# Tabellen, grafieken, formules

https://hdl.handle.net/1874/10147

# TABELLEN, GRAFIEKEN, FORMULES 3

# TABELLEN, GRAFIEKEN, FORMULES

# 3

WISKUNDE A

TABELLEN, GRAFIEKEN, FORMULES 3

Een produktie ten behoeve van het project Hawex.

| | |
|---|---|
| Ontwerper: | Anton Roodhardt |
| Met medewerking van: | Jan de Jong<br>Martin Kindt<br>Henk van der Kooij<br>Martin van Reeuwijk |
| Vormgeving: | Ada Ritzer |



ongewijzigde 3e versie

# Inhoudsopgave

# 1 Problemen rond een formule

Formules zijn in de vorige boekjes al terloops aan de orde gekomen. Hier staan ze centraal.
De bedoeling van dit eerste hoofdstuk is een indruk te geven van de verschillende soorten vragen die vaak bij formules gesteld worden.

1 betonblok weegt 2,5 ton

1. Er zijn indertijd proeven genomen met het gebruik van helikopters bij het storten van betonblokken voor de aanleg van een dijk. Bij het depot pikt de heli drie blokken op, vliegt naar de stortplaats en deponeert ze daar. Na het terugvliegen is één vlucht voltooid.
Het is voor het uitvoeren van waterwerken belangrijk om te weten hoeveel vluchten per uur zo gemaakt kunnen worden.
Dat aantal zal afhankelijk zijn van de te vliegen afstanden. Daarvoor is een formule bedacht:

$$VL = \frac{450}{0{,}01d + 6}$$

*VL* is het gemiddelde aantal vluchten per uur en *d* is de afstand van het depot tot de stortplaats in m.

>a Vul de tabel in:

| $d$ | $VL$ |
|---|---|
| 100 | |
| 200 | |
| 300 | |
| 400 | |
| 500 | |
| 700 | |
| 800 | |
| 900 | |

$d$ in meter
$VL$ afronden op 1 decimaal

>b Uit de tabel blijkt: hoe groter $d$, hoe kleiner $VL$.
Waarom mag je dat van een bruikbare formule verwachten?
Was zo al aan de formule te zien dat dit zou gebeuren?

>c Teken een grafiek van de formule, waarbij $d$ alle waarden van 100 tot 1000 meter aanneemt ($d$ langs de horizontale as, $VL$ langs de verticale as)

>d Voor een karwei is het gewenst dat er minstens 52 vluchten per uur worden gemaakt. Bepaal met behulp van de grafiek hoe groot de afstand tussen depot en stortplaats mag zijn.
Controleer met een berekening of het antwoord ongeveer klopt.

>e Probeer met de rekenmachine eens uit te vinden bij welke afstand het gemiddelde aantal vluchten per uur onder de 12 komt.
Het antwoord moet minder dan 100 m van het echte antwoord verschillen.

Opmerking:
De probeermethode werkt zo: Kies een waarde voor $d$. Bereken $VL$. Beslis nu of er een hogere of lagere waarde voor $d$ gekozen moet worden, enz.

>f De piloot van de helikopter wil een record vestigen in het zo snel mogelijk oppikken en het meteen daarna weer netjes neerzetten van de lading. Als prestatie geldt het aantal malen dat hij in 20 minuten deze handeling kan uitvoeren.
Op welk record kan hij, als alles meezit, uitkomen?.

Bij opgave 1 >e kon dit probleem ontstaan:

| |
|---|
| Welke waarde moet je aan $d$ geven om er voor te zorgen dat $\frac{450}{0,01d+6} = 12$ een ware bewering is? |

(Er is sprake van een bewering omdat er gezegd wordt dat twee getallen aan elkaar gelijk zijn.)
Het moeizame proberen kan met behulp van enige algebra vermeden worden.
Een van de manieren is:

Doe alsof de noemer $0{,}01d + 6$ één getal is: $\frac{450}{\boxed{0{,}01d+6}} = 12$

Het probleem is: Welk getal moet in het hokje staan opdat $\frac{450}{\boxed{\phantom{0}}} = 12$ klopt?

Dat getal is $450 : 12 = 37{,}5$.

Dus $\boxed{0{,}01d + 6} = \boxed{37{,}5}$ en dit is een vergelijking die je met een bekende methode kunt oplossen.

$0{,}01d + 6 = 37{,}5$
$0{,}01d = 31{,}5$
$d = 31{,}5/0{,}01 = 3150.$

Controleer het antwoord door invulling in de formule.

2. Om de afstand $d$ bij $VL = 17$ te berekenen moet de vergelijking $\frac{450}{0,01d+6} = 17$ worden opgelost.

>a Ga na dat de berekening $d = 2047{,}0588$ kan geven.

>b Waarom is dit antwoord eigenlijk niet aanvaardbaar?
Wat is dan wel een redelijk antwoord?

>c Wat wordt het antwoord als de afstand op een honderdtal wordt afgerond?

Afronden kan niet altijd volgens een simpel regeltje.
Neem deze vraag:

Bij welke afstand is het gemiddeld aantal vluchten per uur hoogstens 17?
Het antwoord wordt afgerond op honderdtallen.

>d Waarom is het antwoord uit >c nu fout?

3. >a Bereken $d$ in gehele meters, met behulp van algebra, voor: $\frac{450}{0,01d+6} = 55$.

   >b Doe hetzelfde voor $\frac{450}{0,01d+6} = 20$.

   >c Bij de oplossing van $\frac{450}{0,01d+6} = 100$ gebeurt er iets vreemds. Hoe moet nu gehandeld worden?

   >d Eén van de antwoorden van vraag >a of >b is met de getekende grafiek redelijk goed te controleren, het andere niet. Toch bevat de grafiek zoveel informatie dat een grote fout herkend kan worden. Hoe gaat dat?

We willen nu proberen te achterhalen hoe de formule is ontstaan. Een bruikbare methode is om zelf eens één of meer rekenvoorbeelden te maken en daaruit een recept af te leiden.
We rekenen in seconden en meters en laten het woord 'gemiddelde' weg. In die berekening is een aantal stappen te onderscheiden:

$$\textit{aantal vluchten per uur} = \frac{3600}{\textit{tijd per vlucht}}$$

*tijd per vlucht = tijd voor heen en weer vliegen + tijd voor laden en lossen*

$$\textit{tijd voor het heen en weer vliegen} = \frac{2 \times \textit{afstand tussen depot en stortplaats}}{\textit{snelheid}}$$

4. > Ga na of deze 'woordformules' juist zijn.

Er is zo ook te zien welke gegevens we nodig hebben om een berekening te kunnen maken. We kiezen:

*snelheid* = 12 m/s
*tijd voor laden en lossen* = 50 s
*stortafstand* = 500 m

5. >a Bereken nu het aantal vluchten per uur.

   >b Doe hetzelfde voor een stortafstand van 900 m.

Om goed te zien wat er eigenlijk gebeurt, moet je lui zijn en geen rekenstap uitvoeren. Voor een stortafstand van 300 m ontstaat dan het resultaat:

$$\text{aantal vluchten per uur} = \frac{3600}{\frac{2 \times 300}{12} + 50}$$

6. > Hoe kan dit resultaat snel worden veranderd, zodat je het resultaat voor de stortafstand van 500 m krijgt?

Het voordeel van de formule is dat zij voor heel veel stortafstanden kan worden gebruikt. Dat is te bereiken door voor die stortafstand een variabele (hier $d$) te kiezen en daarmee de berekening te maken.

7. >a Gebruik je ervaring uit opgave 6 om in één keer het antwoord voor stortafstand $d$ op te schrijven (geen herleidingen toepassen).

   >b Bepaal het antwoord ook door een berekening van het begin af aan.

Door middel van een kleine herleiding is nu deze nieuwe formule op te schrijven:

$$VL = \frac{3600}{0{,}167d + 50}$$

Deze formule heeft dezelfde 'structuur' als de oude ($VL = \frac{450}{0{,}01d + 6}$) namelijk:

$$VL = \frac{getal}{getal \times d + getal}$$

8. De nieuwe formule geeft bij elke $d$ een kleinere waarde voor $VL$ dan de oude.

   \> Toon dat aan door eerst de vorm met 3600 in de teller om te rekenen naar de vorm met 450 in de teller.

Het aantal vluchten per uur kan worden opgevoerd door een betere laad- en losmethode te ontwikkelen of de helikoptersnelheid te verhogen.
Het voordeel moet natuurlijk wel de extra kosten overtreffen.
Om dat te kunnen bestuderen zijn er formules nodig waarbij die snelheid en die laad- en lostijd als variabelen voorkomen.

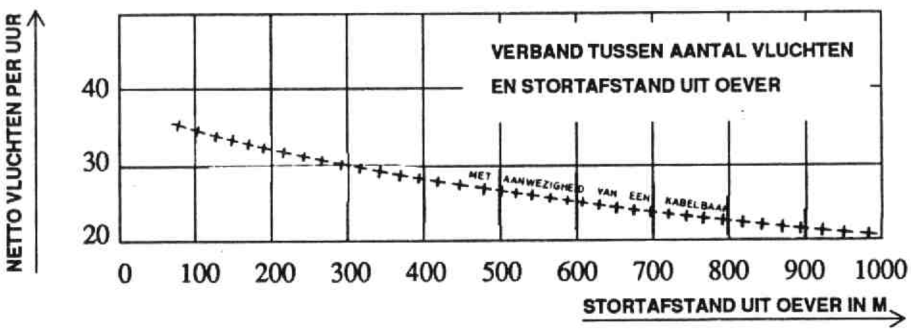
9. \> Ontwerp formules voor de volgende drie gevallen:

| | I | II | III | eenheid |
|---|---|---|---|---|
| snelheid | 20 | $v$ | $v$ | m/s |
| laad- en lostijd | $l$ | 40 | $l$ | s |
| stortafstand | 500 | 500 | 500 | m |

10. We gaan weer naar de situatie aan het begin van het hoofdstuk. Er is ook onderzocht hoeveel invloed een gelijktijdig aanwezige kabelbaan op het aantal vluchten per uur kan hebben.

    >a Waarom zou dat van invloed kunnen zijn?

    De bevindingen staan in deze grafiek:

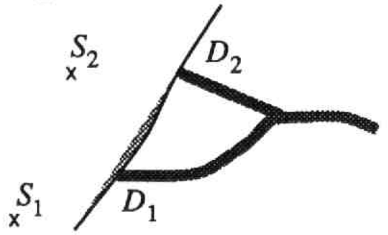



    >b De formule wordt hierdoor ook anders:

$$VL = \frac{450}{0{,}01d + ...}$$

    Welk getal moet op de stippen staan?

11. *Een vereenvoudigde praktijksituatie*
Er zijn twee stortplaatsen $S_1$ en $S_2$. Voor het depot moet één van de plaatsen $D_1$ en $D_2$ gekozen worden. Voor elke stortplaats wordt één helikopter ingezet.




de afstandmatrix is:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} D_1 & D_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} S_1 \\ S_2 \end{array} & \begin{bmatrix} 300 & 550 \\ 300 & 100 \end{bmatrix} \end{array}$$

De formule is $VL = \dfrac{450}{0{,}01d + 6}$

\> Bij welke keus van het depot is het totaal aantal mogelijke vluchten per uur het grootst? (Er is aangenomen dat de helikopters elkaar niet hinderen.)

12. Er geldt $VL = \dfrac{450}{0{,}01d + 6}$
We willen een indruk hebben van het aantal kilometers dat een helikopter gedurende 1 uur werken aflegt. Iemand geeft deze redenering:
'Als je de stortafstand groter maakt, wordt het aantal vluchten kleiner. Daardoor wordt het totale aantal afgelegde kilometers uiteindelijk niet groter.'
Erg overtuigend is dit betoog niet.
(a) Misschien is de opzet wel goed, maar ontbreken er belangrijke schakels in het verhaal.
(b) Het is ook denkbaar dat de conclusie onjuist is, omdat in sommige gevallen wel vergroting van de totale afstand optreedt en in andere gevallen niet.
(c) Zelfs zou het zo kunnen zijn dat de totale afstand groter wordt.

\> Onderzoek of één van de drie genoemde mogelijkheden zich voordoet. Bij antwoord (a) moet je de redenering met het ontbrekende aanvullen. Bij (b) moeten voorbeelden voor *wel* en voor *niet* gegeven worden. En voor (c) is een complete redenering (bewijs) nodig.

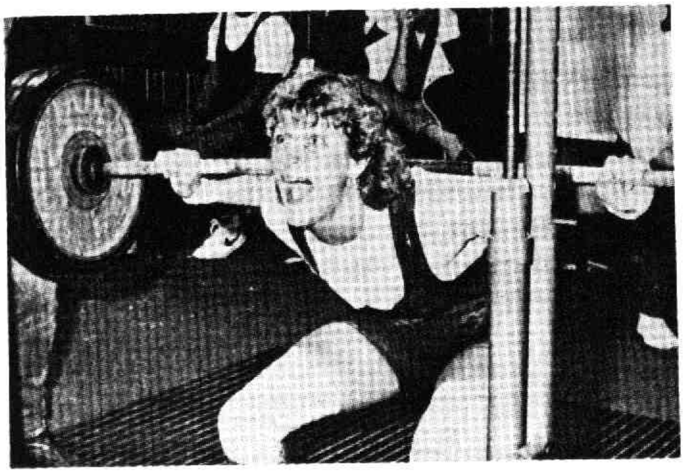
**Overzicht van de belangrijkste problemen van dit hoofdstuk:**

- De UITVOER van een bepaalde formule berekenen als de INVOER bekend is.
- De grafiek van een formule tekenen.
- De INVOER berekenen als de (gewenste) UITVOER bekend is. Dit komt neer op het oplossen van vergelijkingen. Dat kan op verschillende manieren:
  aflezen uit de grafiek
  proberen, controleren, verfijnen, weer proberen,...
  gebruik van algebra
- De oplossing van een ONGELIJKHEID in verband brengen met de oplossing van een VERGELIJKING.
- Afronding.
- De invloed van de INVOER op de UITVOER van een formule aangeven.
- Controleren of een formule het gewenste resultaat geeft.
- Een formule aanpassen aan gewijzigde omstandigheden.
- Een formule ontwerpen.
- Een formule 'kraken', dat wil zeggen het 'waarom' opsporen.

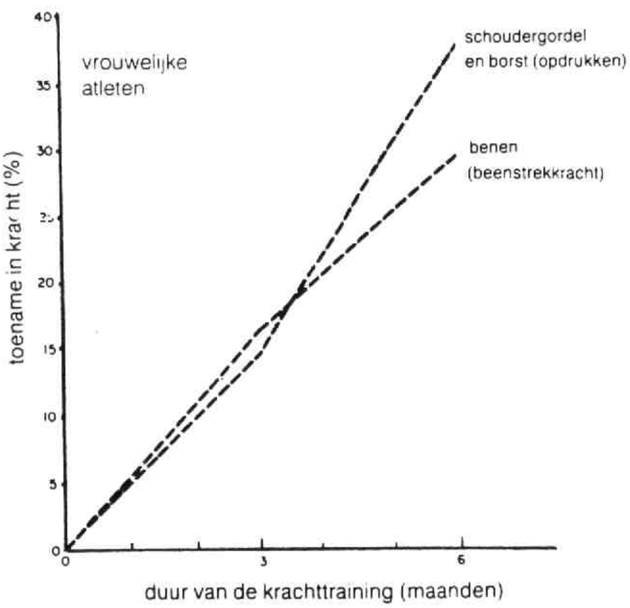
In het vervolg van dit boek worden deze zaken verder uitgediept.

# 2 Lineair bij stukjes en beetjes

## 1. *Sterke vrouwen*



De grafieken geven informatie over de invloed van krachttraining.




De toename in spierkracht bij vrouwelijke atletes. De atletes zijn veel sterker dan vrouwen die niet aan sport doen. Desondanks is de toename in kracht als gevolg van krachttraining aanzienlijk. (Naar: Brown).

>a Beide grafieken hebben een knik.
Wat is de betekenis van die knik?

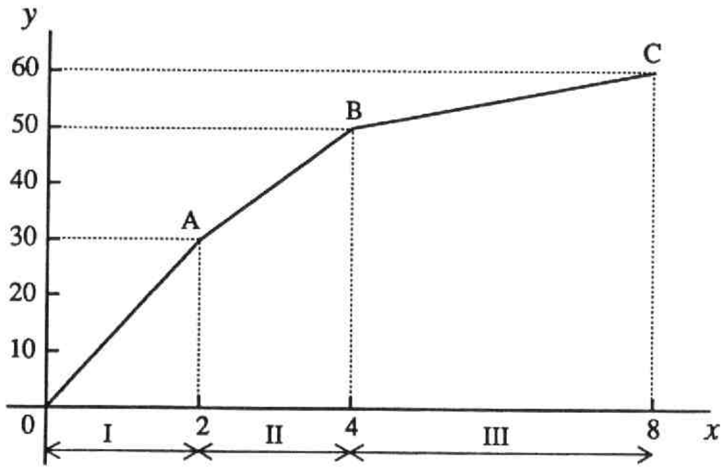
>b Vind je de rechte stukken in de grafiek realistisch?

>c Is het juist om te zeggen dat de toename van de kracht en de duur van de training volgens de grafieken evenredig zijn?
En als je de grafieken in gedeelten bekijkt?

Grafieken van deze vorm geven geen lineaire verbanden aan. Maar je kunt wel zeggen dat ze in etappes lineair zijn.
Om ook voor zulke grafieken formules te kunnen opstellen volgt nu een bijzondere opgave.

2. Deze opgave bevat een stuk leertekst. Die tekst moet je zorgvuldig bestuderen. Dat houdt in:
   (1) Bij elke zin nagaan of er iets beweerd wordt.
   (2) Beslissen of die bewering waar is.
   (Soms kun je dat doen door iets na te trekken of te kijken of die bewering een logisch gevolg is van iets dat al zeker is.)

   De tekst heeft betrekking op de volgende grafiek.




Er zijn drie etappes waarop de grafiek rechtlijnig is. Bij de overgang naar een volgende etappe verandert de steilheid. Er zijn dus drie waarden voor $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

In een tabel:

| I | II | III |
|---|---|---|
| $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 15$ | $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 10$ | $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2{,}5$ |

Het ligt voor de hand om elke etappe een eigen formule te geven.
Voor I is dat dan $y = 15x$
Voor II kun je wagen $y = 10x$.
Mis, want bij bijvoorbeeld $x = 3$ geeft dat $y = 30$, terwijl er volgens de grafiek $y = 40$ moet komen.
De fout is ook te zien door in de grafiek $y = 10x$ te tekenen.
Dan maar $y = 10x + \ldots\ldots$
Uit de coördinaten van $A$ volgt dan $y = 10x + 10$

Voor III: $y = 2{,}5x + \ldots\ldots$
Via $B$ of $C$ volgt dan $y = 2{,}5x + 40$.

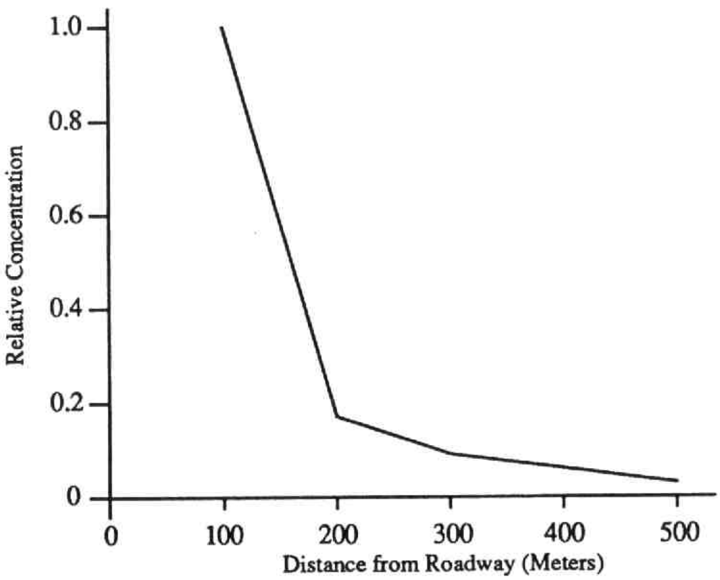
Een overzichtelijke manier van opschrijven is:

$$y = \begin{cases} 15x & \text{als} \quad 0 \le x \le 2 \\ 10x + 10 & \text{als} \quad 2 < x \le 4 \\ 2{,}5x + 40 & \text{als} \quad 4 < x \le 8 \end{cases}$$

Dit noemen we ook een functievorm.
De ≤ tekens kunnen ook anders geplaatst worden, als elke $x$-waarde maar aan de beurt komt.

3. > Bepaal de formules bij de grafieken voor de sterke vrouwen uit opgave 1.

4. *De concentratie van een milieuvervuilende stof*
Het autoverkeer produceert vervuilende stoffen. De waargenomen concentratie van zo'n stof in de lucht is ondermeer afhankelijk van de afstand van het meetpunt tot de weg, de windrichting en de windsnelheid. Er bestaan *rekenmodellen* die (met behulp van formules) de relatieve concentratie ($C$) uitdrukken in de afstand ($A$).
We proberen zo'n rekenmodel te ontwerpen. Om de 100 m zijn metingen verricht. De resultaten zijn op grafiekenpapier als punten getekend. Daardoor zal dan een gebogen grafiek moeten gaan. Met het oog op de eenvoud is de grafiek benaderd door die van een in etappes lineaire functie.



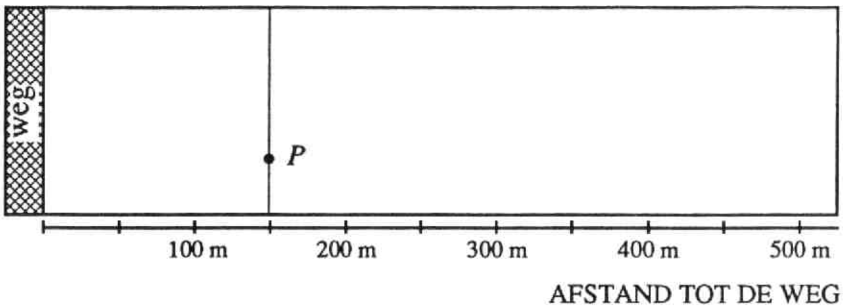

>a Op welk interval is de afwijking die door deze benadering is ontstaan het grootst en op welk het kleinst? Waarom?

De eerste meting is uitgevoerd op een afstand van 100 m. De concentratie is daar op 1 gesteld. Daarom staat er ook relatieve concentratie. Of dat wel of niet verstandig is, hangt af van welke vraag je met behulp van dit onderzoek wilt beantwoorden.

>b Bedenk voor beide mogelijkheden een praktische vraag.

>c Bepaal de formules voor het gebied van 100 m tot 500 m.

Dit is een kaartje van de weg met het gebied aan de oostkant




>d Bepaal uit de grafiek op de vorige bladzijde de relatieve concentratie in punt $P$.

Bij alle punten op de lijn door $P$ hoort dezelfde relatieve concentratie. Die lijn hoort dus bij die relatieve concentratie.

>e Teken op het kaartje de lijn die bij de relatieve concentratie 0,15 hoort.

>f Veronderstel dat je de lijnen getekend zou hebben die horen bij de relatieve concentraties van 1; 0,9; 0,8 tot en met 0,1. Wat voor beeld zou dan ontstaan?

>g Voor een andere weersgesteldheid is het rekenmodel:

$$C = \begin{cases} -0{,}007A + 1{,}7 & \text{voor} \quad 100 \leq A \leq 200 \\ -0{,}001A + 0{,}5 & \text{voor} \quad 200 < A \leq 300 \\ -0{,}0005A + 0{,}35 & \text{voor} \quad 300 < A \leq 500 \end{cases}$$

Hoe groot is $C$ op de afstand 275?

>h Op welke afstand is $C$ half zo groot als bij $A = 100$?

>i Op welke afstand is $C$ teruggelopen tot 0,18?

5. Een waterleidingtarief is als volgt opgebouwd:
   - $f$ 1,45 voor elke m$^3$ en een vastrecht van $f$ 75,00;
   - bij een verbruik van meer dan 500 m$^3$ is de prijs $f$ 1,20 voor elke m$^3$;
   - en bij meer dan 1000 m$^3$ is de prijs $f$ 0,95 voor elke m$^3$.

   Bij het passeren van de grenzen 500 en 1000 moet er geen prijsschok zijn. Dat is te voorkomen door geschikte vastrechtbedragen vast te stellen.

   > Bepaal die bedragen.

6. Dit is een gedeelte van een tabel waarbij lineaire interpolatie en extrapolatie verantwoord zijn.

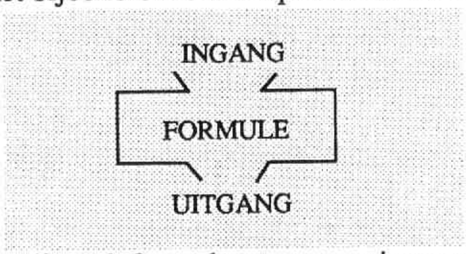
   >a Bepaal de waarden van $y$ die horen bij $x = 16$ en $x = 23$.

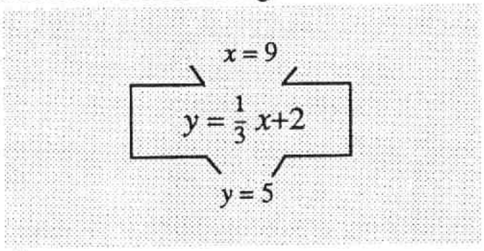
   >b Doe dat ook door eerst een formule te bepalen voor de rechtlijnige grafiek door (14,81) en (20,59).

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| . | . |
| . | . |
| . | . |
| 14 | 81 |
| 20 | 59 |

# 3 Formules met meer ingangen

Bij formules in functievorm zoals $VL = \frac{450}{0{,}01d + 6}$ of $y = \frac{1}{3}x+2$ kunnen we spreken van één ingang ($d$ en $x$) en één uitgang ($VL$ en $y$).
Het bijbehorende rekenproces kan met dit schema worden voorgesteld:

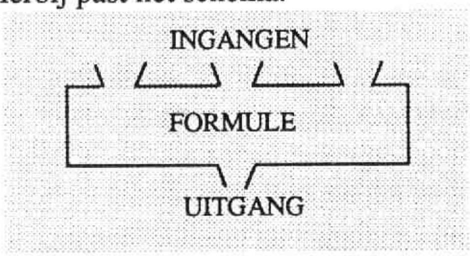


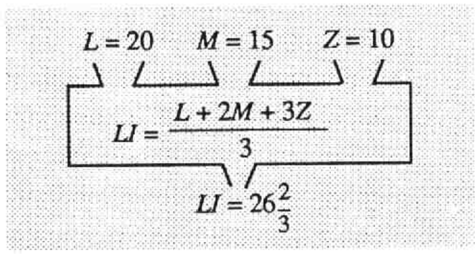




Er zijn ook formules met meer ingangen zoals:

$$LI = \frac{L + 2M + 3Z}{3}$$

$LI$ is de lakschurftindex en $L$, $M$ en $Z$ zijn percentages aardappelen met lichte, matige en zware aantasting (zie ook het boekje Tabellen, Grafieken, Formules 1)
Hierbij past het schema:




1. *Voetbalvelden.*
Om een voetbalveld bespeelbaar te houden kan het maar een beperkt aantal uren per jaar gebruikt worden. Vaak rekent men op zo'n 150 'slijtage-uren' per veld per jaar. Een logisch gevolg is dat het aantal teams dat gebruik kan maken van de velden van een sportcomplex ook niet te groot mag zijn.
Daarom zijn er rekenvoorschriften bedacht waarmee een club kan bepalen hoeveel velden er voor zijn teams nodig zijn.
Deze teams worden in drie groepen verdeeld:
I senioren- en junioren A-teams
II junioren B en C-teams
III pupillenteams
De groepen II en III hebben een kortere speelduur dan groep I. Die tellen dus minder zwaar.
De *formule* voor de berekening is: $s = \frac{a + \frac{2}{3}b + \frac{1}{3}c}{6}$

waarin: $s$ = benodigd aantal speelvelden
$a$ = aantal teams uit groep I
$b$ = aantal teams uit groep II
$c$ = aantal teams uit groep III

>a Hoe kun je aan de formule zien dat sommige teams minder zwaar tellen?

>b Bereken het benodigde aantal velden voor een club *A* met de samenstelling groep I: 7 teams; groep II: 9 teams; groep III: 5 teams.
Eveneens voor club *B* met de samenstelling I: 12; II: 14; III: 16.

>c *A* en *B* gaan fuseren. Hoeveel velden zijn er nu nodig?

>d De formule is een breuk, waarbij in de teller ook weer breuken staan. Verander de formule zo, dat de teller breukenvrij is. De resultaten moeten natuurlijk hetzelfde blijven.

>e Als er maar één veld beschikbaar is, welke combinaties van teams kunnen daar dan spelen?
Neem daarbij aan dat er van elk van de groepen I, II, III minstens één team is.

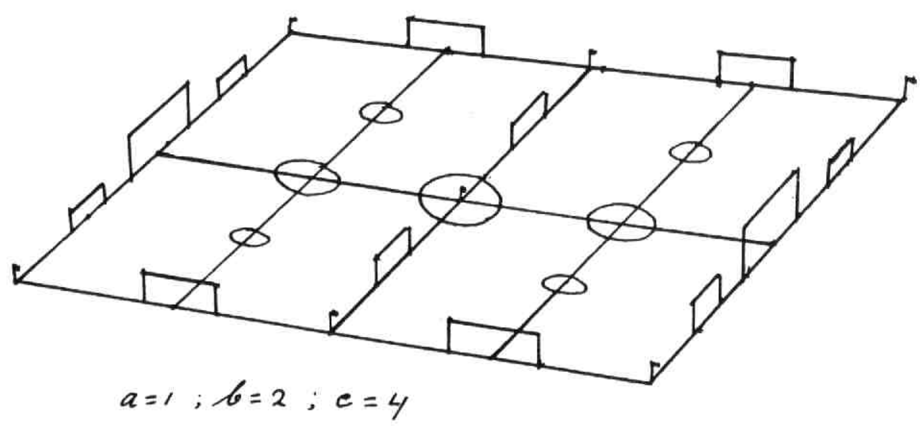
>f Bereken $s$ als $a = b = c = 6$. Ook als $a = b = c = 10$.
Als $a$, $b$ en $c$ gelijk zijn, dan kun je een veel eenvoudiger formule maken. Doe dat door voor $a$, $b$ en $c$ elk $n$ te nemen.

>g Door een andere manier van terreinonderhoud wordt de formule vervangen door:
$s = \frac{1}{10}a + \frac{1}{15}b + \frac{1}{30}c.$
Is dit voor de clubs (1) gunstiger, (2) ongunstiger of (3) soms gunstiger, soms ongunstiger? Je moet er van uitgaan dat het aantal velden niet zo gemakkelijk vergroot zal kunnen worden. Daarom is het voor de clubs gunstiger als ze extra teams op dezelfde velden kunnen laten spelen.

>h De uitkomsten van de berekeningen van $s$ met de nieuwe formule zijn rechtstreeks te vinden uit de antwoorden van de berekeningen met de oude formule. Voorwaarde is wel dat die antwoorden niet zijn afgerond.
Hoe moet dat en hoe is dat te verklaren?

>i Gebruik je kennis uit >h om de tabel in te vullen.
De gegeven getallen zijn niet afgerond.

| oude $s$ | nieuwe $s$ |
|---|---|
| 15 | .. |
| .. | 15 |




**een 'oplossing' van het veldenprobleem**

2. *Niets doen kost ook energie*
Het lichaam in rust gebruikt energie.
Deskundigen geven daarvoor de formules

$E = 66{,}5 + 13{,}8w + 5{,}0h - 6{,}8a$ (mannen)

$E = 66{,}5 + 9{,}6w + 4{,}8h - 4{,}7a$ (vrouwen)

$E$ = energie in kcal/24 uur
$w$ = lichaamsgewicht in kg
$h$ = lengte in cm
$a$ = leeftijd in jaren

>a Hoeveel energie heeft een rustende man per etmaal meer nodig dan een rustende vrouw, als je voor beiden uitgaat van $w = 55$, $h = 165$ en $a = 25$?

>b In een tabel wordt voor een man van 60 kg een $E$-waarde van 1630 kcal/24 uur opgegeven.
Kan dat in overeenstemming zijn met de formule?

3. *Op wat voor dag ben je geboren?*
Met deze formule kun je dat uitrekenen.

$$w = d + 2m + \left[\frac{3(m+1)}{5}\right] + y + \left[\frac{y}{4}\right] - \left[\frac{y}{100}\right] + \left[\frac{y}{400}\right] + 2$$

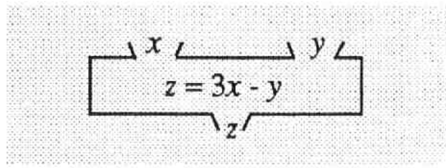
toelichting:

$d$ = dag van de maand
$m$ = nummer van de maand, waarbij januari = 13, februari = 14, maart = 3, april = 4, ... december=12
$y$ = geboortejaar
[....] is een nieuwe bewerking, het getal dat tussen haken staat moet je afkappen na de komma
bijvoorbeeld [6] = 6; *)
[6,2] = 6; [6,99] = 6

Door de rest van $w : 7$ te bepalen, krijg je het nummer van de dag;
eerste dag = zondag, tweede dag = maandag,......, nulde dag = zaterdag.
Om teleurstellingen te voorkomen zou je eerst eens kunnen uitrekenen wat voor dag het vandaag is.

*) In computertaal wordt vaak het symbool INT gebruikt. INT is de afkorting van het engelse woord integer = geheel getal.
Er geldt bijvoorbeeld: INT (6,2) = 6,
INT (6,99) = 6, enz.

# 4 Grafische voorstellingen van formules met twee ingangen




Er komt pas een getal uit als bij beide ingangen een getal is ingevoerd. Vergeleken met de formules met één ingang komt er een grote moeilijkheid bij: hoe houd je zicht op de resultaten van de formule nu een gewone tabel of grafiek niet zo voor de hand liggen?
Dat is het hoofdonderwerp van dit hoofdstuk.

1. *Risicoberekening*

Wanneer fietsers en auto's van dezelfde weg gebruik maken, dan lopen vooral de fietsers een groot risico.
In het vorige boekje kwam een berekening van dat risico *(r)* voor, op grond van de intensiteit van het fietsverkeer (f) en van het motorvoertuigenverkeer (m).
Hiervoor werd de formule met twee ingangen $r = f \times m$ gebruikt.
Omdat het hier alleen om de *principes* van de verschillende werkwijzen gaat, mogen de werkelijke cijfers wel vervangen worden door meer eenvoudige: 0, 1, 2, 3, enz.
Zomaar wat tweetallen *(f,m)* invullen en *r* berekenen geeft een geweldige getallenrij. Er is dus enige ordening nodig.
De ordening zou kunnen ontstaan door een dubbele tabel of matrix te gebruiken.

| f \ m | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 0 | 2 | 4 | 6 |
| 3 | 0 | 3 | 6 | 9 |

>a Deze 4 x 4 matrix is voor het vervolg te klein.
Maak daarom een 8 x 8 exemplaar.

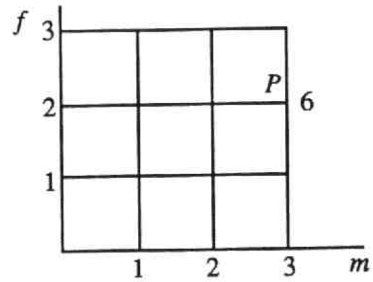
Zoals op een weerkaart punten met dezelfde luchtdruk door een kromme lijn worden verbonden, kun je in de matrix ook 'punten' verbinden die hetzelfde risicogetal dragen. Je moet daarbij wel eens tussen andere getallen door.

>b Teken in de matrix de kromme lijnen die horen bij de r-waarden 2, 4, 6, 8, 10, 12. Waar ligt de 0-lijn.

>c Noem enkele (al bekende) eigenschappen van de risicofunctie die je kunt aflezen.

>d Wat gebeurt er in de matrix als de risicofunctie vervangen wordt door $r = f^2 \times m$ en wat betekent dat voor de praktijk?

2. In de oorspronkelijke opgave zijn $f$ en $m$ ondergebracht in een coördinatenstelsel. Als je roosterpunten kiest is de samenhang met een matrix niet zo vergezocht.

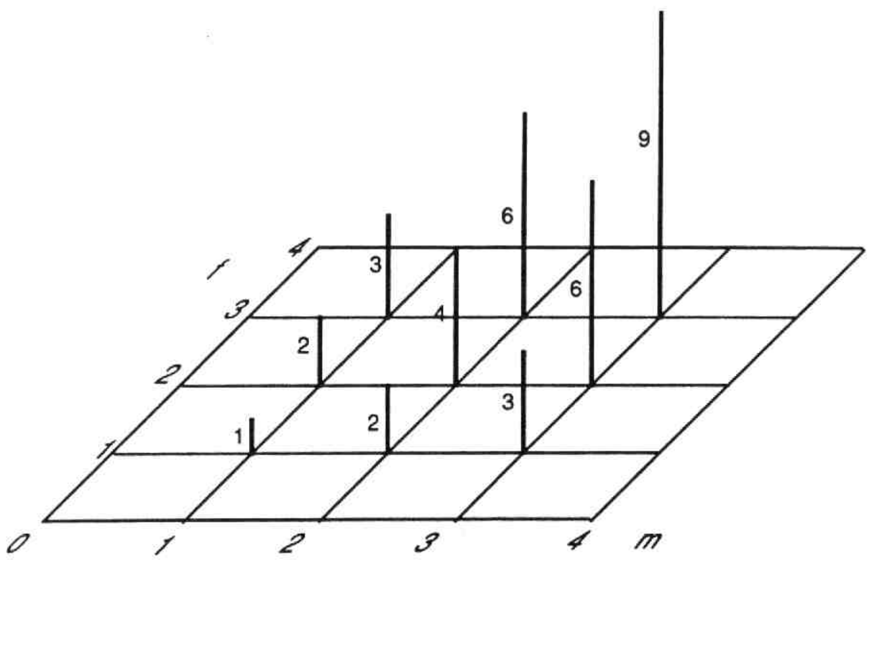



$P$ stelt het punt met $m = 3$ en $f = 2$ voor; $r$ heeft dan de waarde 6.
Door op de plaats van $P$ de waarde van $r$ in te vullen krijg je, als je dat ook bij de andere punten doet, een even duidelijk beeld als bij de matrix.

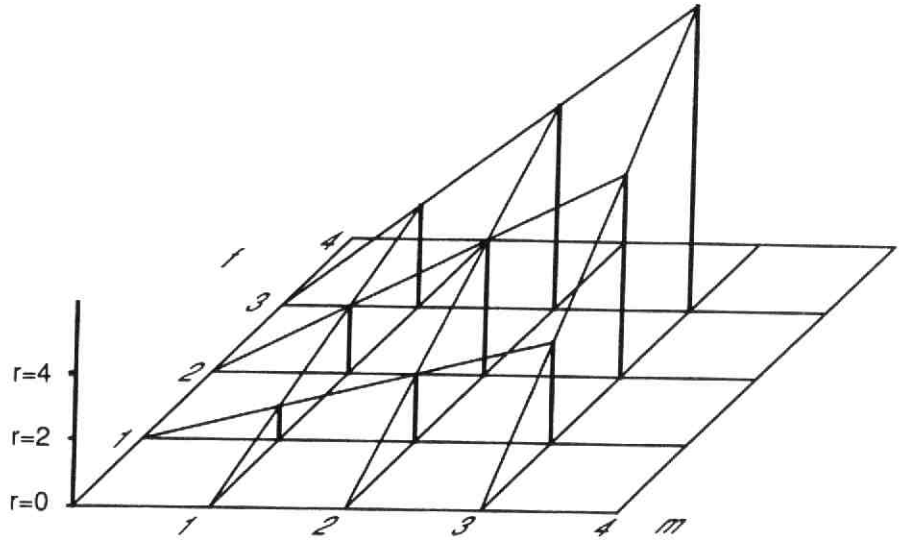
>a Teken de roosterpunten voor $0 \leq m \leq 4$ en $0 \leq f \leq 4$ en schrijf bij elk punt de waarde van $r$.

>b Teken de verbindingslijnen van punten met een gelijke $r$-waarde; houd daarbij ook rekening met waarden van $f$ en $m$ die tussen twee gehele getallen liggen.

Een *ruimtelijke* voorstelling kun je maken door op elk punt van het $f$, $m$-rooster een verticaal staafje te plaatsen, waarvan de lengte correspondeert met de bijbehorende waarde van $r$ (dat kan op een andere schaal dan $f$ en $m$).
Deze ruimtelijke situatie kan in een tekening worden weergegeven door het rooster scheef te tekenen.



Door de toppen te verbinden wordt de ruimtelijke indruk versterkt.




Door ook tussen de roosterpunten staafjes te plaatsen, vult zich langzamerhand een *ruimtelijke grafiek*, bestaande uit een plat of gebogen oppervlak.

Kies $f = 2$ en laat $m$ variëren. De toppen van de staafjes beschrijven dan een baan op de ruimtelijke grafiek. Zo te zien lijkt die baan rechtlijnig

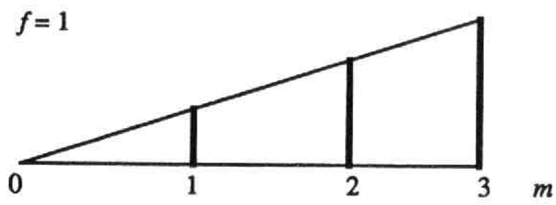
>c Toon met behulp van de formule aan: Voor vaste $m$ met variabele $f$ ontstaan rechte lijnen op de grafiek.

>d Ontstaan er ook rechte lijnen voor vaste $f$ met variabele $m$?

>e Is de ruimtelijke grafiek een plat vlak?

>f Je kunt ook punten met dezelfde hoogte verbinden.
Hoe kun je hieruit de verbindingslijnen genoemd in >b verkrijgen?

De tekening met de verbindingslijntjes voor vaste $f$ en ook voor vaste $m$ wijzen op een andere praktische uitvoering van de grafiek.
Bij $f = 1$ is deze verticale figuur te zien.



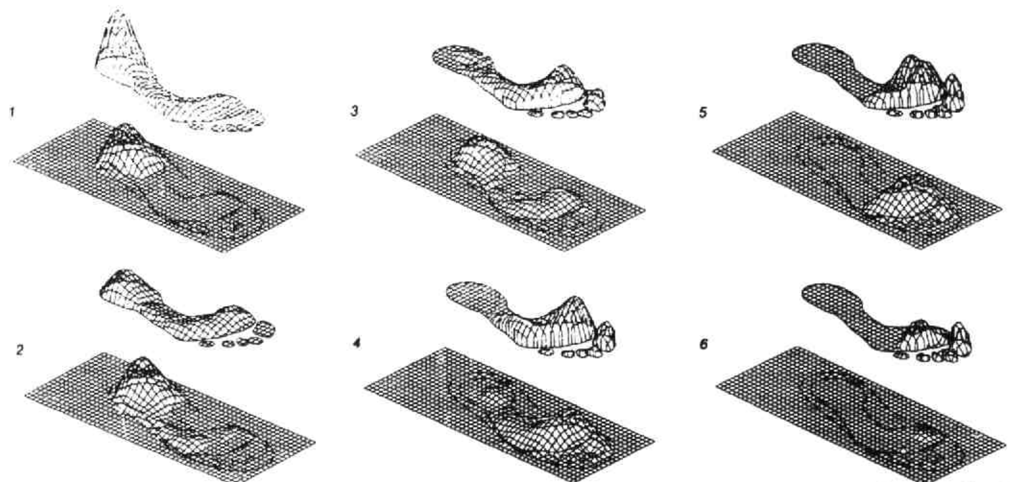

Als $f = 1$, dan $r = m$.
Vergelijkbare figuren zijn er voor $f = 2, f = 3, m = 2, m = 3$.

>g Welke formules horen hierbij?

Door deze figuren van karton te maken kan de grafiek gemonteerd worden.

Met de computer kunnen vrij gemakkelijk ruimtelijke grafieken worden getekend, zoals de volgende opgave laat zien.

3. *Voetdruk*




De druk die bij het blootsvoets lopen op een oppervlak wordt uitgeoefend is vertikaal uitgezet.

>a Verklaar deze serie grafieken.

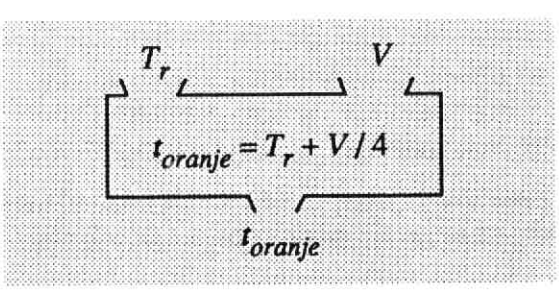
>b Wat zal het 'nut' van zulke grafieken kunnen zijn?

4. *Hoe lang moet het verkeerslicht op oranje staan voor een automobilist?*
Bij het vaststellen van de tijd dat het verkeerslicht op oranje moet staan, de zogenaamde oranjetijd, moet rekening worden gehouden met de tijd die iemand nodig heeft om een beslissing te nemen: doorrijden (liever niet versnellen) of stoppen. Dit noemen we de *reactietijd* $T_r$. Als het resultaat van de overpeinzing 'stoppen' is, dan duurt het nog even voor het voertuig stilstaat. De tijd die daarvoor nodig is noemen we de *stoptijd*. Die hangt natuurlijk samen met de *snelheid* $V$ waarmee men nadert.
In de praktijk kan men van verschillende formules voor de tijd dat een stoplicht oranje is gebruik maken. De tijd dat een stoplicht oranje is noemen we $t_{oranje}$.
Dit is één zo'n formule:

$$\boxed{t_{oranje} = T_r + V/4}$$

$t$ en $T_r$ in sec.
$V$ in $m/s$

De vorm is:



Bij $T_r = 1{,}5$ en $V = 20$ ontstaat:

$T_r = 1{,}5$ $\qquad$ $V = 20$

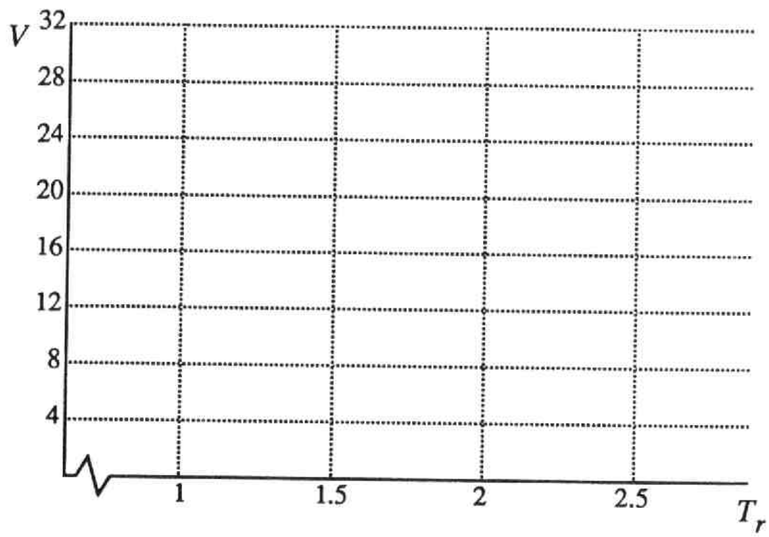
$$\boxed{t_{oranje} = T_r + V / 4}$$

$t_{oranje} = 6{,}5$

>a Bereken $t_{oranje}$ voor de reactietijd van 1 sec. en de naderingssnelheid van 50 *km/uur*. Let op de andere eenheid van snelheid.

>b Dezelfde opdracht voor een naderingssnelheid van 70 *km/uur*.

>c Noteer bij de snijpunten van de roosterlijnen de waarden $t_{oranje}$. Teken de verbindingslijnen van punten met dezelfde $t_{oranje}$ -waarde. Beperk je tot gehele waarden voor $t_{oranje}$.
Kies vervolgens de lijn die hoort bij $t_{oranje} = 4$.

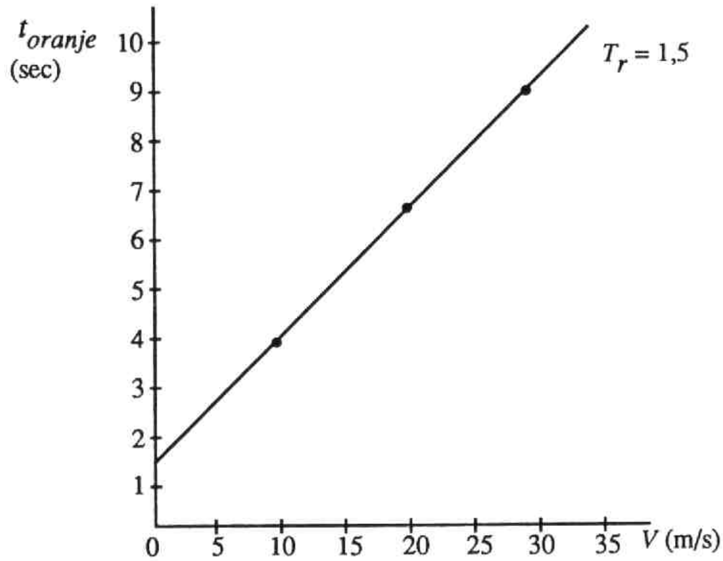



>d Welke formule voor $V$ en $T_r$ hoort bij de grafiek?
Hoe had je uit de formule $t_{oranje} = T_r + V/4$ direct de formule voor deze lijn kunnen vinden?

>e We nemen aan dat de reactietijd kan variëren van 1 tot 2 sec. en dat de naderingssnelheid tussen 50 *km/uur* en 100 *km/uur* ligt.
Teken in de vorige figuur het gebied dat hierbij hoort.
Op welke tijdsduur moet de oranjetijd minstens worden ingesteld?

>f 'Als iemand wat traag reageert, dan kan hij maar beter niet te snel rijden'.
Is dit voordehand liggende advies ook uit de tekening te lezen?

We gaan de formule nog eens anders aanpakken. We vullen maar één waarde in, bijvoorbeeld $T_r = 1{,}5$.
Ergens in het berekeningsschema ontstaat dan $t_{oranje} = 1{,}5 + V/4$ .
Dat is een lineair verband.
Hierin kan elke gewenste $V$-waarde alsnog worden ingevuld. In plaats daarvan tekenen we een grafiek.




>g Teken in dezelfde figuur de grafieken die horen bij $T_r = 1$, $T_r = 2$ en $T_r = 2{,}5$.
Is het probleem uit vraag >e met deze tekening ook op te lossen?

>h Er is nog een systeem van grafieken mogelijk.
Hoe zou je dat kunnen maken?

Het is ook mogelijk voor de formule $t_{oranje} = T_r + V/4$ een ruimtelijke grafiek te tekenen. Voor $T_r$ vast of $V$ vast ontstaan er weer rechte lijnen. In opgave 2 is gebleken dat dit geen garantie is voor een plat vlak als grafiek.

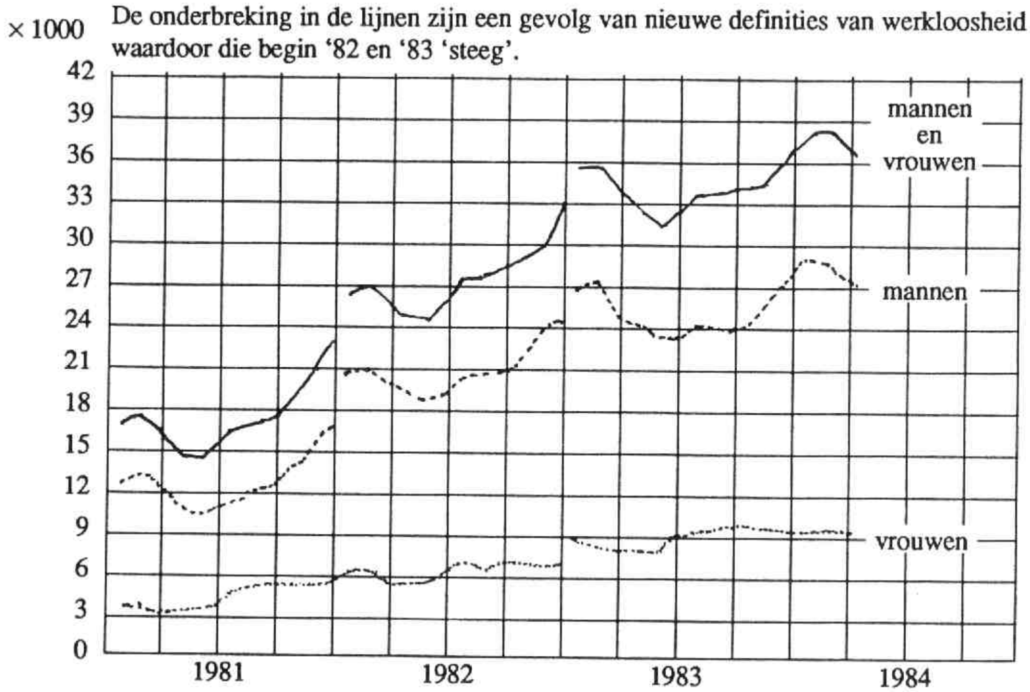
>i Bedenk een test om hiervoor op z'n minst enige zekerheid te krijgen.

conclusie

Door in een formule met twee ingangen één invoerwaarde vast te zetten, ontstaat een formule met één ingang.
Dat gebeurt eigenlijk ook door de uitvoerwaarde vast te zetten. Alleen staat de formule dan nog in 'relatievorm'. (..... $x$ ..... $y$ ..... = getal)
Door deze overgangen kunnen problemen teruggebracht worden tot vragen over *bundels grafieken.*
Een overzicht van de uitkomsten van een formule met twee ingangen kan gegeven worden door een ruimtelijke grafiek.

## 5 Combinaties van grafieken

1. *Oudere werkloosheidscijfers van Friesland*




>a Welke invloed hebben de seizoenen op de totale werkloosheid?

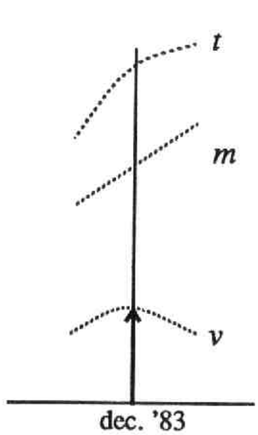
>b Zij de nieuwe definities van werkloosheid 'strenger' of 'zwakker'?

>c Volgens de grafiek is de werkloosheid van mannen in de periode juni '81 tot september '83 met zo'n 10.000 toegenomen. Iemand vindt dat maar een getallentruc met behulp van de nieuwe definities. Hij komt op een toename van ongeveer 5000.
Bedenk, indien mogelijk, veronderstellingen die zijn berekeningen correct maken.

De grafieken zijn afkomstig van een tabel van deze vorm:

| tijdstip | mannen | vrouwen | totaal |
|---|---|---|---|
| mrt. '83 | 25.500 | 8.300 | 33.800 |
| juni '83 | 23.400 | 9.000 | 32.400 |
| ... | ... | ... | ... |

Hierbij is de kolom totaal ($t$) eenvoudig de som van de kolommen mannen ($m$) en vrouwen ($v$).
Kortweg $t = m + v$
Hiermee komt overeen een 'optelling van grafieken'.
We nemen als voorbeeld december 1983.

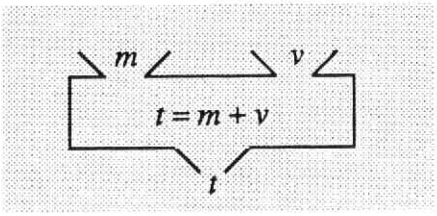


>d Waar is de lengte van het met een pijl aangegeven lijnstuk nog een keer te vinden?

>e Gegeven zijn de grafieken van $t$ en $v$. Hoe kun je zonder tabellen de grafiek van $m$ terugvinden?

>f Waardoor lijken de grafieken van $m$ en $t$ zo sterk op elkaar?

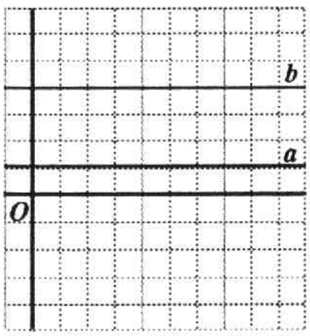
In een schema krijgen we



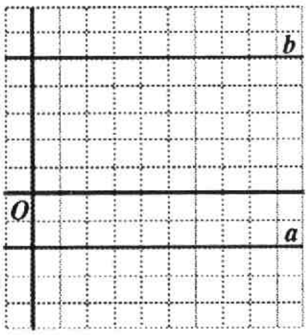

Je kunt dit nu op meer manieren opvatten door voor de invoer en uitvoer tabellen of grafieken te nemen. Als het allemaal grafieken zijn dan heet de grafiek van $t$ de som van de grafiek van $m$ en de grafiek van $v$.
Je kunt ook zeggen dat de grafieken worden opgeteld.

2. Voor het optellen van grafieken volgt hier een serie oefeningen.
De grafieken $a$ en $b$ zijn gegeven. Gevraagd wordt de grafiek van $t$ te tekenen, waarbij $t = a + b$.

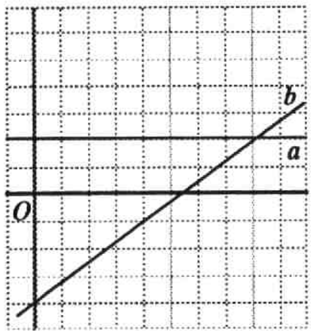
>a



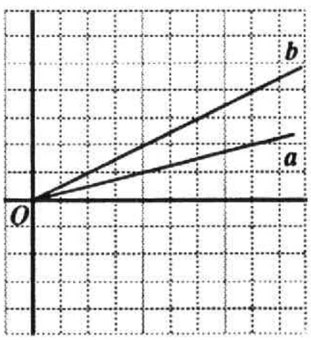

>b



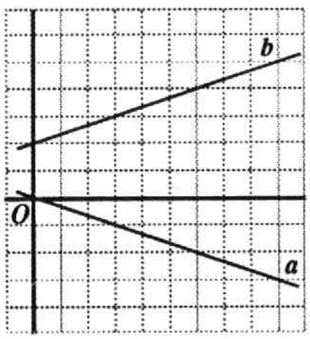

>c



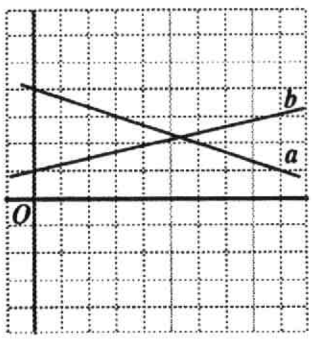

>d




>e



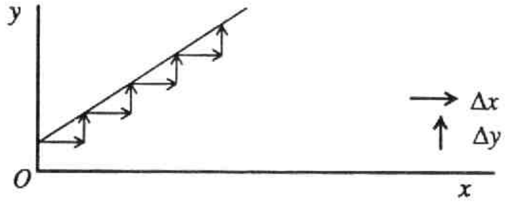

>f



3. Uit de tekeningen blijkt dat de som van rechtlijnige grafieken weer een rechtlijnige grafiek oplevert.

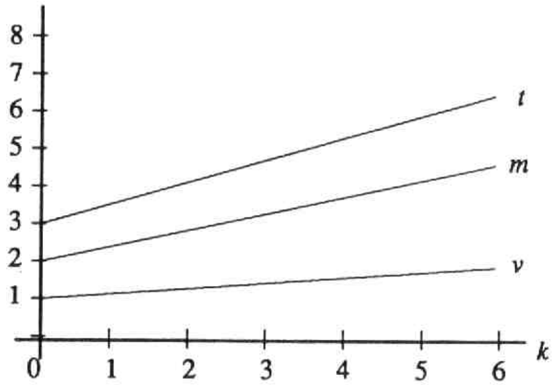
   > Probeer dat te verklaren met onderstaande theorie.

   Het *kenmerk* van een rechtlijnige grafiek is dat bij even grote waarden van $\Delta x$ ook onderling gelijke waarden van $\Delta y$ behoren.




   Anders gezegd: gelijke stappen naar rechts geven gelijke stappen omhoog of naar beneden of ...............

4. $t$, $m$ en $v$ stellen de werkloosheidscijfers voor van *totaal*, *mannen* en *vrouwen*. We nemen aan dat die cijfers in de loop van de tijd volgens de grafieken veranderen: $k$ is het aantal kwartalen na het begin van deze registratie.
   Voor de grafieken geldt natuurlijk weer: $t = m + v$.



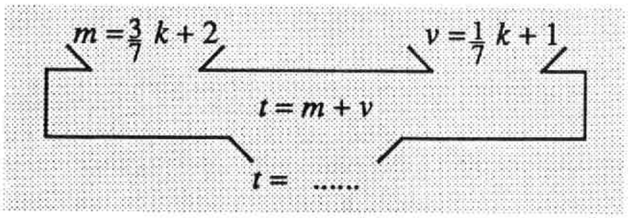

   >a Welk bijschrift zou er bij de vertikale as kunnen staan?

   Voor $m$ en $v$ zijn deze formules te geven:

$$m = \tfrac{3}{7}\,k + 2 \quad \text{en} \quad v = \tfrac{1}{7}\,k + 1$$

   >b Bepaal de formule voor $t$ op twee manieren:
   - eerst door uit te gaan van de grafieken.
   - daarna door uit te gaan van de formules.

   Formules kun je blijkbaar, evenals tabellen en grafieken, optellen.
   In een schema:



5. *Hoe maak je je geld op*

Iemand verdient *f*1200,- per maand. Daarvan houdt hij *f*50,- over. Hij maakt promotie en krijgt dan een salaris van *f*1400,-. Hij kan dan per maand *f*250,- sparen. Maar dat doet hij niet, omdat hij minder sober wil gaan leven. Hij geeft nu *f*1300,- per maand uit in plaats van *f*1150,-

Dit verhaaltje illustreert dat het geld dat men op maakt (de *consumptie C)* afhankelijk kan zijn van het *inkomen* (*Y*). Een formule voor die afhankelijkheid zou kunnen zijn:

$C = 0{,}4\,Y + 3$, waarbij $C$ en $Y$ in eenheden van *f*100,- worden uitgedrukt.

>a Teken een grafiek voor deze formule met $0 \le Y \le 20$.

>b Zou hij alles opmaken, dan zou gelden $C = Y$.
Teken de grafiek hiervan ook in de vorige figuur. (Die lijn heet de lijn van volledige besteding)

>c $S$ is de grootte van het gespaarde bedrag in eenheden van *f*100,-.
Teken in dezelfde figuur ook hiervan de grafiek en stel een formule op die $S$ uitdrukt in $Y$.

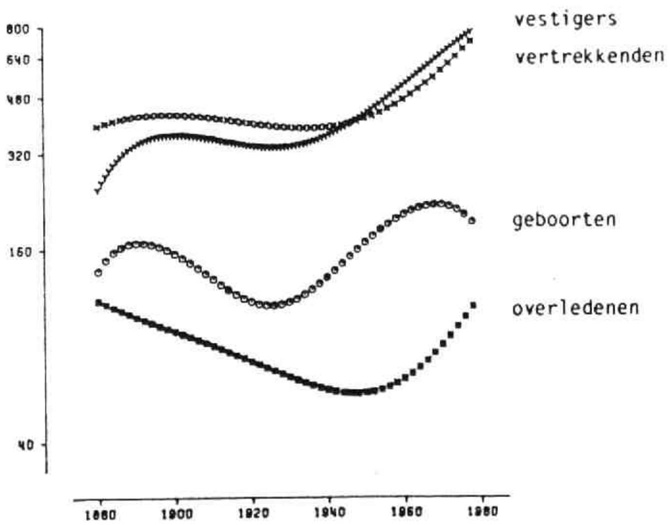
>d Bij welke inkomens wordt er gespaard?

>e Kun je een betekenis geven aan de negatieve waarden van $S$?

>f Bereken bij welk inkomen het halve salaris wordt gespaard.

6. *Verandering van het aantal inwoners van Dokkum*

De vier grafieken geven we als namen de afkortingen *VES, VER, GEB* en *OVE*. Als je een jaar kiest dan kun je de veranderingen in het afgelopen jaar aflezen. Let op de ongewone schaalverdeling. De netto toename van de bevolking noemen we *TOE*.




>a Geef een formule voor het verband tussen *TOE, VES, VER, GEB* en *OVE*.

>b Waarom kunnen de grafieken hier niet zomaar worden opgeteld?

We bedenken nu zelf een voorspellingsmodel voor een denkbeeldige plaats
$VES = 150t + 500$
$VER = 250t + 100$
$GEB = 120t + 150$
$OVE = \ \ 80t + 30$

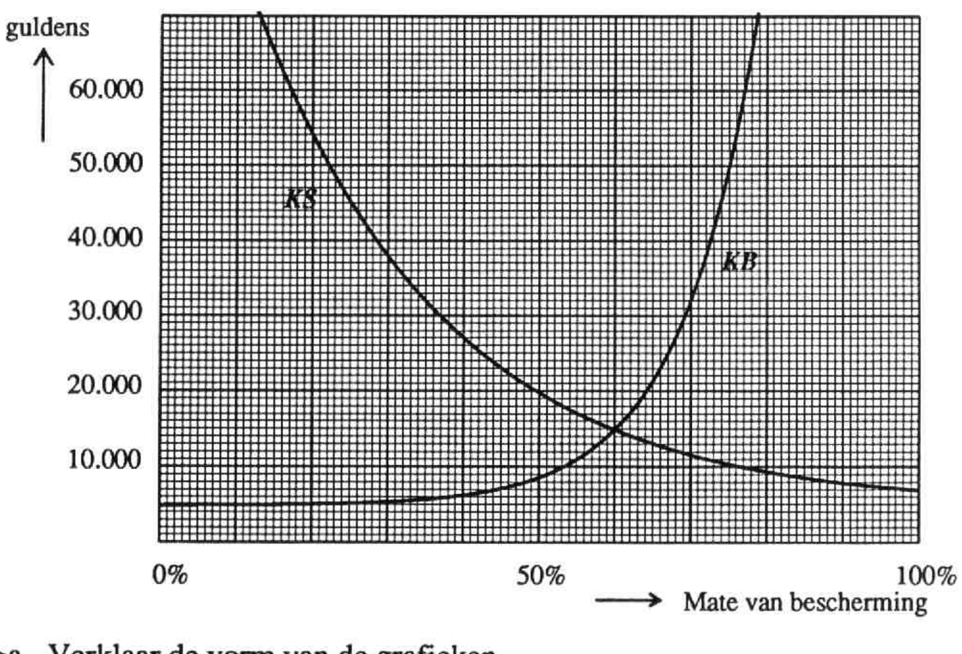
$t$ is het aantal jaren na 1989.

>c In welk jaar houden de vestigers en de vertrekkenden elkaar in evenwicht?

>d Bepaal een formule die $TOE$ uitdrukt in $t$.

>e In welk jaar is er geen bevolkingstoename meer?

7. *Bescherming van gegevens*
Ondernemingen en overheidsinstellingen moeten tegenwoordig hun gegevens beschermen. Als de mate van bescherming alleen afhankelijk is van economische factoren dan zijn er twee oorzaken van kosten:
$KS$: kosten ten gevolge van Schade
$KB$: kosten ten gevolge van Bescherming
Hiervan zijn de grafieken getekend.



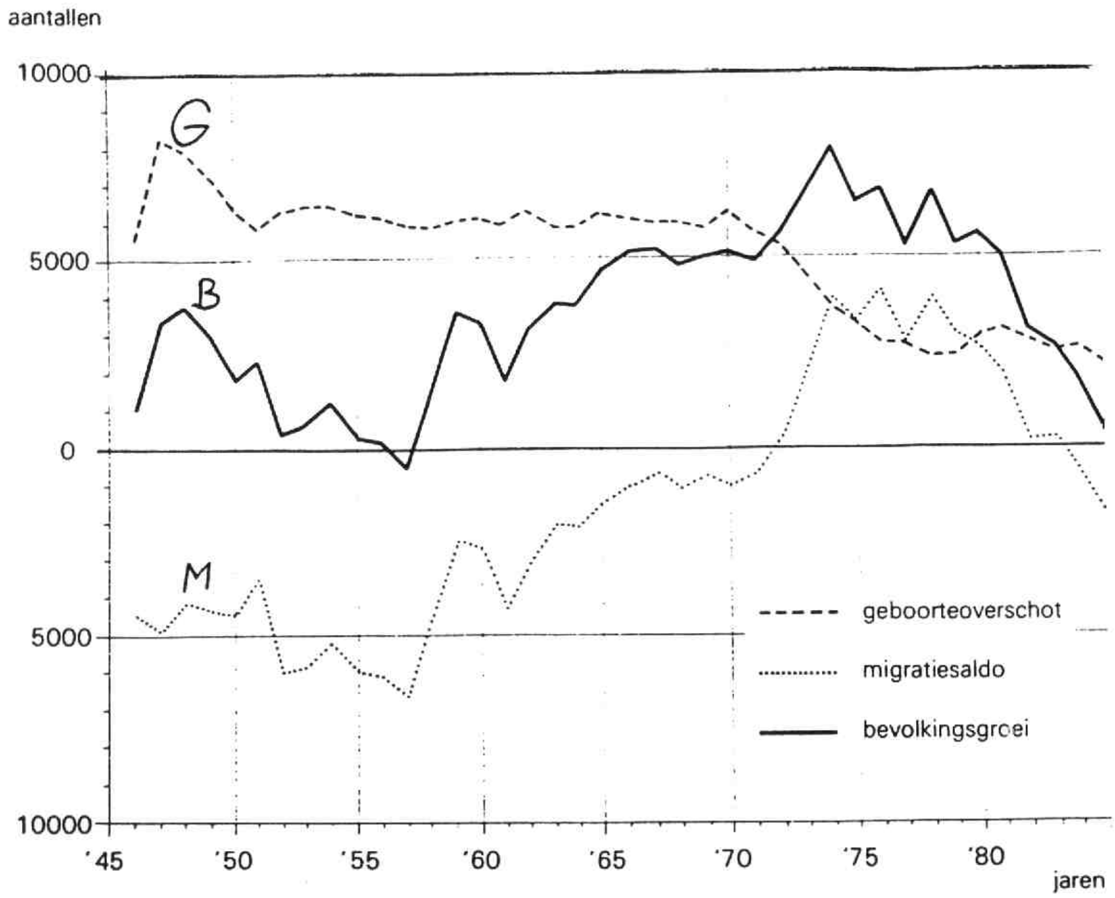

>a Verklaar de vorm van de grafieken.

>b Teken de grafiek van de totale kosten ($TK$) en bepaal hiermee welke mate van bescherming het goedkoopst is.

>c Dat minimum treedt niet op boven het snijpunt van de grafieken van $KS$ en $KB$.
Ontwerp redelijke grafieken voor $KS$ en $KB$ waarbij dat wél het geval is.

>d Het ideaal is 100% bescherming. Welke invloed heeft de extrapolatie (in de richting van 100%) op de totale kosten?

8. *Bevolkingsgroei*




>a Hoe is de grafiek *B* uit de grafieken *G* en *M* ontstaan?

>b De snijpunten van *G* en *B* horen bij een bijzonderheid van *M*. Welke bijzonderheid is dat? Verklaar dat?

>c Wat zeggen de snijpunten van *B* met de nullijn over het geboorteoverschot en het migratiesaldo?

>d Wat zeggen de snijpunten van *G* en *M* over de bevolkingsgroei?

>e In de jaren '55 tot '65 lijkt *B* bijna het resultaat van een verticale verschuiving van *M*. Verklaar dat.

# 6 Machtsfuncties met natuurlijke getallen als exponent

De lineaire verbanden hebben als kenmerk dat de mate van stijging of daling overal gelijk is. Dat resulteert in rechtlijnige grafieken.
Voor verbanden met een ander verloop, zoals bijvoorbeeld steeds sterker wordende stijging, zijn andere formules nodig. Voorbeelden van zulke formules vormen het onderwerp van dit hoofdstuk.

We beginnen met enkele opgaven die weliswaar niet van groot praktisch belang zijn, maar wel gebruikt kunnen worden om belangrijke ideeën te illustreren.

1. Op de foto is de rand van het vierkant linksboven met stappen van 1 vergroot. (We laten in het midden welke maat er gebruikt is.)


**Doelpunt !**

>a Maak deze tabel voor de serie foto's af.

| lengte rand van de foto (r) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| oppervlakte van de foto (O) | | | | | | |

.>b In plaats van stapsgewijs, kan het vergroten ook geleidelijk gaan. Teken daarvoor een grafiek van $O$ als functie van $r$.

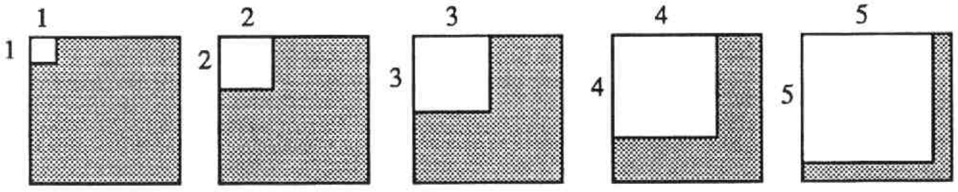
>c Teken in de grote foto de winkelhaakbegrenzing van de foto met oppervlakte 21 (rechtstreeks berekenen is hier veel nauwkeuriger dan aflezen).

>d Welke formule drukt $O$ uit in $r$?

>e Teken het toenamendiagram voor stappen van 1. Hoe zijn de waarden van die toenamen rechtstreeks uit de foto af te lezen?

>f Teken het toenamendiagram van het toenamendiagram.

>g Door van de grote foto stukjes af te knippen langs de ingetekende randen, ontstaat er een serie L-vormige figuren.



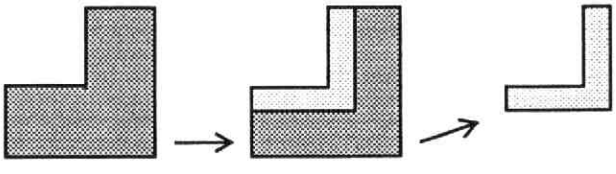

De oppervlakte van zo'n reststuk noemen we $OR$. Welke formule geeft het verband tussen $OR$ en $r$?

>h Van $OR$ kan een op zichzelfstaande grafiek getekend worden. Maar het kan ook gemakkelijk met behulp van de grafiek van $O$. Doe het op de laatste manier. Vul de grafiek aan voor de situatie van geleidelijke verandering.

>i Welk verband bestaat er tussen de toenamendiagrammen van $OR$ en $O$ en teken die van $OR$ in de figuur van vraag >e.

>j Bedenk zelf een wijziging van het fotovoorbeeld waarbij een formule van de vorm $O = \text{constante} \cdot r^2$ past.

>k Neem twee opvolgende figuren uit de serie van vraag >g. De ene kan ontstaan uit de andere door er een L-vormig stukje af te knippen.



Zo kan er een rij van letters $L$ ontstaan die overal dezelfde 'dikte' hebben. Van klein naar groot krijgen de rangnummers 1, 2, 3, ...
Is van een willekeurig exemplaar door meting het rangnummer terug te vinden?
Bedenk een formule die de oppervlakte van die letters uitdrukt in hun rangnummers.

2. In de grote foto is eerst een kleinere van 5 bij 8 afgetekend. Daarna is die uitgebreid met stroken van breedte $x$.


>a Welke formule geeft het verband tussen de oppervlakte van de foto en de waarde van $x$? Noem ook het geldigheidsgebied van de formule.

>b Teken de grafiek van deze formule. Kun je aan een uitbreiding van de grafiek voor negatieve waarden van $x$ een praktische betekenis geven?

>c Lees uit de grafiek de waarde van $x$ af die hoort bij een oppervlakte van 49,5.
Controleer door invulling in de formule of je antwoord nauwkeurig genoeg is om de foto te kunnen aftekenen ($x$ berekenen met de zogenaamde *abc*-formule mag ook).

>d Bij welke waarde van $x$ is de oppervlakte 70?

Als van een verschijnsel een formule bekend is, kan het toenamendiagram het gemakkelijkst worden bepaald via een *verschillentabel* met de kolommen $x$, $y$ en $\Delta y$. In deze opgave krijgen we dan, als we de beperking voor $x$ laten vallen, bijvoorbeeld:
Verschillentabel voor $\Delta x = 1$

| $x$ | O | ΔO | ?? |
|---|---|---|---|
| 0 | 40 | | |
| | | 20 | |
| 1 | 60 | | 4 |
| | | 24 | |
| 2 | 84 | | |
| 3 | .. | .. | .. |

De ??-kolom hoort niet bij de verschillentabel, maar is straks nodig voor een vervolgvraag.

>e Maak de verschillentabel af.

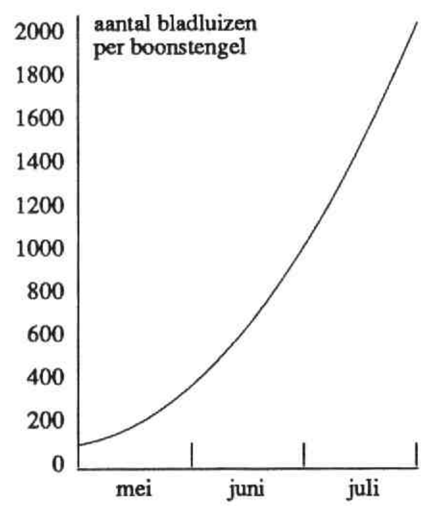
>f Vul de verschillentabel aan met de kolom ??
Wat stelt deze kolom voor?

Dit waren enkele voorbeelden van formules van de bekende kwadratische functies. Enkele belangrijke eigenschappen zijn:

- Er treedt een veranderlijke stijging of daling op.
- De waarden in het toenamendiagram vormen een lineair verband. De verschiltabel eindigt in twee stappen op gelijke getallen. Dit blijft waar bij een andere stapgrootte en bij andere kwadratische functies.

Deze tweede eigenschap kan van pas komen bij het testen of er sprake is van een kwadratische (of tweedegraads) functie. Verder kunnen er uitkomsten mee worden berekend.

3\.




Een onderzoeker vindt dit grafiekje. Hij weet niet hoe nauwkeurig de tellingen zijn uitgevoerd, maar hij heeft het sterke vermoeden dat er een kwadratisch verband bestaat tussen aantal en tijd. Hij gaat in het laboratorium daarom proeven met bonenplanten nemen. Met gelijke tijdsafstanden worden de bladluizen geteld.

Dit is het resultaat van zo'n experiment.

| start 0 | na 1 periode | na 2 per. | na 3 per. | na 4 per. | na 5 per. |
|---|---|---|---|---|---|
| 100 | 170 | 280 | 430 | 615 | 850 |

>a Toon aan dat de veronderstelling van het kwadratische verband niet onredelijk is.

>b Welk waarnemingsgetal past niet in je antwoord. Welk getal zou het moeten zijn? Pleit dit tegen je antwoord?

>c Welke aantallen verwacht je aan het eind van de 6$^e$, 7$^e$ en 8$^e$ periode als het systeem mooi blijft en de afwijking genoemd in vraag >b toevallig was en dus gecorrigeerd mag worden?

4. *Windenergie*

De windsnelheid ($V$) heeft een zeer grote invloed op het vermogen ($P$) van een windmolen voor het opwekken van elektriciteit.
Dat blijkt wel uit deze voorbeeldformule:

$$P = 2\,V^3$$

($P$ in watt, $V$ in m/s).
De factor 2 is kenmerkend voor de bewuste molen.

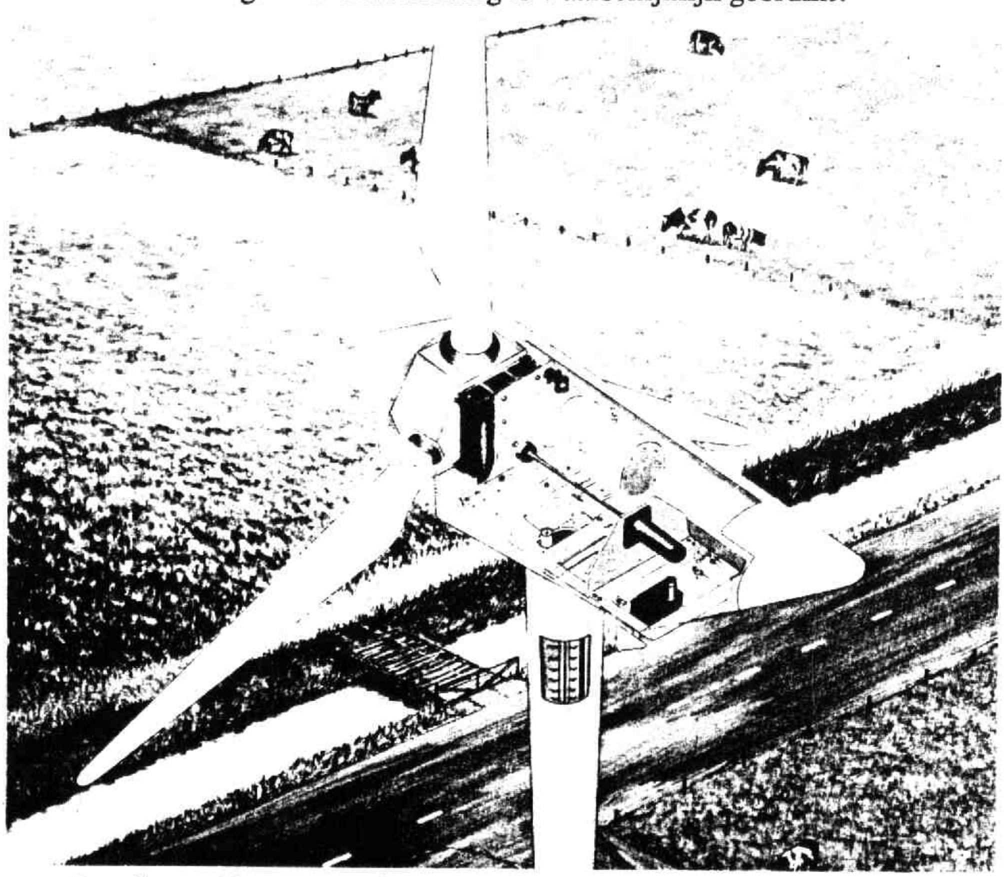
>a Teken de grafiek die bij deze formule hoort voor $0 \leq V \leq 7$.

>b Gebruik de grafiek om de windsnelheid te bepalen die hoort bij een vermogen van 250 watt. Idem voor 300 watt.

>c Bepaal die antwoorden ook met de rekenmachine.
Voorbeeld: uit $x^3 = 19$ is $x$ als volgt te vinden:
19 INV $y^x$ 3 = ... *)

>d Wat gebeurt er met het vermogen als de windsnelheid verdubbeld is?

>e 'Omdat $P = 2\,V^3$ kun je het vermogen vergroten door de molen op een hogere mast te monteren.'
Deze redenering is onvolledig.
Welke verzwegen veronderstelling is waarschijnlijk gebruikt?



*) Op sommige rekenmachines staan andere opschriften bij de bedoelde knoppen (Bijvoorbeeld: $x^y$ in plaats van $y^x$)

5. *Schaalproblemen*
Het temperatuurevenwicht van een dier is een kwestie van het op elkaar afstemmen van de warmteproduktie en de warmteafvoer. Het eerste heeft te maken met de 'inhoud', het tweede met de 'oppervlakte' van het dier.
Als we twee dieren van dezelfde vorm hebben waarbij de lengte van het ene dier tweemaal zo groot is als de lengte van het andere dier, dan vind je diezelfde vergrotingsfactor niet voor de oppervlakte en de inhoud.
We gaan dit probleem bestuderen in een vereenvoudigd model.
We doen net of het dier de vorm heeft van een kubus met een ribbe van $x$ cm.

>a Welke formule geeft het verband tussen de oppervlakte $O$ en de ribbe $x$? En welke geeft het verband tussen de inhoud $I$ en de ribbe $x$?

>b Als de ribbe 2 maal zo groot wordt, wat gebeurt er dan met de oppervlakte en de inhoud?

>c Teken de grafiek van de inhoudsformule voor $0 \leq x \leq 5$.

>d Veranderingen van lengte, oppervlakte en inhoud (volume) gaan dus niet gelijk op. Veronderstel dat bij een zeker dier het warmte-evenwicht volledig bepaald wordt door zijn oppervlakte en volume.
Neem een tweede dier van dezelfde vorm, maar met vijfmaal zo grote lengte-afmetingen. Welke problemen met het warmte-evenwicht kunnen er bij dit grotere dier ontstaan?

>e Een kubus is gemaakt van materiaal dat bij een inhoud van 1 $cm^3$ een gewicht heeft van 0,7 gram.
Stel een formule op voor het gewicht als functie van $x$ en teken in de vorige figuur de grafiek.

>f Een andere serie kubussen is van veel zwaarder materiaal gemaakt. Bij een inhoud van 8 $cm^3$ is het gewicht 50 gram.
Wat wordt nu de formule voor het gewicht als functie van $x$?

>g Bij het 'vertalen' van ervaringen met schaalmodellen naar de werkelijkheid is voorzichtigheid geboden! Bedenk zelf een paar voorbeelden..

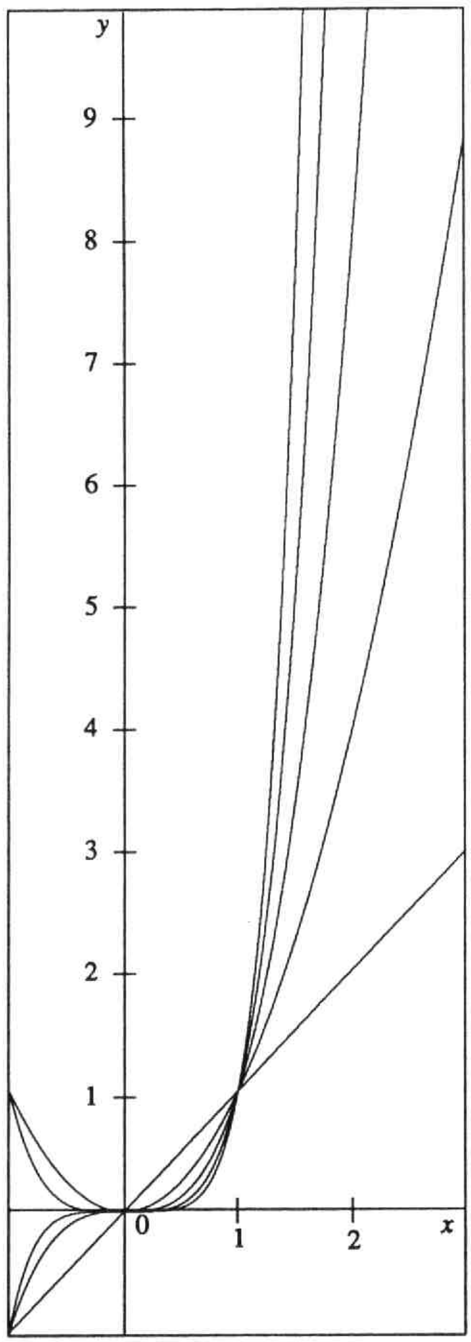
6. $y = x^2$ en $y = x^3$ zijn voorbeelden van eenvoudige machtsfuncties. Ze maken deel uit van de groep $y = x^n$. Dat is te zien door voor $n$ respectievelijk 2 en 3 in te vullen.
In de tekening op de volgende bladzijde staan nog enkele grafieken van machtsfuncties. (Omdat $x^1$ gelijk is aan $x$ hoort $y = x$ er ook bij.)

>a Zoek bij elke grafiek een passende formule. Geef duidelijk aan welk linkerstuk bij welk rechter stuk hoort.

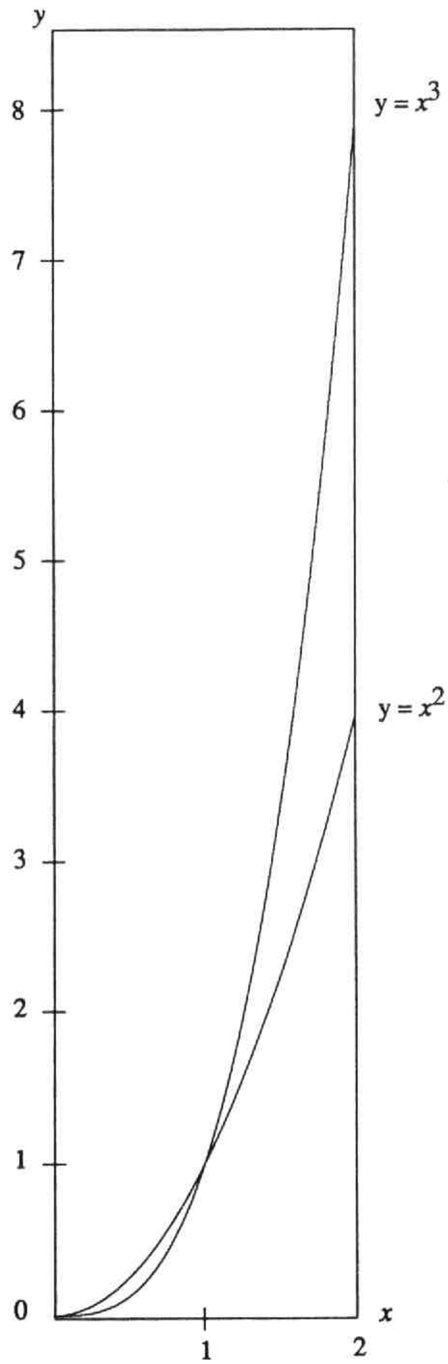
>b Noem de oplossingen van de vergelijkingen:
$x^2 = x$ ; $x^3 = x$ ; $x^3 = x^2$ ; $x^4 = x^2$.

7. > Teken, voorzover dat binnen de rechthoek kan, de grafieken van:
$y = x^3 + x^2$ ; $y = x^3 - x^2$ ; $y = x^2 - \frac{1}{2}x^3$
Je kunt uitgaan van de getekende grafieken, maar het is verstandig enkele punten met berekeningen te controleren.

Tekening voor opgave 6



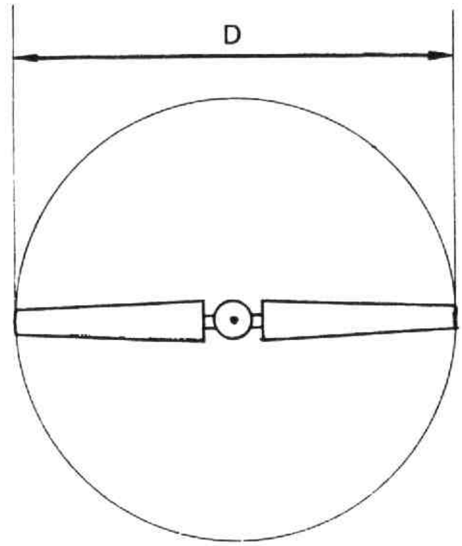

Tekening voor opgave 8




De grote verscheidenheid aan vormen van grafieken van machtsfuncties kun je, door met een computer te experimenteren, heel mooi zichtbaar maken.

8. > Maak een verschillentabel bij y = $x^3$ voor $0 \leq x \leq 7$ met $\Delta x = 1$.
Het systeem daarin is niet direkt te zien. Maar als je verschillen van verschillen van verschillen neemt, is er misschien toch wel iets te vinden.
Zoek dit uit.

9. *Nog meer windenergie*
$D$ is de diameter van de rotor van de windmolen.




>a Hoe groot is de oppervlakte van het cirkelvormige gebied dat door de rotor (de wieken) bestreken wordt als $D = 6$ ($D$ in meters)

>b Het vermogen dat door een molen wordt geleverd is evenredig met $D^2$.
Er is bij een vaste windsnelheid dan een formule van de vorm:
$$P = a \times D^2$$
Maak het aannemelijk dat $D$ in het kwadraat staat.

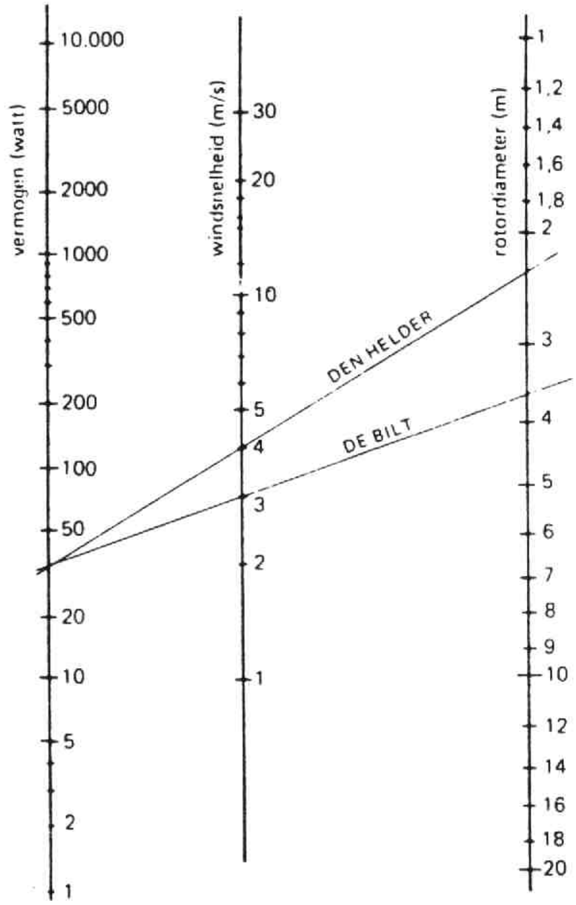
>c $a$ is evenredig met $V^3$.
De echte formule is namelijk: $P = 0{,}1 \times D^2 \times V^3$.
Welke drie soorten problemen kunnen hiermee worden opgelost?

>d In het midden van het land waait het over het algemeen minder hard dan aan de kust. Dat is voor een voorstander van windenergie geen moeilijk probleem. Hoe lost hij dat op?

Iemand overweegt voor de electriciteitsvoorziening gebruik te maken van een windmolen. Hij stelt vast dat hij in ieder geval moet kunnen rekenen op een vermogen van 700 watt.
De gemiddelde windsnelheid ter plaatse is 5 m/s. Hij vraagt advies over $D$ (de rotordiameter). Hij krijgt te horen dat die 8 m moet zijn.

>e Is deze voorwaarde nodig?

Om rekenwerk niet telkens opnieuw te moeten uitvoeren kan men het verband tussen $P$, $D$ en $V$ in een 'nomogram' geven.
Bij het aflezen moet je rekening houden met de ongewone schaalverdeling.




>f Hoe los je nu de drie soorten problemen op?

>g In een brochure over windenergie moet de invloed van de windsnelheid en van de diameter van de rotor met behulp van grafieken duidelijk worden gemaakt.
Maak hiervoor een ontwerp met begeleidende tekst.

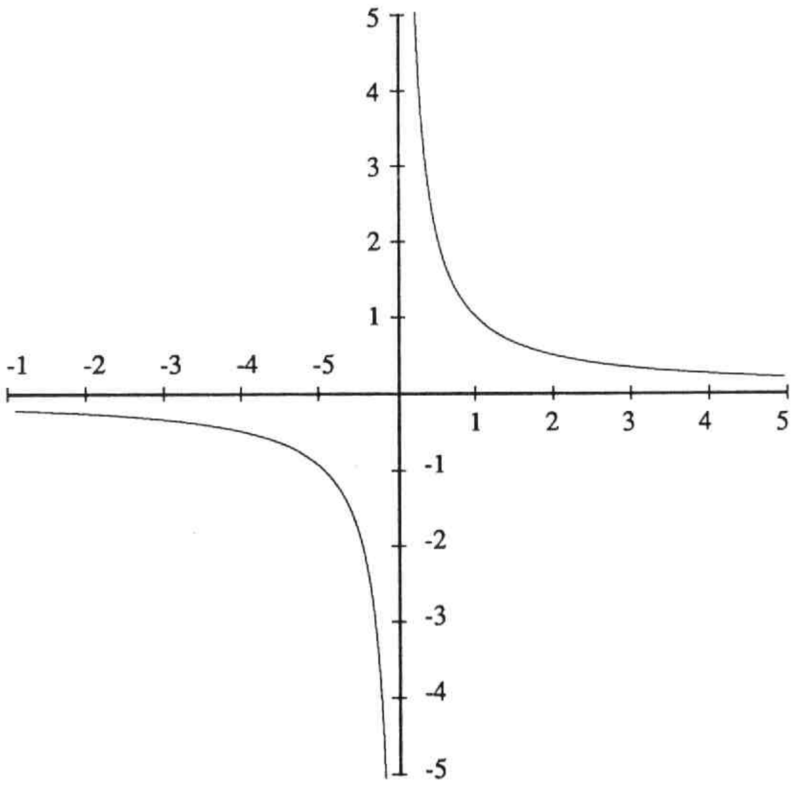
# 7 Gebroken functies

Bij het helicoptervraagstuk uit hoofdstuk 1 werd de formule $VL = \frac{450}{0,01d+6}$ gebruikt. Hierin komt de variabele $d$ in de noemer van een breuk voor.
Vandaar de naam breukfunctie of gebroken functie.
Een hele groep van zulke functies kun je voorstellen met de algemene formule

$$y = \frac{a}{bx+c}$$

1. > Hoe moeten $a$, $b$ en c gekozen worden om de helicopterformule te krijgen?

Door $a$, $b$ en $c$ vast te zetten op respectievelijk 1, 1 en 0 komt er $y = \frac{1}{x}$ met deze grafiek:




2. Vergelijk telkens het verloop van de grafiek ten opzichte van de $x$-as of de $y$-as, als:

   >a $x$ zeer groot wordt (bijvoorbeeld achtereenvolgens 1, 10, 100, 1000, enz.)

   >b $x$ zeer klein wordt (bijvoorbeeld -1, -10, -100, -1000, enz.)

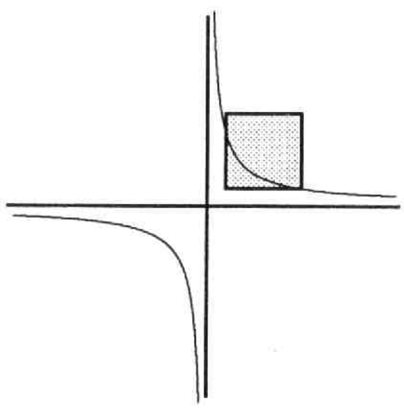
   >c $x$ dicht bij 0 komt van de positieve kant (bijvoorbeeld 1, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, enz.)

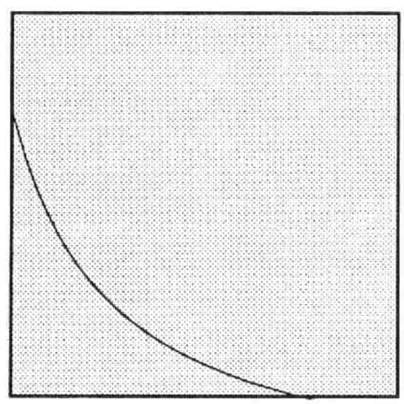
   >d $x$ dicht bij 0 komt van de negatieve kant (bijvoorbeeld -1, $-\frac{1}{10}$, $-\frac{1}{100}$, enz.)

In het eerste geval kun je de grafiek zo dicht bij de $x$-as krijgen als je maar wilt, door $x$ op passende wijze te kiezen. De grafiek en de lijn (de $x$-as) zijn praktisch niet meer te onderscheiden.
De lijn heet dan een *asymptoot* van de grafiek. De $x$-as treedt aan de linkerkant nog een keer als asymptoot op.

>e De $y$-as is ook een asymptoot (zelfs twee keer). Waarom?

We zijn nu 'horizontale' en 'verticale' asymptoten tegengekomen. Dat hoeven niet beslist de $x$-as en de $y$-as te zijn.
Andere horizontale en verticale lijnen kunnen die rol ook vervullen. Als een grafiek dicht bij een lijn komt, is dat nog geen reden om die lijn een asymptoot te noemen. Een asymptoot werkt op grote afstand; dat willekeurig dicht naderen tot een lijn gebeurt dus bij zeer grote $x$- of $y$-waarden.
In praktijkproblemen zijn er meestal beperkingen voor de waarden van $x$ en $y$.
Dat betekent dat er maar een deel van de grafiek gebruikt wordt.
Bijvoorbeeld:





3. Als aan de helicopterformule geen beperkingen worden opgelegd, dan heeft de bijbehorende grafiek ook asymptoten.

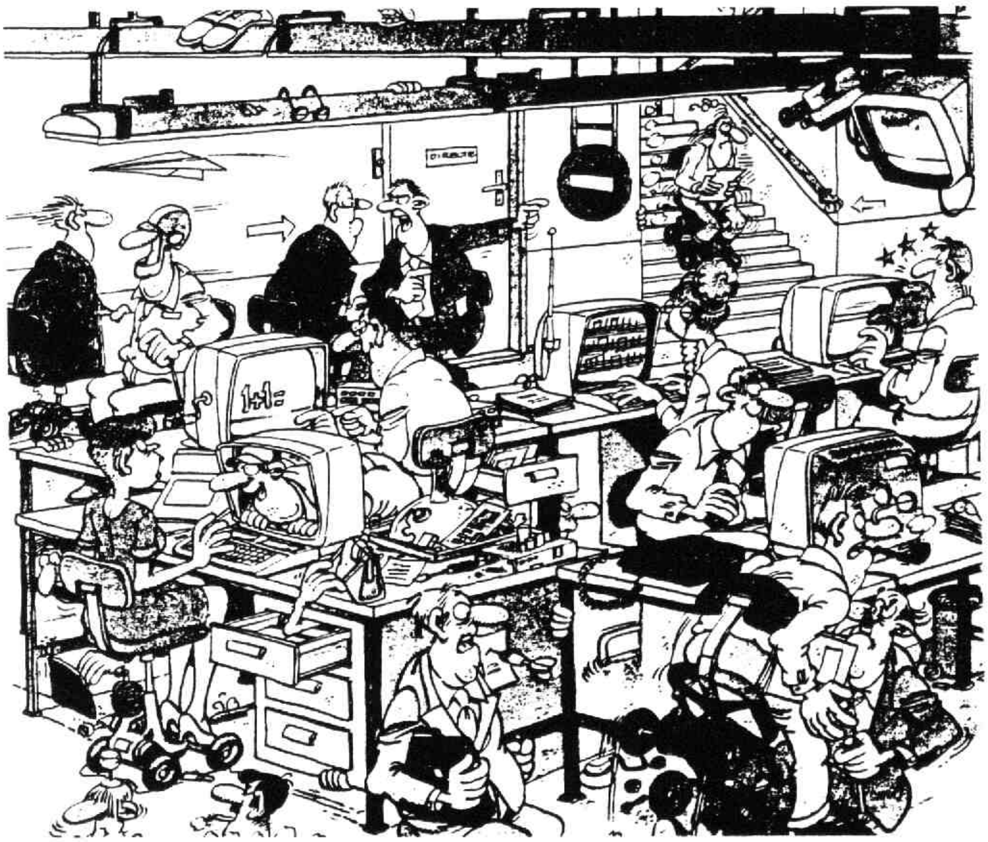
>a Maak met berekeningen aannemelijk dat de horizontale as ($VL = 0$) een horizontale asymptoot is.

>b Eveneens dat de lijn $d = -600$ een verticale asymptoot is.

>c Is er aanleiding om beperkingen in te voeren?

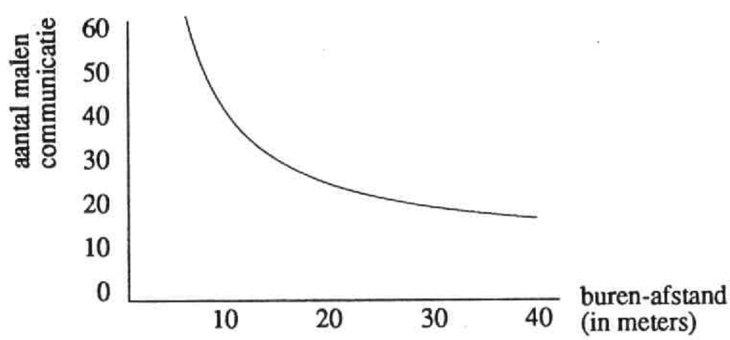
Toch zeggen die asymptoten wel iets over het verschijnsel, zoals nog eens uit de volgende opgave kan blijken.

4.




De mensen die in een groot kantoorgebouw werken hebben als regel meer contact met collega's die direct in de buurt werken dan met degenen die veraf zitten. Dus het gemiddeld aantal malen dat er in een maand 'communicatie' plaatsvindt kun je beschouwen als een functie van de bureau-afstand.

In een grafiek:




Een heel ruwe benaderingsformule zou kunnen zijn: $C = \dfrac{300}{A}$

>a Welke praktische betekenissen hebben de horizontale en verticale asymptoten?

>b De formule $C = \dfrac{300}{A}$ heeft deze bijzonderheid:
Als de $A$-waarde $5 \times$ zo groot wordt, dan wordt de $C$-waarde $5 \times$ zo klein.
Ga na dat algemeen geldt:
Als de $A$-waarde $n \times$ zo groot wordt, dan wordt de $C$-waarde $n \times$ zo klein.

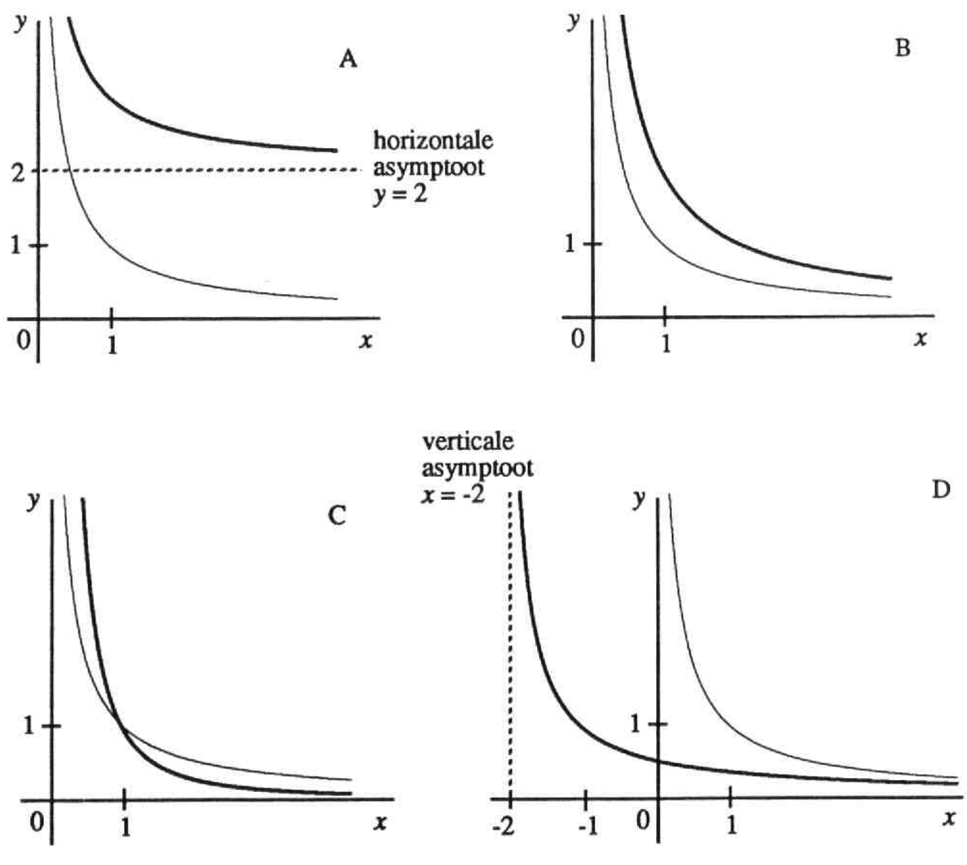
Zo'n verband tussen $A$ en $C$ noemt men *omgekeerd evenredig*.
Het is natuurlijk $A$ als ingang van de formule te nemen, want je kunt $A$ *als een 'oorzaak' van* C zien. Maar als het alleen om het *verband* tussen $A$ en $C$ gaat, kan de formule net zo goed $A = \frac{300}{C}$ zijn.
Een formulering waarbij 'de gelijke rechten' van $A$ en $C$ beter uitkomen is $A \cdot C = 300$.

5. Door veranderingen in de formule $y = \frac{1}{x}$ aan te brengen, ontstaat er ook een andere grafiek. Net zo als een verandering in de grafiek een andere formule vraagt. Soms zijn de gevolgen duidelijk aan te geven.

   In de vier tekeningen staan dun de grafieken van $y = \frac{1}{x}$ en iets dikker de grafieken van de gewijzigde formules (voor beperkte $x$).

   De gewijzigde formules zijn: $y = \frac{2}{x}$ ; $y = \frac{1}{x+2}$ ; $y = \frac{1}{x} + 2$ ; $y = \frac{1}{x^2}$

   >a Welke formule hoort bij welk plaatje?




>b Van welk van deze getekende typen is de helikopter-grafiek?

>c $y = \frac{1}{x} + 2$ is ook te schrijven als $y = \frac{2x+1}{x}$ Toon dat aan.

>d $y = \frac{3}{x+1} + 4$ is in de vorm $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ te schrijven.
Welke waarden hebben $a, b, c$ en $d$ dan?

6. De dosering van medicijnen voor kinderen is anders dan die voor volwassenen. Voor een medicijn wordt deze regel voorgeschreven:

$DK = \frac{L}{L+12} \times DV$
$DK$: dosering voor kind
$DV$: dosering voor volwassene
$L$ : leeftijd van het kind in jaren.

>a Teken de grafiek van de vermenigvuldigingsfactor $\frac{L}{L+12}$

>b Op welke leeftijd is $DK$ de helft van $DV$?

>c Dit is een merkwaardige formule. Probeer maar eens te berekenen wanneer een kind volwassen wordt.

7. De juiste afstemming op een radiozender kun je vinden door een tabel te raadplegen. Daarin staan frequenties en golflengten vaak naast elkaar.

| AM | frequentie | | golflengte |
|---|---|---|---|
| WS | 648 kHz | = | 463 m |
| | 810 kHz | = | 370 m |
| | 1296 kHz | = | 231 m |
| Caroline | 567 kHz | = | 529 m |

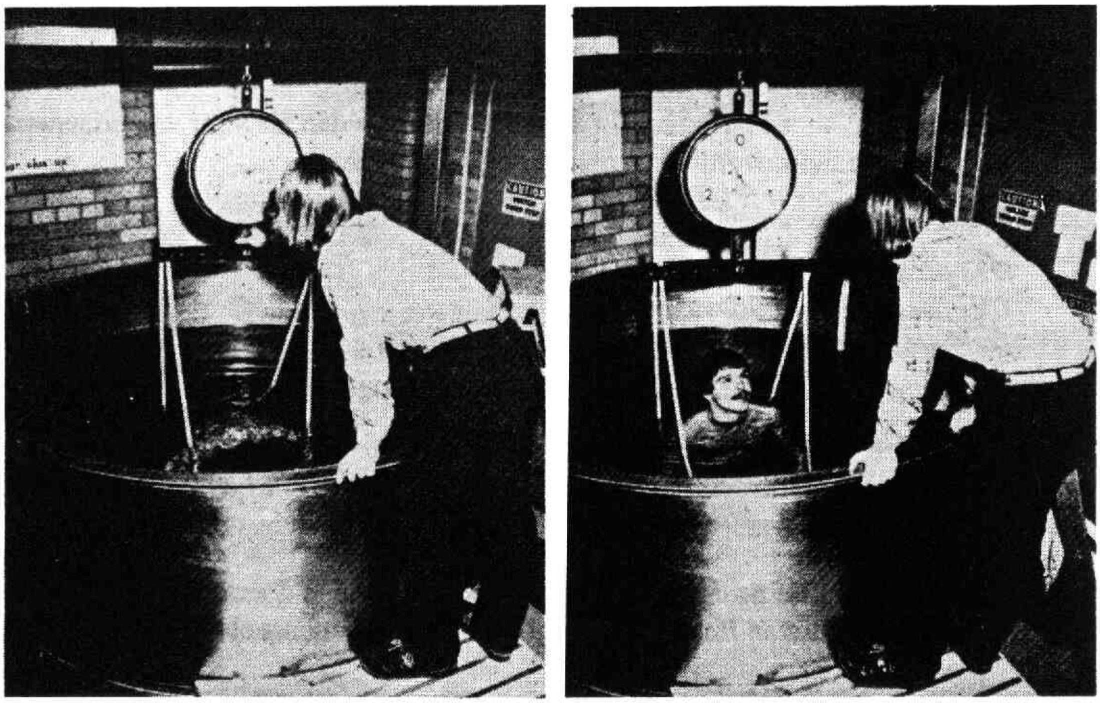
>a Probeer het verband tussen de kolommen frequentie en golflengte te vinden met behulp van vermenigvuldigingen.

>b Schrijf het verband zo:

$golflengte = \frac{\dots\dots}{frequentie}$

golflengte in m
frequentie in kHz

## 8. *Vetpercentage*



Volumemeter ter bepaling van de lichaamsdichtheid. Men kan hetzij de massa van het verplaatste water meten, hetzij de massa van het ondergedompelde lichaam. (Foto's: Tom Malloy, Ohio State University).

Om medische en sportieve redenen wordt van mensen het vetpercentage bepaald. Dat gebeurt langs een omweg zoals bijvoorbeeld via de dichtheid van het lichaam $D_b$. Een lichaamsdichtheid van 1,050 betekent dat 1 milliliter van dat lichaam een gewicht heeft van 1,050 gram.
Vet is lichter dan de rest. Er zal dan ook verband bestaan tussen het vetpercentage en de lichaamsdichtheid.

>a Is die lichaamsdichtheid een stijgende of een dalende functie van het vetpercentage? Illustreer je antwoord met een voorbeeld.

>b We gebruiken dit idee voor de bepaling van de dichtheid van een mengsel van twee stoffen $L$ en $Z$.
1 gram $L$ heeft een volume van 1,2 ml.
1 gram $Z$ heeft een volume van 0,8 ml.
We nemen 100 gram van het mengsel. Hiervan bestaat $x$ gram uit $L$.
Het volume van het mengsel en de dichtheid zijn beide functies van $x$. Bepaal voor elk een formule en teken in één figuur de bijbehorende grafieken. Ondersteunt de laatste grafiek het antwoord op vraag >a?

De hoeveelheid vet kan berekend worden met behulp van een van de onderstaande formules:

> Formule van Brozek:
> $\%\ vet = (4{,}570\ /\ D_b - 4{,}142) \times 100$
>
> Formule van Siri:
> $\%\ vet = (4{,}95\ /\ D_b - 4{,}50) \times 100$

Over de notatie: de deling gaat voor de aftrekking.

>c De formules verschillen in twee getallen. Zullen die verschillen elkaar, zo op het eerste gezicht, enigszins compenseren?

>d Bereken met beide formules het vetpercentage voor een persoon met een lichaamsdichtheid van 1,045 g/ml.

>e Bij welke waarde van $D_b$ geven beide formules hetzelfde antwoord?

>f Wat is volgens de formule van Brozek de lichaamsdichtheid van een persoon met een vetpercentage van 20?

>g Als er veel van zulke omgekeerde berekeningen gemaakt moeten worden, is het handig een formule van de vorm $D_b = ......$ te hebben.
Maak zo'n omkering van de formule van Siri. Noem daarbij het vetpercentage $V$.

# 8 Schakelen van grafieken en formules

We brengen met het volgende vraagstukje nog even het *schakelen van tabellen* in herinnering.

1. Verslaggevers van schaatswedstrijden noemen vaak vòòr het einde van een rit de vermoedelijke eindtijd. Daarvoor kunnen ze tabellen gebruiken van deze vorm:

| tussentijd op ... m ($T$) | waarschijnlijke eindtijd ($E$) |
|---|---|
| ..... | ..... |
| ..... | ..... |

Veronderstel dat voor de 10.000 m heren alleen deze tabellen beschikbaar zijn. Natuurlijk met meer invullingen.

| tussentijd op 8000 m ($T$) | gemiddelde tijd per ronde over die 8000 m ($G$) |
|---|---|
| ..... | ..... |
| 11.05.00 | 33.25 |
| ..... | ..... |

| gemiddelde tijd per ronde over die 8000 m ($G$) | waarschijnlijke eindtijd ($E$) |
|---|---|
| ..... | ..... |
| ..... | ..... |
| 33.25 | 13.48.25 |

(N.B. 13.48.25 betekent 13 minuten plus 48 $\frac{25}{100}$ sec.)

Uit de $T \rightarrow G$ en de $G \rightarrow E$ tabellen is nu de gewenste $T \rightarrow E$ tabel samen te stellen.

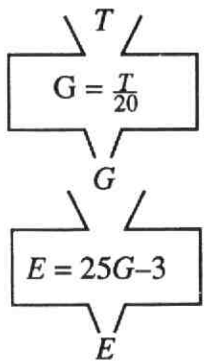
Deze werkwijze is nogal omslachtig, vooral als er geïnterpoleerd moet worden.
Een andere mogelijkheid is het gebruik van formules.

>a Een ronde heeft een lengte van 400 m.
In de laatste ronden wordt de snelheid nog even verhoogd.
Verklaar hiermee de formules
$G = \frac{T}{20}$ en $E = 25 \cdot G - 3$ die de stappen $T \rightarrow G$ en $G \rightarrow E$ beschrijven.

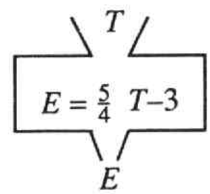
>b Welke formule beschrijft de stap $T \rightarrow E$?

>c Een rijder wil als eindtijd 13.30.00 zien te halen.
Wat moet de tussentijd zijn op de 8000 m?

Dit *schakelen van formules* kan zo in schema's worden voorgesteld.




Kan vervangen worden door




Algebraïsch ziet de schakeling van $G = \frac{T}{20}$ en $E = 25G - 3$ er zo uit:

$E = 25G - 3$

$E = 25(\ \ ) - 3$     de plaats van $G$ reserveren

$E = 25 \cdot (\frac{T}{20}) - 3$

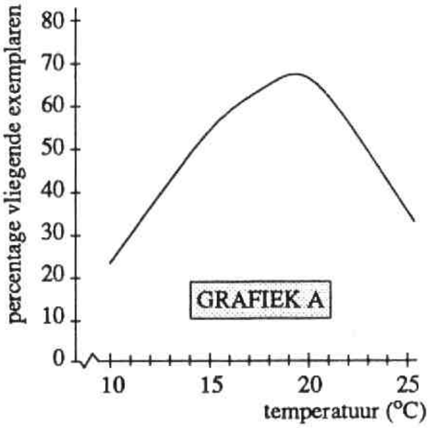
$E = \frac{5}{4}T - 3$

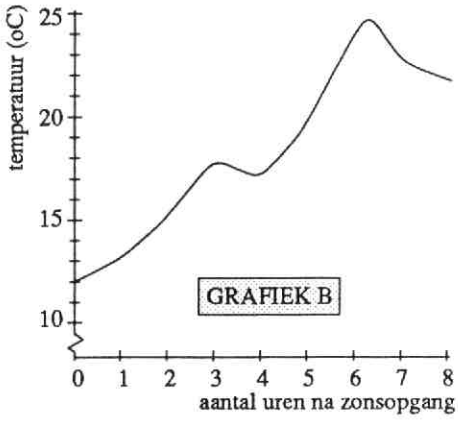
2. Bepaal in elk van deze gevallen een formule voor de stap $C \rightarrow A$
   >a $A = 2B + 5$ en $B = C + 3$
   >b $A = B^2$ en $B = C + 3$
   >c $A = 5B^2 - 6$ en $B = 2C + 1$
   >d $A = B^2 - 2B$ en $B = 1 - C$     (tweemaal reserveren!)
   >e $A = 6B - 3$ en $C = 2B + 4$
   >f $A = B^2$ en $C = \frac{1}{3}B$

3. Bepaal telkens een formule voor $z$ uitgedrukt in $x$.
   >a $y = x - 1$     $z = 5y + 4$
   >b $y = 5x + 4$     $z = y - 1$
   >c $y = x^2$     $z = 2y - 1$
   >d $y = 3x - 6$     $z = y^2 - 2y + 4$

4. In de opgaven 2 en 3 bleek de schakeling van twee eerstegraadsfuncties (lineaire functies) weer een eerstegraadsfunctie op te leveren.
   De vraag is of dat altijd zo is.
   >a Onderzoek dat op twee manieren:.
      (1) Ga na wat er bij lineaire functies gebeurt met gelijke toenamen van de invoer.
      (2) Gebruik de willekeurige formules $y = ax + b$ en $z = cy + d$.
   >b Onderzoek of een schakeling van twee tweedegraadsfuncties, weer een tweedegraadsfunctie oplevert.

5.



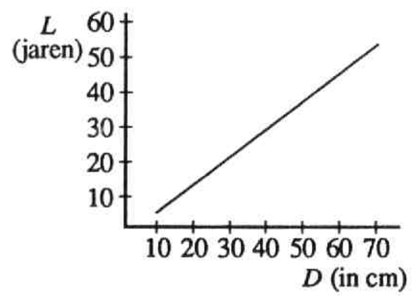



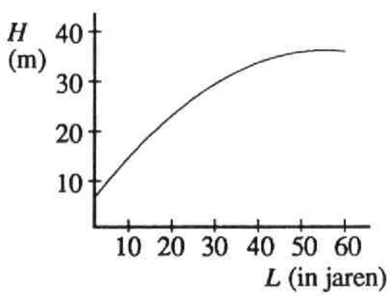

Een zekere muggensoort heeft een voorliefde voor een bepaalde plant. Daarop zitten dan ook zeer veel exemplaren. Zodra de zon opkomt gaat een deel van het muggenvolkje vliegen. En zolang het licht is bevinden zich exemplaren in de lucht. Het percentage vliegende exemplaren blijkt afhankelijk te zijn van de luchttemperatuur.
Dat verband is uit vroegere proeven bekend en is weergegeven in grafiek A. Men heeft een grafiek nodig die voor een bepaalde dag het percentage vliegende muggen weergeeft voor de eerste acht uren na zonsopgang. Het temperatuurverloop van die dag is af te lezen uit grafiek B.

\> Teken de benodigde grafiek.

Dit was een voorbeeld van het *schakelen van grafieken.*

6. Van een populierensoort is het verband tussen de diameter ($D$) op 1,3 meter hoogte en de leeftijd ($L$) bekend in de vorm van een grafiek. Ook de relatie tussen de hoogte ($H$) en de leeftijd ($L$) is zo gegeven.




\>a Teken de grafiek die de waarde van $H$ uitdrukt in de waarde van $D$

\>b In plaats van het grafische model kiezen we een formule-model dat hierbij aansluit.
$L = 0{,}8D - 3$
$H = -0{,}01L^2 + 1{,}1L + 6.$
Bepaal een formule die $H$ uitdrukt in $D$ (Je hoeft geen getallen af te ronden).

Het schakelen van formules kun je ook gebruiken bij de overstap op een andere maat. We nemen een voorbeeld dat je zonder tussen-formule ook wel kunt berekenen. Dat kan dan als controle van de methode dienen.

Voorbeeld

De prijs van een kabel is *f* 2500,- per km.
De kosten van $x$ km kun je dan geven als $K = 2500x$
Nu wordt een formule gevraagd met de lengte in meter.
Om niet in de war te raken noemen we het aantal meters $y$.
Tussen $x$ en $y$ bestaat het verband $x = \frac{1}{1000}y$
EN NIET $x = 1000y$ !
De formule wordt dan $K = 2500 \times \frac{1}{1000}y = 2{,}5y$
De nieuwe formule $K = 2{,}5y$ verschilt nogal van de oude $K = 2500x$.
Het is niet verboden voor de nieuwe formule $K = 2{,}5x$ te nemen, als maar duidelijk is of het over km of m gaat.
Hieruit blijkt nog eens weer hoe belangrijk het is om bij een formule de gebruikte eenheden te vermelden.

*Opmerking:*
De meest voor de hand liggende fout is het gebruik van een verkeerde tussenformule. *Controleer daarom altijd het resultaat met een getallenvoorbeeld.*

7. In de helicopterformule $VL = \frac{450}{0,01d+6}$ (zie hoofdstuk 1) is de stortafstand $d$ in meter.

   > Verander de formule voor het geval $d$ in kilometer wordt genomen en controleer het resultaat.

8. Bekijk nog eens de formule $t_{oranje} = T_r + V/4$.
   ($t$ en $T_r$ in sec, $V$ in m/s)

   > Verander de formule voor het geval $V$ in km/uur wordt genomen.
   (Controleer je antwoord met een getallenvoorbeeld)

9. In hoofdstuk 3 opgave 2 ben je de formule $E = 66{,}5 + 9{,}6w + 4{,}8h - 4{,}7a$ van de door het rustende lichaam benodigde energie tegengekomen.
   $E$ werd daarbij gemeten in Kcal/24h.
   Tegenwoordig gebruikt men meestal KJ/24h (KJ = 1 kilojoule = 239 Kcal).

   > Pas de formule hiervoor aan.

## 10. *Het vaststellen van de trainingsintensiteit*

De slagfrequentie van het hart kan bepaald worden door middel van palpatie van de a.radialis (pols), van de a.temporalis (slaap) of van de a.carotis (hals).

Op welke wijze kan de intensiteit van training worden bepaald? De eenvoudigste methode is die waarbij gebruik gemaakt wordt van de *slagfrequentie van het hart.* Men heeft vastgesteld dat de mate waarin de slagfrequentie van het hart toeneemt als gevolg van een bepaalde opgelegde belasting gebruikt kan worden als maat voor overbelasting van het lichaam in het algemeen en van het cardiovasculaire systeem in het bijzonder. Hoe meer de slagfrequentie van het hart toeneemt, des te groter is de intensiteit van de belasting. Om die reden is het idee ontstaan om een *streefwaarde voor de hartslagfrequentie* ($HF_{streef}$) te bepalen waarop men zich bij duurtraining moet richten.
Dat kan met de volgende methode.

*De methode van de maximale hartslag-frequentiereserve.*
Deze methode is ontwikkeld door Karvonen en houdt in dat de zogenaamde *maximale hartslagfrequentiereserve* ($HF_{res}$) berekend wordt. De $HF_{res}$ is heel eenvoudig het verschil tussen de maximale slagfrequentie van het hart ($HF_{max}$) en de slagfrequentie van het hart in rust ($HF_{rust}$), of:

$HF_{res} = HF_{max} - HF_{rust}$
waarin
$HF_{res}$ = maximale hartslagferquentiereserve
$HF_{max}$ = maximale slagfrequentie van het hart
$HF_{rust}$ = slagfrequentie van het hart in rust

(De frequentie in slagen/min.)

$HF_{streef}$ wordt nu uitgedrukt als percentage van $HF_{res}$

>a Voor een training is gekozen voor $HF_{streef} = 75\%$ van $HF_{res} + HF_{rust}$
Bereken $HF_{streef}$ als $HF_{max} = 200$ en $HF_{rust} = 60$.

>b Bepaal een formule voor $HF_{streef}$ uitgedrukt in $HF_{max}$ en $HF_{rust}$, als $p$ het percentage van $HF_{res}$ voorstelt.

>c $HF_{max}$ is moeilijk te bepalen. Daarvoor gebruikt men de schattingsformule
$HF_{max} = 220 - L$ ($L$ = leeftijd in jaren)
We gaan uit van $HF_{rust} = 60$ en $p = 80\%$
Maak een tabel voor $HF_{streef}$ voor $L = 15, 20, 25, 30, 35$.
Welke formule drukt $HF_{streef}$ in dit geval uit in $L$ ?

# 9 Model en Werkelijkheid

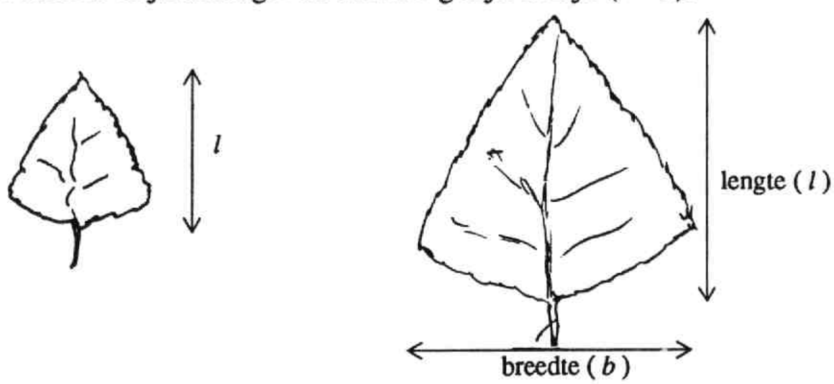
In de wiskundeboekjes ben je meermalen het woord 'model' tegengekomen. De betekenis is in de wereld van wetenschap en techniek een andere dan in de wereld van foto, film of mode.
Voor ons is het hier een maaksel waarmee je een stukje werkelijkheid kunt naspelen. Je kunt denken aan een nog te bouwen zeeschip waarvan een schaalmodel wordt gemaakt om in een laboratorium uit te proberen. Waar het op aan komt is, dat het model zoveel eigenschappen van het werkelijke schip heeft, dat je vragen over de werkelijkheid met het model kunt oplossen.
Het gaat om die *eigenschappen*. Het model hoeft verder helemaal niet op het echte ding, of het echte verschijnsel te lijken. De invloed van de windsnelheid op het vermogen van een windmolen, kan met de echte molen bestudeerd worden, of met een kleine modelmolen, of met de formule $P = 2\,V^3$. Daarom kan de formule ook gelden als model. Dat geldt ook voor tabellen en grafieken. Door een computer getallen en formules te voeren, kun je een computermodel krijgen. Die modellen worden tegenwoordig veel gebruikt.

1. > Noem eens een aantal voorbeelden van modellen uit de wiskundeboekjes.

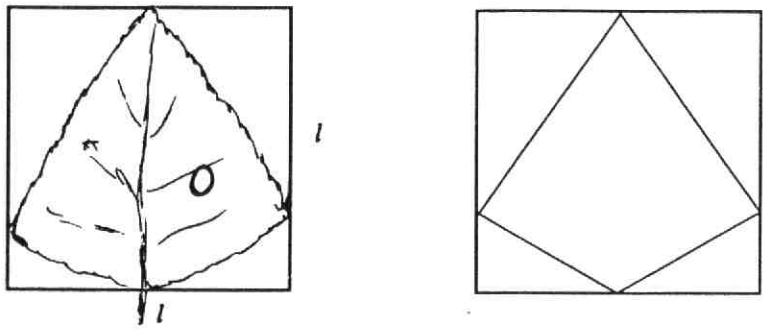
Dus: Een formule (of een groep van formules) die een verschijnsel beschrijft noemt men een model.

Zo zijn er lineaire-, kwadratische-, derdegraadsmodellen, om eens een paar te noemen. Een probleem is natuurlijk: Hoe betrouwbaar zijn de uitkomsten van het model voor toepassing in de werkelijkheid!
In dit hoofdstuk spelen we een beetje met het verband tussen model en werkelijkheid.

De grootte van de bladeren van een plant bepaalt mee hoeveel licht er opgevangen kan worden en heeft daardoor invloed op de groeisnelheid.
Veronderstel dat iemand daarvoor een studie van de bladoppervlakte moet maken. Het rechtstreeks meten van die oppervlakte is lastig. Daarom besluit hij de lengte te meten en een verband te zoeken tussen lengte en oppervlakte. Voor dat verband wil hij een model bedenken
Hij merkt op dat alle bladeren van een te onderzoeken boomsoort dezelfde vorm hebben. Bovendien blijken lengte en breedte gelijk te zijn ($l = b$).



Het blad past in een vierkant met oppervlakte $l^2$




>a Trek een paar hulplijnen en toon aan dat voor het modelblad geldt $O = \frac{1}{2} l^2$.

De oppervlakte is evenredig met het *kwadraat* van de lengte. Dit is een nogal theoretisch model. Door de mooie aannamen is de formule eenvoudig en volledig te beredeneren.

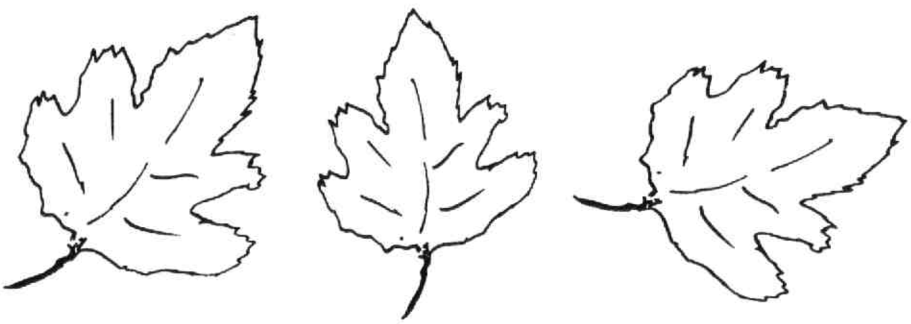
De waarde van een model moet in de praktijk blijken. Daarom voert hij een aantal complete metingen uit:

| $l$ | 5 | 6 | 6 | 8 | 9 | in cm |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $O$ | 12,5 | 18,5 | 17,5 | 33 | 35 | in cm$^2$ |

>b Beoordeel na elke meting het model en vergelijk die met de voorspellingen van het model.

>c Wat moet er na de vijfde meting gebeuren?

2. Dezelfde onderzoeker in een nieuwe situatie.



Bij deze bladeren zal de oppervlakte ook wel evenredig zijn met het kwadraat van de lengte. Dan is de formule van de vorm $O = a\, l^2$. De waarde van de constante '$a$' is niet zo eenvoudig te berekenen. Maar die kunnen we proefondervindelijk vaststellen.

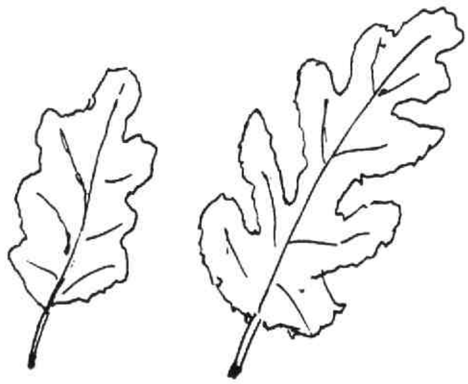
>a Hoe?

>b Als bij een lengte van 8 cm een oppervlakte van 40 cm $^2$ blijkt te horen, wat is dan de formule?

De *vorm van de formule* staat vast op grond van een redenering. Maar de constanten (parameters) moeten nader bepaald worden.

>c Bij het testen blijken er ook afwijkingen voor te komen. Is hier vergeleken met de vorige opgave een grotere speling toelaatbaar?

3. Nu nog lastiger.

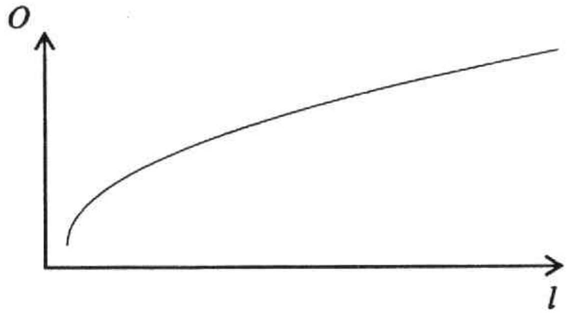


De blaadjes hebben niet meer precies dezelfde vorm, want bij de grotere zijn de insnijdingen in verhouding dieper.

>a Een model van de vorm $O = al^2$ is niet geschikt. Waarom niet?

>b Welke problemen verwacht je bij een lineair model $O = ax$?

De onderzoeker slaat een andere weg in. Hij zet een aantal metingen op millimeter papier uit en constateert een min of meer afnemende stijging.




Er kan nu gezocht worden naar bekende soorten grafieken die hier zo goed mogelijk bij aansluiten. En bij zo'n grafiek kan een formule bedacht worden.
Er ontstaan nu grote onzekerheden. Welke soort kies je als er meerdere in aanmerkingen komen. En wat bedoel je met 'zo goed mogelijk aansluiten'?
Het oplossen van dergelijke problemen hoort thuis in een apart vakgebied.
Als alles lukt, heb je eigenlijk alleen een beschrijving van de situatie. Dat is nog geen verklaring, hoewel die beschrijving wel eens goede aanzetten tot een verklaring kan opleveren

>c Heeft het rekenen met zo'n formule dan wel zin?

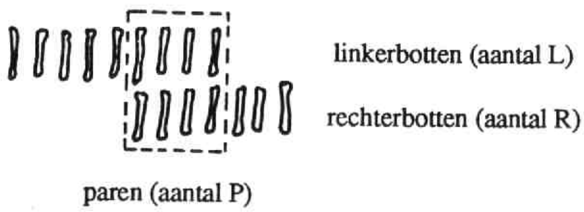
Samenvattend kunnen we zeggen:

Bij het opstellen van een model wordt de werkelijkheid vaak vereenvoudigd voorgesteld. Met deze veronderstellingen wordt geredeneerd om tot formules te komen. Soms zijn er voor het helemaal vastleggen van de formules experimentele gegevens nodig.
Een model zegt dus niet: zo is het.
Maar: Als we aannemen dat . . . . en . . . . en . . . ., dan geldt . . . . . . . .

4. In hoofdstuk 1 komt een model voor van het aantal vluchten per uur van een helicopter.

 \> Welke experimentele gegevens zijn daarbij gebruikt?

5. *Botje bij botje leggen.*
Een archeoloog vindt een partij botten van huisdieren. In de loop der tijd zijn er natuurlijk botten zoekgeraakt, of vergaan. Toch wil hij graag een idee hebben van het aantal dieren dat er oorspronkelijk was.
Voor een bepaalde diersoort zoekt hij de meest voorkomende botten bij elkaar. Bijvoorbeeld de dijbenen van de achterpoten. Hij kan nagaan welk linkerbotje bij welk rechterbotje past.
Dit is het resultaat:




Volgens professor A moet hij het model $N = \frac{LR}{P}$ gebruiken, met $N$ als het oorspronkelijke aantal dieren. Volgens professor B deugt hier niets van. Het moet zijn $N = \frac{L^2 + R^2}{2P}$

\>a Is het niet vreemd dat er twee verschillende modellen voor het zelfde verschijnsel zijn?

\>b Maak deze tabel af. (Rond af op een geheel getal)

| $L$ | $R$ | $P$ | $N_A$ | $N_B$ |
|---|---|---|---|---|
| 16 | 10 | 8 | | |
| 12 | 15 | 7 | | |
| 24 | 24 | 11 | | |
| | | | | |

$N_A$ volgens $A$

$N_B$ volgens $B$

>c De uitkomsten voor $N_A$ en $N_B$ kunnen door afronding gelijk zijn. Maar het is ook mogelijk dat ze dat al zonder afronding zijn. Probeer een algemene regel te vinden voor de gevallen waarin $N_A$ en $N_B$ exact gelijk zijn.

>d Na veel berekeningen rijst dit vermoeden: $N_B \geq N_A$ .
Dat het vermoeden juist is wordt aangetoond met een wiskundig bewijs. Probeer elke stap te verklaren.

$$\begin{aligned} N_B &\geq N_A \\ \frac{L^2+R^2}{2P} &\geq \frac{LR}{P} \\ L^2+R^2 &\geq 2LR \\ L^2+R^2-2LR &\geq 0 \\ (L-R)^2 &\geq 0 \end{aligned}$$

En dat is altijd zo.

>e We weten niet hoe de modellen bedacht zijn, zodat we de achterliggende redenering niet kunnen controleren. En even vlug wat experimenten uitvoeren lukt ook niet. Toch hoeven we niet elke formule te slikken.
Welke van onderstaande formules zijn alleen al op grond van hun uiterlijk niet serieus te nemen?

$$N = \frac{P}{L+R} \qquad N = \frac{(L+R)^2}{4P} \qquad N = \frac{L^2+2R}{2P}$$

>f Op een tafel ligt een partij botjes keurig gesorteerd:

Met de formule $N = \frac{L^2+R^2}{2P}$ kan nu het oorspronkelijke aantal dieren worden bepaald.
We kunnen de 'kwetsbaarheid' van de formule onderzoeken, door 1 botje weg te nemen en het gevolg voor de waarde van $N$ te berekenen.
Bedenk een waarschuwingsregel voor de archeoloog over de situaties waarin hij voorzichtig moet zijn met het toepassen van de formule.

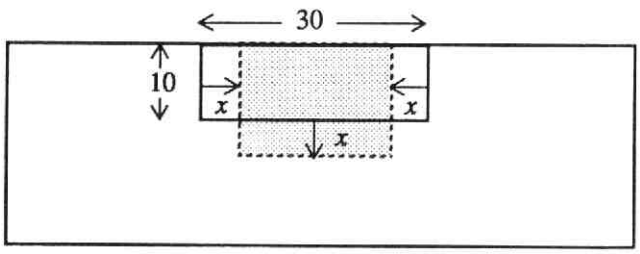
## 10 Het krachtenspel

Er zijn veel verschijnselen waarbij het resultaat bepaald wordt door twee elkaar tegenwerkende krachten.

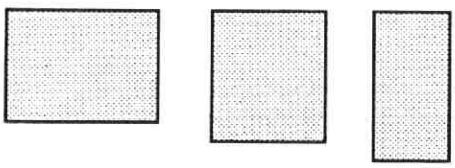
*Voorbeeld*
De opbrengst van een artikel is afhankelijk van de prijs per stuk en van het verkochte aantal. De opbrengst kan vergroot worden door bijvoorbeeld de prijs te verhogen. Maar die prijsverhoging doet misschien het verkochte aantal dalen. Tel uit je winst!

De kwadratische functie kan gebruikt worden om zo'n spel van krachten te illustreren.

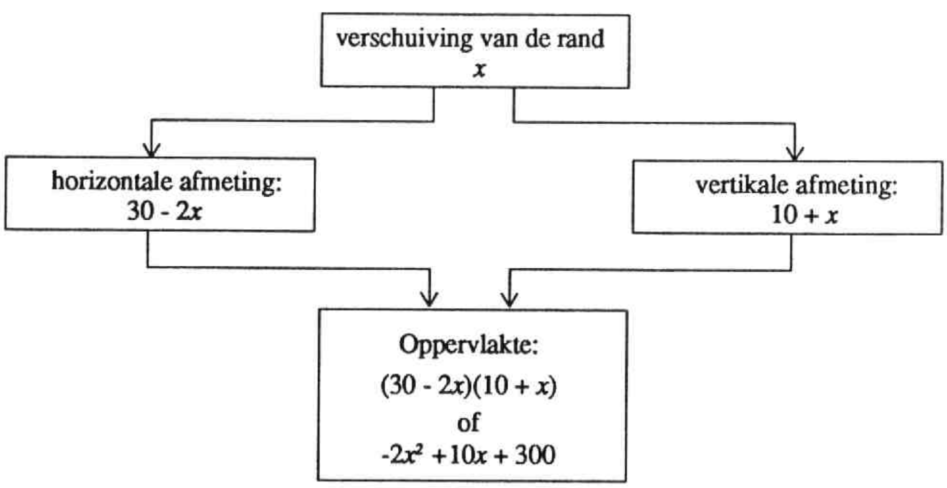
1. In een grote foto is een kleinere van 30 bij 10 cm afgetekend. Hiervan gaan twee randen $x$ cm naar binnen en één gaat $x$ cm naar buiten, volgens onderstaande tekening.




Er kan zo een serie rechthoeken ontstaan.



We zijn geïnteresseerd in het verloop van de oppervlakte als $x$ verandert.
De berekening kan in een schema worden gepresenteerd.



Nu is af te lezen:

$x$ neemt toe

| | |
|---|---|
| horizontale afmeting wordt kleiner | verticale afmeting wordt groter |
| ↓ | ↓ |
| horizontale afmeting wil de oppervlakte kleiner maken | verticale afmeting wil de oppervlakte groter maken |

Je ziet: een spel van elkaar tegenwerkende krachten.
De vraag is nu hoe het verloop van dit krachtenspel is.

>a Onderzoek dit door de grafiek van de oppervlakte in afhankelijkheid van $x$ te tekenen voor $0 \leq x \leq 8$. Gebruik voor de vertikale as het deel van 250 tot 320 cm$^2$. Geef een beschrijving van het resultaat.

>b Wat is de maximumwaarde van de oppervlakte volgens je grafiek?

>c De getekende serie rechthoeken kan bij een grote foto nog heel ver naar rechts worden voortgezet. Wat is er dan van de vormen te zeggen?

>d De serie zou naar links ook nog wel een eindje kunnen worden voortgezet. Welke afspraak moet er dan voor $x$ worden gemaakt? Wat zijn de afmetingen van de laatste rechthoek?

2. Terug naar het prijzenvoorbeeld.
Normale prijs: 10 gulden
Prijsverhoging: $x$ gulden
Normale verkoop in een week: 100 stuks
Elke gulden prijsverhoging doet de verkoop met 5 stuks teruglopen.
Ook hier is er weer sprake van twee elkaar tegenwerkende krachten.

>a Onderzoek met een schema en een grafiek bij welke prijsverhoging de opbrengst maximaal is.

>b Is de gunstigste prijs voor de verkoper de ongunstigste prijs voor een koper?

3. *Een subsidieregeling*
Een sportclub kan een subsidie krijgen voor de uitbereiding van de accomodatie. De regeling is als volgt:
- Bedragen de kosten *f* 6000,- of minder, dan is de subsidie 8%
- Voor elke *f* 1000,- meer wordt het percentage met 0,5% verminderd en dat nieuwe percentage wordt over de totale kosten berekend.
- De opgegeven kosten worden altijd naar beneden afgerond op duizendtallen.

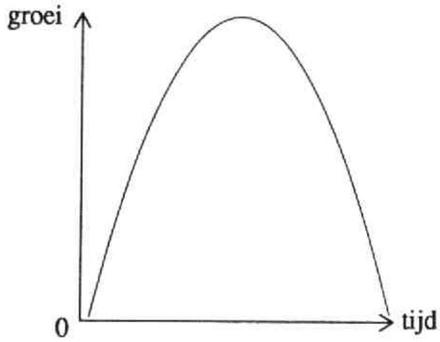
>a Onderzoek met behulp van tabellen bij welk kostenbedrag de subsidie maximaal is.

Noem $x$ het aantal keer *f* 1000,- dat de kosten meer bedragen dan *f* 6000,- .

>b Toon aan dat de subsidie berekend kan worden met de formule:
SUBSIDIE = $480 + 50x - 5x^2$ en beantwoord hiermee vraag >a.

4. *Groei*

De sterkte van de groei van het aantal diertjes van een bepaalde soort kan deze vorm hebben:




N.B. Verticaal staan *niet* de aantallen uitgezet.
De grafiek gaat over de *mate van verandering* van het aantal, die we hier *groei* noemen.

Je kunt je voorstellen dat een kleine groep dieren op een plaats komt waar volop voedsel is. Er worden veel jongen geboren en die komen niets tekort, zodat daarvan veel overleven. Die krijgen ook weer jongen, enzovoort.
Het aantal groeit dus snel. Na verloop van tijd wordt het moeilijker om aan voedsel te komen en de groei neemt weer af.

>a Hoe past dit verhaaltje bij de grafiek?

>b Maak een globale grafiek die het verband tussen de *tijd* en het *aantal* weergeeft.

Het verschil in groei is met formules na te spelen. De met de tijd toenemende groei kan voorgesteld worden door bijvoorbeeld:

$Gr = 2 \cdot t$

Het gevolg zou onbeperkte groei zijn. Daarom moet er een *remmer* worden ingebouwd. In het begin moet die niet, of heel zwak werken, maar later steeds sterker.

Een mogelijkheid is de factor $(1 - \frac{t}{10})$ met $t = 10$ als laatste tijdstip.

De formule wordt dan: $Gr = 2\,t\,(1 - \frac{t}{10})$.

>c Voldoet de remmer $(1 - \frac{t}{10})$ aan de voorwaarden?

>d Teken de grafiek van $Gr = 2\,t\,(1 - \frac{t}{10})$.

>e Heeft de formule de gewenste eigenschappen?

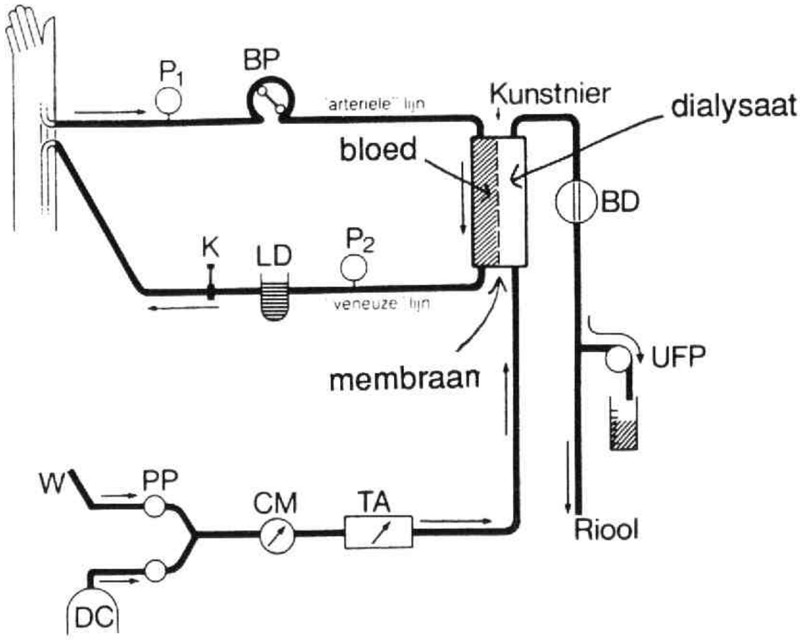
>f Veronderstel dat er ook een grafiek met de echte aantallen bekend was. Hoe zou daaruit af te lezen zijn wanneer de groei maximaal is?

>g Bedenk zelf een zwakkere remmer.

>h Vergelijk het effect van de remmer $(1 - \frac{t}{10})$ en $(1 - \frac{t^2}{10})$ op de groei.

# 11 Nog enige toepassingen

1. *Kunstnier*
   Dit is een schematische tekening van een kunstnier.




Overzicht van de samenstelling van de kunstnier

| | | | |
|---|---|---|---|
| P1 | = negatieve drukalarm | PP | = proportioneringspompen |
| BP | = bloedpomp | DC | = dialysaatconcentraat |
| P2 | = positieve drukalarm | CM | = conductiviteitsmeter |
| LD | = luchtdetector | TA | = verwarmings- en temperatuuralarm |
| K | = klemsysteem | BD | = bloedlekdetector |
| W | = gezuiverd water | UFP | = ultrafiltratiepomp |

In het bloed van de patiënt bevinden zich stoffen als ureum en creatinine in *te hoge* concentraties. Het bloed wordt langs een membraan gevoerd. Aan de andere kant van dat membraan stroomt het zogenaamde dialysaat. Het membraan is dus een scheidingswand, maar bepaalde stoffen kunnen er doorheen als de concentraties van die stoffen aan beide kanten van het membraam verschillend zijn.
Als er voor gezorgd wordt dat de concentraties in het dialysaat lager zijn, dan gaan die stoffen vanuit het bloed door het membraan in het dialysaat. En daarna worden ze afgevoerd.

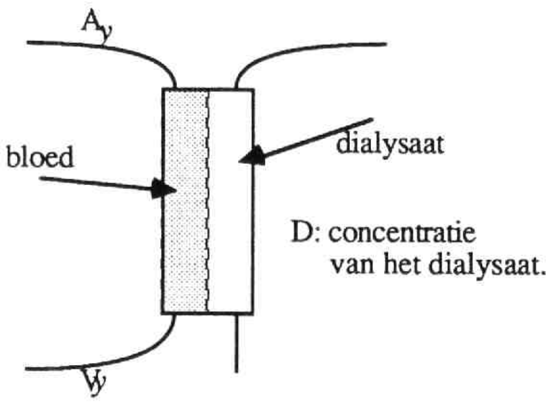
>a Soms wil men een patiënt een stof *toedienen*, bijvoorbeeld calcium.
Hoe zou dat met de kunstnier kunnen?

>b Tijdens het verwijderen van ureum en andere stoffen, mag de concentratie van natrium in het bloed geen schommelingen vertonen.
Hoe is dat te bereiken?

De sterkte van de zuivering wordt *klaring* genoemd. Dat is de hoeveelheid bloed (in ml) die per minuut volledig gezuiverd wordt van een bepaalde stof $y$. Voor klaring wordt de afkorting $C$ van het Engelse woord clearance gebruikt. Voor de grootte van $C$ bestaat een formule:

$$C = \frac{(A_y - V_y) \times QB}{A_y}$$

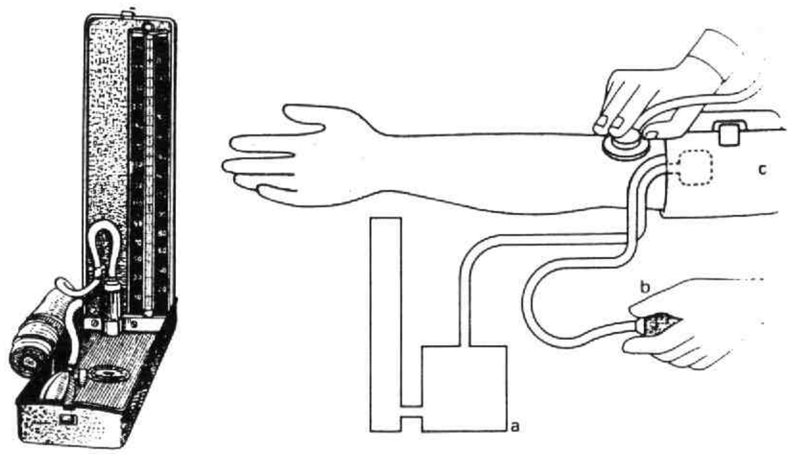
$A_y$ stelt de concentratie van stof $y$ in het bloed voor aan de ingang van de kunstnier ($A$ = arterieel) en $V_y$ aan de uitgang ($V$ = veneus)
$QB$ is het bloeddebiet, dat is de bloedstroom in ml/min.




>c De apparatuur kan het aangeboden bloed sterk of zwak zuiveren. Hoe is dat in de formule voor $C$ verwerkt?

>d Als de concentraties van een stof in het bloed en in het dialysaat gelijk zijn, zal er niets gebeuren: we verwachten $C = 0$.
Geeft de formule in dat geval ook werkelijk dit resultaat?

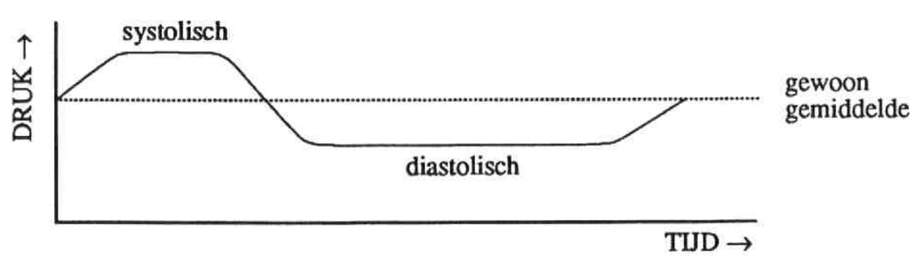
2. *Bloeddruk en sport*




Voor het ontwikkelen van verantwoorde methoden van sporttraining is biologische kennis nodig o.a. van de bloeddruk.
Als gevolg van de hartslag schommelt de druk die het bloed op de wand van de slagaders uitoefent tussen een hoogste en een laagste waarde. Die waarden heten resp. *systolische* en *diastolische* druk.
Voor het leveren van prestaties is de snelheid van het bloed door het vaatstelsel van belang. Die snelheid wordt door de druk bepaald.
Maar welke druk? Er zal een soort gemiddelde druk genomen moeten worden (de gemiddelde arteriële druk, afgekort tot *Pgem*).
De voor de hand liggende afspraak:

$$Pgem = \tfrac{1}{2}\ (\text{systolische druk} + \text{diastolische druk})$$

voldoet niet, omdat de periode met hogere druk korter duurt dan die met lagere druk.
In een globale grafiek:




>a Teken in de globale grafiek hoe de lijn voor de betere waarde voor *Pgem* verschoven moet worden ten opzichte van het gewone gemiddelde.

De afspraak is tenslotte geworden:

*Pgem* = diastolische druk + (polsdruk/3)
waarbij polsdruk = syst. druk - diast. druk.

>b Schrijf de formule voor *Pgem* in de vorm
*Pgem* = ... diast. druk + ... syst. druk

>c Is *Pgem* in de juiste richting verschoven? (zie vraag >a)

>d Iemand heeft een syst. druk van 16,7 kPa en een diast. druk van 10,7 kPa. (de druk wordt gemeten in kPa = kilopascal).
Bereken de gemiddelde arteriële druk.

>e 'Als de polsdruk groter wordt, dan wordt de gemiddelde arteriële druk ook groter.'
Hoe staat het met de waarheid van deze uitspraak?

>f Als de belasting bij de training toeneemt, neemt de bloeddruk ook toe. De belasting $B$ laten we variëren van 0 tot 1. De bloeddruk wordt weer gemeten in kPa.
Uit proeven bleken deze formules redelijk te kloppen:

$$D = 1{,}5B + 11$$
$$S = 4{,}7B + 12{,}6$$
($D$ = diast. druk, $S$ = syst. druk).

Teken de grafieken bij deze formules.

>g $D$ en $S$ blijken lineair toe te nemen.
Leidt uit de *formules* af dat dat ook zo is voor *Pgem*.

*Hypertensie* slaat op hoge bloeddruk, zowel systolisch als diastolisch. Hoge bloeddruk gaat gepaard met een reeks van ziektebeelden met betrekking tot de bloedsomloop en men heeft vastgesteld dat 12% van alle mensen sterft als direct gevolg van hypertensie. Verder kan een op de vijf mensen last hebben van hoge bloeddruk op bepaalde momenten in hun leven.

>h Een andere formule voor *Pgem* is: *Pgem* = *HMV* x *R*
*HMV* = hartminuutvolume: de hoeveelheid bloed die per minuut door het hart gaat.
$R$ = weerstand: de weerstand die het bloed in het lichaam ondervindt.
Hoe kan hypertensie volgens deze formule ontstaan?

>i Geef een formule voor $R$ uitgedrukt in *D, S, HMV*.

>j Een leerboek geeft als verklaring van de lineaire toename van de bloeddruk in >f.

De bloeddruk neemt lineair toe tijdens belasting omdat het hartminuutvolume toeneemt (slagvolume en slagfrequentie), terwijl de weerstand afneemt als gevolg van vasodilatatie van de arteriolen in de actieve spieren.

(dit laatste betekent, dat de bloedvaten wijder worden).
Geef een beoordeling van deze verklaring.