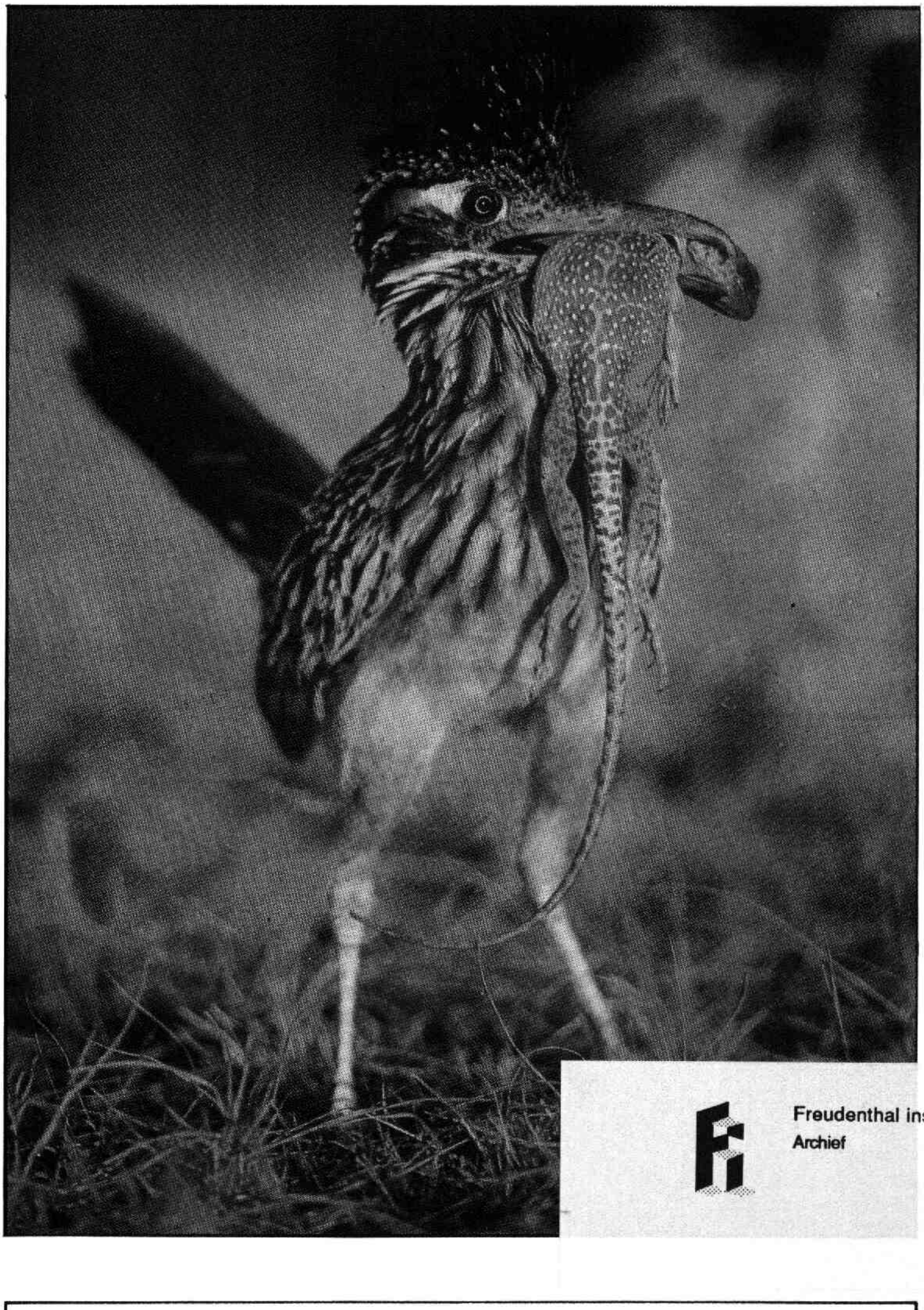
Periodieke functies

https://hdl.handle.net/1874/10250



PERIODIEKE FUNCTIES

PERIODIEKE FUNCTIES

OW&OC

Tiberdreef 4 - 3561 GG Utrecht

Foto omslag:

Prooi- en roofdieren staan centraal in het tweede deel van dit boekje. Hier heeft een roadrunner (roofdier) een hagedis (prooidier) verschalkt.

PERIODIEKE FUNCTIES

Een produktie ten behoeve van de experimenten in het kader van de Herverkaveling Eindexamenprogramma's Wiskunde 1 en 2 V.W.O.

Samenstelling: Jan de Lange Jzn
Martin Kindt

Vormgeving: Ellen Hanepen

Utrecht, april 1984.

INHOUDSOPGAVE

1. PERIODIEKE VERSCHIJNSELEN	pag. 1
2. PROOI-ROOFDIER-CYCLUS	9
3. MEERVOUDIGE PERIODICITEIT	15
4. HET SINUS-MODEL	21
5. PERIODICITEIT EN TREND	29

1 PERIODIEKE VERSCHIJNSELEN

Voor een onderzoek naar het functioneren van het hart wordt vaak gebruik gemaakt van een elektrocardiogram of E.C.G. Bij het pompen door het hart worden elektrische stroompjes opgewekt. Als er nu elektroden op de ledematen en borstkas worden geplaatst zijn die stroompjes te meten. Deze worden dan versterkt en via allerlei apparatuur op papier gebracht:

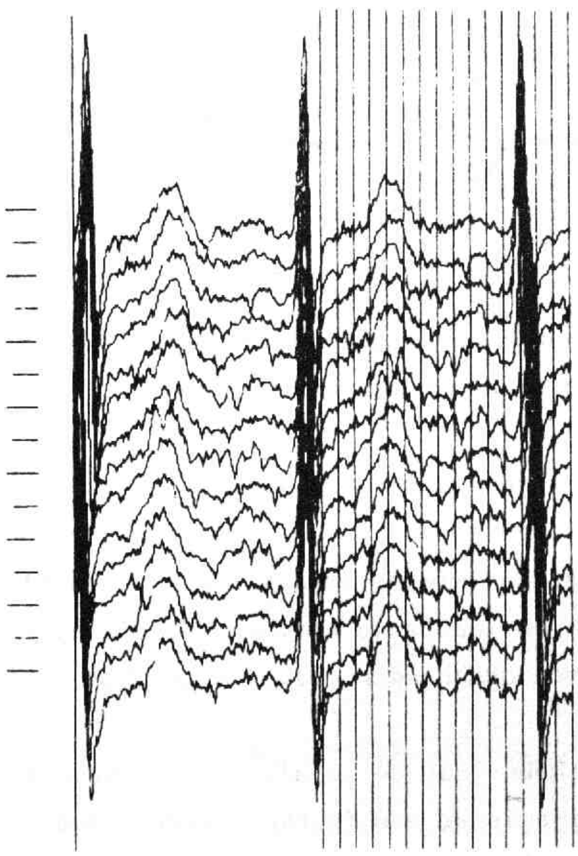
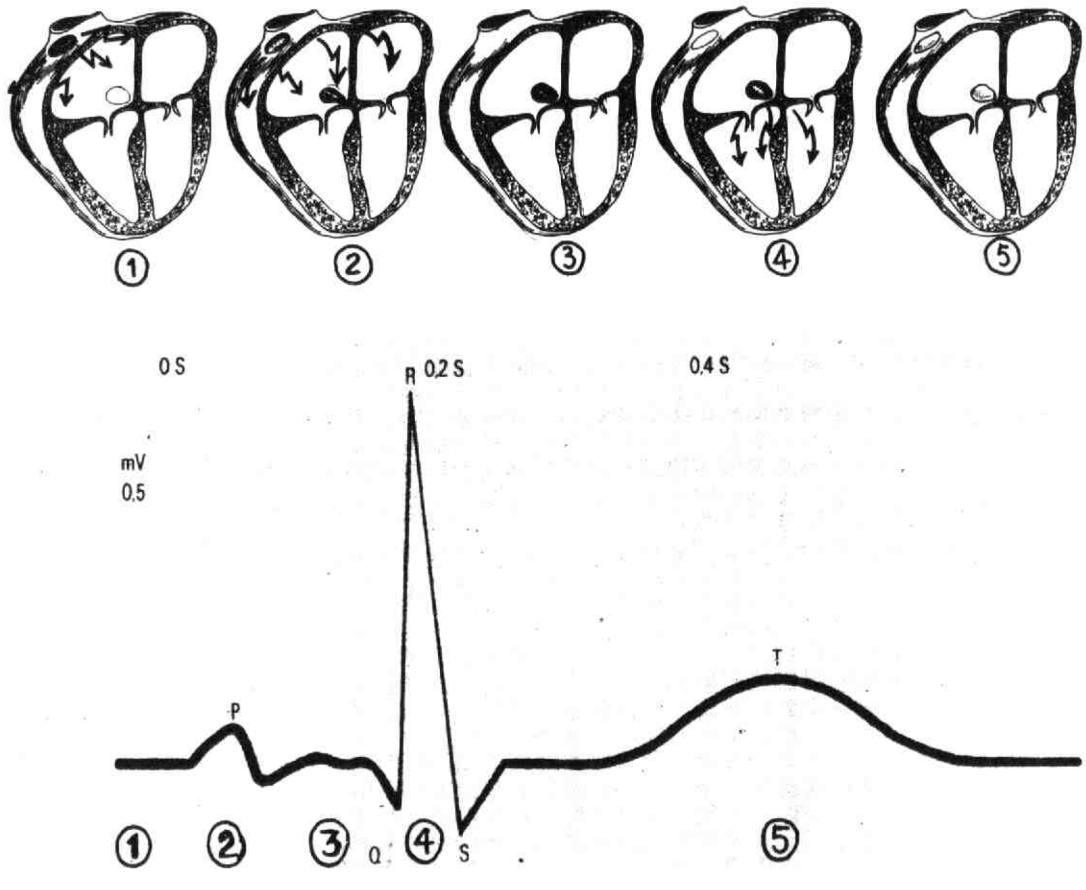


fig. 1

Bovenstaand plaatje geeft het verloop weer in ongeveer 1,6 seconden.



Het samentrekken van de hartspier wordt veroorzaakt door een spontane impuls die ontstaat in een zenuwcentrum in de wand van de rechter boezem (1).

Die impuls breidt zich via de wand van de boezem uit (2); dit levert op het E.C.G. een kleine piek op: doordat de wand van de boezem dun is, is maar een kleine impuls nodig. (P-top).

Vervolgens bereikt de impuls de atrioventriculaire knoop. Hier wordt de impuls even opgehouden (3). Dit resulteert in een vlak stukje E.C.G.

Na het korte oponthoud gaat de impuls naar de kamers (4). Omdat de kamerwanden dik zijn is er een flinke prikkel: een hoge piek in het E.C.G. (QRS-complex).

Tenslotte ontspant de hartspier zich (5). (T-top).

Om de grafieken van fig. 1 wat 'leesbaarder' te maken worden deze 'gemiddeld' (via een computerprogramma).
Het resultaat in dit geval:

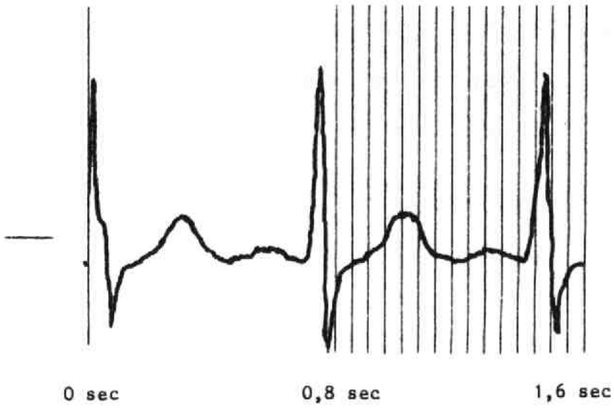


fig. 2

≫ 1. Verklaar waarom deze grafiek minder 'bibberig' is.

≫ 2. Verklaar waarom het patroon steeds terugkeert; schat de polsslag van deze patient (aantal slagen/minuut).

≫ 3. Teken zo nauwkeurig mogelijk het E.C.G. van deze patient voor de volgende twee seconden.

Vaak worden gemiddelde grafieken zoals in fig. 2 nog verder 'gemodelleerd'. Dan komen de regelmaat en de bijzondere kenmerken nog duidelijker tot uiting.
Zo'n 'model-E.C.G.' kan er zó uitzien:

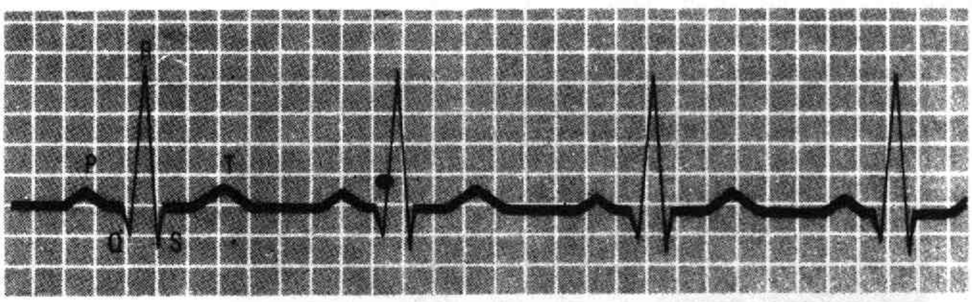


fig. 3

Het samentrekken van de boezems zie je bij P, dat van de kamers bij R en het ontspannen bij T.

Bij opeenvolgende tijdsintervallen van (een bepaalde) gelijke lengte herhaalt de grafiek zich. Het kortste tijdsinterval waarvoor dit geldt noemen we de *periode* van het verschijnsel.

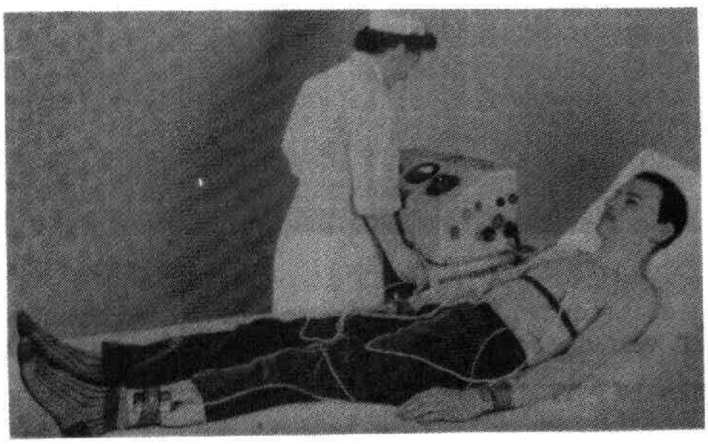
≫ 4. Bij sporten zal de hartslag aanzienlijk kunnen oplopen.
Teken een E.C.G. (van een gezond persoon) met een hartslag van 120 s/m gedurende een tijdsinterval van vier seconden.

≫ 5. Na jarenlang duursport bedrijven (wielrennen, roeien, lange afstand lopen e.d.) kun je een 'sporthart' krijgen: de hartslag daalt tot bijvoorbeeld 40 slagen per minuut, in rust.
Teken ook vier seconden van een E.C.G. van een dergelijk persoon, met dezelfde asverdeling als bij de vorige opgave.

Hartkwalen vormen één van de voornaamste doodsoorzaken in ons land. Een tijdig onderkennen van storingen van de werking van het hart is daarom van het grootste belang. Het E.C.G. is daarbij het belangrijkste hulpmiddel: iedere stoornis heeft zo z'n 'eigen' E.C.G.-verloop.

Eén storing is de volgende.
De boezems kunnen ophouden met zich samen te trekken. De P-toppen van het E.C.G. verdwijnen dan geheel. Slechts af en toe zal een prikkel uit de boezem doordringen tot in de kamers. Dus ook slechts af en toe zal er een QRS-piek waar te nemen zijn. Bovendien zullen deze pieken veel lager dan normaal zijn.

≫ 6. Teken op grond van deze beschrijving een mogelijk E.C.G.



Het opnemen van een elektrocardiogram.

Onderstaand E.C.G. ontstaat als er chaotische prikkelvorming optreedt in de kamers. Het verschijnsel heet in medische kringen: kamerfladderen.

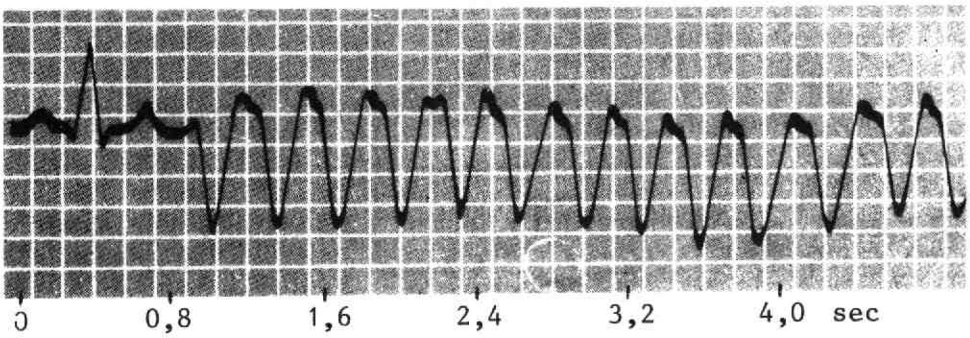


fig. 5

≫ 7. a. Wat is de periode van de hartslag vòòr het kamerfladderen?

b. En wat is de periode tijdens het kamerfladderen?

Tenslotte een gedeelte van het E.C.G. van een patient die een hartinfarct heeft.

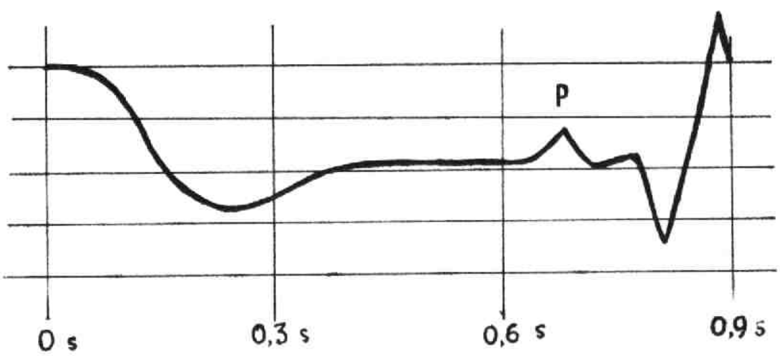


fig. 6

Het is precies één periode. Alleen de P-top is aangegeven. Deze blijft vrijwel ongewijzigd (vergeleken met de gezonde situatie).

≫ 8. Teken nog twee periodes en geef aan wat de voornaamste verschillen zijn met het E.C.G. van een gezond persoon.

Een ander, nauw met de hartslag samenhangend, periodiek verschijnsel is de *bloeddruk*. Dat is de druk die door het bloed op de vaatwand wordt uitgeoefend. Die is maximaal (de systolische druk) tijdens de hartslag, en minimaal (diastolische druk) tijdens de ontspanning van de hartspier.

Hieronder staan twee grafieken van de bloeddruk van de giraffe. Eerst als de giraffe ligt en vervolgens als hij staat.

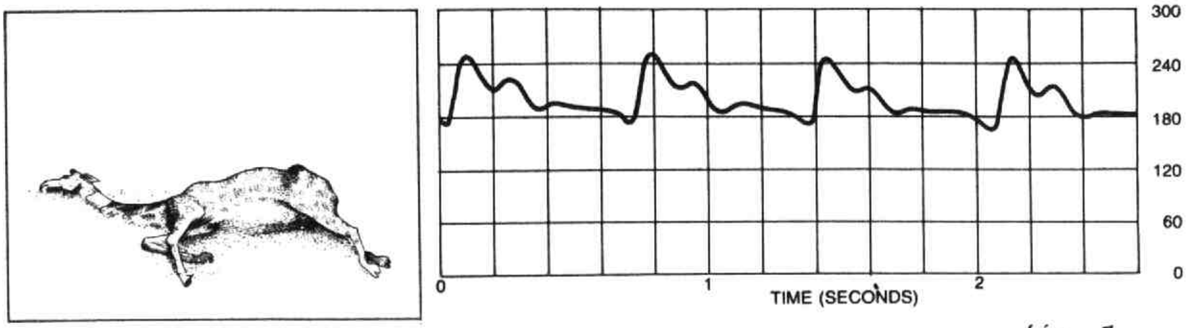


fig. 7

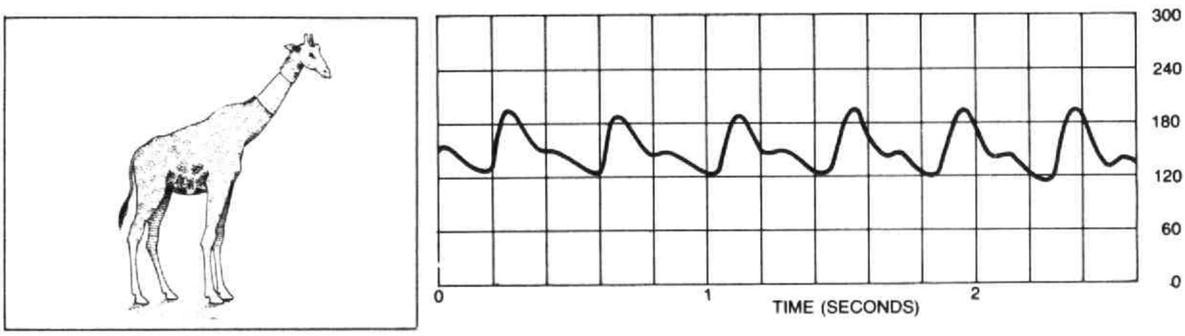


fig. 8

De giraffe heeft een 'verband' om de nek waarmee de bloeddruk gemeten kan worden.

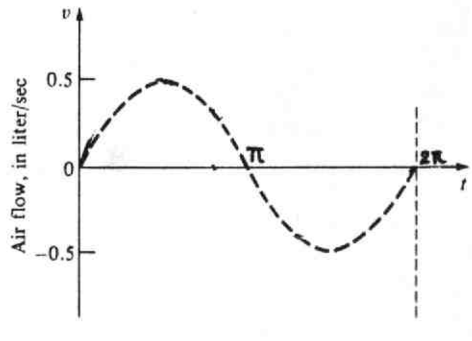
≫ 9. a. Wat is de frequentie van de hartslag in beide gevallen?

b. Hoe groot is de bloeddruk in beide gevallen (zowel de systolische als de diastolische)?

c. Heb je een verklaring voor het feit dat de hartslag in dit tweede geval sneller is, terwijl de bloeddruk juist lager is?

d. De bloeddruk van een zittend mens is tussen de 70 en 130 mm Hg. Waarom zou dit bij de giraffe zoveel hoger zijn?

Soms kan een periodiek verschijnsel benaderd worden door een eenvoudig wiskundig model. Dat is bij een E.C.G. wat lastig, maar bij de ademhaling van mensen redelijk te doen.
Bij een gezonde volwassene is het functievoorschrift voor de luchtstroomsnelheid (in liter/sec) tegen de tijd (sec) als volgt:



$L_1(t) = 0{,}5 \sin t$ (t in radialen).

≫ 10. a. Wat is de periode van dit wel erg ruwe model?

b. Wat is de maximale luchtstroomsnelheid?

Twee wat verfijndere modellen zijn:

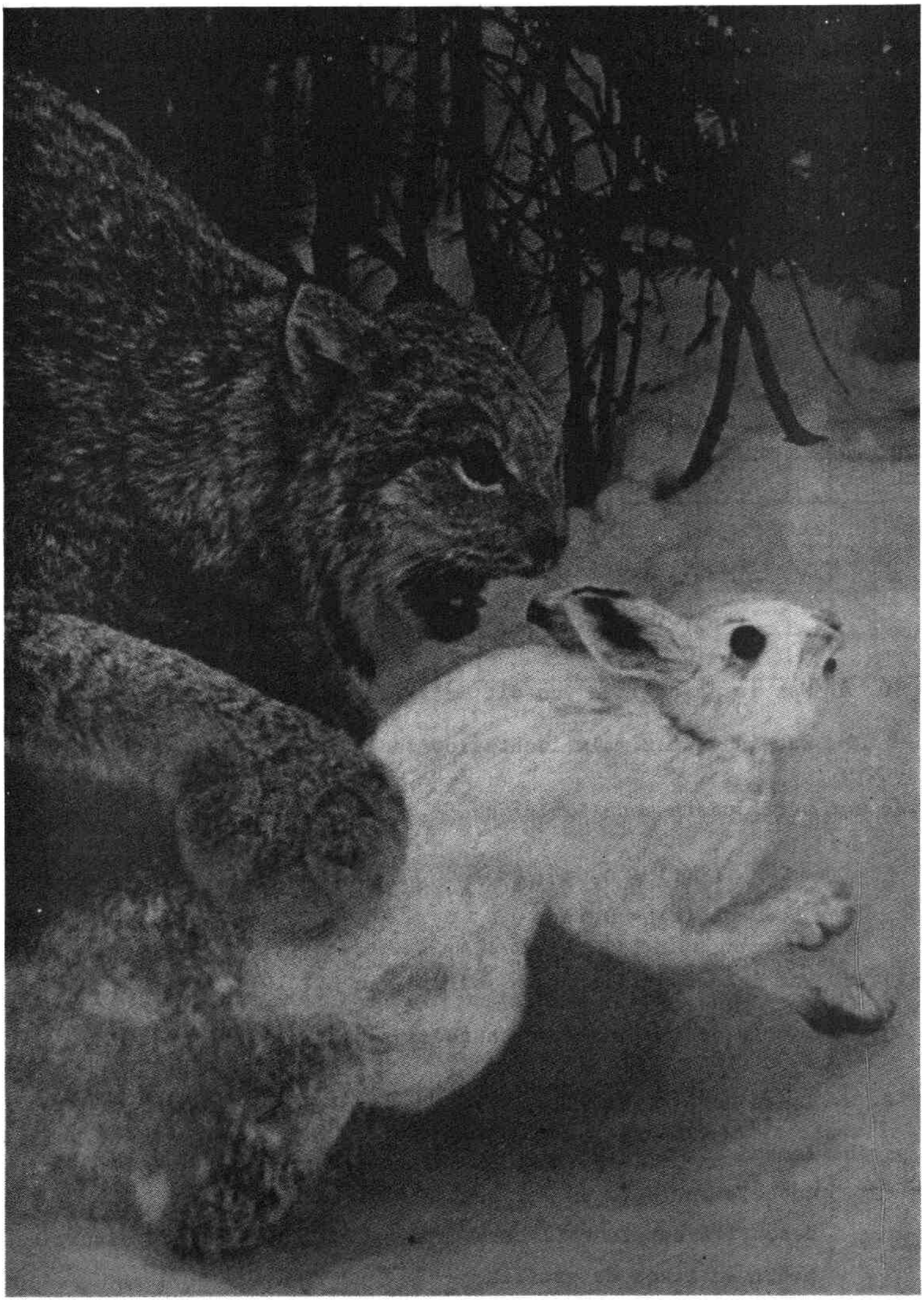
$$L_2(t) = 0{,}5 \sin \tfrac{6}{5} t$$
$$L_3(t) = 0{,}5 \sin 0{,}4\pi t$$

≫ 11. a. Wat is de periode van L_2 en die van L_3?

b. Wat is de maximale luchtstroomsnelheid?

≫ 12. a. Teken de grafiek van $L_3(t)$. (Twee volledige periodes).

b. Iemand die zojuist gesport heeft zuigt de lucht aan met een dubbele snelheid en met een gehalveerde periode.
Beschrijf het functievoorschrift $L_4(t)$ dat bij deze situatie hoort en teken de grafiek.



Een lynx is een Canadese sneeuwhaas net iets te snel af.

2

PROOI-ROOFDIER-CYCLUS

Bij tellingen in 1950 (t = 0) waren op een bepaald gebied in Noord-Amerika naar schatting zo'n 7.000 konijnen. Relatief gezien was dat niet veel. Deze konijnen vormden o.a. de prooi voor het roofdier de lynx. Daarvan waren er in 1950 ongeveer 350.

De lynxen hadden vrij veel moeite met het vinden van de 'schaarse' konijnen. Dat had twee gevolgen: de konijnen konden zich tamelijk explosief ontwikkelen en het aantal lynxen nam af.
Zo waren de aantallen in 1951:

12.000 konijnen en 250 lynxen

en een jaar later:

19.000 konijnen en 200 lynxen.

Vanaf dit moment ongeveer was het voor de schaarse lynxen erg gemakkelijk geworden om een konijn te verschalken. De cijfers tonen dat ook duidelijk aan: in 1955 waren er:

23.000 konijnen en 400 lynxen.

Doordat er nu weer relatief veel lynxen zijn daalt het aantal konijnen nu snel: in 1957 waren er 18.000 konijnen en in 1961 zo'n 7.000,
Het aantal lynxen in die jaren bedroeg respectievelijk 500 en 350.

Door allerlei oorzaken was het niet mogelijk in de andere jaren tellingen te verrichten. Wèl had men het sterke vermoeden dat zo ongeveer om de tien jaar de hele *cyclus* zich herhaalde. Dat was één van de redenen dat men stopte met de tellingen in 1961. Uitgaande van de schaarse gegevens van 1950 tot 1961 zou getracht worden een beeld te krijgen van het verloop van het aantal prooi- en roofdieren.

≫ 13. Teken in één figuur de ontwikkeling van het aantal konijnen en lynxen in het betreffende gebied; ga ervan uit dat de cyclus zich vanaf 1961 herhaalt.
Gebruik een assenstelsel zoals hieronder.

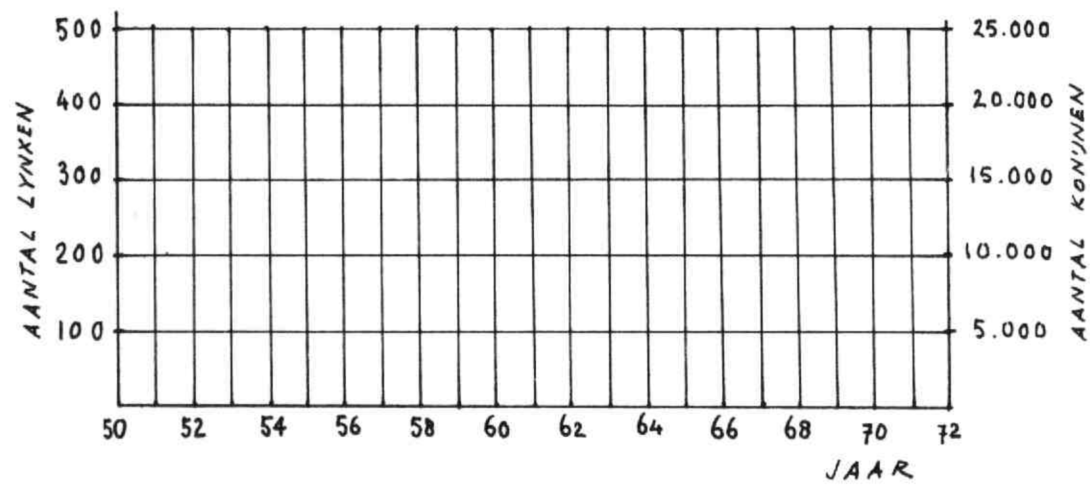


fig. 9

≫ 14. a. Wat is de periode van het aantal konijnen?

b. Wat is de periode van het aantal lynxen?

≫ 15. Verklaar waarom beide periodieke verschijnselen uit bovenstaande grafiek nooit op hetzelfde moment een maximum zullen hebben.

De prooi-roofdier-cyclus is een verschijnsel dat zich al eeuwen bij talloze diersoorten voordoet, maar pas sinds het begin van deze eeuw voor het eerst duidelijk werd voor de mens.
In de eerste wereldoorlog werd er in de Adriatische zee vanwege de oorlogshandelingen niet gevist. Na de oorlog bleek het aantal roofvissen (haaien) zeer sterk toegenomen. Deze waarneming gaf de stoot tot het opstellen van het prooi-roofdier-model.

Grafisch gezien levert het prooi-roofdier-model vaak twee sinus-achtige krommen op die dezelfde periodes hebben en ten opzichte van elkaar horizontaal verschoven zijn.

Dat dit geen studeerkamermodel alleen is blijkt uit de volgende grafiek, die het resultaat is van laboratoriumexperimenten:

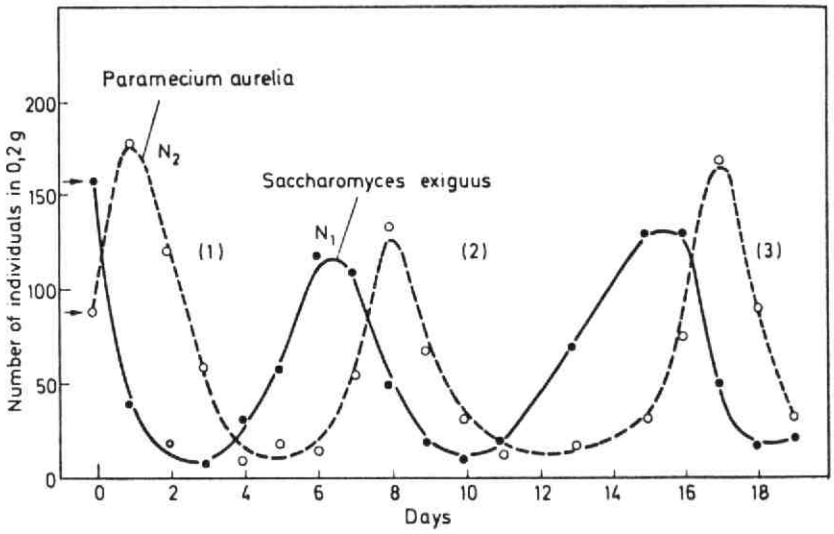


fig. 10

≫ 16. Welk diertje is klaarblijkelijk roofdier en welk prooidier in deze grafiek?

≫ 17. Bij prooi-roofdier-modellen zegt men vaak:

"De groeisnelheid van de roofdieren is evenredig met de aanwezige hoeveelheid prooidieren".

Klopt dat in de voorgaande twee grafieken?

Een prooi-roofdier-model wordt beschreven door de volgende twee functies:

$$N_1(t) = 200 \sin t + 400 \qquad \text{(t in 5 jaar)}$$
$$N_2(t) = 300 \sin (t - \tfrac{2}{5}\pi) + 500$$

≫ 18. a. Wat is de periode van de cyclus van dit prooi-roofdier-model?

b. Welke functie beschrijft het aantal roofdieren?

c. Hoeveel dieren van iedere soort zijn er maximaal en minimaal?

d. Teken de grafieken van dit prooi-roofdier-model in één tekening (op soortgelijke wijze als bij fig. 9).

In bovenstaand model beweegt het aantal dieren N_1 zich rond de 'evenwichtssituatie 400.
Het maximum ligt er 200 boven, het minimum 200 eronder. Het getal 200 heet de *amplitude*; d.w.z. de maximale uitwijking uit de evenwichtsstand.

≫ 19. Wat is de amplitude van $N_2(t)$?

Van prooi-roofdier-modellen worden vaak grafieken getekend die het periodieke verloop op geheel andere wijze verduidelijken.
Men tekent dan een grafiek met langs de twee assen het aantal prooi- resp. roofdieren. Het eerste punt van de grafiek geeft de situatie aan op het moment $t = 0$ (de getallen zijn uit het konijn-lynx-model).

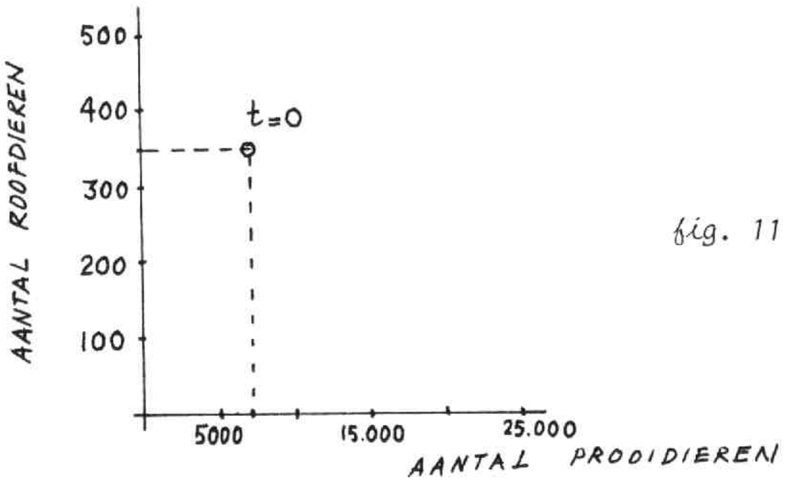


fig. 11

Vervolgens wordt het aantal op $t = 1$ getekend; daarna de situatie voor $t = 2$; enz.

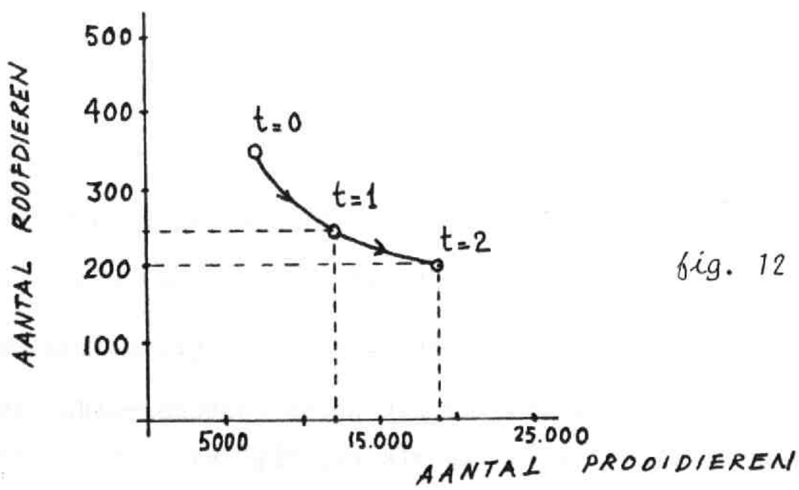


fig. 12

≫ 20. Maak op deze manier de grafiek van de konijn-lynx-cyclus af.
Verklaar de ontstane grafiek.

≫ 21. Maak een dergelijke grafiek van het model:

$$N_1(t) = 200\sin t + 400$$
$$N_2(t) = 300\sin(t-\tfrac{2}{5}\pi) + 500$$

≫ 22. Teken een dergelijke grafiek in het geval dat beide soorten zich stabiliseren na verloop van tijd.
Dus een dergelijk geval:

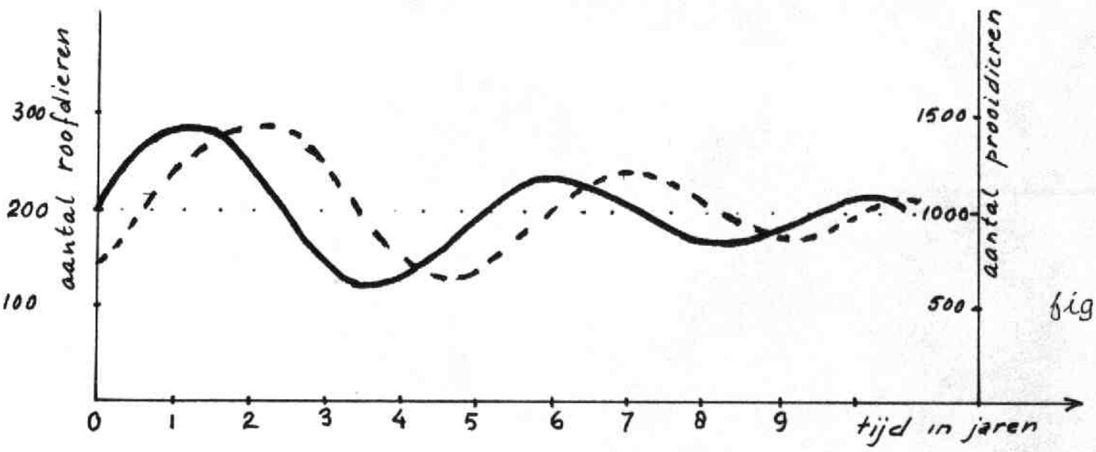
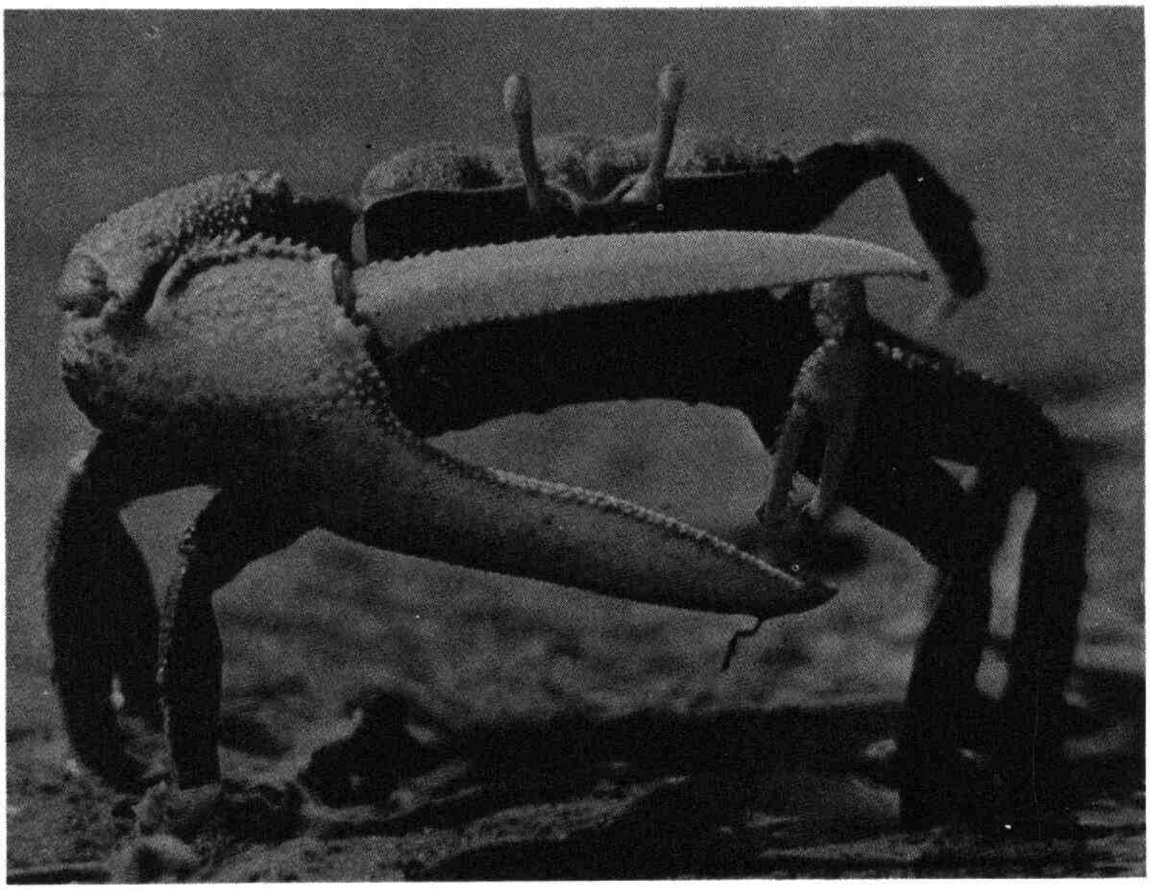


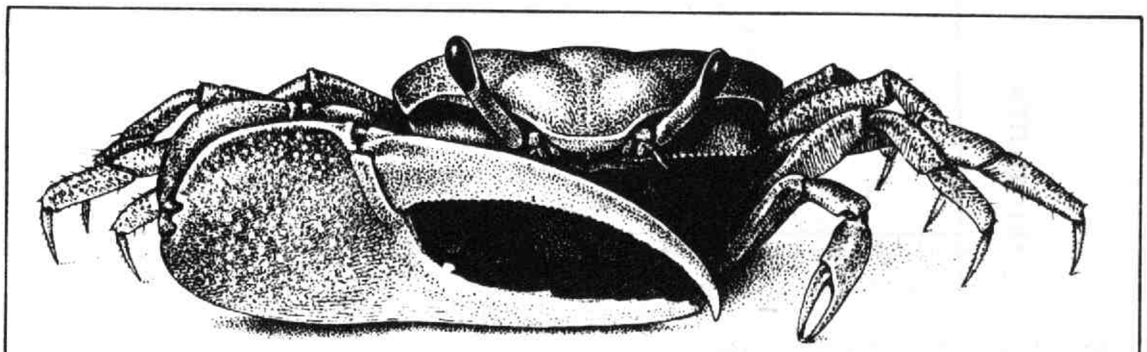
fig. 13



De wenkkrab dankt zijn naam aan de sterk ontwikkelde voorklauw waarmee hij lijkt te wenken.

3 MEERVOUDIGE PERIODICITEIT

Periodieke verschijnselen roepen vaak weer andere periodieke verschijnselen op. Zo geeft de hartslagperiodiciteit aanleiding tot de bloeddrukperiodiciteit.
Vaak is het echter niet zó duidelijk of een bepaald periodiek verschijnsel door een ander periodiek verschijnsel wordt veroorzaakt, of dat die regelmaat er 'toevallig' al is.



Onderzoek heeft aangetoond dat de 'wenkkrab' zeer actief is tijdens laagwater, maar niets uitvoert tijdens hoogwater.
De volgende grafiek maakt dat duidelijk:

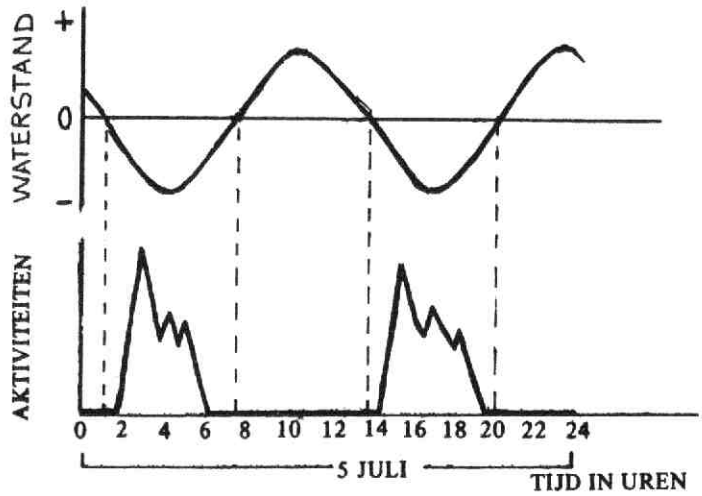


fig. 14

Langs de verticale as staat 'activiteit' met daarbij een schaalverdeling van 0 - 20. Dat zegt op deze manier niet veel. Daarom, ter verklaring: men heeft het aantal keren geteld dat de krab een bepaald punt passeerde.

Het lijkt er sterk op dat eb en vloed - het getijde - de activiteit van de krab bepalen. Om daar meer zekerheid over te verkrijgen werd de krab geplaatst in een omgeving waar géén eb en vloed was.
Dit leverde voor 11 juli de volgende grafiek op:

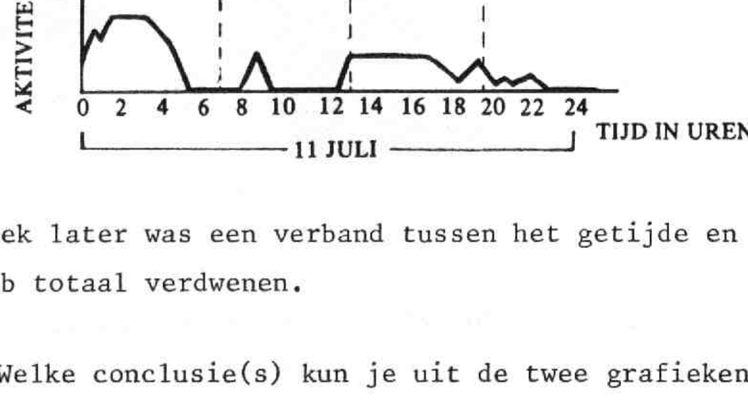


fig. 15

Een week later was een verband tussen het getijde en de activiteiten van de krab totaal verdwenen.

≫ 23. Welke conclusie(s) kun je uit de twee grafieken trekken?

Dezelfde krab, de *wenkkrab*, kent nog een tweede opvallend periodiek verschijnsel:

's nachts is hij licht gekleurd, overdag donker.

Of in een grafiek:

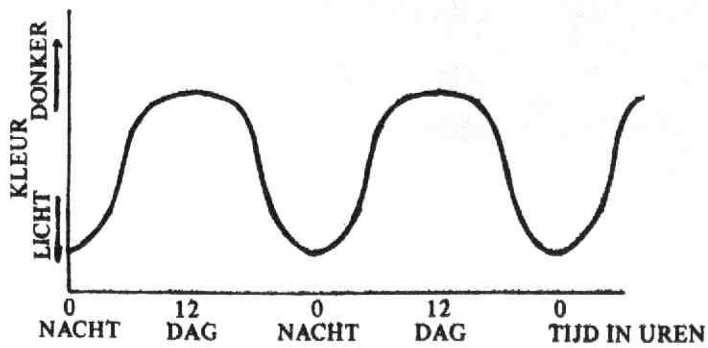


fig. 16

Ook nu vroegen de onderzoekers zich af of een externe reden (dag-nacht-cyclus) de oorzaak van de kleurwisseling was. Om daarop een antwoord te vinden werd de krab in een ruimte geplaatst met een constante hoeveelheid licht.

Het resultaat was:

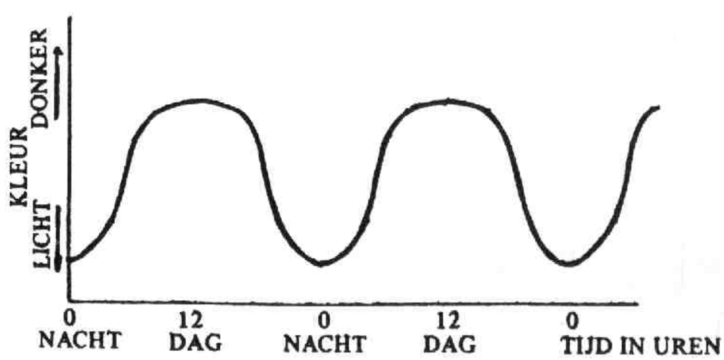
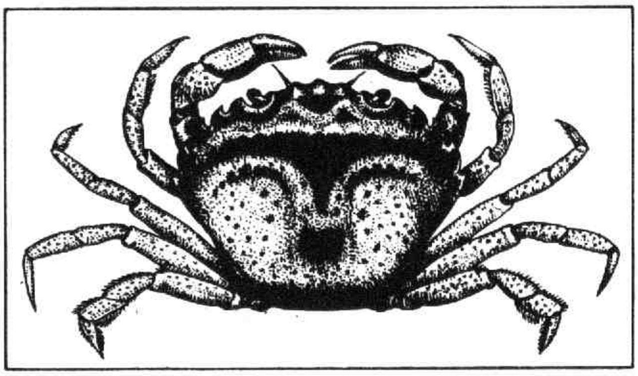


fig. 17

≫ 24. Welke conclusie(s) kun je aan de hand van bovenstaande twee grafieken trekken?

In het eerste geval (activiteiten) spreekt men van een *externe* biologische klok. In het tweede geval van een *interne* biologische klok.

Een andere krab, de *groene krab*, is juist actief bij hoogwater en niet zo actief tijdens laagwater.



De volgende grafiek 'bewijst' dat:

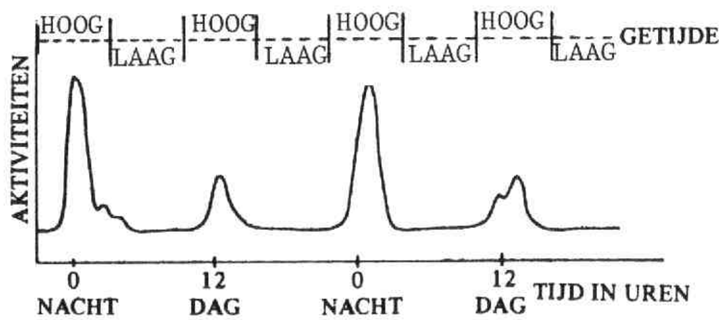


fig. 18

≫ 25. Welk verschijnsel - naast eb en vloed - lijkt invloed te hebben op de activiteiten van de groene krab?

Deze grafiek is ook te modelleren; met het volgende resultaat:

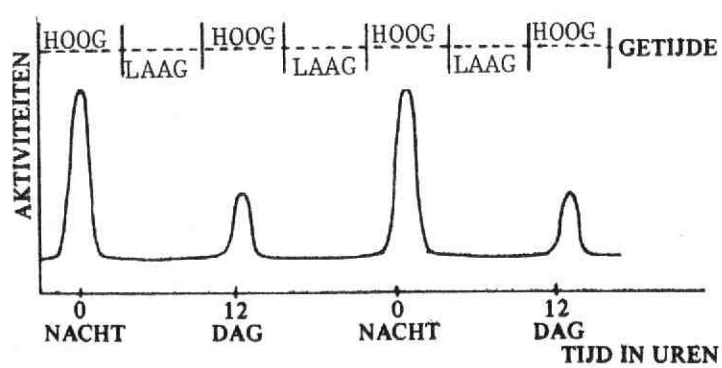


fig. 19

≫ 26. Hoe groot is de periode van de grafiek afgaande op dit gedeelte? (Zo nauwkeurig mogelijk).

De groene krab houdt dus rekening met eb en vloed (periode 12,4 uur) en dag en nacht (periode 24 uur).
Dat het model van fig. 19 niet onbeperkt naar rechts kan worden voortgezet moge blijken uit het antwoord op de volgende vraag.

≫ 27. Teken de activiteiten-grafiek van de groene krab als het 'eerste' hoogwater om ongeveer 06.00 uur valt:

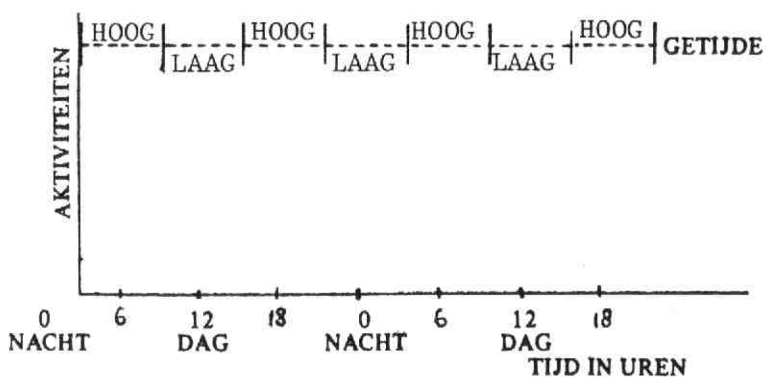


fig. 20

≫ 28. Hoe kun je de periode van de activiteiten van de groene krab berekenen (rekening houdend met de periode van eb en vloed en die van dag en nacht)?

≫ 29. a. Een verschijnsel A kent twee externe klokken. Bij die 'klokken' passen de functievoorschriften:

$$L_1(t) = 0{,}5 \sin 0{,}4\, t$$

$$L_2(t) = 0{,}7 \sin 0{,}25\, t$$

Wat zal de periode van het verschijnsel A zijn?

b. Hetzelfde voor een verschijnsel B met drie externe klokken:

$$K_1(t) = 3 \sin \pi t$$

$$K_2(t) = 1{,}5 \sin 0{,}25 \pi t$$

$$K_3(t) = \sin 0{,}1 \pi t$$

EXTRA: BIORYTHME

Er is de laatste jaren nogal wat interesse in biorythme. Er zouden drie cyclussen zijn - de lichamelijke-, de gevoels- en de intellectuele cyclus - die ons gedrag beïnvloeden.
Volgens sommige serieus te nemen onderzoekers zou aan de hand van deze drie cyclussen voorspeld kunnen worden wanneer je mogelijkheden op de drie genoemde gebieden goed of slecht zijn. In het laatste geval spreekt men van kritische dagen. Zo nam Marilyn Monroe teveel slaappillen op een kritische dag.
De grafieken van de drie cyclussen zijn sinusachtig.
Die van de lichamelijke cyclus heeft een periode van 23 dagen (sterk voelen, uithoudingsvermogen, weerstand tegen ziekte).
De gevoelscyclus heeft een periode van 28 dagen (creativiteit, verdriet, vreugde).
De intellectuele cyclus heeft een periode van 33 dagen.
Op je geboortedag beginnen alle drie cyclussen in het nulpunt en beginnen direct te stijgen.

≫ 30. Na hoeveel jaar is de totale cyclus weer op zo'n punt aangeland? (Alle drie grafieken op nul en stijgend).

≫ 31. Hoeveel keer in je leven zul je een topdag hebben (theoretisch), d.w.z. alle drie grafieken bereiken op dezelfde dag het maximum?

De kritische dagen zijn dagen waarbij één van de drie grafieken een nulpunt heeft.
De dagen dat de grafiek een minimum heeft zijn dagen van rust.

≫ 32. Kies één van de drie cyclussen uit en teken de grafiek daarvan vanaf vandaag voor de eerstkomende maand.
Bepaal je kritische dagen.

4 HET SINUS-MODEL

Sommige periodieke verschijnselen zijn redelijk te benaderen door een sinus-functie. Een enkel voorbeeld werd al beschreven in de eerste hoofdstukken.

Een heel bekend verschijnsel waarbij dat benaderen door een sinusoïde (= sinusgrafiek) goed lukt is de getijdebeweging.

Bij Vlissingen staat een meetstation. Op een rol, die in 24 uur ronddraait, wordt continu de waterstand bijgehouden. Omdat de periode van de getijbeweging niet precies samenvalt met die van dag en nacht (24 u) laat men - om papier te sparen - het papier op de rol drie volle dagen zitten.

Na zo'n periode krijg je dan - sterk verkleind:

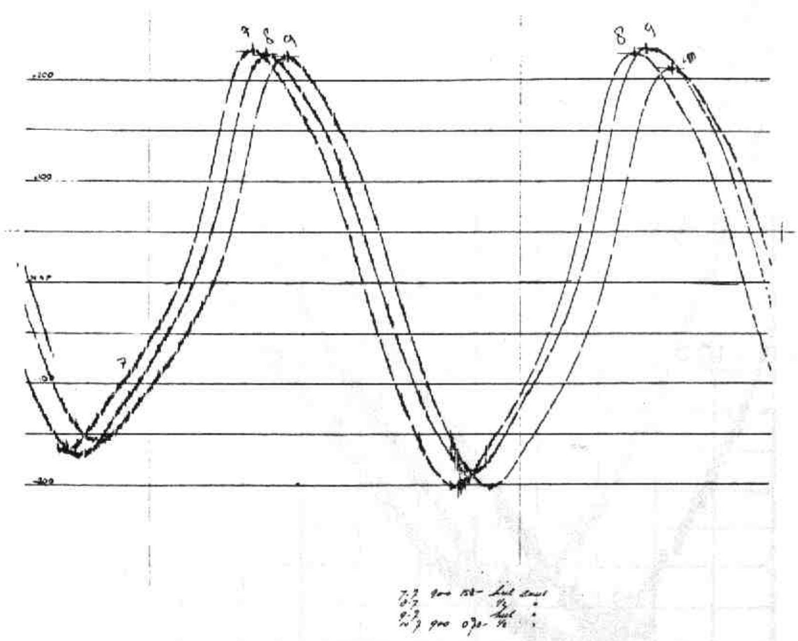


fig. 21

We zien hier het verloop vanaf 7 juli 1978 08.00 uur tot en met 10 juli 1978 08.00 uur.
Bij de top van de grafieken staat steeds de dag vermeld.

≫ 33. Uit de ligging van de 'drie' grafieken blijkt dat de periode niet precies 12 uur is, maar iets meer.
Verklaar dit.

≫ 34. Teken de grafiek van het getij bij Vlissingen van 7 juli 08.00 uur tot en met 10 juli 08.00 uur.

a. Bepaal de periode van het getij.

b. Bepaal de gemiddelde hoogwaterstand.

c. Bepaal de gemiddelde laagwaterstand.

De grafiek is sterk verkleind, waardoor veel informatie verloren gaat.
Op ware grootte ziet een stukje grafiek er als volgt uit:

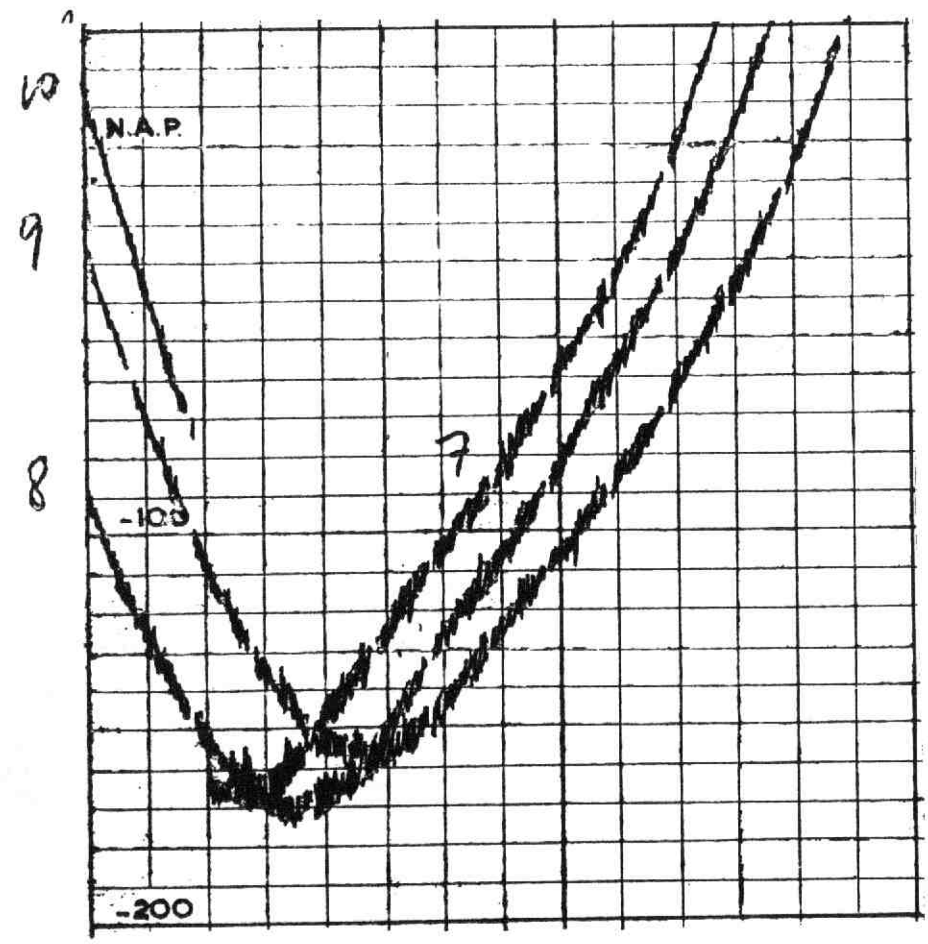
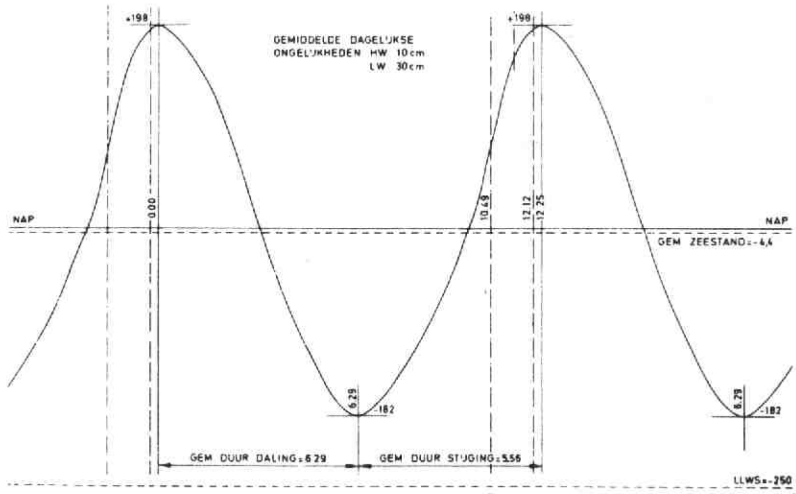


fig. 22

Net als bij het E.C.G. in hoofdstuk 1 kun je hier ook de grafieken (in dit geval over een heel jaar) 'middelen'. De gemiddelde getijkromme voor het hele jaar ziet er voor Vlissingen als volgt uit:



Gemiddelde getijkromme te Vlissingen

fig. 23

≫ 35. In hoeverre wijkt deze gemiddelde grafiek opvallend af van de grafiek van 7 - 10 juli 1978?

De volgende stap die gemaakt kan worden is die naar het wiskundig model. En gezien de oppervlakkige gelijkenis met een sinusoïde ligt het voor de hand het in die richting te zoeken.

De volgende twee bladzijden tonen:

- hoe je een grafiek kunt tekenen als je het functievoorschrift weet;
- hoe je een functievoorschrift kunt vinden als je de grafiek kent.

VAN VOORSCHRIFT NAAR GRAFIEK

Voorbeeld:

$f(x) = 3\sin 2(x-1) + 1{,}5$

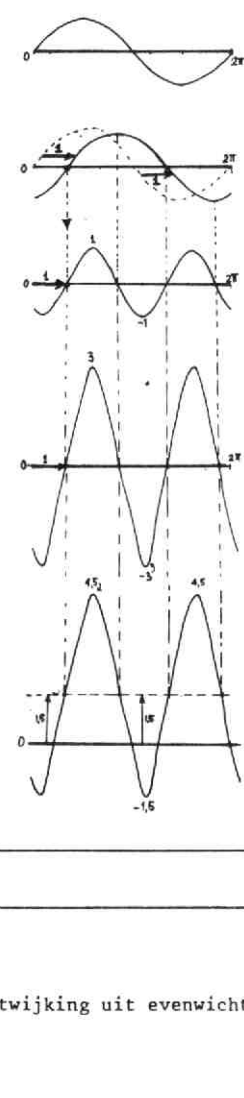
Eerste stap: $f_1(x) = \sin x$

Tweede stap: $f_2(x) = \sin(x-1)$
(verschuiving naar rechts)

Derde stap: $f_3(x) = \sin 2(x-1)$
(periode tweemaal zo klein)

Vierde stap: $f_4(x) = 3\sin 2(x-1)$
(amplitude driemaal zo groot)

Vijfde stap: $f_5(x) = 3\sin 2(x-1) + 1{,}5$
(verschuiving naar boven)



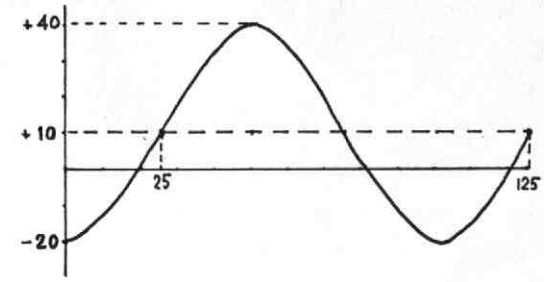
In het algemeen:	$f(x) = a\sin b(x+c) + d$
dan:	a is amplitude (maximale uitwijking uit evenwichtsstand)
	$\frac{2\pi}{b}$ is de periode
	c is de verschuiving horizontaal (c positief: naar links; c negatief: naar rechts)
	d is de verschuiving verticaal

≫ 36. Teken op deze manier: $f(x) = 1{,}5\sin 3(x+1) + 1$

≫ 37. Noem enkele mogelijkheden om de volgorde van de stappen uit bovenstaand voorbeeld te veranderen.

VAN GRAFIEK NAAR VOORSCHRIFT

Voorbeeld:



Eerste stap: amplitude is 30, dus $a = 30$.

Tweede stap: horizontale verschuiving is 25 naar *rechts*, dus $c = -25$.

Derde stap: periode is 100, dus $\frac{2\pi}{b} = 100$ $b = \frac{2\pi}{100}$

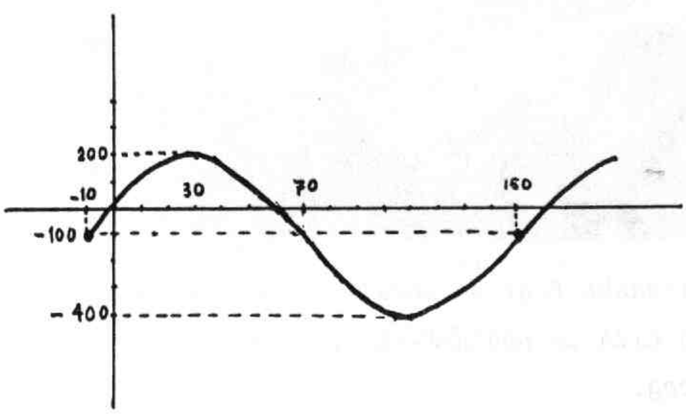
Vierde stap: verticale verschuiving is 10 naar *boven*, dus $d = +10$.

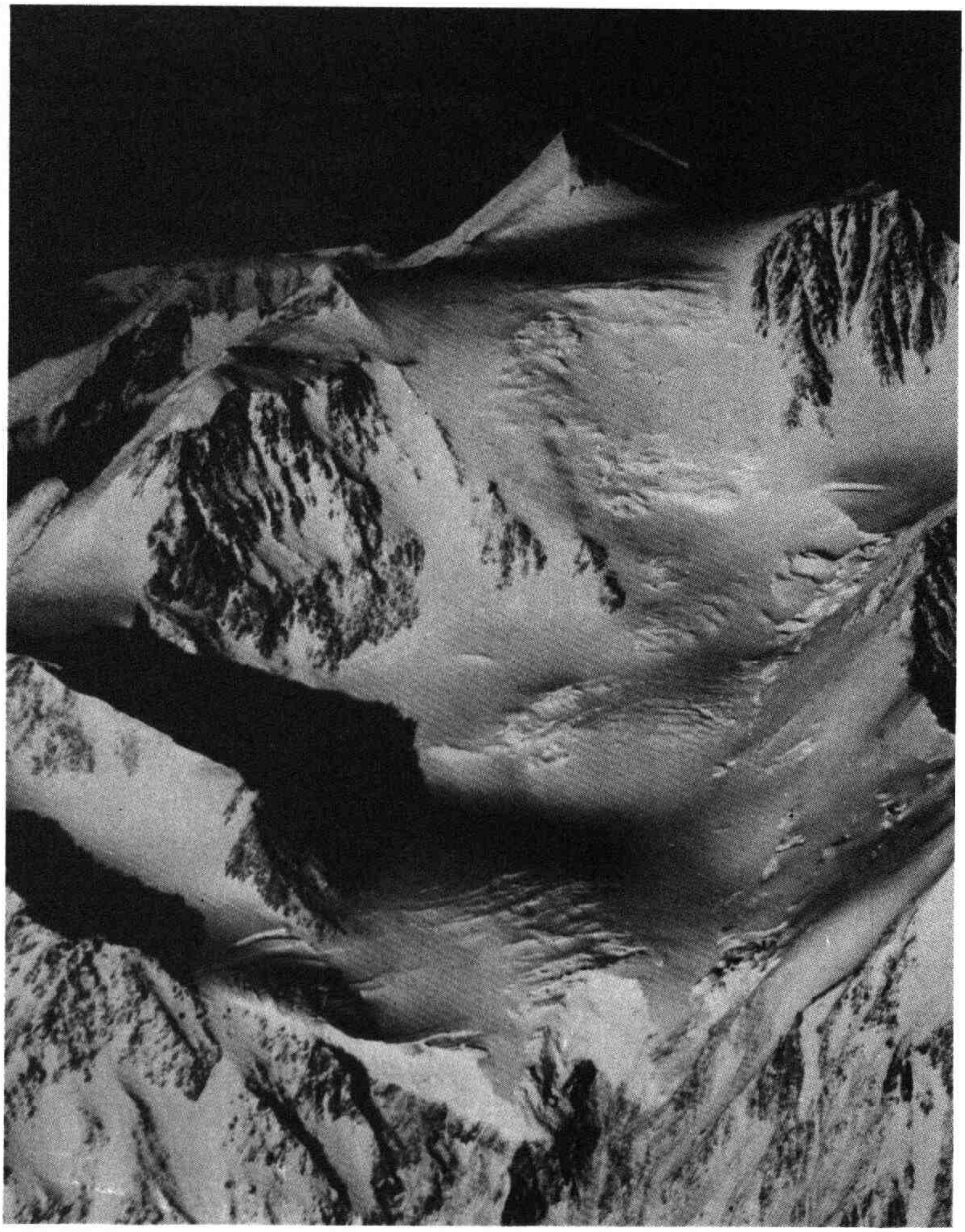
Functievoorschrift: $f(x) = 30 \sin \frac{2\pi}{100}(x - 25) + 10$

Controle van met name de *horizontale* verschuiving:

Vul $x = 25$ in en kijk of het antwoord klopt met de grafiek!

≫ 38. Vind op deze manier het functievoorschrift van:

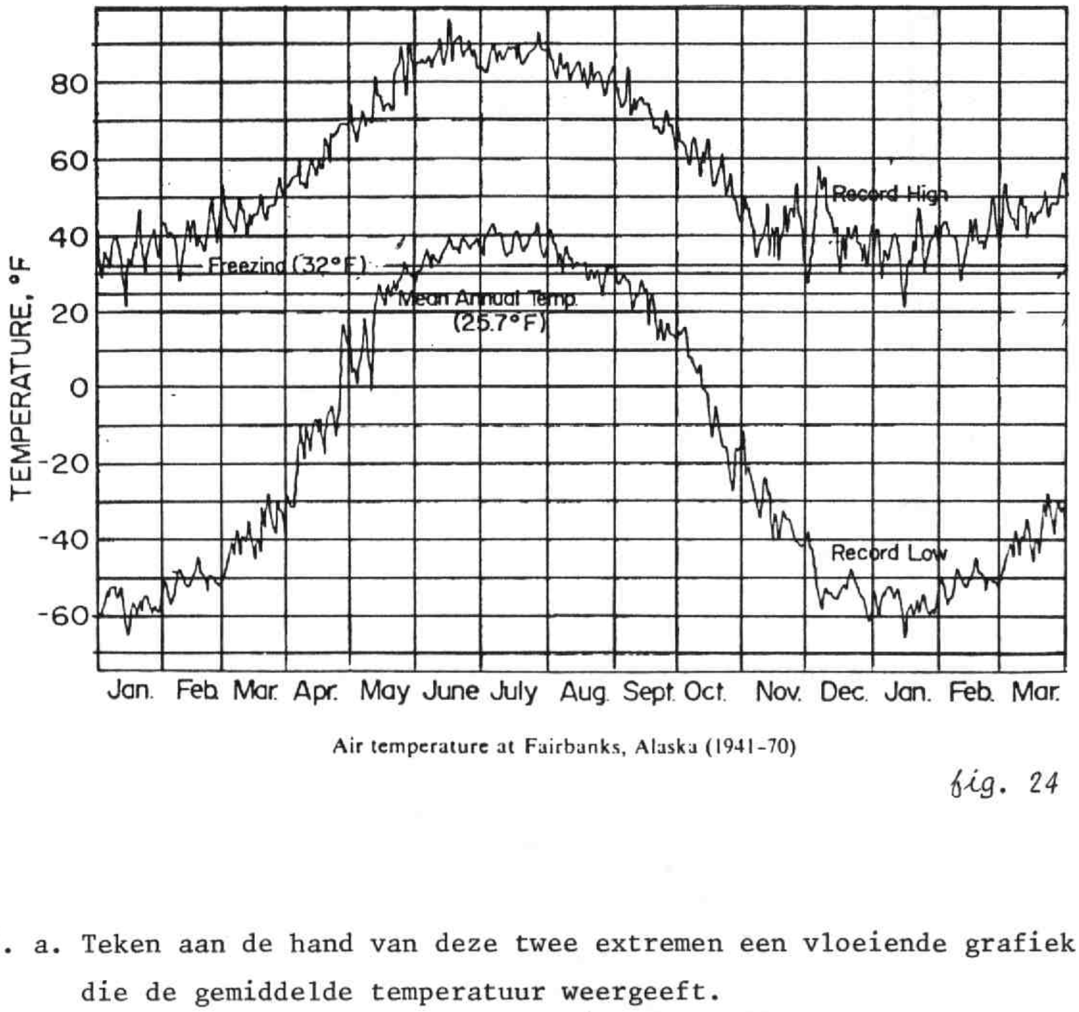




Nog geen 150 km van Fairbanks ligt de hoogste berg van Noord-Amerika, de Mt. Mc Kinley, waarvan hier de noordelijke piek die 5934 m hoog is. De zuidelijke is 6194 m hoog.

≫ 39. Vind een passend functievoorschrift voor de gemiddelde getijkromme van Vlissingen.

≫ 40. Hieronder staat de maximale jaartemperatuur gedurende enig jaar in de periode 1941 - 1970 in de stad Fairbanks in Alaska (U.S.A.) en de minimum temperatuur in diezelfde periode.



Air temperature at Fairbanks, Alaska (1941-70)

fig. 24

≫ 41. a. Teken aan de hand van deze twee extremen een vloeiende grafiek die de gemiddelde temperatuur weergeeft.

b. Geef een functievoorschrift. (Tijd in dagen, temperatuur in °F).

c. Geef een functievoorschrift. (Tijd in maanden, temperatuur in °C). (De formule voor het omrekenen van °F naar °C luidt: $t_F = 1,8t_C + 32$).

≫ 42. Dit is de gemiddelde jaartemperatuurgrafiek van een andere Amerikaanse stad: Bismarck in North Dakota.

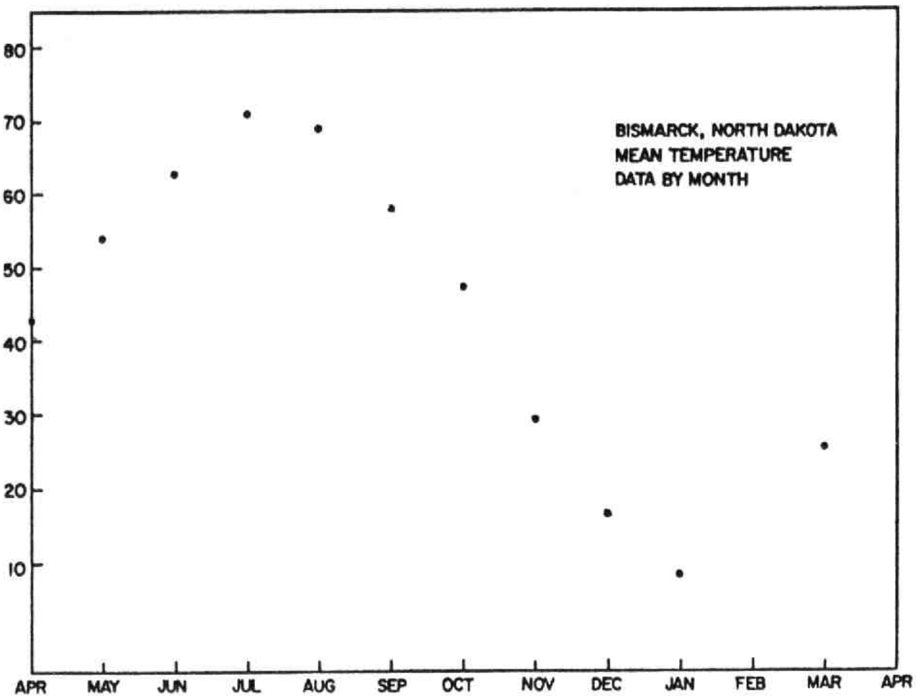


fig. 25

Vind een functievoorschrift. (Tijd in maanden, temperatuur in °F).

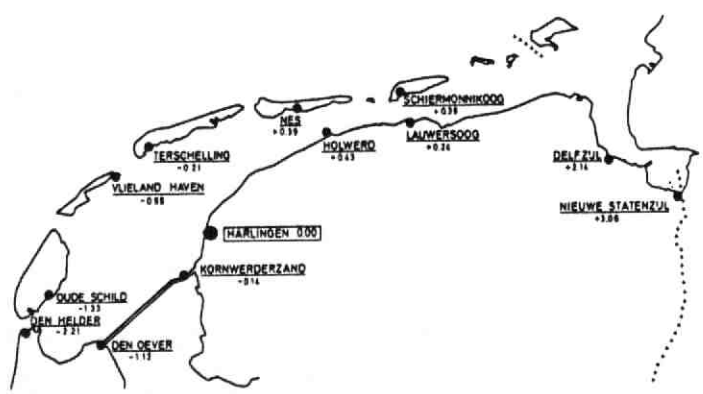


fig. 26

≫ 43. In Oude Schild (zie kaartje) is het 4,7 uur later hoogwater dan in Vlissingen. Bovendien is de amplitude slechts 75 centimeter. Geef een functievoorschrift voor het getij van Oude Schild.

5

PERIODICITEIT EN TREND

In de eerste vier hoofdstukken werden steeds periodieke functies besproken. Een definitie van een periodieke functie werd daarbij niet gegeven. Echt noodzakelijk is dat misschien ook niet. Een intuïtieve omschrijving levert meestal iets op als:

In opeenvolgende tijdsintervallen van gelijke lengte herhaalt de grafiek zich.
Het kortste tijdsinterval waarop dit gebeurt, is de periode van het verschijnsel.

Of:

De periode is het interval dat nodig is om een cyclus te voltooien.

Iets meer wiskundig geformuleerd:

Laat x *behoren tot het domein van een niet constante functie* $y = f(x)$.
Laat p *een positieve constante zijn.*
Laat $x + p$, $x + 2p$, ... *ook tot het domein van* $f(x)$ *behoren.*
Dan is de functie $y = f(x)$ *periodiek als*

$$f(x) = f(x+p) = f(x+2p) = \ldots$$

voor alle waarden van x.
Het kleinste getal p *met die eigenschap is de periode van* f.

In dit laatste hoofdstukje wordt gekeken naar grafieken die iets periodieks hebben, maar het niet zijn in de zin van de omschrijvingen van de vorige bladzijde.

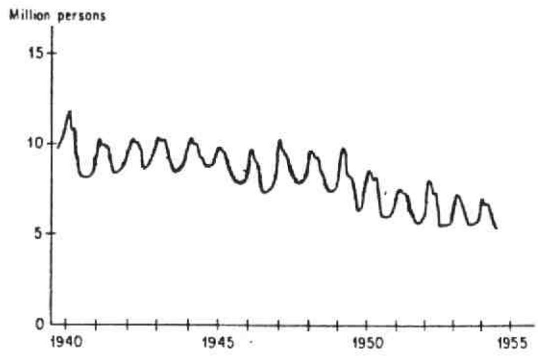


fig. 27

De werkloosheid onder de boerenbevolking van de V.S. is in bovenstaande grafiek in beeld gebracht voor de periode 1940 - 1955.

≫ 44. Welk tijdsinterval speelt klaarblijkelijk een belangrijke rol bij de werkloosheid onder de boeren? Kun je dit verklaren?

≫ 45. Waarom is de grafiek niet 'echt periodiek'?

De grafiek heeft de 'neiging' om steeds meer naar de tijd-as te schuiven. Deze *trend* is redelijk te benaderen door een rechte lijn.

≫ 46. Teken deze trendlijn en geef de vergelijking van de lijn.

Een wiskundig model vinden dat past bij deze grafiek kan door het verschijnsel te ontrafelen in tweeën:

- de trendlijn
- de sinusachtige kromme die zich om de trendlijn slingert.

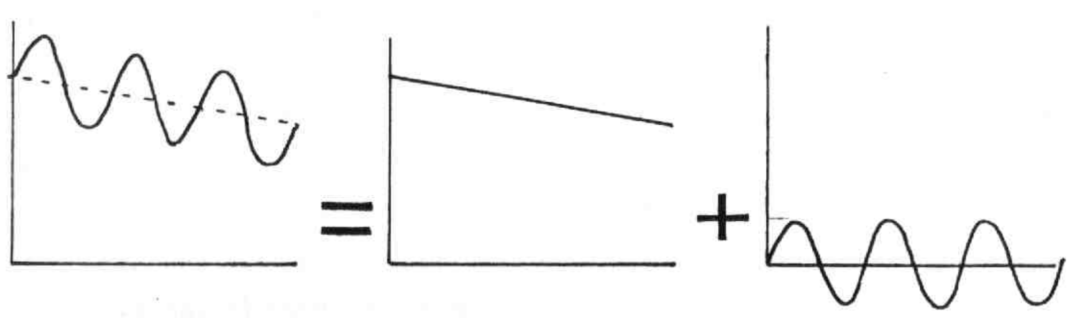
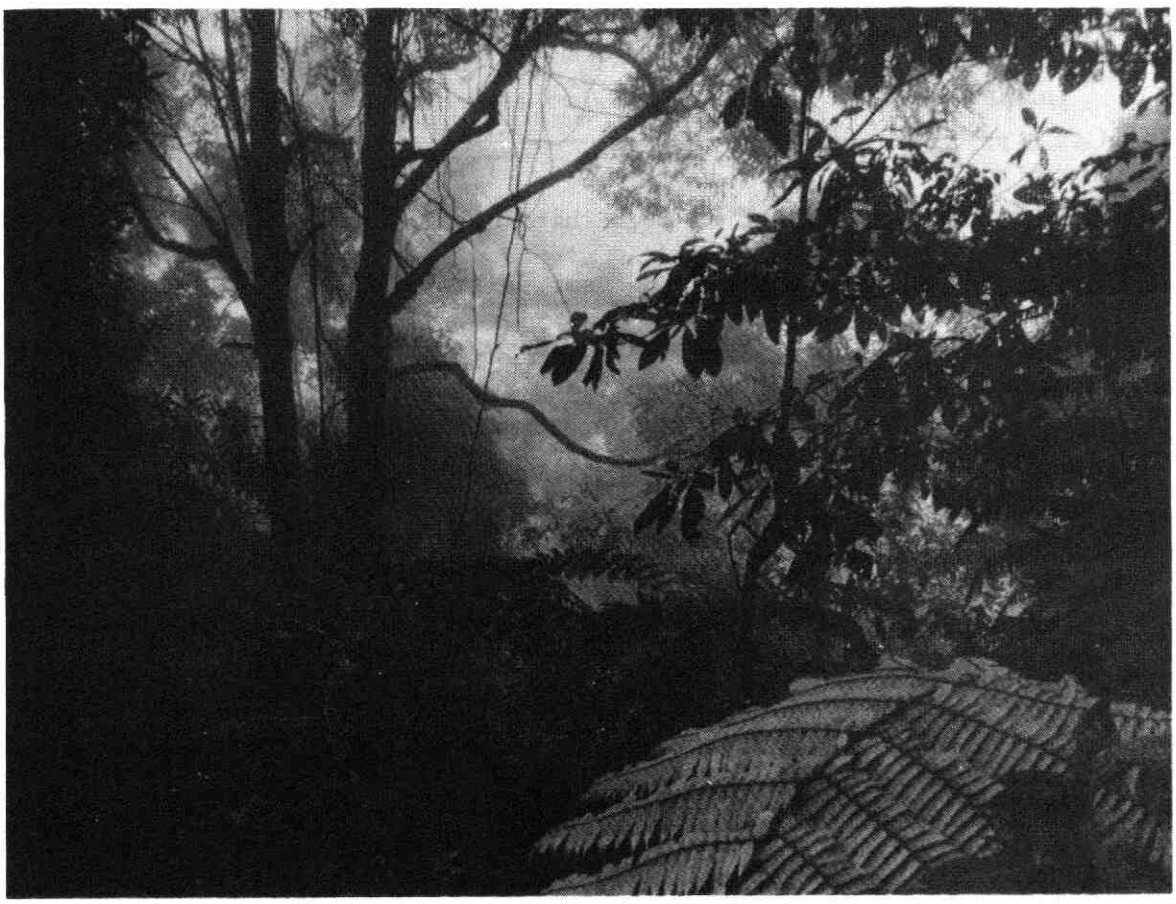


fig. 28

Zolang de trendlijn een rechte is, is het vinden van een wiskundig model dus niet veel moeilijker dan de problemen oplossen van het vorige hoofdstuk.

≫ 47. Laat zien dat het volgende model een redelijke benadering geeft van het verloop van de werkloosheid onder de Amerikaanse bevolking van 1940 - 1955:

$$N(t) = -0{,}2\,t + 10 + \sin 2\pi\,t.$$



Oerwouden vervullen een wezenlijke rol bij het in de hand houden van de carbon-dioxyde-verontreinigingen van de dampkring: tijdens het groeiseizoen wordt veel carbon-dioxyde opgenomen (photo-synthesis).

Verontreiniging van de dampkring met kooldioxide is een probleem dat steeds ernstiger wordt.
De volgende grafiek die het resultaat is van jarenlange waarnemingen op het Mauna Loa observatorium (Hawaii) maakt dat duidelijk:

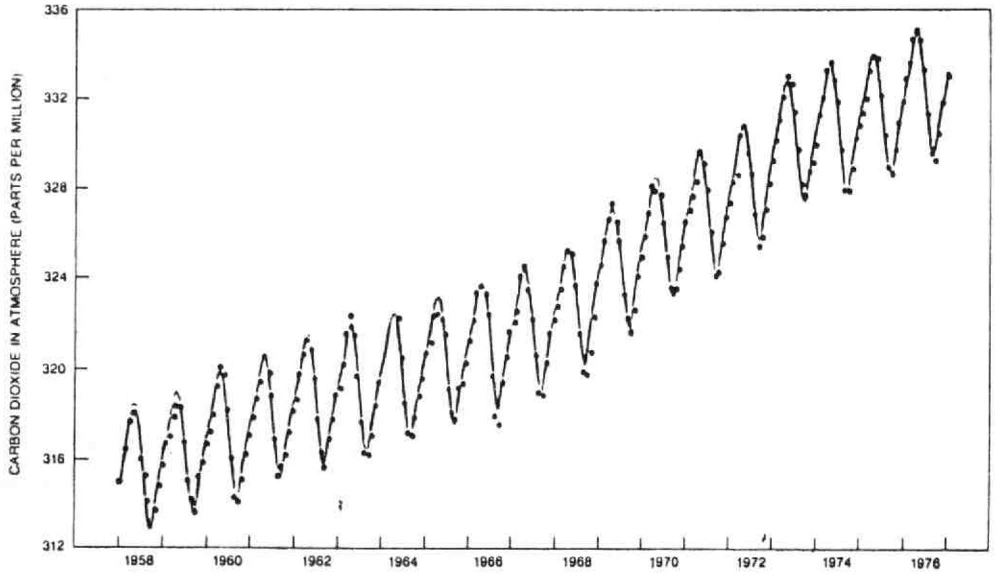


fig. 29

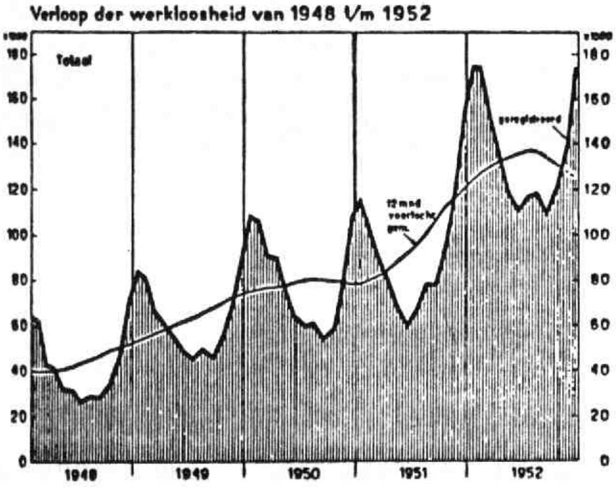
≫ 48. a. Hoe komt het dat de trend hier nogal sterk stijgend *lijkt*?

b. Bepaal een vergelijking voor de trendlijn.

c. In welk jaar zal de gemiddelde verontreiniging (per jaar) voor het eerst boven 340 (deeltjes per miljoen) komen als de trend doorzet?

d. Probeer een wiskundig model te vinden dat de kooldioxideverontreiniging redelijk goed beschrijft.

e. Heb je een vermoeden waarom deze verontreiniging een *periodiek* karakter heeft?



Bron: Centraal Economisch Plan 1953

fig. 30

De werkloosheid zoals die zich ontwikkelde in Nederland van 1948 tot en met 1952. Je ziet weer het 'werkelijke' verloop en de trend dat in dit geval het twaalfmaands-voortschrijdend-gemiddelde heet: het gemiddelde van de werkloosheidscijfers van de zes maanden vòòr en de zes maanden nà het tijdstip waarop dit cijfer betrekking heeft.

≫ 49. Benader de trend door een rechte lijn en bereken op grond daarvan het aantal werklozen in 1983.
Klopt dit enigszins met het werkelijke aantal (±750.000)?

≫ 50. a. Kun je uit het feit dat het model redelijk aansluit bij de cijfers van 1983 conclusies trekken over tussenliggende data?

b. Teken de grafiek van:

$$N(t) = 40 + 20x + 20\cos 2\pi x$$

voor $x \in [0,5]$.

c. Hoe moet de verdeling der assen worden om deze functie als model te gebruiken voor de werkloosheid in Nederland van 1948 tot en met 1952?

De milieuverontreiniging heeft op sommige plaatsen een negatieve invloed op de stand van (prooi en roof-)dieren.
De volgende grafiek geeft aan wat voor effect dat op een prooi - roofdier - cyclus kan hebben.

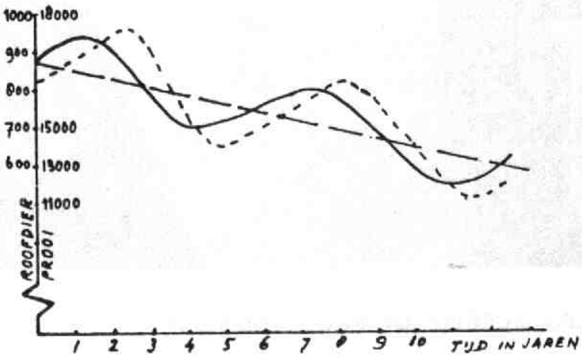
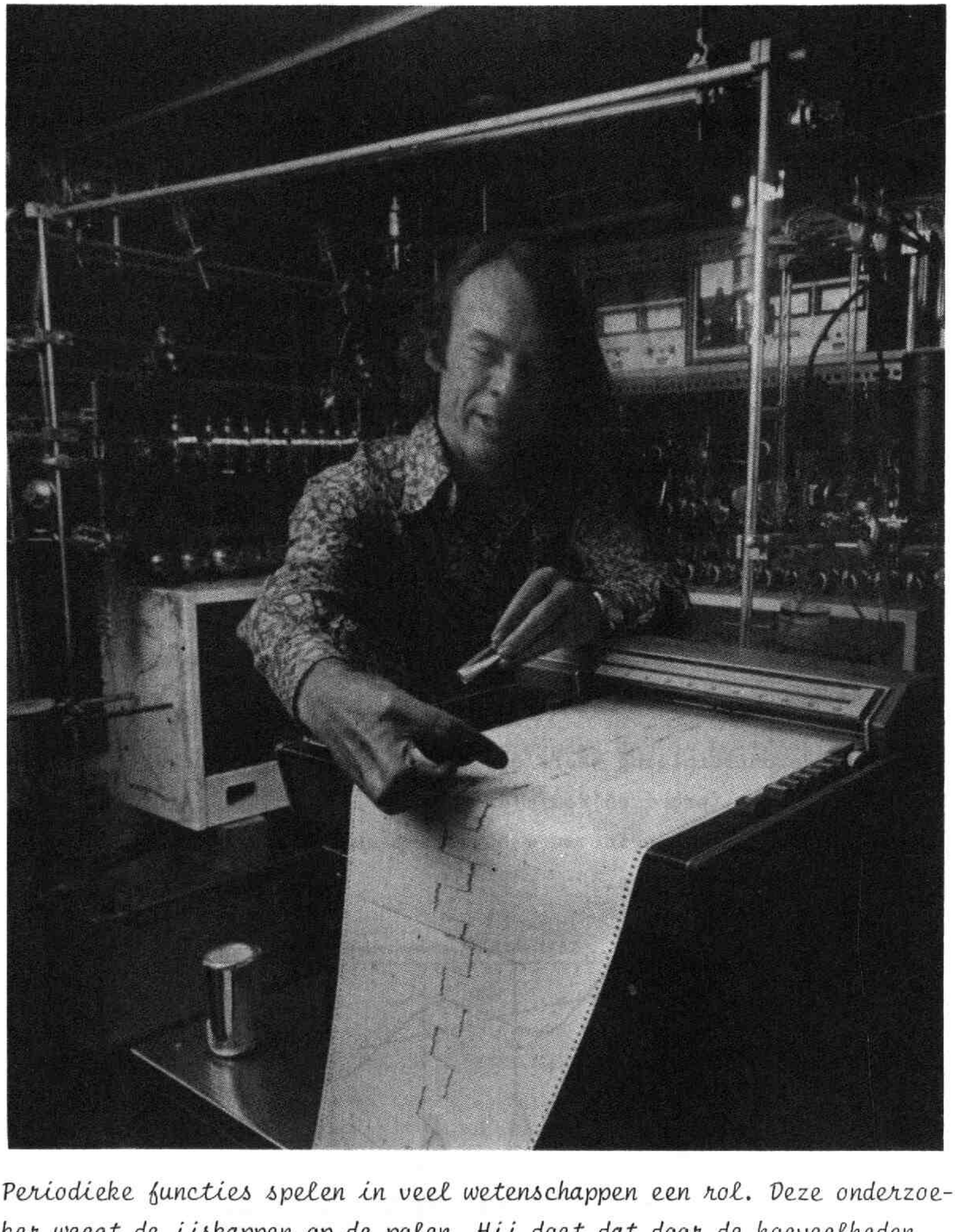


fig. 31

≫ 51. a. Teken bovenstaande grafiek op de manier zoals uiteengezet op blz. 12/13.

b. Hoe vind je de 'trend' terug in een dergelijke grafiek?



Periodieke functies spelen in veel wetenschappen een rol. Deze onderzoeker weegt de ijskappen op de polen. Hij doet dat door de hoeveelheden zware zuurstof in kleine zeefossielen te meten. Daaruit is vast te stellen hoeveel water gedurende verschillende perioden in het verleden bevroren was. De hoeveelheid ijs op de poolkappen verandert ook periodiek met de tijd.