Kansrekening

KANSREKENING

KANSREKENING

INHOUD

Tiberdreef 4 - 3561 GG Utrecht

Bij de omslagfoto: Zicht op Manhattan, waar Randy Walker zijn "toevals-wandelingen" maakt. (blz. 35).

KANSREKENING

Een produktie ten behoeve van de experimenten in het kader van de Herverkaveling Eindexamenprogramma's Wiskunde I en II V.W.O.

Samenstelling: Martin Kindt
Jan de Lange Jzn

Vormgeving: Ellen Hanepen

Utrecht, mei 1983.

1

KANS EN TOEVAL

K. Schippers *Hartenjagen*

Wanneer je bij een kaartspel
dertien kaarten van dezelfde soort krijgt,
is de kans op herhaling
1:635.013.559.598

Het aardige is eigenlijk
dat iedere samenstelling van dertien
dezelfde onwaarschijnlijkheid
van herhaling heeft.

Zo kan een café vol of leeg zijn,
kan het vijf dagen regenen
of een week lang om de dag,
zijn er soms drie bolhoeden in een straat te zien,
of geen
of een,
vreemd blijft het.

Asterix heeft een Romeinse munt gevonden ....

*) Hij weigerde "Caesar" te zeggen. Sindsdien is zijn oneerbiedig taalgebruik overal ingeburgerd.

» 1. Als ze een tijdje gespeeld hebben, blijkt dat Obelix veel vaker verliest. Had hij dit kunnen verwachten?

Panoramix heeft belangstellend toegekeken.

Dan stelt Asterix voor om twee everzwijnen in te zetten tegen Obelix één.

» 2. Om te onderzoeken of dit wèl een eerlijk voorstel is, gaan we het spelletje van Asterix in de klas spelen.
Speel vijf potjes met je buurman (buurvrouw) en noteer het aantal keren winst van Asterix. Verzamel de resultaten van je klas; neem onderstaande tabel over en vul in:

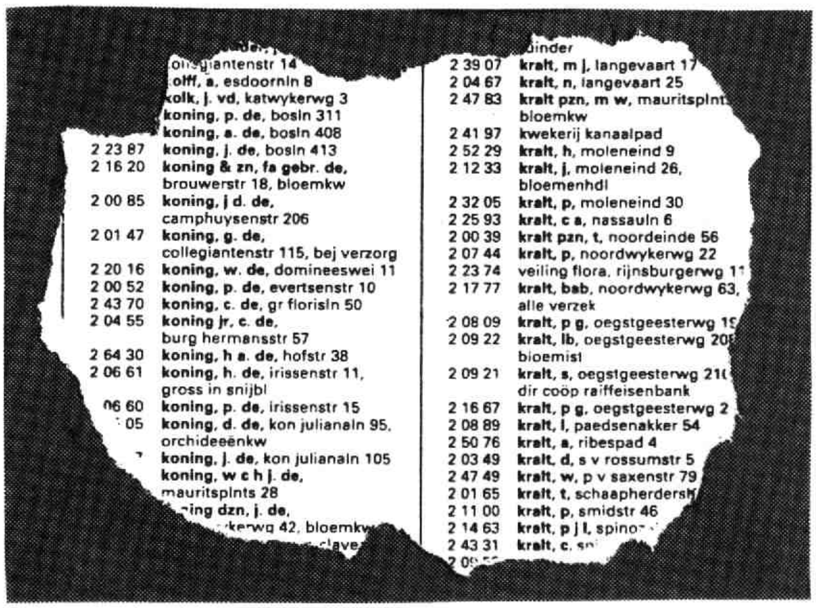
	totaal aantal	in procenten
Winst Asterix		
Winst Obelix		

≫ 3. Hoeveel everzwijnen vind jij dat Asterix moet inzetten tegen één everzwijn van Obelix?

Als je in korte tijd veel meer spelresultaten wilt verkrijgen, is het handig om het spel niet "echt" na te spelen met een muntstuk, maar om het te *simuleren*.

≫ 4. Voor zo'n simulatie zou je de telefoonnummers uit de gids kunnen gebruiken. Enig idee hoe?

Kun je elk cijfer van een telefoonnummer gebruiken bij zo'n simulatie?



≫ 5. Simuleer 25 spelletjes tussen Asterix en Obelix door het laatste cijfer van de telefoonnummers op een willekeurige bladzijde uit de gids te nemen ("even" is "kop", "oneven" is "munt").

Verzamel de resultaten van je klas en bereken de percentages winst van Asterix respectievelijk Obelix.

	totaal aantal	in procenten
Winst Asterix		
Winst Obelix		

Blijf je bij je mening (≫ 3)?

≫ 6. Probeer de inzet van Asterix louter door redenering te vinden (dus zonder de verzamelde spelresultaten te gebruiken).

In "Asterix en de Romeinse munt" heb je gezien hoe de "eerlijkheid" van een spel langs verschillende wegen beoordeeld kan worden:

a. door verzameling van een grote hoeveelheid spelresultaten ("zweten");

b. door redenering ("weten").

In beide gevallen wordt in feite de verdeling van de *kansen* bepaald. Vandaar dat we wel eens spreken van "zweet-kans" en "weet-kans".

≫ 7. In de volgende uitspraken is de kans steeds *kwantitatief* (d.w.z. door middel van een *getal*) uitgedrukt.
Bedenk bij elke zin met welke van de twee methoden je zou uitmaken of de uitspraak waar is (is het een weetkans of een zweetkans?)

a. De kans dat je een vierkeuze vraag op de gok goed beantwoordt is $\frac{1}{4}$.
b. De kans om binnen 1 jaar te overlijden is voor 40-jarige Nederlanders 0,24%.
c. De kans dat een willekeurig gekozen Nederlander tussen de 20 en 65 jaar een bril draagt is minder dan 50%.
d. De kans om met een dobbelsteen "zes" te gooien is $\frac{1}{6}$.
e. "99% kans dat ik het tentamen de volgende keer wel haal", zei de student pedagogiek.
f. De kans op een witte kerst is 5%.
g. Bij een geboorte is de kans op een jongen $\frac{1}{2}$.
h. Bij het werpen met een munt is de kans op "kop" $\frac{1}{2}$.
i. De kans voor een Nederlander om door een misdrijf getroffen te worden is $\frac{1}{3}$.
j. De fractieleider van de VVD acht de kans dat dit kabinet de eindstreep haalt niet meer dan 25%.

Misdrijf treft een op drie Nederlanders

„. . . dit is de laatste keer dat we met z'n drieën uitgaan!"

Uit de Volkskrant van 23 juni '81

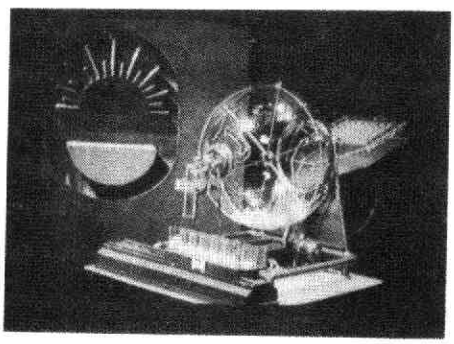
We brengen de twee manieren van kansbepaling nog eens "netjes" onder woorden.

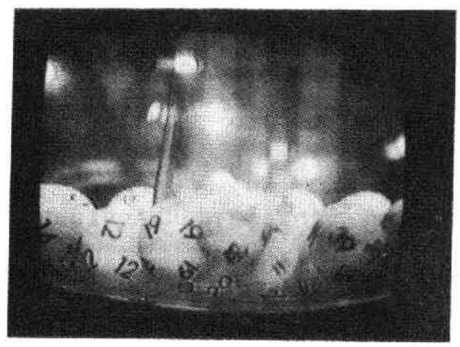
Weetkans:

Door louter redeneren kun je de kans op een of andere gebeurtenis bepalen.
Voor het berekenen van die kans hoeft geen toevalsexperiment te worden uitgevoerd.

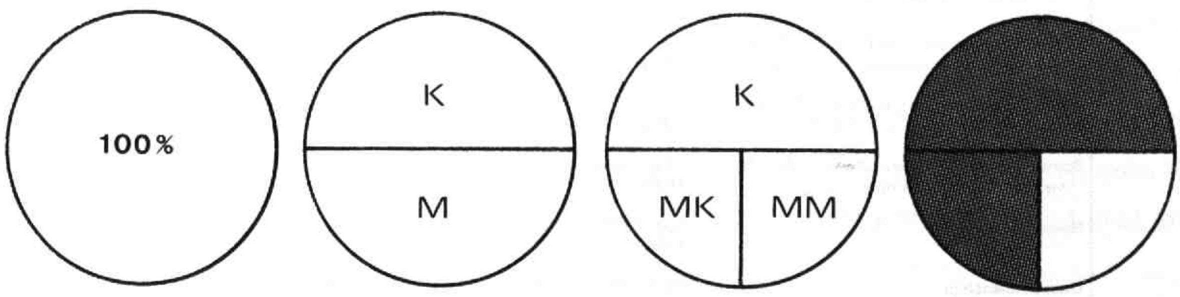
Voorbeelden:

- Bij het werpen met een (zuivere) dobbelsteen kun je op grond van de symmetrie van de kubus "weten" dat de kans om "zes" te gooien gelijk is aan $\frac{1}{6}$.
- De kans dat in de Lotto het getal 13 als eerste uit de bus rolt is $\frac{1}{41}$.





- De kans dat Asterix zijn spelletje van Obelix wint is 75%.



≫ 8. Als je met twee munten werpt en daarbij let op het aantal keer "kop", zijn er drie uitkomsten mogelijk: "twee kop", "één kop" en "geen kop". Hoe groot is de kans op elk van die uitkomsten?

Zweetkans:

Door het herhaald uitvoeren van een toevals-experiment, door simulatie ervan of door het verzamelen van statistisch materiaal (het "trekken van een steekproef"), kun je de kans op een of andere gebeurtenis schatten.

Voorbeelden:

- Door erg vaak een punaise op te gooien (toevalsexperiment) kun je met steeds groter wordende betrouwbaarheid zeggen hoe groot de kans is dat deze punaise na het gooien op de platte kant terecht komt.
- Uit gegevens van het C.B.S. (Centraal Bureau voor de Statistiek) blijkt dat bij een geboorte de kans op een jongen ongeveer 51,5% is en de kans op een meisje 48,5%.
- Als je "blind" een letter in de krant prikt, is de kans op een "e" ongeveer 19%; die kans vind je door het aantal "e"'s op een willekeurig gekozen pagina (steekproef!) te vergelijken met het totaal aantal letters.

≫ 9. Hoe groot acht je de kans dat het volgend jaar op Koninginnedag regent?

6 Luchttemperatuur, neerslag, zonneschijn per jaargetijde te De Bilt[1]

		winter [dec.-febr.]	lente [mrt.-mei]	zomer [juni-aug.]	herfst [sept.-nov.]
Vorstdagen [etmalen van 0-24 G.M.T. met een minimumtemperatuur < 0,0 °C]	1931/1960	44	18	0	8
	1976	29	26	0	2
IJsdagen [etmalen van 0-24 G.M.T. met een maximumtemperatuur < 0,0 °C]	1931/1960	12	0	0	0
	1976	6	0	0	0
Zomerse dagen [etmalen van 0-24 G.M.T. met een maximumtemperatuur > 25,0 °C]	1931/1960	0	2	18	2
	1976	0	5	41	0
Neerslag in mm	1931/1960	184	145	223	213
	1976	152	72	113	146
Uren zonneschijn	1931/1960	167	501	607	298
	1976	152	616	814	227
Dagen met neerslag [0,1 mm of meer neerslag]	1931/1960	61	46	49	60
	1976	42	30	23	51

Bron: K.N.M.I.

[1] Hiervoor zijn volle maanden genomen. In de winter [dec.-febr.] is derhalve een maand van het voorafgaande jaar opgenomen.

In het rijtje uitspraken op blz. 3 komen er ook voor waarbij op geen enkele wijze kan worden vastgesteld hoe groot de kans is, omdat:
- het experiment niet herhaald kan worden (onder dezelfde omstandigheden);
- er geen simulatie mogelijk is;
- het trekken van een steekproef onmogelijk is;
- er geen sluitende redenering gegeven kan worden.

Dergelijke kansen hebben vaak te maken met het "vingertoppen-gevoel" van de man of vrouw die de uitspraak doet. Zoals de trainer van Ajax die zijn ploeg 70% kans geeft op het bereiken van de volgende ronde in de Europese bekerstrijd, of de politieke commentator die de kans op het uitbreken van een derde wereldoorlog 50% acht.
Sommigen van hen zullen er misschien wel om willen wedden: tien tegen één dat ...., anderen zijn alleen maar koffiedik-kijkers.
In dit boek zullen we ons verder niet bezighouden met zulke "wedkansen" of "zwets-kansen" ...

Aan het slot van deze paragraaf een echt "doordenkertje":

≫ 10. Wie heeft er in het volgende verhaal gelijk?

De vier bestuursleden van de paardensportvereniging "Teugels Los" vergaderen elke woensdagmiddag en dineren daarna gezamenlijk. Volgens afspraak wordt er geloot wie er als gastheer optreedt. Deze loting werd een jaar lang als volgt uitgevoerd: men deed drie witte en één rood balletje in een hoed, waaruit dan achtereenvolgens ieder een balletje moest trekken tot iemand het rode trok - die moest dan als gastheer optreden.
Dit systeem heeft tot algemene tevredenheid gewerkt tot iemand opmerkte dat het eigenlijk niet eerlijk was: wie het eerste balletje nam, zou minder kans op het rode balletje hebben dan de tweede, deze minder dan de derde, enz. immers de eerste heeft een kans van één op vier het rode balletje te krijgen, bij de tweede is de kans, indien hij aan de beurt komt één op drie, omdat er nog maar drie balletjes over zijn, enz.
De voorzitter bestreed dit standpunt; hij bleef erbij dat het wel eerlijk was.

(Uit: Asterix en de ziener)

≫ 11. Uit angst om door de mand te vallen, wil de ziener de Centurion ervan overtuigen dat hij niet over helderziende gaven beschikt.
Jammer voor hem, hij gokte goed. Of verkeerd, 't is maar hoe je het bekijkt.
Zou jij in zijn plaats ook op VII gegokt hebben?

≫ 12. Gebruik de toevalscijfers achterin het boek (blz. 64,65) om 100 worpen met twee dobbelstenen te simuleren. Bereken steeds de som van het aantal ogen en turf hoe vaak de verschillende uitkomsten voorkomen.

De trekking bij een loterij, het tossen met een munt, het draaien aan het rad van avontuur, het verdelen van de speelkaarten onder de vier spelers, .. Het zijn allemaal voorbeelden van een *toevalsexperiment*.
Bij zo'n experiment zul je je meestal van te voren afvragen welke *uitkomsten* er mogelijk zijn.

Voorbeeld:

Bij een loterij worden de nummers 0000, 0001, ..., 9999 verkocht.
Het trekken van de hoofdprijs is een toevalsexperiment met als *uitkomstenverzameling*

{0000, 0001, 0002, ..., 9999}

Er volgt nog een tweede trekking waarbij een troostprijs wordt uitgeloofd op elk nummer waarvan de laatste twee cijfers overeenkomen met dat van het getrokken nummer.
Bij die tweede trekking kun je dus

{00, 01, 02, .., 99}

als uitkomstenverzameling beschouwen.
Nog een paar voorbeelden:

toevalsexperiment	*uitkomstenverzameling*
- opgooien van een punaise	
- tossen met één geldstuk	{K, M}
- het spel van Asterix	{K, MK, MM}
- werpen met één Romeinse dobbelsteen	{I, II, III, IV, V, VI}
- trekken van eerste nummer in de Lotto	{1, 2, 3, ..., 41}
- trekken ("blind") van één balletje uit een hoed met één rood en drie witte balletjes	{R, W}
- idem	$\{R, W_1, W_2, W_3\}$

≫ 13. In welke van deze voorbeelden kun je redelijkerwijs aannemen dat alle uitkomsten even kansrijk zijn?

≫ 14. De uitkomstenverzameling bij het experiment van de Centurion Claudius Bombastus is { II, III, IV, ..., XII }.
Heeft elk van die uitkomsten evenveel kans? Waarom?

Bij een toevalsexperiment bestaat er een zekere mate van vrijheid in de keuze van de uitkomstenverzameling. In het voorbeeldlijstje (blz. 9) heb je er twee bij het experiment: trekken van één balletje uit een hoed ...

Nu hoeven twee verschillende keuzen van uitkomstenverzamelingen bij eenzelfde experiment niet met elkaar in strijd te zijn. Het hangt er maar vanaf welke kansen je de uitkomsten toekent, welk *kansmodel* je kiest.
Bij $\{R, W_1, W_2, W_3\}$ ligt het voor de hand om elke uitkomst evenveel kans, dus $\frac{1}{4}$ toe te kennen.

Het kansmodel ziet er dan zó uit:

uitkomst	R	W_1	W_2	W_3
kans	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Bij de uitkomstenverzameling $\{R, W\}$ kiezen we het volgende kansmodel:

uitkomst	R	W
kans	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

Deze kansmodellen zijn niet strijdig met elkaar.

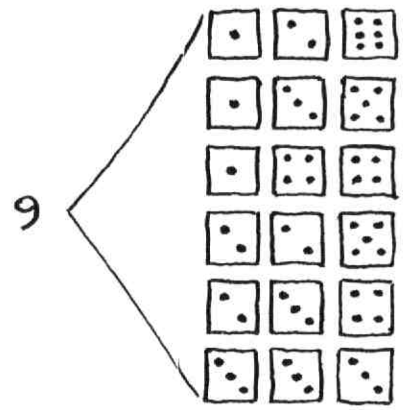
≫ 15. Een bekend verhaal is dat van de man aan de bar die de beslissing of hij naar huis zou gaan van het toeval wilde laten afhangen. Hij gooide een kwartje op en zei: "Als het kop is bestel ik een whisky-puur, als het munt is whisky-soda en als het op zijn kant blijft staan, ga ik naar huis".
Aangenomen dat onze whisky-liefhebber de laatste mogelijkheid niet echt serieus nam, werkte hij met dit model:

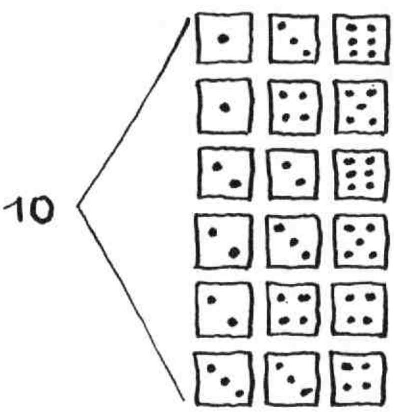
uitkomst	Kop	Munt	Rand
kans	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Stel je voor dat een zeker geldstuk bij opgooien gemiddeld één van de honderd keer op zijn kant blijft staan, welk kansmodel zou je dan kiezen (voor het één keer werpen met dat geldstuk)?

≫ 16. Neem voor het gemak eens aan dat de kans op een geboorte van een jongen even groot is als op de geboorte van een meisje.
Bij de geboorte van een twee-eiige tweeling zijn er drie mogelijkheden: twee jongens, twee meisjes, gemengd.
Maak een kansmodel bij dit "geboorte-experiment".

≫ 17. De vorst van Toscana vroeg aan Galileï: "Waarom komt bij een worp met drie dobbelstenen de uitkomst 10 vaker voor dan uitkomst 9, hoewel beiden op zes manieren gevormd kunnen worden?





In die tijd (16^e eeuw) was dit een veel besproken probleem dat al honderden jaren oud was. Galileï vond een oplossing. Doe hem dat eens na!

> Wiskundig beschouwd is een kansmodel een verzameling waarvan je de elementen *uitkomsten* noemt en waarbij je aan die uitkomsten *kanswaarden* toekent.
> Zo'n kanswaarde is een reëel getal tussen 0 en 1.
> Als aan alle uitkomsten een even grote kans wordt toegekend, noemen we het kansmodel *symmetrisch*.
> De som van alle kanswaarden (zowel bij een symmetrisch als bij een asymmetrisch model) is gelijk aan 1.

De kansmodellen in dit hoofdstukje zijn bijna allemaal modellen met weetkansen. Dat "weten" is soms bedrieglijk en leidt tot een foutieve modelkeuze. Een foutieve modelkeuze berust vaak op een ten onrechte veronderstelde symmetrie van het model. Vergelijk de redenering van Panoramix naar aanleiding van het gokspel van zijn Gallische vrienden. *)

Foutief kansmodel (Panoramix):

Uitkomst	K	KM	MM
Kans	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

Kansmodel dat (vermoedelijk) aardig overeenkomt met jou experimentele resultaat:

Uitkomst	K	KM	MM
Kans	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

*) Overigens bevindt Panoramix zich in goed gezelschap, want de vooraanstaande Franse wiskundige d'Alembert (18e eeuw) maakt dezelfde fout.

In toepassingsgebieden van de kansrekening worden ook modellen van zweetkansen gebruikt. Die modellen worden opgesteld via simulatie of met behulp van statistische gegevens.
Zo werkt men in het levensverzekeringsbedrijf met zgn. "sterftetafels". De verzekeringspremies worden met behulp van "levenskansen en sterftekansen" berekend.

Leeftijd bij aanvang verzekering	Aantal jaren, verstreken sinds aanvangsdatum van de verzekering						Bereikte leeftijd
	0	1	2	3	4	5 of meer	
[x]	p_x	p_{x+1}	p_{x+2}	p_{x+3}	p_{x+4}	p_{x+5}	$x+5$
20	0,99738	0,99648	0,99534	0,99419	0,99332	0,99296	25
21	,99733	99644	,99525	,99412	,99323	99286	26
22	,99729	99639	,99520	,99401	,99314	99275	27
23	,99726	99630	,99513	,99392	,99302	99266	28
24	,99719	99625	,99502	,99385	,99291	99252	29
25	,99713	99619	,99492	,99373	,99280	99236	30

In de tabel zie je bijvoorbeeld dat de kans van een 20-jarige om het eerste jaar (0) na de aanvangsdatum van de verzekering te overleven geschat wordt op 0,99738.

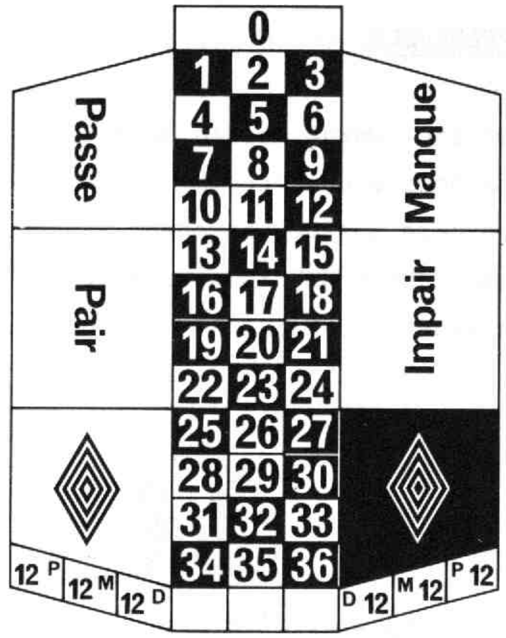
≫ 18. Hoe groot is volgens de tabel de kans dat een 20-jarige binnen drie jaar overlijdt?

Johan de Witt (1625-1672)

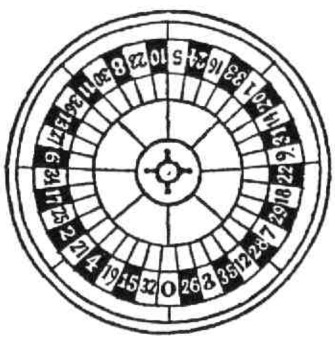
De eerste sterftetafels zijn opgesteld door raadpensionaris Johan de Witt en in 1671 gepubliceerd in zijn geschrift "Waerdye van Lyfrenten naer proportie van Los-renten".

ROULETTE

Op de speeltafel zijn velden aangebracht, gemerkt van 0 tot en met 36. Sommige nummers zijn zwart gedrukt, andere rood. Het enige nummer dat geen kleur heeft is 0 (zéro). Door een fiche op een of meer velden te plaatsen zet je in op een bepaalde uitkomst, waarna het balletje gaat rollen.......



De rode nummers staan wit (op een zwarte achtergrond) afgedrukt.



De grote vakken op het speelveld stellen de speler in staat om op hele series tegelijk in te zetten, bijv. "Rouge" (de rode nummers), "Pair" (de even nummers, "12^M" (of M_{12}) (de nummers 13 tot en met 24), "Passe" (de hoogste 18 nummers).

≫ 19. Een speler die op Rouge inzette, beschouwde de uitkomstenverzameling {Noir, Rouge, Zéro}.
Welk kansmodel past hierbij? (Aangenomen dat je met een eerlijke roulette te maken hebt).

Bij een eerlijke roulette worden de uitkomsten 0, 1, 2, ..., 36 alle even kansrijk verondersteld.
Een verstandige uitkomstenverzameling om mee te werken is dus:

$$U = \{0, 1, 2, 3, ..., 36\}.$$

We noemen "Rouge" bij deze keuze van "U" dan liever geen uitkomst, maar een *gebeurtenis*. Zo'n gebeurtenis kun je opvatten als een deelverzameling van "U":

$$\text{Rouge} = \{1, 3, 5, 7, 9, 12, 14, ..., 36\}.$$

≫ 20. Welke deelverzamelingen van "U" corresponderen respectievelijk met de gebeurtenissen "Manque", "12^P" (of "P_{12}"), "Impair"? (Zie de spelregels op blz. 14).
Hoe groot zijn de kansen op die gebeurtenissen?

SPELREGELS

Het spel wordt geleid door een bankhouder of croupier en kan gespeeld worden door een onbeperkt aantal deelnemers. De spelers zetten in op één of meerdere van de hieronder aangegeven posities. Als het balletje op 0 uitkomt, neemt de croupier alle inzetten in beslag, behalve de fiche(s) op 0. De winst wordt met 1 x de inzet uitbetaald.

"*jeu*"	*uitbetaling (aantal keren van de inzet)*	*plaats van de fiche*
Op één enkel nummer; 0-36.	36	In het vakje.
Op een paar aangrenzende nummers. b.v. 5 en 6; 8 en 11.	18	Op de lijn tussen die twee nummers.
Op een horizontale rij nummers; b.v. 25, 26 en 27.	12	Op de linker of rechter zijlijn op de hoogte van die drie nummers.
Op vier nummers in een vierkant; b.v. 20, 21, 23 en 24.	9	Op het snijpunt in het midden van het vierkant.
Op twee aangrenzende rijen van drie nummers. b.v. 4,5,6 en 7,8,9.	6	Op de rechter of linker zijlijn op het snijpunt tussen beide rijen.
Op de laagste 12 nummers; b.v. 12P of P12 (1-12).	3	In het vak 12P of P12.
Op de middelste 12 b.v. 12M of M12 (13-24).	3	In het vak 12M of M12.
Op de hoogste 12 nummers; b.v. 12D of D12 (25-36).	3	In het vak 12D of D12.
Op een kolom van 12 nummers; b.v. 1-34; 2-35; 3-36.	3	In het open vak onder aan de kolom.
Pair (even nummers, met uitzondering van 0).	2	In het vak Pair.
Impair (oneven nummers).	2	In het vak Impair.
Rouge (rode nummers).	2	In het grote vak met rode ruit.
Noir (zwarte nummers).	2	In het grote vak met de zwarte ruit.
Manque (de laagste 18 nummers).	2	In het grote vak Manque voor de nummers 1-18.
Passe (de hoogste 18 nummers).	2	In het grote vak Passe voor de nummers 19-36.

Omdat de deelverzameling "Rouge" 18 uitkomsten bevat van de 37 uitkomsten in "U", veronderstellen we de kans op Rouge gelijk aan $\frac{18}{37}$.
Kort geschreven: P(Rouge) = $\frac{18}{37}$. *)

In het algemeen:

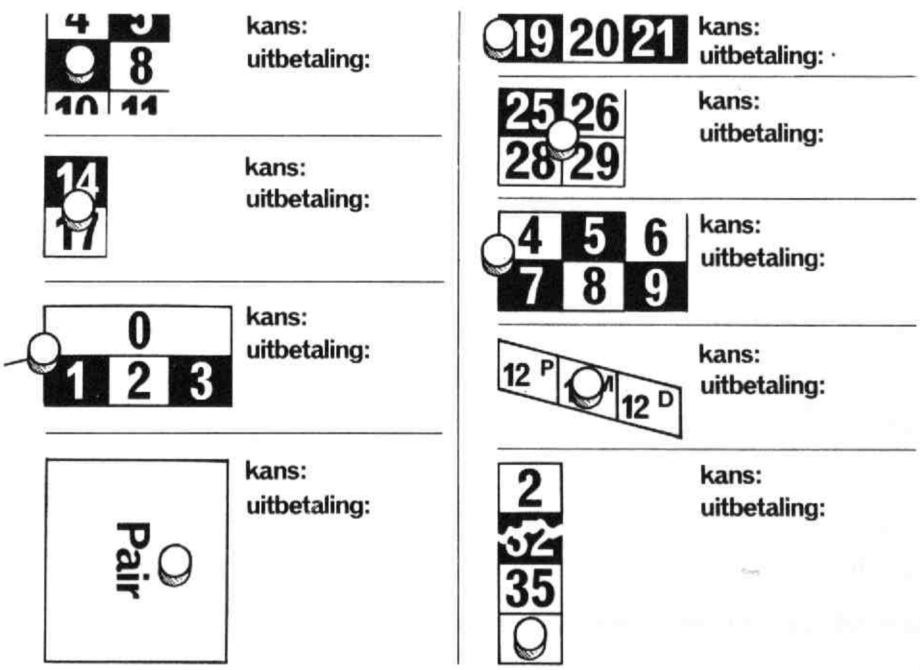
Veronderstel dat "U" de uitkomstenverzameling bij een of ander toevalsexperiment is. De uitkomsten worden geacht alle even kansrijk te zijn, hetgeen een symmetrisch kansmodel oplevert. In dit model geldt dan voor de kans op een gebeurtenis A (= deelverzameling van "U").

$$P(A) = \frac{\text{aantal elementen van } A}{\text{aantal elementen van } U} \qquad {}^{**})$$

Iets populairder gezegd:

$$\text{Kans op gebeurtenis } A = \frac{\text{aantal voor } A \text{ gunstige uitkomsten}}{\text{totaal aantal uitkomsten}}$$

≫ 21. a. Geef bij elk van de volgende inzetten de kans op winst en bij elke inzet de passende uitbetaling (=winst + inzet).



b. Ga na waarom Casino's met dit spel, over een lange periode gezien, winst kunnen verwachten.

*) P komt van het Latijnse "Probabilitas" (= waarschijnlijkheid).

**) Van de verzameling "U" wordt hierbij verondersteld dat ze *eindig* veel elementen bevat.

≫ 22. Werpen met twee dobbelstenen

Als uitkomstenverzameling bij het experiment van Claudius Bombastus nemen we: U = {(I,I);(I,II);(II,I);....;(VI,VI)}

Die uitkomsten ("worpen") corresponderen elk met een vakje in het 6 bij 6 rooster.

Gegeven zijn de volgende gebeurtenissen:

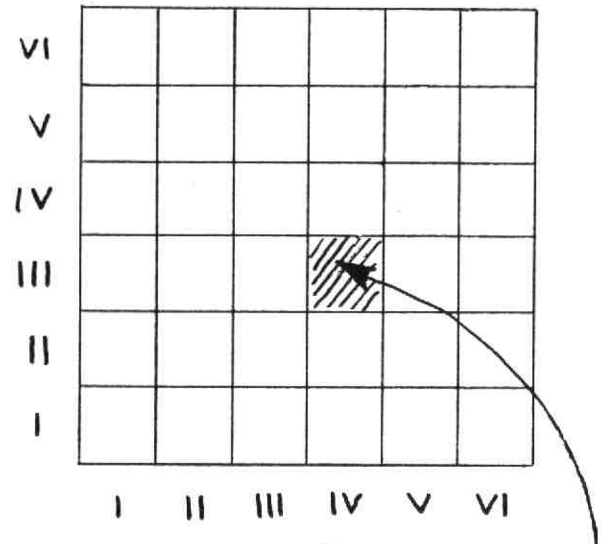
A: som van het aantal ogen in de worp is zeven;

B: doublet (worp van twee gelijke getallen);

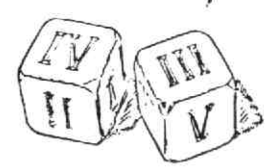
C: verschil van het aantal ogen in de worp is twee;

D: minstens één zes geworpen;

E: geen zes geworpen.



Roosterdiagram



a. Bereken P(A), ..., P(E).

b. Hoe zou je de gebeurtenis $A \cap E$ omschrijven?
Wat is de kans op die gebeurtenis?

c. Bereken: $P(A \cap D)$, $P(A \cap B)$, $P(B \cap E)$, $P(D \cap E)$.

d. Omschrijf de gebeurtenis $A \cup E$ in woorden.
Hoe groot is de kans op die gebeurtenis?

e. Bereken: $P(A \cup D)$, $P(A \cup B)$, $P(B \cup E)$, $P(D \cup E)$.

≫ 23. Iemand trekt blindelings een kaart uit een volledig spel. (52 speelkaarten, geen jokers).
Hoe groot is de kans dat de getrokken kaart:

a. een harten is?

b. een aas is?

c. een hartenaas is?

d. een harten of een aas is?

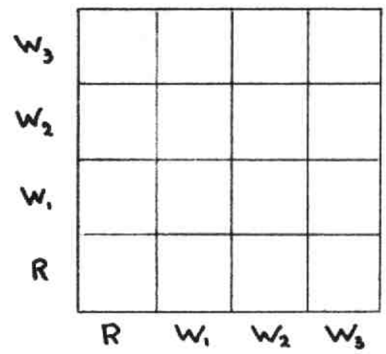
≫ 24. Maak een symmetrisch kansmodel bij het experiment: drie keer werpen met een geldstuk.
Hoe groot is de kans dat bij drie worpen met een geldstuk "kop" vaker voorkomt dan "munt"?

≫ 25. Asterix en Obelix werpen elk met een dobbelsteen.
Hoe groot is de kans dat Asterix hogere ogen gooit dan zijn makker?

≫ 26.

Opnieuw de hoed met het ene rode en de drie witte balletjes.

a. Iemand trekt "blind" één balletje uit de hoed en noteert de uitkomst. Hij legt het balletje terug in de hoed en herhaalt het experiment.
(We spreken in dit geval van *trekken met teruglegging*).
Hoe groot is de kans dat hij beide keren een wit balletje getrokken heeft?



b. Dezelfde persoon trekt een balletje en vervolgens een tweede zonder dat hij het eerste teruggelegd heeft.
(*Trekken zonder teruglegging*).
Welke vakjes in het roosterdiagram geven nu onmogelijke uitkomsten aan? Hoe groot is nu de kans op twee witte balletjes?

c. Hoe groot is de kans op "het eerste balletje wit en het tweede balletje rood" bij trekken met teruglegging?
En bij trekken zonder teruglegging?

≫ 27. Een proefwerk Engels bestaat uit twintig vierkeuze-vragen.
Je weet er achttien met redelijke zekerheid te beantwoorden, maar in twee vragen zie je absoluut geen gat. Je besluit dan maar te gokken.

a. Hoe groot is de kans dat je beide antwoorden fout gokt?
(Vergelijk dit probleem met ≫ 26!).

b. Hoe groot is de kans dat je één vraag goed gokt?

≫ 28. In een feestavondencommissie van school zitten drie meisjes en drie jongens. Twee afgevaardigden van deze commissie worden door het lot aangewezen om te onderhandelen met de rector over het organiseren van een disco-avond.

a. Hoe kun je dit probleem vergelijken met het trekken van twee balletjes uit een hoed?

b. Hoe groot is de kans dat de afvaardiging uit twee meisjes bestaat?

≫ 29. Een fragment uit "Onder Professoren" van W.F. Hermans:

> 'Gewonnen,' zei ze, 'lekker gewonnen. Proost.'
> Zij dronk haar glas bijna half leeg, in een keer.
> 'Mij krijgen ze niet te pakken,' zei ze, 'ze dachten zeker dat ik zou blijven doorspelen tot ik alles weer kwijt was. Als ze Gré willen uitplunderen, moeten ze vroeger opstaan. Weet je wat het geheim is? Je moet gewoon een beetje opletten welk nummer in lange tijd niet is uitgekomen. Dat moet je onthouden. Jij bent voor dit spel niet geschikt, omdat je geen goed geheugen hebt.'
> 'Maar Gré,' zei hij, 'die draaischijf en dat balletje hebben ook geen geheugen. Die weten helemaal van niets, ook al zou een bepaald nummer in geen honderd jaar zijn uitgekomen.'
>
> 'Dat kan niet, er zijn met de nul mee, zevenendertig nummers en op den duur komen ze allemaal even dikwijls uit, omdat ze allemaal evenveel kans hebben uit te komen. Dus als er een hele tijd een niet is uitgekomen, dan wordt de kans dat die uitkomt steeds groter, anders zou hij achter raken.'
> Zo blij was ze, dat hij haar speltheorie onbestreden passeren liet.

Twee theorieën over toeval en kans. Voor welke voel jij het meest?

≫ 30. Op 18 augustus 1913 beleefde men in het Casino van Monte Carlo een record: liefst 26 keer achtereen rolde het balletje op "Noir". Afgezien van het geldende huismaximum zou een speler die bij het begin van deze serie een gouden Louis (= 4 dollar) zou hebben ingezet en heel de ronde door op zwart had gewed 268 miljoen dollar in de wacht hebben gesleept.
Wat er in werkelijkheid gebeurde was een koortsachtige stormloop op rood die een aanvang nam omstreeks het tijdstip waarop zwart reeds vijftien keer achtereen was uitgekomen. De spelers verdubbelden en verdrievoudigden hun inzet nadat het balletje voor de twintigste keer zwart aanwees, omdat zij aannamen dat de kans op zwart nu minder dan één miljoenste bedroeg. Deze ongewone serie spekte uiteindelijk de kas van het Casino met een paar miljoen francs (ontleend aan Darrel Huff "How to take a Chance").

a. Hoe komt de schrijver aan het getal 268 miljoen?
   Reken dat eens na.

b. De kans dat het roulette-balletje twintig keer achter elkaar op zwart uitkomt is inderdaad kleiner dan één miljoenste.
   Hoe kun je dat beredeneren?

c. Hoe groot is de kans dat een roulette-balletje de eenentwintigste keer op zwart uitkomt, als je weet dat in de twintig voorafgaande keren zwart uit de bus is gekomen?

Van tijd tot tijd geloven we bijna allemaal een beetje in de redenering van Grê Dingelam (fragment bij ≫ 29):

- je hebt de hele avond al een slechte kaart gehad; naar je gevoel moet er nu toch een grote kans zijn dat je wat beters in handen krijgt ....
- bij mens-erger-je-niet heb je al tien rondjes tevergeefs op de bevrijdende "zes" gewacht; je geeft jezelf een flinke kans dat het de elfde keer wel lukt, want zo vreemd kan het toeval zich toch niet gedragen ....
- na 14 dagen regen in je vacantie verwacht je nu toch een ommekeer, want volgens de statistieken is het hier aan de kust toch de helft van het seizoen mooi weer .....

Allemaal voorbeelden van een zeker geloof in groeiende kansen. Maar als je aanneemt met een zuiver toevalsexperiment van doen te hebben (een eerlijke roulette, een zuivere dobbelsteen, een goed geschud spel kaarten, ...) dan zegt het verstand dat de uitkomsten per spel *onafhankelijk* van elkaar zijn. De dobbelsteen onthoudt immers niet wat hij de vorige keer geworpen heeft. Van het weer kun je zeggen dat het wel een geheugen heeft. Als het op 16 januari vriest, is de kans op vorst op 17 januari groter, dan wanneer het op 16 januari "zacht weer voor de tijd van het jaar" is. Dat geheugen is overigens niet erg lang. Het weer op 26 januari is al praktisch onafhankelijk van dat op 16 januari.

≫ 31. Captain Marryat vertelt in zijn boek "Peter Simple" van een bootsman die zijn hoofd door het eerste het beste gat stak dat door een vijandelijke kogel in de romp van zijn schip was gemaakt. De goede man was van mening dat dit in het verdere verloop van de strijd een veilige plek was: "Immers de kans dat er twee kogels op dezelfde plaats de scheepswand treffen is vrijwel nihil". Commentaar?

≫ 32. De bestuursleden van de paardensportvereniging (≫ 10 blz. 7) twijfelden plotseling aan de eerlijkheid van het lotingssysteem dat ze er sinds jaar en dag op nahielden. Het kritische bestuurslid verwarde echter eerlijkheid met onafhankelijkheid.

   a. Ga na dat de uitkomsten (1e bal rood, 2e bal rood, enz) bij dit experiment niet onafhankelijk zijn.

   b. Hoe kan het experiment veranderd worden dat die uitkomsten wel onafhankelijk zijn?

≫ 34. Nadat er twijfel gezaaid was, besloten de vier hun loterijsysteem als volgt te wijzigen: achtereenvolgens pakt iedereen een balletje uit de hoed, maar het resultaat wordt pas bekeken als de hoed leeg is.
De balletjes noemen we R, W_1, W_2, W_3.
De uitkomsten van dit experiment kun je beschrijven als series-van-vier, bijvoorbeeld: $RW_1W_2W_3$ of $W_1W_3RW_2$.

a. Het vereist enige ijver en systematiek om alle mogelijke series op te schrijven. Probeer het eens. (Ga na of je er zeker van kunt zijn dat je geen enkele serie vergeten bent).

b. Hoeveel series zijn er met R op de 1e, resp. 2e, 3e en 4e plaats?

c. Is het hier geschetste experiment wezenlijk verschillend van het lotingssysteem dat de vier er eerst op nahielden?

d. Wat is nu je oordeel bij ≫ 10 blz. 7?

≫ 35. Als uitkomstenverzameling bij het in ≫ 34 geschetste experiment kan ook {RWWW, WRWW, WWRW, WWWR} worden gekozen, waarbij geen onderscheid wordt gemaakt tussen de drie witte balletjes. (Het bijbehorende kansmodel is dus ook symmetrisch!).
Hoeveel series bevat de uitkomstenverzameling als het experiment *met* teruglegging wordt uitgevoerd (en geen onderscheid wordt gemaakt tussen de drie witte balletjes)?

Het beoordelen van een toevalsexperiment is vaak verre van eenvoudig.
Een koele verstandelijke aanpak, waarbij uitkomsten systematisch worden geteld en gewogen, kan wel eens in conflict komen met een gevoelsmatige benadering van de grillen van het lot.
Ook al zegt je verstand dat het roulette-balletje iedere keer weer evenveel kans op zwart en op rood heeft, dat elk spel onafhankelijk is van het vorige, je moet toch sterk in je schoenen staan om na twintig keer zwart niet stiekum te geloven dat het zoetjes aan tijd wordt voor rood om zijn "achterstand" goed te maken. Maar wat betekenen die twintig keer of zesentwintig keer zwart achter elkaar op de lange, lange rij experimenten in Monte Carlo die nog zullen volgen? Een kleine rimpel, die het evenwicht heel even leek te verstoren. Toegegeven, het was een zeldzame gebeurtenis in 1913, maar in wezen even zeldzaam als elke andere serie van zesentwintig waar je niets bijzonders aan ziet!

2

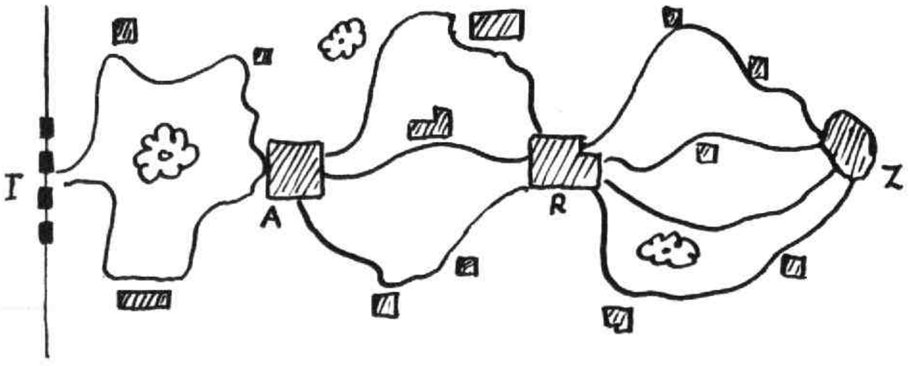
REKENEN MET KANSEN

Meester op school: 'Jongens, ik heb een zak met honderd appels en één peer. Als ik nu mijn hand in de zak steek, hoeveel procent kans heb ik dat ik de peer pak?'
Moossie: 'Vijftig procent.'
Meester: 'Vijftig procent, waarom?'
Moossie: 'Wel meester, je hebt hem of je hebt hem niet.

Uit: Abel Herzberg 'Om een lepel soep', uitg. Querido.

≫ 36. Op een koffieautomaat zit een knop waarmee je je keuze kunt instellen. Je kunt kiezen uit koffie met en zonder melk en uit 0, 1 of 2 suikerklontjes. Hoeveel verschillende standen heeft de keuzeknop?

≫ 37. Een stukje plattegrond van een dierentuin:

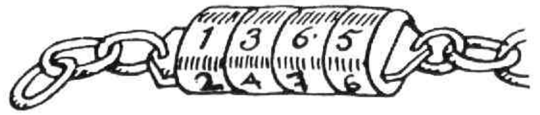


I = Ingang
A = Aquarium
R = Reptielenhuis
Z = Zeehondenbassin

a. Hoeveel verschillende wandelingen kun je maken, te beginnen bij de ingang en dan via aquarium en reptielenhuis naar het zeehondenbassin?

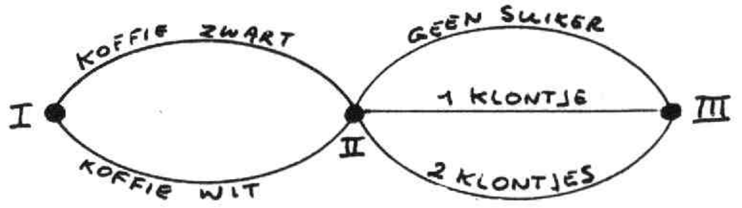
b. Je wilt vanuit I naar Z en weer terug naar I. Zowel heen als terug ga je via A en R, maar je wilt geen enkel pad twee keer nemen. Uit hoeveel verschillende routes kun je kiezen?

≫ 38. Een cijferslot heeft vier schijven met op elke schijf de cijfers 0 tot en met 9. Leen weet zich na een bezoek aan het café nog wel de cijfers 1, 3, 6, 5 van zijn code te herinneren, maar niet de volgorde. Hoeveel verschillende codes kan hij uitproberen?



≫ 39. Je volgt vier ronden de roulette in Monte Carlo en let daarbij alleen op de uitkomsten Z(éro), N(oir) en R(ouge).
Een mogelijke serie uitkomsten is bijv. NRNZ.
Hoeveel verschillende uitkomstenseries zijn er mogelijk in die vier ronden?

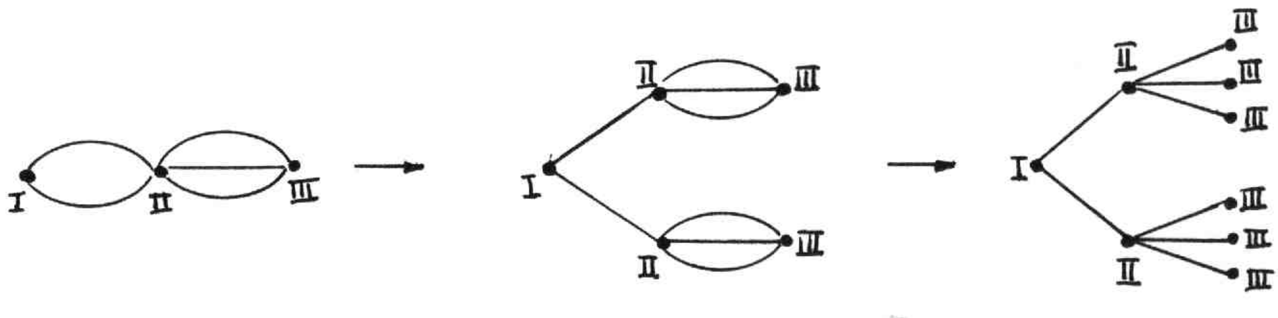
De vier telproblemen (≫ 36 t/m ≫ 39) vertonen, wiskundig gezien, een grote overeenkomst. Neem bijv. het keuzeprogramma van de koffieautomaat. Dat kan worden voorgesteld door een wegencircuit. Eerst moet een keuze gemaakt worden tussen de "wegen" koffie-zwart en koffie-wit en vervolgens tussen 0, 1 en 2 suikerklontjes.



De vraag naar het aantal keuzemogelijkheden is gelijkwaardig met de vraag naar het aantal wegen van I via II naar III.
Zo'n voorstelling noemen we een "wegendiagram".

≫ 40. a. Teken een wegendiagram bij het Monte Carlo-probleem (≫ 39).
b. Ook bij het cijferslotprobleem (≫ 38). Zijn alle wegen van beginpunt naar eindpunt toegestaan?

Een bekende fout bij de vraag naar het aantal wegen van I via II naar III in bovenstaande figuur is, dat de aantallen wegen (2 resp. 3) worden opgeteld i.p.v. vermenigvuldigd. Dat je die laatste bewerking moet gebruiken, zie je duidelijk als je het wegendiagram 'openknipt'.



≫ 41. Teken een boomdiagram van de verschillende routes in de dierentuin van I naar Z via A en R (≫ 37).
Teken ook een boomdiagram voor de routes van Z via A en R naar I.

≫ 42. Op blz. 25 zie je een boomdiagram van alle codes die je met de cijfers 6, 5, 3 en 1 op het cijferslot kunt maken.

a. Welk gedeelte van de boom correspondeert met de codes die met het cijfer 5 beginnen?

b. Hoeveel codes zijn er die op 5 eindigen?

≫ 43. Hoe verandert de boom als alle cijfers (0 t/m 9) beschikbaar zijn en de codes uit vier verschillende cijfers bestaan?
Uit hoeveel codes kun je dan kiezen?

≫ 44. Hoe verandert de boom als een herhaling van cijfers is toegestaan (en alle cijfers in aanmerking komen)?
Hoeveel verschillende codes zijn er mogelijk bij zo'n cijferslot?

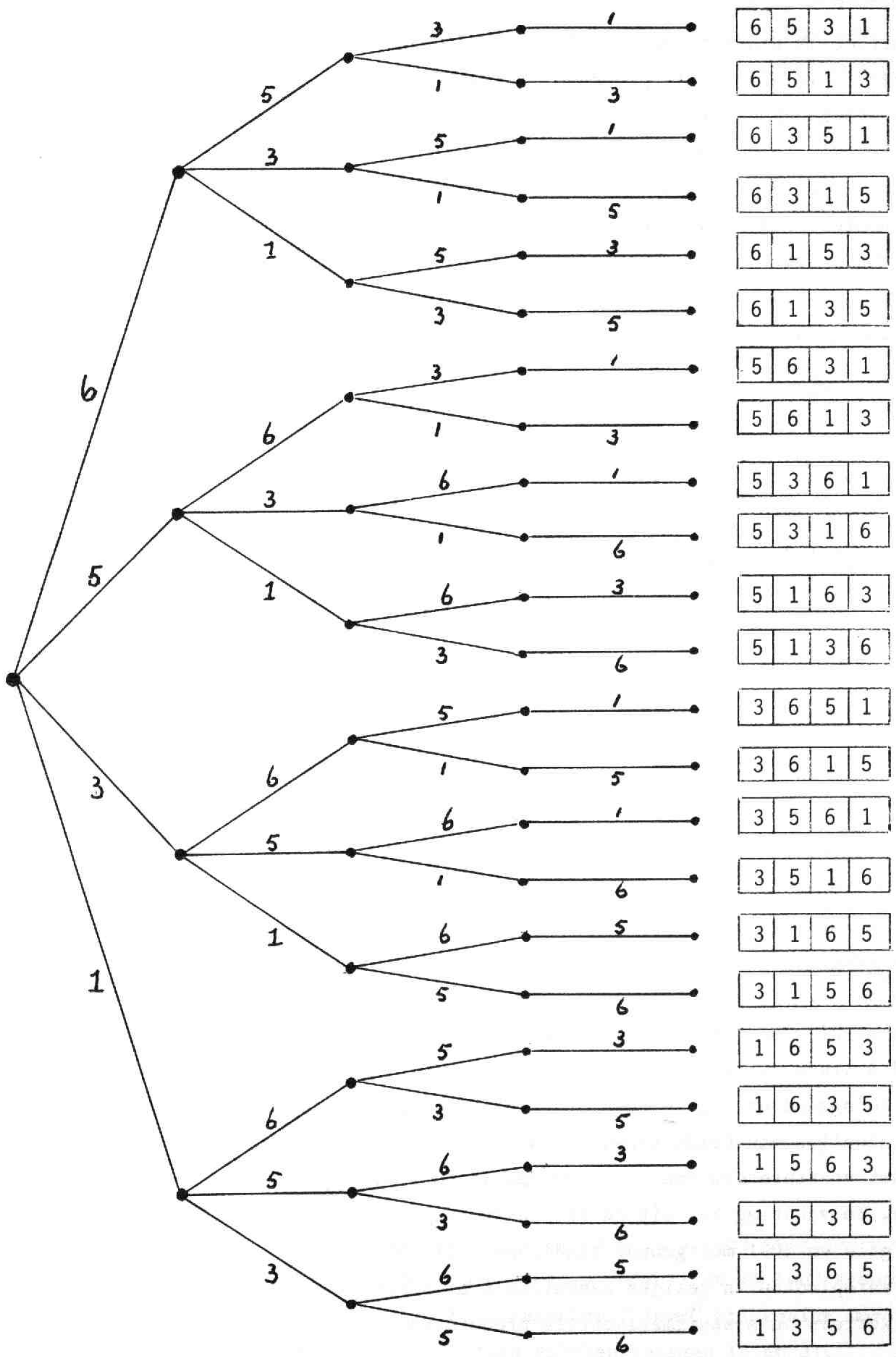
≫ 45. Maak een wegendiagram of een boomdiagram bij het experiment: trekken van twee balletjes uit een hoed, waarin één rood en drie witte balletjes.

a. met teruglegging.

b. zonder teruglegging.

≫ 46. Maak een wegendiagram of een boomdiagram bij het experiment: vier keer tossen met een kwartje.
Hoe groot is de kans op "twee keer kop en twee keer munt" bij dit experiment?

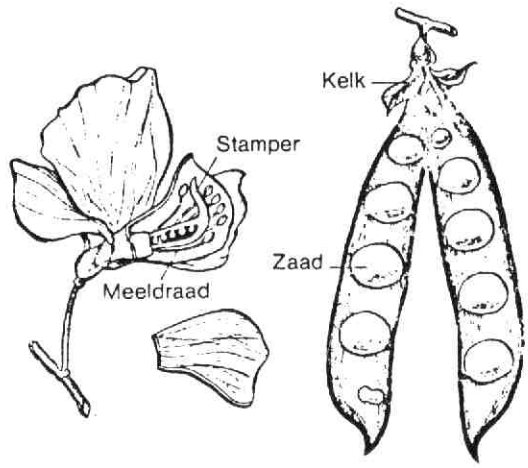
≫ 47. Wat zijn de voordelen resp. nadelen van een boomdiagram t.o.v. een wegendiagram?


6 5 3 1
6 5 1 3
6 3 5 1
6 3 1 5
6 1 5 3
6 1 3 5
5 6 3 1
5 6 1 3
5 3 6 1
5 3 1 6
5 1 6 3
5 1 3 6
3 6 5 1
3 6 1 5
3 5 6 1
3 5 1 6
3 1 6 5
3 1 5 6
1 6 5 3
1 6 3 5
1 5 6 3
1 5 3 6
1 3 6 5
1 3 5 6

GENETICA

Genetica is een betrekkelijk jonge wetenschap, maar de invloed van de erfelijkheid is al zeer lang bekend. Tienduizend jaar geleden, toen de mens begon met landbouw, realiseerde hij zich al spoedig dat hij steeds betere gewassen kon telen door de sterke planten, die in de natuur ontstaan waren, kunstmatig te kruisen. Maar tot aan het midden van de 19e eeuw was niemand geïnteresseerd in het mechanisme van de kruising en de overdracht van eigenschappen door de generaties heen. De Oostenrijkse monnik Gregor Mendel (1822-1884) zorgde voor een wetenschappelijke doorbraak, maar zijn werk kreeg jarenlang geen aandacht.

Gregor Mendel



De gewone tuinbouw-erwt waaraan Mendel zijn baanbrekende onderzoekingen verrichtte.

Mendel kruiste planten waarvan de erwten groen waren met planten met gele erwten. Onverschillig welke plant het stuifmeel leverde, steeds hadden de nakomelingen gele erwten. Daaruit concludeerde Mendel dat de "erffactor" die verantwoordelijk is voor de gele kleur *dominant* is over de erffactor groen. Deze twee erffactoren, tegenwoordig spreekt men van *genen*, noemde hij resp. A en a. Zijn oorspronkelijke planten waren *zaadvast*, d.w.z. dat ze uitsluitend A (resp. a) eicellen en stuifmeelkorrels produceerden. Bij bevruchting van zo'n zaadvaste gele- met een groene-erwtenplant ontstaat een *bastaard* met eicellen van beide typen (A en a).
Na het voortbrengen van de bastaardplanten kruiste Mendel deze planten onderling. Zo verkreeg hij uit de zelfbestuiving van 258 planten 8023 zaden, 6022 met gele en 2001 met groene zaadlobben. Uit dit resultaat leidde hij af dat bastaardplanten in gelijke aantallen A-eicellen en a-eicellen resp. A-stuifmeelkorrels en a-stuifmeelkorrels produceren.

≫ 48. Bij een kruising van twee bastaard erwteplanten zijn vier combinaties eicel-stuifmeelkorrel mogelijk. Laat dit met een boomdiagram zien. Zijn de resultaten van Mendel's experiment daarmee in overeenstemming?

≫ 49. Bij leeuwebekjes wordt de bloemkleur vastgelegd door een gen dat in twee vormen (*allelen*) voorkomt, een gen voor rood (R) en een gen voor wit (r). Een kruising van een roodbloemige en wit-bloemige plant levert een leeuwebekje met rosebloemen op. Er is hier dus geen sprake van dominantie van de ene gen over de andere.

leeuwebek
naar het 'Cruydeboeck' van Dodoens

In de biologie maakt men onderscheid tussen het *genotype* (erfelijke aanleg) en *fenotype* (verschijningsvorm).
In het geval van het leeuwebekje:

fenotype	Rood	Rose	Wit
genotype	RR	Rr	rr

a. Hoe groot zijn de kansen op een plant met resp. rode, rose en witte bloemen als je een rood leeuwebekje met een wit kruist?

b. En als je twee rose leeuwebekjes kruist?

≫ 50. Men kruist een bruingele cavia met een witte. De jongen worden onderling gekruist. Zo verkrijgt men 134 bruingele, 265 lichtgele en 137 witte "kleinkinderen".

a. Hoe kun je deze aantallen verklaren?

b. Wat kun je van het nakomelingschap verwachten bij kruising van een lichtgele cavia met een witte cavia?

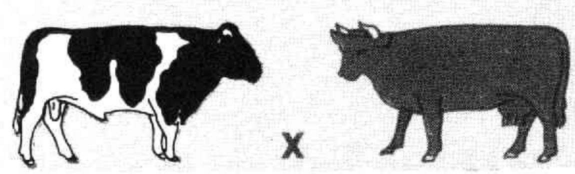
≫ 51 In de voorgaande drie voorbeelden hebben we uitsluitend gelet op genotypen van één eigenschap. Nu een voorbeeld waarbij we in twee eigenschappen geïnteresseerd zijn. De eigenschap "kleur" bij koeien wordt vastgelegd door een gen waarvan twee allelen bestaan (A en a).

Dieren met genotype AA of Aa (=aA) zijn *zwart*, die met aa zijn *rood*.
Voor de eigenschap "aftekening" zijn er van het bijbehorende gen eveneens twee allelen (B en b).
Dieren met genotype BB of Bb zijn *effen*, die met bb zijn *bont*.

a. Hoe zal de aantallenverhouding zwart-rood zijn in de runderstapel van Nederland?

b. En hoe zal de runderstapel verdeeld zijn in effen en bonte koeien?

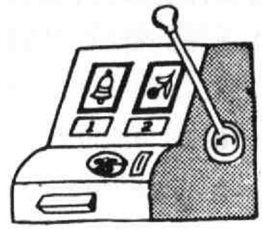
c. Een zwartbonte stier (genotype AAbb) paart met een rood effen koe (genotype aaBb).
Wat kun je zeggen van de kalveren?



AAbb aaBb

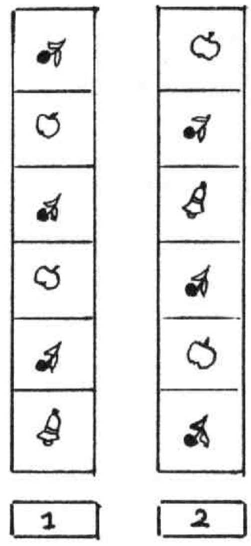
d. Als we letten op de beide eigenschappen 'kleur' en 'aftekening' zijn er vier verschillende combinaties (fenotypen) mogelijk.
Neem aan dat geen van die vier fenotypen speciaal gefokt wordt.
In welke aantallenverhouding kun je verwachten dat die vier fenotypen voorkomen? (Maak een boom- of wegendiagram).

ONE ARM BANDIT



Een eenvoudige uitvoering van een gokmachine ('fruitautomaat') zoals die wel in cafetaria's en andere publieke gelegenheden te vinden is.
Het apparaat heeft twee vensters (1 en 2), waarachter twee trommels zitten. Op elke trommel is een strook met zes figuren geplakt, waarvan er één door het venster te zien is. Deze trommels kun je onafhankelijk van elkaar laten draaien door een ruk aan de handle te geven. Van te voren moet je dan wel een kwartje in de gleuf stoppen.
Als voor beide vensters hetzelfde plaatje verschijnt is het kassa!
De uitbetaling van de machine aan de winnende speler is alsvolgt:

twee kersen	ƒ 0,25
twee appels	ƒ 0,50
twee bellen	ƒ 1,--



≫ 52. a. Hoe groot is de kans dat je bij één keer spelen één gulden van het apparaat terugkrijgt?

b. Hoe groot is de kans op een appel en een kers?

c. Hoe groot is de kans dat je je inzet kwijt bent?

≫ 53. Veronderstel dat er erg vaak, zeg 9000 keer, met het apparaat gespeeld is.

a. Hoeveel zal het apparaat dan zo ongeveer hebben uitbetaald?

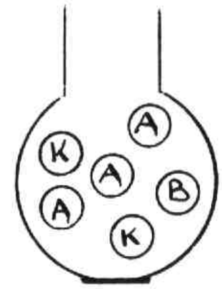
b. Hoeveel winst kan de eigenaar bij 9000 spelletjes verwachten?

c. Wat is de kleinste inzet (in een geheel aantal centen) waarbij de exploitant op de lange duur winst maakt?

Toevalsexperimenten (of gokspelletjes) kunnen veelal gesimuleerd worden door het *aselect* ("blind") trekken van een of meer balletjes uit een vaas, al of niet met teruglegging. Omdat we die simulatie vaak alleen in gedachten uitvoeren en het experiment als het ware "vertalen" in het aselect trekken uit een vaas met balletjes, spreekt men wel van het *vaasmodel*.

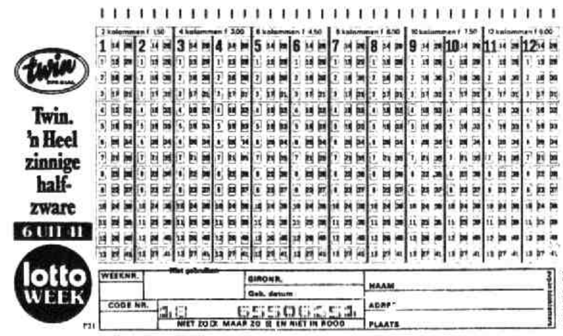
Voorbeeld:

Het spel met de fruitautomaat kan gesimuleerd worden door (of vertaald worden in) het trekken van achtereenvolgens twee balletjes uit een vaas met de volgende samenstelling: drie balletjes gemerkt K, twee balletjes gemerkt A en één balletje gemerkt B.

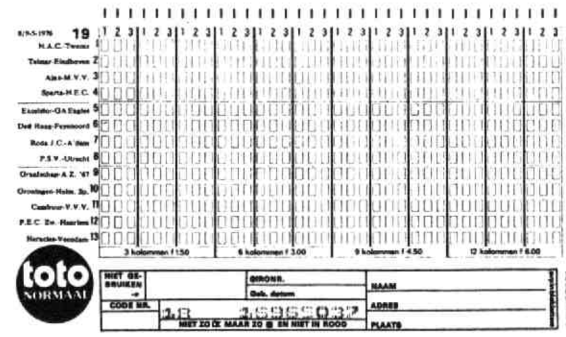


≫ 54. Is er bij het vaasmodel dat bij de fruitautomaat past, sprake van trekken met of van trekken zonder teruglegging?

≫ 55. Bij de wekelijkse trekking van de Lotto brengt men het vaasmodel in praktijk. De "vaas" bevat 41 genummerde balletjes. Is dit een trekking met of zonder teruglegging?



≫ 56. Hoe zou de wekelijkse Toto m.b.v. een vaas met ballen kunnen worden gesimuleerd? (Welke samenstelling geef je de vaas? Wat is de wijze van trekken?)



≫ 57. Maak een vaasmodel van het werpen met drie dobbelstenen. Hoe zou je de vaas kunnen samenstellen als je alleen maar geïnteresseerd bent in "zes" of "niet zes"?

De wijze van loten die de bestuursleden van de paardensportvereniging er op nahielden (je weet wel: de hoed met de vier balletjes) is letterlijk een vaasexperiment. Je hebt gezien dat er verschillende methoden zijn om de verdeling van de kansen bij dit experiment (en andere) m.b.v. een plaatje te bepalen:

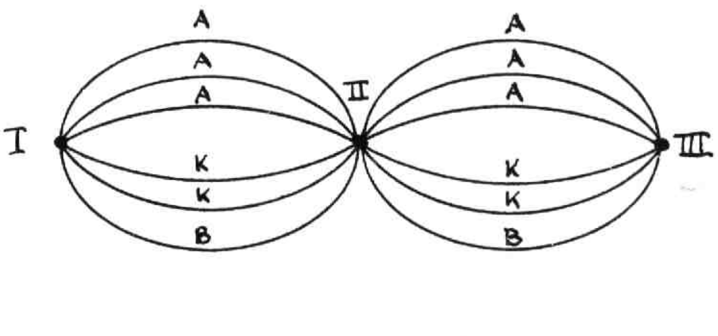
- het tekenen van een "roosterdiagram"
- het tekenen van een "boomdiagram"
- het tekenen van een "wegendiagram"

Elk van die methoden heeft zijn voor- en nadelen.
Het voordeel van het roosterdiagram is de overzichtelijkheid: de kansen op de verschillende gebeurtenissen zijn direct af te lezen. Daar staat tegenover dat de methode alleen goed werkt bij het trekken van *twee* balletjes uit een vaas, een fruitautomaat met *twee* vensters, het werpen met *twee* dobbelstenen, enz.

Het boomdiagram heeft ook het voordeel van de directe afleesbaarheid van de kansen en wat nog belangrijker is, het kan bij elk aantal trekkingen worden gebruikt! Het nadeel is echter dat het tekenwerk erg tijdrovend (soms bijna ondoenlijk) kan zijn.

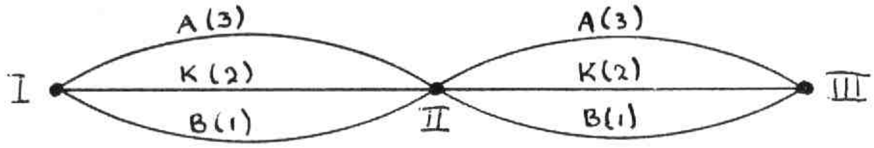
Het wegendiagram heeft evenmin de beperking van het roosterdiagram en vergt veel minder tekenwerk dan het boomdiagram. Het nadeel is hier dat de kansen op bepaalde gebeurtenissen niet direct af te lezen zijn; er moet gerekend worden.

Laten we als voorbeeld het wegendiagram bij de fruitautomaat nemen:



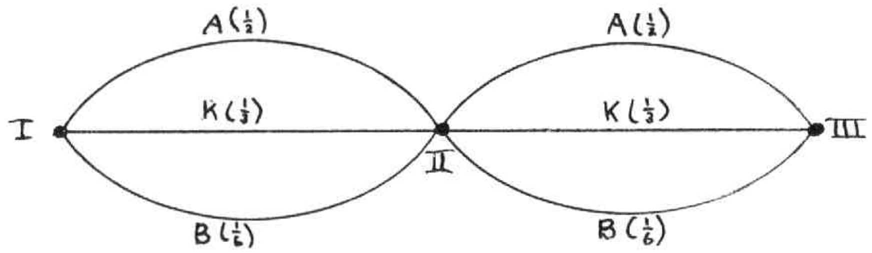
In totaal zijn er 36 (=6 x 6) wegen van I via II naar III. Daarvan zijn er 9 (= 3 x 3) A-A wegen, dus de kans dat je twee "appels" trekt = $\frac{9}{36} = \frac{1}{4}$.

Dat wegendiagram kan worden vereenvoudigd door de wegen van dezelfde soort tussen twee punten te vervangen door één en de aantallen er bij te schrijven.



De wegen in het diagram hebben zo als het ware verschillende "gewichten" gekregen. De kansen om in I resp. de A-weg, K-weg of B-weg te kiezen zijn niet resp. $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$, maar $\frac{3}{6}$, $\frac{2}{6}$ en $\frac{1}{6}$.

I.p.v. de aantallen, schrijft men ook vaak de respectievelijke kansen bij de wegen:



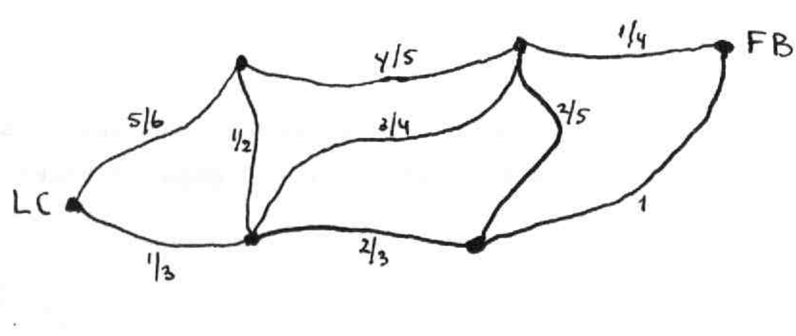
Zo'n voorstelling wordt wel een *kansdiagram* genoemd.

≫ 58. a. Hoe vind je uit de getallen in het kansdiagram de kans om vanuit I via twee A-wegen in III te komen?

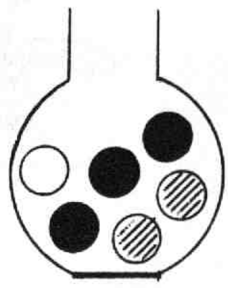
b. Hoe vind je uit dit kansdiagram de kans op de gebeurtenis "appel en kers"?

≫ 59. Maak zo'n kansdiagram voor het drie keer spelen in de roulette, waarbij je alleen interesse hebt voor Zéro, Noir en Rouge.
Hoe groot is de kans op drie verschillende uitkomsten in de reeks van drie?

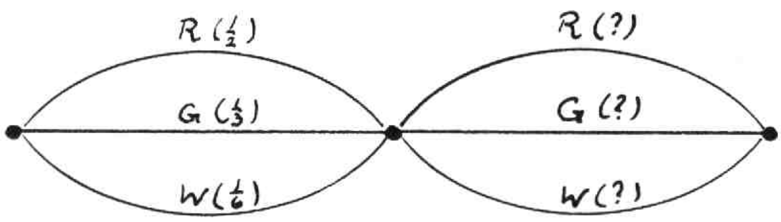
≫ 60. Honderd jaar geleden was het in het Wilde Westen gevaarlijk reisen. Hieronder zie je een kaart waarop een aantal routes van Laplace City naar Fort Bayes. Bij elk traject is de kans op overleving vermeld. Zoek de meest veilige route.



Op blz. 31 hebben we als nadeel van het wegendiagram genoemd dat je niet met het bekijken van het plaatje kunt volstaan, maar moet rekenen. Inmiddels zul je daar wel niet meer zo zwaar aan tillen.
Een ernstiger nadeel doet zich voor bij het trekken zonder teruglegging.
Stel we hebben een vaas met één wit, twee groene en drie rode balletjes. Er worden aselect *zonder teruglegging* twee balletjes getrokken.



Voor de keuze van het eerste balletje kun je natuurlijk de kansen $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ en $\frac{1}{6}$ nemen. Maar bij de keuze van het tweede balletje ben je afhankelijk van het eerste resultaat ....



≫ 61. a. Je hebt al eerder gezien hoe door "openknippen" van een wegendiagram een boomdiagram gemaakt kan worden. Doe dat met het hier getekende diagram en schrijf bij elke tak de passende kans.

b. Hoe groot is de kans op twee rode balletjes?

c. En op een combinatie van groen en wit?

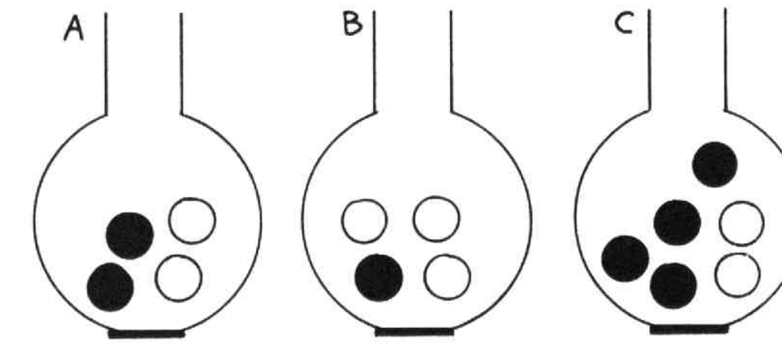
≫ 62. In een kast liggen vier paarse en twee gele sokken. Tijl graait in het donker in de kast en pakt op goed geluk twee sokken.
Hoe groot is de kans dat hij een goed paar te pakken heeft?

≫ 63. Een groep van negen mensen kwam aan bij de Duits-Deense grens. Vier mensen van dit groepje hadden ettelijke flessen geestrijk vocht in hun bagage verstopt. De dienstdoende douanebeambte pikte drie man er tussen uit en onderzocht hun bagage. Bij alle drie werd drank gevonden. Een zeldzame pech?

≫ 64.

Maak een boomdiagram (met kansen) van het spel van Asterix en leid hieruit de verdeling van de kansen van Asterix en Obelix af.

≫ 65. In Randomië krijgt een ter dood veroordeelde een laatste kans. Hij wordt geblinddoekt en mag een van de drie vazen (A, B of C) kiezen. Uit de gekozen vaas trekt hij één balletje. Is het zwart, dan wordt het vonnis ten uitvoer gebracht, is het wit, dan krijgt hij gratie.



a. Bereken zijn kans op gratie.

In verband met de op handen zijnde troonopvolging werden alle vonnissen verzacht. De veroordeelde mocht zelf de veertien ballen over de drie vazen verdelen, alvorens de over leven of dood beslissende trekking te doen.

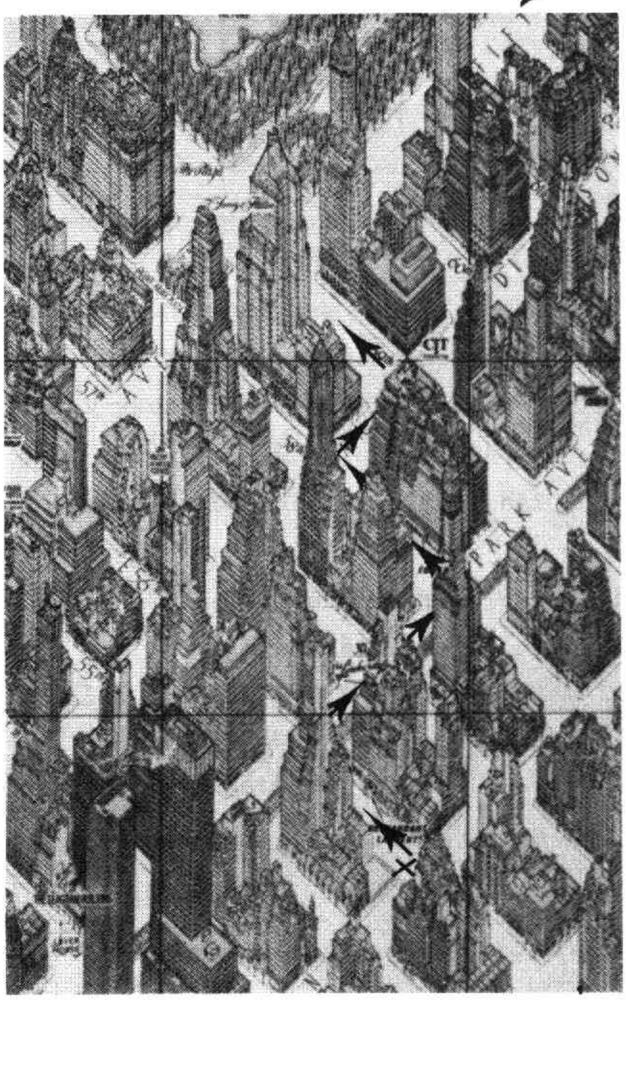
b. Hoe zou jij als veroordeelde de ballen over de drie vazen verdelen?

c. Wat is nu de kans op gratie?

WANDELEN IN MANHATTAN

≫ 66. Randy Walker loopt elke dag van een punt in de 56th Street (zie kruisje) naar het kruispunt van de 5th Avenue en de 59th Street.
Hij houdt van afwisseling en neemt elke dag een andere route. Hij maakt nooit een omweg, want hij heeft een hekel aan tijdverspilling.

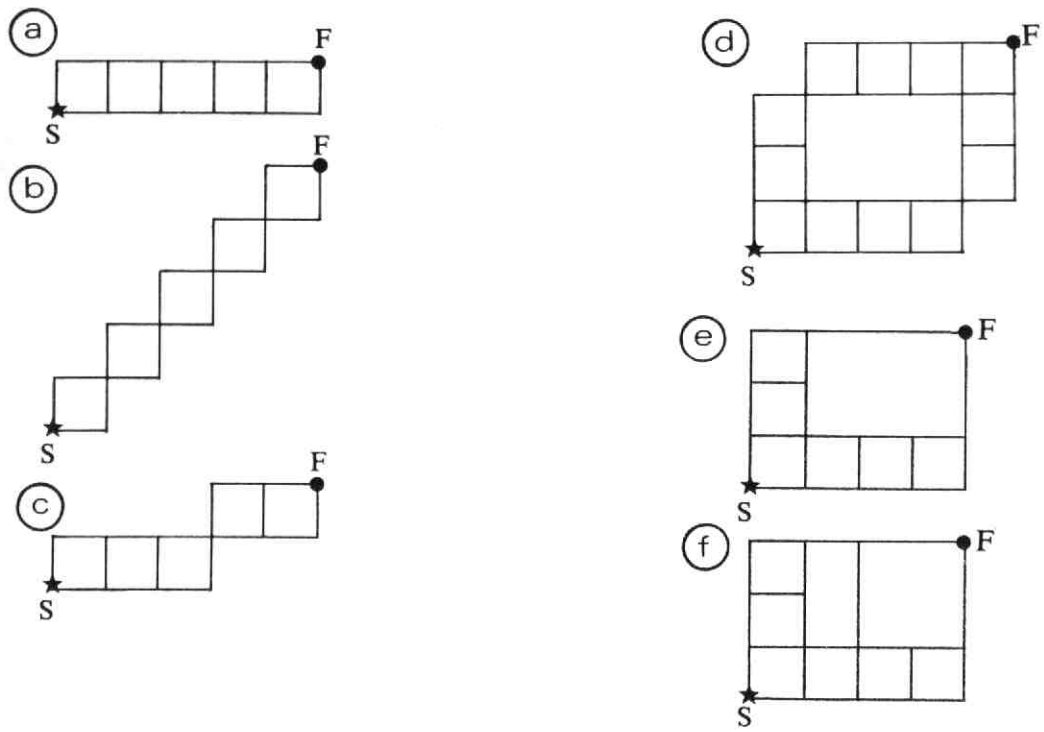
5th Avenue



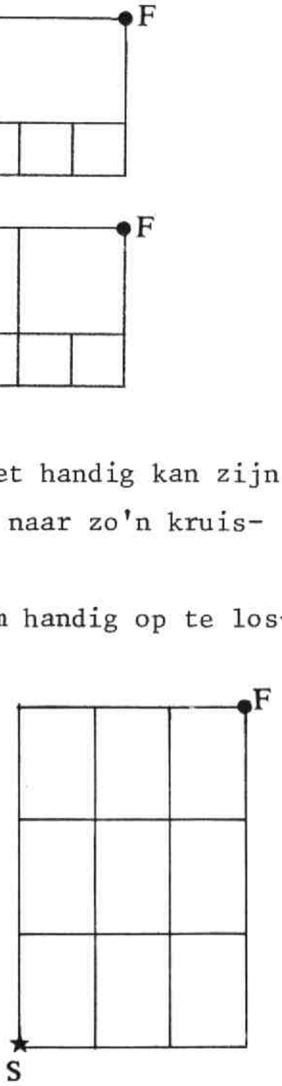
Randy's probleem is nu: hoeveel dagen achtereen kan ik het volhouden om een route te nemen die ik nog niet eerder gehad heb?

Het probleem van Randy Walker is niet zo simpel als het misschien op het eerste gezicht lijkt. De goede oplossing is: 20 dagen.
Bij het tellen van het aantal wegen raak je makkelijk in de knoop. In dit hoofdstukje zul je een systematische aanpak van dit soort problemen leren. Maak eerst de volgende opgave.

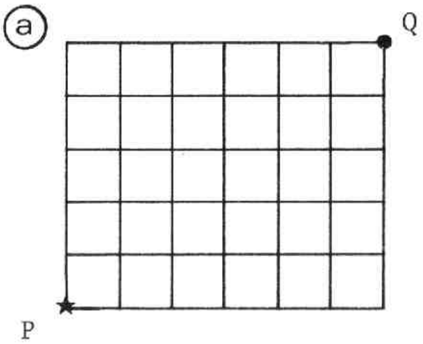
≫ 67. Hoeveel verschillende wegen (omwegen niet meegerekend) zijn er van S naar F?

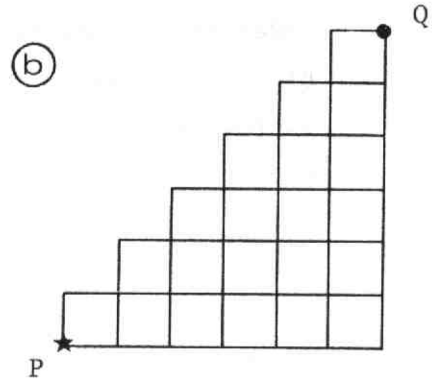


≫ 68. Bij de vorige opgave heb je misschien ontdekt dat het handig kan zijn om bij sommige kruispunten het aantal "korte wegen" naar zo'n kruispunt op te schrijven.
Deze methode gebruiken we om Randy Walker's probleem handig op te lossen.
Neem het 'stratenplan' hiernaast over en schrijf bij *elk* kruispunt hoeveel korte wegen er naar dat punt zijn vanuit S.
Tenslotte vind je dan het aantal wegen van S naar F.



≫ 69. Hoeveel korte wegen zijn er van P naar Q?





≫ 70. Hoeveel keer lees je hier JEROEN BOSCH?

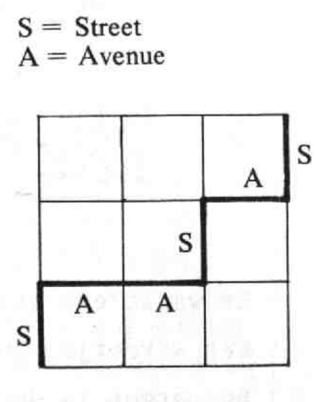
(a)

J
E E
R R R
O O O O
E E E E E
N N N N N N
B B B B B
O O O O
S S S
C C
H

(b)

J
E E
R R R
O O O O
E E E
N N
B
O O
S S S
C C
H

≫ 71. In Manhattan tref je twee stelsels parallelle wegen aan: Streets en Avenues.
De hiernaast getekende route kun je nu zó beschrijven: SAASAS.
Schrijf alle wegen van Randy Walker op volgens deze code.
Doe het systematisch!

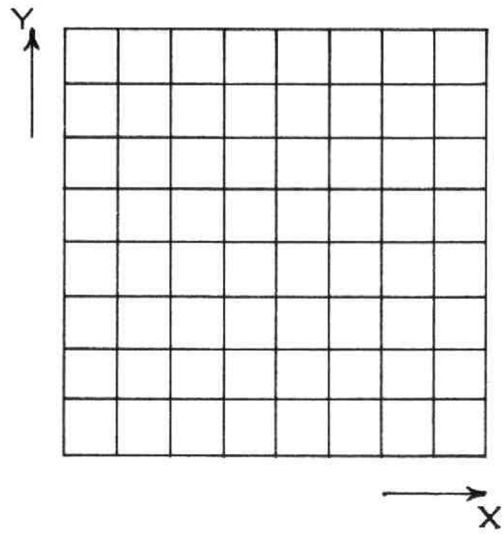


≫ 72. De geheime inlichtingendienst van Randomië bedient zich van allerlei codes bij het zenden van berichten of het opslaan van gegevens. Bij een van de codesystemen gebruikt men woorden van acht letters, waarbij alleen de letters X en Y worden gebruikt. Een voorbeeld van zo'n codewoord is: X Y X X X Y X Y.

a. Met welk weggetje in het stratenplan correspondeert dit codewoord?

b. Maak onderstaande tabel af:

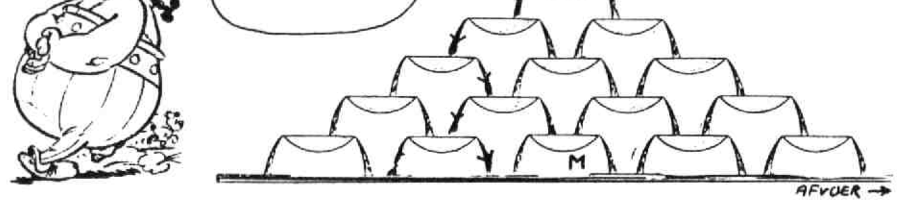
aantal letters X	aantal letters Y	aantal codewoorden
0	8	1
1	7	8
2	6	28
...	...	...



c. Hoeveel verschillende codewoorden kun je binnen dit systeem maken?

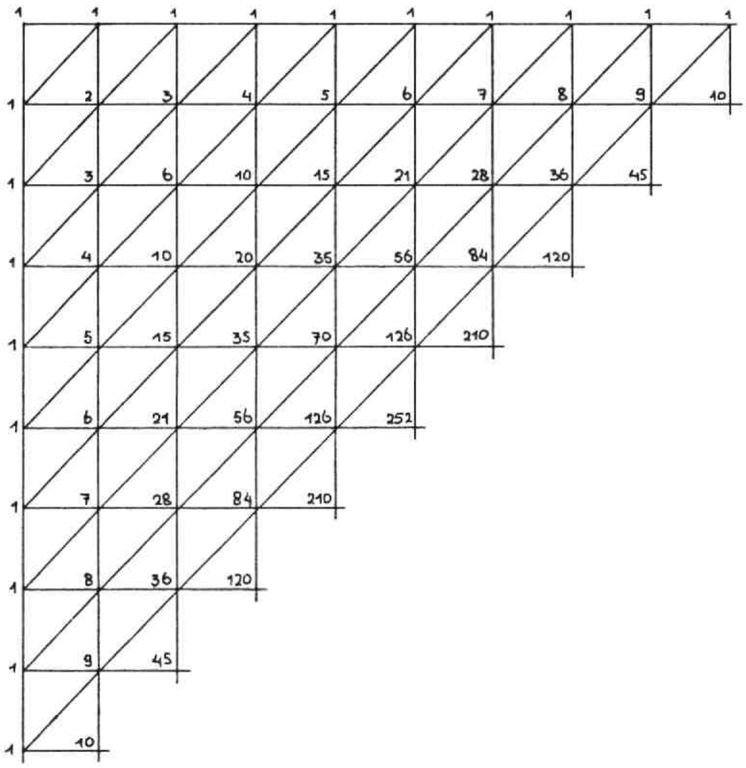
≫ 73. ROMEINSE FONTEIN

Uit de kraan (K) stroomt 1 liter water per sec. in de bovenste schaal. Zodra de schaal vol is, begint hij via twee afvoergaatjes over te lopen. Die gaatjes zijn diametraal en op gelijke hoogte aangebracht en ze zijn even groot. Voor alle volgende schalen geldt hetzelfde. Via de onderste vijf schalen komt het water in een afvoergoot terecht.



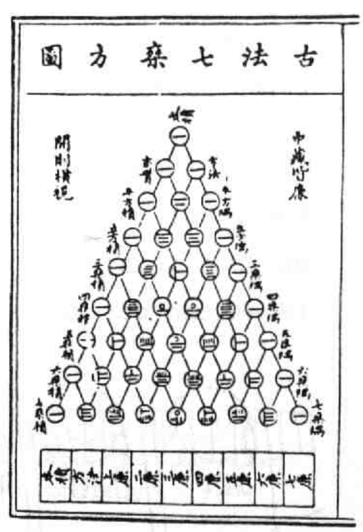
Er waait een strootje in het midden van de bovenste schaal. Het strootje kan gemakkelijk door de afvoergaten. Hoe groot is de kans dat dit strootje via de middelste schaal (M) de goot bereikt?

Veel tel- of kansproblemen kunnen worden opgelost met behulp van het volgende schema:



Dit schema, dat je zover kunt uitbreiden als je wilt, staat in de wiskunde bekend als *de driehoek van Pascal*, naar de Franse filosoof en wiskundige Blaise Pascal (1623-1662). Ongeveer in deze vorm is dat schema onder zijn naam in 1665 (posthuum dus) gepubliceerd.

Overigens was Pascal zeker niet de eerste wiskundige op aarde die het naar hem genoemde schema gebruikte. In een Chinees wiskundeboek daterend uit het jaar 1303 (auteurs Ssu Yuan Yu en Chuh Shih-Chieh) treft men de prent aan die je hiernaast ziet afgedrukt.



In navolging van de Chinese prent schrijven we de driehoek van Pascal vaak zó:

1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

Elk getal ($\neq 1$) is de som van zijn twee bovenburen!

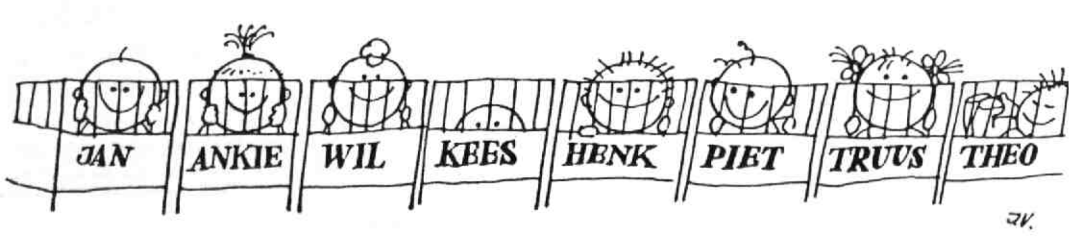
≫ 74. We tellen de getallen op die op een horizontale rij staan (of op een diagonaal in de figuren op de vorige bladzijde):

$1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32$

Doe dit voor elke horizontale rij in de driehoek van Pascal.
Wat valt je op aan de uitkomsten?
Weet je daar een verklaring voor?

≫ 75. In een vlak is een coördinatenrooster getekend.
Hoeveel korte wegen langs roosterlijnen zijn er van (0,0) naar (5,2)?
En van (0,0) naar (4,3)?
Als je beide uitkomsten optelt, krijg je het aantal korte wegen van (0,0) naar .....

≫ 76. In de kraamkamer van een ziekenhuis staan acht bedjes.
Hoe groot is de kans dat je er bij een volle kraamkamer vijf jongens en drie meisjes aantreft?
(Neem aan dat de kans op de geboorte van een jongen $\frac{1}{2}$ is).



≫ 77. In een vaas zitten 9 balletjes: 6 blauwe en 3 rode.
Negen mensen trekken elk een balletje uit de vaas (zonder teruglegging).

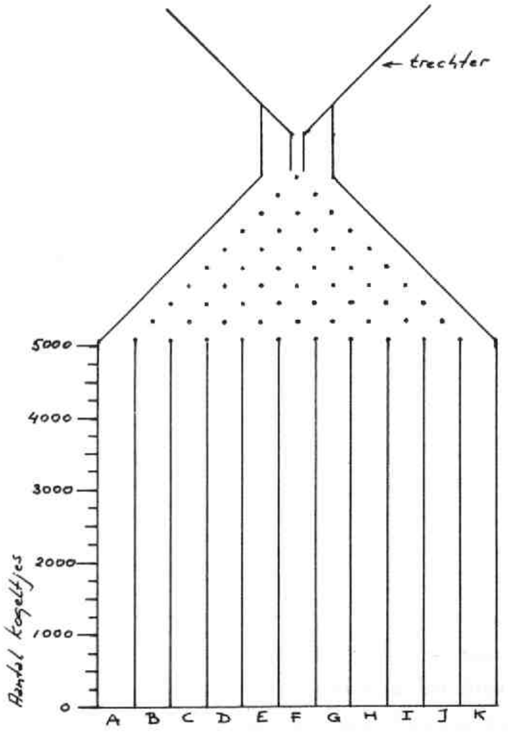
a. Hoeveel verschillende trekkingsresultaten zijn er mogelijk?

b. Hoe groot is de kans dat het vierde getrokken balletje rood is?

HET BORD VAN GALTON

Onderaan de bladzijde zie je een zgn. bord van Galton getekend. Een vallend kogeltje zoekt zijn weg door een woud van spijkers. Elke spijker stuurt het kogeltje naar links of naar rechts. Het bord is zo geconstrueerd dat bij elke spijker ongeveer 50% van de kogeltjes naar links worden gestuurd. Aan het eind van zijn weg komt elk van de kogeltjes in een van de elf vakjes A, B, ..., K terecht.

≫ 78. We laten een stroom van 10.000 kogeltjes door de trechter aan de bovenkant van het apparaat vallen.
Welke verdeling over de elf vakken kun je verwachten?
Teken die verdeling op schaal.



≫ 79. Opnieuw de Romeinse fontein (zie plaatje bij ≫ 73).
Nu zijn de twee afvoergaatjes per schaal verschillend. Het afvoergat aan de linkerkant is tweemaal zo groot als het afvoergat rechts. (Dit geldt voor elke schaal).
Er waait opnieuw een strootje in het midden van de bovenste schaal. Hoe groot is nu de kans dat het strootje in schaal A terecht komt?

≫ 80. Een onderdeel van een proefwerk bestaat uit vijf vier-keuze-vragen. Stel je voor dat je dit onderdeel zuiver op de gok maakt.

a. Bedenk een methode om dit "experiment" te simuleren.

b. Verzamel op deze wijze 25 proefwerkresultaten en bereken hieruit de (zweet-)kans op resp. 0, 1, 2, 3, 4, 5 goede antwoorden.

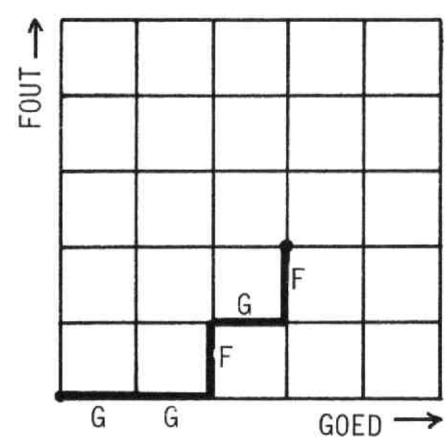
≫ 81. We gaan nu een (weet-)kansmodel maken bij het probleem van ≫ 80.
Elke beantwoording van de vijf vier-keuze-vragen kun je aangeven met een route in onderstaand rooster.
De daar getekende route is: GGFGF (d.w.z. vraag 1: goed; vraag 2: goed; enz.)

a. Hoeveel verschillende beantwoordingen zijn er mogelijk met drie goede en twee foute antwoorden?

b. En hoeveel met twee goede en drie foute antwoorden?

c. Bereken de (weet-)kansen op. resp. 0, 1, 2, 3, 4, 5 goede antwoorden.

d. Vergelijk jè resultaten met die van ≫ 80b.



3

PERMUTATIES EN COMBINATIES

C. Buddingh *Antwoord van een pokeraar aan een hartenjager*

natuurlijk: als je zit te pokeren
is de kans op een straight flush
even groot (of even klein)
als de kans op een combinatie
van vijf willekeurige kaarten

toch, als je zit te pokeren,
maakt het een heel verschil
of je een straight flush opraapt
of vijf willekeurige kaarten

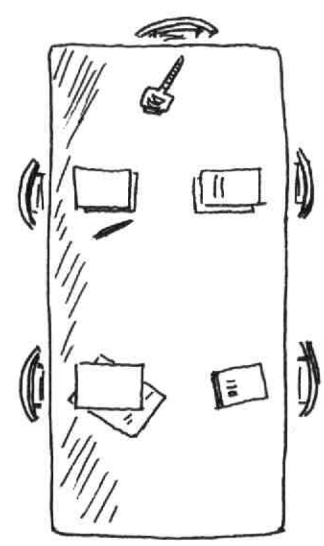
Kansvraagstukken leiden vaak tot 'telproblemen'.
In het voorgaande heb je geleerd hoe je op verschillende manieren met een plaatje of schema (rooster-, boom-, wegendiagram, driehoek van Pascal) zulke telproblemen kunt oplossen. In principe zijn de methoden die je geleerd hebt wel toereikend, maar het is handig om ook een paar formules paraat te hebben.
Om één voorbeeld te noemen: als je ver moet dalen in de driehoek van Pascal wordt het successievelijk optellen een gigantisch karwei, terwijl hetzelfde resultaat veel sneller via een formule kan worden verkregen.

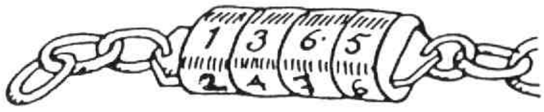
We beginnen dit hoofdstukje nu met een drietal probleempjes om er een beetje in te komen.

≫ 82. Het bestuur van de paardensportvereniging "Teugels los" (je weet wel, dat gezelschap dat wekelijks één rode en drie witte balletjes in een hoed deponeerde ter verloting van het gastheerschap) is inmiddels uitgebreid tot vijf personen. De verloting vindt nog steeds plaats, maar het gaat thans efficiënter: er worden vijf briefjes genummerd van 1 tot en met 5, dichtgevouwen en geschud. Ieder van de bestuursleden trekt een briefje en daarmee is voor vijf weken de volgorde van het gastheerschap vastgelegd.
Hoe groot is de uitkomstenverzameling bij dit experiment (m.a.w. hoeveel verschillende volgordes zijn er mogelijk)?

≫ 83. Uit het bestuur van vijf wordt een voorzitter, een secretaris en een penningmeester gekozen.
Hoeveel verschillende keuze-mogelijkheden zijn er?

≫ 84. Bij de eerstvolgende bestuursvergadering neemt de voorzitter plaats aan het hoofd van de tafel.
De andere bestuursleden hebben geen vaste plaats.
Hoeveel verschillende vergaderopstellingen zijn er mogelijk?





Een van de problemen waar hoofdstuk 2 mee begint, is de vraag naar het aantal cijfercodes dat je kunt maken met de cijfers 1, 3, 6 en 5.
De 24 verschillende codes zijn hiernaast nog eens systematisch opgeschreven.
Je kunt zeggen:
vier cijfers (maar ook: letters, namen, kleuren, ...) laten zich op 24 manieren in volgorde zetten. Zo'n rangschikking, zo'n rijtje-van-vier, noemen we een *permutatie* van vier elementen.
Het aantal permutaties van n elementen wordt aangeduid met het symbool n!, spreek uit: n-faculteit.
(Het uitroepteken is hier dus een nieuw rekensymbool en heeft niets met opwinding of zoiets te maken).
In het voorbeeld van de cijfercode zie je: 4! = 24.

4! (= 24) verschillende rangschikkingen van vier cijfers

6	5	3	1
6	5	1	3
6	3	5	1
6	3	1	5
6	1	5	3
6	1	3	5
5	6	3	1
5	6	1	3
5	3	6	1
5	3	1	6
5	1	6	3
5	1	3	6
3	6	5	1
3	6	1	5
3	5	6	1
3	5	1	6
3	1	6	5
3	1	5	6
1	6	5	3
1	6	3	5
1	5	6	3
1	5	3	6
1	3	6	5
1	3	5	6

≫ 85. Bereken achtereenvolgens: 3!; 2!; 1!; 5!; 6! en 7!.

≫ 86. Een volleybalteam bestaat uit zes spelers of speelsters.
Hoeveel verschillende begin-opstellingen (links-, mid- en rechtsvoor, links-, mid- en rechtsachter) kan de coach met zijn zestal maken?

NET

* LV   * MV   * RV

* MA

* LA   * RA

≫ 87. Als je weet: $9! = 362880$, kun je dan onmiddellijk zeggen hoe groot $10!$ is?

≫ 88. De faculteitsgetallen lopen zeer snel in grootte op.
$18!$ is een getal van 15 cijfers (ruim 6,4 biljard) en $20!$ is een getal van 18 cijfers (ruim 2,4 triljoen).
Kun je zonder die getallen apart te berekenen zeggen hoe groot het quotiënt $\frac{20!}{18!}$ is?

≫ 89. Wat is het verband dat er tussen $(n+1)!$ en $n!$ bestaat?
(n is een of ander natuurlijk getal).

De faculteitsgetallen zijn 'gedurige' produkten van de getallen 1, 2, 3, 4, ...

$1! = 1$

$2! = 2 \cdot 1$

$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1$

$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

enz.

Kortom:

Voor elk natuurlijk getal $n \geqq 2$ geldt:

$$n! = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}_{\text{n factoren}}$$

≫ 90. a, b, c zijn natuurlijke getallen >2.
Bereken de quotiënten:

$\frac{a!}{(a-1)!}$; $\frac{b!}{(b-2)!}$; $\frac{(c+1)!}{(c-1)!}$

Als je bij het fietsslot (met de vier schijven) weer een code van vier *verschillende* cijfers kiest, waarbij nu echter *alle* cijfers (d.w.z. 0,1,2,..,9) mogen voorkomen, dan zijn er veel meer mogelijkheden, namelijk:

$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$ (=5040).

≫ 91. Hoe kun je dat beredeneren?

≫ 92. Wat is er fout in de volgende redenering?
"Tien cijfers laten zich op 10! verschillende volgordes zetten.
We letten alleen op de eerste vier cijfers en schrappen de staart van zes cijfers, zo krijgen we alle codes van vier verschillende cijfers.
Er zijn dus 10! codes mogelijk."
Hoe kun je deze redenering repareren?

≫ 93. Het eerste volleybalteam van Blokkeer bestaat uit negen spelers, waarvan er steeds drie op de bank zitten (wisselspelers zijn).
Uit hoeveel verschillende beginopstellingen kan de coach kiezen?
Pas twee verschillende redeneringen toe.

≫ 94. In bovenstaande voorbeelden heb je te maken met het aantal permutaties van 4 elementen uit 10 resp. van 6 elementen uit 9.
Bereken het aantal permutaties van 3 elementen uit 5.
Ook van 3 elementen uit 6.
Ook van 3 elementen uit n (n is een natuurlijk getal).

≫ 95. Vier personen (A,B,C,D) trekken om de beurt en zonder teruglegging één kaart uit een volledig spel (52 kaarten).
Een trekkingsresultaat is bijvoorbeeld:
A: harten aas; B: schoppen twee; C: klaver zes; D: klaver heer.
Hoeveel verschillende trekkingsresultaten zijn er mogelijk?

≫ 96. Er worden 4 stapels kaarten (complete spelen) op tafel gelegd.
Persoon A trekt één kaart uit de eerste stapel, B trekt één kaart uit de tweede, enz.
Hoeveel verschillende trekkingsresultaten zijn er nu mogelijk?

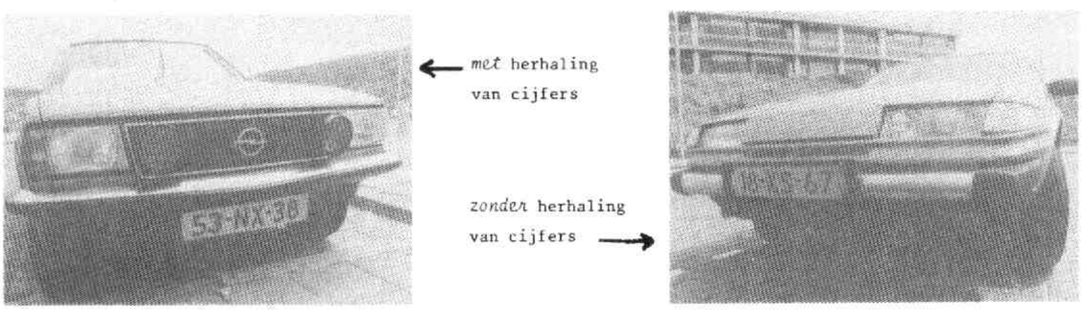
Bij een cijferslotcode zijn meestal herhalingen van cijfers toegestaan; bijvoorbeeld 1113 of 2028 zijn gangbare codenummers.
Het totaal aantal codenummers met vier cijfers is nu:

$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \quad (=10^4)$

≫ 97. Hoeveel codes (met herhalingen) zijn er mogelijk als je alleen de cijfers 1, 3, 5 en 6 gebruikt?

≫ 98. De nieuwe kentekennummers voor auto's bestaan uit een reeks van twee letters, twee cijfers en twee letters, bijvoorbeeld AB 33 XY.
Er worden slechts 24 letters gebruikt (de I en de O gebruikt men om voor de hand liggende reden niet).
Hoeveel verschillende kentekennummers kunnen er op deze manier worden gemaakt?

≫ 99. Veel autonummers hebben nog een kentekennummer met twee letters en vier cijfers.



Op een groot parkeerterrein tref je honderd auto's aan met zo'n oud kentekennummer. Hoeveel kentekennummers-zonder-herhaling-van-cijfers kun je verwachten?

SAMENVATTING

Bij een *permutatie* van k elementen uit n is niet alleen de keuze van die elementen, maar ook de volgorde belangrijk.

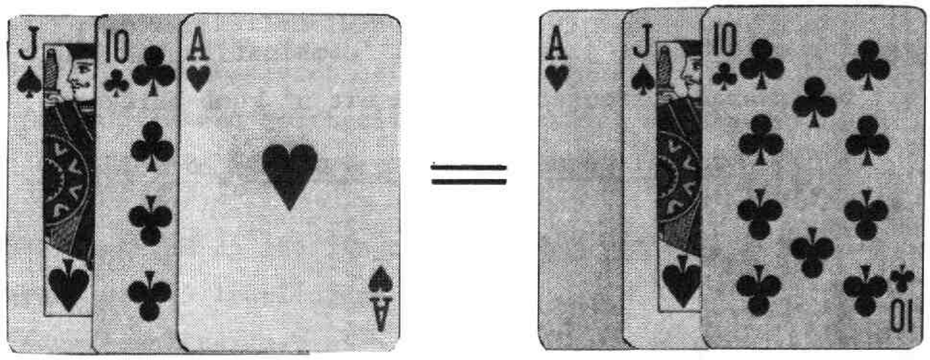
Voorbeeld:
Het aantal permutaties van 6 (verschillende) elementen uit 20 is:

$$20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 = \frac{20!}{14!}$$

Als de elementen herhaald mogen worden is het aantal rangschikkingen:

$$20 \cdot 20 \cdot 20 \cdot 20 \cdot 20 \cdot 20 = 20^6$$

Bij een zeker kaartspel krijgt elke speler drie kaarten uit een stapel van 32 toebedeeld (de stapel bevat alle waarden boven de 'zes' en alle plaatjes). Als speler ben je in het algemeen niet geïnteresseerd in de volgorde waarin je de kaarten krijgt, maar louter in de *combinatie* van kaarten.



Letten we eerst eventjes wèl op de volgorde, dan is het aantal mogelijkheden: $32 \cdot 31 \cdot 30 = 29760$ (= het aantal permutaties van 3 uit 32).

≫ 100. Hoeveel verschillende combinaties (waarbij je dus niet op de volgorde let) zijn er onder deze 29760?

≫ 101. Er zijn tien "combinaties-van-drie" uit de vijf letters A, B, C, D, E. Schrijf die combinaties op (systematisch!)

≫ 102. Een popzangeres heeft een repertoire van 20 liedjes. In een T.V.-programma mag zij vier nummers brengen. Hoeveel keuzemogelijkheden heeft zij voor dat programma?

Hieronder zie je alle combinaties-van-drie en alle permutaties-van-drie uit de verzameling {A,B,C,D}

COMBINATIES	PERMUTATIES
ABC	ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA
ABD	ABD, ADB, BAD, BDA, DAB, DBA
ACD	ACD, ADC, CAD, CDA, DAC, DCA
BCD	BCD, BDC, CBD, CDB, DBC, DCB

≫ 103. Een dergelijke tabel kun je ook maken voor combinaties- en permutaties-van drie uit {A,B,C,D,E}. Je weet al (≫ 101) dat er 10 combinaties zijn. Hoeveel permutaties?

Het aantal combinaties van k elementen uit n elementen noteren we voortaan zó: $\binom{n}{k}$.

Spreek uit: "n boven k".

In de voorbeelden op blz. 49 heb je o.a. gezien:

$$\binom{5}{3} = 10 \quad ; \quad \binom{32}{3} = 4960$$

Je hebt misschien ontdekt dat je het aantal 'combinaties van k uit n' gemakkelijk uit het aantal 'permutaties van k uit n' kunt berekenen.

Bijvoorbeeld: $\binom{5}{3} = \frac{\text{aantal permutaties van 3 uit 5}}{3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} = 10$

$$\binom{32}{3} = \frac{32 \cdot 31 \cdot 30}{3!} = 4960$$

≫ 104. a. Welk verband bestaat er tussen het aantal 'combinaties van 4 uit 20' en het aantal 'permutaties van 4 uit 20'?

b. Bereken $\binom{20}{4}$.

≫ 105. Een V.W.O. leerling kiest naast het verplichte vak Nederlands, zes vakken uit Engels, Frans, Duits, Grieks, Latijn, Aardrijkskunde, Geschiedenis, Scheikunde, Biologie, Natuurkunde, Economie 1, Economie 2, Wiskunde A, Wiskunde B.

Laat zien dat er ongeveer 3000 verschillende pakketten mogelijk zijn.

≫ 106. Bereken achtereenvolgens:

$$\binom{6}{1} ; \binom{6}{2} ; \binom{6}{3} ; \binom{6}{4} ; \binom{6}{5} ; \binom{6}{6}$$

≫ 107. n is een of ander natuurlijk getal. ($n > 3$).

Bereken: $\binom{n}{1} ; \binom{n}{2} ; \binom{n}{3}$

≫ 108. Een deelnemer aan de Lotto kiest zes nummers uit de getallen 1 tot en met 41.

Hoe groot is de kans dat zijn zes nummers goed zijn? (Je hoeft geen rekening te houden met het zogenaamde reserve getal).

≫ 109. Uit een gezelschap van tien personen wordt een commissie van vijf gekozen, waarvan er één als voorzitter wordt aangewezen.

Hoeveel verschillende commissies zijn er mogelijk?

≫ 110. Laat zien door berekening: $5\cdot\binom{10}{5} = 10\cdot\binom{9}{4}$

Deze gelijkheid kun je uit ≫ 109 afleiden door het aantal commissies op twee manieren te berekenen.
Hoe?

≫ 111. Vervang de getallen 10 en 5 in ≫ 109 door resp. n en k ($k \leqq n$).
Door op twee manieren het aantal commissies-met-voorzitter te berekenen vind je een soortgelijke betrekking als in ≫ 110.
Hoe luidt die betrekking?

≫ 112. Een klas van 25 leerlingen wordt gesplitst in een groep van 10 en een groep van 15 leerlingen.
Hoeveel splitsingen zijn er mogelijk bij die aantallen?

≫ 113. Bereken $\binom{8}{3}$ en $\binom{8}{5}$.
Hoe kun je zonder berekening verklaren dat die getallen gelijk zijn?

Het aantal combinaties (van k uit n) kan worden uitgedrukt in drie faculteitsgetallen.

Voorbeeld: $\binom{9}{4} = \frac{9\cdot8\cdot7\cdot6}{4!} = \frac{(9\cdot8\cdot7\cdot6)\cdot5!}{4!\cdot5!} = \frac{9!}{4!5!}$

Je kunt dit resultaat ook als volgt verklaren.
9 elementen laten zich op 9! manieren rangschikken; bij elke rangschikking kun je een streep zetten tussen het vierde en vijfde element, bijv.

4 7 1 3 | 8 5 2 9 6

Bij een combinatie (deelverzameling) van 4 elementen uit 9 gaat het er alleen om welke getallen VOOR en welke getallen ACHTER de streep staan.
Voor de streep betekent: uitgekozen; achter de streep: niet uitgekozen.
Omdat je de getallen voor de streep op 4! en de getallen achter de streep op 5! manieren kunt rangschikken, volgt nu:

$$\binom{9}{4} = \frac{9!}{4!5!}$$

≫ 114. Druk uit in faculteitsgetallen:

$\binom{9}{5}$; $\binom{10}{3}$; $\binom{12}{6}$; $\binom{n}{3}$; $\binom{n}{n-3}$; $\binom{n}{k}$, waarbij $0 < k < n$.

Opmerking:

Om de formule die je van $\binom{n}{k}$ gevonden hebt ook goed te krijgen voor het randgeval k = n, spreken we af: 0! = 1.

Er komt dan: $\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!0!} = \frac{n!}{n!1} = 1$

Ook het symbool $\binom{n}{0}$ krijgt nu betekenis: $\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!n!} = 1$.

≫ 115. Een klas van 25 leerlingen worden gesplitst in een groep van 10, een groep van 8 en een groep van 7 leerlingen.
Hoeveel splitsingen zijn er met deze aantallen?

≫ 116. De getallen van ≫ 106 kun je terugvinden in de driehoek van Pascal (zie pag. 40).
Waar?

≫ 117. Ga na dat de combinatie-getallen $\binom{8}{k}$, k = 0,1,2,..,8 op de achtste regel van de driehoek van Pascal staan.

Dat je de 'combinatie-getallen' in de driehoek van Pascal kunt vinden, is natuurlijk geen toeval. Om inzicht te krijgen in het hoe en waarom, kijken we nog eens naar het verband tussen de driehoek van Pascal en het stratenplan.

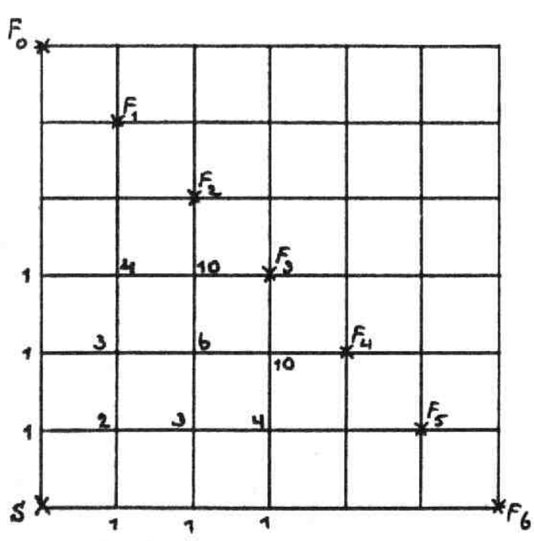


fig. 1

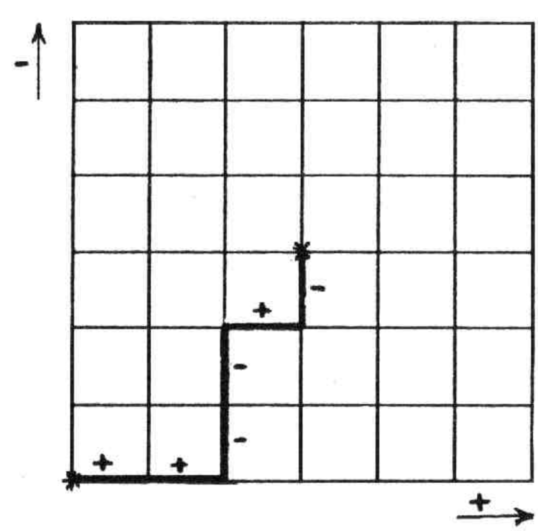


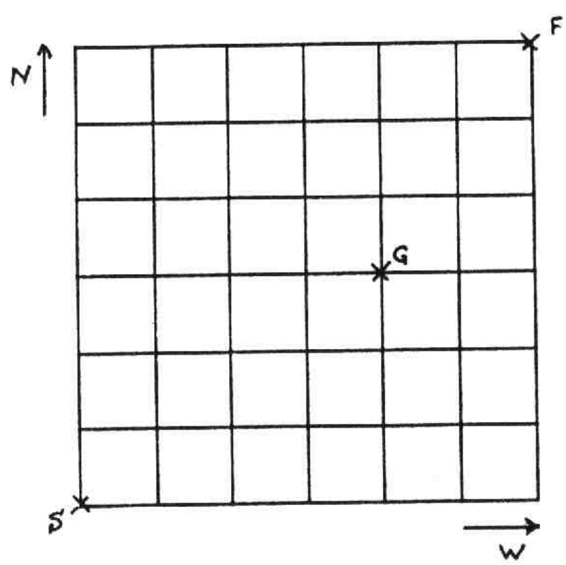
fig. 2

Het aantal korte wegen van S naar F_3 kun je vinden door successievelijk optellen van de aantallen wegen bij de kruispunten. Resultaat: 20.
Elke weg van S naar F_3 kun je beschrijven met een code van zes tekens (3 'plussen' en 3 'minnen'), de weg in fig. 2 is: $++--+-$.
Blijkbaar zijn er 20 van zulke codes te maken.
Dit aantal kun je ook zó berekenen: er zijn $\binom{6}{3}$ mogelijkheden om 3 'plussen' over 6 plaatsen te verdelen: $\binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6} = 20$.

≫ 118. Bereken op twee manieren het aantal korte wegen van S naar F_4.

≫ 119. a. Bereken het aantal (korte) wegen van S naar F (zonder de driehoek van Pascal te gebruiken).

b. Bereken ook het aantal (korte) wegen van S naar F die via G gaan,



≫ 120. In een coördinatenrooster zijn gegeven de punten (0,0) en (5,10).
Hoeveel verschillende (korte) wegen langs het rooster verbinden die twee punten?
En hoeveel (korte) wegen zijn er van (0,0) naar (5,9)?
En van (0,0) naar (4,10)?

≫ 121. Het aantal 'combinaties van 5 uit 15' is de som van het aantal 'combinaties' van 5 uit 14' en het aantal 'combinaties van 4 uit 14'.
Zie de tabel van de getallen $\binom{n}{k}$ op blz. 66.
Hoe kun je dit verklaren uit ≫ 120?

Uit het voorgaande volgt nu dat de driehoek van Pascal ook zó geschreven kan worden:

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$
$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$
$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$
$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$
$$\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5}$$

≫ 122. a. Bereken $\binom{3}{0} + \binom{3}{1} + \binom{3}{2} + \binom{3}{3}$

Een "herhaalde" som wordt in de wiskunde vaak aangeduid met het teken Σ (de Griekse hoofdletter sigma).

In dit geval:

$$\sum_{i=0}^{3} \binom{3}{i}$$

Lees dit als volgt: de som van de getallen $\binom{3}{i}$ waarbij i loopt van 0 tot en met 3.

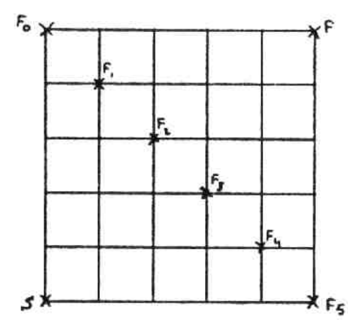
b. Wat betekent: $\sum_{i=0}^{4} \binom{4}{0}$? Welk getal is gelijk aan deze som?

c. Bereken $\sum_{i=0}^{5} \binom{5}{i}$; $\sum_{i=0}^{6} \binom{6}{i}$; $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}$

≫ 123. a. Beredeneer dat het aantal (korte) wegen van S via F_3 naar F gelijk is aan $\binom{5}{3}^2$.

b. Beredeneer:

$$\sum_{i=0}^{5} \binom{5}{i}^2 = \binom{10}{5}$$



≫ 124. Uit het bestuur van een buurtvereniging, bestaande uit vijf vrouwen en vijf mannen, wordt een feestcomité van vijf personen gevormd. Door op twee manieren het aantal verschillende comité's te berekenen, kun je de formule van ≫ 123 beredeneren. Hoe?

≫ 125. Hoe kun je een algemenere versie van de formule van ≫ 123 geven?

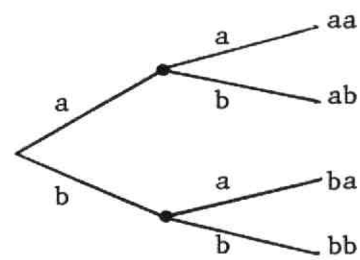
Tot slot nog een toepassing van de combinatie-getallen in de algebra. Je kent natuurlijk het 'merkwaardig produkt':

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

De afleiding is niet moeilijk:

$$(a+b)(a+b) = aa + ab + ba + bb = a^2 + 2ab + b^2$$

Het schema met de boogjes laat zien dat er (in eerste instantie) vier termen ontstaan bij de 'ontwikkeling' van het produkt.
Die vier termen kunnen ook zichtbaar worden gemaakt in een boomdiagram (twee keer twee keuzemogelijkheden).



≫ 126. a. Maak een boomdiagram bij de ontwikkeling van het produkt:
$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b)$.

b. Welke veelterm krijg je na ontwikkeling van $(a+b)^3$?

c. Controleer je resultaat via de berekening:
$(a+b)^3 = (a+b)\cdot(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a^2+2ab+b^2)$

≫ 127. Ontwikkel $(a+b)^4$ in een veelterm. Pas twee verschillende methoden toe.

≫ 128. a. Hoeveel verschillende rijtjes kun je vormen met twee letters a en drie letters b? En met één letter a en vier letters b?

b. Ontwikkel $(a+b)^5$ in een veelterm.

≫ 129. $(a+b)^6 = \sum_{k=0}^{6} \binom{6}{k} \cdot a^k \cdot b^{6-k}$

a. Schrijf de som in het rechterlid (zeven termen!) uit.

b. Hoe kun je bovenstaande ontwikkeling van $(a+b)^6$ verklaren?

De ontwikkeling van resp. $(a+b)^2$, $(a+b)^3$, $(a+b)^4$, ..., kortom van $(a+b)^n$, staat bekend onder de naam "binomium van Newton":

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}\, b + \binom{n}{2} a^{n-2}\, b^2 + \ldots + \binom{n}{n} b^n$$

ofwel:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k$$

$(a, b \in \mathbb{R}\,;\ n, k \in \mathbb{Z}\,,\ n \geq 2)$

≫ 130. Door substitutie van $a = 1$, $b = 1$ in resp. $(a+b)^5$, $(a+b)^6$ en $(a+b)^n$ kun je de resultaten van ≫ 122c terugvinden. Ga dit na.

≫ 131. Als je de getallen op een horizontale rij in de driehoek van Pascal (blz. 40) afwisselend van een plus- en een minteken voorziet en vervolgens optelt, vind je 0 als resultaat.
Voorbeeld: $1 - 4 + 6 - 4 + 1 = 0$

a. Controleer dit voor een paar regels.

b. Hoe kun je dit resultaat verklaren uit het binomium van Newton?

SAMENVATTING

$\binom{n}{k} =$

* het aantal combinaties van k uit n
* het aantal deelverzamelingen van k elementen uit een verzameling van n elementen
* het aantal codes bestaande uit k 'plussen' en $n-k$ 'minnen'
* het aantal (korte) routewegen met k horizontale en $n-k$ vertikale stapjes
* het k^{de} getal in de n^{de} rij van de driehoek van Pascal
* de coëfficiënt van $a^k b^{n-k}$ in de ontwikkeling van $(a+b)^n$
* $\frac{n!}{k!(n-k)!}$

4

GEMENGDE OPGAVEN

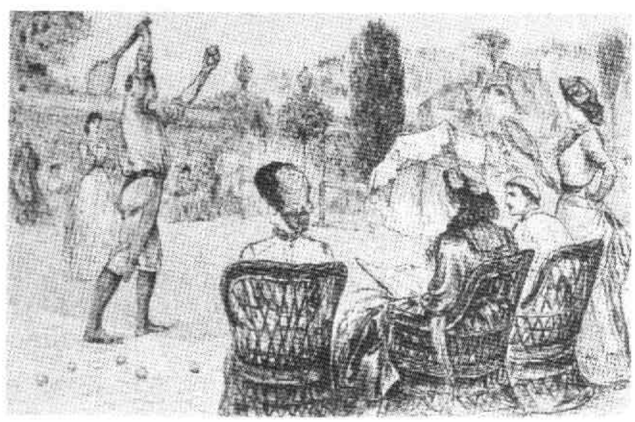
≫ 132. Asterix en Obelix spelen een dobbelspel. Ze werpen ieder met één dobbelsteen. Asterix wint de pot als het totaal aantal ogen van de beide worpen minder dan 8 is; in het andere geval wint Obelix. Obelix zet vijf everzwijnen in.
Hoeveel everzwijnen moet Asterix inzetten, wil het spel eerlijk zijn?

≫ 133. Bij een statistisch onderzoek wordt de samenstelling van duizend gezinnen met drie kinderen bekeken.
Hoeveel 'gemengde' gezinnen (kinderen van beide geslachten) kun je verwachten?

≫ 134. a. Iemand werpt drie keer met een geldstuk.
Hoeveel procent kans heeft hij op drie keer 'kop'?

b. Uit hoeveel worpen moet het experiment minstens bestaan, opdat de kans op alle keren 'kop' minder is dan 1%?

≫ 135. Damestennis op Wimbledon. Winnares van een partij is degene die het eerst twee sets heeft gewonnen. (Een partij kan dus hoogstens drie sets duren). Mrs Evert speelt tegen Mrs Austin. Van de 50 sets die Evert en Austin de afgelopen twee jaar tegen elkaar hebben gespeeld, heeft Evert er 30 gewonnen.



a. Je zou kunnen zeggen dat de kans voor Evert om een *set* van Austin te winnen $\frac{3}{5}$ is.
Bereken nu de kans dat Evert de *partij* van Austin wint.

b. Een Amerikaanse televisiemaatschappij wil de wedstrijd uitzenden en krijgt daarvoor één uur zendtijd. Volgens de commentator is de kans 50% dat de wedstrijd in zijn geheel op het scherm komt.
Heeft hij gelijk? Je mag er bij je berekening van uitgaan dat een set een half uur in beslag neemt.

≫ 136. a. Hoe groot schat je op dit moment de kans dat er volgend jaar omstreeks half januari ijs op de singels in Utrecht ligt? (Gebruik onderstaande tabel).

b. Hoe groot schat je de kans dat dit twee jaar achtereen rond half januari het geval is?

c. Kun je dit simuleren met het trekken van twee balletjes uit een vaas? Zo ja, wat is de samenstelling van de vaas? Trek je *met* of *zonder* teruglegging?

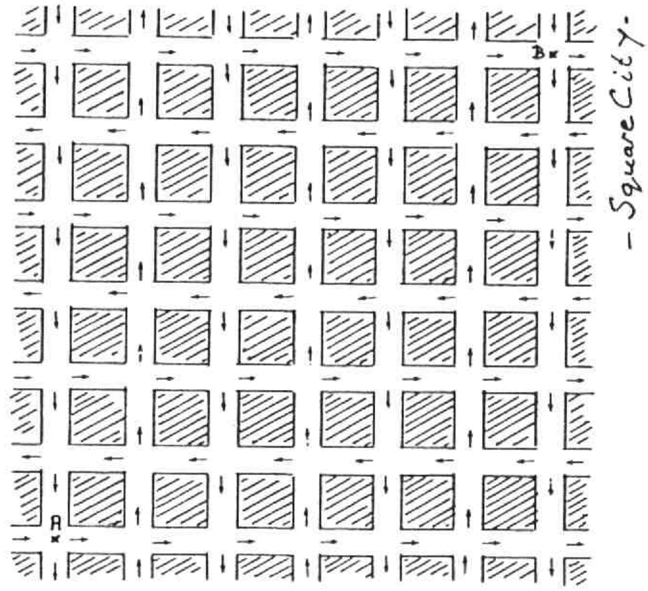
TEMPERATUUR (T) EN NEERSLAG (R) IN DE BILT

	13 jan	14 jan	15 jan	14 feb	14 mrt	14 apr		13 jan	14 jan	15 jan	14 feb	14 mrt	14 apr	
1951	4,8	6,5	5,8	4,4	10,4	7,8	T max	5,1	6,9	3,4	14,9	12,5	15,5	**1961**
	2,0	2,1	3,5	1,2	5,2	2,5	T min	1,7	1,9	−0,9	1,9	7,3	5,2	
	3,9	4,6	4,8	2,7	7,3	4,4	T gem	3,8	4,4	1,7	8,3	9,6	11,6	
	0,2	2,9	6,6	5,7	5,0	6,8	R (mm)	–	1,1	–	–	–	2,1	
1952	5,8	8,0	10,1	2,9	6,3	20,2	T max	5,4	5,5	0,6	5,6	3,6	8,8	**1962**
	−0,8	1,2	2,1	−2,6	−3,4	6,3	T min	1,7	2,1	5,2	−0,9	−9,7	3,1	
	2,4	4,7	7,0	−0,4	1,2	14,0	T gem	3,8	3,9	2,3	1,7	−1,5	5,8	
	0,2	5,9	–	0,6	–	–	R (mm)	2,4	5,5	2,8	4,7	7,7	1,7	
1953	0,6	−1,0	−0,2	−0,7	8,3	9,9	T max	−2,7	2,5	1,3	1,0	10,7	12,0	**1963**
	−4,5	−3,9	−1,7	−4,1	1,2	3,0	T min	−15,2	−7,2	−9,1	−5,1	4,0	0,3	
	−3,0	−2,4	−0,7	−3,2	3,6	4,8	T gem	−8,0	−1,1	−3,5	−1,9	7,2	7,0	
	–	–	–	0,3	–	0,2	R (mm)	0,3	1,6	–	0,3	10,1	–	
1954	6,7	6,2	11,5	6,0	5,3	11,5	T max	−1,2	1,2	0,3	4,9	6,6	12,3	**1964**
	3,8	0,9	5,2	3,1	2,0	4,0	T min	−5,2	−1,2	−5,5	−4,1	1,8	5,6	
	4,9	4,8	8,7	3,9	3,0	8,8	T gem	−3,1	0,3	−2,5	−0,3	3,8	8,5	
	0,4	15,4	1,7	2,9	–	–	R (mm)	–	1,0	1,3	–	3,1	–	
1955	2,0	0,3	−0,1	2,8	7,3	8,4	T max	6,7	7,3	5,4	5,4	11,0	12,1	**1965**
	−1,5	−5,1	−8,6	−6,9	−2,9	3,1	T min	4,2	3,1	1,7	0,3	6,5	−2,2	
	0,4	−2,3	−1,7	−1,0	3,2	6,1	T gem	5,1	5,2	4,0	2,8	8,8	5,6	
	–	2,8	–	0,3	–	–	R (mm)	0,1	5,8	6,9	0,9	0,2	0,1	
1956	7,9	3,2	7,4	−4,8	3,3	8,2	T max	−1,4	−2,8	−2,2	0,8	7,1	3,7	**1966**
	1,3	−1,0	3,0	−14,5	−1,2	5,2	T min	−5,8	−10,2	−6,4	−2,5	−2,2	−1,4	
	3,3	1,2	5,5	−7,8	0,6	6,0	T gem	−3,0	−6,1	−4,2	−1,0	3,0	1,3	
	14,7	–	1,3	–	1,0	9,9	R (mm)	–	1,0	0,3	–	2,3	0,1	
1957	5,8	3,5	−0,2	7,6	11,7	8,3	T max	7,0	7,1	5,3	2,5	10,8	14,1	**1967**
	3,2	−0,2	−2,6	4,2	7,8	−1,0	T min	3,4	5,3	3,3	−4,2	1,8	5,5	
	4,0	0,6	−1,6	5,4	9,5	4,1	T gem	5,6	6,4	4,3	−1,4	6,2	8,9	
	3,4	2,4	–	11,7	–	0,1	R (mm)	1,8	–	–	–	–	–	
1958	5,8	3,5	−0,2	7,6	11,7	8,3	T max	−4,2	9,8	10,4	5,0	7,4	14,8	**1968**
	3,2	−0,2	−2,6	4,2	7,8	−1,0	T min	−16,8	−4,2	6,0	0,9	3,1	1,1	
	4,0	0,6	−1,6	5,4	9,5	4,1	T gem	−10,3	5,6	8,7	2,4	5,2	9,2	
	0,6	–	–	2,8	1,5	–	R (mm)	0,1	11,7	4,0	–	4,7	–	
1959	2,3	0,7	−0,4	−1,1	6,4	22,7	T max	10,0	8,8	5,7	−4,4	12,1	8,8	**1969**
	−2,6	−0,6	−3,5	−5,4	−1,9	10,2	T min	5,1	4,1	3,4	−16,4	5,1	1,8	
	−0,1	−0,2	−2,6	−3,4	2,2	16,7	T gem	7,7	5,8	4,4	−10,1	9,4	5,2	
	7,6	0,1	0,8	–	–	–	R (mm)	1,5	0,1	6,9	–	13,4	3,9	
1960	−3,9	−1,6	−2,1	3,8	17,0	13,1	T max	6,2	6,7	5,7	2,6	4,0	7,3	**1970**
	−8,5	−9,1	−8,6	−0,2	4,6	4,8	T min	1,4	2,2	2,3	−6,1	−2,4	0,2	
	−6,7	−3,8	−6,5	1,6	10,3	9,0	T gem	3,8	4,1	3,7	−2,4	0,6	4,7	
	0,1	0,9	1,3	0,3	–	0,9	R (mm)	0,6	–	1,3	–	–	0,8	

≫ 137. In de straten van Square City is éénrichtingsverkeer (zie de pijltjes op de plattegrond).

a. Hoeveel verschillende wandelroutes (zonder omwegen) zijn er van A naar B?

b. En hoeveel verschillende autoroutes?



≫ 138. Aan een diner nemen vijf echtparen deel. Er zijn tien uiterlijk gelijke briefjes gemaakt, waarvan iedereen er na afloop één krijgt. Op twee van de briefjes staat een kruis getekend. Wie zo'n briefje ontvangt moet afwassen.

a. Hoe groot is de kans dat twee heren moeten afwassen?

b. Hoe groot is de kans dat een man en een vrouw die afwas doen?

(Examen havo 1976)

≫ 139. In een doos zitten zes kaarten. Op elke kaart staat één letter gedrukt. Er zijn drie kaarten met de letter A, twee met de letter B en één met de letter C.
Iemand trekt aselect vier keer achtereen één kaart uit de doos en legt de kaarten in volgorde van trekking van links naar rechts vóór zich op tafel. Zo ontstaat een 'woord' van vier letters.

a. Hoe groot is de kans dat hij zo het woord ABBA krijgt?

b. Hoe groot is de kans op een woord dat op de letter C eindigt?

c. Hoe groot is de kans op een woord waarin drie A's voorkomen?

≫ 140. In een klas zitten 9 jongens en 12 meisjes.
Er wordt door loting een vertegenwoordiging van twee personen aangewezen om bij de conrector te pleiten voor meer uren wiskunde A.

a. Hoe groot is de kans dat dit twee jongens zijn?

b. En hoe groot is de kans dat minstens één van de twee een jongen is?

≫ 141. Op een Toto-formulier staan 12 voetbalwedstrijden.
Theet vult één rijtje volkomen willekeurig in.
Hoe groot is de kans dat hij geen enkele uitslag goed heeft?

≫ 142. Twee vrienden kiezen, onafhankelijk van elkaar, drie avonden van de week uit om (rond 9 uur) naar het dorpscafé te gaan.
Hoe groot is de kans dat ze elkaar op geen enkele avond in het café treffen?

≫ 143. Ajax-PEC, uitslag 7 - 3.
Een verslaggever die zijn aantekeningen is kwijtgeraakt moet het scoreverloop gokken. (Neem aan dat hij zich daarvan niets meer kan herinneren; een mogelijk scoreverloop is bijv. 1-0; 2-0; 3-0; 3-1; 3-2; 4-2; 5-2; 6-2; 6-3; 7-3).

a. Uit hoeveel verschillende mogelijkheden heeft hij de keus?

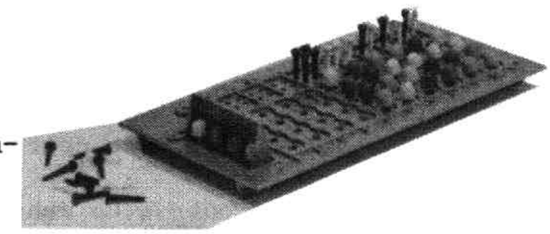
b. Later hoort hij van zijn vrouw de ruststand: 3-2.
Hoeveel verschillende scoreverlopen zijn er nu nog denkbaar?

c. Tenslotte schiet hem te binnen dat Ajax de gehele wedstrijd (d.w.z. vanaf het eerste doelpunt) heeft voorgestaan.
Hoe groot is de kans dat hij het scoreverloop goed gokt?

≫ 144. In een kiosk worden de vier bekende landelijke ochtendbladen verkocht. De gemiddelde verkoopcijfers van die kiosk zijn:

Telegraaf	40%
Volkskrant	30%
Algemeen Dagblad	20%
Trouw	10%

Vier mensen kopen (onafhankelijk van elkaar) een krant.
Hoe groot is de kans dat deze vier personen vier verschillende kranten kopen?



≫ 145. Bij het spel van Master Mind moet de ene speler de 'code' (aangegeven met vier gekleurde dopjes) van zijn tegenstander raden.

a. Volgens de spelregels zijn er in de standaarduitvoering van het spel 1296 permutaties (met herhalingen) mogelijk. Hoeveel kleuren zitten er in het spel?

b. Hoeveel permutaties zijn er mogelijk als geen herhalingen zijn toegestaan?

c. En hoeveel als van de vier plaatsen sommige (of alle) leeg mogen blijven en herhalingen zijn toegestaan?

≫ 146. Hoe groot is de kans dat in een willekeurige groep van vier mensen deze vier op verschillende data jarig zijn?

≫ 147. Iemand koopt tien loten bij een loterij bestaande uit 100 loten. Er worden twee prijzen uitgeloot. Hoeveel procent kans heeft hij op minstens één prijs?

≫ 148. Volgens de laatste opiniepeilingen is 60% van de New Yorkers voornemens om op de Democratische presidentskandidaat te stemmen en is 40% aanhanger van de Republikeinse partij. Een televisiemedewerker interviewt vijf willekeurige mensen op straat en vraagt op welke van de twee partijen zij willen stemmen. Hoe groot is de kans dat een meerderheid van de vijf voor de Democratische partij is?

Verkiezingspubliciteit uit 1888 *en 1976*

5

TABELLEN

1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1

71 08 73 19 01	84 69 70 20 24	46 51 46 05 57	53 52 53 68 76	11 71 92 70 88
23 06 60 38 85	70 24 60 04 24	27 33 26 23 53	60 86 10 61 66	56 94 20 20 09
35 51 67 74 11	11 53 51 43 59	62 34 22 73 87	19 73 83 19 59	23 37 19 91 78
50 87 96 18 11	59 44 77 84 26	49 39 69 19 14	09 19 24 86 14	42 47 91 47 85
46 53 63 70 04	92 44 87 65 75	59 46 67 41 81	01 19 58 30 70	48 96 62 77 03
52 17 65 68 35	90 11 61 34 03	50 07 43 63 66	85 89 17 49 21	03 80 49 32 11
13 17 79 34 88	09 32 22 54 43	04 84 31 67 62	38 28 23 89 77	55 48 79 01 81
30 63 23 43 97	16 29 68 85 32	08 93 42 71 01	89 91 98 35 34	40 52 37 50 36
90 48 28 56 25	34 11 76 84 57	27 06 56 19 77	28 70 33 58 85	43 79 34 99 08
28 24 82 60 11	18 58 60 48 91	70 04 17 32 86	51 50 11 85 16	32 10 18 11 19
60 52 97 34 95	91 69 39 78 50	15 92 48 75 74	42 55 36 77 40	57 00 79 82 57
36 16 86 65 94	53 39 28 75 56	87 91 05 96 54	30 38 05 58 58	13 95 67 75 20
28 05 55 18 18	62 71 06 66 61	50 48 26 48 73	08 17 10 22 87	82 20 99 29 37
70 70 06 17 49	02 18 03 87 75	59 22 00 37 31	71 34 24 46 07	59 21 39 23 82
60 54 49 26 78	41 82 36 02 53	98 25 69 17 35	79 62 76 72 57	28 94 44 01 96
60 82 80 90 80	76 11 53 73 63	11 16 16 25 50	12 66 32 48 79	88 95 73 18 02
18 65 18 08 04	41 64 03 15 11	42 69 10 49 87	10 73 20 78 85	23 63 03 60 03
11 62 45 19 73	10 98 35 27 05	69 64 46 09 17	48 65 90 69 06	96 94 61 79 33
67 30 77 17 27	56 87 05 59 98	88 18 29 04 01	37 69 75 89 92	60 81 54 79 08
98 79 01 64 99	11 22 59 44 64	94 65 08 29 83	09 95 91 51 87	42 37 90 21 96
69 41 43 07 09	90 83 15 99 76	64 19 58 18 29	78 31 18 29 28	27 53 03 01 11
63 00 41 33 41	70 62 02 53 97	74 74 56 18 41	23 54 15 00 41	13 52 10 05 79
60 77 80 63 59	19 29 31 79 32	50 87 00 54 21	28 14 46 16 01	46 35 72 70 26
61 59 26 74 67	90 57 35 65 37	01 38 59 61 19	39 07 99 92 33	92 95 89 58 60
57 31 93 88 25	03 52 17 02 95	24 81 48 27 78	96 20 75 35 09	68 62 22 32 47
74 98 95 29 12	85 97 61 69 93	09 82 26 13 42	52 73 04 31 63	46 92 03 79 01
97 24 21 50 96	87 60 38 50 34	84 32 50 28 98	10 56 02 64 80	62 14 81 00 75
35 42 23 37 95	29 44 12 18 46	29 54 75 88 12	95 46 71 59 53	79 74 93 04 64
69 54 02 03 18	87 20 87 81 22	18 06 35 43 47	57 15 58 25 37	01 71 44 47 31
70 72 82 11 02	71 62 69 48 12	42 34 44 04 47	45 53 23 81 94	24 72 11 27 30
06 80 28 74 34	28 74 89 96 70	88 50 53 37 47	07 82 94 91 48	60 20 70 77 62
55 25 35 31 20	85 33 12 98 54	16 52 30 49 46	45 25 39 85 58	16 81 38 55 65
75 84 49 68 92	40 04 01 60 37	09 71 72 68 41	25 48 84 02 84	28 22 91 38 85
30 32 25 43 56	44 57 07 20 14	85 68 94 97 95	17 28 08 80 78	88 46 20 67 34
90 80 43 96 71	40 85 60 98 23	14 65 56 11 84	56 37 23 92 97	68 19 17 72 26
40 45 12 40 04	41 88 05 50 74	77 31 71 13 82	00 00 99 56 85	15 16 81 96 11
05 79 17 74 54	90 98 14 14 86	57 48 41 62 26	40 16 20 58 85	08 89 91 38 44
27 74 32 46 77	98 80 20 51 54	89 88 26 60 93	29 00 60 27 49	59 32 55 80 57
63 27 58 72 29	08 71 51 57 56	89 14 31 34 75	79 12 62 39 63	79 85 26 23 74
08 63 26 37 20	30 02 09 07 01	04 47 35 03 41	66 03 05 24 42	16 99 54 76 00
11 33 41 02 13	24 99 33 79 10	76 65 67 70 84	96 25 73 66 47	14 20 37 99 81
63 52 12 08 94	54 21 70 18 62	09 49 75 55 67	56 47 73 82 82	99 98 06 73 31
45 64 21 23 97	59 50 55 84 76	18 90 99 35 65	55 84 17 56 69	26 66 83 12 92
85 61 36 06 03	91 25 59 60 66	80 05 46 61 80	88 55 38 93 03	56 98 30 16 45
88 53 73 18 36	19 55 85 44 95	42 91 83 27 21	79 08 59 64 32	93 19 15 69 80
52 07 70 78 05	54 29 63 70 11	26 52 08 54 70	91 69 64 46 13	53 45 45 66 09
32 71 95 46 67	82 47 10 37 78	67 42 55 17 62	51 75 70 78 23	89 63 62 04 76
78 10 94 24 70	08 99 63 35 71	24 10 13 75 71	72 00 85 40 94	56 09 04 00 72
48 18 80 06 86	02 31 55 48 13	90 11 74 23 97	05 41 84 86 11	70 81 34 82 75
33 30 08 11 95	79 64 32 36 79	09 59 49 99 60	87 34 37 69 17	01 87 76 13 22

36	06	46	13	25	09	48	47	41	91	67	84	19	55	21	50	91	77	92	73	88	72	39	04	12
07	25	44	57	45	93	84	57	29	55	15	26	69	92	45	58	35	75	23	89	75	12	47	61	54
02	33	89	14	71	52	02	72	25	35	37	87	44	05	16	12	44	49	48	66	11	92	85	53	37
51	87	11	59	95	20	22	19	05	86	83	24	04	61	26	98	22	47	90	97	87	69	50	48	09
89	72	70	32	02	04	75	48	97	75	40	01	83	62	31	07	88	73	17	20	96	70	57	98	53
94	67	32	91	07	71	49	59	59	91	47	87	85	95	53	46	07	76	82	59	36	54	27	42	77
40	20	54	27	91	89	00	67	90	84	38	00	98	13	70	19	92	81	24	17	71	34	00	88	53
94	52	73	33	96	41	96	69	66	75	56	39	87	31	16	97	48	97	77	46	20	72	59	95	56
86	07	79	95	74	82	02	57	50	23	19	74	72	98	77	17	76	89	99	03	22	32	05	76	83
22	17	48	61	18	01	25	82	30	42	76	06	24	63	95	90	52	87	51	78	00	39	80	65	49
23	17	23	20	75	87	18	04	28	99	21	80	69	36	04	34	70	20	77	76	18	30	97	48	62
24	27	10	67	76	39	87	93	02	76	56	57	64	66	20	15	71	48	22	11	25	06	98	68	69
35	38	80	01	79	44	29	85	66	28	77	39	38	88	10	27	29	86	32	44	71	65	98	92	32
22	63	70	64	07	21	26	88	40	28	98	63	35	73	42	60	49	50	18	91	38	36	27	02	93
04	43	05	32	11	94	39	12	37	38	87	21	17	35	09	98	60	40	65	18	12	50	25	99	16
06	63	30	04	99	83	20	18	44	79	66	41	94	44	93	48	29	35	28	82	49	94	22	01	50
28	28	40	79	08	21	86	42	98	35	05	94	38	66	41	98	37	04	87	99	42	22	62	29	47
30	05	78	69	83	43	68	37	15	73	36	57	33	23	96	43	21	68	17	76	81	18	85	25	94
54	83	43	03	57	78	78	17	89	41	06	99	65	47	75	63	92	29	26	09	11	85	81	53	65
41	61	55	84	94	75	19	63	23	60	06	44	29	77	02	79	41	69	93	61	96	53	45	98	39
06	01	22	15	95	22	23	83	26	29	39	95	50	23	53	87	00	55	83	49	24	76	90	24	80
20	56	94	22	81	07	86	11	61	30	81	70	61	89	74	83	56	28	71	58	81	18	45	40	94
79	51	06	83	63	01	03	56	59	04	26	05	83	06	01	16	51	72	44	99	98	41	73	86	43
69	58	97	33	79	22	16	00	65	91	12	92	55	89	73	19	07	06	41	38	34	73	12	43	45
04	50	94	95	99	48	14	54	12	97	49	86	70	98	56	06	93	58	74	94	55	92	16	91	54
39	93	94	40	33	81	09	23	42	98	56	50	79	19	25	23	07	84	81	05	56	68	68	57	69
17	79	56	31	98	27	97	82	33	62	61	52	59	10	26	70	98	60	39	42	90	75	46	94	86
80	54	04	48	41	05	79	16	40	07	17	26	94	82	80	68	08	09	64	53	37	58	99	36	10
79	86	00	59	48	35	04	48	39	46	04	71	43	88	01	10	41	56	45	66	43	00	83	69	67
14	72	30	79	13	95	96	59	31	70	82	43	92	35	11	16	85	17	53	73	54	82	35	65	82
28	45	78	47	60	52	78	55	17	11	83	93	55	20	47	28	22	38	32	06	44	39	10	13	49
42	70	25	26	46	83	22	00	23	87	97	32	26	12	70	55	15	62	88	31	89	23	84	59	38
11	84	85	18	88	73	20	07	72	47	66	44	92	10	27	29	17	13	12	33	27	85	59	31	76
26	59	28	19	74	29	90	19	71	19	68	14	07	13	36	01	31	68	09	28	98	60	59	30	31
42	33	03	34	94	42	79	42	13	28	31	77	52	02	05	94	78	45	93	07	65	56	49	47	64
03	83	10	84	20	23	08	20	55	02	87	00	35	28	30	35	16	81	40	12	95	83	80	52	81
02	73	79	02	38	74	75	56	37	47	89	79	16	81	66	75	83	90	36	61	18	45	61	80	48
63	90	04	21	64	59	23	19	69	88	46	31	26	75	55	87	41	93	10	64	90	06	27	26	38
19	74	52	13	57	00	54	60	02	12	63	02	32	30	27	72	98	93	55	13	62	98	93	54	79
15	18	14	82	28	21	77	74	95	64	63	45	16	53	70	68	77	68	19	13	96	91	42	32	97
03	66	02	96	69	92	73	90	78	64	29	95	05	30	38	10	78	48	69	44	01	74	96	98	45
34	18	99	00	10	38	21	44	18	01	88	22	54	59	36	12	99	85	93	51	73	06	46	92	32
88	58	63	52	43	58	32	01	29	25	74	39	96	20	36	64	75	40	85	26	24	04	67	34	33
56	58	69	07	85	85	06	75	95	54	87	11	73	21	18	58	04	97	21	86	75	29	21	16	06
64	81	69	43	66	28	72	33	17	85	44	99	88	90	86	87	48	59	72	99	80	83	81	31	54
90	38	91	52	74	41	90	46	38	82	05	56	03	19	28	84	81	18	28	73	94	77	76	21	89
28	49	79	39	95	30	43	23	12	16	55	99	69	63	48	40	02	15	15	24	84	49	29	40	39
50	87	17	56	96	34	07	37	63	91	41	65	91	70	82	78	29	40	71	59	47	97	64	69	58
35	65	04	30	42	82	42	37	71	93	01	43	95	08	01	48	00	55	88	43	47	12	01	57	23
27	01	05	53	39	60	93	79	14	62	84	06	26	57	43	76	12	15	08	53	67	00	95	81	33

k \ n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
2		6	10	15	21	28	36	45	55	66	78
3				20	35	56	84	120	165	220	286
4						70	126	210	330	495	715
5								252	462	792	1287
6										924	1716

k \ n	14	15	16	17	18	19	20
1	14	15	16	17	18	19	20
2	91	105	120	136	153	171	190
3	364	455	560	680	816	969	1140
4	1001	1365	1820	2380	3060	3876	4845
5	2002	3003	4368	6188	8568	11628	15504
6	3003	5005	8008	12376	18564	27132	38760
7	3432	6435	11440	19448	31824	50388	77520
8			12870	24310	43758	75582	125970
9					48620	92378	167960
10							184756

k \ n	21	22	23	24	25
1	21	22	23	24	25
2	210	231	253	276	300
3	1330	1540	1771	2024	2300
4	5985	7315	8855	10626	12650
5	20349	26334	33649	42504	53130
6	54264	74613	100947	134596	177100
7	116280	170544	245157	346104	480700
8	203490	319770	490314	735471	1081575
9	293930	497420	817190	1307504	2042975
10	352716	646646	1144066	1961256	3268760
11		705432	1352078	2496144	4457400
12				2704156	5200300