Tabellen, grafieken, formules

https://hdl.handle.net/1874/10148

TABELLEN, GRAFIEKEN, FORMULES 4

TABELLEN,

GRAFIEKEN,

FORMULES

4

WISKUNDE A

TABELLEN, GRAFIEKEN, FORMULES 4

Een produktie ten behoeve van het project Hawex.

Ontwerper: Anton Roodhardt

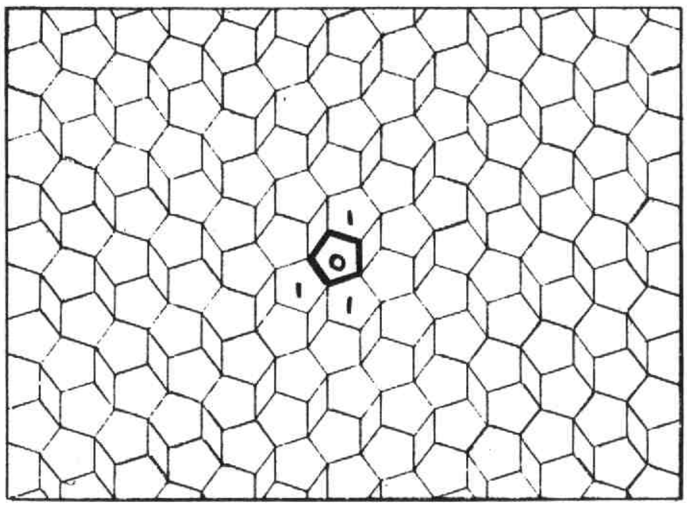
Met medewerking van: Jan de Jong
Martin Kindt
Henk van der Kooij
Jan de Lange
Martin van Reeuwijk

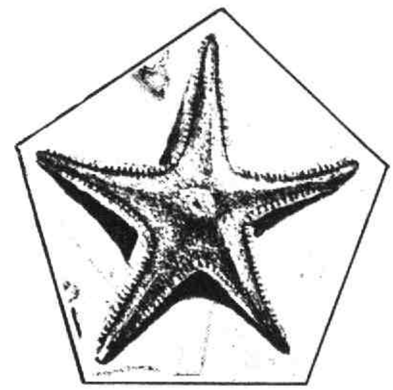
Vormgeving: Ada Ritzer

Inhoudsopgave

1 Eenvoudige regelmaat

1.





Een zeesterrenkweker brengt zijn diertjes onder in vijfhoekige bakjes die, voorzover dat kan, tegen elkaar zijn geplaatst.
Eén van de diertjes is geïnfecteerd met een zeer besmettelijke virus.
De besmetting wordt verder gebracht wanneer twee bakjes met een hele zijkant tegen elkaar staan.
Alles verloopt in vaste tijdseenheden. Op tijdstip $t = 0$ is één zeester geïnfecteerd. Op tijdstip $t = 1$ komen daar de zeesterren bij die door de eerste zijn aangestoken. Op $t = 2$ de volgende generatie, enz.

>a Vul deze tabel in:

t	1	2	3	4	
aantal *nieuwe* infecties I	3	.....	.....	......	

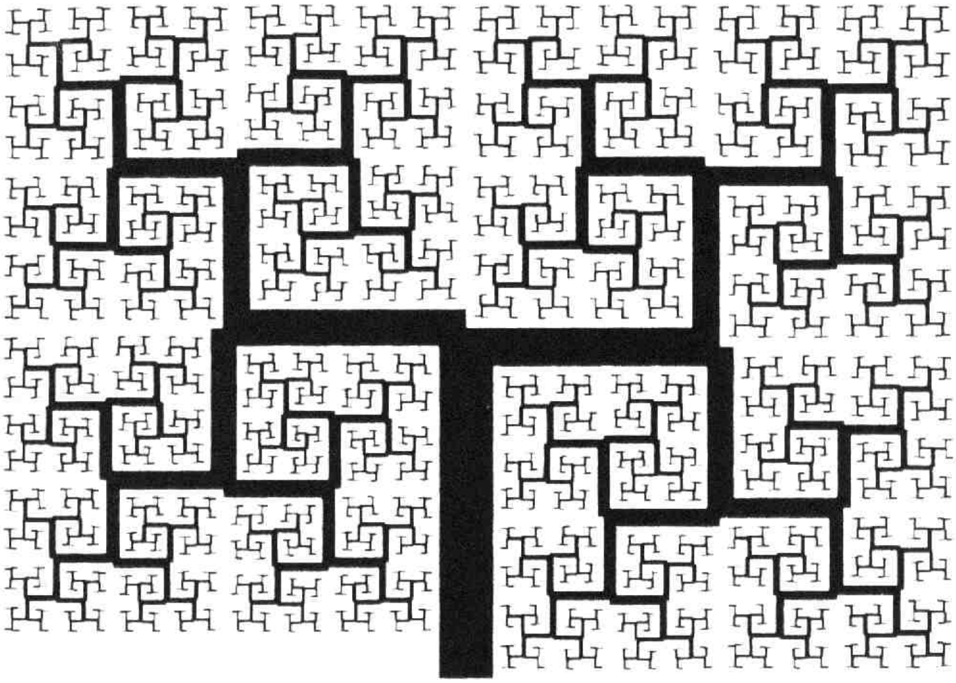
>b Bedenk een formule die het aantal nieuwe infecties I geeft in afhankelijkheid van t.

>c De geldigheid van de formule is vastgesteld voor $t = 1, 2, 3, 4$.
Voorspel met de formule de waarden van I voor $t = 5$ en $t = 6$ en vergelijk ze met de werkelijkheid.

>d De infecties kunnen wel doorgaan tot $t = 10$, als er maar voldoende bakjes staan. De formule geeft dan $I = 30$.
Waarom denk je dat je de formule mag toepassen?
Is je redenering echt betrouwbaar?

>e Het *totaal* aantal geïnfecteerde zeesterren is een kwadratische functie van t.
Hoe kun je dit weten zonder de formule te maken?

2. Biologen zijn er in geslaagd met behulp van genetische manipulatie deze ruimte besparende appelboom te ontwikkelen. Voor de duidelijkheid zijn de bladeren hier weggelaten.



Elk 'seizoen' gebeurt het volgende: Bij elk eindpunt ontstaat een vertakking in tweeën. Na een vaste tijd is de vertakking voltooid en dan groeit aan elk nieuw eindpunt een appel. Na het plukken of afvallen van de appel is er een rustperiode, tot in het volgende seizoen het vertakken weer begint.
Deze boom staat op het punt appels te krijgen. We willen weten hoeveel dat zullen worden. Alles tellen is niet zo aantrekkelijk. Daarom bestuderen we het groeiproces in de hoop regelmaat te ontdekken:

$t = 0$ $t = 1$ $t = 2$ $t = 3$

De t's zijn de tijdstippen waarop de vertakkingen voltooid zijn en de appels beginnen te groeien.

>a Vul deze tabel in:

tijd (t)	1	2	3	4	5	
aantal appels (a)	.....	.....	.....	......	......	

>b Hoe ontstaat het volgende antwoord uit het vorige?

>c Bedenk een formule waarin a wordt uitgedrukt in t.

>d De formule levert ook een antwoord voor $t = 10$.

Is het antwoord nu net zo twijfelachtig als in opgave 1 >d?

>e En nu weer de oorspronkelijke vraag: Hoeveel appels levert de boom?

In opgave 1 is in de tabel van het aantal nieuwe infecties een eenvoudige regelmaat te ontdekken. Het volgende getal ontstaat uit het vorige door daar een vast getal bij op te tellen. Deze regelmaat heeft tot gevolg dat er een lineair verband bestaat tussen I en t. Anders gezegd, dat I een lineaire functie van t is.

In opgave 2 is een andere regelmaat te zien in de tabel van het aantal appels: het volgende getal ontstaat uit het vorige door dat met een vast getal te vermenigvuldigen. Tussen a en t bestaat nu geen lineair verband, maar een *exponentieel verband.*
Die naam is gekozen omdat de bijbehorende formule $a = 2^t$ een exponentiële vorm bevat. We zeggen: a is een exponentiële functie van t.

Een formule van de vorm $y = 2^x$ is te zien als een bijzonder geval van $y = g^x$. Andere waarden van het *grondtal* g ben je tegengekomen bij telproblemen en kansrekening.

3. >a Teken in één figuur de grafieken van $y = 2^x$, $y = 3^x$ en $y = (\frac{1}{2})^x$, waarbij x de waarden 1, 2 en 3 aanneemt. Bereken eerst hoeveel ruimte je nodig hebt.

   >b Stel je voor dat de grafiek ook voor niet gehele waarden van x getekend mag worden, als je er maar voor zorgt dat er een vloeiende kromme lijn ontstaat.
   Teken die doorlopende grafieken.

4. Door een biologische ingreep is het mogelijk in het appelvoorbeeld de formule $a = 3 \cdot 2^t$ te krijgen.

   > Wat moet er dan in het verhaaltje veranderd worden?

5. Bekijk onderstaande tabel

x	1	2	3	4	5
tussenstap	4	16	64	256	1024
y	20	80	320	1280	5120

   > Welke formule geeft het verband tussen y en x weer?

We rekenen de formules van opgave 4 en 5 ook bij de exponentiële verbanden. De algemene vorm van een exponentieel verband is dan :

$$\boxed{y = b \cdot g^x}$$

6. Uit een boek over de teelt van pootaardappelen:

Bij stamselektie is men echter meer geïnteresseerd in een zo groot mogelijke vermenigvuldiging per poter i.p.v. een zo hoog mogelijke kg-opbrengst. Een hoge *vermenigvuldigingsfactor* kan o.a. worden bereikt door wijder te poten.
Bij een wijder plantverband komen er meer stengels per plant tot ontwikkeling en worden per stengel meer knollen gevormd. Om een indruk te geven van het effect van wijder poten zijn in tabel 1 de gemiddelde resultaten vermeld van een aantal proeven met o.a. Bintje, Eigenheimer, Alpha met verschillende plantdichtheden.

Tabel 1 Het effect van de plantdichtheid op het aantal stengels en knollen

Planten per ha	*Stengels per plant*	*Knollen per stengel*	*Knollen per*	
			plant	m^2
20.000	5,3	4,3	22,8	45,6
40.000	4,8	3,5	16,8	67,2
60.000	4,3	2,8	12,0	72,0
80.000	4,1	2,4	9,8	78,4

>a We noemen de kolommen van tabel 1 resp. K_1, K_2, K_3, K_4, K_5.
Bepaal formules voor de berekening van K_4 en K_5 op grond van de eerste drie kolommen.

In de volgende tabel is telkens gestart met 12 knollen en daarvan is per jaar de nakomelingschap geteld.

Tabel 2 Vermeerdering bij verschillende plantdichtheden (uitgang stam: 12 knollen)

	20.000 pl/ha Aantal knollen	*40.000 pl/ha Aantal knollen*
Eénjarige stam	*274*	*202*
Tweejarige stam	*6.238*	*3.387*
Driejarige stam	*142.228*	*56.900*

>b Toon aan dat er in beide gevallen sprake is van 'exponentiële groei'.
Wat zijn de vermenigvuldigingsfactoren?

>c Hoe is tabel 2 uit tabel 1 af te leiden?

>d Bepaal formules voor de twee kolommen in tabel 2.

>e Vul tabel 2 aan met kolommen voor 60.000 pl/ha en 80.000 pl/ha.

>f Heeft de plantdichtheid werkelijk invloed op de vermenigvuldigingsfactor die in de tekst wordt genoemd?

7. *Werken onder hittebelasting.*
Een 8-urige werkdag bij hoge temperatuur kan vooral bij zware spierarbeid te belastend zijn. Daarom is soms arbeidstijdverkorting verplicht. Bij een bedrijf gaat dat zo:

> Tot en met een temperatuur van 25° C is een 8-urige werkdag toegestaan.
> Gaat de temperatuur een stap van 3° omhoog, dan moet de arbeidstijd met 50% worden bekort. Na een volgend stap van 3° volgt weer een verkorting van 50%. En zo gaat dat door.

>a Bereken de arbeidstijd voor de temperaturen 25°, 28°, 31°, 34° en maak van het resultaat een puntengrafiek.

De grafiek zou kunnen worden uitgebreid voor de tussenliggende temperaturen. Er worden twee manieren voorgesteld:
- De arbeidstijd blijft telkens 3° lang gelijk, in het voordeel van de werkgever.
- De grafiek wordt een vloeiende kromme lijn door de vaste punten.

>b Teken beide grafieken in de figuur van >a.

>c Kun je in beide gevallen de arbeidstijd bij een temperatuur van 26,5° bepalen, zonder de grafiek te tekenen? Zo ja, hoe?

>d A is de arbeidstijd in uren, t is het aantal graden boven de grens van 25° C. Welke van onderstaande formules is correct?

(1) $A = 8 \cdot 0{,}5^{t}$

(2) $A = 8 \cdot 0{,}5^{3t}$

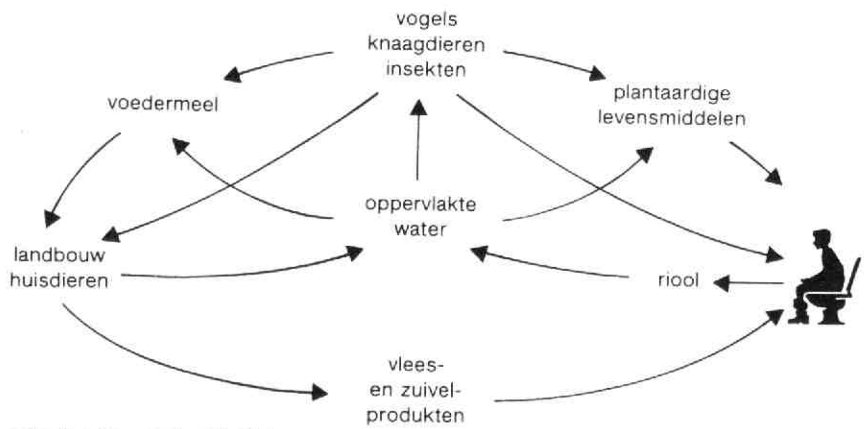
(3) $A = 8 \,.\, 0{,}5^{\frac{1}{3}t}$

De correcte formule heeft alleen betekenis voor $t = 0, 3, 6, 9$.

>e In >d stelt t de overschrijdingstemperatuur bij een grens van 25 ° C voor. Je kunt ook een formule maken voor het verband tussen A en de dagtemperatuur T.
Hoe ziet die formule er uit?

8. *Besmetting.*
Een van de middelen om besmetting van het voedsel door bacteriën te beperken is het koelen. Hoeveel invloed dat heeft op de vermeerdering van de bacteriën blijkt wel uit de (theoretische) tabellen.

BESMETTINGSKRINGLOOP



Bacterievermeerdering in relatie tot tijd

Tijd	Ongekoeld bewaren (delingstijd 20 min)	Gekoeld bewaren (delingstijd 60 min)
10.00	1	1
10.20	2	
10.40	4	
11.00	8	2
12.00	64	4
13.00	512	8
14.00	4.096	16
15.00	32.768	32
16.00	262.144	64
17.00	2.097.152	128
18.00	ca. 16.000.000	256
	ziek	gezond

>a Bij ongekoeld bewaren verdubbelt het aantal bacteriën elke 20 minuten. Controleer het aantal van 13.00 uur.

>b Het is natuurlijk om de delingstijd van 20 minuten als tijdseenheid te nemen.
$t = 0$ komt dan overeen met 10.00 uur en $t = 1$ met 10.20 uur.
Maak deze tabel voor het verband tussen A (aantal) en t (tijd) af.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A											

Geef ook een formule die A uitdrukt in t.

>c Bereken hiermee het aantal bacteriën om 14.40 uur.
Hoe is dat aantal ook te vinden door uit te gaan van het uit de tabel bekende aantal om 15.00 uur?

>d We nemen aan dat alle aanwezige bacteriën precies volgens het tijdschema de delingen voltooien.
Op welk tijdstip is dan de 100.000 gepasseerd?

Een formule van de vorm $y = a^x$ is alleen bruikbaar als je weet hoe het grondtal a en de exponent x gemeten worden
In de vorige opgave is $a = 2$ en $x = t$, met t gemeten in eenheden van 20 minuten: $A = 2^t$.
Als t in minuten wordt gemeten, moet de formule worden aangepast:

$A = 2^{\frac{t}{20}}$, die formule heeft betekenis voor $t = 0, 20, 40, ...$

>e Wat wordt de 'groeiformule' als t in uren wordt gemeten?

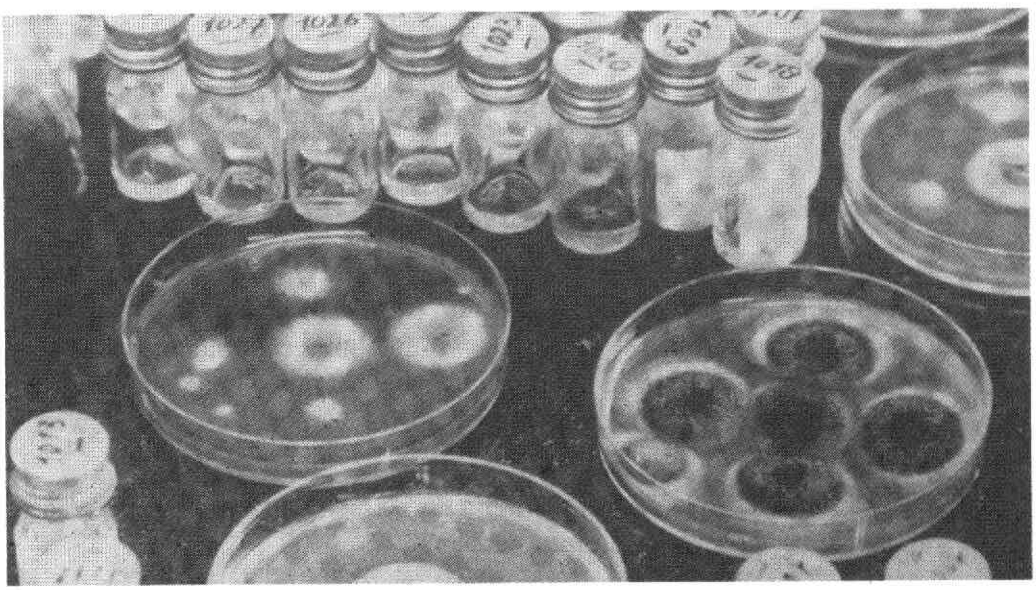
Het grondtal 2 is te vinden uit een tabel als in vraag >b.
De tabel kan ook gebruikt worden als we om de een of andere reden geïnteresseerd zijn in verviervoudigen. Het grondtal wordt dan 4.

>f Maak hiervoor een formule met een geschikte tijdseenheid.

>g Geef ook een formule voor de bacterievermeerdering bij gekoeld bewaren.

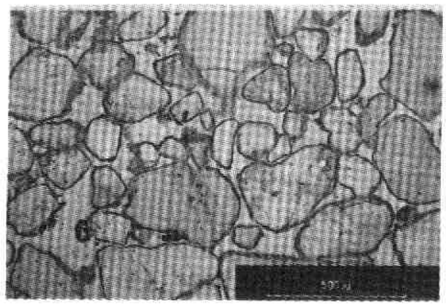
>h Als het passeren van de 16.000.000 bacteriën in beide gevallen ziek worden betekent, wanneer kan dat dan bij gekoeld bewaren verwacht worden?

>i Bedenk een formule voor het verschil in aantal tussen de ongekoelde en de gekoelde situatie. Kies een geschikte tijdseenheid



9. *Zand vertelt geschiedenis der Wadden.*

Onder de verzamelnaam 'Wadden' kennen wij een gebied, dat - na de vooroorlogse romantiek van Sil de Strandjutter en de toen nog tamelijk excellente vakantiegenoegens van relatief enkelen - heden ten dage internationaal wordt gekwalificeerd als een zeer bijzonder stukje van ons steeds dichter bevolkte land (zie de foto op de voorkaft). Er is een ware honger naar kennis van en over dit gebied. Vrijwel geen facet blijft zonder onderzoek. Geen wonder dat het toch ook wel nuttig werd geacht eens een gedocumenteerd antwoord te vinden op de vraag waaruit dit wonderlijke natuur-, vakantie- en woongebied nu eigenlijk is ontstaan. Het Geologisch Instituut van de Rijksuniversiteit Groningen heeft dit dan ook weer eens eventjes aangepakt. Er werden daartoe ruim 300 zandmonsters van de stranden en duinen van de waddeneilanden Texel tot en met Schiermonnikoog geanalyseerd.



Zandkorrels in doorsnee, ongeveer 70x vergroot.

Van zo'n zandmonster wordt een korrelgrootteverdeling gemaakt. Daarvoor gebruikt men een stapel zeven met verschillende maaswijdten. Die maaswijdten verschillen een constante factor. Een bekende serie is:

$\frac{1}{256}$ — $\frac{1}{128}$ — .... — 16 mm (met de constante factor 2)

>a Hoeveel zeven zijn er en uit hoeveel klassen zal de verdeling bestaan?

Voor strandonderzoek neemt men een reeks waarin voorkomt

.... — 595 — 500 — 420 — 354 — .... gemeten in µm

$1\ \mu m = 1 \text{ micrometer} = \frac{1}{1000}$ mm

>b Vul de reeks naar links en naar rechts met drie termen aan.

De stapel zeven wordt in een trilmachine gezet. Op bijvoorbeeld de zeef 420 blijft dan de zeeffractie 420 tot 500 mm liggen. In plaats van te tellen worden de zeeffracties gewogen. Vervolgens worden hun gewichten uitgedrukt in procenten van het gewicht van het hele monster. Uit de zo bepaalde korrelgrootteverdeling kunnen conclusies over de vorming van het zandgebied worden getrokken.

>c Bij deze methode van werken zijn de klassen niet even breed. Waarom zal men daar toch voor gekozen hebben?

10. Bij wijze van overzicht.

>a Hoe herken je de exponentiële regelmaat in een rij getallen?

>b Wat moet je weten om een formule voor een exponentieel verband te kunnen opstellen?

>c In welke maat moet de exponent worden gemeten?

2 Exponentiële groei

In het vraagstuk over de besmetting met bacteriën (hoofdstuk 1 opgave 8) bleek de groei volgens een exponentiële formule te verlopen.
In dit hoofdstuk gaan we nader in op die exponentiële groei.

1. Een kapitaal van *f* 1000 geeft 5% rente per jaar. Aan het eind van het jaar wordt de rente bij het kapitaal opgeteld, zodat het volgend jaar de rente over een groter bedrag wordt berekend. Deze procedure wordt nog enkele jaren met hetzelfde rentepercentage voortgezet.

   >a Maak deze tabel af:

	rente (gld)		kapitaal (gld)
	-	begin	1000
over het 1^e^ jaar		na 1 jaar	
over het 2^e^ jaar		na 2 jaar	
over het 3^e^ jaar		na 3 jaar	
over het 4^e^ jaar		na 4 jaar	
over het 5^e^ jaar		na 5 jaar	

   >b Het kapitaal na 5 jaar kan ook zonder al die tussenstappen berekend worden: $1000 \cdot (1{,}05)^5$ Verklaar dat.

   >c Hoe bereken je nu rechtstreeks het kapitaal na 17 jaar? Hoe groot is het dan?

   >d Geef een formule voor het kapitaal na *n* jaar.

   >e Na hoeveel jaar is het kapitaal verdubbeld?

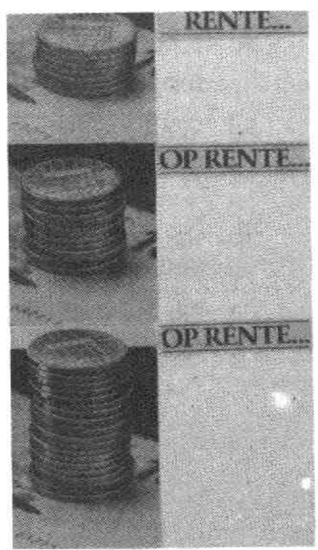
   >f Hoeveel jaar duurt het dan nog voor dat laatste kapitaal ook weer verdubbeld is?

2. Voor de rente nemen we p%. Het beginkapitaal stellen we op K_0 en het kapitaal na n jaar op K_n.

   >a De factor waarmee het kapitaal elk jaar vermenigvuldigd wordt is $(1 + \frac{p}{100})$. Verklaar dat.

   >b Bedenk een formule voor K_n

   >c 'Als het beginkapitaal twee keer zo groot is, dan is het eindkapitaal ook twee keer zo groot.'
   'Als het rentepercentage twee keer zo groot is, dan is het eindkapitaal ook twee keer zo groot.'
   Onderzoek of deze uitspraken waar zijn.

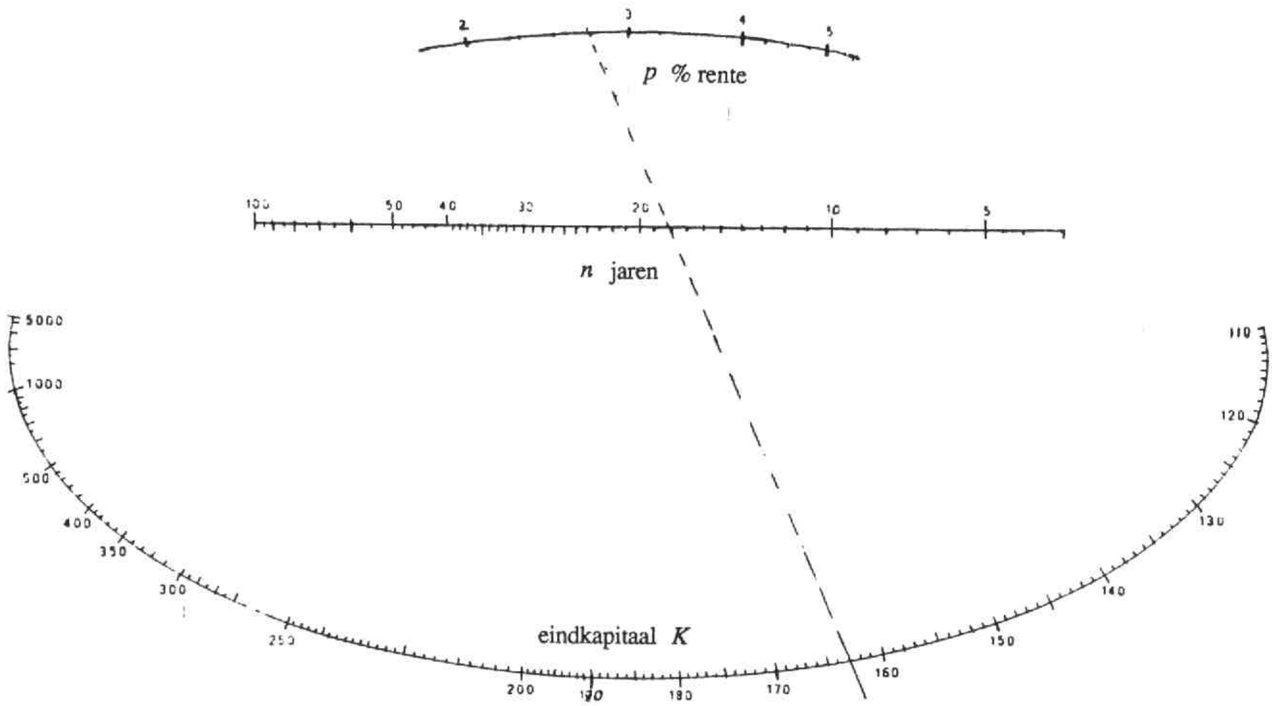


3. Om een indruk te geven van de kapitaalgroei, gebruikte men vroeger wel eens *nomogrammen.*

$K = 100 \cdot (1 + \frac{p}{100})^n$

Aan deze formule is te zien dat voor het beginkapitaal 100 is genomen.

Voorbeeld
Voor $p = 2{,}75$
en $n = 18$
is $K = 163$



Nomogram renteberekening

>a Kies enkele waarden voor p en n en lees de waarde van K af. Test de resultaten met een berekening.

>b Het nomogram is gebaseerd op een beginkapitaal van 100. Hoe kun je dat nomogram toch gebruiken voor een ander beginkapitaal?

>c Kies een ander beginkapitaal en een ander rentepercentage. Lees uit het nomogram het eindkapitaal af en controleer je antwoord met een berekening.

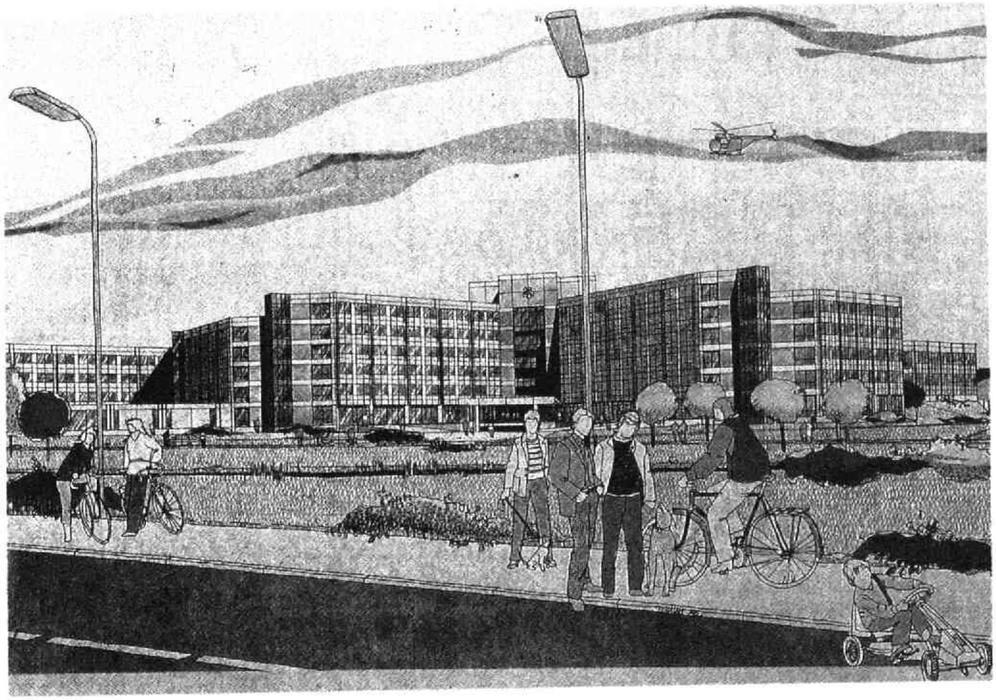
>d Welke soorten vragen kunnen met dit nomogram worden beantwoord?

>e Zijn de berekeningen uit opgave 1 met dit nomogram te controleren?

>f Na hoeveel jaar is een kapitaal verdubbeld als je het uitzet tegen een rente van 5%?

>g Na hoeveel jaar is een kapitaal (bij een rente van 5%) vier keer zo groot geworden?

4.



Op een groot terrein wordt een nieuw stadscentrum ontwikkeld. Dat zal niet meteen vol komen te staan met de bedoelde bebouwing.
Hierdoor ontstaat er een keuzeprobleem:

Laat je de grond braak liggen tot er een blijvend gebouw komt, of laat je een voorlopige bebouwing toe die later weer afgebroken moet worden voor de bedoelde bebouwing?

En deze mogelijkheden kunnen heel verschillende financiële gevolgen hebben. In de beslissing zal meespelen welke 'waarde' de grond al of niet met bebouwing heeft.

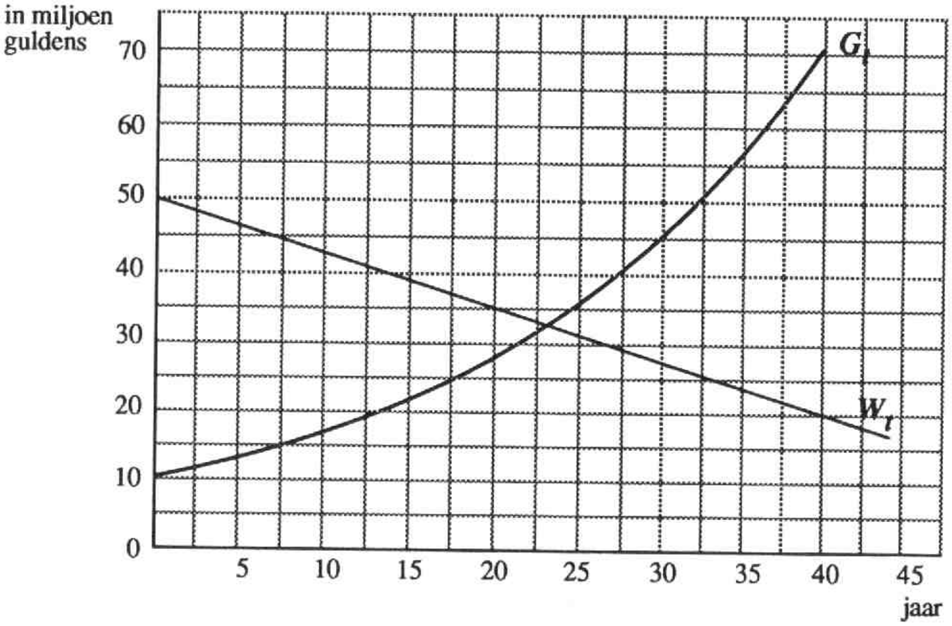
Braakliggende grond.
De grond wordt gekocht voor 10 miljoen gulden. Dat geld wordt geleend tegen een jaarrente van 5%. Na 1 jaar vertegenwoordigt de grond een kapitaal van aankoopprijs plus rente. Als er geen rentebetaling en aflossing plaatsvinden, moet de rente het volgend jaar dus over een groter bedrag worden berekend. Als dat zo door gaat neemt de 'waarde', dat wil zeggen het geld dat er in gestoken is, jaarlijks toe. Die waarde noemt men de *grondkosten.*

>a G_t stelt de grondkosten na *t* jaar voor.
Bepaal een formule voor G_t.

Grond met voorlopige bebouwing.
De grond met de bebouwing vertegenwoordigt op een zeker tijdstip een waarde van 50 miljoen gulden. Maar hier treedt waardevermindering op. Elk jaar neemt die waarde met 750.000 gulden af.

>b W_t stelt de *restwaarde* na *t* jaar voor.
Bepaal een formule voor W_t.

Een voor de hand liggende vraag is: wanneer zijn die twee waarden G_t en W_t even groot? (We laten de beginwaarden op hetzelfde tijdstip beginnen.) Daarvoor zijn de grafieken van G_t en W_t in één figuur getekend. Voor de duidelijkheid zijn ze doorlopend gemaakt.



>d Controleer enkele punten van de grafieken.

>e Schat het antwoord op de gestelde vraag met behulp van de grafieken en controleer of verfijn het antwoord met de rekenmachine.

5. **Vroege Mondriaan brengt na 27 jaar tienvoudige op**

Van onze kunstredactie

AMSTERDAM - De vroege Mondriaan die in februari van dit jaar opdook in Amsterdam, is gisteravond bij Sotheby in Amsterdam geveild voor 56.000 gulden. De door het veilinghuis geschatte waarde bedroeg tussen de 50.000 en 80.000 gulden.

Het schilderij, 'Vertrek van de vissersboot (Zuiderzee)', was een huwelijksgeschenk van Mondriaan aan J. Siedenburg, destijds directeur van kunsthandel Buffa in Amsterdam. Het is gesigneerd maar niet gedateerd. In 1961 kocht een Amerikaanse zakenman het werk bij veilinghuis Mak van Waay voor 5.000 gulden.

Mondriaan: zelfportret 1920

We veronderstellen dat de waarde van het schilderij elk jaar met een constant getal vermenigvuldigd wordt.

>a Wat vind je van deze schatting:
Zo omstreeks 1974/1975 was het schilderij ongeveer *f* 30.000 waard.

>b Klopt de kop van het artikel met de tekst?

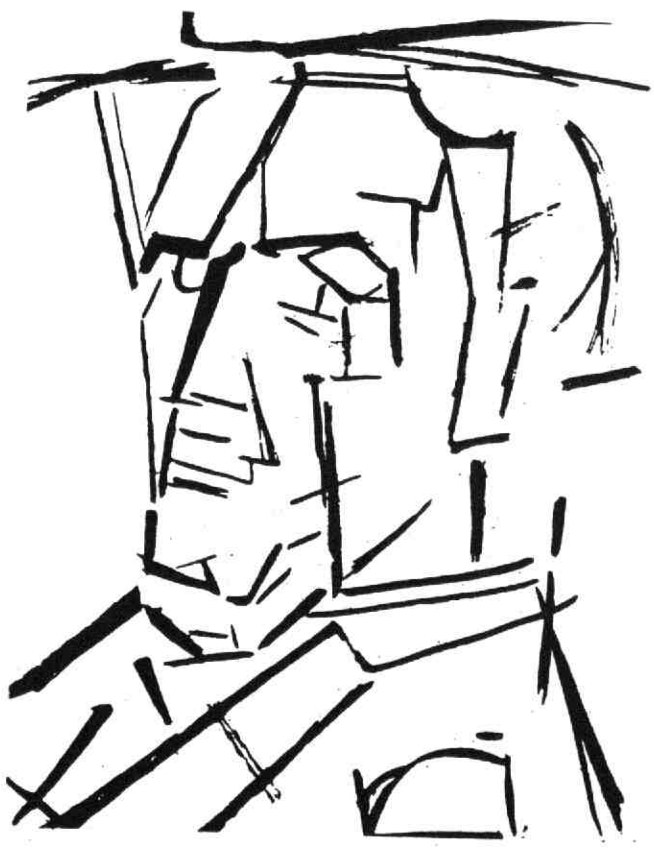
We gaan uit van de vermenigvuldigingsfactor van 10 per 27 jaar. Die zetten we om in een vermenigvuldigingsfactor per jaar. Noem deze factor g, dan is die te vinden uit de vergelijking $g^{27} = 10$.

>c Verklaar dat en bereken g in drie cijfers achter de komma.

>d Het antwoord zal bij invulling in g^{27} weer bij benadering 10 moeten opleveren.
Rond het antwoord voor g af op twee cijfers achter de komma en voer de controle uit.
Hoe groot is de afwijking?

>e Hoeveel zal het schilderij in het jaar 2000 waard zijn?

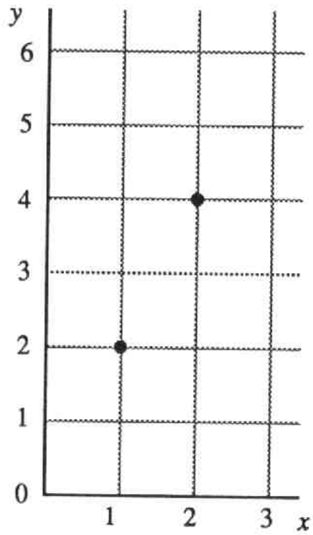
>f In welk jaar zal het 1 miljoen gulden waard zijn?

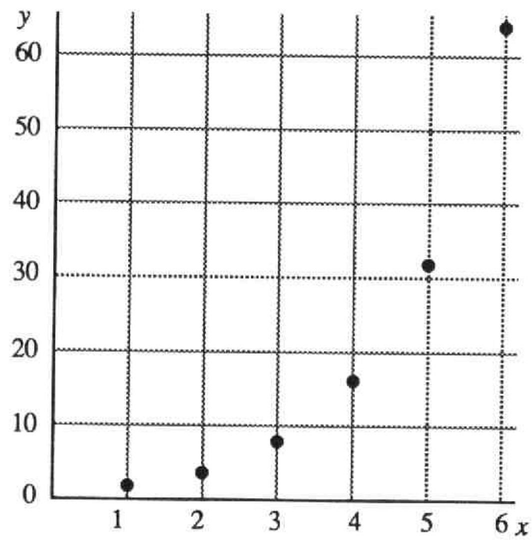


Mondriaan: zelfportret 1947

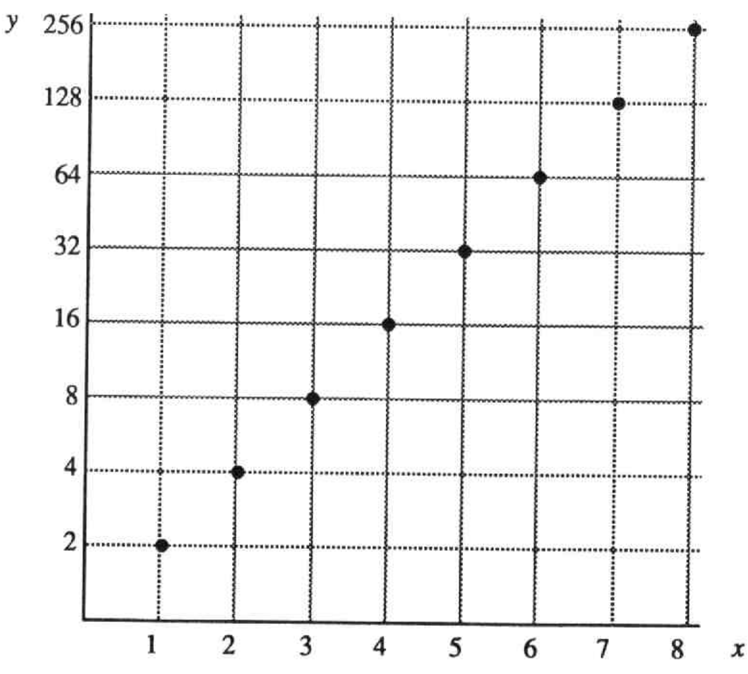
3 Een hoofdstukje theorie

Als je een behoorlijk aantal punten van de grafiek van $y = 2^x$ wilt tekenen, blijkt het papier al gauw te klein te zijn. Een verfijning van de schaalverdeling op de y-as kan een beetje helpen. Maar je kunt die verfijning ook weer niet te ver doorzetten, omdat dan de hoogteverschillen tussen de beginpunten te klein worden.





Bij onze grafieken betekenen gelijke stappen omhoog ook gelijke toenamen van y, waar je ook begint.
In het eerste plaatje betekent 1 cm omhoog dat y met 1, in het tweede plaatje dat y met 10 toeneemt. Als je in het tweede plaatje het punt met $x = 10$ zou willen tekenen heb je een vel van ruim 1 meter lengte nodig!
Bij de volgende manier van tekenen is het idee 'gelijke stappen, gelijke toenamen' verlaten.



1. Bekijk de grafiek onderaan blz. 14.
   Aan de y-as kun je zien dat stappen van 1 cm omhoog *niet* gelijke toenamen van y geven.

   >a Bekijk de stappen van 1 cm vanaf de hoogte 2.
   Welke betekenis kun je aan die stappen geven?

   >b Welke betekenis kun je geven aan stappen van 2 cm omhoog.

   De punten van de grafiek liggen mooi op een rechte lijn. Maar deze rechte lijn is voor het aflezen moeilijker dan een rechte lijn in de gewone situatie. De x-waarde 3 ligt precies midden tussen de x-waarden 2 en 4.
   In een gewone situatie zou je denken dat de y-waarde bij $x = 3$ precies in het midden zit tussen de y-waarde bij $x = 2$ en $x = 4$.

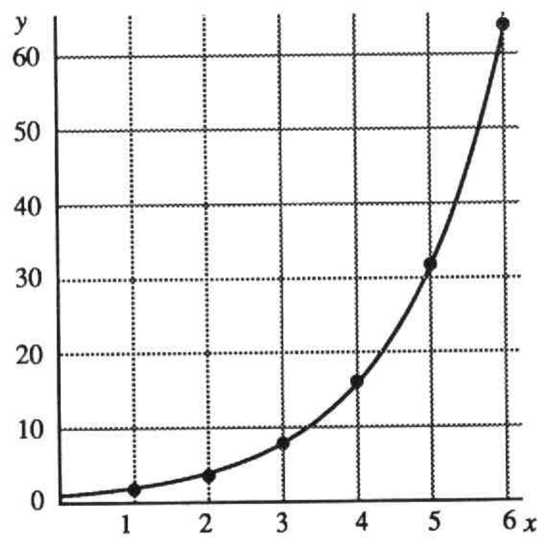
   >c Hoe zit dat hier?

   >d Met welke rekenkundige bewerking komt de daling van 1 cm overeen?

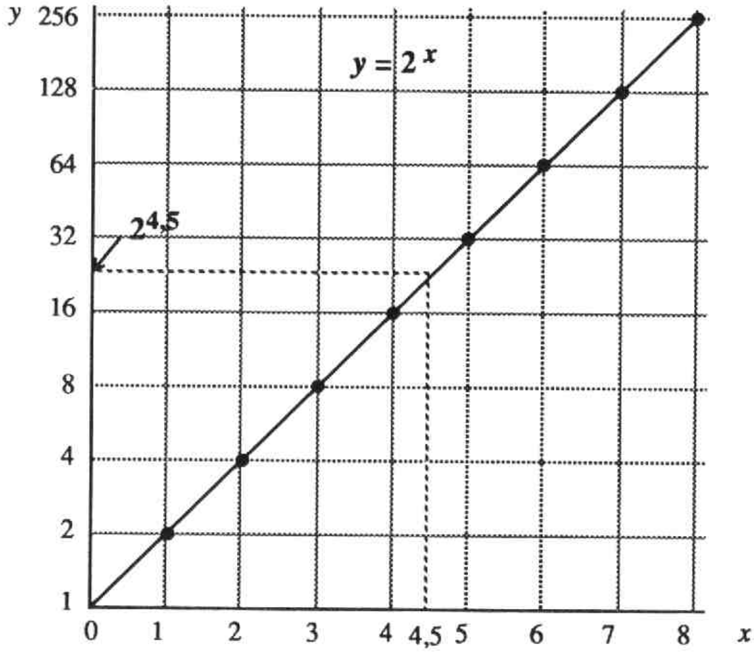
   >e Wat zou een mooi passende waarde voor 2^0 zijn?

   >f Teken in dezelfde figuur de grafiek van $y = 4^x$.
   Geef daarbij ook een betekenis aan 4^0.

In de gewone (dus gebogen) grafiek van $y = 2^x$ hebben we voor tussenwaarden van x de tekening uitgebreid tot een 'vloeiende lijn', wat dat dan ook mag zijn.
Eigenlijk hebben we daarmee een waarde gegeven aan bijvoorbeeld $2^{4,5}$. Bij aflezing blijkt die waarde dan misschien 22 te zijn. Maar bij een iets andere kromming 23.



2. Bij de grafiek in nieuwe stijl kunnen we het bij x = 4,5 behorende punt preciezer aanwijzen, als we afspreken dat $y = 2^x$ voor alle tussenwaarden die rechte lijn als grafiek heeft.



Er is echter wel een nieuwe moeilijkheid voor in de plaats gekomen: hoe moet je op de y-as aflezen?

>a Bepaal de uitkomst van $2^{4,5}$ met je rekenmachientje (in 1 decimaal nauwkeurig).

>b Hoort het midden tussen 16 en 32 bij een getal lager of hoger dan 24?

>c Bij welk getal op de x-as hoort het midden tussen 32 en 64?

3. Om de aflezing te vergemakkelijken is er speciaal papier in de handel: 'enkel logaritmisch papier'. Op het werkblad is een stukje van zo'n blad afgebeeld. Je ziet langs de verticale as een zogenaamde 'logaritmische schaalverdeling'.

>a Wat betekenen de bovenste 2 en 3?

>b Kies een niet te groot getal op de logaritmische as. Ga een aantal malen een vaste afstand omhoog en noteer de daarbij verkregen getallen.
Welke bijzonderheid vertoont deze serie?

4. Oefeningen met de nieuwe schaalverdeling (enkel logaritmisch papier).
(Gebruik voor deze opgave het werkblad)

>a Teken de grafiek van $y = 2^x$. Lees de waarden van $2^{0,5}$, $2^{2,5}$ en 2^{10} af en controleer ze met de rekenmachine.

>b Teken ook de grafieken van $y = 3^x$ en $y = 10^x$.

>c Benader met behulp van de grafieken de oplossingen van de vergelijkingen $2^x = 40$; $3^x = 500$; $10^x = 450$.
Probeer die benaderingen ook met de rekenmachine te vinden, maar dan wel nauwkeuriger.

>d Met dit papier (nog beter met twee blaadjes) zijn vermenigvuldigingen als $3 \times 8 = 24$ te maken. Hoe?
Aanwijzing: Een getal met 8 vermenigvuldigen kun je op dit papier uitvoeren door een geschikte stap omhoog te gaan

5. De rekenregels.
Vroeger heb je geleerd:
$2^3 \times 2^4 = 2^{3+4} = 2^7$
$2^7 : 2^4 = 2^{7-4} = 2^3$
$(2^3)^4 = 2^{3\times 4} = 2^{12}$

>a Controleer deze berekeningen.

De rekenregels zijn:

$2^a \times 2^b = 2^{a+b}$
$2^a : 2^b = 2^{a-b}$
$(2^a)^b = 2^{ab}$,waarbij a en b positieve gehele getallen zijn.

(en net zo voor andere grondtallen dan 2)
Deze regels blijken ook te gelden voor niet gehele exponenten.

>b Controleer dat met de rekenmachine voor $a = 3{,}7$ en $b = 0{,}5$.

Volgens de regels moet gelden:.

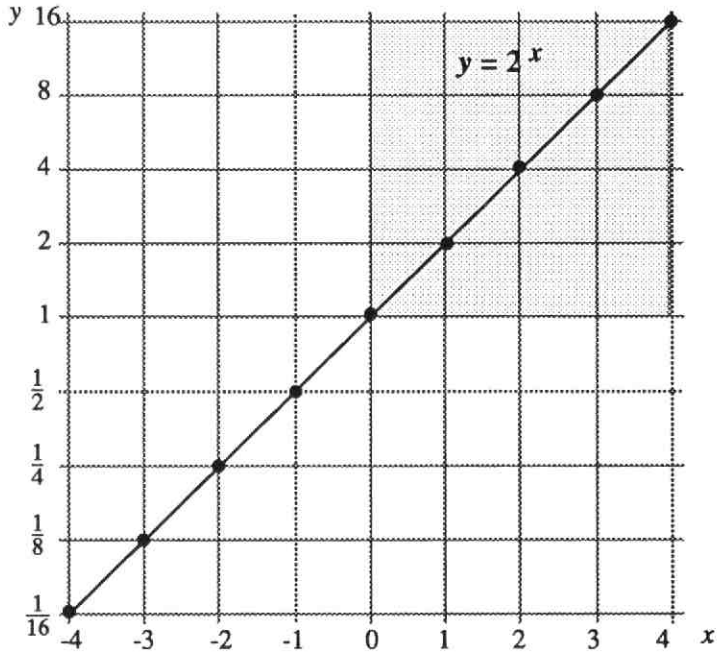
$$5^{\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 5^1$$

Met andere woorden $5^{\frac{1}{2}}$ in het kwadraat is gelijk aan 5.

>c Voor de hand ligt nu de veronderstelling: $5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$.
Controleer met de rekenmachine of dit klopt.

>d Bereken uit het hoofd $8^{\frac{1}{3}}$.
Als het niet lukt mag je de rekenmachine gebruiken, maar dan moet je wel verdedigen dat het antwoord juist is.

6. *Negatieve exponenten.*
Met dit plaatje zijn negatieve exponenten in 2^x te begrijpen.
De getallen langs de x-as zijn naar links voortgezet en die langs de y-as naar beneden.



grijs is 'oud'
wit is 'nieuw'

>a Welke regelmaat is bij die voortzetting in verticale richting gebruikt?

>b Je kunt de schaalverdeling in verticale richting naar beneden blijven voortzetten. Krijg je dan op den duur negatieve waarden?

>c In de grafiek lees je af $2^0 = 1$; $2^{-1} = \frac{1}{2}$; $2^{-2} = \frac{1}{4}$
Vul verder in :
$2^{-3} = \ldots\ldots$
$2^{-4} = \ldots\ldots$

>d Als je de uitkomst van 2^p weet, hoe kun je dan de uitkomst van 2^{-p} vinden?

>e Dezelfde methode kan ook voor andere grondtallen worden gebruikt.
Hoeveel is 3^{-4}; 10^{-5}; $(\frac{1}{2})^{-3}$?

7. >a Teken de figuur van opgave 6 over

>b Teken in dit plaatje ook de grafiek $y = (\frac{1}{2})^x$.
Dat is dezelfde als van $y = 2^{\cdots}$. Wat moet er op de stippen staan?

>c Door de lijnen volledig te maken heb je bijvoorbeeld ook $2^{-1,7}$ en $0.5^{-0,5}$.
Bepaal de waarden daarvan met de rekenmachine.

>d Controleer $2^{-3,6} \times 2^{5,8} = 2^{2,2}$.

Alle rekenregels voor exponenten blijken normaal door te gaan.

8. Door de logaritmische schaal kunnen zeer kleine en zeer grote getallen in één figuur worden gehouden, zoals uit dit voorbeeld blijkt. De getallen zijn de *exponenten* in 10^x. De lengte van de mens is dus ergens tussen 10^0 en 10^5 cm.

>a Klopt dat?

>b Bij de voorbeelden tussen 10^{-10} en 10^{-5} is iets misgegaan. Wat dan?

Logaritmische schaal (cm)

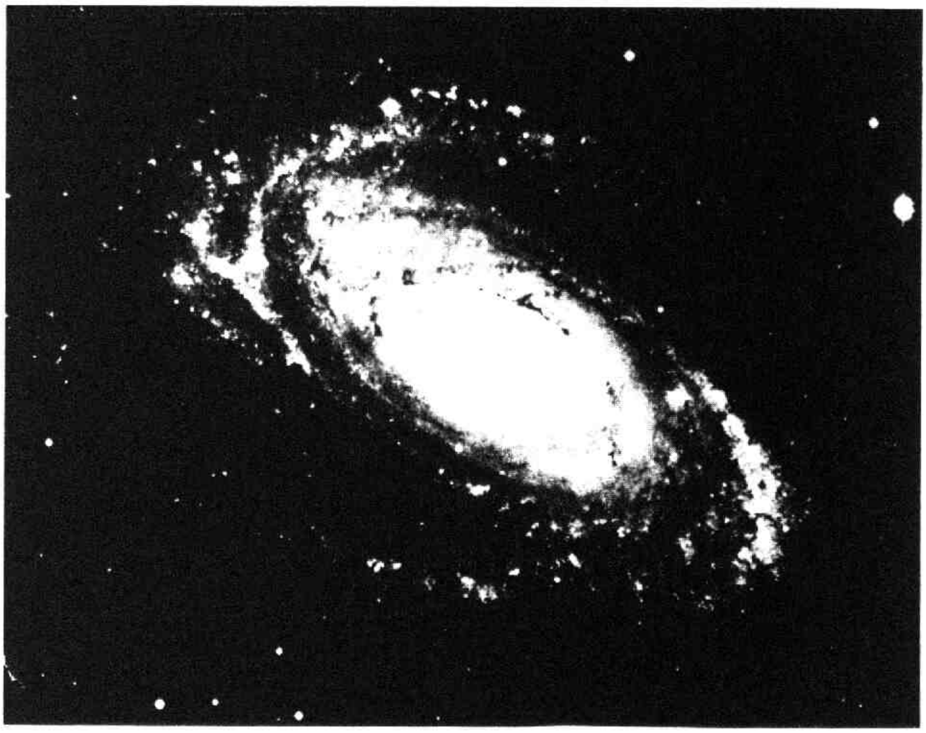
>c Bereken de afstand aarde-maan in km.

>d Op hoeveel km afstand staat de dichtsbijzijnde ster?

>e Het hoeveelste deel van een cm is de straal van een atoom?.

>f De kleinste protozoa meten 10^{-4} cm. Welke vergrotingsfactor is er nodig om een beeld van 1 m te krijgen?

>g De grenzen voor de lengte van een mens (tussen 10^0 en 10^5 cm) zijn wel erg ruim. Probeer die grenzen te verscherpen door exponenten op 1 decimaal te gebruiken.



Dit is de M81, een melkwegstelsel dat in het sterrenbeeld Grote Beer is te zien, uiteraard alleen met een telescoop. De afzonderlijke sterren op deze foto behoren tot onze eigen Melkweg. De afstand tussen dit Melkwegstelsel en onze Melkweg is circa:
65.725.410.000.000.000.000 kilometer

>h Waar hoort de genoemde afstand in de schaalverdeling te staan?

Opmerking:
Bij logaritmische schalen staan soms de werkelijke waarden en soms de exponenten. Zo had bij de tekening nieuwe stijl voor $y = 2^x$ langs de y-as kunnen staan 2^1, 2^2, 2^3, ... of 1, 2, 3. ....
Dat moet dan wel worden aangegeven om misverstanden te voorkomen.

Het resultaat van voorgaande theorie is:

> Bij exponentiële functies mag de exponent in principe elke waarde hebben. Als er beperkingen zijn dan worden die niet opgelegd door de wiskunde maar door het toepassingsgebied.
> Nu kunnen doorlopende grafieken worden getekend van verschijnselen die geleidelijk of in kleine stapjes verlopen.

De volgende vraagstukken geven een overzicht van zaken die bij andere functies ook wel eens ter sprake zijn gekomen.
Het gaat om de volgende technieken bij exponentiële functies.

I het tekenen van grafieken;
II het oplossen van vergelijkingen;
III het bepalen van horizontale asymptoten.

9. *Het tekenen van grafieken*

>a Teken in één figuur de grafieken van $y = 1{,}5^{x}$; $y = 1{,}5^{-x}$
$y = (\frac{2}{3})^{x}$ voor $-6 \leq x \leq 6$. Gebruik een gewone schaalverdeling langs de assen.

>b Welk meetkundig verband bestaat er tussen de eerste en de tweede grafiek?

>c Het resultaat van de tweede en derde grafiek doet vermoeden dat er twee keer dezelfde formule gegeven is, maar dan in verschillende verschijningsvormen. Is dat vermoeden juist?

>d $y = a^{x}$ kan afhankelijk van de gekozen positieve waarde van a een stijgende of een dalende grafiek opleveren.
Hoe ligt die keuze?

10. *Het oplossen van vergelijkingen*

De vraag voor welke waarde van x de y-waarde bij $y = 1{,}5^{x}$ gelijk is aan 3,6 voert tot het probleem:
Los op: $1{,}5^{x} = 3{,}6$
Als het antwoord niet zo precies hoeft te zijn, kan het uit de grafiek worden afgelezen.
Grotere precisie is met de PCB-methode op de rekenmachine te bereiken: Proberen-Controleren-Bijstellen-enz.

>a Bepaal x in 2 decimalen.

Als er geen beperking is gesteld is bij de PCB-methode het eind zoek. Dan moet je uit de omstandigheden opmaken waar je het beste kunt stoppen. Te denken valt onder andere aan de onnauwkeurigheid van de gegevens en het doel van het antwoord (De lengte van deze straat is 324,452 meter!).
De beperking voor x kan ook langs een omweg gegeven zijn, zoals in de volgende (theoretische) opdracht.

>b Maak opgave 8>g nu onder de voorwaarde dat het resultaat van invulling minder dan 1 cm van die 170 cm afwijkt.

Om de oplossing van $1{,}5^x = 3{,}6$ zonder proberen te vinden, heb je eigenlijk een exponentzoeker nodig. De rekenmachine heeft zo'n ding: de $\boxed{\text{log}}$-toets.
De truc werkt zo: $x = \frac{\log 3{,}6}{\log 1{,}5}$

>c Schrijf x op in zoveel decimalen als je rekenmachine geeft.
Is dit de 'echte' waarde van x?

Vergelijkingen die ontstaan zijn door het schakelen van formules.

Voorbereiding:
Om met de formule $y = 4 \cdot 3^{0{,}4x} + 7$ de waarde van y te berekenen voor $x = 5$, lees je de formule als een serie rekenopdrachten. Elke opdracht is te zien door in de formule hokjes te tekenen, van binnen naar buiten. Dus eerst om $0{,}4x$.

$$y = \boxed{\boxed{4 \cdot \boxed{3^{\boxed{0{,}4x}}}} + 7}$$

>d Ga na dat deze berekening kan ontstaan:

$$(x =)\ 5 \rightarrow \boxed{2} \rightarrow \boxed{9} \rightarrow \boxed{36} \rightarrow \boxed{43\ \ (= y)}$$

Voor het oplossen van de vergelijkingen ga je van buiten naar binnen.

voorbeeld: $y = 4 \cdot 3^{0{,}4x} + 7$. Hoe groot is x voor $y = 43$?

De stappen zijn:		of in algebrataal:
$\boxed{}$	$= 43$	$4 \cdot 3^{0{,}4x} + 7 = 43$
$\boxed{}$	$= 36$	$4 \cdot 3^{0{,}4x} = 36$
$\boxed{}$	$= 9$	$3^{0{,}4x} = 9$
$\boxed{}$	$= 2$	$0{,}4x = 2$
x	$= 5$	$x = 5$

Onderweg ontstaat dan een eenvoudige exponentiële vergelijking van de vorm:

$$\text{getal}^{\text{exp. met } x} = \text{getal}$$

In het voorbeeld dus $3^{0,4x} = 9$.

11. Bepaal x, eventueel afgerond op één cijfer achter de komma:
    >a $y = 0{,}75^{x} + 3$ en $y = 7$
    >b $y = 2^{-3x+7} - 4$ en $y = -3{,}75$
    >c $y = 3{,}2^{2x-6} - 4$ en $y = 16$

12. *Het bepalen van horizontale asymptoten*
    De grafieken van $y = 1{,}5^{x}$ en $y = 1{,}5^{-x}$ hebben al een duidelijke tendens voor hoge of lage waarden voor x, de y-waarde 0 te benaderen. $y = 0$ is dan een horizontale asymptoot. Dat is door proberen te vinden.
    >a Teken in één figuur de grafieken van $y = 2^{x}$ en $y = 2^{x} + 1$.
    Teken bij de laatste ook de horizontale asymptoot.
    >b Welke horizontale asymptoten zijn er bij deze 'ingewikkelde' gevallen?
    Het verdient aanbeveling om als controle de grafieken door een computer te laten tekenen.
    1. $y = 0{,}75^{x} + 3$
    2. $y = 2^{x} - 1$
    3. $y = 4 + 10^{-x}$
    4. $y = 4 - 5^{-2x}$
    5. $y = 10^{-2x+6}$

    >c Verklaar waarom de vergelijking $0{,}5 = 2^{x} + 1$ geen oplossing heeft.

4 Exponentiële functies in breder verband

1. Als voorbereiding op praktijkopgaven bekijken we het verband
$y = \frac{4}{1+2^{-x}}$ voor $x \geq 0$.

De berekening van y als x gekozen is verloopt in een serie stappen.

$$x \rightarrow 2^{-x} \rightarrow 1 + 2^{-x} \rightarrow \frac{4}{1+2^{-x}}$$

Als je een rijtje steeds groter wordende x-waarden invult in 2^{-x}, dan krijg je een dalend rijtje uitkomsten. We spreken af dat we het groter worden van een getal aangeven met ↗ en het kleiner worden met ↘

>a In telegramstijl krijg je

x ↗

2^{-x} ↘

$1 + 2^{-x}$ .....

$\frac{4}{1+2^{-x}}$ .....

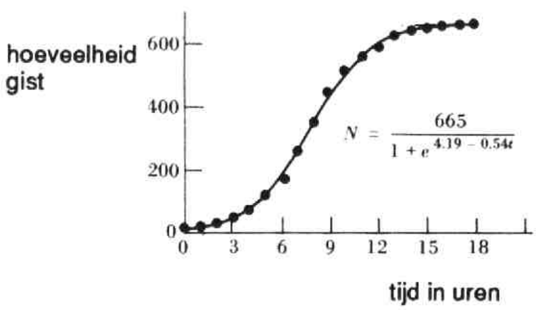
Maak deze lijst af.
Wat is er over de grafiek van het verband te voorspellen?

>b Teken die grafiek voor $0 \leq x \leq 10$. (Eventueel met de computer)
Wat verwacht je van de grafiek voor heel grote waarden van x?

>c Beredeneer dat bij doorgaande vergroting van x, de waarde van y steeds dichter bij 4 komt, zonder ooit 4 te worden.
Kan y zo dicht bij 4 komen als je maar wilt?

De lijn $y = 4$ is een horizontale asymptoot van de grafiek.

2. *Gistcellen*



de groei van een populatie gistcellen

Er wordt vaak gebruik gemaakt van het grondtal e dat ook op de rekenmachine voorkomt, of langs een omweg is te vinden.
Neem $e = 2{,}718$

>a Maak van de formule een lijst voor de stap voor stap berekeningen, te beginnen met t ↗ .

>b Controleer de grafiek voor $t = 6$ en $t = 12$.

>c Voor welke t is $N = 400$?

>d De grafiek heeft een horizontale asymptoot. Op welke hoogte ligt die en

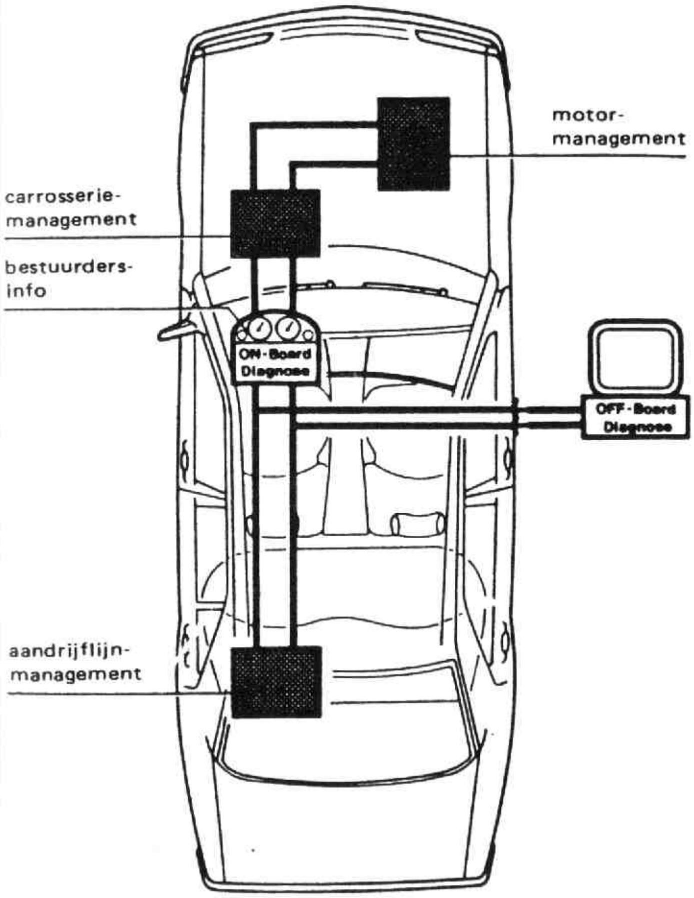
verklaar dat.

>e Men zegt dat bij deze vorm van groei 'verzadiging' optreedt. Heeft dat iets met de asymptoten te maken?

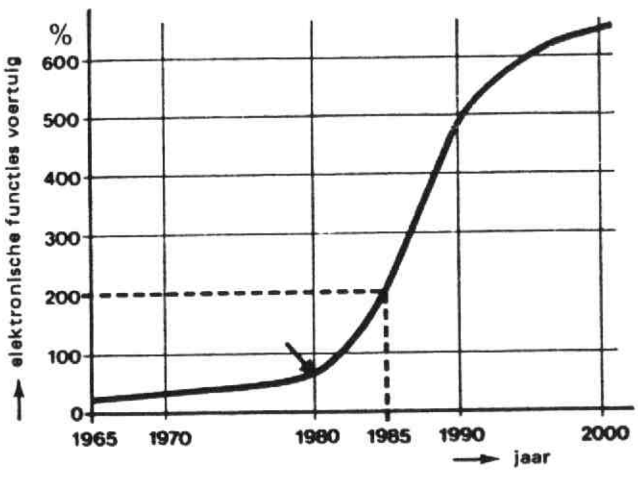
>f Wanneer is de groei het sterkst?

>g Verklaar de vorm van de grafiek met de omstandigheden van de groei.

3. *Elektronica in auto's*



Afb. 3 De 'cockpit als communicatie-centrum': management van motor, carrosserie en onderstel, zelfdiagnose en diagnose in de garage (VDO).



Groeicurve van het aantal elektronische functies (met het omslagpunt in 1980)

>a Is het omslagpunt hier hetzelfde als het buigpunt?

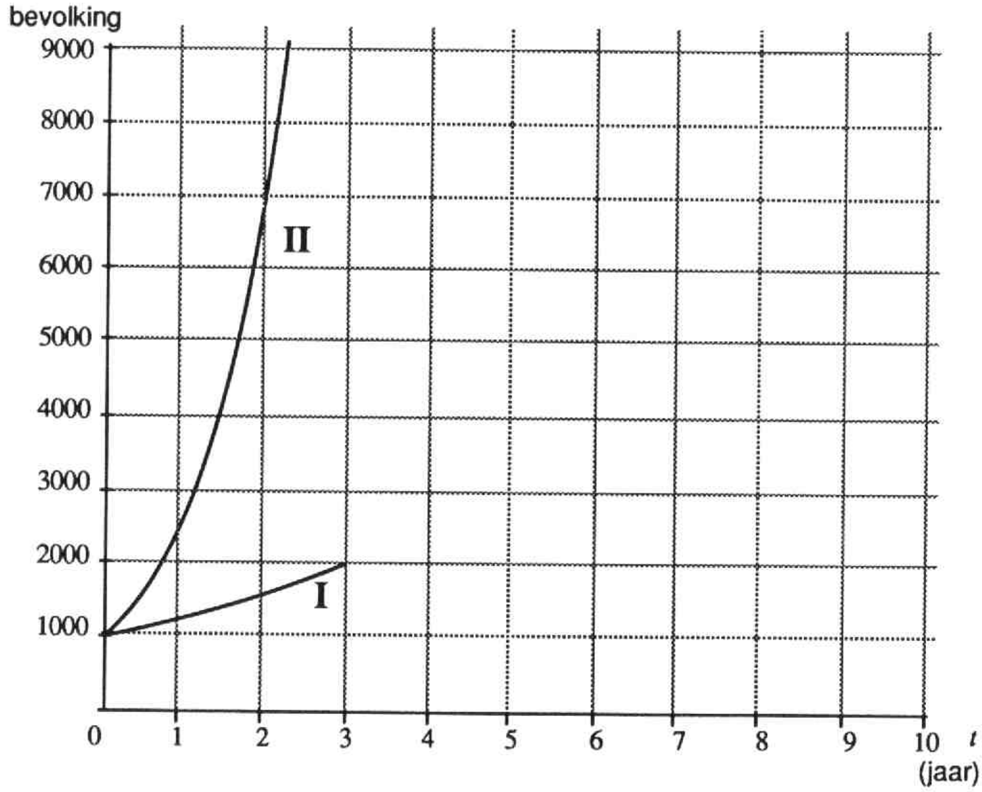
>b De grafiek lijkt op die van de groei van de gistcellen uit opgave 2. Is dat bijzonder toevallig of is daar een overeenkomstige verklaring voor te geven?

4. *Bevolkingsgroei*

We vergelijken een bevolkingsgroei van 26% per jaar met één van 0,4%. Bij die 26% kun je je voor de eerste jaren nog wel een voorstelling maken van de toename, maar bij die 0,4% is dat iets lastiger.
Formules als $N_t = N_0 \cdot (1{,}26)^t$ en $N_t = N_0\,(1{,}004)^t$ zeggen zonder berekeningen ook niet zoveel.
We gaan daarom een idee uit een vorig hoofdstuk wat nader uitwerken:
Hoe lang duurt het voor de bevolking is verdubbeld?
In het eerste geval treedt verdubbeling op als $(1{,}26)^t = 2$.
Met enig proberen is te vinden dat t ongeveer 3 is.
We noemen 3 jaar de *verdubbelingstijd*.

>a Bepaal de verdubbelingstijd in het tweede geval.

We gaan uit van een bevolking van 1000 en de formule $N_t = 1000\,(1{,}26)^t$. De grafiek hiervan (I) kan getekend worden door een aantal waarden van t in de rekenmachine in te voeren om de bijpassende waarden van N_t te vinden.
Maar het kan ook korter door gebruik te maken van de verdubbelingstijd



>b Neem grafiek (I) over en voltooi de grafiek tot $t = 9$ zonder de rekenmachine te gebruiken.

>c Een andere bevolking groeit volgens grafiek (II).
Bepaal indien mogelijk de verdubbelingstijd. (Er is controle nodig, maar je weet niet zeker of er een exponentieel verband tussen N en t bestaat.)

>d Hoe groot is het jaarlijks groeipercentage?

>e In plaats van de tijdseenheid van 1 jaar kan de verdubbelingstijd ook als eenheid genomen worden.
Bedenk daarvoor een formule.

>f *Doubling Time Equivalent to Annual Growth Rates .01 to .071*

Annual growth rate (%)	Doubling time (years)
.1	693
.15	462
.2	347
.3	173
.4	173
.5	138
.6	116
.7	99

Deze tabel poogt het verband tussen groeipercentage en verdubbelingstijd weer te geven. Controleer en verbeter zonodig deze tabel.

>g Men gebruikt ook wel de *vuistregel*:

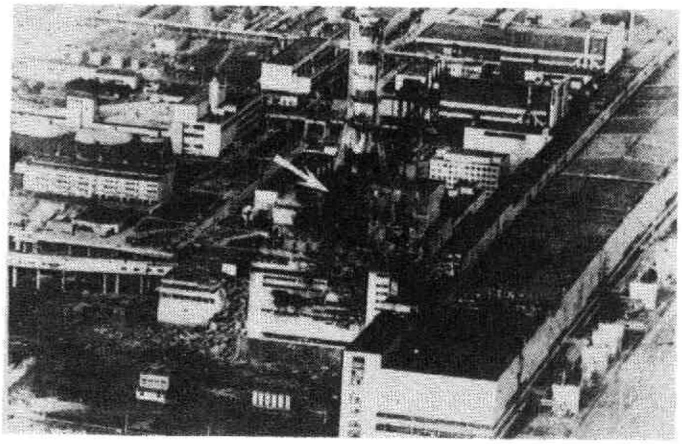
groeipercentage x verdubbelingstijd = 70

met jaar als tijdseenheid.
Klopt dat hier?

>h Een vuistregel mag meestal niet onbeperkt gebruikt worden.
Bij welke groeipercentages krijg je een fout van minstens 1 jaar in de verdubbelingstijd?

5. *Tsjernobyl*

Luchtfoto's van het reaktorgebouw in Tsjernobyl laten zien dat de ontploffing verwoestend is geweest. Een deel van de muren is ingestort. Enkele aangrenzende gebouwen zijn beschadigd. De pijl geeft de plaats van de eigenlijke reaktor aan, waar zich de brandende grafietkern bevond.



In 1986 vond er een explosie plaats in de kerncentrale van Tsjernobyl. Daarbij kwamen veel radioactieve stoffen vrij. De radioactiviteit van een stof neemt met de tijd af. Er bestaat een exponentieel verband tussen die radioactiviteit en de tijd.
In plaats daarvan wordt vaak een begrip gebruikt dat met verdubbelingstijd verwant is, namelijk *halveringstijd.*
Dat is de tijd waarin de straling met de helft afneemt.
Hierbij een overzicht van de bij het ongeluk betrokken stoffen.

Tabel 1 Inhoud van de kern van Tsjernobyl en fractie van geloosde radionucliden

element	halveringstijd	kerninhoud*	geloosde fractie
	(d)	(Bq)	(%)
KR-85	3930	$3{,}3 \times 10^{16}$	100
Xe-133	5,27	$1{,}7 \times 10^{18}$	100
I-131	8,05	$1{,}3 \times 10^{18}$	20
TE-132	3,25	$3{,}2 \times 10^{17}$	15
Cs-134	750	$1{,}9 \times 10^{17}$	10
Cs-137	$1{,}1 \times 10^{4}$	$2{,}9 \times 10^{17}$	13
Mo-99	2,8	$4{,}8 \times 10^{18}$	2,3
Zr-95	65,5	$4{,}4 \times 10^{18}$	3,2
Ru-103	39,5	$4{,}1 \times 10^{18}$	2,9
Ru-106	368	$2{,}0 \times 10^{18}$	2,9
Ba-140	12,8	$2{,}9 \times 10^{18}$	5,6
Ce-141	32,5	$4{,}4 \times 10^{18}$	2,3
Ce-144	284	$3{,}2 \times 10^{18}$	2,8
Sr-89	53	$2{,}0 \times 10^{18}$	4,0
Sr-90	$1{,}02 \times 10^{4}$	$2{,}0 \times 10^{17}$	4,0
Np-239	2,35	$1{,}4 \times 10^{17}$	3
Pu-238	$3{,}15 \times 10^{4}$	$1{,}0 \times 10^{15}$	3
Pu-239	$8{,}9 \times 10^{6}$	$8{,}5 \times 10^{14}$	3
Pu-240	$2{,}4 \times 10^{6}$	$1{,}2 \times 10^{15}$	3
Pu-241	4800	$1{,}7 \times 10^{17}$	3
Cm-242	164	$2{,}6 \times 10^{16}$	3

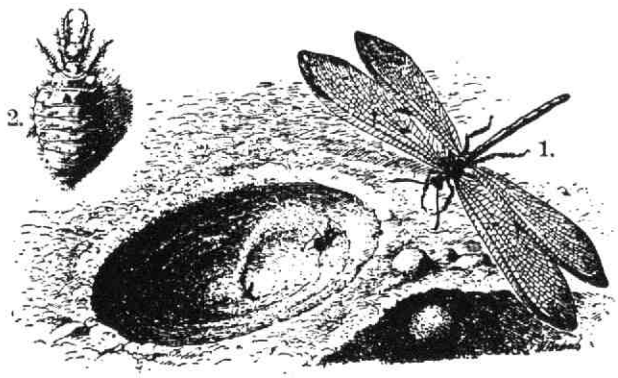
* Verval gecorrigeerd voor 1986-05-06 en berekend op de door de Sovjet-russische experts voorgeschreven wijze.

\>a Welk element heeft de grootste halveringstijd?
Hoeveel *jaar* bedraagt die halveringstijd?

\>b Welk deel van de stralingssterkte van Ce-141 is na een jaar bij benadering over?

\>c Bepaal een formule voor de stralingssterkte van Sr-89 als functie van de tijd.

6. *De mierenleeuw*



Ameisenjungfer.
1. Ausgebildetes Insekt. 2. Larve. 3. Trichter der Larve. Das Tier bewirft eine Ameise mit Sand. 4. Kokon der Puppe.

Om er achter te komen hoe mierenleeuwen een nieuw gebied in bezit nemen, voerde een bioloog het volgende experiment uit.
Hij liet op één plaats een aantal diertjes los en keek na verloop van tijd waar ze gebleven waren. Dat was niet zo moeilijk, want een mierenleeuw graaft een kuil om andere insekten te vangen door ze met zandkorrels te bekogelen.
Dat er in de buurt van het centrum meer exemplaren waren dan verderop was niet zo verwonderlijk. Het ging hem erom een zekere wetmatigheid in die verspreiding te ontdekken. Hij trok een aantal cirkels om dat centrum en telde hoeveel exemplaren zich binnen die cirkels bevonden. Hij vond een formule van de vorm.

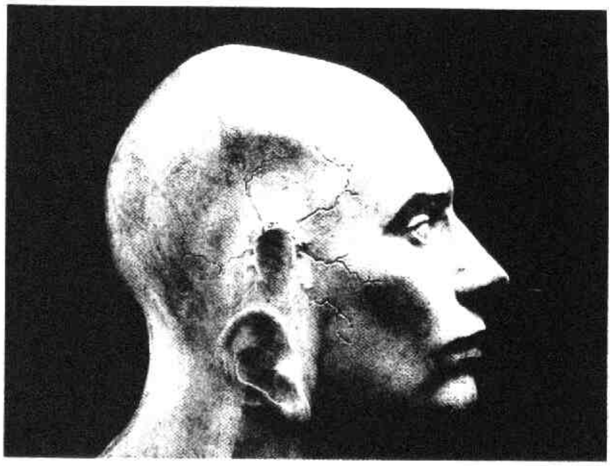
$F = N(1 - e^{-cA})$, waarbij
A = de oppervlakte van de gekozen cirkel.
c = een positieve constante
N = het aantal losgelaten exemplaren
F = het aantal binnen de gekozen cirkel gevonden exemplaren.

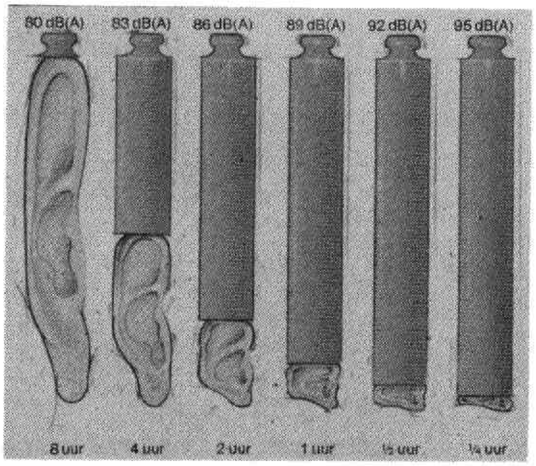
>a Noem enkele voorwaarden waaraan volgens jou een realistische formule moet voldoen en ga na of een formule van de gegeven vorm daaraan voldoet.

>b We bedenken nu zelf getallen voor de formule:
$N = 100$ en $c = 0{,}15$.
Neem voor de oppervlakte achtereenvolgens 1, 5, 10, 15, 20, 25, 30 (niet nader bepaalde) eenheden.
Teken de grafiek van F als functie van A.

>c Het resultaat zou in beeld gebracht kunnen worden door een stel cirkels met daarin stippen die mierenleeuwen voorstellen.
Beschrijf hoe zo'n plaatje zou moeten worden getekend.

7. *Gevaarlijk geluid*
Fragmenten uit een folder van de arbeidsinspectie

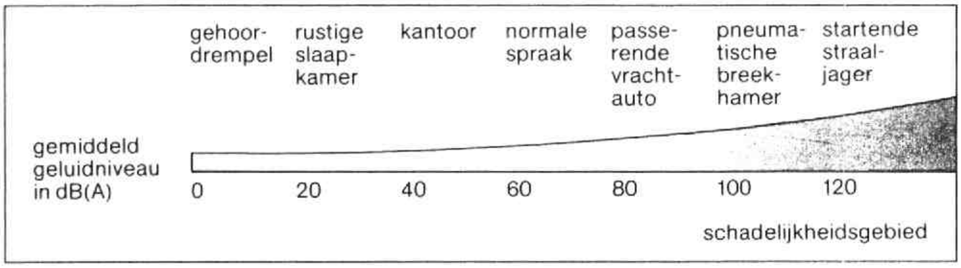




GEVAARLIJK GELUID
DAAR VALT WAT AAN TE DOEN

WANNEER IS GELUID GEVAARLIJK?

De gevaargrens voor het menselijk gehoor ligt bij 80 dB(A). Blijft de geluidssterkte onder dat niveau, dan is de kans op gehoorschade minimaal. Ook al staat men er 40 jaar lang, 8 uur per dag aan bloot.
Maar hoe verder de geluidssterkte boven die 80 dB(A) komt, hoe gevaarlijker het wordt. Ook de tijdsduur waarin men aan dat geluid blootstaat gaat dan een belangrijke rol spelen. Zo nu en dan een kwartiertje 85 dB(A) is geen probleem. Maar regelmatig een kwartiertje 100 dB(A) is beslist gevaarlijk!!
Boven de 80 dB(A) geldt de volgende regel:
Wanneer het geluidsniveau met 3 dB(A) verhoogd wordt, mag u er maar half zo lang aan blootgesteld worden: anders loopt uw gehoor gevaar. Dat betekent dus dat bij 83 dB(A) een blootstellings duur van 4 uur het maximum is. Bij 86 dB(A) is dat nog maar 2 uur, etc.

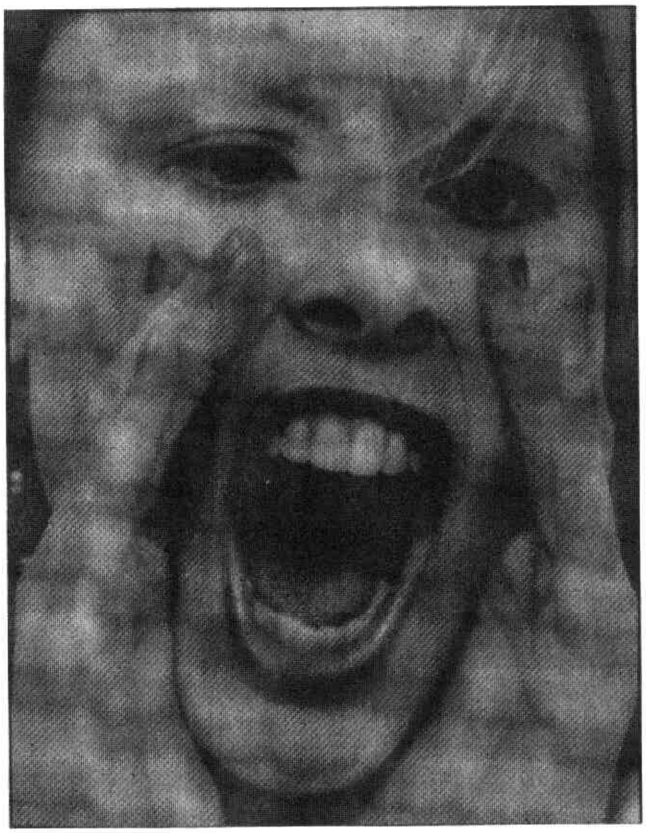


HOE HARD KLINKT 80 dB(A)?

Of geluid op de werkplek boven de 80 dB(A) komt, kan het beste worden vastgesteld met behulp van een speciale geluidmeter. Wie niet over een dergelijk apparaat beschikt kan een ruwe schatting maken aan de hand van het volgende. Moet u hard praten om u verstaanbaar te maken met iemand die op één meter afstand staat, dan kunt u ervan uitgaan dat u boven 80dB(A) zit. U kunt er ook zeker van zijn dat u in schadelijk geluid hebt gewerkt als u na het werk nog enige tijd een fluittoon of iets dergelijks blijft horen. Of als u de eerste uren na het werk moeite hebt met het verstaan van wat er op de televisie wordt gezegd of met het volgen van een gesprek. Dit zijn duidelijke signalen dat u boven de gevarengrens van 80 dB(A) bent geweest en dat er wat moet gebeuren.

>a Bepaal een formule waarmee voor elke geluidssterkte tussen 80 dB(A) en 95 dB(A) de toegestane blootstellingstijd berekend kan worden.

>b In deze tekst staan twee grafische voorstellingen van gegevens. Kun je daar een wiskundige betekenis in herkennen?



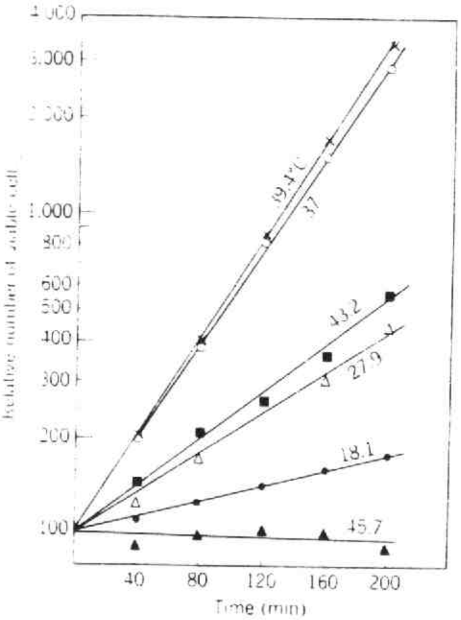
De beste schreeuwster van vijftig mannen en vijftig vrouwen. In Tokio heeft men een schreeuwwedstrijd gehouden en deze Nieuw-Zeelandse Anna Reeves werd winnaar met 120 decibel.

>c Bij deze foto mag je zelf de vraag bedenken.

5 Het aflezen van logaritmische schalen

In hoofdstuk 3 is de betekenis van de logaritmische schaalverdeling geïntroduceerd. Het belangrijkste kenmerk was: met gelijke afstanden corresponderen gelijke vermenigvuldigingsfactoren.
Hier volgen enkele oefeningen met grafieken waarvan één of beide schalen logaritmisch zijn.

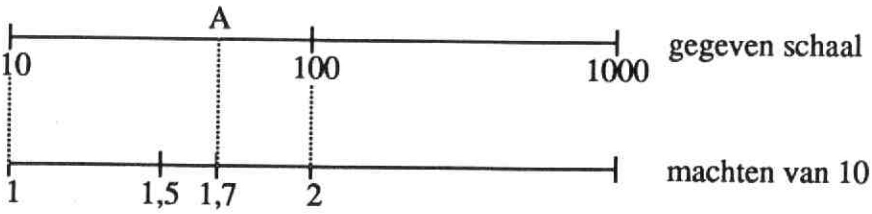
1. De resultaten van experimenten met de bacterie Escherichia coli zijn in deze grafieken weergegeven. De aantallen bacteriën waarmee de experimenten begonnen verschilden nogal (tussen 5400 en 18000 per cm^3 vloeistof). Daarom is alles teruggerekend naar een startwaarde van 100.



>a Beschrijf de invloed van de temperatuur op de groei.

>b Lees uit de grafieken van 43.2°, 39.4° en 18.1° de verdubbelingstijd af.

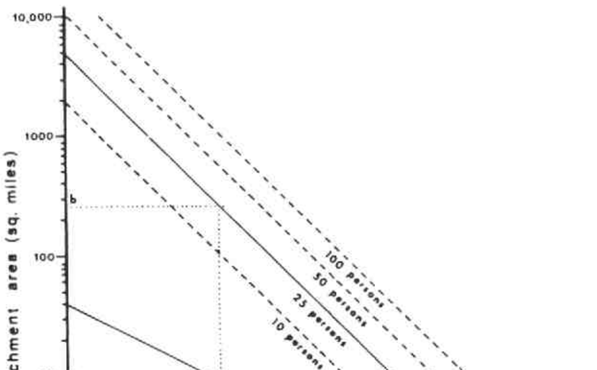
Opmerking
Als een logaritmische schaalverdeling te weinig deelstreepjes heeft om een gewenste nauwkeurigheid bij het aflezen te krijgen, dan kan de schatting op de volgende manier verbeterd worden.



Bij A hoort dan $10^{1,7} \approx 50$.

2. *Het jachtgebied*

Voor de bevolkingsgroepen die van de jacht leefden was de grootte van het vangstgebied erg belangrijk. Die grootte was natuurlijk afhankelijk van de grootte van de groep. Maar ook de gemiddelde bevolkingsdichtheid van de streek bleek van invloed te zijn.
In deze bundel grafieken is die samenhang voorgesteld.
Deze voorstelling is uiteraard veel exacter dan de werkelijkheid.



De gemiddelde bevolkingsdichtheid wordt gemeten in aantal personen per vierkante mijl.
Bijpassend wordt voor het vangstgebied het aantal vierkante mijlen genomen.
Voorbeeld: bevolkingsdichtheid 0,1 personen per vierkante mijl.
groepsgrootte 25 personen.
Nu is af te lezen: vangstgebied 250 vierkante mijl.

>a Hoe groot moet het vangstgebied zijn voor een groep van 100 personen bij een bevolkingsdichtheid van 5?

>b Bij een vangstgebied van 200 vierkante mijl hoort een groepsgrootte van 10. Wat is er van de bevolkingsdichtheid te zeggen?

>c Hoeveel personen horen bij een vangstgebied van 30 vierkante mijl als de bevolkingsdichtheid 2 is?

>d Neem een groep van 25 personen. Bij toenemende bevolkingsdichtheid daalt het vangstgebied. Wat voor daling is dat: een lineaire, toenemende of afnemende?

>e Vul voor een groepsgrootte van 10 personen de tabel in.

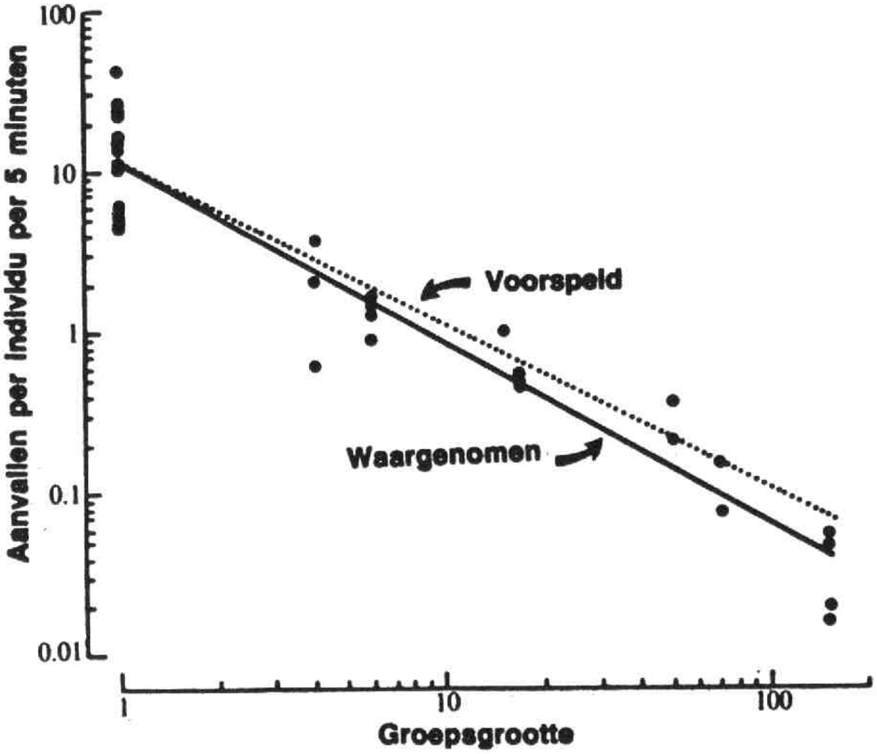
bevolkingsdichtheid	0,01	0,1	1	10
vangstgebied	...	...	...	...

>f De tekening van de grafieken heeft nog een extraatje.
Als je je het vangstgebied cirkelvormig voorstelt, kun je de straal van de cirkel aflezen (In het voorbeeld is dat 9 mijl).
Maak enkele controleberekeningen om na te gaan of bij de oppervlakten de juiste straal wordt gegeven (oppervlakte cirkel = πr^2).

3. *De veiligheid van de kudde*
Waarom zoeken sommige soorten beesten systematisch elkaars gezelschap? Voor de gezelligheid, zou je kunnen denken. Maar biologen zijn niet erg ingenomen met die manier van denken. Zij weten niet zo goed wat runderen of insekten onder gezelligheid verstaan.
Een mogelijkheid zou kunnen zijn dat het nuttig is gebleken voor het overleven.

Biologen die daarover hebben nagedacht, zijn onder andere gekomen op het 'verdunningseffect' als mogelijk belangrijke factor. Overleven is een kwestie van eten en niet opgegeten te worden. Als je in je eentje een roofdier tegenkomt dat honger heeft, is het een bekeken zaak. Ben je met je tweeën, dan heb je al vijftig procent kans dat het de ander pakt. En je hoeft niet vreselijk goed te kunnen rekenen om in de gaten te krijgen dat aansluiting bij een grotere groep, de kans op overleven bij zo'n ontmoeting zelfs heel comfortabel kan maken.
De redenering is glashelder. De vraag die bleef, was: werkt het nou echt zo?
Voor de vulkanische kust van het Isla Santa Cruz keken de Britten daar naar het insekt Halobates robustus, dat daar over het oppervlak van het zeewater loopt zoals ooit het Schrijverke van Guido Gezelle over de plas.
Een kwart tot een halve meter onder dat wateroppervlak zwommen in scholen jonge exemplaren van de vis Sardinops sagax, die Halobates met regelmaat op het menu hadden staan.
Een visje (ze waren een centimeter of vier lang) zwom dan snel naar boven, hapte naar een insekt en zwom snel weer naar zijn maten terug.
Aangezien een insekt door het spiegelende wateroppervlak heen geen vis ziet aankomen, deed zich hier een perfecte modelsituatie voor om het verdunningseffect zonder storende invloeden te bekijken.
De Britten keken telkens vijf minuten naar één loslopend insekt, of naar een groepje, waarvan de omvang uiteenliep van vier stuks tot meer dan honderd. En jawel, naar loslopende insekten werd in zo'n periode van vijf minuten gemiddeld tien keer gehapt, en naar leden van groepjes aanmerkelijk minder. Het aantal aanvallen per insekt was omgekeerd evenredig met de grootte van de groep, helemaal volgens de theoretische verwachting.
Om dit fraaie resultaat te bereiken, werkten de visjes wel ideaal mee. Je zou je namelijk kunnen voorstellen dat een hongerig visje bij voorkeur een grote groep insekten als doel kiest, omdat daar meer kans is om er een te pakken te krijgen. Dat zou de statistiek aardig in de war hebben gestuurd. Maar in de praktijk bleken grotere groepen als totaliteit niet systematisch vaker behapt te worden. De visjes reageren kennelijk alleen op het simpele signaal 'daar boven wriemelt iets eetbaars'.

Het uiteindelijke resultaat is in een grafiek gezet



De relatie tussen het aantal aanvallen per insekt en de grootte van de groep waar het zich in bevindt. Beide schaalverdelingen zijn logaritmisch (de afstand tussen 10 en 100 is even groot als de afstand tussen 1 en 10). De lijn die de waarnemingen het best benadert, heeft een helling van 1,12: geen noemenswaardige afwijking van de theoretisch voorspelde 1,00

>a Voor elke groepsgrootte bestaat er een bepaalde kans op een aanval.
Bereken die kansen voor deze tabel:

groepsgrootte	1	2	3	4	5	10	20	50	100
kans op een aanval op één insekt	1								

>b Bereken bij elke groepsgrootte het aantal aanvallen dat gemiddeld per 5 minuten op één insekt verwacht kan worden.

>c In theorie moet het aantal aanvallen per insekt omgekeerd evenredig zijn met de grootte van de groep.
Toon aan dat deze uitspraak uit de berekeningen volgt.

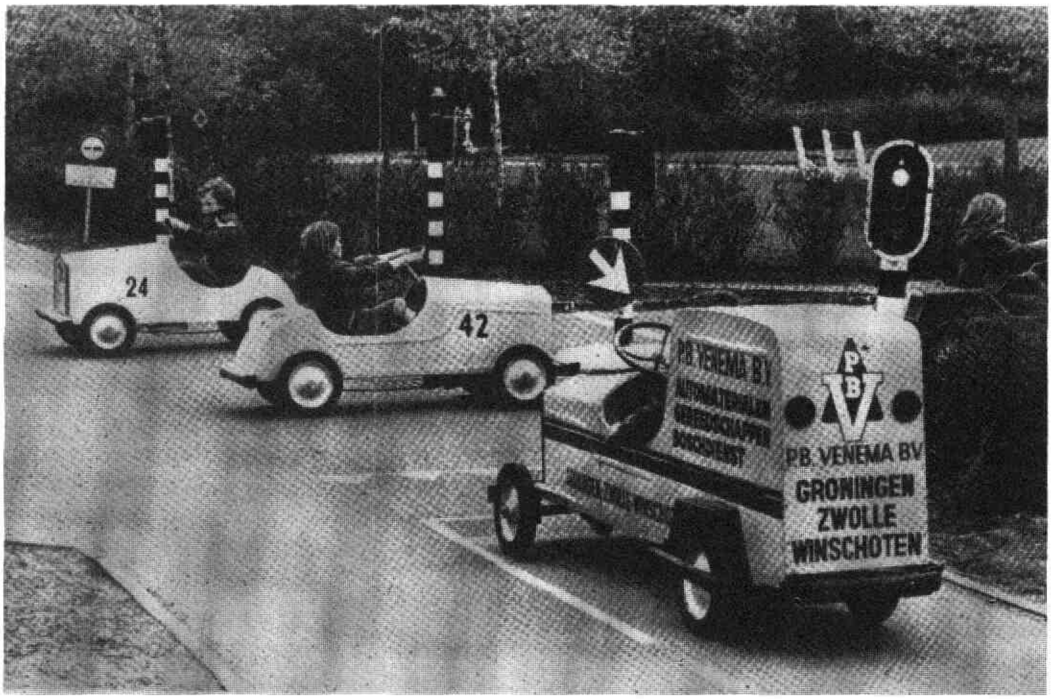
>d Stel een formule op voor het verband uit vraag >c.

>e Wordt de voorspelling redelijk bevestigd door het experiment?

>f Is het gebruik van logaritmische schalen hier zinvol?

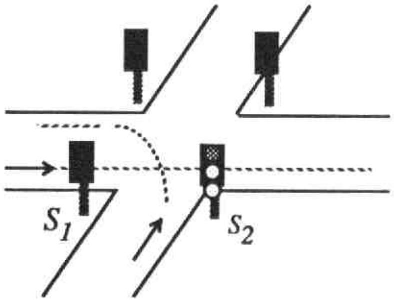
Opmerking:
Dit is een grafiek op dubbellogaritmisch papier.
Een rechte lijn wijst hier *niet* op een exponentieel verband, maar op een machtsformule $y = ax^b$.

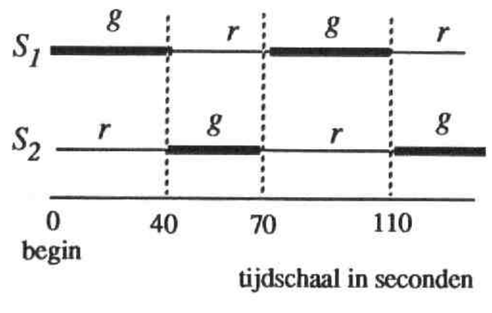
6 Schommelingen



Er zijn in het jeugdverkeerspark verschillende types wegkruisingen met of zonder verkeerslichten.

1. De regeling van verkeerslichten





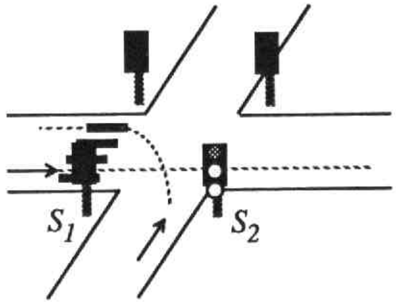
De verkeerslichten op dit kruispunt moeten uiteraard op elkaar afgestemd zijn. We bekijken een vereenvoudigde situatie.

- We nemen alleen de lichten S_1 en S_2 en beperken ons daarbij tot de aangegeven routes.
- We laten het gele licht weg.
  g = groen; r = rood.

Dit is een mogelijk regelingsprogramma. Na een aantal seconden herhaalt het spelletje zich. Die tijd noemen we de *periode*.

>a Hoe groot is de periode hier?

>b Hoe staan de verkeerslichten, 10 minuten na het begin?

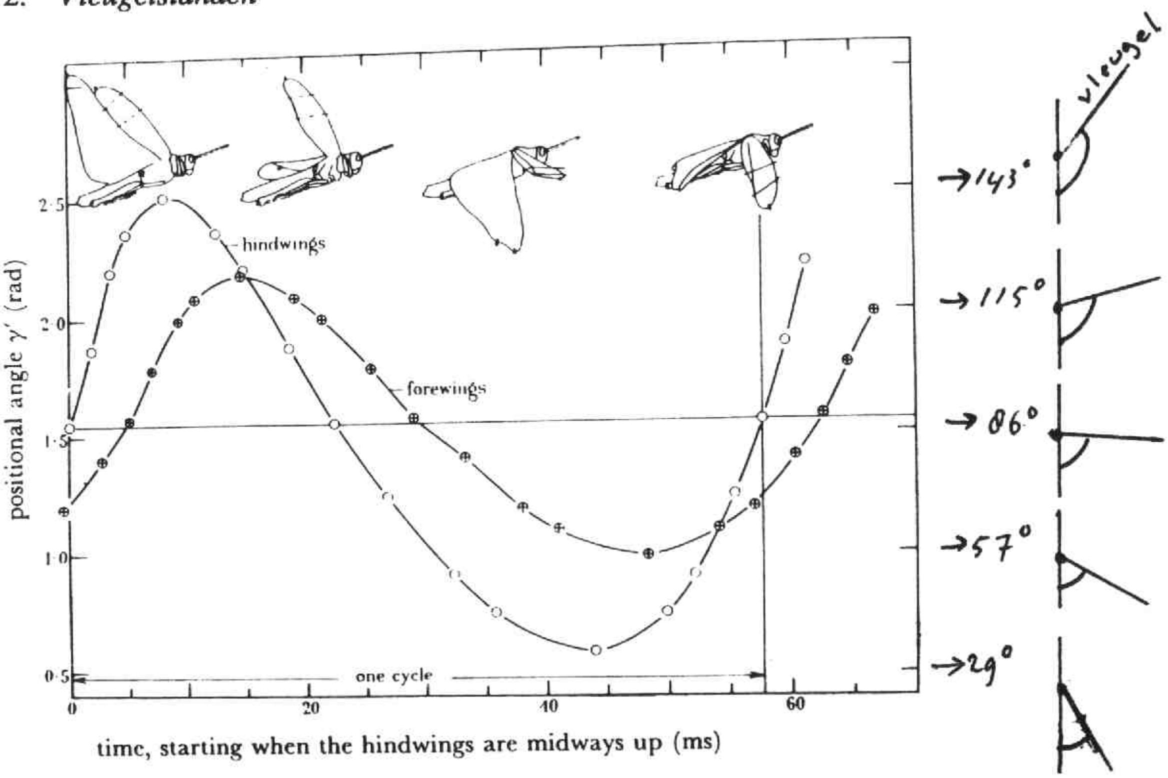


Er is een oversteekplaats aangelegd die bediend wordt door S_3. (Aan de paal van S_1 bevinden zich ook lampen van S_3.)
S_1 heeft groene intervallen van 40 sec.
S_2 van 30 sec.
S_3 van 20 sec.
De volgorde voor groen is S_1, S_3, S_2.

>c Teken twee volledige perioden van het regelingsprogramma.

>d Elk van de lichten afzonderlijk heeft ook een periode. In een regelingssysteem hoeven die perioden niet even groot te zijn.
Ontwerp een regelingsprogramma voor drie verkeerslichten die niet alle drie dezelfde periode hebben.

2. *Vleugelstanden*



Deze grafieken geven de standen van de voorvleugels en de achtervleugels van een vliegend insekt, gemeten ten opzichte van een verticale lijn. Aan de rechterkant zijn die standen met behulp van graden aangegeven. De bewegingen zijn periodiek.

>a Geef de lengte van de afzonderlijke perioden en voor de periode van het geheel.

>b Heeft het kiezen van een andere begintijd invloed op de periode?

>c Hoe vaak gaan de vleugels in 1 sec. op en neer?
(1 ms = $\frac{1}{1000}$ sec.)

>d Wat is de bedoeling van de lijn in de grafiek iets boven 86°?

>e Over hoeveel graden varieert de stand van de voorvleugels? En van de achtervleugels?

>f Na hoeveel tijd vanaf het begin zijn de voorvleugels voor de tweede keer in de hoogste stand?

>g Na hoeveel tijd vanaf het begin zijn de achtervleugels opnieuw in de laagste stand?

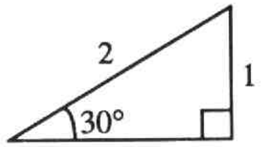
>h Een eenvoudige tekening van de standen kun je zo maken:

Maak zulke tekeningen voor de tijdstippen waarop de grafieken elkaar snijden en voor de tijdstippen vlak daarvoor en vlak daarna.

>i Schets de grafiek van de voorvleugels voor de eerste 55 ms, als het beestje kans ziet de vleugels tweemaal zo snel te bewegen.
Wanneer heeft de voorvleugel de grootste snelheid?

Het belang van het periodiek zijn van een verschijnsel zit in de herhaling. Als je weet wat er in één periode gebeurt, weet je het ook voor de volgende. Je kunt er dus goed mee voorspellen.
Aan grafieken is dat periodieke karakter mooi te zien. Tot nu toe zijn we geen formules voor zulke verschijnselen tegen gekomen, maar ze bestaan wel. In de volgende opgave staat hiervan een voorbeeld *ter illustratie*.

3. *Een periodieke functie op de rekenmachine*



Misschien weet je nog dat je vroeger hebt uitgerekend sin 30° = $\frac{1}{2}$. Voor het vervolg hoef je alleen maar te weten dat je bij het aantal graden van een hoek een getal kunt vinden dat de sinus van die hoek wordt genoemd. Met de rekenmachine kun je bij elke invoer van een aantal graden met de sin-toets een uitvoer krijgen.

>a Maak een grafiek voor dat verband van 0° tot 400°.
Gebruik stappen van 15°. De laagste en hoogste waarde die je zult vinden zijn -1 en 1.

>b Wat is de periode?

4. *Een beter systeem voor de weersvoorspelling*
Het K.N.M.I. zit er met de voorspellingen nogal eens naast. Daarom wordt hier een betere aanpak voorgesteld.
We gebruiken twee weertypen: *D* (droog) en *R* (regen).
Procedure:
- Neem van drie opeenvolgende dagen de weertypen.
  Voorbeeld: *D R D*.
- Als daarin precies twee keer de *D* voorkomt, dan treedt er van die derde naar de vierde dag geen weersverandering op.
- In alle ander gevallen verandert het weer wel.
- Herhaal deze werkwijze bij de laatste drie dagen.
  Voorbeeld: $\boxed{D\ D\ R}$ *R D R D D* ...

>a Controleer dit voorbeeld en voorspel het weer voor nog vijf dagen.

>b Het verloop van het weer in een drietal dagen kan heel verschillend zijn. Welke mogelijkheden zijn er?

>c We moeten voor elk van die gevallen weten hoe het in de toekomst zal gaan. Werk daarvoor een paar uit. Probeer nu, om deze opgave niet in strafwerk te laten ontaarden, een manier te vinden waarmee de oorspronkelijke opdracht snel kan worden uitgevoerd.

>d Eergisteren was het droog, gisteren regende het en vandaag ook alweer. Over 25 dagen ga je een week kamperen.
Wat voor weer zal het worden?

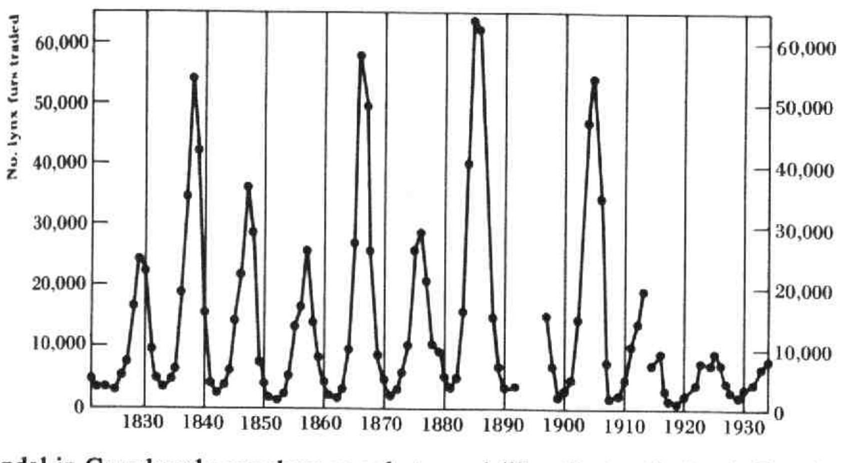
Een periodiek verband stelt een zeer streng gereglementeerde schommeling voor. In de praktijk komen veel verschijnselen voor waarin wel een zekere periode is te herkennen, maar waar in elke periode niet precies hetzelfde gebeurt.

5. *De lynx*

Luchs auf der Lauer.

Luchs = Lynx

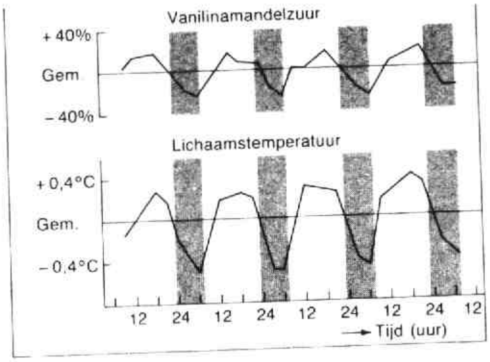
Een onderzoeker had het vermoeden dat het aantal lynxen in Canada niet zomaar schommelde, maar dat dat periodiek gebeurde. Een mogelijke periode enkele keren waarnemen zegt niet zoveel. Het kan ook toeval zijn.
Een Canadese maatschappij had al een paar honderd jaren in pelzen van de lynx gehandeld en daarvan waren de boeken nog voorhanden.
Zie hier de resultaten.



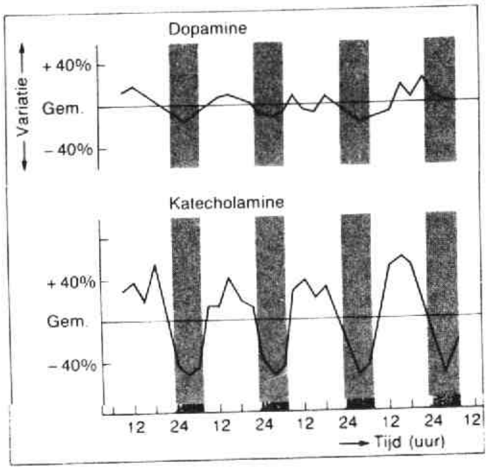
De handel in Canadese lynx pelzen voor het noordelijke district, Hudson's Bay Company, 1821-1913 en voor dezelfde streek voor de jaren 1915-1934 (uit Elton & Micholson 1942)

> Had hij hier iets aan?

6. Lichaamsprocessen van levende wezens vertonen vaak ook ritmen (de biologische klok).
De grafieken op de volgende bladzijde brengen dat in beeld. Hoewel het precieze verloop per periode iets kan verschillen is de periode duidelijk te herkennen.



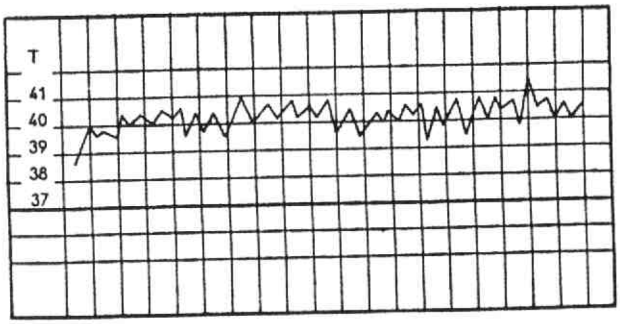
Heel wat fysische en chemische parameters (hier in de urine) in het menselijk lichaam schommelen cyclisch rond een evenwichtsniveau, waarbij zij gekoppeld zijn aan natuurlijke ritmen als de dag-nacht wisseling en de seizoenen.



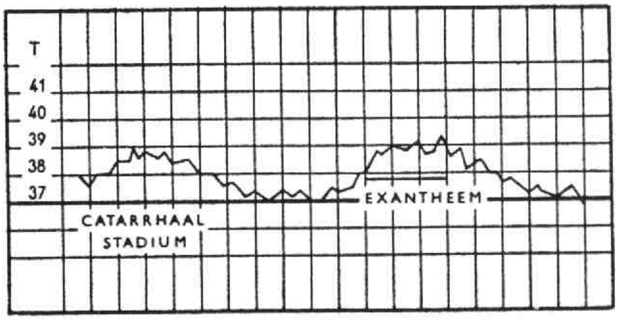
>a Hoe groot is die periode?

>b Wat is uit de ligging van de toppen af te leiden?

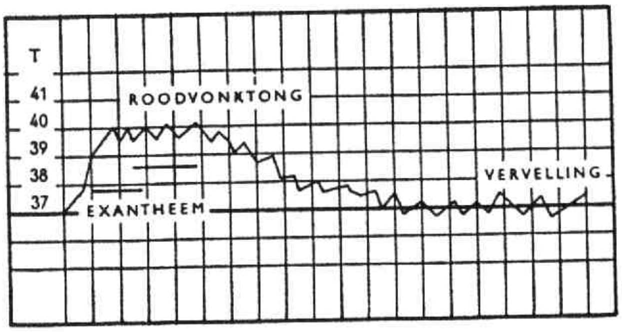
7. Afwijkingen van een gebruikelijk patroon kunnen een belangrijke aanwijzing voor ziekte zijn. In deze grafieken is het dagelijks ritme nog wel te herkennen, maar de 'evenwichtsstand' is ernstig verstoord.



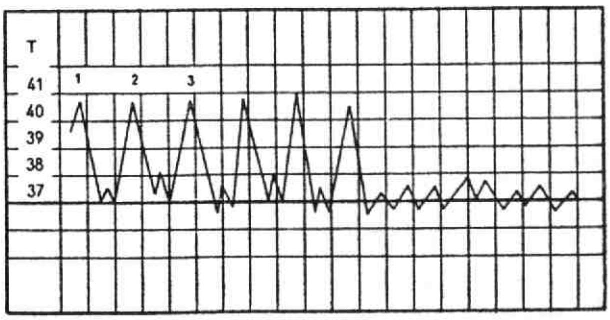
Koortsverloop bij bloedvergiftiging.



Koortsverloop bij mazelen.



Koortsverloop bij roodvonk.



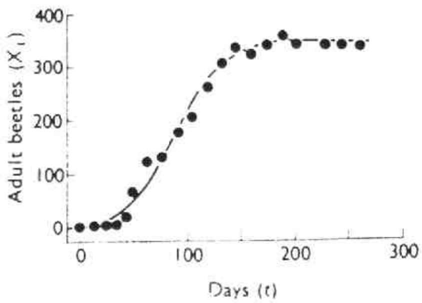
Koortsverloop bij Malaria tertiana (Derdedaagse koorts).

> Bij malaria is in de afwijkingen ook een eigen ritme te herkennen. Hoe groot is de periode daarvan en hoe groot is de schommeling?

8. *Concurrentie*

Wanneer veel kevers van dezelfde soort in hetzelfde gebied leven beconcurreren ze elkaar. Dat kan verschillende effecten hebben op het aantal individuen in de volgende generaties. In onderstaande grafieken staan drie van zulke effecten.

I



Adult beetles (*Rhizopertha dominica*) per 10 g of wheat grains. (Data from CROMBIE,

II

III

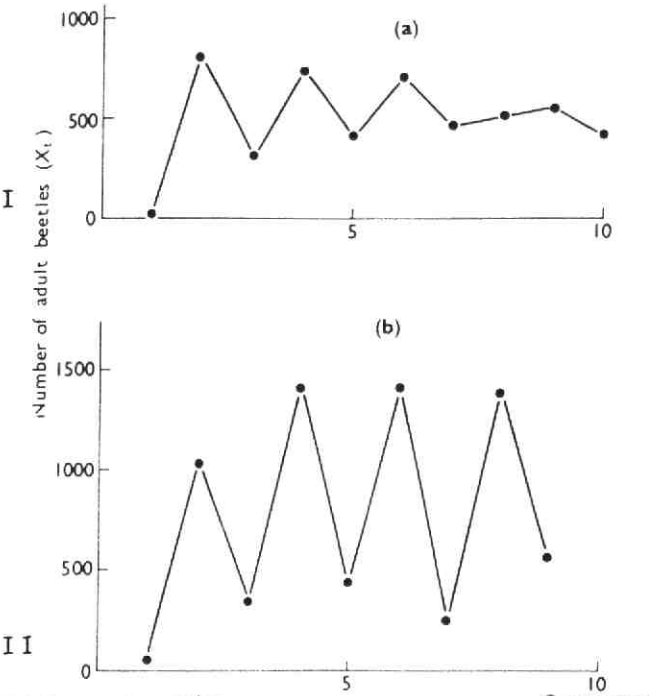


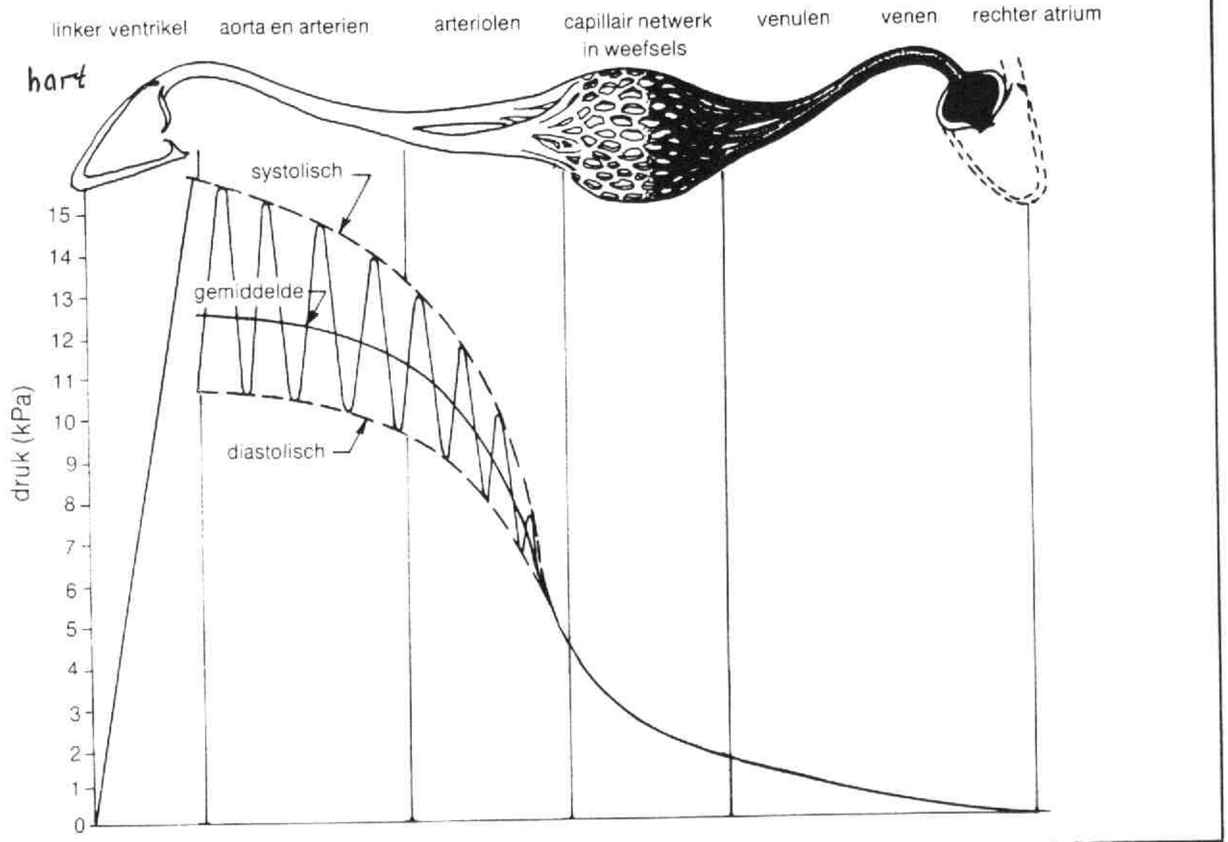
Fig. 2–7 Examples of single-species oscillations. (a) and (b) Two strains of the beetle, *Caliosobruchus chinensis*, under identical culture. (Data from FUJII, K. (1968), *Res. Popul. Ecol.*, 10, 87–98.)

Verschil in de felheid van de concurrentie is één van de oorzaken van de verschillen in de grafieken. Van I naar II naar III wordt de concurrentie steeds sterker.

>a Beschrijf de drie soorten van verandering van aantallen in de gevallen I, II en III.

>b Voor een situatie als in II gebruikt men wel de term 'demping'. Vind je dat een goede term?

9. *Bloeddruk en sport*
Het ontwikkelen van verantwoorde methoden van sporttraining vraagt nogal wat biologische kennis. Een van de onderwerpen die daarbij aan de orde moet komen is de bloeddruk.
Daarvoor volgt nu enige informatie.

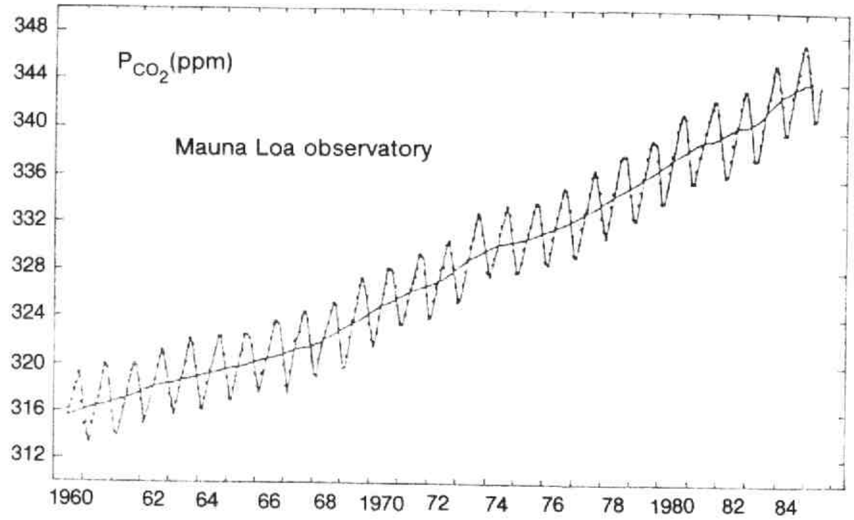


Het verloop van de bloeddruk over het vaatstelsel van de grote bloedsomloop. Bloed stroomt altijd van een plaats met hoge(re) druk naar een plaats met lage(re) druk. Merk op dat de druk (en dus ook de stroomsterkte van het bloed) in de arteriën en arteriolen schommelingen vertoont en dat deze schommelingen in het capillaire stelsel niet meer te zien zijn. De hoogste waarde van de druk noemt men de systolische druk, de laagste waarde de diastolische druk. Het gemiddelde van beide drukken is de gemiddelde arteriële druk.

>a Probeer de schommelingen en de demping daarvan te verklaren.

>b Wat is in deze tekening het 'nut' van de grafiek van het gemiddelde?

10. CO_2 in de atmosfeer



Verloop van de CO_2-toename sedert 1958 volgens metingen van dr. CD Keeling, Scripps Inst. of Oceanography, La Jolla, VS. De seizoenvariaties worden verklaard door CO_2-assimilatie gedurende de zomer en het ontwijken van CO_2 uit bodems gedurende de resterende periode van het jaar

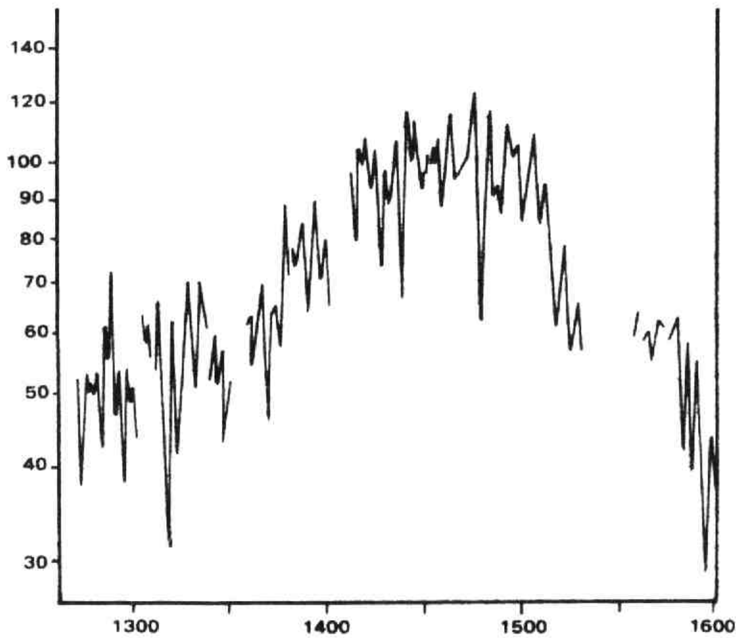
>a Zijn de in de tekst genoemde bijzonderheden in de grafiek terug te vinden?

>b Als je de invloed van de mens wilt benadrukken, dan moet je de seizoenschommelingen buiten beschouwing laten. Je krijgt dan bij benadering een rechtlijnige grafiek.
Bepaal een formule voor die grafiek.

>c Die lijn geeft de *trend* van het verloop van het CO_2-gehalte weer.
Hoe kun je die trend in woorden beschrijven?

11. Het inkomen van een bouwvakker was nogal onderhevig aan schommelingen. Toch is er in de loop der tijden wel een zekere trend waar te nemen.

A depression of the Renaissance?



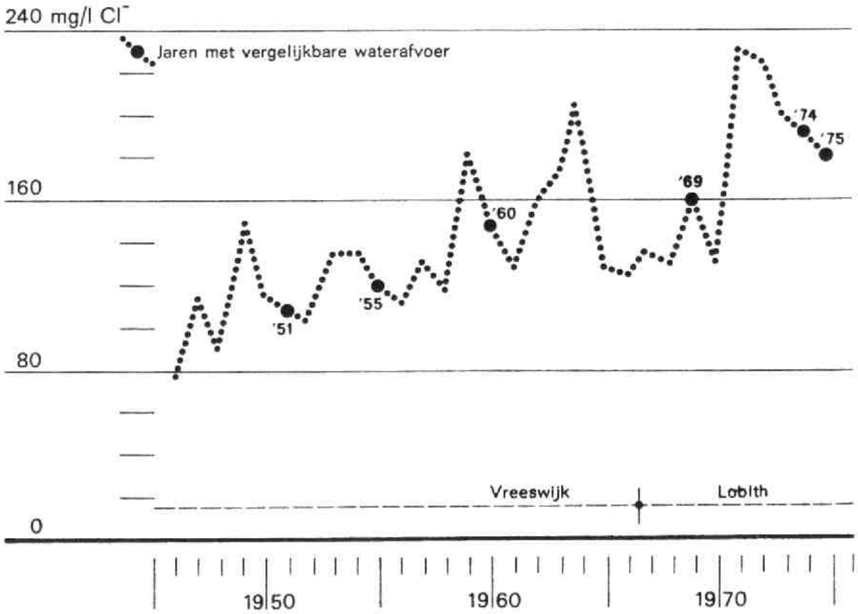
Het inkomen van een bouwvakker uitgedrukt in consumptiegoederen in Zuid-Engeland

>a Beschrijf die trend.

>b Heb je een vermoeden waarom geschiedkundigen in zo'n grafiek geïnteresseerd kunnen zijn?

12. De verontreiniging van de Rijn is niet nieuw!

Chloridegehalte van het Rijnwater 1946-1975.



Omdat droge en natte jaren een aanzienlijke invloed op de meetcijfers hebben zijn grafieken in de jaren met eenzelfde gemiddelde afvoer als 1975 met een grote stip aangegeven. De ligging van deze stippen ten opzichte van elkaar geeft een redelijke indicatie voor de trend van de verontreiniging. Bij het interpreteren van de grafieken moet bedacht worden, dat het gaat om jaargemiddelden. De extreme waarden geven een nog ongunstiger beeld.
Bij een aantal stoffen, te weten zuurstof, totale hardheid en ijzer, is omstreeks 1970 het dieptepunt gepasseerd. Wat het zuurstofgehalte betreft is dit vooral te danken aan de bouw van de mechanisch-biologische afvalwater-zuiveringsinstallaties, waarvan de positieve invloed langzaam maar zeker merkbaar wordt.

Bij een tweede groep van stoffen zoals chloride, sulfaat en ammonium is van 1946 tot 1974 een voortdurende achteruitgang te zien geweest met een duidelijke verbetering in 1975. Ook bij andere stoffen zijn in 1975 vaak aanzienlijke verbeteringen opgetreden. Dit was onder andere het geval bij het smaakgetal, lindaan, hexachloorbenzeen, fenol en olie.
Dit moet waarschijnlijk in hoofdzaak worden toegeschreven aan de economische recessie, die tot een vermindering van de industriële produktie en daarmee van de hoeveelheid afvalwater leidde.

>a Hoe hebben droge en natte jaren invloed op de meetcijfers?

>b Welke trend heeft de chlorideverontreiniging?

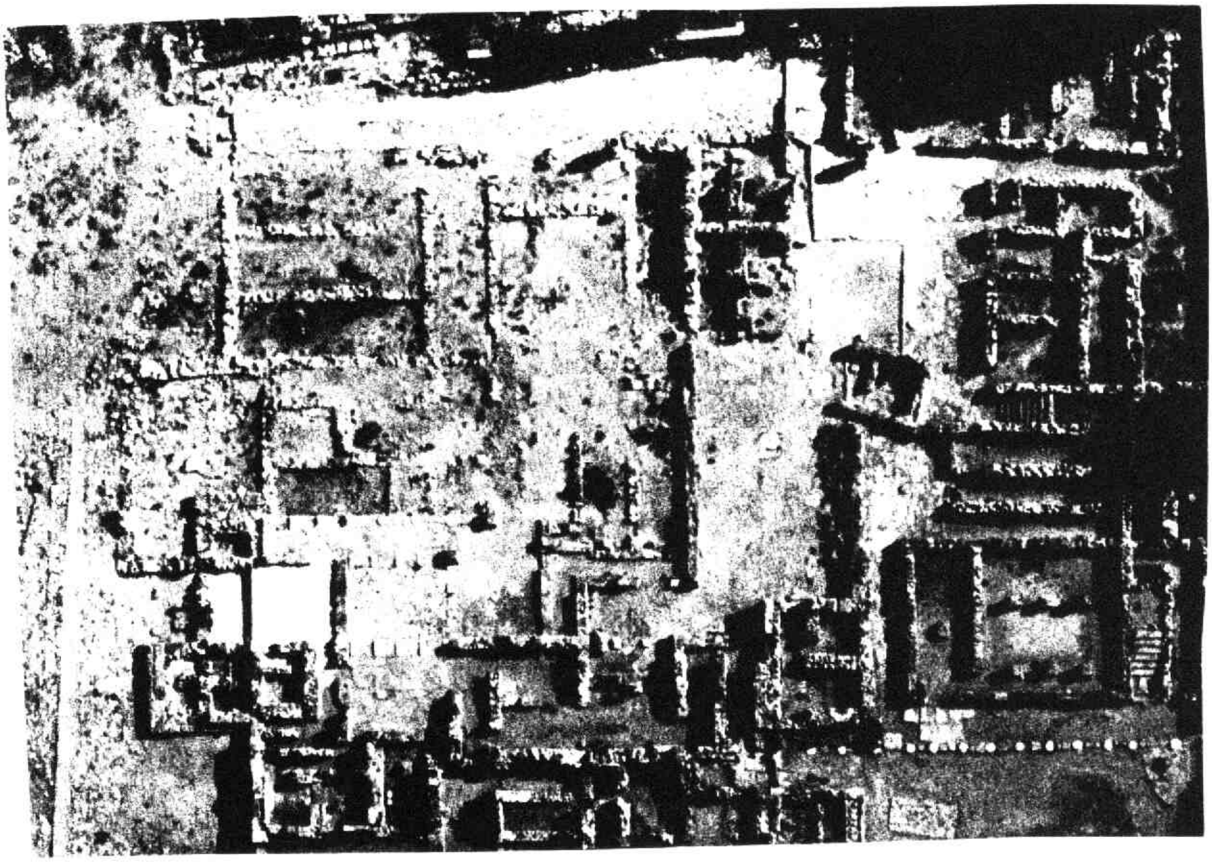
>c Waarom moet er bedacht worden dat het om jaargemiddelden gaan?

>d In welk opzicht geven de extreme waarden een nog ongunstiger beeld?

>e Controleer de tekst met behulp van de grafiek.

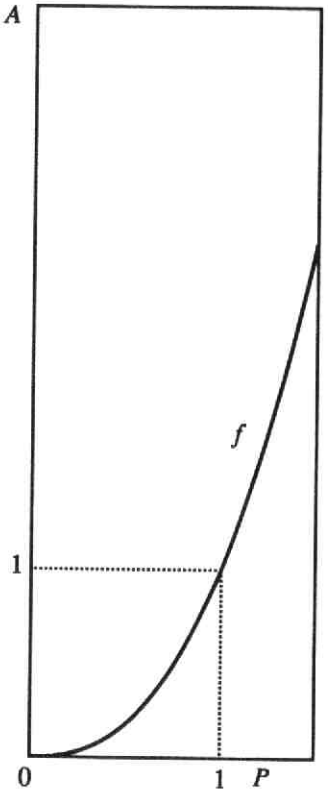
>f Je zou de trendlijn kunnen voortzetten (extrapolatie). Is dat hier zinvol?

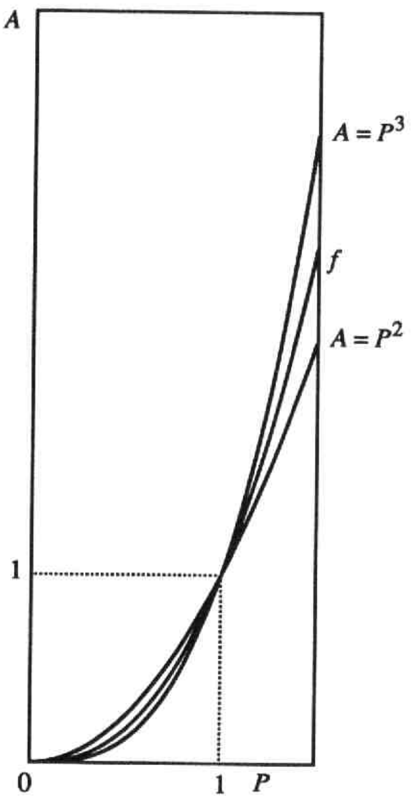
7 Uitbreiding van de machtsfuncties



Dit zijn restanten van een prehistorische nederzetting. Hier hebben ooit mensen geleefd. Wat voor mensen waren dat en hoe leefden ze? Dat zijn enkele van de problemen waarin archeologen geïnteresseerd zijn. Het zou daarom nuttig zijn te achterhalen hoeveel mensen hier doorgaans woonden.
Er zal wel een of ander verband bestaan tussen de oppervlakte van de nederzetting en de bevolkingsgrootte.
De hypothese heeft dan deze vorm: $A = \ldots\ldots P \ldots\ldots$, waarin A de oppervlakte in m^2 en P de bevolkingsgrootte in personen voorstelt.
Van sommige plaatsen weet men langs een omweg de waarden van A en P en vergelijkbare hedendaagse situaties willen ook wel eens iets opleveren. De resultaten worden in een coördinatenstelsel uitgezet en er wordt een grafiek gezocht die daar zo goed mogelijk bij past. Dat zoeken gaat in wezen met kandidaatformules. Daar moet dan natuurlijk wel een flinke voorraad van zijn.
We verlaten even het spoor om nader in te gaan op die formules. De daarbij gebruikte getallen zijn *niet* zo realistisch!

Veronderstel dat de ideale formule grafiek f zou moeten produceren.
Gezien de vorm hadden we die misschien kunnen vinden door formules van het type $A = P^n$, met $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$ te proberen. $A = P^2$ en $A = P^3$ komen het dichtst in de buurt.





Bekijk nog eens de grafieken van $y = x^n$ voor $n = 1, 2, 3, 4$ uit 'Tabellen Grafieken Formules 3'. Bij elke stap voor n verspringt de grafiek.
Het zou mooi zijn als er ook kleinere stappen mogelijk waren. In dit voorbeeld zou dan iets kunnen komen als $A = P^{2\frac{1}{2}}$. Machten met breukexponenten hebben we al leren kennen, dus we kunnen aan het rekenen.

1. >a Controleer met enkele waarden (ook voor $P<1$) of de grafiek van $A = P^{2\frac{1}{2}}$ werkelijk tussen die andere twee in ligt.

   >b Was het probleem ook op te lossen geweest door uit te gaan van $A = c.P^3$, waarin c een constante is?

We beschikken nu over de formules $y = x^r$ waarbij r elk positief getal kan zijn. Het is veilig om $x \geq 0$ te houden. Negatieve waarden van x kunnen problemen geven. Probeer maar eens $(-9)^{\frac{1}{2}}$ te berekenen.
$(-9)^3$ kan wel namelijk -729, hoewel niet elke rekenmachine dat kan.
Deze formules zijn uit te breiden tot formules van de vorm $y = a \cdot x^r$.
Bijvoorbeeld: $y = 5 \cdot x^{0,12}$
(Bij invullen eerst $x^{0,12}$ berekenen!)

2. Een archeoloog is tenslotte gekomen tot de formule

$$A = 0{,}1542\, P^{2{,}3201}$$

>a Schets een grafiek voor $10 \leq P \leq 100$.

>b Als $P = 40$, hoeveel m^2 grond is er dan per persoon beschikbaar?

>c Er is zelfs een formule te maken van de vorm:
aantal m^2 per persoon $= a \cdot P^b$.
Welke waarden moeten a en b dan hebben?

>d Welke invloed heeft het toenemen van de bevolkingsgrootte op de ruimte die per persoon beschikbaar is?
Geef een zorgvuldige verklaring van je antwoord.

>e De nederzetting heeft een oppervlakte van 800 m^2.
Hoeveel inwoners kun je aannemen?

Men gebruikt ook wel eens de formule

$$A = 0{,}23P^{1{,}96}$$

In de formules komen twee getallen voor: een vermenigvuldigingsfactor en een exponent.

>f In de ene formule overheerst de vermenigvuldigingsfactor en in de andere de exponent. Wie wint?

De getallen die in de formule staan moeten wel eens aan de omstandigheden worden aangepast. Veronderstel dat er twee formules zijn:
$A = 0{,}3 \cdot P^{1{,}9}$ en $A = 0{,}2 \cdot P^{1{,}9}$ (Dit zijn fantasieformules).
Een ervan hoort bij een nederzetting die ommuurd is en de andere bij een open woonplaats.

>g Welke formule zou je nemen voor de plaats die door een muur omsloten is en waarom?

De voorraad machtsfuncties kan nog verder worden uitgebreid door ook exponenten tussen 0 en 1 of zelfs kleiner dan 0 toe te laten, zoals:

$y = x^{\frac{1}{2}}$; $\quad y = x^{0{,}1}$; $\quad y = x^{-4}$; $\quad y = x^{-3{,}2}$

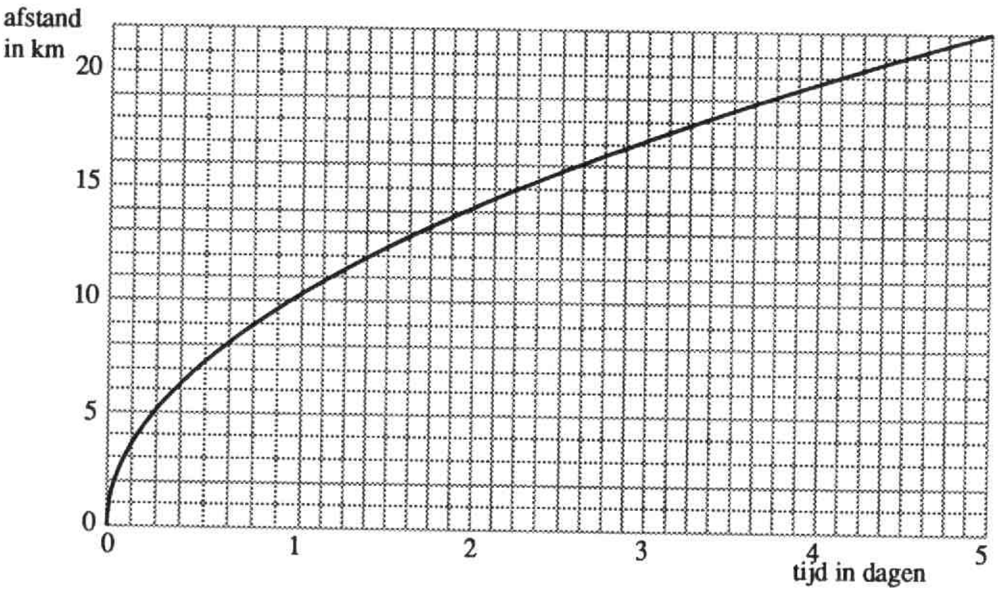
$y = x^{-4}$ is niets anders dan de al bekende $y = \frac{1}{x^4}$

$y = x^{-3{,}2}$ is van hetzelfde type. De grafiek ligt tussen die van
$y = \frac{1}{x^4}$ en $y = \frac{1}{x^3}$

$y = x^{\frac{1}{2}}$ is hetzelfde als $y = \sqrt{x}$. Hiervan is de vorm van de grafiek ook al bekend.

$y = x^{0{,}65}$ lijkt op de vorige.

3. In het boekje Tabellen, Grafieken, Formules 2 is een opgave over een gezonken olietanker, die een dagelijks grote wordende olievlek op zee verspreid.
De afstand van de rand van de vlek tot het middelpunt is een functie van de tijd. Van deze functie staat hier de grafiek. De dagen zijn etmalen.



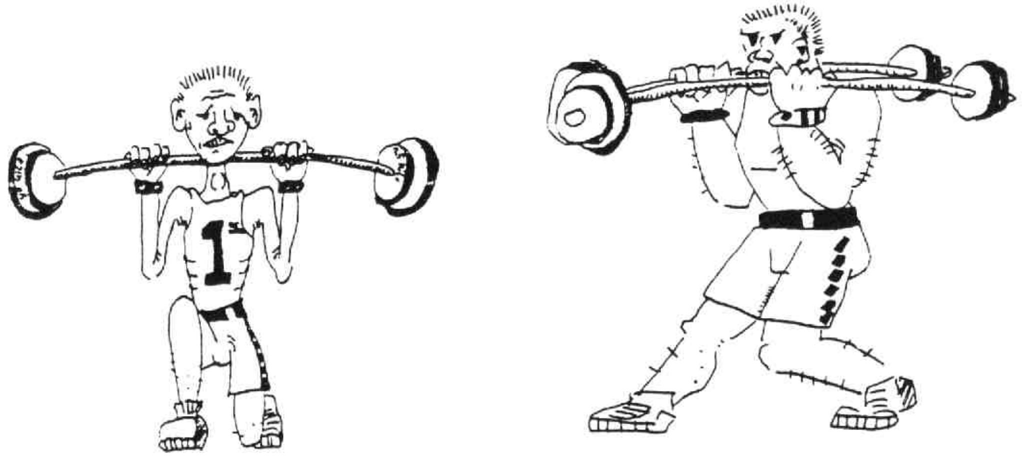
Het vermoeden bestaat dat de functie een formule heeft van de vorm
$A = k \cdot \sqrt{D}$

>a Bereken een mogelijke waarde van k en geef nog twee controle berekeningen.

>b Geef eveneens een formule die de oppervlakte van de vlek geeft als het aantal dagen bekend is.

>c De oorspronkelijke formule is bedacht door aan te nemen dat de oppervlakte van de vlek elke dag evenveel toeneemt. Onderzoek of dit waar is.

4. *Gewichtheffers*



Normaal gesproken zullen deze gewichtheffers in een wedstrijd niet tegen elkaar uitkomen. Maar in spelletjes als Superstars kan dat wel voorkomen. Om de resultaten toch een beetje vergelijkbaar te houden, rekent men niet met de werkelijk opgetilde gewichten, maar met gecorrigeerde gewichten.
Die correctie kan met behulp van een formule.
Bijvoorbeeld: $G^* = G - L$
G: het getilde gewicht
L: het lichaamsgewicht
G^*: het gecorrigeerde gewicht.

>a En nu kan de volgorde van de atleten worden opgesteld.
Lijkt dit op het eerste gezicht een redelijk systeem?

Een nadeel is dat hiermee de zwaardere gewichten een te grote handicap krijgen.
Toch is de formule in de T.V.-wereld populair. Men zegt dat de doorsnee kijker hem snapt.

>b Om toch indrukwekkende getallen te krijgen, telt men er vaak een vast getal bij, bijvoorbeeld 75.
Heeft dat invloed op de volgorde?

Een andere formule is $G^* = (75/L)^{\frac{2}{3}} \cdot G$. Hier wordt er niet iets van G afgetrokken, maar wordt G met een correctiefactor vermenigvuldigd. Het bijzondere is dat die factor afhankelijk is van L.

>c Bereken hiermee G^* voor een vlieggewicht met $L = 52$ en $G = 140$, een middengewicht met $L = 75$ en $G = 195$ en een zwaargewicht met $L = 110$ en $G = 240$.

>d Geven beide formules dezelfde volgorde?

5. *Windsnelheid op grotere hoogte*
Voor het meten van de windsnelheid maakt het verschil of je dat vlak boven de grond of op grotere hoogte doet. Er bestaat wel een zekere wetmatigheid tussen hoogte en windsnelheid. Als op 1 m hoogte de windsnelheid 5 m/s is, dan is de snelheid op hoogte h (in m), die we V (h) noemen, te bepalen met de benaderingsformule $V(h) = 5 \cdot h^{0,3}$.

>a Bereken $V(10)$, $V(20)$, $V(30)$, $V(40)$, $V(50)$ en teken een doorlopende grafiek voor $1 \leq h \leq 50$.

Voorbeeld:
Op welke hoogte is de windsnelheid 13 m/s?
Oplossingsmethoden: 1. proberen plus corrigeren
2. grafiek tekenen en aflezen
3. vergelijking oplossen

Dat laatste kan zo:
$5 \cdot h^{0,3} = 13$
$h^{0,3} = \frac{13}{5}$
Nu verder met de rekenmachine

13 $\boxed{\div}$ 5 $\boxed{\text{INV}}$ $\boxed{y^x}$ 0,3 $\boxed{=}$ 24,2 (afgerond)

Dus op een hoogte van 24 meter.

>b Op welke hoogte is de windsnelheid 20 m/s?

>c De windsnelheid op een hoogte van 1 m is nu 10 m/s.
We krijgen dan: $V(h) = V(1) \cdot h^{0,3}$.
$V(1)$ is de windsnelheid op de hoogte van 1 m. Bereken h als $V(h) = 25$ m/s.

De twee formules zijn onder te brengen in een omvattender formule:
$V(h) = V(1) \cdot h^{0,3}$
$V(1)$ is de windsnelheid op de hoogte van 1 m.

>d Er is geen meetresultaat op de hoogte van 1 m bekend. Wel op 5 m, namelijk $V(5) = 4$.
Bereken de waarde van $V(20)$.

De exponent kan andere waarden dan 0,3 hebben. De waarde van het getal voor de exponent is afhankelijk van de ruwheid van het terrein. De exponent noemen we α. α varieert van 0,16 tot 0,4.

De formule is dan $V(h) = V(1) \cdot h^{\alpha}$.

>e Welke waarde kan $V(50)$ dan aannemen als $V(1) = 10$?

>f Er worden drie situaties met dezelfde waarde voor $V(1)$, maar verschillende waarden voor α (namelijk 0,16; 0,8; 0,4) vergeleken.
Voorspel hoe de bijbehorende grafieken in een figuur ten opzichte van elkaar zullen liggen.

>g De grenswaarden van α horen bij centra van grote steden en bij zeer vlak land. Natuurlijk heeft $V(1)$ boven de stad geen betekenis, maar je hebt in >c kunnen zien hoe die moeilijkheid te omzeilen is.
Bij welk van die twee hoort $\alpha = 0{,}16$ en waarom?

>h Op grote hoogte heeft de terreingesteldheid geen invloed op de windsnelheid.
Wat zegt dat over de formule $V(h) = V(1) \cdot h^{\alpha}$?