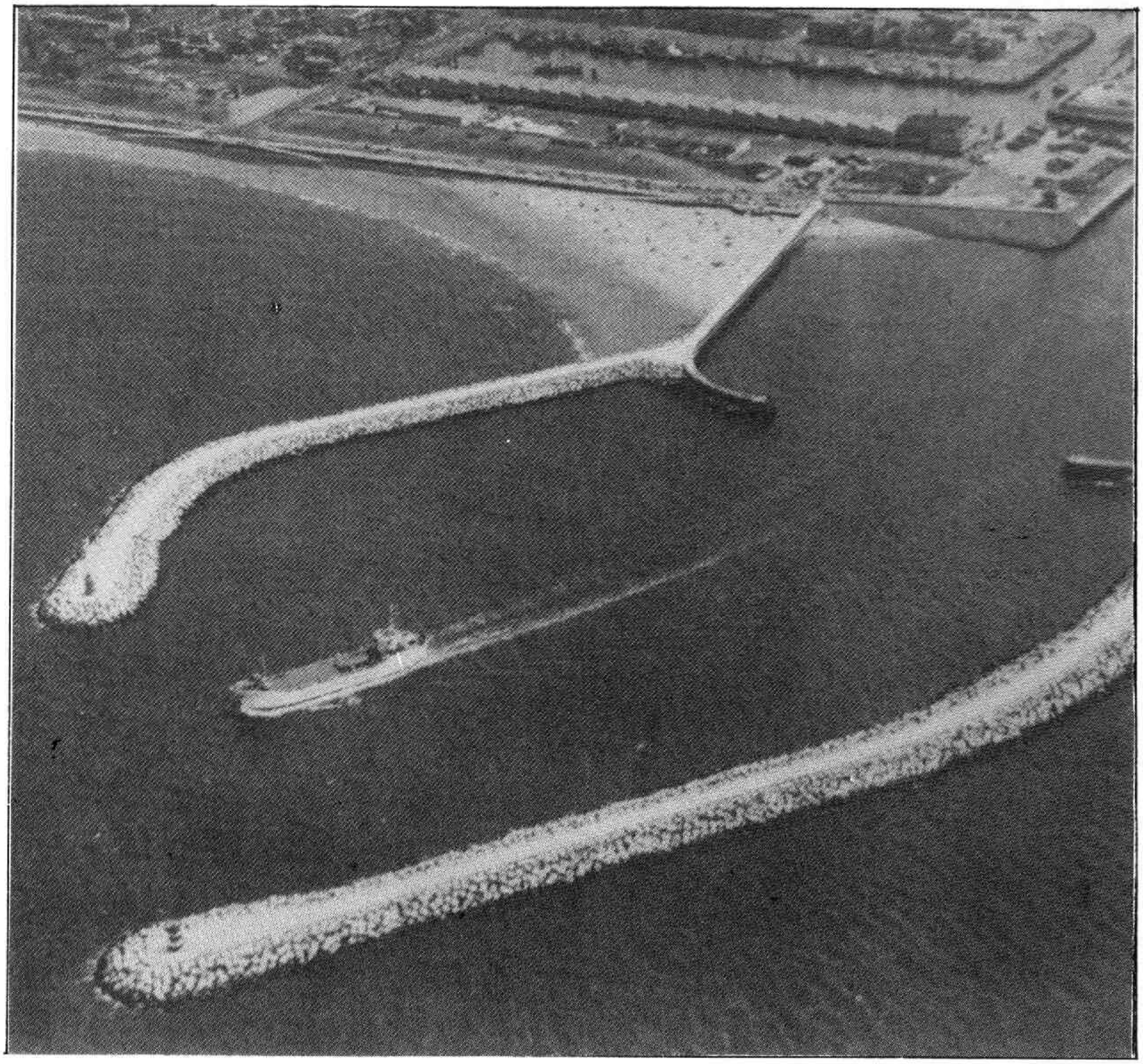
Functies en grafieken

https://hdl.handle.net/1874/10248



FUNCTIES EN GRAFIEKEN

FUNCTIES

EN

GRAFIEKEN

Tiberdreef 4 - 3561 GG Utrecht

Foto omslag: Havendam van Scheveningen.

De opgaven 1, 2 en 3 van hoofdstuk 1 zijn ontleend aan 'The language of Graphs' by Malcolm Swan. (Shell Centre of Mathematical Edication).

FUNCTIES EN GRAFIEKEN

Een produktie ten behoeve van de experimenten in het kader van de Herverkaveling Eindexamenprogramma's Wiskunde 1 en 2 V.W.O.

Samenstelling: Martin Kindt
Jan de Lange Jzn

Vormgeving: Ellen Hanepen

Utrecht, juni 1983.

INHOUDSOPGAVE

DEEL A

1.	GRAFIEKEN LEZEN	pag. 1
2.	ALGEBRAÏSCHE MODELLEN	9
3.	FUNCTIES ALS AUTOMAAT	15
4.	DOMEIN EN BEREIK	19
5.	ABSOLUTE WAARDE	27
6.	ASYMPTOTEN	35

DEEL B

7.	GRAFIEKEN TRANSFORMEREN	41
8.	INVERSE FUNCTIES/SAMENSTELLEN VAN FUNCTIES	53

DEEL A

1

GRAFIEKEN LEZEN

≫ 1. In een padvinderskamp wordt iedere morgen de vlag gehesen door de jongste verkenner. Het hijsen van de vlag wordt weergegeven door een van de grafiekjes (1) tot en met (6).

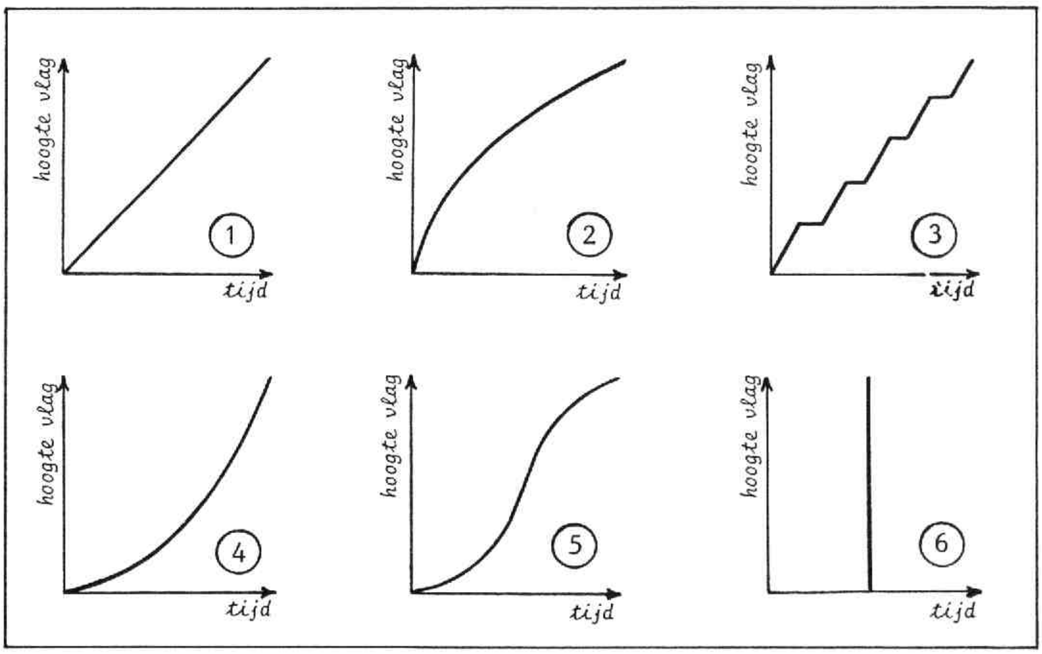


fig. 1

a. Elke grafiek vertelt een verhaaltje over het hijsen van de vlag. Vertel die zes verhaaltjes in woorden.

b. Welke grafiek geeft de situatie volgens jou het meest realistisch weer?

» 2. De exploitant van een knus bioscoopje wil weten wat het effect is van een verhoging van de toegangsprijs op de winst die hij maakt. Zijn economisch adviseur tekent een van de grafieken (1) tot en met (6) om dat effect te illustreren ....

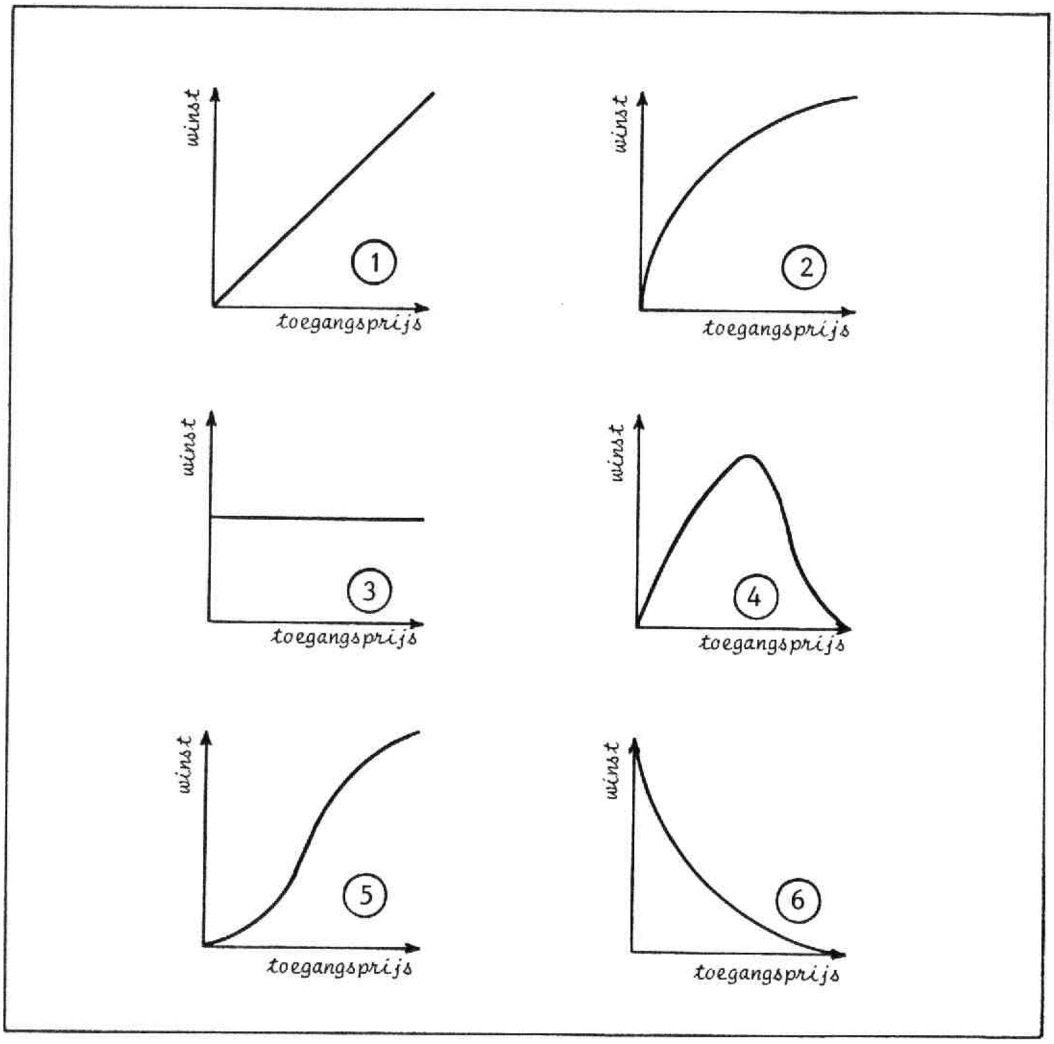


fig. 2

a. Wat betekent elk van die grafieken voor het winstverloop?

b. Welke grafiek geeft naar jouw idee de situatie het meest realistisch weer?

≫ 3. Een motorcoureur rijdt een trainingsrondje op een circuit van 4 km lengte. Zijn snelheid is in de grafiek uitgezet tegen de afgelegde afstand.

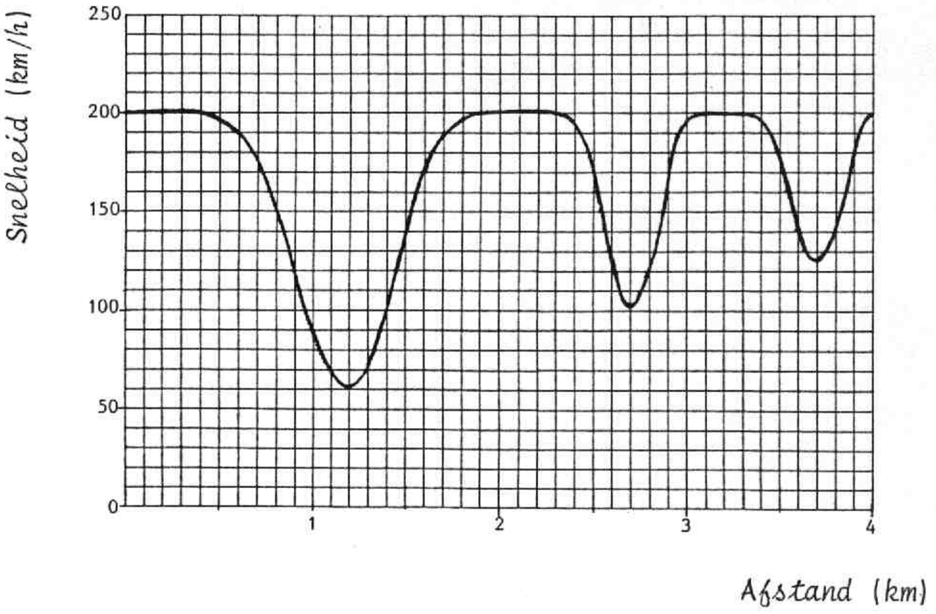


fig. 3

In fig. 4 zie je vijf circuits getekend.
Op welk circuit heeft de motorcoureur gereden? Verklaar.

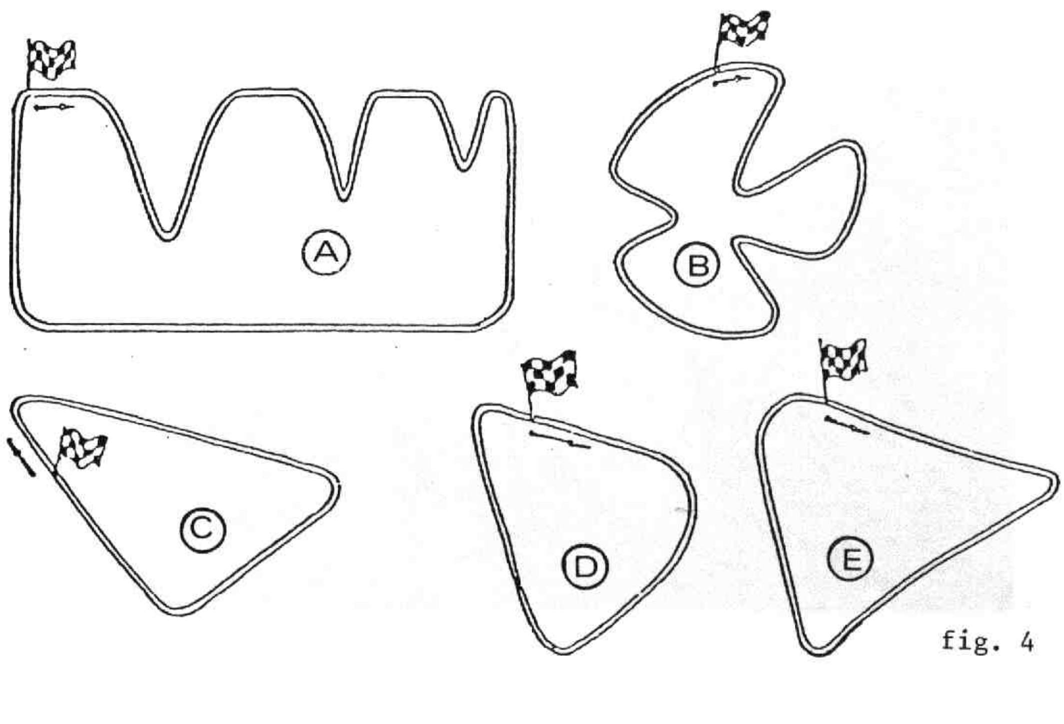
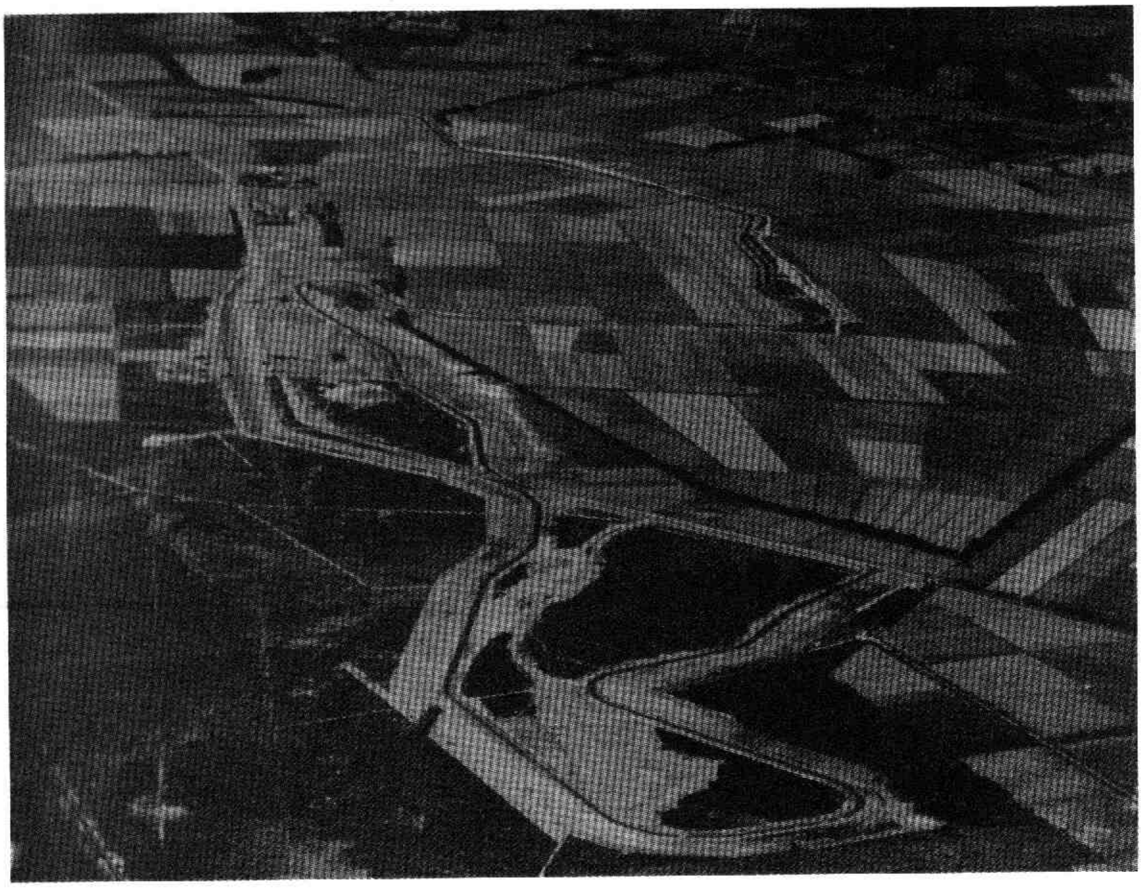
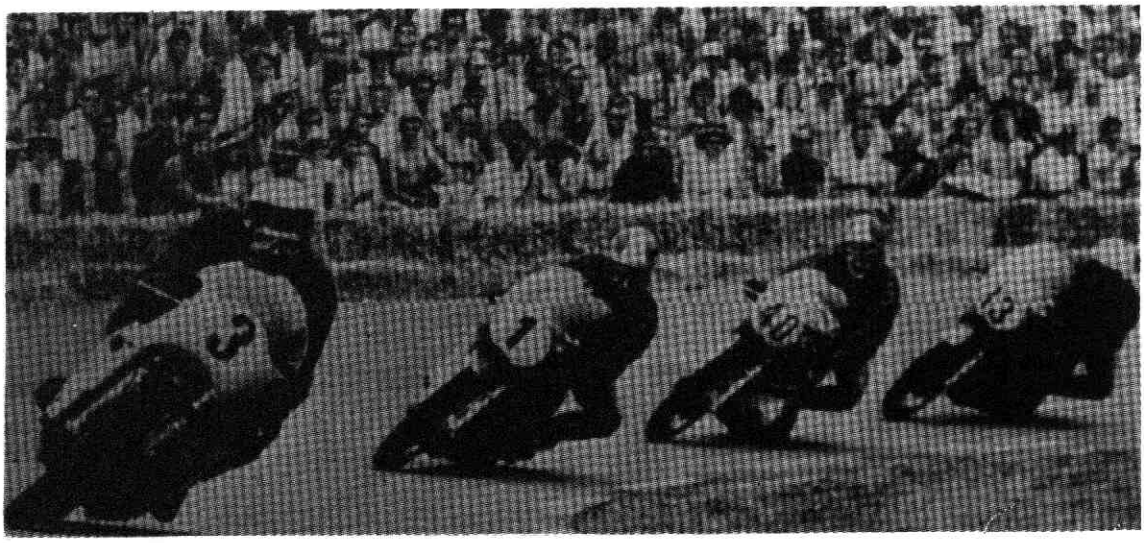


fig. 4



Motor-circuit in Assen

waar jaarlijks de TT-races worden gehouden.



≫ 4. Onze motorrijder (A) reed een wedstrijdje over twee ronden tegen zijn rivaal (B).
In fig. 5 zie je de tijd-afstand-grafieken van de beide coureurs.

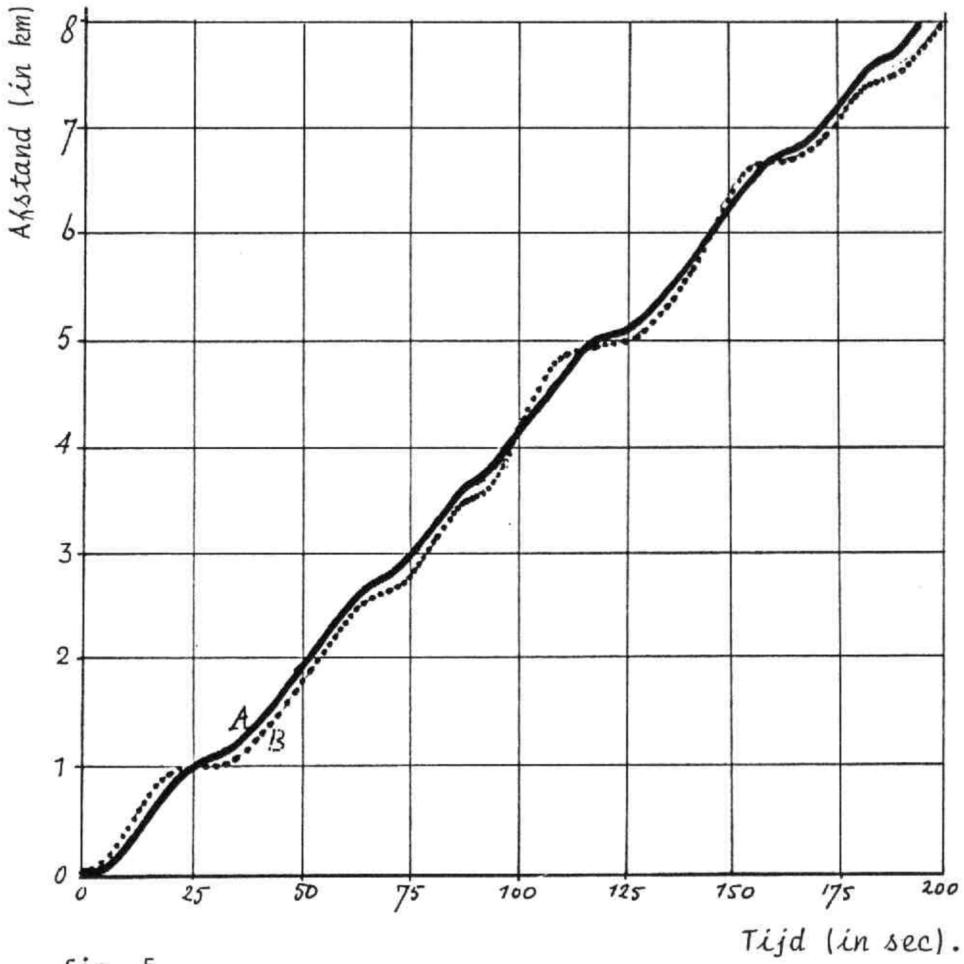


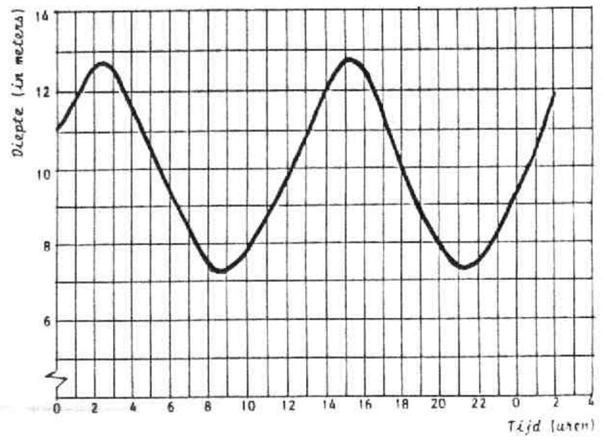
fig. 5

a. Wie heeft gewonnen? Met hoeveel seconden voorsprong?

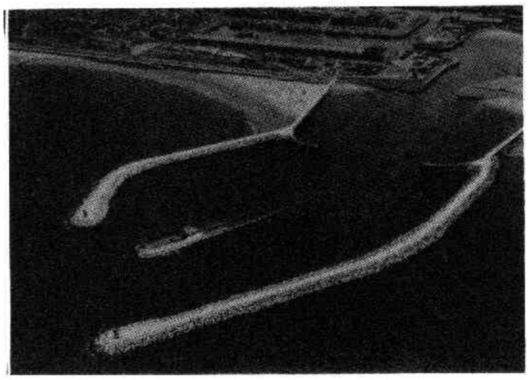
b. Hoe vaak is er van kop gewisseld? Op welke tijdstippen (hoeveel seconden na de start) gebeurde dat?

c. Kun je naar aanleiding van de twee grafieken nog iets vertellen over het verschil in rijstijl van beide coureurs?

≫ 5. Bij de ingang van een haven die direct met zee verbonden is, varieert de diepte van de vaargeul met de tijd (door eb en vloed). Dit verloop wordt geïllustreerd door onderstaande getijkromme:



Waterstand op 21 januari 1982



a. Op 21 januari was het hoogwater om 2.15 uur en 14.30 uur. Op welke tijdstippen kun je hoogwater verwachten op 22 januari?

b. Gedurende welke periode op 21 januari 1982 kunnen schepen met een diepgang van 7 m de haven niet binnenvaren? (Een schip heeft minstens 2 meter water onder de kiel nodig om veilig binnen te kunnen varen en de reis van de ingang van de haven tot de aanlegsteiger duurt ongeveer 1 uur).

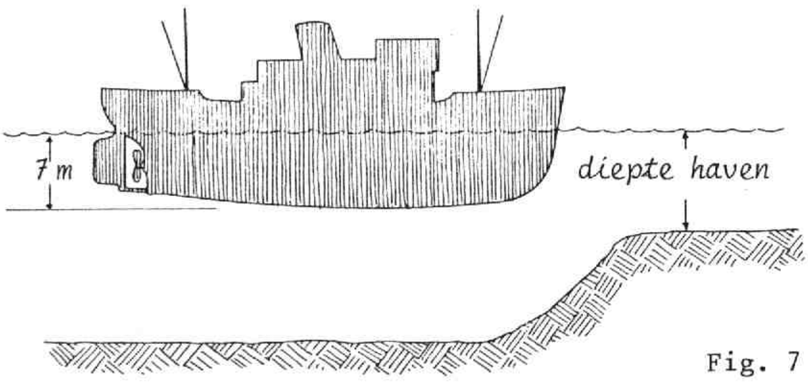


Fig. 7

≫ 6. Een producent van vaten sherry heeft o.a. te maken met produktie- en opslagkosten. Hoe meer vaten hij produceert, des te lager de produktiekosten per vat zijn, maar daar staat tegenover dat de opslagkosten per vat toenemen.
De volgende tabel verduidelijkt dat.

aantal vaten	produktiekosten per vat (in guldens)	opslagkosten per vat (in guldens)
1000	280	20
2000	142	40
3000	94	60
4000	70	80
5000	55	100
6000	47	120

a. Teken een grafiek van de produktiekosten per vat afhankelijk van het aantal te produceren vaten.
Zet op de horizontale as het aantal vaten uit en op de verticale as de kosten.

b. Teken in hetzelfde plaatje een grafiek van de opslagkosten per vat.

c. Teken een grafiek van de *totale* kosten per vat.

d. Bij welk te produceren aantal vaten schat je dat de totale kosten het laagst zijn?

De voorgaande zes opgaven zijn voorbeelden van wat in de wiskunde een *functie* wordt genoemd.
In opgave ≫ 1 is de hoogte (van de vlag) afhankelijk van de tijd.
De gangbare uitdrukking is:

de *hoogte* (van de vlag) is een *functie* van de *tijd*.

Evenzo:

in opgave ≫ 2: de *winst* (van een bioscoophouder) is een functie van de toegangs*prijs*;

in opgave ≫ 3: de *snelheid* (van de coureur) is een functie van de *plaats* (op het circuit);

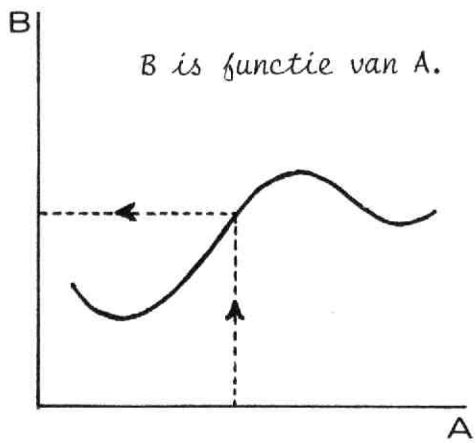
in opgave ≫ 4: de *plaats* (op het circuit) is een functie van de *tijd*;

in opgave ≫ 5: de *diepte* (van een vaargeul) is een functie van de *tijd*;

in opgave ≫ 6: de produktie-(resp. opslag- resp. totale)*kosten* per vat zijn een functie van het *aantal* vaten.

Als je zegt: de hoogte is een functie van de tijd (of de hoogte is afhankelijk van de tijd), noem je de hoogte de *afhankelijke* en de tijd de *onafhankelijke* grootheid.
De afhankelijke grootheid wordt meestal op de verticale as uitgezet, de onafhankelijke op de horizontale as.

In een situatie, waarbij
de GROOTHEID B als functie van de GROOTHEID A
wordt opgevat,
noemen we B de AFHANKELIJKE en A de ONAFHANKELIJKE grootheid.



De waarde A is als het ware vrij te kiezen, de bijbehorende waarde van B ligt dan vast.

2

ALGEBRAÏSCHE MODELLEN

In hoofdstuk 1 werden de functies gepresenteerd door een *grafiek* of een *tabel*. In vakken als economie en natuurkunde e.d. wordt een functie vaak beschreven door middel van een algebraïsche formule.
Het ideaal is daarbij dat zo'n formule exact het verband tussen de grootheden vastlegt, maar in de praktijk is dat meestal een benadering.
Als voorbeeld bekijken we ≫ 6.

Noemen we de produktiekosten PK en het aantal vaten N, dan geldt bij benadering:

$$PK = \frac{280000}{N}$$

≫ 7. a. Controleer of bovenstaande formule redelijk beantwoord aan de tabel van opgave ≫ 6.

b. De opslagkosten (in opgave ≫ 6) noemen we OK.
Beschrijf OK als functie van N (= het aantal vaten) in formule.

c. Beschrijf ook de totale kosten (= TK) als functie van N.

≫ 8. De eigenaar van een verfwinkel heeft een mengmachine van ƒ 200,-- gekocht. Dit bedrag rekent hij als zijn *vaste* kosten bij de verkoop van zijn verf. Zijn aanmaakkosten bedragen ƒ 5,-- per liter verf (de zgn. *variabele* kosten).

a. Teken de grafiek van de totale kosten K (in guldens) als functie van zijn omzet Q (in liters).
Verklaar waarom de grafiek een rechte lijn is.

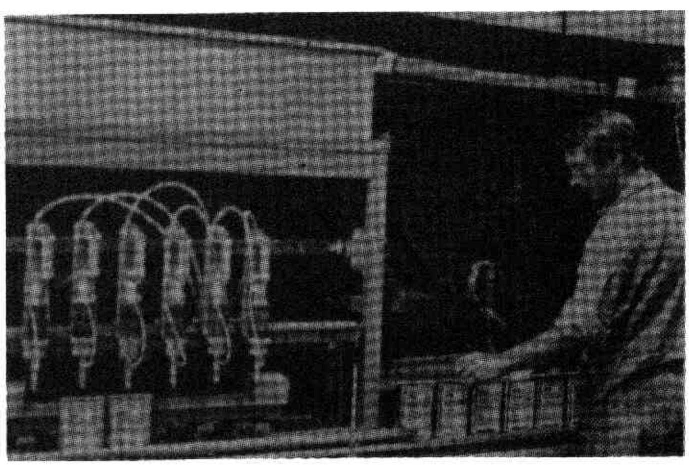
b. Geef een formule van K als functie van Q.

c. Als gevolg van de stijgende inkoopprijzen worden de variabele kosten ƒ 6,-- per liter.
Teken de grafiek van de gewijzigde kostenfunctie.
Welke formule past daarbij?

d. Welke gevolgen zal een verdere stijging van de variabele kosten op de grafiek van de kostenfunctie hebben? En op de formule?

e. De verfhandelaar schaft zich, om aan de toenemende vraag te kunnen voldoen, een moderner mengapparaat aan. Dit kost ƒ 300,--.
De variabele kosten zijn ƒ 6,-- per liter.
Teken de grafiek van de kostenfunctie bij dit nieuwe apparaat en geef de bijbehorende formule.

f. Welke gevolgen zal een verdere stijging van de vaste kosten op de grafiek van de kostenfunctie hebben? En op de formule?



Machine voor het vullen van verfbussen.

≫ 9.

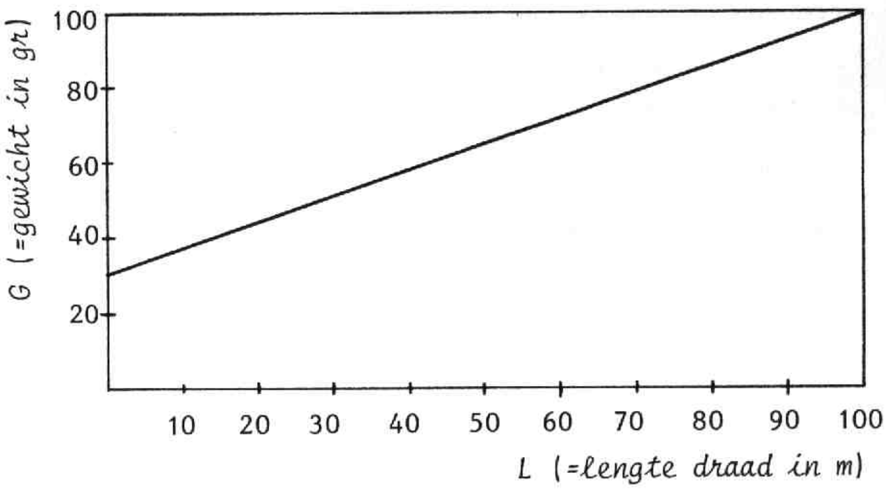


fig. 9

Grafiek van het gewicht (G) van een klosje garen als functie van de lengte (L) van de draad.

a. Wat is het gewicht van een leeg klosje?

b. Wat is het gewicht van 10 meter draad?

c. Beschrijf G als functie van L in formule-vorm.

≫ 10. De mars van een peleton soldaten is geregistreerd in een grafiek.

a. In het begin liep het peleton een zgn. speed-mars.
Met welke snelheid (km/u) werd er toen gemarcheerd?

b. Wat gebeurde er na die eerste drie kwartier?

c. De afgelegde afstand S (in km) is een functie van de tijd T (in sec).
Beschrijf die functie met drie formules op de volgende manier:

$S = \ldots$ voor $0 \leq T \leq \frac{3}{4}$

$S = \ldots$ voor ...

$S = \ldots$ voor ...

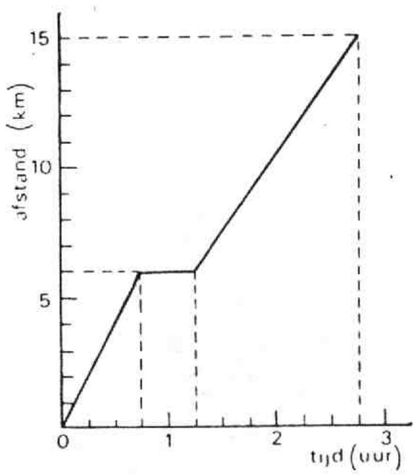


fig. 10

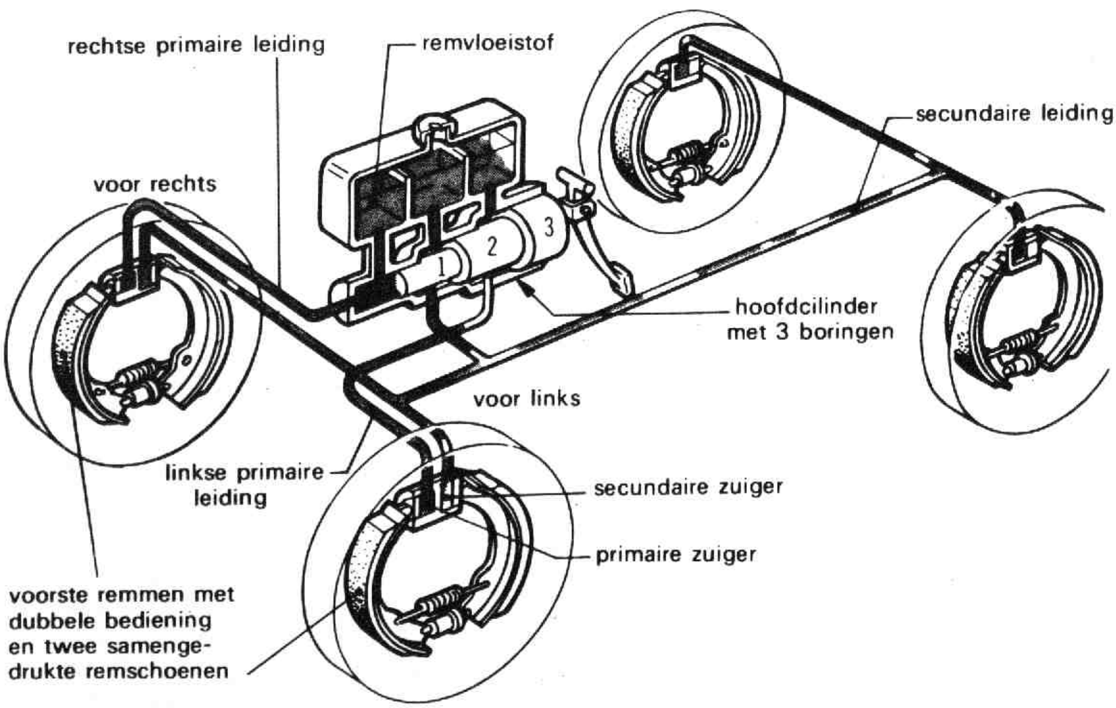
≫ 11. De lengte van de remweg van een auto is afhankelijk van de snelheid. Als vuistregel om de lengte van de remweg bij een gegeven snelheid te schatten wordt vaak het volgende gebruikt:

Neem een snelheid in km/u → Deel dat getal door 10 → Kwadrateer deze uitkomst → Vermenigvuldig dit kwadraat met 0,75 → Dit getal geeft de remweg in m

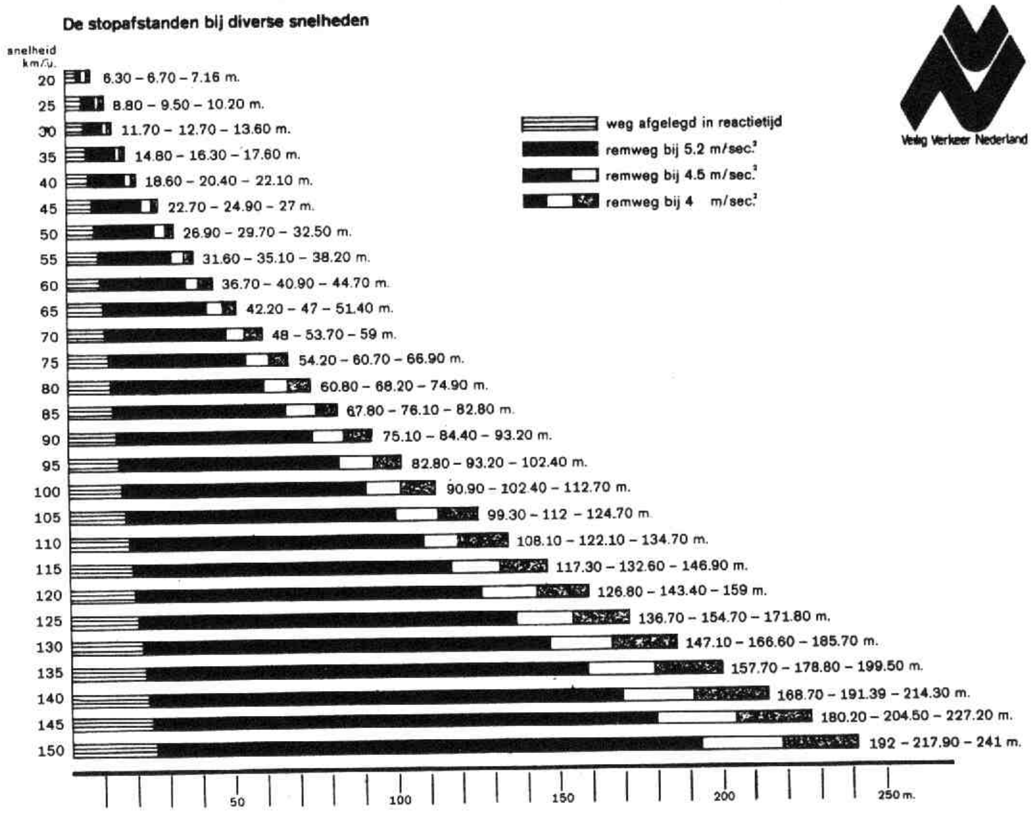
a. Bereken bij verschillende snelheden de remweg en teken de grafiek van de remweg als functie van de snelheid.

b. Noem de remweg (in m): R en de snelheid (in km/u): V.
Beschrijf R als functie van V met een formule.

c. De vuistregel is geldig voor normale droge wegen. Bij nat wegdek wordt de remweg zo'n 10% langer.
Teken (in hetzelfde plaatje) de grafiek in R als functie van V voor deze situatie. Beschrijf ook deze functie met een formule.



Remsysteem van een auto.



De grafiek van Veilig Verkeer Nederland laat de remweg zien bij verschillende remvertragingen. De vuistregel in opgave ≫ 10 komt overeen met een remvertraging van 5,14 m/sec² (d.w.z. bij het intrappen van de rempedaal neemt de snelheid elke seconde met 5,14 m per sec af).

In de grafiek is ook rekening gehouden met de reactietijd van de automobilist. Gemiddeld bedraagt die zo'n 0,6 sec; dit betekent dat de automobilist gemiddeld 0,6 sec na het remmen van z'n voorganger zelf de rempedaal intrapt.
De 'stopafstand' S is dus de 'weg afgelegd in reactietijd' plus de 'remweg van de auto'.

d. Beschrijf S als functie van V, uitgaande van de vuistregel bovenaan pag. 12.

e. Controleer je formule voor een drietal verschillende waarden van V met behulp van de grafiek van Veilig Verkeer Nederland.

3 FUNCTIES ALS AUTOMAAT

Een voorbeeld van een functie in de wiskunde is:

$$y = 10 - 2x$$

Je kunt zeggen:

de variabele y is een functie van de variabele x.

Daarmee wordt bedoeld:

bij iedere (toegestane) waarde van x hoort één waarde van y.

De variabele x wordt hierbij wel de 'onafhankelijke variabele' (d.w.z. vrij te kiezen) genoemd en de variabele y de 'afhankelijke variabele'. In dit geval bijvoorbeeld:

x	y
1	8
2	6
10	-10
-1	12
...	...

≫ 12. a. Teken de grafiek van deze functie.

b. Laat x variëren van 1 tot 4. Hoe varieert y?

c. En hoe varieert y als x varieert van 5 tot 10?

≫ 13. a. Teken de grafiek van de functie $y = x^2 - 4$.

b. Laat x het interval [1;3] *) doorlopen. Welk interval doorloopt y?

c. En welk interval doorloopt y als x het interval [-1;1] doorloopt?

d. Voor welke $x \in \mathbb{R}$ is y positief?

Een functie kun je vergelijken met een automaat. Zodra je in een automaat passende geldstukken stopt, krijg je iets anders van waarde terug: een reep, een postzegel, een telefoongesprek, ...
Zodra je in een functie een getal (voor de onafhankelijke variabele) invult, komt er een getal (voor de afhankelijke variabele) uit.
In plaats van 'onafhankelijke variabele' resp. 'afhankelijke variabele' spreken we ook wel van 'input' resp. 'output'.
De functie, als automaat, geven we vaak aan met een letter: f, F, g enz.

Noemen we de functie in ons eerste voorbeeld f, dan geldt:
'als 1 de input is bij f, dan is de output 8'.

Kort opgeschreven: $f(1) = 8$
Of ook: $f : 1 \to 8$

Evenzo:	$f(10) = -10$	ofwel:	$f : 10 \to -10$
	$f(100) = -190$	ofwel:	$f : 100 \to -190$
	$f(x) = 10 - 2x$	ofwel:	$f : x \to 10 - 2x$

≫ 14. De functie in opgave ≫ 13 geven we aan met de letter F.

a. Bereken de output $F(19)$; ook $F(-3)$; ook $F(\sqrt{2})$.

b. Laat de input x variëren van 10 tot 20. Hoe varieert de output $F(x)$?

c. Voor de input kun je elk reëel getal kiezen. Kun je als output ook elk reëel getal krijgen?

*) Dit is de verzameling getallen tussen 1 en 3, de grenswaarden inbegrepen.
Ofwel: $[1;3] = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 3\}$.

≫ 15. De grafiek van een functie f bestaat uit stukken rechte lijn.

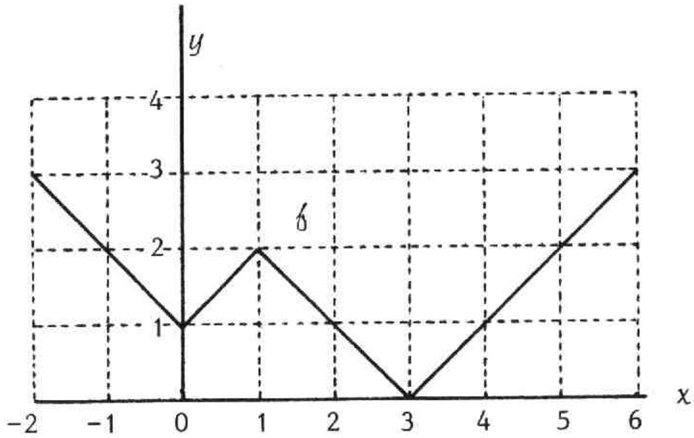


fig. 11

a. Neem als input het getal 2. Welke output vind je?

b. Bij welke input-waarden krijg je de output 2?

c. Vul in: $f(4) = \ldots$; $f(5\frac{1}{2}) = \ldots$; $f(-\frac{3}{4}) = \ldots$

d. Voor welke x tussen −2 en 6 geldt: $f(x) = 1\frac{1}{2}$?

e. Neem aan dat de grafiek zich naar rechts voortzet volgens de rechte lijn waarvan in de figuur het stuk tussen $x = 3$ en $x = 6$ is getekend. Hoe groot is $f(1000)$?

Een *eerstegraads functie* (*lineaire functie*) is een functie van het type

$$f(x) = ax + b$$

waarbij a en b *constanten* zijn.
De grafiek van zo'n functie is een rechte lijn.

≫ 16. a. Kies $a = 2$ en $b = -5$ in $f(x) = ax + b$ en teken de grafiek van f.

b. Wat gebeurt er met de grafiek als je de waarde van b verandert, terwijl die van a hetzelfde (= 2) blijft?

c. En wat als je a varieert, maar b onveranderd laat?

d. Wat kun je vertellen van de grafiek van $f(x) = ax + b$ als $a < 0$ en $b > 0$?

≫ 17. Beschrijf de grafiek van fig. 11 met formules:

$f(x) = \ldots$ voor $-2 \leq x \leq 0$

$f(x) = \ldots$ voor $0 \leq x \leq 1$

enz.

≫ 18. Teken in één figuur de grafieken van $f(x) = -2x + 4$ en $g(x) = \frac{1}{2}x - 3$. Bereken de inputwaarde waarbij f en g dezelfde output leveren.

≫ 19. Even terug naar de verfhandelaar (opgave ≫ 8). Bekijk de laatste kostenfunctie (vaste kosten *f* 300,--, variabele kosten *f* 6,--).

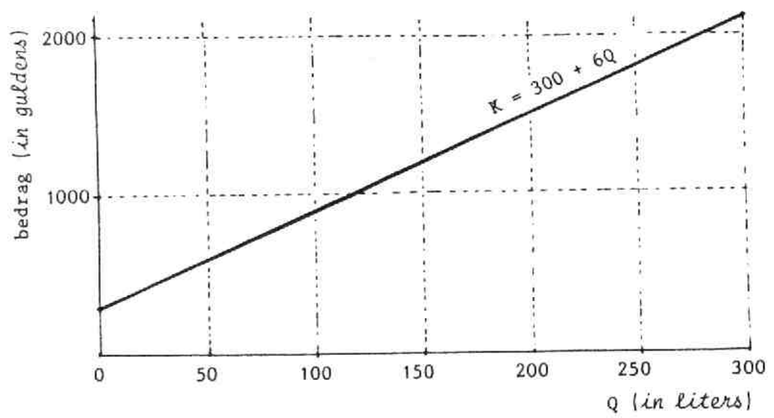


fig. 12

De verfhandelaar verkoopt zijn blikken voor *f* 8,25 per liter. De opbrengst R (in guldens) is een functie van de omzet Q (in liters).

a. Teken in één figuur de grafiek van kostenfunctie en opbrengstfunctie.

b. Het snijpunt van de grafieken heeft economische betekenis? Welke betekenis?

c. Bereken de omzet die bij dit snijpunt past.

d. Wat gebeurt er met het snijpunt als de verkoopprijs wordt verlaagd?

4 DOMEIN EN BEREIK

≫ 20. Van twee natuurlijke getallen is de *som* 50.

De vraag kan gesteld worden welke waarden het *produkt* van die twee getallen kan hebben. Dat kan als volgt onderzocht worden:

a. Breidt onderstaande tabel uit tot en met $x = 10$:

eerste getal x	*tweede getal* y	*produkt* P
0	50	0
1	49	49
2	48	96
3	47	141
...	...	...

b. De getallen in de P-kolom worden aanvankelijk groter bij toenemende x.

Welke regelmaat ontdek je in het opklimmen van de P-waarden?

c. Blijft P groter worden als je x laat toenemen van 0 tot 50?

d. Wat is de grootste waarde van P die je vindt bij voortzetting van de tabel? (Gebruik de ontdekte regelmaat!).

e. Beschrijf P als functie van x met een formule.

(Aanwijzing: druk eerst het tweede getal y uit in x).

In opgave ≫ 20 is P een functie van x.
De 'inputverzameling' van die functie bestaat uit de getallen 0,1,2,..., 50 (de getallen van de x-kolom).
I.p.v. inputverzameling wordt meestal het kortere woord *domein* gebruikt.
Dus: het domein van de functie (in opgave ≫ 20) is: {0,1,2,...,50}.
In de output-kolom (P-kolom) vind je de getallen:

0, 49, 96, 141, ..., 621, 625, 621, ..., 141, 96, 49, 0.

De 'outputverzameling' ofwel het *bereik* van de functie is:

{0,49,96,141,...,621,625}.

≫ 21. Behalve het getal 625, komt elk getal van het bereik twee keer als output voor; de P-kolom in de tabel vertoont een symmetrisch patroon. Hoe kun je die symmetrie verklaren?

Het domein van de grafiek van opgave ≫ 20 breiden we uit tot de *reële* getallen van 0 tot en met 50.
De grafiek van de functie is dan (een gedeelte van) een *parabool*.

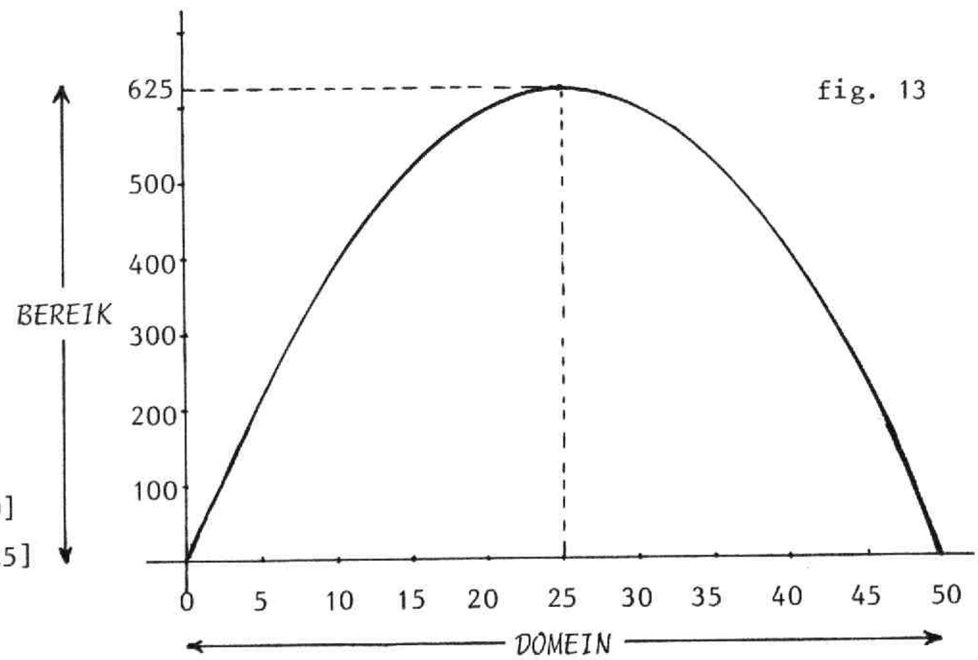


fig. 13

domein: [0,50]
bereik: [0;625]

≫ 22. Van welke twee reële getallen is de som 50 en het produkt 500?

a. Lees het antwoord af uit de grafiek (fig. 13).

b. Bereken het antwoord exact. (Gebruik de formule van opgave ≫20e).

≫ 23. $f(x) = x^2 - 2x \qquad (x \in \mathbb{R})$

a. Neem de tabel over en vul in:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$									

b. Welke regelmaat ontdek je in het opklimmen van de functiewaarden vanaf $x = 1$?

c. Zet de tabel voort met $x = 6, 7, 8$ en gebruik die regelmaat voor het berekenen van de outputwaarden.
Controleer je uitkomsten m.b.v. het functievoorschrift.

d. Voor welke $x \in \mathbb{R}$ geldt: $f(x) = 63$?

e. Teken de grafiek van f.

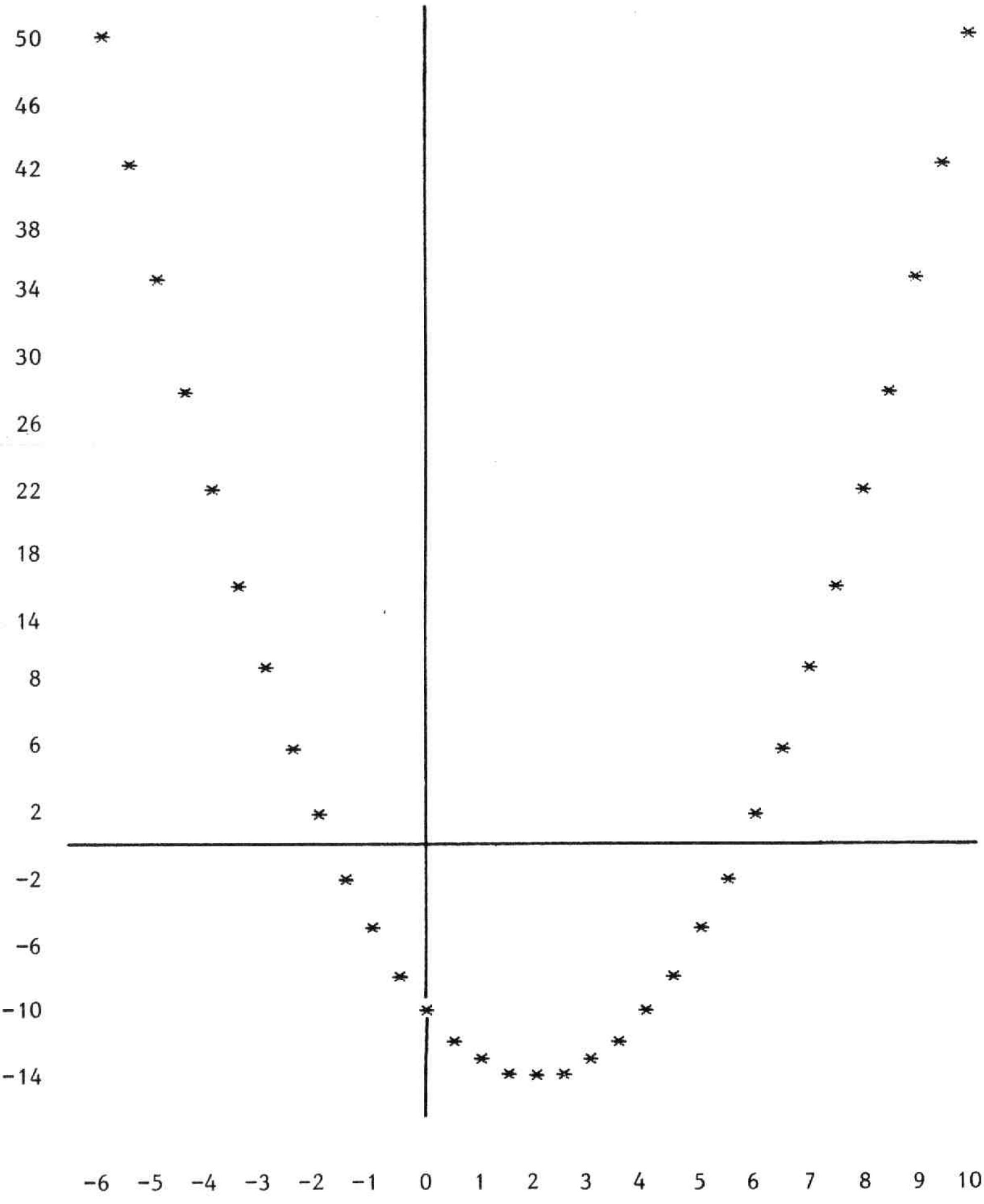
f. Welke symmetrie-as heeft die grafiek?

g. Het domein van f is $\mathbb{R}$. Welk interval is het bereik van f?

Een *kwadratische functie* is een functie van de vorm:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

waarin a, b en c constanten zijn.
Voor $a = 1$, $b = -4$, $c = -15$ krijg je de functie $f(x) = x^2 - 4x - 15$.
De grafiek van een kwadratische (of tweede-graads-)functie is een *parabool*.
Belangrijk bij het tekenen van een parabool is om te weten waar zich de symmetrie-as bevindt.
Een handige manier om de symmetrie-as te vinden is gebaseerd op het idee: als je twee (verschillende) input-waarden weet die dezelfde output opleveren, ken je de plaats van de symmetrie-as.



Grafiek van $y = x^2 - 4x - 10$ 'geprint' door de microcomputer.

Dit idee kan als volgt worden gebruikt.
Neem bijv. $f(x) = x^2 - 4x - 10$.
Je kunt meteen zien dat -10 een mogelijke 'output' is, want $f(0) = -10$.
Los je nu de vergelijking '$f(x) = -10$' op, dan vind je de twee inputwaarden die -10 opleveren!

$$f(x) = -10 \iff x^2 - 4x = 0$$
$$\iff x(x-4) = 0$$
$$\iff x = 0 \text{ of } x = 4$$

Dus: $f(0) = -10$ en $f(4) = -10$.

De symmetrie-as is de lijn $x = 2$.
De 'top' van de parabool (in dit geval het laagste punt) vind je uit:

$$f(2) = 4 - 8 - 10 = -14.$$

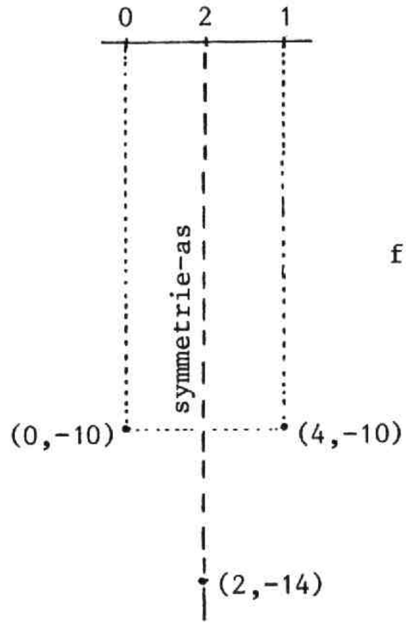


fig. 14

$\gg$ 24. Vind de symmetrie-as van de grafiek bij elk van de volgende functies (met domein $\mathbb{R}$).
Geef ook van elk van die functies het bereik.

a. $f(x) = x^2 - 3x + 10$
b. $f(x) = x^2 + 8x + 80$
c. $f(x) = 3x^2 - 36x + 100$
d. $f(x) = 5x^2 + 45x$
e. $f(x) = 5x^2 + 45$
f. $f(x) = -10x^2 + 20x + 30$
g. $f(x) = -x^2 - 10x + 1$
h. $f(x) = x^2 + x - 1$
i. $f(x) = 10 - x^2$
j. $f(x) = x - x^2$

$\gg$ 25. $f(x) = 3 - \frac{1}{2}x^2$ domein $[-2;4]$.

a. Teken de grafiek van f.
b. Welk interval is het bereik van f.
c. Voor welke $x \in [-2;4]$ geldt: $f(x) = 2\frac{1}{2}$?
d. Hoeveel oplossingen in $[-2,4]$ heeft de vergelijking $f(x) = 1{,}99$?

≫ 26. $g(x) = x^2 - 2x + 1$ domein $[0;4]$.

a. Teken de grafiek van g.

b. Wat is het bereik van g.

c. Voor welke $x \in [0;4]$ geldt: $g(x) = \frac{1}{4}$? En $g(x) = 2\frac{1}{4}$?

≫ 27. Een boer zet een stuk land uit voor zijn schapen en gebruikt daarbij een afrastering met een totale lengte van 80 m. Het stuk land wordt aan twee zijden door een sloot begrensd.

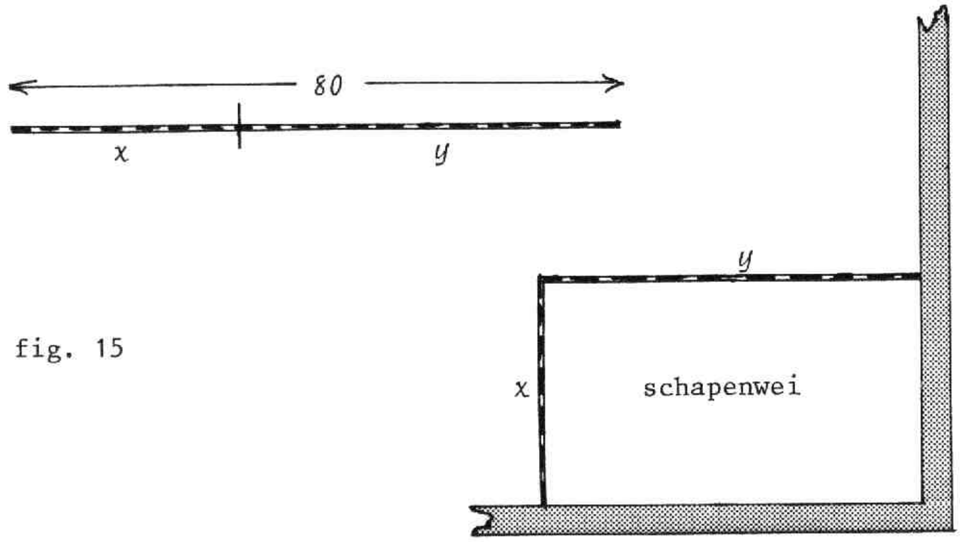


fig. 15

a. De zijden van de rechthoek noem je x resp. y. De zijde y is een functie van x. Teken een grafiek van die functie.

b. Wat is het domein (resp. het bereik) van de functie bedoeld in a.?

c. De oppervlakte A van het land is een functie van de zijde x. Beschrijf die functie met een formule en teken de grafiek. Aanwijzing: $A = x \cdot y = x \cdot (.....)$.

d. Bij welke afmetingen is de oppervlakte van het land van de schapen maximaal?

≫ 28. Dezelfde boer koopt nog meer schapen en wil nu een tweede stuk grasland uitzetten. Hij gebruikt een afrastering van 120 m lengte om drie zijden te begrenzen; als vierde zijde neemt hij een sloot.

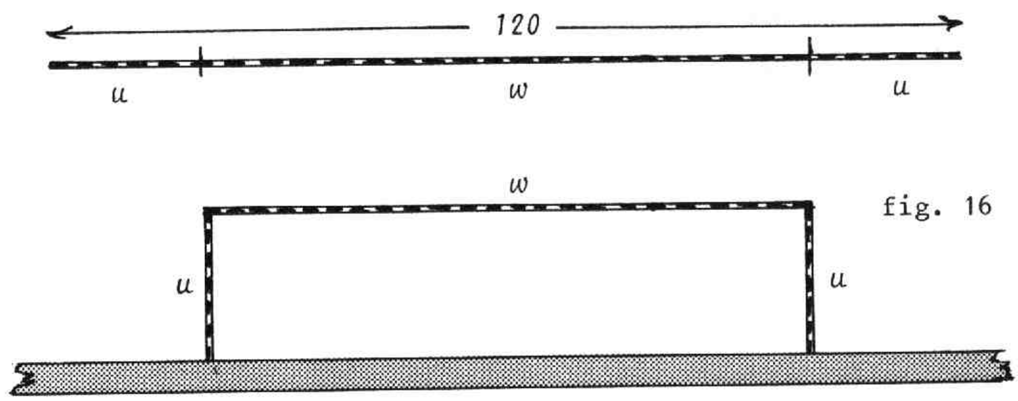


fig. 16

a. De zijden van de rechthoek zijn nu u resp. w en de oppervlakte is B. Schrijf w en B beide als functie van u.
Wat is het domein van elk?

b. Teken de grafieken van beide functies.

c. Bij welke afmetingen is B gelijk aan de maximale waarde van A? (Zie opgave ≫ 29).

d. Bij welke afmetingen is B maximaal?

≫ 29. De functie f en g met domein $[-1;4]$ zijn resp. gedefinieerd door:

$$f(x) = x^2 - 2x + 4 \quad \text{en} \quad g(x) = \tfrac{1}{2}x + 4$$

a. Teken in één figuur de grafieken van f en g.

b. Wat is het bereik van f? En van g?

c. Van welke $x \in [-1;4]$ geldt $f(x) \leq g(x)$?

≫ 30. Van een functie f is het domein $[-3;5]$ en het bereik $[1;5]$.

a. Schets vijf mogelijke grafieken van f.

b. Stel je voor dat f een rechtlijnige grafiek heeft.
Beschrijf f met een formule. (Twee mogelijkheden!).

≫ 31. Een verhuurbedrijf verhuurt auto's aan grote firma's voor *f* 50,-- per dag (inclusief onderhoud en verzekering).
Als één firma meer dan 12 auto's huurt krijgt het korting volgens onderstaand tarief:

2% op het totaalbedrag bij het huren van 13 auto's;
4% op het totaalbedrag bij het huren van 14 auto's;
6% op het totaalbedrag bij het huren van 15 auto's

Er mogen maximaal 50 auto's aan één firma worden verhuurd.
De inkomsten in guldens (= I) die het verhuurbedrijf van één klant heeft in een functie van het aantal verhuurde auto's (= x).

a. Geef de formule voor I als functie van x voor $0 \leqq x \leqq 12$.

b. Voor $12 \leqq x \leqq 50$ geldt:

aantal auto's x	prijs per auto p	inkomsten I
12	50	600
13	49	...
14	48	...
..	..	...

Geef een formule voor I als functie van x voor $12 \leqq x \leqq 50$.

c. Wat is het maximale bedrag aan inkomsten dat het verhuurbedrijf van één firma kan ontvangen?

d. Teken de grafiek van I als functie van x.
Neem voor het gemak als domein [0;50] i.p.v. {0,1,2,....50}.

5

ABSOLUTE WAARDE

Maximum temperatuur, 20 maart

Maximum temperatuur, 20 april

≫ 32. Tweemaal een temperatuurkaartje van Nederland.

Als er gevraagd wordt naar het verschil in (maximum-)temperatuur tussen Zeeland en de Achterhoek is het antwoord:

20 maart: verschil 3° C;

20 april: verschil 7° C.

Wat voor kritiek zou je op dit antwoord kunnen hebben?

De maximum temperatuur op een dag in Zeeland resp. de Achterhoek noteren we nu met t_Z resp. t_A.
De vraag naar het temperatuurverschil tussen Zeeland en de Achterhoek kun je op (tenminste) twee manieren opvatten:

(1) Er wordt gevraagd naar het 'gerichte verschil' $t_Z - t_A$.
In die opvatting luidt het antwoord:

20 maart: verschil 3° C;
20 april: verschil -7° C.

(2) Er wordt gevraagd naar het 'absolute verschil'.
In die opvatting luidt het antwoord zoals vermeld op de vorige pagina.

Hoe bereken je het absolute verschil tussen twee reële getallen?
De (vermoedelijk) het meest voor de hand liggende manier is:
je vergelijkt de twee getallen, kiest het grootste en trekt er het kleinste vanaf.
In het voorbeeld van de temperaturen in Zeeland en Achterhoek:

$t_Z \geqq t_A$?
Zo ja: absolute verschil is: $t_Z - t_A$.
Zo nee: absolute verschil is: $t_A - t_Z$.

Een tweede manier is:
Je berekent 'eerste getal' min 'tweede getal' (en let er dus vooraf niet op welke het grootste is).
Is de uitkomst positief (of nul) dan ben je klaar.
Is de uitkomst negatief, dan verander je het teken.
(Bij gebruik van een zakrekenmachientje moet je in zo'n geval de toets 'change sign' indrukken). In het temperatuur-voorbeeld:

Je berekent $t_Z - t_A$.
$t_Z - t_A \geqq 0$?
Zo ja: absolute verschil is: $t_Z - t_A$.
Zo nee: absolute verschil is: $-\ (t_Z - t_A)$.
('change sign').

Het absolute verschil in t_Z en t_A noteren we als: $ABS(t_Z - t_A)$.
ABS is een functie waarvan je de werking geïllustreerd ziet in tabel en grafiek:

x	$ABS(x)$
0	0
1	1
-1	1
8	8
-8	8
0,473	0,473
-0,473	0,473

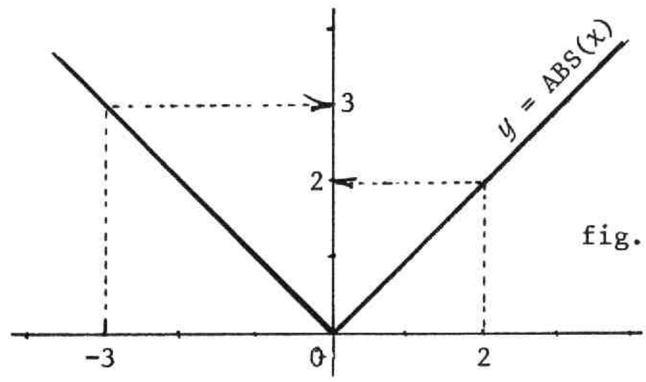


fig. 17

≫ 33. a. Maak een tabel (voor $x = 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4$) en teken de grafiek van de functie f met domein $\mathbb{R}$ in elk van de volgende gevallen:

(1) $f : x \to ABS(x) + 2$

(2) $f : x \to ABS(x + 2)$

(3) $f : x \to ABS(1 - x)$

(4) $f : x \to x + ABS(x)$

(5) $f : x \to 2x + ABS(x)$

(6) $f : x \to ABS(x) + \frac{1}{2}x$

b. Geef in elk van de gevallen (1) t/m (6) het bereik van f.

c. Geef in elk van de gevallen (1) t/m (6) de oplossing van '$f(x) = 9$'.

In plaats van $ABS(x)$ zie je in wiskundeboeken neestal de schrijfwijze $|x|$.
De functies van opgave ≫ 33 zien er dan zó uit:

$f : x \to |x| + 2$

$f : x \to |x + 2|$

$f : x \to |1 - x|$

$f : x \to x + |x|$

$f : x \to 2x + |x|$

$f : x \to |x| + \frac{1}{2}x$

≫ 34. a. Teken in één figuur de grafieken van de functies:

$$f : x \to |x| \quad \text{en} \quad g : x \to |x - 2|$$

beide met domein $\mathbb{R}$.

b. De functie S is de som van f en g, d.w.z.

$$S(x) = f(x) + g(x)$$

voor elke $x \in \mathbb{R}$.

Teken de grafiek van S door de grafieken van f en g 'op te tellen'.

c. Wat is de minimumwaarde van $S(x)$?

Voor welke x wordt die bereikt?

≫ 35. $T(x) = |x - 1| + |x - 4|$ domein $\mathbb{R}$.

a. Teken de grafiek van T.

b. Wat is de minimumwaarde van $T(x)$?

Voor welke x wordt die bereikt?

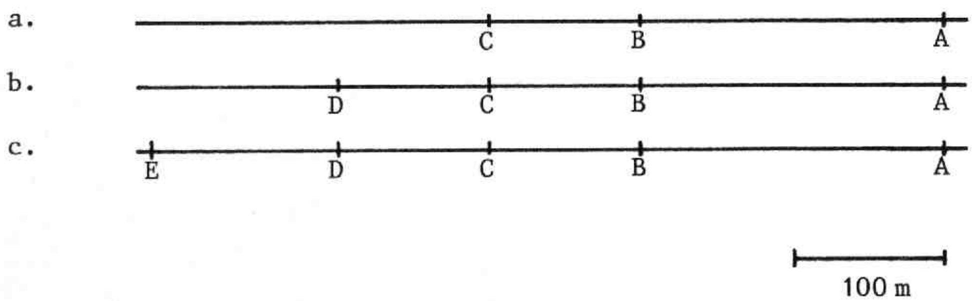
≫ 36. a. Neem de grafieken van S en T (opgave ≫ 34 en ≫ 35) over in één figuur en teken daarbij ook de grafiek van de somfunctie R (dus: $R(x) = S(x) + T(x)$.

b. Wat is de minimale waarde van $R(x)$?

Voor welke x wordt die bereikt?

≫ 37. Langs een weg bevinden zich een aantal torenflats (A, B, ...). Verdere bebouwing ontbreekt. Men wil een bushalte langs die weg plaatsen zó dat de som van de afstanden tot die flatgebouwen minimaal is.

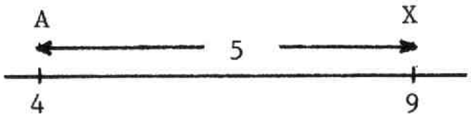
Geef in elk van de volgende gevallen aan waar de bushalte geplaatst moet (kan) worden. Verklaar je antwoorden.



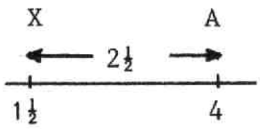
Opgave ≫ 36 en ≫ 37 hebben meer met elkaar te maken dan je op het eerste gezicht zou denken.
Bekijk nog eens opgave ≫ 37b.
Langs de weg leggen we een getallenlijn (met als eenheid 100 m).

De (variabele) halteplaats noemen we X (met 'coördinaat' x).
De afstand van X tot bijv. A is gelijk aan het verschil van x en 4 in absolute waarde, kortom: $|x - 4|$, of even goed: $|4 - x|$.

Voorbeelden:



$x = 9$; $|x - 4| = 5$



$x = 1\frac{1}{2}$; $|x - 4| = 2\frac{1}{2}$

De som van de afstanden van x tot de punten 0, 1, 2 en 4 is dus:

$$|x| + |x - 1| + |x - 2| + |x - 4|$$

en dit is juist gelijk aan $R(x)$. (Zie opgave ≫ 36).
Je hebt uit de grafiek kunnen aflezen dat het minimum 5 bereikt wordt voor $1 \leqq x \leqq 2$.

≫ 38. a. Welke totale-afstand-functie Q past er bij opgave ≫ 37a? (Geef C, B en A weer de coördinaten 1, 2 en 4).

b. Zonder dat je de grafiek van Q getekend hebt, kun je een markant verschil met de grafiek van R noemen. Welk?

≫ 39. $F(x) = |x + 1\frac{1}{2}| + |x| + |x - 1| + |x - 2| + |x - 4|$ (domein $\mathbb{R}$).

a. Voor welke $x \in \mathbb{R}$ is $F(x)$ minimaal?

b. Wat is het bereik van F?

≫ 40. De grafiek van de functie $S(x) = |x| + |x - 2|$ (zie opgave ≫ 34) is spiegelsymmetrisch.
Hoe kun je die symmetrie m.b.v. afstanden op de getallenlijn verklaren?

De grafiek van bijv. $g(x) = |x - 2|$ kun je ook vinden door eerst de grafiek van $f(x) = x - 2$ te tekenen en vervolgens het 'negatieve deel' te spiegelen in de X-as. (Het effect van 'change sign').

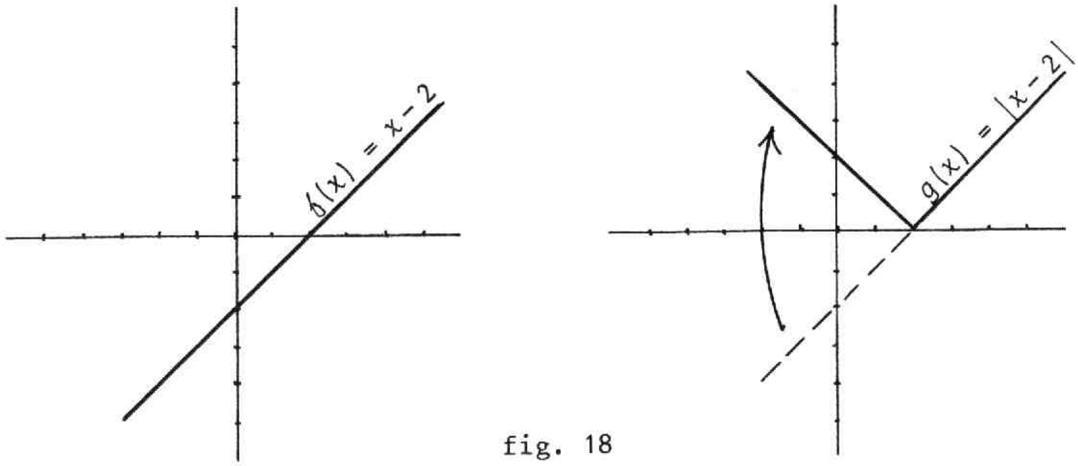


fig. 18

≫ 41. Teken in één figuur de grafieken van:

a. $f(x) = 2x + 1$ en $g(x) = |2x + 1|$

b. $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1$ en $g(x) = |-\frac{1}{2}x + 1|$

c. $f(x) = 1 - x^2$ en $g(x) = |1 - x^2|$

d. $f(x) = x^2 - 1$ en $g(x) = |x^2 - 1|$

≫ 42. Teken achtereenvolgens de grafieken van:

$y = x - 3$

$y = |x - 3|$

$y = |x - 3| - 3$

$y = ||x - 3| - 3|$

Vergelijk de grafieken van $y = x$, $y = -x$ en $y = \mathrm{ABS}(x)$

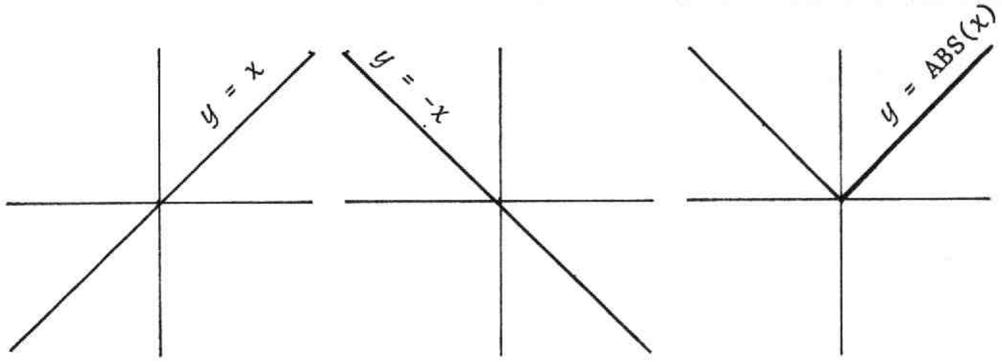


fig. 19

Je ziet nog eens:

$$\boxed{\begin{array}{llll} \mathrm{ABS}(x) = & x & \text{voor} & x \geq 0 \\ \mathrm{ABS}(x) = & -x & \text{voor} & x < 0 \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{llll} |x| = & x & \text{voor} & x \geq 0 \\ |x| = & -x & \text{voor} & x < 0 \end{array}}$$

N.B. De 'min' bij $-x$ betekent 'change sign'; als x een negatief getal voorstelt is $-x$ positief!

≫43. $f(x) = x \cdot |x|$ (domein $\mathbb{R}$).

a. Teken de grafiek van f.

b. Beschrijf f zonder 'absoluut-strepen':

$f(x) = \ldots.$ voor $x \geq 0$

$f(x) = \ldots.$ voor $x < 0$

≫44. $f(x) = x^2 + 2|x|$ (domein $\mathbb{R}$).

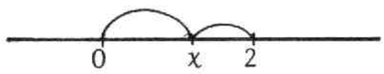
Beschrijf f zonder absoluutstrepen en teken de grafiek van f.

≫45. Dezelfde opdracht als in opgave ≫44 voor: $f(x) = x^2 - 2|x|$.

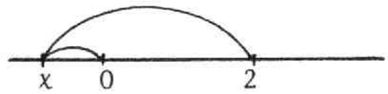
De functies van pag. 30 kun je ook zonder 'absoluut-strepen' schrijven.

Voorbeeld: $S(x) = |x| + |x - 2|$

als $x \geqq 2$, dan $S(x) = x + x - 2 = 2x - 2$



als $0 \leqq x \leqq 2$, dan $S(x) = x + 2 - x = 2$



als $x \leqq 0$, dan $S(x) = -x + 2 - x = 2 - 2x$

≫46. $T(x) = |x - 1| + |x - 4|$ $\qquad x \in \mathbb{R}$.

a. Beschrijf de functie T zonder absoluut-strepen.

b. Los op: $T(x) = x$.

≫47. $U(x) = |x + 1| + |x| + |x - 3|$ (domein [-2;4]).

a. Beschrijf de functie U zonder absoluut-strepen.

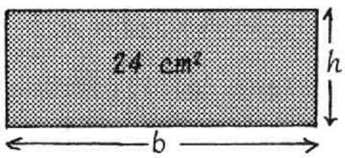
b. Teken de grafiek van U.

c. Wat is het bereik van U?

6 ASYMPTOTEN

≫ 48. Als je weet dat de oppervlakte van een rechthoek 24 cm² is, kun je over de vorm van die rechthoek nog niets zeggen. Er zijn immers allerlei mogelijkheden: 2 bij 12 cm; 3 bij 8 cm; 4 bij 6 cm enz.

fig. 20



Noem de basis van de rechthoek b en de hoogte h;
h is een functie van b.

a. Teken de grafiek van die functie. Geef een bijpassende formule.

b. Welk punt van de grafiek correspondeert met een vierkant van 24 cm² oppervlakte?

≫ 49. Bij een snelheidscontrole gaat de politie als volgt te werk: over een uitgezette afstand van 100 meter wordt electronisch de tijd opgemeten van elke passerende auto.
Noem de tijd (in sec) van zo'n auto: t en de snelheid (in km/u) van die auto: v.
v is een functie van t.

a. Teken een grafiek van die functie en geef een bijpassende formule.

b. Op de snelweg is een maximale snelheid van 120 km/u en een minimale snelheid van 60 km/u toegestaan.
Kleur het deel van de grafiek dat correspondeert met toegestane snelheden.

De opgaven ≫ 48 en ≫ 49 vertonen, wiskundig gezien, veel overeenkomst. In beide gevallen neemt de ene grootheid toe als de andere afneemt. Daarbij kun je een duidelijke wetmatigheid vaststellen.
Uitgaande van een zekere rechthoek van 24 cm^2 geldt:

- maak je de basis 2 x zo groot, dan wordt de hoogte 2 x zo klein;
- maak je de basis 3 x zo groot, dan wordt de hoogte 3 x zo klein.

enz.
Iets dergelijks geldt in het tweede voorbeeld.
In zulke gevallen noem je de beide grootheden *omgekeerd evenredig*.
In opgave ≫ 48: de 'basis' is omgekeerd evenredig met de 'hoogte'.
In opgave ≫ 49: de 'snelheid' is omgekeerd evenredig met de 'tijd'.

≫ 50. Bekijk nog eens opgave ≫ 6 (pag. 7).

a. Controleer dat PK (produktiekosten) en N (aantal vaten) omgekeerd evenredig zijn.

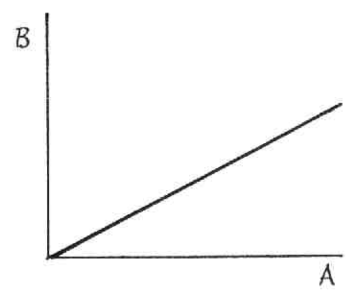
b. Hoe zit dat met OK (opslagkosten) en N?
En met PK en OK?

De grootheden B en A zijn *evenredig* als ze voldoen aan:

$$B = c \cdot A$$

(c is constante).

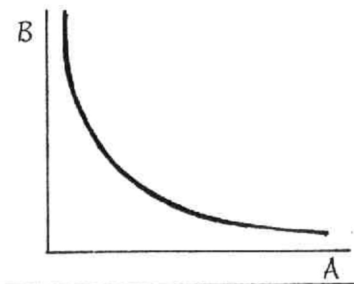
De grafiek van B als functie van A is een rechte lijn.



De grootheden B en A zijn *omgekeerd evenredig* als:

$$B = c \cdot \frac{1}{A}$$

De grafiek van B als functie van A is een hyperbool.



Terug naar opgave ≫ 48.

Je kunt (in theorie althans) de basis van de rechthoek zo lang maken als je zelf wilt, de hoogte wordt dan 'willekeurig klein'.

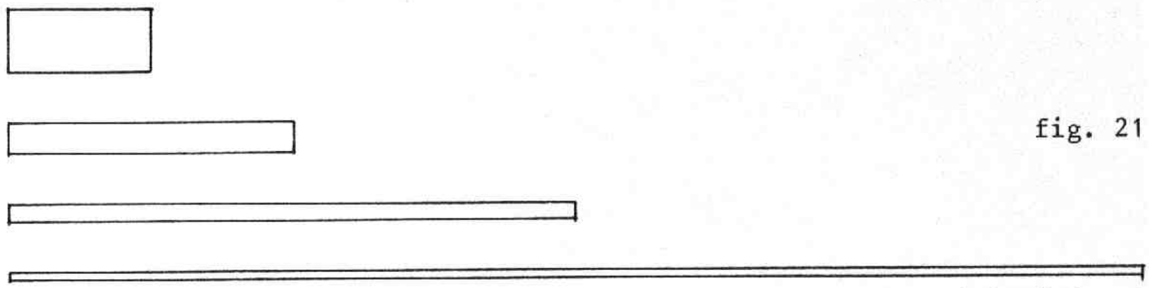


fig. 21

Schaal 1 : 4

Of in tabel:

	b (in cm)	h (in cm)	
× 10	15	1,6	× 0,1
× 10	150	0,16	× 0,1
× 10	1500	0,016	× 0,1
× 10	15000	0,0016	× 0,1
	150000	0,00016	
	...	...	

Voor de grafiek betekent dat: de afstand van de grafiek tot de lijn $h = 0$ wordt willekeurig klein bij onbeperkte toename van b.

De lijn $h = 0$ is een *asymptoot* van de grafiek.

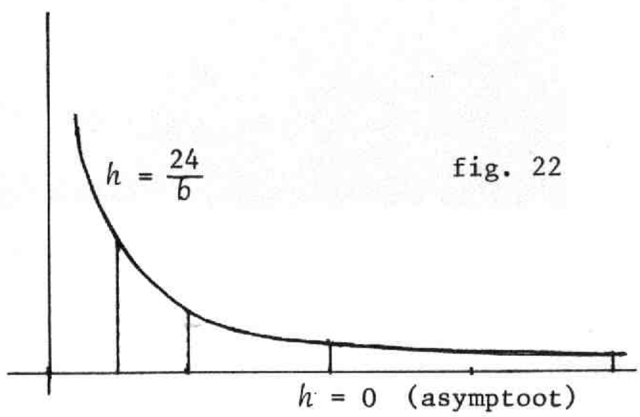


fig. 22

De asymptoten zijn niet van de lucht.

Omdat je h en b in dit verhaal van rol kunt laten verwisselen geldt natuurlijk ook dat de lijn $b = 0$ een asymptoot van de grafiek is.

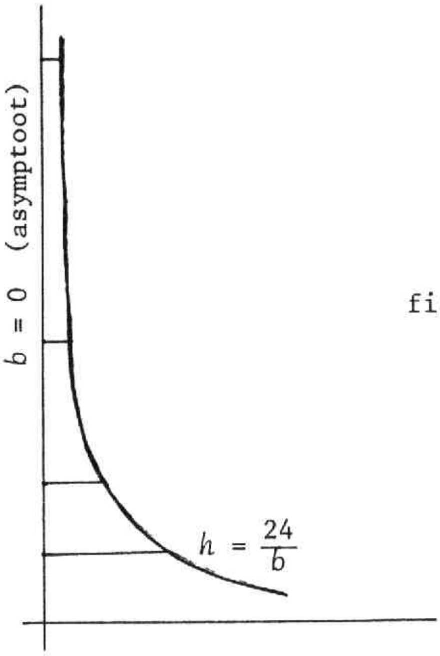


fig. 23

≫ 51. $f(x) = 2 + \frac{1}{x}$ (domein $\mathbb{R}^+$).

a. Vul in:

x	10	100	1000	10000	100000
y	...	...	...	...	...

b. Ook:

x	1	0,1	0,01	0,001	0,0001
y	...	...	...	...	...

c. Teken de grafiek van f.
Welke asymptoten heeft de grafiek?

≫ 52. $f(x) = \frac{12}{x}$ (domein $\mathbb{R}$ $\{0\}$)

a. Teken de grafiek van f. (Ook negatieve input-waarden zijn toegestaan!)

b. Welke asymptoten heeft die grafiek?

c. Los op: $f(x) = x$.

≫ 53. Gegeven zijn de functies f en g met:

$$f(x) = 1\tfrac{1}{2}x \quad \text{en} \quad g(x) = \frac{6}{x}$$

beide met domein $\mathbb{R}^+$.

a. Teken in één figuur de grafieken van f en g.

b. Bereken de coördinaten van het snijpunt van de grafieken.

c. S is de som van f en g, d.w.z. $S(x) = f(x) + g(x)$.
Teken de grafiek van S (door de grafieken van f en g 'op te tellen').

d. Welke asymptoten heeft de grafiek van S?

≫ 54. Van een rechthoek met basis b en hoogte h is de oppervlakte 9 cm². De omtrek (P) van de rechthoek is een functie van b.

a. Beschrijf die functie met een formule en teken de grafiek.

b. Lees uit je grafiek af bij welke keuze van b (en h) de omtrek minimaal is.

≫ 55. $f(x) = \frac{2}{x^2}$ (domein $\mathbb{R}\setminus\{0\}$); $g(x) = \frac{1}{2}x^2$ (domein $\mathbb{R}$).

a. Teken de grafiek van f en g in één figuur.

b. Welke asymptoten heeft de grafiek van f?

c. Bereken de coördinaten van de snijpunten van de grafieken van f en g.

DEEL B

7

GRAFIEKEN TRANSFORMEREN

≫ 56. Zaterdagavond. In het Feyenoordstadion heeft men m.b.v. een computer van minuut tot minuut het aantal bezoekers bijgehouden.
Het resultaat is verwerkt in een grafiek:

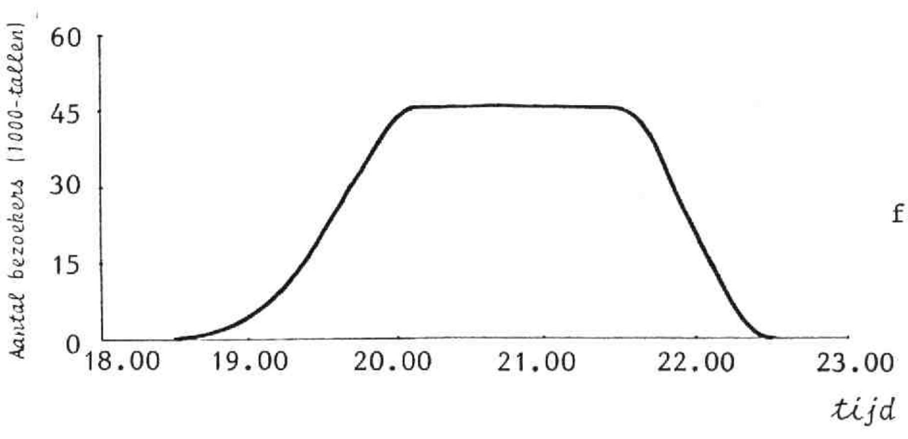


fig. 24

a. De voetbalwedstrijd duurde van 20.00 tot 21.45 uur.
Hoeveel mensen verlieten het stadion voortijdig?

b. De hekken van het stadion werden om 18.30 uur geopend.
Op welk tijdstip was de 'instroom' het grootst?

c. Stel het aantal toeschouwers op het tijdstip t gelijk aan $N(t)$.
(t is de tijd in minuten; $t = 0$ komt overeen met 18.30 uur, $t = 30$ met 19.00 uur enz.).
Wat is het domein en wat is het bereik van de functie N?

De 'Kuip' in Rotterdam.

≫ 57. Op dezelfde dag en op dezelfde tijd wordt er in het Olympisch Stadion een wedstrijd gespeeld die 30.000 toeschouwers trekt. Ook hier gaan de stadionhekken om 18.30 uur open.

a. Schets de grafiek die het verloop van het aantal toeschouwers tussen 18.30 en 22.30 uur weergeeft. Neem daarbij aan dat het 'patroon' van komen en gaan hetzelfde is als bij de wedstrijd in het Feyenoordstadion.

b. Het aantal toeschouwers afhankelijk van t (= tijd in minuten na 12.30 uur) noemen we hier $M(t)$. Welk verband bestaat er tussen $M(t)$ en $N(t)$?

≫ 58. Een derde wedstrijd begint een half uur later en lokt eveneens 30.000 toeschouwers naar de tribunes. Hier gaan de hekken om 19.00 uur open. Het aantal toeschouwers dat zich t minuten na 18.30 uur in het stadion bevindt noemen we hier $K(t)$.

a. Schets de grafiek van K met die van M in één plaatje.

b. Welke van de volgende formules is goed:

(1) $K(t + 30) = M(t)$ voor $0 \leq t \leq 300$

(2) $K(t) = M(t + 30)$ voor $-30 \leq t \leq 270$

(3) $K(t) = M(t - 30)$ voor $30 \leq t \leq 330$

≫ 59. Het toeschouwersverloop bij twee sportevenementen geeft het volgende grafiekenbeeld:

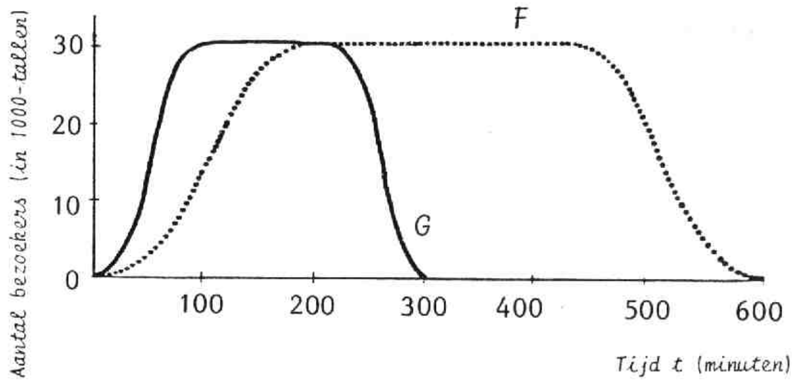


fig. 25

a. Wat is een opvallend verschil tussen beide evenementen?

b. Welke van onderstaande formules zijn goed?

(1) $G(t) = \frac{1}{2}F(t)$ (3) $G(t) = F(2t)$

(2) $G(t) = F(\frac{1}{2}t)$ (4) $G(\frac{1}{2}t) = F(t)$

c. Geef bij de correcte formule(s) ook het interval van toegestane t-waarden.

≫ 60. a. De grafiek van $f(x) = x^2$ is twee eenheden verticaal omhoog verschoven. Resultaat: de grafiek van g. Welk functievoorschrift past er bij g?

b. De grafiek van h krijg je door de grafiek van f verticaal omlaag te verschuiven over een afstand 1. Welk functievoorschrift past er bij h?

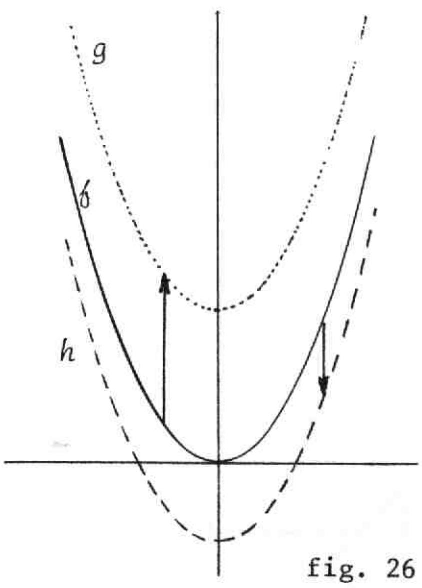


fig. 26

≫ 61. $f(x) = |x|$

De grafiek van g resp. h krijg je door de grafiek van f over een afstand van twee eenheden horizontaal naar rechts resp. één eenheid horizontaal naar links te verschuiven.
Welke functievoorschriften passen er resp. bij g en h?

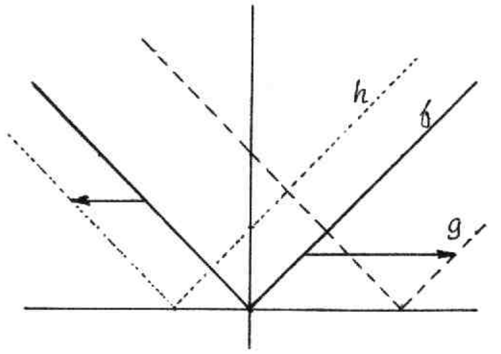


fig. 27

≫ 62. $f(x) = x^2 - 2x$

De grafiek van f is gespiegeld resp. t.o.v. de X-as (resultaat is g) en de Y-as (resultaat is h).
Welke functievoorschriften passen er resp. bij g en h?

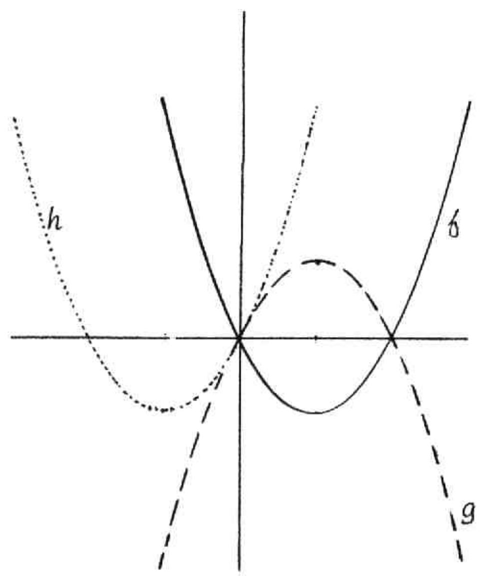


fig. 28

≫ 63. $f(x) = x^2 + 1$

a. De grafiek van f is verticaal vermenigvuldigd vanuit de X-as met factor 2.
Resultaat: de grafiek van g.
Welk functievoorschrift past er bij g?

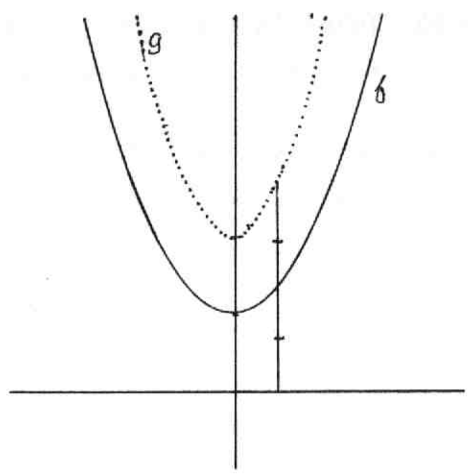
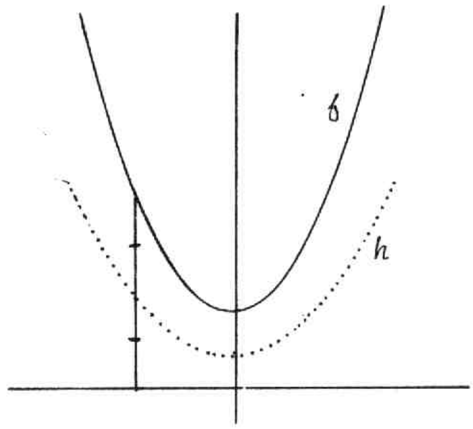
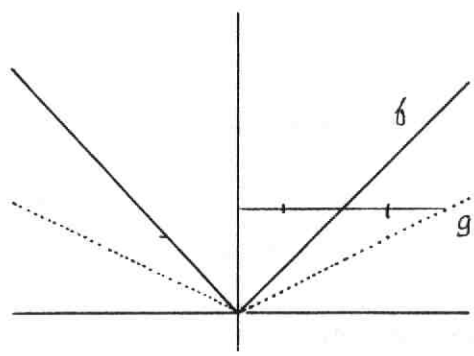


fig. 29

b. De grafiek van h krijg je door die van f verticaal te vermenigvuldigen vanuit de X-as met factor $\frac{1}{2}$.
Welk functievoorschrift past er bij h?



≫ 64. $f(x) = |x|$
De grafiek van g resp. h krijg je door de grafiek van f horizontaal te vermenigvuldigen vanuit de Y-as met factor 2 resp. $\frac{1}{2}$.
Welke functievoorschriften passen er resp. bij g en h?



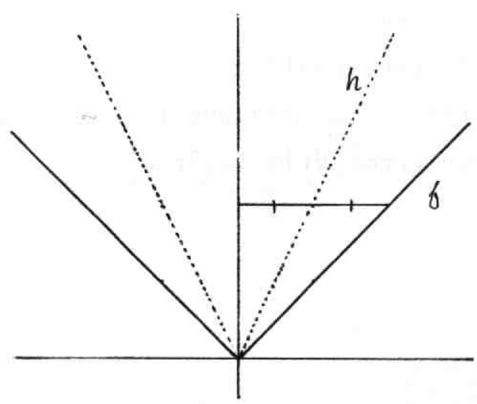
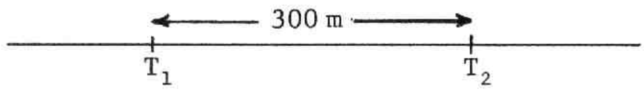


fig. 30

≫ 65. Teken in één figuur de grafieken van de functie
$x \to |x|$, $x \to 2 \cdot |x - 3|$ en $x \to |x| + 2 \cdot |x - 3|$

≫ 66. Langs een weg staan op een afstand van 300 m twee torenflats (T_1 en T_2). T_2 telt twee keer zoveel etages en ook twee keer zoveel inwoners als T_1.



Ergens langs de weg wordt een bushalte geplaatst. Men gaat ervan uit dat elke inwoner van een van de beide flats wel eens van de bus gebruik zou kunnen maken. De halte wordt zó geplaatst dat de totale 'personen-afstand' (d.i. de som van de afstanden die zouden worden afgelegd als alle inwoners naar de halte zouden lopen) minimaal is. Waar komt de halte?

≫ 67. a. Teken in één figuur achtereenvolgens de grafieken van de afstanden: $x \to x^2$, $x \to (x - 3)^2$, $x \to \frac{1}{2}(x - 3)^2$ en $x \to \frac{1}{2}(x - 3)^2 + 5$.

b. Veronderstel dat het domein van deze vier functies het interval $[-1;5]$ is. Geef het bereik van elk van de vier.

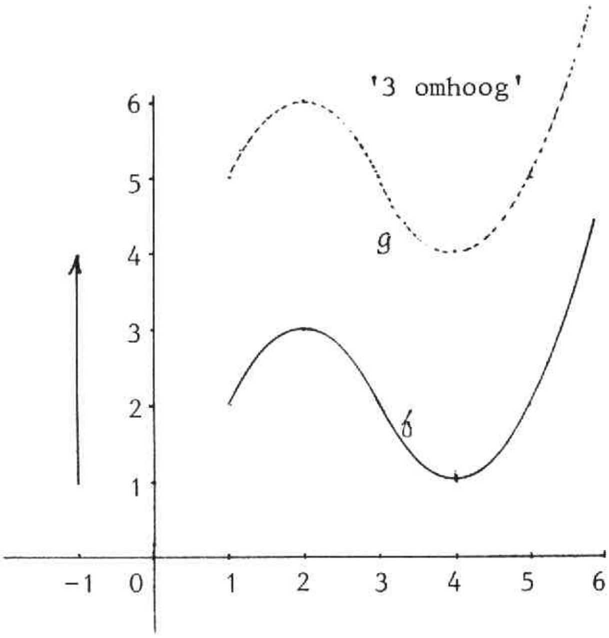
≫ 68. De grafiek van $f(x) = \frac{6}{x}$ wordt in horizontale richting drie eenheden naar links verschoven. Resultaat: de grafiek van g.
Deze laatste wordt in verticale richting twee eenheden omhoog geschoven en dit levert de grafiek van h op.

a. Welke asymptoten heeft de grafiek van h?

b. Welk functievoorschrift past er bij h?

De opgaven ≫ 56 tot en met ≫ 68 hebben alle betrekking op het transformeren van grafieken. Je hebt kennis gemaakt met 'verschuivingen' (horizontaal en verticaal), 'spiegelingen' (t.o.v. de X-as en de Y-as) en 'vermenigvuldigingen' (verticaal t.o.v. de X-as en horizontaal t.o.v. de Y-as). De consequenties voor de functievoorschriften kun je vinden op de volgende drie pagina's.

VERTICALE VERSCHUIVING



$g(2) = f(2) + 3$

$g(4) = f(3) + 3$

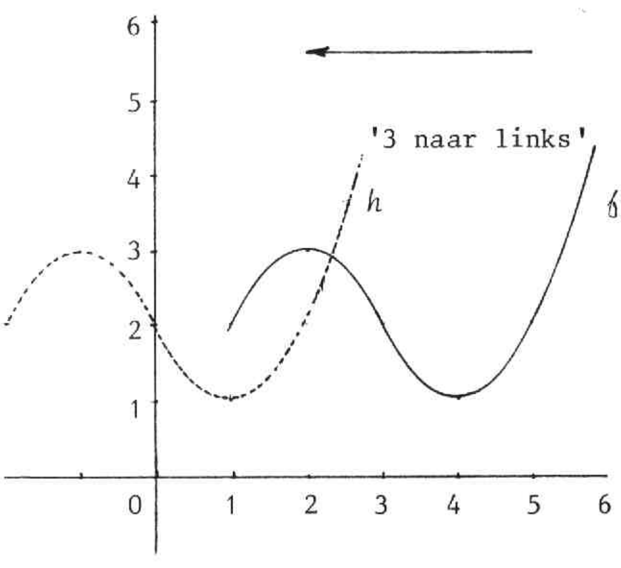
$g(5) = f(4) + 3$

.....

Kortom:

$$\boxed{g(x) = f(x) + 3}$$

HORIZONTALE VERSCHUIVING



$h(-1) = f(2)$

$h(1) = f(4)$

$h(2\frac{1}{2}) = f(5\frac{1}{2})$

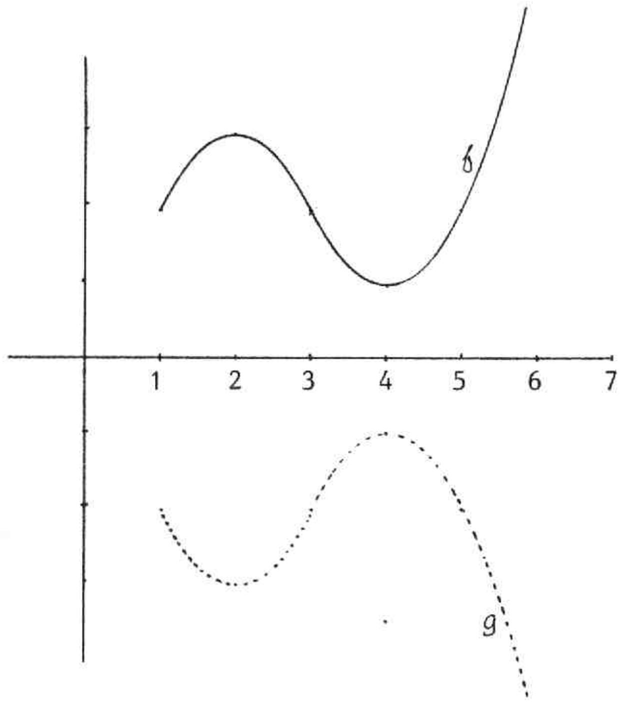
.....

Kortom:

$$\boxed{h(x) = f(x + 3)}$$

≫ 69. Laat $[a,b]$ het domein en $[c,d]$ het bereik zijn van de functie f.
Wat is het domein resp. bereik van de functie $x \to f(x) + 3$?
En van de functie $x \to f(x + 3)$?

SPIEGELING IN DE X-AS

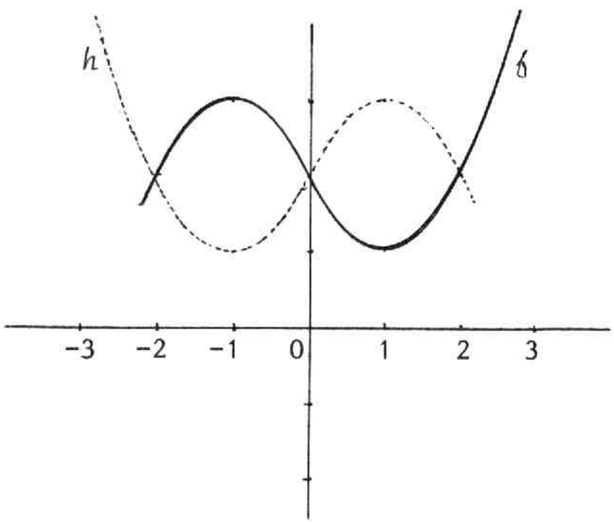


$g(2) = -f(2)$
$g(3) = -f(3)$
$g(5) = -f(5)$
......

Kortom:

$\boxed{g(x) = -f(x)}$

SPIEGELING IN DE Y-AS



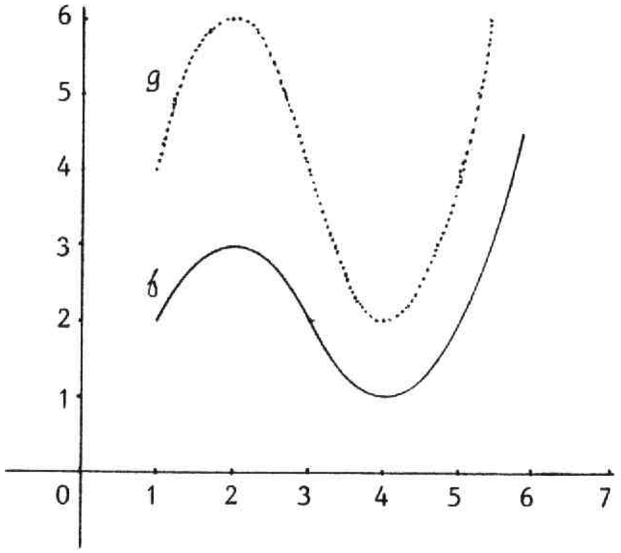
$h(-2) = f(2)$
$h(0) = f(3)$
$h(1) = f(5)$
.....

Kortom:

$\boxed{h(x) = f(-x)}$

≫ 70. Dezelfde vraag als in opgave ≫ 69 van de functies $x \to -f(x)$ en $x \to f(-x)$.

VERTICALE VERMENIGVULDIGING T.O.V. DE X-AS



$g(1) = 2 \cdot f(1)$

$g(3) = 2 \cdot f(3)$

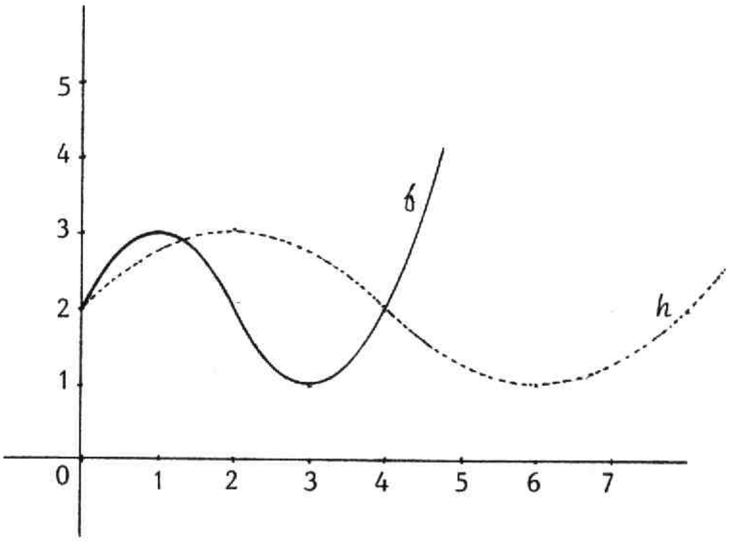
$g(5) = 2 \cdot f(5)$

.....

Kortom:

$\boxed{g(x) = 2 \cdot f(x)}$

HORIZONTALE VERMENIGVULDIGING T.O.V. DE Y-AS



$h(2) = f(1)$

$h(3) = f(1\tfrac{1}{2})$

$h(6) = f(3)$

.....

Kortom:

$\boxed{h(x) = f(\tfrac{1}{2}x)}$

≫ 71. Dezelfde vraag als in opgave ≫ 69, maar nu voor $x \to 2f(x)$ en $x \to f(\tfrac{1}{2}x)$.

≫ 72.

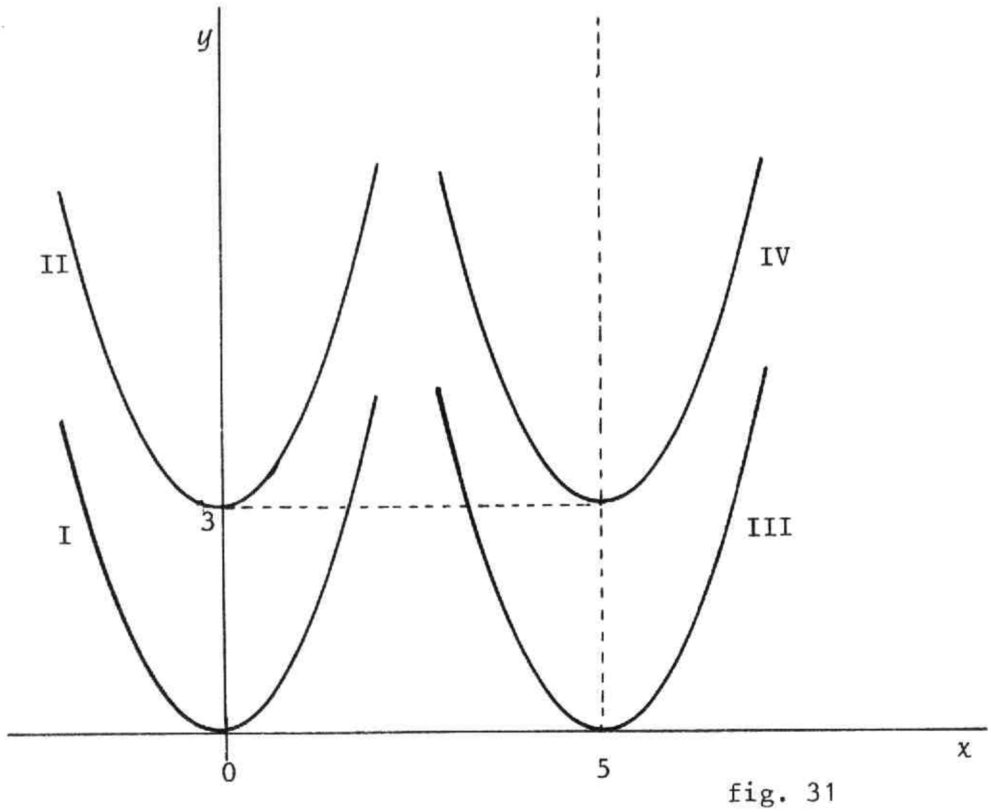


fig. 31

I is de grafiek van $y = x^2$.
Welke functies horen bij II, III en IV?

≫ 73. a. Teken de grafiek van $f(x) = |x| - x$.

b. Verschuif deze grafiek over de vector (2,3) (d.w.z. 'horizontaal twee eenheden naar rechts èn verticaal drie eenheden omhoog'). Zo krijg je de grafiek van de functie g.
Welk functievoorschrift past er bij g?

c. Spiegel de grafiek van g t.o.v. de X-as. Resultaat: de grafiek van h.
Welk functievoorschrift past er bij h?

≫ 74. Teken in één figuur de grafieken van de volgende functies (met domein $\mathbb{R}$).

$f : x \to x^2$

$g : x \to \frac{1}{2}x^2$

$h : x \to \frac{1}{2}(x - 1\frac{1}{2})^2$

$k : x \to \frac{1}{2}(x - 1\frac{1}{2})^2 + 2$

≫ 75. Vier parabolen.

I is de grafiek van $y = -x^2$.

Welke functies horen er bij II, III en IV?

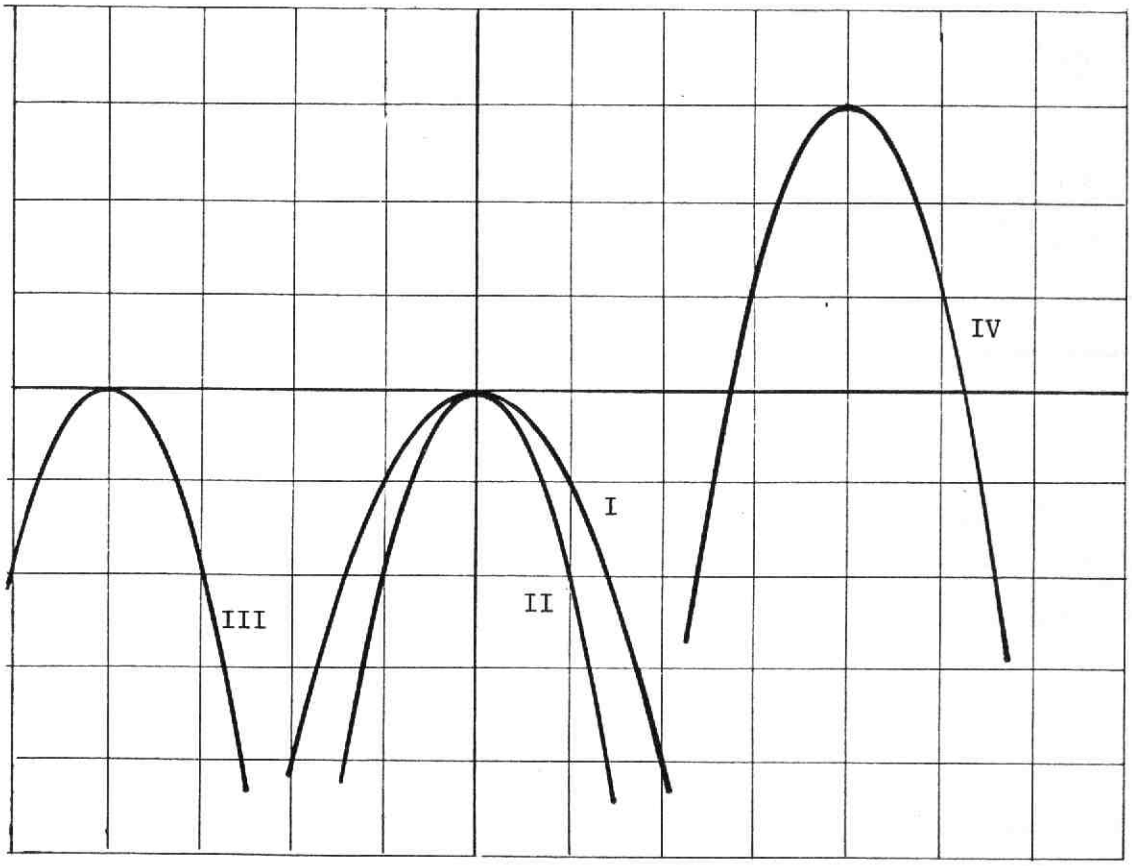


fig. 32

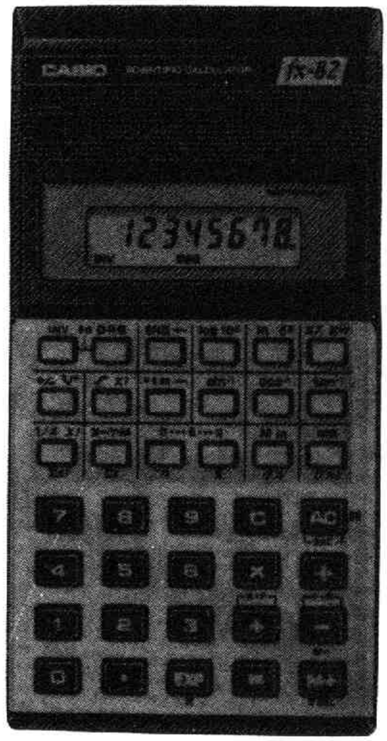
≫ 76. De grafiek van II kun je krijgen door de grafiek van I in *horizontale richting* t.o.v. de Y-as te vermenigvuldigen.

Met welke factor?

8 INVERSE FUNCTIES/SAMENSTELLEN VAN FUNCTIES

Op menig rekenmachientje tref je de toets $\boxed{x^2}$ aan. De werking daarvan is nauwelijks verrassend te noemen:

TOETS IN	VENSTER
$\boxed{3}$ $\boxed{x^2}$	9
$\boxed{4}$ $\boxed{x^2}$	16
$\boxed{5}$ $\boxed{x^2}$	25



Je kunt de toets $\boxed{x^2}$ combineren met de toets INV (mits die natuurlijk op je machientje zit).
Resultaat:

TOETS IN	VENSTER
$\boxed{3}$ $\boxed{\text{INV}}$ $\boxed{x^2}$	1.73205081
$\boxed{4}$ $\boxed{\text{INV}}$ $\boxed{x^2}$	2
$\boxed{5}$ $\boxed{\text{INV}}$ $\boxed{x^2}$	2.23606798

≫ 77. a. Welke bewerking voert het machientje uit als je (na een of ander getal) achtereenvolgens $\boxed{\text{INV}}$ en $\boxed{x^2}$ intoetst?

b. Wat kun je zeggen van het resultaat als je, na een getal ingevoerd te hebben, achtereenvolgens $\boxed{x^2}$ $\boxed{\text{INV}}$ $\boxed{x^2}$ intoetst?

≫ 78. De 'keten' $\boxed{x^2}$ $\boxed{\text{INV}}$ $\boxed{x^2}$ doet eigenlijk niets!
Kun je nog een paar van zulke ketens op je rekenmachientje maken die 'niets' doen?

De functie die correspondeert met de toets $\boxed{x^2}$ noemen we even k (de 'k' van kwadrateren).
De combinatie $\boxed{\text{INV}}$ $\boxed{x^2}$ correspondeert met een functie die we de *inverse functie* van k noemen. Notatie: k^{inv}.

Vergelijk onderstaande input-output-tabelletjes van k en k^{inv}

$\xrightarrow{k}$

input	output
2	4
10	100
26	676
1,4	1,96

$\xrightarrow{k^{\text{inv}}}$

input	output
4	2
100	10
676	26
1,96	1,4

Merk op:

* Als je de 'output' van k gebruikt als 'input' van k^{inv}, dan krijg je de eerste input terug.

* Bij de inverse functie worden 'input' en 'output' van de oorspronkelijke functie als het ware verwisseld.

≫ 79. De functies f, g en h zijn resp. gegeven door:
$f(x) = x + 10$; $g(x) = 10 \cdot x$ en $h(x) = 10 - x$.
Input-output-tabelletjes van f en f^{inv} zijn bijvoorbeeld:

$\xrightarrow{f}$

input	output
1	11
2	12
10	20
-5	5

$\xrightarrow{f^{\text{inv}}}$

input	output
11	1
12	2
20	10
5	-5

a. Maak ook zulke input-output-tabelletjes voor g, g^{inv}, h, h^{inv}.

b. Welke functievoorschriften passen er bij resp. f^{inv}, g^{inv} en h^{inv}?

≫80. a. Welke functie is de inverse van $x \to x - 2\frac{1}{2}$?

b. Welke functie is de inverse van $x \to 2\frac{1}{2} \cdot x$?

≫81. De grafieken van k en k^{inv} (zie pag. 54) getekend in één figuur:

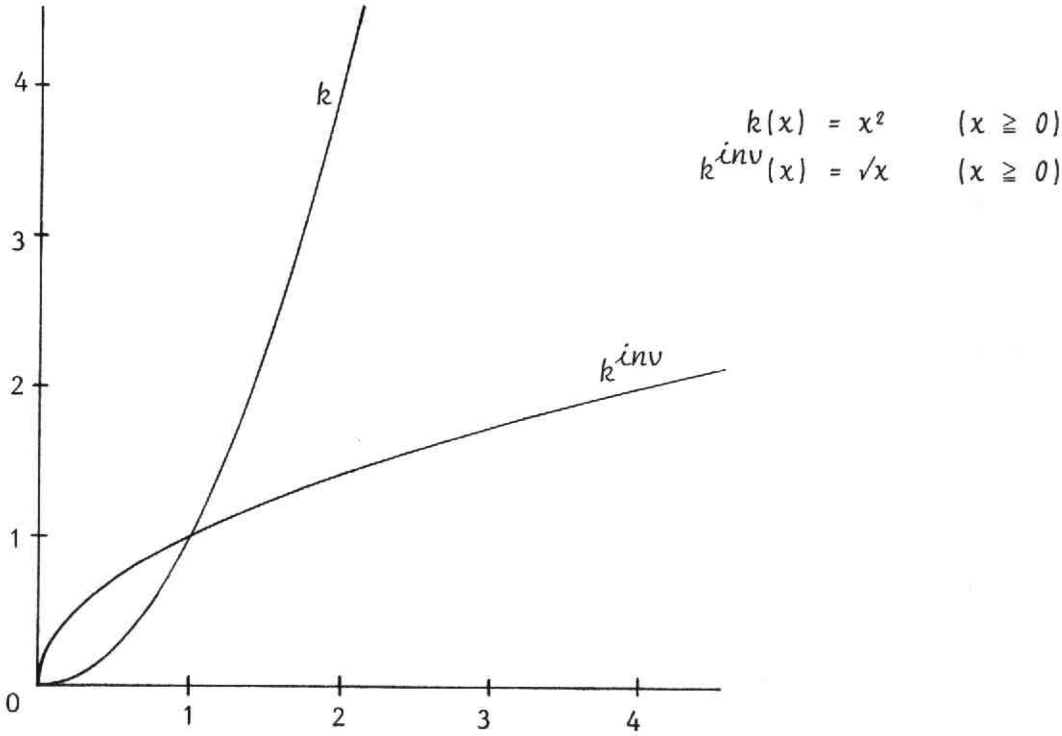


fig. 33

a. De grafieken van k en k^{inv} zijn elkaars spiegelbeeld t.o.v. een lijn b.
Welke vergelijking heeft de spiegelas?

b. Ga na of de grafiekenparen van f en f^{inv}, g en g^{inv}, k en k^{inv} (zie opgave ≫79) ook elkaars spiegelbeeld zijn t.o.v. de lijn b.

Als je een punt in het coördinatenvlak spiegelt t.o.v. de lijn $x = y$, vind je het beeldpunt door de coördinaten te verwisselen.

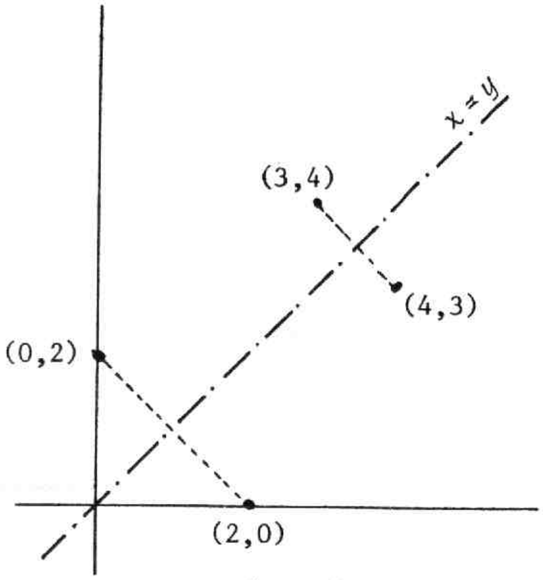


fig. 34

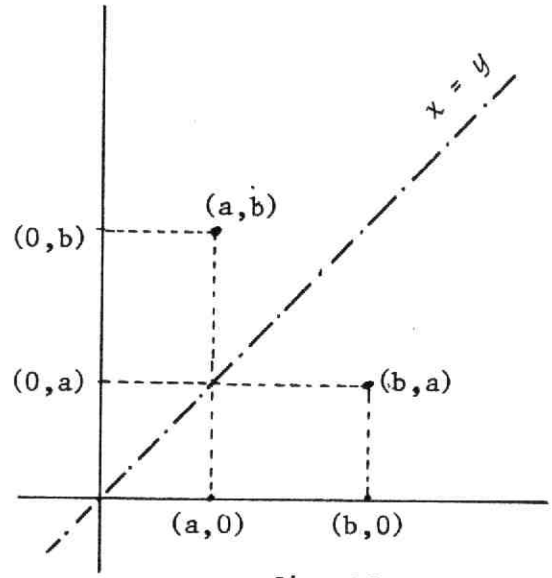


fig. 35

Gevolg:

Als je een verzameling van punten, beschreven door een vergelijking in x en y, spiegelt t.o.v. de lijn $x = y$, krijg je de vergelijking van het spiegelbeeld door x en y in de vergelijking te verwisselen.

Voorbeelden:

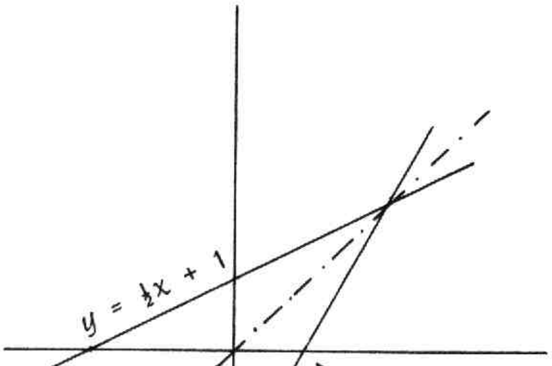


fig. 36

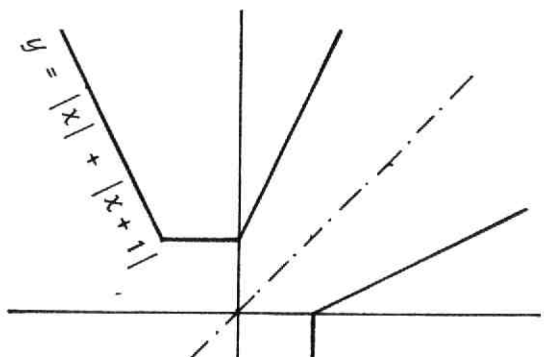


fig. 37

Bij de spiegelgrafiek in fig. 36 kun je y weer als functie van x opvatten. De vergelijking $x = \frac{1}{2}y + 1$ kan op de volgende wijze worden omgewerkt, waarbij y wordt geschreven als functie van x:

$$x = \tfrac{1}{2}y + 1 \iff$$
$$2x = y + 2 \iff$$
$$y = 2x - 2$$

≫ 82. De functie $x \to 2x - 2$ is de inverse van de functie $x \to \frac{1}{2}x + 1$.
Verklaar!

De spiegelgrafiek van fig. 37 is echter *niet* de grafiek van een functie. Bij één input-waarde (x) kun je namelijk meer dan één output-waarde (y) vinden!

Bijvoorbeeld:

input (x)	output (y)
3	$\left\{\begin{matrix} 1 \\ -2 \end{matrix}\right.$
2	$\left\{\begin{matrix} \frac{1}{2} \\ -1\frac{1}{2} \end{matrix}\right.$
1	$\left\{\begin{matrix} -1 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}\right.$

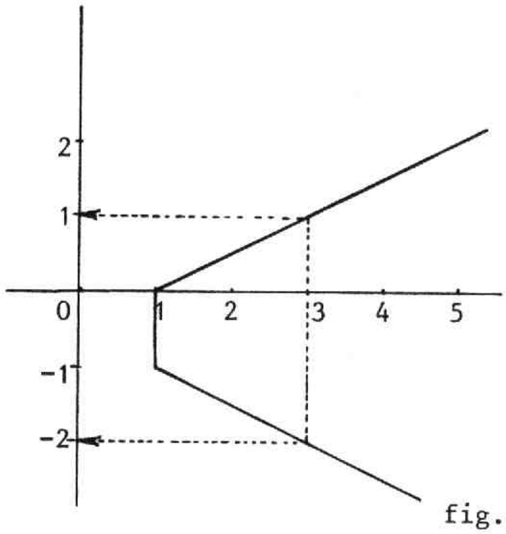


fig. 38

De functie $y = |x| + |x + 1|$ heeft geen inverse functie!

N.B.

Kenmerkend voor een functie is het dat je bij elke input één output krijgt.

Met andere woorden: 'y is een functie van x'

betekent: bij elke x-waarde (uit het domein) komt precies één y-waarde (uit het beeld).

≫ 83. Vier grafieken. Teken het spiegelbeeld t.o.v. de lijn $x = y$. Welke van de vier functies heeft een inverse functie?

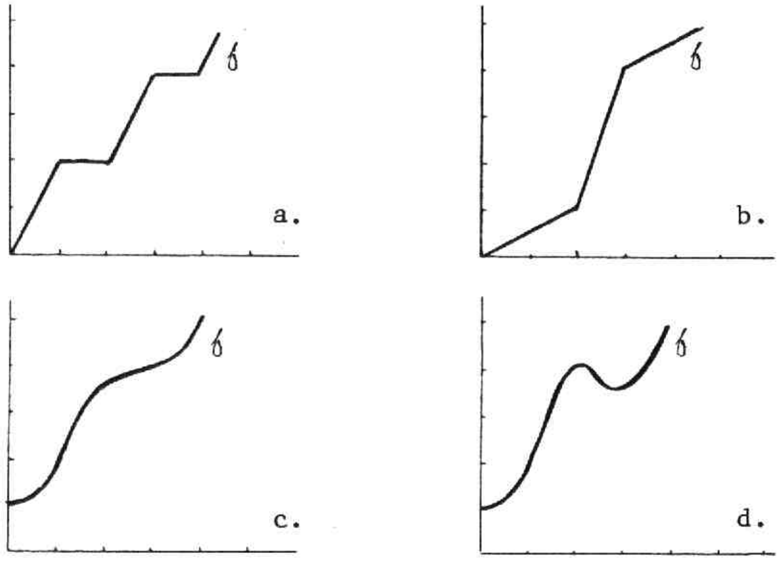


fig. 39

≫ 84. a. Waarom heeft de functie $y = x^2$ met domein $\mathbb{R}$ geen inverse functie?

b. En waarom heeft $y = x^2$ wel een inverse functie als je het domein beperkt tot $[0,\rightarrow\rangle$?

≫ 85. Teken de grafiek en beschrijf (zo mogelijk) de inverse functies van:

a. $f(x) = \frac{2}{3}x$	(domein $\mathbb{R}$)	d. $f(x) = \frac{3}{x} - 2$	(domein $\mathbb{R}$ {0})
b. $f(x) = 3 - x$	(domein $\mathbb{R}$)	e. $f(x) = \lvert x \rvert$	(domein $\mathbb{R}$)
c. $f(x) = 3 - 2x$	(domein $\mathbb{R}$)	f. $f(x) = x^3$	(domein $\mathbb{R}$)

≫ 86. $f(x) = 3x + 21$ (domein $\mathbb{R}$).

a. Beschrijf f^{inv}.

b. Los x op uit achtereenvolgens:
$f(x) = 99$; $f(x) = 0$; $f(x) = -100$.

c. Hoe kun je bij b. gebruikmaken van het resultaat van a?

≫ 87. $f(x) = \frac{5 + x}{x}$ (domein $\mathbb{R}$).

a. Los achtereenvolgens op: $f(x) = 2$; $f(x) = 11$; $f(x) = \sqrt{2}$.

b. Beschrijf f^{inv}.

≫ 88. $F(t) = \frac{5}{9}t + 32$ (domein $[-273,\rightarrow\rangle$.

a. Welke van de volgende beweringen is juist:

(1) $F^{\text{inv}}(t) = \frac{5}{9}t - 32$ (2) $F^{\text{inv}}(t) = \frac{t - 32}{1{,}8}$

(3) $F^{\text{inv}}(t) = \frac{5}{9}(t - 32)$ (4) $F^{\text{inv}}(t) = \frac{1}{1{,}8t + 32}$

b. De functie F rekent graden Celsius in graden Fahrenheit.
Bijv. $F(20) = 68$; 20° C komt overeen met 68° F.
Wat is de betekenis van F^{inv} in dit verband?

c. In de V.S. worden temperaturen vaak in ° F gemeten.
Jack voelt zich niet honderd procent fit en neemt zijn temperatuur op. Hij leest 100° F af. Is dat alarmerend?

≫ 89. $f(x) = x + \frac{1}{2}|x|$ (domein $\mathbb{R}$)
$g(x) = 1\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}|x|$ (domein $\mathbb{R}$)
Laat zien dat f en g elkaars inverse zijn.

≫ 90. $f(x) = x^3 + 1$ (domein $\mathbb{R}$)

a. Teken de grafiek van f.

b. Teken de grafiek die je krijgt door de grafiek van f:

(1) te spiegelen in de X-as;

(2) te spiegelen in de Y-as;

(3) te spiegelen in de lijn $x = y$

(4) te verschuiven over de vector $(1,2)$;

(5) horizontaal te vermenigvuldigen t.o.v. de Y-as met factor 2.

c. Geef bij elk van de zo verkregen grafieken een passend functievoorschrift.

KETTINGEN VAN FUNCTIES

≫ 91. Werkend op een rekenmachientje gebruik je een 'keten' van toetsen.

a. Ga na welke getallen er in het venster verschijnen bij de volgende ketens:

TOETS IN	VENSTER
$\boxed{3}\ \boxed{x^2}\ \boxed{+}\ \boxed{10}$	...
$\boxed{4}\ \boxed{x^2}\ \boxed{+}\ \boxed{10}$	...
$\boxed{5}\ \boxed{x^2}\ \boxed{+}\ \boxed{10}$	...

b. Ook bij:

TOETS IN	VENSTER
$\boxed{3}\ \boxed{+}\ \boxed{10}\ \boxed{x^2}$	...
$\boxed{4}\ \boxed{+}\ \boxed{10}\ \boxed{x^2}$	...
$\boxed{5}\ \boxed{+}\ \boxed{10}\ \boxed{x^2}$	...

c. Welke functie past er bij de keten: $\boxed{x^2}\ \boxed{+}\ \boxed{10}$?
En bij de keten $\boxed{+}\ \boxed{10}\ \boxed{x^2}$?

≫ 92. a. Stel dat je $\sqrt{x^2 - 13} + 3$ moet uitrekenen voor diverse waarden van x.
Je gebruikt een rekenmachientje met een kwadraat-toets $\boxed{x^2}$ en worteltoets $\boxed{\sqrt{\ }}$.
Neem $x = 7$ en schrijf op wat je achtereenvolgens intoetst.

b. Dezelfde opdracht voor $\frac{1}{3x - 13}$ (op je machientje zit een toets $\boxed{1/x}$).

≫ 93. $F(x) = 9x^2 - 6x$
Vervanging van x door $t + 1$ levert:
$F(t + 1) = 9(t + 1)^2 - 6(t + 1) = 9t^2 + 12t + 3$.
Herleid achtereenvolgens: $F(\sqrt{u})$, $F(\frac{1}{3}p)$ en $F(\frac{a + 1}{3})$

In opgave ≫ 91b was er sprake van de functie $x \to (x + 10)^2$, laten we die even g noemen.

De functie g is samengesteld uit de 'schakels':

$x \to x + 10$ (zeg f) en $x \to x^2$ (zeg k)

Een input-output-tabel van g met 'tussenresultaten' is:

input $\xrightarrow{f}$	tussenresultaat $\xrightarrow{k}$	output
3	13	169
25	35	1225
-7	3	9
..	..	..
x	$x + 10$	$(x + 10)^2$

De output van f (= tussenresultaat) wordt hierbij dus gebruikt als input van k. Zulke kettingberekeningen kun je goed weergeven in pijlenschema's.

$$3 \xrightarrow{f} 13 \xrightarrow{k} 169$$

$$x \xrightarrow{f} x + 10 \xrightarrow{k} (x + 10)^2$$

≫ 94. Maak dergelijke pijlenschema's van de functies:

$x \to \sqrt{x^2 - 13} + 3$ en $x \to \dfrac{1}{3x - 13}$ (zie opgave ≫ 91).

Neem als startwaarde resp. 7 en x.

≫ 95. Zoek de vuistregel op voor het berekenen van de remweg bij een gegeven snelheid (zie pag. 12).

Geef die vuistregel weer met een pijlenschema. (Noem de startwaarde V).

≫ 96. In het algemeen verandert het resultaat als je bij een ketting van functies de volgorde van de 'schakels' wijzigt.

Geef daarvan een voorbeeld.

Nog even terug naar de functies $g : x \to (x + 10)^2$; $f : x \to x + 10$ en $k : x \to x^2$.

Door in $k(x) = x^2$ de 'x' te vervangen door '$f(x)$' vind je '$g(x)$':

$$g(x) = k(f(x)) = k(x + 10) = (x + 10)^2.$$

≫ 97. Druk $k(f(x))$ uit in x in de gevallen:

a. $f(x) = x - 1$ $\qquad k(x) = x^3$

b. $f(x) = 3x$ $\qquad k(x) = \sqrt{x}$

c. $f(x) = |x|$ $\qquad k(x) = x + 8$

d. $f(x) = x + 8$ $\qquad k(x) = |x|$

e. $f(x) = \frac{1}{x}$ $\qquad k(x) = x^2 - 2x$

f. $f(x) = x^2 - 2x$ $\qquad k(x) = \frac{1}{x}$

≫ 98. Laat f een functie zijn met inverse f^{inv}.
Wat kun je zeggen van $f^{\text{inv}}(f(x))$?
Bedenk een paar voorbeelden.

≫ 99. Bij de vrije val van een voorwerp worden de afgelegde valweg s (in m) en de snelheid v (in m/s) als functie van de tijd t (in sec) beschreven door: $s = 5t^2$ en $v = 10t$.
Een steen wordt losgelaten uit een vliegtuig op 9 km hoogte.

a. Na hoeveel seconden treft de steen de aarde?
Welke snelheid bezit die steen op dat moment?

b. Beschrijf de snelheid v van de steen als functie van de afgelegde valweg s. (Domein: $[0;9000]$).

c. Welke snelheid had de steen halverwege zijn val?

≫ 100. Nog één keer de vuistregel voor het berekenen van de remweg:

$$R = \tfrac{3}{4}\left(\frac{V}{10}\right)^2.$$

a. Een politieagent ontdekt bij een verkeersongeval een remspoor van 120 m. Met welke snelheid had die auto gereden?

b. Beschrijf V als functie van R.