Sinus

SINUS

SINUS

OW & OC

Tiberdreef 4 - 3561 GG Utrecht

Bij de voorplaat:

Door eb en vloed ontstaan langs de kust bijzondere landschappen die bij vloed onder water staan en bij eb droogvallen.
Zulke gebieden heten getijdenlandschappen. Het Waddengebied is daarvan een prachtig voorbeeld.

SINUS

Een produktie ten behoeve van de experimenten in het kader van de Herverkaveling Eindexamenprogramma's Wiskunde I en II V.W.O.

Samenstelling: Jan de Lange Jzn
Martin Kindt

Vormgeving: Ellen Hanepen

Utrecht, mei 1983.

N.B. De met * aangeduide opgaven zijn alleen bestemd voor leerlingen die in de onderbouw met "Vlieg er eens in" gewerkt hebben.

1

Vroeger werden bijna alle vliegtuigen voortbewogen door een luchtschroef of propeller. Met de komst van de straalmotor leek het einde van de propeller nabij. Voor de "kleine" luchtvaart bleef men aangewezen op de propeller, terwijl in sommige gevallen ook bij grotere vliegtuigen de propeller het meest economisch bleef, al werden die propellers aangedreven door straalmotoren.

Als een vliegtuig stilstaat en de propeller draait, beschrijft de propellertip een cirkel. Vaak kun je dat heel goed zien:

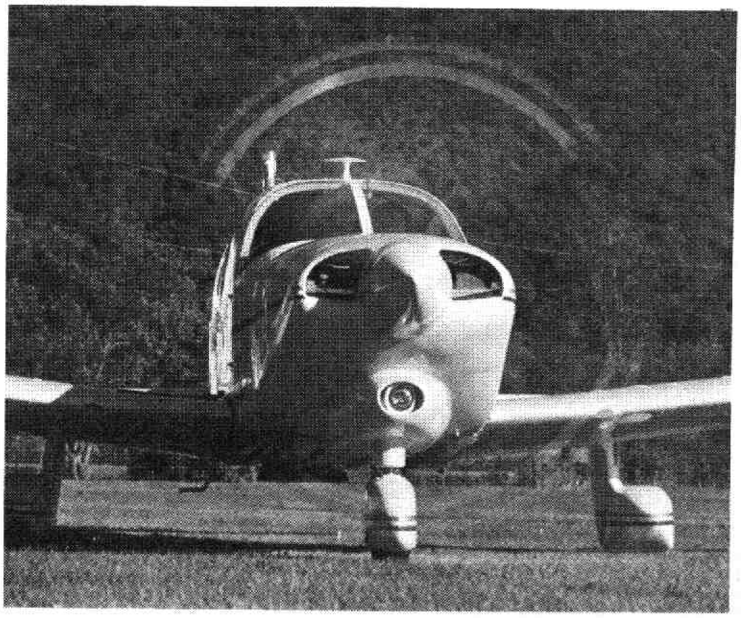


fig. 1

≫ 1. Hoe lang is de weg die de propellertip in één omwenteling aflegt als één propellerblad 1 meter lang is?
En als zo'n blad p meter lang is?

≫ 2. Hoe lang is de weg die de propellertip aflegt als de propeller (1 m) een draai van 180° (halve slag) maakt?
En als die draai 60° is? En bij 45°?

Bij een kwartslag is de draai 90°. Die verdeling van de rechte hoek in 90° is vrij willekeurig. Zo bestaat er ook een verdeling in 100 graden. Op de meeste rekenmachientjes zit dan ook een knop om de sinus e.d. met deze hoekeenheid te bepalen. De [DEG] knop werkt met "onze" graden. De [GRAD] knop werkt met het-Amerikaanse-100 graden-systeem, dat ook in de landmeetkunde wordt gebruikt. Maar er is nog een derde mogelijkheid. Op de rekenmachine is die aangeduid met [RAD] . Dit laatste systeem is eigenlijk het meest natuurlijke en is in feite precies wat je bij opgave ≫ 2 hebt gedaan:

Als hoekmaat wordt de door de propellertip afgelegde weg gebruikt.

Of,

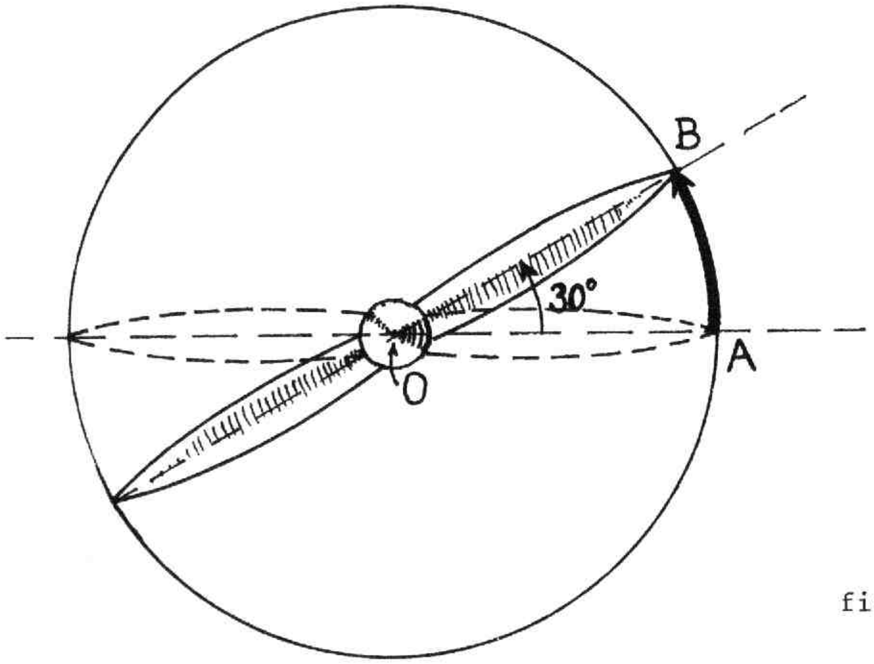


fig. 2

Je kunt zeggen dat OB een hoek van 30° met OA maakt, maar je kunt ook de lengte van boog AB als hoekmaat nemen. De lengte van OB wordt steeds 1 genomen.

≫ 3. Als $\alpha = 30°$, hoe lang is dan de boog AB?

Als we de lengte van boog AB als hoekmaat nemen, spreken we van een hoek uitgedrukt in RADIALEN.
Dus 360° = 2π radialen (zie ≫ 1).

≫ 4. Geef aan hoeveel radialen de volgende hoeken zijn. (Je mag π in je antwoord laten staan).
10°; 30°; 45°; 60°; 90°; 135°; 180°; 270°; 300°; x°.

≫ 5. a. Geef aan hoeveel graden de volgende hoeken zijn:

$\frac{3}{4}\pi$; $\frac{2}{3}\pi$; $\frac{1}{6}\pi$; $\frac{1}{9}\pi$; $1\frac{1}{2}\pi$; $1\frac{5}{6}\pi$; $t\,\pi$ radialen.

b. Geef aan hoeveel π radialen de volgende hoeken zijn:

45°; 180°; 210°; 270°; 60°; 33°; 107°; 62°.

Zodra het vliegtuig gaat bewegen, hetzij op de grond, hetzij in de lucht, beschrijft de propellertip een ruimtelijke kromme. In het volgende plaatje is die baan van één propellertip getekend:

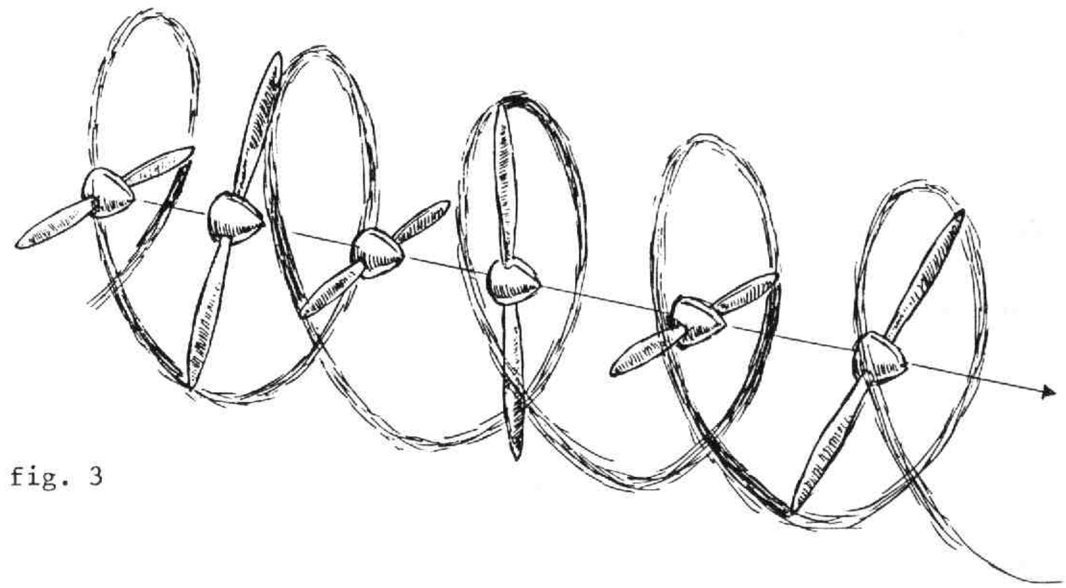


fig. 3

De zo ontstane kromme wordt "schroeflijn" genoemd. Deze schroeflijn is in het echt nauwelijks te zien. Maar onder bepaalde atmosferische omstandigheden wèl, zoals duidelijk blijkt op de volgende foto:

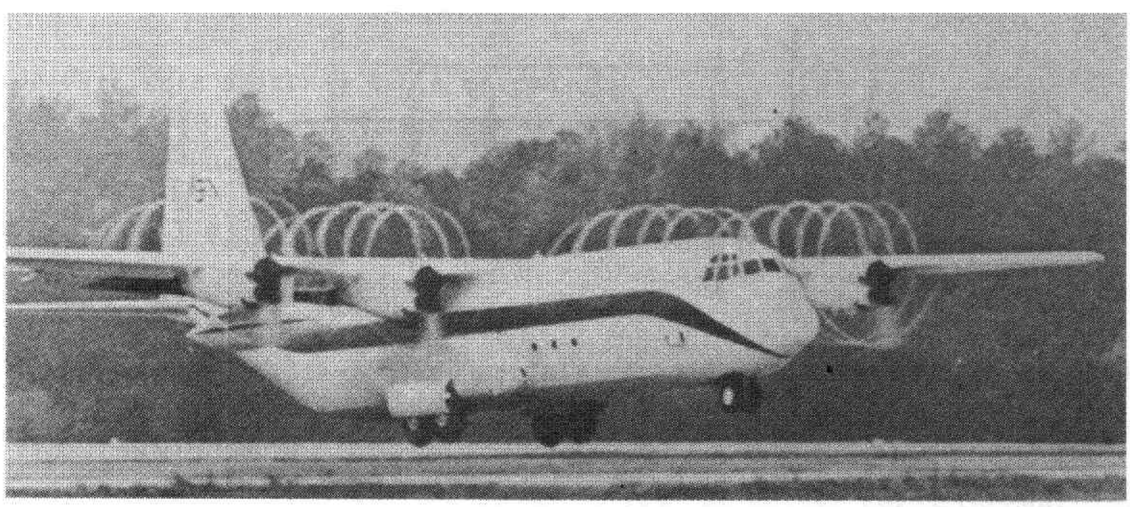


fig. 4

Je ziet op deze foto een viermotorig vliegtuig. Iedere propeller heeft vier bladen:

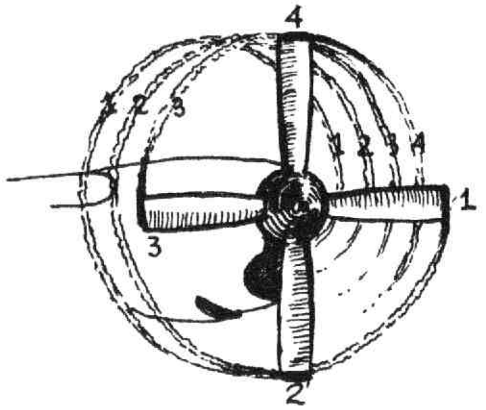


fig. 5

waardoor er totaal liefst 16 schroeflijnen ontstaan.

≫ 6. Ken je nog andere voorbeelden waarbij schroeflijnen zichtbaar zijn?

≫ 7. Hoe ziet een schroeflijn er "van voren" uit (het vliegtuig komt naar je toe)?

≫ 8. Heb je enig idee hoe een schroeflijn er van opzij uit zal zien?
En van boven?

Een schroeflijn is heel nauwkeurig van opzij te tekenen, als het vliegtuig tenminste steeds even snel gaat. Bijvoorbeeld door steeds een "foto" te nemen als de propeller 30° of $\frac{1}{6}\pi$ rad. verder is gedraaid. Dat duurt in werkelijkheid b.v. zo'n 0,0002 sec.
Je krijgt dan het volgende plaatje:

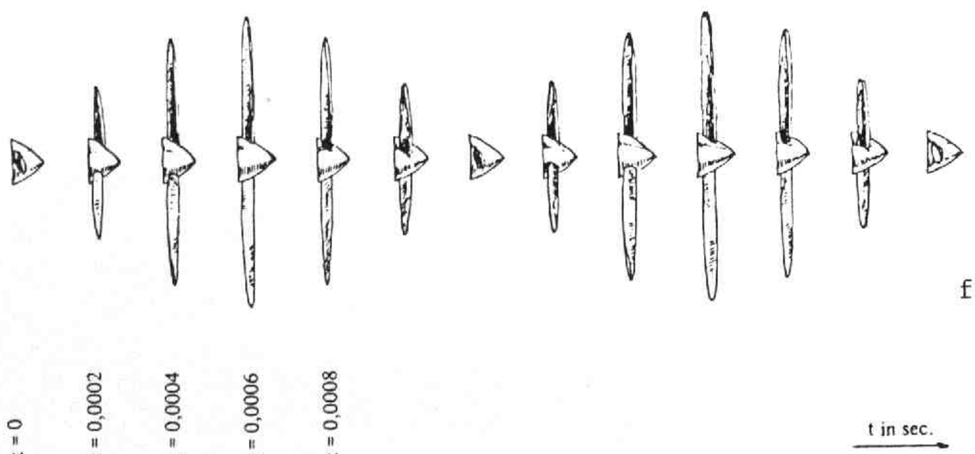


fig. 6

≫ 9. Hoeveel omwentelingen zijn getekend?

≫ 10. Teken nu in je schrift de baan van de propellertip die in het eerste plaatje aan de "achterkant" zit.
Het begin is al getekend als stippellijn.

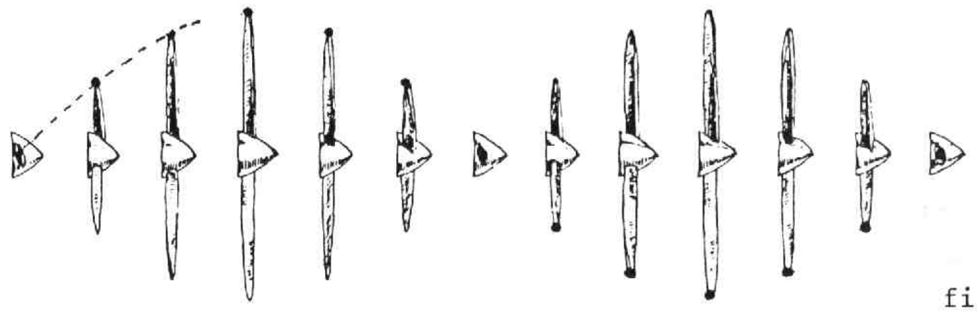


fig. 7

Het plaatje dat je zojuist gemaakt hebt is een zijaanzicht van een schroeflijn.
Van dit plaatje kun je een grafiek maken:

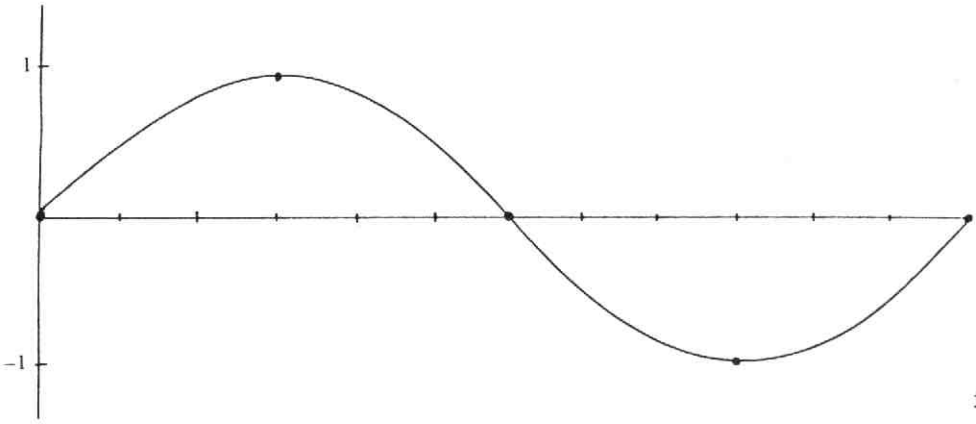


fig. 8

Langs de vertikale as staan een 1 en een -1.

≫ 11. Wat voor eenheid is daar klaarblijkelijk gekozen?

≫ 12. Langs de horizontale as kun je minstens twee geheel verschillende eenheden kiezen. Welke?

≫ 13. **Teken de schroeflijn-grafiek met als eenheid langs de horizontale as de door de propeller afgelegde hoek of boog, uitgedrukt in radialen.**

* ≫ 14. **Deze schroeflijn-grafiek ben je in "Vlieg" al eerder tegengekomen.
Waar? En hoe heette hij toen?**

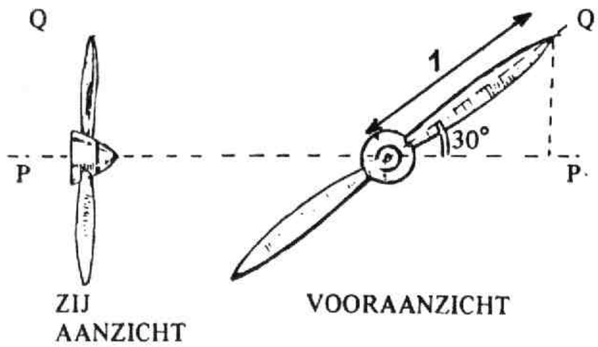


fig. 9

Hierboven zie je het zijaanzicht en het vooraanzicht van de propeller nog eens getekend, 0.0002 sec na de start, ofwel, nadat de propeller 30° linksom gedraaid was.

≫ 15. Kun je aan de hand van dit plaatje verklaren waarom de schroeflijn-grafiek ook de grafiek van de SINUS is?

≫ 16. Kijk nog eens goed naar fig. 7. Van de zijkant af bekeken levert dit een sinus-grafiek. Als je dezelfde schroeflijn *van boven* af bekijkt krijg je een grafiek die op $t = 0$ de waarde 1 heeft. Teken deze schroeflijn en verklaar waarom dit de grafiek van de COSINUS is.

* Twee heel verschillende verschijnselen: de mee- en tegenwind en de propeller leveren ons dezelfde grafieken. Toch is er een belangrijk verschil. Immers de hoek tussen wind- en vliegrichting zal nooit groter dan 360° kunnen zijn. Maar bij de propeller kan de afgelegde hoek wel groter dan 360° worden. De propeller blijft maar draaien, dus de tip blijft de meters aan elkaar rijgen.

≫ 17. Hoeveel meter legt de propellertip af in één minuut? (Lengte 1).

≫ 18. Hoe lang duurt het voordat de propeller 195480° heeft afgelegd? Teken de grafiek van de sinus van 195480° tot en met 195840°.

≫ 19. Teken de grafiek ook vanaf $20\frac{1}{2}\pi$ rad. tot en met $23\frac{1}{2}\pi$ rad.

≫ 20. Waarom is de grafiek een grafiek van een *functie*? Wat is het domein en bereik?

Het functievoorschrift van de schroeflijn- of sinus-grafiek is $\alpha \to \sin\alpha$ waarbij sin de afkorting voor sinus is en α de hoek, uitgedrukt in radialen of graden.

$\gg$ 21. Teken de grafiek van $\alpha \to \sin\alpha$ als $\alpha \in [510°;600°]$

$\gg$ 22. Hetzelfde als bij opgave $\gg$ 21, maar nu $\alpha \in [-\pi , \pi]$.

$\gg$ 23. Hoeveel nulpunten heeft de grafiek van $\alpha \to \sin\pi$ op $\mathbb{R}$?

$\gg$ 24. Los op: $\sin\alpha = 0{,}5$ met $\alpha \in \langle -\infty, \infty \rangle$; α in graden.

$\gg$ 25. Los op: $\sin\alpha = 1$ met $\alpha \in \langle -\infty, \infty \rangle$; α in radialen.

$\gg$ 26. Verklaar: $\sin \frac{1}{6}\pi = \sin 2\frac{1}{6}\pi = \sin 4\frac{1}{6}\pi = \ldots$

Je ziet dat na verloop van tijd de grafiek zich herhaalt. Een dergelijke grafiek heet een periodieke grafiek.

$\gg$ 27. Hoe lang moet het interval op de horizontale as minstens zijn om alle informatie die de sinusgrafiek geeft één keer te zien?

Het kortste interval dat nodig is om van de grafiek alle informatie te krijgen heet de PERIODE van de grafiek.

$\gg$ 28. Verklaar: $\ldots = \sin(\alpha - 2\pi) = \sin\alpha = \sin(\alpha + 2\pi) = \ldots\ldots$

Ook: $\sin\alpha = \sin(\alpha + 2k\pi) \qquad k \in \mathbb{Z}$

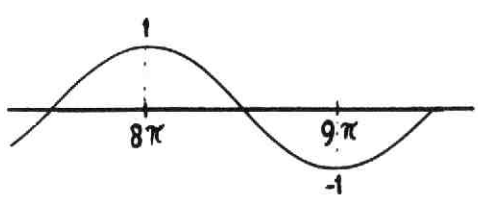


fig. 10

$\gg$ 29. Hierboven zie je *één periode* van de grafiek van $\alpha \to \cos\alpha$ getekend, en wel op het interval: $[7\frac{1}{2}\pi, 9\frac{1}{2}\pi]$. Verklaar waarom dit niet een stuk van de sinus-grafiek kan zijn.

$\gg$ 30. Teken in één figuur de grafieken van $\alpha \to \sin\alpha$ en $\alpha \to \cos\alpha$ op het interval $[0°,90°]$. Laat zien dat $\cos\alpha = \sin(90° - \alpha)$.

$\gg$ 31. Los op met de grafieken: $\cos\alpha = \sin\alpha \quad \alpha \in \mathbb{R}$; α in radialen.

SAMENVATTING

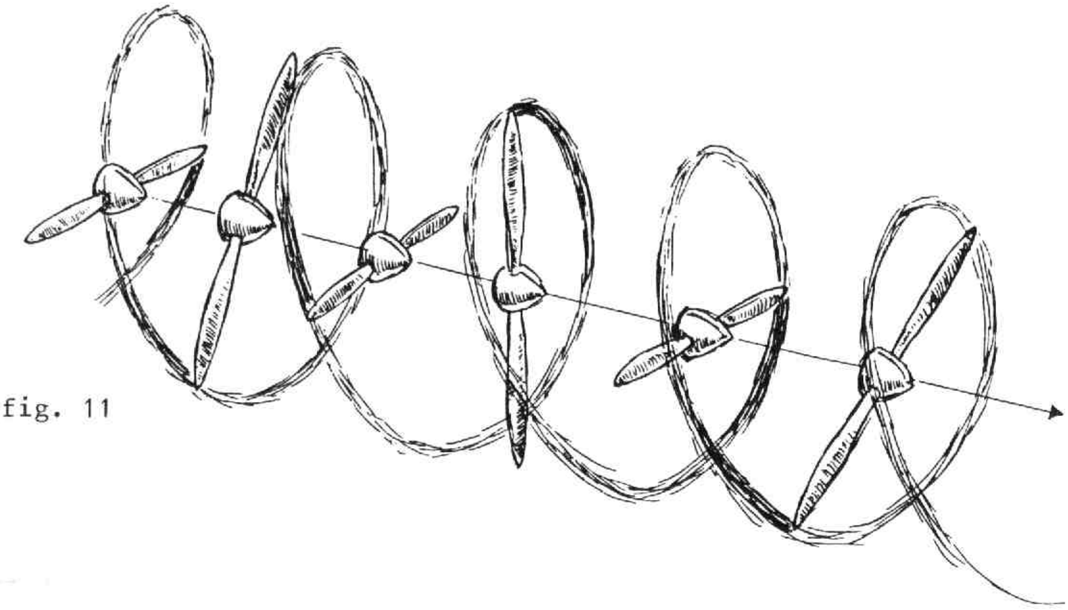


fig. 11

Deze schroeflijn van de *zijkant* bekeken levert een *sinus*lijn:

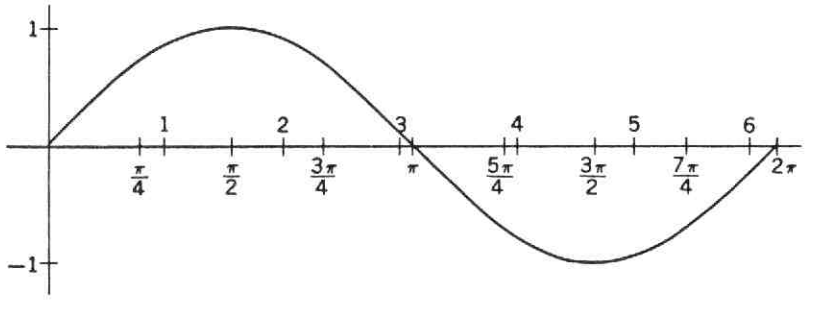


fig. 12

Van *boven* bekeken levert dezelfde schroeflijn een *cosinus*lijn:

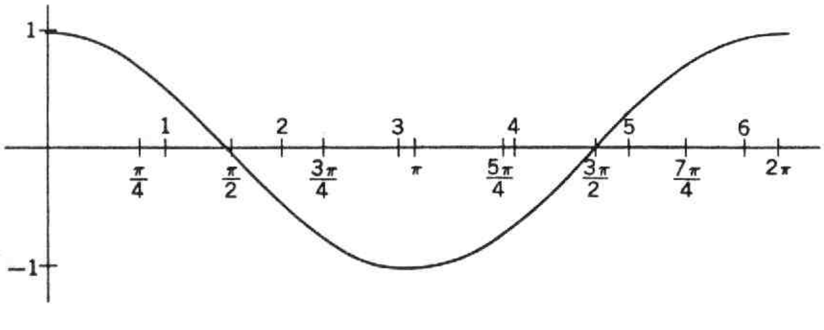


fig. 13

De bijbehorende sinus- en cosinusfuncties hebben de volgende belangrijke eigenschappen: (steeds $k \in \mathbb{Z}$).

	functie-voorschrift	domein	bereik	nulpunten	periode	maximum	minimum
sinus	$\alpha \to \sin\alpha$ of $f(\alpha) = \sin\alpha$	$\mathbb{R}$	$[-1,1]$	$0 + k\pi$	2π	waarde: 1 voor $\alpha = \frac{1}{2}\pi + 2k\pi$	waarde: -1 voor $\alpha = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$
cosinus	$\alpha \to \cos\alpha$ of $f(\alpha) = \cos\alpha$	$\mathbb{R}$	$[-1,1]$	$\frac{1}{2}\pi + k\pi$	2π	waarde: 1 voor $\alpha = 2k\pi$	waarde: -1 voor $\alpha = \pi + 2k\pi$

2π radialen komt overeen met 360°.

Verder nog enkele waarden die vaak voorkomen:

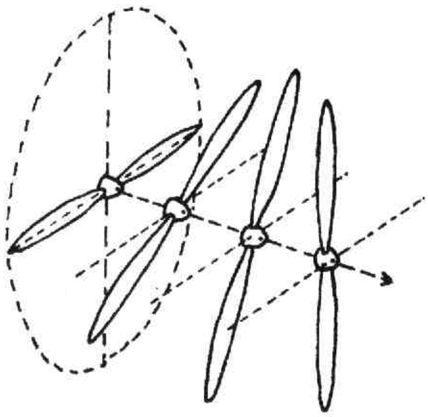
α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
0°	0	1
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
45°	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
60°	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
90°	1	0

2

We kijken nog eens naar de schroeflijn.

We kregen de sinus-grafiek als we van de zijkant naar een schroeflijn keken, die begon te draaien vanuit een horizontale stand (linksom).

Dus:



Van de zijkant:

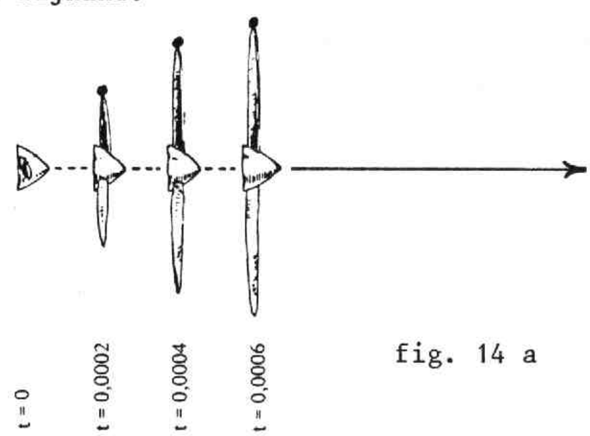
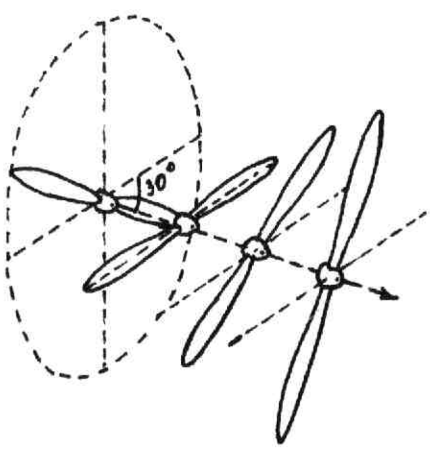


fig. 14 a

Wat voor grafiek krijg je nu als je *begint* te kijken op de stand dat de propeller 30° teruggedraaid is, dus:



Van de zijkant:

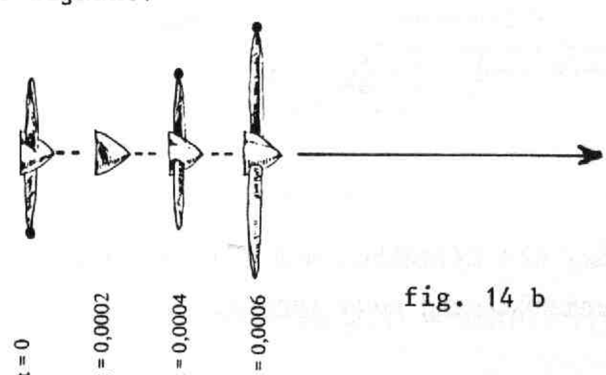


fig. 14 b

≫ 32. Teken de grafiek die je nu krijgt. Langs de horizontale as: de afgelegde hoek van de propeller in graden. Gebruik zoveel mogelijk de sinusgrafiek van opgave ≫ 11, ≫ 12 en ≫ 13.

≫ 33. *De tweede schroeflijn* (fig. 14 b) *ligt op ieder moment als het ware 30° "achter" bij de eerste.*

Het functievoorschrift voor de sinus-grafiek (fig. 14 a) is: $\alpha \to \sin\alpha$ of: $f(\alpha) = \sin\alpha$.

Verklaar waarom de tweede grafiek (fig. 14 b) als functievoorschrift $\alpha \to \sin(\alpha - 30°)$ of: $f(\alpha) = \sin(\alpha - 30°)$ heeft.

≫ 34. Teken in één plaatje de grafieken van $\alpha \to \sin\alpha$ en $\alpha \to \sin(\alpha - 45°)$ en leg het verband tussen beide grafieken en de schroeflijnen.

≫ 35. Hoe groot moet de "achterstand" van de tweede schroeflijn zijn (in graden) zodat zijn grafiek precies het spiegelbeeld t.o.v. X-as van de eerste schroeflijn, dus van $\alpha \to \sin\alpha$ oplevert?

≫ 36. Hoe groot moet de "achterstand" van de tweede schroeflijn zijn (in graden) zodat zijn grafiek precies de grafiek van $\alpha \to \cos\alpha$ oplevert? Kun je dit ook uitleggen met "voorsprong" in plaats van "achterstand"?

≫ 37. Teken in één tekening de grafieken van:

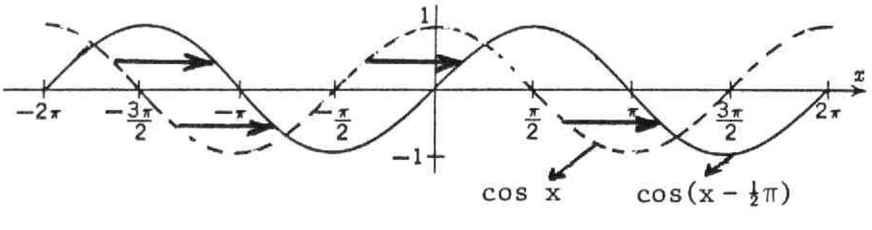
$\alpha \to \sin\alpha \qquad \alpha \in \mathbb{R}$

$\alpha \to \sin(\alpha + \frac{1}{2}\pi) \qquad \alpha \in \mathbb{R}$

en los met behulp van deze grafieken op:

$\sin\alpha = \sin(\alpha + \frac{1}{2}\pi)$

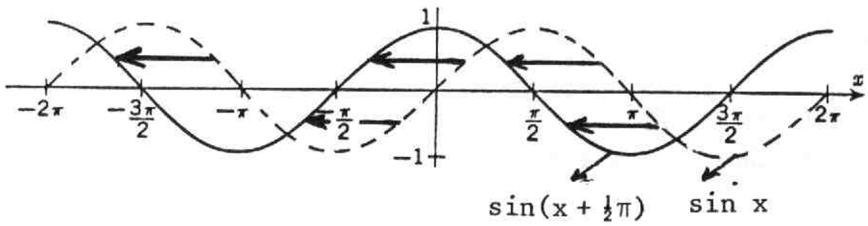
Als je uitsluitend naar de grafieken kijkt zie je dat het optellen of aftrekken van een constante bij het argument (α) *een horizontale verschuiving van de grafiek ten gevolge heeft.*



Aftrekken:

verschuiven naar *rechts.*

Bij het aftrekken met een positieve constante (de schroeflijn ligt achter): *verschuiving naar rechts.*



Optellen:

verschuiven naar *links.*

Bij het optellen met constante (de schroeflijn ligt vóór): verschuiving naar links.

De afstand waarover de grafiek verschuift is even groot als de (absolute waarde van) de constante.

≫ 38. Verandert er iets aan de periode van een sinus- of cosinus-grafiek als we een positieve constante bij het argument optellen of aftrekken?

≫ 39. Verklaar waarom de grafieken van:

a) $\alpha \to \sin(\alpha + 37°)$ en $\alpha \to \sin(\alpha + 397°)$

aan elkaar gelijk zijn.

Ook:

b) $\alpha \to \sin(\alpha - 23°)$ en $\alpha \to \sin(\alpha + 337°)$

c) $\alpha \to -\sin\alpha$ en $\alpha \to \sin(\alpha - 180°)$ en $\alpha \to \sin(\alpha + 180°)$

d) $\alpha \to \sin(\alpha + 120°)$ en $\alpha \to \cos(\alpha + 30°)$

≫ 40. Teken in één plaatje de grafieken van:

$f : \alpha \to \sin\alpha$

$g : \alpha \to \sin(\alpha - \frac{1}{3}\pi)$

Voor welke waarde van α geldt $f(\alpha) = g(\alpha)$? $(\alpha \in \mathbb{R})$

≫ 41. Teken de grafiek van $f(x) = \sin(x - 45°)$ en los met behulp van de grafiek op: $\sin(x - 45°) \geq \frac{1}{2}\sqrt{2}$

≫ 42. Teken de grafiek van $g(\alpha) = \cos(\alpha + \frac{1}{2}\pi)$ en los met behulp van de grafiek op: $\cos\ (\alpha + \frac{1}{2}\pi) \leq \frac{1}{2}$

≫ 43. Schrijf $f(x) = \sin(x - 45°)$ uit opgave ≫ 41 in de vorm:

$f(x) = \cos(x\ ....)$

≫ 44. Schrijf $g(\alpha) = \cos(\alpha + \frac{1}{2}\pi)$ uit opgave ≫ 42 in de vorm $g(\alpha) = \sin(\alpha\ .....)$

SAMENVATTING

Als je van de zijkant naar een schroeflijn kijkt en de propeller begint in horizontale stand (linksom) dan zie je een sinus-lijn ontstaan:

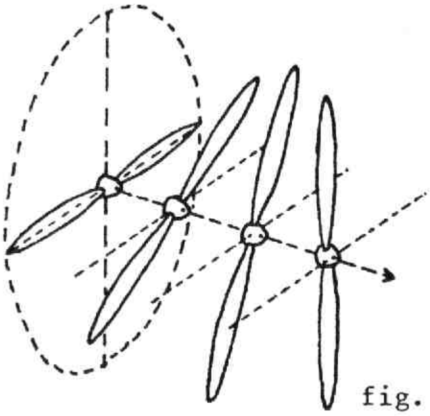


fig. 14 a

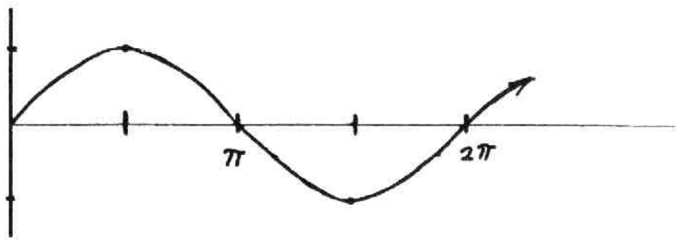


fig. 15

Als de beginstand anders is krijg je "dezelfde" grafiek, maar verschoven.
B.v. als je beginstand 30° "achterligt":

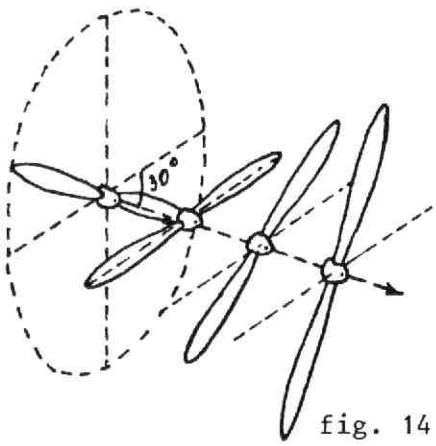


fig. 14 b

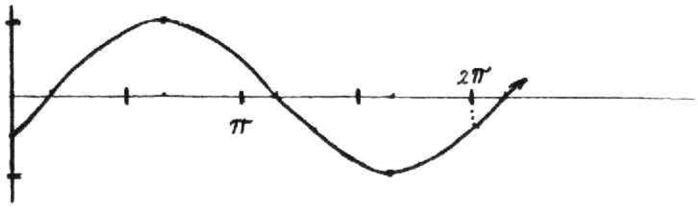


fig. 16

dan "schuift" de grafiek over een afstand 30° naar *rechts* ("het duurt nog 30° voor we in de beginstand van de vorige grafiek zitten").

Ander voorbeeld:

Als je beginstand $\frac{1}{3}\pi$ voorligt:

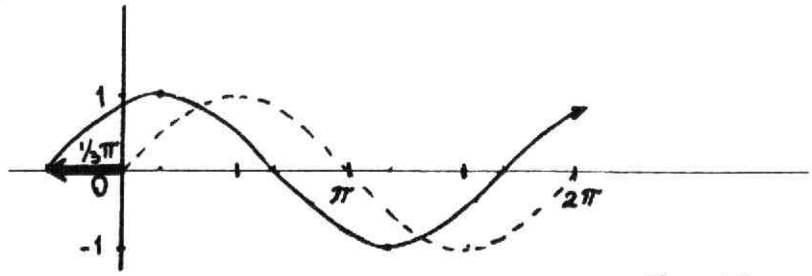


fig. 17

dan "schuift" de grafiek over een afstand $\frac{1}{3}\pi$ naar *links*.
Dit verschuiven verandert niets aan de periode.

3

≫ 45. Van vliegtuig A draait de propeller tweemaal zo snel als van vliegtuig B. Teken van beide de figuur die je krijgt in één tekening door tegen de zijkant van de schroeflijn aan te kijken. Beginstand horizontaal, linksom. (De propellers zijn even groot). De horizontale as is de *tijdas*. Teken één omwenteling van B. Wat is het verband tussen de periode van B en van A?

≫ 46. Het functievoorschrift van B (uit opgave ≫ 45) is $t \to \sin t$
Verklaar waarom het functievoorschrift van A dan $t \to \sin 2t$ moet zijn.

≫ 47. Wat zal de periode van $t \to \sin 20t$ zijn vergeleken met die van $t \to \sin t$?

≫ 48. Teken één periode van de grafiek van $t \to \sin 3t$ en $t \to \sin t$ in één tekening.

Door het vermenigvuldigen van het argument met een constante > 1, wordt de grafiek als het ware samengedrukt.
De propeller draait tweemaal zo snel: periode tweemaal zo klein, functievoorschrift: $t \to \sin 2t$ *i.p.v.* $t \to \sin t$.

≫ 49. Teken in één figuur de grafieken van $\alpha \to \sin\alpha$ en $\alpha \to \sin\frac{1}{2}\alpha$.
$\alpha \in [0,2\pi]$.
Wat is de periode van beide functies?

≫ 50. Welke waarde moet k hebben in: $\alpha \to \sin k\cdot\alpha$ als je weet dat de periode van deze functie 24π is?

≫ 51. Teken de grafiek van de functie $h(t) = \sin \frac{1}{2}t$. $t \in [0, 4\pi]$

Deze grafiek geeft een ruwe weergave van het verloop van hoog en laag water in Kornwerderzand (Friesland). (h in meters; t in uren).

1 meter wil zeggen: 1 meter boven N.A.P.; −1 meter: 1 meter onder N.A.P.

De periode van het getij is in werkelijkheid zo'n 12,4 uur.

Klopt dat enigszins met onze grafiek?

Schelpen en zeesterren zoeken kun je het best doen als het laag water is. B.v. als het water *lager* dan $-\frac{1}{2}$ m N.A.P. staat.

Hoeveel uur per periode kun je schelpen zoeken?

≫ 52. Tijdens de najaarsstormen staat het water gemiddeld wat hoger. Op een gegeven moment kan de getijkromme worden benaderd door:

$k(t) = 0{,}75 + \sin \frac{1}{2}t$ $t \in [0, 4\pi]$

Teken de grafiek van deze functie.

Wat is de hoogste en laagste waterstand onder deze omstandigheden?

≫ 53. Het hoog- en laagwater langs de Nederlandse kust heeft wèl dezelfde periodiciteit (12,4 uur) maar *niet* dezelfde hoog- en laagwaterstanden. Daar zijn nogal wat verschillen in. Zo kan een periode van getijdebeweging in Den Helder benaderd worden door:

$d(t) = 0{,}75 \sin \frac{1}{2}t$

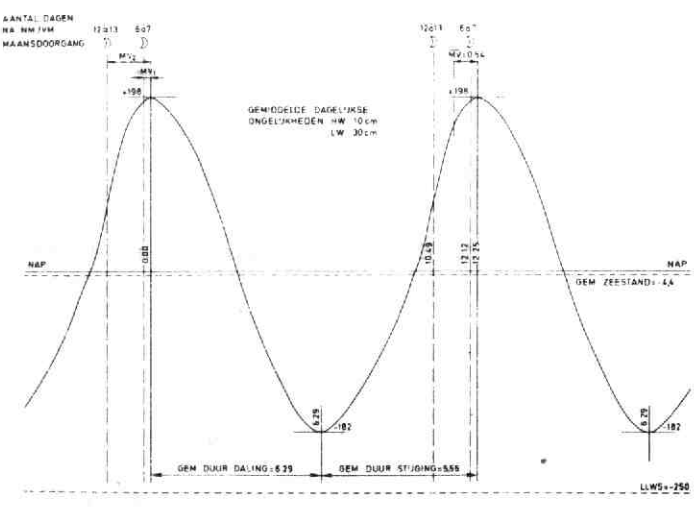
maar in Vlissingen heb je:

$v(t) = 2 \sin \frac{1}{2}t$.

Teken beide grafieken in één plaatje.

Wat zijn de nulpunten; de maxima en minima?

Hoe lang per periode staat het water in Den Helder hoger dan +0,5 m N.A.P.? En in Vlissingen?



Hier de "echte" gemiddelde getijkromme van Vlissingen.

Welke verschillen zie je met de grafiek van opgave ≫ 53?

≫ 54. Teken de grafiek van $f(x) = \sqrt{2}\cos 3x$ $(x \in \mathbb{R})$ door eerst die van $g(x) = \cos x$ en dan $h(x) = \cos 3x$ te tekenen.
Voor welke waarden van x geldt: $f(x) \geq 1$?

SAMENVATTING

In dit gedeelte zagen we drie belangrijke zaken:

1. Wat gebeurt er in de grafiek als je het argument van een sinus-functie met een (positieve) constante vermenigvuldigt?
B.v. hoe ziet de grafiek van $\alpha \to \sin 2\alpha$ er uit, vergeleken met die van $\alpha \to \sin \alpha$?
Welnu: de periode wordt tweemaal zo kort. (Ofwel: propeller gaat tweemaal zo snel draaien). Verder gebeurt er "niets":

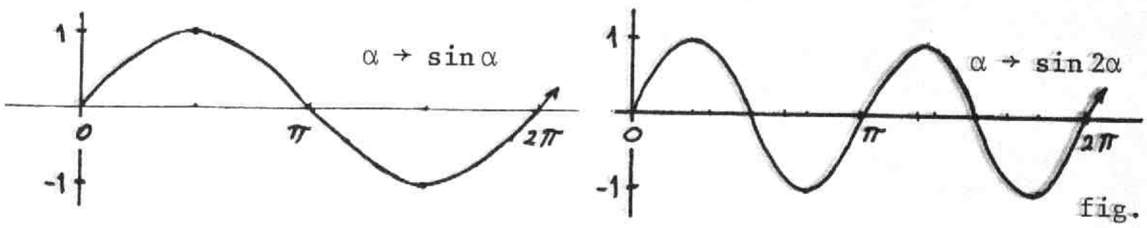


fig. 19

2. Wat gebeurt er met de grafiek als je bij een sinus-functie een positieve constante optelt?
Dan schuift de hele grafiek naar boven en wel precies zo ver als de constante groot is:

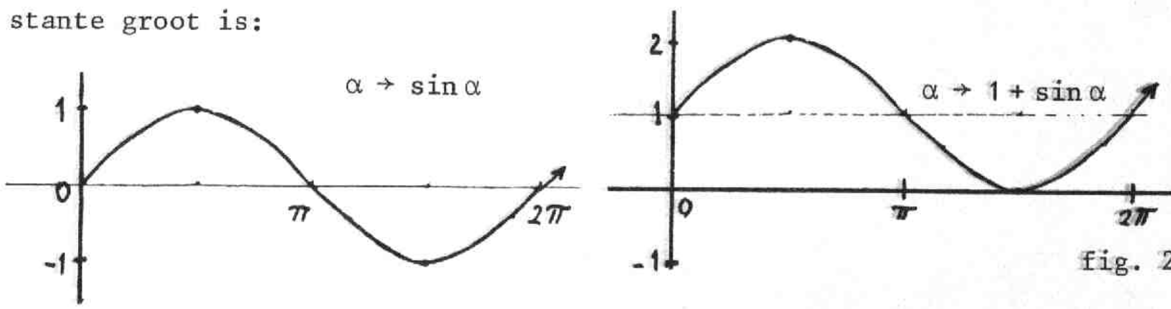


fig. 20

3. Wat gebeurt er in de grafiek als je een sinus-functie met een positieve constante vermenigvuldigt?
Dan wordt iedere functiewaarde met de constante vermenigvuldigd, dus de grafiek wordt opgerekt:

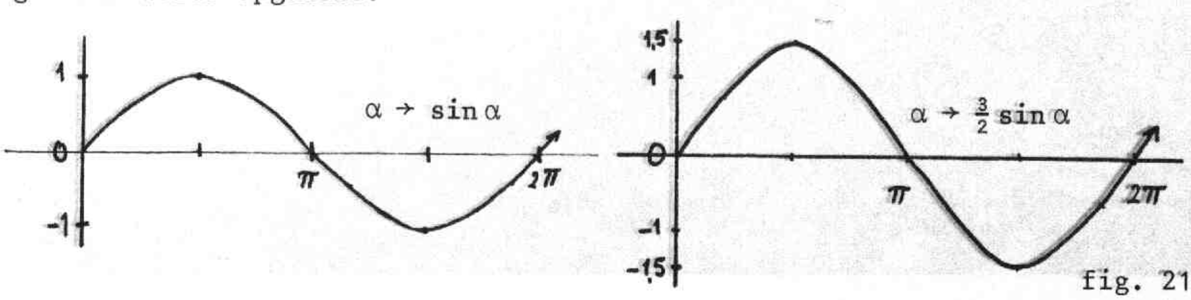
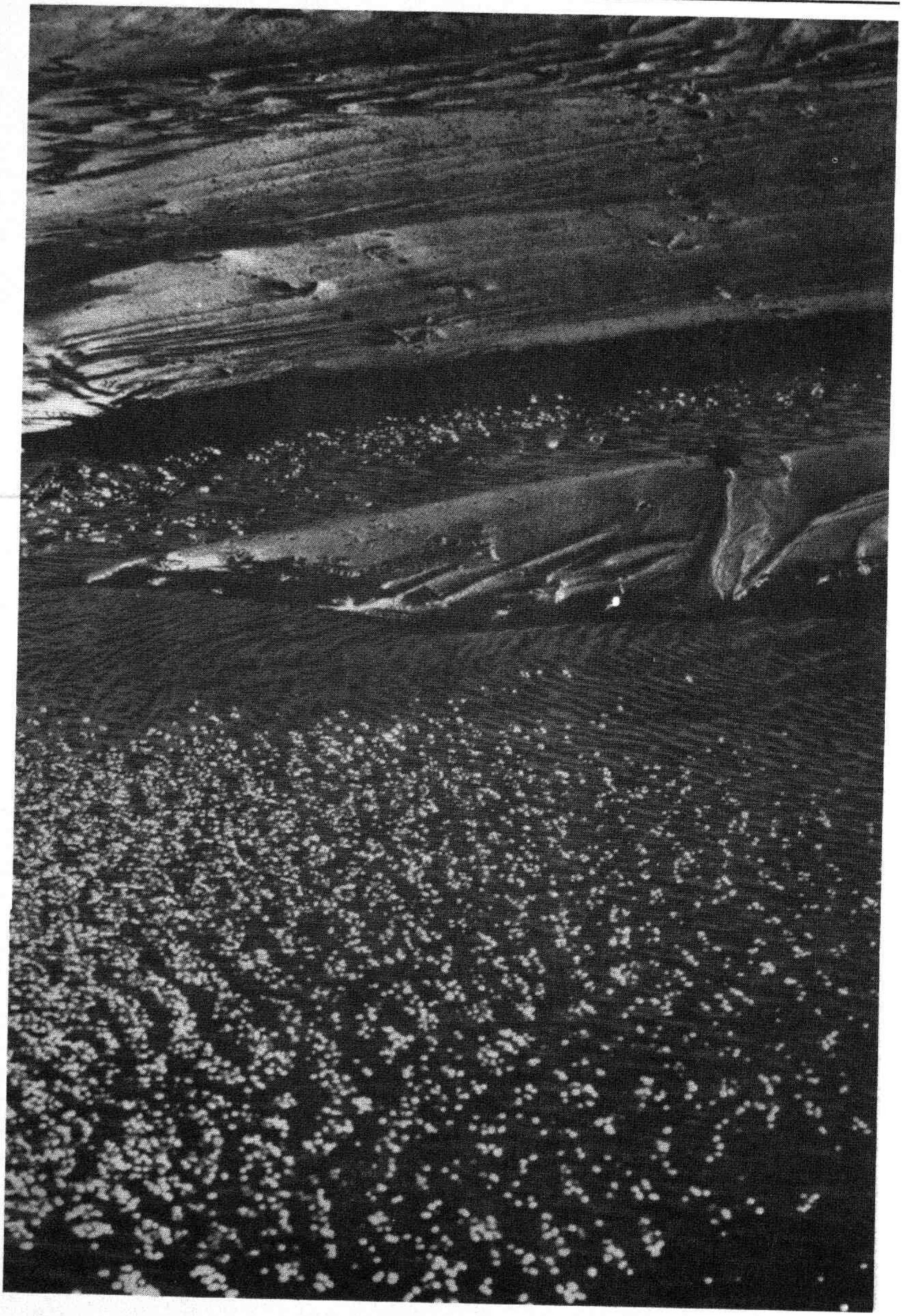


fig. 21



4

Soms is het mogelijk en handig om een periodiek verschijnsel te benaderen met een zuiver periodieke functie. Vaak komen daarbij sinus-functies te pas.
Een voorbeeld daarvan is de getijbeweging die door een eenvoudige sinus is te benaderen.
Het is echter lang niet altijd eenvoudig om zo'n "passend" functievoorschrift te vinden.
Aan het eind van dit hoofdstukje zullen we proberen sinus-functies te vinden bij enkele periodieke verschijnselen.
Maar eerst wat vingeroefeningen.

≫ 55. Geef het bereik (maximum en minimum) èn de periode van de volgende functies: (alle variabelen $\in \mathbb{R}$).

$f(\alpha) = 3\sin\alpha$

$g : x \to \sin 2x$

$h(\alpha) \to -2\sin\frac{1}{3}\alpha$

$k : t \to \sin\pi t$

$l(p) = 0{,}3\sin 0{,}4\pi p$

$s(t) = 3\sin(t - \pi)$

≫ 56. Nu het omgekeerde van opgave ≫ 55.
Bedenk een functievoorschrift dat past bij een sinus-grafiek waarvan je weet:

f: periode 2π, max, (min) : 2 (-2)
g: periode π, max, (min) : $\frac{1}{3}$ $(-\frac{1}{3})$
h: periode 2, max, (min) : 1 (-1)
k: periode 5, max, (min) : 1 (-1)
m: periode 6π, max, (min) : 53 (-53)
n: periode 2π, max, (min) : 6 (-2)
o: periode π, max, (min) : $\frac{1}{2}$ $(-1\frac{1}{2})$

Onze ademhaling is, net als hartslag en bloeddruk een redelijk periodiek verschijnsel. Bij een gezonde volwassene duurt een volledige cyclus van inademen tot en met uitademen ongeveer 5 seconden. Ofwel we ademen zo'n 12 maal per minuut.

Bij het inademen halen we maximaal zo'n halve liter per seconde binnen, die er even later weer uitgeblazen wordt. Via allerlei leuke apparatuur kan daar volautomatisch een grafiek van gemaakt worden.

Zoiets:

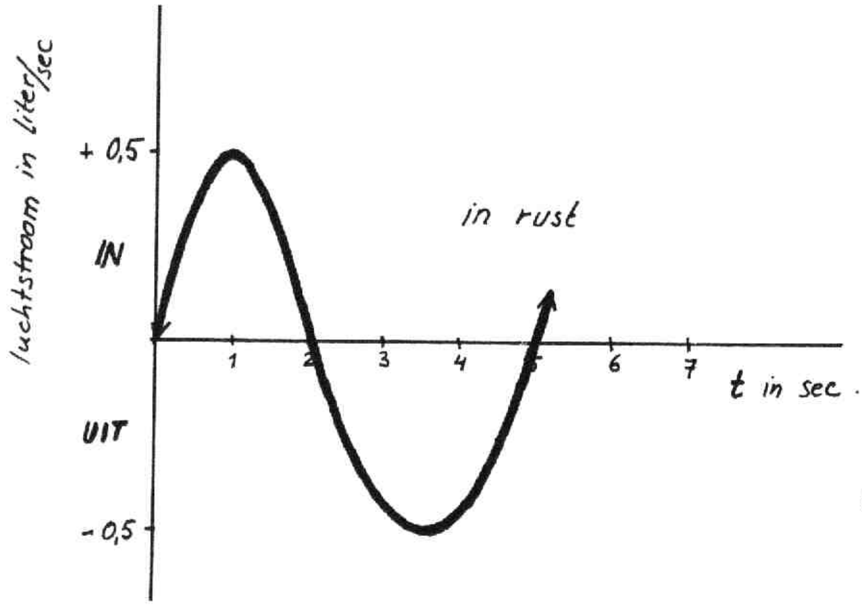


fig. 22

Zoals je ziet niet precies een sinus-grafiek.

≫ 57. Waarom niet?

≫ 58. Vindt een functievoorschrift dat deze kromme redelijk benadert en leg uit in hoeverre jouw grafiek afwijkt van de echte hierboven.

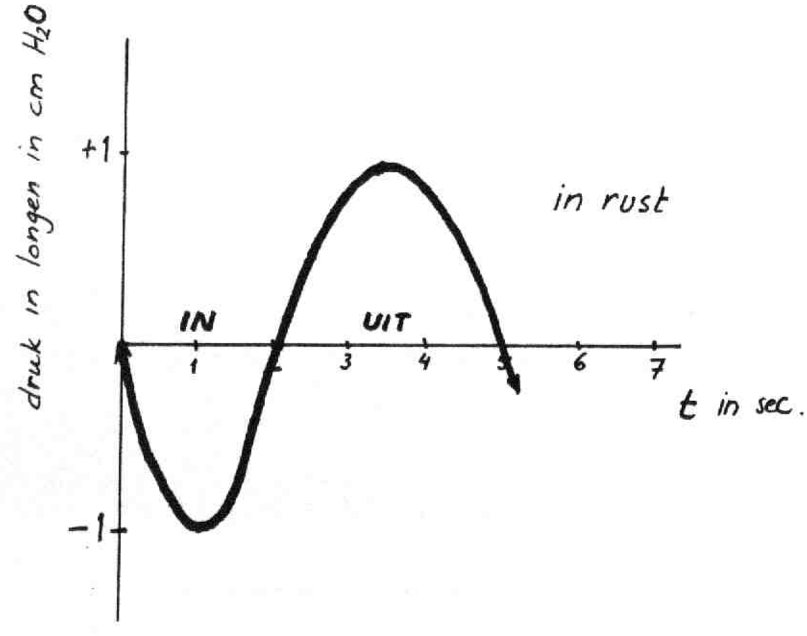


fig. 23

De "luchtdruk" *in* je longen is natuurlijk ook periodiek en wel met dezelfde periode als de ademhaling. De grafiek zie je op de vorige bladzijde.

≫ 59. Waarom zal de "luchtdruk" wel negatief moeten zijn tijdens de inademingsfase?

≫ 60. Vindt ook bij deze grafiek een tamelijk goed passend functievoorschrift.

≫ 61. Iemand gaat hardlopen waardoor de periode van de ademhalingscyclus wordt gehalveerd. Verder wordt de luchtstroom de longen in en uit drie keer zo groot.
Hoe luidt nu het functievoorschrift? Teken de grafiek.

≫ 62. Een figuur die hardlopen niet zo ziet zitten gaat roeien. Daardoor wordt de periode drievijfde van die in rust en de druk in de longen wordt viermaal zo groot.
Hoe luidt nu het functievoorschrift? Teken de grafiek.

≫ 63. Bedenk een functievoorschrift dat past bij een sinus-grafiek waarvan je weet:

f: periode 2π ; max , (min) 2, (-2); $f(0) = 1$

g: periode π ; max , (min) 1, (-1); $g(0) = 1$

h: periode 2 ; max , (min) $\frac{1}{3}$, $(-\frac{1}{3})$; $h(0) = -\frac{1}{6}$

5

In het voorgaande kwamen functies ter sprake van de vorm: $s(\alpha) = \sin\alpha$
en allerlei variaties daarop: $p(\alpha) = \sin(\alpha - 2)$

$$q(\alpha) = 2 + \sin\alpha$$
$$r(\alpha) = 2\sin\alpha$$
$$t(\alpha) = \sin 2\alpha$$

≫ 64. Geef in woorden weer hoe de grafieken van p, q, r en t samenhangen met die van s.

De hoog/laagwaterfunctie van Vlissingen is een voorbeeld (zie opgave ≫ 53) waar je in *twee* stappen van $f(t) = \sin t$ tot de gewenste $v(t) = 2\sin\frac{1}{2}t$ kon komen. Eerst van $\sin t$ naar $\sin\frac{1}{2}t$; daarna van $\sin\frac{1}{2}t$ naar $2\sin\frac{1}{2}t$.
Echt nodig is dat niet: je kunt ook gewoon enkele waarden op je rekenmachientje intoetsen, net zo lang tot je denkt dat je de grafiek goed ziet.

Stormvloed in Vlissingen levert nog een extra stap op b.v.:
$v(t) = 1{,}5 + 2\sin\frac{1}{2}t \qquad t \in \mathbb{R}$.

≫ 65. Teken de grafiek en lees daaruit af hoe lang per periode het water hoger dan +3 meter N.A.P. staat.

≫ 66. $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$.
Teken de grafiek en los op: $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x \geq \frac{1}{2}$.

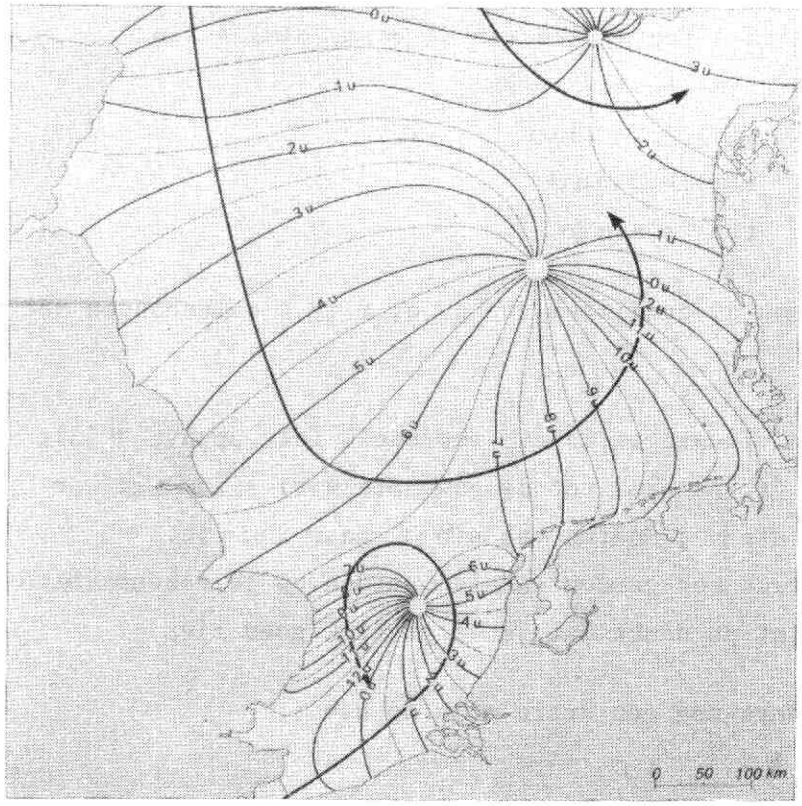
Er is nog één probleem dat onder ogen gezien moet worden. Hoe combineer je een horizontale verschuiving met een verandering van de periode. Of als voorbeeld: hoe combineer je $\sin(\alpha - 1)$ en $\sin\frac{1}{2}\alpha$.
Of: je wilt een functie met periode 4π 1 naar rechts verschuiven. (1 "uur" achter laten lopen).
Zoals we al eerder zagen kan de getijkromme van Den Helder worden benaderd door: $d(t) = 0{,}75\sin\frac{1}{2}t$.
De getijkromme van Oude Schild lijkt sprekend op die van Den Helder, zelfs

de hoog- en laagwaterstanden zijn ongeveer even groot. Echter: het is in Oude Schild *één uur later* hoog water dan in Den Helder.

≫ 67. Onderzoek welke van de volgende functievoorschriften past bij Oude Schild: $o(t) = 0{,}75\sin(\frac{1}{2}t - 1)$

$s(t) = 0{,}75\sin\frac{1}{2}(t-1)$

en verklaar je antwoord.



Op dit kaartje zie je iso-hoogwater-tijdlijnen. Dit zijn lijnen die punten waar het op hetzelfde moment hoogwater is, met elkaar verbindt. Zo kun je zien dat het op Oude Schild (Zuid-Texel) één uur later hoogwater is dan in Den Helder. Hoe?

fig. 24

≫ 68. Bedenk zelf het functievoorschrift dat past bij een andere Nederlandse kustplaats waarbij het hoogwater +1,5 m N.A.P. is, het laagwater −1,5 m N.A.P.; en waar het hoog water 4 uur eerder is dan in Den Helder. Welke plaats langs de Nederlandse kust zou dit kunnen zijn? (zie fig.24)

≫ 69. Hoe kun je aan fig. 24 zien dat de periode van de getijbeweging ongeveer 12,4 uur is?

≫ 70. Teken de grafiek van: $f(x) = \sin(\frac{1}{2}x - 1)$ na eerst die van $g(x) = \sin\frac{1}{2}x$ getekend te hebben?

≫ 71. Teken de grafieken van $s(x) = \cos 2(x + \frac{1}{2}\pi)$ en $t(x) = \cos(2x + \frac{1}{2}\pi)$ in één tekening.

Los op: $s(x) > \frac{1}{2}$

$t(x) > \frac{1}{2}$

≫ 72. In een vochtig land als Nederland is voor de voedselproduktie de lengte van het *groeiseizoen* van belang. Het groeiseizoen bestaat uit de dagen met een gemiddelde temperatuur *boven de 5° C.*
De jaarlijkse temperatuurschommelingen kunnen worden benaderd door: $T(x) = 9{,}5 - 10{,}5\cos 2\pi x$, waarbij x de tijd in jaren en T de temperatuur in °C. Hoe lang is het groeiseizoen?

≫ 73. Teken in één figuur de grafieken van:

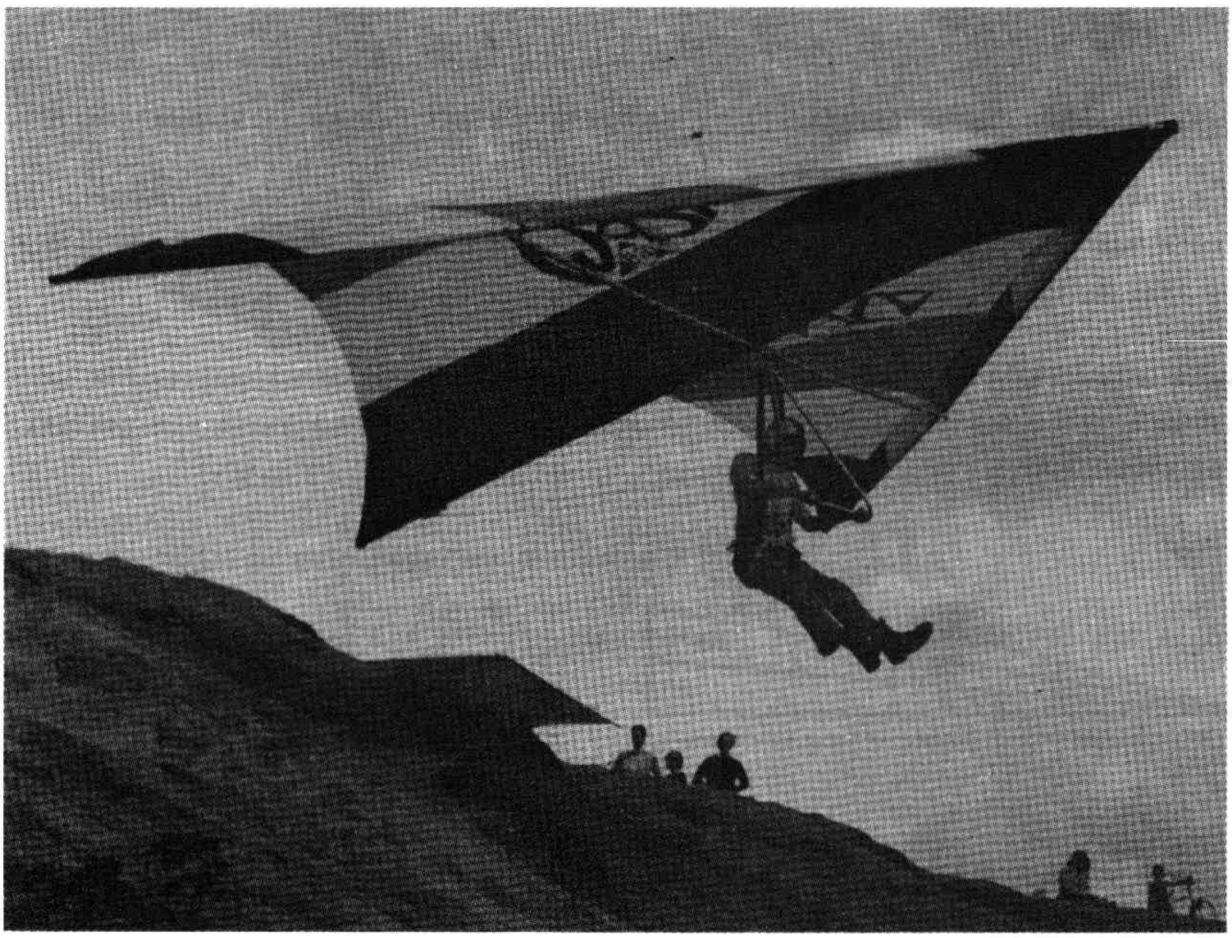
$f(x) = \sin \frac{1}{2}|x|$

$g(x) = \sin |\frac{1}{2}x|$

$h(x) = |\sin \frac{1}{2}x| \qquad x \in \mathbb{R}$

≫ 74. Bekijk nog eens de gemiddelde getijkromme van Vlissingen. En dan vooral naar ons wiskundig model daarvan. (Zie opgave ≫ 53).
Vandaag is het woensdag; vanochtend om 00.00 uur was het stijgend water en de waterstand was 0 m N.A.P.
Zaterdag a.s. zijn er zeilwedstrijden die beginnen bij aflopend tij en-wel bij een waterstand van +1 m N.A.P., dit in verband met de stromingen en branding.
Hoe laat zal het startschot moeten vallen?

6



Zweefvliegen in z'n meest gedemocratiseerde vorm, het hanggliden, is al in vele landen een populaire sport. In Nederland nog niet zo, omdat wij niet genoeg hoge heuvels of rotsen hebben om vanaf te springen.
De hanggliders verschillen kwalitatief nogal. En de kwaliteit wordt vooral afgemeten aan de vliegprestaties.

In de plaatjes hieronder worden de prestaties van twee toestellen vergeleken:

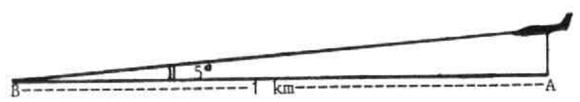


fig.26 a

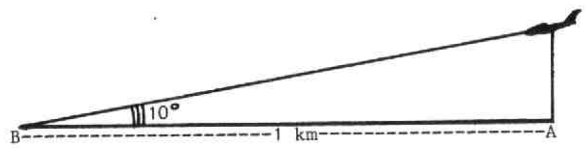


fig.26 b

≫ 75. In figuur 26a zie je dat de "glijhoek" van een toestel 5° is. Als de horizontale afstand AB 1 km is, hoe hoog is het vliegtuig dan in A? (in km).

≫ 76. Dezelfde vraag voor fig. 26b, voor een toestel met een glijhoek van 10°.

De getallen die je in ≫ 75 en ≫ 76 als antwoord kreeg worden de *glijverhoudingen* van de vliegtuigen genoemd.
Hoe kleiner de glijverhouding, des te "beter" is het vliegtuig.

Er is natuurlijk een verband tussen de glijhoek en de glijverhouding. Hoe groter de hoeken, des te groter de verhouding. Dit verband kun je in een grafiek weergeven:

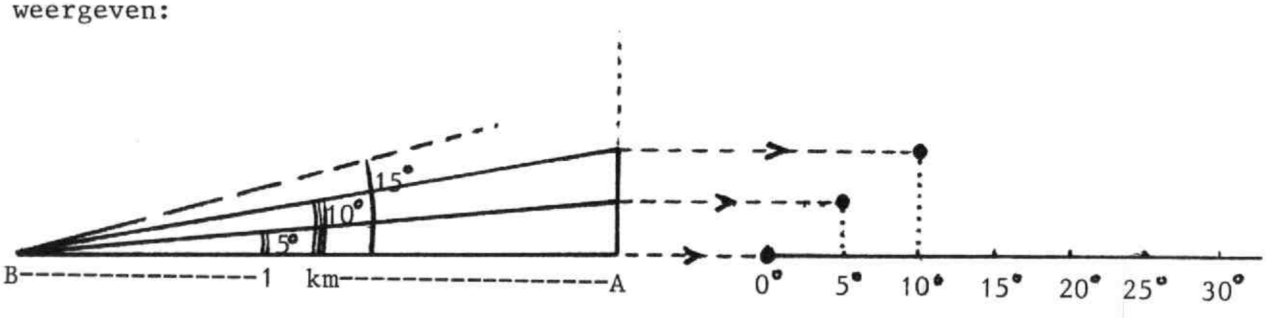


fig. 27

≫ 77. Maak de grafiek in je schrift af door driehoekjes te tekenen met glijhoeken van 15°, 20°, 25°, ...

≫ 78. Verklaar waarom de zojuist getekende grafiek die van $\alpha \rightarrow \tan \alpha$ is op $[0°, 90°\rangle$.

≫ 79. Zweefvliegtuigen hebben bijna allemaal betere glijverhoudingen dan 0,05. Wat betekent dat voor de glijhoeken?

≫ 80. Sportvliegtuigen hebben glijverhoudingen die zo tussen de 0,12 en 0,25 liggen. Hoe groot zijn de bijbehorende glijhoeken?

De vraag kan gesteld worden of $\alpha \to \tan\alpha$ ook gedefinieerd is buiten het interval $[0°, 90°\rangle$.
Met behulp van de rekenmachine is het antwoord snel gegeven. Maar ook zonder de rekenmachine kun je gemakkelijk de grafiek van $\alpha \to \tan\alpha$ op papier krijgen door uit de herinnering de volgende formule op te duiken:

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

≫ 81. Maak de tabel af:

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$
0°	0		
30°	$\frac{1}{2}$		
45°	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$		
60°	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$		
90°	1		

≫ 82. Maak analoge tabellen voor hoeken uit:

- het tweede kwadrant: $90° \leqq \alpha \leqq 180°$
- het derde kwadrant: $180° \leqq \alpha \leqq 270°$
- het vierde kwadrant: $270° \leqq \alpha \leqq 360°$

≫ 83. Wat zijn de nulpunten van $\alpha \to \tan\alpha$?

Het is de moeite waard het gedrag van $\alpha \to \tan\alpha$ in de buurt van 90° wat nader te bekijken met behulp van de rekenmachine.

≫ 84. Hoe groot is tan 89°? En tan 89,5°?

≫ 85. Wat is de grootste waarde van $\tan\alpha$ die je rekenmachine geeft? Is dat het maximum van $\alpha \to \tan\alpha$?

≫ 86. Waar zit klaarblijkelijk een asymptoot in de grafiek van $\alpha \to \tan\alpha$?

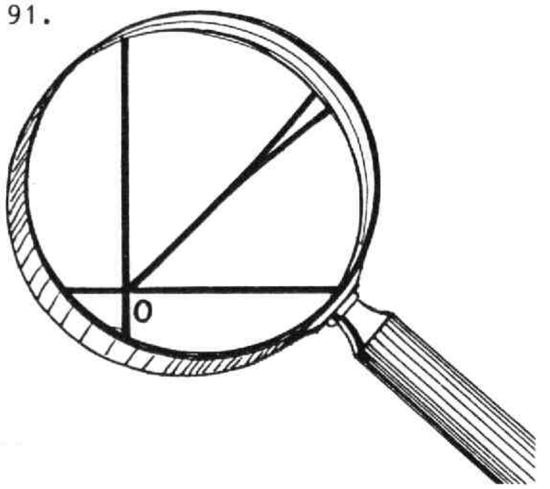
≫ 87. Controleer ook het gedrag van de functie $\alpha \to \tan\alpha$ aan de "andere kant" van 90°.

≫ 88. Teken de grafiek van $\alpha \to \tan\alpha$ met $\alpha \in [0°, 360°]$.

≫ 89. Verklaar waarom de periode van $\alpha \to \tan\alpha$ géén 360° is, maar 180°.

≫ 90. Verklaar waarom voor kleine hoeken ($\alpha \in [0°, 5°]$) geldt: $\sin\alpha \cong \tan\alpha$. Controleer dit met de rekenmachine.

≫ 91.



Door een vergrootglas kijken we naar het begin van de grafieken van $\tan\alpha$ en $\sin\alpha$. Je ziet, die liggen vlak tegen elkaar, hetgeen te verwachten was na opgave ≫ 90.

Welke van de twee grafieken is de bovenste en waarom? Snijden de grafieken elkaar (behalve in $x = 0°$)?

≫ 92. Teken de grafiek van $x \to \tan 2x$ op $\langle 0, 4\pi \rangle$, (x in radialen) en los op: $\tan 2x \geqq 1$.

≫ 93. Teken de grafiek van $p \to \tan \frac{1}{2}p$ op $\mathbb{R}$, (p in radialen) en los op: $\tan \frac{1}{2}p \leqq \frac{1}{2}$.

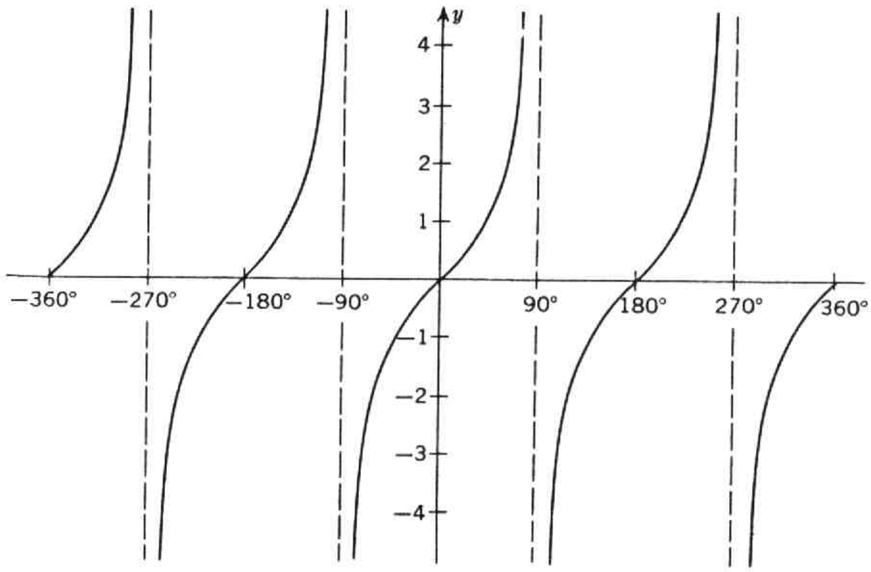
≫ 94. a) Teken de grafiek van $x \to |\tan x|$ op $\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle$.

b) Teken de grafiek van $x \to \tan |x|$ op $\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle$.

c) Geldt op $\mathbb{R}$: $|\tan x| = \tan |x|$?

SAMENVATTING

In dit hoofdstuk werd de functie $x \to \tan x$ onderzocht. De grafiek ziet er zó uit:



met de volgende bijzonderheden:

nulpunten : $x = 0 + k\pi$ $\quad k \in \mathbb{Z}$

asymptoten: $x = \frac{1}{2}\pi + k\pi$ $\quad k \in \mathbb{Z}$

extremen : geen.

Bijzondere waarden:

α	0°	30°	45°	60°	90°
$\tan \alpha$	0°	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	*