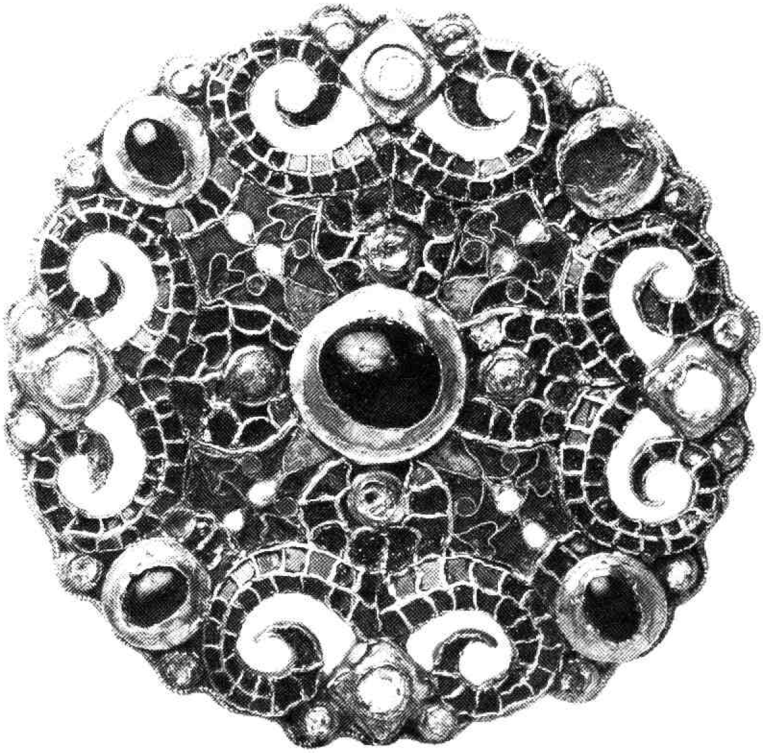
Afstanden & grafen & matrices



AFSTANDEN
&
GRAFEN
&
MATRICES

AFSTANDEN

&

GRAFEN

&

MATRICES

Wiskunde A

AFSTANDEN & GRAFEN & MATRICES

Een produktie ten behoeve van het project Hawex.

Ontwerper: Jan de Lange

Met medewerking van: Christiane Hauchart
Jan de Jong
Martin Kindt
Henk van der Kooij
Martin van Reeuwijk
Anton Roodhardt

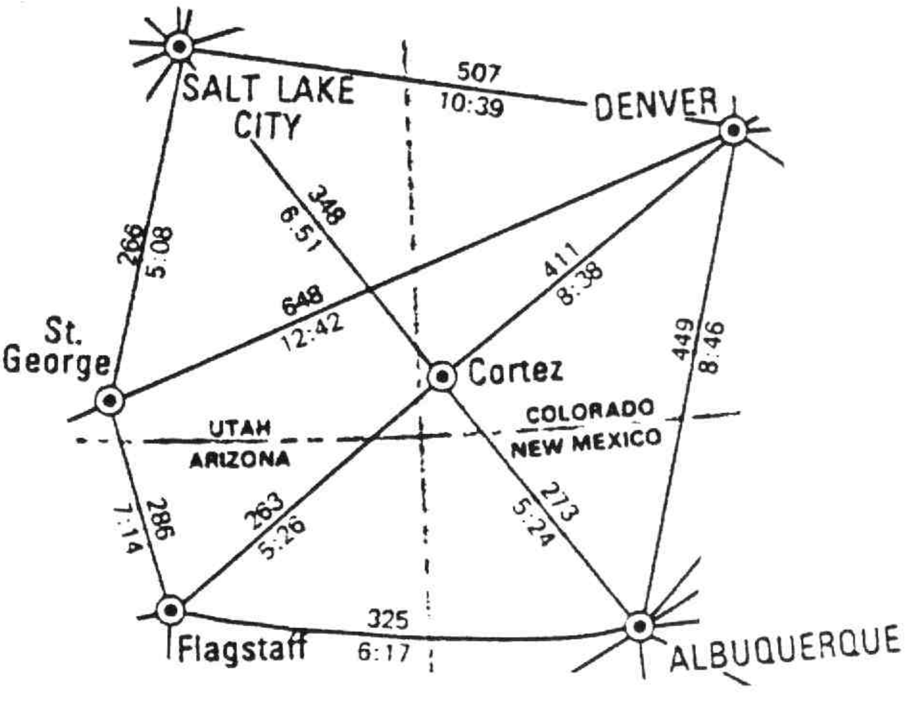
Vormgeving: Ellen Hanepen
Ada Ritzer

Utrecht, augustus 1989

Inhoudsopgave

1 Kaarten en afstanden

Autorijden



United States Driving Distance Chart *figuur 1*

Bovenstaande kaart komt uit een Amerikaanse wegenatlas. Het commentaar bij de kaart luidt:

> 'Afstanden en rijtijden zijn opgenomen door ervaren automobilisten bij normale omstandigheden. De resultaten zijn gemiddelde rijtijden binnen de geldende maximum snelheden, en van stadscentrum tot stadscentrum.'

De afstanden worden gemeten in *mijlen.* 1 mijl is ongeveer 1,6 km.
De tijden staan aangegeven in uren en minuten.
Zo is de rijtijd tussen Albuquerque en Denver 8:45 uur en de afstand 449 mijl.

1. Hoe groot is de afstand in mijlen van Salt Lake City naar Abuquerque (spreek uit: Albukurkie) via:

   >a Cortez

   >b Denver

   >c Flagstaff

2. Hoe lang is de rijtijd van Salt Lake City naar Albuquerque via:
   >a Cortez
   >b Denver
   >c Flagstaff

3. Welke van de drie routes uit opgave 1 en 2:
   >a is het kortst (in km)
   >b is het snelst (in uren en minuten)
   >c wordt met de grootste gemiddelde snelheid gereden?

4. De kaart van fig. 1 geeft geografisch de correcte plaatsen aan van ieder der steden.
   De schaal van de kaart is 1 : 8.000.000 ofwel:
   1 cm komt ongeveer overeen met 80 km.
   > Bereken de onderlinge afstanden 'hemelsbreed' van de steden Salt Lake City, Flagstaff en Albuquerque. Men spreekt ook wel van 'vliegafstand'.

5. > Maak de volgende afstandentabellen af.

		van		
		SLC	F	A
	SLC	0	...	...
naar	F	883	...	520
	A	...	...	...

Afstanden per auto in kilometers.

		van		
		SLC	F	A
	SLC	...	...	...
naar	F	...	...	...
	A	...	...	...

Afstanden per vliegtuig in kilometers.

6. Vergelijk de twee tabellen van opgave 5.
   > Tussen welke twee steden is de 'autoafstand' veel groter dan de 'vliegafstand'?

7.

afstandentabel Amerikaanse steden.

QUICK REFERENCE TABLE *figuur 2*

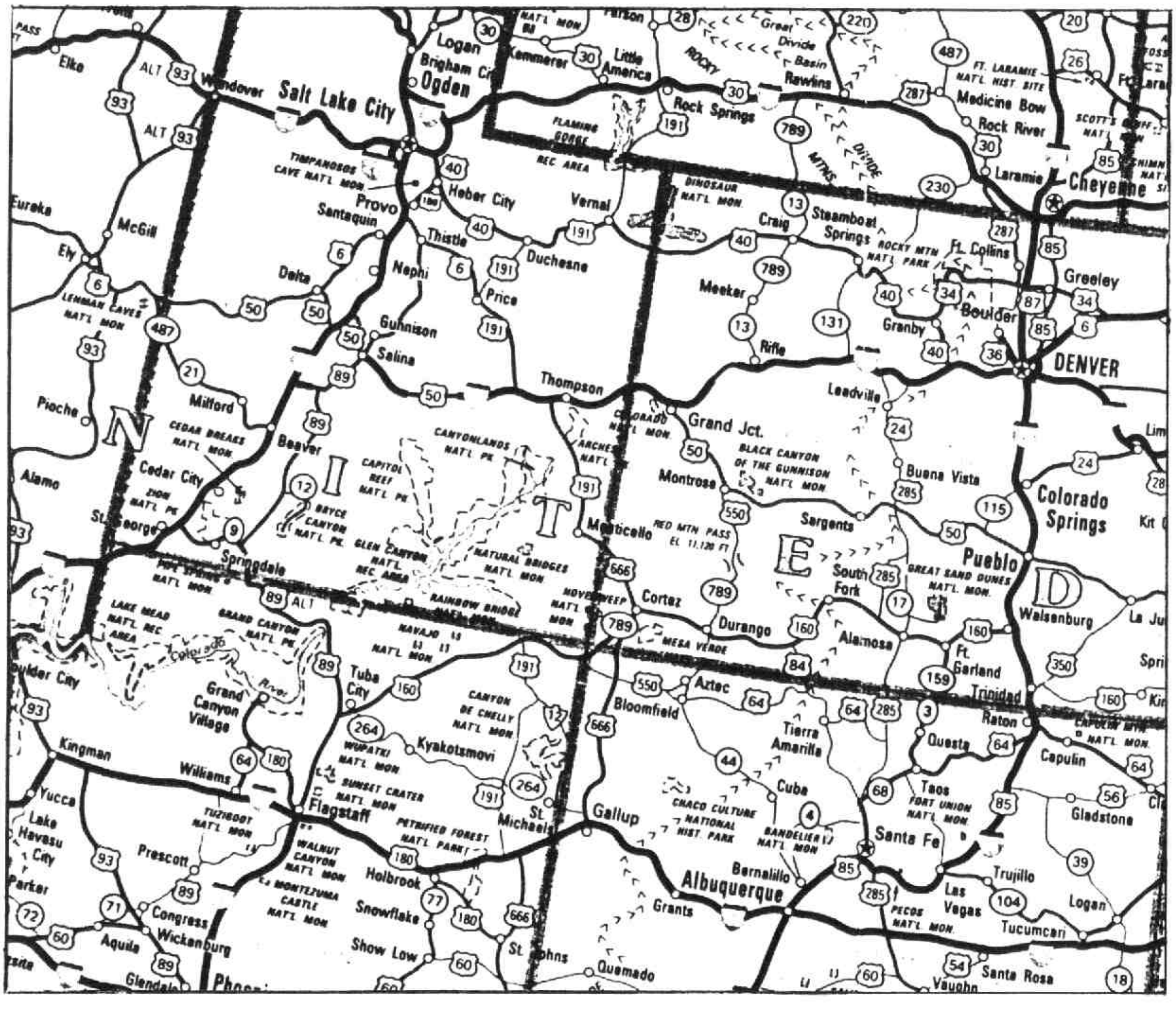
	ALBUQUERQUE	ATLANTA	BOSTON	CHICAGO	CLEVELAND	DALLAS	DENVER	DETROIT	LOS ANGELES	MIAMI	MINNEAPOLIS	NEW ORLEANS	NEW YORK CITY	ST. LOUIS	SALT LAKE CITY	SAN FRANCISCO	SEATTLE
ATLANTA	1424 28:31																
BOSTON	2248 43:56	1115 22:00															
CHICAGO	1351 26:44	722 14:03	1008 19:27														
CLEVELAND	1618 31:27	734 14:32	654 12:31	355 6:56													
DALLAS	670 13:11	800 15:10	1795 35:28	933 18:58	1198 23:41												
DENVER	449 8:46	1442 28:06	2016 38:57	1047 20:12	1362 26:26	806 16:05											
DETROIT	1572 31:08	735 14:43	832 16:10	287 5:34	178 3:39	1154 23:22	1334 25:46										
LOS ANGELES	802 15:30	2244 44:22	3082 60:07	2113 41:22	2418 47:15	1425 27:56	1066 21:10	2400 46:56									
MIAMI	2018 39:00	688 12:49	1571 31:12	1410 26:52	1342 27:04	1348 25:49	2130 40:55	1423 27:32	2773 53:45								
MINNEAPOLIS	1257 24:47	1152 22:15	1439 27:39	430 8:12	785 15:08	1013 19:49	941 18:00	717 13:46	2007 39:10	1840 35:04							
NEW ORLEANS	1188 23:25	485 9:17	1578 31:05	978 19:11	1092 21:15	518 10:14	1324 26:19	1093 21:26	1906 37:42	900 16:54	1218 24:53						
NEW YORK CITY	2029 39:31	896 17:35	219 4:25	831 16:17	476 9:21	1576 31:03	1822 35:29	654 13:00	2849 55:22	1352 26:47	1261 24:29	1346 26:40					
ST. LOUIS	1051 20:26	598 11:42	1197 23:30	300 6:18	565 11:01	633 12:40	844 16:24	521 10:42	1853 36:50	1288 24:31	540 12:00	678 12:53	978 19:05				
SALT LAKE CITY	617 12:00	1949 38:45	2420 46:22	1451 27:37	1768 33:51	1287 25:11	507 10:39	1738 33:11	721 14:00	2637 51:34	1251 25:12	1805 35:25	2242 43:12	1351 27:03			
SAN FRANCISCO	1091 21:17	2515 49:48	3174 61:20	2205 42:35	2520 48:49	1761 34:28	1261 25:37	2492 48:09	425 8:29	3147 60:17	2005 40:10	2279 44:42	2996 58:10	2105 42:01	754 14:58		
SEATTLE	1460 29:30	2793 53:04	3123 59:27	2114 40:00	2469 46:56	2130 42:41	1350 28:09	2401 45:34	1174 22:51	3481 65:53	1684 31:48	2848 52:55	2945 56:17	2195 41:22	843 17:30	852 16:15	
WASHINGTON, D.C.	1896 37:08	672 12:47	443 9:13	753 15:29	398 8:33	1352 26:15	1689 33:09	576 12:12	2716 52:59	1128 21:59	1183 23:41	1122 21:55	224 4:48	845 16:42	2168 41:50	2922 56:48	2867 55:29

Hierboven de afstandentabel uit de wegenatlas.

>a Wat is de grootste afstand uit deze tabel?
Hoeveel uren rijden is dat?

>b Vergelijk de afstand en rijtijd van Salt Lake City naar Seattle en die van Seattle naar San Francisco.
Commentaar?

Het kaartje van figuur 1 is een *schematische* weergave van de werkelijkheid. Men zegt ook wel: het kaartje is een *model* van de werkelijkheid. Er zijn modellen die veel op de werkelijkheid lijken, en modellen die minder op de werkelijkheid lijken. Zo is de kaart uit de atlas (figuur 3) veel minder schematisch dan het kaartje van figuur 1.

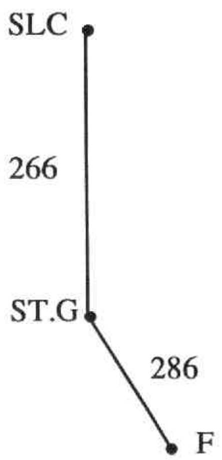


figuur 3

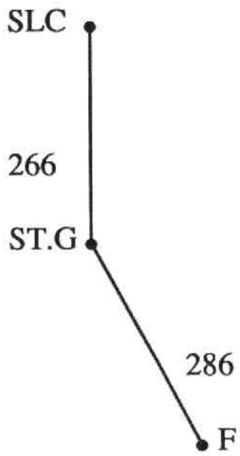
8. > Welke voor/nadelen hebben de beide verschillende kaarten?

Bij de kaart in figuur 1 hebben de getekende 'afstanden' (de lijnen tussen de steden) geen 'juiste' lengtes.
Heel duidelijk is dat bij Salt Lake City – St. George – Flagstaff.
Een wat betreft de rijafstanden 'eerlijker' kaart van bovenstaande drie steden zou er zo uit kunnen zien:

Figuur 1 was:



Een 'eerlijker' kaart is:



9. > Probeer op bovenstaande 'eerlijke' wijze een 'rijafstandenkaart' te tekenen met daarop de volgende steden:
Salt Lake City, Flagstaff, Denver.
Probeer daarna ook Albuquerque op deze kaart te tekenen.

10. > Teken met passer en liniaal een kaart met correcte afstanden behorende bij de volgende afstandentabel:

$$\begin{array}{ll} & \text{van} \\ & \begin{array}{ccc} \mathrm{A} & \mathrm{R} & \mathrm{U} \end{array} \\ \text{naar} \begin{array}{c} \mathrm{A} \\ \mathrm{R} \\ \mathrm{U} \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 70 & 50 \\ 70 & 0 & 60 \\ 50 & 60 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

11. > Teken een kaart met correcte afstanden behorend bij de volgende afstandentabel: welke waarden kan x ongeveer hebben?

$$\begin{array}{ccc}
 & & \text{van} \\
 & & \begin{array}{cccc} A & R & U & L \end{array} \\
\text{naar} & \begin{array}{c} A \\ R \\ U \\ L \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 70 & 50 & 50 \\ 70 & 0 & 60 & 40 \\ 50 & 60 & 0 & x \\ 50 & 40 & x & 0 \end{pmatrix}
\end{array}$$

12. > Probeer een kaart te tekenen met correcte afstanden behorend bij de volgende afstandentabel:

$$\begin{array}{ccc}
 & & \text{van} \\
 & & \begin{array}{ccc} P & Q & R \end{array} \\
\text{naar} & \begin{array}{c} P \\ Q \\ R \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 10 & 50 \\ 10 & 0 & 30 \\ 50 & 30 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}$$

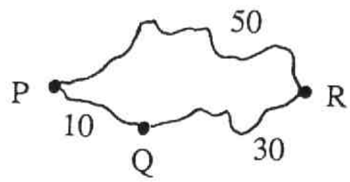
Kaarten en Grafen

We zagen dat het *niet* altijd mogelijk is een met passer en liniaal te construeren kaartje te tekenen bij een afstandentabel.

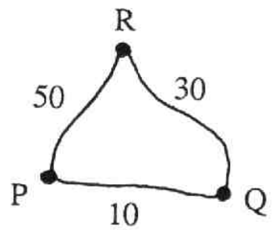
Voorbeeld:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} P & Q & R \end{array} \\ \begin{array}{c} P \\ Q \\ R \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 10 & 50 \\ 10 & 0 & 30 \\ 50 & 30 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

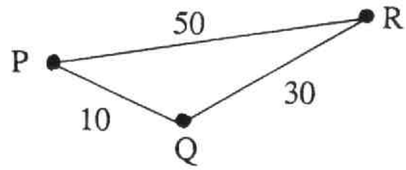
Toch kun je dit schema wel 'in beeld brengen', bijvoorbeeld als het over aardrijkskundige kaarten gaat:



of, in het algemeen nog schematischer:



of,



Zo'n plaatje, waarin alleen is aangegeven of punten wel of niet verbonden zijn, maar waarbij de *plaats* van de punten er niet toe doet heet een *graaf*:

> Een *graaf* is een verzameling van *(knoop)punten*, al of niet verbonden door *wegen.*

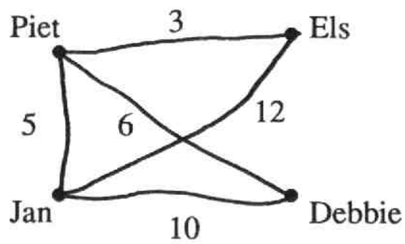
Bovenstaande graaf telt drie (knoop)punten en drie wegen.

> Een graaf waarbij bij de wegen getalletjes staan wordt ook wel een *netwerk* genoemd.

Andere afstanden

Bij een onderzoek in een klas wordt gekeken naar de sociale *afstanden* tussen leerlingen. Leerlingen wordt gevraagd hoe vaak ze met andere leerlingen omgaan. Hoe meer je met iemand omgaat, hoe kleiner de sociale afstand - zo luidt de afspraak.
Als leerlingen helemaal niet met elkaar omgaan kun je zeggen:
- de afstand is oneindig groot;
- er is geen afstand te bepalen.

Er wordt gekozen voor de laatste oplossing.
De *graaf* van de sociale afstanden tussen vier leerlingen ziet er als volgt uit:



13. > Maak een bij de graaf behorende afstandentabel. Noteer voor de afstand tussen Els en Debbie een streepje: —

14. > Voor drie personen is een precieze afstandenkaart te construeren met passer en liniaal. Doe dit.

Opgravingen

Bij opgravingen in Midden-Amerika naar de verloren Maya-beschavingen besloot de archeoloog Robinson op de volgende manier een 'afstand' of 'maat van verschil' tussen de diverse opgravingen te formuleren.
Eerst deelde hij de opgegraven resten in verschillende klassen:

1 botten van mensen

2 botten van dieren

3 aardewerk

4 resten afval

5 kleding

De Maya-beschaving wordt door geleerden als zeer hoogstaand beschouwd. Ze bestond vanaf de vierde eeuw tot de verwoesting door de Spanjaarden in de zestiende eeuw. De bloeitijd ervan was van de zesde tot de achtse eeuw. Het Mayavolk woonde in het gebied waar nu Guatemala en Zuid-Mexico liggen. Op het kaartje hiernaast zie je onder andere enkele archeologische vindplaatsen aangegeven.

Vervolgens gaf hij de verdeling over de vijf klassen in ieder van de opgravingen aan in percentages

klasse

opgraving		1	2	3	4	5
	A	10	25	35	20	10
	B	0	40	30	25	5
	C	5	10	25	40	20
	D	25	25	25	15	10
	E	0	10	25	40	25

15. > In welke opgraving(en) werden geen mensenresten gevonden?

16. > Welke twee opgravingen lijken een beetje op elkaar afgaande op de tabel?

Robinson nam de volgende 'afstandenmaat' tussen de vijf opgravingen; als voorbeeld nemen we de 'afstand' of 'mate van verschil' tussen *A* en *B*:

	1	2	3	4	5
opgraving *A*	10	25	35	20	10
opgraving *B*	0	40	30	25	5
afstanden-bijdrage	10-0 = 10	40-25 = 15	35-30 = 5	25-20 = 5	10-5 = 5

De totale 'afstand' tussen *A* en *B*:

$$d\,(A,B) = 10 + 15 + 5 + 5 + 5 = 40.$$

17. > Maak een afstandentabel met de afstanden tussen de 5 opgravingen:

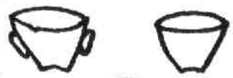
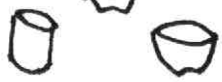
	A	B	C	D	E
A	0				
B		0			
C			0		
D				0	
E					0

18. > Welke opgravingen liggen 'ver van elkaar'?
Welke opgravingen liggen 'dicht bij elkaar'?

19. > Welk nut zou zo'n tabel voor archeologen hebben?

Kenmerken

Bij opgravingen kwamen resten van een aantal vazen te voorschijn. Die vazen hadden onder andere de volgende kenmerken

- met oor of zonder oor 
- cilindrisch of niet 
- met extra versiering of niet 
- geglazuurd of niet 

Er worden zes vazen of vaasresten op deze kenmerken onderzocht.
Dit levert de volgende kenmerkentabel op:

	oor*	cil.**	vers.+	glaz.++
vaas a	1	0	1	0
vaas b	0	1	0	0
vaas c	1	0	1	1
vaas d	0	1	0	1
vaas e	0	1	1	1
vaas f	0	0	0	1

*	1: wel oor,	0: geen oor
**	1: cilindrisch,	0: niet cilindrisch
+	1: versierd,	0: niet versierd
++	1: geglazuurd,	0: niet geglazuurd

20. > Welke cilindrische vaas heeft géén oor, is niet versierd, maar wel geglazuurd?

Een 'mate van verschil' tabel is ook hier gemakkelijk te maken. Daarvoor kijk je naar op hoeveel van de vier kenmerken de vazen 'hetzelfde' zijn. Zo is de 'afstand' tussen vaas a en vaas b gelijk aan 3. De enige overeenkomst tussen de twee vazen is dat ze niet geglazuurd zijn; ze verschillen dus op *drie* kenmerken.

21. > Zoek enkele vazen die maar op één kenmerk verschillen, dus dicht bij elkaar liggen.

22. > Maak een 'afstandentabel' voor de zes vazen.
Gebruik als 'afstand' de 'mate van verschil' zoals boven omschreven.

Samenvatting

Er zijn vele soorten kaarten en afstanden. De bekendste is de *aardrijkskundige* kaart.
Afstanden kunnen bijvoorbeeld zijn:
- de afstand (in km) over de weg (rijafstand);
- de afstand (in km) door de lucht (hemelsbreed, vliegafstand);
- de afstand (in uren) in rij- of reistijd.

In de *meetkunde* is het begrip afstand het best te vergelijken met de afstand hemelsbreed op een aardrijkskundige kaart.

Maar afstanden kunnen ook veel minder helder zijn: afstanden tussen opgravingen, voorwerpen, sociale afstand tussen mensen; 'afstand' wordt dan gebruikt voor 'mate van verschil'.

Afstandentabellen geven op overzichtelijke wijze afstanden weer in een rechthoekig schema.

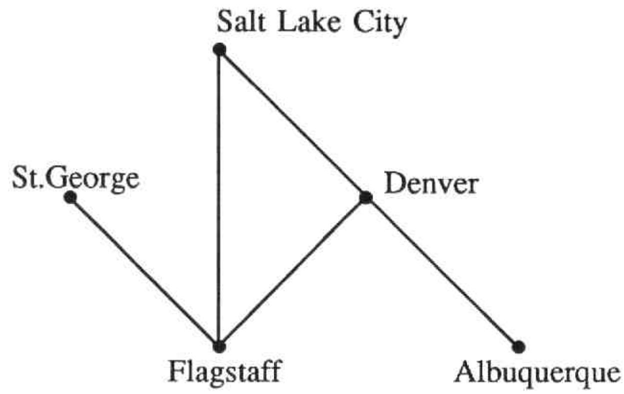
Soms kun je bij afstandentabellen een 'echte' meetkundig verantwoorde kaart tekenen.

Bij afstandentabellen kun je *altijd* een *graaf* tekenen.

Een *graaf* is een verzameling van (knoop)punten al of niet verbonden door wegen (of takken).

2 Verbindingsmatrices en -grafen

We keren terug naar de kaart (figuur 3) van het gebied met de steden Salt Lake City, St. George, Flagstaff, Denver en Albuquerque.
De luchtvaartmaatschappij MidWest heeft tussen deze plaatsen enkele luchtlijnen.
In de dienstregeling staat de volgende kaart:



luchtlijnen, MidWest Airlines *figuur 4*

Deze *graaf* geeft voor de luchtreizigers de belangrijke informatie:

- welke steden (punten) er in het luchtnet zitten;
- welke verbindingen (wegen of takken) er al of niet zijn.

De luchtreiziger ziet bijvoorbeeld in één oogopslag dat hij *niet rechtstreeks* van Albuquerque naar Salt Lake City kan vliegen.

Het feit dat er geen rechtstreekse verbinding is tussen A en SLC blijkt ook uit de bij de verbindingsgraaf behorende *verbindingstabel*:

$$\begin{array}{cc} & \text{van} \\ & \begin{array}{ccccc} \text{A} & \text{D} & \text{SLC} & \text{StG} & \text{F} \end{array} \\ \text{naar} \begin{array}{c} \text{A} \\ \text{D} \\ \text{SLC} \\ \text{StG} \\ \text{F} \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

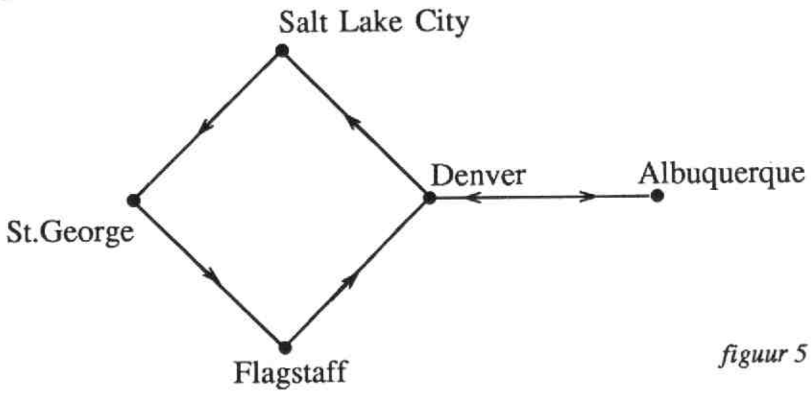
Zo'n verbindingstabel bevat alleen maar *nullen* en *enen*. Een 0 als er geen directe verbinding is, een 1 als die er wel is.

1. > Hoe blijkt uit voorgaande tabel dat alle vluchten in beide richtingen worden uitgevoerd? (Dus héén *en* terug.)

2. > Teken de luchtlijnengraaf of verbindingsgraaf als er bovendien een rechtstreekse lijn van Albuquerque naar Salt Lake City zou zijn.
Hoe verandert de verbindingstabel in dat geval?

Een verbindingentabel is iets heel anders dan een afstandentabel. De overeenkomst is dat beide rechthoekige tabellen zijn; zulke tabellen worden vaak *matrices* genoemd, in enkelvoud: een *matrix*.

Een met MidWest Airlines concurrerende luchtvaartmaatschappij wil ook de vijf steden in haar netwerk opnemen. De maatschappij heeft haar thuisbasis in Albuquerque en wil iedere dag één keer het volgende traject vliegen:
Het toestel vertrekt uit A en vliegt achtereenvolgens naar D, SLC, ST.G, F en via D terug naar A.
De verbindingsgraaf ziet er zó uit:

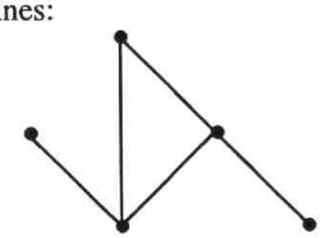


figuur 5

Men noemt dit een *gerichte* graaf: de verbindingen hebben nu ook een richting.

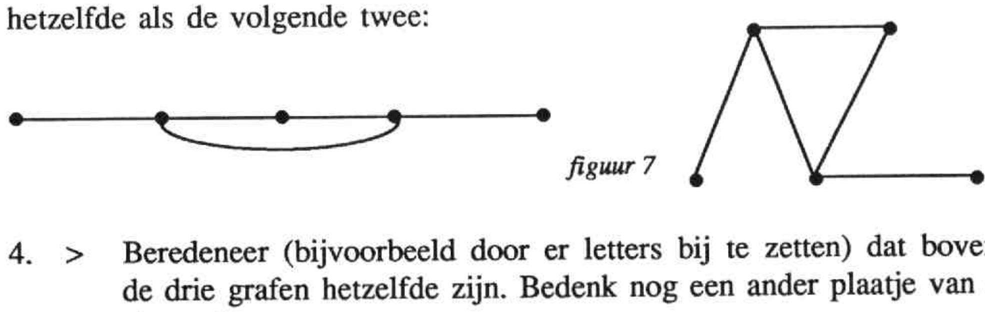
3. > Stel de verbindingsmatrix op behorend bij deze (gerichte) graaf.
Let op de plaats waar 'van' en 'naar' bij de matrix staan.

Soms zijn (verbindings)grafen hetzelfde zonder dat dat direct duidelijk is.
Zo is de graaf van MidWest Airlines:



figuur 6

hetzelfde als de volgende twee:

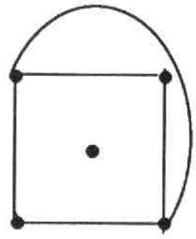


figuur 7

4. > Beredeneer (bijvoorbeeld door er letters bij te zetten) dat bovenstaande drie grafen hetzelfde zijn. Bedenk nog een ander plaatje van dezelfde graaf.

5. > Welke van de volgende grafen zijn hetzelfde?

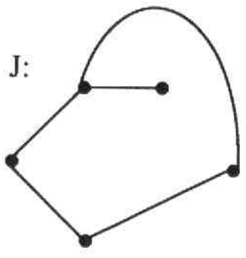
G:



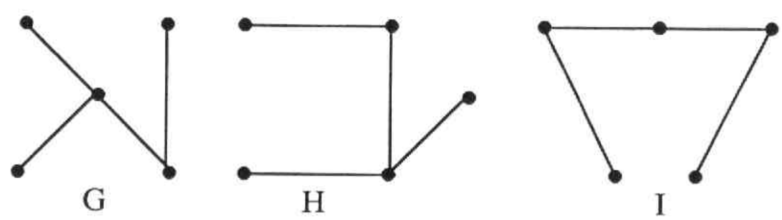
H:

I:

J:



6. > Welke matrix past bij welke graaf?
Grafen:



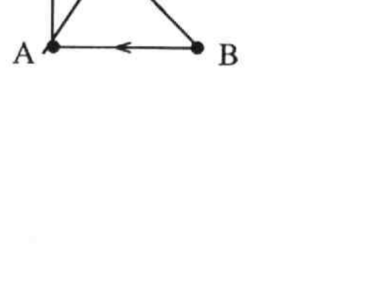
G H I

Matrices:.

$$\begin{pmatrix} 0&1&0&0&0\\ 1&0&1&0&0\\ 0&1&0&1&0\\ 0&0&1&0&1\\ 0&0&0&1&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&1\\ 1&0&0&0&1\\ 0&1&0&0&1\\ 0&1&1&1&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0&1&0&0&0\\ 1&0&1&0&0\\ 0&1&0&1&1\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&1&0&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0&1&0&0&0\\ 1&0&1&0&0\\ 0&1&0&1&1\\ 0&0&1&0&1\\ 0&0&1&1&0 \end{pmatrix}$$

A B C D

7. > Geef bij de volgende 5-puntsgraaf met eenrichtingsverkeer de verbindingsmatrix:



Bij een verbindingsgraaf met vijf punten hoort een vijf bij vijf (5×5) verbindingsmatrix.
Daarbij geldt de afspraak dat er op de diagonaal *nullen* staan.

8. > Hoeveel nullen kunnen er maximaal in een $5{\times}5$ verbindingsmatrix staan? Wat betekent dit voor de graaf?

9. > Hoeveel énen kunnen er maximaal in een $5{\times}5$ verbindingsmatrix staan? Wat betekent dit voor de graaf?

10. > Om 5 punten te verbinden zijn 4 wegen voldoende. Teken de verschillende mogelijkheden.
Kun je met nog minder wegen volstaan als je 5 punten wilt verbinden?

> In de situatie waarbij ieder punt direct met ieder ander punt is verbonden (opgave 9) spreken we van *maximale* verbondenheid.
> In de situatie waarbij ieder punt bereikbaar is (direct of indirect) met het kleinst mogelijke aantal wegen (opgave 10) spreken we van *minimale* verbondenheid.

11.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

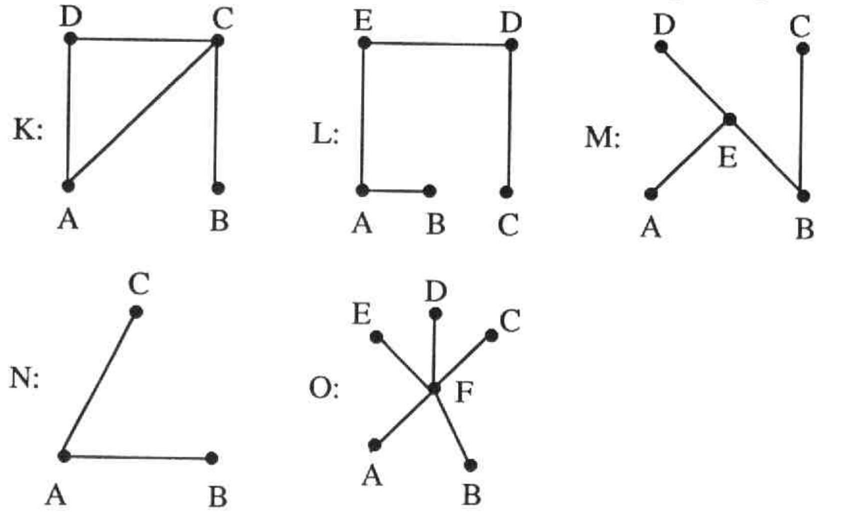
$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

A, B en C zijn drie verbindingsmatrices.

>a Teken bij elk van de matrices A, B en C een graaf.

>b Geef een matrix D, met bijbehorende graaf, die méér verbindingen heeft dan B, en minder dan C.

12. > Geef de verbindingsmatrix bij ieder van de volgende grafen:



13. > Welke van de grafen van opgave 12 heeft *relatief* de meeste wegen (d.w.z. het aantal wegen in verhouding tot het maximaal mogelijke aantal).

14. >a Hoeveel wegen kunnen er *maximaal* zijn bij een verbindingsgraaf met zes punten?

>b Dezelfde vraag voor 7, 8, 23 en *n* punten.

15. >a Hoeveel wegen zijn er in een *minimaal* verbonden graaf met zes punten?

>b Dezelfde vraag voor 7, 8, 23 en *n* punten.

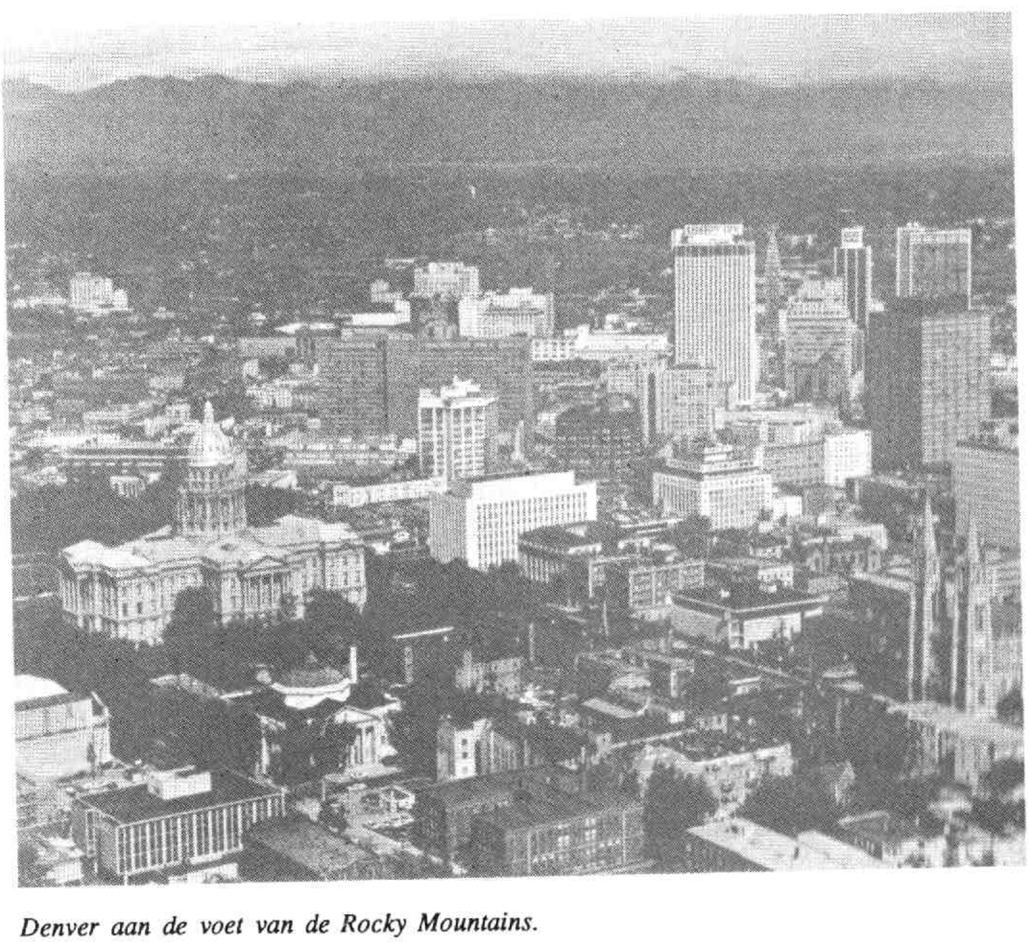
16. Hieronder vind je twee matrices. De eerste is een verbindingsmatrix, de tweede een kortste-afstandenmatrix. Hierin staat voor elk tweetal plaatsen gegeven de afstand tussen die twee, als je de kortste route neemt van de een naar de ander.
Hij is alleen nog lang niet volledig ingevuld.

$$\begin{array}{cc} & \text{van} \\ & \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \text{naar} \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$
\begin{array}{cc}
 & \text{van} \\
 & \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\
\text{naar} \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} &
\begin{pmatrix}
0 & . & . & 15 & . \\
5 & 0 & . & . & . \\
. & 20 & 0 & . & . \\
. & 20 & 15 & 0 & . \\
20 & . & . & . & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

>a Vul de kortste-afstandenmatrix aan met de ontbrekende getallen.
Tip: Het lijkt verstandig om eerst de verbindingsgraaf te tekenen.

>b In welk van de vijf steden zou je een ziekenhuis laten bouwen, als je daarbij bedenkt dat een ziekenhuis zo snel mogelijk bereikt moet kunnen worden. Neem bij de beantwoording aan dat in elk van de vijf steden een ambulance aanwezig is.



Denver aan de voet van de Rocky Mountains.

Samenvatting

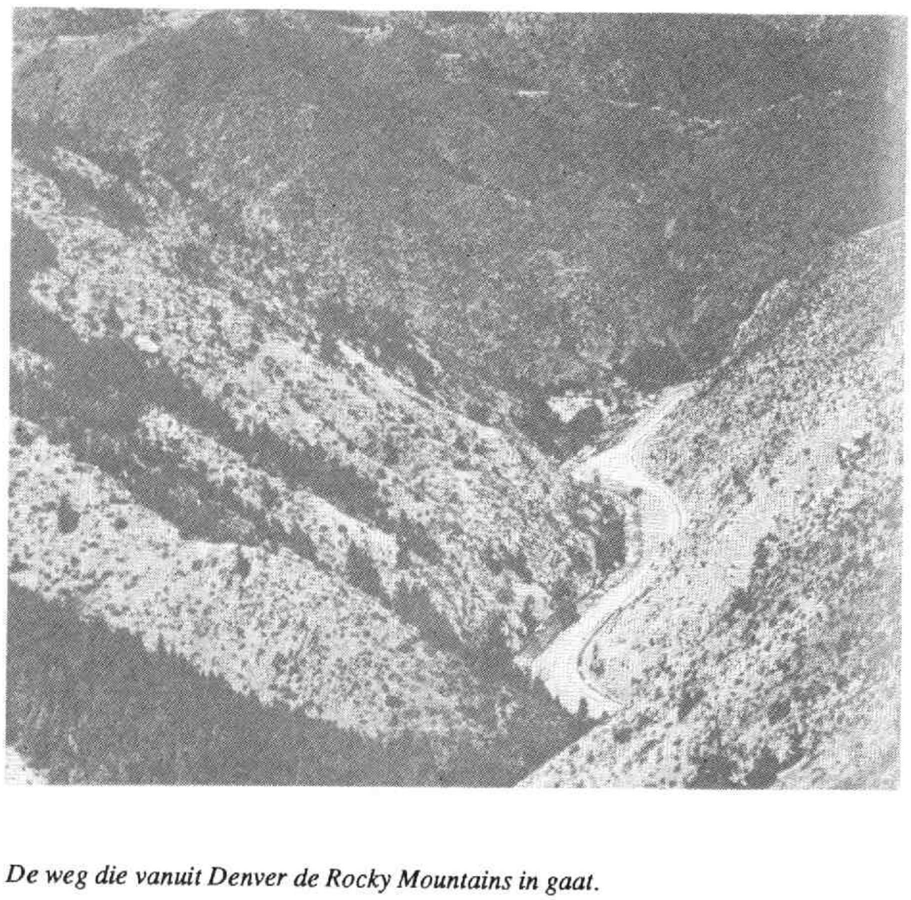
Een *graaf* bestaat uit een aantal (knoop)punten en wegen (of takken).
Als er een directe verbinding tussen twee punten is, tekenen we een weg.
Een graaf waarbij bij de wegen getallen staan wordt ook wel een netwerk genoemd.

Een *matrix* is een rechthoekig schema van getallen.

Voorbeelden
- een afstandentabel (afstandenmatrix);
- een verbindingstabel (verbindingsmatrix).

Een *verbindingsmatrix* bevat uitsluitend 1 en 0 als elementen.
Een 0 duidt aan dat er tussen de betrokken punten géén directe weg is (waarbij ook wordt aangenomen dat een plaats niet met zichzelf is verbonden).
Een 1 duidt aan dat er tussen de betrokken plaatsen wèl een verbinding is.

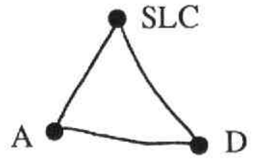
Een *gerichte graaf* is een graaf waarbij aan de wegen een richting is toegevoegd.
Dit doet zich bijvoorbeeld voor bij éénrichtingsverkeer.



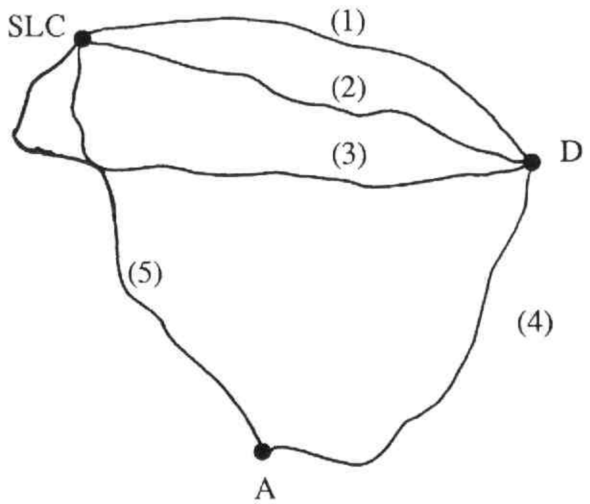
De weg die vanuit Denver de Rocky Mountains in gaat.

3 Directe wegen

Verbindingsgrafen zijn soms handig (luchtlijnennet), maar soms helemaal niet. De verbindingsgraaf van de steden Salt Lake City, Albuquerque en Denver ziet er (voor auto's) heel eenvoudig uit:

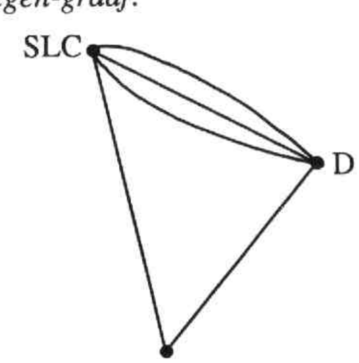


Als ik in SLC in m'n auto zit, weet ik dat ik naar zowel Albuquerque als naar Denver kan rijden. Maar heb ik daarbij nog keuzes? Dat is uit de graaf niet af te lezen.
Daarom weer terug naar de aardrijkskundige kaart (figuur 3). Als we die gaan schematiseren - waarbij we dus alleen letten op de drie steden SLC, D en A - krijgen we:

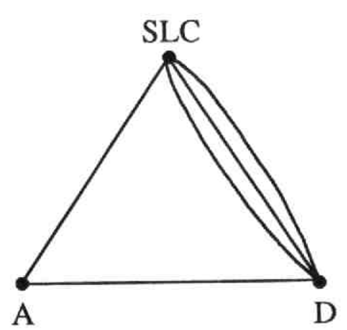


figuur 8

Er zijn dus drie hoofdroutes van SLC naar D (1) (2) (3) en één route van D naar A (4) en één van S naar A (5).
Deze schematische kaart kan nog verder 'gemodelleerd' worden tot een *directe-wegen-graaf*:



of



De bijbehorende *directe-wegen-matrix* ziet er als volgt uit:

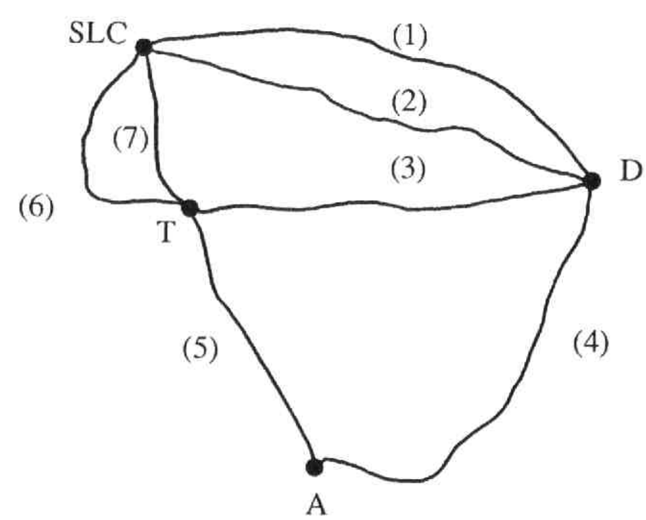
$$\begin{array}{ccc} & & \text{van} \\ & & \begin{array}{ccc}\text{SLC} & \text{D} & \text{A}\end{array} \\ & \begin{array}{c}\text{SLC} \\ \text{D} \\ \text{A}\end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

naar

1. Kijk nog eens naar de *verbindingsgraaf* van A, D, SLC en de *directe-wegen-graaf* van A, D, SLC.
   > Wat is het verschil?

2. De directe-wegen-graaf laat zien dat er vier verschillende *routes* zijn van Salt Lake City naar Albuquerque.
   > Geef aan hoe.

De directe-wegen-graaf is echter niet helemaal correct.
Weg (3) (zie figuur 8) van SLC naar D valt gedurende enkele kilometers samen met weg (5) van SLC naar A.
De geschematiseerde kaart kan op de volgende manier worden verbeterd:

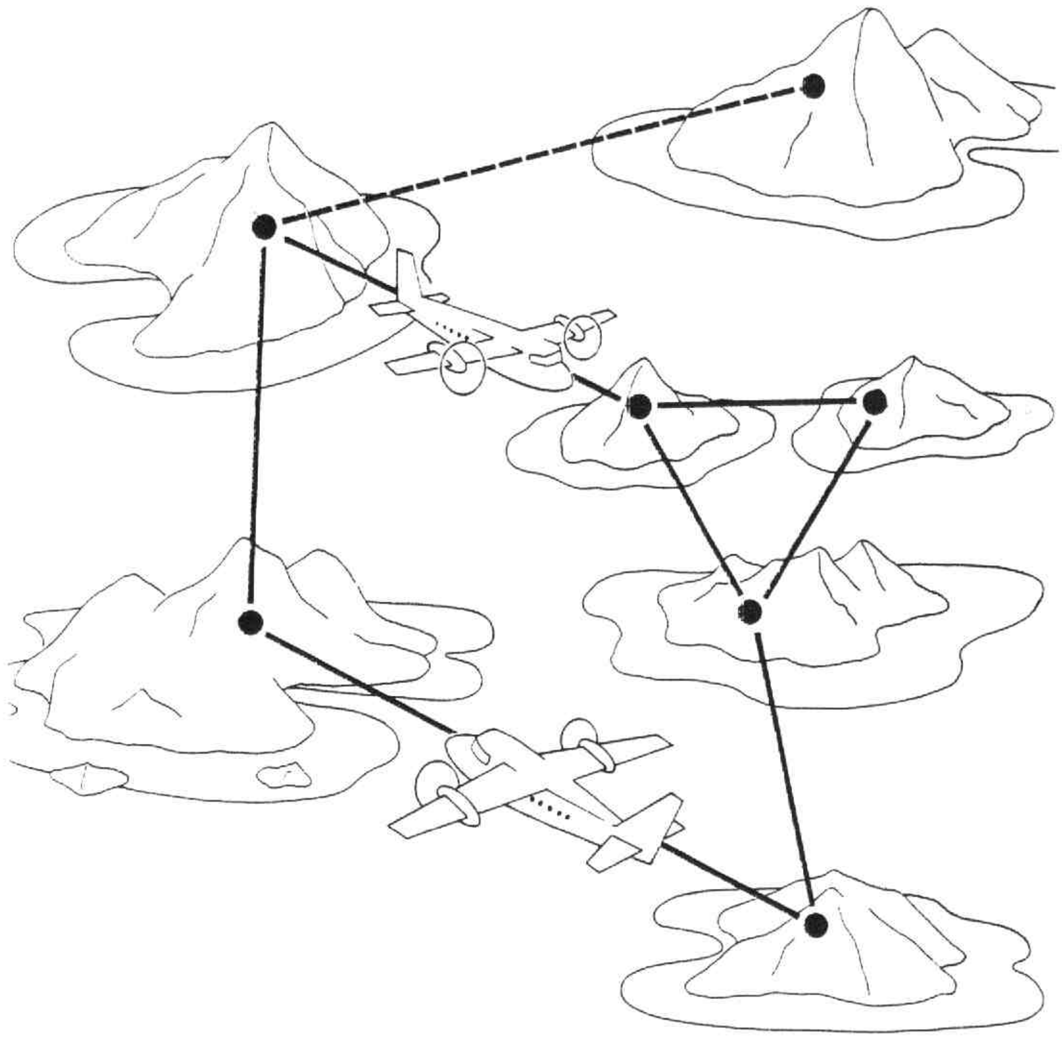


figuur 9

3. > Geef de verbindingsgraaf in deze situatie.

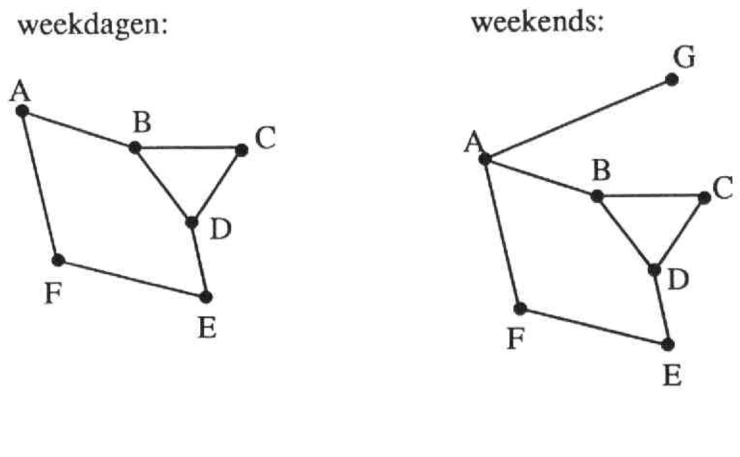
4. > Geef de directe-wegen-graaf in deze situatie.

5. > Hoeveel mogelijke routes zijn er nu van SLC naar A?



Bovenstaande tekening toont het luchtlijnennet van Pacific Islands Air. En wel als *verbindingsgraaf.*

Iets meer gedetailleerd:



Voor toeristen die de eilanden willen bezoeken zijn er veel mogelijkheden om een rondreis via enkele eilanden te maken van A naar A.

Tarief I:

Voor mensen die haast hebben is er de mogelijkheid van een ticket van A naar E, dan naar F en terug naar A.
Als je tarief I hebt, landt je vliegtuig wel op bijvoorbeeld B en D, maar jij mag niet uitstappen. Voor *jou* is er dus een *directe route* van A naar E. Voor het *vliegtuig* is die er niet.
Een dergelijke regeling komt bij luchtvaartmaatschappijen veel voor: je landt wel, maar je mag niet uitstappen, tenzij je een hoger tarief betaalt. Iets duurder wordt het als je ook tussenliggende eilanden wilt aandoen. Maar ook daarbinnen zijn weer verschillende mogelijkheden.

Tarief II;

Van A naar B, naar E, naar F, naar A.
Van A naar D, naar E, naar F, naar A.
Van A naar C, naar E, naar A.

Voor mensen met tijd en geld zijn er de volgende mogelijkheden.

Tarief III:

Van A naar B, naar D, naar E, naar F, naar A.
Van A naar B, naar C, naar E, naar F, naar A.
Van A naar B, naar C, naar D, naar E, naar A.

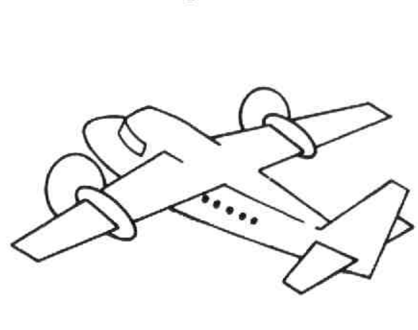
En tenslotte is er:

Tarief IV:

Van A naar B, naar C, naar D, naar E, naar F, naar A.

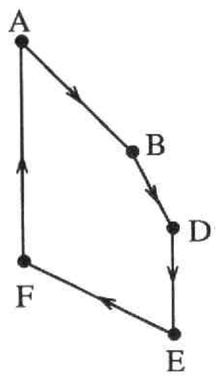
6. >a Teken (voor de *passagier*) een gerichte verbindingsgraaf behorend bij het luchtlijnennet van Pacific Islands Air (alle mogelijkheden in één graaf).

   >b Stel de bijbehorende verbindingsmatrix op.

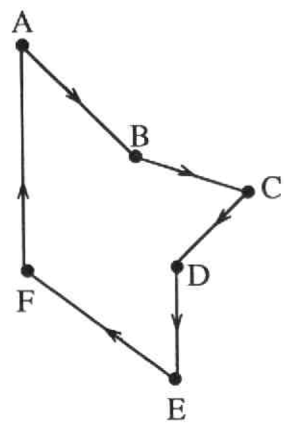


Per dag worden er drie retourvluchten vanaf A uitgevoerd:

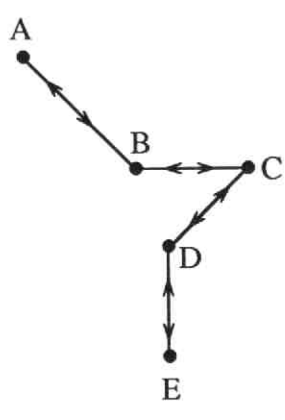
Vlucht 1:



Vlucht 2:



Vlucht 3:



7. >a Stel de directe-vluchten-matrix op voor één dag.
(Een retourvlucht wordt beschouwd als één directe weg; tussen A en B zijn dus drie retourvluchten of drie directe wegen.)

>b Teken de directe-vluchten-graaf.

Samenvatting

Naast de afstandenmatrix en verbindingsmatrix kennen we ook de directe-wegen-matrix.
Het verschil tussen de laatste twee:

verbindingsmatrix:
alleen 0 en 1 als element;
0: geen (directe) verbinding;
1: wel (directe) verbinding.

directe-wegen-matrix:
alle natuurlijke getallen (en nul) als element mogelijk;
0: geen (directe) weg;
1: één (directe) weg;
2: twee (directe) wegen;
enzovoort.

Een directe-wegen-matrix geeft je dus wel aanwijzingen om een verbindingsmatrix op te stellen, maar omgekeerd kan het niet.

kruispunt Georgetown Marbery House ST. en de 31^ste St.

4 Andere afstanden

In het eerste hoofdstuk zagen we dat het begrip 'afstand' op veel manieren te gebruiken valt, afhankelijk van de situatie.
Afstanden die genoemd werden:

- Rijafstand (in kilometers).
- Vliegafstand of Afstand hemelsbreed (in kilometers).
- Meetkundige afstand (tussen twee punten).
- Rijduur (in uren).
- 'Mate van verschil'.

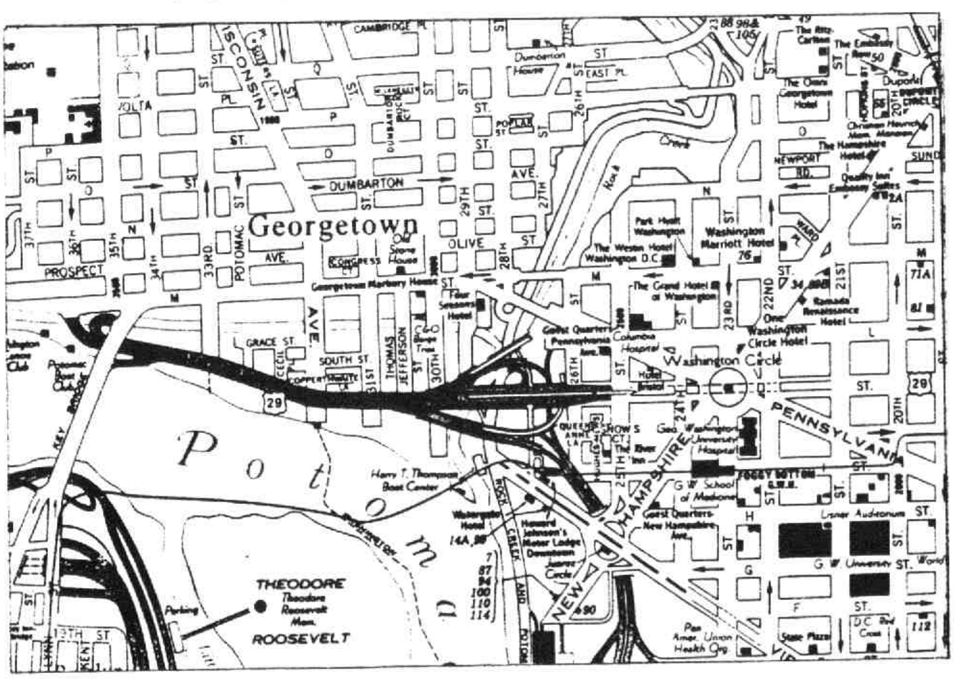
De meetkundige afstand is vaak eenvoudig met Pythagoras te berekenen, bijvoorbeeld als je de coördinaten van de twee punten kent.

1. >a A = (3,4) B = (1,3)
   Teken deze punten op roosterpapier en bereken de afstand tussen A en B.

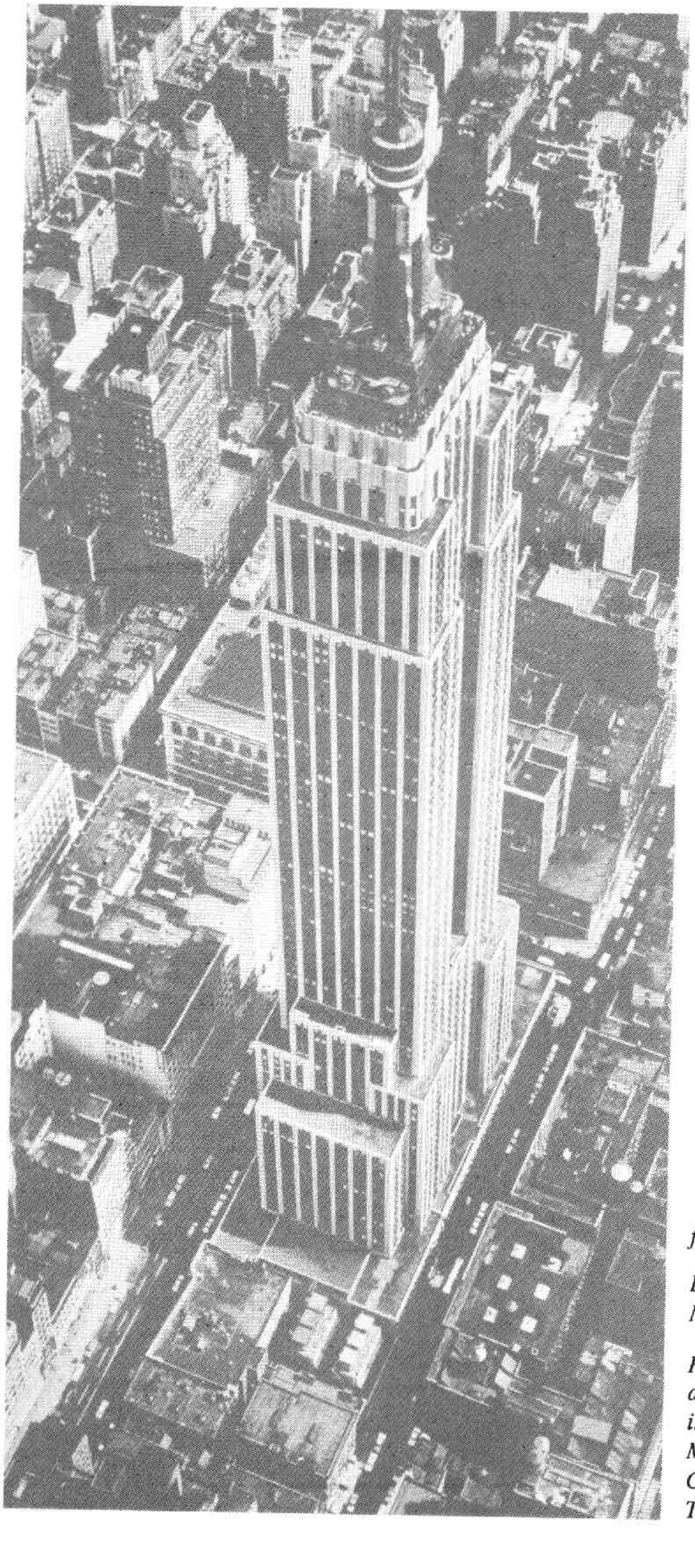
   >b Ook voor C = (12,8) en D = (8,6).

De afstanden zoals in opgave 1 worden ook wel *Pythagoras-afstanden* genoemd.

In de praktijk is deze Pythagoras-afstand niet altijd even handig. Dat blijkt onder andere uit het volgende probleem.
Hier een stukje plattegrond van Washington:



Washington *figuur 10*

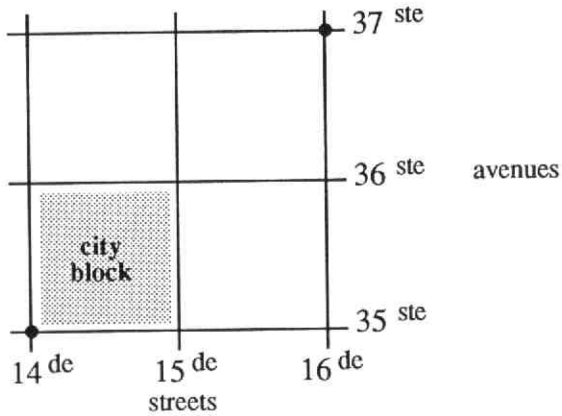


figuur 11

Empire-State-Building
Manhattan, New York.

Het rechthoekig stratenpatroon
dat verantwoordelijk
is voor de namen:
Manhattan-afstand of
City-block-afstand of
Taxi-afstand.

Een klein stukje (links boven) vergroten we:



2. > Bereken de Pythagoras-afstand (afstand hemelsbreed) van het kruispunt (14,35) en (16,37).
   De eenheden zijn 'city-blocks'.

3. > Hoe groot is de afstand die een taxi rijdt van (14,35) naar (16,37)?

De '*Taxi-afstand*' kun je berekenen door de eerste coördinaten van elkaar af te trekken (16 – 14) en daarna de tweede (37 – 35) en deze bij elkaar op te tellen.

Of in formules:
Pythagoras-afstand tussen (a,b) en (c,d):

$$D = \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2}$$

Taxi-afstand tussen (a,b) en (c,d):

$$D = |a - c| + |b - d|. \quad *)$$

4. > In welke situatie zijn de Taxi-afstand en de Pythagoras-afstand aan elkaar gelijk?

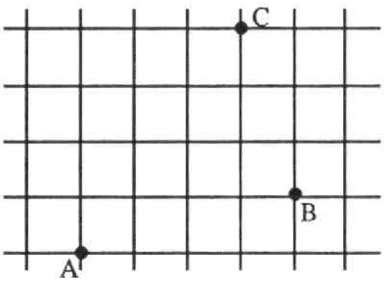
5. De Taxi-afstand wordt ook wel City-block-afstand of Manhattan-afstand genoemd.
   > Kun je daar een verklaring voor geven?

*) $|a - c|$ is het *absolute verschil* van a en c.
Als bijvoorbeeld $a = 7$ en $c = 12$ dan geldt: $a - c = -5$, $|a - c| = 5$.

6. Maak een afstandentabel voor de drie punten *A, B* en *C* in het onderstaand rooster.

   >a met Pythagoras-afstanden

   >b met Taxi-afstanden.

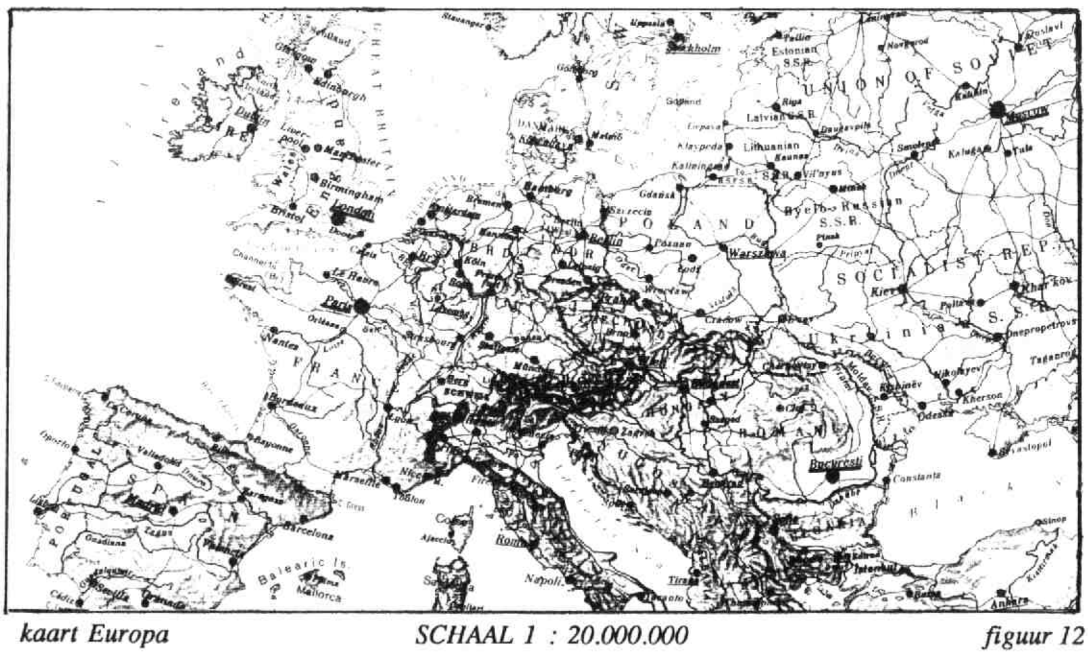


7. Gegeven de afstandenmatrix H:

$$H = \begin{array}{c} \\ L \\ P \\ B \\ M \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} L & P & B & M \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 14 & 84 & 99 \\ 14 & 0 & 75 & 98 \\ 84 & 75 & 0 & 59 \\ 99 & 98 & 59 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

   >a Teken een afstandenkaart met gebruikmaking van passer en lineaal. Begin daarbij met de punten L, B en M.

   >b L = Londen, P = Parijs, B = Boekarest, M = Moskou. Vergelijk je resultaat met onderstaande kaart.



kaart Europa *SCHAAL 1 : 20.000.000* *figuur 12*

Kleurenblindheid

Bij een kleurenblindheidtest beperkt men zich tot drie kleuren: blauw, groen en rood.

De arts bepaalt hoe vaak blauw wordt aangezien voor groen of rood. Uit het aantal fouten kan hij dan een soort 'afstand' berekenen.

Bij een persoon die goed kleuren kan onderscheiden wordt de volgende afstandenmatrix gevonden:

$$\begin{array}{l} \\ \text{Rood} \\ \text{Groen} \\ \text{Blauw} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Rood} & \text{Groen} & \text{Blauw} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 12 & 9 \\ 12 & 0 & 6 \\ 9 & 6 & 0 \end{pmatrix} \end{array} = N$$

8. > Teken een afstandenkaart van de matrix *N*.

Bij iemand met kleurenblindheid wordt de volgende matrix gevonden:

$$\begin{array}{l} \\ R \\ G \\ B \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} R & G & B \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 12 & 11 \\ 12 & 0 & 3 \\ 11 & 3 & 0 \end{pmatrix} \end{array} = L$$

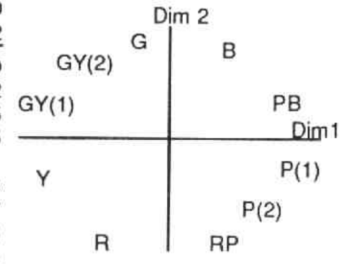
9. > Teken een afstandenkaart van de matrix L.
   Wat is het verschil met de 'normale' afstandenkaart van de vorige opgave?

Veel gevallen van kleurenblindheid betreffen het aanzien van rood voor groen en omgekeerd

10. > Geef een voorbeeld van hoe een matrix er uit zou kunnen zien in dit geval.

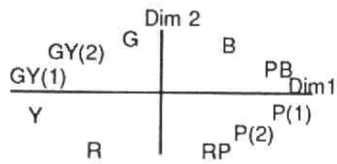
De matrices uit opgave 8 en 9 zijn niet erg 'echt'. Dat zijn de volgende matrices uit een engels onderzoek wel. We geven de matrix én het bijbehorende kaartje:

	1 RP	2 R	3 Y	4 GY1	5 GY2	6 G	7 B	8 PB	9 P1	10 P2
1. Red-Purple		7.1	10.2	11.1	12.5	11.8	9.9	8.6	4.3	2.9
2. Red	7.1		5.7	11.5	10.7	11.8	11.2	12.5	9.2	8.2
3. Yellow	10.2	5.7		6.7	8.9	9.4	11.3	12.5	11.9	10.5
4. Green-yellow (1)	11.1	11.5	6.7		3.7	5.9	10.3	11.6	10.9	11.5
5. Green-yellow (2)	12.5	10.7	8.9	3.7		3.6	8.2	9.8	11.3	11.1
6. Green	11.8	11.8	9.4	5.9	3.6		5.1	8.1	10.2	10.6
7. Blue	9.9	11.2	11.3	10.3	8.2	5.1		4.9	8.7	9.7
8. Purple-Blue	8.6	12.5	12.5	11.6	9.8	8.1	4.9		6.3	7.5
9. Purple (1)	4.3	9.2	11.9	10.9	11.3	10.2	8.7	6.3		3.0
10. Purple (2)	2.9	8.2	10.5	11.5	11.1	10.6	9.7	7.5	3.0	



Een kleurenmatrix en -kaart van een persoon die goed kleuren kan onderscheiden *figuur 13*

	1 RP	2 R	3 Y	4 GY1	5 GY2	6 G	7 B	8 PB	9 P1	10 P2
1. Red-Purple		9.9	13.2	12.3	11.1	8.7	5.6	7.4	6.4	5.8
2. Red	9.9		7.3	7.9	6.9	6.8	9.9	13.1	12.7	12.1
3. Yellow	13.2	7.3		4.5	5.3	8.6	12.5	13.4	14.1	13.4
4. Green-yellow (1)	12.3	7.9	4.5		5.3	8.6	12.5	13.4	14.1	13.1
5. Green-yellow (2)	11.1	6.9	5.3	5.3		6.9	9.0	12.2	12.5	13.4
6. Green	8.7	6.8	9.7	8.6	6.9		6.7	9.7	11.3	9.9
7. Blue	5.6	9.9	11.5	12.5	9.0	6.7		5.5	7.4	5.4
8. Purple-Blue	7.4	13.1	13.7	13.4	12.2	9.7	5.5		4.2	4.0
9. Purple (1)	6.4	12.7	14.1	14.1	12.5	11.3	7.4	4.2		4.3
10. Purple (2)	5.8	12.1	13.4	13.1	13.4	9.9	5.4	4.0	4.3	



Een kleurenmatrix en -kaart van een kleurenblind persoon *figuur 14*

11. Uit de *kaartjes* blijkt inderdaad dat de kleurenblinde persoon problemen heeft met het onderscheiden van bijvoorbeeld Groen en Rood.

 >a Hoe blijkt dat uit de twee kaartjes?

 >b Hoe kun je dat aan de *matrix* zien?

Morse-signalen

Samuel Morse is de uitvinder van het Morse-alfabet; een alfabet van punt- en streeptekens dat in de telegrafie wordt gebruikt.
Het is dus opgebouwd uit twee elementen: punten en strepen en het is gebaseerd op de statistische verdeling van het gebruik van de letters.
De meest gebruikte letter, de e wordt daarom met één punt gecodeerd (zie figuur 15).

A	· —	T	—
B	— · · ·	U	· · —
C	— · — ·	V	· · · —
D	— · ·	W	· — —
E	·	X	— · · —
F	· · — ·	Y	— · — —
G	— — ·	Z	— — · ·
H	· · · ·		
I	· ·		
J	· — — —	1	· — — — —
K	— · —	2	· · — — —
L	· — · ·	3	· · · — —
M	— —	4	· · · · —
N	— ·	5	· · · · ·
O	— — —	6	— · · · ·
P	· — — ·	7	— — · · ·
Q	— — · —	8	— — — · ·
R	· — ·	9	— — — — ·
S	· · ·	0	— — — — —

Morse-alfabet *figuur 15*

De letterwaardering bij het Scrabble-spel is ook gebaseerd op een statistische verdeling van de letters.
Het is aardig om de scrabble-waardering te vergelijken met het Morse-alfabet. Voor het Nederlandse Scrabble gelden de volgende waarden:

A	1	J	4	S	1
B	3	K	4	T	1
C	3	L	2	U	4
D	1	M	3	V	4
E	1	N	1	W	4
F	5	O	1	X	8
G	2	P	3	Y	8
H	2	Q	10	Z	6
I	1	R	1		

Honderd personen (die nog geen Morse kenden) kregen twee Morse-signalen achter elkaar te horen met tussenposen van 1,4 seconde. Ze moesten verklaren of de signalen hetzelfde of verschillend waren. Die proefpersonen kregen in hoog tempo *alle* paren van twee signalen één keer te horen.

Op blz. 32 staat een tabel in matrixvorm waarin af te lezen is dat A-A maar liefst 92 keer als hetzelfde werd herkend. Daarin is ook af te lezen dat A-I toch nog 46 keer als hetzelfde werd herkend.

2^e signaal

1^e signaal

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Ø
A	92	04	06	13	03	14	10	13	46	05	22	03	25	34	06	06	09	35	23	06	37	13	17	12	07	03	02	07	05	05	08	06	05	06	02	03
B	05	84	37	31	05	28	17	21	05	19	34	40	06	10	12	22	25	16	18	02	18	34	08	84	30	42	12	17	14	40	32	74	43	17	04	04
C	04	38	87	17	04	29	13	07	11	19	24	35	14	03	09	51	34	24	14	06	06	11	14	32	82	38	13	15	31	14	10	30	28	24	18	12
D	08	62	17	88	07	23	40	36	09	13	81	56	08	07	09	27	09	45	29	06	17	20	27	40	15	33	03	09	06	11	09	19	08	10	05	06
E	06	13	14	06	97	02	04	04	17	01	05	06	04	04	05	01	05	10	07	67	03	03	02	05	06	05	04	03	05	03	05	02	04	02	03	03
F	04	51	33	19	02	90	10	29	05	33	16	50	07	06	10	42	12	35	14	02	21	27	25	19	27	13	08	16	47	25	26	24	21	05	05	05
G	09	18	27	38	01	14	90	06	05	22	33	16	14	13	82	52	23	21	05	03	15	14	32	21	23	39	15	14	05	10	04	10	17	23	20	11
H	03	45	23	25	09	32	08	87	10	10	09	29	05	08	08	14	08	17	37	04	36	59	09	33	14	11	03	09	15	43	70	35	17	04	03	03
I	64	07	07	13	10	08	06	12	93	03	05	16	13	30	07	03	05	19	35	16	10	05	08	02	05	07	02	05	08	09	06	08	05	02	04	05
J	07	09	38	09	02	24	18	05	04	85	22	31	08	03	21	63	47	11	02	07	09	09	09	22	32	28	67	66	33	15	07	11	28	29	26	23
K	05	24	38	73	01	17	25	11	05	27	91	33	10	12	31	14	31	22	02	02	23	17	33	63	16	18	05	09	17	08	08	18	14	13	05	06
L	02	69	43	45	10	24	12	26	09	30	27	86	06	02	09	37	36	28	12	05	16	19	20	31	25	59	12	13	17	15	26	29	36	16	07	03
M	24	12	05	14	07	17	29	08	08	11	23	08	96	62	11	10	15	20	07	09	13	04	21	09	18	08	05	07	06	06	05	07	11	07	10	04
N	31	04	13	30	08	12	10	16	13	03	16	08	59	93	05	09	05	28	12	10	16	04	12	04	06	11	05	02	03	04	04	06	02	02	10	02
O	07	07	20	06	05	09	76	07	02	39	26	10	04	08	86	37	35	10	03	04	11	14	25	35	27	27	19	17	07	07	06	18	14	11	20	12
P	05	22	33	12	05	36	22	12	03	78	14	46	05	06	21	83	43	23	09	04	12	19	19	19	41	30	34	44	24	11	15	17	24	23	25	13
Q	08	20	38	11	04	15	10	05	02	27	23	26	07	06	22	51	91	11	02	03	06	14	12	37	50	63	34	32	17	12	09	27	40	58	37	24
R	13	14	16	23	05	34	26	15	07	12	21	37	14	12	12	29	08	87	16	02	23	23	62	14	12	13	07	10	13	04	07	12	07	09	01	02
S	17	24	05	30	11	26	05	59	16	03	13	10	05	17	06	06	03	18	96	09	56	24	12	10	06	07	08	02	02	15	28	09	05	05	05	02
T	13	10	01	05	46	03	06	06	14	06	14	07	06	05	06	11	04	04	07	96	08	05	04	02	02	06	05	05	03	03	03	08	07	06	14	06
U	14	29	12	32	04	32	11	34	21	07	44	32	11	13	06	20	12	40	51	06	93	57	34	17	09	11	06	06	16	34	10	09	09	07	04	03
V	05	17	24	16	09	29	06	39	05	11	26	43	04	01	09	17	10	17	11	06	32	92	17	57	35	10	10	14	28	79	44	36	25	10	01	05
W	09	21	30	22	09	36	25	15	04	25	29	18	15	06	26	20	25	61	12	04	19	20	86	22	25	22	10	22	19	16	05	09	11	06	03	07
X	07	64	45	19	03	28	11	06	01	35	50	42	10	08	24	32	61	10	12	03	12	17	21	91	48	26	12	20	24	27	16	57	29	16	17	06
Y	09	23	62	15	04	26	22	09	01	30	12	14	05	06	14	30	52	05	07	04	06	13	21	44	86	23	26	44	40	15	11	26	22	33	23	16
Z	03	46	45	18	02	22	17	10	07	23	21	51	11	02	15	59	72	14	04	03	09	11	12	36	42	87	16	21	27	09	10	25	66	47	15	15
1	02	05	10	03	03	05	13	04	02	29	05	14	09	07	14	30	28	09	04	02	03	12	14	17	19	22	84	63	13	08	10	08	19	32	57	55
2	07	14	22	05	04	20	13	03	25	26	09	14	02	03	17	37	28	06	05	03	06	10	11	17	30	13	62	89	54	20	05	14	20	21	16	11
3	03	08	21	05	04	32	06	12	02	23	06	13	05	02	05	37	19	09	07	06	04	16	06	22	25	12	18	64	86	31	23	41	16	17	08	10
4	06	19	19	12	06	25	14	16	07	21	13	19	03	03	02	17	29	11	09	03	17	55	08	37	24	03	05	26	44	89	42	44	32	10	03	03
5	08	45	15	14	02	45	04	67	07	14	04	41	02	00	04	13	07	09	27	02	14	45	07	45	10	10	14	10	30	69	90	42	24	10	06	05
6	07	80	30	17	04	23	04	14	02	11	11	27	06	02	07	16	30	11	14	03	12	30	09	58	38	39	15	14	26	24	17	86	69	14	05	14
7	06	33	22	14	05	25	06	04	06	24	13	32	07	06	07	36	39	12	06	02	03	13	09	30	30	50	22	29	18	15	12	61	85	70	20	13
8	03	23	40	06	03	15	15	06	02	33	10	14	03	06	14	12	45	02	06	04	06	07	05	24	35	50	42	29	16	16	09	30	60	89	61	26
9	03	14	23	03	01	06	14	05	02	30	06	07	16	11	10	31	32	05	06	07	06	03	08	11	21	24	57	39	09	12	04	11	42	56	91	78
Ø	09	03	11	02	05	07	14	04	05	30	08	03	02	03	25	21	29	02	03	04	05	03	02	12	15	20	50	26	09	11	05	22	17	52	81	94

frequentiematrix Morse-signalen *figuur 16*

12. > Hoe vaak werd I-I als hetzelfde herkend?
   Hoe vaak werd I-A als hetzelfde herkend?

Uit het laatste antwoord blijkt dat de 'afstand' van A tot I *niet* gelijk is aan de 'afstand' van I tot A. 'Binnen' de wiskunde misschien vreemd, daarbuiten lang niet altijd.

13. > Welke letter werd het vaakst goed herkend?

14. > Welke letter ligt het 'dichtst' bij de letter van opgave 13? (Ofwel, welke letter wordt het vaakst voor die van opgave 13 aangezien?)

Ook figuur 16 is als 'afstandenmatrix' te interpreteren, en dus is ook een kaart te tekenen.
Om die kaart te tekenen beperken we ons even tot drie signalen: de B, E en T.
Uit de grote matrix lezen we:

	B	E	T
B	84	5	2
E	13	97	67
T	10	46	96

Onmiddellijk valt op dat *niet* geldt: afstand B-E = afstand E-B, waaruit blijkt dat er niet zo iets is als *de* afstand, in dit geval.
Voordat we een kaart kunnen tekenen moet dit eerst in orde gebracht worden.
We *benaderen* de feitelijke tabel voor dit doel door een nieuwe, die er wat mooier uitziet:

	B	E	T
B	100	10	6
E	10	100	60
T	6	60	100

Dit is een 'mate van gelijkenis' matrix.

15. > Verklaar hoe men tot deze tabel komt.

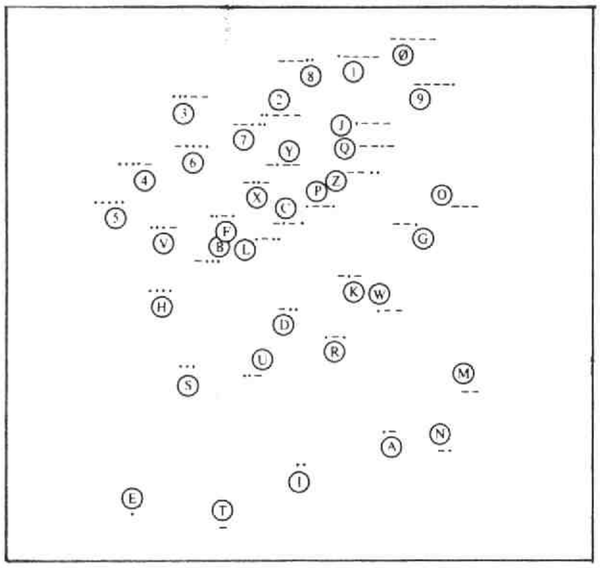
Vervolgens wordt er een 'mate van verschil' of 'afstanden' matrix gemaakt.

	B	E	T
B	0	90	94
E	90	0	40
T	94	40	0

16. > Verklaar hoe men tot deze tabel komt.

17. > Teken een afstandenkaart.

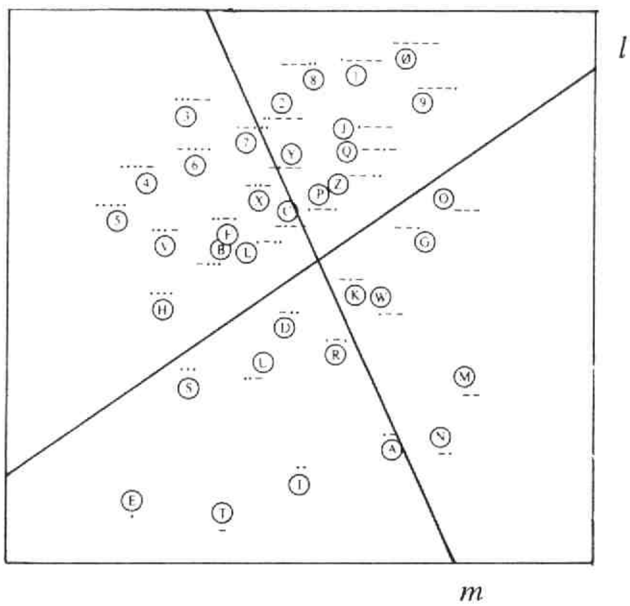
De volledige kaart van de morse-matrix ziet er als volgt uit (fig. 16):



De morse-kaart *figuur 17*

18. > Vergelijk de antwoorden van opgaven 12 en 13 met deze kaart. Commentaar?

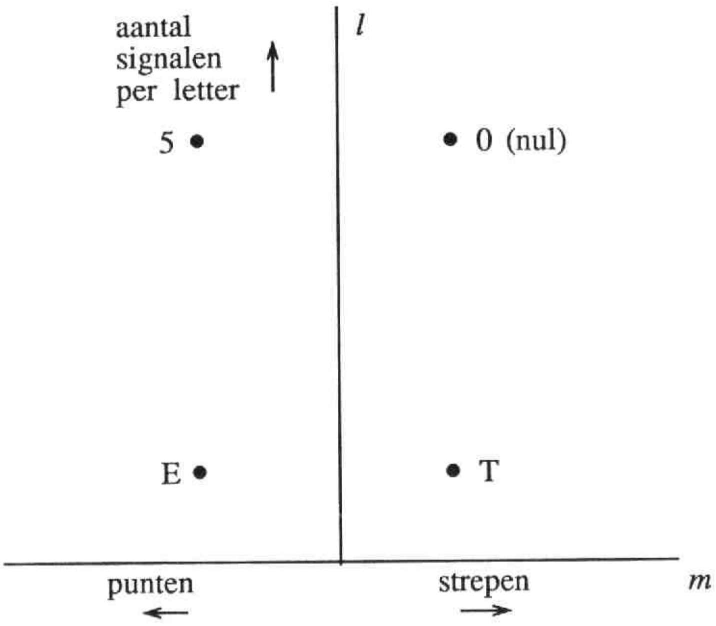
Het is de moeite waard om de kaart eens wat nauwkeuriger te bekijken. Daarbij kijken we naar de signalen en delen het kaartje in vieren:



19. > Welk opvallend verschil is er tussen de signalen onder en boven de lijn *l*?

20. > Welk opvallend verschil is er tussen de signalen links en rechts van de lijn *m*?

Uit de antwoorden op de vorige twee vragen blijkt dat er twee *criteria*, of twee *dimensies* een belangrijke rol spelen bij morsesignalen.
Het moet dus ook mogelijk zijn om een kaart met twee assen te tekenen.
In feite zijn de lijnen *l* en *m* als twee assen te beschouwen:



Vier signalen zijn al ingetekend – uiteraard op tamelijk willekeurige plaats.

21. > Neem bovenstaande kaart over en vul hem globaal aan met de S en de O.

Samenvatting

Dit hoofdstuk ging over afstanden en (afstanden)kaarten.
Eerst werd aandacht besteed aan de:
- Pythagoras-afstand tussen twee punten en de
- Taxi-afstand tussen twee punten.

Vervolgens werd gekeken naar afstanden tussen 'kleuren' en tussen 'morse-tekens': als twee kleuren (signalen) veel voor elkaar worden aangezien, is de afstand klein.

5 De juiste dimensie

Een kaart tekenen aan de hand van een afstandenmatrix kan vaak wel, soms niet, meestal zo'n beetje. (Denk aan de Morse-kaart.)
De vraag is of we wel een kaart *mogen* tekenen zoals we dat gewend zijn - dus in twee dimensies. Bij een aardrijkskundige kaart is dat tamelijk 'natuurlijk': de aarde is redelijk 'plat' - zeker als we een kleiner gebied nemen en er een strijkijzer overheen laten gaan, lijkt het al aardig op een twee-dimensionale kaart.

Maar hoe zit dat bij sociale afstanden? Bij kleurenblindheid? Bij morse-signalen?
Bij de Morse-signalen zagen we duidelijk *twee onderscheidende eigenschappen*, of *twee dimensies*: het aantal signalen, en de punten of strepen.
Daarom ligt het enigszins voor de hand dat een *tweedimensionale* kaart een redelijk beeld schetst.
Maar misschien ligt de situatie bij bijvoorbeeld politieke partijen wel heel anders.

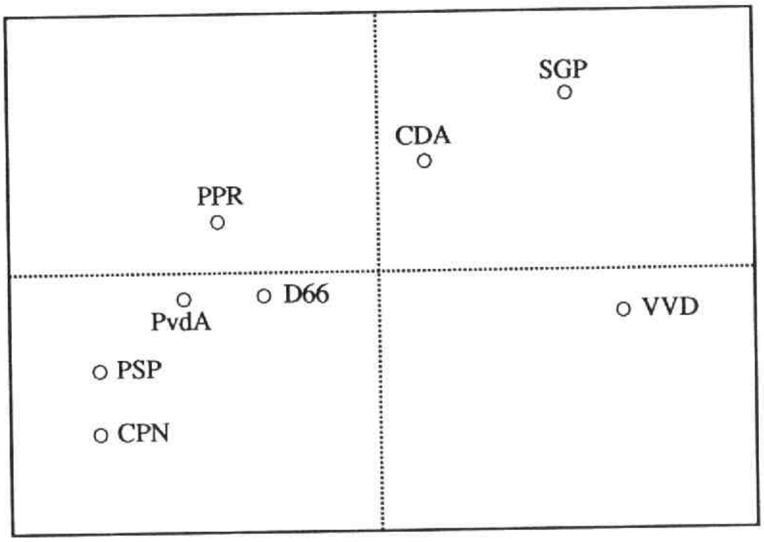
Politieke partijen
Bij een groot landelijk onderzoek probeert men de verhoudingen tussen de grote politieke partijen 'in kaart' te brengen. Daartoe worden allerlei zaken, of zo je wilt, allerlei *eigenschappen* 'gemeten' - hoe links of rechts is een partij, hoe kerkelijk gebonden, hoe betrouwbaar, hoe constructief, hoe machtig, enzovoort.
Daarna wordt allereerst een één-dimensionale kaart getekend, bijvoorbeeld:

1. > Geef commentaar; welke *onderscheidende* eigenschap is klaarblijkelijk erg belangrijk?

2. > Bepaal de afstandenmatrix voor de vier grote partijen: PvdA, CDA, VVD, D66. (Meet daartoe afstanden in mm nauwkeurig op).
   Noem deze matrix A.

*) Zoals je waarschijnlijk weet zijn de partijen CPN, PSP en PPR sinds kort met de EVP opgegaan in de nieuwe partij Groen Links.

Vervolgens wordt een twee-dimensionale kaart getekend:



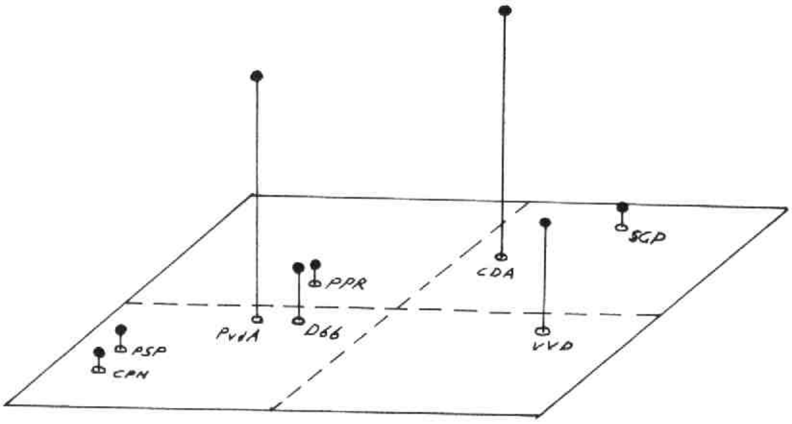
3. > Geef commentaar; welke *twee* 'dimensies' of 'onderscheidende eigenschappen' vermoed je dat bij deze indeling een grote rol spelen?

4. > Bepaal ook nu de afstandenmatrix voor de vier grote partijen: PvdA, CDA, VVD, D66. Noem deze matrix B (meet de afstand op in mm).

De door de onderzoeker gevonden matrix M voor de grote vier partijen ziet er als volgt uit:

$$M = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} P & D & C & V \end{array} \\ \begin{array}{c} P \\ D \\ C \\ V \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 9 & 33 & 55 \\ 9 & 0 & 30 & 47 \\ 33 & 30 & 0 & 35 \\ 55 & 47 & 35 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

5. > Bepaal door M – B en M – A welke kaart het beste de afstand tussen de partijen weergeeft. (M – B is het verschil van de matrix M en de matrix B, matrices kun je van elkaar aftrekken door de overeenkomstige elementen van elkaar af te trekken.)



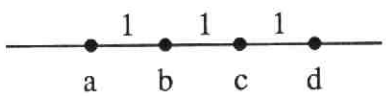
6. Bovenstaande *drie*-dimensionale kaart toont weer de acht politieke partijen van opgave 3. Er is alleen een *derde* dimensie aan toegevoegd.
   > Welke onderscheidende eigenschap zou dat kunnen zijn?

Een vierhoeksrelatie

Vier mensen worden onderzocht op hun persoonlijke relaties. Het is niet duidelijk of ze de waarheid spreken, maar er komt een opmerkelijk resultaat.
Alle vier hebben 'dezelfde afstand' tot elkaar.

7. > Stel een afstandenmatrix op van de relatie tussen de personen a, b, c en d.
   Noem deze matrix A.

De onderzoeker wil een afstandenkaartje tekenen.
Hij begint in één dimensie:

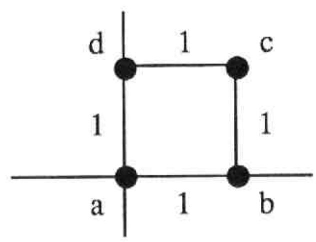


kaartje één dimensie

8. > Klopt dit kaartje?

9. > Stel de afstandenmatrix op van dit kaartje. Noem deze B.

Vervolgens probeert hij het in twee dimensies:



kaartje dimensie 2

10. > Klopt dit kaartje?

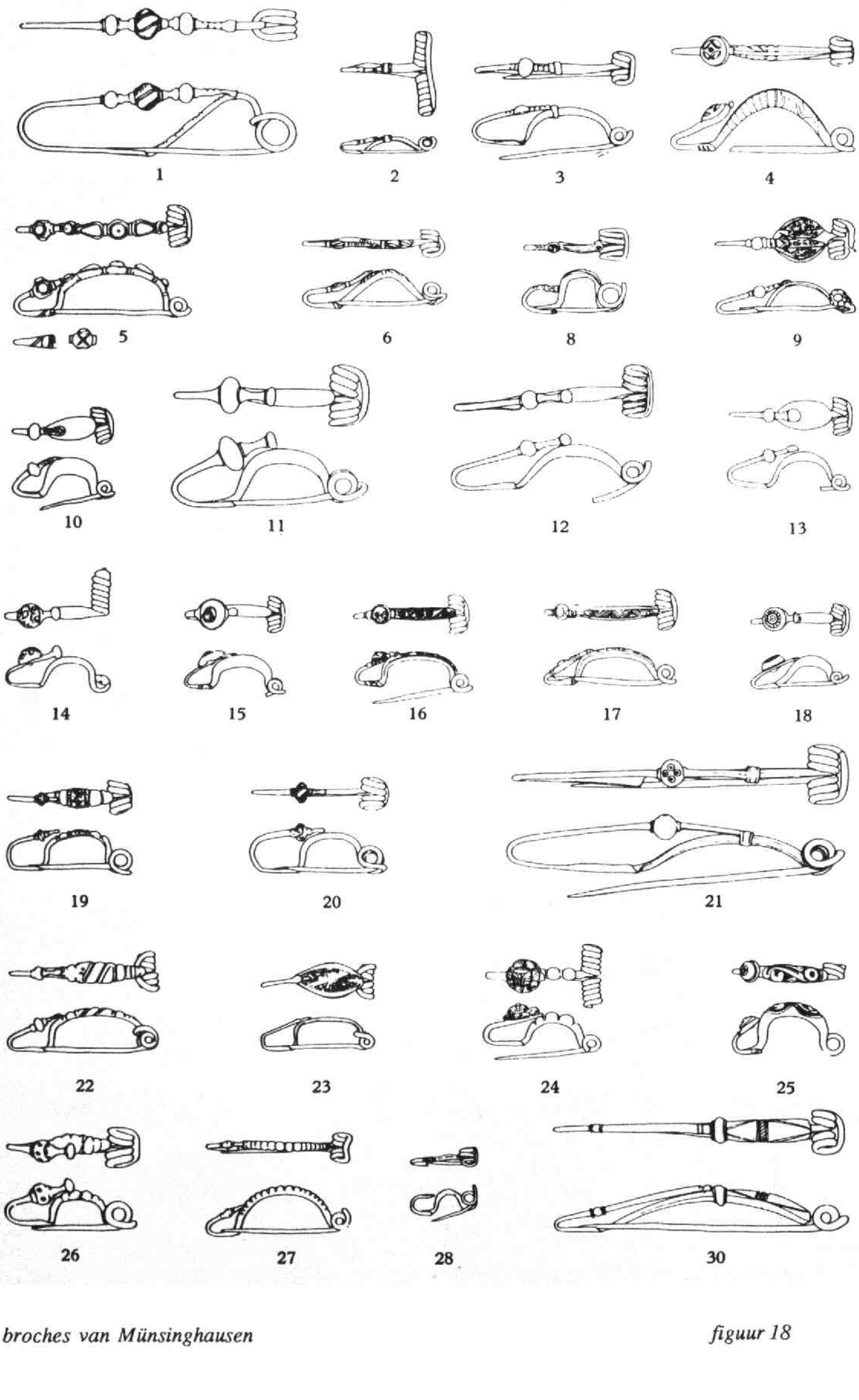
11. > Stel de afstandenmatrix op van dit kaartje. Noem deze C.

12. > Bedenk zelf een kaart in drie dimensies die helemaal klopt.
    (De punten worden hoekpunten van een mooie ruimtelijke figuur.)

13. > Vergelijk de matrices B en C met de matrix A.
    Bepaal daartoe: $B - A$ en $C - A$

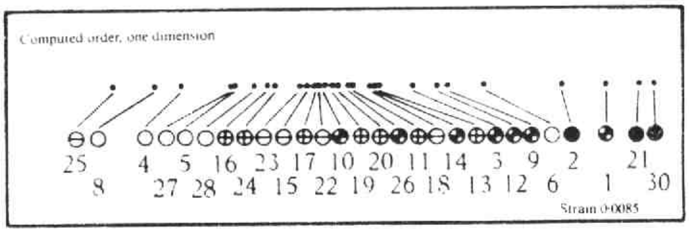
Het drie-dimensionale kaartje klopt precies. Klaarblijkelijk zijn er drie belangrijke aspecten die de relatie tussen die mensen bepalen.

Broches



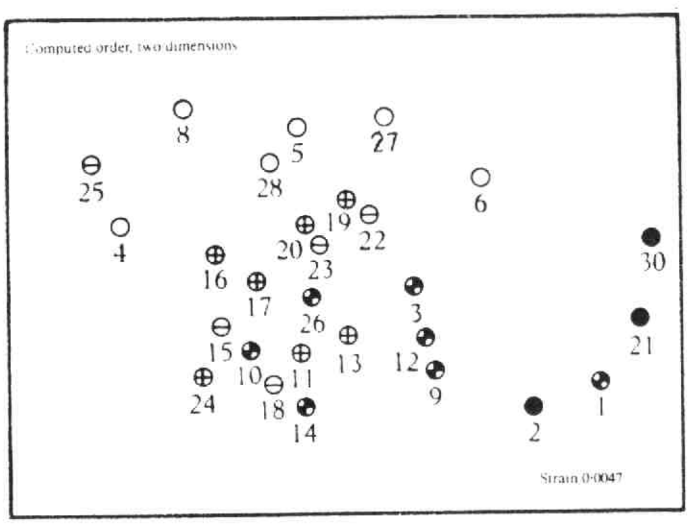
De 30 broches van Münsinghausen *figuur 18*

Op de bladzijde hiernaast zie je dertig broches die bij opgravingen in Münsinghausen gevonden zijn.
Oudheidkundigen willen graag weten welke broches 'bij elkaar horen' of, in andere woorden: de 'afstanden' tussen de broches. Daarbij worden verschillende aspecten of dimensies vergeleken zoals: grootte, vorm, kromming, materiaal, afwerking.
Nadat er een 'aspect-afstandenmatrix' was gemaakt, kwam er eerst een ééndimensionale kaart uit:



één-dimensionale kaart

De twee-dimensionale kaart ziet er zó uit:



twee-dimensionale kaart

14. > In de twee-dimensionale kaart liggen de broches 5, 19 en 27 ongeveer even ver van elkaar.
Hoe zit dat in de één-dimensionale kaart?

15. > Dezelfde vraag voor de broches 6, 20 en 9.

16. > Hoe vind je het groepje 2, 1, 21 en 30 terug in de één-dimensionale kaart?

17. Broches 10 en 15 liggen vlakbij elkaar volgens de kaart.

    > Klopt dat met jouw gevoel?

18. > Broches 5 en 28 liggen vlakbij elkaar volgens de kaart.
    Welk aspect heeft bij de vergelijking klaarblijkelijk een kleine rol gespeeld?

19. Praktikum

Samenvatting

Een kaart tekenen aan de hand van een afstandenmatrix kan in verschillende dimensies. De ene kaart geeft een resultaat dat beter past bij die afstandenmatrix dan de andere kaart.
Een afstandenkaart kan een beeld geven van de eigenschappen die een rol hebben gespeeld bij het bepalen van de afstand.
Als de kaart 1-dimensionaal (2- of 3-dimensionaal) is kun je ten hoogste 1 onderscheidende eigenschap (2 respectievelijk 3 onderscheidende eigenschappen) aflezen.

6 Extra opgaven

1. *Matrix en kaart*

>a Teken heel nauwkeurig een afstandsgetrouwe kaart voor de volgende afstandenmatrix. Begin met de plaatsen A, B en C. Teken daarna D erbij.

$$\begin{array}{cc} & \text{van} \\ & \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \text{naar} \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 8 & 6 & 14 \\ 8 & 0 & 10 & 16 \\ 6 & 10 & 0 & 8 \\ 14 & 16 & 8 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

>b Bij het maken van de kaart bij opgave >a heb je één gegeven afstand niet gebruikt.
Welke is dat? Controleer of deze afstand ook klopt in jouw tekening.

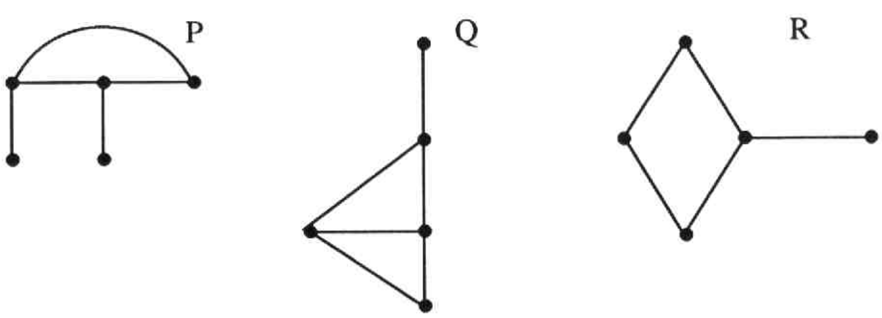
2. *Grafen en matrices*

> Onderzoek welke graaf (of grafen) horen bij de volgende matrices:

matrices:

$$A \begin{pmatrix} 0&1&0&0&0 \\ 1&0&1&0&1 \\ 0&1&0&0&1 \\ 0&0&0&0&1 \\ 0&1&1&1&0 \end{pmatrix} \qquad B \begin{pmatrix} 0&1&0&0&0 \\ 1&0&1&0&1 \\ 0&1&0&1&0 \\ 0&0&1&0&1 \\ 0&1&0&1&0 \end{pmatrix}$$

grafen:



3. *Grafen*

De volgende matrix G toont het aantal grafen dat te tekenen is met maximaal 9 knooppunten (p) en 18 wegen (q).

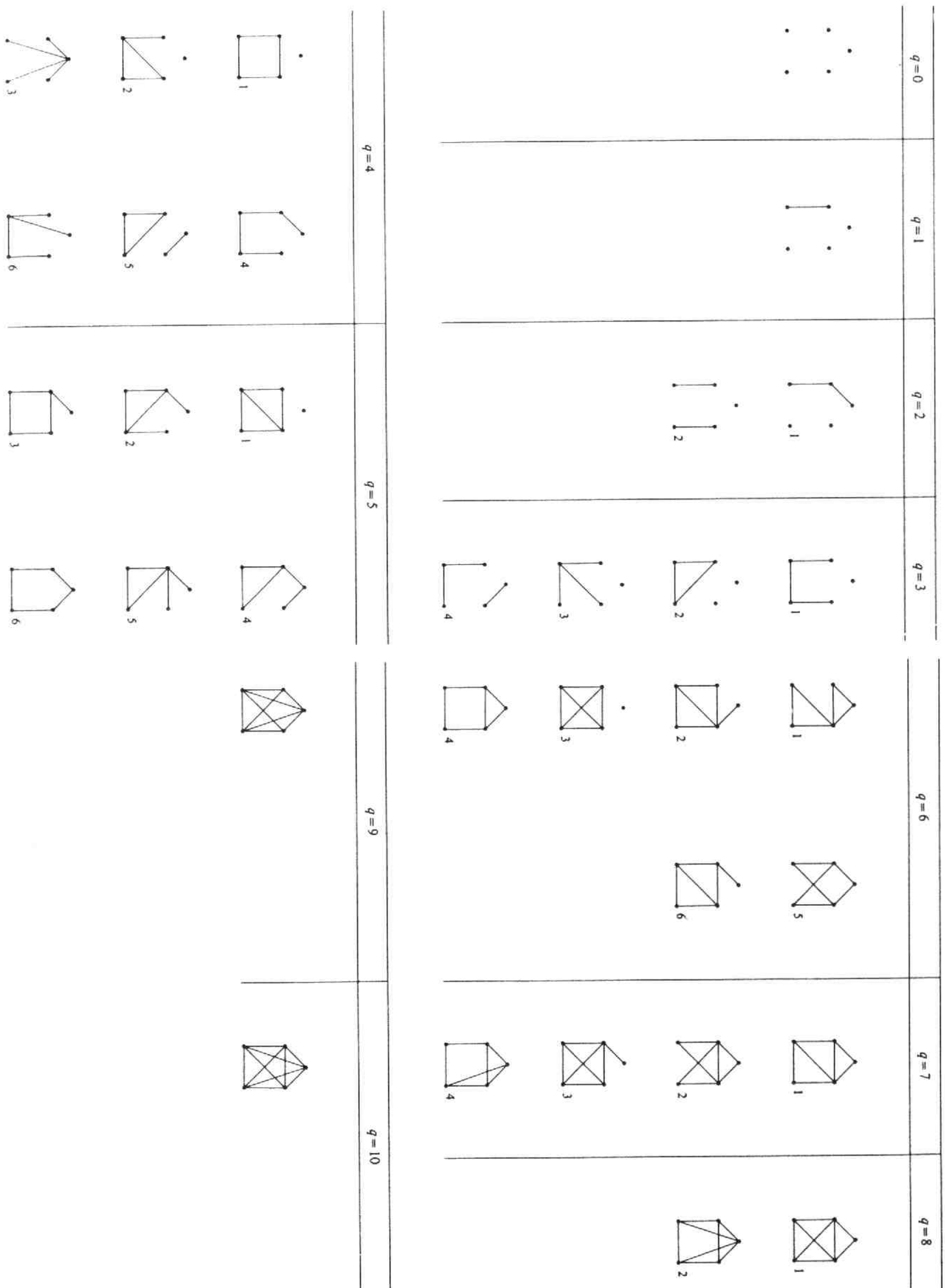
G =

q \ p	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1			1	1	1	1	1	1	1
2			1	2	2	2	2	2	2
3			1	3	4	5	5	5	5
4				2	6	9	10	11	11
5				1	6	15	21	24	25
6				1	6	21	41	56	63
7					4	24	65	115	148
8					2	24	97	221	345
9					1	21	131	402	771
10					1	15	148	663	1637
11						9	148	980	3252
12						5	131	1312	5995
13						2	97	1557	10120
14						1	65	1646	15615
15						1	41	1557	21933
16							21	1312	27987
17							10	980	32403
18							5	663	34040
g_p	1	2	4	11	34	156	1044	12346	274668

>a Hoeveel 5 puntsgrafen zijn er in totaal?

Figuur 19 toont alle 5 puntsgrafen.
Uit de tabel blijkt dat de kolom onder $p = 5$ symmetrisch is

>b. Hoe kun je dat in figuur 19 terugvinden?



figuur 19: Alle 5 puntsgrafen. (p = 5: q = 1,2,3,.....,10).

4. *Eilanden*

De plaatsen P_1, P_2, ... P_9 liggen verspreid over enkele eilanden.

Elk eiland heeft een eigen wegennet, dat niet verbonden is met dat van een ander eiland.

De plaatsen op een eiland zijn alle onderling verbonden (zij het niet noodzakelijk rechtstreeks of direct).

De verbindingsmatrix V (de nullen zijn weggelaten):

$$\begin{array}{c} \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \\ P_7 \\ P_8 \\ P_9 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_6 & P_7 & P_8 & P_9 \end{array} \\ \begin{pmatrix} . & . & . & . & . & . & 1 & . & 1 \\ . & . & 1 & . & . & . & . & . & . \\ . & 1 & . & 1 & . & . & . & 1 & . \\ . & . & 1 & . & . & . & . & 1 & . \\ . & . & . & . & . & 1 & . & . & . \\ . & . & . & . & 1 & . & . & . & . \\ 1 & . & . & . & . & . & . & . & 1 \\ . & . & 1 & 1 & . & . & . & . & . \\ 1 & . & . & . & . & . & 1 & . & . \end{pmatrix} \end{array}$$

>a Hoeveel eilanden zijn er? Noem van elk eiland de daarop liggende plaatsen.

>b Op elk eiland wordt het wegennet zó uitgebreid, dat de plaatsen op het eiland *direct* verbonden zijn.
Hoeveel enen heeft de matrix in dat geval?

5. *Zes steden verbonden*

Gegeven is de volgende verbindingsmatrix voor zes steden:

$$\begin{array}{cc} & \text{van} \\ & \begin{array}{cccccc} A & B & C & D & E & F \end{array} \\ \text{naar} \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

>a Teken een verbindingsgraaf voor deze zes steden. Denk aan de pijlen bij éénrichtingverkeer!

De zes steden zijn niet onderling bereikbaar. Er mag één verbinding bijgemaakt worden tussen twee steden, met tweerichtingverkeer.

De opzet is om in de nieuwe situatie de zes steden zo kort mogelijk met elkaar te verbinden.

>b Tussen welke twee steden zou jij dan die verbinding leggen? Geef argumenten voor je keuze.

6. *Bijles*

Op school zijn bijwerkcursussen voor leerlingen die zwak zijn in Wiskunde èn Economie.

Er worden twee groepen gevormd:

- één groep met de nadruk op Wiskunde (*W*);
- één groep met de nadruk op Economie (*E*).

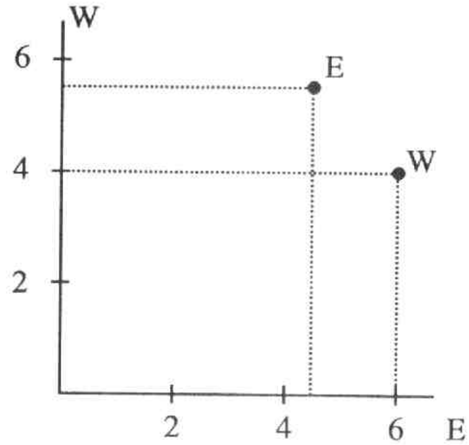
De volgende matrix geeft de gemiddelde scores van leerlingen bij een toets die afgenomen wordt bij toelating tot de cursus.

	W	E
groep W	4	6
groep E	5,5	4,5

Een leerling die ook mee wil doen aan de cursus heeft voor de toelatingstest een 5,5 voor Wiskunde en 5,0 voor Economie.

De vraag is in welke groep die leerling geplaatst moet worden.

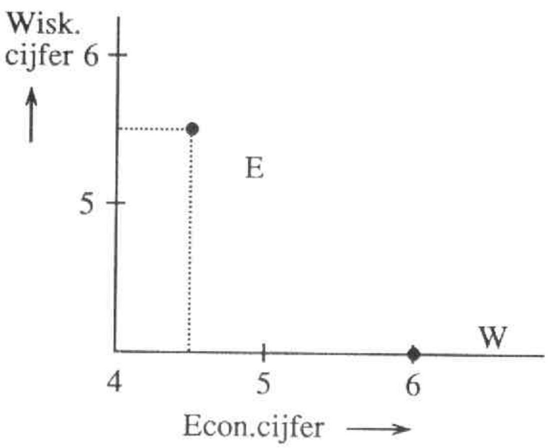
Dit is op te lossen door een kaart te tekenen



Groep $W = (6\ ;\ 4)$
Groep $E = (4{,}5\ ;\ 5{,}5)$

Scores groep W en groep E *figuur 20*

Een deel van de 'kaart' vergroten we:



Scores groep W en groep E *figuur 21*

Neem figuur 21 in je schrift over.

>a Teken de score van de nieuwe leerling $l = (5{,}0\ ;\ 5{,}5)$ in de figuur.

>b Bereken zowel de Pythagoras- als de Taxi-afstand van l tot E en van l tot W.

>c In welke groep zou deze leerling geplaatst worden?

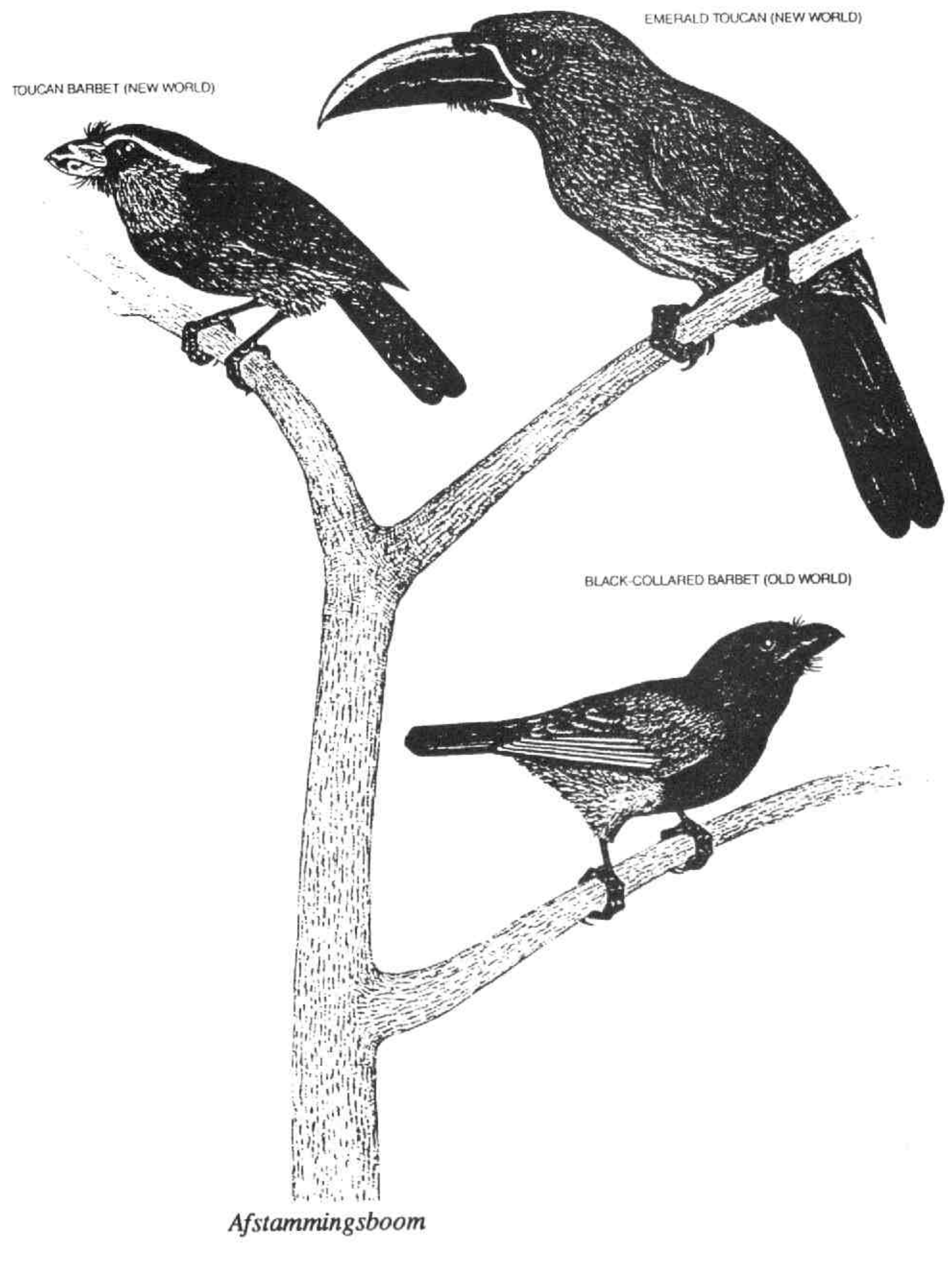
Vier andere leerlingen hebben de volgende resultaten

$m = (4{,}5\ ;\ 4{,}5)$
$n = (6{,}0\ ;\ 5{,}5)$
$o = (4{,}3\ ;\ 5{,}0)$
$p = (5{,}0\ ;\ 4{,}2)$

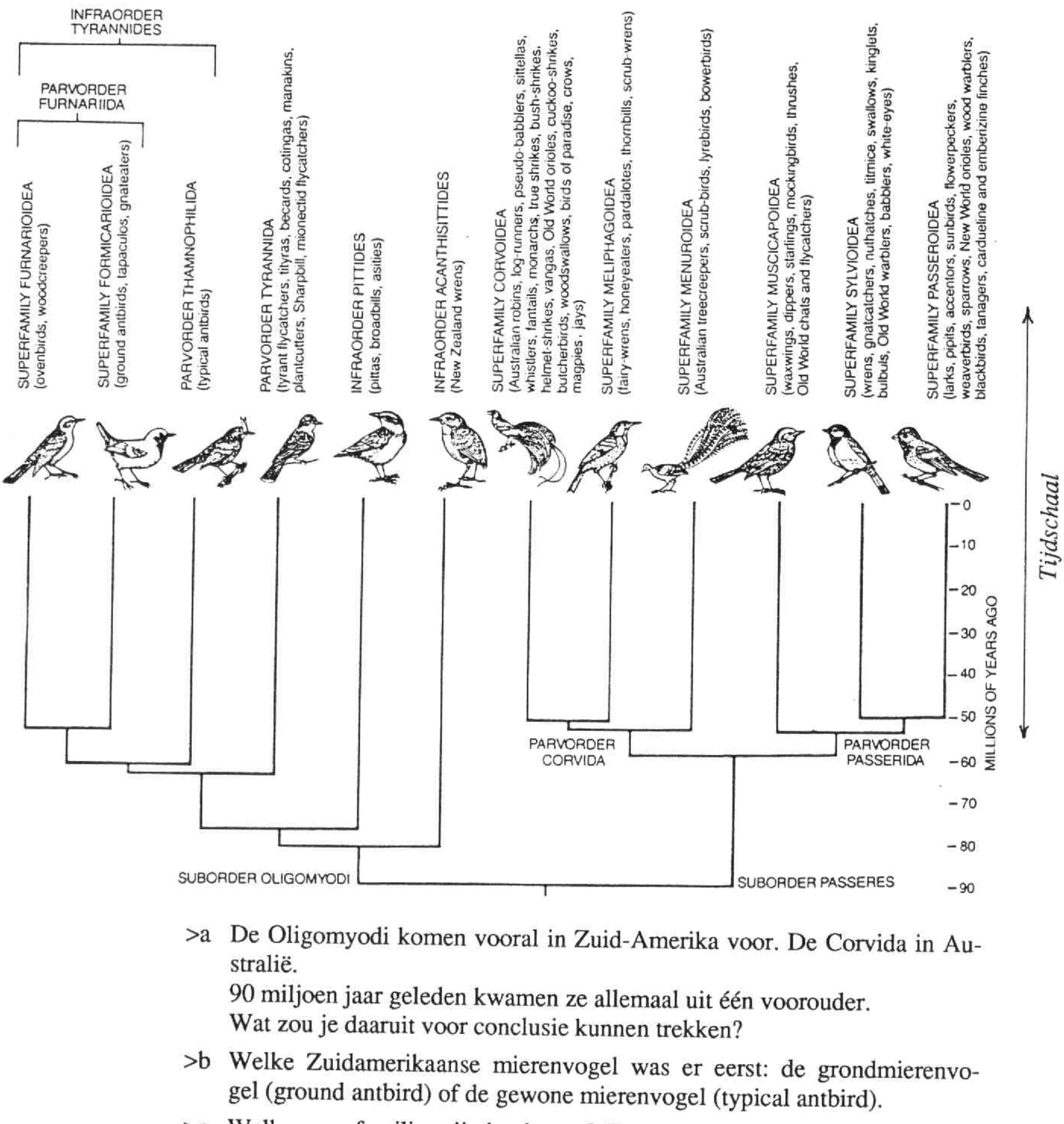
>d Maak een afstandenmatrix met de 'taxi-afstand' tussen de vijf resultaten.

7. *Genetische afstanden*

De erfelijke eigenschappen van dieren en mensen liggen besloten in de *genen* - meer in het bijzonder het DNA. Onderzoek naar de afstanden tussen verschillen in DNA's leidt tot een afstammingsboomgraaf.
Dit DNA-afstanden onderzoek heeft al tot verrassende resultaten geleid. Zo heeft men altijd gedacht dat de Toekan Barbet en de Black-Coloured Barbet op hetzelfde moment 'ontstaan' zijn en de Emerald-Toekan later.
Zoals het plaatje hieronder aangeeft is dat onjuist:
De Toekan Barbet en de Emerald Toekan zijn tegelijk en later dan de Black-Coloured Barbet ontstaan.



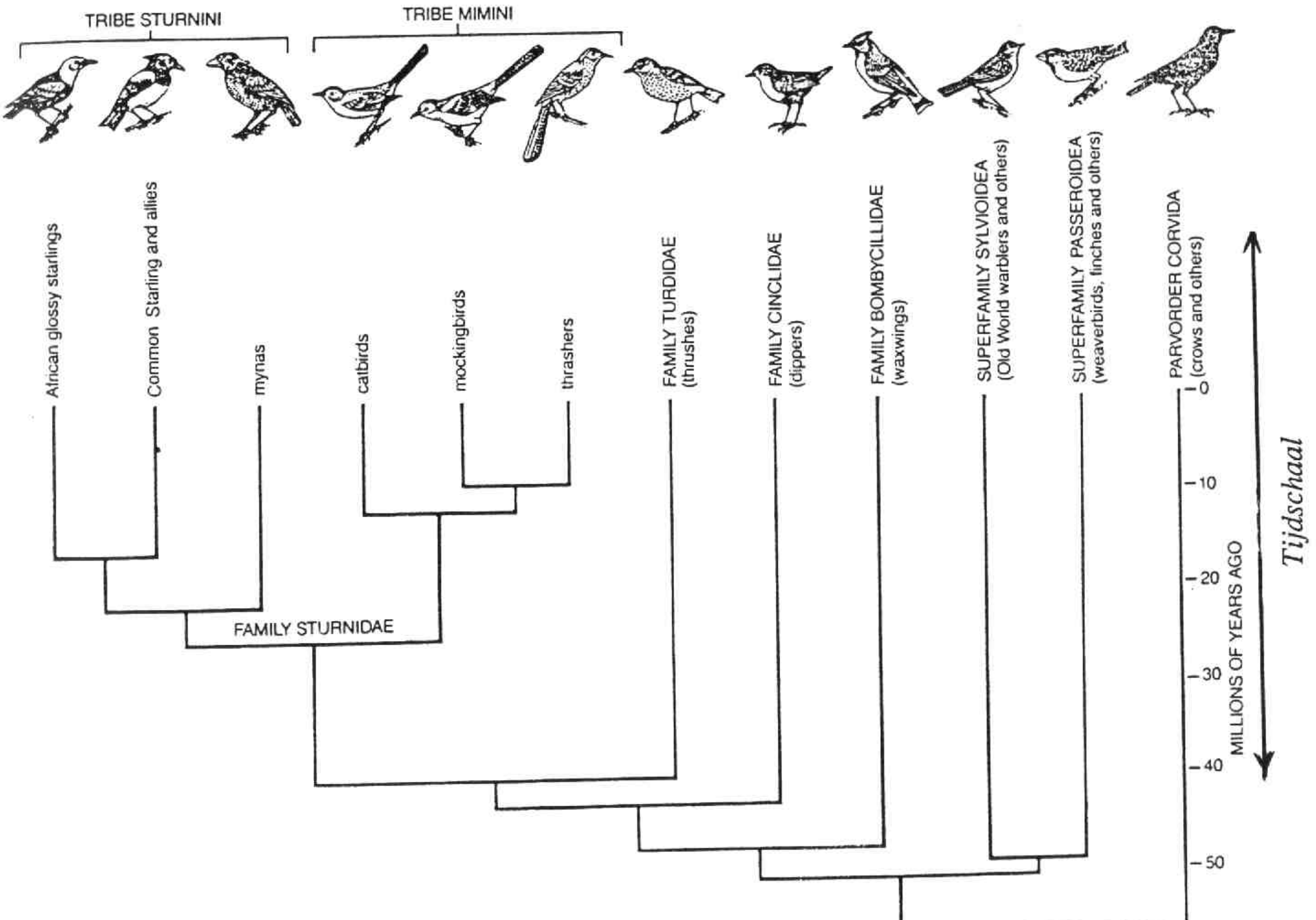
Afstammingsboom



>a De Oligomyodi komen vooral in Zuid-Amerika voor. De Corvida in Australië.
90 miljoen jaar geleden kwamen ze allemaal uit één voorouder.
Wat zou je daaruit voor conclusie kunnen trekken?

>b Welke Zuidamerikaanse mierenvogel was er eerst: de grondmierenvogel (ground antbird) of de gewone mierenvogel (typical antbird).

>c Welke superfamilies zijn het jongst? (Bestaan het kortst?)



>d Kijk naar bovenstaande boomgraaf.
Welke vogels zijn nauwer aan elkaar verwant; de spreeuw (Starling) en de spotvogel (Mockingbird) of de spreeuw en de kraai (Crow)?