Telprobleme

TELPROBLEMEN

TELPROBLEMEN

Wiskunde A

TELPROBLEMEN

Een produktie ten behoeve van het project Hawex.

Ontwerpers:	Henk van der Kooy, Martin Kindt
Met medewerking van:	Christiane Hauchart Jan de Lange Martin van Reeuwijk Anton Roodhardt
Vormgeving:	Ada Ritzer

Utrecht, april 1989

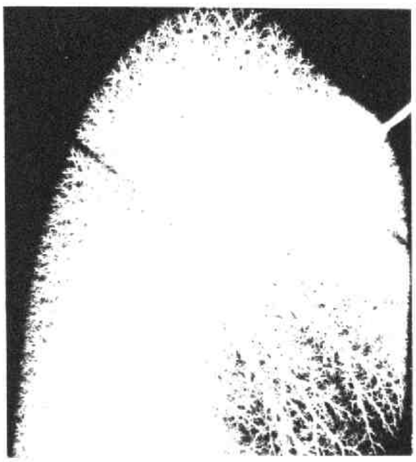
Inhoudsopgave

1 Bomen

Een esdoorn vormt duizenden takken en takjes en zo'n 175000 bladeren. Zo kan het voedsel dat de boom nodig heeft snel en goed worden verwerkt.

Op de plaats waar de rivier de Colorado in de Golf van Californië uitmondt vormen zandbanken een obstakel voor de waterstroom en ontstaat er een wirwar van steeds smallere stroompjes.
Uit de lucht gezien lijkt het een reusachtige boom.

Een 'boomstructuur' wordt ook aangetroffen in de menselijke long. Door de vele vertakkingen kan op zeer veel plaatsen tegelijk zuurstof worden doorgegeven aan het bloed.



Bij telproblemen spelen vertakkingen vanuit één punt een belangrijke rol. De boomstructuur blijkt een goed middel te zijn om systeem te brengen in allerlei ingewikkelde situaties.

Er zijn nogal wat mensen die in stoffige archieven duiken, op zoek naar hun, zo mogelijk roemruchte, voorouders. Het voorgeslacht kan overzichtelijk in kaart gebracht worden met wat *kwartierstaat* wordt genoemd.

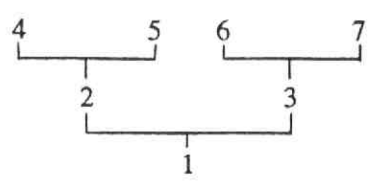
De 8 kwartieren van Willem Vervloet (1902 - 1973):

8 kwartieren van Willem Vervloet

8 Willem Vervloet ¯ Den Haag 27-11-1774 † Den Haag 7-11-1847 kamer- dienaar	9 Harmina Reefman * Delden 26-3-1786 † Den Haag 15-12-1875	10 Gerrit Middelkamp ¯ Almelo 10-5-1777 † A.Almelo 27-2-1856 wever	11 Janna Aalderink ¯ Utrecht 25-11-1784 † A.Almelo 5-5-1856 spinster	12 Richardus Schooleman ¯ Den Haag 5-10-1782 † Den Haag 25-12-1842 geweer- maker	13 Anna Cor- nelia Donsweijk ¯ Amsterdam 20-7-1789 † Den Haag 11-3-1862	14 Johannes Hendricus Gravé * Rotterdam 28-1-1780 † Den Haag 24-10-1841 acteur Kon. schouwburg	15 Johanna Vaquette 3-6-1792 † Den Haag 8-2-1869
x Delden 10-4-1813		x Almelo 23-11-1812		x 2e Den Haag 21-7-1814		x Rotterdam 10-10-1816	
4 Pieter Vervloet * Delden 12-8-1813 † Baam 27-4-1892 postiljon, banketbakker		5 Johanna Middelkamp * Ambt Almelo 16-10-1821 † Baam 18-10-1908		6 Richardus Cornelis Schooleman * Den Haag 26-9-1818 † Den Haag 20-4-1895 winkelier		7 Wilhelmina Gravé * Den Haag 28-1-1823 †	
x Den Haag 3-1-1847				x 2e Den Haag 16-4-1856			
2 Johan Willem Lodeweijk Vervloet * Den Haag 25-2-1859 † Amerongen 11-4-1937 banketbakker, pensionhouder				3 Johanna Cornelia Schooleman * Den Haag 24-1-1861 † Amerongen 19-11-1946			
x Den Haag 15-4-1891							
1 Willem Vervloet * De Bilt 25-7-1902 † Paterson (N.J.) 28-1-1973							

* geboren
¯ gedoopt
x trouwt
† overleden

Helemaal onderaan staat de persoon in kwestie. Direct daarboven de eerste generatie voorouders (in gewoon nederlands: de ouders), vervolgens de tweede generatie voorouders (de grootouders), enz.
Met behulp van de nummers kan de kwartierstaat vereenvoudigd worden weergegeven in een *voorouderboom*
Het begin ziet er zo uit:



1. >a Maak zo'n voorouderboom van de 16 kwartieren van Willem Vervloet.

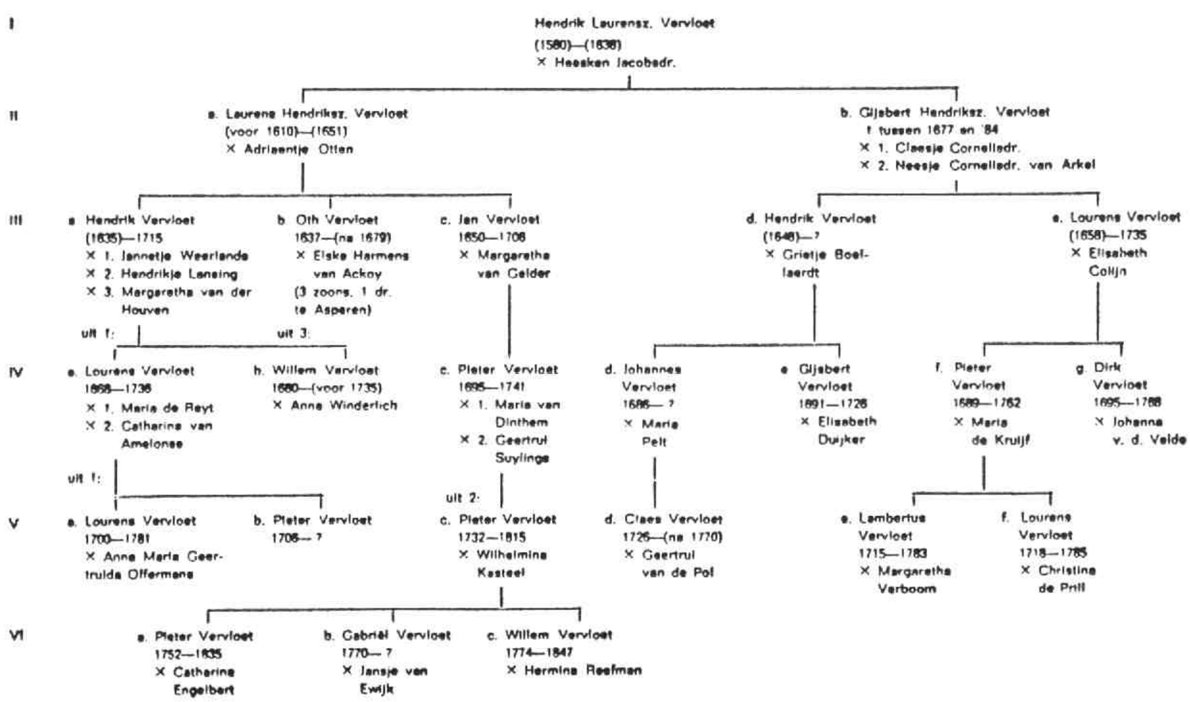
   De kwartierstaat is uit te breiden met verdere generaties voorouders. De nummering loopt daarbij op dezelfde manier door.

   >b Hoort de persoon met nummer 94 tot het voorgeslacht van Willems vader (nr.2) of tot het voorgeslacht van zijn moeder (nr.3)?

   >c De persoon met nummer 111 hoort tot het voorgeslacht van één van de vier grootouders van Willem. Van welke grootouder?

   >d Uit hoeveel personen bestaat de zevende generatie voorouders van Willem?

Vaak mondt het zoeken naar voorouders uit in een stamboomonderzoek.
Daarbij wordt het proces omgekeerd. Er wordt nu gekeken naar het *nageslacht* van één persoon.
Kennelijk was Willem alleen maar geïnteresseerd in de verbreiding van de naam Vervloet, want in de *stamboom* hieronder is alleen de mannelijke lijn van het nageslacht van Hendrik Laurensz. Vervloet weergegeven. (Officieel heet een dergelijk stamboomonderzoek: genealogie in engere zin.)



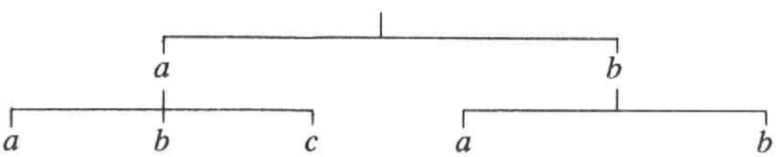
De achtereenvolgende generaties nakomelingen zijn genummerd met Romeinse cijfers (I, II, III, ...).
In iedere generatie worden de jongens van links naar rechts aangegeven met de letters *a, b, c,* .....

2. >a Hoeveel achterkleinzonen had Hendrik Laurentsz. Vervloet (in de mannelijke lijn)?
   >b Welke persoon in deze stamboom gaat schuil achter de aanduiding VI-*c*?

   Bij de aanduiding VI-*c* wordt aangegeven dat je in de horizontale rij bij de zesde generatie moet zoeken.
   Het is ook mogelijk om een persoon aan te duiden door de achtereenvolgende generaties te doorlopen vanaf Hendrik Laurentsz. Vervloet.

   >c Welke persoon wordt bedoeld met de aanduiding *b-e-f-e*?

Iemand stelt voor om de nummering binnen de generaties volgens een ander systeem te maken: de zonen van één man worden steeds aangegeven met de letters *a, b, c,...*
Het beginstuk van de stamboom zou er dan zo uitzien:



3. >a Welke aanduiding krijgt in dit geval Lambertus Vervloet?

   Deze aanduiding geeft meer informatie over de manier waarop Lambertus afstamt van Hendrik Laurentsz. Vervloet dan de aanduiding van >2c.

   >b Welke informatie krijg je nu extra?

De kwartierstaat van Willem en de stamboom van Hendrik Laurentsz. kunnen worden gekoppeld, omdat er een persoon is die in beide voorkomt: nummer 8 van de kwartierstaat is persoon VI-*c* van de stamboom.

4. Stel dat Willem (1902-1973) zijn kwartierstaat had uitgebreid tot en met de generatie voorouders waarin Hendrik Laurentsz. voorkomt.

   >a Welk nummer zou Hendrik Laurentsz. daarin dan hebben gekregen?
   >b Hoeveel personen zouden er in totaal in die kwartierstaat vermeld staan?
   >c Is het mogelijk dat in die kwartierstaat één persooen meer dan een keer genoemd staat?

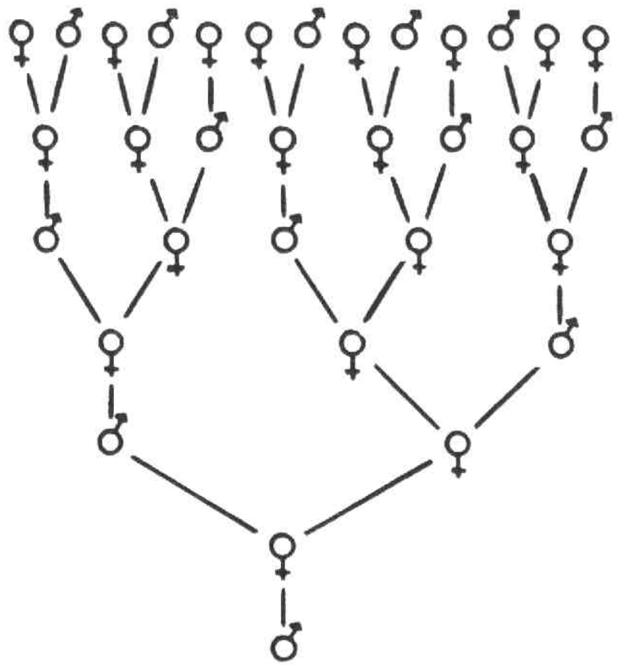
Door de koppeling van kwartierstaat en stamboom ontstaat een overzicht van een behoorlijk groot aantal generaties.

5. >a Schat op basis van de gegevens het gemiddelde leeftijdsverschil tussen twee opeenvolgende generaties.
   >b Gebruik het resultaat van >a om te berekenen hoeveel mensen die rond 1700 leefden, tot jouw voorouders behoren.
   >c Hoeveel voorouders van jou leefden er rond het begin van onze jaartelling?

   Volgens schattingen leefden rond het jaar nul op de hele aarde ongeveer 50 miljoen mensen.

   >d Hoe valt dit te rijmen met het antwoord van >c?

De voorouderboom van een bij ziet er anders uit dan die van een mens.
Zes generaties voorouders van een mannetjesbij:



6. >a Waarin verschillen mannetjesbijen van vrouwtjesbijen, als je let op hun voorgeslacht?
   >b Hoe ziet de voorouderboom van een vrouwtjesbij eruit?
   >c Hoeveel voorouders heeft een mannetjesbij in de zevende generatie?
   >d En hoeveel in de achtste generatie?

Wimbledon

Ieder jaar opnieuw is 'Wimbledon' het hoogtepunt van alle grote tennistournooien.
Zowel bij de dames als bij de heren worden 128 deelnemers voor het tournooi ingeschreven.
Er wordt gespeeld volgens het afvalsysteem: wie een partij verliest, verdwijnt van het toneel. De winnaar gaat door naar de volgende ronde.

Cash, Wimbledonwinnaar '87

Op blz. 7 staat het tournooischema van Wimbledon 1987 voor het enkelspel van de heren afgedrukt. Daarin is voor alle 128 deelnemers af te lezen tegen wie ze de eerste ronde spelen.
Het schema kan verder worden gebruikt om het tournooiverloop bij te houden.
Een mogelijk verloop van de eerste twee ronden voor de eerste vier spelers uit het schema:

Eerste ronde	Tweede ronde	Derde ronde
1 B. Becker	B. Becker	B. Becker
2 K. Novacek		
3 A. Antonitsch	P. Doohan	
4 P. Doohan		

Het schema zegt: Becker en Doohan winnen hun partij in de eerste ronde. Becker speelt in de tweede ronde tegen Doohan en wint.

7. >a Hoeveel ronden zijn nodig om de tournooiwinnaar aan te wijzen?
   >b Hoeveel wedstrijden geeft het tournooischema aan?

   Michiel Schapers (nr. 55 uit het schema) was in 1987 de enige Nederlandse deelnemer. Hij werd uitgeschakeld door de uiteindelijke winnaar Pat Cash (nr. 49).

   >c In welke ronde gebeurde dat?
   >d Welke spelers waren in ieder geval al uitgeschakeld toen Schapers en Cash elkaar ontmoetten?
   >e 'Schapers doorgedrongen tot de laatste .....' meldde een krantekop voor diens partij tegen Cash.
   Welk getal stond daar vermeld?

HEREN

MAANDAG 22 JUNI 1987

AD SPORTWERELD

WIMBLEDON 1987

1 B. Becker (WDl.)
2 K. Novacek (Tsj)
3 A. Antonitsch (Oos)
4 P. Doohan (Aus)
5 C. Panatta (Ita)
6 J. Grabb (VS)
7 M. Kures (VS)
8 L. Shiras (VS)
9 N. Odizor (Nig)
10 S. Giammalva (VS)
11 P. Fleming (VS)
12 J. Bates (GBr)
13 S. Zivojinovic (Joe)
14 M. Flur (VS)
15 S. Casal (Spa)
16 D. Pate (VS.)

17 T. Mayotte (VS.)
18 J. Fleurian (Fra)
19 T. Wilkison (VS)
20 J. Pugh (VS)
21 M. Pernfors (Zwe)
22 R. Seguso (VS)
23 C. Steyn (ZAf)
24 C. Limberger (Aus)
25 D. Goldie (VS)
26 K. Evernden (NZl)
27 D. Visser (ZAf)
28 L. Mattar (Arg)
29 T. Witsken (VS)
30 S. Shaw (GBr)
31 M. Davis (VS)
32 J. Connors (VS.)

33 M. Wilander (Zwe.)
34 G. Muller (ZAf)
35 M. Leach (VS)
36 J. Gunnarsson (Zwe)
37 J. B. Svensson (Zwe)
38 S. Youl (Aus)
39 I. Kley (Bra)
40 E. Edwards (ZAf)
41 C. van Rensburg (Zaf)
42 T. Hogstedt (Zwe)
43 C. Bergström (Zwe)
44 P. Lundgren (Zwe)
45 J. Yzaga (Per)
46 E. Jelen (WDl)
47 M. Bauer (VS)
48 E. Sanchez (Spa.)

49 P. Cash (Aus.)
50 M. Freeman (VS)
51 T. Nelson (VS)
52 P. McNamee (Aus)
53 L. Scott (VS)
54 G. Holmes (VS)
55 M. Schapers (Ned)
56 J. Sanchez (Spa)
57 P. Annacone (VS)
58 M. Sreiber (Tsj)
59 W. Masur (Aus)
60 C. Motta (Bra)
61 G. Forget (Fra)
62 T. Muster (Oos)
63 B. Drewett (Aus)
64 Y. Noah (Fra.)

M. Mecir (Tsj.) 65
M. Depalmer (VS) 66
M. Woodforde (Aus) 67
K. Jones (VS) 68
R. Osterthun (WDl) 69
A. Jarryd (Zwe) 70
D. Rostagno (VS) 71
B. Dyke (Aus) 72
B. Scanlon (VS) 73
T. Mmoh (Nig) 74
L. Stefanki (VS) 75
A. Volkov (Sow) 76
G. Donnelly (VS) 77
C. Bailey (GBr) 78
S. Bale (GBr) 79
B. Gilbert (VS.) 80

J. Nyström (Zwe.) 81
H. Sundström (Zwe) 82
T. Smid (Tsj) 83
D. Tyson (Aus) 84
A. Maurer (WDl) 85
C. Steeb (WDl) 86
J. Fitzgerald (Aus) 87
J. Hlasek (Zwi) 88
S. Colombo (Ita) 89
M. Anger (VS) 90
M. Westphal (WDl) 91
R. Krishnan (Indi) 92
S. Botfield (GBr) 93
M. Purcell (VS) 94
S. Eriksson (Zwe) 95
S. Edberg (Zwe.) 96

A. Gomez (Ecu.) 97
H. Skoff (Oos) 98
J. Canter (VS) 99
U. Stenlund (Zwe) 100
K. Flach (VS) 101
R. Saad (Arg) 102
J. Sadri (VS) 103
J. Carlsson (Zwe) 104
G. Bloom (Isr) 105
P. Kuhnen (WDl) 106
P. Vojtisek (Tsj) 107
M. Laurendeau (Can) 108
A. Mansdorf (Isr) 109
N. Fulwood (GBr) 110
A. Agassi (VS) 111
H. Leconte (Fra.) 112

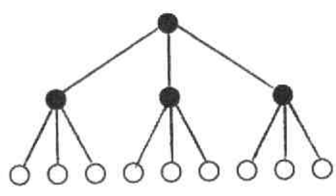
K. Curren (VS.) 113
B. Testerman (VS) 114
J. Avendano (Spa) 115
J. Kriek (VS) 116
D. de Miquel (Spa) 117
S. Davis (VS) 118
D. Keretic (WDl) 119
V. Amritraj (Indi) 120
A. Olkovsky (Sow) 121
A. Castle (GBr) 122
R. Stadler (Zwi) 123
R. Reneberg (VS) 124
P. Cane (Ita) 125
J. Arias (VS) 126
C. Saceanu (WDl) 127
I. Lendl (Tsj.) 128

Om te voorkomen dat sterke spelers elkaar te snel ontmoeten, worden de 16 beste tennissers 'geplaatst'.
Dit houdt in dat ze zó over het wedstrijdschema worden verspreid, dat ze elkaar in principe pas tegenkomen als de niet geplaatste spelers zijn uitgeschakeld.
Als alles 'goed' gaat, ontmoeten de twee hoogstgeplaatsten (de nrs. 1 en 2) elkaar pas in de finale.

8. > Zoek uit hoe de 16 geplaatste spelers (nrs. 1 t/m 16) over het wedstrijdschema verdeeld kunnen worden.

Kettingbrieven
Vrijwel iedereen heeft wel eens een kettingbrief ontvangen.
Zo'n brief gaat vergezeld van een lijstje met vijf namen. De onderste naam is bekend, want door die persoon is de brief gestuurd.
De regels voor een kettingbrief zijn:
1. Stuur een ansichtkaart naar de eerstgenoemde persoon van het lijstje.
2. Maak een nieuw lijstje door de eerstgenoemde naam te verwijderen en *onder* de vier resterende namen je eigen naam toe te voegen.
3. Stuur een brief met het nieuwe lijstje naar drie bekenden.

Als iedereen die zo'n brief krijgt, meewerkt (en dat gebeurt meestal niet!) dan mag je na verloop van tijd een flink aantal ansichtkaarten verwachten.
Iedere keer dat de brief weer wordt doorgestuurd, schuift je eigen naam een plaats op in het lijstje.



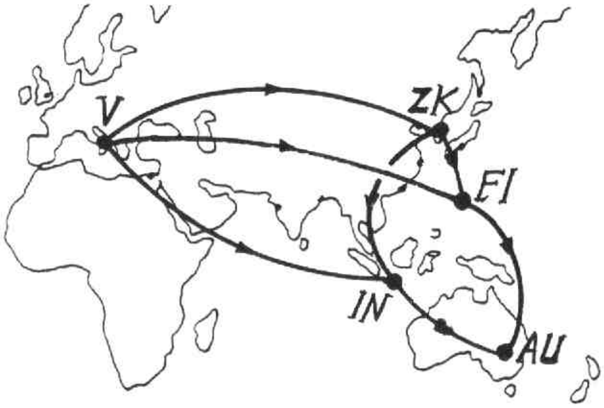
je eigen naam op de 5e plaats

je eigen naam op de 4e plaats

9. >a Hoeveel ansichtkaarten krijg je, als niemand de ketting breekt?
>b In de spelregels wordt een verandering aangebracht.
Het lijstje van vijf namen wordt vervangen door een lijst met zeven namen. Welk aantal kaarten krijg je nu, als alles goed gaat?
>c Hoeveel kaarten krijg je als spelregel 3 als volgt wordt aangepast: Stuur een brief naar 5 bekenden.

2 Wegen

1. In het Vaticaan wordt een nieuwe pausreis voorbereid.
De eindbestemming van de reis is Australië.
Op de heenreis zullen nog één of twee landen met een kort bezoek vereerd worden. Daarvoor komen in aanmerking: Zuid-Korea, de Filipijnen en Indonesië.
Vanwege de onderlinge geografische ligging komen alleen de vliegroutes die hieronder schematisch staan weergegeven, in aanmerking:



V = Vaticaan (Rome)
ZK = Zuid Korea
FI = Filipijnen
IN = Indonesieë
AU = Australië

>a Welke mogelijkheden zijn er voor de trip van de Paus naar Australië, inclusief één of twee tussenbezoeken?

Op de terugreis zullen twee Afrikaanse landen bezocht worden.
Er moet een keus gemaakt worden uit Tanzania, Kenya en Ethiopië.
Mogelijke vliegroutes hierbij zijn:

V = Vaticaan (Rome)
ET = Ethiopië
AU = Australië
KE = Kenia
TA = Tanzania

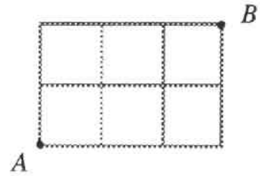
>b Hoeveel keus is er voor de terugreis?
>c Hoeveel verschillende heen-en-terug-programma's zijn er te maken voor de totale rondreis van de Paus?

De wegenstructuur in de Amerikaanse steden is in het algemeen erg overzichtelijk.
In de benaming van de wegen is die overzichtelijkheid terug te vinden:
1^{st} street, 2^{nd} street, ... en 1^{st} avenue, 2^{nd} avenue, ...

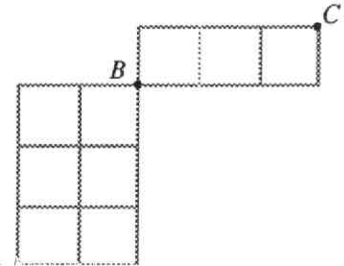
Het karakteristiek schaakbordpatroon van vele Amerikaanse steden (Odessa, Texas).

2. Een wandeling voert van het kruispunt (2^{nd} street, 1^{st} avenue) naar het kruispunt (3^{rd} street, 4^{th} avenue), zonder omwegen.

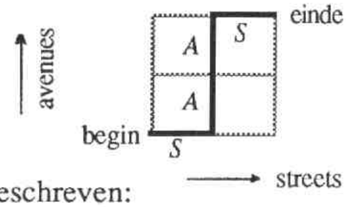
   >a Maak een plattegrond en teken daarin alle mogelijke wandelingen.
   >b Hetzelfde voor een wandeling van (2^{nd} st, 1^{st} av) naar (4^{th} st, 3^{rd} av).



   >c Bij dit stukje plattegrond zijn 10 verschillende wandelingen van A naar B mogelijk.
   Teken ze. Doe dat systematisch.
   >d Hoeveel wandelingen zijn in de onderstaande plattegrond mogelijk.
   — van A naar B
   — van B naar C
   — van A naar C?



De wandelingen zijn ook te beschrijven met een rijtje bestaande uit de letters A (avenue) en S (street).
In de figuur is dat de wandeling $SAAS$

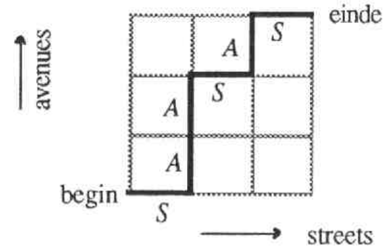


Alle wandelingen van opgave 2 >b op deze manier beschreven:

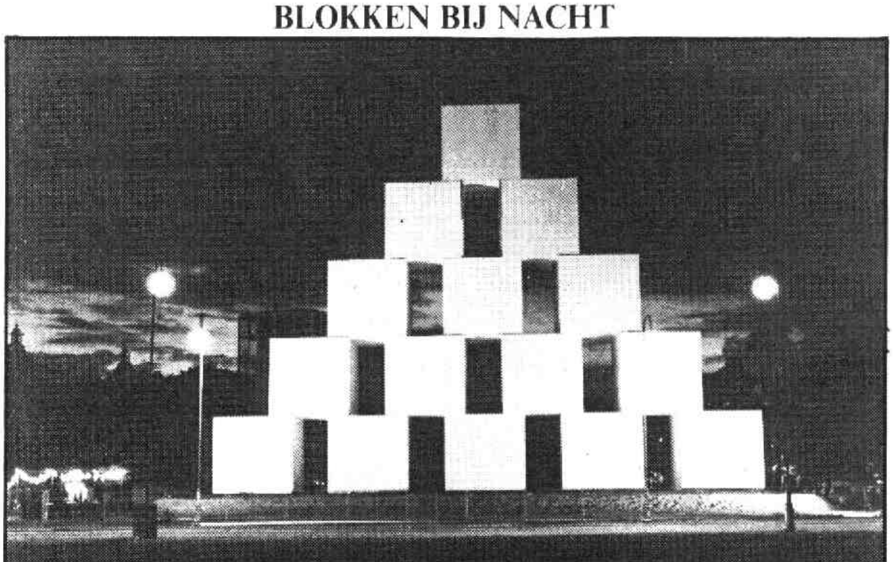
$SSAA$	$ASSA$
$SASA$	$ASAS$
$SAAS$	$AASS$

3. Een wandeling voert langs drie stukken S en drie stukken A.

   >a Teken een tweede mogelijke wandeling.
   >b Beschrijf alle mogelijke wandelingen met rijtjes letters.
   Probeer het systematisch te doen.



BLOKKEN BIJ NACHT

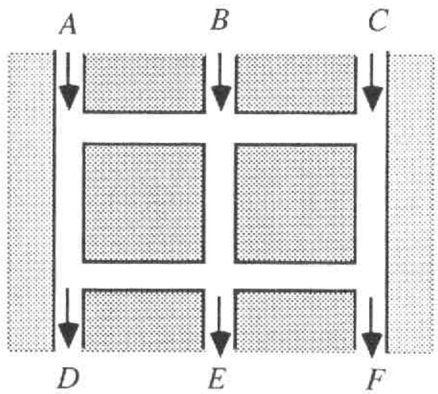


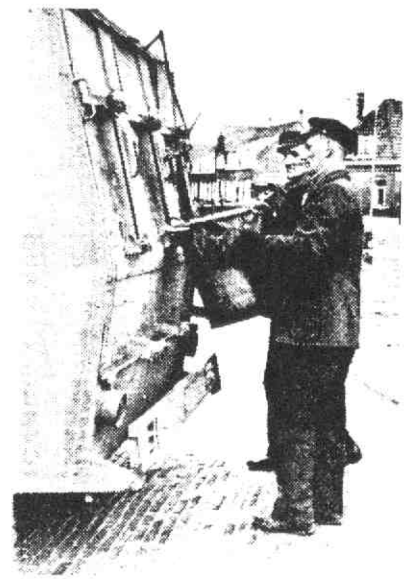
De Toren van Frans Malschaert, die sinds enkele weken op het Amsterdamse Museumplein staat, steekt feeëriek af tegen de door het maanlicht beschenen nacht. In De Toren voltrekt zich deze maand elke avond een theatraal spektakel van het Sirkeltheater, waarbij bezoekers worden rondgeleid langs korte speelscenes.

4. Deze blokkentoren sierde in de zomer van 1987 het Museumplein op. Vanuit elk blok is het mogelijk om een aangrenzend blok te bereiken via trappen.

   > Hoeveel verschillende afdalingen zijn mogelijk van het bovenste blok naar het middelste blok op de grond.

5. Iedere dinsdag worden in onderstaande stadswijk de vuilniszakken opgehaald.





Vanuit een aangrenzend stadsgedeelte is het mogelijk om bij de punten A, B of C deze wijk binnen te komen.
Vanuit de punten D, E of F kan de wijk weer verlaten worden.
Natuurlijk is het aantrekkelijk om een route door de wijk te kiezen, waarbij al het vuilnis wordt opgehaald en er door elk van de zeven straten precies éénmaal gereden wordt.

>a Ga na dat dit mogelijk is vanuit punt B.

>b Waarom is zo'n route niet mogelijk wanneer A als startpunt wordt gekozen?

>c Hoeveel verschillende routes zijn er vanuit startpunt B mogelijk?

3 Tellen met bomen

Twee vrienden willen een deel van de zomervakantie in het buitenland doorbrengen. Uit het grote scala aan mogelijkheden hebben ze alvast een voorselectie gemaakt.
Voor de uiteindelijke keuze moeten ze op vier onderdelen nog een beslissing nemen. Die onderdelen zijn weergegeven in vier aparte blokken:

tijdsduur
T1: 3 weken T2: 4 weken

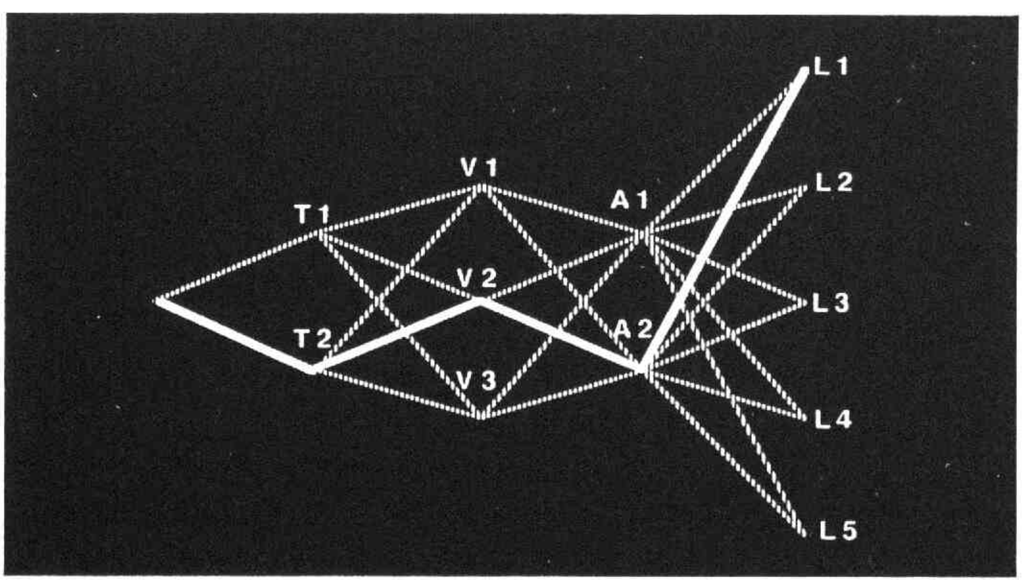
vervoer
V1: bus V2: trein V3: vliegtuig

accomodatie
A1: camping A2: hotel

land
L1: Engeland L2: Italië L3: Oostenrijk L4: Frankrijk L5: Hongarije

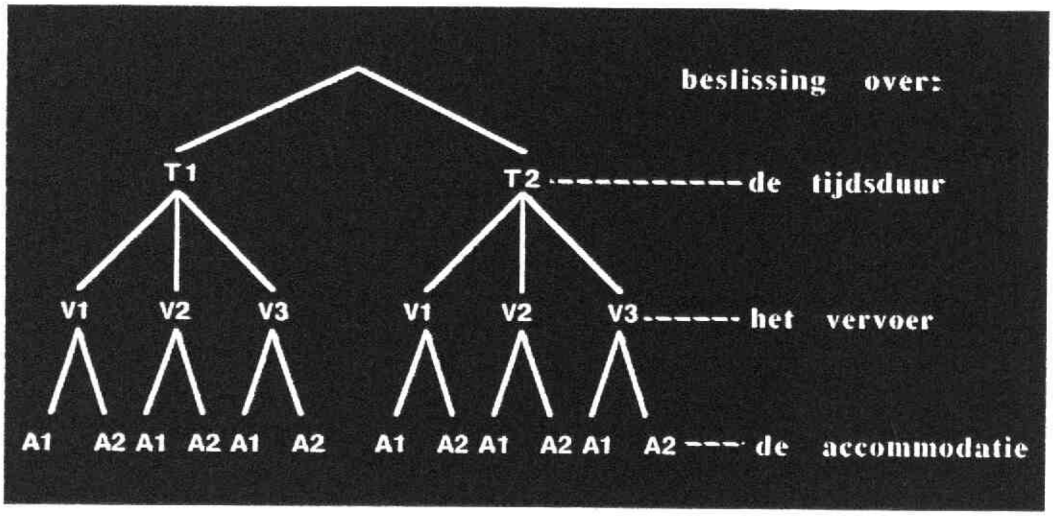
1. >a Welke beslissingen zijn mogelijk op de twee eerste onderdelen ('tijdsduur' en 'vervoer') samen?
   >b Welke beslissingen zijn mogelijk op de twee laatste onderdelen?

Elke combinatie van vier beslissingen kan worden weergegeven door een 'route' in onderstaand schema.



2. > Welke keuze wordt weergegeven door de dik getekende route?

Meer overzichtelijk kunnen alle keuze mogelijkheden voor een vakantie worden uitgebeeld met behulp van een boom (ook wel *boomdiagram* genoemd).
Voor de eerste drie onderdelen ziet de boom er zo uit:



Uit de boom kun je aflezen dat er twaalf verschillende keuzes mogelijk zijn op de eerste drie onderdelen samen.

3. >a Hoe vertakt de boom zich verder als de beslissing over het land er aan wordt toegevoegd?
   >b Hoeveel verschillende mogelijkheden hebben de twee vrienden dus om een vakantie samen te stellen?
   >c Hoeveel keuzemogelijkheden komen er extra bij, als bij 'accomodatie' zou worden toegevoegd *A* 3: appartement?

Bij de mogelijkheden die tot nu toe zijn bekeken, is er vanuit gegaan dat geld geen rol speelt. Helaas is dat niet waar.
Wanneer de financiële kant van de vakantie wordt onderzocht, doemen de twee volgende beperkingen op:
— in alle gevallen is de combinatie 'vliegtuig - hotel' te duur;
— de vliegtickets voor Hongarije, Oostenrijk en Italië blijken zo duur te zijn, dat vliegen naar die landen uitgesloten is.

4. > Hoeveel keuzemogelijkheden vallen hierdoor af?

5. Schrijf alle getallen op van drie cijfers die je kunt maken met de cijfers 3, 5 en 2.

   >a Als ieder cijfer één keer gebruikt mag worden.
   >b Als ieder cijfer meer dan één keer gebruikt mag worden.
   >c Maak een boom bij elk van beide situaties.

6. >a Hoeveel verschillende getallen zijn er te maken met de cijfers 1, 2, 3 en 4, als ieder cijfer éénmaal gebruikt wordt?
   >b En hoeveel als het cijfer 3 tweemaal gebruikt wordt en de cijfers 1 en 4 elk éénmaal?
   >c Waarom is het aantal mogelijkheden bij >b de helft van het aantal bij >a?

7. Een vlag met drie horizontale banen moet 'ingekleurd' worden.
   Er is keus uit de kleuren rood, wit, geel, groen en blauw.

   >a Hoeveel verschillende vlaggen kunnen er worden samengesteld, als de drie banen verschillend gekleurd moeten zijn?
   >b De kleuren mogen meer dan één keer gebruikt worden, maar niet in aan elkaar grenzende banen.
   Hoeveel keus is er nu?

8. Uit dit lijstje van vijf platen moet een topdrie worden samengesteld.

Madonna	Like a Prayer
Gloria Estefan	Can't stay away from you
The Bangles	Eternal Flame
René Froger	Een eigen huis
Prince	Alfabeth Street

   >a Hoeveel verschillende mogelijkheden zijn er voor een topdrie?
   >b Hoeveel zijn dat er, als je keus hebt uit twintig nummers?

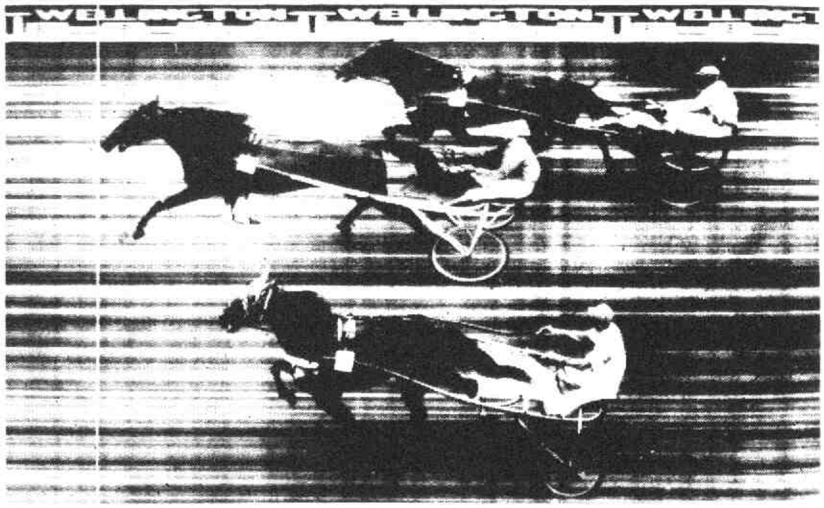
9. Bij een loterij zijn 10.000 loten verkocht: de nummers 0000 tot en met 9999.
   Er wordt bekend gemaakt dat het *winnende lotnummer* uit vier oneven cijfers bestaat.

   >a Hoeveel mensen kunnen nog hopen op een prijs?

   Er wordt bij verteld dat de cijfers van het winnende lotnummer alle vier verschillend zijn en dat dit nummer lager is dan 5000.

   >b Hoeveel mogelijke prijswinnaars blijven er nog over?

10. Bij een draverij doen acht paarden mee.
Voor het gemak noemen we ze A tot en met H.
Piet Ruin is een echte gokker. Hij heeft een zogenaamd triobriefje gehaald. Daarop kan voorspeld worden welke paarden achtereenvolgens als eerste, tweede en derde zullen eindigen.
Als zijn 'triootje' goed ingevuld blijkt te zijn, kan hij een aardig centje verdienen.



Finishfoto van een draverij.

>a Hoeveel verschillende mogelijkheden heeft Piet om zijn briefje in te vullen?

Piet is niet alleen een gokker. Hij denkt ook een 'kenner' te zijn. Zo is hij er van overtuigd dat paard D òf paard G als eerste eindigt. Verder weet hij 'zeker' dat paard F niet bij de eerste drie eindigt.

>b Op hoeveel verschillende manieren kan hij, gewapend met deze kennis, zijn briefje invullen?

4 Rangschikken en faculteitsgetallen

Vijf vriendinnen gaan naar de schouwburg. Ze hebben vijf plaatsen besproken op één rij.
Op hoeveel manieren kunnen ze de plaatsen onderling verdelen?
Een manier van oplossen is als volgt:
Ada mag als eerste kiezen en heeft de keuze uit 5 plaatsen

		A		

Betty heeft dan de keus uit 4

B		*A*		

Christiane kan nog uit 3 stoelen kiezen

B		*A*	*C*	

Voor Diana blijven er 2 mogelijkheden

B	*D*	*A*	*C*	

En voor Ellen rest 1 stoel

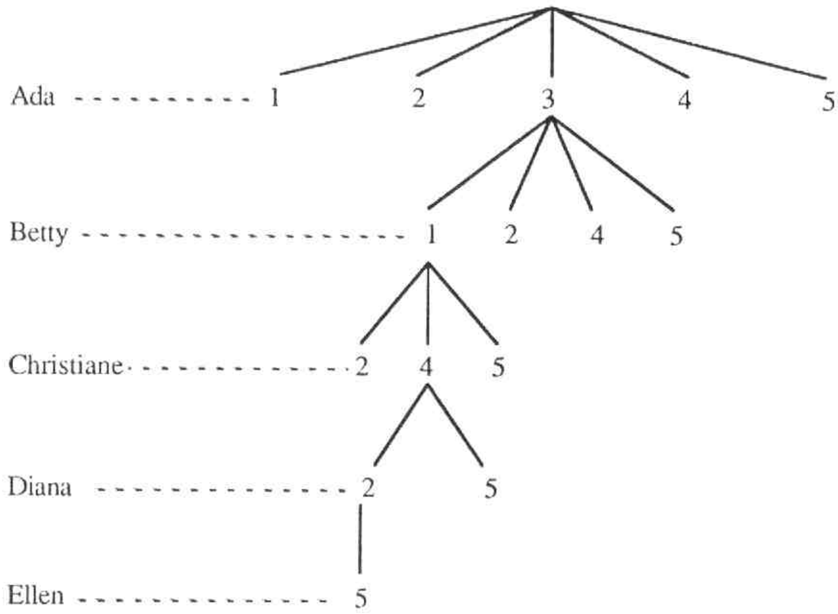
B	*D*	*A*	*C*	*E*

Het aantal verschillende mogelijkheden om de plaatsen onder de vijf vriendinnen te verdelen, is verrassend groot.

keus 1	keus 2	keus 3	keus 4	geen keus
↓	↓	↓	↓	↓

$$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

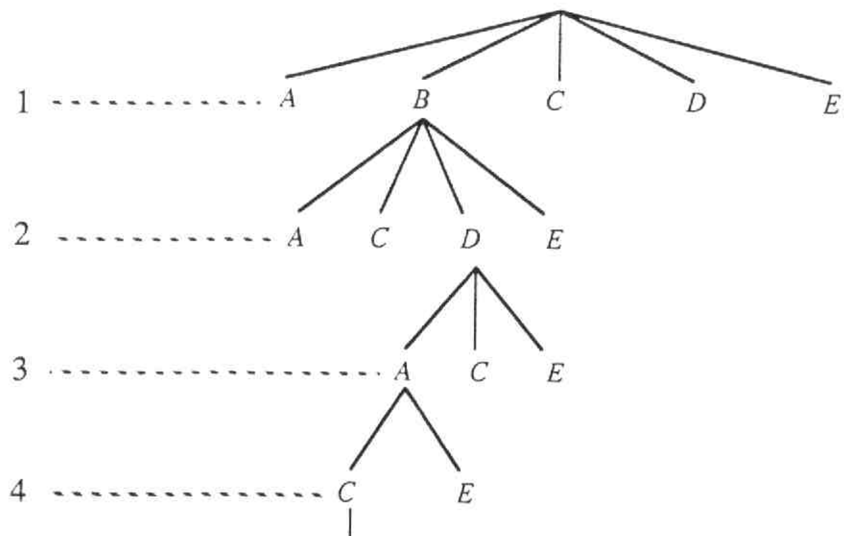
De rangschikking *BDACE* correspondeert met een pad in de boom (zie blz. 18).



De complete boom telt inderdaad $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ paden.

1. > Hoeveel rangschikkingen zijn er mogelijk van 6 vriendinnen op één rij?

Een ander manier om de vijf vriendinnen te laten kiezen uit de vijf stoelen is hieronder in beeld gebracht.



2. >a Op welke manier zijn hier de plaatsen verdeeld?
   >b Krijg je op deze manier ook 120 verschillende rangschikkingen?

3. In een klas zitten 12 jongens. Die hebben twee keer per week gymnastiek. Voordat het warmlopen begint zet de leraar ze op een rijtje, iedere les in een andere volgorde.

   > Kan hij dat een jaar lang volhouden zonder in herhalingen te vervallen?

Op je rekenmachientje zit een knop $\boxed{x!}$
Daarmee kun je aantallen rangschikkingen uitrekenen.
Als je bijvoorbeeld eerst 5 en dan *x!* intoetst krijg je 120.
Er geldt: 5! = 5.4.3.2.1 = 120
5! wordt uitgesproken als 5 *faculteit.*

Hieronder staan de uitkomsten van x! voor x = 1, 2, ..., 11:

1! = 1
2! = 2
3! = 6
4! = 24
5! = 120
6! = 720
7! = 5040
8! = 40320
9! = 362880
10! = 3628800
11! = 39916800

Je kunt hieruit zien hoe duizelingwekkend snel de faculteitsgetallen groeien.

4. Een voetbaltrainer kan meer dan 39 miljoen opstellingen maken met zijn elf basisspelers.

   > Geef commentaar.

5. > Als je achter de uitkomst van 9! een nul zet, krijg je de uitkomst van 10! Logisch?

6. Mijn rekenmachientje geeft na intoetsen van 12! de uitkomst

   $\boxed{4.79 \qquad 08}$

   Dat betekent: 4.79 maal 10^8 ofwel 479000000.

   >a Die uitkomst is niet precies. Hoe weet je dat?
   >b Bereken de precieze uitkomst van 12!.

7. > Bereken op je rekenmachientje 15! gedeeld door 14!.
Is de uitkomst precies?

8. > Hoe kun je zonder rekenmachientje 25! gedeeld door 23! berekenen?

9. Veel rekenmachientjes rekenen niet verder dan 69!

>a Hoeveel cijfers heeft de uitkomst van 69! volgens je rekenmachientje?
>b Hoe kun je het aantal cijfers van de uitkomst van 70! vinden?

10. In de lijst van faculteitsgetallen kun je zien dat:

1 miljoen in ligt tussen 9! en 10!

>a Zoek uit tussen welke opvolgende faculteitsgetallen 1 miljard (= 1000 keer miljoen) ligt.
>b Dezelfde opdracht voor 1 biljoen (= miljoen keer miljoen).
>c Ook voor 1 triljoen (= miljoen keer miljoen keer miljoen).

11. Nogmaals de 12 jongens van de gymnastiekles, die zich steeds in een ander rijtje moeten opstellen.
Veronderstel dat ze alle mogelijke rangschikkingen achter elkaar willen uitproberen. Voor iedere nieuwe opstelling is een halve minuut nodig. Om gezondheidsredenen mogen ze niet meer dan 8 uur per dag doorgaan.

> Hoeveel tijd hebben ze nodig om alle opstellingen te maken?

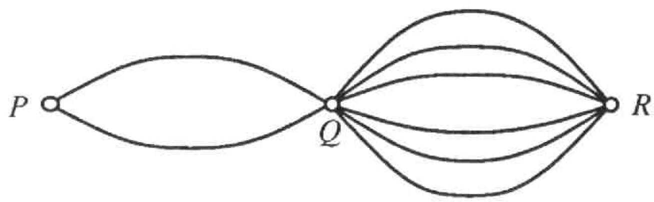
5 Wegen tellen

1. Als er vier wegen zijn die van A naar B leiden en als er vijf wegen zijn van B naar C, dan zijn er twintig verschillende routes van A naar C.

   >a Beredeneer dat.

   >b Hoeveel verschillende routes zijn er van C die naar A leiden via B?

2. Gegeven zijn drie plaatsen P, Q en R.
   Er zijn 12 verschillende routes van P via Q naar R.
   Een mogelijk wegennet voor P, Q en R is:

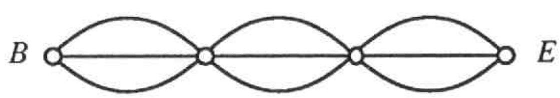


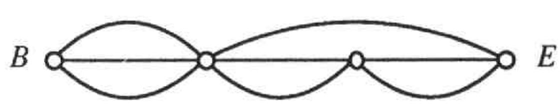
   > Teken alle andere mogelijke wegennetten.

3. Bepaal in elk van de volgende gevallen het aantal routes van beginpunt (= B) naar eindpunt (= E)

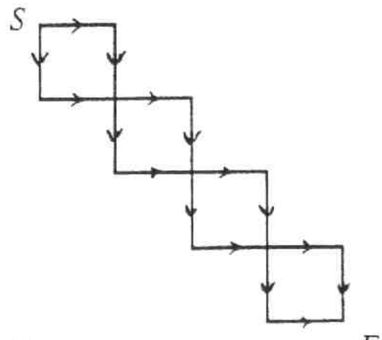
>a


>b

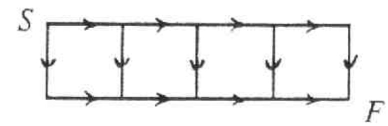

>c


>d


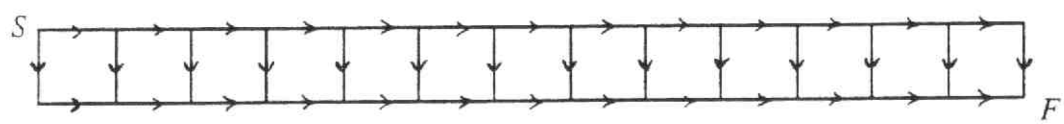
4. > Hoeveel routes zijn er van S naar F?



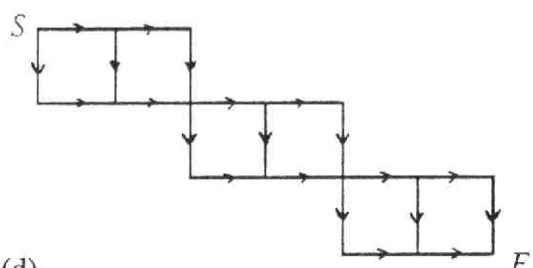
(a)



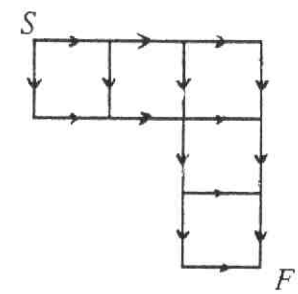
(b)



(c)



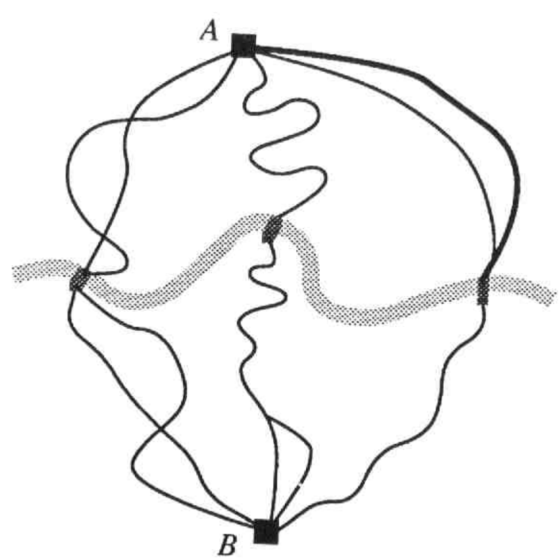
(d)



(e)

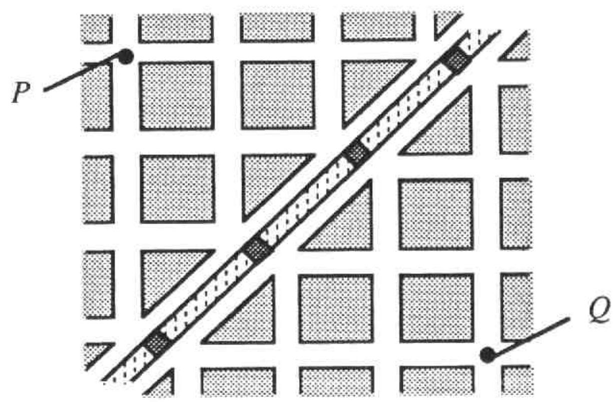
5. De plaatsen A en B liggen aan weerzijden van een rivier. Om van A naar B te gaan is er keus uit drie oeververbindingen.

   > Hoeveel verschillende routes zijn er van A naar B?



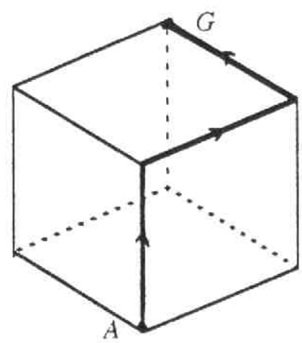
6. Kanaal in Square City met vier bruggen.

   > Hoeveel routes zonder omwegen zijn er van P naar Q?

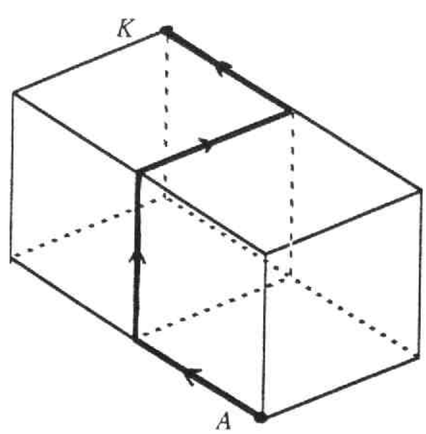


7. In de figuur zie je een route zonder omwegen langs de ribben van een kubus van A naar G.

   > Hoeveel van zulke routes zijn er in totaal van A naar G?

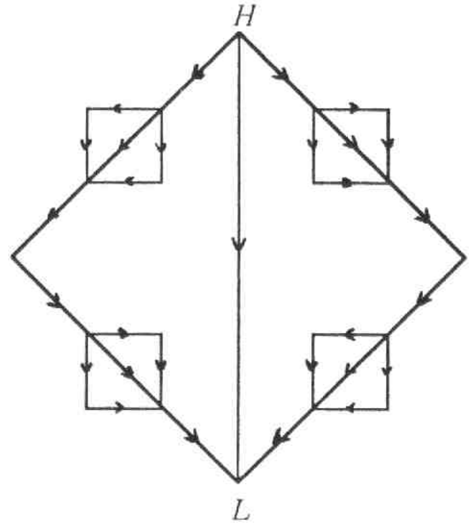


8. > Hoeveel verschillende routes, via ribben en zonder omwegen, zijn er van A naar K?

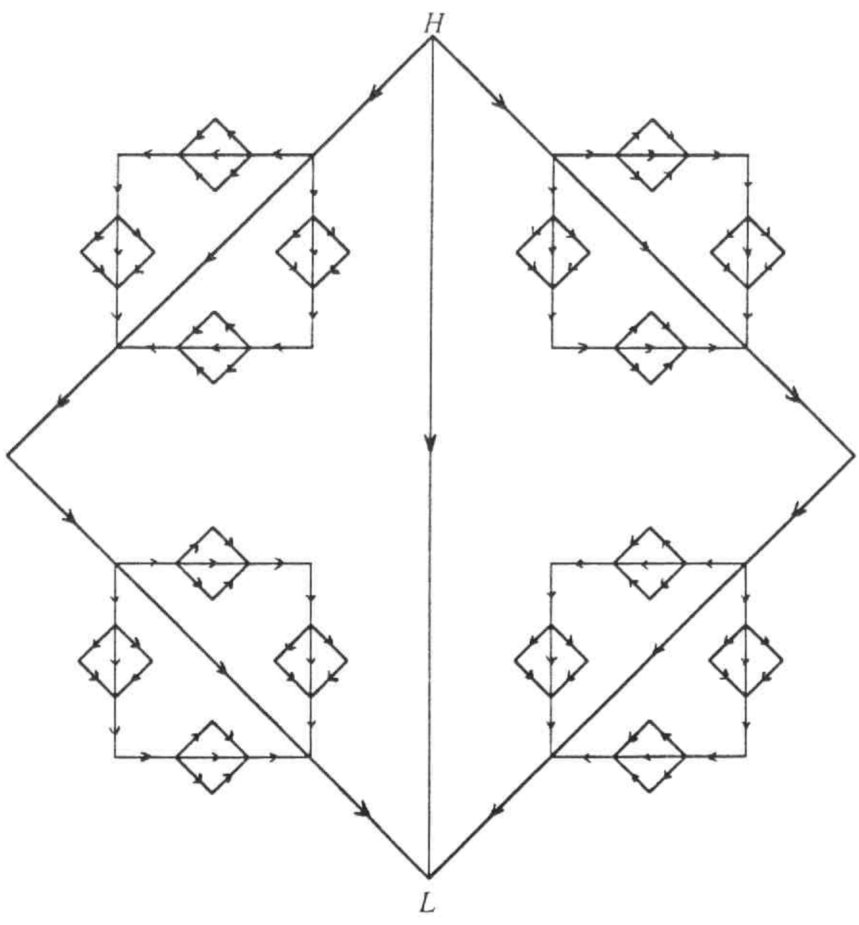


9. Hoeveel routes van H(oog) naar L(aag)?

>a

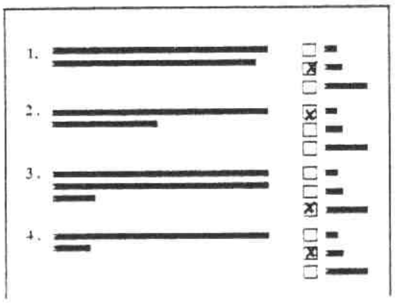


>b



6 Rangschikken met herhalingen

1. Bij een enquête moeten tien vragen worden beantwoord door een kruisje te zetten in één van de hokjes: 'ja', 'neen', 'geen mening'



Twee personen zijn het niet eens over het aantal verschillende manieren waarop de 10 vragen beantwoord kunnen worden.
De een beweert dat er 1000 manieren zijn. De ander houdt vol dat het er 59049 zijn.

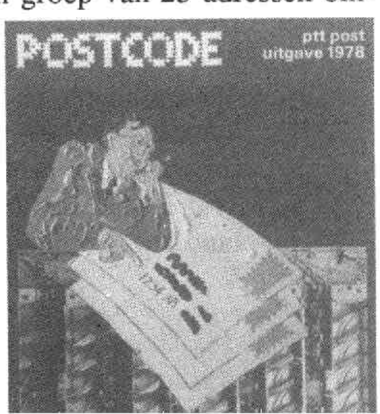
>a Wie heeft gelijk?

Omdat men niet geheel tevreden is over de enquête, wordt besloten de antwoordmogelijkheden te verfijnen.
Er is nu keus uit vijf categorieën: 'geheel mee eens', 'mee eens', 'geen mening', 'mee oneens', 'geheel mee oneens'.

>b Hoeveel verschillende resultaten zijn er nu mogelijk bij tien enquêtevragen?

2. Om het automatisch sorteren van post mogelijk te maken, is een aantal jaren geleden de postcode ingevoerd. Ieder adres in Nederland is gecodeerd met vier cijfers en twee letters.
De eerste groep van twee cijfers duidt een regio aan (zie regiokaart blz. 26).
De tweede groep van twee cijfers geeft een wijk aan binnen de betreffende regio. De groep van twee letters staat voor een groep van 25 adressen binnen de betreffende wijk.
Voorbeeld:

5 6	5 5	B S
regio	wijk	groep adressen



De wijknummers beginnend met een nul zijn gereserveerd voor postbussen en stellen dus geen adres voor.

Regionale opbouw van de postcode

>a In hoeveel regio's is Nederland verdeeld?

>b Hoe is aan de regiokaart te zien welke gebieden van Nederland dichtbevolkt en welke dun bevolkt zijn.

>c De stad Utrecht (regio 35) heeft ca. 230.000 inwoners. Enig idee hoeveel adressen er in Utrecht zijn?
En wat is het aantal mogelijke codenummers voor de regio Utrecht?

>d Wat is het maximale aantal adressen, dat met de postcode in Nederland kan worden aangeduid?

Bij een postcodenummer kan het voorkomen dat een cijfer of letter meermalen in één codenummer optreedt.
Bijvoorbeeld: 3233 AB of 2178 DD
In zo'n geval spreekt men van een rangschikking waarbij herhaling is toegestaan, kortweg: *rangschikking met herhaling*
Als bij een rangschikking van drie letters uit het rijtje A, B, C, D, E herhaling is toegestaan, is het aantal mogelijkheden: $5^3 = 125$.
Als geen herhaling is toegestaan, is het aantal mogelijkheden aanzienlijk kleiner, in dit geval: $5.4.3 = 60$.

60 rangschikkingen zonder herhaling					*125 rangschikkingen met herhaling*				
ABC	BAC	CAB	DAB	EAB	AAA	BAA	CAA	DAA	EAA
ABD	BAD	CAD	DAC	EAC	AAB	BAB	CAB	DAB	EAB
ABE	BAE	CAE	DAE	EAD	AAC	BAC	CAC	DAC	EAC
					AAD	BAD	CAD	DAD	EAD
ACB	BCA	CBA	DBA	EBA	AAE	BAE	CAE	DAE	EAE
ACD	BCD	CBD	DBC	EBC					
ACE	BCE	CBE	DBE	EBD	ABA	BBA	CBA	DBA	EBA
					ABB	BBB	CBB	DBB	EBB
ADB	BDA	CDA	DCA	ECA	ABC	BBC	CBC	DBC	EBC
ADC	BDC	CDB	DCB	ECB	ABD	BBD	CBD	DBD	EBD
ADE	BDE	CDE	DCE	ECD	ABE	BBE	CBE	DBE	EBE
AEB	BEA	CEA	DEA	EDA	ACA	BCA	CCA	DCA	ECA
AEC	BEC	CEB	DEB	EDB	ACB	BCB	CCB	DCB	ECB
AED	BED	CED	DEC	EDC	ACC	BCC	CCC	DCC	ECC
					ACD	BCD	CCD	DCD	ECD
					ACE	BCE	CCE	DCE	ECE
					ADA	BDA	CDA	DDA	EDA
					ADB	BDB	CDB	DDB	EDB
					ADC	BDC	CDC	DDC	EDC
					ADD	BDD	CDD	DDD	EDD
					ADE	BDE	CDE	DDE	EDE
					AEA	BEA	CEA	DEA	EEA
					AEB	BEB	CEB	DEB	EEB
					AEC	BEC	CEC	DEC	EEC
					AED	EBD	CED	DED	EED
					AEE	BEE	CEE	DEE	EEE

3. Bekijk de 125 rangschikkingen met herhaling van drie letters uit A, B, C, D, E

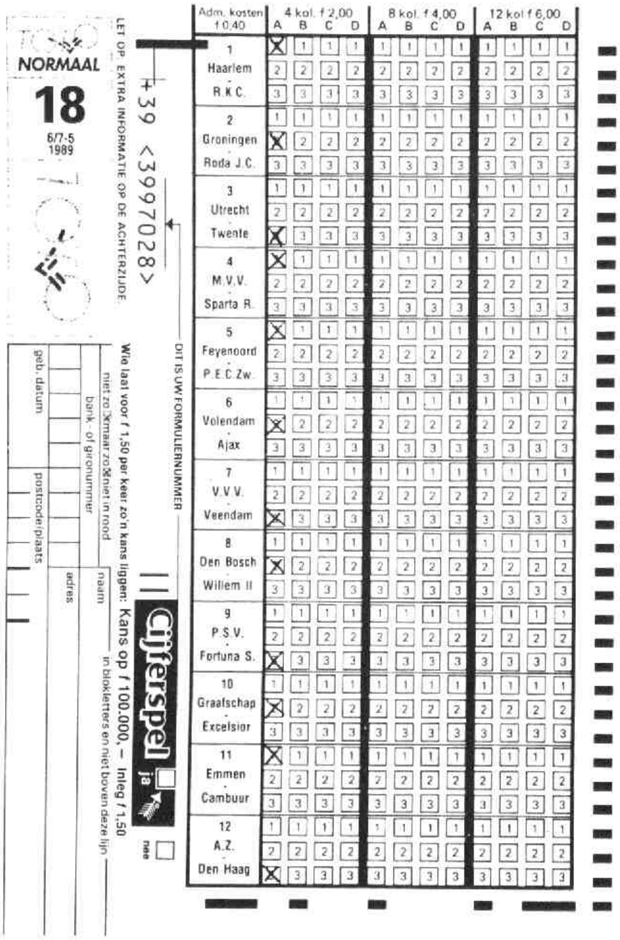
   > Hoeveel rangschikkingen zijn er, zoals AAB, waarin precies twee verschillende letters voorkomen?

4. Uit de klinkers *A, E, I, O, U, Y* worden er vier gekozen en op een rijtje gezet.

   >a Hoeveel verschillende rangschikkingen van vier met (eventuele) herhaling zijn er mogelijk?

   >b In hoeveel van die rijtjes komen vier verschillende letters voor?

5. In één kolom van een totoformulier kunnen de uitslagen van 12 wedstrijden worden voorspeld.
   1 = thuisclub wint
   2 = thuisclub verliest
   3 = gelijk spel.



   >a Op hoeveel verschillende manieren kan één kolom worden ingevuld?

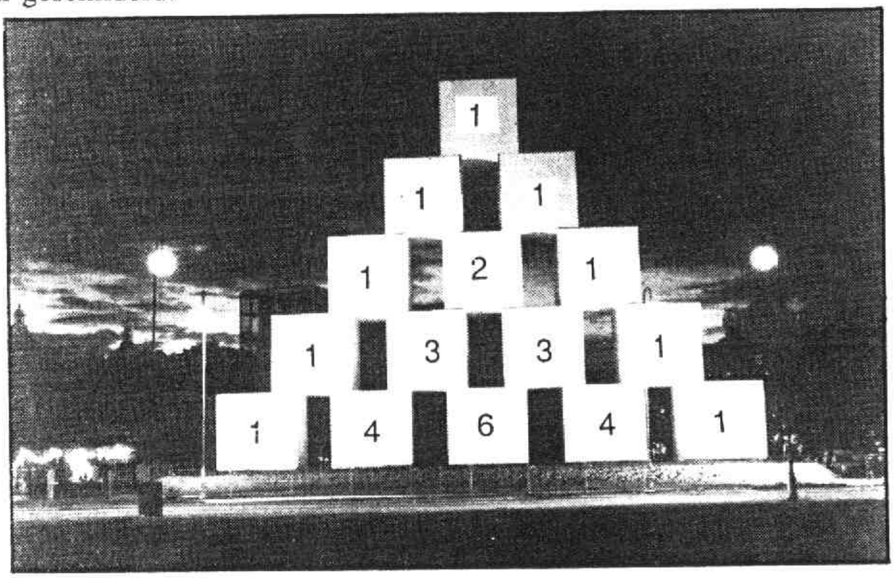
   >b Hoeveel verschillende mogelijkheden zijn er om één kolom in te vullen waarbij geen enkel gelijkspel wordt voorspeld?

6. Een meerkeuzetoets bestaat uit 15 vragen.
   Bij iedere vraag staan vier antwoorden, waarvan er een moet worden gekozen en aangekruist.

   > Op hoeveel verschillende manieren kan de toets worden beantwoord?

7 De driehoek van Pascal

1. Opnieuw de blokkentoren in Amsterdam, maar nu is er op elk blok een getal geschilderd.

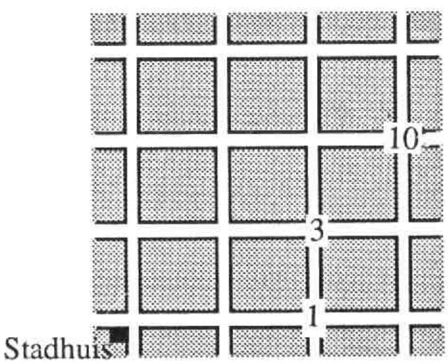


>a Welke betekenis hebben de getallen op de blokken volgens jou?

Stel er wordt aan de onderkant van de toren een rij van zes blokken toegevoegd. Die blokken worden ook met een getal beschilderd, zodat het begonnen systeem wordt voortgezet.

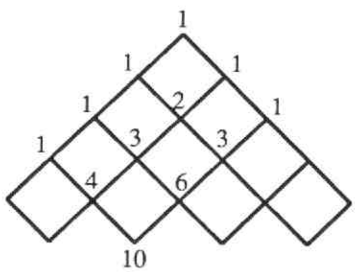
>b Welke getallen moeten er op die nieuwe rij blokken staan?

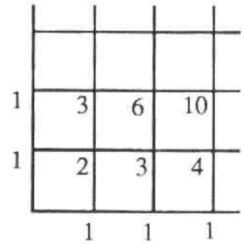
2. In de plattegrond van Square City wordt bij elk kruispunt vermeld hoeveel routes zonder omwegen er naar dat kruispunt leiden, gerekend vanaf het Stadhuis.
Bij drie kruispunten is het aantal routes al ingevuld.



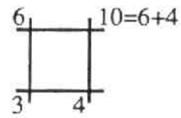
>a Vul zelf de aantallen in bij de andere twaalf kruispunten.
>b Zie je een verband met opgave 1? Zo ja, welk?

Een verstandige aanpak bij het tellen van aantallen routes in een rooster is om bij elk 'tussenpunt' het aantal routes naar dat punt te schrijven.



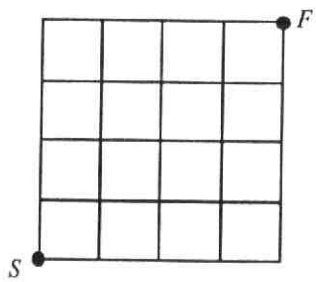


3. > Bekijk het vierkant:

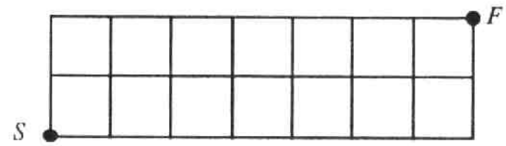


Uit het aantal routes naar het punt links-boven (= 6) en het punt rechts-onder (= 4) kun je door optellen het aantal routes naar het punt rechts-boven (= 10) vinden. Logisch?

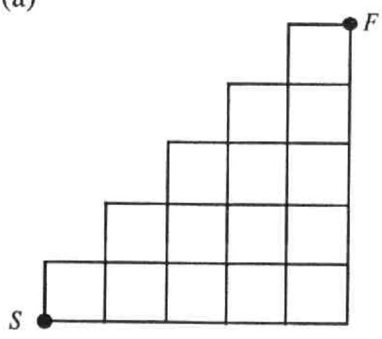
4. > Bepaal in onderstaande situaties het aantal routes van S naar F door bij *elk* tussenpunt het aantal routes te schrijven en de optelmethode toe te passen.



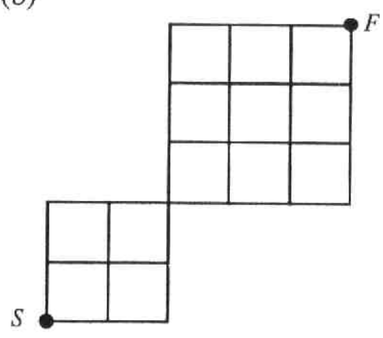
(a)



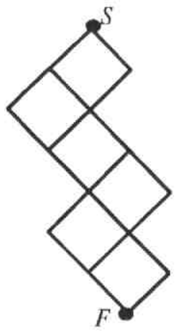
(b)



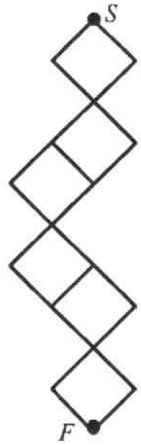
(c)



(d)

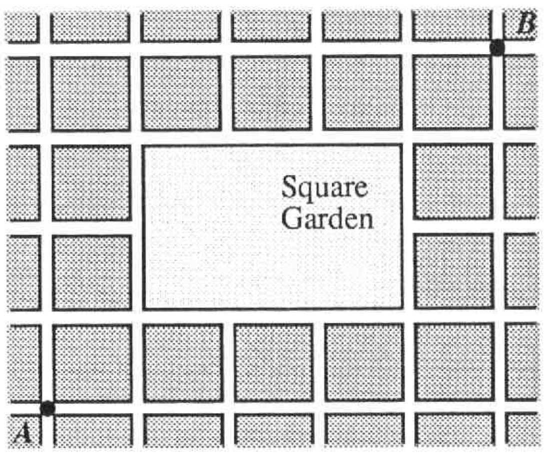


(e)



(f)

5. In Square City is een fraaie tuin aangelegd die niet door voetgangers mag worden betreden.



> Hoeveel routes zonder omwegen zijn er van A naar B ?

De getallen op de blokkentoren van opgave 1 geven aan hoeveel afdalingen mogelijk zijn vanaf het bovenste blok. Dat systeem kan verder uitgebreid worden. Wanneer de blokken weggelaten worden, ontstaat een getallenpatroon, dat de *driehoek van Pascal* wordt genoemd.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

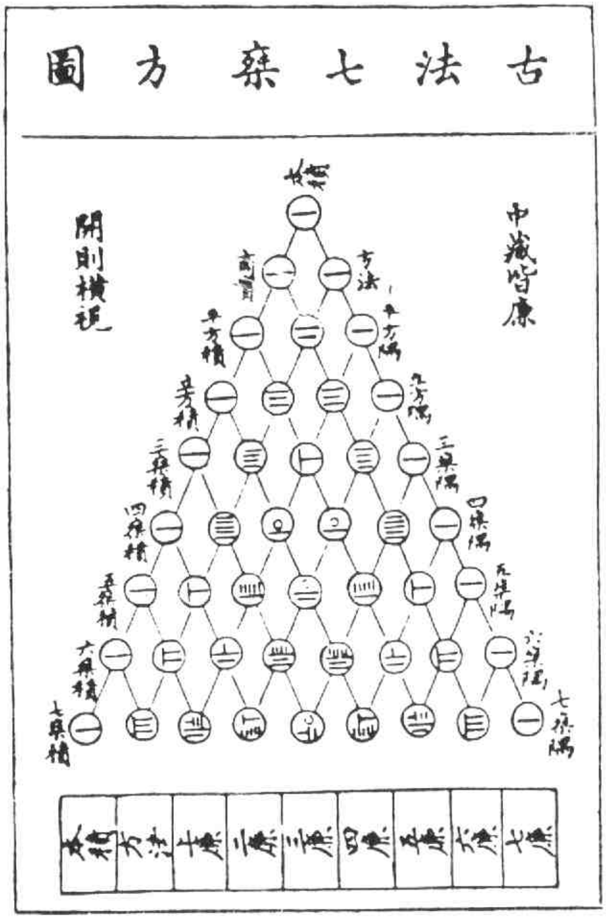
Het patroon wordt ook vaak zo gegeven:

1									
1	9								
1	8	36							
1	7	28	84						
1	6	21	56	126					
1	5	15	35	70	126				
1	4	10	20	35	56	84			
1	3	6	10	20	35	56	84		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Het getallenpatroon is zo genoemd naar de Franse filosoof en wiskundige Blaise Pascal (1623-1662). Het werd in de tweede vorm onder zijn naam in 1665 (posthuum dus) gepubliceerd.
Pascal was overigens niet de eerste wiskundige op aarde die de tabel ontdekte en gebruikte.

Blaise PASCAL

In een Chinees wiskundeboek, van de schrijver Ssu Yuan Yu en Chuh Shih-Chieh, daterend uit het jaar 1303, is de tabel al te vinden. En dat de tabel nog veel ouder is, blijkt uit het feit dat hij in het Chinese boek 'de antieke tabel' wordt genoemd.



Oud-Chinese versie van de driehoek van Pascal.

6. > Hoe schrijf je het getal 8 in het Chinees?

7. Bekijk het eerste patroon:

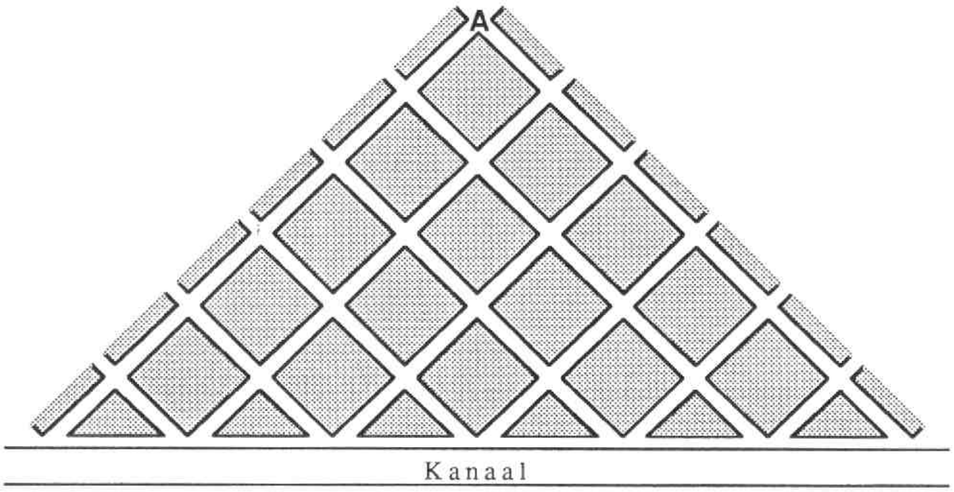
1	regel 0
1 1	regel 1
1 2 1	regel 2
1 3 3 1	regel 3
1 4 6 4 1	regel 4

In de figuren op blz. 32 staat het patroon afgedrukt tot en met regel 9.
Hoe ziet regel 10 eruit?

8. Tel voor de regels 1 tot en met 6 de getallen per regel op.
   Regel 1: 1 + 1 = 2
   Regel 2: 1 + 2 + 1 = 4
   enz.

   >a Enig idee waaraan de som van de getallen op regel 10 gelijk is?
   >b En op regel *x*?

9. Dwars door Square City loopt een kanaal, zoals je al eerder gezien hebt. Langs het kanaal is een mooie boulevard aangelegd, waar op een rustige zondagmiddag vele inwoners van de anders zo bedrijvige stad zich op gepaste wijze al wandelend ontspannen.



Een inwoonster van Square City wil zich van punt *A* zo snel mogelijk naar de kanaalboulevard begeven.

> Uit hoeveel routes heeft zij de keus?

10. ABRACADABRA is een oude bezweringsformule. Het zou de mensen tegen ziekten en noodlottige invloeden beschermen. Het woord stond veelvuldig op amuletten en talismans vermeld. Het werd elfmaal onder elkaar geschreven, telkens met een letter minder, zodat een gelijkzijdige driehoek ontstond.

```
A B R A C A D A B R A
 A B R A C A D A B R
  A B R A C A D A B
   A B R A C A D A
    A B R A C A D
     A B R A C A
      A B R A C
       A B R A
        A B R
         A B
          A
```

Een talisman met dit opschrift gaf veel macht, want je kunt het woord ABRACADABRA op wel 1024 manieren lezen.
Een van die manieren is:

```
               A B R A
       A C A D
  A B R
```

>a Controleer of er inderdaad 1024 manieren zijn.

Een andere manier om de bezweringsformule op een talisman te schrijven is de ruitvorm.

```
          A
        B   B
      R   R   R
    A   A   A   A
  C   C   C   C   C
A   A   A   A   A   A
  D   D   D   D   D
    A   A   A   A
      B   B   B
        R   R
          A
```

Een manier om het woord te lezen is nu bijvoorbeeld:

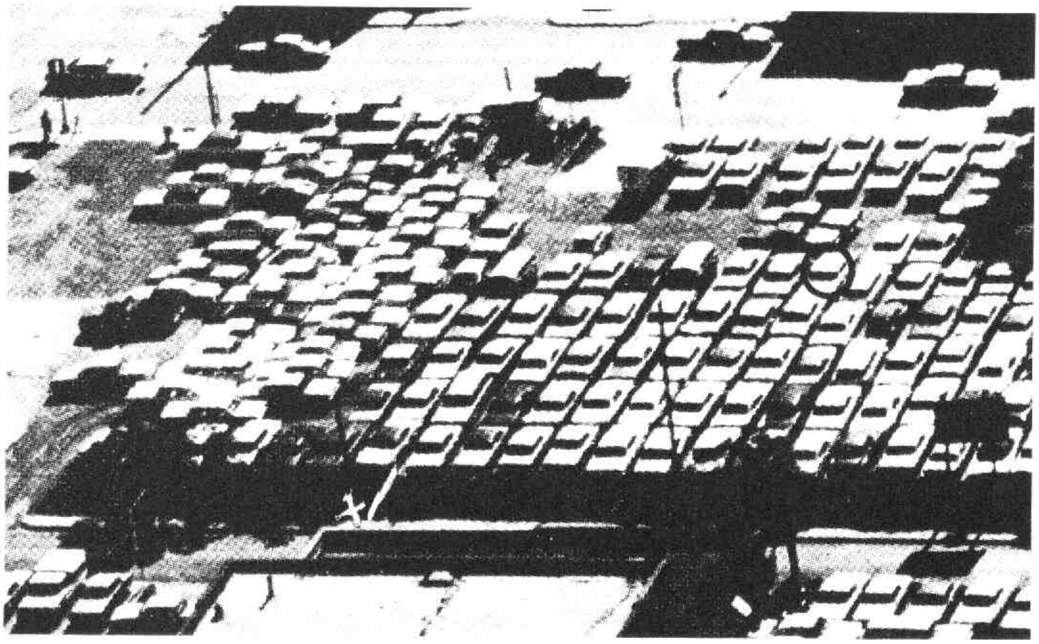
```
          A
        B
          R
            A
          C
            A
          D
        A
          B
            R
          A
```

>b Hoe vaak staat er in de ruitvorm het woord ABRACADABRA?

8 Routes in een rooster

Op bladzijde 47 staat een getallenschema afgedrukt. Daarin is voor een groot aantal roosterpunten af te lezen hoeveel routes naar dat punt leiden vanuit het startpunt S.
Bij de meeste vraagstukken in dit hoofdstuk is het handig om van dat schema gebruik te maken.

1. Geparkeerde auto's in Dallas (V.S.), detail van de omslagfoto.



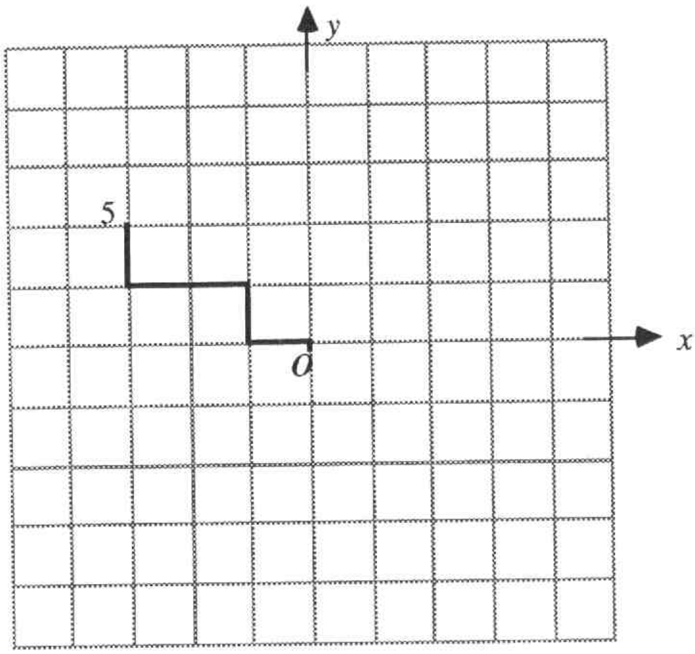
De eigenaar van de omcirkelde auto steekt bij de witte streep met X over naar de parkeerplaats om vervolgens zonder omwegen terug te lopen naar zijn auto. Hoewel het er op de foto alle schijn van heeft dat de auto's vrijwel tegen elkaar staan, kan hij overal tussendoor.

> Uit hoeveel routes heeft hij de keus?

2. In een vlak is een coördinatenrooster getekend. De taxi-afstand van (0,0) tot (5,3) is 8.

>a Hoeveel taxi-routes met lengte 8 zijn er van (0,0) naar (5,3)?
>b En hoeveel van (0,0) naar (6,2)?
>c Als je de uitkomsten van >a en >b bijelkaar optelt krijg je het aantal taxi-routes van (0,0) naar ....

3.

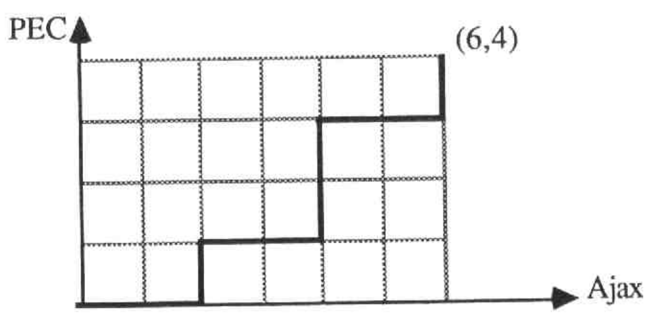


>a Teken alle punten in een coördinatenrooster die op een taxi-afstand 5 van de oorsprong liggen.

>b Hoeveel verschillende taxi-routes met lengte 5 zijn er in totaal vanuit de oorsprong?

>c En hoeveel met lengte 8?

4. Ajax-PEC, uitslag 6-4.
Een verslaggever die tijdens de wedstrijd in slaap is gevallen, moet het scoreverloop gokken.
Een mogelijk scoreverloop is:
1-0; 2-0; 2-1; 3-1; 4-1; 4-2; 4-3; 5-3; 6-3; 6-4.
Dit scoreverloop kan worden voorgesteld door een route in een rooster.



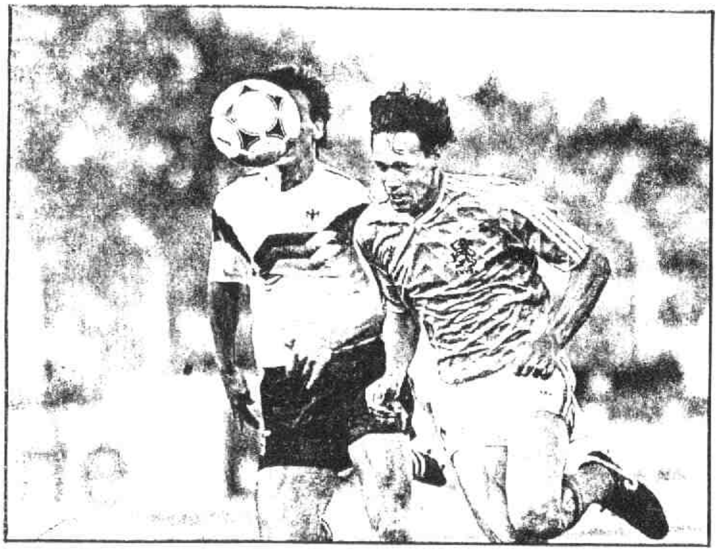
De tussenpunten (1,0); (2,0); (2,1) enz. komen overeen met de tussenstanden.

>a Uit hoeveel verschillende scoreverlopen moet de verslaggever kiezen.

>b Later hoort hij van zijn vrouw de ruststand: 2-2.
Hoeveel verschillende scoreverlopen zijn er nu nog denkbaar?

5. Toevallig werd er een paar jaar geleden bij de wedstrijd Ajax-PEC ook 10 keer gescoord.
De uitslag was toen 7-3.

> Hoeveel verschillende scoreverlopen passen bij die uitslag?



6. Bij een wedstrijd worden er in totaal zes doelpunten gemaakt.

>a Welke eindstanden kunnen voorkomen?

>b Geef bij elke eindstand aan hoeveel verschillende scoreverlopen daarbij passen.

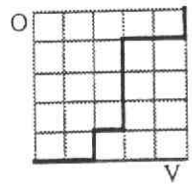
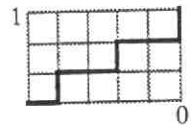
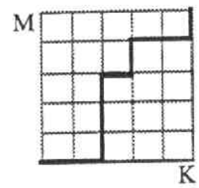
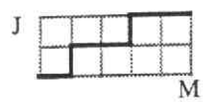
>c Het totaal aantal mogelijke scoreverlopen is 64. Controleer dit.

Het is niet toevallig dat een scoreverloop kan worden weergegeven als route in een rooster. Er zijn immers bij elk doelpunt maar twee mogelijkheden: Ajax scoort òf PEC scoort.
Het scoreverloop kan worden voorgesteld door een rijtje van tien letters, bijvoorbeeld:

AAPAAPPAAP

Alle mogelijke scoreverlopen bij de einduitslag 6-4 zijn te vinden door alle rijtjes van zes letters *A* en vier letters *P* op te schrijven.
Wanneer dat systematisch gebeurt (en je beschikt over veel tijd!) dan kunnen de 210 mogelijkheden wel gevonden worden.
De driehoek van Pascal geeft dit antwoord veel sneller.
Allerlei situaties waarbij steeds een keus gemaakt moet worden uit slechts twee mogelijkheden, kunnen worden beschreven door rijtjes, waarin twee symbolen voorkomen. Elk van die rijtjes is weer te geven als route in een rooster.

Een paar voorbeelden:

de resultaten van tien leerlingen bij een proefwerk	V V O V O O O V V O (V = voldoende O = onvoldoende)	
er worden 3 personen gekozen uit een groep van acht mensen	0 1 0 0 1 0 0 1 (1 = wel gekozen 0 = niet gekozen)	
tien keer tossen met een muntstuk	K K M M M K M K K M (K = kop, M = munt)	
samenstelling van een gezin met zes kinderen	J M J J M J (J = jongen, M = meisje)	

7. > Hoeveel rijtjes van vijf *V* 's en vijf *O* 's zijn er te maken?
   En van vijf 0-en en drie 1-en?
   En van vijf *K* 's en vijf *M* 's?
   En van vier *J* 's en twee *M* 's?

8. Van de zestien leerlingen halen er zes een onvoldoende voor het proefwerk.

   \> Op hoeveel manieren kunnen die zes onvoldoendes over de groep van zestien leerlingen verdeeld zijn?

9. De toestand van de vijftien bomen langs de Parklaan wordt onderzocht. Zieke exemplaren worden gemerkt met een kruis. Er blijken vijf bomen ziek te zijn.

   \>a Op hoeveel manieren kunnen die vijf zieke bomen over de Parklaan verspreid staan?

   \>b En hoeveel manieren zijn er, als je weet dat de eerste twee bomen gezond zijn en de middelste ziek is?

10. Vier leerlingen zullen de klassefuif organiseren: twee jongens en twee meisjes. Ze worden gekozen uit de 23 leerlingen van de klas (11 jongens en 12 meisjes).

    \> Hoeveel verschillende viertallen kunnen gekozen worden?

11. Een leerling heeft Nederlands, Engels en wiskunde A in haar vakkenpakket opgenomen. Voor de drie overige vakken moet ze nog een keus maken uit Duits, Frans, geschiedenis, aardrijkskunde, biologie, scheikunde, economie, handelswetenschappen en tekenen.

   > Hoeveel mogelijke drietallen vakken kan zij aan haar pakket toevoegen?

12. Uit zijn verzameling van 13 LP's kiest Piet vier exemplaren, die hij wil gebruiken ter opluistering van zijn feestje.

   >a Hoeveel viertallen kan hij kiezen?

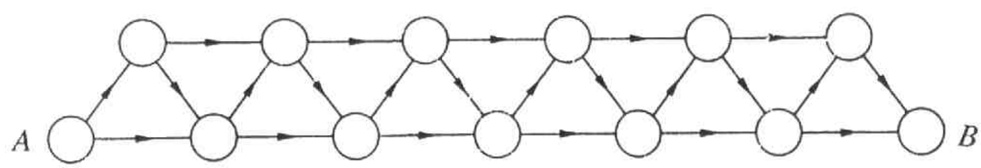
   >b Op hoeveel manieren kan uit die 13 LP's een top-vier worden samengesteld?

   >c Het aantal van >b is 24 keer zo groot als het aantal van >a.
   Hoe verklaar je dat?

9 Gemengde opgaven

1. In een klas zitten 32 leerlingen.
   Er wordt een tafeltennistournooi georganiseerd waar iedereen aan meedoet. Bij het tournooi wordt gespeeld volgens het afvalsysteem: wie een partij verliest valt af.
   Er zijn 4 leerlingen in de klas die lid zijn van een tafeltennisclub en de tournooileiding besluit dat deze 4 leerlingen pas in een zo laat mogelijk stadium tegen elkaar mogen spelen.

   > Maak een boomdiagram voor een mogelijk wedstrijdschema. Nummer de spelers met 1, 2, 3, ... 32.
   De eerste vier nummers zijn de 'geplaatste' spelers.

2. 

   > Hoeveel verschillende routes zijn er van *A* naar *B*?

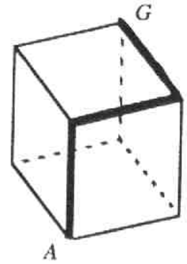
3. De oorspronkelijke Polynesische taal van Hawaii kent slechts 12 letters: de klinkers *A, E, I, O, U* en de medeklinkers *H, K, L, M, N, P* en *W*.

   > Hoeveel verschillende drie-letter-woorden kun je uit deze letters samenstellen, waarbij de middelste letter een klinker moet zijn.

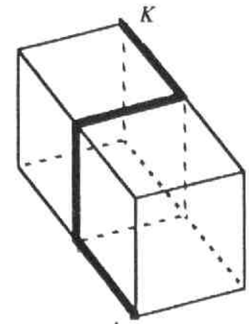
4. Vergelijk twee systemen van lettercombinaties:
   Systeem I
   Uit de acht letters *A* tot en met *H* worden rijtjes van drie letters gevormd.
   Bijvoorbeeld: *AAB, BCD, FGF, HHH.*
   Systeem II
   Uit de drie letters *A, B, C* worden rijtjes van acht letters gevormd.
   Bijvoorbeeld: *ABBACCCA, ABCABCAB*

   > Welke van de twee systemen bevat de meeste lettercombinaties?

5. In figuur 1 zijn zes routes mogelijk van A naar G. Bij figuur 2 zijn er twaalf routes van A naar K.

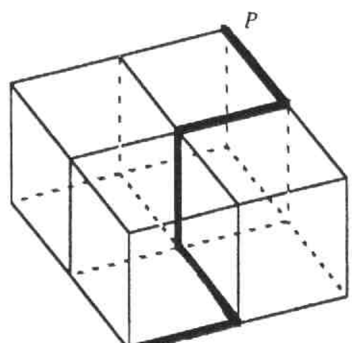


figuur 1



figuur 2

> Hoeveel routes zijn in figuur 3 mogelijk van A naar P?

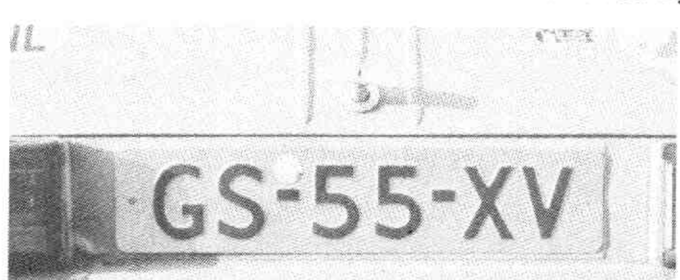


figuur 3

6. Het alfabet is een rangschikking van 26 letters.

> Hoeveel verschillende 'alfabetten' zijn er mogelijk met onze 26 letters?

7. Kentekennummers van auto's bevatten vier letters en twee cijfers.



De letters O en I worden niet gebruikt om verwarring te verkomen met de cijfers 0 en 1. De twee cijfers staan in het midden.

> Hoeveel verschillende kentekennummers kunnen er op deze manier worden gemaakt?

8. Kim beweert: $6! \times 7! = 10!$
Veronderstel dat je geen rekenmachientje bij de hand hebt.

   > Hoe kun je toch snel uitmaken of zij gelijk heeft?

9. Een bekende toverspreuk is HOCUS POCUS PILATUS PAS.

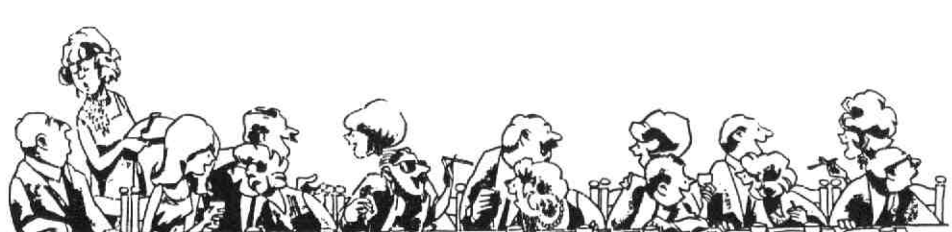
   > Op hoeveel manieren kun je die spreuk in onderstaand letterpatroon lezen?

H
O O
C C C
U U
S
P
O O
C C C
U U
S
P
I I
L L L
A A A A
T T T
U U
S
P
A A
S

10. Bij een cijferslot voor de fiets hoort een code van drie cijfers, te kiezen uit: 0, 1, ..., 9.
In een codenummer kan één cijfer meer keren voorkomen.

   >a Hoeveel verschillende codenummers zijn er volgens dit systeem?
   >b Hoeveel codenummers zijn er die uit drie verschillende cijfers bestaan?

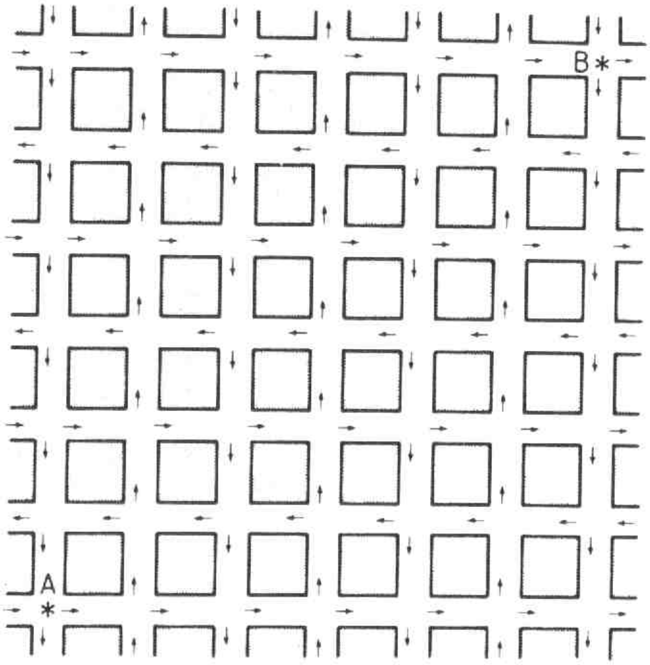
11.



De gastvrouw heeft misschien spijt van de gekozen rangschikking van haar 14 gasten aan tafel.

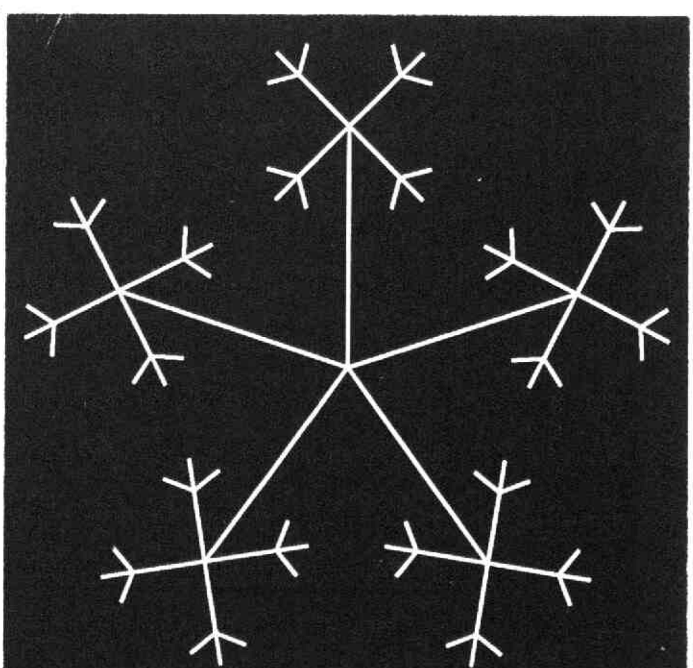
   > Uit hoeveel rangschikkingen kan zij kiezen, vooropgesteld dat zij de afwisseling man-vrouw-man-vrouw-enz. wil handhaven?

12. In de straten van Square City is éénrichtingsverkeer (zie de pijltjes in de plattegrond).



> Hoeveel verschillende (zonder omwegen) auto-routes zijn er van *A* naar *B*?

13. Bekijk onderstaand boomdiagram.
Bedenk zelf een opgave die met behulp van dit boomdiagram kan worden opgelost.

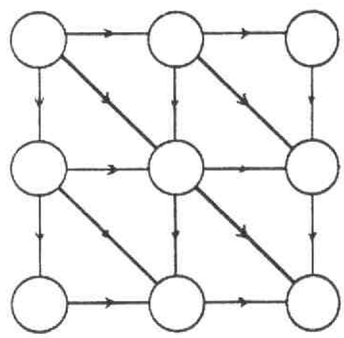


14. De uitslag van een zaalhockeywedstrijd tussen de teams A en B was 5-3.

   >a Hoeveel verschillende scoreverlopen zijn er die tot deze uitslag leiden?

   >b Het winnende team A heeft in de wedstrijd steeds vóór gestaan. Hoeveel verschillende scoreverlopen zijn er mogelijk?

15. Hoeveel verschillende routes zijn er van A naar B?



16. 99! en 101! zijn 'astronomische getallen'.

   >a Verklaar dat 99! een deler van 101! is.

   >b Bereken het quotiënt $\frac{101!}{99!}$

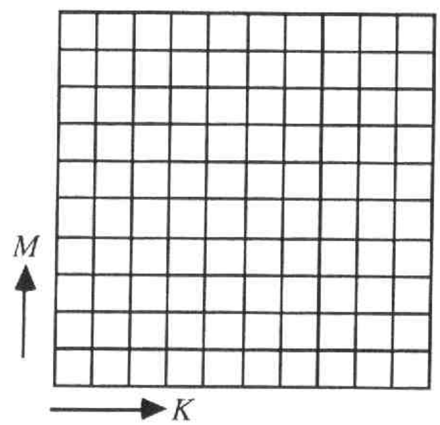
17. Kettingbrieven komen regelmatig in het nieuws.
Daarbij gaat het niet om de onschuldige vorm met ansichtkaarten, die in hoofdstuk 1 aan de orde was.
Een wettelijk verboden variant werkt met geld.
Onderstaand artikel was bedoeld om de Nederlandse bevolking tegen deze soort kettingbrief te waarschuwen.

KETTINGBRIEF: TOCH MAAR NIET DOEN

Iemand in Nederland zit op dit moment heel rijk te worden. Als alles gaat zoals hij of zij het bedacht heeft, komt er zo'n 800 duizend gulden binnen. Keurig verpakt in enveloppen van elk honderd piek. Dat is de *bedenker* van de kettingbrief Gouden Cirkel, die naar het lijkt de halve randstad en Utrecht in zijn greep houdt. De Gouden Cirkel noemt zichzelf geen kettingbrief (omdat dat verboden is), maar werkt wel op de bekende kettingmanier.
Bijzonder is dat ook de brief zelf gekocht moet worden. De prijs is nog eens honderd gulden. Om quitte te draaien moet de deelnemer dus twee brieven doorverkopen.
Dat houdt vaart in de brief. Wie inmiddels nog niet benaderd is voor de aanschaf, moet wel heel geïsoleerd leven. De verspreiding gaat nogal snel, namelijk. Een rekensommetje om iedereen die *nu* nog meedoet te ontnuchteren: Er staan twaalf namen op de lijst. Dat betekent dat er minstens 4096 mensen meedoen (en waarschijnlijk meer, want er zijn al wat eerste namen weggevallen).
Voor dat nummer twaalf nummer één wordt, doen er (4096×4096) inmiddels 16,78 miljoen mensen mee. Laten we zeggen: geheel Nederland en een gedeelte van Vlaanderen. Wie daarna inschrijft heeft 33,5 miljoen deelnemers nodig.
Wie daarna komt 67,1 miljoen.
Het ministerie van Justitie heeft de afgelopen weken al wat vragen te verwerken gekregen over de brief. Antwoord: kettingbrieven zijn verboden in de wet op de Kansspelen. Deze brief ook. Vanwege artikel 1 van de wet: 'Het is verboden om mee te dingen naar prijzen of premies als de aanwijzing van winnaars geschied door enige kansbepaling, waar de deelnemer geen overwegende invloed op kan uitoefenen.' De Hoge Raad bepaalde dit artikel al in 1932 van toepassing op kettingbrieven.

>a Ga na wat de 'spelregels' voor deze kettingbrief zijn.
>b Controleer de getallen *f* 800.000 en 4096, die in het artikel genoemd worden.

18. Yvonne gooit tien maal met een muntstuk en noteert steeds of ze kruis (K) of munt (M) heeft gegooid.
Zo ontstaan series als K K M M K M K K K M.



>a Hoeveel verschillende series zijn er mogelijk?
>b Hoeveel mogelijke series zijn er, als je weet dat ze even vaak kruis als munt heeft gegooid?
>c Als je bovendien nog weet dat ze de eerste keer kruis gooide, hoeveel mogelijke series zijn er dan met evenveel kruis als munt?

Routes in een rooster.
In dit schema is af te lezen het aantal verschillende routes naar een gegeven roosterpunt. Het startpunt is altijd linksonder (*S*).

Voorbeeld: er zijn 1287 verschillende routes naar het punt (8,5).

1	11	66	286	1001	3003	8008	19448	43758	92378	184756
1	10	55	220	715	2002	5005	11440	24310	48620	92378
1	9	45	165	495	1287	3003	6435	12870	24310	43758
1	8	36	120	330	792	1716	3432	6435	11440	19448
1	7	28	84	210	462	924	1716	3003	5005	8008
1	6	21	56	126	252	462	792	1287	2002	3003
1	5	15	35	70	126	210	330	495	715	1001
1	4	10	20	35	56	84	120	165	220	286
1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

S