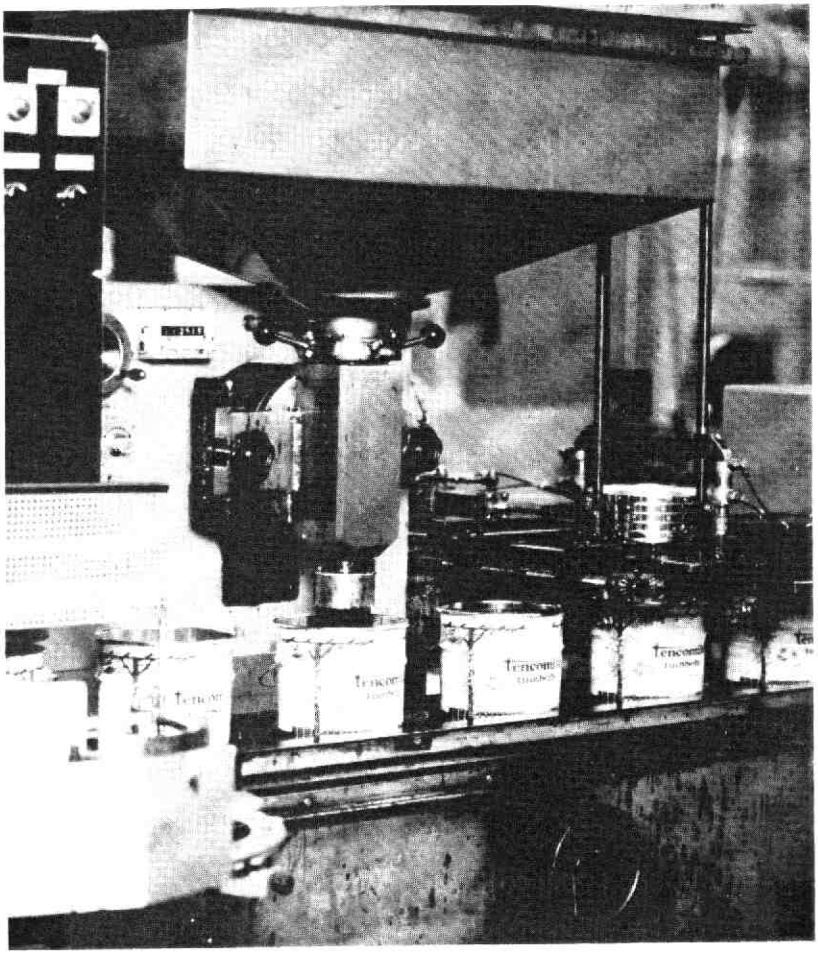
De normale verdeling

https://hdl.handle.net/1874/10142



DE NORMALE VERDELING

DE NORMALE VERDELING

WISKUNDE A

DE NORMALE VERDELING

Een produktie ten behoeve van het project Hawex.

Ontwerper: Henk van der Kooij

Met medewerking van: Jan de Jong
Martin Kindt
Jan de Lange
Martin van Reeuwijk
Anton Roodhart

Vormgeving: Ada Ritzer

Utrecht, juni 1990

Inhoudsopgave

1 Wat is normaal?

Wanneer je een kilopak suiker koopt, mag je verwachten dat er 1000 gram suiker in zit. Dat staat per slot van rekening op de verpakking vermeld. Deze pakken worden in de fabriek machinaal gevuld. De vulmachine kan wel keurig op 1000 gram ingesteld worden, maar in de praktijk zal er in het ene pak wat meer en in een ander pak wat minder suiker terecht komen.

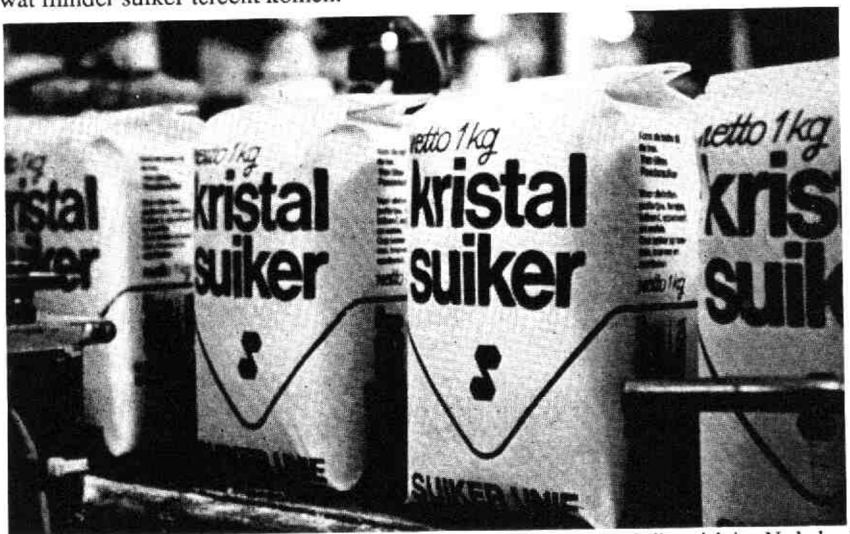


foto: Suikerstichting Nederland

We bekijken nu eerst het geval dat de machine ingesteld wordt op een vulgewicht van 1000 gram.
Uit de geproduceerde pakken wordt een steekproef van 500 stuks genomen.
De netto-inhoud van die pakken wordt vastgesteld.
Het resultaat, weergegeven in gewichtsklassen met een breedte van 4 gram:

gewicht (in gr.)	aantal	gewicht	aantal	gewicht	aantal
970-974	1	990-994	62	1010-1014	40
974-978	6	994-998	71	1014-1018	21
978-982	12	998-1002	79	1018-1022	11
982-986	23	1002-1006	73	1022-1026	5
986-990	35	1006-1010	59	1026-1030	2

1. >a Hoeveel procent van de pakken bevat te weinig suiker?

   >b Teken een histogram met horizontaal de gewichtsklassen (1 cm per klasse) en vertikaal de relatieve frequenties in procenten (1 cm per 2%).

2. > Schat het gemiddelde gewicht van een pak suiker.

Het histogram bij de steekproef is redelijk klokvormig.
In het boekje 'Statistiek' stonden de volgende vuistregels voor klokvormige verdelingen:

- ongeveer 68% van de waarnemingen ligt tussen GEM – 1 * SD en GEM + 1 * SD
- ongeveer 95% van de waarnemingen ligt tussen GEM – 2 * SD en GEM + 2 * SD

(GEM: gemiddelde en SD: standaardafwijking).

3. > Schat met behulp van de vuistregels hoe groot SD is bij deze steekproef.

4. > Controleer met je rekenmachine of je schattingen voor GEM en SD redelijk kloppen.

5. Per dag worden 5000 kilopakken suiker gevuld.

   >a Hoeveel procent daarvan zal minder dan 980 gram suiker bevatten, als je afgaat op de steekproefgegevens?

   >b En hoeveel is dat, als je de vuistregels toepast op GEM en SD die in opgave 4 zijn berekend?

foto: Suikerstichting Nederland

Zo'n 50% van de pakken suiker is te licht. Dat wordt gecompenseerd door de andere 50%: *gemiddeld* zit er 1000 gram suiker in een pak.
Bij deze vulmachine (met standaardafwijking 10) is de absolute spreiding in de gewichten zo'n 60 gram: lichter dan 970 gram en zwaarder dan 1030 gram komt bij de steekproef niet voor.
Een minder nauwkeurige vulmachine zou ook gemiddeld op 1000 gram uitkomen, maar een grotere absolute spreiding vertonen.

6. Stel dat er een vulmachine gebruikt wordt waarbij de standaardafwijking 20 gram is.

   >a Hoe groot zal in dat geval de absolute spreiding zo ongeveer zijn?

   De fabrikant let alleen maar op de totale hoeveelheid suiker die per jaar door een vulmachine in de pakken wordt gedaan.

   >b Maakt het voor die totale hoeveelheid verschil of hij een nauwkeurige of een minder nauwkeurige machine gebruikt?

   >c Kun je een argument bedenken waarom de fabrikant de voorkeur zou geven aan een minder nauwkeurige vulmachine?

   Voor een consument gelden andere criteria. Als hij een pak suiker koopt wil hij natuurlijk het liefst dat er zo veel mogelijk in zit. Meer dan een kilo vindt hij niet erg. Veel minder dan een kilo is vervelend.

   >d Welke vulmachine past het beste bij de wensen van de consument: de nauwkeurige of de minder nauwkeurige?

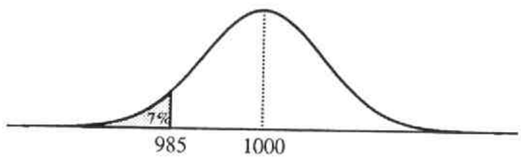
In 1980 zijn door de EG-landen bindende afspraken gemaakt over machinaal verpakte artikelen. Fabrikanten die zich aan deze afspraken (de zgn. EG-normen) houden tonen dat door op de verpakking aan de inhoudsopgave de letter 'e' toe te voegen.

De bedoeling van de EG-normen is dat de consument niet onaangenaam verrast wordt door een artikel waar veel minder in zit dan er op de verpakking staat.
De belangrijkste eis die aan *kilo*verpakkingen wordt gesteld, is:

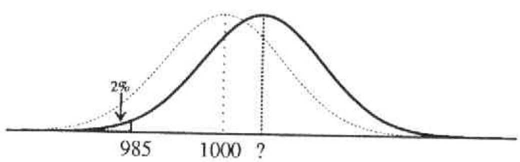
> 'Ten hoogste 2% van de artikelen mag een *ondergewicht* hebben van meer dan 15 gram'.

7. > Voldoen de pakken suiker uit de steekproef aan deze eis?

Weergegeven in een globale grafiek zorgt de vulmachine voor het volgende:



De nauwkeurigheid waarmee pakken suiker worden gevuld is onafhankelijk van het vulgewicht. De fabrikant zou dus wat meer suiker in de pakken moeten stoppen, om aan de EG-eis te kunnen voldoen. Voor de globale grafiek betekent dit dat de hele kromme naar rechts geschoven wordt, waarbij de *vorm* van de grafiek precies hetzelfde blijft.



De vraag is nu: hoe ver moet er naar rechts geschoven worden?

8. > Onderzoek (met behulp van de steekproef) op welk gemiddeld gewicht de vulmachine moet worden ingesteld, als de fabrikant aan de 2%-eis wil voldoen.

Bij de steekproef van 500 stuks bleek: GEM = 1000, SD = 10.
Andere steekproeven zullen in het algemeen ook andere waarden voor GEM en SD opleveren.

9. Bij een steekproef van 4 pakken werden de volgende vulgewichten gemeten: 1003, 974, 1006 en 994 gram.

   > Bereken GEM en SD voor deze kleine steekproef.

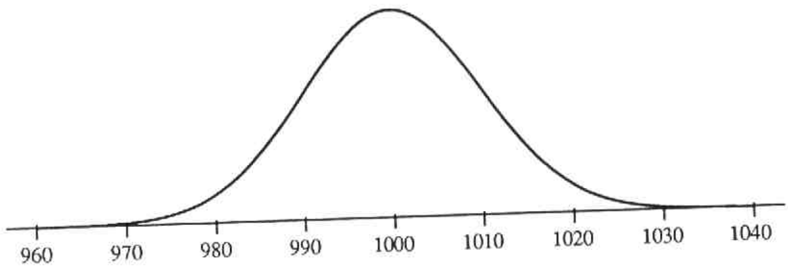
Aangenomen wordt, op basis van de grote steekproef, dat de totale produktie van kilopakken suiker ook klokvormig is verdeeld. Het gemiddelde en de standaardafwijking kunnen geschat worden aan de hand van een steekproef.

10. > Voor die schattingen kun je beter een grote steekproef gebruiken dan een kleine. Waarom?

Van klokvormige verdelingen zijn wiskundige modellen gemaakt. Je zou ze 'ideale klokvormen' kunnen noemen.
Meer gebruikelijk is de naam *normale verdeling*.

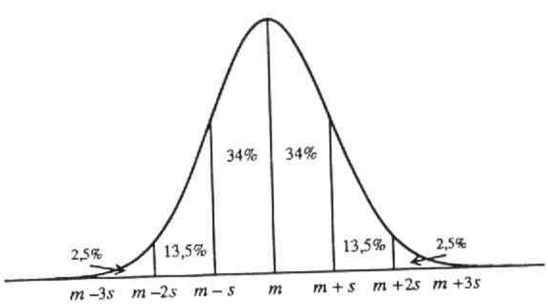
Het gemiddelde en de standaardafwijking (GEM en SD bij een steekproef) zullen we voortaan in de ideale situatie, dus bij een normale verdeling, m (= gemiddelde) en s (= standaardafwijking) noemen.

De normale kromme die hoort bij $m = 1000$ en $s = 10$:



Voor iedere normale kromme geldt:
- modus, mediaan en gemiddelde vallen samen in het midden;
- de grafiek is symmetrisch ten opzichte van het midden, dus: de rechterhelft is het spiegelbeeld van de linkerhelft;
- vrijwel de hele kromme ligt tussen de grenzen $m - 3 * s$ en $m + 3 * s$;
- de totale oppervlakte onder de kromme stellen we op 100%.

De oppervlakte onder de kromme kan grofweg als volgt worden opgedeeld:



11. > Ga na dat de percentages die in de klokvorm staan, overeenkomen met de vuistregels.

12. In een fabriek worden blikken gevuld met (gemiddeld) 1 liter verf. De standaardafwijking van de vulmachine is 15 ml.

>a Teken de normale kromme die bij dit vulproces hoort.

>b Hoe groot is het percentage blikken dat meer dan 30 ml verf te weinig bevat?

Een liter verf weegt 2 kilo.

>c Teken de normale kromme opnieuw, maar nu voor de verdeling van het gewicht (in grammen). Bij de horizontale as worden nu dus grammen vermeld in plaats van milliliters.

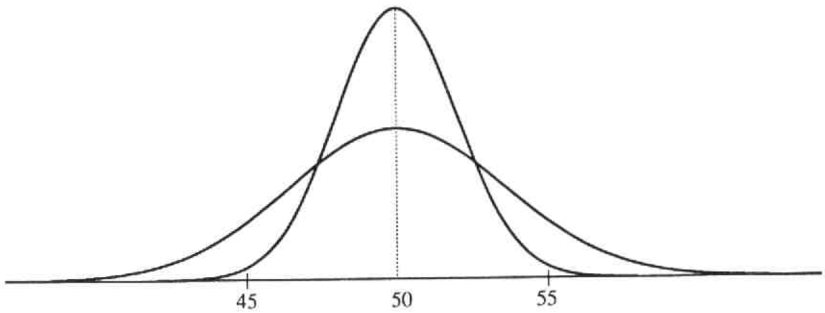
>d Hoeveel procent van de blikken heeft een ondergewicht van meer dan 30 gram?

De vorm van een normale kromme kan ook beschreven worden in termen van stijgen en dalen. Daartoe wordt de kromme in vier stukken opgedeeld.
Op het eerste stuk van links af gezien is sprake van toenemende stijging.
Voor het tweede, derde en vierde stuk geldt dat er van links af gezien achtereenvolgens sprake is afnemende stijging, toenemende daling en afnemende daling.

13. > Controleer bij de twee normale krommen op blz. 5 dat de overgangen tussen de vier stukken liggen bij m - s, bij m en bij $m + s$.

Je kunt bij een gegeven normale kromme dus een redelijke schatting maken van de standaardafwijking door te kijken waar de kromme een *buigpunt* heeft.

14. De hieronder getekende krommen hebben beide gemiddelde $m = 50$.
De standaardafwijkingen zijn verschillend.



> Maak voor beide verdelingen een schatting van de standaardafwijking.

Niet alleen bij vulprocessen komt een normale verdeling voor. De lichaamslengte van volgroeide mensen blijkt ook normaal verdeeld te zijn.

Dienstplichtigen naar lichaamslengte per keuringsjaar

	18,5-jarigen		19-jarigen	18-jarigen		
	1950	1960	1970	1980	1985	1986
%						
-159 cm	1,5	0,7	0,3	0,2	0,1	0,1
160-164 cm	6,0	3,4	1,5	1,0	0,7	0,7
165-169 cm	17,3	12,2	6,8	4,4	3,6	3,4
170-174 cm	28,3	25,5	18,6	13,9	11,8	11,6
175-179 cm	27,0	30,0	29,0	25,9	24,0	23,8
180-184 cm	14,4	19,1	25,8	28,0	28,9	28,9
185-189 cm	4,5	7,2	12,9	17,7	19,9	20,4
190-194 cm	0,9	1,7	4,2	6,8	8,3	8,4
195-199 cm	0,1	0,2	0,8	1,7	2,2	2,2
200 cm en meer	0,0	0,0	0,1	0,3	0,5	0,5
Gemeten abs. (=100%)	79 696	77 950	88 847	104 746	105 521	103 370

Pas op: 170-174 cm staat voor alle lengtes vanaf 170 cm tot aan 175 cm. De klassebreedte is dus 5 cm.

15. >a Maak een histogram voor de frequentieverdeling van 1986.
Gebruik als schaal: horizontaal 1 cm per 5 cm lengte; vertikaal 1 cm per 5%.

>b Benader het histogram zo nauwkeurig mogelijk met een normale kromme.

>c Schat uit de grafiek de gemiddelde lengte en de standaardafwijking.

16. >a Teken in de figuur van opgave 15 ook de lengteverdeling van 1950.

>b Wat is er in die 36 jaren gebeurd met de gemiddelde lengte?
En met de standaardafwijking?

De lichaamslengte van 18-jarige jongens is kennelijk ook normaal verdeeld.

Dienstplichtigen 7,5 centimeter langer dan veertig jaar terug

Utrecht (ANP) — Jongens die voor de dienstplicht worden gekeurd, zijn tegenwoordig gemiddeld ongeveer 181,3 centimeter lang: 7,5 centimeter langer dan vlak na de oorlog. De Drenten zijn het langst en de Limburgers het kortst, maar de verschillen tussen de provincies worden kleiner.

Dit is becijferd door J. van Hussen van het Centraal Bureau voor de Statistiek, die daarvoor de gegevens van de dienstplichtkeuring vanaf 1948 heeft nageplozen. Die gegevens zijn niet helemaal vergelijkbaar doordat de gemiddelde keuringsleeftijd in 1979 is verlaagd van 19 tot 18 jaar, maar ze geven wel een tendens weer.

De lengtegroei bij mannen stopt als ze ongeveer 19,5 jaar zijn. Een eeuw geleden was dat pas op 25-jarige leeftijd het geval en in de eerste helft van de jaren vijftig groeiden mannen na hun 20ste nog iets door.

Na de oorlog was het verschil in de provincies met de langste en de kortste jongemannen nog 4,6 centimeter. Dat verschil is nu teruggelopen tot 3,3 centimeter. Drenthe heeft met een gemiddelde van 182,77 centimeter Friesland (182,54) verdrongen als provincie met de langste mannen, Limburg staat nog steeds onderaan met 179,45 centimeter (1948: 171,4).

De gemiddelde lengte nam het snelst toe tussen 1960 en 1978 (gemiddeld 2,3 millimeter per jaar). Daarna kwam er jaarlijks gemiddeld 1,6 millimeter bij.

17. >a Kloppen de schattingen van opgaven 15 en 16 met de cijfers die in het beginstuk van het artikel worden genoemd?

    >b Wat was in 1948 de gemiddelde lengte van de Friese dienstplichtigen?

18. We nemen aan dat de lengte van de dienstplichtigen *per provincie* ook normaal verdeeld is.

    >a Is de standaardafwijking per provincie anders dan die van alle Nederlandse dienstplichtigen samen?

    >b Stel: je neemt van de dienstplichtigen uit 1986 alleen de Drentse en Limburgse jongens samen. De verdeling van hun lengte zet je in een (globale) grafiek.
    Hoe ziet die grafiek er uit?

19. In Engeland wordt nog vaak gerekend met inches. Eén inch is ongeveer 2,54 cm.
    Stel dat de Engelse dienstplichtigen dezelfde lengteverdeling hebben als hun Nederlandse lotgenoten.

    >a Wat is de gemiddelde lengte en de bijbehorende standaardafwijking uitgedrukt in inches?

    >b Pas het histogram van opgave 14 aan voor de Engelse situatie.

De benaming 'normale verdeling' wekt de suggestie dat niet-klokvormige verdelingen een beetje vreemd zouden zijn. Dat is natuurlijk niet zo. Andere dan klokvormige verdelingen komen ook veel voor.

20.

Aantal particuliere huurkamers gedaald

Van onze verslaggever

DEN HAAG/AMSTERDAM – Het aantal kamers dat door particulieren te huur wordt aangeboden, is vorig jaar gedaald. De vraag naar kamers bleef ongeveer gelijk, maar was bijna drieëneenhalf maal groter dan het aanbod. Ook de vraag naar studentenhuisvesting is groter dan het aanbod. Dat blijkt uit een enquête van de Landelijke Organisatie Belangengroepen Huisvesting (LOBH) onder vijftien niet-commerciële kamerbemiddelingsbureaus.

De resultaten van de enquête werden maandag bekendgemaakt bij de presentatie van de nota Jongerenhuisvesting in de jaren Negentig. Deze notitie werd geschreven door belangenorganisaties op het gebied van jongerenhuisvesting, waaronder de LOBH en enkele politieke jongerenorganisaties.

Bij niet-commerciële kamerbureaus is de vraag naar kamers sinds 1986 met 1,5 procent gestegen. Het aanbod voor de ongeveer tienduizend ingeschrevenen daalde naar minder dan één kamer per drie kamerzoekenden.

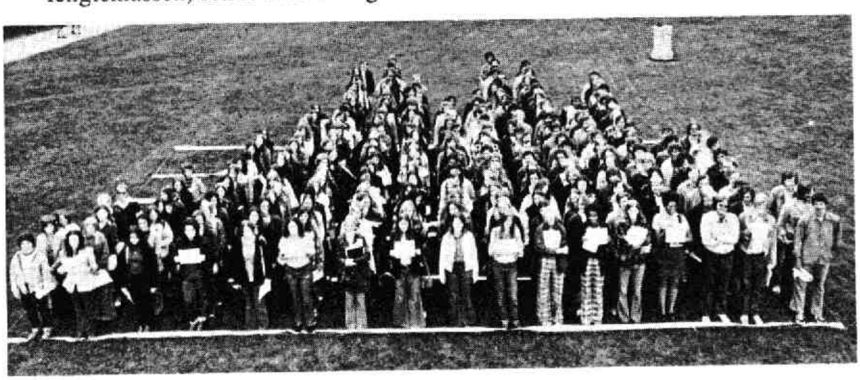
Ook stichtingen voor studentenhuisvesting kampen met een tekort aan kamers. De 28 duizend studenten die hier staan ingeschreven, moeten tussen de zes en 24 maanden wachten op een toewijzing. De gemiddelde wachttijd is ruim tien maanden. Door renovatie en samenvoeging van studentenkamers neemt het aanbod af. Uitwisselingsprogramma's met het buitenland zouden in toenemende mate beslag leggen op de kamers.

Volkskrant aug. '89

>a Hoe blijkt uit het artikel dat de wachttijd voor een kamer bij studenten niet normaal is verdeeld?

>b Maak een globale grafiek van de verdeling van de wachttijd.

21. Op de foto staan alle studenten van een Amerikaans college gegroepeerd in lengteklassen, een levend histogram dus.

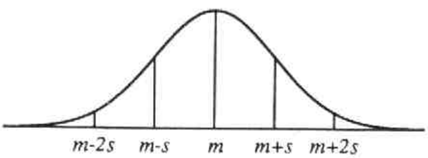


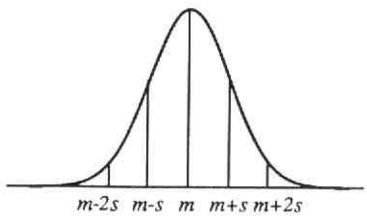
>a Is het histogram redelijk te benaderen door een normale kromme?

>b Kun je verklaren waarom de verdeling 'twee-toppig' is?

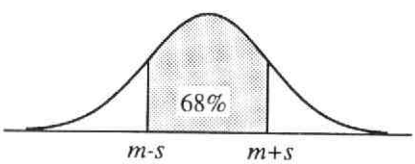
Samenvatting.

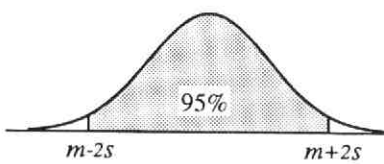
Bij klokvormige verdelingen past een wiskundig model: de normale verdeling.
De grafiek bij zo'n verdeling wordt een normale kromme genoemd.
Bepalend voor de vorm van de klok is de standaardafwijking (s): hoe groter s, des te breder de klok.

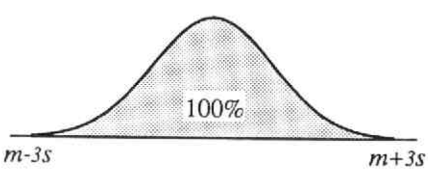




Eigenschappen die voor alle normale krommen gelden:
- de verticale lijn door het midden (m) is symmetrie-as;
- de oppervlakte onder de klok is 100%;
- de vuistregels:

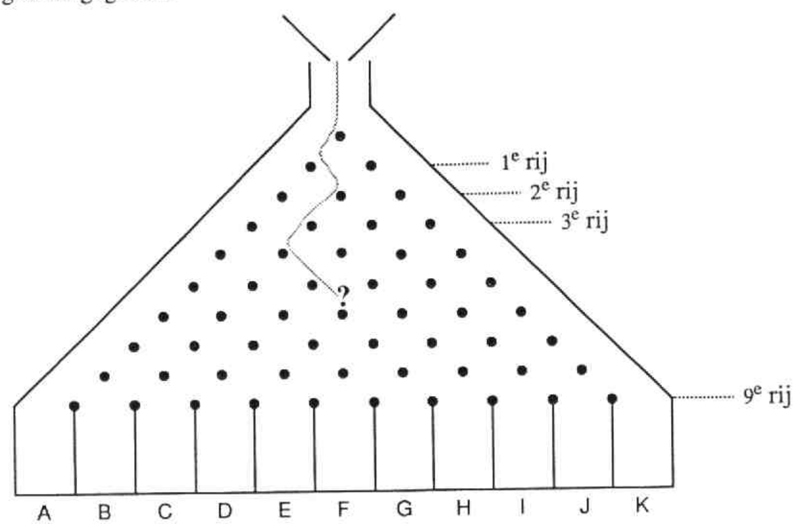






2 Het bord van Galton

In het boekje 'Kans en Verwachting' is het bord van Galton al even ter sprake gekomen. Op een bord is een aantal pinnen bevestigd op een manier zoals in de tekening is aangegeven.



Een kogeltje valt door de trechter op de bovenste pin. Vandaar ketst het naar links of naar rechts (puur afhankelijk van het toeval) op één van de twee pinnen op de eerste rij. Dat wordt een aantal keren herhaald. Uiteindelijk belandt het kogeltje in één van de elf bakjes A t/m K.

1. >a Hoeveel pinnen raakt een kogeltje, voordat het in één van de bakjes belandt?

   >b Een kogeltje komt in B terecht. Wat weet je van de gevolgde route? En als het in F valt?

2. Een kogeltje raakt op zijn weg naar beneden de derde pin op de zevende rij.

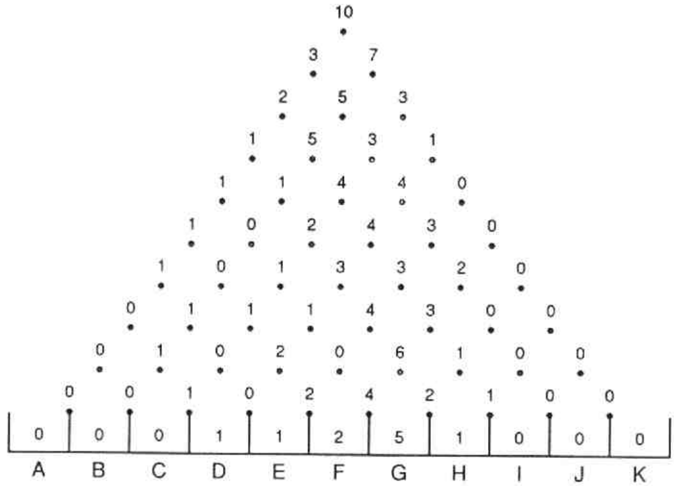
   > In welke bakjes kan het dan nog vallen?

Bij één enkel kogeltje valt absoluut niet te voorspellen welke route het zal volgen. Alle mogelijke routes zijn namelijk even (on)waarschijnlijk.

3. Stel: je laat 1100 kogeltjes door de trechter vallen.

   > Mag je aannemen dat die in ongeveer gelijke hoeveelheden verdeeld worden over de elf bakjes?

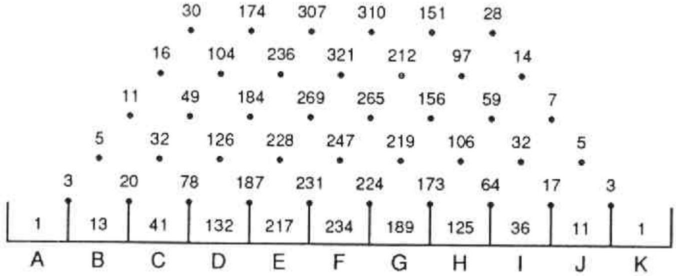
Het vallen van kogeltjes over het bord van Galton kan gesimuleerd worden met de computer.
Een resultaat van zo'n simulatie met 10 kogeltjes:



4. De tien kogeltjes lijken een zekere voorkeur te hebben voor de meer centraal gelegen bakjes D t/m H.

   > Is dat toeval?

Het resultaat van een simulatie met 1000 kogeltjes:



5. > Maak een histogram (met relatieve frequenties) van de verdeling van de kogeltjes over de elf bakjes.

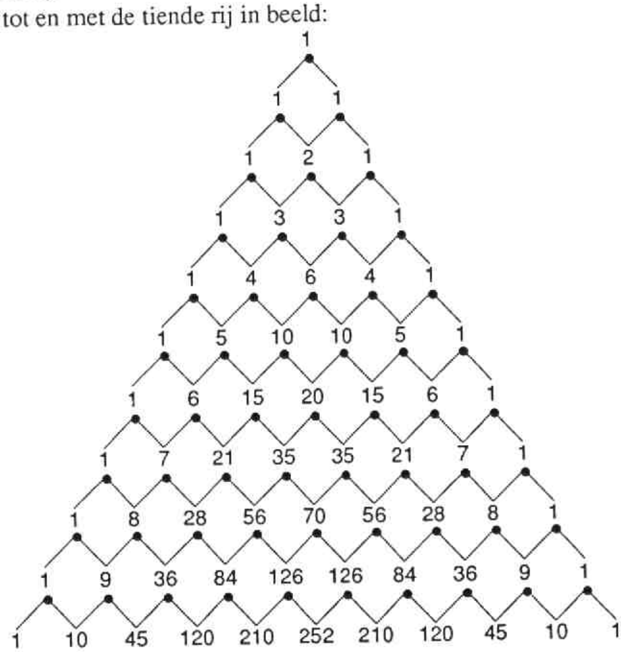
Zoals je in het histogram kunt zien is de verdeling over de bakjes al redelijk klokvormig.
Het middelste bakje (F) heeft een centrale rol. Die centrale plaats kunnen we benadrukken door de letters te vervangen door een nummering:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
-5	-4	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3	+4	+5

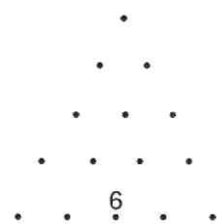
De positie van elk bakje wordt daardoor gegeven ten opzichte van het middelste bakje F: +3 betekent het derde bakje rechts van F.

6. Met deze nummering en de bijbehorende aantallen kogeltjes worden gemiddelde en standaardafwijking berekend. Resultaat (afgerond):
   GEM = 0 en SD = 1,6.
   >a Wat betekenen deze getallen, vertaald naar de bakjes?
   >b Controleer met de vuistregels of deze getallen redelijk passen bij het histogram van opgave 5.

Van een *enkel* kogeltje is onvoorspelbaar welke route het zal volgen over het bord. Bij een *grote serie* blijkt toch een zekere wetmatigheid op te treden. Er komen veel kogeltjes in de buurt van het middelste bakje en weinig in de buitenste.
Een verklaring voor dat gedrag kan gevonden worden in de driehoek van Pascal (zie Telproblemen).
De nulde tot en met de tiende rij in beeld:



De getallen in de driehoek geven aan hoeveel verschillende routes naar de betreffende pin leiden. Zo kun je aflezen dat er zes verschillende routes zijn naar de middelste pin op de vierde rij.



7. >a Teken die zes mogelijke routes.

   >b Beschrijf die zes routes met plussen en minnen (+ : kogeltje gaat naar rechts, –: kogeltje gaat naar links).

8. >a De getallen in de tiende rij zijn samen 1024 (= 2^{10}).
   Hoe verklaar je dat?

   >b Hoe groot is de kans dat een kogeltje in één van de vijf middelste bakjes terecht komt?

9. De getallen van de tiende rij in de driehoek van Pascal komen aardig overeen met de verdeling van de 1000 kogeltjes over de elf bakjes bij de simulatie.

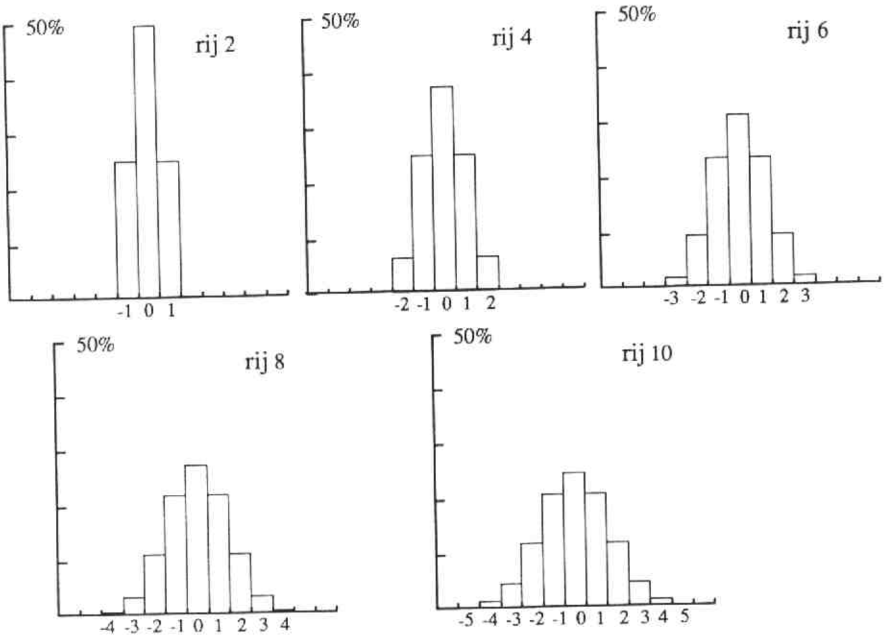
   >a Logisch?

   >b Geldt dat ook voor bijvoorbeeld de zesde rij van de driehoek en de zesde rij pinnen?

Hoe meer kogeltjes er over het bord gestuurd worden, hoe beter de aantallen bij de pinnen overeenkomen met de getallen uit de driehoek van Pascal.
De ideale verdeling van kogeltjes over de pinnen van de rijen 2, 4, 6, 8 en 10 staat op bladzijde 15 in histogrammen weergegeven.

In de plaatjes zie je dat de verdeling over de pinnen steeds meer op een normale verdeling gaat lijken naarmate je verder op het bord komt.
Steeds geldt: gemiddelde = 0.

10. > Bereken voor rij 8 de standaardafwijking.



Een complete tabel van de standaardafwijkingen voor de eerste twintig rijen (afgerond op vier decimalen):

rijnummer	SD	rijnummer	SD
1	0,5	11	1,6583
2	0,7071	12	1,7321
3	0,8660	13	1,8028
4	1	14	1,8708
5	1,1180	15	1,9365
6	1,2247	16	2
7	1,3229	17	2,0616
8	1,4142	18	2,1213
9	1,5	19	2,1794
10	1,5811	20	2,2361

In deze tabel komen slechts vier exacte waarden van SD voor, namelijk bij de rijnummers 1, 4, 9 en 16.

11. >a Heb je enig idee bij welk rijnummer de eerstvolgende exacte waarde van SD optreedt?
Hoe groot is dan de SD?

>b Welk verband bestaat er in deze vier gevallen tussen rijnummer en de bijbehorende SD?
Aanwijzing: Neem de wortel van de rijnummers en vergelijk die met de bijbehorende SD.

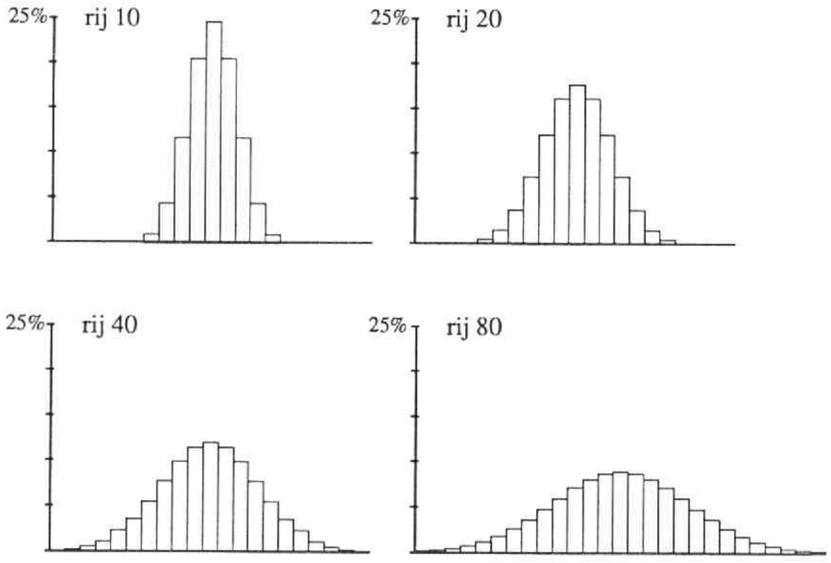
12. Als een rijnummer *vier* maal zo groot wordt, dan wordt de bijbehorende SD *twee* maal zo groot.

    > Controleer deze uitspraak met de tabel.

13. > Hoe verandert de SD als een rijnummer *twee* maal zo groot wordt gemaakt?

14. > Bedenk een formule voor het verband tussen rijnummer en bijbehorende SD.

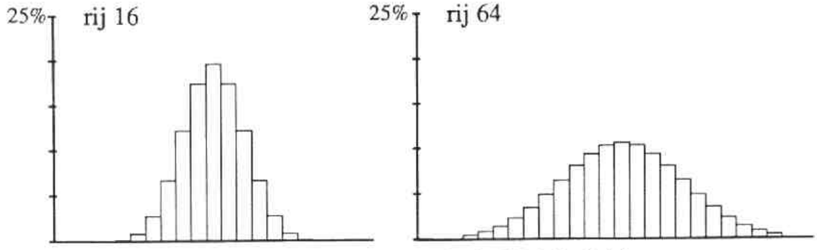
De normale vorm wordt steeds duidelijker zichtbaar naarmate er meer rijen pinnen worden toegevoegd aan het bord van Galton.
De ideale verdeling over de pinnen, getekend door een computer:



15. >a Schat uit de bovenstaande figuren de SD. bij de rijen 40 en 80.

    >b Kloppen die antwoorden met de formule van opgave 14?

16. De verdeling over de pinnen van rij 16 en rij 64:



De SD bij rij 64 is twee maal zo groot als de SD bij rij 16.

>a Ga na dat de absolute spreiding ook twee maal zo groot is.

>b Bij de verdeling op de 64ste rij is de hoogte twee maal zo *klein*. Logisch?

>c Controleer dat iets dergelijks ook geldt voor de verdelingen op rij 20 en rij 80.

Het bord van Galton staat als het ware model voor de normale verdelingen.
Bij een bord met twintig rijen pinnen wordt een kogeltje twintig keer opnieuw naar rechts (+) of links (–) gestuurd. Wanneer het aantal plussen opweegt tegen het aantal minnen, komt het kogeltje in het middelste bakje terecht. In alle andere gevallen krijg je afwijkingen ten opzichte van dat midden.
Daarbij geldt: de kans op een afwijking is kleiner, naarmate de afwijking groter is.

Bekijk nu eens de lengte van een volwassen persoon. Een mens groeit vanaf de bevruchting tot ongeveer het negentiende levensjaar. De groei wordt door allerlei factoren versterkt (+) of geremd (–). In veel gevallen speelt daarbij het toeval een rol. Al die (toevals)factoren tezamen bepalen het uiteindelijke resultaat: de lengte van een volgroeid mens.
Op deze manier bezien is de groei van één persoon vergelijkbaar met de route die één kogeltje volgt over het bord van Galton. Zo lijkt de lengteverdeling van bijvoorbeeld alle Nederlandse mannen op de verdeling van een grote serie kogeltjes over de bakjes van een bord van Galton.

17. >a Noem eens een aantal factoren die invloed hebben op de groei van een mens.

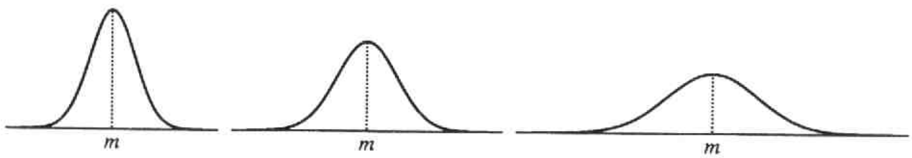
>b Kun je daarbij spreken van *toevals*factoren?

Het bovenstaande is niet alleen van toepassing op de lengtegroei van een mens. Iets dergelijks geldt voor allerlei groeiprocessen in de natuur, maar ook, bijvoorbeeld, voor de vulprocessen van hoofdstuk 1.
In het algemeen geldt: Wanneer het eindresultaat van een of ander proces beïnvloed wordt door een groot aantal toevalsfactoren, dan is het eindresultaat van dat proces bij benadering normaal verdeeld.

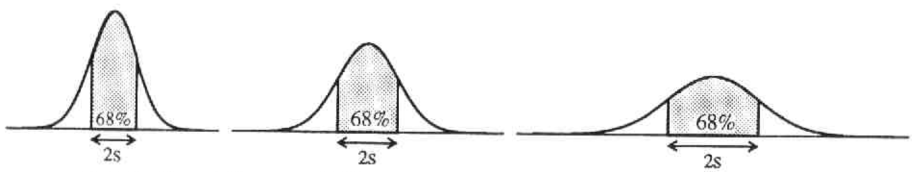
3 Standaard-normaal

Normale krommen kunnen variëren van heel smal (en hoog) tot heel breed (en laag). Ondanks die verschillende vormen hebben ze wel allemaal dezelfde 'karaktertrekken':

– Alle normale krommen zijn symmetrisch ten opzichte van het gemiddelde *m*:

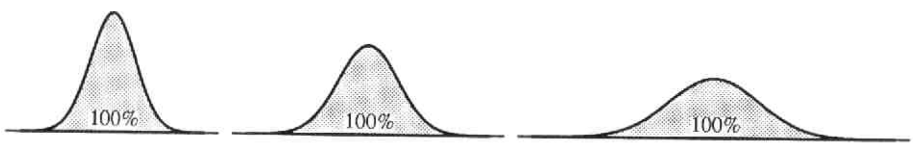


– de vuistregels:

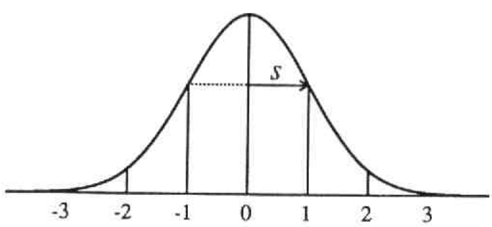


en iets dergelijks voor 95%

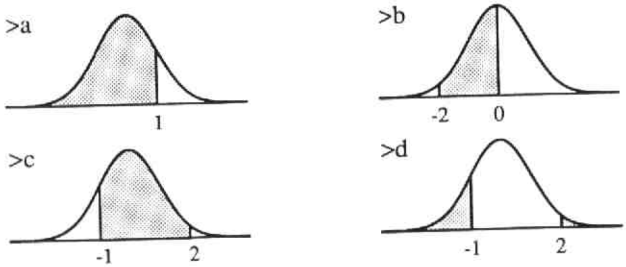
– de totale oppervlakte is 100%



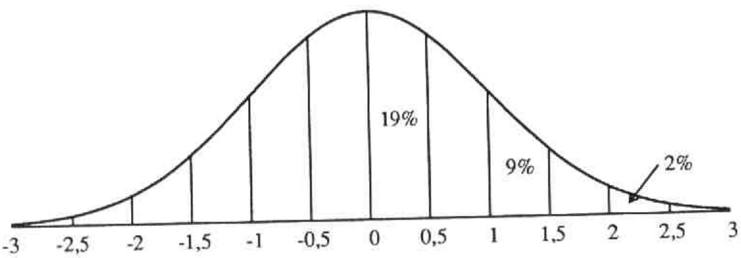
In dit hoofstuk zullen we één speciale normale kromme meer in detail gaan bekijken. Bij het volgende hoofdstuk zal blijken dat alle andere normale verdelingen zijn terug te brengen tot dat ene speciale geval.
Die speciale kromme is de zogenaamde *standaard-normale* kromme, met $m = 0$ en $s = 1$:



1. Bepaal met behulp van de vuistregels het percentage dat bij de aangegeven oppervlakte onder de standaard-normale kromme hoort:



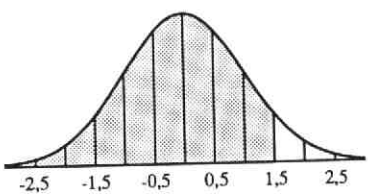
De verdeling onder de kromme in gebieden kan verder verfijnd worden, bijvoorbeeld tot stukjes met een breedte van 0,5:



2. In drie stukjes zijn de bijbehorende percentages al ingevuld.
   > Welke percentages horen bij de 9 resterende stukken?

Afspraak:
De getallen die bij de horizontale as staan vermeld noemen we z.
De oppervlakte onder de kromme vanaf de linkerkant tot aan de verticale lijn bij z noteren we als Φ (z).*)

Voorbeeld: in het plaatje hieronder is de oppervlakte tot aan $z = 1,5$ aangegeven. Die oppervlakte noteren we dus met $\Phi(1,5)$.



*) Φ is een griekse hoofdletter. Hij wordt uitgesproken als 'fie'.

Je kunt zelf controleren dat geldt: $\Phi(1{,}5) = 93\%$.

3. > Maak de volgende oppervlaktetabel af:

$z =$	$\Phi(z)$ (in %)
-2,5	
-2	
-1,5	
-1	
-0,5	
0	
0,5	
1	
1,5	93
2	
2,5	

4. >a Bereken met de tabel $\Phi(1) - \Phi(-0{,}5)$.

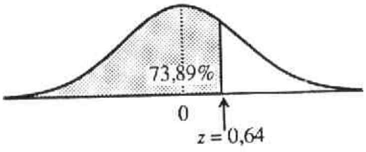
   >b Geef in een figuur de betekenis aan van het antwoord van >a.

5. > In de tabel van opgave 3 kun je zien dat geldt:
   $\Phi(-1{,}5) = 100 - \Phi(1{,}5)$.
   Verklaring?

Wanneer de oppervlakte onder de normale kromme nog verder wordt verfijnd, kunnen veel uitgebreidere tabellen worden samengesteld.
Achter in het boek (blz. 38,39) staat een tabel, waarbij z met stapjes van 0,01 toeneemt.
Bij deze tabel is niet gewerkt met de grove benaderingen die wij tot nu toe gebruikten. Bij de standaard-normale kromme hoort een ingewikkelde wiskundige formule waarmee de oppervlakten heel nauwkeurig kunnen worden bepaald.
Een deel van die tabel staat hieronder afgedrukt.

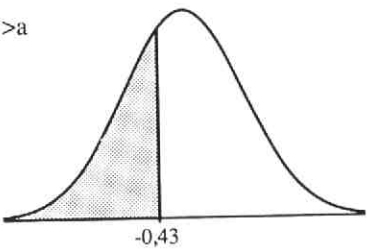
z	..0	..1	..2	..3	..4	..5	..6	..7	..8	..9
0,0..	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1..	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2..	0,5793	0,5382	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3..	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4..	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5..	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6..	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	$\boxed{0{,}7389}$	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7..	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8..	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9..	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0..	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8568	0,8599	0,8621

In de eerste kolom staan de z-waarden tot in één decimaal nauwkeurig.
Achter $z = 0,6$ staan 10 getallen vermeld. Dat zijn de oppervlaktegetallen $\Phi(z)$ die horen bij achtereenvolgens $z = 0,60$; $z = 0,61$; $z = 0,62$, ..., $z = 0,69$.
Zo geldt bijvoorbeeld (het omkaderde getal in de tabel) $\Phi(0,64) = 0,7389$.
De oppervlaktegetallen in de tabel zijn niet in procenten gegeven, maar als getallen die oplopen van 0,0000 tot 1.
Het getal 0,7389 kan dus ook gelezen worden als 73,89%.
De betekenis van $\Phi(0,64) = 0,7389$ in een plaatje uitgedrukt:

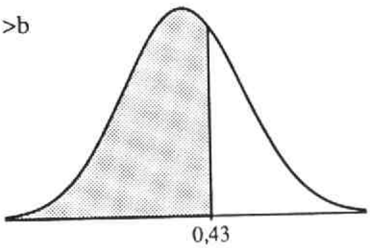


6. Bepaal met de tabel de oppervlakte van de aangegeven stukken:

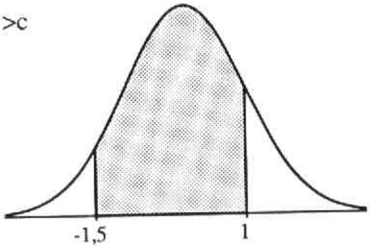
>a



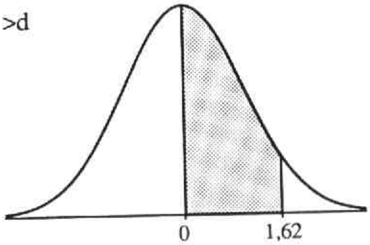
>b



>c



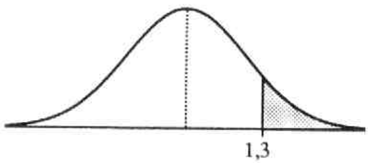
>d



In de loop van dit boekje zijn een aantal ruwe schattingen gemaakt, zoals:
- de oppervlakte tussen $z = -1$ en $z = 1$ is 68%
- de oppervlakte tussen $z = -2$ en $z = 2$ is 95%
- het eindpunt van de normale kromme ligt ongeveer bij $z = 3$
- $\Phi(1,5) = 93\%$.

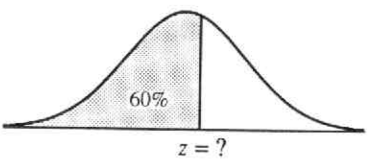
7. > Geef met de tabel betere schattingen voor deze vier gevallen.

8.



> Deze oppervlakte kan op twee verschillende manieren bepaald worden. Hoe?

De tabel kan dus gebruikt worden om bij gegeven z-waarden de oppervlakte op te zoeken.
Omgekeerd kan in een aantal gevallen bij een gegeven oppervlakte de bijbehorende z-waarde gevonden worden.
Een voorbeeld:

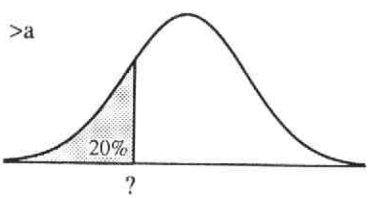


Voor de gevraagde z moet dus gelden: $\Phi(z) = 0{,}60$.
De z-waarde die daar het dichtst bij in de buurt komt, is $z = 0{,}25$.

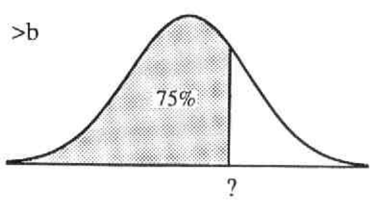
9. > Controleer dit in de tabel.

10. Welke z-waarden passen het best bij de volgende oppervlakten?

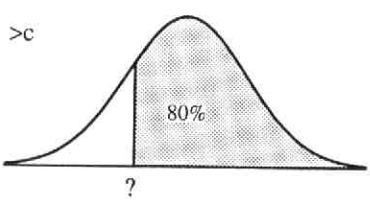
>a



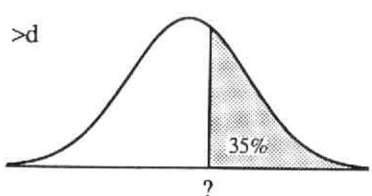
>b



>c

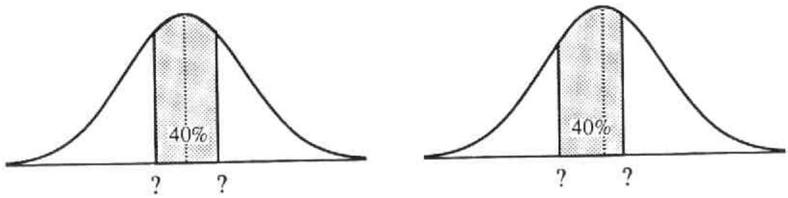


>d



Bij oppervlakten tussen twee z-waarden in lukt het terugzoeken meestal niet.

11. Twee situaties:

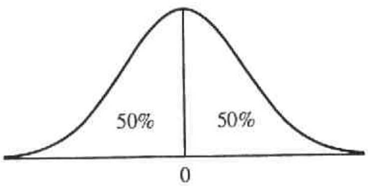


In het linkerplaatje liggen linker- en rechtergrens even ver van het midden.
Bij het rechterplaatje is dat niet zo.

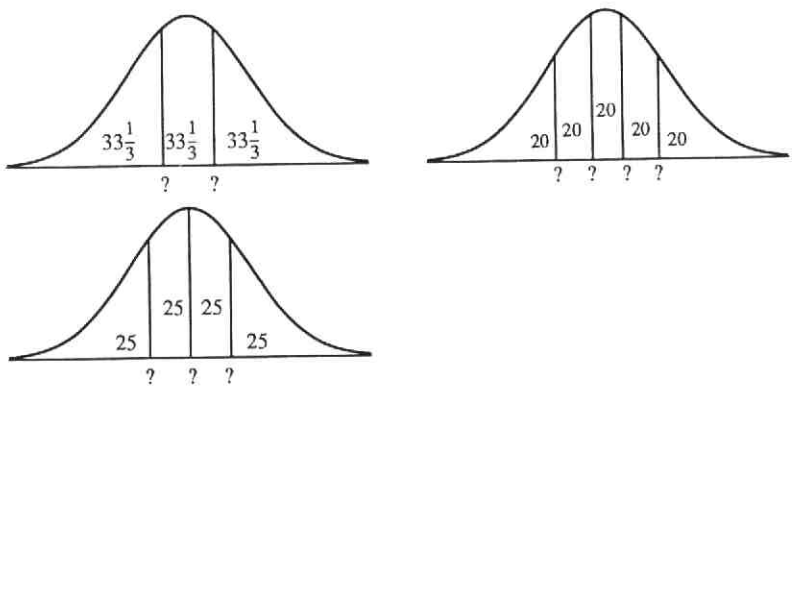
>a Waarom is het bij het linkerplaatje wel mogelijk om de twee z-waarden te bepalen en bij het rechterplaatje niet?

>b Bepaal de z-waarden bij het linkerplaatje.

12. De lijn bij $z = 0$ deelt de normale kromme in twee gelijke stukken, ieder met oppervlakte 50%.

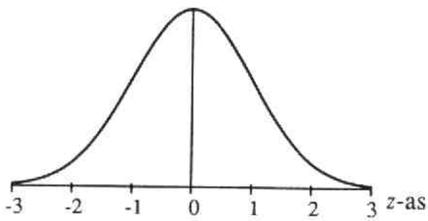


> Bepaal de z-waarden waarvoor de oppervlakte wordt verdeeld in achtereenvolgens 3 gelijke stukken, 4 gelijke stukken, 5 gelijke stukken.

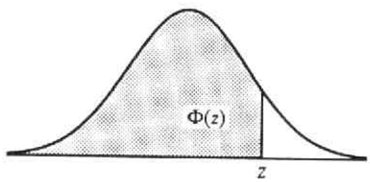


Samenvatting

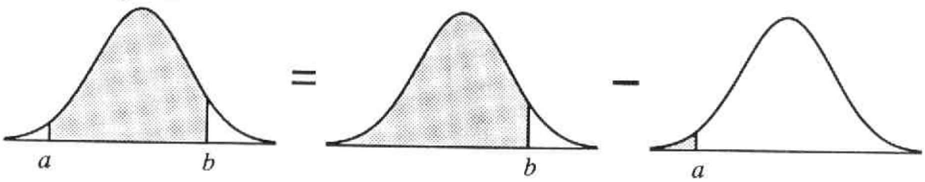
De standaard-normale kromme hoort bij een normale verdeling met gemiddelde $m = 0$ en standaardafwijking $s = 1$.



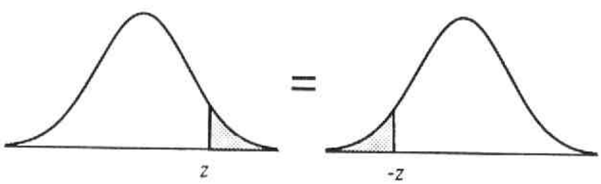
De oppervlakte onder de standaard-normale kromme vanaf de linkerkant tot aan een z-waarde noteren we als $\Phi(z)$.



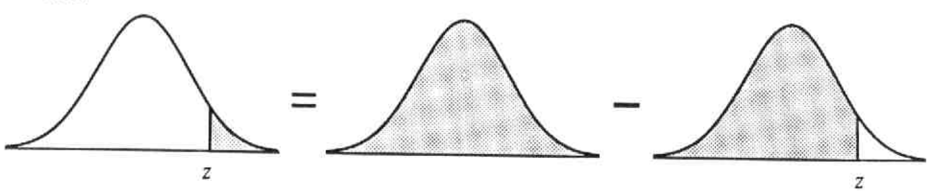
De waarden van $\Phi(z)$ zijn te vinden in de tabel, voor $z = -3{,}90$ tot $z = +3{,}90$ met stapjes van 0,01.
Verder geldt:



en:

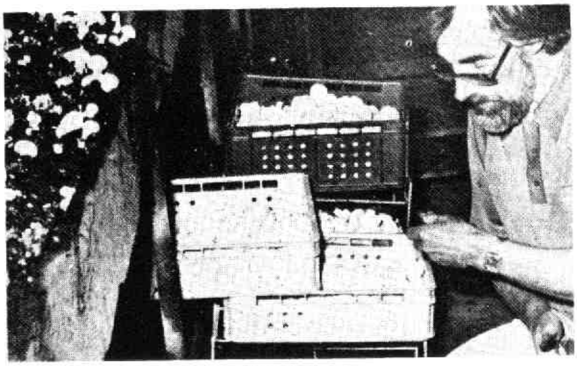


ook:



4 Van normaal naar standaard-normaal

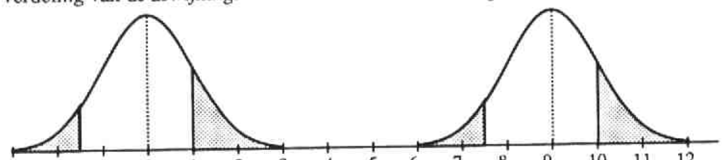
Champignons worden gekweekt in speciale ruimten. De opbrengst per vierkante meter kan onder goede omstandigheden oplopen tot 25 kilo.



Volwassen champignons worden dagelijks geoogst. De oogstperiode duurt zes weken. In die tijd worden zes "vluchten" champignons geplukt. Een "vlucht" wil zeggen dat er enkele dagen lang veel champignons op de kweekbedden staan. Als die worden geplukt, groeien er weer knoppen uit voor de volgende "vlucht". Na zes vluchten is de oogst voorbij. Er groeien dan nog wel champignons, maar het loont niet meer de moeite om ze te oogsten.

Een kweker heeft geoogst.
Het gewicht van de geoogste champignons is normaal verdeeld met een gemiddelde van 9 gram en een standaardafwijking van 1 gram.
De normale kromme die daarbij hoort heeft precies dezelfde vorm als de standaard-normale kromme.
Wanneer we letten op de verdeling van de *afwijking ten opzichte van het gemiddelde*, dan hebben we zelfs de standaard-normale verdeling te pakken:

verdeling van de afwijking: verdeling van het gewicht:



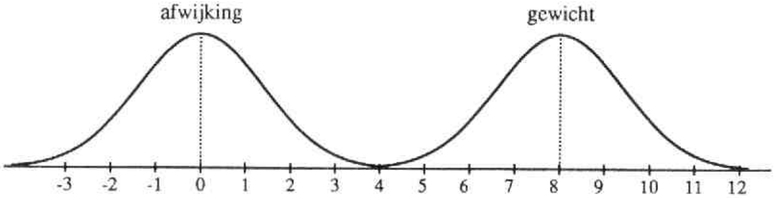
Dit betekent dat de oppervlakte-tabel van de standaard-normale kromme bruikbaar is voor deze gewichtsverdeling.

1. De grotere champignons (vanaf 10 gram) worden direct verkocht. De kleinere (minder dan 7,5 gram) worden verwerkt in soepen en sauzen.

   >a Welk percentage gaat in de directe verkoop?

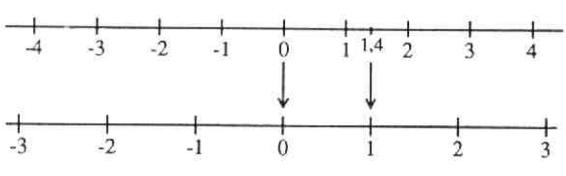
   >b Welk gedeelte van de oogst wordt verwerkt in soepen en sauzen?

De groei van champignons is erg afhankelijk van factoren als temperatuur, vochtigheid en bemesting.
Bij een andere kweker is het gewicht van de geoogste champignons ook normaal verdeeld, met een gemiddelde van 8 gram en een standaardafwijking van 1,4 gram. Ook hier vervangen we de verdeling van het gewicht door de verdeling van de afwijking ten opzichte van het gemiddelde.



2. De verdeling van de afwijking is nu niet standaard-normaal.
   > Waarom niet?

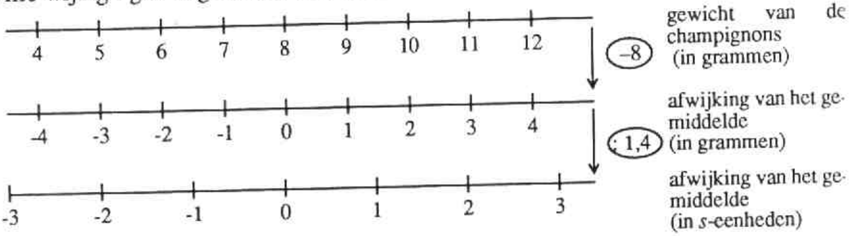
Met een slimme ingreep kan er voor gezorgd worden dat ook bij deze gewichtsverdeling met de standaard-normale tabel kan worden gewerkt.
Als eenheid op de horizontale as wordt in bovenstaande figuur 1 gram gebruikt. In plaats daarvan nemen we als eenheid de standaardafwijking s. Zo krijg je als het ware een *standaardschaal*.



De standaardafwijking was in dit geval 1,4 gram, dus een afwijking van 2,8 gram op de bovenste schaal correspondeert met een afwijking 2 op de standaardschaal.

3. >a Welk getal op de bovenste schaal hoort bij het getal 1,5 op de standaardschaal?
   >b Welk standaardschaal-getal hoort bij een afwijking van 4 gram? En bij een afwijking van 2 gram?
   >c Neem een willekeurig getal op de bovenste schaal, zeg a. Druk het bijbehorende getal op de standaardschaal uit in a.

Alle wijzigingen nog eens in een schema:

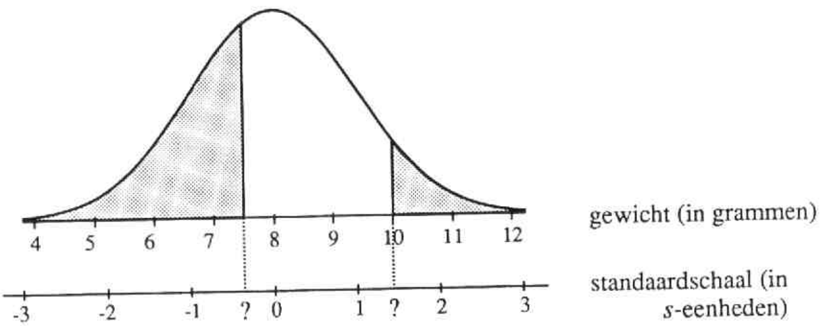


4. Het getal 1 op de standaardschaal hoort bij het gewicht 9,4 op de bovenste schaal.

   >a Welke gewichten op de bovenste schaal horen bij de getallen 2 en -3 van de standaardschaal?

   >b Welk getal op de standaardschaal hoort bij een gewicht van 11 gram?

5. Ook deze kweker bestemt de grotere exemplaren (vanaf 10 gram) voor de directe verkoop en de kleinere (tot 7,5 gram) voor de conservenindustrie.



   > Hoeveel procent van zijn oogst gaat naar de directe verkoop?
   En hoeveel naar de conservenindustrie?

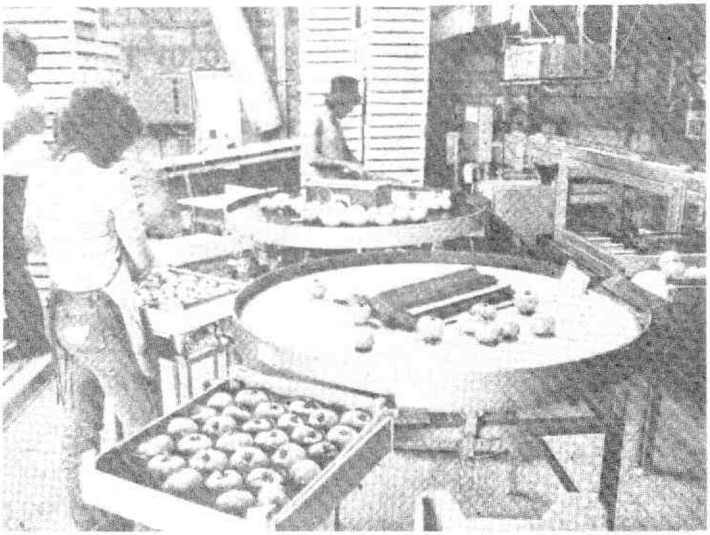
Iedere normale verdeling is op een soortgelijke manier te vertalen in termen van de standaard-normale verdeling. Daardoor is de oppervlaktetabel van de standaard-normale kromme te gebruiken bij iedere willekeurige normale kromme.

6. De lichaamslengte van 18-jarige jongens is normaal verdeeld. Bij de keuring van 1986 bleek de gemiddelde lengte van de 103.370 dienstplichtigen 181,3 cm te zijn, met een standaardafwijking van 7 cm.

   >a Hoeveel van die 103.370 jongens waren naar verwachting langer dan 190 cm?

   >b Jongens die langer zijn dan 200 cm of korter dan 160 cm worden afgekeurd op hun lengte. Hoeveel waren dat er zo ongeveer in 1986?

7. Een tomatenkweker heeft geoogst. De vruchten variëren in grootte en gewicht. Het gewicht is normaal verdeeld, met $m = 90$ gram en $s = 15$ gram. In totaal zijn 60.000 tomaten geoogst.
De oogst wordt op gewicht gesorteerd.



De sorteerafdeling van een tomatenkwekerij

De drie gewichtsklassen zijn:
klasse A: tot 70 gram
klasse B: van 70 gram tot 100 gram
klasse C: meer dan 100 gram.

>a Hoeveel procent van de oogst komt in elk van de gewichtsklassen terecht?

De opbrengst per tomaat hangt af van de gewichtsklasse:
klasse A: 20 cent
klasse B: 25 cent
klasse C: 30 cent.

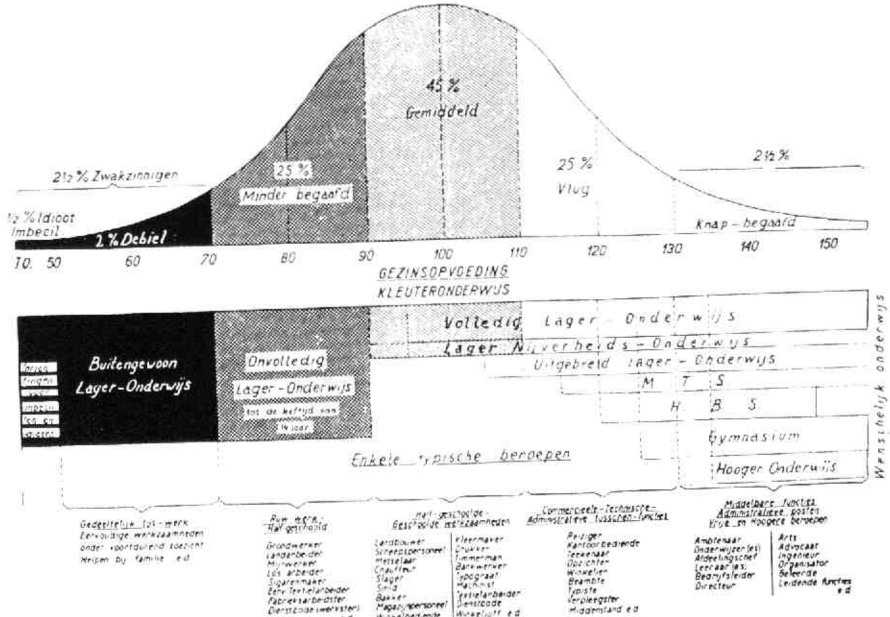
>b Welke opbrengst kan de kweker verwachten voor zijn hele oogst?

8. De levensduur van een bepaald type autoband is normaal verdeeld; gemiddeld is zo'n band na 40.000 km versleten, met een standaardafwijking van 6.000 km.

>a Hoe groot is de kans dat een band na 45.000 km nog niet versleten is?

>b Een band blijkt na 30.000 km al versleten te zijn.
Is dat zeldzame pech?

9. Intelligentie is één van de factoren die een rol spelen bij het met succes volgen van een opleiding.
In 1938 gebruikte een onderwijskundige onderstaande grafiek waarin de mate van intelligentie (uitgedrukt in IQ) werd gekoppeld aan soorten opleidingen en mogelijke beroepskeuzes.



DE VARIATIE VAN HET VERSTAND

Het IQ is normaal verdeeld, met gemiddelde $m = 100$.

>a Bepaal met behulp van de genoemde percentages de standaardafwijking.

>b Hoeveel procent van de bevolking werd in 1938 in staat geacht om tenminste de MTS als vervolgopleiding te kiezen?

>c Hoeveel procent kwam wel in aanmerking voor de HBS, maar niet voor het Gymnasium?

10. Twee fabrikanten brengen eenzelfde type lamp op de markt. Het aantal branduren is voor beide merken normaal verdeeld.

	gemiddelde (in uren)	standaardafwijking (in uren)
merk A	1250	300
merk B	1200	250

Je wilt een lamp kopen die minstens 1000 branduren heeft.

> Aan welk merk lamp geef je de voorkeur?

11. Alle Nederlandse munten worden in Utrecht geslagen bij 's Rijks Munt.
De afmetingen en gewichten zijn aan zeer strikte eisen gebonden:

muntsoort	metaal	middellijn in mm.	gewicht in grammen	tolerantie in duizendsten
vijftigguldenmunt	zilver	38,0	25,0	5
tienguldenmunt	zilver	38,0	25,0	3
vijfguldenmunt	verbronsd nikkel	23,5	9,25	27
rijksdaalder	nikkel	29,0	10,0	15
gulden	nikkel	25,0	6,0	15
kwartje	nikkel	19,0	3,0	15
dubbeltje	nikkel	15,0	1,5	15
stuiver	brons	21,0	3,5	15

Het gewicht van nieuw geslagen guldens is normaal verdeeld met:
$m = 6000$ mg en $s = 6$ mg.
Munten die meer dan 15 mg afwijken van het vereiste gewicht mogen niet in omloop worden gebracht.

>a Waarom gelden zulke strikte eisen voor het toegestane gewicht?

>b Welk percentage van de nieuw geslagen guldens zal niet in omloop worden gebracht?

>c Per jaar zijn er 25 miljoen nieuwe guldens nodig.
Hoeveel moeten er geslagen worden bij 's Rijks Munt om aan die vraag te kunnen voldoen?

container met 400.000 nieuw geslagen dubbeltjes (foto: 's Rijks Munt)

12. Bij vraagstukken rond de normale verdeling draait alles om drie grootheden: het gemiddelde m, de standaardafwijking s en een percentage (oppervlakte onder de normale kromme).
Deze drie grootheden zijn gekoppeld: als er twee bekend zijn, kan de derde worden berekend.
In principe zijn er dus drie verschillende soorten vragen mogelijk. Van elke soort volgt nu een voorbeeld.

>a m en s zijn bekend.
Auto's worden op de lopende band in elkaar gezet. Een robot heeft voor het monteren van een wiel gemiddeld 96 seconden nodig, met een standaardafwijking van 5 seconden.
Er treedt vertraging op in de totale montagelijn als de robot meer dan 110 seconden nodig heeft.
In hoeveel procent van de gevallen zal er vertraging optreden?

>b m en percentage zijn bekend.
Een robot heeft gemiddeld 80 seconden nodig voor het bevestigen van een bumper.
In zo'n 20% van de gevallen is hij al na 77 seconden klaar.
Hoe groot is de standaardafwijking?

>c s en percentage zijn bekend.
De robot die de deuren inzet, heeft daarvoor in 8 op de 1000 gevallen meer dan 105 seconden nodig.
De standaardafwijking voor deze bewerking bedraagt 4 seconden.
Hoeveel seconden doet deze robot gemiddeld over dit karwei?

13. Bij de fabricage van asjes blijkt de diameter normaal verdeeld te zijn met een standaardafwijking van 0,03 mm.
De gemiddelde diameter is gelijk aan de instelwaarde van de machine waarmee de asjes worden gemaakt.
Asjes worden afgekeurd als ze dunner zijn dan 9,98 mm of dikker dan 10,10 mm.
Per dag worden er 600 asjes gemaakt.

>a Stel dat de instelwaarde voor de diameter 10,01 mm is.
Hoeveel asjes zullen er dan naar verwachting per dag worden afgekeurd?

>b Iemand beweert dat het percentage afgekeurde asjes het laagst is als de instelwaarde precies tussen 9,98 mm en 10,10 mm gekozen wordt.
Heeft hij gelijk?

>c Wat is het kleinst mogelijke percentage asjes dat afgekeurd wordt?

14. *In de rechtszaal.*

In 1972 spande een groep vrouwen een proces aan tegen een fabriek in Texas die apparaten voor air-conditioning produceert.
Deze fabriek nam alleen nieuwe personeelsleden in dienst die langer waren dan 170,0 cm. De vrouwen waren bij hun sollicitatie afgewezen omdat ze niet aan deze eis voldeden.
De advocaat van de vrouwen benadrukte het discriminerende karakter van deze aanstellingsvoorwaarde door te stellen dat 91,0% van alle Amerikaanse vrouwen tussen 18 en 65 jaar niet lang genoeg was om aangenomen te kunnen worden. Dit percentage ontleende hij aan een onderzoek van het Amerikaanse ministerie van volksgezondheid.
Neem aan dat de lengte van de Amerikaanse vrouwen in de betreffende leeftijdsgroep normaal verdeeld is met gemiddelde m en standaardafwijking s.

>a Stel uitgaande van het genoemde percentage een verband op tussen m en s.

Neem aan dat $m = 160{,}4$ cm.

>b Toon aan dat $s \approx 7{,}2$ cm.

De groep Amerikaanse vrouwen tussen 18 en 65 jaar die langer zijn dan 170,0 cm noemen we V. Voor de mediaan (MED) van de lengte van de vrouwen van V geldt dat 50% van de vrouwen uit V langer is dan MED.

>c Toon aan dat $MED \approx 172{,}6$ cm, uitgaande van $m = 160{,}4$ en $s = 7{,}2$ cm.

De vertegenwoordiger van de fabriek bij het proces noemde het percentage van 91 sterk overdreven. Het door de tegenpartij aangehaalde onderzoek stamde uit 1948. De gemiddelde lengte van volwassenen was volgens hem in de periode 1948–1972 flink toegenomen.
Hij ondersteunde zijn betoog met het resultaat van een recent onderzoek. In een aselecte steekproef van 1000 vrouwen tussen 18 en 65 jaar werd bij 117 vrouwen een lengte gemeten van meer dan 172,6 cm.
Neem aan dat de standaardafwijking ongewijzigd is, dus $s = 7{,}2$ cm.

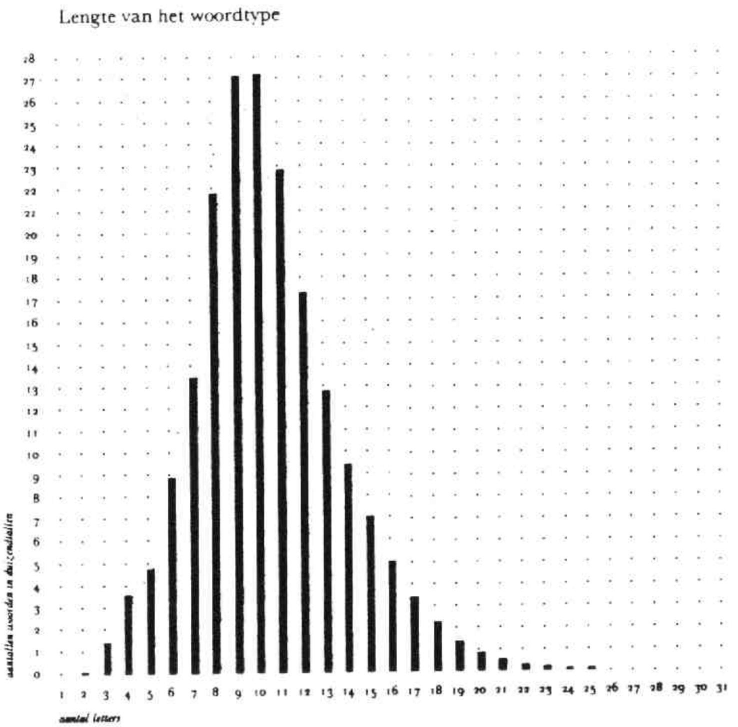
>d Wat is de gemiddelde lengte van de Amerikaanse vrouw volgens dit recente onderzoek?

De advocaat van de vrouwen gaf toe dat het door hem aangehaalde onderzoek wat verouderd was en de gemiddelde lengte van de vrouwen waarschijnlijk was toegenomen. Hij bleef echter benadrukken dat ook in 1972 nog steeds een grote meerderheid van de Amerikaanse vrouwen op grond van hun lengte door het bedrijf zou worden afgewezen.
Stel dat voor 1972 gold: $m = 164{,}0$ cm en $s = 7{,}2$ cm.

>e Bereken het percentage Amerikaanse vrouwen in de genoemde leeftijdsgroep dat in 1972 niet lang genoeg was voor een functie bij de fabriek.

(examenopgave VWO wiskunde A 1990; alleen >d is een vervangende vraag)

15. In het boek 'Opperlandse taal- en letterkunde' van Battus staat de volgende grafiek:



In de grafiek lees je af hoeveel woorden van 2, 3, ..., 25 letters er in een bepaald Nederlands woordenboek staan vermeld.
De woordlengte (het aantal letters per woord) is bij benadering normaal verdeeld, met een gemiddelde van 10.

>a Schat uit de grafiek de standaardafwijking.

Op één bladzijde van het woordenboek staan ongeveer 60 woorden.

>b Hoeveel woorden verwacht je daarbij met woordlengte 11?
(Gebruik hierbij het gemiddelde en de geschatte SD). *)

>c Hoeveel woorden met een woordlengte van meer dan 11 letters verwacht je op een bladzijde? *)

>d De antwoorden van >b en >c zijn alleen maar enigszins realistisch als je bepaalde veronderstellingen maakt. Welke?

*) De normale verdeling kan hier gebruikt worden als *alle* getallen op de horizontale as een betekenis krijgen. Dat kan als volgt: Beschouw het aantal letters van een woord als *afgerond* getal. Dus: 11 letters wordt gelezen als 10,5< aantal letters < 11,5.
Meer dan 11 letters wordt dan: aantal letters > 11,5.

Vulgewichten

De EG-voorschriften betreffende vulgewichten (zie hoofdstuk1) zijn in Nederland vastgelegd in het zogenoemde 'Hoeveelheidsaanduidingenbesluit'.
Een paar citaten uit dit besluit:

Art.1.-1. In dit besluit en de daarop berustende bepalingen wordt verstaan onder:
EEG-teken: de kleine letter *e*, zoals weergegeven in bijlage I van dit besluit;
e-voorverpakking: een serievoorverpakking, waarop het EEG-teken in samenhang met een aanduiding van de hoeveelheid van een produkt, dat van die serievoorverpakking deel uitmaakt, wordt gebezigd;
*nominale hoeveelheid van een serievoorverpakking:*de hoeveelheid, die een serievoorverpakking blijkens een met betrekking tot die voorverpakking gebezigde hoeveelheidsaanduiding wordt geacht te bevatten;
fout in minus van een serievoorverpakking: de hoeveelheid die de werkelijke inhoud van een serievoorverpakking kleiner is dan de nominale hoeveelheid van die voorverpakking;
Art.3. De *e*-voorverpakkingen moeten zodanig zijn, dat:
a. de werkelijke inhoud van die *e*-voorverpakkingen gemiddeld niet kleiner is dan de nominale hoeveelheid daarvan,
b. het aantal *e*-voorverpakkingen met een fout in minus die groter is dan de toegelaten fout, bepaald in bijlage II van dit besluit, zodanig is, dat bij statistische controle het toelaatbare aantal ondeugdelijke e-voorverpakkingen niet wordt overschreden, en
c. geen enkele van die *e*-voorverpakking een fout in de minus heeft, die groter is dan tweemaal de toegelaten fout als onder *b* bedoeld.
Art.10. De nominale hoeveelheid van een *e*-voorverpakking moet gelijk zijn aan of groter zijn dan 5 gram of 5 milliliter en mag niet meer zijn dan 10 kilogram of 10 liter.
Art.12. Het EEG-teken moet een hoogte hebben van ten minste 3 mm en moet zijn aangebracht in hetzelfde gezichtsveld als de aanduiding van de nominale hoeveelheid van die *e*-verpakking.

Bijlage II

Toegelaten fout, bedoeld in artikel 3, onder *b*, van het Hoeveelheidsaanduidingenbesluit (Warenwet)

Nominale hoeveelheid Q_n van een *e*-voorverpakking in gram of in milliliter	toegelaten fout in minus	
	in % van Q_n	in gram of milliliter
van 5 tot 50	9	-
van 50 tot 100	-	4.5
van 100 tot 200	4.5	-
van 200 tot 300	-	9
van 300 tot 500	3	-
van 500 tot 1000	-	15
van 1000 tot en met 10000	1.5	-

In artikel 3 worden de eisen vastgelegd, waaraan de inhoud van de e-voorverpakking moet voldoen.
In bijlage II staat voor de diverse hoeveelheden aangegeven hoe groot de toegelaten fout is.

16. >a Hoe groot is de 'toegelaten fout in minus' voor een literpak melk?
Wat is de kleinst toegestane hoeveelheid voor zo'n literpak?

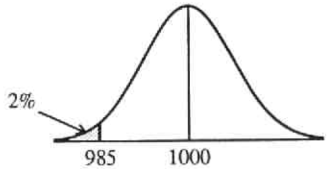
>b Dezelfde vragen voor een blikje cola (inhoud 33 cl.).

17. >a Teken een grafiek die het verband weergeeft tussen de nominale hoeveelheid Q_n (horizontaal, in gram) en de bijbehorende fout in minus (vertikaal, in gram).
De informatie die je nodig hebt, staat in bijlage II.

>b 'Hoe groter de nominale hoeveelheid, hoe strenger de eisen'.
Mag je dat concluderen uit de grafiek?

In artikel 3b is sprake van statistische controle, uit te voeren door de Keuringsdienst van Waren. Op geregelde tijden worden steekproeven genomen uit de dagproduktie. Afhankelijk van de steekproefgrootte is een toelaatbaar aantal ondeugdelijke verpakkingen vastgelegd.
In de praktijk betekent dit voor de fabrikant dat hij aan de veilige kant blijft als hoogstens 2% van zijn produktie een fout in minus heeft die groter is dan de toegelaten fout.
Bij kilopakken suiker betekent dat dus (zie hoofdstuk 1) dat 2% van de geproduceerde pakken meer dan 15 gram ondergewicht mag hebben.

18. Stel dat een fabrikant een zodanig nauwkeurige vulmachine heeft dat hij, bij een instelgewicht van 1000 gram, precies aan die eis voldoet.
Weergegeven in een figuur:



>a Welke standaardafwijking heeft die vulmachine dan?

>b Laat zien dat dan ook voldaan is aan de eis die genoemd wordt in artikel 3 punt c.

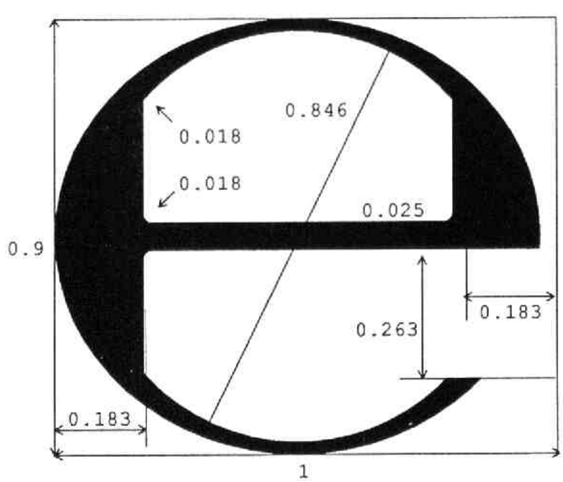
Erg nauwkeurige vulmachines zijn duur. In de praktijk zal een fabrikant met een wat minder precieze machine werken. Door het vulgewicht hoger in te stellen kan hij toch aan de eisen voldoen.

19. De suikerfabrikant heeft een vulmachine met een standaardafwijking van 10 gram.
    >a Hoe hoog moet hij het vulgewicht instellen om te voldoen aan de eis van artikel 3, punt b?
    >b Laat zien dat dan automatisch ook voldaan is aan de twee andere eisen van artikel 3.

20. Pakken koffie worden ook machinaal gevuld.
    Dat gebeurt wat preciezer dan bij suiker: de standaardafwijking is 5 gram.
    >a Op welk vulgewicht moet de machine worden ingesteld bij pondspakken, wil er voldaan zijn aan de EG-normen?

    Naast pondspakken zijn er ook halfpondspakken in de handel. Voor beide soorten pakken gelden de EG-normen.
    >b Onderzoek in welk van de twee gevallen de fabrikant het voordeligst uit is. Bereken daartoe voor zowel de halfpondspakken als de pondspakken de hoeveelheid koffie die hij verbruikt per nominaal gewicht van 1 kilo.

Bijlage I
behorende bij het Hoeveelheidsaanduidingenbesluit (Warenwet)



Vorm van de kleine letter e, bedoeld in artikel 1 van het Hoeveelheidsaanduidingenbesluit (Warenwet).
De aangegeven afmetingen zijn uitgedrukt in een getal, dat aangeeft welk deel van de betrokken afmeting uitmaakt van de lengte van de middellijn van de omschreven cirkel van de letter e.

Samenvatting.

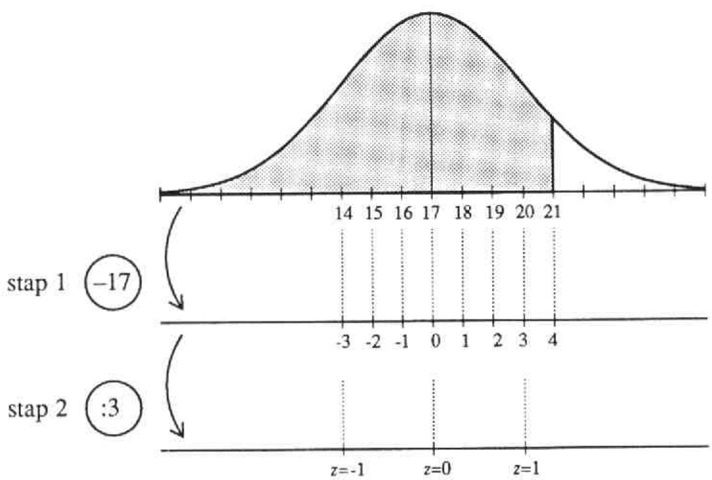
De oppervlaktetabel behorend bij de standaard-normale verdeling is ook bruikbaar bij iedere andere normale verdeling.
In twee stappen kunnen de gegevens van die normale verdeling *gestandaardiseerd* worden:

stap 1: Verminder alle gegeven getallen met het gemiddelde (m).
Daardoor krijg je een verdeling van de *afwijking* ten opzichte van het gemiddelde.

stap 2: Deel de afwijkingen door de standaardafwijking s.
Door deze bewerking worden de getallen op de horizontale as uitgedrukt in s-eenheden.

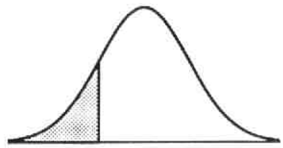
De getallen die nu langs de horizontale as staan, zijn de z-getallen behorend bij de standaard-normale verdeling.

Voorbeeld:
Gegeven een normale verdeling met $m = 17$ en $s = 3$.
De normale kromme hierbij is:



Het gearceerde stuk onder deze normale kromme kan nu met de Φ-tabel bepaald worden: $\Phi(\frac{4}{3}) \approx \Phi(1{,}33) = 0{,}9082$.

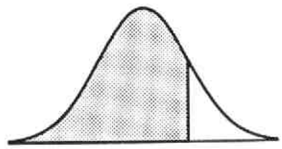
Oppervlaktetabel van de standaard-normale kromme



z

$\Phi(z)$ voor negatieve waarden van z

z	..0	..1	..2	..3	..4	..5	..6	..7	..8	..9
-0,0..	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4641
-0,1..	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247
-0,2..	0,4207	0,4618	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
-0,3..	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
-0,4..	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121
-0,5..	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2843	0,2810	0,2776
-0,6..	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514	0,2483	0,2451
-0,7..	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266	0,2236	0,2206	0,2177	0,2148
-0,8..	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922	0,1894	0,1867
-0,9..	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685	0,1660	0,1635	0,1611
-1,0..	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446	0,1432	0,1401	0,1379
-1,1..	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230	0,1210	0,1190	0,1170
-1,2..	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038	0,1020	0,1003	0,0985
-1,3..	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0869	0,0853	0,0838	0,0823
-1,4..	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0721	0,0708	0,0694	0,0681
-1,5..	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606	0,0594	0,0582	0,0571	0,0559
-1,6..	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485	0,0475	0,0465	0,0455
-1,7..	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392	0,0384	0,0375	0,0367
-1,8..	0,0359	0,0351	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322	0,0314	0,0303	0,0301	0,0294
-1,9..	0,0287	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256	0,0250	0,0244	0,0239	0,0233
-2,0..	0,0228	0,0222	0,0217	0,0212	0,0207	0,0202	0,0197	0,0192	0,0188	0,0183
-2,1..	0,0179	0,0174	0,0170	0,0166	0,0162	0,0158	0,0154	0,0150	0,0146	0,0143
-2,2..	0,0139	0,0136	0,0132	0,0129	0,0125	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110
-2,3..	0,0107	0,0104	0,0102	0,0099	0,0096	0,0094	0,0091	0,0089	0,0087	0,0084
-2,4..	0,0082	0,0080	0,0078	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0068	0,0066	0,0064
-2,5..	0,0062	0,0060	0,0059	0,0057	0,0055	0,0054	0,0052	0,0051	0,0049	0,0048
-2,6..	0,0047	0,0045	0,0044	0,0043	0,0041	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036
-2,7..	0,0035	0,0034	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026
-2,8..	0,0026	0,0025	0,0024	0,0023	0,0023	0,0022	0,0021	0,0021	0,0020	0,0019
-2,9..	0,0019	0,0018	0,0018	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014
-3,0..	0,0013	0,0013	0,0013	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010
-3,1..	0,0010	0,0009	0,0009	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007
-3,2..	0,0007	0,0007	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005
-3,3..	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003
-3,4..	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002
-3,5..	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
-3,6..	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
-3,7..	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
-3,8..	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
-3,9..	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000



$\Phi(z)$ voor positieve waarden van z

z	..0	..1	..2	..3	..4	..5	..6	..7	..8	..9
0,0..	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1..	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2..	0,5793	0,5382	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3..	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4..	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5..	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6..	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7..	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8..	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9..	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0..	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8568	0,8599	0,8621
1,1..	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2..	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3..	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4..	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5..	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6..	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7..	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8..	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9697	0,9699	0,9706
1,9..	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0..	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1..	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2..	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3..	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4..	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5..	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6..	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7..	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8..	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9..	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0..	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1..	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2..	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995	0,9995
3,3..	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4..	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5..	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6..	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7..	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8..	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9..	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000