# Kansverdelingen

# KANSVERDELINGEN

# KANSVERDELINGEN

OW&OC

Tiberdreef 4 - 3561 GG Utrecht

KANSVERDELINGEN

Een produktie ten behoeve van de experimenten in het kader van de Herverkaveling Eindexamenprogramma's Wiskunde I en II V.W.O.

Samenstelling: Martin Kindt
Jan de Lange Jzn

Vormgeving: Ellen Hanepen



Utrecht, april 1983.

INHOUDSOPGAVE

# 1

STOCHASTEN

In opdracht van een fabrikant van sportschoenen verzamel je gegevens over schoenmaten.

≫ 1. a. Noteer de schoenmaten van de leerlingen in je klas (Nederlandse maten, gehele getallen) en schrijf bij elk getal of het een jongen of een meisje betreft.

b. Maak een histogram van de verdeling van de diverse schoenmaten voor de jongens, voor de meisjes en voor de hele klas.

≫ 2. a. Je hebt nu een *steekproef* genomen uit de *populatie* van alle potentiële kopers van sportschoenen.
Kan de sportschoenenfabrikant "uit de voeten" met de gegevens van deze steekproef? Waarom?

b. Is deze steekproef representatief voor alle Nederlanders in jouw leeftijdsklasse?

≫ 3. In een andere 5 VWO-klas, met ongeveer dezelfde verhouding van aantallen jongens en meisjes, wordt door loting een leerling aangewezen.

a. Hoe groot schat je de kans dat zijn (haar) schoenmaat kleiner dan 41 is?

b. De leerling die door het lot is aangewezen is een meisje.
Hoe groot schat je nu de kans op een schoenmaat kleiner dan 41?

Het door loting aanwijzen van een persoon is een toevalsexperiment. De schoenmaat van de 'toevallige' persoon is van te voren natuurlijk niet te voorspellen en zal bij herhaling van het experiment variëren. Vandaar dat *de schoenmaat* (van een toevallige persoon) een *toevalsvariabele* *) of *stochastische variabele* wordt genoemd.
Het woord 'stochastisch' stamt uit het Grieks van στοχαζομαι (= gissen, raden).
De term stochastische variabele wordt in dit boek afgekort tot *stochast*.
Bij een experiment waarin op aselecte wijze een persoon wordt gekozen kun je nog allerlei andere stochasten bedenken:

- het geslacht (van de 'toevallige' persoon);
- de leeftijd;
- de lichaamslengte;
- het bruto jaarinkomen (van het afgelopen jaar);

enz.

≫ 4. Ook bij andere toevalsexperimenten kun je stochasten bedenken, bijv.:

Experiment: je belt inlichtingen (008).
Stochast: het aantal 'wachtenden-vóór-u'.

Bedenk een stochast bij elk van de volgende experimenten:

a. Je koopt een gloeilamp van 60 W.

b. Je speelt mee in de Lotto.

c. Je bezoekt de Tweede Kamer (op een 'willekeurige' door-de-weekse-dag).

d. Je tosst drie keer met een kwartje.

-------

*) Andere veel gebruikte termen zijn nog: toevalsgrootheid of stochastische grootheid.

Hoewel de uitkomst van een stochast niet van te voren voorspelbaar is maar van het toeval afhangt, kun je in veel gevallen wel iets zeggen over de kans op een bepaalde uitkomst.

≫ 5. Van honderd 18-jarige Australische vrouwen is de lengte gemeten.

Het resultaat is verwerkt in een frequentietabel en een histogram.

Neem aan dat de verdeling aardig representatief is voor de totale populatie Australische vrouwen van 18 jaar.

a. Er wordt aselect een 18-jarig Australische gekozen uit de gehele bevolking.
Hoe groot is de kans dat zij langer is dan 165 cm?

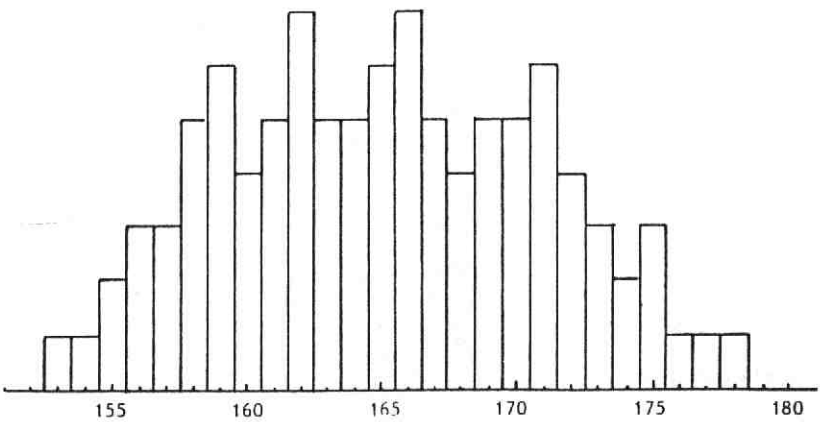
Het resultaat van a) kun je kort zó opschrijven:

$P(L > 165) = .....$

De stochast 'lichaamslengte' wordt hier afgekort met de hoofdletter $L$.

b. Bereken nu: $P(161 \leq L \leq 170)$.

| lengte | frequentie |
|---|---|
| 151 | 0 |
| 152 | 0 |
| 153 | 1 |
| 154 | 1 |
| 155 | 2 |
| 156 | 3 |
| 157 | 3 |
| 158 | 5 |
| 159 | 6 |
| 160 | 4 |
| 161 | 5 |
| 162 | 7 |
| 163 | 5 |
| 164 | 5 |
| 165 | 6 |
| 166 | 7 |
| 167 | 5 |
| 168 | 4 |
| 169 | 5 |
| 170 | 5 |
| 171 | 6 |
| 172 | 4 |
| 173 | 3 |
| 174 | 2 |
| 175 | 3 |
| 176 | 1 |
| 177 | 1 |
| 178 | 1 |
| 179 | 0 |
| 180 | 0 |




c. Het bovenstaande histogram is gebaseerd op een steekproef van 100 vrouwen.
Hoe zal het histogram eruit zien als de steekproef veel groter is, bijv. 1000 vrouwen?

Terug naar opgave ≫ 3.

De stochast 'schoenmaat' korten we af met: $S$.

In opgave ≫ 3a heb je een schatting gemaakt voor $P(S < 41)$ op basis van de gegevens in jouw klas.

Gebruiken we voor de stochast 'geslacht' de aanduiding $G$ (met 'waarden' ♀ en ♂), dan kan de kans van opgave ≫ 3b zó worden genoteerd:

$$P(S < 41 | G = ♀)$$

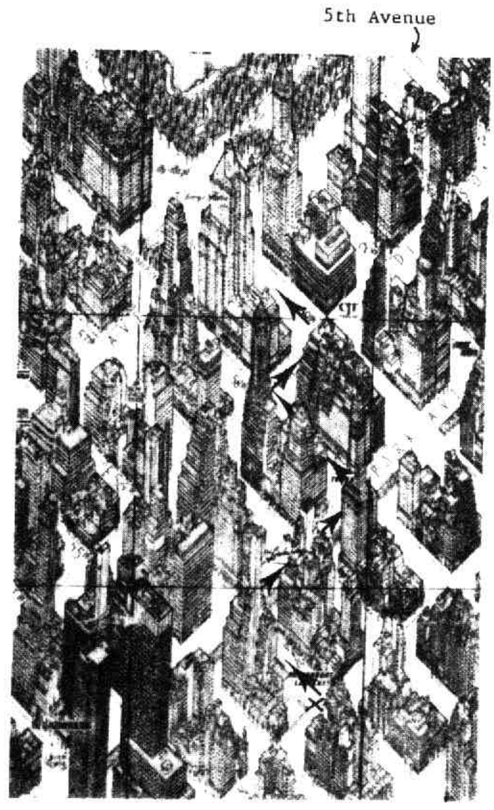
Spreek uit: de kans op '$S < 41$' onder de voorwaarde '$G = ♀$'.

≫ 6. Bereken (op basis van de gegevens in jouw klas) de volgende *voorwaardelijke kansen*:

a. $P(S \geqq 42 | G = ♂)$

b. $P(S \geqq 42 | G = ♀)$

c. $P(G = ♀ | S < 41)$

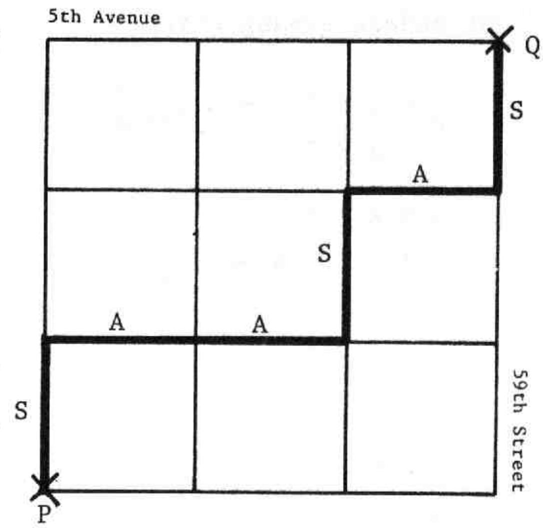



Randy Walker maakt dagelijks een wandeling in New York. Hij vertrekt van een punt in de 56th Street (P). Het eindpunt (Q) van zijn wandeling bevindt zich in de 5th Avenue en de 59th Street.

Op de plattegrond (zie pag. 5) zie je een mogelijke route. Die kun je noteren als: SAASAS.

≫ 7. Er zijn $\binom{6}{3}$, dus 20 routes van P naar Q zonder omwegen. Hoe kun je dat beredeneren?

Randy kiest elke dag een van de twintig routes. Die keus laat hij bepalen door het toeval.
Hij heeft een vaas met lootjes, genummerd van 1 t/m 6; hieruit kiest hij aselect drie nummers (zonder teruglegging). Heeft hij nu bijv. de nummers 1, 4 en 6 getrokken, dan kiest hij voor de route die je hiernaast getekend ziet en waarbij de 1e, de 4e en de 6e 'etappe' langs een Street voeren.




In de route op het kaartje is hij vier keer afgeslagen.
Het aantal keren dat Randy afslaat (van richting wisselt) is een stochast $W$.

≫ 8. a. Ga na dat $W$ de waarden 1, 2, 3, 4, 5 en geen andere kan aannemen.
We zeggen: het *bereik* van $W = \{1,2,3,4,5\}$.

b. Beredeneer (aan de hand van de plattegrond) dat de kans op '$W = 1$' gelijk is aan $\frac{1}{10}$.

Door bijvoorbeeld alle wegen van P naar Q op te schrijven, kun je de complete *kansverdeling* van $W$ vinden.

| ROUTE | $W$ | ROUTE | $W$ |
|---|---|---|---|
| S S S A A A | 1 | A A A S S S | 1 |
| S S A S A A | 3 | A A S A S S | 3 |
| S S A A S A | 3 | A A S S A S | 3 |
| S S A A A S | 2 | A A S S S A | 2 |
| S A S S A A | 3 | A S A A S S | 3 |
| S A S A S A | 5 | A S A S A S | 5 |
| S A S A A S | 4 | A S A S S A | 4 |
| S A A S S A | 3 | A S S A A S | 3 |
| S A A S A S | 4 | A S S A S A | 4 |
| S A A A S S | 2 | A S S S A A | 2 |

Of anders gerangschikt:

S S S A A A
A A A S S S
→ $W = 1$

S S A A A S
A A S S S A
S A A A S S
A S S S A A
→ $W = 2$

S S A S A A
A A S A S S
S S A A S A
A A S S A S
S A S S A A
A S A A S S
S A A S S A
A S S A A S
→ $W = 3$

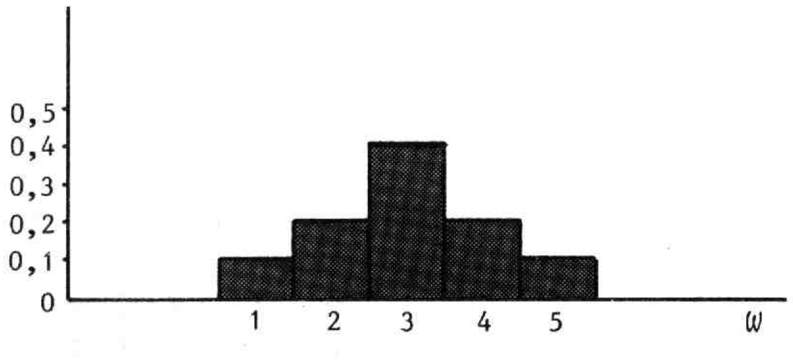
S A S A A S
A S A S S A
S A A S A S
A S S A S A
→ $W = 4$

S A S A S A
A S A S A S
→ $W = 5$

De kansverdeling van $W$ is dan:

$$
\begin{aligned}
P(W = 1) &= 0{,}1\\
P(W = 2) &= 0{,}2\\
P(W = 3) &= 0{,}4\\
P(W = 4) &= 0{,}2\\
P(W = 5) &= \underline{0{,}1}\ +\\
&\quad\ 1
\end{aligned}
$$

Van zo'n kansverdeling wordt vaak een *kanshistogram* gemaakt.

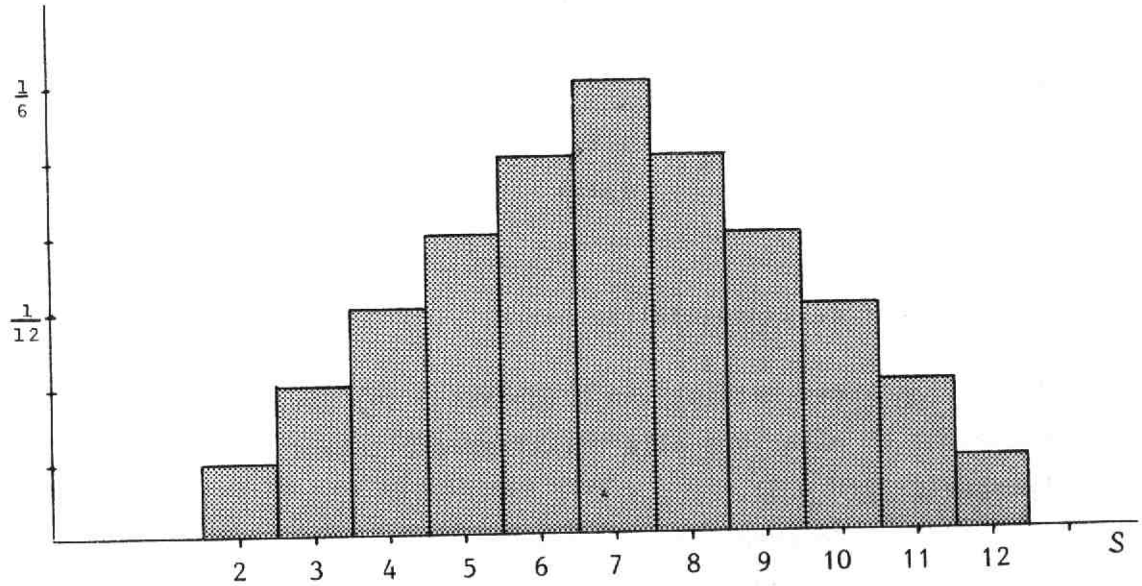


≫ 9. Je tosst drie keer met een kwartje.
Het aantal keren dat 'kop' bovenkomt is een stochast $X$.
Geef de kansverdeling van $X$ ( dus: $P(X = 0)$, $P(X = 1)$, enz) en teken het bijbehorende kanshistogram.

≫ 10. Dezelfde opdracht van het geval dat $X$ het aantal keer kop bij vier keer tossen is.

≫ 11. Neem in het verhaal van Randy Walker het eindpunt Q in de 5th Avenue en de 58th Street. Een route van Randy is nu bijv. ASSAS. De stochast $W$ is weer het aantal keren dat Randy van richting wisselt. Geef de kansverdeling van $W$ en teken het bijbehorend kanshistogram.

≫ 12. Toevalsexperiment: het werpen met twee dobbelstenen.
Toevalsvariabele: de som van de aantallen ogen ($S$).




a. Verifieer dit kanshistogram.

b. Bereken $P(S \geq 8)$. Weet je een 'snelle' manier?

c. Wat is het grootste getal k waarvoor geldt dat $P(S \leq k)$ minder dan 10% is?

≫ 13. Bij de Lottotrekking worden zeven nummers uit de nummers 1 tot en met 41 getrokken. Het hoogste nummer dat getrokken wordt is een stochast $M$.

a. Wat is het bereik van $M$?

b. $P(M = 41) = \frac{7}{41}$. Hoe kun je dat beredeneren?

≫ 14. Het berekenen van de complete kansverdeling van $M$ (opgave ≫ 13) is nogal bewerkelijk en lastig. Daarom vereenvoudigen we het probleem tot het trekken van drie nummers uit $\{1,2,3,4,5,6\}$.

a. Hoeveel verschillende trekkingsresultaten zijn er mogelijk bij deze 'mini-Lotto'? (Evenals bij de echte Lotto is de volgorde waarin de nummers worden getrokken, onbelangrijk).

b. Maak een lijst van alle mogelijke trekkingsresultaten en vermeld de bijbehorende waarde van $M$.

| *Trekkings-resultaat* | $M$ |
|---|---|
| 1,2,3 | 3 |
| 1,2,4 | 4 |
| ..... | ... |

c. Geef de kansverdeling van $M$.

Je hebt de kansverdeling van $M$ (opgave ≫ 14) gevonden door een compleet overzicht te maken van alle trekkingsresultaten. Het kan ook anders. Voorbeeld: $P(M = 5)$.

- Je trekt drie nummers uit zes.
  Het aantal mogelijkheden is $\binom{6}{3}$.
- Voor een resultaat met $M = 5$ moeten er, behalve het nummer 5, *twee* nummers getrokken worden uit $\{1,2,3,4\}$.
  Het aantal mogelijkheden is $\binom{4}{2}$.

Conclusie: $P(M = 5) = \dfrac{\binom{4}{2}}{\binom{6}{3}} = \dfrac{6}{20}$ .

≫ 15. Bereken op deze wijze ook de andere kansen van de verdeling van $M$.

≫ 16. Terug naar de echte Lotto.

Hiernaast zie je een lijst van 50 trekkingsresultaten, verkregen in 1978.

a. Maak op grond van deze steekproef een schatting van $P(M \geqq 38)$.

b. Met de methode van opgave ≫ 14 kun je $P(M \geqq 38)$ exact berekenen!

Aanwijzing:

$P(M \geqq 38)$ is de som van de kansen $P(M = 38)$, $P(M = 39)$, $P(M = 40)$ en $P(M = 41)$!

Bereken nu $P(M \geqq 38)$ en vergelijk het resultaat met wat je vond in a).

≫ 17. Laat $K$ het kleinste getrokken nummer in de Lotto zijn.

a. Bereken $P(K \leqq 4)$.

b. Bereken: $P(M \geqq 40 | K = 10)$.

c. Kun je die kans goed schatten m.b.v. de tabel?

Bij de trekking van de Lotto hebben we te maken met zeven stochasten: het laagste getrokken nummer, het op een na laagste nummer, enz.

Die stochasten geven we aan met: $X_1, X_2 \ldots, X_7$.

Merk op: $X_1 = K$ en $X_2 = M$.

≫ 18. Bereken: $P(X_4 = 21)$.

LOTTO GETALLEN 1978

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 11 | 15 | 21 | 23 | 38 | 39 |
| 10 | 26 | 29 | 30 | 35 | 36 | 40 |
| 2 | 21 | 22 | 23 | 30 | 32 | 39 |
| 2 | 20 | 22 | 25 | 27 | 37 | 41 |
| 4 | 7 | 8 | 12 | 28 | 37 | 39 |
| 15 | 16 | 21 | 25 | 28 | 38 | 41 |
| 3 | 8 | 13 | 14 | 23 | 27 | 28 |
| 1 | 11 | 12 | 15 | 29 | 34 | 37 |
| 1 | 10 | 17 | 24 | 30 | 34 | 37 |
| 2 | 9 | 21 | 22 | 30 | 32 | 36 |
| 2 | 22 | 23 | 32 | 33 | 34 | 37 |
| 8 | 9 | 10 | 12 | 14 | 17 | 38 |
| 7 | 10 | 13 | 18 | 23 | 24 | 39 |
| 3 | 15 | 18 | 32 | 37 | 39 | 41 |
| 6 | 7 | 9 | 18 | 23 | 30 | 35 |
| 6 | 9 | 11 | 13 | 22 | 26 | 31 |
| 2 | 5 | 14 | 20 | 22 | 33 | 38 |
| 3 | 5 | 6 | 7 | 16 | 21 | 25 |
| 1 | 13 | 14 | 20 | 24 | 28 | 29 |
| 1 | 21 | 23 | 25 | 32 | 33 | 36 |
| 3 | 7 | 8 | 14 | 18 | 32 | 38 |
| 8 | 19 | 20 | 21 | 31 | 33 | 38 |
| 5 | 9 | 12 | 13 | 28 | 32 | 38 |
| 2 | 9 | 19 | 25 | 32 | 36 | 38 |
| 5 | 16 | 18 | 24 | 28 | 32 | 40 |
| 4 | 10 | 12 | 20 | 21 | 22 | 27 |
| 5 | 26 | 30 | 32 | 35 | 38 | 39 |
| 3 | 5 | 7 | 8 | 17 | 27 | 36 |
| 10 | 11 | 18 | 24 | 26 | 30 | 39 |
| 2 | 22 | 25 | 32 | 34 | 38 | 41 |
| 4 | 10 | 14 | 16 | 23 | 29 | 33 |
| 3 | 12 | 13 | 16 | 25 | 29 | 33 |
| 2 | 6 | 7 | 13 | 26 | 30 | 39 |
| 1 | 4 | 14 | 19 | 27 | 32 | 39 |
| 1 | 12 | 13 | 18 | 23 | 29 | 40 |
| 1 | 5 | 6 | 20 | 22 | 26 | 41 |
| 17 | 20 | 23 | 25 | 28 | 36 | 37 |
| 6 | 8 | 14 | 17 | 23 | 34 | 38 |
| 1 | 2 | 3 | 18 | 19 | 28 | 32 |
| 2 | 6 | 24 | 26 | 27 | 30 | 35 |
| 9 | 11 | 14 | 22 | 23 | 36 | 38 |
| 5 | 6 | 10 | 14 | 20 | 21 | 34 |
| 4 | 18 | 21 | 22 | 23 | 24 | 26 |
| 2 | 10 | 26 | 31 | 33 | 38 | 39 |
| 6 | 13 | 14 | 18 | 20 | 23 | 25 |
| 3 | 9 | 16 | 27 | 28 | 39 | 41 |
| 3 | 5 | 15 | 23 | 26 | 28 | 34 |
| 10 | 13 | 16 | 22 | 35 | 36 | 37 |
| 4 | 5 | 23 | 28 | 33 | 36 | 40 |
| 2 | 8 | 20 | 22 | 25 | 33 | 35 |

≫ 19. Soms komt het voor dat twee (of meer) nummers van het Lotto-rijtje zogenaamde buurgetallen zijn (zoals 10 en 11 in het eerste rijtje van 1978).
Is dat een bijzondere gebeurtenis?
Hoe groot schat je (op basis van de resultaten van 1978) de kans hierop?

*TOEGIFT*

De kans op twee buurgetallen in de Lotto blijkt verrassend groot te zijn. Het exact berekenen van die kans is vrij lastig. We passen de volgende truc toe.
Stel je voor dat de zeven balletjes die uit het Lotto-apparaat rollen plotseling rood worden.
Een trekkingsresultaat komt nu overeen met een ketting van 34 witte balletjes (die niet getrokken zijn) en 7 rode balletjes, waarbij elk balletje op de plaats ligt die met zijn nummer overeenkomt.
Bij de eerste trekking van 1978 hoort deze ketting:

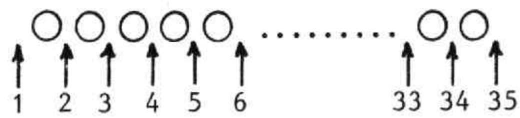
En bij de vierde trekking:

≫ 20. Hoe kun je aan zo'n ketting zien wanneer er wèl en wanneer er geen buurgetallen zijn?

Het is eenvoudiger om eerst de kans te berekenen op een Lotto-resultaat waarbij géén buurgetallen optreden (de zogenaamde *complementaire* kans).
Er geldt:
bij een resultaat zonder buurgetallen, ligt elk rood balletje

òf tussen twee witte balletjes,
òf aan de kop van de ketting,
òf aan de staart van de ketting.

In totaal zijn er voor zo'n resultaat 35 'geschikte' plaatsen voor de rode balletjes.




≫ 21. Hoeveel verschillende kettingen kun je maken waarbij geen twee rode balletjes naast elkaar liggen?

≫ 22. Laat zien dat de kans dat er géén buurgetallen zijn in de Lotto ongeveer gelijk is aan 30%.

Conclusie: de kans op twee buurgetallen in de Lotto is ongeveer 70%; de resultaten van 1978 (34 van de 50) zijn daar goed mee in overeenstemming!

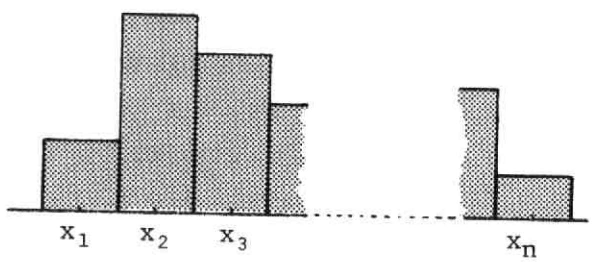
## SAMENVATTING HOOFDSTUK 1

Als bij een toevalsexperiment aan de uitkomsten bepaalde waarden (reële getallen) worden toegekend, spreekt men van een *toevalsvariabele* of *stochast*.

Laat $X$ een stochast zijn met *bereik* $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.
De complete lijst kansen:

$$P(X = x_1),\ P(X = x_2),\ \ldots,\ P(X = x_n)$$

geeft de *kansverdeling* van $X$.
Zo'n kansverdeling kan m.b.v. een *kanshistogram* worden geïllustreerd.




Merk op: $P(X_1 = x\ ) + \ldots + P(X = x_n) = 1$.

# 2

## VERWACHTINGSWAARDE

≫ 23. In het land Randomië heeft de minister van Financiën de volgende eenvoudige verzekeringsvorm bedacht. Iedere twintigjarige Randomiër betaalt een (kleine) premie; overlijdt de betrokkene binnen een jaar, dan krijgt een door hem (haar) aangewezen bloedverwant 1000 florijnen uitgekeerd.

a. Uit sterftetafels blijkt dat de kans voor een twintigjarige om binnen een jaar te overlijden ongeveer gelijk is aan 0,0024. Stel nu dat er 100.000 twintigjarige Randomiërs zijn. Welk bedrag moet èlk aan premie betalen, wil de Staat er niet bij inboeten?

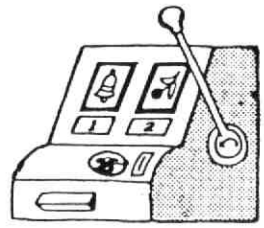
b. Hoe groot is dit bedrag als er 200.000 twintigjarigen in Randomië zijn? En als dit aantal n is?

c. De minister, ook niet gek, stelt de premie vast op vijf florijnen. De winst van de Staat hangt af van het aantal twintigjarigen. Hoe?

≫ 24. De verplichte verzekering in Randomië stuit op weinig weerstand bij de bevolking. De regering besluit daarom de uitkeringsperiode met één jaar te verlengen; tegen een verhoging van de premie uiteraard. De uitkering van fl. 1.000,- bij overlijden tussen het 20e en 21e jaar blijft gehandhaafd, maar bij overlijden in het tweede jaar na het bereiken van de twintigjarige leeftijd wordt door de Staat fl. 500,-- uitgekeerd. De kans dat een eenentwintigjarige Randomiër binnen een jaar overlijdt is 0,0026. De premie wordt vastgesteld op fl. 7,50. Maakt de Staat nu gemiddeld meer of minder winst in vergelijking tot de vorige situatie? (Opgave ≫ 23).

≫ 25. Een fruitautomaat ('one arm bandit').

De plaatjes die met een kans van resp. $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ en $\frac{1}{6}$ voor de vensters kunnen verschijnen zijn:
, en .
De machine keert de speler *f* 0,25 uit bij ,
*f* 0,50 bij en *f* 1,00 bij .
Hoe groot zal de inzet minstens moeten zijn wil de exploitant geen verlies lijden?



Kijk nog even terug naar de opgaven ≫ 23, ≫ 24 en ≫ 25.

In opgave ≫ 23 is de totale uitkering die de Staat kan verwachten bij een beginpopulatie van n personen, gelijk aan:

$$(n \cdot 0{,}0024) \cdot 1000$$

De grootte van de premie is gebaseerd op de *gemiddelde uitkering per persoon* die de Staat kan verwachten en dat is:

$$\frac{(n \cdot 0{,}0024) \cdot 1000}{n} = 2{,}40.$$

Dit resultaat vind je direct als je de *kans op uitkering* (= 0,0024) vermenigvuldigt met het *bedrag van de uitkering* (= 1000).

In opgave ≫ 24 is de gemiddelde uitkering per persoon die de Staat kan verwachten:

$$\frac{(n \cdot 0{,}0024) \cdot 1000 + (n \cdot 0{,}0026) \cdot 500}{n} = 2{,}40 + 1{,}30 = 3{,}70$$

Of 'direct':

$$\underbrace{0{,}0024}_{\text{kans op uitkering van fl. 1000.}} \cdot 1000 + \underbrace{0{,}0026}_{\text{kans op uitkering van fl. 500.}} \cdot 500 = 3{,}70$$

*Opmerking:* De kans op fl. 500,-- is eigenlijk 0,9976 · 0,0026, maar dit is bij benadering weer gelijk aan 0,0026.

*Een gelukkig tafereeltje in Reno (V.S.) waar, boven verwachting, op 4 september 1974 een bedrag van 65093 dollar door de 'one arm bandit' werd uitgekeerd.*

≫ 26. Hoe kun je in het geval van de fruitautomaat, de gemiddelde uitkering per persoon die de exploitant kan verwachten, 'direct' uitrekenen?

≫ 27. Bij een loterij is de hoofdprijs een sportfiets van ƒ 800,--. De tweede prijs is een platenspeler ter waarde van ƒ 300,-- en verder worden er troostprijzen uitgeloot in de vorm van een boekenbon (waarde ƒ 20,--).
De kans op de hoofdprijs is 0,001, op een tweede prijs 0,005 en op een troostprijs 0,01.
Wat moet een lot kosten wil de organisator geen verlies lijden?

In plaats van 'gemiddelde uitkering per persoon die kan worden verwacht' spreken we kortweg over *verwachtingswaarde*.

We schrijven dit allemaal nog eens 'netjes' op.
De uitkering die wordt uitbetaald aan de verzekerden is een stochast $U$, die drie waarden kan hebben: 1000, 500 en 0.

De kansverdeling van $U$ is:

$$P(U = 1000) = 0{,}0024$$
$$P(U = 500) = 0{,}0026$$
$$P(U = 0) = 0{,}9950$$

De verwachtingswaarde van $U$ is 3,70.
Korte notatie: $E(U) = 3{,}70$.
E is afkomstig van het Latijnse woord Expectatio (= verwachting).
Er geldt: $E(U) = 1000 \cdot P(U = 1000) + 500 \cdot P(U = 500) + 0 \cdot P(U = 0)$

In het voorbeeld van de fruitautomaat stellen we de uitkering (in centen) voor door $F$.
De kansverdeling voor $F$ is:

$$P(F = 100) = \tfrac{1}{36}$$
$$P(F = 50) = \tfrac{1}{9}$$
$$P(F = 25) = \tfrac{1}{4}$$
$$P(F = 0) = \tfrac{22}{36}$$

Voor de verwachtingswaarde van $F$ geldt:

$$E(F) = 100 \cdot P(F = 100) + 50 \cdot P(F = 50) + 25 \cdot P(F = 25) + 0 \cdot P(F = 0)$$

Ofwel: $E(F) = 14{,}6$.

*In het algemeen:*

> De verwachtingswaarde van een stochast vind je als volgt:
> - vermenigvuldig elke waarde van de stochast met de bijbehorende kans;
> - tel alle zo verkregen produkten op.

Je kunt ook zeggen: de verwachtingswaarde is een *gewogen gemiddelde* van de waarden die de stochast kan aannemen.
De 'weegfactoren' zijn de kansen op die waarden.

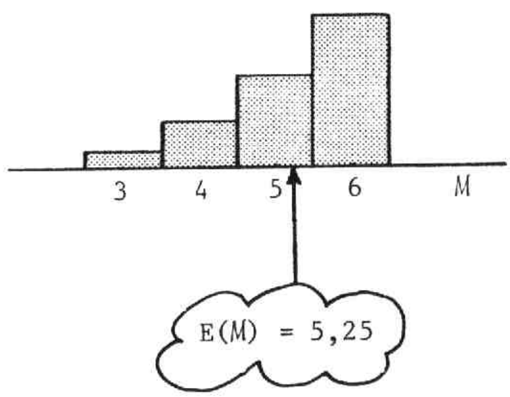
≫ 28. De winst (in centen) die de exploitant van de fruitautomaat per spel boekt, is ook een stochast die we $W$ noemen.
Stel dat de inzet per spel een kwartje is.
De kansverdeling van $W$ is dan:

| $k$ | 75 | 50 | 0 | -25 |
|---|---|---|---|---|
| $P(W=k)$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{22}{36}$ |

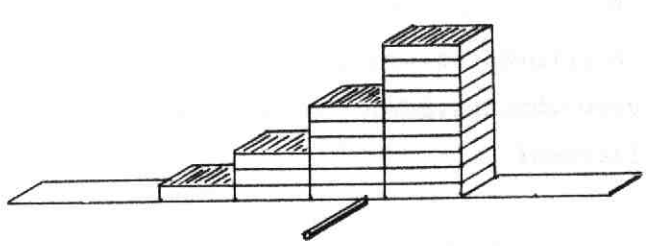
a. Bereken hieruit $E(W)$.

b. Had je $E(W)$ ook sneller kunnen vinden?

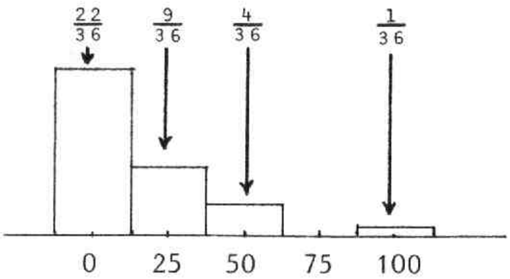
≫ 29. $M$ is het hoogste nummer dat getrokken wordt in de 'Mini-Lotto'.
(Zie pag. 7 opgave ≫ 14).
Laat zien dat het gemiddelde van de hoogste nummers dat je kunt verwachten 5,25 is, ofwel: $E(M) = 5,25$.

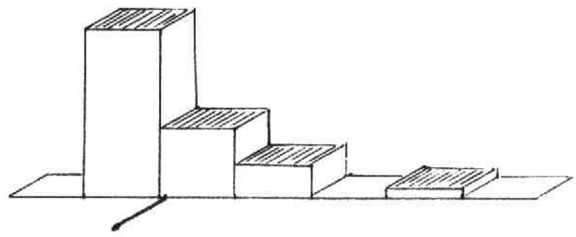



De verwachtingswaarde $E(M)$ is als het ware het 'zwaartepunt' van de kansverdeling. Dit is letterlijk zo, als je de staafjes van het histogram vervangt door bijv. torentjes van legoblokjes (resp. 1, 3, 6 en 10 hoog). Zet je die torentjes op een latje en ondersteun je dat latje in het punt 5,25, dan is er evenwicht! (De naam 'gewogen gemiddelde' is dus heel toepasselijk).



≫ 30. Bij de fruitautomaat vind je het zwaartepunt bij 14,6.



a. Hoe verandert de plaats van het zwaartepunt E(*F*) als de hoofdprijs wordt verdubbeld?

b. En als *alle* uitkeringen worden verdubbeld?

c. Hoe hoog moet de hoofdprijs zijn in het geval de exploitant op de lange duur noch winst, noch verlies zal maken en de troostprijzen van ƒ 0,25 en ƒ 0,50 gehandhaafd blijven?

≫ 31. a. Bekijk het kanshistogram van *W*. (zie pag. 6).
Hoe groot is E(*W*)? (Kun je de vraag zonder rekenwerk beantwoorden?).

b. Dezelfde opdracht voor het kanshistogram dat je bij opgave ≫ 11 (op pag. 7) hebt gevonden?

≫ 32. a. Toevalsexperiment: werpen met één dobbelsteen.
*X* is het aantal ogen dat geworpen wordt.
Bereken E(*X*).

b. Toevalsexperiment: werpen met twee dobbelstenen.
*S* is de som van de aantallen ogen.
Bereken E(*S*).
Kun je dit getal direct uit het kanshistogram van *S* aflezen?

c. Vergelijk de resultaten van a) en b). Verbazingwekkend?
Wat is de verwachtingswaarde van de ogensom bij het werpen met drie dobbelstenen?

≫ 33. Van 100 gezinnen wordt de samenstelling (aantal jongens en aantal meisjes) per gezin op één kaart vermeld.
Hieronder zie je een overzicht van het totaal in matrixvorm.
In de tabel lees je bijv. af dat er onder die 100 gezinnen negen zijn met twee jongens en één meisje en dat er in totaal 33 gezinnen zijn met één meisje.

*aantal meisjes*

| *aantal jongens* | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 10 | 9 | 4 | 3 | 2 | 28 |
| 1 | 7 | 10 | 10 | 7 | 1 | 35 |
| 2 | 7 | 9 | 7 | 5 | 0 | 28 |
| 3 | 3 | 2 | 1 | 1 | 0 | 7 |
| 4 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 2 |
| | 28 | 31 | 22 | 16 | 3 | 100 |

Er wordt aselect één kaart uit de 100 getrokken. Bij dit toevalsexperiment definiëren we drie stochasten:
$M$ = het aantal meisjes
$J$ = het aantal jongens
$K$ = het aantal kinderen de kaart.
Bereken achtereenvolgens: $E(M)$, $E(J)$ en $E(K)$.

BLOEDPROEF

Een toepassing van de verwachtingswaarde in de praktijk is een techniek die bij keuringen wordt toegepast.
Een onderdeel van de militaire keuring in de V.S, bestaat uit een bloedonderzoek op een beruchte geslachtsziekte (syfilis).
Bij het laboratoriumonderzoek kan een belangrijke besparing plaatsvinden door de bloedmonsters van een aantal mannen te vermengen en het totaal te onderzoeken. Als de reactie van dit totaal "negatief" is, is èlk van de personen die een bijdrage heeft geleverd "schoon".

Is de reactie daarentegen 'positief', dan zal van elk opnieuw een bloedmonster genomen moeten worden en die monsters zullen afzonderlijk worden onderzocht, om na te gaan wie de 'schuldige(n)' is (zijn).

≫ 34. Veronderstel dat er besloten wordt om in groepen van tien personen te testen.

a. Veronderstel ook dat er 10.000 mannen gekeurd worden en dat er in 400 van de 1000 groepen een positieve reactie gevonden wordt.
Hoeveel bloedproeven worden er in totaal genomen?
Wat is de procentuele besparing t.a.v. een systeem waarbij alleen individueel getest wordt?

b. Dezelfde vraag, maar nu wordt er in groepen van vier personen getest, met als resultaat dat in 500 van de 2500 groepen positief wordt gereageerd.

≫ 35. De vorige opgave leert je dat de methode van samenvoeging van bloedmonsters een aanzienlijke besparing kan opleveren, al hangt dat natuurlijk wel af van het percentage lijders aan syfilis onder de mannelijke bevolking.

a. Stel je voor dat dit percentage heel klein is, bijv. ½%. Zou je nu kleine of juist grote groepen aan een gezamenlijke bloedproef onderwerpen?

b. Volgens de Amerikaanse keuringsadministratie bedroeg het percentage lijders aan syfilis in de jaren '40/'41 ongeveer 5%. Ga na dat de in opgave ≫ 34 a) en b) genoemde aantallen van positieve groepen (400 van de 1000, resp. 500 van de 2500) in overeenstemming zijn met wat je zou kunnen verwachten (in die jaren).

Het probleem waarvoor de keuringsadministratie zich in 1940 gesteld zag is: *hoeveel bloedmonsters moeten er vermengd worden om de maximale procentuele besparing te verkrijgen?*

≫ 36. Stel dat er gekozen is voor acht bloedmonsters in één groep.
Het aantal bloedproeven per groep van 8 is dan: òf 1, òf 9.
Anders gezegd:
het aantal bloedproeven (per groep) is een stochast $X$ met bereik $\{1,9\}$.

a. Controleer met je rekenmachientje: $P(X=1) = 0{,}6634$ en $P(X=9) = 0{,}3366$.

b. Hoe groot is $E(X)$ dus?

c. Hoe groot is de verwachte *besparing per persoon* (in %)?

Hieronder is een strucuurdiagram afgedrukt voor het berekenen van de verwachte procentuele besparing per persoon voor groepen van 1, 2, ..., 10 mannen.

| 10 KEER ($n$ van 1 tot 10) |
|---|
| $p \leftarrow 0{,}95^n$ |
| $q \leftarrow 1-p$ |
| $m \leftarrow p * 1 + q * (n+1)$ |
| $b \leftarrow (1-m/n) * 100$ |
| UITVOER $n,b$ |
| STOP |

≫ 37. a. Wat stellen de variabelen $n$, $p$, $q$, $m$, $b$ in het structuurdiagram voor?

b. Vertaal dit structuurdiagram in een programma en laat het verwerken door de computer.
Wat is het optimale aantal bloedmonsters per groep?

c. Los het probleem ook op in het geval het aantal lijders aan syfilis onder de mannelijke bevolking verdubbeld is.

SAMENVATTING HOOFDSTUK 2

Laat $X$ een stochast zijn bij een of ander toevalsexperiment.
Het bereik van $X$ is $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$; $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zijn reële getallen
De kansverdeling van $X$ is gegeven door:

$$\boxed{\begin{array}{l} P(X=x_1) = p_1 \\ P(X=x_2) = p_2 \\ \quad\vdots \\ P(X=x_n) = p_n \end{array}}$$

De verwachtingswaarde $E(X)$ van $X$ is het getal:

$$p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots\ldots + p_nx_n \qquad (1)$$

ofwel

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_ix_i \qquad (2)$$

Merk op dat je $E(X)$ op kan vatten als het produkt van een "kansen-matrix" en een "waarden-matrix":

$$E(X) = (p_1, p_2, \ldots, p_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad (3)$$

*Opteleigenschap:*

In de opgaven ≫32 en ≫33 heb je de opteleigenschap ontdekt.

$$\boxed{\text{Als } X \text{ en } Y \text{ stochasten zijn en } S = X + Y \text{, dan: } E(S) = E(X) + E(Y)}$$

# 3

## BINOMIALE KANSVERDELING

In dit hoofdstuk kijken we naar toevalsexperimenten, waarbij slechts twee uitkomsten tellen, zoals:

| | | |
|---|---|---|
| - bij het tossen | : | kop of munt |
| - bij een geboorte | : | jongen of meisje |
| - bij een vierkeuzevraag | : | goed of fout |
| - bij een opiniepeiling | : | voor of tegen |
| - bij het rijexamen | : | zakken of slagen |
| - bij een warenkeuring | : | goed- of afgekeurd |
| - bij een strafschop | : | benut of gemist |

Een dergelijk experiment wordt in de praktijk vaak vele malen uitgevoerd of herhaald:

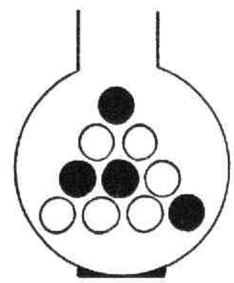
- tien keer werpen met een geldstuk;
- op zekere dag worden in Nederland 500 kinderen geboren;
- twintig vierkeuze vragen op het examen;
- aan 1000 Nederlanders wordt gevraagd of ze voor of tegen de plaatsing van kernwapens zijn;
- tien kandidaten voor het rijexamen vandaag;
- vijftig exemplaren van een zeker produkt worden op hun deugdelijkheid gecontroleerd;
- vijf strafschoppen voor elk team, nadat de bekerstrijd in een gelijkspe is geëindigd.

Voor zulke experimenten kan een vaas - met - witte - en - zwarte - ballen model staan.

De samenstelling van zo'n vaas (hoeveel witte, hoeveel zwarte ballen) hangt af van de kansen die je elk van de twee uitkomsten wilt toekennen.

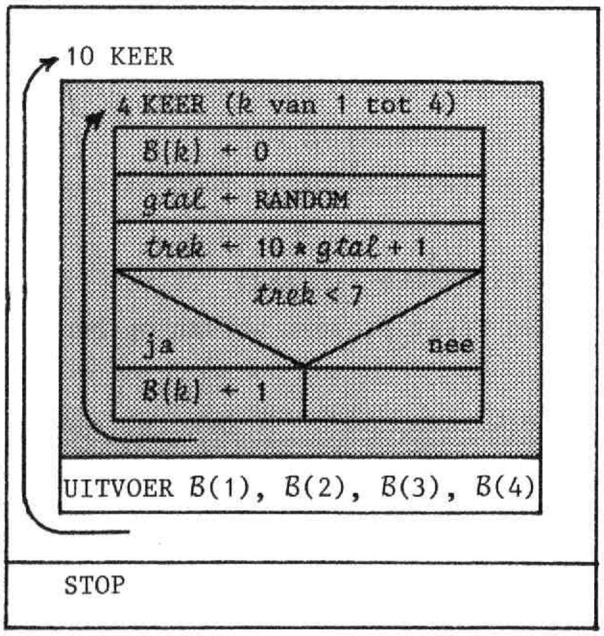
≫ 38. Als bijvoorbeeld uit statische gegevens blijkt dat 48,5% van alle geboorten een meisje oplevert, dan kun je de vaas met 485 witte en 515 zwarte balletjes vullen. De 500 geboorten die op zekere dag in Nederland plaatsvinden, kun je dan simuleren door het trekken van 500 balletjes uit de vaas.
Zou je die balletjes *met* of *zonder* teruglegging trekken? Waarom?

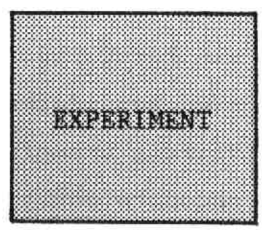
≫ 39. Je beantwoordt twintig vierkeuzevragen puur op de gok.
Beschrijf dit toevalsexperiment in termen van het vaasmodel.



Een vaas bevat zes witte en vier zwarte balletjes. We trekken een aantal malen - zeg vier - een balletje uit de vaas (met teruglegging).
Het aantal keren dat we 'wit' trekken is een stochast die we $X$ noemen.

Om inzicht te krijgen in de kansverdeling van $X$ gaan we dit experiment met behulp van de computer simuleren.



≫ 40. a. Het trekken van een wit (= 1) of een zwart balletje (= 0) wordt met toevalsgetallen gesimuleerd.
Leg uit hoe dat (volgens het structuurdiagram) precies in zijn werk gaat.

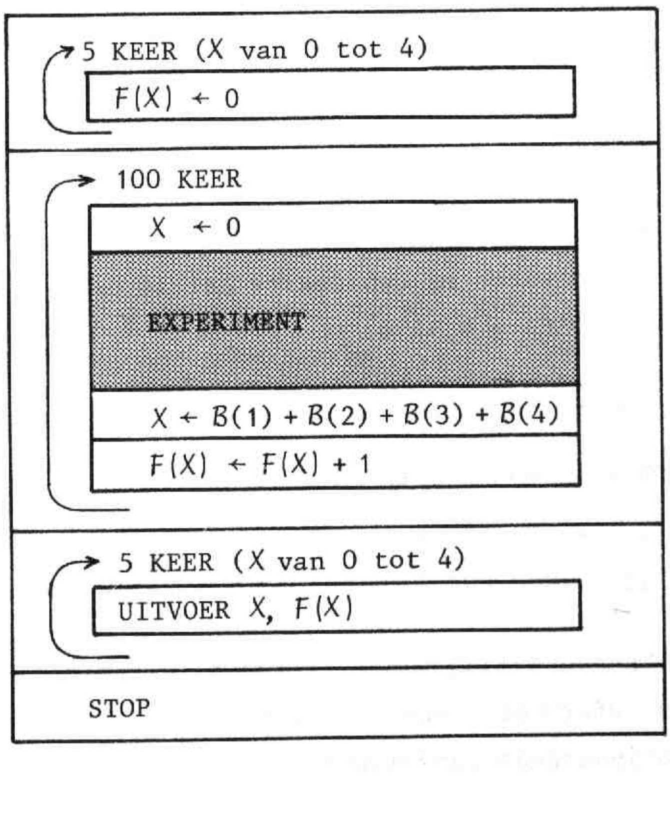
b. Vertaal het structuurdiagram in een programma en laat de computer de tien experimenten simuleren.

c. Maak een frequentie-tabel van de resultaten:

| aantal witte ballen (X) | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| frequentie F(X) | | | | | |

d. Stel uit tien verschillende frequentie-tabellen een nieuwe frequentie-tabel samen voor honderd experimenten.
Verwerk het resultaat in een histogram.

Je kunt een freqentie-tabel voor een groot aantal experimenten (bv. 100) ook meteen door de computer laten maken.

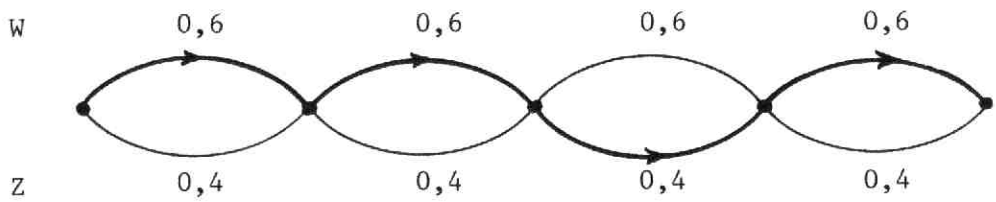


≫ 41. a. De afspraak '1 = wit, 0 = zwart' was niet zo maar een afspraak, doch een listige keus.
Hoe blijkt dat uit het structuurdiagram van blz. 25?

b. Leg uit hoe (volgens dit structuurdiagram de frequenties $F(0)$, ....., $F(4)$ berekend worden.

c. Laat de computer dit programma verwerken. (Je hoeft het programma niet zelf te maken) en vergelijk het resultaat met wat je vond in 40 d).

Je hebt in het voorgaande gezien hoe je de kansverdeling van 'het aantal witte balletjes' ($X$) kunt schatten op grond van een simulatie.
De vraag is nu hoe je die kansen *exact* kunt bepalen.
Bekijk het trekkingsresultaat WWZW (ofwel 1101).
De kans op dit resultaat is: $0{,}6 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 0{,}6^3 \cdot 0{,}4$.




Er zijn vier verschillende reeksen met drie witte en een zwarte bal mogelijk. Behalve WWZW ook nog: ZWWW, WZWW en WWWZ.
De totale kans op drie witte en een zwarte bal is dan: $4 \cdot 0{,}6^3 \cdot 0{,}4$.
Ofwel: $P(X = 3) = 4 \cdot 0{,}0864 = 0{,}3456$.

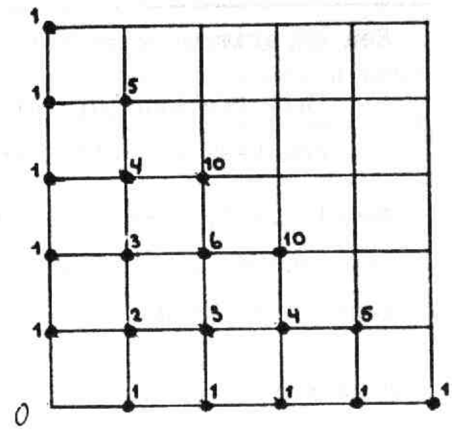
≫ 42. a. Bereken nu de (complete) kansverdeling van $X$.

b. Welke controle kun je uitvoeren op je antwoorden?

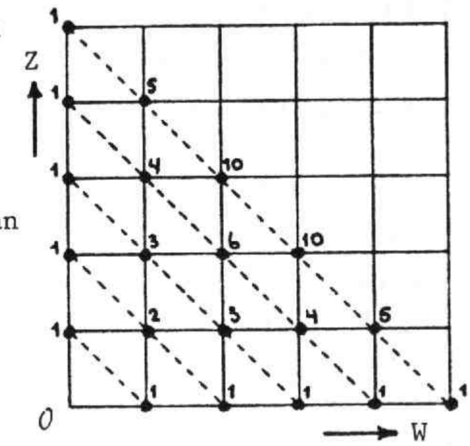
c. Vergelijk het resultaat van de berekening met het resultaat van de simulatie. Hoe kun je eventuele afwijkingen verklaren?

≫ 43. Bereken de kansverdeling van $X$ (= aantal witte balletjes) als je drie (i.p.v. vier keer) een balletje uit de vaas trekt.
Teken het bijpassende kanshistogram.

Een hulpmiddel bij het berekenen van zulke kansen is het 'stratenplan', ofwel de *driehoek van Pascal*.
Naast elk van de aangestipte kruispunten in het stratenplan staat het aantal wegen (vanuit $O$) naar dat punt vermeld.



Het trekken van een aantal balletjes uit een vaas komt overeen met een 'toevalswandeling' in het stratenplan.
De kans op één stap in horizontale richting (W) is in het voorgaande voorbeeld gelijk aan 0,6; de kans op een verticale stap (Z) is daar 0,4.
De diagonalen verbinden de punten die bereikt worden in evenveel stappen.



≫ 44. Je maakt een toevalswandeling (vanuit het punt $O$) van vijf stappen (in de richting W of Z).
De kans op een stap richting W is steeds $\frac{3}{4}$, die op een stap Z is $\frac{1}{4}$.
Hoe groot is de kans dat je in het punt (3,2) aankomt?

≫ 45. Stel de kans op de geboorte van een meisje op: p($\approx$0,485) en die van van een jongen op: p($\approx$0,515).
$X$ = het aantal meisjes in een gezin van vijf kinderen.

a. Druk de kansen $P(X=0)$, $P(X=1)$, ..., $P(X=5)$ uit in p en q.

b. Met wat algebra kun je laten zien dat de som van al die kansen gelijk is aan 1. Hoe?

≫ 46. In Den Haag worden op zekere dag vijftien kinderen geboren.
Hoe groot is de kans dat daar tien meisjes bij zijn?
(Uitgedrukt in p en q, zie opgave ≫ 45).

Een experiment waarvoor

"het trekken-met-teruglegging van een zeker aantal balletjes uit een vaas die witte en zwarte balletjes bevat"

model staat, noemen we een *binomiaal experiment*.
Het trekken van een witte (resp. zwarte bal) noemen we een *succes* resp. *mislukking*.

Elke serie van n trekkingsresultaten kan worden voorgesteld door een rij bestaande uit de letters W(it) en Z(wart).
Bijv. voor $n = 10$: WWZWZZZWZZ.
Vaak gebruiken we het cijfer 1 om een succes aan te duiden en 0 voor een mislukking, bovenstaand rijtje wordt dan: 1101000100.

Als p de kans op succes bij één trekking is en q $(= 1 - p)$ de kans op mislukking, is de kans op de serie 1101000100 : ppqpqqqpqq $= p^4q^6$.
Omdat er $\binom{10}{4}$ verschillende series te maken zijn met 4 "enen" en 6 "nullen" is de kans op 4 successen en 6 mislukkingen: $\binom{10}{4} \cdot p^4q^6$.

Dus als X het aantal successen bij 10 trekkingen is, geldt:

$$P(X = 4) = \binom{10}{4} \cdot p^4q^6.$$

≫ 47. a. Druk de kans op 3-successen-in-een-reeks-van-10 uit in p en q. Ga voor jezelf na of je kunt uitleggen hoe je aan die formule komt.

b. Dezelfde opdracht voor de kans op 5-successen-in-een-reeks-van-8.

≫ 48. In een vaas zitten 35 witte en 65 zwarte balletjes.
Je trekt n keer, met teruglegging, een balletje uit de vaas.
Druk de kans op k witte en $n - k$ zwarte balletjes uit in k en n.
$(0 < k < n)$.

In het algemeen:

Laat $X$ het aantal successen zijn bij een binomiaal experiment met n beurten, waarbij p de kans op succes en q de kans op mislukking per beurt is.

De kansverdeling van $X$ is:

$$\boxed{\begin{aligned} P(X=0) &= q^n \\ P(X=1) &= \binom{n}{1}\cdot pq^{n-1} \\ P(X=2) &= \binom{n}{2}\cdot p^2q^{n-2} \\ &\vdots \\ P(X=n) &= p^n \end{aligned}}$$

Kortom: $$\boxed{P(X=k) = \binom{n}{k}\cdot p^k\cdot q^{n-k} \qquad (0 \leqq k \leqq n)}$$

Opmerking: met behulp van het binomium van Newton kun je controleren dat de som van alle kansen gelijk is aan 1.

Immers: $P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + \ldots + P(X=n) =$

$$q^n + \binom{n}{1}pq^{n-1} + \binom{n}{2}pq^{n-2} + \ldots + p^n =$$

$$= (q+p)^n = 1^n = 1.$$

≫ 49. Bedenk een voorbeeld van een binomiaal experiment met $p = \frac{1}{3}$, $q = \frac{2}{3}$. Hoe groot is de kans op drie successen als dit experiment zes keer wordt uitgevoerd?

≫ 50. Asterix werpt tien keer met een Romeinse dobbelsteen. Hij heeft alleen belang bij de uitkomst VI (vermoedelijk speelde hij het spelletje "Homines nolite erasci" *)

a. Hoe groot is de kans dat hij geen VI werpt?

b. Hoe groot is de kans dat hij in drie beurten van de tien een VI werpt?

--------

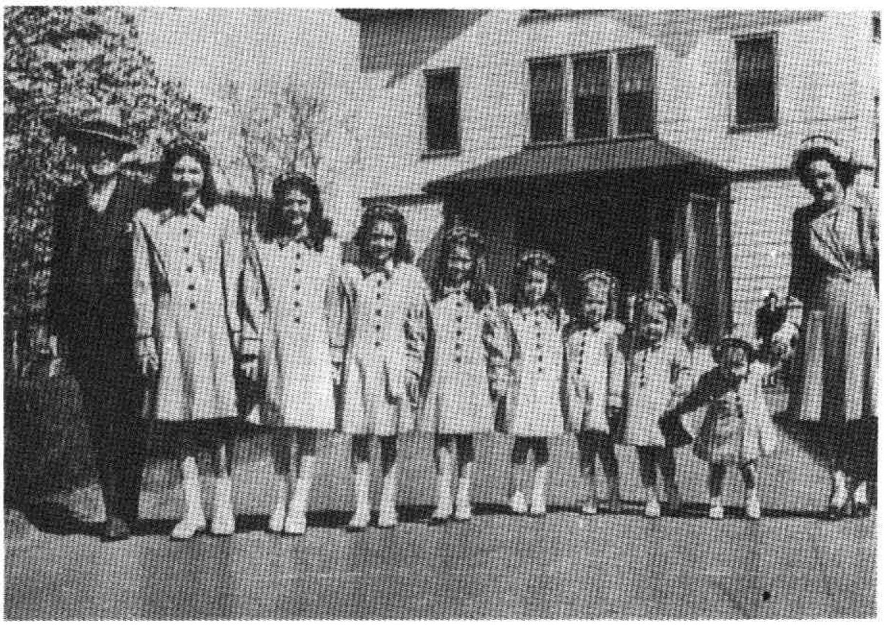
*) Latijn: "Mens erger je niet".

≫ 51. Een strafschop wordt gemiddeld in 75% van de gevallen benut. De bekerwedstrijd Ajax-Feyenoord is in een gelijk spel geëindigd. Na afloop neemt elk van beide ploegen vijf strafschoppen; Feyenoord benut er drie en mist er twee.

a. Hoe groot is de kans dat Ajax wint (volgens het binomiale kansmodel)?

b. Welke bezwaren kun je bedenken tegen de toepassing van het binomiale model in deze situatie?

≫ 52.



Een gezin met acht dochters.
Hoe zeldzaam is dat?

≫ 53. Een vliegtuig stort neer als meer dan de helft van de motoren uitvalt. Elke motor heeft (een kleine) kans p om tijdens een vlucht onklaar te raken. De motoren werken onafhankelijk van elkaar. Bereken de kans (uitgedrukt in p) dat een viermotorig vliegtuig neerstort tengevolge van motorpech.

Zes vierkeuzevragen.

De kans dat je er drie goed beantwoordt als je helemaal niets van het onderwerp afweet is gelijk aan:

$$\binom{6}{3} \cdot 0{,}25^3 \cdot 0{,}75^3 = 20 \cdot 0{,}421875 \cdot 0{,}015625 \approx 0{,}1318$$

De kansen op 0, 1, 2, ..., 6 successen bij een binomiaal experiment met n = 6 en p = 0,25 lees je af in de volgende tabel.

| Binomiale stochast $X$ met | |
|---|---|
| n = 6 | p = 0,25 |
| k | P(X = k) |
| 0 | 0,1780 |
| 1 | 0,3759 |
| 2 | 0,2767 |
| 3 | 0,1318 |
| 4 | 0,0330 |
| 5 | 0,0044 |
| 6 | 0,0002 |

$\binom{6}{2} \cdot 0{,}25^2 \cdot 0{,}75^4$

≫ 54. a. Hoeveel % is de kans dat je ten hoogste twee antwoorden goed hebt als je zes vierkeuze vragen op de gok beantwoordt?

b. En op ten minste drie antwoorden goed?

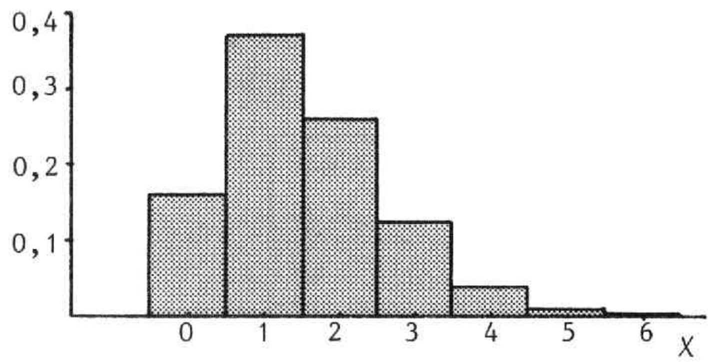
In de praktijk wordt vaak met zgn. *cumulatieve* tabel gewerkt.

| Binomiale stochast $X$ met | |
|---|---|
| n = 6 | p = 0,25 |
| k | P(X ≦ k) |
| 0 | 0,1780 |
| 1 | 0,5539 |
| 2 | 0,8306 |
| ⋮ | ⋮ |

P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)

≫ 55. Maak de volledige cumulatieve tabel voor k = 0 tot en met 6.
Hoe kun je uit de cumulatieve tabel $P(X = 3)$ terugvinden?

≫ 56. Het kanshistogram voor de binomiale verdeling met n = 6, p = 0,25 ziet er zó uit:




a. Waar vind je de kansen $P(X \leqq 2)$ en $P(X \geqq 3)$ in de figuur?
b. Hoe kun je $P(X \geqq 4)$ met behulp van de cumulatieve tabel bepalen?
c. Enig idee waarom een cumulatieve tabel handiger is dan een niet-cumulatieve?

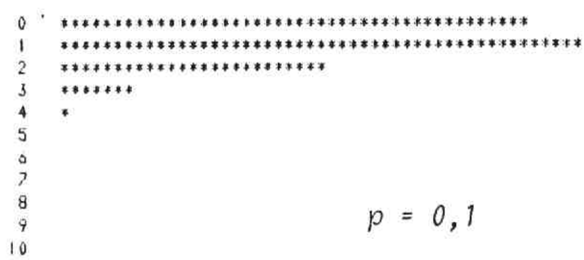
≫ 57. Hiernaast zie je de (cumulatieve) tabel voor n = 10, p = 0,25.
a. In de tabel lees je af:
$P(X \leqq 8) = P(X \leqq 9) = P(X \leqq 10) = 1$.
Hoe kan dat?
b. Hoeveel ‰ kans heb je om bij een toets van tien vierkeuzevragen meer dan zes antwoorden goed te gokken (als de antwoorden je geen enkel houvast geven)?
c. Bereken: $P(2 < X \leqq 6)$.

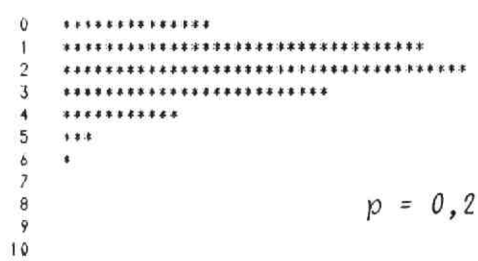
| Binomiale stochast $X$ met n = 10 | p = 0,25 |
|---|---|
| k | $P(X \leqq k)$ |
| 0 | 0,0563 |
| 1 | 0,2440 |
| 2 | 0,5256 |
| 3 | 0,7759 |
| 4 | 0,9219 |
| 5 | 0,9803 |
| 6 | 0,9965 |
| 7 | 0,9996 |
| 8 | 1,000 |
| 9 | 1,000 |
| 10 | 1,000 |

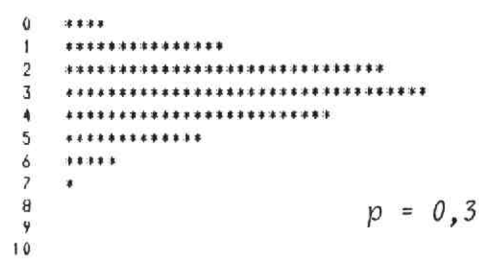
≫ 58. Negen 'computerkanshistogrammen' voor de binomiale verdeling met n = 10 en p = 0,1; 0,2; ...; 0,9.

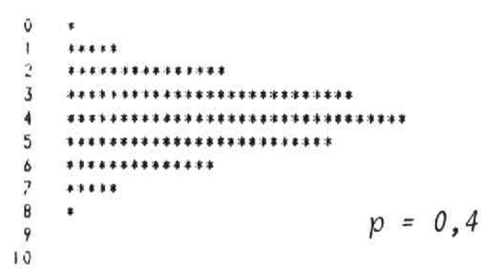
a. Zoek in elk histogram de langste staaf op. En?

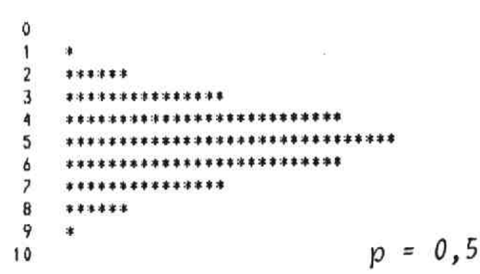
b. Welke verdelingen zijn elkaars spiegelbeeld? Hoe kun je dat verklaren?

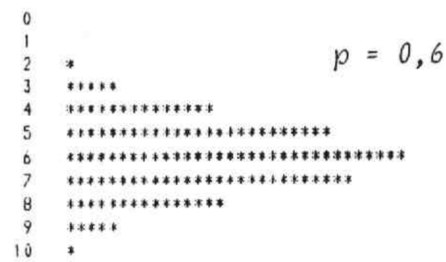


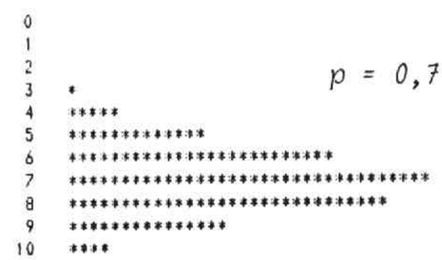



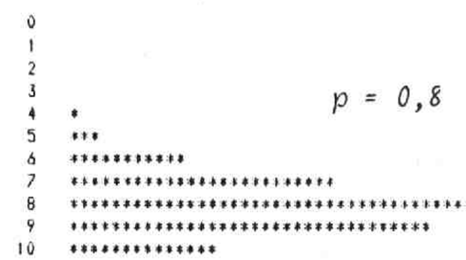



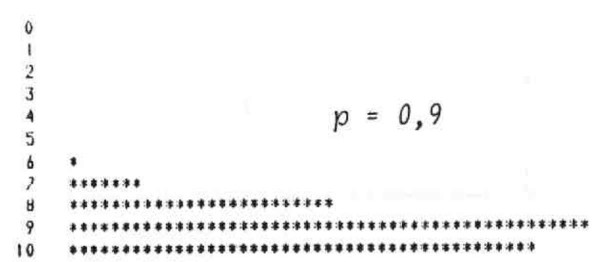



Achterin dit boek (pag. 63 t/m 68) vind je cumulatieve binomiale tabellen voor n = 2 t/m 20, n = 50, n = 100.
De gekozen p-waarden zijn: 0,05; 0,10; 0,15; ...; 0,50 en ook $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{3}$.

≫ 59. Waarom is het niet nodig om tabellen met p-waarden boven 0,5 op te nemen?

≫ 60. $X$ is een binomiaal verdeelde stochast.
Bepaal de volgende kansen m.b.v. de tabel:

| | | | |
|---|---|---|---|
| a. $P(X \leqq 4)$ | voor | $n = 8$ ; | $p = 0,35$ |
| b. $P(X < 10)$ | voor | $n = 19$ ; | $p = 0,5$ |
| c. $P(X > 8)$ | voor | $n = 15$ ; | $p = 0,2$ |
| d. $P(X \geqq 15)$ | voor | $n = 50$ ; | $p = \frac{1}{3}$ |
| e. $P(X = 9)$ | voor | $n = 50$ ; | $p = \frac{1}{6}$ |
| f. $P(35 < X < 45)$ | voor | $n = 100$; | $p = \frac{2}{5}$ |

Als je werkt met p-waarden groter van $\frac{1}{2}$, is het handig om van 'successen' over te stappen op 'mislukkingen'.

*Voorbeeld:*

Gegeven: $n = 12$; $p = 0,75$
Gevraagd: $P(X \leqq 5)$
Oplossing: $X$ is het aantal successen.
$Y$ is het aantal mislukkingen, dus $Y = 12 - X$.
$Y$ is binomiaal verdeeld met $n = 12$; $p = 0,25$.
$P(X \leqq 5) = P(Y \geqq 7) = 1 - P(Y \leqq 6) =$
$1 - 0,9857 = 0,0143$.

≫ 61. Bereken m.b.v. de tabel:

| | | |
|---|---|---|
| a. $P(X \leqq 10)$ | voor | $n = 20$; $p = 0,6$ |
| b. $P(X = 44)$ | voor | $n = 50$; $p = 0,9$ |
| c. $P(X > 6)$ | voor | $n = 14$; $p = \frac{2}{3}$ |

≫ 62. De Ananna-fabriek organiseert een prijsvraag. De fabriek laat bonnen drukken, waarvan de helft het opschrift A en de andere helft het opschrift N heeft. De bonnen worden volkomen willekeurig bij de pakken wasmiddel ingesloten; per pakje één bon. Om mee te dingen naar de hoofdprijs, een videocassette, moet men deze bonnen opplakken, zodat de naam 'ANANNA' ontstaat.
Iemand koopt tien pakken wasmiddel van het merk Ananna.
Hoe groot is de kans dat hij mee kan dingen naar de hoofdprijs?

≫ 63. Voor het rij-examen slaagt gemiddeld één van de zes kandidaten in één keer.
Op woensdagmiddag zijn er 17 kandidaten die voor de eerste keer rij-examen afleggen.
Hoe groot is de kans dat er meer dan drie slagen?

≫ 64. Van een grote partij diepvriesboerekool bevat 1% het vergif nitriet. Een supermarkt koopt 100 pakken in.
Hoe groot is de kans dat er niet meer dan vijf pakken giftig zijn?

≫ 65. a. Een beginnend schutter treft gemiddeld één op de vijf keer de roos. Hij schiet vijftig keer achtereen.
Hoe groot is de kans dat hij meer dan tienmaal raak schiet?

b. Na jaren training heeft hij zijn moyenne zo opgevoerd dat hij vier van de vijf keer raak schiet.
Hoe groot is de kans dat hij bij vijftig keer schieten tien keer mist?
En hoe groot is de kans dat hij meer dan veertig keer de roos treft?

≫ 66. Een bepaalde hartoperatie heeft een slaagkans van 60%.
Hoe groot is de kans dat van twaalf patienten, die deze operatie moeten ondergaan hoogstens vier overlijden?
En hoe groot is de kans dat er minstens acht de operatie overleven?

≫ 67. Een arts beweert dat hij, aan de hand van harttonen, met 80% zekerheid het geslacht van een kind drie maanden voor de geboorte kan voorspellen. Hij neemt de proef op de som in vijftien gevallen.

a. Hoe groot is de kans dat hij in twaalf of meer gevallen een goede voorspelling doet, terwijl zijn bewering onwaar is (dus de kans op een goede voorspelling iedere keer $\frac{1}{2}$ is)?

b. Hoe groot is de kans dat hij in minder dan twaalf gevallen een goede voorspelling doet, terwijl zijn bewering wèl waar is?

≫ 68. Een klinisch pedagoog vermoedt dat er onder kinderen met opvoedingsmoeilijkheden een relatief groot aantal is met een extreem hoog of extreem laag IQ.
Bekend is dat een derde van *alle* kinderen een IQ lager dan 85 of hoger dan 115 heeft.
De pedagoog constateert dat bij een twaalftal aselect gekozen kinderen met gedragsmoeilijkheden er acht zijn met een afwijkend IQ.
Hij vraagt zich af hoe groot de kans op zo'n uitkomst is, als zijn vermoeden geheel onjuist zou zijn, dus als moeilijk opvoedbare kinderen gemiddeld geen duidelijk afwijkend IQ hebben.
Hoe groot is de kans op acht of meer kinderen met een afwijkend IQ in zijn steekproef als zijn vermoeden inderdaad onjuist zou zijn?

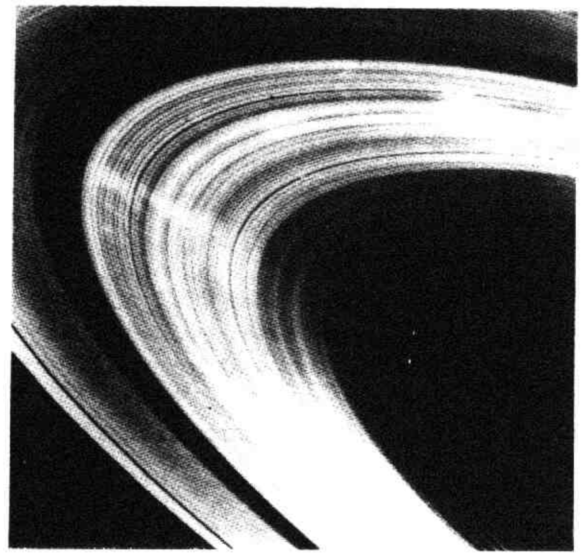
≫ 69. Asterix gooit een aantal keren (zeg: n) met een Romeins muntstuk.
Hoe groot is de kans dat hij in meer dan 40% en minder dan 60% van het aantal worpen 'kop' gooit, als:

a. n = 10 b. n = 20 c. n = 50 d. n = 100?

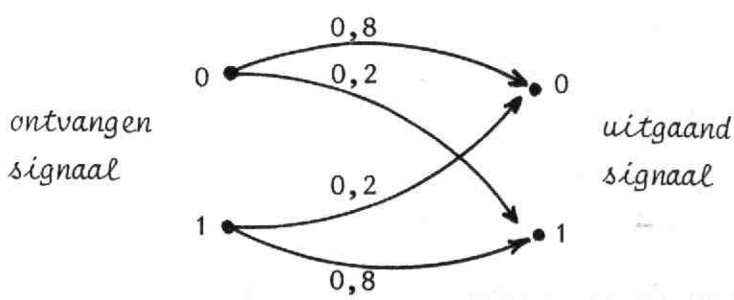
Wat valt op? Had je dat kunnen voorspellen?

BINAIRE CODES

*Foto van de ringen van Saturnus*



≫ 70. Foto's gemaakt vanuit een ruimteschip worden naar de aarde doorgeseind. Daarbij wordt gebruik gemaakt van zgn. 'binaire codes'.
Zo'n code bestaat uit twee soorten signalen, die we aanduiden met 0 en 1.
Een 'boodschap' is bijv. 11010111001000011011.
Door storingen ('ruis') kunnen signalen worden vervormd en dientengevolge verkeerd worden geïnterpreteerd.
Bovenstaande boodschap komt bijv. zó over: 11011110001000111001.
Veronderstel dat er 80% kans is dat een signaal goed wordt geïnterpreteerd. Deze situatie geven we weer met een graaf:




≫ 71. Hoe groot is de kans dat de boodschap '111' wordt ontvangen als 110? En als 011?

≫ 72. Uitgezonden: 1101011100100001101 1

Ontvangen: 1101111000100011100 1

Hoeveel fouten?

Hoe groot is de kans op een ontvangst met evenveel fouten?

Om de kans op foutieve ontvangst van de signalen te verkleinen past men een list toe. De signalen 1 resp. 0 worden vervangen door reeksen van drie 'enen' resp. 'nullen'.

Dus: $\boxed{111}$ = 1

$\boxed{000}$ = 0

De boodschap 10110 wordt dan uitgezonden als:

111 000 111 111 000.

De ontvangst van deze boodschap is bijv.:

110 001 111 101 000

en bevat dus drie fouten.

De afspraak is nu dat voor elk drietal 'de meerderheid beslist', d.w.z. 110 wordt geïnterpreteerd als 1, 001 als 0 en 101 weer als 1.

De boodschap komt in dit geval toch goed over!

≫ 73. a. Hoe groot is bij deze strategie de kans op een foute interpretatie van één signaal (= reeks-van-drie)?

b. Maak een graaf als op blz. 37.

≫ 74. De betrouwbaarheid kan verder worden opgevoerd door langere vervangende signaalreeksen uit te zenden, van 5, 7, 9, enz. symbolen. Steeds met de afspraak: als meer dan de helft van de ontvangen reeks uit nullen bestaat, dan wordt het signaal als 0 opgevat, anders als 1.

Bij welke reeks-lengte is de kans op een foutieve interpretatie van één signaal kleiner dan 0,005?

≫ 75. Hoe langer de vervangende reeks, hoe betrouwbaarder het resultaat. Echter ook: hoe duurder de boodschap.

Stel je voor dat elk uitgezonden symbool ƒ 1,-- en elke foute interpretatie ƒ 100,-- kost, welke lengte van de reeks is dan, economisch gezien, optimaal?

SAMENVATTING HOOFDSTUK 3

Een experiment met twee uitkomsten: "succes" (=1) en "mislukking" (=0) wordt n keer uitgevoerd; de afzonderlijke experimenten zijn ("deel-experimenten") zijn onafhankelijk van elkaar.
Het totale experiment noem je een *binomiaal experiment*.

Als p de kans op succes is, q de kans op mislukking ($q = 1 - p$) en $X$ het aantal successen, geldt:

$$\boxed{\begin{array}{l} P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} \\ (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n) \end{array}}$$

De stochast $X$ is *binomiaal verdeeld*; p en n noem je de *parameters* van de stochast.

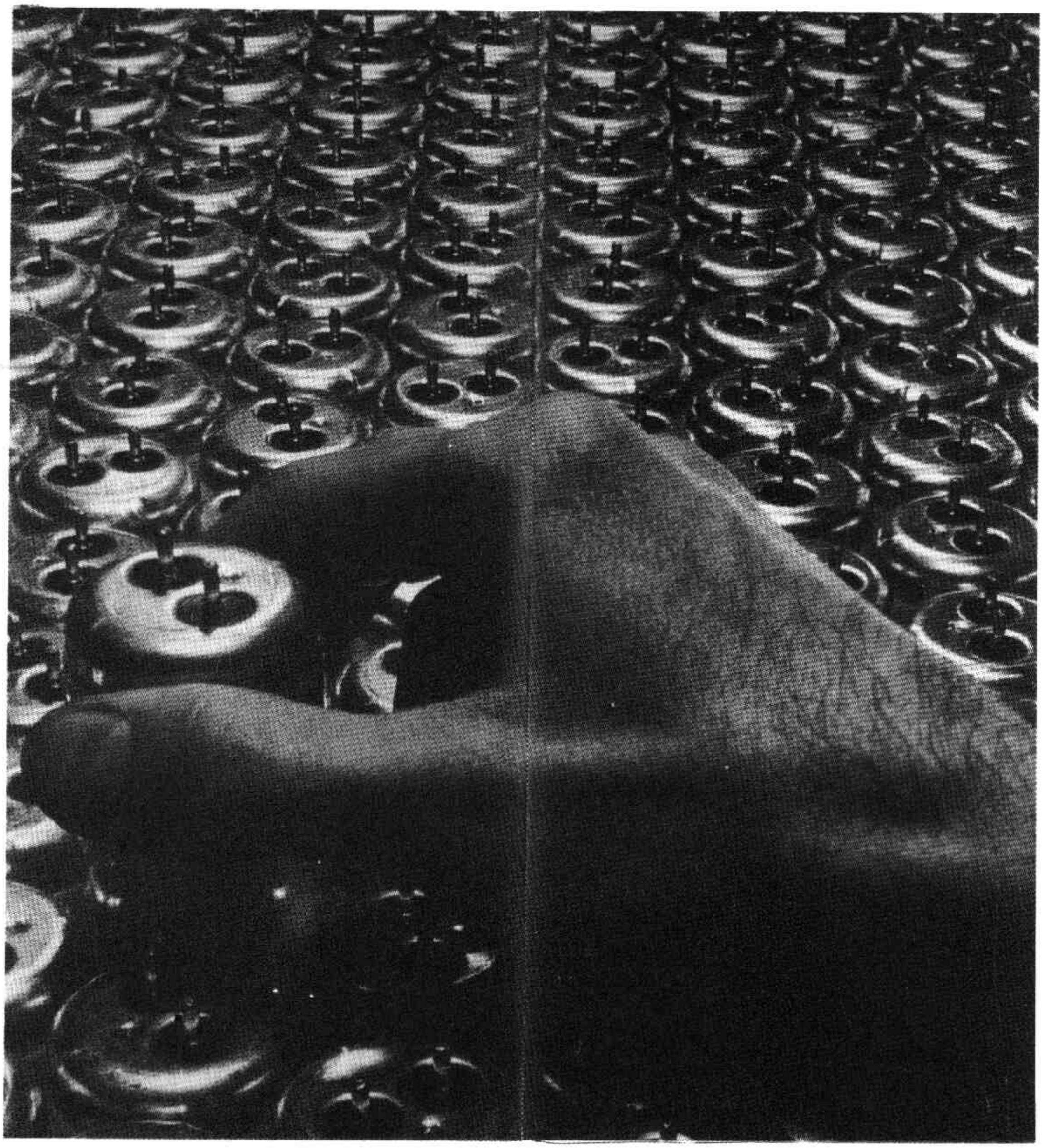
In de zgn. binomiale tabel worden *cumulatieve* kansen gegeven voor diverse waarden van p en n:

$$P(X \leqq k) = P(X = 1) + \ldots + P(X = k)$$

Uit de tabel kun je voor $p \leqq 0{,}5$ de kans $P(X = k)$ en $P(X \geqq k)$ afleiden door:

$$P(X = k) = P(X \leqq k) - P(X \leqq k - 1)$$
$$P(X \geqq k) = 1 - P(X \leqq k - 1)$$

In het geval $p > 0{,}5$ is het handig om de "hulpstochast" $Y$ (= het aantal mislukkingen) in te voeren.
$Y$ is een binomiale stochast met parameters $q (= 1 - p)$ en n.
Er geldt: $P(X \leqq k) = P(Y \geqq n - k) = 1 - P(Y \leqq n - k - 1)$
$P(X \geqq k) = P(Y \leqq n - k)$.



*Steekproef bij keuring van TL-buizen.*
*Hypergeometrisch of binomiaal?*

# 4

## DE HYPERGEOMETRISCHE VERDELING

≫ 76. Een partij van vijfentwintig boeken bevat vijf exemplaren met een aantal blanco pagina's ("misdrukken").
De boekhandelaar die de partij besteld heeft, neemt een steekproef van vijf exemplaren.
a. Hoe groot is de kans dat hier geen misdrukken bij zijn?
b. Waarom kun je in dit geval geen gebruik maken van de binomiale verdeling?

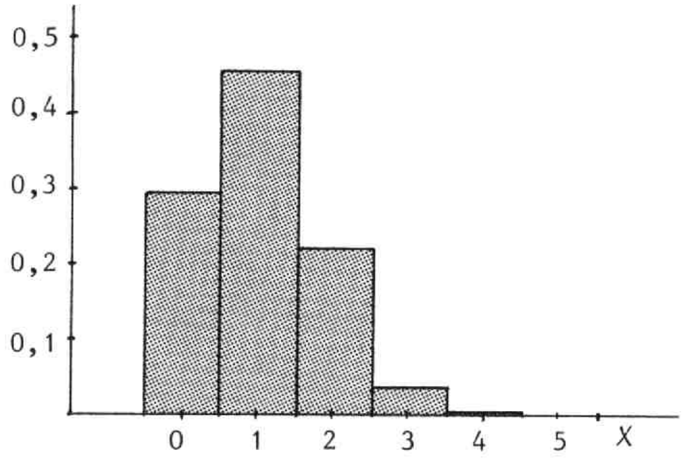
In hoofdstuk 3 heb je gezien dat voor een binomiaal experiment "een trekking *met terugLegging* uit een vaas met zwarte en witte balletjes" model kan staan.
In ≫ 1 is de boekhandelaar vermoedelijk niet zo dom om een exemplaar dat hij gecontroleerd heeft opnieuw voor controle in aanmerking te laten komen. Voor zijn experiment kan "een trekking *zonder terugLegging* uit een vaas met vijf witte en twintig zwarte balletjes" model staan.
Laat $X$ het aantal misdrukken zijn dat onze boekhandelaar in zijn steekproef van vijf exemplaren aantreft.
$P(X=2)$ bijvoorbeeld, kun je als volgt berekenen:

- Uit de vijf exemplaren-met-misdruk, (de witte balletjes) worden er twee gepakt;
  dit kan op $\binom{5}{2}$ manieren.
- Uit de twintig goede exemplaren (de zwarte balletjes) worden er drie gepakt;
  het aantal manieren waarop dit kan is $\binom{20}{3}$;

- Gecombineerd levert dit op: $\binom{5}{2}\binom{20}{3}$ manieren om twee misexemplaren èn drie goede exemplaren te pakken;
- Het totaal aantal steekproeven van vijf boeken uit de partij van vijfentwintig is $\binom{25}{5}$.

Conclusie: $P(X=2) = \dfrac{\binom{5}{2}\binom{20}{3}}{\binom{25}{5}} = \dfrac{10 \cdot 1140}{53130} = 0{,}2146$

≫ 77. Bereken op deze wijze de complete kansverdeling van $X$. Ga na of je uitkomsten in overeenstemming zijn met onderstaand kanshistogram.




≫ 78. Stel je voor dat de boekhandelaar wèl een steekproef (van vijf) *met teruglegging* had genomen.
Teken het kanshistogram van $X$ (= aantal misdrukken) voor dat geval.
Vergelijk dit met het histogram hierboven.

In opgave ≫ 77 heb je de kansverdeling van het aantal witte balletjes (successen) een steekproef zonder teruglegging van vijf uit vijfentwintig berekend. Die kansverdeling wordt een *hypergeometrische verdeling* genoemd. Bij een steekproef *met* teruglegging van vijf uit vijfentwintig, vind je zoals te verwachten, een wat andere kansverdeling, de *binomiale verdeling*.

Bij een hypergeometrische verdeling zijn de resultaten bij de trekking van het eerste balletje, het tweede balletje, enz. *niet onafhankelijk*, bij een binomiale verdeling zijn de resultaten per getrokken balletje dat *wel*! Intuïtief kun je begrijpen dat bij een grote populatie en een kleine steekproef de verschillen tussen de hypergeometrische en de binomiale verdeling gering zullen zijn. De resultaten per getrokken balletje zijn dan als het ware 'bijna onafhankelijk'.

Om dat te illustreren zie je hieronder drie kanstabellen:

I hypergeometrische verdeling in het geval de boekhandelaar een steekproef van vijf boeken uit honderd (met 20% misdrukken) neemt;

II hypergeometrische verdeling voor een steekproef van vijf uit duizend (met 20% misdrukken);

III binomiale verdeling met n = 5 en p = 0,2

| | I | II | III |
|---|---|---|---|
| k | P(X = k) | P(X = k) | P(X = k) |
| 0 | 0,3193 | 0,3268 | 0,3277 |
| 1 | 0,4201 | 0,4106 | 0,4096 |
| 2 | 0,2073 | 0,2051 | 0,2048 |
| 3 | 0,0478 | 0,0509 | 0,0512 |
| 4 | 0,0051 | 0,0063 | 0,0064 |
| 5 | 0,0002 | 0,0003 | 0,0003 |

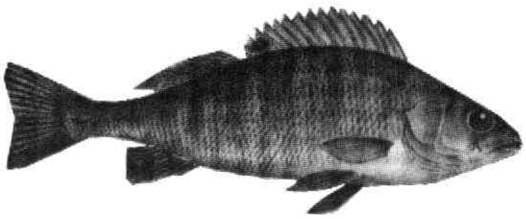
≫ 79. a. Controleer P(X = 2) (door berekening of met de tabellen achter in dit boek) in de gevallen I, II en III.

b. Vergelijk de tabellen I en II met III. Tabel II wijkt minder af van III dan tabel I. Hoe kun je dat verklaren?

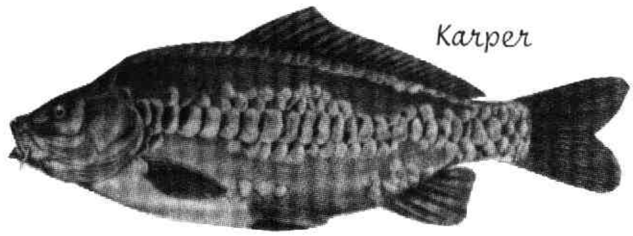
Conclusie:

Bij een betrekkelijk kleine steekproef zonder teruglegging uit een grote populatie, kun je net doen of de steekproef *met* teruglegging wordt uitgevoerd. De hypergeometrische verdeling wordt in zo'n geval goed benaderd door de binimiale verdeling.

≫ 80. In een groot meer, met een visstand van zo'n 10.000 vissen, bestaat 60% van de vissenpopulatie uit baarzen en 40% uit karpers.



*Baars*



*Karper*

Neem aan dat de beide vissoorten zich even gemakkelijk (of moeilijk) laten vangen.
Hoe groot is de kans dat je bij een vangst van tien vissen uit dat meer zes baarzen en vier karpers aantreft?

≫ 81. In een vijver worden twaalf baarzen en acht karpers uitgezet.
Iemand vangt vijf vissen.
Hoe groot is de kans op drie baarzen en twee karpers?

≫ 82. Hoe groot is de kans dat er bij de Lotto drie nummers "onder de tien" worden getrokken?
Vergelijk je uitkomst met de resultatenlijst van 1978 (blz. 9 ).

≫ 83. In een klas zitten twaalf jongens en veertien meisjes.
Door het lot wordt een groepje van vier leerlingen aangewezen om de klas te vertegenwoordigen op een vergadering van leerlingen.
Hoe groot is de kans dat er twee jongens en twee meisjes worden aangewezen?

≫ 84. Van de aanhangers van het CDA heeft 60% voorkeur voor een coalitie met de PvdA en 40% voor een samen regeren met de VVD.
Je neemt een aselecte steekproef van tien CDA'ers.
Hoe groot is de kans dat je die verhouding (60%, 40%) in je steekproef terugvindt?

HET SCHATTEN VAN EEN POPULATIE-OMVANG

≫ 85. In een meertje zit een onbekend aantal vissen. Iemand krijgt van Milieuzaken de opdracht om uit te zoeken hoe groot de populatie vissen in dat meertje is. Hij vangt achttien vissen (op een willekeurige plaats in het meer, voorziet ze alle achttien van een merkteken en werpt zijn vangst weer terug in het water.
Een paar dagen later vangt hij (opnieuw op een willekeurige plaats) eenentwintig vissen, waarvan er drie gemerkt blijken te zijn.
Hoe groot schat jij de visstand in dat meertje?

≫ 86. Dezelfde persoon volgt dezelfde strategie voor een ander meertje.
Nu is zijn eerste vangst twaalf vissen en zijn tweede tien, waarbij hij twee gemerkte vissen aantreft.
Op grond hiervan schat hij het aantal vissen in het meertje op zestig.

a. Wat kan de man met *zekerheid* over het aantal vissen in het meertje zeggen?

b. Stel dat zijn schatting van zestig goed is, hoe groot is dan de kans om bij tien gevangen vissen twee gemerkte vissen aan te treffen?

Het probleem van de te schatten populatie-omvang stellen we nu wat algemener.

Noem het aantal vissen in de eerste vangst: $v_1$, het aantal in de tweede vangst: $v_2$ en het aantal gemerkte vissen in de tweede vangst: m.
Laat N het totaal aantal vissen in de vijver zijn. Het probleem is nu om het getal N te schatten op basis van de getallen $v_1$, $v_2$ en m.

≫ 87. a. Verklaar: $N \geqq v_1 + v_2 - m$.

b. Waarom denk je dat N in de buurt ligt van het getal $\frac{v_1 v_2}{m}$ ?

Het getal $\frac{v_1 v_2}{m}$, of liever: het *gehele* getal dat daar het dichtst bij in de buurt ligt, is een 'redelijke schatting' voor het getal N.
Nu is het begrip 'redelijke schatting' natuurlijk erg vaag. In de statistiek wil men zo'n begrip wat beter vastleggen.
Dat kan bijvoorbeeld zó:

- Het aantal *gemerkte* vissen in de tweede vangst is de stochast $X$.
- De kans $P(X = m)$ varieert als we N laten variëren ($v_1$ en $v_2$ blijven vast).
- Díe waarde van N, waarvoor $P(X = m)$ maximaal is, wordt als de beste schatting van N beschouwd. We nemen dus díe N waarbij het gevonden steekproefresultaat het meest waarschijnlijk is.

≫ 88. Stel $v_1 = 5$, $v_2 = 5$ en $m = 2$.
Het *vermoeden* is nu dat N in de buurt van $12\frac{1}{2}$ ligt en de *zekerheid* dat N minimaal 8 is.

a. Bereken $P(X = 2)$ voor $N = 8, 9, \ldots, 15$.
Verwerk je resultaten en tussenresultaten in een tabel:

| N | $\binom{N-5}{3}$ | $\binom{N}{5}$ | $P(X = 2)$ |
|---|---|---|---|
| 8 | 1 | 56 | $\frac{10}{56} = 0,1786$ |
| 9 | 4 | 126 | $\frac{40}{126} = 0,3175$ |
| .. | .. | ... | ... |

b. Wat is je conclusie?

SAMENVATTING HOOFDSTUK 4

We trekken, zonder teruglegging, een aantal balletjes uit een vaas die twee soorten balletjes (zeg wit en zwart) bevat.
Het aantal witte balletjes in een steekproef van n is een hypergeometrisch verdeelde stochast $X$.
Als het totale aantal balletjes N bedraagt en het totaal aantal witte resp. zwarte balletjes A resp. B bedraagt $(A + B = N)$, geldt:

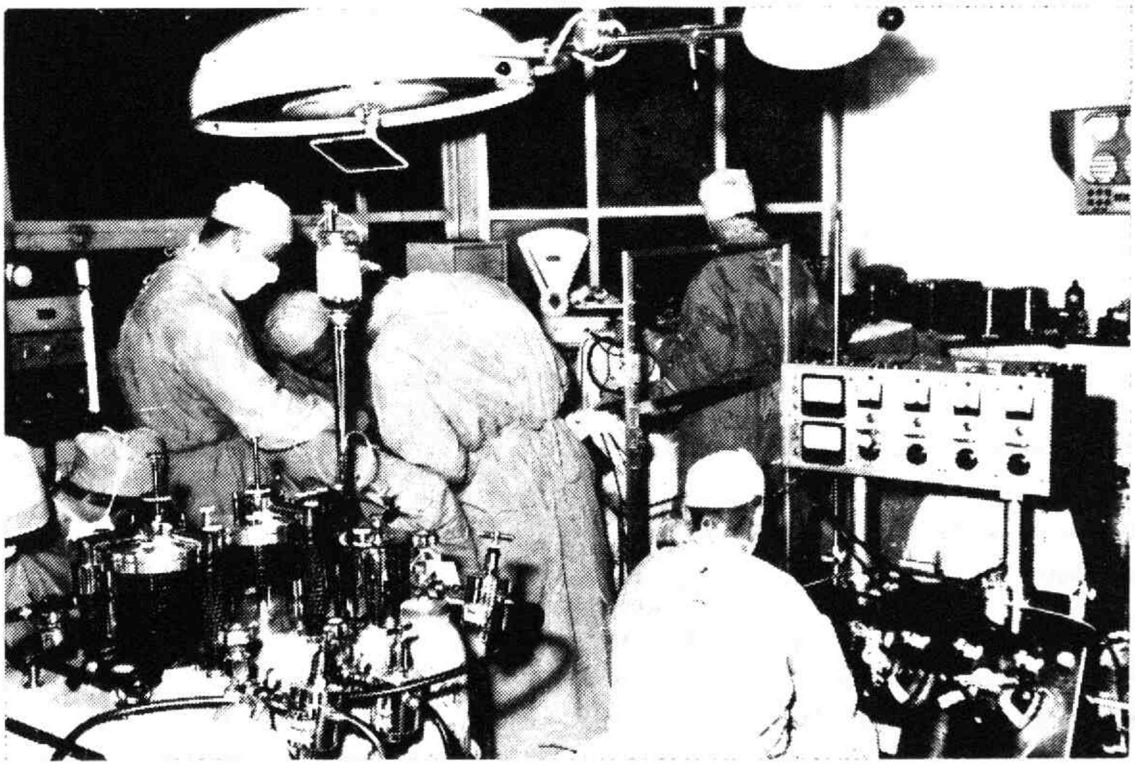
$$\boxed{P(X = k) = \frac{\binom{A}{k}\binom{B}{n-k}}{\binom{N}{n}}}$$

Als de grootte van de steekproef (n) klein is vergeleken met de grootte van de populatie (N), kun je de steekproef beschouwen als een trekking met teruglegging. Dat wil zeggen: de hypergeometrische verdeling kun je dan goed benaderen door de binomiale verdeling, waarbij:

$$p = \frac{A}{N} \text{ en } q = \frac{B}{N} .$$

# 5

VERWACHTINGSWAARDE BIJ DE BINOMIALE EN DE HYPERGEOMETRISCHE VERDELING



≫ 89. Een bepaalde operatie heeft een slaagkans van 80%. In een jaar tijd worden in de V.S. vijftig patienten aan deze operatie onderworpen. Hoeveel geslaagde operaties kun je verwachten? En hoe groot is de kans dat dit onderdaad gebeurt?

≫ 90. In een vaas zitten 25 balletjes, 20 witte en 5 zwarte. Iemand trekt 10 balletjes zonder teruglegging.
Hoeveel witte balletjes kan hij verwachten?

Opgave ≫ 89 heeft betrekking op de verwachtingswaarde bij een binomiale stochast. Het probleem (en de oplossing ervan) kunnen gemakkelijk algemener worden gesteld:

| |
|---|
| Veronderstel dat een bepaalde operatie, die een kans p heeft om te slagen, n keer wordt uitgevoerd.<br>Het aantal geslaagde operaties is een stochast $X$.<br>Er geldt dan: $E(X) = n \cdot p$. |

Voor $n = 2$ kun je dit narekenen m.b.v. de kansverdeling van $X$:

$$P(X = 0) = q^2$$
$$P(X = 1) = 2pq$$
$$P(X = 2) = p^2 \quad \text{(Hierbij geldt: } p + q = 1\text{)}.$$

Dus: $$E(X) = q^2 \cdot 0 + 2pq \cdot 1 + p^2 \cdot 2 = 2pq + 2p^2 = 2p(q + p) = 2p \cdot 1 = 2p$$

≫ 91. Reken op deze wijze na dat voor $n = 3$ geldt: $E(X) = 3p$.

Een dergelijke berekening kun je voor iedere waarde van n geven. Het rekenwerk daarbij is nogal lastig.
Er bestaat echter een 'slimme' methode die ook bij andere kansverdelingen werkt.
We voeren een aantal 'hulpstochasten' in, als volgt:

$X_1$ = het aantal successen bij de eerste operatie (dus: 0 of 1);
$X_2$ = het aantal successen bij de tweede operatie (ook weer: 0 of 1);
enz.

Het aantal successen bij n operaties vind je door deze stochasten op te tellen:

$$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

(Vergelijk ook het structuurdiagram op pag. 25 ).

Voor $X_1$ kun je gemakkelijk de verwachtingswaarde uitrekenen.

$$P(X_1 = 1) = p$$
$$P(X_1 = 0) = q$$

Dus: $$E(X_1) = p \cdot 1 + q \cdot 0 = p.$$

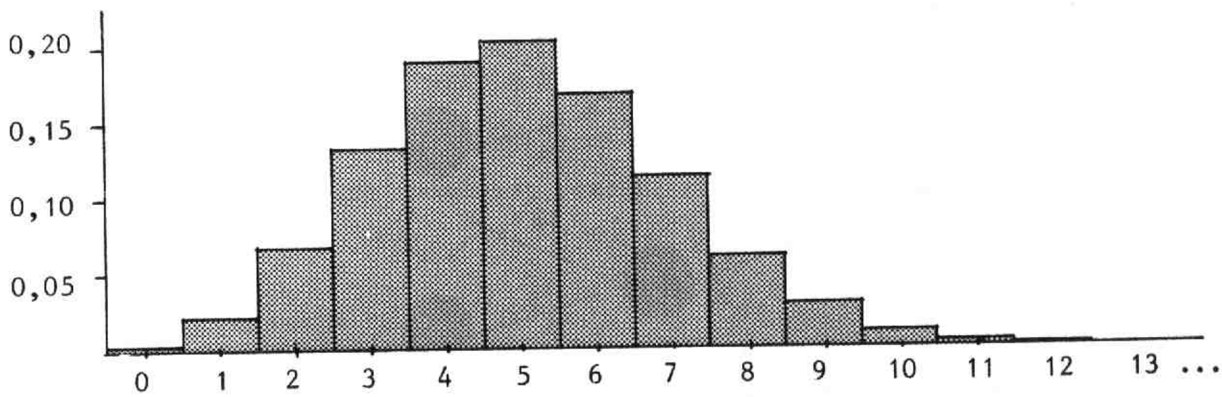
Op dezelfde manier vind je:

$$E(X_2) = p, \quad E(X_3) = p, \text{ enz.}$$

Volgens de somregel van de verwachtingswaarde (zie pag. 22) geldt:

$$\begin{aligned} E(X) &= E(X_1) + E(X_2) + \ldots + E(X_n) \\ &= \quad p \quad + \quad p \quad + \ldots + \quad p \\ &= n \cdot p. \end{aligned}$$

≫ 92. Hieronder zie je een kanshistogram voor het aantal 'successen' bij een binomiaalexperiment dat 20 keer wordt uitgevoerd.




a. Hoe groot denk je dat p is?

b. Controleer je antwoord m.b.v. de binomiale tabel.

De redenering op de vorige pagina kun je ook toepassen op een 'trekking' zonder teruglegging.

Neem bijv. opgave ≫ 90.

Laat $X$ het aantal witte balletjes zijn in een steekproef van 10.

We splitsen $X$ weer uit:

$$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_{10}$$

waarbij: $X_k = 1$ als het $k^e$ balletje wit is;

$X_k = 0$ als het $k^e$ balletje zwart is.

$(k = 1, 2, \ldots, 10)$.

Vervolgens rekenen we $E(X_1), E(X_2), \ldots, E(X_{10})$ uit.

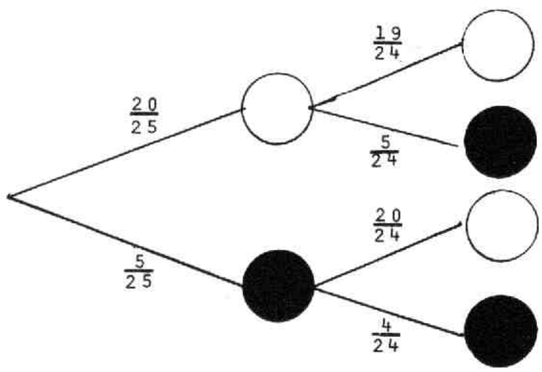
De kansverdeling van $X_1$ is:

$$P(X_1 = 1) = \frac{20}{25} = 0{,}8$$

$$P(X_1 = 0) = \frac{5}{25} = 0{,}2$$

Dus: $E(X\ ) = 0{,}8 \cdot 1 + 0{,}2 \cdot 0 = 0{,}8$.

≫ 93. Hoe zit het nu met $X_2$?




Bekijk het boomdiagram ; bereken $P(X_2 = 1)$ en $E(X_2)$.

Het resultaat had je ook zonder rekenwerk kunnen vinden. Immers: elk getrokken balletje heeft evenveel kans om wit te zijn (zolang je tenminste niets van de voorgangers weet!).

Kortom: $X_1, X_2, \ldots, X_{10}$ hebben alle dezelfde kansverdeling en dus ook dezelfde verwachtingswaarde.

Conclusie: $E(X) = \underbrace{0{,}8 + 0{,}8 + \ldots + 0{,}8}_{10\text{ keer}} = 8$

TESTEN VAN EEN TOEVALSREEKS

Een leerling krijgt de huiswerkopdracht om twintig keer te tossen met een kwartje en de toevalsreeks op te schrijven.
Hij gunt zich geen tijd om dit experiment uit te voeren en verzint zelf een toevalsreeks:

K M K M M K M K K K M K M M K M K K M K

Om het niet al te mooi te maken, schrijft hij elf keer K en negen keer M. Zo te zien is er niets bijzonders aan de reeks; hij ziet er 'gezond' uit. Er zijn manieren om zo'n reeks op z'n 'toevalligheid' te testen. Het eerste waar je natuurlijk naar kijkt is of het aantal keren K dicht bij de verwachtingswaarde tien ligt.
Verder kun je letten op het aantal *wisselingen* in de reeks (van K naar M of omgekeerd).
In bovenstaande reeks is het aantal wisselingen gelijk aan veertien.

Het aantal wisselingen in zo'n toevalsreeks is een stochast $W$. Om de verwachtingswaarde $E(W)$ te vinden, passen we weer de 'splitsings-methode' toe:

$$W = W_2 + W_3 + \ldots + W_{20}$$

met $W_2 = 1$ als de tweede uitkomst verschilt van de eerste, anders $W_2 = 0$;
$W_3 = 1$ als de derde uitkomst verschilt van de tweede, anders $W_3 = 0$;
enz.

≫ 93. a. Waarom wordt er geen $W_1$ gebruikt?

b. Bereken de kansverdeling van $W_2$.

c. Wat weet je van de kansverdelingen van $W_3$ tot en met $W_{20}$?

d. Bereken $E(W)$?

Als je het aantal wisselingen (= 14) in de door de leerling gefingeerde toevalsreeks bekijkt, dan zie je dat dit beduidend meer is dan het verwachte aantal wisselingen. Dit kan voor de leraar een reden tot wantrouwen zijn.

≫ 94. Bij een enquête moeten twintig vragen met *ja* of *nee* beantwoord worden. Een enquêteur ging, nadat hij acht mensen ondervraagd had, na hoe ongeveer de ja-nee-verhouding in de antwoorden was. Hij turfde $\frac{1}{3}$ deel 'ja', $\frac{2}{3}$ deel 'nee'.
Omdat hij geen zin had nog meer mensen te ondervragen, maar wel vijftien ingevulde formulieren moest inleveren, vulde hij zelf de rest van de formulieren willekeurig in, waarbij hij er voor zorgde niet te veel van de ja-nee-verhouding van 1 : 2 af te wijken.
Een van die ingevulde reeksen was:

j n j n n n j n j n j n n j n n j n n n

Laat $W$ het aantal wisselingen zijn in een 'ja-nee-reeks' van twintig met een kans van $\frac{1}{3}$ op 'ja' en $\frac{2}{3}$ op 'nee'.

a. Bereken $E(W)$.

b. Wat vind je van de gefingeerde reeks?

SAMENVATTING HOOFDSTUK 5

Als je de verwachtingswaarde van een aantal 'successen' bij een toevalsreeks-van-n moet berekenen, kan het handig zijn om dit aantal (de stochast $X$) uit te splitsen:

$$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

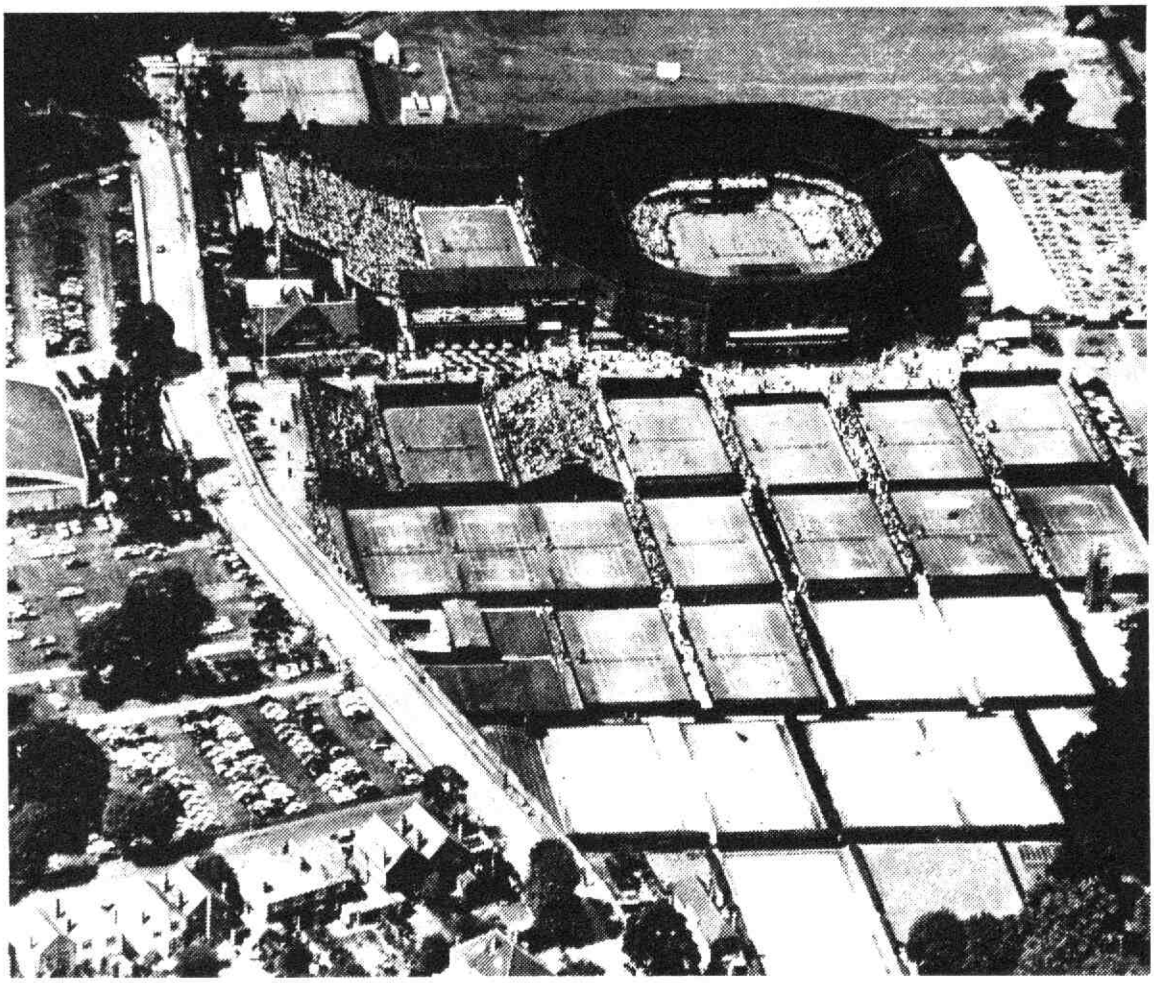
waarbij $X_k$ het aantal successen in het $k^e$ experiment is en dus de waarden 0 en 1 kan hebben.
Er geldt dan: $E(X) = E(X_1) + E(X_2) + \ldots + E(X_n)$.

Bij een steekproeftrekking van n balletjes uit een vaas met witte en zwarte balletjes waarbij:

- het aantal witte balletjes in de vaas een fractie p van het totale aantal is en
- $X$ het aantal witte balletjes in de steekproef is

geldt: $E(X) = n \cdot p$.

Ongeacht of de trekking *met* of *zonder* teruglegging plaatsheeft!

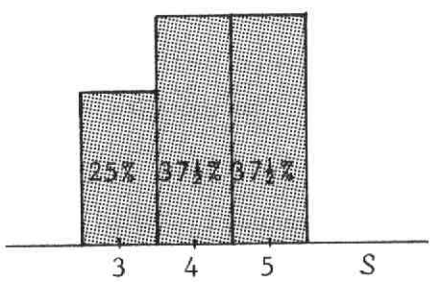


De Tennisvelden van Wimbledon

# 6

## GEMENGDE OPGAVEN

≫ 95. In de heren-enkelspelfinale op Wimbledon is winnaar degeen die het eerst drie sets heeft gewonnen.
Het aantal sets dat in de finale moet worden gespeeld is een stochast $S$ die we bij twee even sterke spelers het volgende kanshistogram toekennen:




a. Laat zien hoe je het kanshistogram van $S$ door berekening kunt vinden.

b. Bereken $E(S)$.

c. In de zesendertig naoorlogse heren-enkelfinales op Wimbledon (tot en met 1981) zijn er zestien in drie sets, tien in vier sets en tien in vijf sets beslist. Dat wijkt nogal af van bovenstaande theoretische kansverdeling.
Noem twee mogelijke oorzaken voor die afwijking.

≫ 96. Een grafoloog krijgt bij een sollicitatie tien handschriften te identificeren. Hij moet tenminste in acht van de tien gevallen slagen wil hij worden aangenomen. Hij weet van zichzelf dat hij ongeveer in 60% van alle gevallen erin slaagt om een handschrift juist te beoordelen. Hoe groot is de kans dat hij wordt aangenomen?

≫ 97. Een dobbelspel dat vaak bij carnaval gespeeld wordt, kent de volgende regels:

- de speler betaalt een inzet en kiest een van de getallen 1 t/m 6;
- hij werpt drie dobbelstenen;
- als zijn getal op alle drie de dobbelstenen boven komt, wordt hem viermaal zijn inzet uitbetaald;
- als zijn getal op twee dobbelstenen bovenkomt, krijgt hij driemaal zijn inzet terug;
- als zijn getal op één van de dobbelstenen bovenkomt is de uitbetaling tweemaal de inzet;
- als zijn getal op geen enkele dobbelsteen bovenkomt, krijgt hij niets uitbetaald.

Wat is de te verwachten winst (of verlies) van de speler bij een inzet van ƒ 1,--?

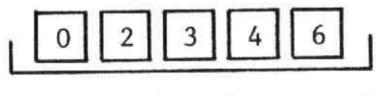
≫ 98. Een supermarkt koopt een grote partij mandarijntjes in, waarvan 10% door schimmel is aangetast. De mandarijnen worden aselect verpakt in netjes van tien stuks.

a. Theet koopt een netje mandarijnen bij die supermarkt. Hoeveel % kans heeft hij dat er geen beschimmelde mandarijntjes in zijn netje zitten?

b. Erwin koopt drie netjes mandarijnen. Hoe groot is de kans dat er in één van de drie netjes beschimmelde mandarijnen voorkomen en in de andere twee niet?

c. In een van Erwin's netjes blijken drie beschimmelde mandarijnen te zitten. Op goed geluk pakt Maarten twee mandarijnen uit dat netje. Hoe groot is de kans dat die niet beschimmeld zijn?

≫ 99. In een doos zitten vijf kaartjes met daarop de getallen 0, 2, 3, 4 en 6.




Er worden (met teruglegging) vijfentwintig kaartjes getrokken, de getallen van de kaartjes worden opgeteld. De som van die getallen is een stochast $S$.

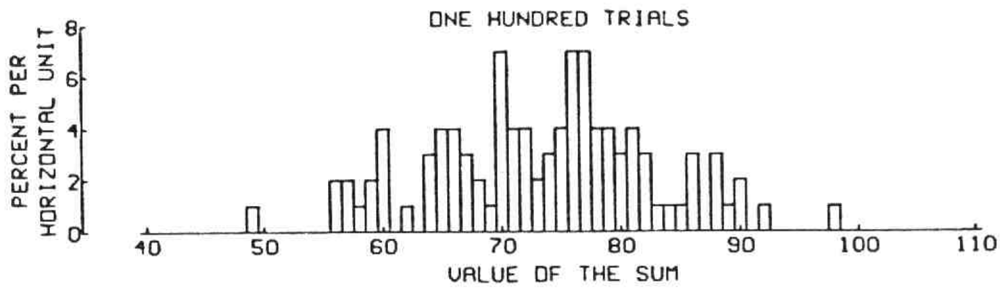
Eén resultaat van zo'n experiment is:

0 0 4 4 0 4 3 2 6 2 2 0 2 6 2 6 4 2 6 3 0 3 6 4 0 met $S = 71$.

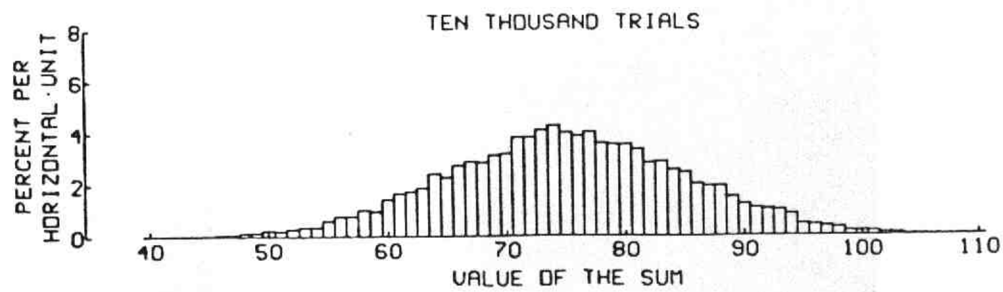
a. Bereken $P(S = 150)$.

b. Bereken $P(S = 6)$.

c. Na honderd keer dit experiment uitgevoerd te hebben werd een histogram van de resultaten gemaakt:




Na tienduizend keer zag het histogram er zó uit:




Verklaar het (opmerkelijke) verschil tussen beide histogrammen.

d. Kun je uit het laatste histogram de verwachtingswaarde E(S) schatten?

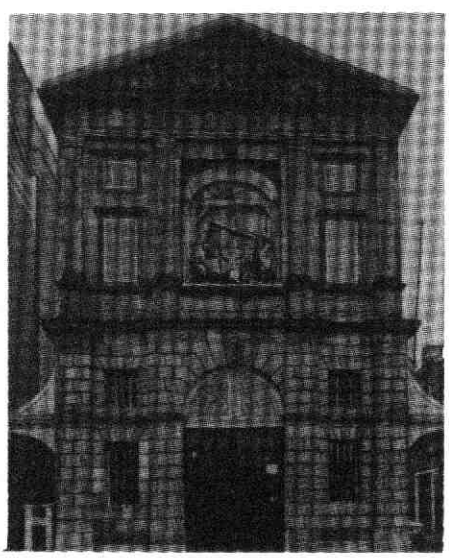
e. Bepaal E(S) door berekening.

≫ 100. In Leiden wordt op 3 oktober op grootse wijze het 'Ontzet' gevierd. Traditioneel worden er dan enorme hoeveelheden haring en wittebrood gegeten. Volgens een kranteberícht is er dit jaar 20% van de haringen met een bacterie besmet. Als je zo'n besmette haring eet, bezorgt dat je een dag later lichte buikkramp.

a. In een gezelschap van twaalf feestvierenden nuttigt elk één haring. Hoe groot is de kans dat minstens de helft van het gezelschap buikkramp krijgt (aangenomen dat het kranteberícht op waarheid berust)?

b. Een klein vaatje haring (een '32je') bevat dertig haringen. Iemand koopt zo'n vaatje, waarin vijf besmette haringen zitten. Hij eet er eerst drie op en deelt vervolgens de rest uit. Hoe groot is de kans dat hij de volgende dag buikkramp krijgt?

c. Een haringhandelaar beweert dat het kranteberícht zwaar overtrokken is. Volgens hem bedraagt het aantal besmette haringen slechts 5%. Om dat te 'bewijzen' vraagt hij aan vijftig personen één haring te eten. Met de journalist van het gewraakte artikel spreekt hij af dat er rectificatie zal volgen als er niet meer dan vijf personen buikkramp krijgen.
Hoe groot is de kans dat de rectificatie ten onrechte plaatsvindt?



*Er wordt diep in de harington gedoken tijdens de jaarlijkse haring en wittebrooduitdeling op 3 oktober in het oude Waaggebouw.*

# TABELLEN

## TABEL 1 BINOMIAALCOEFFICIENTEN $\binom{n}{k}$

| k \ n | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| 2 | | 6 | 10 | 15 | 21 | 28 | 36 | 45 | 55 | 66 | 78 |
| 3 | | | | 20 | 35 | 56 | 84 | 120 | 165 | 220 | 286 |
| 4 | | | | | | 70 | 126 | 210 | 330 | 495 | 715 |
| 5 | | | | | | | | 252 | 462 | 792 | 1287 |
| 6 | | | | | | | | | | 924 | 1716 |

| k \ n | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 2 | 91 | 105 | 120 | 136 | 153 | 171 | 190 |
| 3 | 364 | 455 | 560 | 680 | 816 | 969 | 1140 |
| 4 | 1001 | 1365 | 1820 | 2380 | 3060 | 3876 | 4845 |
| 5 | 2002 | 3003 | 4368 | 6188 | 8568 | 11628 | 15504 |
| 6 | 3003 | 5005 | 8008 | 12376 | 18564 | 27132 | 38760 |
| 7 | 3432 | 6435 | 11440 | 19448 | 31824 | 50388 | 77520 |
| 8 | | | 12870 | 24310 | 43758 | 75582 | 125970 |
| 9 | | | | | 48620 | 92378 | 167960 |
| 10 | | | | | | | 184756 |

| k \ n | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
| 2 | 210 | 231 | 253 | 276 | 300 |
| 3 | 1330 | 1540 | 1771 | 2024 | 2300 |
| 4 | 5985 | 7315 | 8855 | 10626 | 12650 |
| 5 | 20349 | 26334 | 33649 | 42504 | 53130 |
| 6 | 54264 | 74613 | 100947 | 134596 | 177100 |
| 7 | 116280 | 170544 | 245157 | 346104 | 480700 |
| 8 | 203490 | 319770 | 490314 | 735471 | 1081575 |
| 9 | 293930 | 497420 | 817190 | 1307504 | 2042975 |
| 10 | 352716 | 646646 | 1144066 | 1961256 | 3268760 |
| 11 | | 705432 | 1352078 | 2496144 | 4457400 |
| 12 | | | | 2704156 | 5200300 |

$$P(X \leqslant x) = \sum_{k=0}^{x} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

| n | x | p = 0,05 | 0,10 | 0,15 | 0,20 | 0,25 | 0,30 | 0,35 | 0,40 | 0,45 | 0,50 | 1/6 | 1/3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 0 | 0,9025 | 0,8100 | 0,7225 | 0,6400 | 0,5625 | 0,4900 | 0,4225 | 0,3600 | 0,3025 | 0,2500 | 0,6944 | 0,4444 |
| | 1 | 0,9975 | 0,9900 | 0,9775 | 0,9600 | 0,9375 | 0,9100 | 0,8775 | 0,8400 | 0,7975 | 0,7500 | 0,9722 | 0,8889 |
| | 2 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 |
| 3 | 0 | 0,8574 | 0,7290 | 0,6141 | 0,5120 | 0,4219 | 0,3430 | 0,2746 | 0,2160 | 0,1664 | 0,1250 | 0,5787 | 0,2963 |
| | 1 | 0,9928 | 0,9720 | 0,9393 | 0,8960 | 0,8438 | 0,7840 | 0,7183 | 0,6480 | 0,5748 | 0,5000 | 0,9259 | 0,7407 |
| | 2 | 0,9999 | 0,9990 | 0,9966 | 0,9920 | 0,9844 | 0,9730 | 0,9571 | 0,9360 | 0,9089 | 0,8750 | 0,9954 | 0,9630 |
| | 3 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 |
| 4 | 0 | 0,8145 | 0,6561 | 0,5220 | 0,4096 | 0,3164 | 0,2401 | 0,1785 | 0,1296 | 0,0915 | 0,0625 | 0,4823 | 0,1975 |
| | 1 | 0,9860 | 0,9477 | 0,8905 | 0,8192 | 0,7383 | 0,6517 | 0,5630 | 0,4752 | 0,3910 | 0,3125 | 0,8681 | 0,5926 |
| | 2 | 0,9995 | 0,9963 | 0,9880 | 0,9728 | 0,9492 | 0,9163 | 0,8735 | 0,8208 | 0,7585 | 0,6875 | 0,9838 | 0,8889 |
| | 3 | 1,000 | 0,9999 | 0,9995 | 0,9984 | 0,9961 | 0,9919 | 0,9850 | 0,9744 | 0,9590 | 0,9375 | 0,9992 | 0,9877 |
| | 4 | | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 |
| 5 | 0 | 0,7738 | 0,5905 | 0,4437 | 0,3277 | 0,2373 | 0,1681 | 0,1160 | 0,0778 | 0,0503 | 0,0313 | 0,4019 | 0,1317 |
| | 1 | 0,9774 | 0,9185 | 0,8352 | 0,7373 | 0,6328 | 0,5282 | 0,4284 | 0,3370 | 0,2562 | 0,1875 | 0,8038 | 0,4609 |
| | 2 | 0,9988 | 0,9914 | 0,9734 | 0,9421 | 0,8965 | 0,8369 | 0,7648 | 0,6826 | 0,5931 | 0,5000 | 0,9645 | 0,7901 |
| | 3 | 1,000 | 0,9995 | 0,9978 | 0,9933 | 0,9844 | 0,9692 | 0,9460 | 0,9130 | 0,8688 | 0,8125 | 0,9967 | 0,9547 |
| | 4 | | 1,000 | 0,9999 | 0,9997 | 0,9990 | 0,9976 | 0,9947 | 0,9898 | 0,9815 | 0,9688 | 0,9999 | 0,9959 |
| | 5 | | | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 |
| 6 | 0 | 0,7351 | 0,5314 | 0,3771 | 0,2621 | 0,1780 | 0,1176 | 0,0754 | 0,0467 | 0,0277 | 0,0156 | 0,3349 | 0,0878 |
| | 1 | 0,9672 | 0,8857 | 0,7765 | 0,6554 | 0,5339 | 0,4202 | 0,3191 | 0,2333 | 0,1636 | 0,1094 | 0,7368 | 0,3512 |
| | 2 | 0,9978 | 0,9842 | 0,9527 | 0,9011 | 0,8306 | 0,7443 | 0,6471 | 0,5443 | 0,4415 | 0,3438 | 0,9377 | 0,6804 |
| | 3 | 0,9999 | 0,9987 | 0,9941 | 0,9830 | 0,9624 | 0,9295 | 0,8826 | 0,8208 | 0,7447 | 0,6563 | 0,9913 | 0,8999 |
| | 4 | 1,000 | 0,9999 | 0,9996 | 0,9984 | 0,9954 | 0,9891 | 0,9777 | 0,9590 | 0,9308 | 0,8906 | 0,9993 | 0,9822 |
| | 5 | | 1,000 | 1,000 | 0,9999 | 0,9998 | 0,9993 | 0,9982 | 0,9959 | 0,9917 | 0,9844 | 1,000 | 0,9986 |
| | 6 | | | | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | | 1,000 |
| 7 | 0 | 0,6983 | 0,4783 | 0,3206 | 0,2097 | 0,1335 | 0,0824 | 0,0490 | 0,0280 | 0,0152 | 0,0078 | 0,2791 | 0,0585 |
| | 1 | 0,9556 | 0,8503 | 0,7166 | 0,5767 | 0,4449 | 0,3294 | 0,2338 | 0,1586 | 0,1024 | 0,0625 | 0,6698 | 0,2634 |
| | 2 | 0,9962 | 0,9743 | 0,9262 | 0,8520 | 0,7564 | 0,6471 | 0,5323 | 0,4199 | 0,3164 | 0,2266 | 0,9042 | 0,5706 |
| | 3 | 0,9998 | 0,9973 | 0,9879 | 0,9667 | 0,9294 | 0,8740 | 0,8002 | 0,7102 | 0,6083 | 0,5000 | 0,9824 | 0,8267 |
| | 4 | 1,000 | 0,9998 | 0,9988 | 0,9953 | 0,9871 | 0,9712 | 0,9444 | 0,9037 | 0,8471 | 0,7734 | 0,9980 | 0,9547 |
| | 5 | | 1,000 | 0,9999 | 0,9996 | 0,9987 | 0,9962 | 0,9910 | 0,9812 | 0,9643 | 0,9375 | 0,9999 | 0,9931 |
| | 6 | | | 1,000 | 1,000 | 0,9999 | 0,9998 | 0,9994 | 0,9984 | 0,9963 | 0,9922 | 1,000 | 0,9995 |
| | 7 | | | | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | | 1,000 |
| 8 | 0 | 0,6634 | 0,4305 | 0,2725 | 0,1678 | 0,1001 | 0,0576 | 0,0319 | 0,0168 | 0,0084 | 0,0039 | 0,2326 | 0,0390 |
| | 1 | 0,9428 | 0,8131 | 0,6572 | 0,5033 | 0,3671 | 0,2553 | 0,1691 | 0,1064 | 0,0632 | 0,0352 | 0,6047 | 0,1951 |
| | 2 | 0,9942 | 0,9619 | 0,8948 | 0,7969 | 0,6785 | 0,5518 | 0,4278 | 0,3154 | 0,2201 | 0,1445 | 0,8652 | 0,4682 |
| | 3 | 0,9996 | 0,9950 | 0,9786 | 0,9437 | 0,8862 | 0,8059 | 0,7064 | 0,5941 | 0,4770 | 0,3633 | 0,9693 | 0,7414 |
| | 4 | 1,000 | 0,9996 | 0,9971 | 0,9896 | 0,9727 | 0,9420 | 0,8939 | 0,8263 | 0,7396 | 0,6367 | 0,9954 | 0,9121 |
| | 5 | | 1,000 | 0,9998 | 0,9988 | 0,9958 | 0,9887 | 0,9747 | 0,9502 | 0,9115 | 0,8555 | 0,9996 | 0,9803 |
| | 6 | | | 1,000 | 0,9999 | 0,9996 | 0,9987 | 0,9964 | 0,9915 | 0,9819 | 0,9648 | 1,000 | 0,9974 |
| | 7 | | | | 1,000 | 1,000 | 0,9999 | 0,9998 | 0,9993 | 0,9983 | 0,9961 | | 0,9998 |
| | 8 | | | | | | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | | 1,000 |

| | | p | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| n | x | 0,05 | 0,10 | 0,15 | 0,20 | 0,25 | 0,30 | 0,35 | 0,40 | 0,45 | 0,50 | 1/6 | 1/3 |
| 9 | 0 | 0,6302 | 0,3874 | 0,2316 | 0,1342 | 0,0751 | 0,0404 | 0,0207 | 0,0101 | 0,0046 | 0,0020 | 0,1938 | 0,0260 |
| | 1 | 0,9288 | 0,7748 | 0,5995 | 0,4362 | 0,3003 | 0,1960 | 0,1211 | 0,0705 | 0,0385 | 0,0195 | 0,5427 | 0,1431 |
| | 2 | 0,9916 | 0,9470 | 0,8591 | 0,7382 | 0,6007 | 0,4628 | 0,3373 | 0,2318 | 0,1495 | 0,0898 | 0,8217 | 0,3772 |
| | 3 | 0,9994 | 0,9917 | 0,9661 | 0,9144 | 0,8343 | 0,7297 | 0,6089 | 0,4826 | 0,3614 | 0,2539 | 0,9520 | 0,6503 |
| | 4 | 1,000 | 0,9991 | 0,9944 | 0,9804 | 0,9511 | 0,9012 | 0,8283 | 0,7334 | 0,6214 | 0,5000 | 0,9910 | 0,8552 |
| | 5 | | 0,9999 | 0,9994 | 0,9969 | 0,9900 | 0,9747 | 0,9464 | 0,9006 | 0,8342 | 0,7461 | 0,9989 | 0,9576 |
| | 6 | | 1,000 | 1,000 | 0,9997 | 0,9987 | 0,9957 | 0,9888 | 0,9750 | 0,9502 | 0,9102 | 0,9999 | 0,9917 |
| | 7 | | | | 1,000 | 0,9999 | 0,9996 | 0,9986 | 0,9962 | 0,9909 | 0,9805 | 1,000 | 0,9990 |
| | 8 | | | | | 1,000 | 1,000 | 0,9999 | 0,9997 | 0,9992 | 0,9980 | | 0,9999 |
| | 9 | | | | | | | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | | 1,000 |
| 10 | 0 | 0,5987 | 0,3487 | 0,1969 | 0,1074 | 0,0563 | 0,0282 | 0,0135 | 0,0060 | 0,0025 | 0,0010 | 0,1615 | 0,0173 |
| | 1 | 0,9139 | 0,7361 | 0,5443 | 0,3758 | 0,2440 | 0,1493 | 0,0860 | 0,0464 | 0,0233 | 0,0107 | 0,4845 | 0,1040 |
| | 2 | 0,9885 | 0,9298 | 0,8202 | 0,6778 | 0,5256 | 0,3828 | 0,2616 | 0,1673 | 0,0996 | 0,0547 | 0,7752 | 0,2991 |
| | 3 | 0,9990 | 0,9872 | 0,9500 | 0,8791 | 0,7759 | 0,6496 | 0,5138 | 0,3823 | 0,2660 | 0,1719 | 0,9303 | 0,5593 |
| | 4 | 0,9999 | 0,9984 | 0,9901 | 0,9672 | 0,9219 | 0,8497 | 0,7515 | 0,6331 | 0,5044 | 0,3770 | 0,9845 | 0,7869 |
| | 5 | 1,000 | 0,9999 | 0,9986 | 0,9936 | 0,9803 | 0,9527 | 0,9051 | 0,8338 | 0,7384 | 0,6230 | 0,9976 | 0,9234 |
| | 6 | | 1,000 | 0,9999 | 0,9991 | 0,9965 | 0,9894 | 0,9740 | 0,9452 | 0,8980 | 0,8281 | 0,9997 | 0,9803 |
| | 7 | | | 1,000 | 0,9999 | 0,9996 | 0,9984 | 0,9952 | 0,9877 | 0,9726 | 0,9453 | 1,000 | 0,9966 |
| | 8 | | | | 1,000 | 1,000 | 0,9999 | 0,9995 | 0,9983 | 0,9955 | 0,9893 | | 0,9996 |
| | 9 | | | | | | 1,000 | 1,000 | 0,9999 | 0,9997 | 0,9990 | | 1,000 |
| | 10 | | | | | | | | 1,000 | 1,000 | 1,000 | | |
| 11 | 0 | 0,5688 | 0,3138 | 0,1673 | 0,0859 | 0,0422 | 0,0198 | 0,0088 | 0,0036 | 0,0014 | 0,0005 | 0,1346 | 0,0116 |
| | 1 | 0,8981 | 0,6974 | 0,4922 | 0,3221 | 0,1971 | 0,1130 | 0,0606 | 0,0302 | 0,0139 | 0,0059 | 0,4307 | 0,0751 |
| | 2 | 0,9848 | 0,9104 | 0,7788 | 0,6174 | 0,4552 | 0,3127 | 0,2001 | 0,1189 | 0,0652 | 0,0327 | 0,7268 | 0,2341 |
| | 3 | 0,9984 | 0,9815 | 0,9306 | 0,8389 | 0,7133 | 0,5696 | 0,4256 | 0,2963 | 0,1911 | 0,1133 | 0,9044 | 0,4726 |
| | 4 | 0,9999 | 0,9972 | 0,9841 | 0,9496 | 0,8854 | 0,7897 | 0,6683 | 0,5328 | 0,3971 | 0,2744 | 0,9755 | 0,7110 |
| | 5 | 1,0000 | 0,9997 | 0,9973 | 0,9883 | 0,9657 | 0,9218 | 0,8513 | 0,7535 | 0,6331 | 0,5000 | 0,9954 | 0,8779 |
| | 6 | | 1,0000 | 0,9997 | 0,9980 | 0,9924 | 0,9784 | 0,9499 | 0,9006 | 0,8262 | 0,7256 | 0,9994 | 0,9614 |
| | 7 | | | 1,0000 | 0,9998 | 0,9988 | 0,9957 | 0,9878 | 0,9707 | 0,9390 | 0,8867 | 0,9999 | 0,9912 |
| | 8 | | | | 1,0000 | 0,9999 | 0,9994 | 0,9980 | 0,9941 | 0,9852 | 0,9673 | 1,0000 | 0,9986 |
| | 9 | | | | | 1,0000 | 1,0000 | 0,9998 | 0,9993 | 0,9978 | 0,9941 | | 0,9999 |
| | 10 | | | | | | | 1,0000 | 1,0000 | 0,9998 | 0,9995 | | 1,0000 |
| | 11 | | | | | | | | | 1,0000 | 1,0000 | | |
| 12 | 0 | 0,5404 | 0,2824 | 0,1422 | 0,0687 | 0,0317 | 0,0138 | 0,0057 | 0,0022 | 0,0008 | 0,0002 | 0,1122 | 0,0077 |
| | 1 | 0,8816 | 0,6590 | 0,4435 | 0,2749 | 0,1584 | 0,0850 | 0,0424 | 0,0196 | 0,0083 | 0,0032 | 0,3813 | 0,0540 |
| | 2 | 0,9804 | 0,8891 | 0,7358 | 0,5583 | 0,3907 | 0,2528 | 0,1513 | 0,0834 | 0,0421 | 0,0193 | 0,6774 | 0,1811 |
| | 3 | 0,9978 | 0,9744 | 0,9078 | 0,7946 | 0,6488 | 0,4925 | 0,3467 | 0,2253 | 0,1345 | 0,0730 | 0,8748 | 0,3931 |
| | 4 | 0,9998 | 0,9957 | 0,9761 | 0,9274 | 0,8424 | 0,7237 | 0,5833 | 0,4382 | 0,3044 | 0,1938 | 0,9636 | 0,6315 |
| | 5 | 1,0000 | 0,9995 | 0,9954 | 0,9806 | 0,9456 | 0,8822 | 0,7873 | 0,6652 | 0,5269 | 0,3872 | 0,9921 | 0,8223 |
| | 6 | | 0,9999 | 0,9993 | 0,9961 | 0,9857 | 0,9614 | 0,9154 | 0,8418 | 0,7393 | 0,6128 | 0,9987 | 0,9336 |
| | 7 | | 1,0000 | 0,9999 | 0,9994 | 0,9972 | 0,9905 | 0,9745 | 0,9427 | 0,8883 | 0,8062 | 0,9998 | 0,9812 |
| | 8 | | | 1,0000 | 0,9999 | 0,9996 | 0,9983 | 0,9944 | 0,9847 | 0,9644 | 0,9270 | 1,0000 | 0,9961 |
| | 9 | | | | 1,0000 | 1,0000 | 0,9998 | 0,9992 | 0,9972 | 0,9921 | 0,9807 | | 0,9995 |
| | 10 | | | | | | 1,0000 | 0,9999 | 0,9997 | 0,9989 | 0,9968 | | 1,0000 |
| | 11 | | | | | | | 1,0000 | 1,0000 | 0,9999 | 0,9998 | | |
| | 12 | | | | | | | | | 1,0000 | 1,0000 | | |

| n | x | p 0,05 | 0,10 | 0,15 | 0,20 | 0,25 | 0,30 | 0,35 | 0,40 | 0,45 | 0,50 | 1/6 | 1/3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 13 | 0 | 0,5133 | 0,2542 | 0,1209 | 0,0550 | 0,0238 | 0,0097 | 0,0037 | 0,0013 | 0,0004 | 0,0001 | 0,0935 | 0,0051 |
| | 1 | 0,8646 | 0,6213 | 0,3983 | 0,2336 | 0,1267 | 0,0637 | 0,0296 | 0,0126 | 0,0049 | 0,0017 | 0,3365 | 0,0385 |
| | 2 | 0,9755 | 0,8661 | 0,6920 | 0,5017 | 0,3326 | 0,2025 | 0,1132 | 0,0579 | 0,0269 | 0,0112 | 0,6281 | 0,1387 |
| | 3 | 0,9969 | 0,9658 | 0,8820 | 0,7473 | 0,5843 | 0,4206 | 0,2783 | 0,1686 | 0,0929 | 0,0461 | 0,8419 | 0,3224 |
| | 4 | 0,9997 | 0,9935 | 0,9658 | 0,9009 | 0,7940 | 0,6543 | 0,5005 | 0,3530 | 0,2279 | 0,1334 | 0,9488 | 0,5520 |
| | 5 | 1,0000 | 0,9991 | 0,9925 | 0,9700 | 0,9198 | 0,8346 | 0,7159 | 0,5744 | 0,4268 | 0,2905 | 0,9873 | 0,7587 |
| | 6 | | 0,9999 | 0,9987 | 0,9930 | 0,9757 | 0,9376 | 0,8705 | 0,7712 | 0,6437 | 0,5000 | 0,9976 | 0,8965 |
| | 7 | | 1,0000 | 0,9998 | 0,9988 | 0,9944 | 0,9818 | 0,9538 | 0,9023 | 0,8212 | 0,7095 | 0,9997 | 0,9653 |
| | 8 | | | 1,0000 | 0,9998 | 0,9990 | 0,9960 | 0,9874 | 0,9679 | 0,9302 | 0,8666 | 1,0000 | 0,9912 |
| | 9 | | | | 1,0000 | 0,9999 | 0,9993 | 0,9975 | 0,9922 | 0,9797 | 0,9539 | | 0,9984 |
| | 10 | | | | | 1,0000 | 0,9999 | 0,9997 | 0,9987 | 0,9959 | 0,9888 | | 0,9998 |
| | 11 | | | | | | 1,0000 | 1,0000 | 0,9999 | 0,9995 | 0,9983 | | 1,0000 |
| | 12 | | | | | | | | 1,0000 | 1,0000 | 0,9999 | | |
| | 13 | | | | | | | | | | 1,0000 | | |
| 14 | 0 | 0,4877 | 0,2288 | 0,1028 | 0,0440 | 0,0178 | 0,0068 | 0,0024 | 0,0008 | 0,0002 | 0,0001 | 0,0779 | 0,0034 |
| | 1 | 0,8470 | 0,5846 | 0,3567 | 0,1979 | 0,1010 | 0,0475 | 0,0205 | 0,0081 | 0,0029 | 0,0009 | 0,2960 | 0,0274 |
| | 2 | 0,9699 | 0,8416 | 0,6479 | 0,4481 | 0,2811 | 0,1608 | 0,0839 | 0,0398 | 0,0170 | 0,0065 | 0,5795 | 0,1053 |
| | 3 | 0,9958 | 0,9559 | 0,8535 | 0,6982 | 0,5213 | 0,3552 | 0,2205 | 0,1243 | 0,0632 | 0,0287 | 0,8063 | 0,2612 |
| | 4 | 0,9996 | 0,9908 | 0,9533 | 0,8702 | 0,7415 | 0,5842 | 0,4227 | 0,2793 | 0,1672 | 0,0898 | 0,9310 | 0,4755 |
| | 5 | 1,0000 | 0,9985 | 0,9885 | 0,9561 | 0,8883 | 0,7805 | 0,6405 | 0,4859 | 0,3373 | 0,2120 | 0,9809 | 0,6898 |
| | 6 | | 0,9998 | 0,9978 | 0,9884 | 0,9617 | 0,9067 | 0,8164 | 0,6925 | 0,5461 | 0,3953 | 0,9959 | 0,8505 |
| | 7 | | 1,0000 | 0,9997 | 0,9976 | 0,9897 | 0,9685 | 0,9247 | 0,8499 | 0,7414 | 0,6047 | 0,9993 | 0,9424 |
| | 8 | | | 1,0000 | 0,9996 | 0,9978 | 0,9917 | 0,9757 | 0,9417 | 0,8811 | 0,7880 | 0,9999 | 0,9826 |
| | 9 | | | | 1,0000 | 0,9997 | 0,9983 | 0,9940 | 0,9825 | 0,9574 | 0,9102 | 1,0000 | 0,9960 |
| | 10 | | | | | 1,0000 | 0,9998 | 0,9989 | 0,9961 | 0,9886 | 0,9713 | | 0,9993 |
| | 11 | | | | | | 1,0000 | 0,9999 | 0,9994 | 0,9978 | 0,9935 | | 0,9999 |
| | 12 | | | | | | | 1,0000 | 0,9999 | 0,9997 | 0,9991 | | 1,0000 |
| | 13 | | | | | | | | 1,0000 | 1,0000 | 0,9999 | | |
| | 14 | | | | | | | | | | 1,0000 | | |
| 15 | 0 | 0,4633 | 0,2059 | 0,0874 | 0,0352 | 0,0134 | 0,0047 | 0,0016 | 0,0005 | 0,0001 | 0,0000 | 0,0649 | 0,0023 |
| | 1 | 0,8290 | 0,5490 | 0,3186 | 0,1671 | 0,0802 | 0,0353 | 0,0142 | 0,0052 | 0,0017 | 0,0005 | 0,2596 | 0,0194 |
| | 2 | 0,9638 | 0,8159 | 0,6042 | 0,3980 | 0,2361 | 0,1268 | 0,0617 | 0,0271 | 0,0107 | 0,0037 | 0,5322 | 0,0794 |
| | 3 | 0,9945 | 0,9444 | 0,8227 | 0,6482 | 0,4613 | 0,2969 | 0,1727 | 0,0905 | 0,0424 | 0,0176 | 0,7685 | 0,2092 |
| | 4 | 0,9994 | 0,9873 | 0,9383 | 0,8358 | 0,6865 | 0,5155 | 0,3519 | 0,2173 | 0,1204 | 0,0592 | 0,9102 | 0,4041 |
| | 5 | 0,9999 | 0,9978 | 0,9832 | 0,9389 | 0,8516 | 0,7216 | 0,5643 | 0,4032 | 0,2608 | 0,1509 | 0,9726 | 0,6184 |
| | 6 | 1,0000 | 0,9997 | 0,9964 | 0,9819 | 0,9434 | 0,8689 | 0,7548 | 0,6098 | 0,4522 | 0,3036 | 0,9934 | 0,7970 |
| | 7 | | 1,0000 | 0,9994 | 0,9958 | 0,9827 | 0,9500 | 0,8868 | 0,7869 | 0,6535 | 0,5000 | 0,9987 | 0,9118 |
| | 8 | | | 0,9999 | 0,9992 | 0,9958 | 0,9848 | 0,9578 | 0,9050 | 0,8182 | 0,6964 | 0,9998 | 0,9692 |
| | 9 | | | 1,0000 | 0,9999 | 0,9992 | 0,9963 | 0,9876 | 0,9662 | 0,9231 | 0,8491 | 1,0000 | 0,9915 |
| | 10 | | | | 1,0000 | 0,9999 | 0,9993 | 0,9972 | 0,9907 | 0,9745 | 0,9408 | | 0,9982 |
| | 11 | | | | | 1,0000 | 0,9999 | 0,9995 | 0,9981 | 0,9937 | 0,9824 | | 0,9997 |
| | 12 | | | | | | 1,0000 | 0,9999 | 0,9997 | 0,9989 | 0,9963 | | 1,0000 |
| | 13 | | | | | | | 1,0000 | 1,0000 | 0,9999 | 0,9995 | | |
| | 14 | | | | | | | | | 1,0000 | 1,0000 | | |
| 16 | 0 | 0,4401 | 0,1853 | 0,0743 | 0,0281 | 0,0100 | 0,0033 | 0,0010 | 0,0003 | 0,0001 | 0,0000 | 0,0541 | 0,0015 |
| | 1 | 0,8108 | 0,5147 | 0,2839 | 0,1407 | 0,0635 | 0,0261 | 0,0098 | 0,0033 | 0,0010 | 0,0003 | 0,2272 | 0,0137 |
| | 2 | 0,9571 | 0,7892 | 0,5614 | 0,3518 | 0,1971 | 0,0994 | 0,0451 | 0,0183 | 0,0066 | 0,0021 | 0,4868 | 0,0594 |
| | 3 | 0,9930 | 0,9316 | 0,7899 | 0,5981 | 0,4050 | 0,2459 | 0,1339 | 0,0651 | 0,0281 | 0,0106 | 0,7291 | 0,1659 |
| | 4 | 0,9991 | 0,9830 | 0,9209 | 0,7982 | 0,6302 | 0,4499 | 0,2892 | 0,1666 | 0,0853 | 0,0384 | 0,8866 | 0,3391 |
| | 5 | 0,9999 | 0,9967 | 0,9765 | 0,9183 | 0,8103 | 0,6598 | 0,4900 | 0,3288 | 0,1976 | 0,1051 | 0,9622 | 0,5469 |
| | 6 | 1,0000 | 0,9995 | 0,9944 | 0,9733 | 0,9204 | 0,8247 | 0,6881 | 0,5272 | 0,3660 | 0,2272 | 0,9899 | 0,7374 |
| | 7 | | 0,9999 | 0,9989 | 0,9930 | 0,9729 | 0,9256 | 0,8406 | 0,7161 | 0,5629 | 0,4018 | 0,9979 | 0,8735 |
| | 8 | | 1,0000 | 0,9998 | 0,9985 | 0,9925 | 0,9743 | 0,9329 | 0,8577 | 0,7441 | 0,5982 | 0,9996 | 0,9500 |
| | 9 | | | 1,0000 | 0,9998 | 0,9984 | 0,9929 | 0,9771 | 0,9417 | 0,8759 | 0,7728 | 1,0000 | 0,9841 |
| | 10 | | | | 1,0000 | 0,9997 | 0,9984 | 0,9938 | 0,9809 | 0,9514 | 0,8949 | | 0,9960 |
| | 11 | | | | | 1,0000 | 0,9997 | 0,9987 | 0,9951 | 0,9851 | 0,9616 | | 0,9992 |
| | 12 | | | | | | 1,0000 | 0,9998 | 0,9991 | 0,9965 | 0,9894 | | 0,9999 |
| | 13 | | | | | | | 1,0000 | 0,9999 | 0,9994 | 0,9979 | | 1,0000 |
| | 14 | | | | | | | | 1,0000 | 0,9999 | 0,9997 | | |
| | 15 | | | | | | | | | 1,0000 | 1,0000 | | |

| | | p | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *n* | *x* | 0,05 | 0,10 | 0,15 | 0,20 | 0,25 | 0,30 | 0,35 | 0,40 | 0,45 | 0,50 | 1/6 | 1/3 |
| 17 | 0 | 0,4181 | 0,1668 | 0,0631 | 0,0225 | 0,0075 | 0,0023 | 0,0007 | 0,0002 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0451 | 0,0010 |
| | 1 | 0,7922 | 0,4818 | 0,2525 | 0,1182 | 0,0501 | 0,0193 | 0,0067 | 0,0021 | 0,0006 | 0,0001 | 0,1983 | 0,0096 |
| | 2 | 0,9497 | 0,7618 | 0,5198 | 0,3096 | 0,1637 | 0,0774 | 0,0327 | 0,0123 | 0,0041 | 0,0012 | 0,4435 | 0,0442 |
| | 3 | 0,9912 | 0,9174 | 0,7556 | 0,5489 | 0,3530 | 0,2019 | 0,1028 | 0,0464 | 0,0184 | 0,0064 | 0,6887 | 0,1304 |
| | 4 | 0,9988 | 0,9779 | 0,9013 | 0,7582 | 0,5739 | 0,3887 | 0,2348 | 0,1260 | 0,0596 | 0,0245 | 0,8604 | 0,2814 |
| | 5 | 0,9999 | 0,9953 | 0,9681 | 0,8943 | 0,7653 | 0,5968 | 0,4197 | 0,2639 | 0,1471 | 0,0717 | 0,9496 | 0,4777 |
| | 6 | 1,0000 | 0,9992 | 0,9917 | 0,9623 | 0,8929 | 0,7752 | 0,6188 | 0,4478 | 0,2902 | 0,1662 | 0,9853 | 0,6739 |
| | 7 | | 0,9999 | 0,9983 | 0,9891 | 0,9598 | 0,8954 | 0,7872 | 0,6405 | 0,4743 | 0,3145 | 0,9965 | 0,8281 |
| | 8 | | 1,0000 | 0,9997 | 0,9974 | 0,9876 | 0,9597 | 0,9006 | 0,8011 | 0,6626 | 0,5000 | 0,9993 | 0,9245 |
| | 9 | | | 1,0000 | 0,9995 | 0,9969 | 0,9873 | 0,9617 | 0,9081 | 0,8166 | 0,6855 | 0,9999 | 0,9727 |
| | 10 | | | | 0,9999 | 0,9994 | 0,9968 | 0,9880 | 0,9652 | 0,9174 | 0,8338 | 1,0000 | 0,9920 |
| | 11 | | | | 1,0000 | 0,9999 | 0,9993 | 0,9970 | 0,9894 | 0,9699 | 0,9283 | | 0,9981 |
| | 12 | | | | | 1,0000 | 0,9999 | 0,9994 | 0,9975 | 0,9914 | 0,9755 | | 0,9997 |
| | 13 | | | | | | 1,0000 | 0,9999 | 0,9995 | 0,9981 | 0,9936 | | 1,0000 |
| | 14 | | | | | | | 1,0000 | 0,9999 | 0,9997 | 0,9988 | | |
| | 15 | | | | | | | | 1,0000 | 1,0000 | 0,9999 | | |
| | 16 | | | | | | | | | | 1,0000 | | |
| 18 | 0 | 0,3972 | 0,1501 | 0,0536 | 0,0180 | 0,0056 | 0,0016 | 0,0004 | 0,0001 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0376 | 0,0007 |
| | 1 | 0,7735 | 0,4503 | 0,2241 | 0,0991 | 0,0395 | 0,0142 | 0,0046 | 0,0013 | 0,0003 | 0,0001 | 0,1728 | 0,0068 |
| | 2 | 0,9419 | 0,7338 | 0,4797 | 0,2713 | 0,1353 | 0,0600 | 0,0236 | 0,0082 | 0,0025 | 0,0007 | 0,4027 | 0,0326 |
| | 3 | 0,9891 | 0,9018 | 0,7202 | 0,5010 | 0,3057 | 0,1646 | 0,0783 | 0,0328 | 0,0120 | 0,0038 | 0,6479 | 0,1017 |
| | 4 | 0,9985 | 0,9718 | 0,8794 | 0,7164 | 0,5187 | 0,3327 | 0,1886 | 0,0942 | 0,0411 | 0,0154 | 0,8318 | 0,2311 |
| | 5 | 0,9998 | 0,9936 | 0,9581 | 0,8671 | 0,7175 | 0,5344 | 0,3550 | 0,2088 | 0,1077 | 0,0481 | 0,9347 | 0,4122 |
| | 6 | 1,0000 | 0,9988 | 0,9882 | 0,9487 | 0,8610 | 0,7217 | 0,5491 | 0,3743 | 0,2258 | 0,1189 | 0,9794 | 0,6085 |
| | 7 | | 0,9998 | 0,9973 | 0,9837 | 0,9431 | 0,8593 | 0,7283 | 0,5634 | 0,3915 | 0,2403 | 0,9947 | 0,7767 |
| | 8 | | 1,0000 | 0,9995 | 0,9957 | 0,9807 | 0,9404 | 0,8609 | 0,7368 | 0,5778 | 0,4073 | 0,9989 | 0,8924 |
| | 9 | | | 0,9999 | 0,9991 | 0,9946 | 0,9790 | 0,9403 | 0,8653 | 0,7473 | 0,5927 | 0,9998 | 0,9567 |
| | 10 | | | 1,0000 | 0,9998 | 0,9988 | 0,9939 | 0,9788 | 0,9424 | 0,8720 | 0,7597 | 1,0000 | 0,9856 |
| | 11 | | | | 1,0000 | 0,9998 | 0,9986 | 0,9938 | 0,9797 | 0,9463 | 0,8811 | | 0,9961 |
| | 12 | | | | | 1,0000 | 0,9997 | 0,9986 | 0,9942 | 0,9817 | 0,9519 | | 0,9991 |
| | 13 | | | | | | 1,0000 | 0,9997 | 0,9987 | 0,9951 | 0,9846 | | 0,9999 |
| | 14 | | | | | | | 1,0000 | 0,9998 | 0,9990 | 0,9962 | | 1,0000 |
| | 15 | | | | | | | | 1,0000 | 0,9999 | 0,9993 | | |
| | 16 | | | | | | | | | 1,0000 | 0,9999 | | |
| | 17 | | | | | | | | | | 1,0000 | | |
| 19 | 0 | 0,3774 | 0,1351 | 0,0456 | 0,0144 | 0,0042 | 0,0011 | 0,0003 | 0,0001 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0313 | 0,0005 |
| | 1 | 0,7547 | 0,4203 | 0,1985 | 0,0829 | 0,0310 | 0,0104 | 0,0031 | 0,0008 | 0,0002 | 0,0000 | 0,1502 | 0,0047 |
| | 2 | 0,9335 | 0,7054 | 0,4413 | 0,2369 | 0,1113 | 0,0462 | 0,0170 | 0,0055 | 0,0015 | 0,0004 | 0,3643 | 0,0240 |
| | 3 | 0,9868 | 0,8850 | 0,6841 | 0,4551 | 0,2631 | 0,1332 | 0,0591 | 0,0230 | 0,0077 | 0,0022 | 0,6070 | 0,0787 |
| | 4 | 0,9980 | 0,9648 | 0,8556 | 0,6733 | 0,4654 | 0,2822 | 0,1500 | 0,0696 | 0,0280 | 0,0096 | 0,8011 | 0,1879 |
| | 5 | 0,9998 | 0,9914 | 0,9463 | 0,8369 | 0,6678 | 0,4739 | 0,2968 | 0,1629 | 0,0777 | 0,0318 | 0,9176 | 0,3519 |
| | 6 | 1,0000 | 0,9983 | 0,9837 | 0,9324 | 0,8251 | 0,6655 | 0,4812 | 0,3081 | 0,1727 | 0,0835 | 0,9719 | 0,5431 |
| | 7 | | 0,9997 | 0,9959 | 0,9767 | 0,9225 | 0,8180 | 0,6656 | 0,4878 | 0,3169 | 0,1796 | 0,9921 | 0,7207 |
| | 8 | | 1,0000 | 0,9992 | 0,9933 | 0,9713 | 0,9161 | 0,8145 | 0,6675 | 0,4940 | 0,3238 | 0,9982 | 0,8538 |
| | 9 | | | 0,9999 | 0,9984 | 0,9911 | 0,9674 | 0,9125 | 0,8139 | 0,6710 | 0,5000 | 0,9996 | 0,9352 |
| | 10 | | | 1,0000 | 0,9997 | 0,9977 | 0,9895 | 0,9653 | 0,9115 | 0,8159 | 0,6762 | 0,9999 | 0,9759 |
| | 11 | | | | 1,0000 | 0,9995 | 0,9972 | 0,9886 | 0,9648 | 0,9129 | 0,8204 | 1,0000 | 0,9926 |
| | 12 | | | | | 0,9999 | 0,9994 | 0,9969 | 0,9884 | 0,9658 | 0,9165 | | 0,9981 |
| | 13 | | | | | 1,0000 | 0,9999 | 0,9993 | 0,9969 | 0,9891 | 0,9682 | | 0,9996 |
| | 14 | | | | | | 1,0000 | 0,9999 | 0,9994 | 0,9972 | 0,9904 | | 0,9999 |
| | 15 | | | | | | | 1,0000 | 0,9999 | 0,9995 | 0,9978 | | 1,0000 |
| | 16 | | | | | | | | 1,0000 | 0,9999 | 0,9996 | | |
| | 17 | | | | | | | | | 1,0000 | 1,0000 | | |

| | | *p* | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *n* | *x* | 0,01 | 0,05 | 0,10 | 0,15 | 0,20 | 0,25 | 0,30 | 0,35 | 0,40 | 0,45 | 0,50 | 1/6 | 1/3 |
| 20 | 0 | | 0,3585 | 0,1216 | 0,0388 | 0,0115 | 0,0032 | 0,0008 | 0,0002 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0261 | 0,0003 |
| | 1 | | 0,7358 | 0,3917 | 0,1756 | 0,0692 | 0,0243 | 0,0076 | 0,0021 | 0,0005 | 0,0001 | 0,0000 | 0,1304 | 0,0033 |
| | 2 | | 0,9245 | 0,6769 | 0,4049 | 0,2061 | 0,0913 | 0,0355 | 0,0121 | 0,0036 | 0,0009 | 0,0002 | 0,3287 | 0,0176 |
| | 3 | | 0,9841 | 0,8670 | 0,6477 | 0,4114 | 0,2252 | 0,1071 | 0,0444 | 0,0160 | 0,0049 | 0,0013 | 0,5665 | 0,0604 |
| | 4 | | 0,9974 | 0,9568 | 0,8298 | 0,6296 | 0,4148 | 0,2375 | 0,1182 | 0,0510 | 0,0189 | 0,0059 | 0,7687 | 0,1515 |
| | 5 | | 0,9997 | 0,9887 | 0,9327 | 0,8042 | 0,6172 | 0,4164 | 0,2454 | 0,1256 | 0,0553 | 0,0207 | 0,8982 | 0,2972 |
| | 6 | | 1,0000 | 0,9976 | 0,9781 | 0,9133 | 0,7858 | 0,6080 | 0,4166 | 0,2500 | 0,1299 | 0,0577 | 0,9629 | 0,4793 |
| | 7 | | | 0,9996 | 0,9941 | 0,9679 | 0,8982 | 0,7723 | 0,6010 | 0,4159 | 0,2520 | 0,1316 | 0,9887 | 0,6615 |
| | 8 | | | 0,9999 | 0,9987 | 0,9900 | 0,9591 | 0,8867 | 0,7624 | 0,5956 | 0,4143 | 0,2517 | 0,9972 | 0,8095 |
| | 9 | | | 1,0000 | 0,9998 | 0,9974 | 0,9861 | 0,9520 | 0,8782 | 0,7553 | 0,5914 | 0,4119 | 0,9994 | 0,9081 |
| | 10 | | | | 1,0000 | 0,9994 | 0,9961 | 0,9829 | 0,9468 | 0,8725 | 0,7507 | 0,5881 | 0,9999 | 0,9624 |
| | 11 | | | | | 0,9999 | 0,9991 | 0,9949 | 0,9804 | 0,9435 | 0,8692 | 0,7483 | 1,0000 | 0,9870 |
| | 12 | | | | | 1,0000 | 0,9998 | 0,9987 | 0,9940 | 0,9790 | 0,9420 | 0,8684 | | 0,9963 |
| | 13 | | | | | | 1,0000 | 0,9997 | 0,9985 | 0,9935 | 0,9786 | 0,9423 | | 0,9991 |
| | 14 | | | | | | | 1,0000 | 0,9997 | 0,9984 | 0,9936 | 0,9793 | | 0,9998 |
| | 15 | | | | | | | | 1,0000 | 0,9997 | 0,9985 | 0,9941 | | 1,0000 |
| | 16 | | | | | | | | | 1,0000 | 0,9997 | 0,9987 | | |
| | 17 | | | | | | | | | | 1,0000 | 0,9998 | | |
| | 18 | | | | | | | | | | | 1,0000 | | |
| 50 | 0 | 0,6050 | 0,0769 | 0,0052 | 0,0003 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0000 |
| | 1 | 0,9106 | 0,2794 | 0,0338 | 0,0029 | 0,0002 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0012 | 0,0000 |
| | 2 | 0,9862 | 0,5405 | 0,1117 | 0,0142 | 0,0013 | 0,0001 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0066 | 0,0000 |
| | 3 | 0,9984 | 0,7604 | 0,2503 | 0,0460 | 0,0057 | 0,0005 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0238 | 0,0000 |
| | 4 | 0,9999 | 0,8964 | 0,4312 | 0,1121 | 0,0185 | 0,0021 | 0,0002 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0643 | 0,0000 |
| | 5 | 1,0000 | 0,9622 | 0,6161 | 0,2194 | 0,0480 | 0,0070 | 0,0007 | 0,0001 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,1388 | 0,0001 |
| | 6 | | 0,9882 | 0,7702 | 0,3613 | 0,1034 | 0,0194 | 0,0025 | 0,0002 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,2506 | 0,0005 |
| | 7 | | 0,9968 | 0,8779 | 0,5188 | 0,1904 | 0,0453 | 0,0073 | 0,0008 | 0,0001 | 0,0000 | 0,0000 | 0,3911 | 0,0017 |
| | 8 | | 0,9992 | 0,9421 | 0,6681 | 0,3073 | 0,0916 | 0,0183 | 0,0025 | 0,0002 | 0,0000 | 0,0000 | 0,5421 | 0,0050 |
| | 9 | | 0,9998 | 0,9755 | 0,7911 | 0,4437 | 0,1637 | 0,0402 | 0,0067 | 0,0008 | 0,0001 | 0,0000 | 0,6830 | 0,0127 |
| | 10 | | 1,0000 | 0,9906 | 0,8801 | 0,5836 | 0,2622 | 0,0789 | 0,0160 | 0,0022 | 0,0002 | 0,0000 | 0,7986 | 0,0284 |
| | 11 | | | 0,9968 | 0,9372 | 0,7107 | 0,3816 | 0,1390 | 0,0342 | 0,0057 | 0,0006 | 0,0000 | 0,8827 | 0,0570 |
| | 12 | | | 0,9990 | 0,9699 | 0,8139 | 0,5110 | 0,2229 | 0,0661 | 0,0133 | 0,0018 | 0,0002 | 0,9373 | 0,1035 |
| | 13 | | | 0,9997 | 0,9868 | 0,8894 | 0,6370 | 0,3279 | 0,1163 | 0,0280 | 0,0045 | 0,0005 | 0,9693 | 0,1715 |
| | 14 | | | 0,9999 | 0,9947 | 0,9393 | 0,7481 | 0,4468 | 0,1878 | 0,0540 | 0,0104 | 0,0013 | 0,9862 | 0,2612 |
| | 15 | | | 1,0000 | 0,9981 | 0,9692 | 0,8369 | 0,5692 | 0,2801 | 0,0955 | 0,0220 | 0,0033 | 0,9943 | 0,3690 |
| | 16 | | | | 0,9993 | 0,9856 | 0,9017 | 0,6839 | 0,3889 | 0,1561 | 0,0427 | 0,0077 | 0,9978 | 0,4868 |
| | 17 | | | | 0,9998 | 0,9937 | 0,9449 | 0,7822 | 0,5060 | 0,2369 | 0,0765 | 0,0164 | 0,9992 | 0,6046 |
| | 18 | | | | 0,9999 | 0,9975 | 0,9713 | 0,8594 | 0,6216 | 0,3356 | 0,1273 | 0,0325 | 0,9997 | 0,7126 |
| | 19 | | | | 1,0000 | 0,9991 | 0,9861 | 0,9152 | 0,7264 | 0,4465 | 0,1974 | 0,0595 | 0,9999 | 0,8036 |
| | 20 | | | | | 0,9997 | 0,9937 | 0,9522 | 0,8139 | 0,5610 | 0,2862 | 0,1013 | 1,0000 | 0,8741 |
| | 21 | | | | | 0,9999 | 0,9974 | 0,9749 | 0,8813 | 0,6701 | 0,3900 | 0,1611 | | 0,9244 |
| | 22 | | | | | 1,0000 | 0,9990 | 0,9877 | 0,9290 | 0,7660 | 0,5019 | 0,2399 | | 0,9576 |
| | 23 | | | | | | 0,9996 | 0,9944 | 0,9604 | 0,8438 | 0,6134 | 0,3359 | | 0,9778 |
| | 24 | | | | | | 0,9999 | 0,9976 | 0,9793 | 0,9022 | 0,7160 | 0,4439 | | 0,9892 |
| | 25 | | | | | | 1,0000 | 0,9991 | 0,9900 | 0,9427 | 0,8034 | 0,5561 | | 0,9951 |
| | 26 | | | | | | | 0,9997 | 0,9955 | 0,9686 | 0,8721 | 0,6641 | | 0,9979 |
| | 27 | | | | | | | 0,9999 | 0,9981 | 0,9840 | 0,9220 | 0,7601 | | 0,9992 |
| | 28 | | | | | | | 1,0000 | 0,9993 | 0,9924 | 0,9556 | 0,8389 | | 0,9997 |
| | 29 | | | | | | | | 0,9997 | 0,9966 | 0,9765 | 0,8987 | | 0,9999 |
| | 30 | | | | | | | | 0,9999 | 0,9986 | 0,9884 | 0,9405 | | 1,0000 |
| | 31 | | | | | | | | 1,0000 | 0,9995 | 0,9947 | 0,9675 | | |
| | 32 | | | | | | | | | 0,9998 | 0,9978 | 0,9836 | | |
| | 33 | | | | | | | | | 0,9999 | 0,9991 | 0,9923 | | |
| | 34 | | | | | | | | | 1,0000 | 0,9997 | 0,9967 | | |
| | 35 | | | | | | | | | | 0,9999 | 0,9987 | | |
| | 36 | | | | | | | | | | 1,0000 | 0,9995 | | |
| | 37 | | | | | | | | | | | 0,9998 | | |
| | 38 | | | | | | | | | | | 1,0000 | | |

| | | p | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| n | x | 0,01 | 0,05 | 0,10 | 0,15 | 0,20 | 0,25 | 0,30 | 0,35 | 0,40 | 0,45 | 0,50 | 1/6 | 1/3 |
| 100 | 0 | 0,3660 | 0,0059 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| | 1 | 0,7358 | 0,0371 | 0,0003 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| | 2 | 0,9206 | 0,1183 | 0,0019 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| | 3 | 0,9816 | 0,2578 | 0,0078 | 0,0001 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| | 4 | 0,9966 | 0,4360 | 0,0237 | 0,0004 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0000 |
| | 5 | 0,9995 | 0,6160 | 0,0576 | 0,0016 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0004 | 0,0000 |
| | 6 | 0,9999 | 0,7660 | 0,1172 | 0,0047 | 0,0001 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0013 | 0,0000 |
| | 7 | 1,0000 | 0,8720 | 0,2061 | 0,0122 | 0,0003 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0038 | 0,0000 |
| | 8 | | 0,9369 | 0,3209 | 0,0275 | 0,0009 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0095 | 0,0000 |
| | 9 | | 0,9718 | 0,4513 | 0,0551 | 0,0023 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0213 | 0,0000 |
| | 10 | | 0,9885 | 0,5832 | 0,0994 | 0,0057 | 0,0001 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0427 | 0,0000 |
| | 11 | | 0,9957 | 0,7030 | 0,1635 | 0,0126 | 0,0004 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0777 | 0,0000 |
| | 12 | | 0,9985 | 0,8018 | 0,2473 | 0,0253 | 0,0010 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,1297 | 0,0000 |
| | 13 | | 0,9995 | 0,8761 | 0,3474 | 0,0469 | 0,0025 | 0,0001 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,2000 | 0,0000 |
| | 14 | | 0,9999 | 0,9274 | 0,4572 | 0,0804 | 0,0054 | 0,0002 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,2874 | 0,0000 |
| | 15 | | 1,0000 | 0,9601 | 0,5683 | 0,1285 | 0,0111 | 0,0004 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,3877 | 0,0000 |
| | 16 | | | 0,9794 | 0,6725 | 0,1923 | 0,0211 | 0,0010 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,4942 | 0,0001 |
| | 17 | | | 0,9900 | 0,7633 | 0,2712 | 0,0376 | 0,0022 | 0,0001 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,5994 | 0,0002 |
| | 18 | | | 0,9954 | 0,8372 | 0,3621 | 0,0630 | 0,0045 | 0,0001 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,6965 | 0,0005 |
| | 19 | | | 0,9980 | 0,8935 | 0,4602 | 0,0995 | 0,0089 | 0,0003 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,7803 | 0,0011 |
| | 20 | | | 0,9992 | 0,9337 | 0,5595 | 0,1488 | 0,0165 | 0,0008 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,8481 | 0,0024 |
| | 21 | | | 0,9997 | 0,9607 | 0,6540 | 0,2114 | 0,0288 | 0,0017 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,8998 | 0,0048 |
| | 22 | | | 0,9999 | 0,9779 | 0,7389 | 0,2864 | 0,0479 | 0,0034 | 0,0001 | 0,0000 | 0,0000 | 0,9369 | 0,0091 |
| | 23 | | | 1,0000 | 0,9881 | 0,8109 | 0,3711 | 0,0755 | 0,0066 | 0,0003 | 0,0000 | 0,0000 | 0,9621 | 0,0164 |
| | 24 | | | | 0,9939 | 0,8686 | 0,4617 | 0,1136 | 0,0121 | 0,0006 | 0,0000 | 0,0000 | 0,9783 | 0,0281 |
| | 25 | | | | 0,9970 | 0,9125 | 0,5535 | 0,1631 | 0,0211 | 0,0012 | 0,0000 | 0,0000 | 0,9881 | 0,0458 |
| | 26 | | | | 0,9986 | 0,9442 | 0,6417 | 0,2244 | 0,0351 | 0,0024 | 0,0001 | 0,0000 | 0,9938 | 0,0715 |
| | 27 | | | | 0,9994 | 0,9658 | 0,7224 | 0,2964 | 0,0558 | 0,0046 | 0,0002 | 0,0000 | 0,9969 | 0,1066 |
| | 28 | | | | 0,9997 | 0,9800 | 0,7925 | 0,3768 | 0,0848 | 0,0084 | 0,0004 | 0,0000 | 0,9985 | 0,1524 |
| | 29 | | | | 0,9999 | 0,9888 | 0,8505 | 0,4623 | 0,1236 | 0,0148 | 0,0008 | 0,0000 | 0,9993 | 0,2093 |
| | 30 | | | | 1,0000 | 0,9939 | 0,8962 | 0,5491 | 0,1730 | 0,0248 | 0,0015 | 0,0000 | 0,9997 | 0,2766 |
| | 31 | | | | | 0,9969 | 0,9307 | 0,6331 | 0,2331 | 0,0398 | 0,0030 | 0,0001 | 0,9999 | 0,3525 |
| | 32 | | | | | 0,9984 | 0,9554 | 0,7107 | 0,3029 | 0,0615 | 0,0055 | 0,0002 | 1,0000 | 0,4344 |
| | 33 | | | | | 0,9993 | 0,9724 | 0,7793 | 0,3803 | 0,0913 | 0,0098 | 0,0004 | | 0,5188 |
| | 34 | | | | | 0,9997 | 0,9836 | 0,8371 | 0,4624 | 0,1303 | 0,0166 | 0,0009 | | 0,6019 |
| | 35 | | | | | 0,9999 | 0,9906 | 0,8839 | 0,5458 | 0,1795 | 0,0272 | 0,0018 | | 0,6803 |
| | 36 | | | | | 0,9999 | 0,9948 | 0,9201 | 0,6269 | 0,2386 | 0,0429 | 0,0033 | | 0,7511 |
| | 37 | | | | | 1,0000 | 0,9973 | 0,9470 | 0,7024 | 0,3068 | 0,0651 | 0,0060 | | 0,8123 |
| | 38 | | | | | | 0,9986 | 0,9660 | 0,7699 | 0,3822 | 0,0951 | 0,0105 | | 0,8630 |
| | 39 | | | | | | 0,9993 | 0,9790 | 0,8276 | 0,4621 | 0,1343 | 0,0176 | | 0,9034 |
| | 40 | | | | | | 0,9997 | 0,9875 | 0,8750 | 0,5433 | 0,1831 | 0,0284 | | 0,9341 |
| | 41 | | | | | | 0,9999 | 0,9928 | 0,9123 | 0,6225 | 0,2415 | 0,0443 | | 0,9566 |
| | 42 | | | | | | 0,9999 | 0,9960 | 0,9406 | 0,6967 | 0,3087 | 0,0666 | | 0,9724 |
| | 43 | | | | | | 1,0000 | 0,9979 | 0,9611 | 0,7635 | 0,3828 | 0,0967 | | 0,9831 |
| | 44 | | | | | | | 0,9989 | 0,9754 | 0,8211 | 0,4613 | 0,1356 | | 0,9900 |
| | 45 | | | | | | | 0,9995 | 0,9850 | 0,8689 | 0,5413 | 0,1841 | | 0,9943 |
| | 46 | | | | | | | 0,9997 | 0,9912 | 0,9070 | 0,6196 | 0,2421 | | 0,9969 |
| | 47 | | | | | | | 0,9999 | 0,9950 | 0,9362 | 0,6931 | 0,3086 | | 0,9983 |
| | 48 | | | | | | | 0,9999 | 0,9973 | 0,9577 | 0,7596 | 0,3822 | | 0,9991 |
| | 49 | | | | | | | 1,0000 | 0,9985 | 0,9729 | 0,8173 | 0,4602 | | 0,9996 |
| | 50 | | | | | | | | 0,9993 | 0,9832 | 0,8654 | 0,5398 | | 0,9998 |
| | 51 | | | | | | | | 0,9996 | 0,9900 | 0,9040 | 0,6178 | | 0,9999 |
| | 52 | | | | | | | | 0,9998 | 0,9942 | 0,9338 | 0,6914 | | 1,0000 |
| | 53 | | | | | | | | 0,9999 | 0,9968 | 0,9559 | 0,7579 | | |
| | 54 | | | | | | | | 1,0000 | 0,9983 | 0,9716 | 0,8159 | | |
| | 55 | | | | | | | | | 0,9991 | 0,9824 | 0,8644 | | |
| | 56 | | | | | | | | | 0,9996 | 0,9894 | 0,9033 | | |
| | 57 | | | | | | | | | 0,9998 | 0,9939 | 0,9334 | | |
| | 58 | | | | | | | | | 0,9999 | 0,9966 | 0,9557 | | |
| | 59 | | | | | | | | | 1,0000 | 0,9982 | 0,9716 | | |
| | 60 | | | | | | | | | | 0,9991 | 0,9824 | | |
| | 61 | | | | | | | | | | 0,9995 | 0,9895 | | |
| | 62 | | | | | | | | | | 0,9998 | 0,9940 | | |
| | 63 | | | | | | | | | | 0,9999 | 0,9967 | | |
| | 64 | | | | | | | | | | 1,0000 | 0,9982 | | |
| | 65 | | | | | | | | | | | 0,9991 | | |
| | 66 | | | | | | | | | | | 0,9996 | | |
| | 67 | | | | | | | | | | | 0,9998 | | |
| | 68 | | | | | | | | | | | 0,9999 | | |
| | 69 | | | | | | | | | | | 1,0000 | | |