Kans en verwachting

KANS EN VERWACHTING

KANS EN VERWACHTING

WISKUNDE A

KANS EN VERWACHTING

Een produktie ten behoeve van het project Hawex.

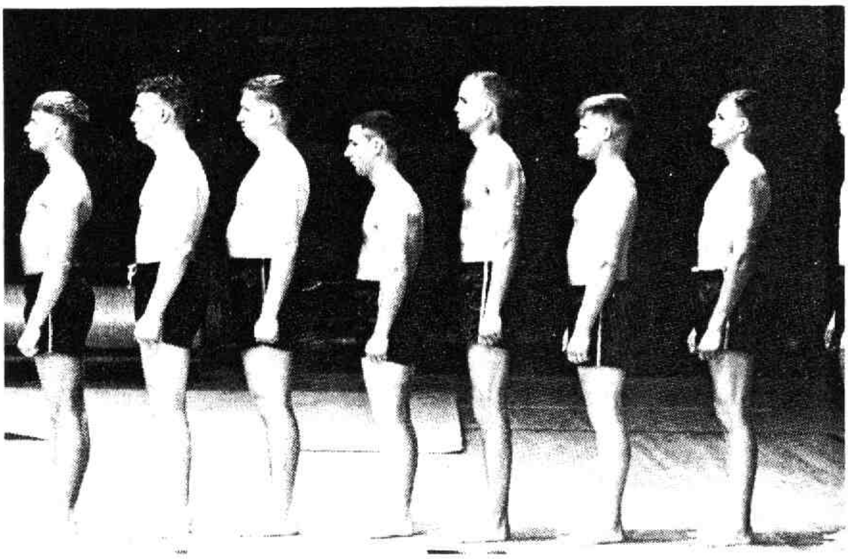
Ontwerper:	Henk van der Kooij
Met medewerking van:	Jan de Jong Martin Kindt Jan de Lange Martin van Reeuwijk Anton Roodhart
Vormgeving:	Ada Ritzer

© 1990: 3e versie
Utrecht, februari 1990

Inhoudsopgave

1 Wat verwacht je?

Ieder jaar worden bij keuringsbureaus, verspreid over het hele land, alle zeventienjarige jongens gekeurd voor de militaire dienst.



Van de ruim 100.000 jongens die jaarlijks worden onderzocht, blijkt zo'n 70% te worden goedgekeurd.

1. Bij een keuringsbureau in Delft zijn in maart 1988 in totaal 521 jongens onderzocht. Van deze groep werden er 389 goedgekeurd.

   >a Voldoet dit resultaat aan je verwachting?

   Op een van de dagen in die maand vertelde een keuringsarts dat hij drie van de tien onderzochte jongens had goedgekeurd.
   De reactie van de administrateur: 'dat is onmogelijk, je bedoelt natuurlijk afgekeurd'.

   >b Ben je het eens met die reactie?

   >c Hoe zou je reageren als er werd verteld dat er maar 15 jongens waren goedgekeurd van een groep van 200?

   >d Wat verwacht je voor de tweede helft van een jaar, als blijkt dat over de eerst helft van dat jaar 55% is goedgekeurd?

Bij de keuring worden allerlei gegevens van de jongens nauwkeurig geregistreerd. Zo ontstaat een totaalbeeld voor die leeftijdsgroep van bijvoorbeeld de lengteverdeling.

Dienstplichtigen naar lichaamslengte per keuringsjaar

	18,5-jarigen		19-jarigen	18-jarigen		
	1950	1960	1970	1980	1985	1986
%						
-159 cm	1,5	0,7	0,3	0,2	0,1	0,1
160-164 cm	6,0	3,4	1,5	1,0	0,7	0,7
165-169 cm	17,3	12,2	6,8	4,4	3,6	3,4
170-174 cm	28,3	25,5	18,6	13,9	11,8	11,6
175-179 cm	27,0	30,0	29,0	25,9	24,0	23,8
180-184 cm	14,4	19,1	25,8	28,0	28,9	28,9
185-189 cm	4,5	7,2	12,9	17,7	19,9	20,4
190-194 cm	0.9	1,7	4,2	6,8	8,3	8,4
195-199 cm	0,1	0,2	0,8	1,7	2,2	2,2
200 cm en meer	0,0	0,0	0,1	0,3	0,5	0,5
Gemeten abs. (=100%)	79 696	77 950	88 847	104 746	105 521	103 370
Gemiddelde lengte (cm)	174,0	175,8	178,5	180,3	181,2	181,3

2. >a Welk percentage van de 18-jarige dienstplichtigen in 1986 heeft een lengte tussen 170 en 180 cm?

   >b Hoeveel jongens zijn dat?

In de legerplaats Oirschot is een tankbataljon gehuisvest. Door de zeer beperkte ruimte binnen een tank komen jongens die langer zijn dan 180 cm niet in aanmerking voor het berijden van zo'n gevaarte.

>c Van de dienstplichtigen van 1986 worden er 50 aangewezen om in Oirschot een opleiding tankrijden te krijgen. Natuurlijk zijn al die jongens kleiner dan 180 cm.
Hoeveel jongens verwacht je daarbij die langer zijn dan 170 cm?

3. Van alle onderzochte jongens is 70% goedgekeurd.
   Neem aan dat van *alle* lengtecategorieën 70 % is goedgekeurd.
   In 1986 bleek dat alle legerplaatsen in Nederland tezamen plaats hadden voor maximaal 70.000 nieuwkomers. Besloten werd om alle jongens langer dan 195 cm of korter dan 165 cm naar huis te sturen.

   >a Controleer dat er door deze maatregel genoeg plaatsingsruimte overbleef voor de resterende nieuwkomers.

   >b Door dit ingrijpen klopt de tabel van 1986 niet meer.
   Maak een nieuwe tabel van de procentuele verdeling van de lichaamslengten, waarbij het nieuwe aantal op 100% wordt gesteld.

   >c Hoe groot is in de nieuwe situatie het percentage dienstplichtigen dat een lengte heeft tussen 170 en 180 cm?

Verzekeringen

Wintersportvakanties zijn niet geheel gevaarloos, zeker niet als er geskied wordt.

Ongeveer 6% van alle skiërs raakt in mindere of meerdere mate gewond. De behandelingskosten variëren van een paar tientjes tot een paar duizend gulden (denk maar aan de zogenaamde 'gipsvluchten'). Gemiddeld liggen de kosten rond *f* 400,–.

Per jaar gaan er zo'n 100.000 Nederlanders skiën.

Natuurlijk kunnen die geen van allen voorzien of ze een ongeluk zullen krijgen. Verzekeringsmaatschappijen bieden de mogelijkheid om je tegen onverwachte tegenvallers te verzekeren. Tegen betaling van een (kleine) premie nemen ze als het ware jouw risico over.

4. Stel dat alle skiërs zich verzekeren.

   >a Welk bedrag zal er per jaar dan naar alle waarschijnlijkheid door de verzekeringen worden uitgekeerd?

   >b Hoe hoog moet de premie per persoon zijn om de verwachte uitbetalingen te dekken?

5. Neem eens aan dat slechts de helft van het aantal skiërs zich verzekert.

   >a Welke invloed heeft dat op de hoogte van de premie?

   >b Welke premie moet gevraagd worden als maar één persoon zich verzekert?

Het risico op ongelukken is voor beginners groter dan voor ervaren skiërs. Voor beginners is het percentage 10%, voor gevorderden 2%.

6. Bij een kleine verzekeringsmaatschappij worden 20 verzekeringen afgesloten, toevallig allemaal door beginners.
   >a Stel dat deze verzekeraar de premie van *f* 24,– rekent. Is dat voldoende om er de te verwachten kosten van te kunnen betalen?
   >b Welke premie zou deze verzekeraar in dit geval moeten vragen?

Bij de vaststelling van een verzekeringspremie gebeurt iets eigenaardigs.
Er is een statistisch gegeven, dat betrekking heeft op de totale groep:
6% van *alle* skiërs hebben *gemiddeld* *f* 400,– onkosten ten gevolge van een ongeluk.
Dat statistische gegeven wordt als het ware vertaald naar iedere individuele skiër:
De verzekeraar bepaalt de hoogte van de premie op 6% van *f* 400,–.
Er kunnen zich nu twee gevallen voordoen:

- De skiër overkomt iets. In dat geval verliest de verzekeraar *f* 376,–.
  De *kans* dat dit gebeurt is echter klein: 6% ofwel 6 op de 100.
- De skiër blijft ongedeerd, dus de verzekeraar heeft een winst van *f* 24,–.
  Ten opzichte van het eventuele verlies is dit een kleine winst, maar daar staat tegenover dat de *kans* erop groot is: 94% ofwel 94 op de 100.

Wanneer alle skiërs zich bij één maatschappij zouden verzekeren houden de winst- en verliesbedragen elkaar in evenwicht.
In de praktijk echter zijn de verzekeringen verspreid over veel maatschappijen.
Daardoor is het zeker niet uitgesloten dat van een groep mensen die zich bij één maatschappij hebben verzekerd, er toevallig veel meer dan 6% iets overkomt.

7. > Voor wie is dat gevaar groter: voor een maatschappij met 1000 verzekerden of voor een maatschappij met 20 verzekerden?

Situaties waarbij onvoorspelbaarheid (toeval) een rol speelt komen misschien vaker voor dan je denkt of te horen krijgt.

Eén op de zes uitstrijkjes fout beoordeeld

Van onze redactie samenleving

AMSTERDAM- Vrouwen die zich laten onderzoeken op baarmoederhalskanker, moeten zich realiseren dat gemiddeld één op de zes uitstrijkjes verkeerd wordt beoordeeld. De uitslag dat er geen afwijkingen zijn gevonden, geeft geen garantie dat er inderdaad niets aan de hand is.

Die waarschuwing geeft het Medisch tuchtcollege in Amsterdam naar aanleiding van een klacht van een vrouw bij wie tot drie keer toe een uitstrijkje verkeerd werd beoordeeld. De vrouw bleek later wel degelijk baarmoederhalskanker te hebben.
Het tuchtcollege heeft de klacht afgewezen. Het betrokken pathologisch instituut valt niets ter verwijten omdat het volgens de geldende kwaliteitsnormen werkt. 'Bij de beoordeling van de uitstrijkjes worden onvermijdelijk van tijd tot tijd fouten gemaakt', aldus het college, dat meent dat vrouwen zelf in de gaten moeten houden of bepaalde lichamelijk klachten (ondanks een geruststellende uitslag) toch niet wijzen op baarmoederhalskanker.
De vrouw liet in 1978, 1979 en 1982 uitstrijkjes maken. Volgens de beoordeling had ze de eerste keer een ontsteking, de tweede keer geen ontsteking en de derde keer een kleine ontsteking die niet behandeld hoefde te worden. Acht maanden na het laatste onderzoek ging zij naar de huisarts omdat ze nog steeds last had van ernstig bloedverlies. De huisarts vond een gezwel; als enige behandeling restte verwijdering van de baarmoeder. De vrouw klaagde eind 1987 het instituut aan dat de uitstrijkjes beoordeelde. Ze voerde aan dat ze pas zo laat opnieuw naar de huisarts was gegaan omdat ze vertrouwde op de negatieve uitslag van de uitstrijkjes, die achteraf alle drie verkeerd waren beoordeeld.
De betrokken patholoog-anatoom erkent dat gemiddeld 17 procent van alle uitstrijkjes fout wordt beoordeeld. Dit ondanks uitgebreide controle op de werkwijze van de laboratoria, die tien procent van alle preparaten met een negatieve beoordeling (niets gevonden) standaard opnieuw beoordelen.
Het is niet bekend in hoeverre huisartsen hun patiëntes wijzen op het grote percentage foute uitslagen van uitstrijkjes. Volgens een arts van het Integraal kankercentrum Amsterdam wordt dat in het algemeen niet standaard gedaan. 'Dat is tenminste mijn persoonlijke ervaring. Het zou natuurlijk beter zijn als artsen deze informatie wèl geven.'

De gebruikte onderzoeksmethode is niet slecht te noemen.
Het probleem zit hem in de verwachting die een uitslag wekt. De vrouw vertrouwde voor 100% op de juistheid van de uitslag. Het medisch tuchtcollege houdt rekening met de onbetrouwbaarheid van de onderzoeksmethode.

8. In de kop van het artikel staat 'één op de zes uitstrijkjes fout beoordeeld'.

   >a Hoe komen ze daar aan?

   >b Is daarmee bedoeld dat bij iedere serie van zes uitstrijkjes er één is die foutief wordt beoordeeld?

9. Een uitstrijkje van een vrouw wordt negatief beoordeeld (er is dus niets gevonden). Ze is op de hoogte van het feit dat het onderzoek niet geheel betrouwbaar is.
   Daarom laat ze nog een tweede uitstrijkje onderzoeken. Ook nu is de uitslag negatief.
   Het enige wat de vrouw nu zeker weet is dat beide uitslagen goed òf beide fout waren.

   > Is door het resultaat van dat tweede onderzoek de betrouwbaarheid van de uitslag vergroot, of maakt het niets uit?

In de situaties die tot nu toe aan de orde zijn geweest, waren de gegevens van alle personen bekend.
Vaak zal gewerkt worden met resultaten van een steekproef.
Als op basis daarvan verwachtingen worden uitgesproken of voorspellingen worden gedaan dan dient zo'n steekproef natuurlijk wel representatief te zijn.

10. Een klein filiaal van een bank beschikt over één loket.
Het aantal cliënten van die bank is sterk toegenoemen en er komen steeds vaker klachten over de lange wachttijden.

De beheerder houdt gedurende een week bij hoe lang zijn cliënten moeten wachten. De resultaten zijn:

wachttijd (in min)	0	1	2	3	4	6	7	8	9	10
aantal keren (in %)	24	16	9	7	6	8	8	11	9	2

De gegevens van 500 personen zijn verwerkt. De wachttijd is steeds afgerond op een geheel aantal minuten.
Iemand gaat naar deze bank.

>a Hoe groot is de kans dat hij minstens zes minuten moet wachten?

>b Hoe groot is de kans dat hij niet meteen geholpen wordt?

De filiaalbeheerder vindt dat er een loket bij moet komen, als de *gemiddelde* wachttijd vier minuten of meer is.

>c Ga na of hij, op basis van zijn onderzoek, dat extra loket zal laten maken.

De twijfel als levenselixer

Zijn nieuwe roman zal de laatste zijn. In gesprek met Graham Greene; een grimmige grijsaard over reizen, Rusland en Rome

Een probaat middel tegen dodelijke verveling: een dodelijk spelletje. Graham Greene heeft daar altijd van gehouden, als puber al, midden jaren twintig. In de studieuze rust van Oxfords Bailiol College, de kostschool van zijn vader, kwam hij in het rijke bezit van een vuurwapen, ontdekte het Russisch roulette en speelde het in afzondering. Tegen zichzelf. Althans, zo wil zijn autobiografie A Sort of Life het.

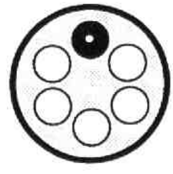
"Het is werkelijk waar, hoor," houdt hij vol. "Vorig jaar was ik in Havanna, waar ik Fidel Castro en García Márquez sprak. Márquez was ervan overtuigd dat ik in Vietnam Russisch roulette gespeeld heb, in de jaren vijftig, maar het was in het internaat, ik was negentien. Fidel werd meteen nieuwsgierig en vroeg: "Hoe vaak hebt u dat gedaan?" Waarop ik zei: "Vijf keer, telkens met een maand tussenruimte. Uiteindelijk verveelde me dat ook en wilde ik het een allerlaatste keer proberen - om de zes vol te maken. Toen heb ik het maar opgegeven." En terwijl ik uitlegde dat de kans op overleven iedere keer vijf op zes was, begon Fidel brommend voor zich uit te rekenen. Hij was het er niet mee eens. Na uitvoerige berekeningen kwam hij tot de slotsom. "U moet dood zijn!"

De anekdote diene ter kenschetsing, niet alleen van de Cubaanse leider, maar vooral van de eminente auteur. Meer dan acht decennia oud is hij inmiddels, maar alive and kicking als de kat met de vele levens: zijn ogen, glanzend onder borstelige wenkbrauwen, priemen en spieden als vanouds.

"Ja, het leven dient met enig gevaar verbonden te zijn."

HP 22 Oktober 1988

Een pistool heeft een draaibaar magazijn, waarin plaats is voor zes kogels.
Bij Russisch roulette wordt één kogel geladen.
De persoon die het 'spel' speelt, moet het magazijn een flinke draai geven en vervolgens de loop tegen zijn slaap zetten en de trekker overhalen.



11. >a Graham Greene beweert in bovenstaand interview dat hij iedere keer opnieuw een kans van 5 op 6 had om het spel te overleven. Ben je het daar mee eens?

>b Welke berekening heeft Castro vermoedelijk gemaakt?

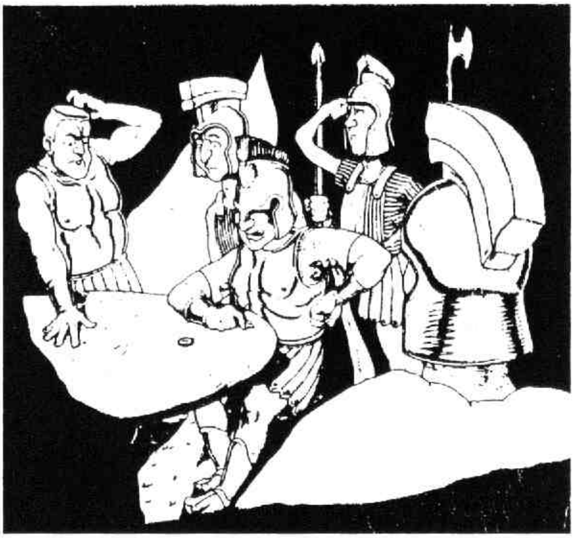
>c Weet jij een manier om hem te overtuigen van zijn ongelijk?

Stel dat iemand zich voorneemt om zijn leven op deze manier zes keer op het spel te zetten en dan op te houden (als dat nog kan).

>d Is de kans dat hij het er levend afbrengt 5 op 6?

2 Experiment en simulatie.

Twee soldaten van het beroemde Romeinse leger spelen om een forse buit: een zak met 100 zilverstukken.



Het spel is simpel. Er wordt een muntstuk opgegooid. Als 'kop' bovenkomt krijgt Appius een punt, in het andere geval Brutus. Degene die zo als eerste zes punten haalt wint de zak met zilverstukken.

1. > Hebben beiden bij de start van het spel een gelijke kans op de buit?

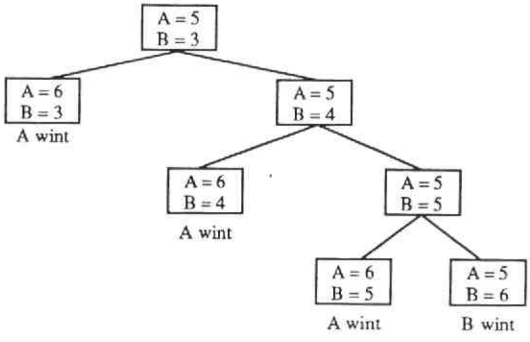
Helaas wordt het spel afgebroken door de commandant, die gokspelen verboden heeft. Op dat moment was de situatie erg spannend: Appius had 5 punten en Brutus nog maar 3.
Hoewel het niet hun bedoeling was, moeten ze de 100 zilverstukken nu op een of andere manier onderling verdelen.
Maar de vraag is: wat is in deze situatie een eerlijke verdeling?

Brutus heeft zijn voorstel snel klaar:
Appius krijgt er 62 en hijzelf 38.

2. >a Hoe komt Brutus aan deze verdeling?

   >b Vind je dit een eerlijke verdeling?

Appius komt met een heel ander idee:
Ik had nog maar één punt nodig, als het spel gewoon was uitgespeeld, en Brutus nog 3. Het is dus veel waarschijnlijker dat ik de hele buit zou winnen.
In een boom kun je de mogelijke spelverlopen als volgt weergeven.



3. Bekijk de mogelijke spelverlopen.
   >a Heb je een idee hoe groot de kans is dat Appius het spel gewonnen zou hebben als het was uitgespeeld?
   >b Welk deel van de buit mag hij opeisen?

Je kunt een redelijke indruk krijgen van de winstkansen voor de twee spelers, als je het spel een aantal malen afmaakt, vanuit de stand waarbij het werd afgebroken.

4. >a Speel het spel tien keer.
   Noteer elke keer de winnaar.
   >b Hoe groot schat je de winstkans voor Appius, afgaande op het resultaat van >a?
5. >a Verzamel de spelresultaten van alle leerlingen.
   >b Verandert dit iets aan de winstkansen voor beide heren?

Schattingen van kansen op basis van experimenten zijn betrouwbaarder naarmate het experiment vaker herhaald wordt.

6. > Waarom zou dat zo zijn?

Als je snel wilt beschikken over een grote serie spelresultaten dan is het handig om het spel te *simuleren* (na te bootsen).
Toevalsgetallen, geproduceerd door bijvoorbeeld een computer, kunnen gebruikt worden om het gooien van een munt te simuleren.
Op de bladzijden 50 t/m 53 vind je twee verschillende series toevalsgetallen.
Van elke serie zie je hier een fragment.
Links zijn alleen de getallen 0 en 1 gebruikt, rechts alle getallen van 00 tot en met 99.

1	0	0	0	0	1	0	1
1	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	0	0	1	1	0
0	1	0	1	1	1	0	0
1	0	1	1	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	0
1	1	1	1	0	0	0	1
0	0	1	1	1	0	1	0
0	1	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	1	1	1

27	38	42	67	51
52	53	58	60	73
00	24	22	64	92
22	10	33	43	50
18	13	74	00	62
98	36	80	94	55
52	10	66	26	07
37	11	21	12	25
81	84	17	15	70
27	30	49	30	19

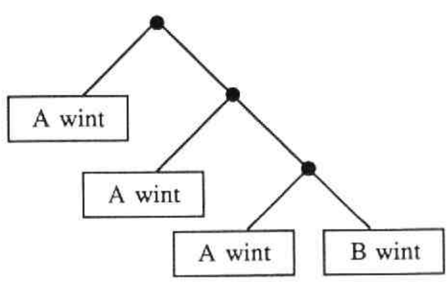
7. >a Op welke manier kunnen de getallen in de linkertabel gebruikt worden om het gooien van een munt te simuleren?

   >b Bij de rechtertabel zijn meerdere manieren mogelijk. Noem er eens een paar.

8. >a Verzamel met de toevalsgetallen achter in het boek 25 spelresultaten en voeg de resultaten van alle leerlingen samen.

   >b Wat is een eerlijke verdeling van de buit?

Nogmaals de mogelijke spelverlopen in een boom:



9. > Probeer de winstkansen voor Appius en Brutus te vinden met behulp van een *redenering*, dus zonder gebruik te maken van de spelresultaten.

Simulaties zijn ook handig, als een echte uitvoering van het experiment niet goed mogelijk is.

10. Niemand zal via experimenten willen vaststellen hoe groot de kans op overleven is bij zes keer spelen van Russisch roulette.
    > Beschrijf hoe je dit met een simulatie kunt doen.

De lotto

De wekelijkse trekking van de lotto kan gezien worden als een kansexperiment: Uit een bol met 41 genummerde balletjes worden achter elkaar 6 exemplaren gehaald.

11. > Heb je een idee hoe groot de kans is dat nr. 23 een van de zes winnende nummers is?

Het jaaroverzicht van 1984. In totaal zijn er 58 trekkingen geweest, ofwel 58 herhalingen van hetzelfde kansexperiment.

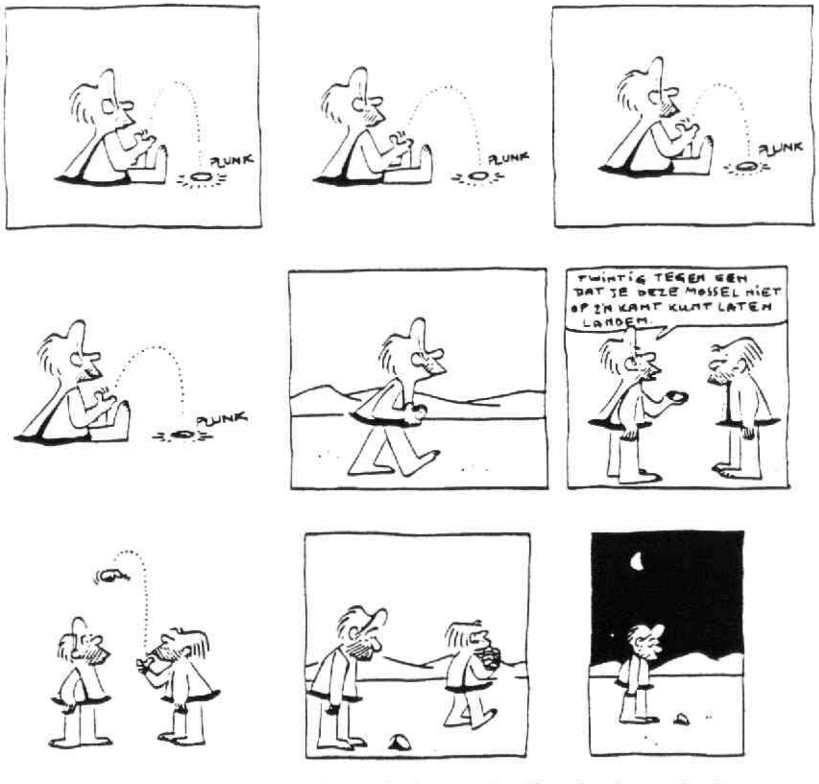
datum	*uitslag*						*datum*	*uitslag*					
1/1	9	22	27	32	38	41	1/7	3	10	17	26	36	39
8/1	1	12	23	31	35	36	8/7	1	4	8	9	10	37
15/1	6	12	31	33	39	41	15/7	2	4	6	15	19	25
22/1	8	10	16	25	33	39	22/7	2	7	11	14	29	36
29/1	5	7	15	37	38	41	29/7	4	11	18	31	32	37
5/2	3	9	11	16	18	34	5/8	6	16	18	20	32	36
12/2	2	9	12	16	23	33	12/8	2	12	17	22	32	33
19/2	14	17	18	24	26	39	17/8	10	12	23	31	34	37
24/2	9	19	21	27	29	34	19/8	3	12	19	32	35	40
26/2	3	28	29	32	36	37	26/8	5	13	21	23	27	30
4/3	6	11	14	19	23	30	2/9	1	3	7	14	16	33
11/3	2	12	29	33	34	39	9/9	2	9	19	21	25	40
18/3	14	21	22	24	30	38	16/9	8	11	21	25	27	37
23/3	6	10	14	22	27	33	23/9	3	13	28	35	37	38
25/3	1	7	11	15	19	21	30/9	2	3	7	14	19	20
1/4	10	12	16	20	35	37	7/10	4	9	10	11	13	18
8/4	6	7	14	23	33	35	15/10	1	3	6	25	30	33
15/4	4	6	11	21	26	41	21/10	5	10	13	27	32	33
23/4	1	12	21	27	33	37	25/10	8	15	16	28	31	35
29/4	7	8	14	22	26	32	29/10	14	26	28	32	35	36
6/5	3	20	27	29	30	35	4/11	1	2	5	15	24	28
13/5	2	7	8	17	32	41	11/11	3	13	14	23	24	35
20/5	2	4	10	18	19	25	25/11	1	5	24	27	29	41
27/5	4	26	29	35	39	41	29/11	11	27	29	35	37	40
4/6	4	6	10	28	33	41	2/12	4	6	8	23	26	39
11/6	10	12	18	22	27	28	9/12	1	5	11	21	27	39
15/6	4	12	19	29	31	33	16/12	2	3	5	8	21	28
17/6	5	6	9	22	24	26	23/12	3	5	20	21	31	41
24/6	5	19	22	26	28	41	27/12	7	12	25	33	36	38

12. >a Hoe vaak is nr. 23 in 1984 uit de bus gerold?
    >b Komt dat redelijk overeen met je antwoord bij opgave 11?

Het getal 13 wordt wel het ongeluksgetal genoemd.
Als je de trekkingslijst bekijkt, lijkt dat ook wel te kloppen: nummer 13 komt bij de eerste 38 trekkingen niet voor.
Gelukkig wordt dat vervolgens wel rechtgezet. Bij de negen eerstvolgende trekkingen kwam nr. 13 liefst vier keer uit de bol gerold.

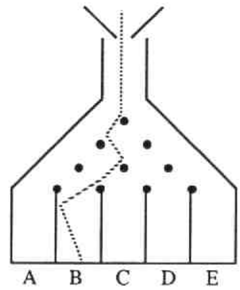
13. "Logisch natuurlijk, want een nummer dat al lange tijd niet is voorgekomen, heeft een grotere kans dan de andere nummers!"
    > Ben je het eens met deze uitspraak?

Een lange serie herhalingen van een experiment geeft een goed beeld van kansen. Toch kan het toeval altijd nog toeslaan.
Dat wordt in de volgende strip geïllustreerd.
Het experiment van B.C.



14. De uitdrukking '20 tegen 1' wordt in engelstalige landen gebruikt om aan te geven dat de ene uitkomst 20 keer zo waarschijnlijk is als de andere uitkomst.
    > Hoe groot schat B.C. de kans dat een mossel op zijn kant terecht komt?

Het bord van Galton.



Op een bord is een aantal pinnen bevestigd, op de manier die in de tekening is weergegeven.
Door een trechter valt een kogeltjes op de bovenste pin. Het valt van pin tot pin verder naar beneden en belandt uiteindelijk in één van de bakjes A t/m E.
Het bord is zo geconstrueerd dat bij iedere pin ongeveer de helft van de kogeltjes naar rechts wordt gestuurd.
Eén mogelijke baan van zo'n kogeltje staat in de tekening aangegeven.

15. Er worden 100 kogeltjes door de trechter gestuurd.

    > In welk bakje verwacht je dat de meeste kogeltjes terechtkomen?

Uit de verdeling van de 100 kogeltjes over de vijf bakjes kun je een redelijke indruk krijgen van de kansen die een kogeltje heeft om in elk van de bakjes te belanden. Omdat we geen echt bord van Galton hebben, simuleren we het vallen van een kogeltje met behulp van de computer.
Ieder kogeltje ontmoet op zijn weg naar de bakjes vier pinnen. Bij elk van die vier pinnen valt hij naar links of naar rechts.

De simulatie verloopt als volgt:
- Laat de computer een rijtje van vier toevalsgetallen maken.
  Bijvoorbeeld: 36 13 86 23.
- We spreken af: een kogeltje valt naar *links* bij een toevalsgetal kleiner dan 50 en naar rechts in de overige gevallen.

16. >a In welk bakje zal het kogeltje terechtkomen bij het genoemde rijtje van 4 toevalsgetallen?

    >b Wat weet je van de vier toevalsgetallen als een kogeltje in bakje A terechtkomt?

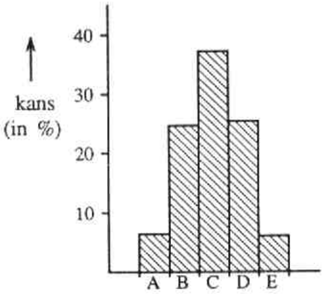
Een resultaat van deze simulatie voor 1000 kogeltjes.

```
                1000
           501        499
      251        500        249
 123        376        376        125
64    247        373        254        62
```

17. >a Hoe groot is, op basis van deze simulatie, de kans dat een kogeltje in bakje A terechtkomt?

>b Welke kansen horen bij de vier overige bakjes?

De verdeling van de 1000 kogeltjes over de bakjes kan weergegeven worden in een histogram:



Vertikaal zijn de *relatieve frequenties* ofwel de *kansen* (in procenten) uitgezet. Daarom wordt dit ook wel een *kanshistogram* genoemd.

18. De aantallen kogeltjes in de bakjes A en E zijn verschillend.
In het histogram is dat verschil vrijwel niet te zien.
Hetzelfde geldt voor de bakjes B en D.
> Hoe verklaar je dat?

Door de computer is ook bijgehouden hoeveel kogeltjes op elk van de pinnen is terechtgekomen.
Alle 1000 kogeltjes komen natuurlijk op de bovenste pin.
Voor elke volgende rij (2 pinnen, 3 pinnen, 4 pinnen) is de som van het aantal kogeltjes steeds 1000.

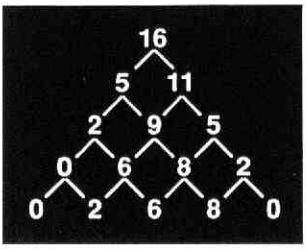
19. > Waarom is dat zo?

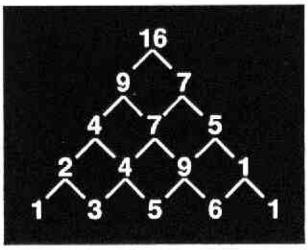
20. >a Maak voor elk van de drie rijen een histogram met de relatieve frequenties (kansen).

>b De kanshistogrammen zijn vrijwel symmetrisch.
Logisch?

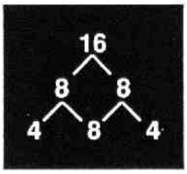
3 Theoretische kansen

Resultaten van experimenten kunnen gebruikt worden om kansen te schatten. Een nadeel van deze manier van kansbepaling is dat iedere herhaling van het experiment andere resultaten kan opleveren.
Twee verschillende computersimulaties van 16 kogeltjes op het bord van Galton:





Wat je eigenlijk wilt is dat die 16 kogeltjes eerlijk verdeeld worden over de pinnen; steeds de ene helft naar links en de andere helft naar rechts.

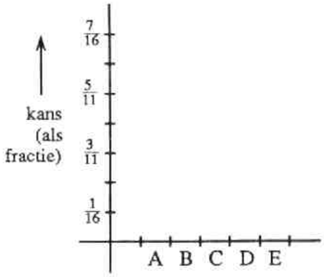


1. >a Hoeveel kogeltjes komen op deze manier in elk van de bakjes *A* t/m *E* terecht?
   Er is niet zomaar willekeurig voor 16 kogeltjes gekozen.
   Met een ander aantal zou het eerlijk verdelen niet mogelijk zijn geweest.
   >b Waarom lukt het wel goed met 16 kogeltjes (of een veelvoud van 16)?

Eén van de zestien kogeltjes komt bij deze verdeling in bakje *A* terecht.
Op grond daarvan zeggen we: De kans dat een kogeltje in *A* valt is 1 op 16.
Meestal wordt zo'n kans als *fractie* genoteerd.
In plaats van kans 1 op 16 noteren we: de kans is $\frac{1}{16}$.

2. >a Bepaal de kans dat een kogeltje in B, in C, in D, in E valt.

   >b Verwerk de gevonden kansen in een kanshistogram, zoals hieronder is aangegeven:



Wanneer je deze eerlijke verdeling vergelijkt met de resultaten van de twee simulaties, dan zijn er grote verschillen. Bij de eerlijke verdeling is het toeval als het ware uitgeschakeld.

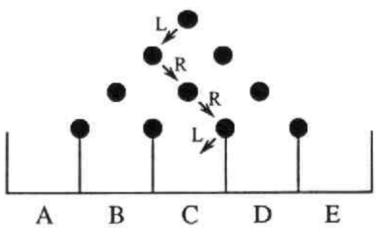
3. In hoofdstuk 2 werden 1000 kogeltjes langs de pinnen gestuurd.

   > Onderzoek of de resultaten van die simulatie in overeenstemming zijn met de kansen van opgave 2.

4. > Gebruik de methode van het eerlijk verdelen om de winstkansen van Appius en Brutus te bepalen. (zie hoofdstuk 2, opgave 9)

Een andere methode om kansen te bepalen, zonder dat er simulaties of experimenten gebruikt worden, is het *tellen van alle mogelijkheden.*

In het geval van de kogeltjes kunnen alle mogelijke routes naar de bakjes worden bekeken.
Eén zo'n route is *LRRL*, waarmee het kogeltje in C belandt:



5. >a Schrijf alle mogelijke routes op.

   >b Route *LRRL* eindigt in bakje *C*.
   Welke routes eindigen daar nog meer?

   >c Hoe kun je hiermee de kans bepalen dat een kogeltje in *C* terecht komt?

Zowel bij het eerlijk verdelen als bij het tellen van alle routes wordt de kans gegeven als fractie.
Bijvoorbeeld de kans dat een kogeltje in *B* terecht komt:

bij het eerlijk verdelen:

$$\frac{\text{aantal kogeltjes in } B}{\text{totaal aantal kogeltjes}}$$

bij het tellen van routes:

$$\frac{\text{aantal routes naar } B}{\text{totaal aantal mogelijke routes}}$$

Wat dat betreft lijkt deze methode van kansen bepalen op de methode van experiment en simulatie. Ook daar wordt een kans gegeven als relatieve frequentie.

Het grote verschil zit hem in de manier waarop de kansen worden bepaald.

Bij *experimentele kansen* worden de kansen achteraf bepaald, nadat, via statistisch onderzoek of het veelvuldig herhalen van het experiment, het aantal malen dat de verschillende uitkomsten zijn voorgekomen is geteld.

Bij *theoretische kansen* worden de kansen beredeneerd, zonder dat het experiment ook daadwerkelijk wordt uitgevoerd. Dat kan bijvoorbeeld door het tellen van alle verschillende mogelijkheden. Erg belangrijk daarbij is dat al die verschillende mogelijkheden *dezelfde waarschijnlijkheid* hebben.

6. Een gulden wordt drie keer opgegooid. Er wordt steeds genoteerd wat boven komt: *K* (kop) of *M* (munt). Een mogelijke uitkomst is *KMM*.

   >a Schrijf alle mogelijke uitkomsten op.

   >b Hoe groot is de kans dat er 2 van de drie keer *K* boven komt?

   >c Hoe groot is de kans dat er minstens 1 keer *K* wordt gegooid?

7. In doos *A* liggen 20 kaartjes. Op 4 daarvan staat 'prijs'.
   De andere kaartjes zijn blanco.
   In doos *B* staat op 15 van de in de totaal 90 kaartjes 'prijs'.
   Je mag blindelings uit één van de dozen een kaartje pakken.
   Als je een 'prijs'-kaartje hebt, krijgt je een cadeautje.

   > Uit welke doos zou jij een kaartje pakken?

Een fout die vaak gemaakt wordt bij theoretische kansbepaling is dat uitkomsten ten onrechte als gelijkwaardig (even waarschijnlijk) worden beschouwd.
Misschien heb je dat zelf ook even gedacht bij het spel van Appius en Brutus.
Ook belangrijke wiskundigen maakten die fout.
Het probleem werd al in 1494 gesteld door de Italiaanse wiskundige Pacioli.
Pas in 1654 werd de juiste winstkans ($\frac{7}{8}$) gevonden door de wiskundige Fermat, maar in 1757 beweert D'Alembert nog dat de winstkans $\frac{3}{4}$ is.
Zelfs kortgeleden (1982) duikt die foutieve redenering nog een keer op in een artikel over kansrekening:

'De uitkomsten die horen bij het probleem zijn:

1^e ronde	K	M	M	M
2^e ronde	x	K	M	M
3^e ronde	x	x	K	M
winaar	A	A	A	B

(Een **x** betekent dat die ronde niet nodig is; het spel is uit.)
Er valt dus veel voor te zeggen om de buit te verdelen in de verhouding 3 : 1.

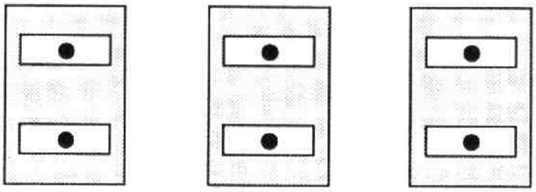
Euclides jaargang 1982

8. De gevolgde redenering kan niet goed zijn, want de winstkansen verhouden zich als 7 : 1.

   \> Kun je aangeven waar de fout in de redenering zit?

Tot slot een moeilijke opgave:

9. Er staan drie kastjes voor je neus, elk met twee laadjes



   In elk laadje ligt één muntstuk, van goud of van zilver.
   Er is één kastje met in elk laadje een gouden munt. Er is ook een kastje met 1 gouden en 1 zilveren munt, en nog één met twee zilveren munten.
   Je trekt één van de zes laadjes open. Daarin ligt een gouden munt.

   \> Hoe groot is de kans dat in het andere laadje van datzelfde kastje ook een gouden munt ligt?

4 Kansverdeling

Bij een *kansexperiment* worden de verschillende uitkomsten door het toeval bepaald. Een paar voorbeelden van kansexperimenten, met daarbij een mogelijke verzameling van uitkomsten:

kansexperiment:	uitkomsten:
gooien met één dobbelsteen	{1,2,3,4,5,6}
Russisch roulette	{dood, niet dood}
tossen met een 'eerlijke' munt	{K,M}
blind prikken van een letter op een bladzijde van een boek	{klinker, medeklinker}
geboorte van een baby	{jongen,meisje}
gooien met één dobbelsteen	{6, niet 6}
gooien met één dobbelsteen	{even, oneven}

1. >a. In welke gevallen kun je de kansen vinden met een redenering, zonder het experiment daadwerkelijk uit te voeren?

   >b Bij welke experimenten hebben alle uitkomsten dezelfde kans?

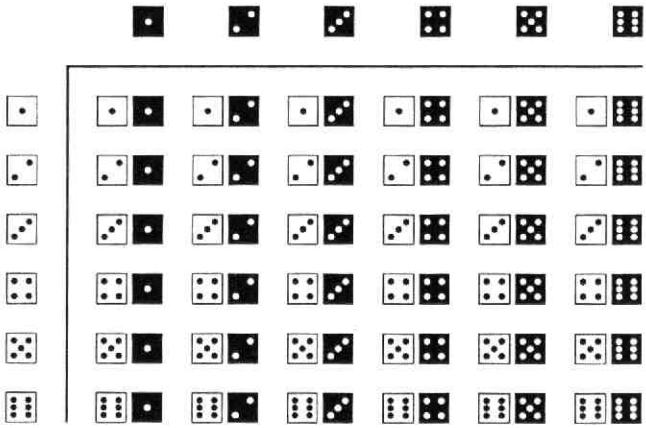
Het kansexperiment 'gooien met één dobbelsteen' wordt drie keer genoemd, maar wel elke keer met een andere uitkomstenverzameling.
Welke uitkomsten je gebruikt, is afhankelijk van de probleemstelling. Zo zal iemand die bij 'mens erger je niet' geen pionnen in het spel heeft met smart wachten op het gooien van een '6'. Hij let dus alleen maar op de uitkomsten '6' en 'niet 6'.

De beschrijving van alle mogelijke uitkomsten met de daarbij behorende kansen noemen we de *kansverdeling*.
Twee verschillende kansverdelingen bij het gooien van een dobbelsteen:

aantal ogen	1	2	3	4	5	6
kans	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

aantal ogen	6	niet-6
kans	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$

2. Kansexperiment: werpen van een witte en een zwarte dobbelsteen.
   Alle mogelijke worpen in een schema:



>a Bekijk als uitkomsten het aantal ogen op de twee dobbelstenen samen.
Welke kansverdeling past daar bij?

>b Beschouw het aantal enen in een worp.
De mogelijke uitkomsten zijn 0, 1 en 2.
Welke kansen horen daarbij?

>c Hoe groot is de kans dat het aantal ogen op de zwarte steen groter is dan het aantal ogen op de witte steen?

3. Iemand redeneert bij de twee dobbelstenen als volgt:
   Onder de 36 mogelijke worpen zijn er 6 waarbij met de witte dobbelsteen 4 ogen wordt gegooid en ook 6 met 4 ogen op de zwarte dobbelstenen.
   De kans dat er een 4 wordt gegooid is dus $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.

> Commentaar?

4. Bij een loterij worden 100 loten verkocht.
   Er zijn 4 prijzen: één hoofdprijs en drie troostprijzen.
   Je hebt één lot.

>a Welke kansverdeling past bij de uitkomsten 'prijs' en 'niet prijs'?

>b Hoe groot is de kans dat op jouw lot een troostprijs valt?

Bij een eerlijke munt is de kansverdeling bij één maal tossen:

uitkomst	K	M
kans	0,5	0,5

5. Er wordt tweemaal getosst met een eerlijke munt.
   Het aantal keren 'kop' wordt geteld.

   >a Welke uitkomsten zijn er mogelijk?

   >b Hoe groot zijn de kansen op elk van die uitkomsten?

Bij een kansverdeling worden alle mogelijke uitkomsten met de daarbij behorende kansen bepaald. Daarbij geldt:

- iedere kans is een getal tussen 0 en 1.
- de som van de kansen is 1.

Deze eigenschappen zijn goed te gebruiken als controlemiddel.

6. Ada, Ben, Christa en Dick trekken lootjes voor pakjesavond.
   Als daarbij iemand zijn eigen naam trekt, wordt er opnieuw geloot.

   >a Laat zien dat de lootjes op 24 verschillende manieren kunnen worden verdeeld.

   In 6 van die 24 gevallen trekt Ada haar eigen naam. Datzelfde geldt ook voor de drie andere mensen. Dus er heeft altijd wel iemand zijn eigen naam getrokken.

   >b Wat is er fout aan deze redenering?

   >c Hoe groot is de kans dat één van de vier de eigen naam trekt?

   >d Dezelfde vraag voor twee, voor drie en voor vier personen.

   >e Hoe groot is de kans dat de loting niet opnieuw uitgevoerd hoeft te worden?

7. Een overzicht van de resultaten van een klas behaald bij twee proefwerken.

cijfer proefwerk Frans

cijfer proefwerk Wiskunde		4	5	6	7
	4	1	2	1	0
	5	1	1	2	1
	6	0	4	5	3
	7	2	1	6	0

Je kunt uit de tabel aflezen dat 4 leerlingen een 5 voor Frans en een 6 voor Wiskunde scoorden.

>a Hoeveel leerlingen zitten in deze klas?

Er wordt *aselect* (dus willekeurig) één leerling aangewezen.

>b Hoe groot is de kans dat die leerling een onvoldoende had voor Frans?

>c Hoe groot is de kans dat bij deze leerling beide vakken voldoende waren?

>d De aangewezen leerling blijkt voor Frans voldoende te hebben gescoord. Hoe groot is de kans dat Wiskunde ook voldoende is?

>e Maak een kansverdeling bij de uitkomsten 'geen onvoldoende', 'één van de twee onvoldoende', 'beide onvoldoende'.

8. Bij een valse munt blijkt 'kop' drie keer zo vaak voor te komen als 'munt'.

>a Hoe groot zijn de kansen op K en M?

Als deze munt tweemaal gegooid wordt, zijn de mogelijke uitkomsten (net als bij een eerlijke munt): KK, KM, MK, MM.

>b Welke uitkomst heeft de meeste kans?

>c Simuleer 50 keer twee worpen met deze munt met behulp van de toevalsgetallen achterin het boek.

>d Vul het schema in op basis van jouw simulatie:

aantal K	0	1	2
kans			

9. Met de computer is het experiment van de vorige opgave een aantal keren uitgevoerd. Het resultaat:

aantal K	0	1	2
frequentie	74	373	553

>a Hoe groot is de kans op 2 maal kop, volgens de simulatie?

>b Kun je de echte (theoretische) kansverdeling vinden?

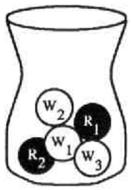
10. Een dobbelsteen wordt aan de kant van de 1 verzwaard.
Daardoor wordt de kans op het gooien van een 1 kleiner en de kans op een 6 groter.

>a Stel dat door deze knoeierij de kans op een 6 tweemaal zo groot is geworden als de kans op een 1.
De andere aantallen ogen behouden hun oorspronkelijke kans van $\frac{1}{6}$.
Welke kansverdeling past bij deze dobbelsteen?

>b Hoe ziet de kansverdeling er uit als de kans op de 6 tweemaal zo groot is als de 4 overige kansen en de kans op een 1 tweemaal zo klein is als de vier overige kansen?

5 Vaasmodel en boomdiagram

Een vaas bevat 5 ballen: 3 witte en 2 rode.
Om ze van elkaar te onderscheiden worden er nummers opgeplakt: W_1, W_2 en W_3 op de witte, R_1 en R_2 op de rode.



Er worden 'blind' twee ballen uit de vaas gepakt. Dat kan op twee manieren gebeuren.

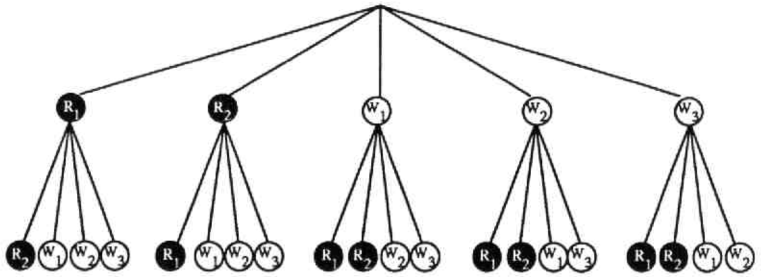
met terugleggen — Van de bal die als eerste is gepakt, wordt het nummer genoteerd. Vervolgens wordt hij teruggedaan in de vaas. Daarna wordt de tweede bal gepakt.

zonder terugleggen — De eerste bal wordt opzij gelegd. De inhoud van de vaas (de samenstelling) is bij het pakken van de tweede bal dus *anders* dan bij het pakken van de eerste bal.

Een mogelijk trekkingsresultaat is W_2R_1:
W_2 is als eerste gepakt, R_1 als tweede.

1. Er worden twee ballen uit de vaas gepakt.
   Hoeveel verschillende trekkingsresultaten zijn er mogelijk
   >a bij een trekking *met* terugleggen?
   >b bij een trekking *zonder* terugleggen?

In een boomdiagram kan de trekking *zonder* terugleggen als volgt worden uitgebeeld:



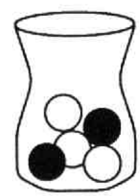
2. >a Wat is de kans dat R_1 als eerste wordt gepakt?
   En als tweede?

   >b Hoe groot is de kans dat precies één van de twee ballen wit is?

   >c Het is ook mogelijk dat er helemaal geen rode bal gepakt wordt.
   Hoe groot is de kans daarop?

3. > Beantwoord opgave 2 ook voor een trekking *met* terugleggen.

Opnieuw dezelfde vaas met 5 ballen, alleen zijn ze nu niet genummerd.
We letten nu alleen maar op de *kleur*: de twee rode zijn gelijkwaardig, de drie witte ook.
Weer worden twee ballen uit de vaas gehaald.
De mogelijke trekkingsresultaten zijn nu weer te geven als WW, WR, RW en RR.



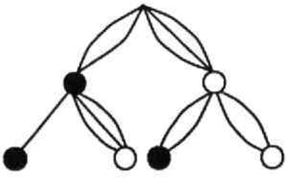
Voor het bepalen van de kansen kan gebruik gemaakt worden van het uitgebreide boomdiagram na opgave 1.

4. >a De trekking gebeurt *zonder* terugleggen.
   Vul de tabel in:

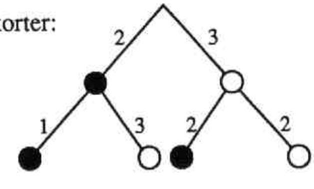
trekkingsresultaat	RR	RW	WR	WW
kans				

   >b Er wordt gekeken naar 'het aantal rode ballen in de trekking'.
   Welke kansen horen bij de uitkomsten: 0 rood, 1 rood, 2 rood?

Omdat er nu geen verschil gemaakt wordt tussen de 2 rode ballen onderling en tussen de 3 witte onderling, kunnen de takken van dezelfde kleur samengevoegd worden:



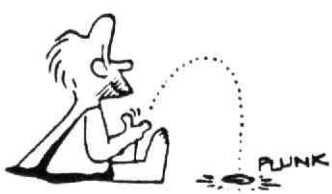
of nog korter:

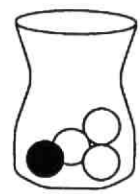


De getallen bij de verschillende takken geven het 'gewicht' van zo'n tak aan.
Er zijn maar vier trekkingsresultaten mogelijk, namelijk RR, RW, WR en WW.
Deze vier resultaten zijn echter op $2 * 1 + 2 * 3 + 3 * 2 + 3 * 2 = 20$ verschillende manieren te bereiken.
De uitkomst WR kan op $3 * 2 = 6$ manieren verkregen worden.
Dus de kans op WR is gelijk aan $\frac{6}{20}$.

5. >a Maak een boomdiagram (met gewichten) voor het geval er twee ballen worden gepakt *met* terugleggen.
   >b Hoe groot is in dit geval de kans op het pakken van twee ballen van verschillende kleur?

Veel toevalsexperimenten zijn te simuleren met behulp van trekkingen uit een vaas.
Een voorbeeld: de valse munt, waarbij 'kop' driemaal zo vaak voorkomt als 'munt'.
Het opgooien van deze munt kan gesimuleerd worden door het pakken van een bal uit een vaas, die één rode en drie witte ballen bevat.
Is de getrokken bal wit, dan noem je dat 'kop', een rode bal wordt genoteerd als 'munt'.





6. Twee maal gooien met de valse munt betekent twee maal een bal pakken uit de vaas.
   >a Moet dit *met* teruglegging of *zonder* teruglegging?
   >b Bereken de kansen op 2 maal kop, 1 maal kop en 0 maal kop.

Wanneer een toevalsexperiment vertaald wordt in een *vaasmodel* dan zijn de volgende zaken belangrijk:

de *samenstelling:*	- hoeveel verschillende kleuren worden gebruikt?
	- hoeveel ballen zijn er van iedere kleur?
de *trekking:*	- is het een trekking *met* of *zonder* terugleggen?
	- hoeveel keer wordt een bal gepakt?

7. Er zijn 3 leerlingen nodig voor de organisatie van een feest. Het aantal liefhebbers is 12 (7 meisjes en 5 jongens). De drie gelukkigen worden door het lot aangewezen.
Beschrijf een vaasmodel in elk van de volgende twee gevallen:

>a_1 Je wilt de kansen weten op het aantal jongens dat wordt gekozen.

>a_2 Vier vriendinnen hebben zich aangemeld. Ze willen graag weten hoe groot de kans is dat er tenminste twee van hen worden gekozen.

>b Bereken de kansen die genoemd worden bij >a_1 en>a_2.

8. Bij het onderzoek naar baarmoederhalskanker wordt één op de zes uitstrijkjes foutief beoordeeld (zie blz.5).
In feite is er, voor degene die de uitslag te horen krijgt, sprake van een kansexperiment waarvoor een vaas met 6 ballen (5 wit, 1 rood) model kan staan. Het trekken van een zwarte bal betekent een foutieve beoordeling.
Een vrouw laat tweemaal een onderzoek uitvoeren.

>a Maak een boomdiagram, met gewichten, voor twee trekkingen met terugleggen uit de genoemde vaas.

>b Laat zien dat de kans op twee achtereenvolgende juiste beoordelingen gelijk is aan $\frac{25}{36}$.

Het heeft er alle schijn van dat de betrouwbaarheid van de beoordeling afneemt naarmate het onderzoek vaker herhaald wordt: $\frac{25}{36}$ is minder dan $\frac{5}{6}$.

Dat is, gelukkig, niet waar. De vrouw krijgt natuurlijk beide keren de uitslag van het onderzoek te horen. Wanneer die twee uitslagen verschillend zijn weet ze *zeker* dat bij één van de twee beoordelingen een fout is gemaakt.

>c Welke trekkingsresultaten vallen weg , als gevolg van deze informatie?

Zijn de twee uitslagen gelijk, dan blijven er twee mogelijkheden over: òf beide beoordelingen zijn juist òf beide zijn foutief.

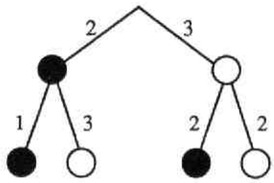
>d Laat zien dat de kans op twee juiste beoordelingen $\frac{25}{26}$ is, als je weet dat de twee uitslagen hetzelfde zijn.

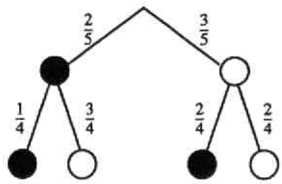
In het artikel op blz. 5 was sprake van drie gelijke beoordelingen die achteraf allemaal foutief bleken te zijn.

>e Hoe groot is de kans op drie foutieve beoordelingen bij drie gelijke uitslagen?

6 Rekenen met kansen.

Nogmaals de vaas met 3 witte en 2 rode ballen.
Naast elkaar staan hieronder het boomdiagram met gewichten en een zogenaamde *kansboom* getekend. De gewichten uit het boomdiagram bij de verschillende takken zijn vervangen door kansen.





Er zijn 2 * 3 manieren waarop eerst een rode en vervolgens een witte bal gepakt kunnen worden.
In totaal zijn er 5 * 4 trekkingen van 2 ballen mogelijk.

Dus de kans op RW is $\frac{2 * 3}{5 * 4}$

De kans dat er eerst een rode bal wordt getrokken is $\frac{2}{5}$.
Daarna is de kans op een witte bal bij de tweede trekking $\frac{3}{4}$.

Dus de kans op RW is $\frac{2}{5} * \frac{3}{4}$.

In het eerste geval wordt de trekking van twee ballen uit de vaas als één geheel bekeken.
Bij de kansboom worden de trekking van de eerste bal en de trekking van de tweede bal ieder apart bekeken.
De uiteindelijke uitkomst is bij beide manieren hetzelfde.

1. Iemand beweert, kijkend naar bovenstaande kansboom:
   "De kans dat de tweede bal wit is, is gelijk aan $\frac{3}{4} + \frac{2}{4}$".

   >a Waarom kan dit niet waar zijn?

   >b Hoe groot is die kans dan wel?

2. De getekende kansboom hoort bij een trekking zonder terugleggen.

   > Waar zie je dat aan?

3. >a Maak een kansboom voor de trekking van twee ballen *met* terugleggen uit een vaas met 4 rode en 3 witte ballen

   >b Hoe groot is nu de kans dat de tweede bal wit is?

4. Bij een biologie-proefwerk moet je de antwoorden op de drie volgende vragen gokken, omdat je de stof niet hebt bestudeerd.

30 ■ Komen in autotrofe planten chloroplasten voor?
En mitochondriën?
a alleen chloroplasten
b alleen mitochondriën
c chloroplasten en mitochondriën

31 ■ Wordt ATP alleen gevormd in chloroplasten, alleen in mitochondriën of in beide typen organellen?
a alleen in chloroplasten
b alleen in mitochondriën
c zowel in chloroplasten als in mitochondriën

Tussen de mitochondriën en het omringend cytoplasma vindt uitwisseling van stoffen plaats. Enkele stoffen die in het cytoplasma voorkomen, zijn: O_2, CO_2 en H_2O.

32 ■ Van welke van deze stoffen zal er per tijdseenheid meer een mitochondrion ingaan dan er uitgaan?
a alleen van O_2
b alleen van CO_2 en H_2O
c van O_2, CO_2 en H_2O

>a Hoe groot is de kans dat je ze alle drie goed beantwoordt?

>b Hoe groot is de kans dat je minstens één antwoord goed gokt?

5. Eén op de vijf mensen die voor het eerst rijexamen doen, slaagt direkt.

> Hoe groot is de kans dat van 3 kandidaten er twee slagen?

6. In een doos liggen 10 kaartjes met op elk een letter: 5 met een A, 3 met een B en 2 met een K.
Er worden er blind 3 uitgepakt, zonder teruglegging.

>a Hoe groot is de kans dat er achtereenvolgens een B, een A en een K worden gepakt?

>b Hoe groot is de kans dat je drie letters pakt, waarmee het woord BAK gemaakt kan worden?

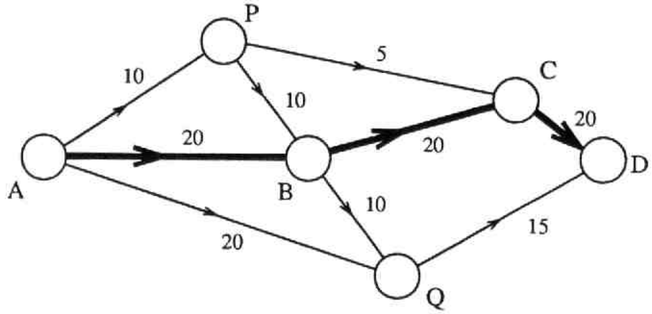
>c De uitkomst van >b is zesmaal zo groot als de uitkomst van >a.
Verklaring?

>d Hoe groot is de kans dat je drie kaartjes pakt waarmee het woord AAK gevormd kan worden?

7. >a Maak een kansboom bij zes keer spelen van Russisch roulette.

>b Hoe groot is de kans dat je na zes keer nog leeft?

8. Tijdens het spitsuur rijden veel auto's van A naar D.
Op de hoofdroute ABCD kunnen dan files ontstaan.
Veel automobilisten nemen daarom één van de mogelijke sluiproutes, met als gevolg dat ook daar filevorming optreedt.
In de situatieschets staan alle wegen getekend, met daarbij in procenten de kans op een file.



>a Hoe groot is de kans dat je op de hoofdroute niet in een file terechtkomt?

>b Bij welke route van A naar D is de kans het grootst dat je niet in een file terechtkomt?

9. Je kleine zusje is jarig en ze mag bij zowel opa als oma ongezien één briefje uit de portemonnee halen.
Oma's portemonnee bevat 3 briefjes van *f* 10,- en 4 van *f* 5,-.
Opa heeft in zijn beurs 3 briefjes van *f* 10,- en 2 van *f* 5,-.

>a Hoe groot is de kans dat ze in totaal *f* 15,- pakt?

>b Bereken ook de kansen op *f* 10,- en *f* 20,-

>c Stel dat ze mag kiezen uit de volgende mogelijkheden

- twee briefjes bij oma òf
- twee briefjes bij opa òf
- bij elk één briefje,

wat zou je haar dan adviseren?

>d Stel dat alle briefjes in één portemonnee gestopt worden.
Je mag er twee uithalen.
Verandert dat wat aan de kansen van >a en >b?

10. Er woont een muis achter de keukenmuur. Om in de keuken te komen heeft hij de keus uit twee openingen in de muur.
De kat houdt de twee openingen afwisselend in de gaten, want hij kan niet beide tegelijk bewaken.
In de gaten houden is eigenlijk te veel gezegd, want 40% van de tijd slaapt hij. Als de muis tevoorschijn komt door de opening waar de kat op dat moment naar loert, heeft de muis 20% kans om toch nog te ontsnappen.
De muis heeft honger en rent door één van de openingen de keuken in.

> Hoeveel kans heeft hij om uit de klauwen van de kat te blijven?

Een moeilijkheid bij het rekenen met kansen is en blijft de vraag wanneer je kansen moet optellen en wanneer je ze moet vermenigvuldigen. Een kansboom kan daarbij een goed hulpmiddel zijn.

Kansen mogen alleen opgeteld worden, als de verschillende uitkomsten elkaar niet (gedeeltelijk) overlappen.
Een voorbeeld daarvan heb je al gezien:
De kans op het gooien van een 4 met een dobbelsteen is $\frac{1}{6}$.
De kans dat er bij twee dobbelstenen minstens een 4 boven komt is echter niet gelijk aan $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.

11. > Hoe groot is die kans dan wel?

Bij het vermenigvuldigen van kansen geldt iets dergelijks.
Twee kansen mogen alleen maar vermenigvuldigd worden als de bijbehorende gebeurtenissen elkaar niet beinvloeden (die gebeurtenissen heten dan onafhankelijk).

12. Op een bepaalde dag in het voorjaar is de kans op mooi weer in Nederland $\frac{3}{4}$. De kans op mooi weer in Nieuw-Zeeland op diezelfde dag is $\frac{2}{3}$.

>a Hoe groot is de kans dat het op die dag in beide landen mooi weer is?

>b Dezelfde vraag, maar nu met België in plaats van Nieuw-Zeeland.

Kansrekening mag niet zomaar klakkeloos gebruikt worden. Dat blijkt uit het volgende, waar gebeurde, voorval.

13. In 1964 werd in Los Angeles een vrouw beroofd.
In de officiële stukken van de rechtbank worden de feiten als volgt omschreven:

> On June 18, 1964, about 11:30 A.M. Mrs. Juanita Brooks, who had been shopping, was walking home along an alley in the San Pedro area of the City of Los Angeles. She was pulling behind her a wicker basket carryall containing groceries and had her purse on top of the packages. She was using a cane. As she stooped down to pick up an empty carton, she was suddenly pushed to the ground by a person whom she neither saw nor heard approach. She was stunned by the fall and felt some pain. She managed to look up and saw a young woman running from the scene. According to Mrs. Brooks the latter appeared to weigh about 145 pounds, was wearing "something dark", and had hair "between a dark blond and a light blond", but lighter than the color of defendant Janet Collins' hair as it appeared at trial. Immediately after the incident, Mrs. Brooks discovered that her purse, containing between $35 and $40 was missing.
> About the same time as the robbery, John Bass, who lived on the street at the end of the alley, was in front of his house watering his lawn. His attention was attracted by "a lot of crying and screaming" coming from the alley. As he looked in that direction, he saw a woman run out of the alley and enter a yellow automobile parked across the street from him. He was unable to give the make of the car. The car started off immediately and pulled wide around another parked vehicle so that in the narrow street it passed within six feet of Bass. The latter then saw that it was being driven by a male Negro, wearing a mustache and beard. At the trial Bass identified defendant as the driver of the yellow automobile. However, an attempt was made to impeach his identification by his admission that at the preliminary hearing he testified to an uncertain identification at the police lineup shortly after the attack on Mrs. Brooks, when defendant was beardless.
> In his testimony Bass described the woman who ran from the alley as a Caucasian, slightly over five feet tall, of ordinary build, with her hair in a dark blond ponytail, and wearing dark clothing. He further testified that her ponytail was "just like" one which Janet had in a police photograph taken on June 22, 1964.

Uit de getuigenverklaringen van Mrs Brooks (het slachtoffer) en Mr. Bass komt een behoorlijk signalement van de dader en haar helper naar voren.
Toch is dat niet voldoende om Janet Collins te veroordelen.

>a Waarom niet?

De aanklager had zijn verhaal goed voorbereid. Na uitgebreid onderzoek in Los Angeles had hij de volgende kansen gevonden:

gele auto	$\frac{1}{10}$	vrouw met blond haar	$\frac{1}{3}$
man met snor	$\frac{1}{4}$	neger met baard	$\frac{1}{10}$
vrouw met paardestaart	$\frac{1}{10}$	gemengd koppel in auto	$\frac{1}{1000}$

De kans dat een koppel aan al deze kenmerken voldoet is 1 op 12.000.000. Daarmee was, volgens de aanklager, onomstotelijk aangetoond dat dit tweetal schuldig was aan de beroving.

>b Hoe kwam hij aan de kans 1 op 12.000.000?

De jury liet zich hierdoor overtuigen en het koppel werd veroordeeld.
In hoger beroep werden ze vrijgesproken door de Hoge Raad van Californië, die nogal wat aanmerkingen maakte op dit gebruik van de kansrekening.

>c Welk commentaar kan er zoal gegeven zijn?

De PIN-code.
Houders van een bank- of giromaatpas kunnen daarmee geld 'uit de muur' halen, tenminste, als ze hun PIN-code (een rijtje van vier cijfers dat alleen aan de houder bekend is) ook intoetsen. De combinatie van pas en PIN-code moet voorkomen dat een oneerlijke 'vinder' zomaar geld van de rekening van de pashouder kan halen.

1. U toetst uw PIN-code in.

Bij gastgebruik kunt u per etmaal eenmaal een bedrag van maximaal f 300,- opnemen.
2. U toetst het gewenste bedrag in.

Dit bedrag wordt op het beeldscherm zichtbaar. Bij sommige geldautomaten wordt hierna zichtbaar in welke bankbiljetten kan worden uitbetaald.
3. U maakt daaruit uw keuze.
4. U neemt uw pasje uit de geldautomaat.
5. Haal uw geld eruit.

Wat hebt u nodig om via gastgebruik geld op te nemen bij geldautomaten?

In de eerste plaats hebt u nodig een pasje met aan de achterzijde een magneetstrip en het „via de bank"-vignet. Magneetstrip en vignet kunnen zijn aangebracht op eurochequepas, betaalpas of bankpas. Een bankpas is per bank verschillend van uitvoering en is vooral bestemd voor gebruik in automaten.

Op de tweede plaats moet u in het bezit zijn van een nummer, aangeduid als PIN-code (= Persoonlijk Identificatie Nummer). De PIN-code bestaat uit 4 cijfers en wordt alleen aan u bekendgemaakt. Zelfs de bank kent uw PIN-code niet. Met alleen het pasje, zonder bijbehorende PIN-code, is het niet mogelijk van een geldautomaat gebruik te maken. Niemand kan dus uw pas gebruiken zonder uw PIN-code te kennen. Om veiligheidsredenen wordt uw pas voor automaten ongeldig gemaakt, nadat 3x achter elkaar een verkeerde PIN-code wordt ingetoetst.

Noteer uw PIN-code dus NOOIT op uw pasje.

Natuurlijk kan een onrechtmatige gebruiker op de gok een rijtje van vier cijfers intoetsen.

14. >a Hoe groot is de kans dat toevallig de goede PIN-code wordt ingetoetst?

Om te voorkomen dat iemand eindeloos rijtjes van vier cijfers blijft intoetsen maakt de geldautomaat na drie foutieve pogingen de pas ongeldig voor verder gebruik.

>b Hoe groot is de kans op drie missers voor iemand die de juiste PIN-code niet kent?

Het systeem geeft afdoende bescherming tegen misbruik. Er is echter een keerzijde: de pashouder kan zelf zijn PIN-code vergeten. In dat geval krijgt hij dezelfde problemen als een oneerlijke vinder.

15. Stel: een pashouder weet nog wel de vier cijfers (1, 5, 7 en 8) maar hij is de goede volgorde vergeten.

>a Hoeveel volgordes zijn er mogelijk?

>b Hoe groot is de kans dat zijn pas na drie pogingen ongeldig wordt gemaakt?

>c Bereken de kans op ongeldig maken als de PIN-code is samengesteld uit de vier cijfers 0, 2, 2 en 3.

In september 1989 werd met veel tamtam 'de' oplossing voor alle vergeetachtige pashouders geïntroduceerd. Een paar fragmenten uit het artikel in de Volkskrant van 20-9-1989:

UITVINDER HELPT BANKEN UIT DE NOOD

Nieuw ingenieus systeem voor het onthouden van de PIN-code

Van onze verslaggever

AMSTERDAM – Niemand hoeft zijn PIN-code meer te vergeten. De Alkmaarse uitvinder Adriaan Soeterbroek (44) heeft uiteindelijk het ei van Columbus gevonden. In plaats van vier cijfers hoeft de eigenaar van een bank- of giromaatpas in het vervolg slechts een woord, bijvoorbeeld "boot" te onthouden.

Het kaartje – al PM-kaartje (pro memorie) genoemd – moet bij de bank- of giromaatpas worden bewaard. Een eventuele dief of zakkenroller heeft er echter niets aan, omdat het noodzakelijk is om het woord te kennen voordat het systeem kan worden gekraakt. Soeterbroek heeft uitgerekend dat er 1.180.000 mogelijkheden zijn. "Het is ook veel makkelijker om op de gok vier cijfers in te drukken, want dan heeft men een kans van 1 op 9999 op een goede oplossing."

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z

PM-card © Adriaan Soeterbroek '88

Wie als PIN-code 4873 heeft, maar makkelijker het woord Rabo onthoudt moet op het kaartje onder de letter r in de eerste rij 4 invullen. Onder de a moet op de tweede rij 8 worden ingevuld en onder de b op de derde rij 7. Op de laatste rij hokjes tenslotte de 3 onder de 0. Uiteraard is het zaak ook de andere hokjes zoveel mogelijk in te vullen.

Het is niet duidelijk hoe de uitvinder aan het aantal van 1.180.000 mogelijkheden komt. Dat is ook niet nodig om te beredeneren dat de kans op het vinden van de PIN-code zeker niet kleiner kan zijn dan 1 op 1000.

16. > Kun je dat verklaren?

Noteer uw PIN-code dus NOOIT op uw pasje.

Natuurlijk moeten alle hokjes opgevuld worden met cijfers. Daar moet nog goed over nagedacht worden.
De onderstaande opvulling is in ieder geval niet zo slim bedacht.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
8	7	6	3	1	0	9	7	8	0	9	3	0
3	4	5	1	2	8	9	2	2	7	9	3	2
8	2	1	3	0	4	7	2	1	8	9	7	7
7	2	8	4	3	2	0	5	6	3	4	7	8

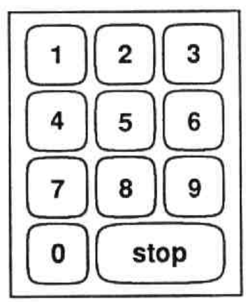
codewoord MIEK
PIN-code 0204

17. Iemand krijgt dit PIN-kaartje met bijbehorende pas in handen. Natuurlijk kent hij het codewoord en de PIN-code (0204) niet. Daarom kiest hij aselect uit iedere rij één cijfer.

>a Bereken de kans dat hij op deze manier de goede PIN-code te pakken krijgt.

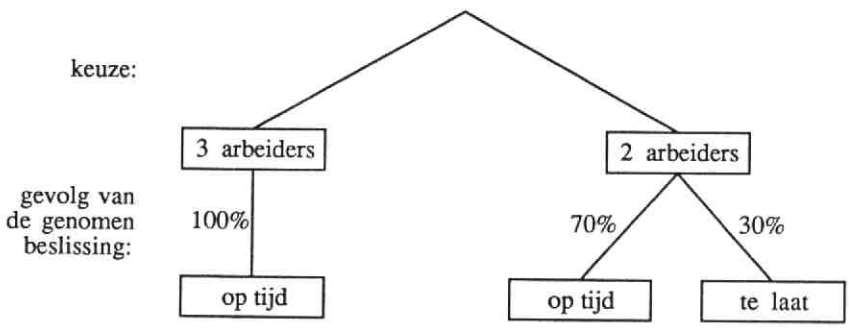
>b Waarom is dit geen slimme opvulling van het PIN-kaartje?

18. > Bedenk een betere opvulling van het bovenstaande kaartje.



7 Kans en Verwachting

1. Een aannemer, gespecialiseerd in het kleinere werk, krijgt een karwei aangeboden dat binnen 4 dagen moet zijn geklaard.
   Als dat lukt dan ontvangt hij *f*5000,–.
   Overschrijdt hij de overeengekomen tijdsduur dan krijgt hij slechts *f*4000,–
   Het karwei is zeker op tijd klaar als hij 3 arbeiders inzet.
   Hij kan ook 2 arbeiders inzetten, maar dan loopt hij het risico dat de 4 dagen niet toereikend zijn. Er is 30% kans dat er in dat geval meer dan 4 dagen nodig zijn.
   De keuzemogelijkheden en de daarbij behorende gevolgen kunnen in een boom worden weergegeven.



Van het bedrag dat de aannemer ontvangt moet het loon voor de arbeiders nog worden betaald: *f*600,– per arbeider. Als hij 3 arbeiders op het karwei zet is zijn winst dus *f*3200,– (= 5000 – 3 ∗ 600).

>a Bij het inzetten van 2 arbeiders kan dat gunstig òf ongunstig uitpakken. Bereken voor beide gevallen zijn winst.

>b Stel dat jij de keuze moest maken tussen het inzetten van 2 of van 3 arbeiders. Welke keus maak je dan?

Per jaar krijgt de aannemer 50 van dergelijke karweien aangeboden, waarbij hij telkens kan kiezen of hij 2 dan wel 3 arbeiders inzet.

>c Welke winst kan hij over die 50 karweien verwachten als hij elke keer kiest voor het inzetten van 2 arbeiders?

2. Een banketbakker maakt elke zaterdag een aantal luxe taarten. Het aantal klanten dat zo'n taart wil kopen schommelt wekelijks tussen de dertien en zestien.
Op basis van zijn ervaringen schat hij de kansen op de aantallen kopers als volgt:

aantal	13	14	15	16
kans	0,2	0,4	0,3	0,1

>a Stel dat hij 15 taarten bakt. Hoe groot is dan de kans dat hij die niet allemaal verkoopt?

>b Hoe groot is de kans dat hij alle taarten verkoopt, als hij er 14 zou maken?

>c Hoeveel klanten zullen zich zo ongeveer per jaar (= 50 zaterdagen) melden voor zo'n taart?

>d Hoeveel taarten verkoopt de bakker gemiddeld per zaterdag, aangenomen dat hij er altijd 16 bakt?

Een enorme taart voor Liz Taylor ter gelegenheid van haar 25e verjaardag (1957)

3. 'Chuck-a-Luck' is een geliefd gokspelletje op Amerikaanse kermissen.
Tegen een inzet van één dollar mag je drie dobbelstenen gooien. Valt geen van de stenen op de 'zes', dan ben je de inzet kwijt. In de andere gevallen krijg je de inzet terug plus één dollar voor elke steen die op de 'zes' valt.

>a Hoe groot is de kans dat je twee dollar krijgt uitbetaald (inclusief de inzet)?

>b Bereken de kansen op de andere mogelijke uitbetalingen.

uitbetaling (in dollars)	0	2	3	4
kans				

Een exploitant van dit spel reist alle kermissen af.
Over een jaar genomen wordt het spel bij hem ongeveer 200.000 keer gespeeld.

>c Welk bedrag zal hij naar verwachting over dat aantal spelletjes moeten uitbetalen?

>d Hoe groot is zijn winst per jaar?

>e Hoeveel wint hij gemiddeld per spel?

4. De korfbalvereniging 'Rust Roest' organiseert een vlooienmarkt om de aanschaf van nieuwe materialen te bekostigen.
Onderdeel is een loterij met drie soorten prijzen:

hoofdprijs (waarde *f* 100,–) met winstkans 0,004.
tweede prijs (waarde *f* 25,–) met winstkans 0,02.
troostprijs (waarde *f* 6,–) met winstkans 0,1.

>a Je hebt twee loten gekocht.
Hoe groot is de kans dat je minstens één prijs wint?

>b Er zijn tien tweede prijzen.
Hoeveel loten zijn er in deze loterij?

De vereniging wil 750 gulden overhouden aan de loterij.

>c Wat moet een lot dan kosten?

De bakker krijgt *per keer gemiddeld* 14,3 klanten voor zijn speciale taarten.
De exploitant betaalt *per spel gemiddeld* 0,92 dollar uit.
Zo'n gemiddelde hoeveelheid per keer wordt wel *verwachting* of *verwachtingswaarde* genoemd.

Het zijn eigenlijk rare getallen. De bakker zal nooit 0,3 klanten in zijn zaak krijgen en de exploitant betaalt nooit 92 dollarcent uit bij een spel.

Toch zou het onjuist zijn om deze getallen af te ronden, omdat ze iets zeggen over wat er uitkomt bij een lange reeks van gelijksoortige gebeurtenissen.
Zo zou afronding op 1 dollar betekenen dat de exploitant over een jaar gerekend geen winst maakt.

De verwachtingswaarden bij opgave 2 en 3 werden berekend als gemiddelde over een grote serie herhalingen (50 zaterdagen en 200.000 spelletjes).

Het kan ook rechtstreeks met behulp van de kansen.
Bij opgave 2 heb je gevonden:

uitbetaling (in dollars)	0	2	3	4
kans	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

De verwachting van de uitbetaling per spel kan berekend worden door de uitbetalingen te vermenigvuldigen met de bijbehorende kansen en de resultaten op te tellen:

$$\frac{125}{216} * 0 + \frac{75}{216} * 2 + \frac{15}{216} * 3 + \frac{1}{216} * 4 = \frac{199}{216}.$$

5. >a Bereken m.b.v. kansen de winstverwachting per spel voor de *exploitant*.

   >b Hoe kun je de winstverwachting per spel voor de *speler* berekenen?

6. In een lampenfabriek wordt onder andere kerstboomverlichting gemaakt. Op een lang snoer worden 50 kleine lampjes gemonteerd. Daar wil wel eens een slecht exemplaar tussen zitten: gemiddeld één op de honderd lampjes brandt niet.
De kansen op de aantallen defecte lampjes per snoer zijn:

aantal defect	0	1	2	3	4	5	6
kans	0,6050	0,3056	0,0756	0,0122	0,0025	0,0001	0

Natuurlijk kunnen er ook wel 6 of meer lampjes kapot zijn, maar de kansen daarop zijn zo klein dat ze, afgerond op vier decimalen, gelijk zijn aan nul.

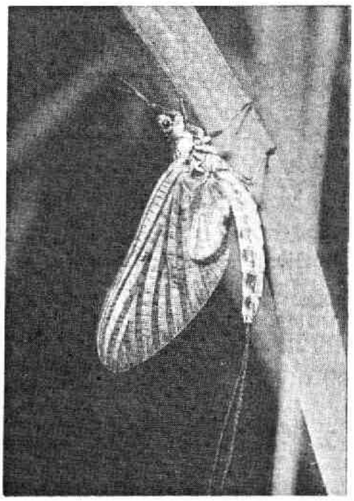
>a Controleer met een berekening de kans op nul defecte lampjes.

>b Welk aantal defecte lampjes mag je verwachten per snoer van 50?

>c Kun je het antwoord van >b ook op een andere manier vinden?

7. Zoals uit de naam al blijkt leven ééndagsvliegen niet erg lang. Gerekend vanaf het moment dat ze volwassen worden, leven ze hoogstens nog 12 uur.
Bij onderzoeken is gebleken dat (vrijwel) alle volwassen diertjes na zes uur nog in leven zijn. Daarna neemt hun aantal per uur snel af. Na 7 uur zijn er nog 850 in leven. Dus 150 van de 1000 sterven tijdens hun zevende levensuur.
De volledige onderzoeksgegevens in tabelvorm:

aantal uren	aantal nog in leven (per 1.000)
6	1000
7	850
8	600
9	250
10	100
11	20
12	0



Gewone haft of eendagsvlieg

>a Hoeveel diertjes gaan dood op acht-urige leeftijd?

>b Hoe groot is de kans dat een volwassen exemplaar minstens 9 uur leeft?

>c De kans dat een volwassen diertje op negenurige leeftijd doodgaat is 0,15. Controleer dat.

Van alle diertjes die op negenurige leeftijd doodgaan, stellen we de leef-tijd op 9,5 uur.

>d Maak de volgende kanstabel af.

leef-tijd	6,5	7,5	8,5	9,5	10,5	11,5	12,5
kans				0,15			0

>e Wat is de *levensverwachting* van een volwassen ééndagsvlieg (dat is het verwachte aantal uren dat zo'n vlieg leeft)?

8. >a Wat is de verwachtingswaarde van het aantal ogen dat bij het gooien van één dobbelsteen bovenkomt?

>b En bij twee dobbelstenen?

9. Een kansspel heet eerlijk als alle spelers een even grote winstverwachting per spel hebben.
Kees en Thea spelen het volgende spelletje:
Er worden 3 munten geworpen. Als er drie keer hetzelfde bovenkomt krijgt Thea 75 cent van Kees. In de andere gevallen krijgt Kees een bepaald bedrag van Thea.

>a Wat is de winstverwachting voor Thea?

>b Hoe hoog moet het bedrag zijn dat Kees bij winst krijgt, wil het spel eerlijk zijn?

10. Een druiventeler kan kiezen tussen twee manieren van oogsten.

Manier I: Hij oogst de druiven direct als ze rijp zijn.
De winst per kilo is in dat geval *f* 1,50.
Aan deze manier van oogsten is geen enkel risico verbonden.

Manier II: Als de druiven rijp zijn laat hij ze nog twee weken hangen. Daardoor worden de druiven voller van smaak. In dat geval is zijn winst per kilo *f* 2,–.
Aan manier II is wel een risico verbonden. Als het teveel regent in die twee weken dan worden de druiven zodanig aangetast dat hij ze nog maar voor *f* 0,75 per kilo kan verkopen.
De kans dat het in die periode te veel regent is 30%.

>a Laat zien dat de te verwachten winst bij Manier II groter is dan bij manier I.

Als de winst per kilo voor aangetaste druiven veel minder is dan 75 cent, kan de teler beter kiezen voor Manier II.

>b Tot welk bedrag per kilo voor aangetaste druiven levert manier I naar verwachting meer op?

11. Een onderzoeker wil weten hoe groot het percentage middelbare scholieren is dat meer dan eens spijbelt.
Hij interviewt daartoe 1200 scholieren.
Omdat bij zo'n persoonlijke vraag mag worden aangenomen dat niet alle leerlingen naar waarheid zullen antwoorden, gebruikt hij de volgende onderzoeksmethode (bekend onder de naam 'randomized response'):

- aan iedere leerling wordt de vraag gesteld: 'heb jij meermalen gespijbeld?'
- de leerling mag niet direkt antwoord geven; eerst moet hij een dobbelsteen opgooien; het resultaat van de worp is onzichtbaar voor de onderzoeker.
- vervolgens moet de gestelde vraag op de volgende manier worden beantwoord:

als je geworpen hebt:	*dan antwoord je*:
1,2,3 of 4 ogen	naar waarheid met 'ja' of 'nee'
5 ogen	verplicht met 'ja'
6 ogen	verplicht met 'nee'

Bij het gebruik van deze methode weet de onderzoeker absoluut niet of een antwoord de waarheid weergeeft of niet.
De 1200 gegeven antwoorden zijn in drie categorieën te verdelen:

I: de verplichte 'ja'-antwoorden.
II: de verplichte 'nee'-antwoorden.
III: de 'ja' en 'nee' antwoorden die naar waarheid zijn gegeven.

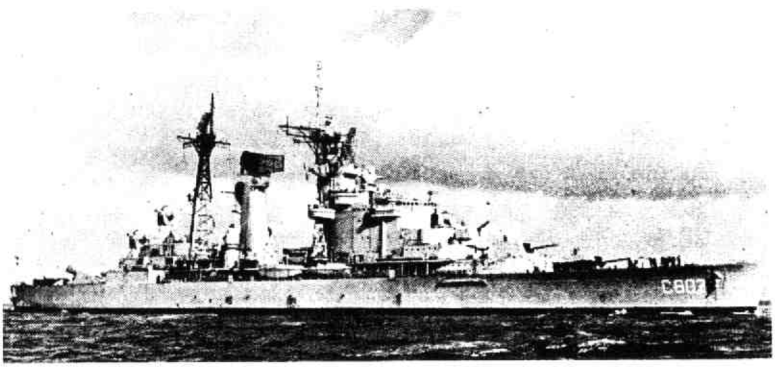
>a Hoeveel antwoorden mag je in elk van de drie categorieën verwachten?

Voor het onderzoek zijn natuurlijk alleen de antwoorden uit categorie III van belang.
Van de 1200 antwoorden luiden er in totaal 416: 'ja'.
Op grond van deze gegevens schat de onderzoeker het werkelijke aantal leerlingen dat meer dan eens gespijbeld heeft op 324.

>b Onderzoek hoe hij tot deze schatting is gekomen.

8 Extra opgaven

1. De projektielen die tegenwoordig gebruikt worden om schepen tot zinken te brengen zijn tamelijk trefzeker. De trefkans van zo'n aanvalsprojektiel (AP) is 90%. Gelukkig zijn de wapens die een AP onschadelijk moeten maken ook niet voor de poes: een verdedigingsprojektiel (VP) heeft een kans van 60% om een AP voortijdig uit te schakelen.
Een radarsysteem van een schip kan een AP tijdig ontdekken. Wanneer een eerste afgevuurde VP geen succes blijkt te hebben, is er nog voldoende tijd beschikbaar om een tweede VP op jacht te sturen.



>a Bereken de kans dat een AP doel treft, ondanks alle pogingen om dat te voorkomen?

>b Hoe groot is de kans dat een AP wordt uitgeschakeld?

2. Een een-eiïge tweeling ontstaat doordat een bevruchte eicel zich deelt. Daarom zijn de twee kinderen die dan worden geboren van hetzelfde geslacht.
Bij een twee-eiïge tweeling worden toevallig twee eitjes tegelijk bevrucht. De geslachten van de twee kinderen kunnen dan verschillen.

>a Wat zijn bij een een-eiïge tweeling de kansen op 0, 1 en 2 meisjes?

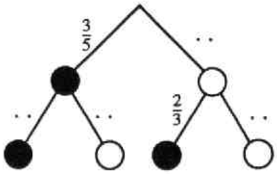
>b Dezelfde vraag voor een twee-eiïge tweeling.

In 1981 werden er in Nederland 1932 tweelingen geboren. De samenstelling van die tweelingen was:

aantal meisjes	0	1	2
frequentie	698	539	695

>c Hoeveel van die 1932 waren, naar verwachting, eeneiïge tweelingen?

3. Uit een vaas met rode en witte ballen worden er twee gepakt.
De (gedeeltelijk ingevulde) kansboom die daarbij hoort is:



>a Bepaal de ontbrekende kansen.

>b Hoe groot is de kans op twee ballen van verschillende kleur.

4. Een encyclopedie staat keurig in de goede volgorde (nrs. 1 t/m 16) in een kast. Vier leerlingen pakken de delen 3, 7, 11 en 14 en zetten ze na gebruik, zonder op de goede plaats te letten, terug.

>a Hoe groot is de kans dat de 16 delen weer in de goede volgorde staan?

>b Hoe groot is de kans dat er om de goede volgorde te herstellen twee exemplaren moeten worden verwisseld.

5. Jan en Els gooien elk met een dobbelsteen.
Wanneer Els hogere ogen gooit dan Jan, krijgt ze van hem een kwartje. In het andere geval moet zij Jan een kwartje betalen.

>a Waarom is dit geen eerlijk spel?

>b Hoe kun je de betaling wijzigen om het spel wel eerlijk te maken?

6. In een klein bedrijf worden schroeven gefabriceerd.
Daarvoor zij drie machines beschikbaar, die allemaal precies hetzelfde werk verrichten. Machine A is het langst in bedrijf van de drie en verzorgt nog maar 20% van de totale produktie. Machine B neemt 30% van de produktie voor zijn rekening, terwijl de nieuwste machine (C) de helft van de produktie verzorgt.
Hoe ouder de machine, hoe hoger het percentage slechte schroeven dat hij produceert.
Voor de machines A, B en C zijn de percentages onbruikbare schroeven resp. 6%, 3% en 1%.
De dagproduktie van de drie machines samen omvat 2000 schroeven.

>a Hoeveel slechte schroeven verwacht je bij de dagproduktie?

>b Hoe groot is de kans dat een onbruikbare schroef, die wordt ontdekt in de dagproduktie, afkomstig is van machine B?

7. In een etui zitten 3 potloden, 2 blauwschrijvers en 3 roodschrijvers.

   >a Je pakt er drie uit. Hoe groot is de kans dat daarbij geen roodschrijver is?

   >b Je hebt een potlood nodig. Je pakt net zolang een schrijfgereedschap uit de etui totdat je een potlood te pakken hebt. De kans dat je meteen een potlood pakt is $\frac{3}{8}$.
   Maak de tabel af:

aantal trekkingen	1	2	3	4 . . . .
kans	$\frac{3}{8}$			

8. In een stad zijn 18.000 auto's geregistreerd.
   Per jaar worden er gemiddeld 150 gestolen.

   >a Hoe groot is de kans dat een willekeurige auto in die stad wordt gestolen?

   >b Je wilt een diefstalverzekering afsluiten voor jouw auto (waarde: *f* 21.000,–).
   Welke premie zal een verzekeringsmaatschappij daarvoor vragen, op grond van de statistische gegevens?

Na een paar jaar blijkt de maatschappij verlies te lijden op de diefstalverzekeringen.
Oorzaak: de autodieven hebben een zekere voorkeur voor auto's uit de duurdere prijsklasse. Van de 150 gestolen auto's zijn er 90 duurder dan *f* 30.000,- , terwijl van alle auto's in de stad slechts 30% tot deze prijsklasse behoort.

   >c Hoe groot is de kans dat een auto van meer dan *f* 30.000,- wordt gestolen?

   >d Welke premie zal de eigenaar van een auto van *f* 40.000,- moeten betalen, rekening houdend met de nieuwe gegevens?

   >e Wat lijkt een reële premie voor een auto van *f* 20.000,- ?

9. Een leraar woont op grote afstand van school.
Zij lessen beginnen iedere dag om 8.30 uur.
Als hij om 7.45 uur vertrekt, is hij zeker op tijd.
Door allerlei oorzaken komt dat er echter niet zo vaak van.

Het aantal minuten dat hij later dan 7.45 vertrekt noemen we V. Dus V = 10 betekent dat hij om 7.55 uur van huis weggaat.
De vertrektijden met bijbehorende kansen zijn:

V =	0	5	10	15
kans	0,4	0,3	0,2	0,1

>a Wat is de verwachtingswaarde van zijn vertrektijd?

De reistijd wordt beïnvloed door het weer en de stoplichten. De kansen op de verschillende reistijden (in minuten) zijn:

R =	30	35	40
kans	0,2	0,5	0,3

Je mag aannemen dat vertrektijd en reistijd elkaar niet beïnvloeden. Dus erg laat vertrekken betekent niet automatisch een kortere reistijd.

>b Hoe groot is de kans dat de leraar op tijd op school komt, als hij om 7.55 uur vertrekt?

>c In de cellen van deze matrix worden de aankomsttijden ingevuld.
Bij de eerste cel is dat al gedaan. Neem de matrix over en vul hem verder in.

R↓ \ V→	0	5	10	15
30	8.15			
35				
40				

>d Hoe groot is de kans dat hij om 8.25 uur op school arriveert?

>e Een schooljaar duurt 200 lesdagen.
Hoeveel lesdagen zal hij, naar verwachting, te laat komen?

10. Een multiple-choice test bestaat uit 10 vragen. Elke vraag heeft 4 antwoordmogelijkheden. Van 6 vragen weet je het goede antwoord met zekerheid. Van de 4 overige vragen snap je niets en dus moet je daar gokken naar het juiste antwoord.

    >a Hoeveel van de 10 gegeven antwoorden zullen er naar verwachting goed zijn?

    >b Hoe groot is de kans dat je 8 van de 10 vragen goed beantwoort?

11. In kansvragen wordt meestal aangenomen dat bij een geboorte de kans op een meisje 50% is.
    In het Statistisch Zakboek van 1984 stond de volgende tabel:

	1975 x 1000	*1980*	*1981*	*1982*	*1983*
Levendgeborenen	177,9	181,3	178,6	172,1	170,2
onder wie meisjes	86,8	88,3	87,4	83,9	83,2

    > Hoe groot is de kans op de geboorte van een meisje, op basis van deze statistische gegevens?

12. Er zijn drie bakjes met munten.
    In bakje A liggen 2 munten van 5 gulden en 2 stuivers.
    In bakje B 3 munten van 5 gulden en 1 stuiver.
    In bakje C 1 munt van 5 gulden en 3 stuivers.
    Je mag uit één van de bakjes blind één munt pakken.

    >a Hoe groot is de kans dat je een munt van 5 gulden pakt.

    Stel dat je de 12 munten eerst zelf mag verdelen over de drie bakjes. Daarna mag je er weer één munt uithalen.

    >b Hoe zou je de 12 munten verdelen over de drie bakjes.

    >c Hoe groot is in dat geval je kans op een munt van *f*5,- ?

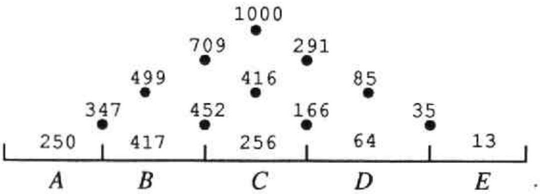
13. Van de 15 schroeven in een doosje zijn er 4 onbruikbaar.
    Voor een karweitje pak je drie schroeven uit het doosje.

    >a Hoe groot is de kans dat ze alle drie bruikbaar zijn?

    Bij controle blijken twee van de drie gepakte schroeven onbruikbaar. Die gooi je weg en je pakt twee nieuwe schroeven uit het doosje.

    >b Hoe groot is de kans dat je nu in totaal 3 goede schroeven hebt?

14. Met de computer wordt een simulatie van het bord van Galton uitgevoerd.
Bij iedere pin is de kans om naar links te vallen 0,7.
Het resultaat van een serie van 1000 kogeltjes.

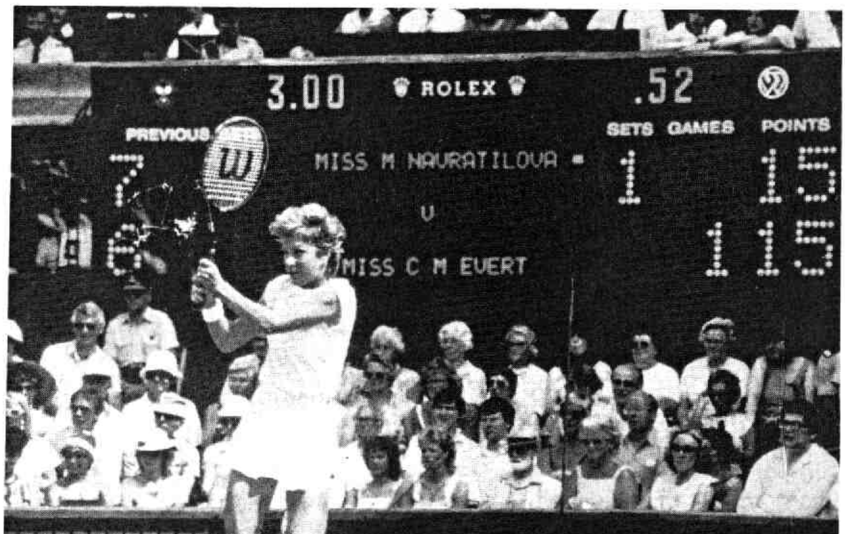


>a Hoe kun je aan de aantallen bij de pinnen zien dat de kans op vallen naar links 0,7 is?

>b Hoe groot is de kans dat een kogeltje de route *LLRL* volgt?

>c Bereken de (theoretische) kans dat een kogeltje in *B* terecht komt.
Komt dat redelijk overeen met de resultaten van de simulatie?

>d Bereken ook de kans dat een kogeltje in bakje *C* terecht komt.



15. *De finales van Wimbledon.*
Het tennistournooi van Wimbledon wordt beslist in een finalepartij die maximaal 5 sets duurt.
Degene die als eerste 3 sets op zijn naam weet te brengen, is winnaar.
Als aangenomen wordt dat beide finalisten even sterk zijn, kan gesteld worden dat ieder van hen 50% kans heeft om een set te winnen.

>a Noem de twee finalisten A en B.
Geef in een boom alle mogelijke partijverlopen weer.

>b Bereken de kans dat een partij in 3 sets wordt beslist.
Doe hetzelfde voor de partijen van 4 sets en van 5 sets.

Van de laatste 89 heren-enkelspel-finales is het volgende bekend:

partijlengte	3 sets	4 sets	5 sets
aantal	44	21	24

Dit klopt niet erg met de berekende kansen van >b.

>c Geef enkele mogelijke oorzaken voor die afwijkingen tussen kansmodel en werkelijkheid.

Een van de mogelijke redenen kan zijn dat de winstkansen bij een set beïnvloed worden door het resultaat van de vorige set.
De kans op winst van de eerste set blijft 50%. Stel dat de winnaar van een set een kans van 70% heeft om de eerstvolgende set ook te winnen.

>d Ga door berekening na of de kansen op een partij van resp. 3, 4 en 5 sets nu beter overeenstemmen met de werkelijkheid.

Toevalsgetallen

26 61 71 18 86	19 05 15 26 36	76 61 35 93 70	07 41 71 77 85
28 68 36 90 96	44 93 86 31 95	95 41 11 45 00	84 30 68 20 88
51 30 82 78 81	66 18 62 76 69	80 92 61 11 79	44 91 94 45 27
17 12 24 16 97	53 84 10 16 16	59 14 40 58 12	47 95 62 22 74
63 35 02 67 12	25 34 84 50 72	36 78 97 72 48	32 86 75 51 14
96 06 00 60 96	10 94 84 29 21	61 10 05 60 71	27 35 51 80 76
79 70 92 56 23	16 45 54 82 01	28 10 24 77 22	91 23 77 57 06
36 85 11 35 05	35 14 88 81 28	96 87 79 79 43	75 50 85 93 48
88 23 45 13 52	71 01 72 22 49	28 26 70 94 51	14 67 51 61 64
05 98 58 80 53	88 17 51 30 19	70 79 06 31 28	41 35 28 16 69
98 18 36 62 84	88 60 13 94 99	39 71 60 02 46	23 06 88 41 00
16 58 55 13 41	16 07 07 25 88	46 49 53 73 09	29 31 09 15 98
88 68 76 26 99	79 38 80 39 71	44 38 62 45 25	15 96 67 10 29
75 92 68 76 90	06 75 42 64 96	94 35 53 50 00	43 74 71 11 18
57 26 54 80 20	18 58 52 72 77	63 21 39 81 61	16 14 06 61 16
36 91 77 88 92	35 40 39 39 17	43 02 62 45 99	41 44 20 34 89
74 35 97 99 69	96 03 34 26 66	97 69 01 34 40	24 08 13 24 29
47 60 14 97 57	17 08 38 87 89	29 91 05 32 38	80 19 76 72 97
30 74 10 14 10	65 62 09 04 76	79 28 52 39 00	69 45 35 08 86
02 68 22 24 67	59 15 77 41 64	45 70 29 22 29	68 19 26 20 07
83 14 35 53 06	94 80 84 31 87	27 01 42 96 91	54 65 06 56 08
90 98 02 19 26	01 80 47 79 57	95 85 49 18 18	18 62 68 33 08
16 65 93 97 61	15 15 46 00 64	89 87 17 21 20	09 25 01 94 66
44 99 62 08 05	78 58 40 74 99	36 05 03 59 36	92 10 64 71 66
77 23 42 30 77	72 78 06 28 13	97 40 67 91 01	42 53 85 82 34
95 30 67 43 97	61 82 00 45 85	37 80 98 75 44	54 22 92 53 75
38 27 19 86 01	76 89 52 97 30	18 16 77 00 05	85 00 60 60 38
16 18 92 53 66	10 22 73 05 22	23 82 59 34 86	19 99 92 05 04
40 02 67 01 74	50 28 99 15 48	99 20 79 04 14	50 84 18 04 03
80 02 67 93 94	25 27 54 14 82	27 64 86 94 41	05 40 21 13 49
46 14 25 62 86	83 80 39 57 90	20 59 99 74 64	74 46 90 71 08
00 86 33 97 36	94 83 43 27 53	40 01 95 50 68	80 89 96 70 83
86 17 86 59 17	77 90 89 18 20	45 95 09 44 01	68 95 95 50 32
88 87 85 21 65	46 56 91 43 84	60 49 75 90 62	16 85 52 24 05
13 05 78 32 95	97 08 45 65 87	71 87 76 64 28	75 61 93 15 08
99 87 30 02 27	98 44 47 57 40	45 87 34 36 97	33 11 85 35 92
49 59 72 23 46	24 46 27 84 82	76 48 13 46 57	08 45 33 72 67
86 82 30 02 85	04 31 16 10 50	57 74 52 04 83	56 48 08 17 44
38 02 66 27 35	02 20 33 32 85	73 92 26 18 57	13 68 00 08 95
45 31 54 58 75	11 32 02 38 56	20 92 26 46 12	60 21 94 96 42
92 45 75 38 29	89 05 88 87 13	56 85 69 70 04	08 22 71 45 77
68 09 33 35 52	02 43 62 22 65	64 01 28 03 08	20 49 35 52 91
45 36 03 04 35	07 85 92 96 75	53 95 90 08 34	40 18 63 88 50
92 53 02 76 41	50 97 53 38 97	76 89 45 57 77	65 97 83 74 73
01 14 82 73 59	94 00 72 27 17	74 39 84 01 88	31 37 78 73 54
50 16 54 47 90	68 07 86 08 38	51 19 39 77 61	26 28 06 11 97
83 58 30 45 51	49 99 33 18 75	63 38 38 32 66	30 83 60 20 80
20 13 93 94 13	57 19 70 49 86	43 80 89 74 83	82 46 36 15 48
86 33 95 21 55	86 89 05 27 23	45 65 87 49 78	64 27 42 82 20
75 75 76 88 47	56 62 68 23 05	14 40 46 44 97	18 54 19 02 37

39 04 99 65 54	98 26 82 31 02	36 13 86 23 38	33 70 66 50 99
93 54 33 31 80	74 60 18 42 45	01 53 81 17 42	90 17 87 17 28
38 50 80 15 77	62 87 85 12 42	16 16 96 89 01	07 06 27 00 94
22 78 81 76 24	53 39 77 22 77	32 27 10 31 48	69 35 24 92 95
06 87 01 01 16	95 82 70 98 10	79 80 96 55 56	40 70 04 19 40
22 09 49 45 48	37 69 92 13 50	31 29 55 91 33	71 08 12 55 85
59 12 23 93 17	15 04 09 23 60	10 96 69 21 46	48 56 58 70 98
65 80 82 51 62	46 40 42 24 80	96 18 91 24 63	47 38 00 02 51
86 10 40 60 18	56 01 02 37 84	80 04 44 55 23	28 31 41 50 28
18 42 84 34 97	37 25 59 13 51	30 29 61 47 37	48 20 54 92 72
95 07 26 25 02	16 33 25 65 67	91 46 42 37 98	00 82 42 37 43
93 07 66 11 53	61 29 75 29 56	98 24 32 16 37	77 93 03 89 08
66 15 91 11 50	05 15 80 47 28	29 16 34 10 87	61 65 41 44 56
99 02 96 24 52	03 41 75 71 57	69 42 38 76 79	38 95 88 14 40
97 87 27 93 87	99 71 46 98 80	11 09 82 32 65	37 57 57 66 35
88 18 52 93 84	39 82 44 30 26	72 46 34 10 60	89 05 17 97 30
57 66 58 47 32	88 82 28 51 70	40 72 97 27 16	27 07 97 29 44
08 60 68 64 61	86 57 22 43 03	43 80 45 92 12	87 01 10 27 64
37 33 91 03 51	25 39 09 10 39	48 54 82 31 80	59 81 07 45 05
52 98 87 60 65	48 02 45 43 39	76 09 18 35 48	42 04 52 98 05
97 56 67 89 05	78 87 97 99 64	52 54 87 43 07	38 19 24 57 36
11 15 09 31 98	68 38 06 09 50	73 80 70 39 13	64 31 43 65 43
16 46 08 86 00	78 81 78 12 11	03 75 58 79 03	93 78 21 90 10
18 57 41 01 32	78 16 96 12 66	94 63 36 44 38	16 44 44 88 45
45 00 69 79 37	71 36 63 63 87	31 70 85 16 81	32 88 63 04 00
02 88 51 23 61	49 73 59 73 81	05 07 23 80 84	62 02 33 86 04
56 55 91 00 64	67 70 40 39 87	03 92 54 49 15	89 96 53 39 32
39 30 11 27 48	44 76 41 05 04	33 84 59 16 97	18 06 51 87 90
89 38 43 87 21	90 63 25 44 44	66 49 97 33 83	73 24 81 72 32
99 26 53 68 76	61 76 39 66 07	10 47 41 09 52	01 56 53 74 98
06 14 81 27 98	28 01 09 53 82	01 49 38 39 25	21 10 79 58 77
97 77 16 78 98	88 58 50 13 76	27 72 87 54 12	80 96 58 41 01
39 38 90 08 75	83 27 09 64 63	71 50 51 01 85	47 64 68 89 49
43 02 98 15 90	55 88 26 44 62	82 14 85 39 69	25 63 00 37 98
41 02 41 72 81	21 93 21 41 38	72 14 85 39 69	25 63 00 37 98
95 82 03 15 94	76 65 17 54 29	33 53 44 88 99	59 42 75 20 66
33 90 37 60 40	77 10 71 26 85	07 44 46 42 13	11 04 13 96 76
03 13 94 40 77	10 71 26 85 07	44 46 42 13 11	04 13 96 07 06
59 22 62 67 20	29 94 42 14 21	20 82 62 90 97	24 42 59 87 90
64 54 42 27 73	99 23 60 72 36	36 76 79 69 97	35 00 38 21 98
31 10 36 88 85	02 21 71 43 27	73 66 33 60 92	76 27 39 00 44
71 81 74 42 36	30 17 73 96 25	40 05 23 97 81	30 24 90 44 47
83 03 58 70 44	63 74 57 08 22	71 73 63 71 01	70 34 94 50 96
60 30 28 27 94	73 84 24 33 93	43 18 65 78 71	16 50 05 64 36
20 39 63 61 02	48 93 25 76 53	24 20 46 94 65	30 47 30 73 85
64 54 98 48 92	43 39 22 05 27	41 79 64 81 06	24 40 52 29 72
64 97 68 61 08	58 28 80 85 56	77 29 72 11 85	04 67 89 90 02
62 68 84 52 46	39 26 78 30 24	88 78 01 17 09	34 98 62 94 42
10 43 22 72 08	07 84 52 93 05	54 72 73 70 70	20 66 04 53 38
26 03 47 08 92	03 76 55 69 47	44 82 27 82 37	29 27 81 72 56

0	1	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0
1	1	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1	1
0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0
1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1	0	1

0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0
1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1	0	0
0	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0
1	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	1	0	1

0	1	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0
0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0
0	1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0
1	0	0	0	1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0

0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1
1	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	1	1	1	0
1	0	1	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
0	0	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0
1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0

1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	1	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1	0	0
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0	0	1	0	1
1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0

0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1

1	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1	0
0	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	1	0	0
1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1

0	0	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0
1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1
0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	1	1	1
0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1

1	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	1
0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0
0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	0
1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0
1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1

1	1	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1

0	1	0	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	1	1
0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0
0	0	1	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	1

1	0	0	0	1	1	1	1	0	1	0	0	1	1	1	0	1	1	0	1
1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	0
1	0	1	1	0	1	1	0	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	0	0
1	0	0	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	1

0	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0	1	0	0
0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0
0	0	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1
0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0
1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1	1	0	0	0	1	1	0	1

0	0	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1
1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0
1	0	1	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0
0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1

0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1
0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1
0	0	1	1	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0
1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	1

0	1	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0
0	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	0

0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	1
1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0
1	1	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0
1	1	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0

1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	1
0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1	1

0	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1
1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1
0	1	0	0	0	1	1	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0

0	0	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1
0	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1
0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0
0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0