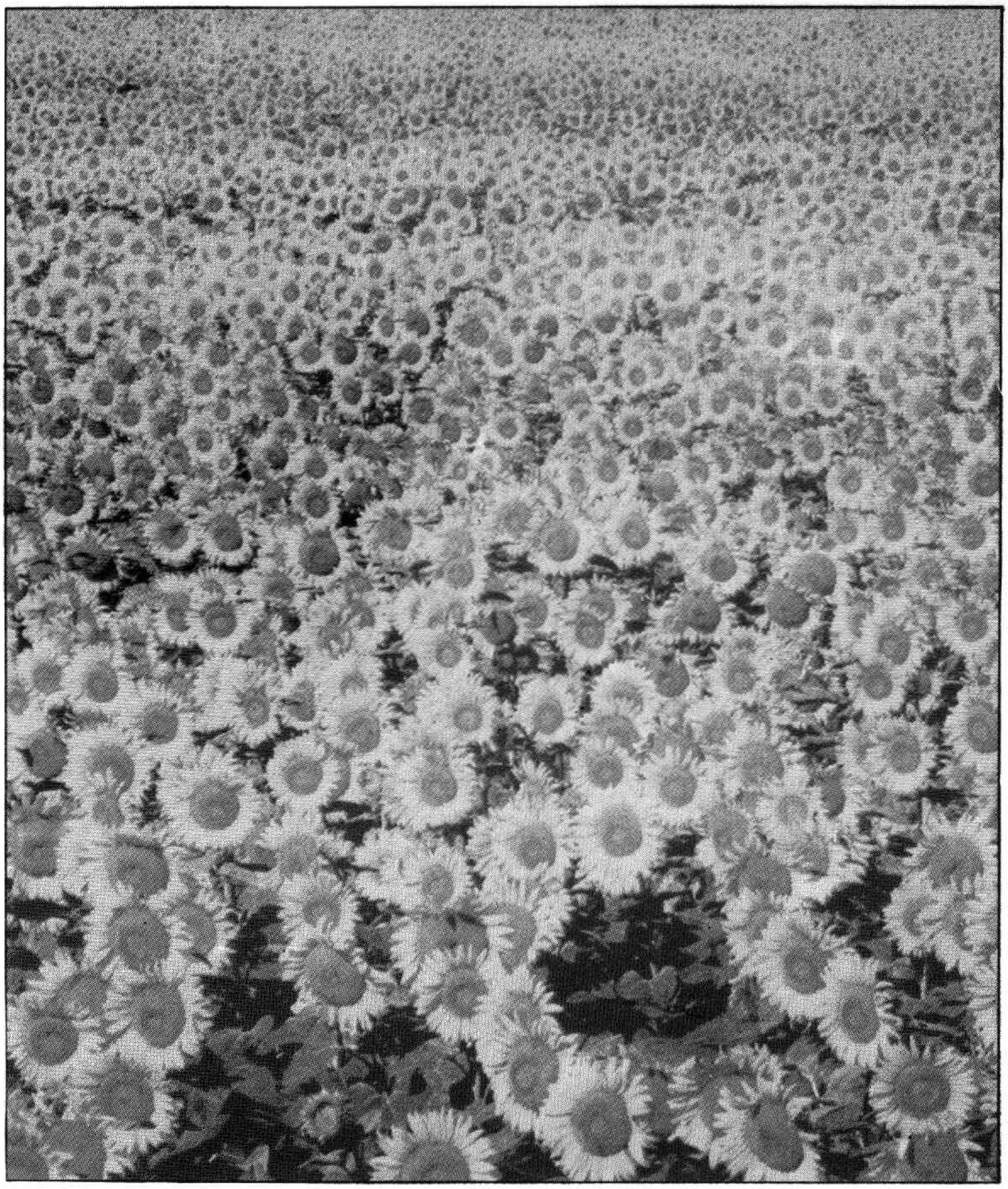
Toetsen van hypothesen



TOETSEN VAN HYPOTHESEN

TOETSEN VAN HYPOTHESEN

OW&OC

Tiberdreef 4 - 3561 GG Utrecht

TOETSEN VAN HYPOTHESEN

Een produktie ten behoeve van de experimenten in het kader van de Herverkaveling Eindexamenprogramma's Wiskunde I en II V.W.O.

Samenstelling: Martin Kindt
Jan de Lange Jzn

Vormgeving: Ellen Hanepen

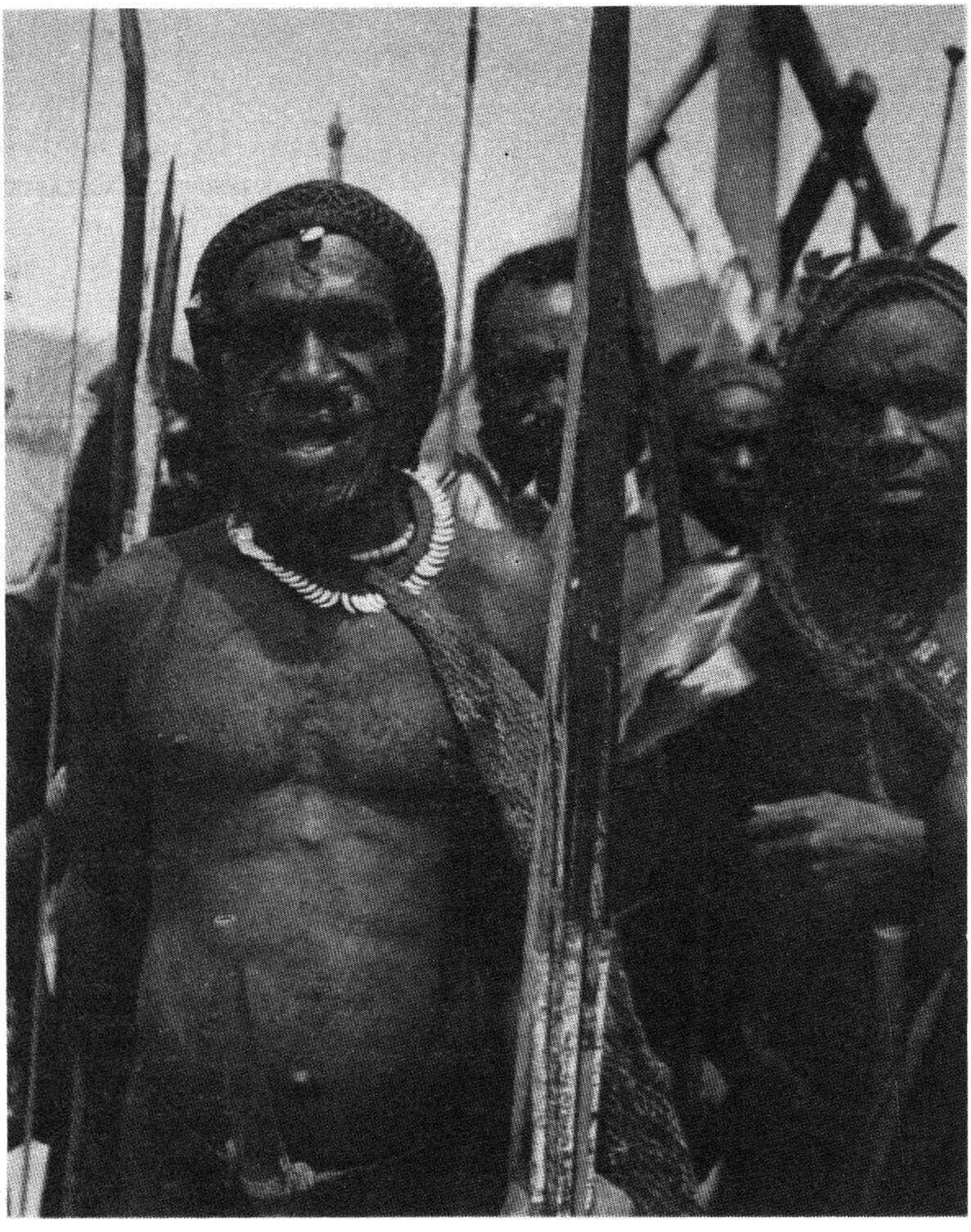
Utrecht, juli 1984.

INHOUDSOPGAVE

1 OVERSCHRIJDINGSKANSEN

Embleem Wereldgezondheidsorganisatie

Een arts wordt door de 'World Health Organization' uitgezonden naar Nieuw Guinea om te bestuderen in welke mate de huidziekte framboesia (frambozenziekte) in een bepaalde streek voorkomt.
In een gezondheidsrapport over Nieuw Guinea wordt gesteld dat in die streek ongeveer 50% van de papoea's aan huidaandoeningen ten gevolge van framboesia lijdt. Een plaatselijke arts spreekt dit tegen. Hij beweert dat één kwart van de bevolking framboesia heeft.
Indien het percentage framboesialijders overeenkomt met wat vermeld staat in het gezondheidsrapport, wil de W.H.O. op korte termijn een uitgebreid genezingsprogramma (behandeling met peniciline) uit laten voeren. Is het percentage daarentegen beduidend lager (bijv. 25% of minder), dan zal aan een ander project van gezondheidszorg de voorkeur worden gegeven.
Bij aankomst in Nieuw Guinea besluit de W.H.O.-arts een aselecte steekproef van 50 papoea's uit de streek te nemen en deze mensen te onderzoeken. Zijn conclusie zal hij baseren op het aantal framboesialijders in de steekproef.



Papuas van de Baliemvallei in de Pegunungan Maoke (Centraal Bergland) gereed voor de jacht.

≫ 1. Hij treft in zijn steekproef 18 framboesialijders aan.
Stel je voor dat het rapport de waarheid spreekt, dus dat 50% van de bevolking een of andere vorm van framboesia heeft.

a. Hoe groot is de kans dat er in een aselecte steekproef van 50 *ten hoogste* 18 mensen zijn die framboesia hebben?

b. Hoe denk je (gezien je antwoord op vraag a) over de uitspraak in het gezondheidsrapport?

Over de mate waarin framboesia voorkomt in een deel van Nieuw Guinea zijn twee *hypothesen* naar voren gebracht:
- de hypothese in het gezondheidsrapport: *50% van de bevolking heeft framboesia.*
- de hypothese van de plaatselijke arts: *25% heeft framboesia.*

De eerste hypothese is de zogenaamde *nulhypothese* (H_0), dat is de te toetsen hypothese.

De tweede hypothese (H_1) is de zogenaamde *alternatieve hypothese* of *tegenhypothese.*

De toetsing van de hypothese H_0 bestaat uit een statistisch onderzoek; dat onderzoek is gebaseerd op een aselecte steekproef. Omdat het hier gaat om een experiment waarbij voor elke proefpersoon twee uitkomsten mogelijk zijn (wèl framboesia/geen framboesia) kunnen we de binomiale verdeling als kansmodel nemen.
In termen van dit model worden de beide hypothesen nu kort opgeschreven:

$$\boxed{\begin{array}{l} H_0 \text{ stelt: } p = 0{,}5 \\ H_1 \text{ stelt: } p = 0{,}25 \end{array}}$$

(hierbij is p de kans dat een aselect gekozen persoon framboesia heeft).
Of nog korter:

$$\boxed{\begin{array}{l} H_0: p = 0{,}5 \\ H_1: p = 0{,}25 \end{array}}$$

Het aantal framboesialijders in een steekproef van 50 papoea's is een binomiale stochast X; die stochast wordt hier de *toetsingsgrootheid* genoemd.

≫ 2. a. Hoe groot is, gesteld dat H_0 waar is, de verwachtingswaarde van X? En de standaarddeviatie?

b. De waarde van X in de steekproef zal i.h.a. afwijken van de verwachtingswaarde. Onze arts vond een afwijking 'naar beneden' van 7. Waarom zijn we in dit geval alleen geïnteresseerd in afwijkingen 'naar beneden'?

In opgave ≫ 1 heb je - in de veronderstelling $p = 0,5$ - de kans uitgerekend dat de waarde van X ten hoogste 18 is.
Die kans noteren we zó:

$$P(X \leqq 18 | p = 0,5) \quad \text{of} \quad P(X \leqq 18 | H_0).$$

Deze wordt de *overschrijdingskans* bij het experiment genoemd.
Volgens de binomiale tabel is de overschrijdingskans hier gelijk aan 0,0325 ofwel 3¼%.

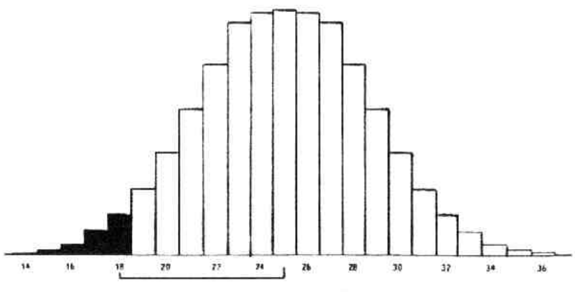
≫ 3. Stel je voor dat de arts niet $X = 18$, maar $X = 23$ gevonden zou hebben.

a. Hoe groot zou in dat geval de overschrijdingskans zijn?

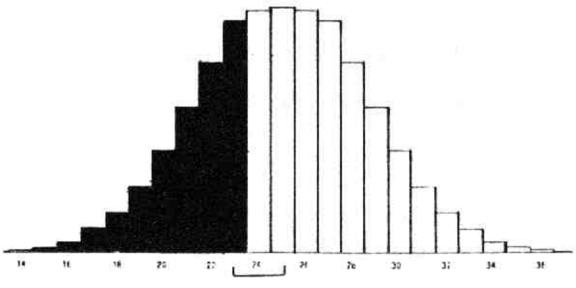
b. Zou er bij die uitkomst reden genoeg zijn om te twijfelen aan de bewering in het gezondheidsrapport?

Bij het berekenen van de overschrijdingskans ga je uit van de nulhypothese. In de steekproef vind je een afwijking van de te verwachten waarde X. Je wilt weten hoe groot de kans *op een minstens zo grote* afwijking is als je opnieuw een steekproef van dezelfde omvang zou trekken.
Je zou kunnen zeggen: de overschrijdingskans is een kans op een resultaat dat 'even slecht of slechter' is dan wat men in de steekproef vond.

In de figuur op blz. 5 zie je de overschrijdingskans bij de resultaten $X = 18$ en $X = 23$ in een kanshistogram voor $p = 0,5$.



Grote afwijking van verwachtingswaarde, *kleine overschrijdingskans*. Reden om te twijfelen aan H_0, want de uitkomst van de steekproef is zeldzaam!



Kleine afwijking van verwachtingswaarde, *grote overschrijdingskans*. Weinig reden om te twijfelen aan H_0. De uitkomst van de steekproef is niet abnormaal.

Bij een grote overschrijdingskans, bijv. 33%, is er niet voldoende reden om te twijfelen aan de nulhypothese. Immers, als je een groot aantal aselecte steekproeven-van-50 zou trekken, zou je gemiddeld in één van de drie keer een minstens zo grote afwijking vinden.
Bij een kleinere overschrijdingskans, bijv. 10%, wordt de zaak wel dubieus. Toch kun je volhouden dat je ook nu de nulhypothese niet wilt afkeuren. In één van de tien gevallen zou je immers een even afwijkend resultaat gevonden hebben.
Bij een zeer kleine overschrijdingskans, bijv. 0,1%, is het duidelijk wat je conclusie moet zijn. Het resultaat van de steekproef komt zo zelden voor dat er reden genoeg lijkt om de nulhypothese te verwerpen.
Ergens tussen die 0,1% en 10% trekken we een grens.
Gebruikelijke grenzen in de statistiek zijn: 5%, 2½%, 1%, 1‰.
Men noemt zo'n grens een *significantie-niveau*.
Bij 5% zou je kunnen spreken van zwak significant, bij 0,1% van sterk significant.
In ons geval (zie opgave ≫ 1) hebben we een overschrijdingskans gevonden van 3¼%, een tamelijk significante aanwijzing om H_0 te verwerpen!

In het framboesia-voorbeeld zijn de parameters van het binomiale kansmodel erg mooi: $p = 0,5$ en $n = 50$. Dit maakt het mogelijk om de binimiale tabel te gebruiken bij het berekenen van de overschrijdingskans.
In de praktijk zullen die waarden (van p en n) vaak niet zo mooi zijn.
Geen nood, want de binomiale verdeling laat zich al gauw goed benaderen door de normale verdeling.

≫ 4. Veronderstel dat de arts zijn steekproef 1½ keer zo groot genomen had en ook 1½ keer zoveel zieke papoea's had aangetroffen (dus 27 van de 75).

a. Denk je (zonder raadpleging van de tabel) dat dit een meer significante, even significante of minder significante aanwijzing is om H_0 te verwerpen?

b. Bereken voor dit geval de overschrijdingskans met behulp van de normale tabel.

De hypothesen H_0 en H_1 zijn niet uitwisselbaar!
Veronderstel dat de W.H.O. meer vertrouwen had gesteld in de mening van de plaatselijke arts dan in het gezondheidsrapport.
In dat geval zou de te toetsen nulhypothese zijn:

$$H_0: p = 0{,}25$$

en de tegenhypothese: $H_1: p = 0{,}50$.

≫ 5. De steekproef bestaat weer uit 50 personen.

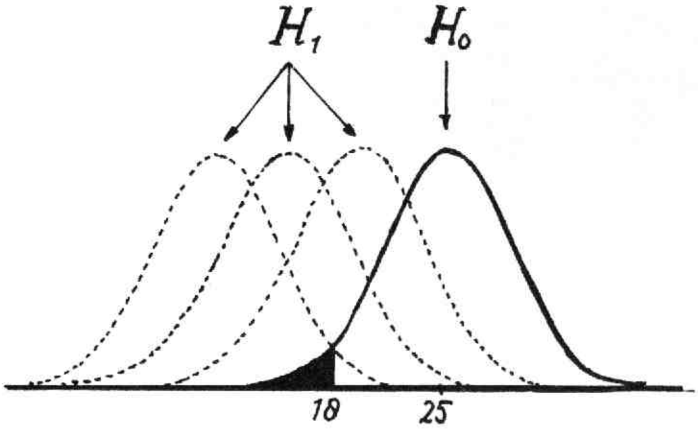
a. Hoe groot is in dit geval de verwachtingswaarde resp. de standaarddeviatie van het aantal framboesialijders in de steekproef?

b. Welke afwijkingen van de verwachtingswaarde zijn nu interessant voor de W.H.O.: die naar boven of die naar beneden?

c. Neem aan dat de steekproef weer 18 zieken oplevert.
Welke kans zou je nu de overschrijdingskans noemen?
(Gebruik een notatie als op pag. 3).

d. Hoe groot is deze overschrijdingskans?

2 EENZIJDIG TOETSEN



In het eerste voorbeeld van hoofdstuk 1 werd de hypothese $p=0,5$ (H_0) getoetst tegen $p=0,25$ (H_1).
Afgezien van opgave ≫ 5 (waarin een nieuwe situatie werd geschetst) is nergens gebruik gemaakt van de waarde van p in de tegenhypothese.
De aanduiding $p=0,25$ is alleen maar gebruikt om aan te geven dat we geïnteresseerd waren in een significante afwijking naar beneden.
Eigenlijk hadden we net zo goed kunnen stellen:

H_0: $p=0,50$
H_1: $p<0,50$

In de praktijk gebeurt dat ook zo.
De nulhypothese is 'enkelvoudig' (d.w.z. doet een uitspraak over één waarde van p); de tegenhypothese is 'samengesteld' (bij verwerpen van de nulhypothese zijn er nog een heleboel waarden van p mogelijk).
Men spreekt in dit voorbeeld van een *eenzijdige* toets, omdat er alleen interesse bestaat in afwijkingen naar één kant.

≫ 6. Een zekere kwaal kan met de gangbare geneesmiddelen genezen worden met een kans van 30%.

Een fabrikant heeft een nieuw geneesmiddel uitgevonden. Hij wil dit op de markt gaan brengen als zijn middel beter is dan de tot nu toe gebruikte.

Kortom, hij wil toetsen H_0: $p = 0{,}3$ tegen H_1: $p > 0{,}3$.

Daartoe neemt hij een steekproef van 20 patienten. Tot zijn vreugde blijkt de helft te genezen.

a. Als significantie-niveau neemt hij 2½% (we noteren kortweg: $\alpha = 0{,}025$).

Laat met behulp van de tabel zien dat zijn resultaat niet goed genoeg is om het geneesmiddel op de markt te krijgen.

b. Bij welke uitkomsten van zijn experiment zou hij (bij $\alpha = 0{,}025$) wel overgaan tot het op de markt brengen van het nieuwe geneesmiddel?

≫ 7. Een restauranthouder wil voor een koud buffet een groot aantal blikjes vis bestellen. De winkelier biedt hem een voordelige prijs aan, omdat naar zijn zeggen er wel eens een blikje met bedorven vis tussen zit, gemiddeld één op de twintig.

De restauranthouder is een voorzichtig mens en koopt eerst zes blikjes op proef. Hiervan blijken twee blikjes bedorven vis te bevatten.

Heeft hij reden om de uitspraak van de winkelier in twijfel te trekken. (Neem α = 2½%).

≫ 8. Bij een ander restaurantbedrijf neemt men een veel grotere steekproef (60 blikjes vis).

Hiervan blijken er 7 bedorven vis te bevatten.

Geeft dit reden genoeg om bij een significantie-niveau van 2½% te twijfelen aan de uitspraak van de winkelier uit opgave ≫ 7?

≫ 9. Een woordvoerder van Reagan beweert in 1984 dat 60% van de Amerikaanse bevolking achter de president staat.
Een politicus van de Democratische Partij beweert dat dit (aanzienlijk) minder is.
Ze toetsen de beweringen door 100 aselect gekozen personen te ondervragen.
Bij welke aantallen voorstanders van Reagan verwerp je de bewering van de woordvoerder van de president? (Neem $\alpha = 0{,}05$).

≫ 10. In een nieuw in te richten kantoorgebouw moeten 500 TL-buizen geplaatst worden. Er is keus uit twee typen A en B, waarbij type B aanzienlijk goedkoper is dan A.
Volgens de leverancier van type B is de kwaliteit van beide soorten buizen gelijk. Er worden van beide soorten evenveel buizen geplaatst.
Na zekere tijd heeft men 63 buizen moeten vervangen (19 van type A, 44 van type B).
Toets hiermee de hypothese dat er geen kwaliteitsverschil is.
Kies $\alpha = 0{,}01$.

Munttechniek in de Middeleeuwen. De plaat wordt door hameren op de gewenste dikte gebracht, met een metaalschaar worden de muntplaatjes uitgeknipt en met een munthamer wordt de munt geslagen.

3 TWEEZIJDIGE TOETSEN

De bekende tekst op de rand van de Nederlandse gulden is bij sommige guldens af te lezen als 'kop' boven ligt, terwijl je bij andere 'munt' moet boven houden om de tekst normaal te kunnen lezen.
Er zijn dus, afgezien van de nieuwe gulden, twee typen guldens in omloop, zeg type I en type II.
Ik beweer dat het graveren van de randtekst bij de Rijksmunt willekeurig gebeurt. Mijn hypothese komt dus hierop neer dat de helft van de in omloop zijnde guldens van type I is, ofwel:

$$H_0\text{: } p = \tfrac{1}{2}.$$

Als tegenhypothese kun je stellen dat de verdeling van de twee typen guldens niet fifty-fifty is, m.a.w.

$$H_1\text{: } p \neq \tfrac{1}{2}.$$

Er is hier sprake van een *tweezijdige toets* omdat van te voren geen afwijking ten gunste van één van beide typen vermoed wordt.
Het tweezijdige karakter komt goed tot uiting als je schrijft:

$$H_1\text{: } p > \tfrac{1}{2} \qquad \text{òf} \qquad p < \tfrac{1}{2}.$$

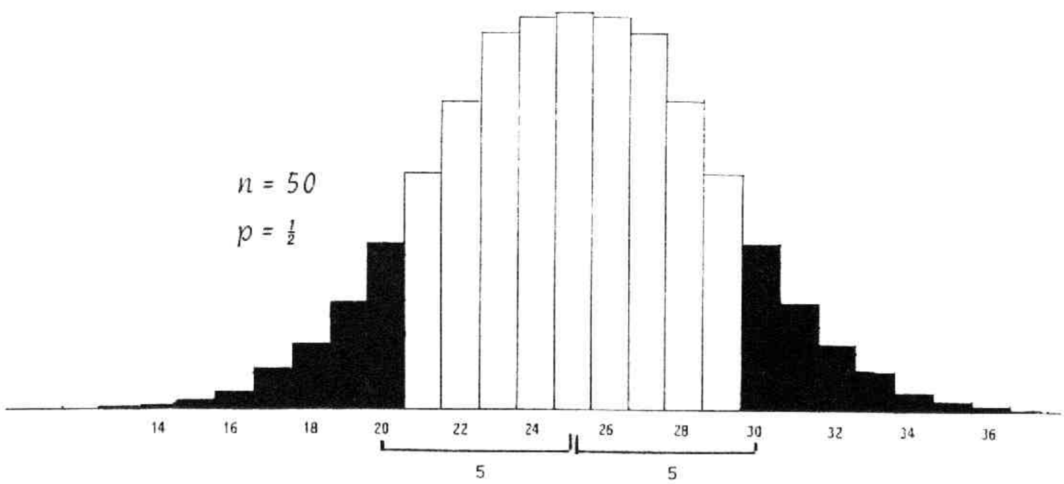
Het verschil met een eenzijdige toets zit hem nu in het berekenen van de overschrijdingskans.
Stel dat je een steekproef van 50 guldens neemt en daarbij 30 guldens vindt van type I.
Dat betekent een afwijking van 5 van het op grond van H_0 verwachte aantal.

De overschrijdingskans is nu de kans op een minstens zo grote afwijking, hetzij naar de ene, hetzij naar de andere kant, dus:

$$P(X \geqq 30 \mid H_0) \quad + \quad P(X \leqq 20 \mid H_0) \quad = \quad 0,1013 \quad + \quad 0,1013 \quad = \quad 0,2026$$

afwijking van
ten minste 5
naar 'boven'

afwijking van
tenminste 5
naar 'beneden'

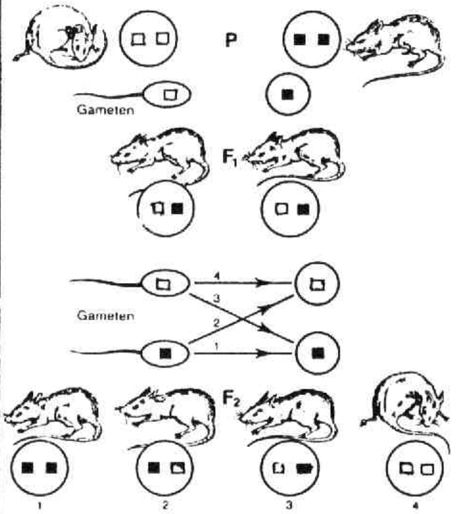


De totale overschrijdingskans is ongeveer 20%. De afwijking van de verwachtingswaarde is niet significant en is geen reden om H_0 te verwerpen.

≫ 11. Verzamel met je klas een steekproef van vijftig (oude) guldens en voer de hierboven beschreven toets uit.

≫ 12. In een wiskunde A-groep zitten 28 leerlingen.
Bij welke aantallen jongens en meisjes kun je spreken van een significant verschil in sexe? ($\alpha = 0,05$).

De wetten van Mendel gelden ook voor het dierenrijk. Een bekend voorbeeld is de kruising van twee muizen, waarvan de ene geheel normaal is en de andere een erfelijke evenwichtsstoornis van een zeer bepaalde aard heeft. Als gevolg van dit gebrek kan zo'n stakker vaak zijn richting niet vinden en draait dan soms uren achtereen in de rondte. Men heeft deze muis daarom de zeer misplaatste naam 'dansmuis' gegeven. De kinderen van een gewone muis een een 'dansmuis' (F_1-generatie) vertonen geen spoor van het gebrek van de vader of moeder; de factor die de normale bouw van de inwendige gehoororganen en daardoor het normale gedrag veroorzaakt, is dominant. Van de F_2-generatie, die door inteelt van de eerste generatie wordt verkregen, vertoont een kwart van de muizen het erfelijke gebrek, een kwart bestaat uit zuivertelende, normale muizen en de helft bevat de gebreksfactor zonder er de uiterlijke kentekenen van te vertonen.



Kruising van een gewone muis en een muis met een erfelijke evenwichtsstoornis ('dansmuis'). De erffactor corresponderend met abnormaal gedrag is recessief, zodat de F_1-generatie fenotypisch normaal is. (Gameten = voortplantingscellen).

≫ 13. Een bioloog wil onderzoeken of bij de tweede generatie nakomelingen (verkregen door inteelt) van een normale muis en een dansmuis de verhouding in aantallen normale muizen en dansmuizen voldoet aan de wet van Mendel.
Hij fokt 120 van zulke muizen en vindt daarbij 79 normale muizen. Is deze afwijking van de wet van Mendel significant? (α = 5%).

Tekentoets

Een landbouwproefstation wil twee tarwesoorten (zeg A en B) vergelijken. Op 20 verschillende percelen zaait men na bemesting de ene helft in met soort A, de andere helft met soort B.
Er komen de volgende opbrengsten:

perc. nr.	opbr.A in kg	opbr.B in kg	perc. nr.	opbr.A in kg	opbr.B in kg	perc. nr.	opbr.A in kg	opbr.B in kg
1	560	470	8	560	590	15	710	630
2	290	280	9	740	700	16	480	450
3	440	390	10	320	310	17	360	350
4	250	270	11	490	440	18	530	570
5	650	600	12	500	480	19	620	570
6	890	750	13	630	620	20	370	340
7	410	380	14	260	300			

Is één van beide soorten beter dan de ander?

We kunnen nu als volgt redeneren. Als de beide tarwesoorten even goed zijn, dan is de kans dat op een bepaald perceel tarwesoort A een grotere opbrengst oplevert dan B gelijk aan $\frac{1}{2}$. Als de tarwesoorten niet even goed zijn dan is deze kans $p \neq \frac{1}{2}$. We kijken nu per perceel naar het verschil tussen de opbrengst van soort A en de opbrengst van soort B; we interesseren ons niet voor de grootte van dit verschil, maar alleen voor het teken.

perc. nr.	verschil A - B	perc. nr.	verschil A - B	perc. nr.	verschil A - B
1	+	8	-	15	+
2	+	9	+	16	+
3	+	10	+	17	+
4	-	11	+	18	-
5	+	12	+	19	+
6	+	13	+	20	+
7	+	14	-		

Het aantal keren dat het verschil positief is, is een binomiaal verdeelde stochast X met $p = \frac{1}{2}$ onder H_0 en $p \neq \frac{1}{2}$ onder H_1.
Deze toets, waarbij alleen gebruik gemaakt wordt van het teken van het verschil, wordt de *tekentoets* genoemd.

≫ 14. Voer deze toets uit. Neem $\alpha = 0{,}05$.

4

KRITIEK GEBIED

Kijk terug naar de toets van hoofdstuk 1 (het percentage framboesia-lijders in Nieuw Guinea):

$$H_0 : p = 0{,}5$$
$$H_1 : p < 0{,}5$$

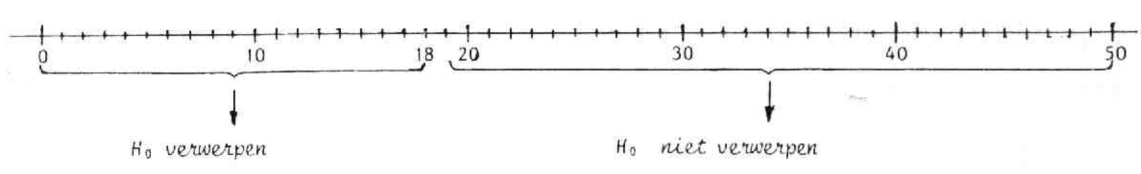
De steekproefomvang is 50.
De toetsingsgrootheid (X) is het aantal mensen in de steekproef dat framboesia heeft.
Bij een zekere uitkomst k van X is de overschrijdingskans:

$$P(X \leq k \mid p = 0{,}5)$$

Kies je nu $\alpha = 0{,}05$, dan zie je in de binomiale tabel dat voor $k = 18, 17, 16, \ldots, 0$ die overschrijdingskans kleiner dan α is.
Anders gezegd:
Bij een significantie-niveau van 5% wordt H_0 verworpen bij een van de uitkomsten 18, 17, ..., 0.

n = 50	p = 0,5
k	$P(T \leq k)$
⋮	⋮
14	0,0013
15	0,0033
16	0,0077
17	0,0164
18	0,0325
19	0,0595
20	0,1013
⋮	⋮

Bij $\alpha = 0{,}05$:



De getallen 0, 1, ..., 18 zijn de *kritieke waarden* bij $\alpha = 0{,}05$.
De verzameling {0,1,..,18} is het *kritieke gebied* bij deze α.

≫ 13. De W.H.O.-arts wil de kans om een verkeerde conclusie te trekken (dus om H_0 ten onrechte te verwerpen) kleiner houden dan 1%. Anders gezegd: hij kiest $\alpha = 0{,}01$.
Wat is nu het kritieke gebied?

≫ 14. Wat zijn de kritieke waarden bij de toets van opgave ≫ 7?
En bij ≫ 8.

≫ 15. Bekijk de toets van opgave ≫ 9. ('Randtekst op de gulden').
De kritieke waarden bevinden zich nu aan twee zijden van de verwachtingswaarde 25.
Welke getallen zijn dat? ($\alpha = 0{,}05$).

≫ 16. Neem als significantie-niveau $\alpha = 0{,}025$.

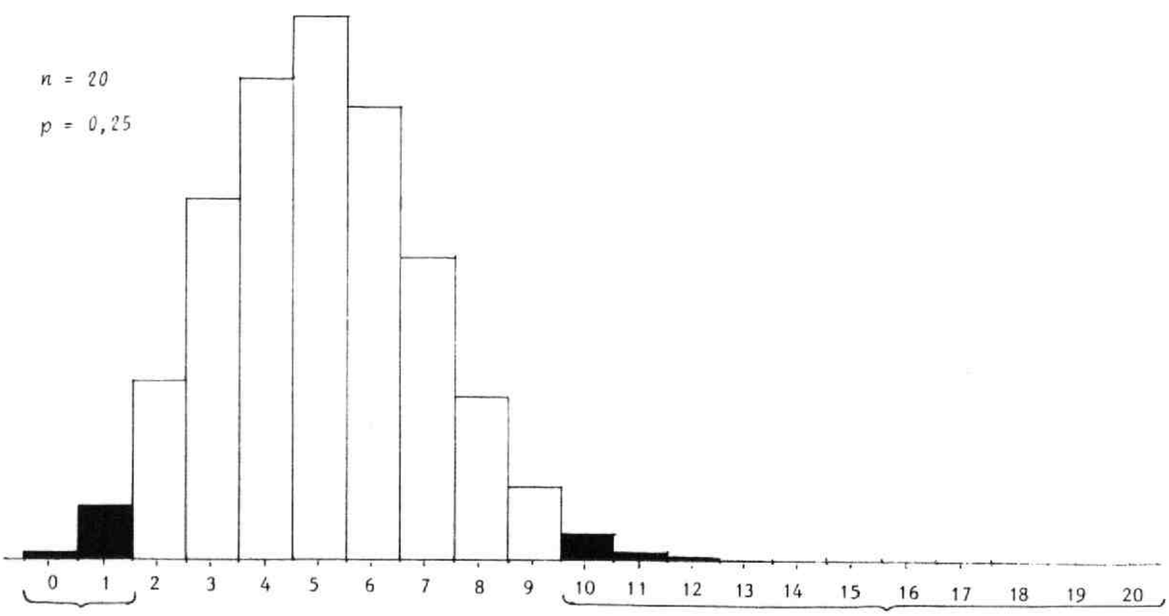
a. Wat is het kritieke gebied bij de binomiale toets

$$H_0 : p = 0{,}25 \quad \text{tegen} \quad H_1 : p > 0{,}25$$

in het geval $n = 20$?

b. En bij $H_0 : p = 0{,}25$ tegen $H_1 : p < 0{,}25$?

Hieronder zie je het histogram voor de binomiale verdeling met parameters $n = 20$ en $p = 0{,}25$.



Op de horizontale as zijn de 'linker' en 'rechter' kritieke gebieden aangegeven bij $\alpha = 0{,}025$.
Deze twee gebieden vormen tezamen het kritieke gebied bij de toets:

$$H_0 : p = 0{,}25 \quad \text{tegen} \quad H_1 : p \neq 0{,}25$$

bij $\alpha = 0{,}05$!

Opmerking

Omdat we hier te maken hebben met een scheve binomiale verdeling, zijn de acceptabele afwijkingen van de verwachtingswaarde (5) naar links en rechts niet hetzelfde. Aan de rechterkant is een afwijking van 4 nog net acceptabel en aan de linkerkant is de aanvaardbare afwijking 3.
We spreken af:

Bij een tweezijdige toets moet zowel de linker- als de rechteroverschrijdingskans kleiner zijn dan $\frac{1}{2}\alpha$, wil H_0 worden verworpen.

Dus bij de toets H_0: $p = 0{,}25$ tegen H_1: $p \neq 0{,}25$
met $n = 20$ en $\alpha = 0{,}05$
is het kritieke gebied: $\{0,1\} \cup \{10,11,12,\ldots,20\}$

≫ 19. Wat is het kritieke gebied bij de toets van opgave ≫ 13? (Aangenomen dat de bioloog tweezijdig toetst).

≫ 20. Uit een KRO-enquête blijkt dat 65% van de Nederlandse werknemers meent dat er misbruik wordt gemaakt van de sociale wetgeving. Een Brandpunt-medewerker wil nu nagaan of dit percentage ook geldt voor de werknemers met een inkomen dat ten hoogste modaal is. Hij vermoedt dat het percentage mensen in die laatste populatie, dat vindt dat de sociale wetgeving misbruikt wordt, lager is dan 65%. Hij neemt een steekproef van 50 mensen uit die populatie.

a. Welke hypothesen wil hij tegen elkaar toetsen?

b. Welke steekproefuitkomsten zijn kritiek bij $\alpha = 0{,}05$?

≫ 21. Er wordt wel eens beweerd dat in tijden van oorlog in de betreffende landen de normale verhouding tussen het aantal geboorten van meisjes en jongens zich wijzigt ten gunste van de jongens. Veronderstel dat in vredestijd het aantal jongensgeboorten 51% van het totale aantal geboorten is.

In een oorlogvoerend land wordt een steekproef van 1000 pasgeboren babies genomen. Hoe groot zou het percentage jongens in die steekproef ten minste moeten zijn, opdat met $\alpha = 0{,}05$ kan worden geconcludeerd dat het percentage mannelijke geboorten over de gehele bevolking gerekend, inderdaad is toegenomen?

≫ 22. In het Gooi bestaat de bevolking naar schatting voor een derde uit forensen.

Een socioloog vermoedt dat deze schatting wat aan de hoge kant is en wil de juistheid van de bewering onderzoeken. Hij neemt een steekproef van 250 personen.

Bij welke aantallen forensen in de steekproef zal hij de stelling kunnen verwerpen?

a. Bij $\alpha = 0{,}05$?

b. Bij $\alpha = 0{,}025$?

5 EEN TOETS VOOR ONAFHANKELIJKHEID

Komt kleurenblindheid bij mannen meer voor dan bij vrouwen?
Bij een onderzoek naar de eventuele afhankelijkheid van kleurenblindheid en sexe werden 100 aselect gekozen personen getest: 40 mannen en 60 vrouwen. Van de mannen bleken er 4 kleurenblind, terwijl er onder de vrouwen slechts 1 kleurenblinde werd aangetroffen.
Dit resultaat kun je overzichtelijk weergeven in een 2×2-tabel:

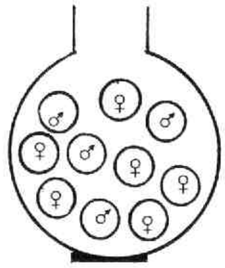
	kleurenblind		
	ja	nee	totaal
man	4	36	40
vrouw	1	59	60
totaal	5	95	100

Als nulhypothese nemen we aan dat kleurenblindheid en sexe onafhankelijk zijn, m.a.w. dat het percentage kleurenblinden onder mannen en vrouwen nagenoeg hetzelfde is.
De tegenhypothese is dat kleurenblindheid bij vrouwen minder frequent voorkomt dan bij mannen.

≫ 23. Veronderstel dat kleurenblindheid en sexe onafhankelijk zijn. Hoeveel kleurenblinde mannen en vrouwen op een totaal van vijf kleurenblinde personen had je kunnen verwachten in bovengenoemde steekproef?

≫ 24. Een vaas bevat 40 witte en 60 zwarte balletjes.
Iemand trekt aselect en zonder teruglegging vijf balletjes uit de vaas.
Reken na dat de kans op twee witte en drie zwarte balletjes ongeveer $35\frac{1}{2}\%$ is.

In de steekproef van 100 personen werden vijf kleurenblinden aangetroffen: één vrouw en vier mannen.
De vraag is nu hoe bijzonder dit resultaat is als uitgegaan wordt van de hypothese H_0 (d.w.z. kleurenblindheid en sexe zijn onafhankelijk).
Anders gezegd: hoe klein is de kans op het resultaat 'één vrouw en vier mannen' uitgaande van H_0.
We gebruiken het vaasmodel:



40 balletjes ♂
60 balletjes ♀

Uit de vaas worden aselect en zonder teruglegging vijf balletjes getrokken, dat zijn de kleurenblinden.
De kans op '1♀, 4♂' in dit model is:

$$\frac{\binom{60}{1}\cdot\binom{40}{4}}{\binom{100}{5}} = \frac{60 \cdot 91390}{75287520} \approx 0,0728.$$

Voor het berekenen van de *overschrijdingskans* moet ook de kans worden bepaald op een resultaat dat nog meer afwijkt van het verwachte resultaat: '3♀, 2♂', en dat is dus de kans op '0♀, 5♂'.

≫ 25. Ga na dat die kans bij benadering gelijk is aan 0,0087.

Het aantal balletjes ♀ in de steekproef van vijf stellen we V.
De overschrijdingskans is dan:

$$P(V \leqq 1) = P(V = 1) + P(V = 1)$$
$$= 0,0087 + 0,0728 = 0,0815.$$

Bij een significantieniveau van 5% geeft de uitslag van het experiment niet voldoende reden tot twijfel aan H_0.
Op grond van dit experiment zou de hypothese H_0 dan niet worden verworpen.

Dat wil natuurlijk allerminst zeggen dat het *zeker* is dat kleurenblindheid sexe-onafhankelijk is. Een correct uitgevoerde hypothesetoets is immers nog geen *bewijs*.
Men kan stellen dat dit experiment toch een zwak-significante aanwijzing (8%) geeft dat kleurenblindheid wel sexe-onafhankelijk is.
Sterker nog: in dit geval kan men op andere gronden tot een stellige uitspraak komen. Uit de wetten van de genetica volgt namelijk dat kleurenblindheid bij mannen aanzienlijk vaker voorkomt dan bij vrouwen.

≫ 26. Framboesia werd tot nu toe met peniciline behandeld. Er wordt een nieuw antibioticum gevonden, waarvan men vermoedt dat het meer effect zal hebben.
Van 15 framboesiapatiënten ontvingen acht het nieuwe geneesmiddel en zeven het oude.
Het experiment gebeurde 'dubbelblind', d.w.z. noch de patienten, noch de behandelende arts wisten welke patient welk middel toegediend kreeg om psychologische beïnvloeding uit te sluiten.
Het resultaat was:

	genezen	niet genezen	
oude middel	2	5	7
nieuwe middel	7	1	8
totaal	9	6	15

a. De tabel wijst er op dat het nieuwe geneesmiddel inderdaad wel eens beter zou kunnen zijn.
Maak tabellen voor die gevallen waarbij het resultaat een nog sterkere aanwijzing in die richting geeft. Ga er daarbij ook van uit dat 9 van de 15 mensen genezen.

b. Bereken de kansen op elk van die situaties (inclusief de gegeven situatie) uitgaande van de veronderstelling dat het nieuwe geneesmiddel noch beter noch slechter is dan het oude.

c. Kun je op grond van het uitgevoerde experiment concluderen dat het nieuwe geneesmiddel beter voldoet dan het oude? ($\alpha = 5\%$).

≫ 27. Sommige vissers beweren dat éénmaal gevangen karpers zich niet zo gemakkelijk een tweede keer laten verschalken.
Bij een onderzoek of parkers inderdaad 'haakwijs' kunnen worden kwam men tot de volgende resultaten.
In een vijver waren 29 karpers uitgezet, waarvan er 13 al gemerkt waren ten teken dat zij al eerder aan de haak waren geslagen.
Van die 29 karpers werden er vijf gevangen. Eén van de vijf was gemerkt.

a. Verwerk deze gegevens in een 2×2-tabel.

b. Kun je op grond van dit experiment concluderen dat karpers kunnen leren? (Neem $\alpha = 5\%$).

≫ 28. Uit een krantenbericht: '18% van de gezinnen gaf in 1968 geschenken met Kerstmis en 87% met St. Nicolaas. In 12% van de gezinnen werd zowel met Kerstmis als met St. Nicolaas iets gegeven; in 7% van de gezinnen daarentegen werd niets gegeven.'

a. Vat deze gegevens samen in een 2×2-tabel.

b. Welke hypothese zou met behulp van deze 2×2-tabel kunnen worden getoetst?

6 GEMENGDE OPGAVEN

≫ 29. Asterix twijfelt aan de zuiverheid van een Romeinse dobbelsteen. Hij werpt 1000 keer en turft het aantal keren dat VI boven komt. Resultaat: 200.
Kan hij op grond van deze uitkomst de zuiverheid in twijfel trekken? ($\alpha = 2\frac{1}{2}\%$).

≫ 30. De kijkdichtheid van een zekere televisiequiz bedroeg in het verleden ca 50%.
De omroeporganisatie die de quiz uitzendt heeft sterk de indruk dat de kijkdichtheid van dat programma is gedaald. Via een enquête wil die omroep onderzoeken of dit inderdaad het geval is. Van 100 aselect gekozen kijkers blijken er 40 het bewuste programma gezien te hebben.

a. Welke conclusie zal de omroep uit dit resultaat kunnen trekken? (Neem $\alpha = 5\%$).

b. Een T.V.-recensent beweert dat de kijkdichtheid van het programma gedaald is naar 30%.
Geeft de uitslag van de enquête de omroep aanleiding dit tegen te spreken? (Neem $\alpha = 5\%$).

c. De T.V.recensent heeft negen vrouwen en elf mannen gevraagd of zij het bewuste programma hebben gezien.
Van de negen vrouwen hadden er zes het programma gezien en van de elf mannen waren er slechts twee die gekeken hadden.
Kan hij hieruit de conclusie trekken dat het programma beter aanslaat bij vrouwen dan bij mannen? (Neem $\alpha = 2\frac{1}{2}\%$).

≫31. Een landbouwkundige wil het effect van een bemestingsmiddel op de groei van zonnebloemen onderzoeken met behulp van een tekentoets. Hij zaait 12 paren zonnebloemen, waarbij hij voor één zonnebloem van elk paar het bemestingsmiddel gebruikt, voor de andere niet. Vier weken na het ontkiemen meet hij de lengte van alle zonnebloemen.

Resultaat:

Paar	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Zonder bemesting	97	99	98	96	95	98	98	100	97	96	97	93
Met bemesting	102	97	100	99	99	103	101	97	102	98	98	101

Geeft dit resultaat aanleiding om te veronderstellen dat het bemestingsmiddel een positief effect heeft op de groei in de eerste vier weken? Men neemt een significantieniveau van $2\frac{1}{2}\%$ aan.

(*Examen Wiskunde A 1984*)

≫ 32. Kandidaat-kosmonauten worden aan een zware (lichamelijke en psychologische) test onderworpen alvorens zij toegelaten worden tot een verdere opleiding.
De kans dat een kandidaat slaagt voor de eerste test is 10%.
Voor kandidaten die de eerste test niet gehaald hebben, volgen nog maximaal twee herkansingen. Iedere keer opnieuw met dezelfde slaagkans. Als de kandidaat de derde keer opnieuw niet aan de eisen voldoet, is hij definitief afgewezen.
Neem aan dat de testresultaten onafhankelijk van elkaar zijn.

a. Hoeveel % is de kans dat een willekeurige kandidaat wordt afgewezen?

b. Wat is de verwachtingswaarde van het aantal tests dat een willekeurige kandidaat zal moeten ondergaan?

c. Hoe groot is de kans dat bij een keuring van een groep van twintig kandidaten er bij de eerste test één slaagt, bij de tweede nul en bij de derde test weer één?

d. Uit een groep van vijftig kandidaten slaagde er slechts één bij de eerste test. Op grond van dit resultaat vermoedde iemand dat de slaagkans kleiner was dan 10%. Is dit vermoeden terecht, wanneer men een significantieniveau van 2,5% aanneemt?

(*Examen wiskunde A 1983*)

≫ 33. Wordt criminaliteit door genetische factoren bepaald of door het milieu?
Een onderzoek naar deze vraag werd verricht aan de hand van één- en twee-eiige tweelingen.
Van 13 veroordeelden, die deel uitmaken van een één-eiige tweeling, hadden er 10 een tweelingbroer of -zus die eveneens crimineel gedrag vertoonde.
Onder 17 veroordeelden die deel uitmaken van een twee-eiige tweeling, bleken slechts twee een tweelingpartner te hebben die zich aan enig misdrijf hadden schuldig gemaakt.

a. Stel uit deze gegevens een 2×2-tabel op.

b. Als nulhypothese neem je aan bij een één-eiige en een twee-eiige tweeling een even grote kans bestaat dat de tweelingpartner van een veroordeelde eveneens crimineel gedrag vertoont. (M.a.w. crimineel gedrag is niet zuiver genetisch bepaald). Geeft de uitslag van dit experiment voldoende aanleiding om H_0 in twijfel te trekken? (Neem $\alpha = 5\%$).