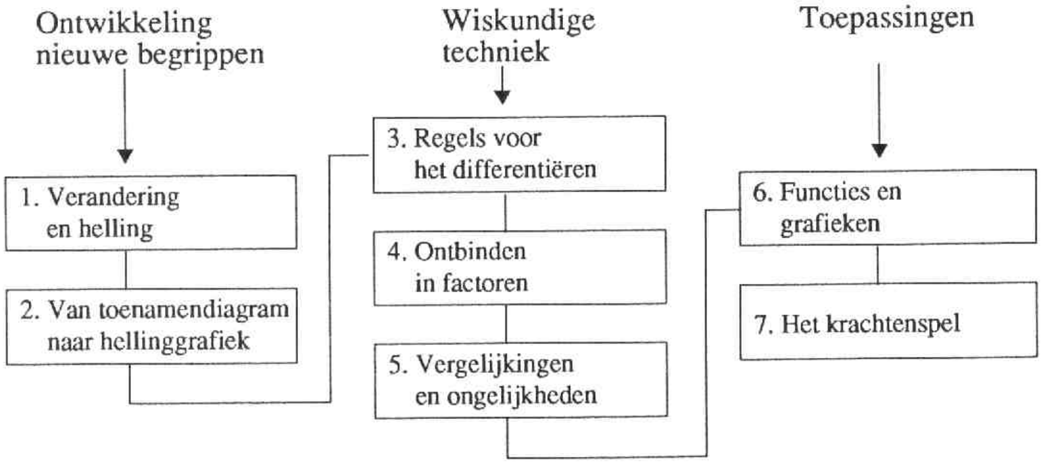
Utrecht, mei 1991

Inhoudsopgave

Aan de gebruiker

Dit Brugboek is allereerst bestemd voor leerlingen die wiskunde A op het havo met succes hebben gevolgd en die hun studie willen voortzetten op het vwo, weer met wiskunde A.
In klas 4 van het vwo worden de beginselen van het 'differentiëren' behandeld, en dat onderwerp hoort niet bij de normale havo-stof. Wèl worden er in het havo-programma allerlei begrippen behandeld, zoals 'toenamendiagram' en 'differentiequotiënt' die in de opbouw van het differentiëren een wezenlijke rol spelen en waar in dit boek ook bij wordt aangeknoopt.
Bij differentiëren komt ook nogal wat algebra kijken, namelijk het rekenen en omvormen van formules en het oplossen van vergelijkingen en ongelijkheden.
In dit boek wordt de benodigde algebra opgefrist. Voor een deel betekent die algebra ook een uitbreiding van de havo-stof.

Het begin van het Brugboek is een beetje theoretisch: veel leestekst en weinig opgaven. Dat wordt verder op wel anders, waar juist de oefeningen overheersen.
Het is wel zaak dat je het begin, de ontwikkeling van het begrip *hellingfunctie*, zo goed mogelijk begrijpt; bestuderen van de tekst is hard nodig! Het middengedeelte van het boek is geheel gewijd aan 'wiskundige techniek' en in de twee slothoofdstukken wordt het voorgaande (begrip èn techniek) in praktijk gebracht.
Het boek in schema:

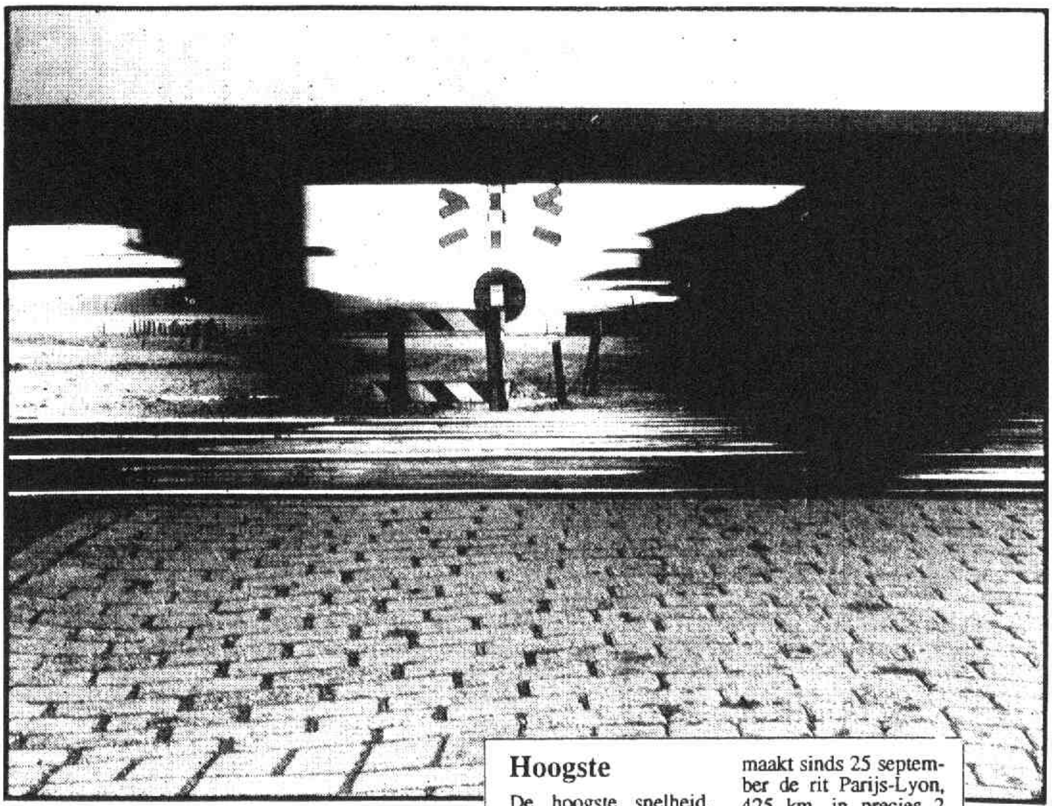


Voor wat betreft de opgaven het volgende: er is een boek met aanwijzingen, antwoorden en uitwerkingen.

- De aanwijzingen zijn er voor je een handje te helpen, als je na hevig nadenken de opgave niet doorgrondt. Niet te gauw raadplegen!
- De (korte)antwoorden of uitkomsten, geven een eerste controlemiddel (kunnen ook een aanwijzing zijn).
- De uitwerking dient als allerlaatste geraadpleegd te worden.

1. Verandering en helling

1.1. Snelheid op een tijdstip



Hoogste

De hoogste snelheid, geregistreerd binnen een normaal spoorwegennet, is 380 km/u door de Franse Train à Grande Vitesse tijdens tests bij Tonnerre op 26 februari 1981. De TGV, die de dienst begon op 27 september 1981, maakt sinds 25 september de rit Parijs-Lyon, 425 km, in precies 2 uur, een gemiddelde van 212,5 km/u, met een topsnelheid van 270 km/u. De TGV-Atlantique, die in 1990 in dienst komt, zal gaan rijden met een topsnelheid van 300 km/u.

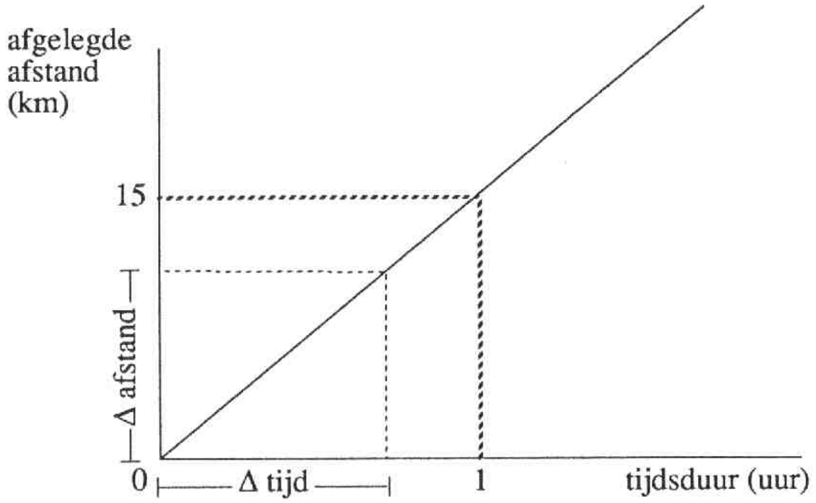
In deze paragraaf wordt een manier bekeken om veranderingen te onderzoeken en te beschrijven. Veranderingen, de wereld zit er vol mee. Om de zaak voorstelbaar te houden, gaan we in dit verhaal uit van het begrip *snelheid*. Snelheid heeft immers iets te maken met *verandering van plaats* in de tijd.
Snelheid (of eigenlijk verplaatsing) kan model staan voor andere veranderingen.

Wat is snelheid nou eigenlijk?
Je fietst met een snelheid van 15 km/uur. Wat betekent dat precies?
Zeker niet dat je een uur hebt gereden en daarin een afstand van 15 km hebt afgelegd. Je kunt zo'n snelheid immers wel gedurende een fractie van een seconde hebben. Als je tegen een muurtje rijdt maakt het weinig uit hoe lang je al onderweg was. Nog sterker: bij het begrip snelheid hoort eigenlijk geen *tijdsduur*; snelheid hoort bij een bepaald *tijdstip*.

Maar wat moet je je dan bij de grootte van een snelheid voorstellen?
Om die grootte te bepalen worden tijd en afstand erbij gehaald.
Een snelheid van 15 km/uur betekent dan:

Als die snelheid onveranderd gedurende 1 uur *zou worden* aangehouden, *dan* zou een afstand van 15 km worden afgelegd.
En bij een andere tijdsduur hoort een daarmee evenredige afstand.

Grafisch is dat zo voor te stellen:



De snelheid is hierin terug te vinden als het *verhoudingsgetal* $\frac{\Delta afstand}{\Delta tijd}$.

Een differentiequotiënt dus. En dat getal is de richtingscoëfficiënt (in dit boek: *hellingscoëfficiënt*) van de rechtlijnige tijd-afstand grafiek.
Merk op dat de verhouding ook doorwerkt in de gebruikte eenheden:

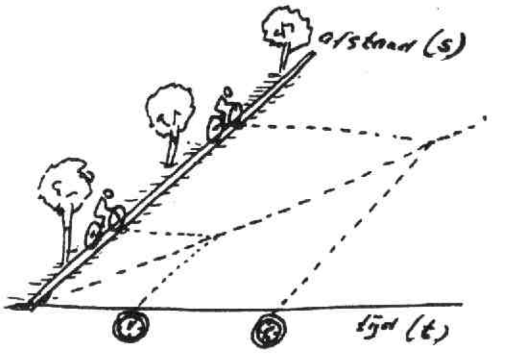
- afstand in km
- tijd in uur
- snelheid in km/uur

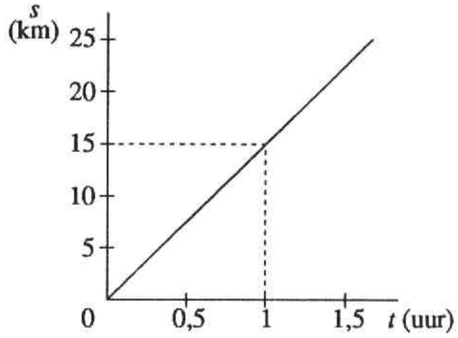
Het is gebruikelijk om de grootheden 'afstand' (of 'plaats'), 'tijd' en 'snelheid' aan te geven met vaste letters:

s = afstand (of plaats)
t = tijd
v = snelheid

Opmerking: s is dus niet de snelheid, maar de (afgelegde) afstand.
De afspraak over de betekenis van deze letters is internationaal.
Voor Nederlanders zou de letter a voor afstand misschien voor de hand liggen, maar die is gereserveerd voor *versnelling* (acceleratie).

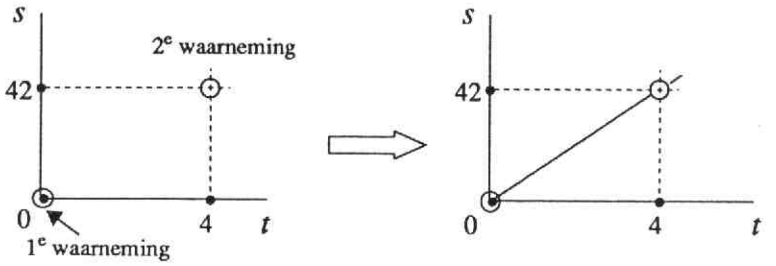
De tijd-afstand grafiek kan ook worden opgevat als een soort reisbeschrijving. Voor elk *tijdstip* kun je zeggen waar de fiets(t)er zich bevindt.





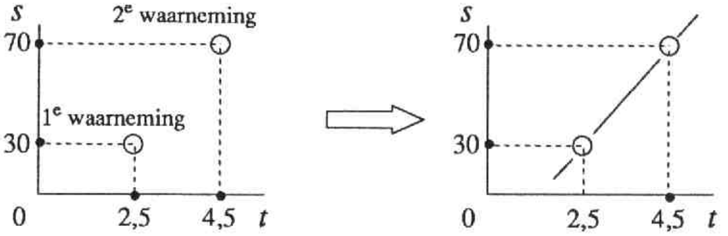
Omgekeerd kun je uit waarnemingen de grafiek tekenen en dus de snelheid berekenen. Hiervan enkele getallenvoorbeelden:

A



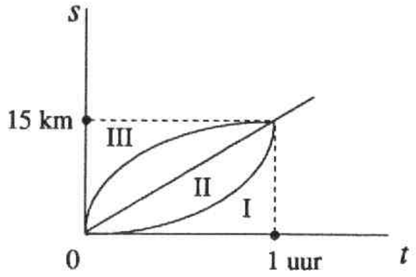
$$\boxed{\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{42-0}{4-0} = 10,5}$$

B



$$\boxed{\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{70-30}{4,5-2,5} = 20}$$

Een fietstocht maken volgens de reisbeschrijving boven aan deze bladzijde is ontzettend moeilijk. Na een vliegende start een constante snelheid van 15 km/uur aanhouden! In werkelijkheid zal de snelheid dan eens hoger, dan eens lager zijn. Wat je in de voorbeelden hebt uitgerekend zijn volgens deze opvatting niet de snelheden, maar de *gemiddelde snelheden*.



Drie verschillende reisbeschrijvingen met dezelfde gemiddelde snelheid.
Alleen als de snelheid *constant* is (grafiek II), zijn de gemiddelde snelheid en de snelheid (op een tijdstip) even groot.

De betekenis van een gemiddelde snelheid van 15 km/uur voor een traject is dus:

> Als dat traject in dezelfde tijd moet worden afgelegd met een snelheid die op elk tijdstip even groot is, dan moet die constante snelheid 15 km/uur zijn.

Tussenbalans : we hebben onderscheid gemaakt tussen twee begrippen.

a. (Ogenblikkelijke) snelheid – dat wil zeggen de snelheid op een tijdstip

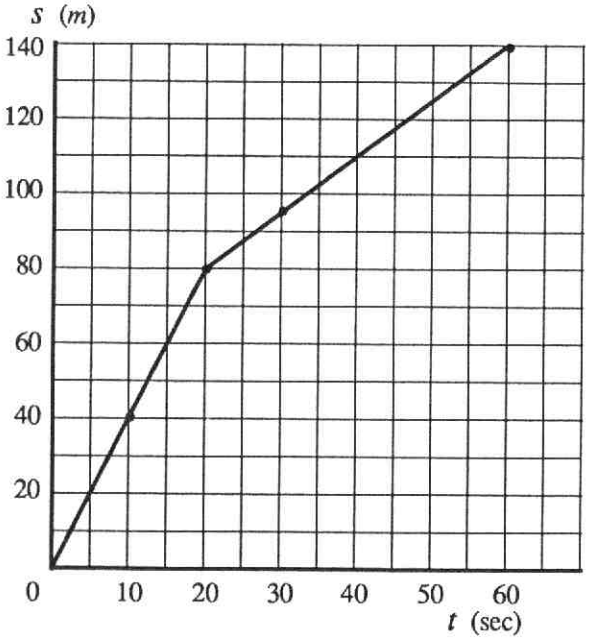
b. Gemiddelde snelheid – dat wil zeggen een (theoretische) vaste snelheid gedurende een tijdsinterval.

Hebben we het geluk dat zo'n tijdstip binnen één tijdsinterval met vaste snelheid valt, dan kunnen we voor de ogenblikkelijke snelheid de gemiddelde snelheid nemen. Dat betreft dus de tijdsintervallen waarop de tijd-afstand-grafiek rechtlijnig is.

Opgaven

1. Bekijk het kranteknipsel op blz. 1. Welke (in het artikeltje genoemde) snelheden zijn 'ogenblikkelijke', welke zijn 'gemiddelde' snelheden?

2.



>a Bereken de gemiddelde snelheid voor de tijdsintervallen 0-20 en 20-60.

>b Teken in deze figuur de tijd-afstand grafiek voor het geval dat voor het gehele tijdsinterval 0-60 de snelheid gelijk is aan de gemiddelde snelheid en bereken die snelheid.

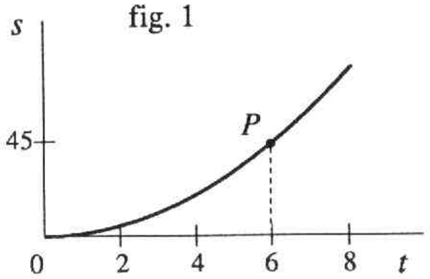
>c Bepaal de gemiddelde snelheid voor de tijdsintervallen: 4,1-4,3 en 10-30.

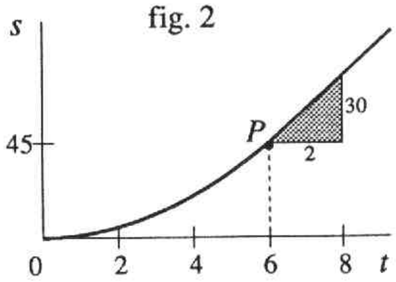
>d Bepaal de snelheid op de tijdstippen $t = 7$; $t = 7{,}01$; $t = 19{,}3$; $t = 30$; $t = 50$

>e Op de vraag naar de snelheid op $t = 20$ is geen precies antwoord te geven. Waarom niet?

1.2. Het moeilijke geval: de grafiek is krom

In figuur 1 is te zien dat de snelheid steeds toeneemt. Vergelijk maar eens de afgelegde afstanden in gelijke tijdsintervallen.





In het vervolg gaat het vooral om dit type vraag:

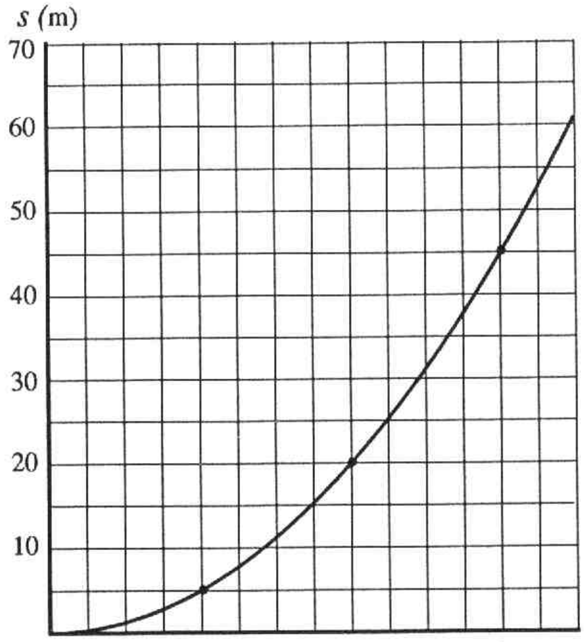
$$\boxed{\text{Hoe groot is de snelheid op tijdstip } t = 6?}$$

Via de gemiddelde snelheid op een tijdsinterval kom je er niet, want het antwoord is niet bij elke intervalkeuze hetzelfde (controleer dat). Op de een of andere manier moeten we die verandering van de snelheid proberen te temmen.
Veronderstel dat die ogenblikkelijke snelheid 15 m/sec. is.
Volgens het begin van dit hoofdstuk betekent dat: als die snelheid niet verandert, dan zal in 1 seconde 15 m worden afgelegd.

Met andere woorden: *je kunt de grafiek in P dan voortzetten met een rechte lijn in de al bekende richting* $\frac{\Delta s}{\Delta t} = 15$ (zie figuur 2).

Opgave

1.

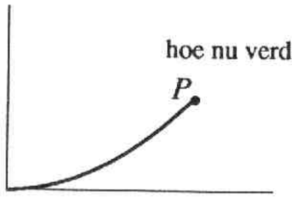


Bekend:
Op $t = 2$ geldt $v = 5$
Op $t = 4$ geldt $v = 10$
Op $t = 6$ geldt $v = 15$
(snelheid in m/s)

>a Veronderstel dat na $t = 4$ de snelheid niet meer verandert. Teken in de tijd-afstand grafiek de rechtlijnige voortzetting na $t = 4$ voor een tijdsduur van 2 sec.

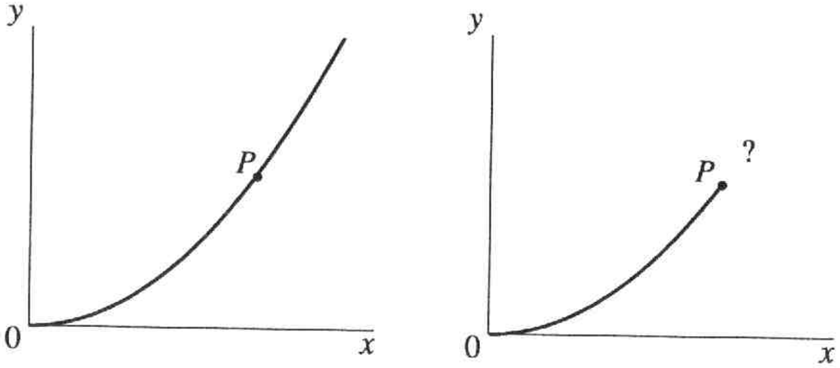
>b Breng op overeenkomstige wijze de situaties voor $t = 2$ en voor $t = 6$ in beeld.

We hebben nog niet het antwoord op de vraag *hoe groot* de snelheid op $t = 6$ is, maar we weten in welke richting we de oplossing moeten zoeken. Grafisch komt de vraag hierop neer:

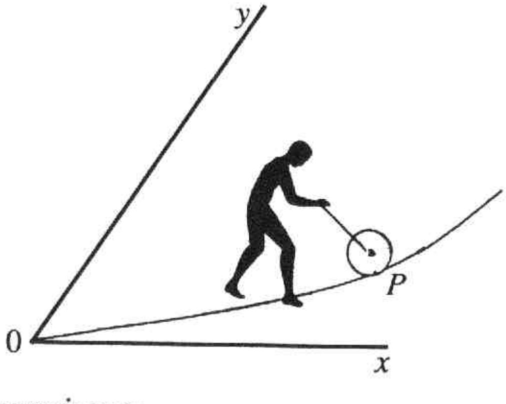


Hoe vind je in P een rechtlijnige voortzetting van de grafiek?

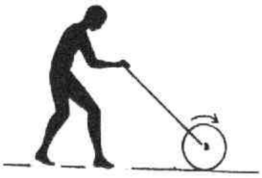
Om tot een antwoord te komen gaan we in het volgende eerst de grafiek bestuderen als een zelfstandige meetkundige figuur, los van de tijd-afstand betekenis. Daarom gebruiken we ook de neutrale coördinaten x en y



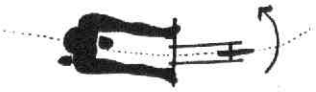
Denk je in dat de tekening heel groot op de grond gekalkt is en dat iemand met een 'loopwieltje' zo goed mogelijk het grafiekspoor probeert te volgen



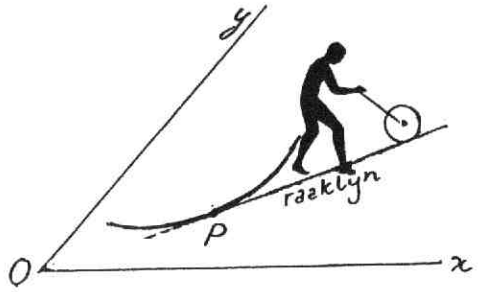
Het wieltje maakt twee bewegingen:

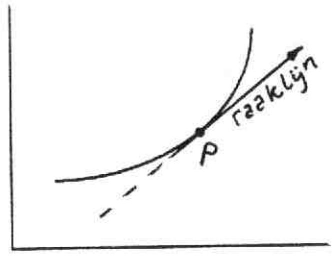


de gewone voorwaartse rolbeweging



de zijwaartse draaiing van het hele wiel om de richtingverandering van de grafiek te volgen.

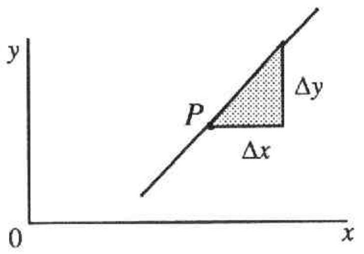




De zijwaartse draaiing van het wieltje is gekoppeld aan de kromming van de grafiek.

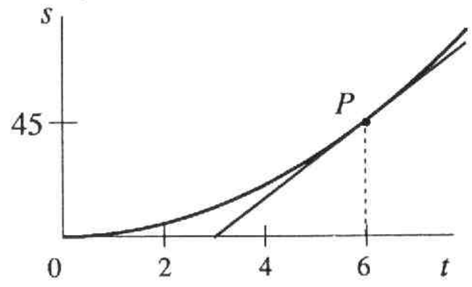
Een rechtlijnige voortzetting in P is dan te verkrijgen door in dit punt de zijwaartse draaiing te staken en verder alleen te rollen.

Meetkundig betekent dit dat er in P een *raaklijn* aan de grafiek is getrokken. De richting van de raaklijn is daarbij dezelfde als die van het wieltje.



Door nu een Δx-Δy-paar voor die raaklijn te meten, is de hellingscoëfficiënt $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ van die raaklijn te berekenen.

Terug naar het snelheidsprobleem:



De (ogenblikkelijke) snelheid in $t = 6$ is volgens de voorgaande theorie gelijk aan de hellingscoëfficiënt van de raaklijn in P aan de grafiek.

In dit plaatje is de raaklijn op het oog getrokken. De snelheid in $t = 6$ is ongeveer 15 m/sec als s in meter en t in seconde zijn genomen.

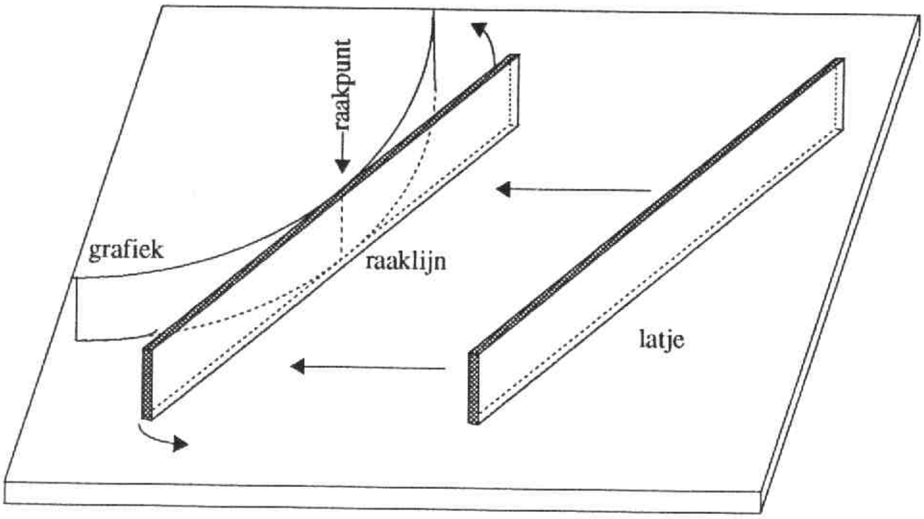
Algemeen:

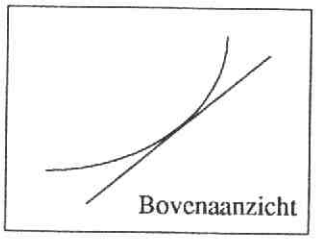
De hellingscoëfficiënt van de raaklijn in een punt van een grafiek is een maat voor de (ogenblikkelijke) verandering van de een of andere grootheid y in afhankelijkheid van een grootheid x.

Opmerking:
x en y hoeven niet de tijd-afstand betekenis te hebben; x zou bijvoorbeeld de lichtsterkte kunnen zijn en y het daarbij behorende gewicht van een plant bij groeiproeven.

1.3. De toepassing van de raaklijn

Om de raaklijn te kunnen gebruiken is het natuurlijk van groot belang dat zo'n punt op de grafiek een *unieke* raaklijn heeft.
Bij de meeste grafieken die we gebruiken is dat ook zo. Bekijk daarvoor dit modelletje, waarin een latje en een strook de rol van lijn en grafiek spelen.





Het latje wordt tegen de grafiek geschoven. In een bovenaanzicht zie je dan een grafiek met raakpunt en raaklijn. Verander nu de richting van de raaklijn een klein beetje (draaien volgens de ronde pijlen). Je merkt dan dat het raakpunt zich verplaatst. Bij het oorspronkelijke raakpunt hoort blijkbaar maar één raaklijnrichting.*)

Uit het plaatje volgt ook dat je de raaklijnen aan een getekende grafiek kunt vinden door er een liniaal langs te leggen. Uiteraard met een kleine tekenonnauwkeurigheid.

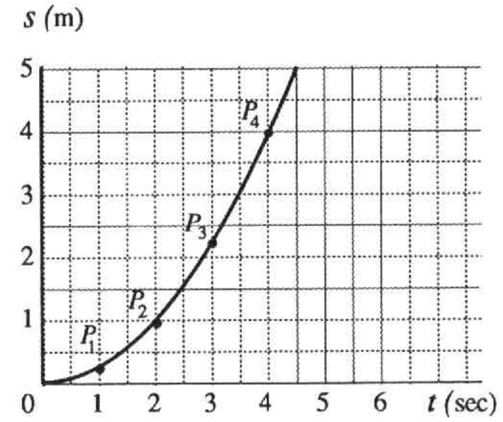
Maar hoe zit het als het raakpunt op een rechtlijnig gedeelte van de grafiek ligt, zoals in opgave 2 van paragraaf 1.1?
Het verhaal over het wieltje klopt nog steeds. Maar de voortzetting valt nu voor een deel samen met de grafiek. Het is een beetje merkwaardig om hier van een raaklijn te spreken.
Misschien tegen je gevoel in doen we dat toch, want anders moeten we bij grafieken altijd een aparte behandeling van de rechtlijnige grafieken bijvoegen. Hoe minder uitzonderingen hoe liever.

---

*) Bekijk in dit verband nog eens opgave 1 van paragraaf 1.2.

Opgaven

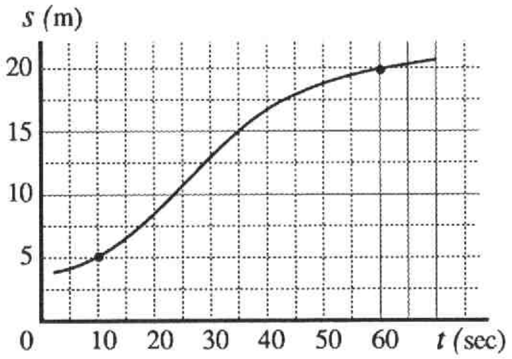
1.



>a Teken de raaklijnen aan de tijd-afstand grafiek in de punten P_1, P_2, P_3, P_4.

>b Bepaal de snelheid op de tijdstippen $t = 1; t = 2; t = 3; t = 4$.

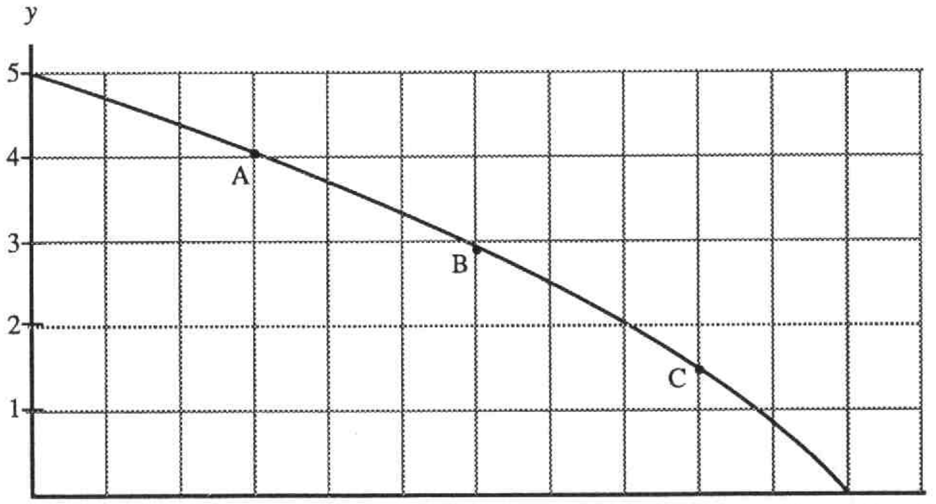
2.



>a Wat is de gemiddelde snelheid op het tijdsinterval $10 \leq t \leq 60$?

>b Op welk tijdstip is de ogenblikkelijke snelheid gelijk aan de gemiddelde snelheid?

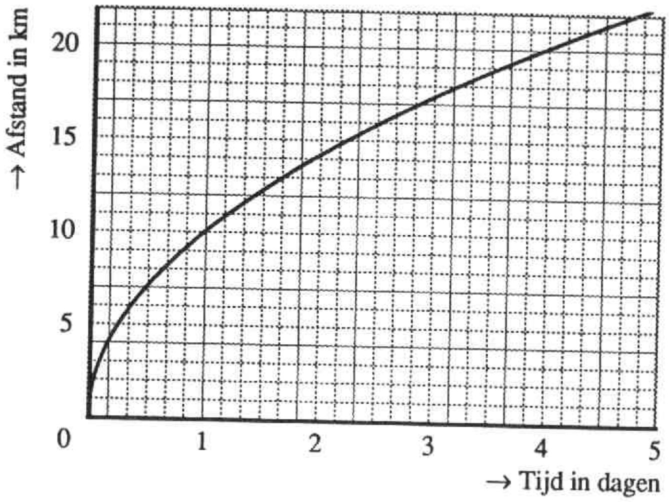
3.



>a Schat de hellingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek in achtereenvolgens A, B en C.

>b Zie je verband tussen de waarden van die hellingscoëfficiënten en de soort daling van de grafiek?

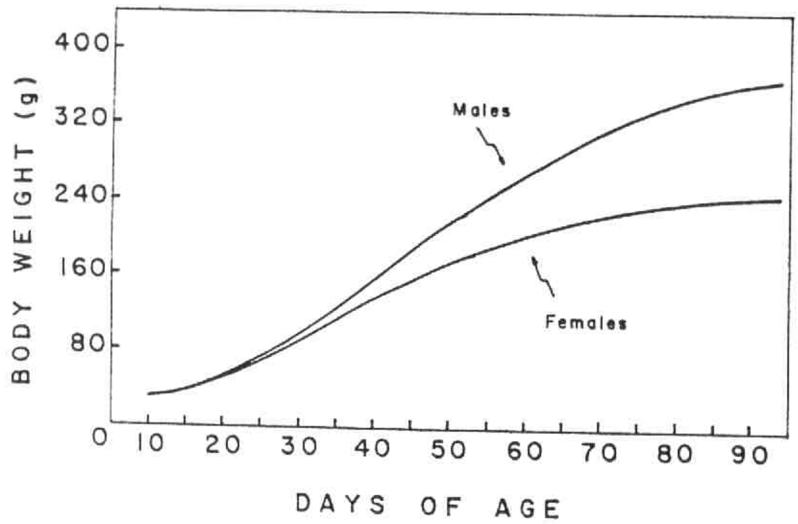
4. Door een lekkende tanker ontstaat op zee een grote olievlek.
De grafiek geeft de afstand van de rand van de vlek tot het schip.



>a Bepaal de 'groeisnelheid' van de vlek in km/dag aan het eind van de 1^e^, 2^e^ en 3^e^ dag.

>b Bepaal ook de gemiddelde groeisnelheid over de 1^e^ dag.
Doe hetzelfde voor de 2^e^ dag en voor de 3^e^ dag.

5.



Body weight changes during maturation for male and female albino rats (data provided by Holtzman Co., Madison, Wisconsin, USA).

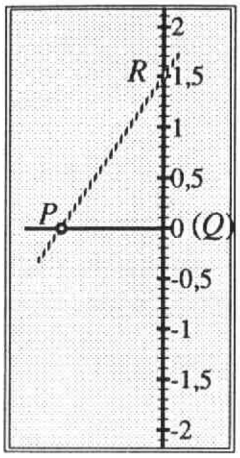
>a Bepaal de groeisnelheid van het mannetje op de 85^ste^ dag.

>b Op welke dag of dagen had het wijfje dezelfde groeisnelheid?

>c Wat was de grootste groeisnelheid van het mannetje?

1.4. De hellingmeter

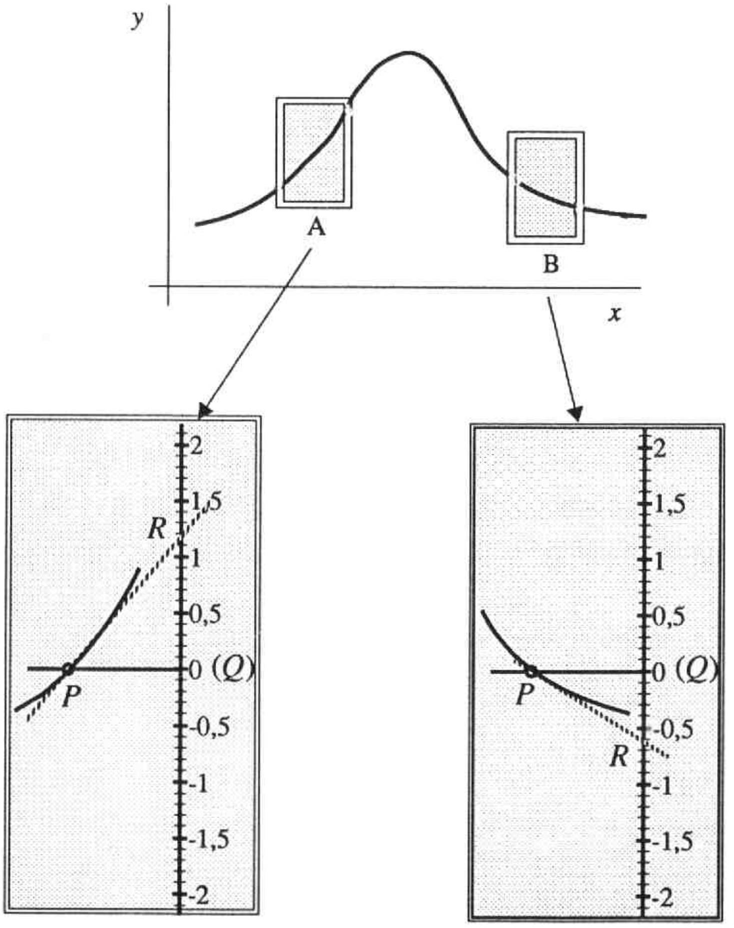
Als je van een groot aantal raaklijnen de richtingscoëfficiënt (hellingscoëfficiënt) moet berekenen, dan is dat een heel karwei. Het zou handig zijn als we dat met een apparaatje kunnen doen. Daarvoor bedenken we de zogenaamde hellingmeter. Dat is een doorzichtig geval waarop de hellingscoëfficiënt van een raaklijn kan worden afgelezen.



Gebruiksaanwijzing

- Leg het punt P op het gekozen raakpunt.
- Zorg dat de lijn PQ horizontaal ligt.
- Draai de lijn door P zo dat hij raaklijn in P aan de grafiek is (PR).
- Lees op de verticale lijn de hellingscoëfficiënt af.

Verklaring:
Bij *deze* schaalverdeling heb je $\Delta y = 1{,}5$ en $\Delta x = 1$; dus hellingscoëfficiënt = 1,5
Een voorbeeld van het gebruik van de hellingmeter bij een grafiek (met gelijke schaalverdelingen op de x-as en de y-as) zie je hieronder:

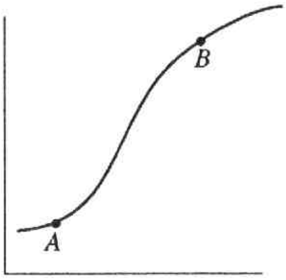


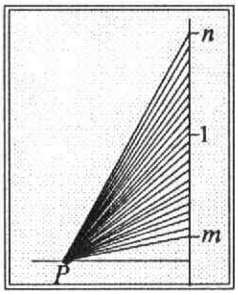
hellingscoëfficiënt = 1,2

hellingscoëfficiënt = -0,6

Opgave

1.

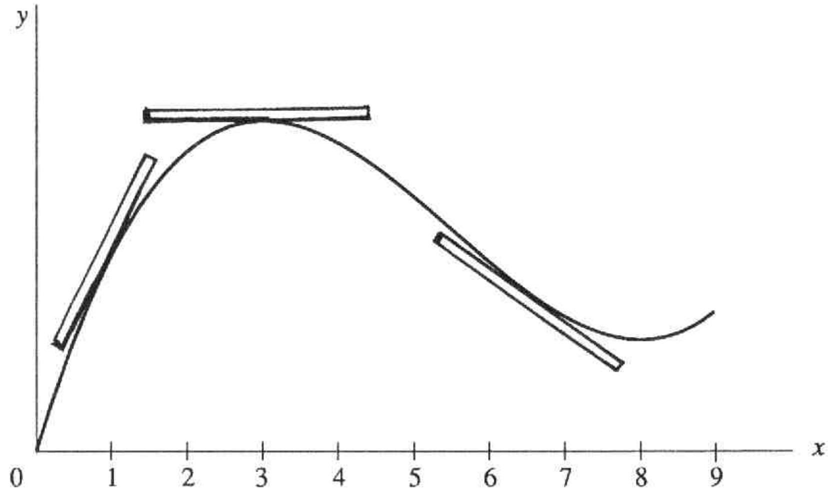




Van het deel van de grafiek tussen A en B zijn 'alle' raaklijnen in een hellingmeter ingetekend. Het resultaat is een gebied dat zwart ziet van de lijnen.

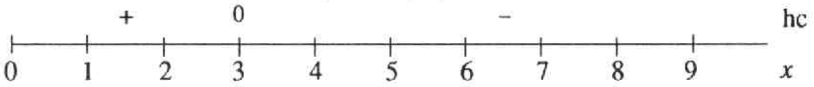
\> Bij welke punten op de grafiek horen de standen m en n?

2.



Je kunt de hele grafiek doorlopen met een liniaaltje (als raaklijn) waarbij we nu alleen letten op de standen met hellingscoëfficiënt positief (+), negatief (–) en nul (0).

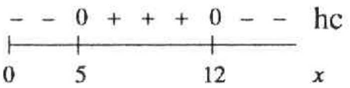
Drie standen uit de figuur zijn aangegeven boven de x-as:



\>a Geef boven de lijn ook andere standen van de raaklijn aan met +, 0, –. Het resultaat heet een *tekenverloop* van de hellingscoëfficiënten.

\>b Welk verband kun je leggen tussen dit tekenverloop en het stijgen en dalen van de grafiek?

3. Van een andere grafiek is het tekenverloop van de hc bekend:

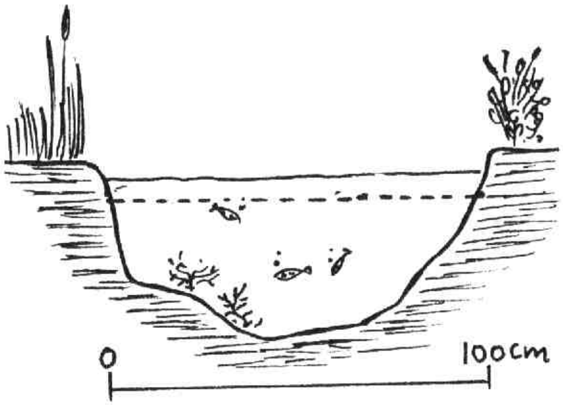


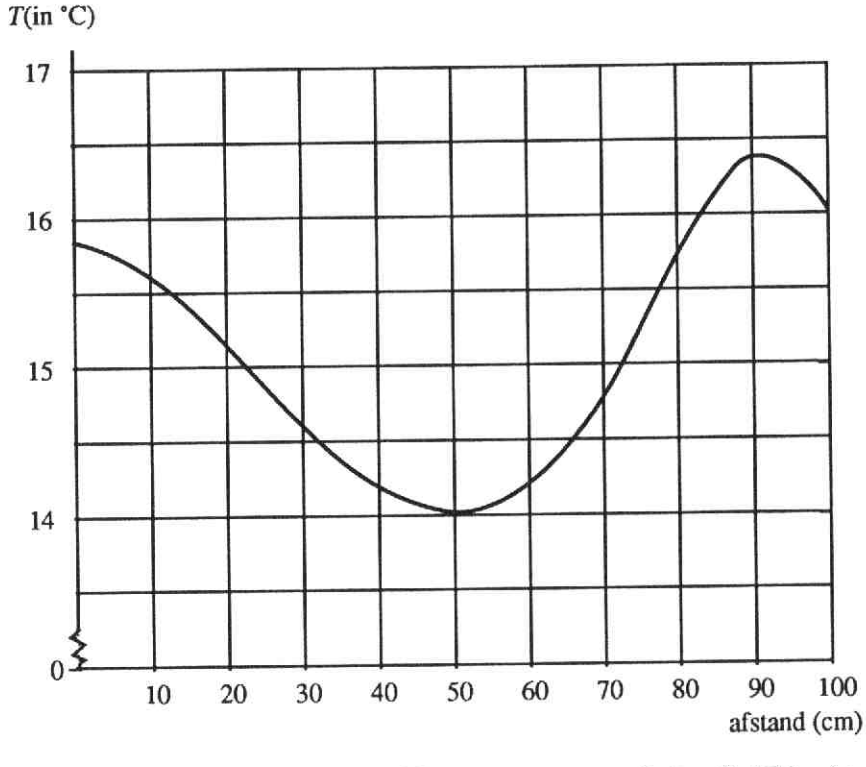
\> Beredeneer dat die grafiek een dieptepunt (bij $x = 5$) en een toppunt (bij $x = 12$) heeft.

4. >a De x-as en y-as bij een grafiek hebben vaak een grotere of kleinere schaal dan op de hellingmeter. Als die schalen onderling gelijk zijn, dan kun je de hellingscoëfficiënt rechtstreeks aflezen op de meter. Verklaar dat.

>b Hoe moet je te werk gaan als de assen verschillende schaalverdelingen hebben, bijvoorbeeld: 1 cm horizontaal = 5 en 1 cm verticaal = 30?

5. Over de breedte van een slootje wordt op 10 cm diepte de watertemperatuur gemeten en in een grafiek uitgezet.

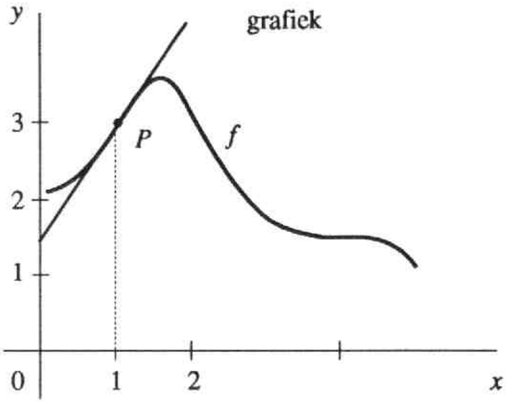


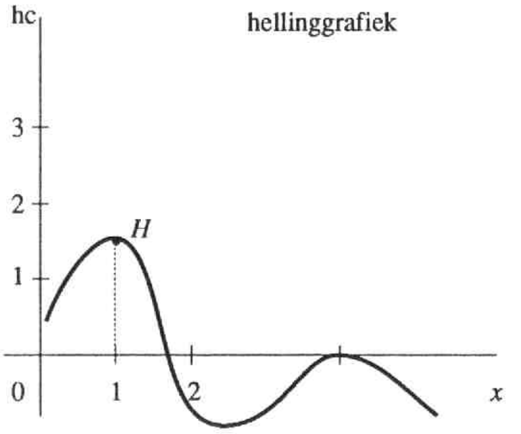


>a Hoe groot is de gemiddelde temperatuurs*stijging* (in°C/cm) tussen 50 en 80 cm (vanaf de linkeroever)?

>b Op welke afstand is de temperatuursstijging het sterkst?

>c Op welke afstanden vindt er een ommekeer plaats van temperatuursdaling naar stijging of omgekeerd?





Een gedachtenexperiment:

- Kies op de grafiek van f een punt, bijvoorbeeld P.
- Meet de hc van de raaklijn in P aan de grafiek (hier: $1\frac{1}{2}$).
- Maak een nieuw assenstelsel met dezelfde x-as en een nieuwe verticale as: de hc-as.
- Teken hierin het punt H met als 1^e coördinaat x_p en als 2^e coördinaat de hc van de gevonden raaklijn: H is dan $(1,1\frac{1}{2})$

Door in gedachten met de hellingmeter de *hele* grafiek van f langs te gaan, vormen de bijbehorende punten Q ook een doorlopende grafiek.

Deze 'hellinggrafiek' beschrijft nauwkeurig het veranderingsgedrag van f, want alle hellingscoëfficiënten van de raaklijnen zijn er uit af te lezen.

(In plaats van hellinggrafiek zou je ook kunnen spreken van 'veranderingsgrafiek').

Opmerking
Een handige knutselaar zou met een extra papierstrook en een schrijfstift de hellingmeter zo kunnen ombouwen dat het gedachtenexperiment in werkelijkheid kan worden uitgevoerd. Ook zijn er computerprogramma's (zoals 'VU-grafiek' en 'Derive') die bij een gegeven grafiek de hellinggrafiek op het scherm tekenen.

Opgave

6. Deze opgave gaat over het gedachtenexperiment dat hierboven is beschreven.
   In de grafiek van f zijn de volgende bijzonderheden te zien:
   toenemende stijging, afnemende stijging, top (maximum), buigpunt.

   > Ga na hoe je elk van die bijzonderheden vanuit de hellinggrafiek kunt terugvinden.

1.5. Op zoek naar een formule voor de hellinggrafiek

Het vinden van de hellingscoëfficiënten van de raaklijnen aan een grafiek met behulp van een hellingmeter geeft een niet zo nauwkeurig resultaat als voor sommige doeleinden wenselijk is. Bovendien is die manier om een hellinggrafiek te vinden nogal tijdrovend.
Het zou ideaal zijn als, bij een grafiek gegeven door een formule, ook de hellinggrafiek door een formule zou zijn bepaald.

We sluiten dit hoofdstuk af met een 'foefje', waaraan je kunt zien dat dit mogelijk is voor een bekende familie van functies, namelijk voor:

$$y = x^2,\ y = x^3,\ y = x^4,\ \text{enz.}$$

(de *machtsfuncties* dus). In de volgende hoofdstukken komen we hierop terug.
Je zult dan een paar regels leren, waarmee je uit de voeten kunt bij een wat grotere groep van functies en waarmee je snel hellinggrafieken, of eigenlijk *hellingfuncties* kunt vinden.

Om te beginnen $y = x^2$·Op bladzijde 16 zie je de grafiek hiervan. In de punten (1,1); (2,4) en (3,9) zijn de raaklijnen getekend.Die raaklijnen snijden de y-as in (0,-1); (0,-4) en (0,-9)!

Opgave

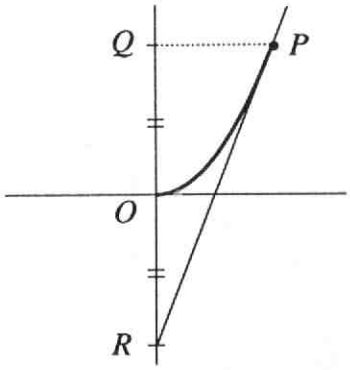
1. >a Controleer door een liniaaltje langs de grafiek te houden, dat de raaklijn in het punt $(1\frac{1}{2},2\frac{1}{4})$ de y-as snijdt in $(0,-2\frac{1}{4})$.
   >b Hoe zou je nu snel de raaklijnen kunnen tekenen in (-1,1); (-2,4) en (-3,9)?
   >c De horizontale lijn door (0,2) snijdt de grafiek in twee punten. De raaklijnen in die punten snijden elkaar op de y-as. In welk punt?
   >d Hoe groot zijn de hellingscoëfficiënten van de raaklijnen in (1,1); (2,4) en (3,9)?
   >e En in (-1,1); (-2,4) en (-3,9)?
   >f Welke algemene regel voor de raaklijn aan de parabool $y = x^2$ kun je nu (op grond van de ervaringen in de vorige vragen) formuleren?

De grafiek van $y = x^2$ heeft blijkbaar een mooie eigenschap, waarvan je gebruik kunt maken bij het tekenen van de raaklijn in een willekeurig punt.

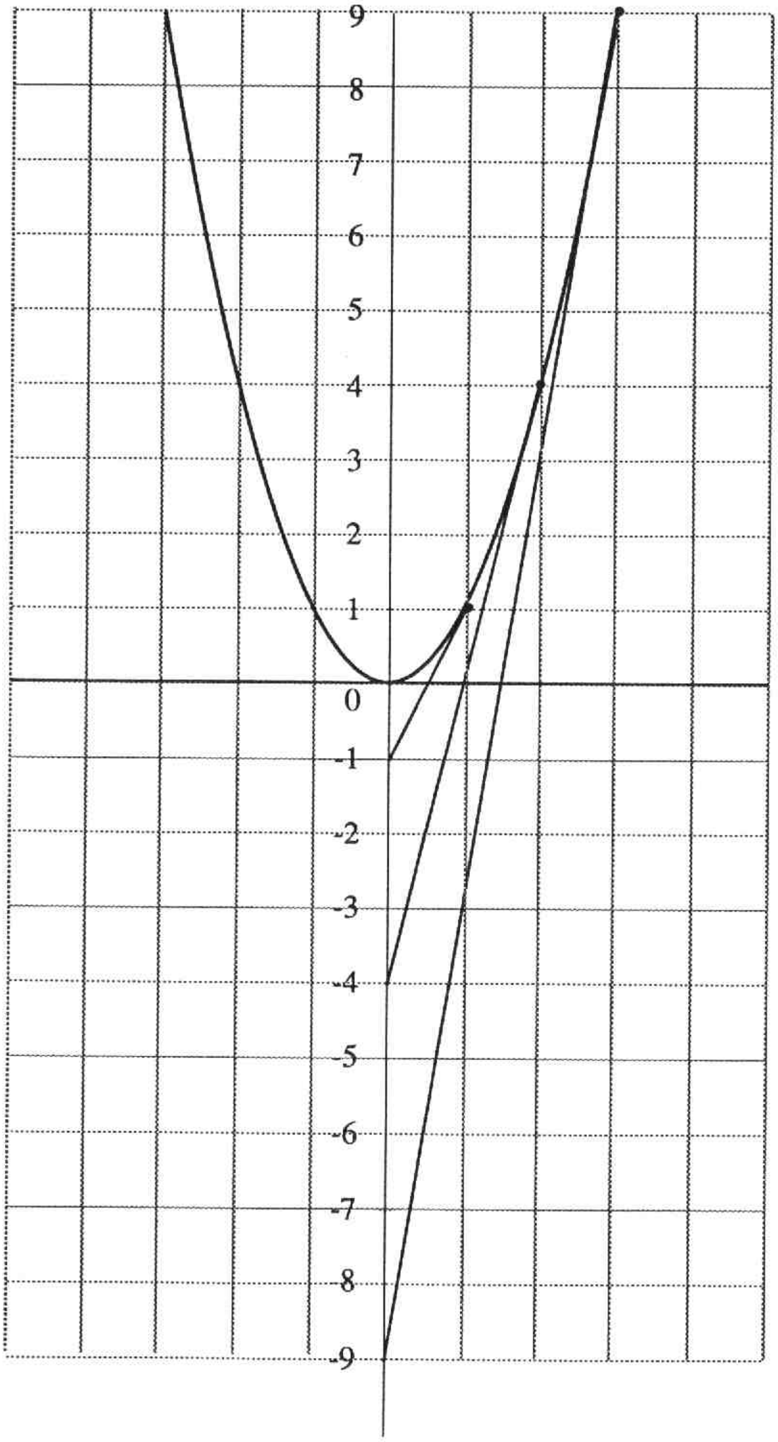
Laat P een punt op de grafiek zijn.
Je kunt de raaklijn in P als volgt vinden.

- trek PQ loodrecht op de y-as
- pas op de negatieve y-as één keer het lijnstuk OQ af; zo krijg je R.
- verbind P met R.

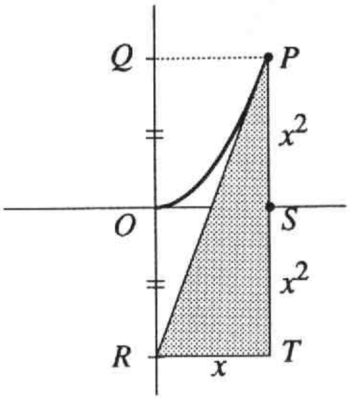
PR is dan de raaklijn in P aan de grafiek



de parabool $y = x^2$ *met enige raaklijnen*



Je moet het 'recept' onderaan blz. 15 voorlopig maar op gezag aannemen. In opgave 1 heb je in elk geval gezien dat het niet zo gek is.

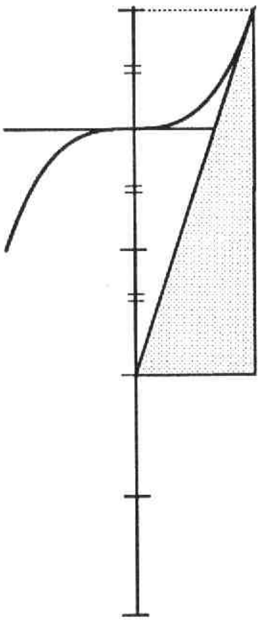


Je kunt hiermee snel de hellingscoëfficiënt van de raaklijn in P vinden.
Er geldt:
$OS = x$
$PS = x^2$
dus
$RT = x$
$PT = 2x^2$
hellingscoëfficiënt $PR = \frac{2x^2}{x} = 2x$

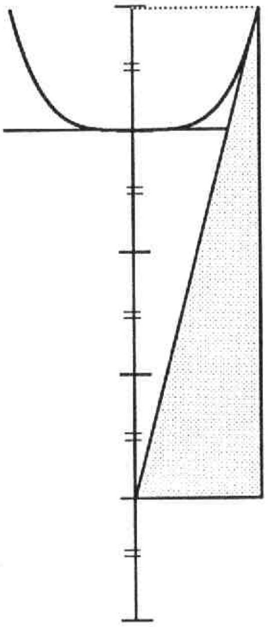
Conclusie:

Als: (x, y) op grafiek van $y = x^2$
dan: hc raaklijn in dat punt is gelijk aan $2x$

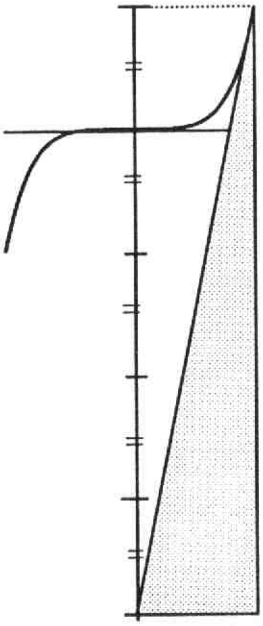
Bijvoorbeeld: de hc van de raaklijn in (5,25) is 10.
Ook voor de grafieken van $y = x^3$, $y = x^4$, $y = x^5$, enz. bestaan er dergelijke regels. We beschrijven die nu minder uitvoerig, de plaatjes spreken hopelijk duidelijke taal!



hc raaklijn =
$\frac{3x^3}{x} = 3x^2$



hc raaklijn =
$\frac{4x^4}{x} = 4x^3$



hc raaklijn =
$\frac{5x^5}{x} = 5x^4$

Samenvattend:

Grafiek	hc raaklijn in (x, y)
$y = x^2$	$2x$
$y = x^3$	$3x^2$
$y = x^4$	$4x^3$
$y = x^5$	$5x^4$
enz.	enz.

Opgaven.

2. Je mag aannemen dat de regelmaat van de tabel zich voortzet.
   >Wat vind je dan voor de hc van de raaklijn bij $y = x^6$?
3. Het punt (1,1) ligt op de grafieken van $y = x^2$, $y = x^3$, $y = x^4$, $y = x^5$.
   Immers $1^2 = 1$, $1^3 = 1$,$1^4 = 1$, $1^5 = 1$.
   De raaklijnen aan die grafieken in (1,1) vallen *niet* samen.
   > Hoe groot is de hellingscoëfficiënt van elk van die lijnen?
4. Het punt (0,0) ligt ook op de grafieken van $y = x^2$, $y = x^3$, $y = x^4$, enz.
   Hier vallen de raaklijnen wèl samen. Die is namelijk steeds horizontaal.
   > Klopt dat met bovenstaande tabel?
5. >a Teken de hellinggrafiek bij $y = x^3$.
   Dat is dus de grafiek waarbij de formule $hc = 3x^2$ hoort.
   >b Je ziet in de hellinggrafiek dat in de punten met $x = 2$ en $x = -2$ de hc hetzelfde is. Kun je dit ook zien aan de grafiek van $y = x^3$?

In plaats van bijvoorbeeld: $y = x^3$ en $hc = 3x^2$
gebruikt men vaak de notatie: $f(x) = x^3$ en $f'(x) = 3x^2$

Men zegt: f' (spreek uit *f*-accent) is de *hellingfunctie* van *f*
of ook: f' is de *afgeleide functie* van *f*.

Zo krijgen we de tabel:

functie	hellingfunctie
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$
$f(x) = x^4$	$f'(x) = 4x^3$
$f(x) = x^5$	$f'(x) = 5x^4$
enz.	enz.

Opgaven

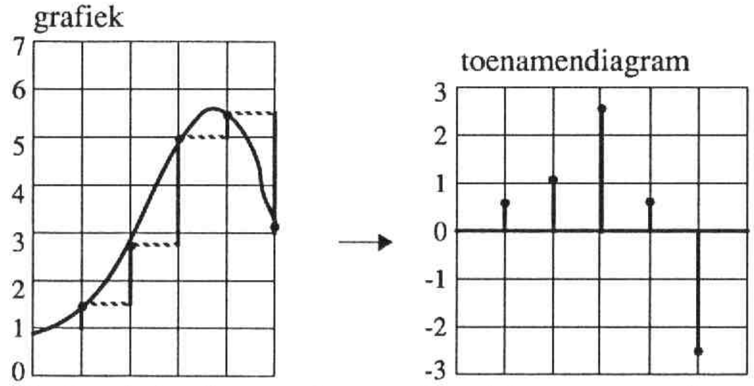
6. > Door welke formule is de hellingfunctie f' bepaald als $f(x) = x^{18}$?
7. Het punt (2,1024) ligt op de grafiek van $f(x) = x^{10}$.
   > Hoe groot is de hellingscoëfficiënt van de raaklijn in dat punt?
8. > Bij welke machtsfunctie hoort de hellingfunctie $f'(x) = 23x^{22}$?

2. Van toenamendiagram naar hellinggrafiek

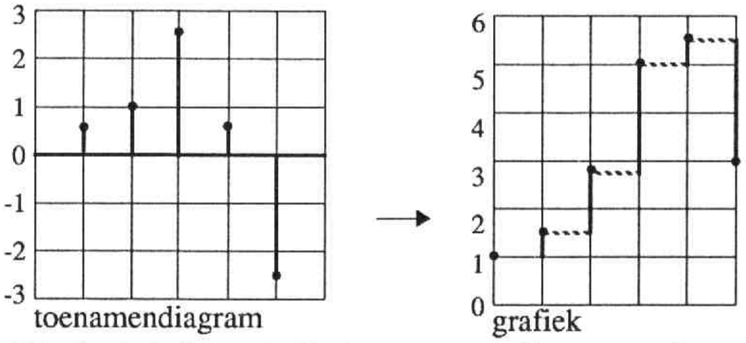
In hoofdstuk 1 zijn veranderingsverschijnselen onderzocht met behulp van raaklijnen aan grafieken, zo kwamen we aan de *hellinggrafiek* (als middel om de mate van verandering in beeld te brengen). Tenslotte heb je gezien dat voor mooie functies: $f(x) = x^2, f(x) = x^3, f(x) = x^4$, enz. de hellinggrafiek bepaald is door een eenvoudige formule. In dit hoofdstuk pakken we de problemen nog eens aan, maar nu uitgaande van een voorstelling die je wel bekend is: het *toenamendiagram*. Van zo'n toenamendiagram komen we op een *gemiddelde-toenamendiagram* en het zal blijken dat je op deze wijze ook bij de hellinggrafiek uit kunt komen.

2.1. Het toenamendiagram, verfijning en verdwijning

Een voorbeeld van een grafiek met één van de mogelijke toenamendiagrammen (bij $\Delta x = 1$)



Bij deze plaatjes kun je je afvragen: hoe goed geeft het toenamendiagram de veranderingen in de grafiek weer? Het zou natuurlijk ideaal zijn als je uit het toenamendiagram de oorspronkelijke grafiek volledig zou kunnen terugvinden. Natuurlijk moet je daarbij wel een beginpunt cadeau krijgen. De reconstructie van de grafiek uit het toenamendiagram geeft in feite niet meer dan een stel losse punten.



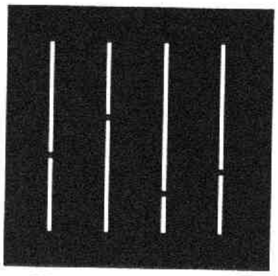
Daaruit blijkt dat de informatie die het toenamendiagram geeft zo zijn beperkingen heeft.

Opgave

1. Bij het kijken naar veranderingen wordt vaak gelet op *soorten stijging, toppen* en *dalen, buigpunten.*

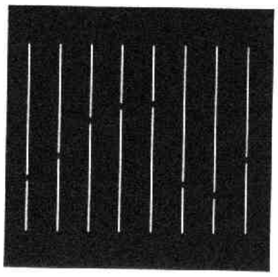
   \> Ga in het voorgaande voorbeeld na wat er verloren is gegaan in het toenamendiagram.

Het ‘informatieverlies’ bij het toenamendiagram is een gevolg van het feit dat maar een beperkt aantal punten van de grafiek meedoet.
De grafiek is als het ware door een masker met smalle openingen bedekt.

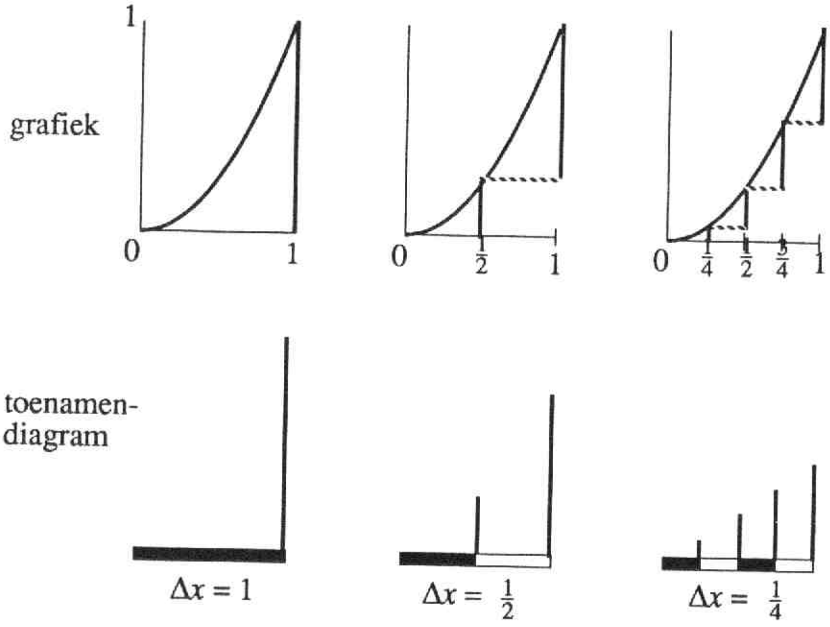


Een voorbeeld

→ Een voor de hand liggende verbetering is het kleiner maken van de stappen →



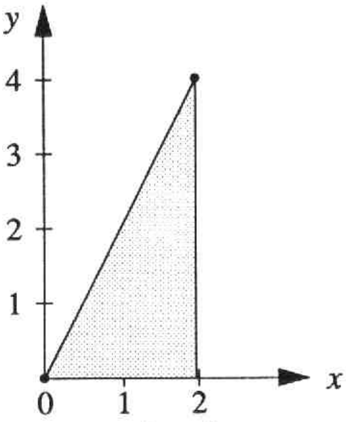
Het hangt van het op te lossen probleem af hoe ver die verfijning moet worden voortgezet. Zeer ver is niet alleen bewerkelijk, maar levert soms ook informatie die niet meer nuttig is. De omstandigheden bepalen hoe gedetailleerd de veranderingen gekend moeten worden. De praktische uitvoerbaarheid stelt trouwens een grens aan de verfijning. Bekijk onderstaand stukje grafiek.



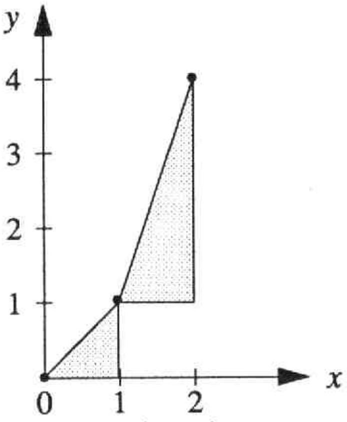
Bij elke verfijning van het toenamendiagram blijft de *som* van alle verticale stukjes (de toenamen Δy) gelijk.
En daardoor worden die stukjes steeds kleiner.
Nog een paar verfijningen verder en ze zijn niet meer van de x-as te onderscheiden.
Praktisch gezien zijn ze verdwenen.
Weg informatie! We hebben teveel gevraagd.

2.2. Het gemiddelde-toenamendiagram

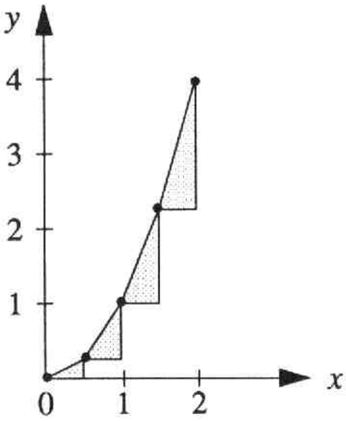
In paragraaf 1 heb je gezien dat het toenamendiagram een vrij grove maat is voor veranderingen. Verfijning is wel mogelijk, maar als je daarmee doorgaat worden de toenamen zo klein dat het toenamendiagram onhanteerbaar wordt.
Gelukkig is er een andere, betere mogelijkheid om dit aan te pakken. We illustreren deze andere aanpak aan de hand van een voorbeeld:
de grafiek van $y = x^2$ voor $0 \leq x \leq 2$



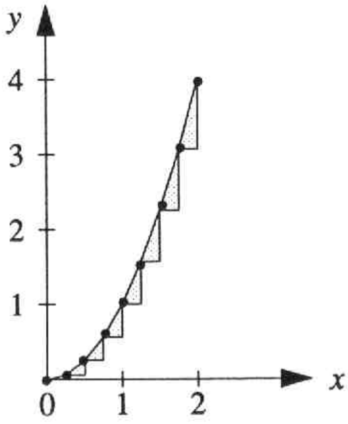
$\Delta x = 2$



$\Delta x = 1$



$\Delta x = \frac{1}{2}$



$\Delta x = \frac{1}{4}$

In de vier figuren zijn (rechthoekige) driehoekjes getekend met zijden Δx en Δy. De schuine zijde van zo'n driehoekje noemt men een *koorde* van de grafiek. (Begin- en het eindpunt van een koorde zijn steeds punten op de grafiek van $y = x^2$).
Zo'n koorde benadert een stukje grafiek en die benadering is des te beter naarmate Δx kleiner is.
De hellingscoëfficiënt van zo'n koorde, dus $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, geeft de *gemiddelde toename* aan van y over een interval met lengte Δx (een andere naam voor $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ is *differentiequotiënt*)

Opmerking:
Als de grafiek een tijd-afstandgrafiek is ($x = t$, $y = s$), dan geeft $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ de gemiddelde snelheid per tijdsinterval.

Bij de vier plaatjes kunnen we nu een 'toenamentabel' en een 'gemiddelde-toenamentabel' maken.

Toenamen

<table>
<tr><td>$\Delta x = 2 \rightarrow \Delta y =$</td><td colspan="8">4</td><td>samen 4</td></tr>
<tr><td>$\Delta x = 1 \rightarrow \Delta y =$</td><td colspan="4">1</td><td colspan="4">3</td><td>samen 4</td></tr>
<tr><td>$\Delta x = \frac{1}{2} \rightarrow \Delta y =$</td><td colspan="2">$\frac{1}{4}$</td><td colspan="2">$\frac{3}{4}$</td><td colspan="2">$1\frac{1}{4}$</td><td colspan="2">$1\frac{3}{4}$</td><td>samen 4</td></tr>
<tr><td>$\Delta x = \frac{1}{4} \rightarrow \Delta y =$</td><td>$\frac{1}{16}$</td><td>$\frac{3}{16}$</td><td>$\frac{5}{16}$</td><td>$\frac{7}{16}$</td><td>$\frac{9}{16}$</td><td>$\frac{11}{16}$</td><td>$\frac{13}{16}$</td><td>$\frac{15}{16}$</td><td>samen 4</td></tr>
</table>

Gemiddelde toenamen

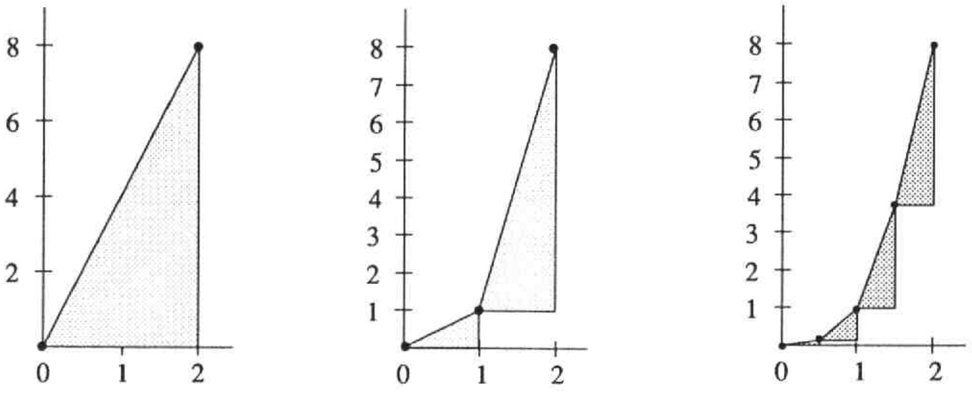
<table>
<tr><td>$\Delta x = 2 \rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} =$</td><td colspan="8">2</td></tr>
<tr><td>$\Delta x = 1 \rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} =$</td><td colspan="4">1</td><td colspan="4">3</td></tr>
<tr><td>$\Delta x = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} =$</td><td colspan="2">$\frac{1}{2}$</td><td colspan="2">$1\frac{1}{2}$</td><td colspan="2">$2\frac{1}{2}$</td><td colspan="2">$3\frac{1}{2}$</td></tr>
<tr><td>$\Delta x = \frac{1}{4} \rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} =$</td><td>$\frac{1}{4}$</td><td>$\frac{3}{4}$</td><td>$1\frac{1}{4}$</td><td>$1\frac{3}{4}$</td><td>$2\frac{1}{4}$</td><td>$2\frac{3}{4}$</td><td>$3\frac{1}{4}$</td><td>$3\frac{3}{4}$</td></tr>
</table>

Opgaven

1. >a Welke regelmaat zit er in de toenamen (en ook in de gemiddelde toenamen) op één rij, bijvoorbeeld bij $\Delta x = \frac{1}{2}$?

   >b Van welke soort functies is dit een kenmerkende eigenschap?

2. Drie verdelingen van het interval $0 \leq x \leq 2$ bij de grafiek van $y = x^3$



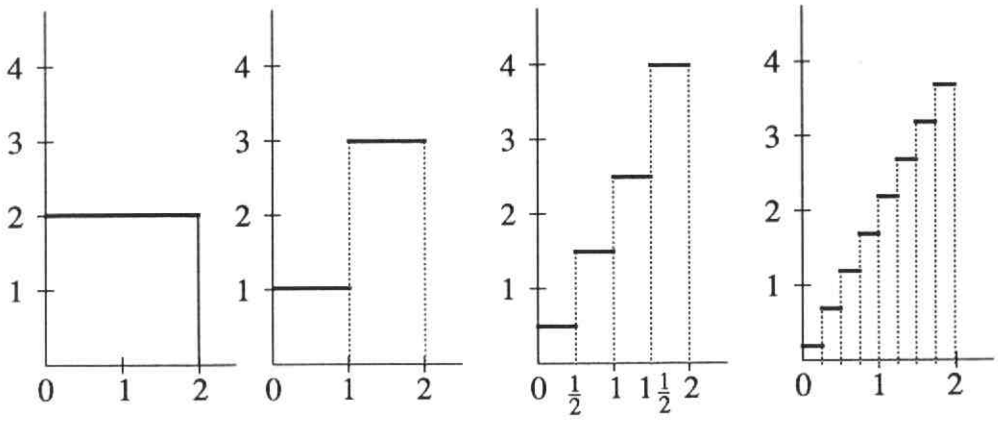
>a Maak een toenamentabel en een gemiddelde toenamentabel (op de manier zoals dat hiervoor gedaan is) voor $\Delta x = 2$, $\Delta x = 1$, $\Delta x = \frac{1}{2}$.

>b Bereken met je rekenmachientje de gemiddelde toename voor $y = x^3$ als x verandert van 1 tot 1,1.

>c Ook als x verandert van 0,9 tot 1.

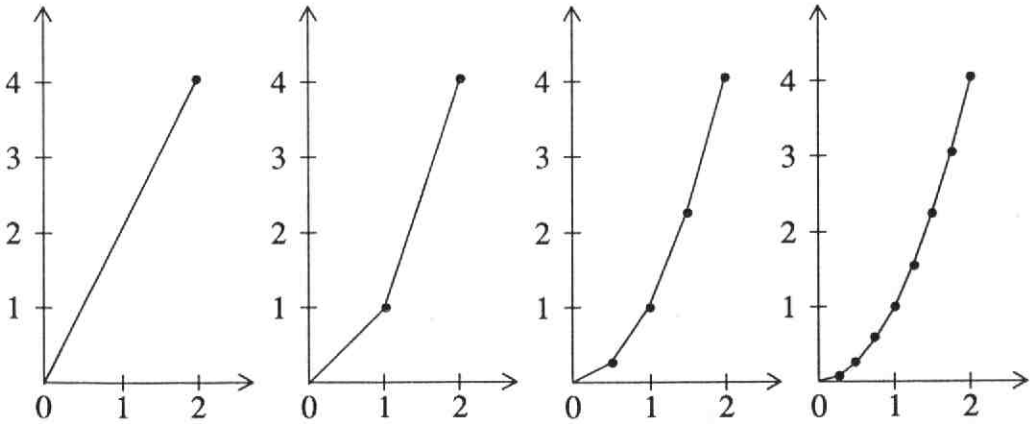
3. > Bereken $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ voor $y = x^2$ en voor de intervallen $1 \leq x \leq 1{,}1$ en $0{,}9 \leq x \leq 1$.

Bij een gegeven grafiek kan, afhankelijk van de keuze van Δx, een *gemiddelde-toenamen-diagram* worden getekend.
De gemiddelde toename (= hellingscoëfficiënt koorde) wordt uitgezet boven de bijbehorende intervallen.
Voor $y = x^2$ en Δx achtereenvolgens 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ levert dit op:



Opgaven

4. > Ga na dat die vier gemiddelde-toenamendiagrammen de hellinggrafieken zijn van de vier koordengrafieken.

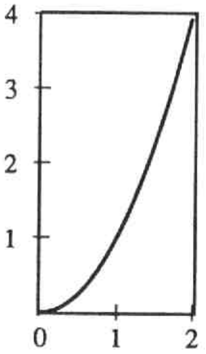


5. > Teken zelf drie gemiddelde-toenamendiagrammen bij $y = x^3$ $(0 \leq x \leq 2)$.
Neem voor Δx achtereenvolgens 2, 1, $\frac{1}{2}$.

2.3. Hellinggrafiek

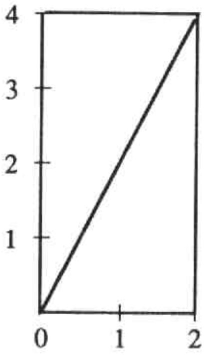
Bekijk nog eens de koordengrafiek bij $y = x^2$ voor $\Delta x = \frac{1}{4}$.
Die lijkt al aardig op de parabool $y = x^2$.
Het gemiddelde toenamendiagram benadert op zijn beurt de hellinggrafiek bij $y = x^2$.
Naarmate Δx kleiner wordt gekozen is die benadering beter.
Met een computer zijn 'koordengrafiek' en 'gemiddelde-toenamendiagram' getekend van $y = x^2$ $(0 \leq x \leq 2)$ en $\Delta x = 0{,}1$.

koordengrafiek



benadert grafiek
van $f(x) = x^2$

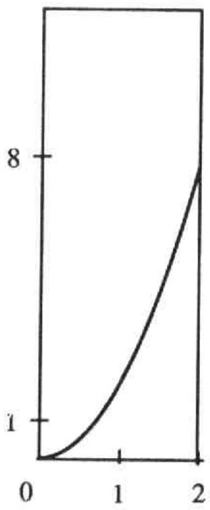
gemiddelde-toenamendiagram



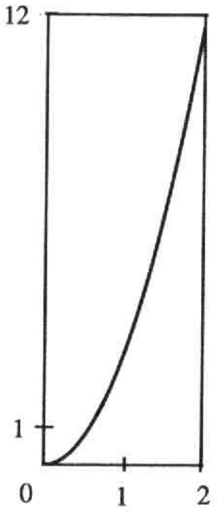
benadert grafiek
van $f\,'(x) = 2x$

Je ziet:
de koordengrafiek en het gemiddelde-toenamendiagram zijn met het blote oog niet meer te onderscheiden van de grafiek van $f(x) = x^2$ en zijn hellinggrafiek.

Hetzelfde nog eens voor $y = x^3$ $(0 \leq x \leq 2)$ en $\Delta x = 0{,}1$.

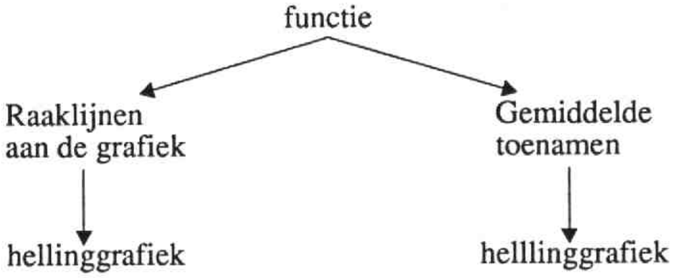


benadert grafiek
van $f(x) = x^3$



benadert grafiek
van $f\,'(x) = 3x^2$

Er zijn blijkbaar twee methoden om aan de hellinggrafiek van een gegeven functie te komen.

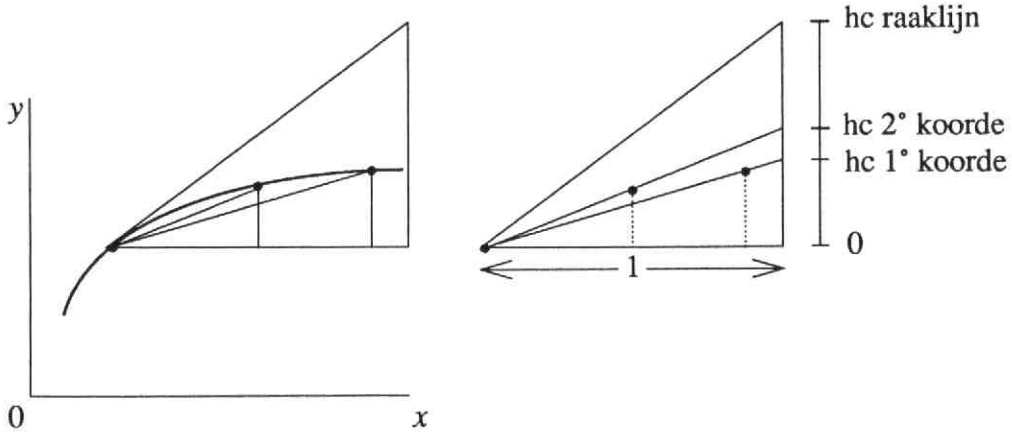


Het nadeel van de raaklijnmethode is: als je geen handig foefje kent om 'zuivere' raaklijnen te tekenen (zo'n manier als bij $y = x^2$, $y = x^3$, enz) is de methode erg onnauwkeurig en bewerkelijk.

Bewerkelijk is ook de methode met de gemiddelde toenamen, maar hierbij kan gemakkelijk de computer worden ingeschakeld!

Dat beide methoden hetzelfde resultaat opleveren heb je in de voorbeelden $y = x^2$ en $y = x^3$ kunnen zien.

Een algemene toelichting vind je hier onder:



Bij verfijning gaan de 'toenamendriehoekjes' steeds beter de *vorm* krijgen van de driehoek die bij de raaklijn getekend is. Om ze niet uit het gezicht te laten verdwijnen, kun je ze vergroten. Dat heeft immers geen invloed op de vorm. We kiezen de vergrotingen zo, dat elk driehoekje in het verhaal een basis van 1 heeft ($\Delta x = 1$). Dan gaan de (vergrote) toenamendriehoekjes over in het raaklijndriehoekje.
Nog eens in beeld gebracht:

De stand van de koorden (langs de schuine zijde van het zwarte driehoekje) komt steeds dichter bij de stand van de raaklijn.

3. Regels voor het differentiëren

Het bepalen van een hellingfunctie bij een gegeven functie, wordt *differentiëren* genoemd.
In dit hoofdstuk wordt behandeld hoe veeltermfuncties zoals $f(x) = x^3 - x^2 + 8x - 4$ of $f(x) = 0{,}1x^4 - 1{,}5x^2 + 1$ kunnen worden gedifferentieerd.
De bouwstenen van veeltermfuncties zijn de 'zuivere' machten: x^2, x^3, x^4, enz.
Van (zuivere) machtsfuncties weet je eigenlijk al hoe je de hellingfunctie (of afgeleide functie) kunt vinden. Daar komen we in paragraaf 1 op terug. In de paragrafen 2 en 3 worden enige 'combinatieregels' behandeld die je in staat stellen om alle voorkomende veeltermfuncties te differentiëren.

3.1. Het differentiëren van (zuivere) machtsfuncties

In hoofdstuk 1 staat het al:

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^2 \xrightarrow{\text{differentiëren}} f'(x) = 2x \\
f(x) &= x^3 \xrightarrow{\qquad\qquad} f'(x) = 3x^2 \\
f(x) &= x^4 \xrightarrow{\qquad\qquad} f'(x) = 4x^3 \\
f(x) &= x^5 \xrightarrow{\qquad\qquad} f'(x) = 5x^4
\end{aligned}$$

enz.

We zijn daar aan deze regel gekomen via een meetkundig trucje om raaklijnen te tekenen aan de grafieken van $y = x^2$, $y = x^3$, enz.
In hoofdstuk 2 heb je gezien dat een geheel andere route, namelijk via gemiddelde toenamen (of differentiequotiënten), althans voor $f(x) = x^2$ en $f(x) = x^3$ *ogenschijnlijk* hetzelfde resultaat geeft. Ogenschijnlijk, want we hebben ons beroepen op *plaatjes* voortgebracht door een computer.
We laten nu zien dat je deze formule ook door *berekening* kunt vinden.

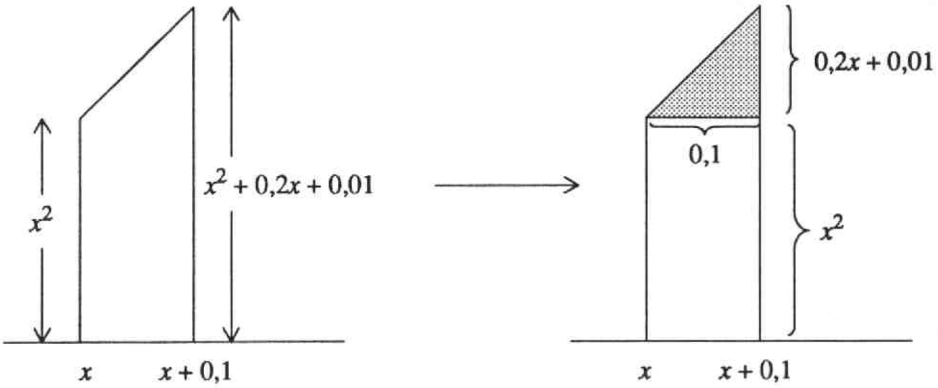
Neem $f(x) = x^2$.
Hoe maakt de computer een gemiddelde-toenamendiagram voor bijvoorbeeld $\Delta x = 0{,}1$?
Hij berekent $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ voor een heleboel opeenvolgende intervallen met lengte 0,1.
Zo'n (variabel)interval loopt van x tot $x + 0{,}1$.
De uitkomsten van de functie bij begin- en eindpunt van het intervalletje worden berekend door kwadrateren.
Het kwadraat van $x + 0{,}1$ is gelijk aan $x^2 + 0{,}2x + 0{,}01$ (zie tabel)*)

$\cdot$	x	0,1
x	x^2	$0{,}1x$
0,1	$0{,}1x$	0,01

---

*) In hoofdstuk 4 komen zulke berekeningen met tabellen uitvoerig aan de orde.

In een plaatje:



Er volgt nu (zie tweede plaatje): $\Delta y = 0{,}2x + 0{,}01$.
Om $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ te berekenen moet nog worden gedeeld door 0,1.

Dat geeft: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0,2x+0,01}{0,1} = 2x + 0{,}1$.

Je ziet: $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ verschilt 0,1 van $2x$.

Nemen we $\Delta x = 0{,}01$, dan wordt op dezelfde manier gevonden: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + 0{,}01$

Bij $\Delta x = 0{,}001$ komen we tot $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + 0{,}001$,

Hoe kleiner de intervalletjes, hoe dichter $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ bij $2x$.
Anders gezegd:
De hellingscoëfficiënt van de koorden bij intervalletjes van x tot $x + 0{,}1$; van x tot $x + 0{,}01$; van x tot $x + 0{,}001$; ... benaderen $2x$ steeds beter.
De hellingscoëfficiënt van de raaklijn moet dus wel gelijk zijn aan $2x$.
In tabel:

interval	hc koorde
van x tot $x + 0{,}1$	$2x + 0{,}1$
van x tot $x + 0{,}01$	$2x + 0{,}01$
van x tot $x + 0{,}001$	$2x + 0{,}001$
enz.	enz.
⇩	
'puntinterval'	hc raaklijn
x	$2x$

Dergelijke berekeningen kunnen ook worden uitgevoerd bij hogere machtsfuncties.

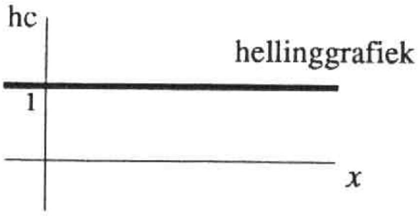
Zo komen we tot de algemene regel:

$$\begin{tikzcd}f(x) = x^n \arrow[d, "\boxed{\text{differentiëren}}"] \\ f'(x) = n \cdot x^{n-1}\end{tikzcd}$$

De hellingfunctie van een machtsfunctie (graad n) wordt gevonden door de graad te *verlagen met 1* en de zo verkregen lagere macht te *vermenigvuldigen* met de *oorspronkelijke graad*

Opgaven

1. Bovenstaande regel geldt voor $n = 2, 3, 4$, enz.
   We onderzoeken de geldigheid voor $n = 1$.
   - >a Hiernaast zie je de hellinggrafiek bij $f(x) = x$
     Verklaar die hellinggrafiek.
   - >b $f(x) = x$ is een machtsfunctie, immers voor x mag je ook schrijven x^1
     Laat nu zien dat de regel zonder bezwaar uitgebreid kan worden met het geval $n = 1$.



De hellingcoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek van $f(x) = x^3$ in het punt (5,125) kun je op twee manieren bepalen.

(1) *De exacte methode.*
Differentieer de functie en vul $x = 5$ in bij de zo verkregen formule van f'.

(2) *De benaderingsmethode.*
Neem een klein interval waarvan 5 een grenspunt is, bijvoorbeeld: van 5 tot 5,01. Bereken de gemiddelde toename van f op dit interval met je rekenmachientje.
Op een kleinigheid na heb je nu de hc van de raaklijn.

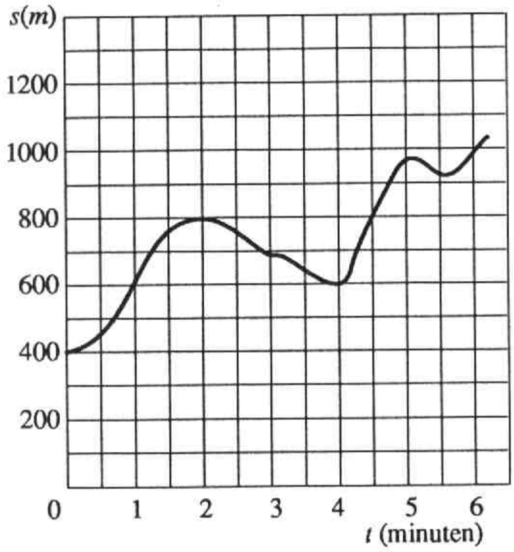
2. >a Pas beide methoden toe en vergelijk je antwoorden.
   - >b Wat zou je moeten doen bij methode (2) om een betere benadering van het exacte antwoord te krijgen?

3.2. Plus en maal een constante

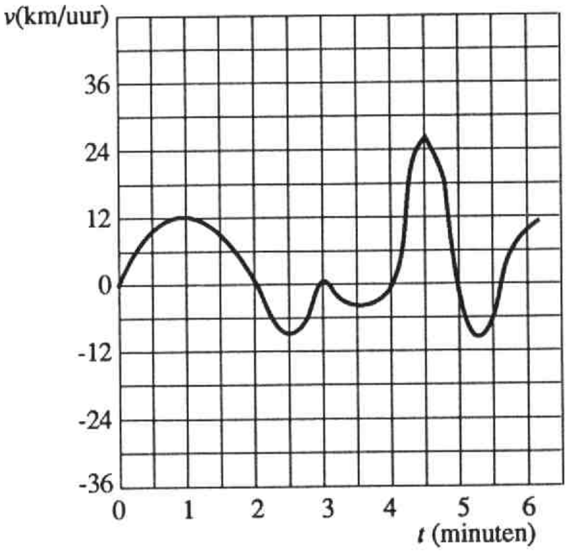
In deze paragraaf leer je wat er gebeurt met de hellingfunctie als bij een functie een constante wordt opgeteld of als een functie met een constante wordt vermenigvuldigd.
Aan de hand van enkele voorbeelden zul je de regels zelf ontdekken; die regels kun je vervolgens toepassen bij het differentiëren.

Een goederentrein van 100 m lengte is aan het rangeren. In fig. 1 zie je de tijd-plaats-grafiek, in fig. 2 de tijd-snelheid-grafiek van de locomotief.
Merk op dat de snelheid negatief gerekend wordt bij het achteruitrijden.

figuur 1



figuur 2



De tijd-snelheid-grafiek is juist de hellinggrafiek van de tijd-plaats-grafiek (zie ook hoofdstuk 1).
Anders gezegd: de hellingfunctie van s is v. Nog korter: $s' = v$.

Opgaven

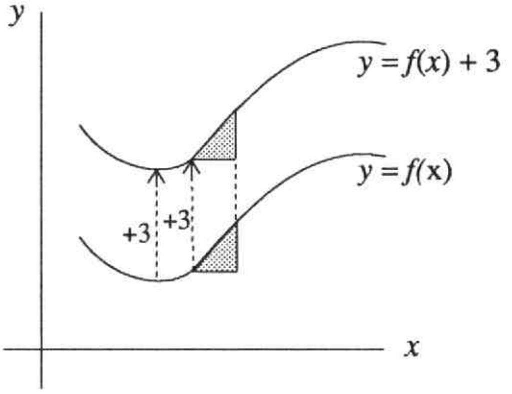
1. De grafieken hebben beide betrekking op de locomotief van de goederentrein.
   >a Hoe zou je in figuur 1 de t,s-grafiek van de laatste wagon tekenen?
   >b Waarom hebben de locomotief en de laatste wagon dezelfde t,v-grafiek?

2. >a Teken in één plaatje de parabolen $y = x^2$, $y = x^2 + 2$ en $y = x^2 - 4$.
   >b Teken bij elk van de drie de hellinggrafiek.

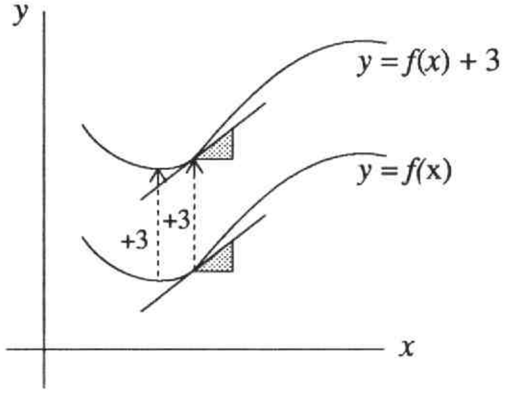
In de opgaven 1 en 2 was de vraag: wat gebeurt er met de hellingfunctie als je een *constante* bij een functie *optelt*. Antwoord: niets.
Algemeen geldt, als c een constante is:

$$\boxed{\text{De functies } f \text{ en } f + c \text{ hebben dezelfde hellingfunctie } f'}$$

Demonstratie van deze regel voor het geval $c = 3$.
Het idee hierbij is: bijzonderheden van de raaklijndriehoek kun je afleiden uit bijzonderheden van de toenamendriehoek.



Toenamendriehoek
schuift 3 omhoog
↓
$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ blijft hetzelfde



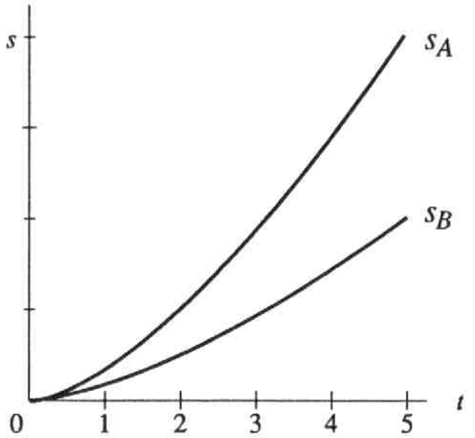
Raaklijndriehoek
schuift 3 omhoog
↓
hc blijft hetzelfde

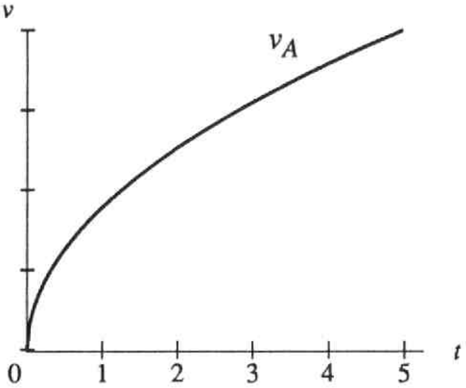
Opgaven

3. >a Teken in één plaatje de parabolen $y = x^2$, $y = 3x^2$ en $y = \frac{1}{4}x^2$.

   >b Bij deze parabolen zijn de drie hellinggrafieken verschillend.
   Zoals je weet is de hellinggrafiek van $y = x^2$ een rechte lijn. Dat geldt ook voor de beide andere parabolen.
   Teken de drie hellinggrafieken in één plaatje.

4. Twee tijd-plaats-grafieken van optrekkende auto's gedurende 5 seconden.





A heeft op *elk moment* precies 2 keer zo'n grote afstand afgelegd als *B*.

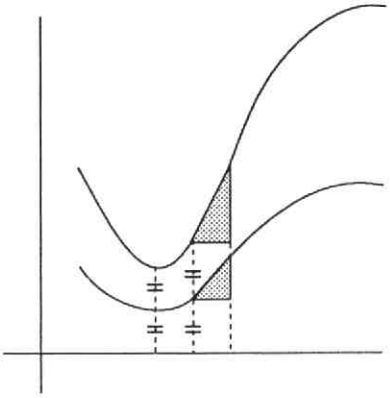
>a Hoe verhouden zich de snelheden van *A* en *B* op het tijdstip $t = 3$?
Hoe kun je dit in de grafiek duidelijk maken?

>b De snelheidsgrafiek van *A* is gegeven.
Hoe kun je daaruit handig de snelheidsgrafiek van *B* bepalen?

In de opgaven 3 en 4 ging het over het effect van de *vermenigvuldiging* van een functie met een *constante*.
De regel hiervoor is (c is weer een constante):

> de hellingfunctie van $c \cdot f$ is gelijk aan
> c maal de hellingfunctie van f (dus $c \cdot f'$)

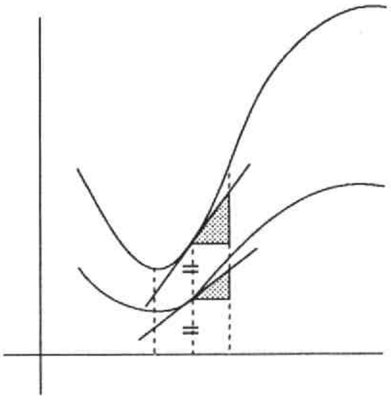
Demonstratie voor het geval $c = 2$:



Toenamendriehoek wordt opgerekt (2 × zo hoog)

↓

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ wordt 2 × zo groot



Raaklijndriehoek wordt opgerekt

↓

hc raaklijn wordt
2 × zo groot

Toepassingen van deze regels:

(1) $f(x) = x^3 + 25 \longrightarrow f'(x) = 3x^2$

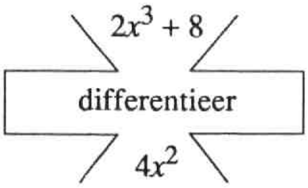
(2) $f(x) = 25 \cdot x^3 \longrightarrow f'(x) = 25 \cdot 3x^2 = 75x^2$

In geval (1) heeft de constante geen invloed op de helling; in geval (2) wel (de grafiek is als het ware '25 keer zo steil')

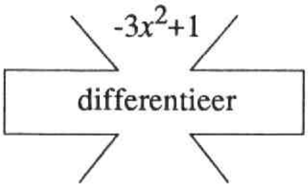
5. Geef de hellingfunctie van:

>a $f(x) = x^4 + 24$
>b $f(x) = x^5 + 3000$
>c $f(x) = 10x^2$
>d $f(x) = -5x^4$
>e $f(x) = -1 + x^3$
>f $f(x) = -10x + 6$
>g $f(x) = 1\frac{1}{2}x^4$
>h $f(x) = -\frac{2}{3}x^3$

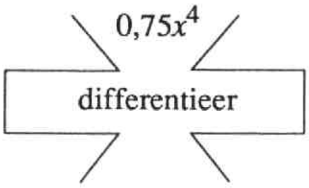
6. Voorbeeld:



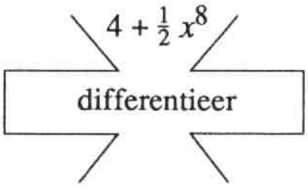
>a



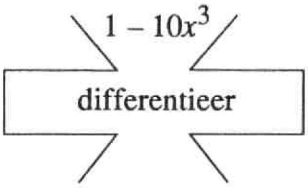
>b



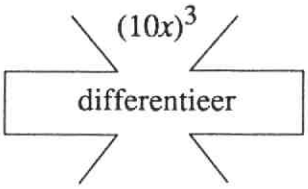
>c



>d

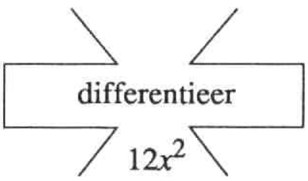


>e



En nu andersom:

>f



>g Waarom zijn er bij >f veel verschillende antwoorden mogelijk?

7. $f(x) = 0{,}1x^4 + 2$

>a Teken een grafiek van f voor $-2 \leq x \leq 2$

>b A is het punt op de grafiek met x-coördinaat 1.
Bereken de hc van de raaklijn aan de grafiek.

>c Teken de raaklijn in A in de grafiek; in welk punt snijdt die raaklijn de y-as?

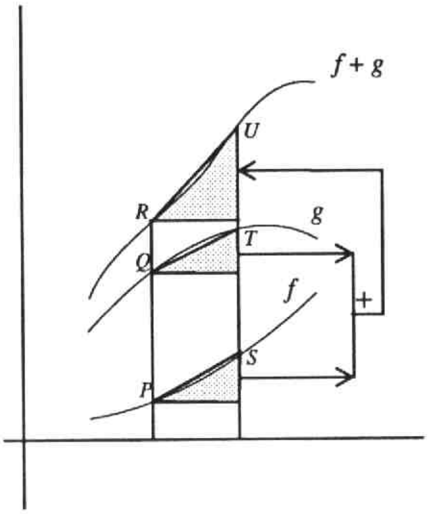
>d C en D zijn de punten op de grafiek resp. met x-coördinaat 0 en 2.
Bereken de hc van de koorde CD.

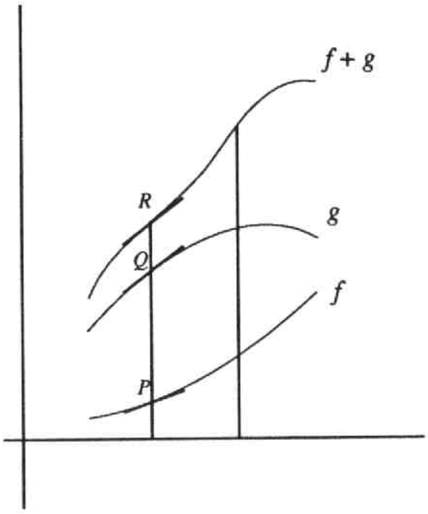
>e Er is een punt E op de grafiek tussen C en D, waarvoor de hc van de raaklijn precies gelijk is aan de hc van de koorde CD.
Bereken de x-coördinaat van E in 2 decimalen nauwkeurig.

3.3 Som- en verschilregel

De veeltermfunctie $f(x) = x^3 - 5x^2 + 4x$ bevat de bouwstenen x^3, $5x^2$ en $4x$. Elk van deze bouwstenen kan gedifferentieerd worden: $3x^2$, $10x$ en 4.
In deze paragraaf bekijken we hoe een functie, die bestaat uit de som (of het verschil) van een aantal van dergelijke bouwstenen, kan worden gedifferentieerd.

Eerst de som van twee functies:
We gebruiken weer de toenamendriehoekjes en de raaklijnendriehoekjes.





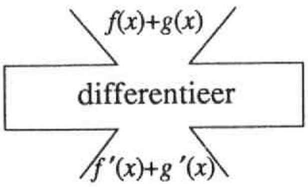
$$\begin{array}{rcccccc}
 & y_U & = & y_S & + & y_Q & \\
 & y_T & = & y_R & + & y_P & - \\
\hline
y_U - y_T & = & (y_S & - & y_R) & + & (y_Q - y_P) \\
 & \downarrow & & & & & \\
\text{hc } UT & = & \text{hc } SR & + & \text{hc } PQ & &
\end{array}$$

hc raaklijn in R=
hc raaklijn in Q+ hc raaklijn in P

Hieruit volgt de zogenaamde somregel voor het differentieren: de hellingfunctie die hoort bij de som van twee functies wordt gevonden door de som van de twee hellingfuncties te nemen.
Noemen we de twee functies f en g, dan geldt kortweg:

$$\boxed{\text{De hellingfunctie van } f + g \text{ is } f' + g'}$$

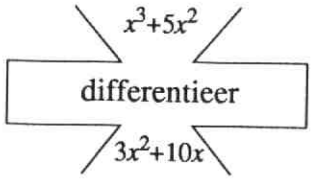
of wel



Toepassing van de regel:

$$f(x) = x^3 + 5x^2$$
$$\downarrow \quad \downarrow$$
$$f'(x) = 3x^2 + 10x$$

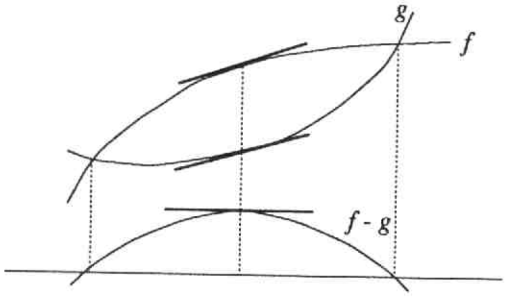
of



Voor het verschil van twee functies geldt iets dergelijks:

$$\boxed{\text{De hellingfunctie van } f - g \text{ is } f' - g'}$$

Illustratie:



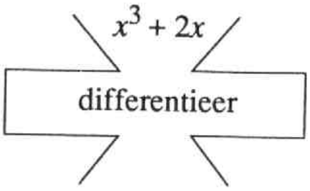
De regels gelden ook als er meer dan twee functies worden opgeteld(of afgetrokken). Voorbeeld:

$$f(x) = 3x^5 - 0{,}5x^3 + 2x - 40$$
$$\downarrow \quad \downarrow$$
$$f'(x) = 15x^4 - 1{,}5x^2 + 2$$

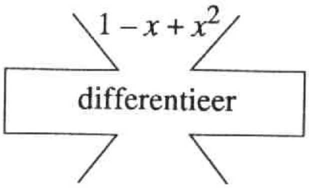
Opgave

1.

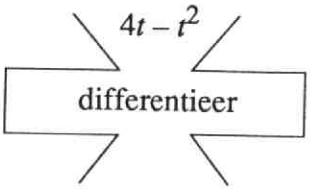
>a



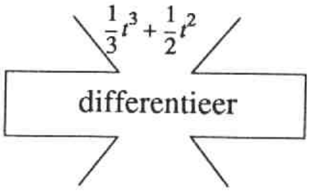
>d



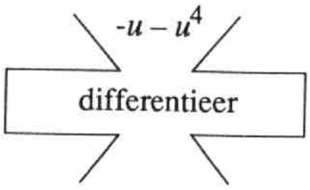
>b



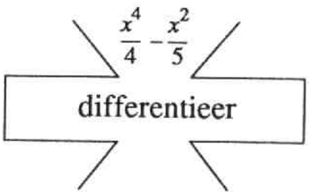
>e



>c



>f



2. Geef de hellingfunctie van:

>a $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2$

>b $f(x) = x^3 - 5x^2 + 4x$

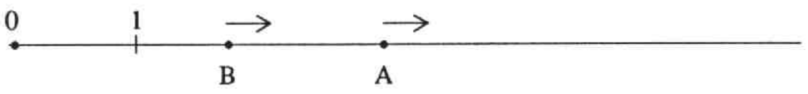
>c $f(x) = -7 + 2{,}5x - 0{,}25x^2$

>d $s(t) = t + t^2 + t^3 + t^4$

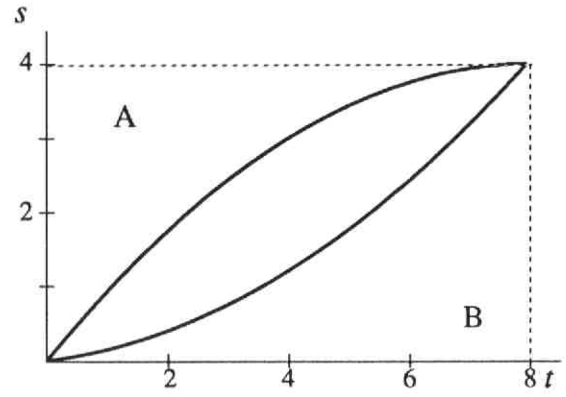
>e $s(t) = 0{,}2t^4 - 1{,}2t^2 + 2{,}2$

>f $s(t) = 1 - t + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{4}t^4$

3.



A en B beginnen hun rit van 8 minuten gelijktijdig in O. Hun 'reisbeschrijvingen' zijn hieronder in één figuur getekend.



De twee ritten worden beschreven door de formules:

$A(t) = -\frac{1}{16}t^2 + t$

$B(t) = \frac{1}{20}t^2 + \frac{1}{10}t$

met $A(t)$ en $B(t)$ in km en t in minuten.

>a Hoeveel km ligt A voor op B na 4 minuten?

>b Welke formules geven de snelheid van A en B op tijdstip t?

>c Laat zien dat A en B op $t = 4$ even snel gaan.

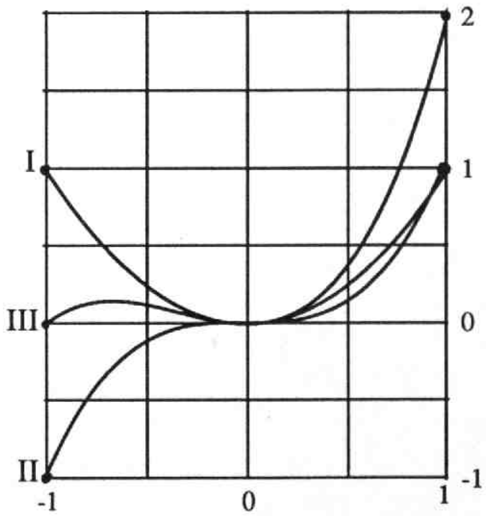
>d Na het tijdstip $t = 4$ loopt B in op A.
Hoe groot is het snelheidsverschil tussen A en B op $t = 6$ (in km/uur)?

4. In een plaatje zijn de grafieken getekend van: $y = x^2$ (I), $y = x^3$ (II) en $y = x^2 + x^3$ (III)

>a Controleer in een paar punten dat III de som is van I en II.

>b De grafiek III heeft twee horizontale raaklijnen, bij $x = 0$ en bij $x = -\frac{2}{3}$

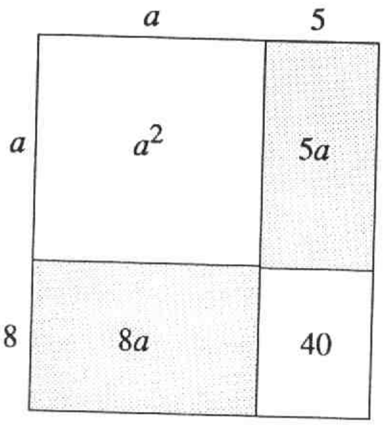
Hoe kun je dat 'hard maken' met behulp van de hellingfunctie?



4. Ontbinden in factoren

4.1. Veeltermen vermenigvuldigen

In de algebra-lessen (hoe lang is dat geleden?) heb je geleerd om *veeltermen* met elkaar te vermenigvuldigen.
Bijvoorbeeld: $(a+5)(a+8) = ?$
Misschien heb je wel eens gezien hoe je de uitkomst (ook weer een veelterm) kunt vinden met een plaatje:



$(a+5)(a+8) = a^2 + 5a + 8a + 40 = a^2 + 13a + 40.$

Toelichting:

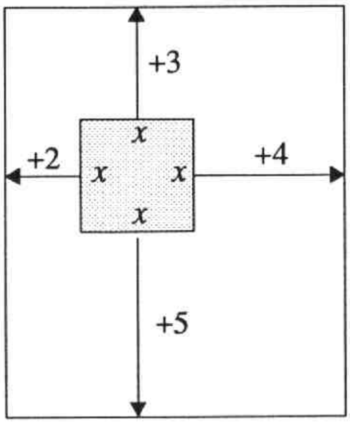
- a = lengte van een willekeurig lijnstuk
- maak een rechthoek van $a+5$ bij $a+8$
- *oppervlakte rechthoek* = lengte × breedte = $\boxed{(a+8) \cdot (a+5)}$
- verdeel de rechthoek in vier delen;
  de oppervlakten van de delen zijn: a^2, $5a$, $8a$, 40
- *oppervlakte rechthoek* = som van de delen = $\boxed{a^2 + 13a + 40}$

1. >a Maak met behulp van een rechthoek duidelijk dat:
$(x+1)(x+5) = x^2 + 6x + 5$
>b Ook: $(p+4)(p+4) = p^2 + 8p + 16$

2. Waarom kunnen de haakjes in:
oppervlakte rechthoek = $(a+8) \cdot (a+5)$
niet worden gemist?

3. >a Hoe groot is het verschil tussen $(x+3)(x+4)$ en $(x+2)(x+5)$?
>b En tussen $(a+4)(a+15)$ en $(a+6)(a+10)$?

4. Een vierkant met zijde x cm wordt in vier richtingen uitgebreid, resp. met 2, 3, 4 en 5 cm.



>a Druk de oppervlakte van de zo ontstane rechthoek uit in x.

>b Neem aan dat de oppervlakte van de rechthoek 104 cm^2 groter is dan de oppervlakte van het vierkant.
Bereken x in dat geval.

Het gebruik van tabellen bij vermenigvuldiging
Het 'oppervlakte-model' bij vermenigvuldiging van vormen zoals a+5 en a+8 heeft het nadeel dat daarbij het gebruik van negatieve getallen taboe is. Daarom zullen we voortaan gebruik maken van een vermenigvuldigingstabel die dat bezwaar niet heeft!

Voorbeeld 1:

.	a	5
a	a^2	$5a$
8	$8a$	40

$\longrightarrow$ $(a+5)(a+8) = a^2 + 13a + 40$

Het schema lijkt dus erg veel op het oppervlaktemodel, maar werkt ook voor negatieve getallen:

.	$5x$	-8
x	$5x^2$	$-8x$
3	$15x$	-24

$\longrightarrow$ $(5x\text{-}8)(x+3) = 5x^2 + 7x - 24$

5. Bereken met behulp van zo'n tabel:

>a $(p\text{-}4)(p+1)$

>b $(k+4)(k\text{-}1)$

>c $(a - 0{,}1)(a - 0{,}9)$

>d $(x\ \text{-}3)^2$

6. Bereken met behulp van een tabel:
   - >a $(5p-1)(p+5)$
   - >b $(1-3p)(-p+1)$
   - >c $(x+\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})$
   - >d $(2x-1)(2x+1)$

7.

.	x	$2y$	1
$3x$			
y			
-4			

$(x+2y+1)(3x+y-4) = ?$

8. Bereken met behulp van tabellen:
   - >a $(x^2+3x+9)(x-3)$
   - >b $(x-4)(x+1)(x+6)$
   - >c $(a^2+2a+2)(a^2-2a+2)$
   - >d $(k^2+3k-2)(k^2-k+6)$

9. Een ‘wiskundig’ gedicht:

> $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$
> je schoonheid min je ogen noem ik *a*
> de geest die je dartelt *b*
> je ogen
> *c*
> opgeteld en minstens een kwadraat gegeven
> $(a + b + c)^2$

K. Schippers (Uit de bundel: ‘Een leeuwerik boven een weiland’)

Terug naar de nuchtere werkelijkheid:

\> Laat met behulp van een tabel of rechthoek zien dat:

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2b$$

10. Hoe kun je $f(x) = (x-2)(x+5)$ differentiëren?
Antwoord: eerst $(x-2)(x+5)$ uitwerken, daarna somregel toepassen.
Dus: $f(x) = x^2 + 3x - 10 \rightarrow f'(x) = 2x + 3$
Differentiëer op deze wijze:
   - >a $f(x) = (2x+1)(4-x)$
   - >b $f(x) = (x-1)(x+1)(x^2+1)$
   - >c $f(x) = (5x-3)^2$
   - >d $f(x) = x \cdot (x-1)^2$
   - >e $f(x) = (x-1)^2(x^2+x+1)$
   - >f $f(x) = (x^2+2x-3)^2$

4.2. Som bekend, produkt bekend, getallen bekend?

In deze paragraaf onderbreken we het rekenen met veeltermen eventjes om te kijken naar de volgende twee problemen:

- als je van twee getallen de som weet, wat kan het produkt dan zijn?
- als je van twee getallen de som en het produkt weet, welke getallen zijn er dan in het spel?

Deze twee problemen zijn van groot belang voor het vervolg.
In paragraaf 3 pakken we de draad van de veeltermrekening weer op, en dan zal blijken hoe je handig gebruik kunt maken van wat er in paragraaf 2 is ontdekt.
Nu eerst een paar 'verkennende' opgaven.

1. Van twee getallen is bekend dat ze samen 100 zijn.
Hoe groot is hun produkt? Tja...

samen 100	produkt
1 en 99	99
2 en 98	196
10 en 90	900
75 en 25	1875
110 en -10	-1100

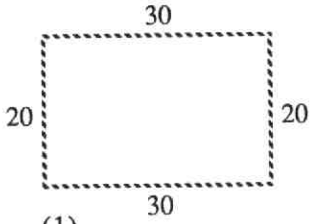
>a Behoort het produkt 1600 ook tot de mogelijkheden?
Zo ja, hoe moet je 100 dan splitsen?

>b Hoe moet je 100 zó splitsen dat het produkt 0 wordt?

>c En zó dat het produkt 2500 wordt?

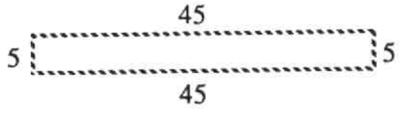
>d Enig idee of je, uitgaande van de som 100, het produkt 3000 kunt krijgen?

2. Met een touw van 100 m wordt een rechthoekig veldje uitgezet. Bijvoorbeeld:



(1)

of



(2)

De oppervlakte van het veldje (1) is 600 m^2, die van veldje (2) is 225 m^2.

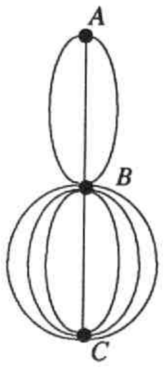
>a Bedenk een rechthoek waarvan de *oppervlakte* ergens tussen die 600 en 225 m^2 in ligt, en waarvan de *omtrek* ook weer 100 m is.

>b Maak met een omtrek van 100 m een rechthoek waarvan de oppervlakte kleiner is dan 50 m^2.

>c Kun je de oppervlakte ook kleiner krijgen dan 25 m^2.

>d Enig idee wat de *grootste* oppervlakte is van zo'n veldje dat je met 100 m touw kunt uitzetten?

3.



A en B zijn door 3 wegen verbonden, B en C door 7.

>a Hoeveel verschillende trajecten zijn er van A via B naar C?

>b In totaal zijn er 10 wegen gebruikt voor dit wegennet.
Hoe kun je met hetzelfde totaal aantal wegen meer trajecten krijgen van A via B naar C?

In de drie voorbeelden heb je misschien gezien dat, als de som van twee getallen bekend is, het produkt van die getallen gebonden is aan een *maximum*.
We lopen de drie opgaven nog even na:

In opgave 1:
Getallen samen 100; produkt hoogstens 50 × 50 = 2500.

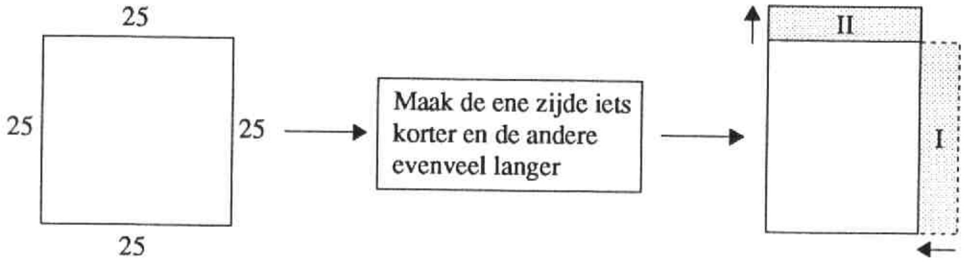
In opgave 2:
Lengte + breedte = 50; produkt (= oppervlakte) hoogstens 25 × 25 = 625.

In opgave 3:
Aantal wegen AB + aantal wegen BC = 10; de verdeling: '5 wegen AB en 5 wegen AC' geeft het maximale aantal trajecten ABC, namelijke 5 × 5 = 25.

Dit zijn allemaal voorbeelden van het principe:

> *'eerlijk verdelen' van de som levert het hoogst haalbare produkt op.*

Dit principe kun je het gemakkelijkst begrijpen aan de hand van opgave 2.



Als het vierkant wordt veranderd in een rechthoek, zodat de som van lengte en breedte (en dus ook de omtrek) gelijk blijft, gaat er één strook (I) af en komt er één strook (II) bij.
Echter: I > II (de stroken zijn even smal, maar I is langer).
Conclusie: het vierkant heeft meer oppervlakte dan de rechthoek.

Dit is een meetkundige verklaring voor bovenstaand principe van het eerlijk verdelen!

Het kan ook met algebra.
Van de ene zijde van het vierkant haal je k af en de andere maak je k groter.
Zo krijg je een rechthoek van $25 - k$ bij $25 + k$.
Vermenigvuldiging van $25 - k$ en $25 + k$ geeft $625 - k^2$.

·	25	$-k$
25	625	$-25k$
k	$25k$	$-k^2$

$625 - k^2$ is kleiner dan 625, tenzij $k = 0$.
Dus 625 is het hoogst haalbare produkt.

Het voordeel van de algebraïsche verklaring is dat je niet persé aan vierkanten of rechthoeken hoeft te denken en dat *negatieve* getallen ook zijn toegestaan.
Nog een voorbeeld:

- som = -6
- eerlijke verdeling van -6 geeft -3 en -3
- zo maar een verdeling geeft $-3 + k$ en $-3 - k$
- produkt bij 'zo maar een verdeling' is: $9 - k^2$ (maak maar een tabel)
- maximale produkt is 9 (= het produkt bij een eerlijke verdeling).

Opgave

4. >a De som van twee getallen is 38.
Hoe groot is het maximale produkt van die getallen?

>b De som van x en y is 3.
Hoe groot is het produkt xy maximaal?

>c $a + b = -12$.
Bereken het maximum van ab.

>d De som van twee getallen is S.
Het produkt is maximaal .....

We bekijken nu het probleem: 'Som en produkt van twee getallen zijn beide bekend, hoe kun je de getallen terugvinden?'
Voorbeeld: Som = 14
produkt = 45
Er zijn twee zoekmethoden.

(1) *begin bij de som:*

$1 + 13 = 14$	$1 \times 13 = 13$	
$2 + 12 = 14$	$2 \times 12 = 24$	
$3 + 11 = 14$	$3 \times 11 = 33$	
$4 + 10 = 14$	$4 \times 10 = 40$	
$5 + 9 = 14$	$5 \times 9 = 45$	KLAAR

(2) *begin bij het produkt:*

$$\begin{array}{ll} 1 \times 45 = 45 & 1 + 45 = 46 \\ 3 \times 15 = 45 & 3 + 15 = 18 \\ \multicolumn{2}{l}{\boxed{5 \times \;9 = 45 \qquad\qquad 5 + \;9 = 14}} \end{array} \quad \text{KLAAR}$$

Opgave

5. Een paar vragen over bovenstaande voorbeelden.
   >a Waarom hoef je in het voorbeeld som = 14, produkt = 45 helemaal geen rekening te houden met negatieve getallen?
   >b Bij methode (2) zijn minder stappen nodig dan bij (1). Dat is bijna altijd zo. Hoe is dat te verklaren?

6. Van twee getallen zijn steeds som en produkt gegeven.
   Bepaal die getallen.
   >a Som = 12, produkt = 32
   >b Som = -8, produkt = 15
   >c Som = 1, produkt = -12
   >d Som = -4, produkt = -21
   >e Som = 18, produkt = 81
   >f Som = -18, produkt = 81
   >g Som = 0, produkt = -4
   >h Som = 4, produkt = 0

7. Som = 12, produkt = 40.
   Waarom kan dat niet?
   Aanwijzing: denk aan het principe van eerlijk verdelen.

Als de getallen groot zijn of als de uitkomsten niet zo mooi (bijvoorbeeld niet geheel) zijn, is de hier behandelde 'zoekmethode' niet handig.
Er is gelukkig ook een methode die 'recht op het doel' afgaat.
Neem als voorbeeld:
Som = 100, produkt = 1824.

Om te beginnen merken we op dat bij de som 100 het maximaal bereikbare produkt gelijk is aan $50 \times 50 = 2500$.
Omdat 1824 daar onder zit, is de verdeling die we zoeken blijkbaar 'niet eerlijk', dat wil zeggen:
het ene getal zit wat boven de 50, het andere evenveel er onder.

$$\begin{array}{lll} \text{Ofwel:} & \text{ene getal} & = 50 + k \\ & \text{andere getal} & = 50 - k \\ \cline{2-3} & \text{produkt} & = 2500 - k^2 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{Produkt moet zijn } 1824 \rightarrow 2500 - k^2 &= 1824 \\ k^2 &= 676 \\ k &= \sqrt{676} = 26 \end{aligned}$$

(k is positief verondersteld, zodat je $k = -26$ hier buiten beschouwing kunt laten)

Dus: ene getal $= 50 + 26 = 76$
andere getal $= 50 - 26 = 24$

Controle: $76 + 24 = 100$
$76 \times 24 = 1824$.

Opgave

8. Bereken op deze wijze de twee getallen, in de gevallen:

>a Som = 30, produkt = 221
>b Som = 48, produkt = -265
>c Som = 1000, produkt = 222111
>d Som = 90, produkt = 2025
>e Som = -9, produkt = -220
>f Som = 4, produkt = $3\frac{3}{4}$
>g Som = $4\frac{1}{2}$, produkt = $4\frac{1}{2}$
>h Som = 5, produkt = $6\frac{1}{4}$

Nu een geval waarbij de uitkomsten niet mooi uitkomen.
Som = 10, produkt = 23.
Omdat $4 \times 6 = 24$ en $3 \times 7 = 21$ weet je dat het ene gezochte getal tussen 3 en 4 en het andere tussen 7 en 6 ligt.
Het probeersel: $3\frac{1}{2}$ en $6\frac{1}{2}$ levert als produkt 22,75 dus weer iets te groot. Zo kun je met proberen steeds betere benaderingen vinden (bijvoorbeeld: $3{,}25 \times 6{,}75 = 21{,}94$ dus 3,25 en 6,75 komen al weer een stuk dichter in de buurt).
De methode: ene getal $= 5 + k$
andere getal $= 5 - k$
levert snel resultaat.
$(5+k) \cdot (5-k) = 25 - k^2$ moet gelijk zijn aan 22, dus $k^2 = 3$, dus $k = \sqrt{3} = 1{,}73205...$

Benaderende oplossingen zijn: 6,73205 en 3,26795.
Het produkt van 6,73205 en 3,26795 is niet precies 22, maar komt er heel dicht bij.

Exacte oplossingen zijn: $5 + \sqrt{3}$ en $5 - \sqrt{3}$.

Opgave

9. Geef de exacte en de benaderende oplossingen (in 4 decimalen) in de gevallen:

>a Som = 100, produkt = 1850
>b Som = 2, produkt = -1

10. Van een rechthoek is de oppervlakte 10 m^2 en de omtrek 20 m.

> Hoe lang zijn de zijden? (Geef je antwoord in 2 decimalen nauwkeurig.)

4.3. Ontbinding in factoren van tweedegraadsveeltermen

Bij toepassingen van de differentiaalrekening kom je problemen tegen als:

- voor welke x geldt: $x^3 - x^2 - 2x = 0$.
- voor welke x geldt: $x^2 + 15x + 54 < 0$.

Om zulke problemen op te kunnen lossen is het handig om te weten van welke factoren een veelterm als $x^3 - x^2 - 2x$ of $x^2 + 15x + 54$ het produkt is.
In deze paragraaf specialiseren we ons in tweedegraadsveeltermen.

Voorbeeld: $x^2 + 15x + 54 = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{vorm} \\ \text{met } x}}{(\ldots\ldots\ldots\ldots)} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{vorm} \\ \text{met } x}}{(\ldots\ldots\ldots\ldots)}$

Omdat $x^2 + 15x + 54$ begint met x^2, lijkt het gokje dat de beide factoren elk met x beginnen nog niet zo gek:

$x^2 + 15x + 54 = (\,x +$ ▨ $) \cdot (\,x +$ ◍ $)$

Of in een tabel:

·	x	▨
x	x^2	▨x
◍	◍x	54

Uit de tabel volgt meteen:

▨ · ◍ = 54

▨ + ◍ = 15

Kortom, hier ontstaat een vertrouwd probleem.
De oplossing is: ▨ = 9, ◍ = 6 (of, maar dat maakt niets uit: ▨ = 6, ◍ = 9)

Dus: $x^2 + 15x + 54 = (x+9)(x+6)$

We zeggen: $x^2 + 15x + 54$ is *ontbonden in* de factoren $x+9$ en $x+6$. Die factoren zijn van de eerste graad in x (ofwel lineair).

Opgaven

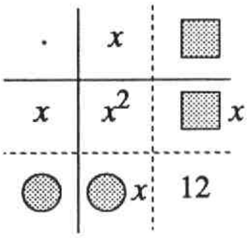
1. Als je $a^2 + 11a + 24$ wilt ontbinden in twee lineaire factoren, dus $a^2 + 11a + 24 = (a + \ldots)(a + \ldots)$, is het zaak om twee getallen te vinden waarvan de som 11 is en het produkt 24.

   >a Verklaar dat.

   >b Vind die getallen.

   >c Geef de ontbinding van $a^2 + 11a + 24$.

2.



Vul in:
$x^2 + 7x + 12 = (x + ...)(x + ...)$
$x^2 + 8x + 12 = (x + ...)(x + ...)$
$x^2 + 13x + 12 = (x + ...)(x + ...)$

Het ontbinden in factoren van een tweedegraadsveelterm, leidt tot het probleem: *'Som bekend, produkt bekend, wat zijn de getallen?'*
Als die getallen niet al te groot zijn, kun je er vaak met een 'zoekmethode' snel uitkomen. De methode 'die altijd werkt' (ene getal = halve som + k, andere getal = halve som – k) geeft soms veel rekenwerk, maar is vaak onvermijdelijk.
Verder hangt de keuze van de methode ook af van je persoonlijke voorkeur.

Voorbeeld: ontbind $x^2 + 3x - 4$

methode 1	methode 2
Som = 3, produkt = -4 Omdat het produkt negatief is, zijn de getallen + en –	Som = 3, produkt = -4
Proberen:	$\left.\begin{array}{l}1^e \text{ getal} = 1{,}5 + k \\ 2^e \text{ getal} = 1{,}5 - k\end{array}\right\} \rightarrow \text{produkt} = 2{,}25 - k^2$
$1 \times (-4) = -4 \quad 1 + (-4) = -3$	
$2 \times (-2) = -4 \quad 2 + (-2) = 0$	Produkt = -4 $\rightarrow 2{,}25 - k^2 = -4 \rightarrow k^2 = 6{,}25$
$\boxed{4 \times (-1) = -4 \quad 4 + (-1) = 3}$	Kies: $k = \sqrt{6,25} = 2{,}5$ *)
	dan: 1^e getal = $1{,}5 + 2{,}5 = 4$ 2^e getal = $1{,}5 - 2{,}5 = -1$
Dus: $x^2 + 3x - 4 = (x + 4)(x - 1)$	Dus: $x^2 + 3x - 4 = (x + 4)(x - 1)$

Nu volgen enige oefeningen in het ontbinden van 2^e graadsveeltermen in lineaire factoren. Nogmaals, er is niets tegen om de zoekmethode te gebruiken. In die gevallen waarbij het zoeken niet lukt of te lang gaat duren, is de tweede methode de aangewezen aanpak.

3. Ontbind:

>a $x^2 + 11x + 18$
>b $x^2 + 12x + 36$
>c $x^2 + 21x + 20$
>d $x^2 - 32x + 60$
>e $a^2 + 2a - 15$
>f $a^2 - 2a - 35$
>g $a^2 - 35a + 150$
>h $a^2 + 2a - 1295$

---

*) $k^2 = 6{,}25$ heeft behalve 2,5 ook de oplossing $k = -2{,}5$.
Welke van de twee je hier kiest, beïnvloedt alleen de volgorde van de getallen!
($k = -2{,}5$ geeft: 1^e getal = -1; 2^e getal = 4)

4. Ontbind:

>a $x^2 + 50x + 600$

>b $y^2 + 50y + 609$

>c $u^2 - 76u + 1444$

>d $t^2 + 1000t + 222111$

>e $a^2 + a - 72$

>f $b^2 - 100b + 99$

>g $c^2 - c - 2$

>h $d^2 + d + 0{,}25$

5. Bij $x^2 + x + 2$ is een ontbinding in lineaire factoren onmogelijk.

> \> Waarom kun je daar absoluut zeker van zijn?

6. Ontbind:

>a $x^2 + x + 0{,}24$

>b $x^2 - 1{,}2x + 0{,}35$

>c $x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{18}$

>d $x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$

7. >a Laat met behulp van methode 2 zien dat de ontbinding van $x^2 + 2x - 2$ is: $(x + 1 + \sqrt{3})(x + 1 - \sqrt{3})$

>b Geef benaderingen van $1 + \sqrt{3}$ en $1 - \sqrt{3}$ in 6 decimalen nauwkeurig en controleer de ontbinding door $x + 1 + \sqrt{3}$ te vermenigvuldigen met $x + 1 - \sqrt{3}$.

Een 2^e graadsveelterm hoeft niet persé *drie* termen te bevatten; twee kan ook, bijvoorbeeld:

$$x^2 - 49 \; ; \; y^2 + 8y$$

Je kan in die gevallen toch het systeem van drietermen gebruiken als je bedenkt:

$$\begin{aligned} x^2 - 49 &= \; x^2 + 0x - 49 \\ y^2 + 8y &= \; y^2 + 8y + 0 \end{aligned}$$

In het eerse geval gaat het dus om:
Som 0, produkt = -49
De gezochte getallen zijn nu: 7 en -7
En dus: $x^2 - 49 = (x + 7)(x - 7)$

In het tweede geval is er sprake van:
Som = 8, produkt = 0
De gezochte getallen zijn 0 en 8.
Dus: $y^2 + 8y = (y + 0)(y + 8) = y\,(y + 8)$
In dit laatste geval kun je de ontbinding ook meteen zien, als je bedenkt:

$$y^2 + 8y = y \cdot y + y \cdot 8 = y(y + 8)$$

We zeggen : de factor y is 'buiten haakjes gebracht'.

8. Ontbind (indien mogelijk):

>a $x^2 + 10x$

>b $p^2 - 12p$

>c $t^2 + t$

>d $y^2 - 64$

>e $a^2 - 1$

>f $m^2 + 1$

Tenslotte het geval, waarbij de *coëfficiënt* van de 2^e graadsterm niet gelijk is aan 1, bijvoorbeeld: $3x^2 + 2x - 8$.

Oplossing:
- breng 3 buiten haakjes: $3(x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{8}{3})$
- behandel $x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{8}{3}$ volgens een van de twee bekende methoden;
  dat geeft: $(x + 2)(x - \frac{4}{3})$
- de ontbinding is nu: $3x^2 + 2x - 8 = 3(x + 2)(x - \frac{4}{3})$

9. Controleer de ontbinding van $x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{8}{3}$

10. Ontbind:

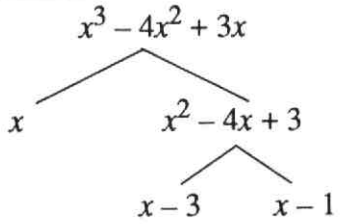
>a $4x^2 + 2x - 2$
>b $3y^2 - 8y - 3$
>c $\frac{1}{2}u^2 - u - 1\frac{1}{2}$
>d $4a^2 - 9$
>e $5t^2 - 2t$
>f $\frac{1}{3}m^2 - 75$

4.4. Ontbinding in factoren van veeltermen van hogere graad

In principe kun je nu elke 2^e graadsveelterm ontbinden in factoren, of vaststellen dat er geen ontbinding bestaat!
Voor dit laatste kun je gebruik maken van de regel: als de som van twee getallen bekend is, dan geeft een eerlijke verdeling van die som het hoogst haalbare produkt.
Voorbeeld: $x^2 + 8x + 17$ is niet ontbindbaar
want: eerlijke verdeling van 8 geeft $4 + 4$;
$4 \times 4 = 16$, dus een produkt 17 is onmogelijk!

Voor veeltermen van de graad 3 (of hoger) is het vinden van een ontbinding vaak heel moeilijk. We leren daarvoor geen sluitend systeem zoals bij 2^e graadsveeltermen. (Voor veeltermen van de graad hoger dan 4 bestaat er zelfs geen sluitend systeem.) Je krijgt alleen te maken met gevallen, waarbij je je kunt redden door het probleem terug te brengen tot een veelterm van de graad 2.
Voorbeeld: $x^3 - 4x^2 + 3x$
Omdat elke term hier deelbaar is door x, kan x buiten haakjes worden gebracht; dat geeft: $x(x^2 - 4x + 3)$
$x^2 - 4x + 3$ laat zich volgens de regels ontbinden in $(x - 3)(x - 1)$.
Zo krijgen we: $x^3 - 4x^2 + 3x = x(x - 3)(x - 1)$

Schema:



Opgave

1. Ontbind in factoren, door eerst x (of een andere variabele) buiten haakjes te brengen. Denk er aan dat het kan gebeuren dat de 2^e^ graadsveelterm die je dan krijgt, niet ontbindbaar is.

>a $x^3 - x^2 - 6x$
>b $a^3 - 9a$
>c $t^3 + t$
>d $p^3 + 64p^2 + 768p$
>e $2y^3 + y^2 - y$
>f $x^3 + x^2 + x$
>g $m^3 - 14m^2 + 49m$
>h $a^3 - 0{,}45a^2 + 0{,}05a$

Bij 4^{e} graadsveeltermen behandelen we twee mogelijke gevallen.
Voorbeeld 1:

$$x^4 + 5x^3 - 6x^2$$

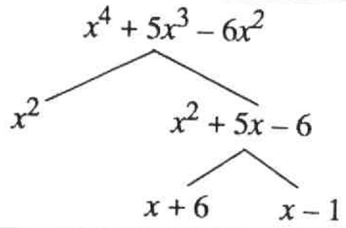
Iedere term is deelbaar door x^2, dus x^2 kan buiten haakjes:

$$x^2(x^2 + 5x - 6)$$

Vervolgens kan $x^2 + 5x - 6$ worden ontbonden in $(x + 6)(x - 1)$

Dus: $$x^4 + 5x^3 - 6x^2 = x^2(x + 6)(x - 1)$$

Schema:



Voorbeeld 2:

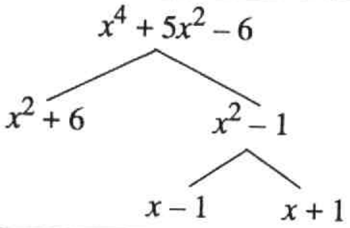
$$x^4 + 5x^2 - 6$$

Omdat er alleen termen van *even* graad staan, kun je je hier redden met een *substitutie*, namelijk: vervang x^2 door t en dus x^4 door t^2

Er komt dan: $t^2 + 5t - 6$ en dat is $(t + 6)(t - 1)$

Vervang nu weer t door x^2 en er komt: $(x^2 + 6)(x^2 - 1)$
$x^2 + 6$ kan niet verder worden ontbonden, $x^2 - 1$ wèl: $(x - 1)(x + 1)$
Zo komt er tenslotte: $x^4 + 5x^2 - 6 = (x^2 + 6)(x - 1)(x + 1)$

Schema:



2. Ontbind:

>a $x^4 - 13x^3 + 36x^2$
>b $y^4 - 13y^2 + 36$
>c $a^4 - 16a^2$
>d $t^4 + 10t^3$
>e $x^4 + 5x^3 + 4x^2$
>f $x^4 + 4x^2$
>g $x^4 + 5x^3$
>h $x^4 + 5x^2 + 4$

3. Ontbind

>a $p^3 + 6p^2$
>b $x^5 - x^4 - 2x^3$
>c $t^4 - 16$
>d $y^5 - 16y$

Tenslotte nog een handige vuistregel.

Bij het ontbinden van een
2^e^ graadsveelterm kun je hoogstens 2 lineaire factoren verwachten
3^e^ graadsveelterm kun je hoogstens 3 lineaire factoren verwachten
4^e^ graadsveelterm kun je hoogstens 4 lineaire factoren verwachten
enz.

4. >a Verklaard de logica van die regel.

>b Ga nog even na, welke 4^e^ graadsveelterm in de opgaven 2 en 3 vier (verschillende) lineaire factoren bevatten.

5.

.	x^2	$3x$	2
x^2	x^4	$3x^3$	
-4x			
-21			

>a Vul de tabel verder in.

>b De uitkomst van $(x^2 + 3x + 2)(x^2 - 4x - 21)$ is een 4^e^ graadsveelterm. Welke?

>c Die 4^e^ graadsveelterm kan worden ontbonden in vier factoren. Geef die ontbinding.

5. Vergelijkingen en ongelijkheden

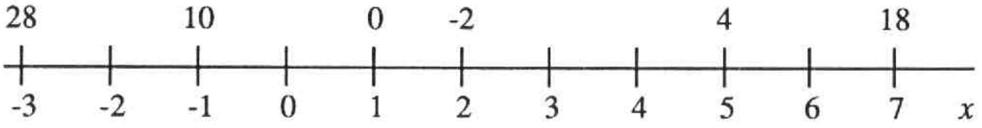
Om greep te krijgen op het verloop van een veranderingsproces is het nuttig om te weten in welke gebieden er sprake is van stijging (toename) of daling (afname). Daarbij kan de hellingfunctie alle nodige informatie geven. Omdat het daarbij lang niet altijd gaat om de 'waarde' van de hellingscëfficiënt, maar meer om de 'toestand' (positief, nul of negatief) kan veelal worden volstaan met een zogenaamd *tekenverloop*.
Wat dat is en hoe je dat kunt maken, daarover gaat dit hoofdstuk.

5.1. Tekenverloop van ontbonden veeltermen

Bekijk het produkt $(x - 1) \cdot (x - 4)$.
Als je x laat variëren, varieert de uitkomst van dit produkt.
Er zijn allerlei manieren om die variatie van uitkomsten zichtbaar te maken. De meest bekende manier is het tekenen van een grafiek.
In deze paragraaf beperken we ons tot het gebruik van de getallenlijn.

Opgave

1. Dit plaatje hoort bij $(x - 1) \cdot (x - 4)$.



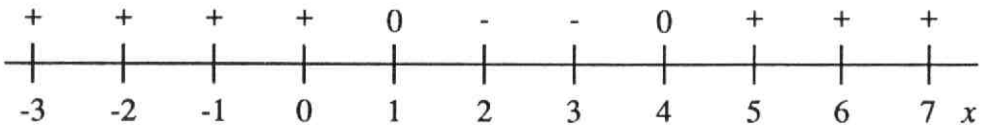
Bij de x-waarde -3, -1, 1, 3, 5, 7 zijn de waarden van het produkt $(x -1) \cdot (x - 4)$ aan de bovenkant van de getallenlijn vermeld.

>a Controleer die waarden.

>b Neem het plaatje over en vul ook de waarden in bij $x = -2, 0, 3, 4, 6$.

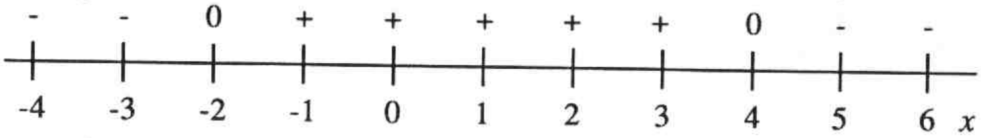
>c Op grond van de uitkomsten zou je kunnen vermoeden dat $(x - 1) \cdot (x - 4)$ alleen een negatieve uitkomst heeft als x tussen 1 en 4 ligt. Daarbij moet je bedenken dat x niet geheel hoeft te zijn.
Hoe kun je *beredeneren* dat $(x - 1) \cdot (x - 4)$ inderdaad negatief moet zijn, als x tussen 1 en 4 ligt?

Als je alleen geïnteresseerd bent in het al of niet positief zijn van de uitkomst, geeft een getallenlijn met 'plussen' en 'minnen' voldoende informatie.
In het geval van $(x - 1) \cdot (x - 4)$.



Dit plaatje laat het *tekenverloop* van $(x - 1) (x - 4)$ zien.

2. Bekijk het produkt $(4 - x) \cdot (x + 2)$
   Plaatje:

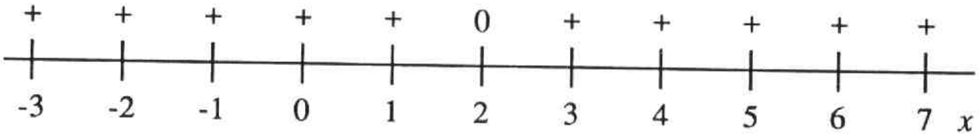


>a Controleer het plaatje.

>b Leg uit waarom je bij uitbreiding naar rechts van het plaatje alleen nog maar 'minnen' kunt verwachten.

>c Hoe zit dat bij uitbreiding naar links?

3. Bekijk het produkt $(x - 2) \cdot (2x - 5)$.
   Plaatje:



>a Controleer het plaatje.

>b Op grond van dit plaatje zou je kunnen denken dat het produkt $(x - 2) \cdot (2x - 5)$ geen negatieve uitkomst kan hebben. Dat is echter niet zo. Laat zien dat $(x - 2) \cdot (2x - 5)$ wel degelijk negatief kan zijn.

> Het is gevaarlijk om alleen te kijken naar de 'toestand' van het produkt voor *gehele* waarden van x.

Tussen 2 en 3 blijkt $(x - 2)(2x - 5)$ soms positief, soms negatief te zijn. De grens ligt in dit geval netjes in het midden, bij $2\frac{1}{2}$. Dat heeft te maken met het feit dat je voor $x = 2\frac{1}{2}$ de uitkomst nul vindt. Blijkbaar spelen de nullen een belangrijke rol bij het tekenverloop. Die nullen kun je bij een 'produktvorm' snel vinden. Immers: als één factor van het produkt nul is, dan weet je zeker dat er nul uit moet komen.

Bijvoorbeeld:

$(x - 4)(x + 1)(2x - 1)$

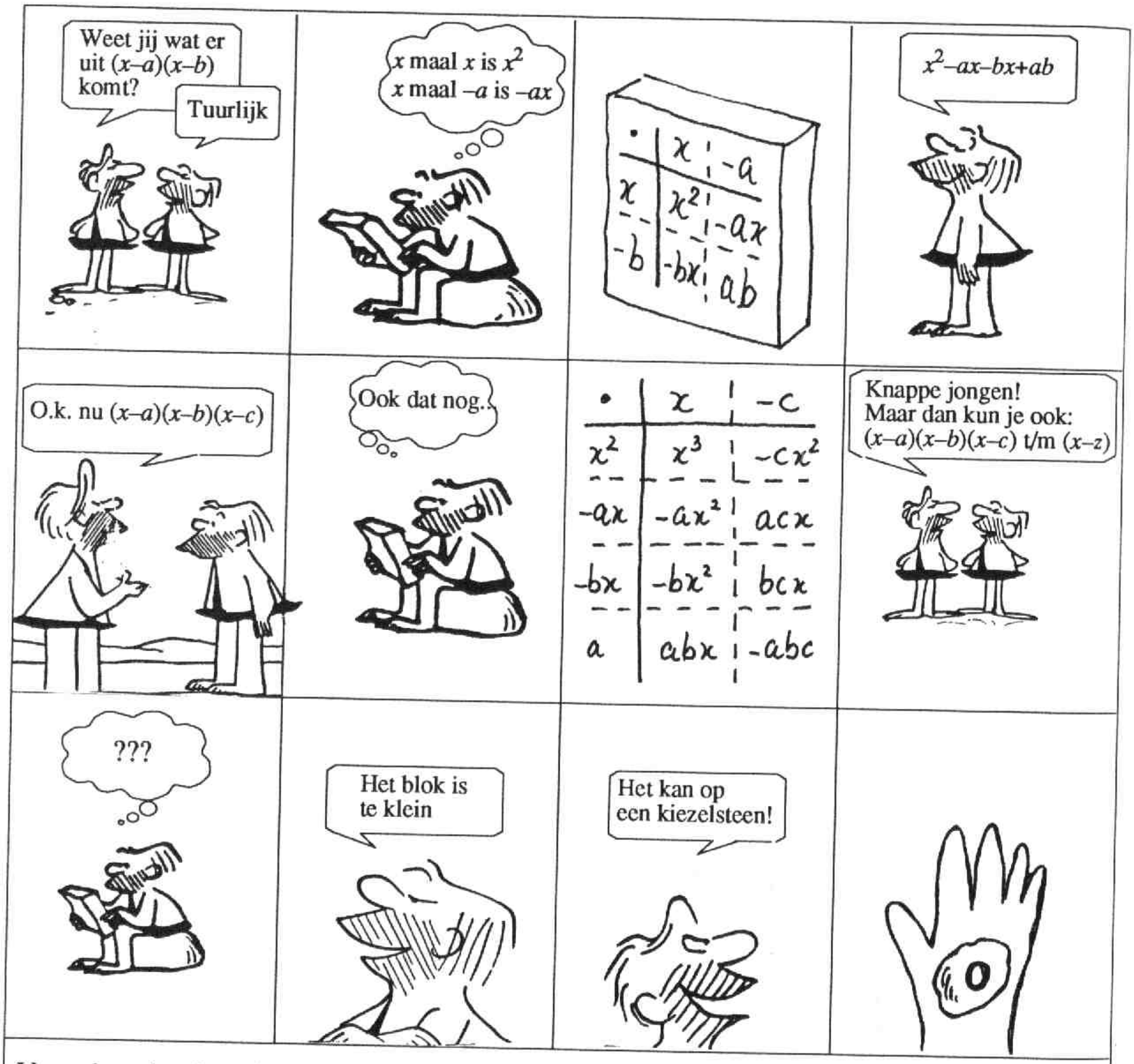
Vul maar in: $x = -1$ geeft: $(-1-4)(\underset{\substack{\uparrow\\0}}{-1+1})(-2-1) = 0$

$x = 0{,}5$ geeft: $(0{,}5-4)(0{,}5+1)(\underset{\substack{\uparrow\\0}}{1-1}) = 0$

$x = 4$ geeft: $(\underset{\substack{\uparrow\\0}}{4-4})(4+1)(8-1) = 0$

Opgave

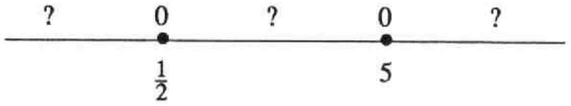
4. Waar zitten de nullen op de getallenlijn bij:
   >a $(x + 2)(x - 3)(x - 2\frac{1}{2})$?
   >b $x(x + 1)(x - 2)(x + 3)(x - 4)$?
   >c $(2x - 1)(3x - 1)$?



Voor de oplossing zie bladzijde 76

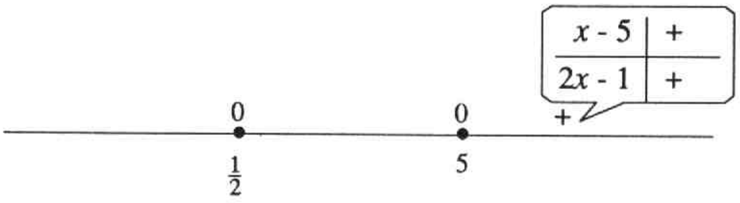
Hoe schets je snel een tekenverloop?
Voorbeeld: $(x - 5)(2x - 1)$
Werkwijze: Allereerst merk je op dat de nullen zitten bij $x = 5$ en bij $x = \frac{1}{2}$.

Dus:



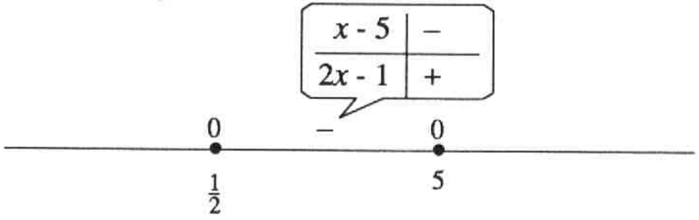
Je maakt nu als het ware een reisje langs de getallenlijn van rechts naar links. Je komt dan achtereenvolgens in drie 'gebieden':
het gebied rechts van 5, het gebied tussen $\frac{1}{2}$ en 5, het gebied links van $\frac{1}{2}$.

(1) Gebied rechts van 5.



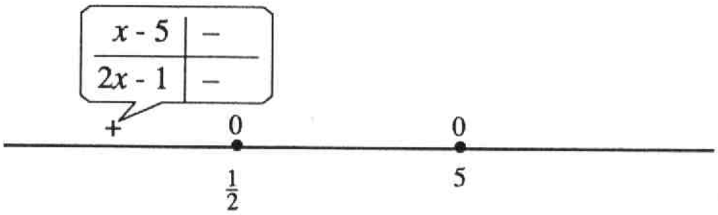
$x - 5$ en $2x - 1$ hebben hier positieve uitkomsten, het produkt is positief.

(2) Gebied tussen $\frac{1}{2}$ en 5.



Als 5 wordt gepasseerd verandert (de uitkomst van) $x - 5$ van teken en $2x - 1$ niet.
Het produkt telt nu één negatieve factor en één positieve factor en is dan negatief.

(3) Gebied links van $\frac{1}{2}$.



Als $\frac{1}{2}$ wordt gepasseerd verandert (de uitkomst van) $2x - 1$ van teken en $x - 5$ niet.
Het produkt telt nu twee negatieve factoren en is positief.
Het tekenverloop is dus:

5. Schets het tekenverloop (nullen, plussen en minnen) van:

>a $(x-2)(x-3)$
>b $(x-2)(x+3)$
>c $(2-x)(x-8)$
>d $(3x-5)(x-1)$
>e $(4x+8)(x+1)$
>f $x(x-6)$
>g $(x-6)(x-6)$
>h $(2x-1)^2$
>i $(x-4)(x-1)(x+2)$
>j $(x-3)^2(2x+3)$

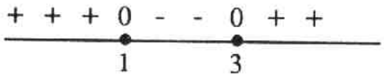
6. Schrijf na de 10 produkten van opgave 5 achtereenvolgens:

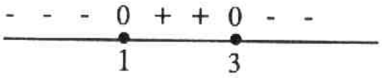
>a >0
>b <0
>c >0
>d $=0$
>e <0
>f ≤ 0
>g >0
>h <0
>i ≥ 0
>j >0

En beantwoord de zo ontstane vraag.
Voorbeeld:
>a wordt: $(x-2)(x-3) > 0$; uit het tekenverloop kun je aflezen dat dit geldt voor $x > 3$ en ook voor $x < 2$

7. Vier produkten, twee tekenverlopen.
Welk tekenverloop hoort bij welk produkt?

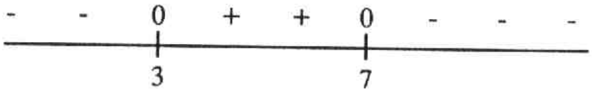
>a $(x - 1)(x - 3)$
>b $(x - 1)(3 - x)$
>c $(1 - x)(x - 3)$
>d $(1 - x)(3 - x)$

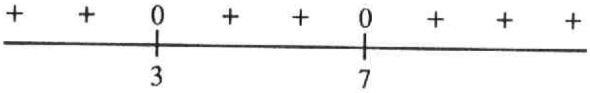
(1)


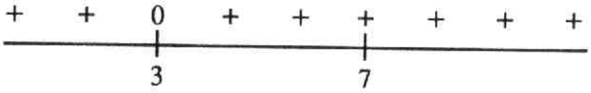
(2)


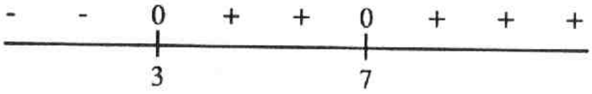
8. Bedenk bij elk tekenverloop een produkt dat erbij past:

>a


>b


>c


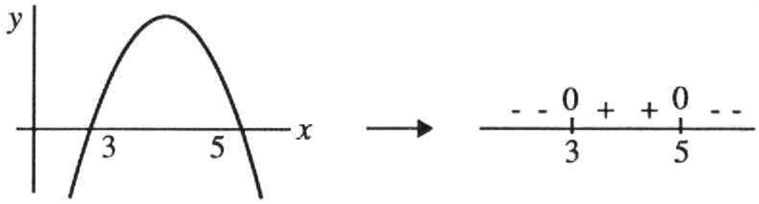
>d


>e


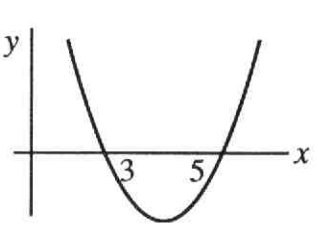
5.2. Grafiek en tekenverloop

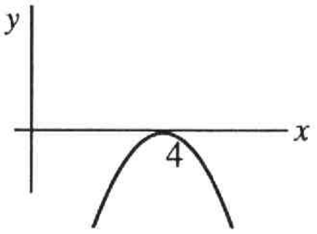
Bij een functie gegeven door een grafiek kan het tekenverloop worden afgelezen uit het plaatje.

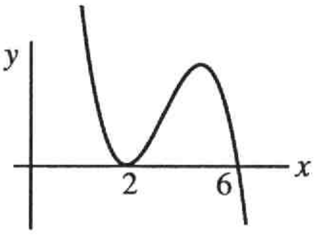
Voorbeeld:

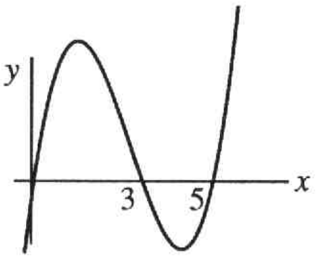


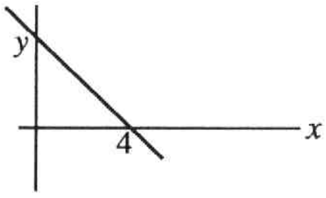
1. Geef bij elk van onderstaande grafieken het passende tekenverloop.

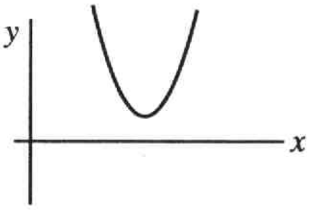




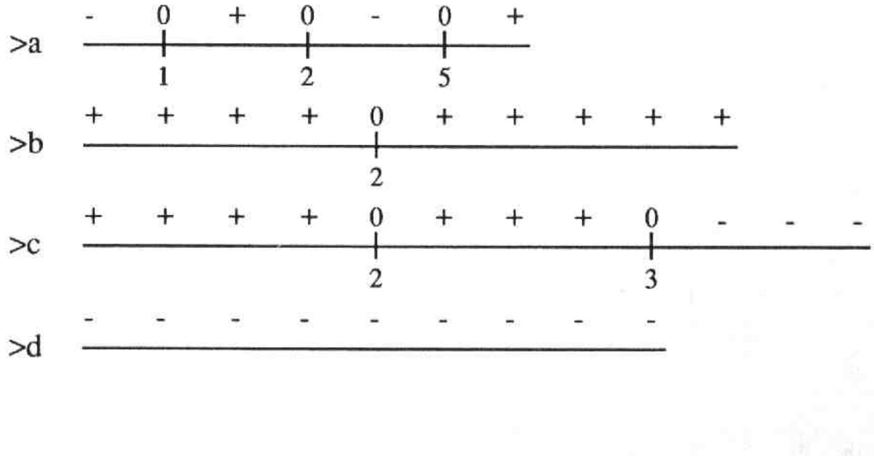








2. Schets bij elk van onderstaande tekenverlopen een passende grafiek:



5.3 Vergelijkingen en ongelijkheden

Voorbeelden:

(1) $t^3 = t^2 - 6t$	(2) $t^3 > t^2 - 6t$	(3) $t^3 \leq t^2 - 6t$

Hieronder volgt een recept voor het oplossen van dergelijke opgaven.

Stap 1.
Herleid de vergelijking of ongelijkheid zodanig dat in het rechterlid een nul komt te staan (kortweg: 'herleid op nul').
Daarbij is het handig om de veelterm in het linkerlid te rangschikken van hoge graad naar lage graad.
Voor de drie voorbeelden krijg je dan:

(1) $t^3 - t^2 + 6t = 0$	(2) $t^3 - t^2 + 6t > 0$	(3) $t^3 - t^2 + 6t \leq 0$

Stap 2.
Ontbind de veelterm in het linkerlid in zoveel mogelijk lineaire factoren:

(1) $t(t\text{-}3)(t\text{+}2) = 0$	(2) $t(t\text{-}3)(t\text{+}2) > 0$	(3) $t(t\text{-}3)(t\text{+}2) \leq 0$

Stap 3.
Bij een vergelijking kun je nu meteen de oplossing zien.
Bij een ongelijkheid maak je een tekenverloop van de ontbonden vorm.
Uit het tekenverloop kun je dan aflezen welke getallen voldoen.

(1) $\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 0 & 3 \end{array}$	(2) $\begin{array}{ccccccc} - & 0 & + & 0 & - \; - & 0 & + \\ \hline & -2 & & 0 & & 3 & \end{array}$	(3) $\begin{array}{ccccccc} - & 0 & + & 0 & - \; - & 0 & + \\ \hline & -2 & & 0 & & 3 & \end{array}$
Oplossingen: $t = -2$; $t = 0$; $t = 3$	Oplossingen: $-2 < t < 0$; $t > 3$	Oplossingen: $t \leq -2$; $0 \leq t \leq 3$

Opgaven

1. Geef de oplossingen van achtereenvolgens:
   >a $a^4 = 16a^2$ >b $a^4 \geq 16a^2$ >c $a^4 < 16a^2$

2. Los op:
   >a $x^2 + x = 12$ >c $x^2 < 17x - 60$
   >b $x(x + 1) = 90$ >d $x^2 + 60 \geq 17x$

3. Los op:

>a $y^2 - 128 = 28y$

>b $10y = y^2$

>c $a(a + 12) = 28$

>d $p^3 < 144p$

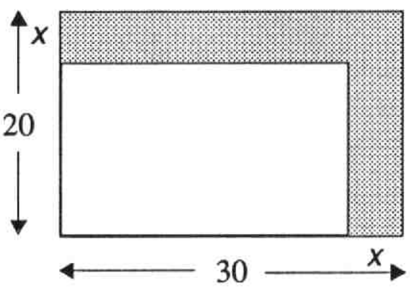
>e $u^4 \leq 10000$

>f $t(t - 4) > 3t$

4. >a Bedenk een tweede graads vergelijking bij de oplossing: $x = 15; x = -6$

>b Bedenk een ongelijkheid (van de tweede graad) bij de oplossing: $-13 < t < 54$

5. Van een rechthoekige tuin zijn de afmetingen 20 en 30 meter. De tuinman wil langs twee zijden een border aanleggen die overal even breed is. De oppervlakte (= O) van het overblijvende stuk moet meer dan 375 m^2 zijn.
Kortweg: $O > 375$.
De vraag is nu: hoe breed mag de border zijn?



>a Ga na dat $O > 375$ leidt tot $(20 - x)(30 - x) > 375$ en dat weer tot $x^2 - 50x + 225 > 0$.

>b Schets het tekenverloop van $x^2 - 50x + 225$ (bedenk wel dat x hoogstens 20 kan zijn!)

>c Hoe breed mag de border dus zijn?

>d Verander de voorwaarde 'meer dan 375' in 'minder dan 400'. Hoe breed mag de border nu zijn?
(De ondergrens van de borderbreedte is in dit geval *niet* een geheel getal; geef die grens in één decimaal nauwkeurig.)

Nog drie voorbeelden:

$\frac{1}{2}x^2 - x - 7\frac{1}{2} > 0$

Oplossing:

$\frac{1}{2}(x^2 - 2x - 15) < 0$

$\frac{1}{2}(x - 5)(x + 3) < 0$

+ 0 – – 0 +

-3 5

$x < -3; x > 5$

$5x^2 + 3x - 2 = 0$

Oplossing:

$5(x^2 + \frac{3}{5}x - \frac{2}{5}) = 0$

$5(x + 1)(x - \frac{2}{5}) = 0$

$x = -1; x = \frac{2}{5}$

$-x^2 + 20 \geq 8x$

Oplossing:

$-x^2 - 8x + 20 \geq 0$

$-(x^2 + 8x - 20) \geq 0$

$-(x + 10)(x - 2) \geq 0$

– – 0 + + + 0 – –

-10 2

$-10 \leq x \leq 2$

6. Los op:

>a $\frac{1}{3}x^2 - 5x + 12 = 0$

>b $10x^2 + 8x - 18 > 0$

>c $0{,}1x^2 + x + 2{,}5 = 0$

>d $-x^2 + 4x + 96 \geq 0$

>e $\frac{1}{4}x^2 + x - 5 = \frac{1}{4}$

>f $2x^3 - 98x > 0$

7. Schets het tekenverloop van:

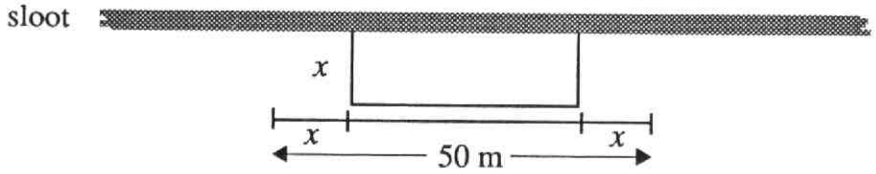
>a $-6x^2 + x$

>b $x^4 - x^2$

>c $4t^3 + 6t^2$

>d $0{,}6t^2 - 72t + 1200$

8. Dido heeft een touw van 50 m lengte. Zij gebruikt dit om een rechthoekig stuk land aan drie zijden te begrenzen; de vierde zijde wordt door een sloot begrensd. Ze mag echter niet meer dan 200 m^2 grond uitzetten.



>a Noem de breedte van het stuk grond (in m) x.
Verklaar nu: $x(50 - 2x) \leq 200$

>b Los de ongelijkheid van >a op.

>c Welke breedten zijn toegestaan voor Dido's stuk land?

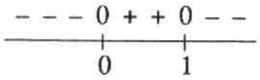
9. Vier veeltermen, vier tekenverlopen.
Welk tekenverloop hoort bij welke veelterm?

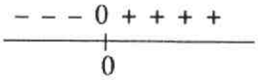
(1) $x^2 + 1$

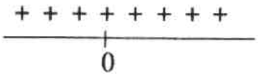
(2) $1 - x^2$

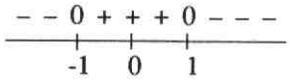
(3) $x - x^2$

(4) $x + x^3$

(a)


(b)


(c)


(d)


10. $x^2 + x + 2$ is niet ontbindbaar.

>a Verklaar dat.

Het gevolg is dat $x^2 + x + 2 = 0$ geen oplossingen heeft.

>b Heeft de vergelijking $x^2 + x + 1 = 0$ oplossingen? Zo nee, waarom?

>c Hoeveel oplossingen heeft $x^2 + x + \frac{1}{4} = 0$?

$x^2 + x + 2$ heeft geen 'nulpunten' en daarom een éénzijdig tekenverloop:

$$x^2+x+2 \qquad \begin{array}{ccccccccc} + & + & + & + & + & + & + & + & + \\ \hline \end{array}$$

Het tekenverloop van $x^2 + x + 1$ is al net zo eenzijdig:

$$x^2+x+1 \qquad \begin{array}{ccccccccc} + & + & + & + & + & + & + & + & + \\ \hline \end{array}$$

Bij $x^2 + x + \frac{1}{4}$ is er iets meer leven in de brouwerij:

$$x^2+x+\tfrac{1}{4} \qquad \begin{array}{cccccccc} + & + & + & + & 0 & + & + & + \\ \hline & & & & -\frac{1}{2} & & & \end{array}$$

Opgaven

11. Schets het tekenverloop van:

>a $x^2 + 100$

>b $-x^2 - 1$

>c $x^3 + 2x$

>d $x^4 + 3x^2$

>e $x^2 + 2x + 2$

>f $x^2 - 3x + 3$

>g $-x^2 + 6x - 9$

>h $-x^2 + 6x - 10$

12. Los op:

>a $(x^2 + 2x + 2)(x - 5) = 0$

>b $(x^2 + 2x - 3)(x - 4) < 0$

>c $(x^2 - 4)((x^2 + 4x + 4) > 0$

>d $(x^2 + 3)(x^2 + 3x + 3) \leq 0$

13. Schets het tekenverloop van:

>a $(x - 2)(x + 3) + 4x$

>b $(a + 4)(a - 4) - 6a$

>c $27 + p(p + 12)$

>d $27p(p + 12)$

14. >a Van welke derde-graads veelterm is het tekenverloop

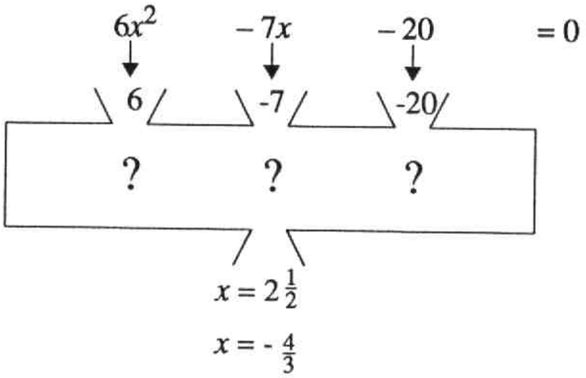
$$\begin{array}{ccccccccccccc} - & - & 0 & + & + & 0 & - & - & 0 & + & + & + & + \\ \hline & & -2 & & & 1 & & & 4 & & & & \end{array}$$

>b En hoe moet je die veelterm veranderen om dit tekenverloop te krijgen:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} + & + & 0 & - & - & 0 & + & + & 0 & - & - & - & - \\ \hline & & -2 & & & 1 & & & 4 & & & & \end{array}$$

5.4 Een automaat voor de oplossing van vierkantsvergelijkingen

Om een vierkantsvergelijking als $6x^2 - 7x - 20 = 0$ op te lossen, heb je alleen het rijtje van de drie getallen 6, -7 en -20 nodig. Daarop kan een vaste rekenprocedure worden toegepast die de oplossingen oplevert.
Je kunt je hierbij een automaat voorstellen.



In deze paragraaf willen we het inwendige van zo'n automaat onderzoeken. We doen dat in een aantal stappen.

Bij de oplossing van bijvoorbeeld $x^2 + 9x + 14 = 0$ hebben we als *tussenstap* de twee getallen voor de ontbinding nodig. Die zijn hier zo te zien, maar omdat het om de methode gaat, volgen we de langere weg. We willen daarbij de getallen 9 en 14 volgen. We kunnen ze op het spoor blijven door ze te *merken* en niet door een berekening te verbergen. (Zo is bijvoorbeeld 9^2 niet vervangen door 81)

$x^2 + \boxed{9}x + \langle 14 \rangle$	$x^2 + \square x + \lozenge$
zoek twee getallen met	zoek twee getallen met
som = $\boxed{9}$ en produkt = $\langle 14 \rangle$	som = $\square$ en produkt = $\lozenge$
1^e getal $\frac{\boxed{9}}{2} + k$	1^e getal $\frac{\square}{2} + k$
2^e getal $\frac{\boxed{9}}{2} - k$	2^e getal $\frac{\square}{2} - k$
Produkt $\frac{\boxed{9}^2}{4} - k^2 = \langle 14 \rangle$	Produkt $\frac{\square^2}{4} - k^2 = \lozenge$
$k^2 = \frac{\boxed{9}^2}{4} - \langle 14 \rangle$	$k^2 = \frac{\square^2}{4} - \lozenge$
$k = \sqrt{\frac{\boxed{9}^2}{4} - \langle 14 \rangle}$	$k = \sqrt{\frac{\square^2}{4} - \lozenge}$
1^e getal = $\frac{\boxed{9}}{2} + \sqrt{\frac{\boxed{9}^2}{4} - \langle 14 \rangle}$	1^e getal = $\frac{\square}{2} + \sqrt{\frac{\square^2}{4} - \lozenge}$
2^e getal = $\frac{\boxed{9}}{2} - \sqrt{\frac{\boxed{9}^2}{4} - \langle 14 \rangle}$	2^e getal = $\frac{\square}{2} - \sqrt{\frac{\square^2}{4} - \lozenge}$
(en hieruit kun je tenslotte getallen 7 en 2 vinden)	

Je hebt wel ontdekt dat naast de gewone berekening een schaduwberekening met open merktekens $\square$ en $\Diamond$ is gemaakt.
Moet je nu de twee getallen voor de ontbinding van bijvoorbeeld $x^2 + 15x + 50$ vinden, dan kun je gewoon in dit schema in elk $\square$ het getal 15 invullen en in elk $\Diamond$ het getal 50.
Maar wacht even! Hier valt wat te verdienen: je hoeft alleen de laatste regels in te vullen.

Opgave

1. Doe dat en bereken de gevraagde getallen.

Nog enkele bijzonderheden:

- $x^2 - 7x - 3$ wordt gelezen als $x^2 + \boxed{-7}x + \boxed{-3}$
- als de uitkomst onder het wortelteken geen kwadraat van een heel getal is, dan blijft in het antwoord een wortelteken staan of er wordt een benadering gegeven.
- als de uitkomst onder het wortelteken negatief is, dan is dat een signaal dat er geen ontbinding mogelijk is.

Opgave

2. Geef indien mogelijk de ontbinding voor:
   >a $x^2 - 7x - 3$
   >b $x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{48}$
   >c $x^2 + 5x + 8$
   >d $x^2 + 0{,}1x - 0{,}42$

Terug naar $x^2 + 9x + 14 = 0$. Uit de ontbonden vorm $(x + 7)(x + 2) = 0$ volgen de oplossingen $x = -7$ en $x = -2$. De oplossingen zijn dus juist tegengesteld aan de 'ontbindingsgetallen'!

Voor $x^2 + \square x + \Diamond = 0$ vinden we de oplossingen:

$$x = -\frac{\square}{2} - \sqrt{\frac{\square^2}{4} - \Diamond} \quad \text{en} \quad x = -\frac{\square}{2} + \sqrt{\frac{\square^2}{4} - \Diamond}$$

Wiskundige resultaten worden als regel niet met vierkantjes en ruitjes geschreven. Daarvoor gebruikt men letters:

$x^2 + bx + c = 0$ heeft de oplossingen:

$x = -\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$ en $x = -\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$

Die twee 'vliegen' kunnen in één klap:

$x = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$

De hele berekening is dus samengeperst in één *formule*.

De meest algemene vorm van de tweedegraadsvergelijking is

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Daarvoor willen we ook een formule maken.

Eerst naar het bekende model:

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ mag je ruilen voor : } x^2 + \boxed{\tfrac{b}{a}}x + \boxed{\tfrac{c}{a}} = 0$$

Schrijven we $\frac{a}{b}$ nu als b/a en $\frac{c}{a}$ als c/a, dan komt er:

$$x = -\frac{\boxed{b/a}}{2} \pm \sqrt{\frac{\boxed{(b/a)}^2}{4} - \boxed{c/a}}$$

Het doel is bereikt, maar de formule kan nog wel verfraaid worden.

$x = \frac{-b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}$ ← de breuken minder ingewikkeld geschreven

$x = \frac{-b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$ ← van $\frac{c}{a}$ gemaakt $\frac{4a \cdot c}{4a \cdot a}$ en de breuken onder één noemer gebracht

$x = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{\sqrt{4a^2}}$ ← $\sqrt{\frac{teller}{noemer}} = \frac{\sqrt{teller}}{\sqrt{noemer}}$

$x = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ← één wortel kan weggewerkt worden

$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$ ← onder één noemer gebracht.

Deze formule staat bekend als de *a, b, c-formule*

Voorbeeld:
Los op: $3x^2 + 8x - 2 = 0$
Dit is een vorm die niet eenvoudig is te ontbinden in factoren.
We gebruiken de *a, b, c*-formule:

$$a = 3,\ b = 8,\ c = -2$$

De oplossingen van de vergelijking zijn:

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4.3.-2}}{2 \cdot 3} = \frac{-8 \pm \sqrt{88}}{6}$$

ofwel: $x = \frac{-8 + \sqrt{88}}{6}$ en $x = \frac{-8 - \sqrt{88}}{6}$

benaderd $x \approx 0{,}23$ en $x \approx -2{,}90$

Opgaven

3. Los de volgende vergelijkingen op met behulp van de *a, b, c*-formule.
Geef ook indien nodig een benadering van de oplossingen in twee decimalen:

>a $x^2 - 8x + 6 = 0$ >c $-4x^2 + 18x = 0$

>b $-\frac{1}{2}x^2 - 3x + 1 = 0$ >d $0{,}25x^2 + 5x + 4 = 0$

Opmerking:
De *a, b, c*-formule mag niet zomaar gebruikt worden bij het oplossen van vergelijkingen! Een eerste voorwaarde: hij is alleen bruikbaar voor tweedegraadsvergelijkingen, in $ax^2 + bx + c = 0$ mag a dus niet nul zijn.
Verder zijn er alleen maar oplossingen te vinden als het gedeelte onder de wortel niet negatief is.
Dit gedeelte ($b^2 - 4ac$) wordt wel de *discriminant* genoemd. Is de discriminant een negatief getal, dan volgt daaruit dat de bijbehorende tweedegraadsvergelijking geen oplossing heeft.

Opgave

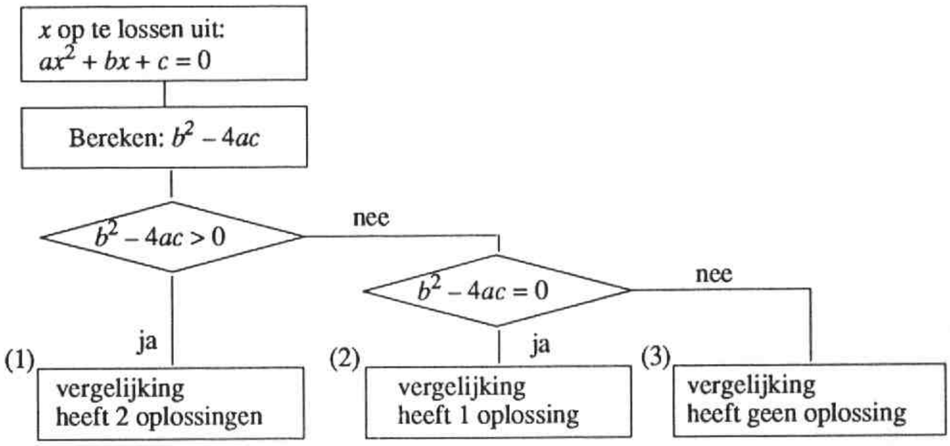
4. Los de volgende vergelijkingen (indien mogelijk) op:

>a $2x^2 - 5x + 3 = 0$ >d $30x + 60 = 15x^2$

>b $(4x - 7)^2 = 0$ >e $x(x+1) = 6$

>c $\frac{1}{2}x^2 - 6x + 19 = 0$ >f $5x^2 + 6 = 10x$

5. Bekijk onderstaand schema:



>a Leg uit wat dit schema inhoudt.

>b Bedenk zelf een vergelijking zodat geval (1) zich voordoet.

>c Dezelfde vraag voor (2) en voor (3).

6. Functies en grafieken

Hellingfuncties geven informatie over het veranderingsgedrag van functies. Bij het tekenen van een grafiek is informatie over stijgen en dalen nuttig te gebruiken. Daarover gaat dit hoofdstuk.
Omgekeerd, wanneer van een functie de grafiek al is gegeven, kunnen bijzonderheden van de grafiek (zoals de positie van de toppunten en dieptepunten) verklaard worden met behulp van de hellingfunctie.

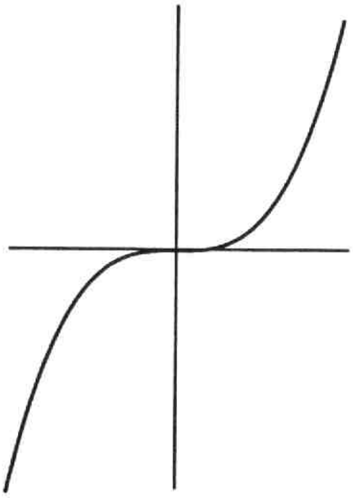
Veeltermfuncties hebben machtsfuncties als bouwstenen. De hoogste macht die in een veeltermfunctie voorkomt, bepaalt de *graad* van de functie.
Voorbeelden:

eerstegraadsfunctie	$f(x) = 2x - 3$
tweedegraadsfunctie	$f(x) = x^2 - 6x + 8$
derdegraadsfunctie	$f(x) = x^3 + 0{,}5x^2 - 2x$
vijfdegraadsfunctie	$f(x) = (x^2 - 4)(x^3 - 1)$

(Pas op! De graad wordt hier pas zichtbaar als $(x^2\text{-}4)(x^3\text{-}1)$ wordt uitgewerkt: $f(x) = x^5 - 4x^3 - x^2 + 4$)

Grafieken van eerste- en tweedegraadsfuncties hebben weinig verrassends meer te bieden. Laten we daarom beginnen met een derdegraads functie.
De meest eenvoudige derdegraadsfunctie ken je allang:

$f(x) = x^{\,3}$



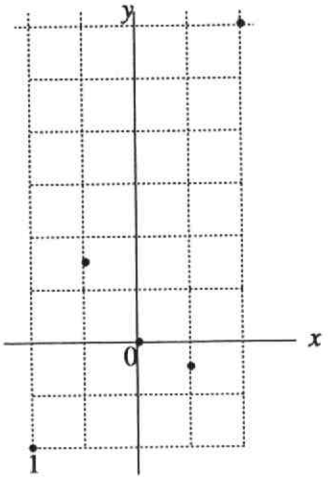
Een natuurlijke vraag is: hebben alle derdegraadsfuncties deze vorm? Dat dit niet het geval is, zal blijken uit het eerste het beste voorbeeld dat we behandelen:

$$f(x) = x^3 + 0{,}5x^2 - 2x$$

Allereerst berekenen we de coördinaten van een aantal punten:

x-coördinaat	-2	-1	0	1	2
y-coördinaat	-2	$1\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	6

Uitgezet in een assenstelsel levert dit op:



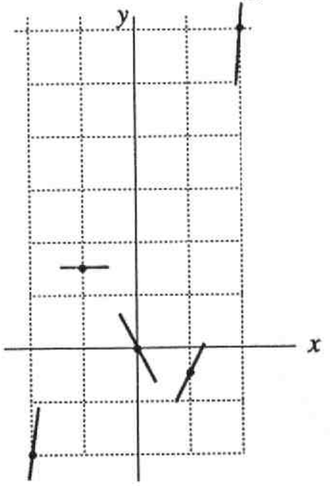
Je kunt die stippen in gedachten verbinden en dat levert dan een eerste beeld op van een stuk grafiek.
Dat beeld kun je op verschillende manieren verbeteren:
(a) Door tussenpunten te berekenen (bijvoorbeeld: voor $x = 0{,}5$; $x = 1{,}5$; enz.)
(b) Door in de al getekende punten raaklijntjes te tekenen.

We kiezen voor (b) en gebruiken daarbij de hellingfunctie van f; eerst even differentiëren, dat levert: $f'(x) = 3x^2 + x - 2$

Hiermee kunnen de hc's in de punten met $x = 2, -1, \ldots, 2$ snel worden gevonden:

x-coördinaat	-2	-1	0	1	2
hc	8	0	-2	2	12

De informatie uit de tabel verwerken we als volgt:



Bij het tekenen van de grafiek hebben die raaklijntjes een *sturende* werking. De grafiek, een vloeiende kromme, moet als het ware tegen de raaklijntjes worden gedrukt.

Opgave

1. >a Controleer de vijf raaklijnstanden in bovenstaande figuur.

Aan de hand van de vijf punten met raaklijntjes kan worden vermoed dat de grafiek eerst stijgt, dan daalt, daarna weer stijgt.

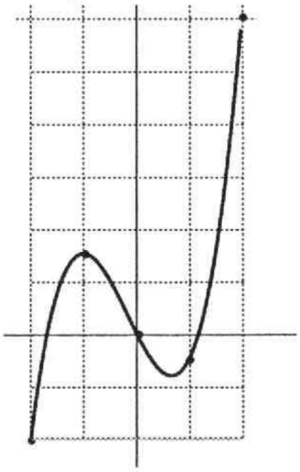
>b In het punt $(-1, 1\frac{1}{2})$ zou een ommekeer plaats kunnen vinden van stijgen naar dalen. Hoe kun je dat zien aan het raaklijntje in dat punt?

>c Op grond van de eerste figuur (zonder raaklijntje) zou iemand op het idee kunnen komen, dat $(1, -\frac{1}{2})$ een punt van ommekeer is van dalen naar stijgen. Waarom is dat niet aannemelijk?

>d Meer zekerheid over waar de grafiek stijgt (daalt), geeft het *tekenverloop* van f'. Ga na dat $f'(x) = 3(x+1)(x-\frac{2}{3})$ en schets dit tekenverloop.

>e Uit het tekenverloop kun je zien dat $(-1, 1\frac{1}{2})$ een punt van ommekeer is van stijgen naar dalen. In welk punt vindt er een ommekeer plaats van dalen naar stijgen?

Met een computer is nu de grafiek getekend van $f(x) = x^3 + 0{,}5x^2 - 2x$ voor $-2 \leq x \leq 2$.



Opmerkingen:

Het 'toppunt' $(-1, 1\frac{1}{2})$ correspondeert met het *maximum* $1\frac{1}{2}$ van de functie f.

Dit maximum is *plaatselijk*, want verder naar rechts bereikt f grotere waarden (bijvoorbeeld 6 voor $x = 2$).

Bij $x = \frac{2}{3}$ bereikt f een (plaatselijk) *minimum*.

Dat minimum bereken je door $x = \frac{2}{3}$ in te vullen in $x^3 + 0{,}5x^2 - 2x$.

Resultaat: $-\frac{22}{27}$ (of $-0{,}815$)

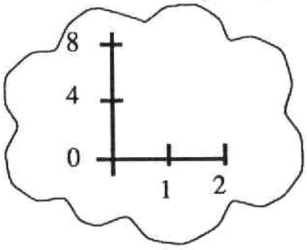
Opgaven

2. $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x$

>a Vul in:

x-coördinaat	-1	0	1	2	3	4	5
y-coördinaat							
hc							

>b Verwerk deze informatie in een assenstelsel.
Neem op de x-as de eenheid 1 cm en op de y-as $\frac{1}{4}$ cm



>c Schets het tekenverloop van de hellingfunctie f'.

>d Schets de grafiek van f.

3. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 8x$.

>a Er zijn twee punten op de grafiek van f waarin de raaklijn horizontaal is. Bereken de coördinaten van deze twee punten.

>b Onderzoek met behulp van het tekenverloop van f' in welke gebieden de grafiek van f stijgend resp. dalend is.

>c Teken de grafiek van $f(x)$ voor $-7 \leq x \leq 5$.
(Neem de schaal op de y-as 5 keer zo klein als op de x-as.)

>d De grafiek van f snijdt de x-as drie keer.
Bereken de waarden van x die daar bij horen.

4. $f(x) = x^3 + x$

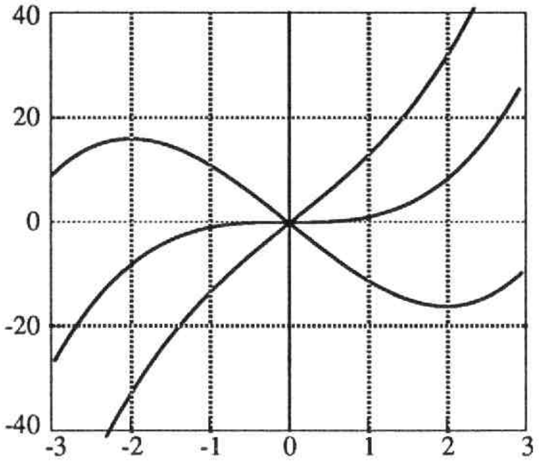
>a Toon aan dat de grafiek van f geen punten heeft, waarin een ommekeer plaats vindt van stijgen naar dalen of andersom.

>b Schets de grafiek van f in het gebied $-2 \leq x \leq 2$.

>c Schets ook de grafiek van de hellingfunctie f' in dat gebied.

>d Het laagste punt van de hellinggrafiek correspondeert met een punt P op de grafiek van f. P is het punt waarin de stijging van die grafiek het minst sterk is.
Ga na of dat klopt in je tekening bij >b.

5. Met de computer zijn de grafieken van een drietal *derdegraads functies* getekend, namelijk van $a(x) = x^3 - 12x$; $b(x) = x^3$; $c(x) = x^3 + 12x$.



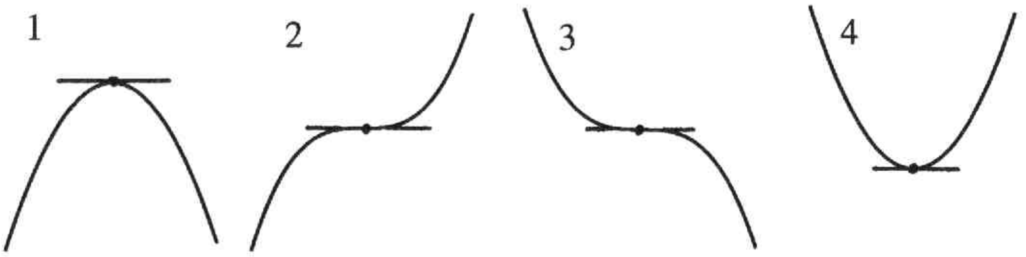
>a Bereken de hellingfuncties a', b' en c'.

>b Hoe kun je met behulp van de hellingfuncties uitmaken welke grafiek bij a, welke bij b en welke bij c hoort?

>c Neem de figuur over en teken ook de grafiek van $d(x) = x^3 - 6x$ en van $e(x) = x^3 + 6x$.

>d In het plaatje zie je dat een horizontale raaklijn in een punt nog niet hoeft te betekenen dat zo'n punt bij een maximum of minimum hoort. Bij welke functie doet zich dat voor en hoe is dat te verklaren uit het tekenverloop van de hellingfunctie?

De punten met horizontale raaklijn in een grafiek zijn vaak van bijzondere betekenis. Zijn zijn als ware de 'rustpunten' in de verandering van de functie.
Er zijn 4 verschillende mogelijkheden:



In de gevallen 1 en 4 geven de punten met horizontale raaklijn een *uiterste waarde* (maximum of minimum) van de functie aan. In de gevallen 2 en 3 is er geen ommekeer van stijgen naar dalen en is er geen sprake van een uiterste waarde.

Opgaven

6. Schets het tekenverloop van elk van de hellingfuncties bij de grafieken van de plaatjes 1, 2, 3 en 4.

7. *Welk vliegtuig is veiliger?*

Een populair gespreksonderwerp is de veiligheid van het luchtverkeer. Vooral wanneer iemand uit het gezelschap zegt een lange vliegreis te zullen ondernemen. Er is dan meestal wel een leukerd die de afgezaagde kwestie van het verschil in veiligheid tussen een tweemotorig en een viermotorig vliegtuig te berde brengt. Uitgangspunt is dat de helft van de motoren mag uitvallen, zonder dat daardoor problemen ontstaan. Volgens de één is een viermotorige machine veiliger, want er mogen twee motoren uitvallen en bij dat aantal is het bij het andere toestel al mis. Een ander vindt dat onzin, omdat er bij vier motoren een veel groter kans op uitval bestaat. En iemand die vroeger goed kon rekenen zegt dat het allemaal niets uitmaakt: 2 van de 4 is hetzelfde als 1 van de 2.

Dit probleem is ook wiskundig onderzocht:

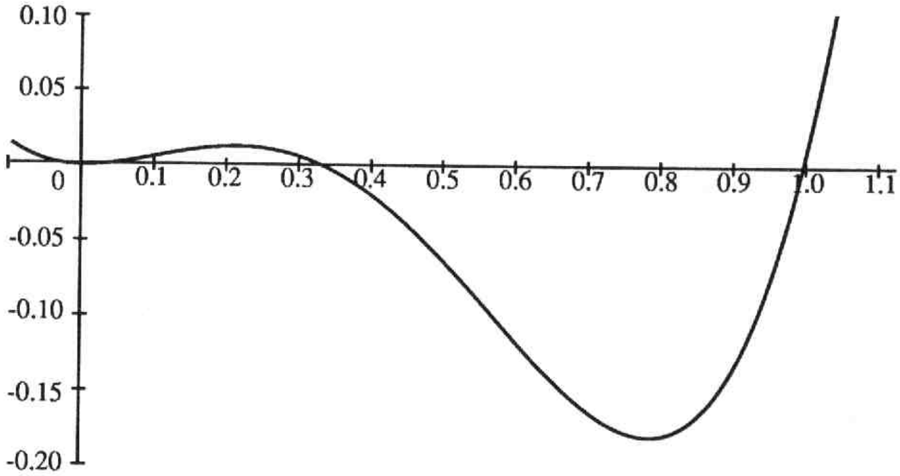
Stel dat voor elke motor de kans op uitval p is. Er is uit te rekenen dat de kans op een veilige vlucht met een tweemotorig toestel $1 - p^2$ is en met een viermotorig toestel $1 - 4p^3 + 3p^4$.

Het probleem kan nu zo gesteld worden:

$$\begin{array}{c}\textit{kans op}\\ \textit{veilige vlucht met}\\ \textit{viermotorig toestel}\end{array} \quad - \quad \begin{array}{c}\textit{kans op}\\ \textit{veilige vlucht met}\\ \textit{tweemotorig toestel}\end{array} \quad = \begin{cases}\text{positief}\\ \text{negatief}\\ \text{of } 0\end{cases}$$

>a Wat betekenen deze drie antwoorden?

Het verschil tussen de twee kansen is afhankelijk van p. Dit verschil noemen we V. Er geldt $V = 3p^4 - 4p^3 + p^2$ en dat levert deze grafiek.



>b Controleer de grafiek door de coördinaten te berekenen van de 'bijzondere punten' (snijpunten met de p-as, punten met horizontale raaklijn).

>c Bespreek nu aan de hand van de grafiek het gestelde probleem.

7 Het krachtenspel

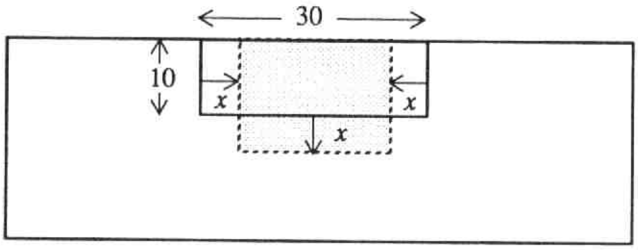
Er zijn veel verschijnselen waarbij het resultaat bepaald wordt door twee elkaar tegenwerkende krachten.

Voorbeeld

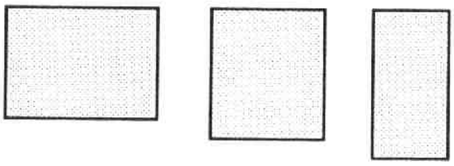
De opbrengst van een artikel is afhankelijk van de prijs per stuk en van het verkochte aantal. De opbrengst kan vergroot worden door bijvoorbeeld de prijs te verhogen. Maar die prijsverhoging doet misschien het verkochte aantal dalen. Tel uit je winst!
In dit slothoofdstuk willen we een paar van zulke problemen analyseren. Bij die analyse kunnen hellingfuncties een krachtig hulpmiddel zijn, vooral als het gaat om het bepalen van de voorwaarden voor een optimaal resultaat.

Een uitgewerkt voorbeeld *)

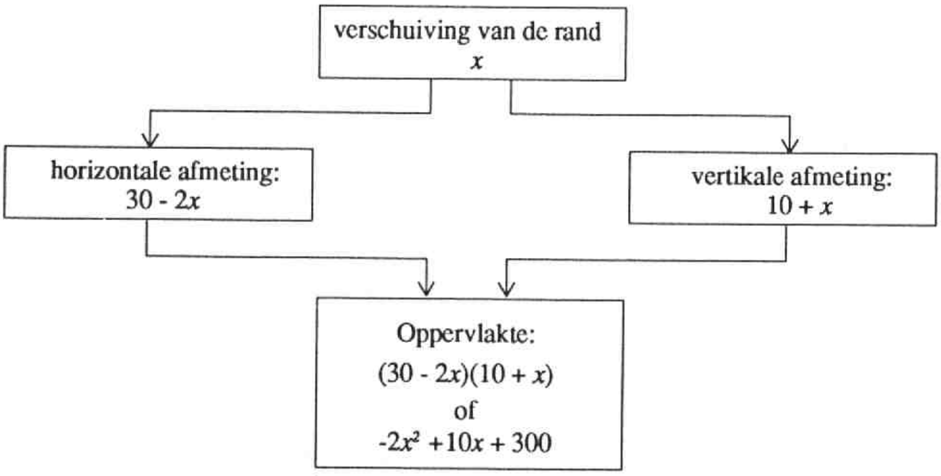
In een grote foto (90 bij 30 cm) is een kleinere van 30 bij 10 cm afgetekend. Hiervan gaan twee randen x cm naar binnen en één gaat x cm naar buiten, volgens onderstaande tekening.



Er kan zo een serie rechthoeken ontstaan.



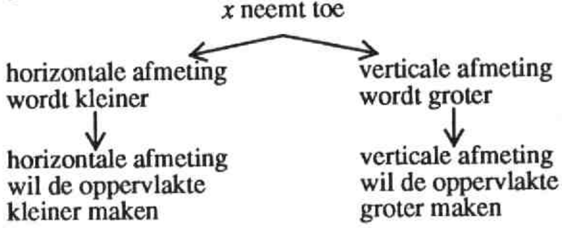
We zijn geïnteresseerd in het verloop van de oppervlakte als x verandert.
De berekening kan in een schema worden gepresenteerd.



---

[*] Dit probleem is, even als enkele andere fragmenten, ontleend aan het Hawexboekje 'Tabellen, Grafieken, Formules 3'.

Uit het schema kun je aflezen:



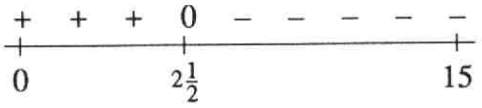
Je ziet: een spel van elkaar tegenwerkende krachten.
De vraag is nu hoe het verloop van dit krachtenspel is.

Typisch een vraag die je met behulp van een hellingfunctie kunt oplossen. Dat gaat als volgt:

De oppervlakte van de afgetekende rechthoek is afhankelijk van x;
in formule: oppervlakte $= -2x^2 + 10x + 300$
of in korte notatie: $O(x) = -2x^2 + 10x + 300$

We differentiëren de functie O:
$O'(x) = -4x + 10$

Het tekenverloop hiervan:



Hier volgt:
$O(x)$ stijgt als x verandert van 0 tot $2\frac{1}{2}$
$O(x)$ daalt als x verandert van $2\frac{1}{2}$ tot 15

Dus $O(x)$ is maximaal voor $x = 2\frac{1}{2}$
De afmetingen van de afgetekende rechthoek zijn dan 25 bij $12\frac{1}{2}$ cm.
De maximale oppervlakte is $25 \times 12\frac{1}{2} = 312\frac{1}{2}$ cm^2

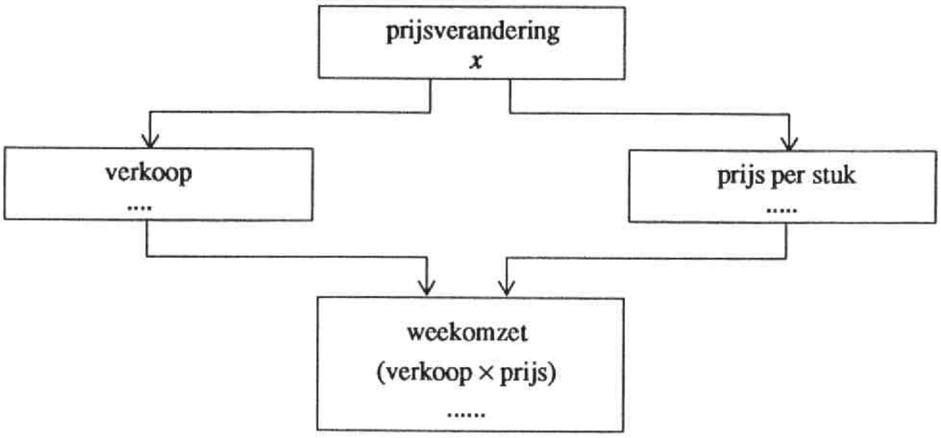
Opgaven

1. >a Het tekenverloop van $O'(x)$ is gemaakt voor $0 \leq x \leq 15$.
Waar komt de grens 15 vandaan?

>b Teken een grafiek van de oppervlakte $O(x)$.

2. Terug naar het prijzenvoorbeeld (zie aanhef van dit hoofdstuk).
We kiezen voor een zeer eenvoudig model.
Normale prijs: 10 gulden
Prijsverandering: x gulden
Normale verkoop in een week: 100 stuks
Elke gulden prijsverhoging doet de verkoop met 5 stuks teruglopen, elke gulden prijsverlaging heeft het omgekeerde effect: de verkoop stijgt met 5 stuks.
Ook hier is er weer sprake van twee elkaar tegenwerkende krachten.

>a Neem onderstaand schema over en vul passende formules in:



>b De weekomzet is afhankelijk van x.
Noem die omzet $W(x)$ en bereken $W'(x)$.

>c Schets het tekenverloop van W'.

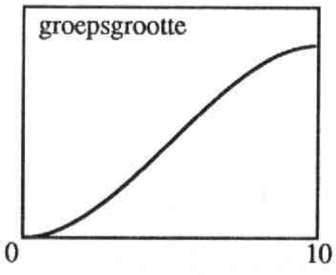
>d Bij welke prijsverandering is de weekomzet maximaal?
Geef een passende redenering.

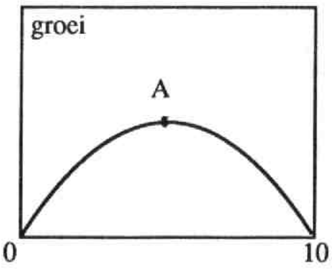
3. In paragraaf 4.2 heb je de volgende regel geleerd:
eerlijk verdelen van een som levert het hoogst haalbare produkt op.
Neem als som 80. Eerlijk verdelen geeft 40, 40.
Een verandering x van het ene getal, heeft een verandering van het andere getal tot gevolg en dat heeft weer consequenties voor het produkt.

>a Maak een schema (in de vorm zoals bij opgave 2).

>b Waarom kun je nu zonder hellingfunctie beredeneren dat het produkt maximaal is voor $x = 0$?

4. *Groei van een populatie.*
Stel je het volgende voor: Een kleine groep dieren komt in een veilig gebied waar volop voedsel is. Er worden veel jongen geboren en die komen niet te kort, zodat er daarvan veel overleven. Die jongen krijgen ook weer jongen, enz. De groep groeit daardoor snel in aantal. Na verloop van tijd wordt het moeilijker om aan voedsel te komen. Hierdoor wordt de groei minder. Twee globale grafieken die het verloop van de groepsgrootte in de tijd weergeven.





>a De rechtergrafiek is de hellinggrafiek van de linkergrafiek.
Het hoogste punt van de rechtergrafiek (A) geeft belangrijke informatie over de manier waarop de groepsgrootte verandert.
Welk punt in de linkergrafiek correspondeert met punt A van de rechtergrafiek?

Het verschil in groei is met formules na te spelen. De met de tijd toenemende groei kan voorgesteld worden door bijvoorbeeld:

$$G(t) = 2 \cdot t$$

Het gevolg zou onbeperkte groei zijn. Daarom moet er een *remmer* worden ingebouwd. In het begin moet die niet, of heel zwak werken, maar later steeds sterker. Een mogelijkheid is de factor $(1 - \frac{t}{10})$ met $t = 10$ als laatste tijdstip. De formule van de groei wordt dan:

$$G(t) = 2t\,(1 - \tfrac{t}{10})$$

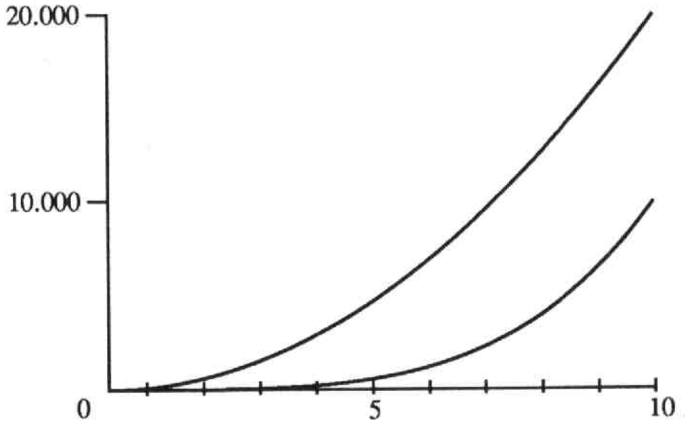
>b Bereken $G\,'(t)$ en bepaal op welk tijdstip de groei maximaal is.

In plaats van $1 - \frac{t}{10}$ kiezen we nu $1 - \frac{t^2}{100}$ als remmer.

>c Teken in één figuur de grafieken van $y = 1 - \frac{t}{10}$ en $y = 1 - \frac{t^2}{100}$ (voor $0 \leq t \leq 10$).
Hoe blijkt uit de figuur dat $1 - \frac{t^2}{100}$ een zwakkere remmer is dan $1 - \frac{t}{10}$?

>d Op welk tijdstip is de groei maximaal in het geval de remmer gelijk is aan $1 - \frac{t^2}{100}$?

5. In één figuur zie je de grafieken van $y = x^4$ en $y = 200x^2$ voor $x \geq 0$.



Het lijkt er op of het verschil tussen $200x^2$ en x^4 steeds groter wordt bij toename van x. In deze opgave gaan we dat verschil onderzoeken.

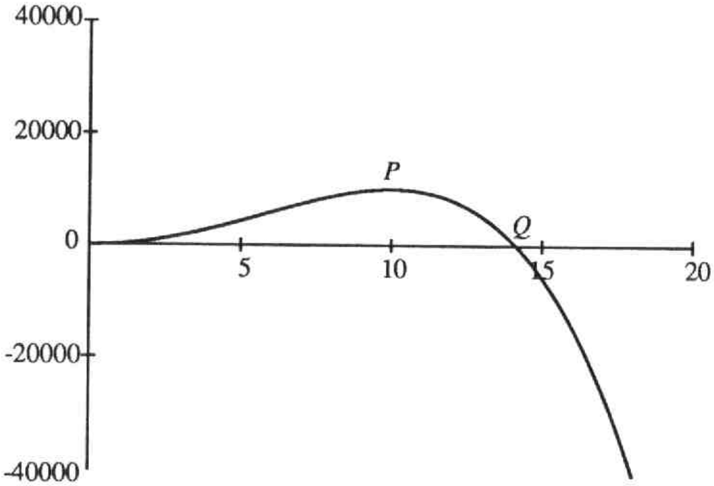
>a Dat schijn hier bedriegt, blijkt al gauw als je nagaat of $200x^2$ en x^4 (behalve voor $x = 0$) gelijk kunnen zijn.
Voor welke waarde van x (in 1 decimaal nauwkeurig) is dat het geval?

>b Het beeld dat bovenstaande figuur oproept, verandert grondig als je op de x-as en de y-as een veel kleinere schaal neemt. Doe dat en schets beide grafieken voor $0 \leq x \leq 20$ en $0 \leq y \leq 100000$.

Als je de nieuwe figuur goed getekend hebt, wordt zichtbaar dat x^4 aanvankelijk achter blijft bij $200x^2$ maar verder op aan een 'inhaalrace' begint.
Door naar de hellingfuncties te kijken, kun je precies berekenen waar x^4 begint in te lopen op $200x^2$.

>c Vanaf welke waarde van x is dat het geval?

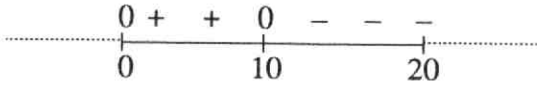
De grafiek van de verschilfunctie $f(x) = 200x^2 - x^4$ brengt de inhaalrace fraai in beeld.



>d Welke betekenis hebben de punten P en Q voor de inhaalrace?

In deze opgave was ook weer sprake van een krachtenspel.
$200x^2$ en x^4 zijn elkaar tegenwerkende krachten.
De eerste wil het verschil steeds groter maken, de tweede steeds kleiner. Als we alleen letten op positieve verschillen, dan zie je dat $x = 10$ het maximum oplevert. Dat volgt uit het tekenverloop van $f'(x)$.

$$f'(x) = 400x - 4x^3 = 4x(100 - x^2) = 4x(10 - x)(10 + x)$$

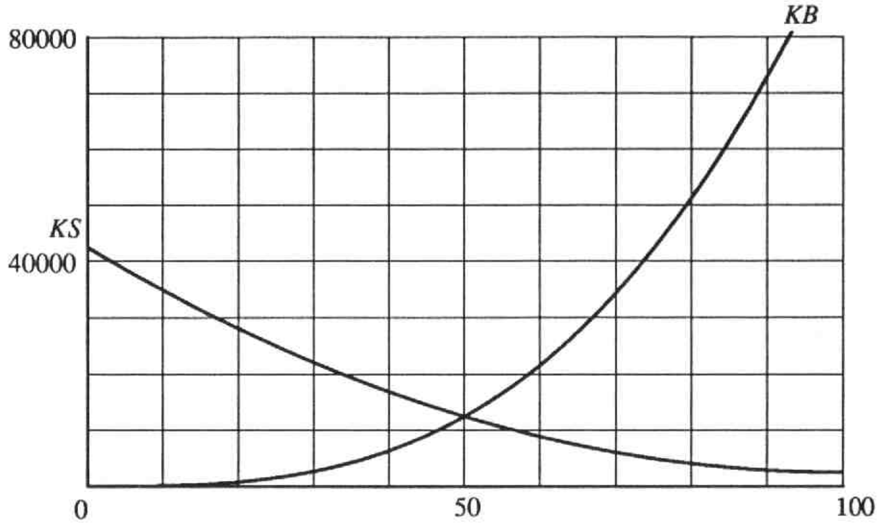


>e De functie $f(x)$ heeft ook betekenis voor negatieve x. Hoe wordt het tekenverloop van $f'(x)$ als je dit bekijkt op het interval $-20 \leq x \leq 20$?

>f Schets de grafiek van f op dit interval.

>g $f(x)$ kun je ook opvatten als een produkt.
Er geldt immers: $f(x) = x^2(200 - x^2)$!
De factoren x^2 en $200 - x^2$ zijn samen 200.
Hoe kun je vanuit dit standpunt de maximale waarde van $f(x)$ vinden?

6. *Bescherming van gegevens*
Ondernemingen en overheidsinstellingen moeten tegenwoordig hun gegevens beschermen. Als de mate van bescherming alleen afhankelijk is van economische factoren dan zijn er twee oorzaken van kosten:
KS: kosten ten gevolge van Schade
KB: kosten ten gevolge van Bescherming.
Hiervan zijn de grafieken getekend.



We maken hierbij het volgende wiskundige model:

$$KS(x) = 42500 - 800x + 4x^2$$
$$KB(x) = 0{,}1x^3$$

Hiervoor is x de mate van bescherming in procenten ($0 \leq x \leq 100$)

>a Aan de grafiek van *KB* kun je zien dat er sprake is van toenemende stijging. Voldoet het voorgestelde model hieraan?
Gebruik de hellingfunctie om dit te beoordelen.

>b Bij welke waarde voor x zijn beide soorten kosten even groot?
Lees je antwoord af uit de grafiek en controleer het door een berekening.

De grafiek van de totale kosten (*TK*) krijg je door de grafieken van *KS* en *KB* op te tellen.

>c Teken de grafiek van *TK* op deze manier.
Schat de waarde van x waarvoor *TK* minimaal is uit je grafiek. Ligt dit 'minimumpunt' wel of niet recht boven het snijpunt, denk je?

Met behulp van differentiëren is het laagste punt van *TK* te berekenen.
De formule voor *TK* volgt uit $TK(x) = KS(x) + KB(x)$.

>d Bereken $TK'(x)$.

>e Bereken de minimale totale kosten.

Oplossing stripverhaal van bladzijde 52:

$$\boxed{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\ldots\ldots\ldots.(x-w)\underset{\uparrow}{(x-x)}(x-y)(x-z)=0}$$