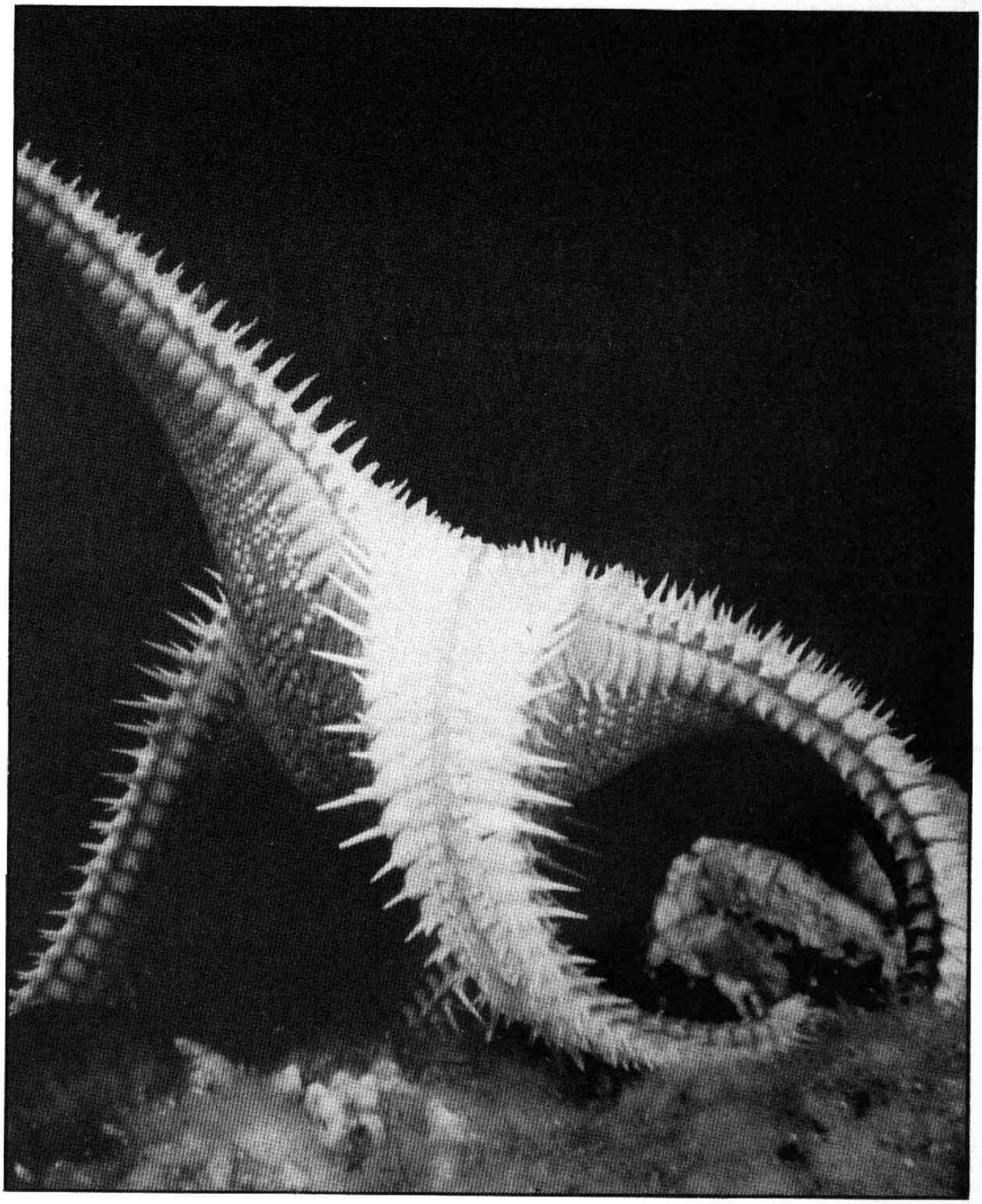
Groei



GROEI

GROEI

Tiberdreef 4 - 3561 GG Utrecht

G R O E I

Een produkt ten behoeve van de experimenten in het kader van de Herverkaveling Eindexamenprogramma's Wiskunde I en II V.W.O.

Samenstelling: Jan de Lange Jzn
Martin Kindt

Vormgeving: Ellen Hanepen

Utrecht, januari 1984.

INHOUDSOPGAVE

1

LINEAIRE GROEI: OPTELLEN

Twee vrienden zijn ieder in het bezit van een veulen. Bij de koop wogen beide dieren even veel. Een maand na de koop spreken de vrienden elkaar weer. Uiteraard vormen de edele dieren onderwerp van gesprek.

Rudolf: "Mijn veulen is 10 kg gegroeid".
Vanessa: "De mijne is 20% zwaarder geworden".
Rudolf: "Ze zijn dus nog even zwaar".

≫ 1. Hoe zwaar waren de dieren oorspronkelijk?

De daarop volgende drie maanden zien ze elkaar niet. Als ze elkaar eindelijk weer zien, in gezelschap van een derde, Willem, vindt het volgende gesprek plaats:

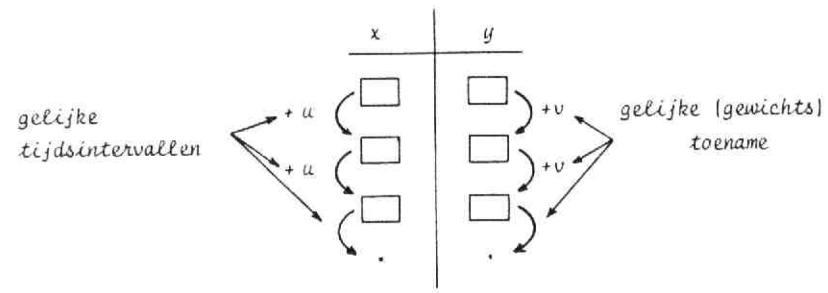
Vanessa: "Mijn veulentje is iedere maand keurig zo'n 20% gegroeid".
Rudolf: "De mijne is trouwens ook mooi regelmatig gegroeid, iedere maand 10 kg".
Willem, die ook het buskruit niet heeft uitgevonden:
"Dus ze zijn nog steeds even zwaar".

≫ 2. Teken in een grafiek het gewichtsverloop van de veulens vanaf het moment van aankoop.

≫ 3. Hoe leg je Willem uit dat de dieren echt niet even zwaar zijn na vier maanden?

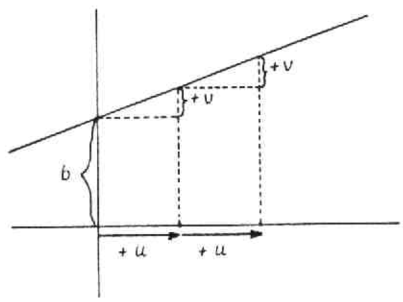
De groei van het veulen van Rudolf noemen we *lineair*.
Hierbij ontstaat de volgende waarde uit de vorige door *optelling* met een getal. Dat getal is constant als de tijdsintervallen even groot zijn. De grafiek is een rechte lijn.

Of, schematisch:



Als de tijdsintervallen (u) even groot zijn ontstaat de volgende waarde uit de vorige door OPTELLING met een getal (v).

De grafiek:



≫ 4. Vind een functievoorschrift dat de groei van het veulen van Rudolf beschrijft (tijd in maanden; gewicht in kilo's).

≫ 5. De functie y beschrijft een lineair groeiproces. Als x toeneemt met u dan neemt y toe met v.

a. Laat zien: als x toeneemt met $3u$ neemt y toe met $3v$.

b. Ook: als x toeneemt met $n \cdot u$ neemt y toe met $n \cdot v$. ($n \in \mathbb{N}$).

c. Hoe groot is de helling van de grafiek, uitgedrukt in u en v?

≫ 6. Verklaar: *Bij lineaire groei is de groeisnelheid constant.*

≫ 7. Verklaar: Bij lineaire groei is het functievoorschrift van de vorm:

$$y = b + ax$$

met:

b: beginwaarde (op $x = 0$);

a: helling van de grafiek (groeisnelheid = groei per eenheid).

≫ 8.

t	f(t)
0	35
6	95

t: tijd in uren

f: aantal

Bovenstaande tabel betreft een lineair groeiproces.

a. Bereken f(3) en f(10).

b. Bereken de groeisnelheid.

≫ 9. De grootte (lengte) van een blad wordt twee weken lang opgemeten:

tijd*	lengte
2 april	3,1 mm
5 april	6,4 mm
10 april	12,0 mm
14 april	16,1 mm
15 april	17,0 mm

a. Maak een grafiek (horizontaal tijd in dagen) en laat zien dat dit groeiproces redelijk te benaderen is door een lineaire functie.

b. Bepaal het functievoorschrift.

*) steeds om 12 uur v.m. gemeten.

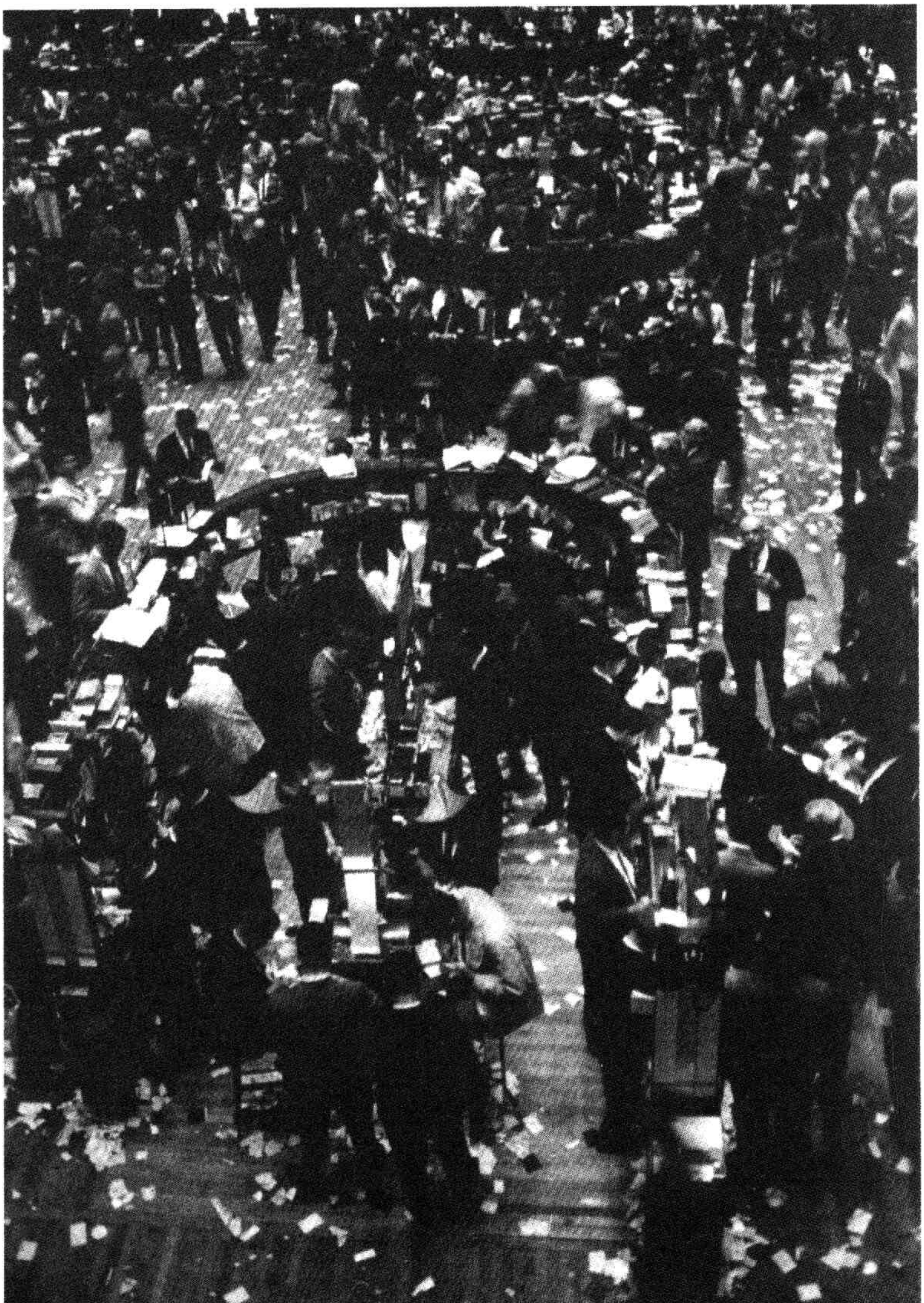
≫ 10. Aandelen kopen op de beurs van New York (Wall-Street) gebeurt via bemiddeling van een dealer of broker. Aangezien voor niets de zon opgaat moet er voor die bemiddeling wel wat betaald worden. En wel volgens de volgende tabel:

Kosten(commissie) voor het verhandelen van 100 aandelen op de New York Stock Exchange:

Bedrag (in US $)	Commissie
$B < 400$	$ 3.= + 2% over het bedrag
$400 \leqq B < 2400$	$ 7.= + 1% over het bedrag
$2400 \leqq B < 5000$	$ 19.= + 0,5% over het bedrag
$B \geqq 5000$	$ 39.= + 0,1% over het bedrag

Minimum commissie: $ 6.=

Maximum commissie: $ 75.=



a. Je koopt 100 aandelen à \$ 5.=.
   Bereken de commissie.

b. De aandelen stijgen naar \$ 5.10.
   Bereken de commissie in dit geval.

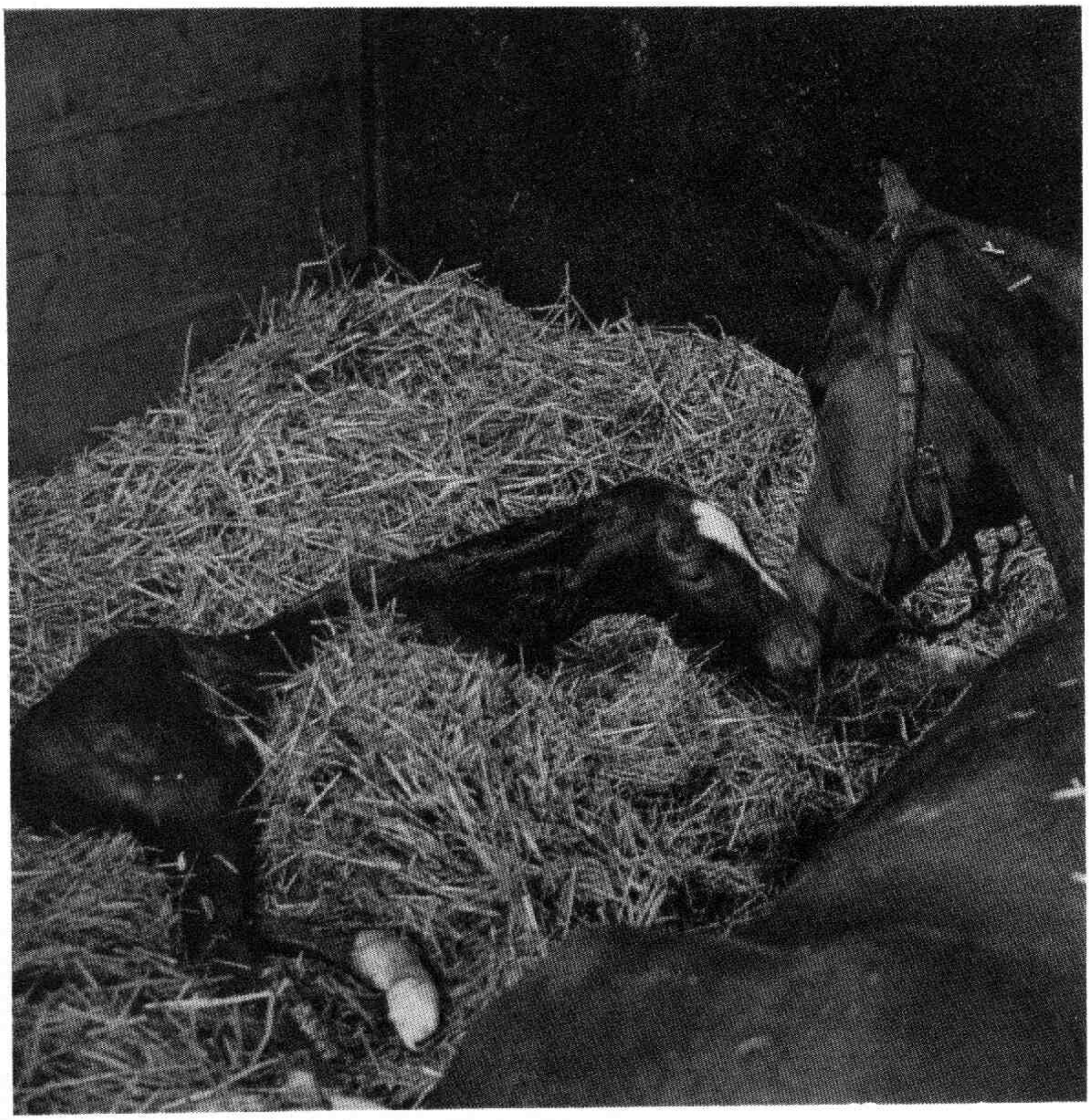
c. Ook als de aandelen \$ 5.20 zijn.

d. Tot welk bedrag per aandeel blijft de commissie op deze lineaire wijze toenemen?
   Vind het functievoorschrift voor dit gedeelte van de "commissiefunctie". (Horizontaal: prijs per aandeel, vertikaal: commissie in dollars).

e. Bepaal voor ieder der lineaire gedeelten van de "commissiegrafiek" het functievoorschrift.

f. Hoe zie je aan de grafiek dat de groei van de commissie steeds minder wordt naarmate het bedrag van de transactie toeneemt?

Foto: de beurs van New York: Wall-Street.



2 EXPONENTIËLE GROEI: VERMENIGVULDIGEN

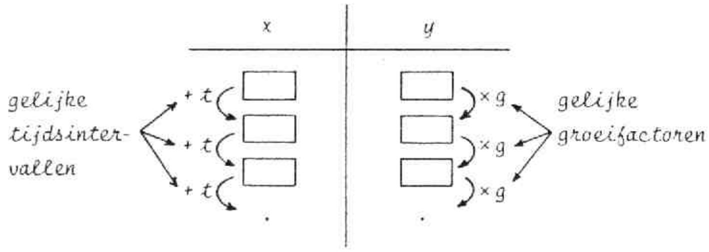
In dit hoofdstuk kijken we eerst naar Vanessa, althans naar haar veulen. De groei van dat veulen was ook heel "regelmatig" maar zeker niet hetzelfde als dat van Rudolf.

De groei van Vanessa's veulen in tabelvorm:

	tijd	gewicht	
+ 1	0	50	x 1,2
+ 1	1	60	x 1,2
	2	72	
	.	.	
	.	.	

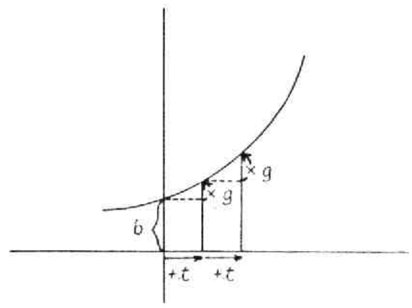
Iedere volgende gewichtswaarde ontstaat uit de vorige door *vermenigvuldiging* met een getal. Dat getal is constant als de tijdsintervallen even groot zijn. Dat getal heet de *groeifactor*.

Algemeen:



Groei volgens dit model heet EXPONENTIËLE GROEI.

De grafiek ziet er als volgt uit:



De volgende tabel geeft (nogmaals) de groei van Vanessa's veulen weer:

x	y
0	50
1	50•1,2 = 60
2	...

x: tijd in maanden
y: gewicht in kilo's

≫ 11. Maak deze tabel af en vind een functievoorschrift voor de groei van dit veulen.

≫ 12. Bedenk ook het functievoorschrift voor een veulen dat bij aankoop (t=0) 60 kg woog en 15% per maand groeit.

≫ 13. Bedenk een functievoorschrift voor de groei van een zeester die bij de eerste meting (31 juli) een diameter van 2,0 cm heeft, en vervolgens tot en met 9 oktober iedere 10 dagen zo'n 25% groter wordt. (De diameter dus). Maak een grafiek van het groeiverloop.

Hiernaast zie je de zeester op ware grootte op 12 september. Controleer in je grafiek of de afmetingen van de ster op 12 september inderdaad kloppen met wat het volgens het functievoorschrift zou moeten zijn.

≫ 14. Rente per jaar is 10%. Op t=0 heeft iemand ƒ 5.000,= op de bank gezet.

a. Laat zien dat de groei van het uitstaande bedrag exponentieel is (bij samengestelde interest).

b. Hoe groot is het bedrag na vijf jaar?

c. Toon aan: als de percentuele toename p% is, dan is de groeifactor $1 + \frac{p}{100}$.

Algemeen:

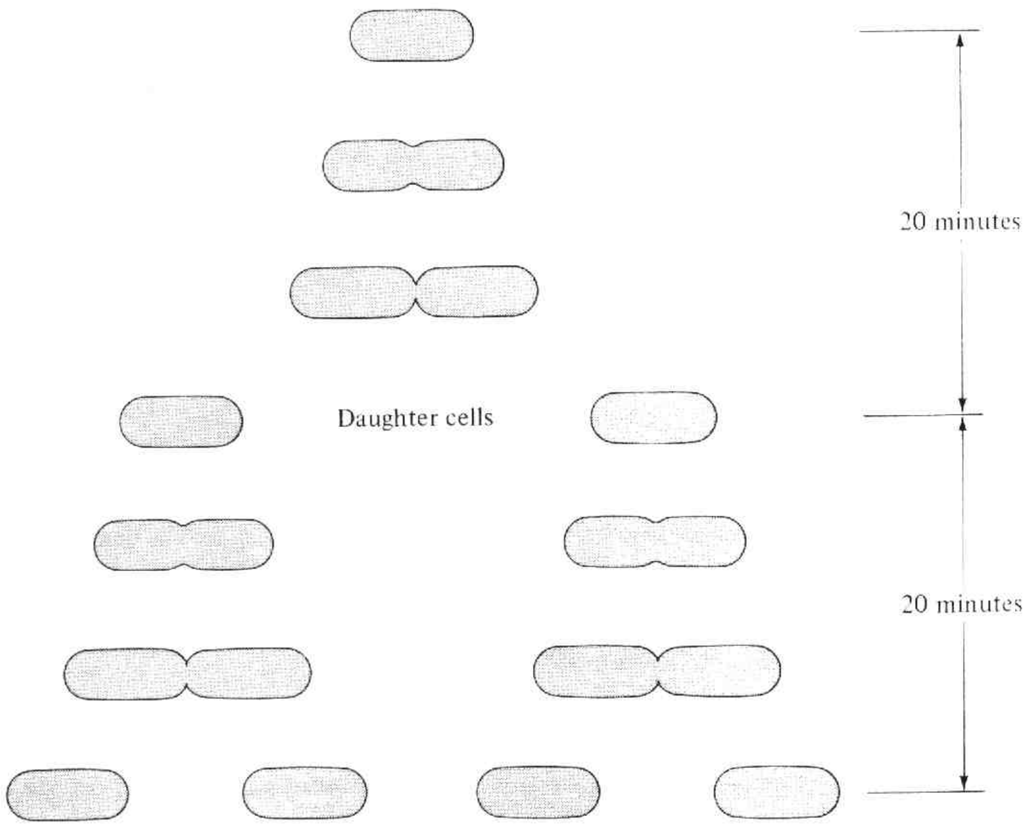
Het functievoorschrift voor exponentiële groei is van de vorm:

$$y = b \cdot g^x$$

met b: beginwaarde op x = 0;

g: de groeifactor over eenheidstijdsinterval.

Als de percentuele toename p% per tijdseenheid is, dan is de groeifactor $1 + \frac{p}{100}$.



≫ 14. Onder gunstige omstandigheden deelt een cel van de bacterie Escherichia Coli zich iedere 20 minuten in tweeën.

a. Maak de volgende tabel af:

t	0	1	2	3	4	5	6	7
N(t)	1							

t : in eenheden van 20 minuten;
N(t): aantal cellen op tijdstip t.

b. Teken een grafiek met horizontaal de tijd en vertikaal het *aantal* cellen.

c. Kun je (een) functievoorschrift(en) bedenken?

≫ 15. Bij bovenstaande bacterie ontstaan er iedere 20 minuten "plotseling" twee cellen uit één, maar de groei naar gewicht gaat niet zo sprongsgewijs zoals uit het plaatje blijkt: een cel groeit geleidelijk (continu) tot hij tweemaal zo zwaar is als oorspronkelijk en deelt dan.

a. Teken de grafiek met horizontaal de tijd en vertikaal het gewicht (massa) van de cellen die uit één cel zijn ontstaan. (Gewichtseenheid: gewicht(massa) eerste cel bij ontstaan).

b. Geef een passend functievoorschrift dat deze continue groei beschrijft.

c. Bereken de *gemiddelde groeisnelheid* op de intervallen [2,3], [3,4] en [4,5].

d. Meet de *groeisnelheid* op in de punten waarvoor t=0, t=1, t=2, t=3 en t=4.
Schets de grafiek van de hellingfunctie (groeisnelheidsfunctie).

e. Wat valt op als je de grafiek van de hellingfunctie vergelijkt met de grafiek van de groeifunctie?

≫ 16. Voor een andere bacteriesoort is de groeifactor (over 20 minuten) 3, en op tijdstip t=0 zijn er 50 bacterieën.

a. Hoe luidt het functievoorschrift voor de groei nu?

b. Hoe luidt het functievoorschrift als je als tijdseenheid een uur neemt i.p.v. 20 minuten?

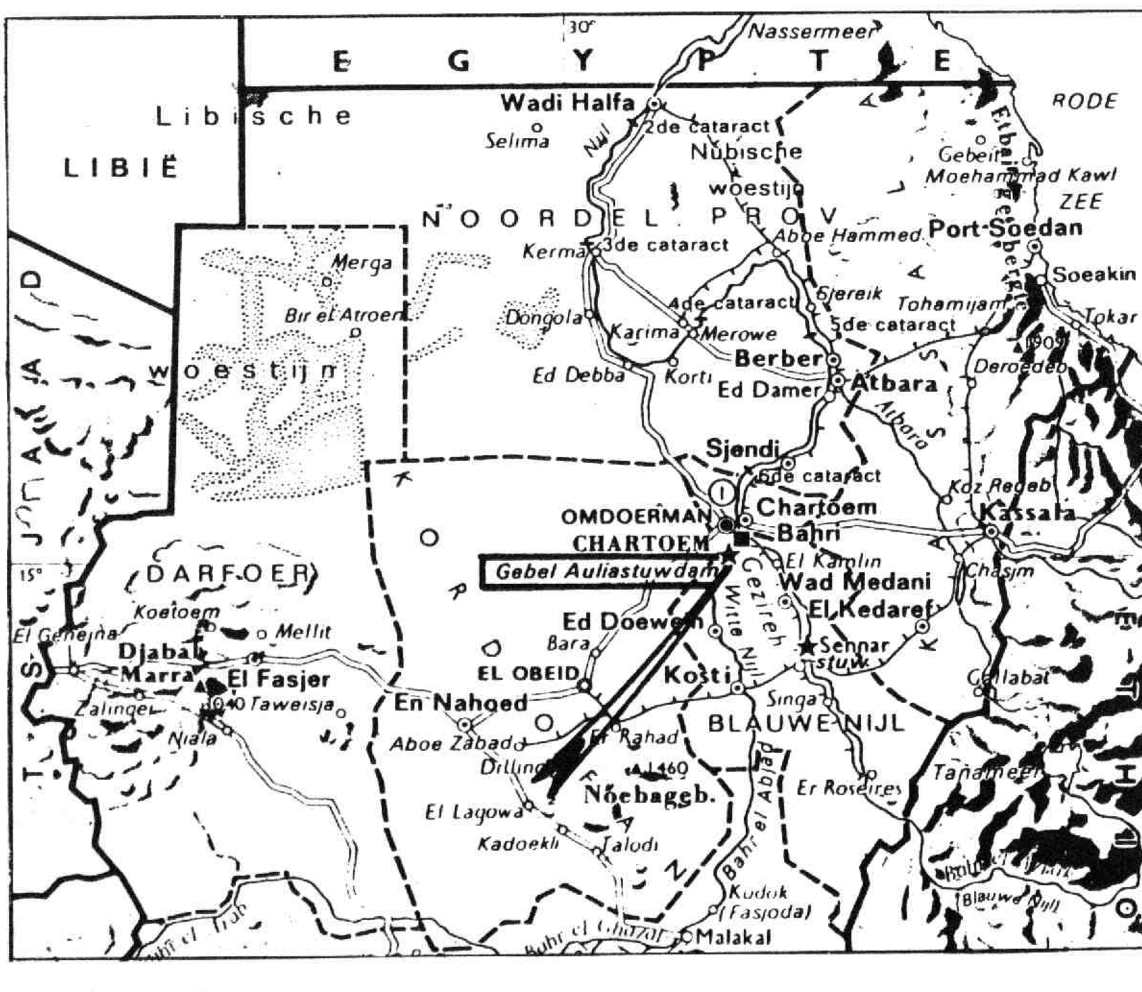
≫ 17. Laat zien dat als de groeifactor over 20 minuten 2 is, dat die over 10 minuten $2^{\frac{1}{2}}$ is. En hoe groot is de groeifactor over 5 minuten? En over een uur?

≫ 18. In de Witte Nijl, in Soedan, is een grote dam gebouwd ten zuiden van Chartoem, de Gebel Aulia stuwdam (zie kaart). In het stuwmeer groeit een plant: de waterhyacint.
In 1958 bedekte deze waterplant 12 km² van het water. Jaarlijks nam de oppervlakte met ongeveer 50% toe.

a. Geef het functievoorschrift dat de oppervlakte in km² als functie van de tijd (in jaren) beschrijft.

b. Teken de grafiek en bepaal daarmee in welk jaar het hele stuwmeer (200 km²) met de hyacint was bedekt.

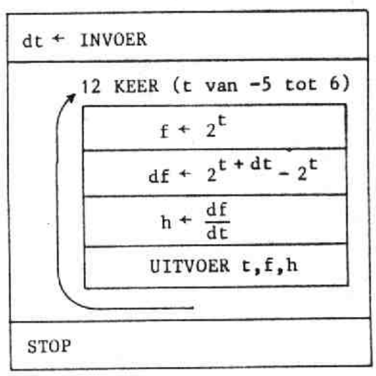
Waterhyacint



3

GROEISNELHEID: DE HELLING

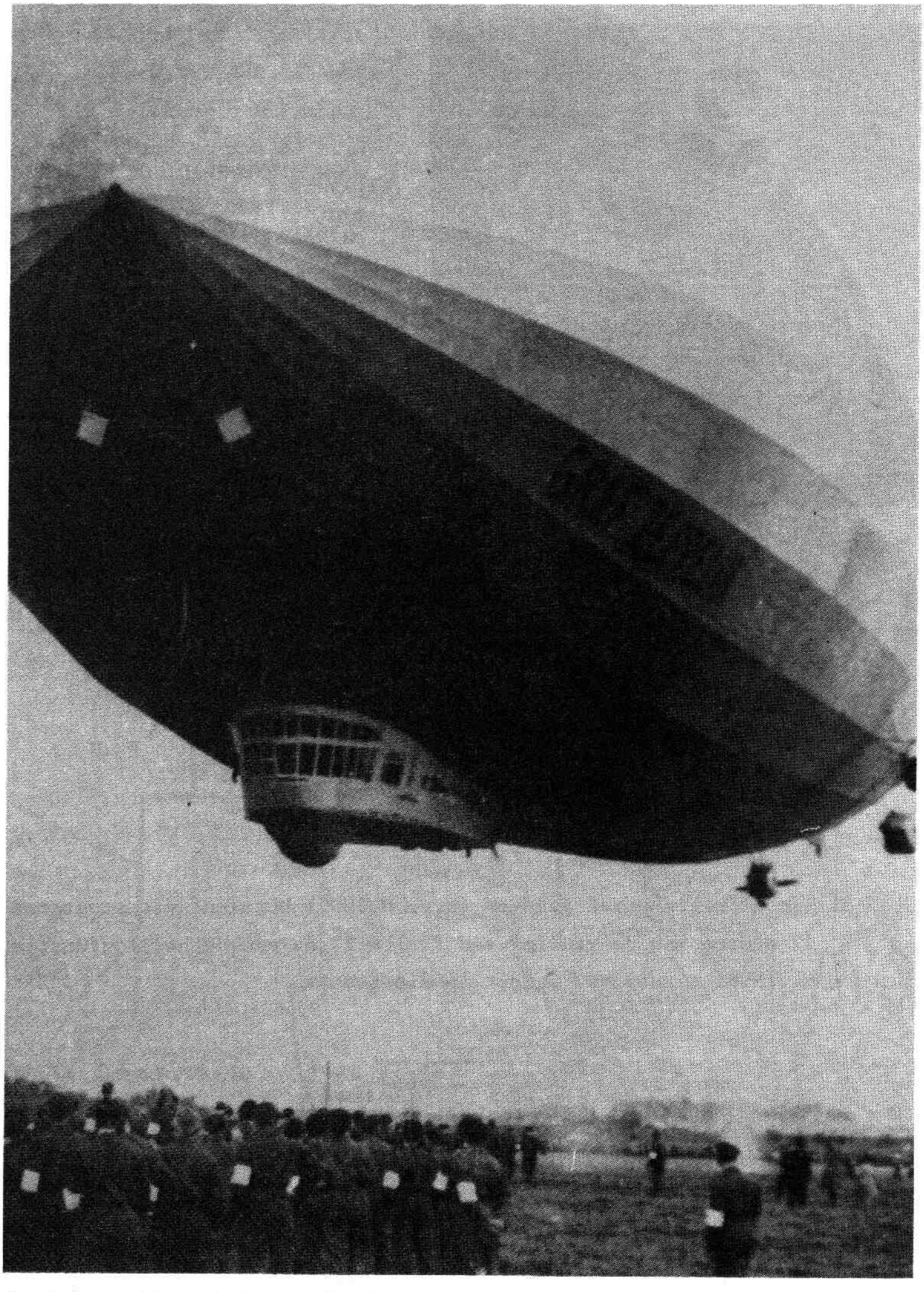
≫ 20. In deze opgave wordt de kroosgroei bestudeerd die beschreven wordt door de functie $f(t) = 2^t$.
Er wordt geprobeerd meer inzicht te krijgen in de hellingfunctie h. Met de computer is daar enige greep op te krijgen. Daartoe wordt onderstaand structuurdiagram gebruikt:



a. Als dt klein wordt gekozen (b.v. 0,0001) berekent dit programma 12 punten van de grafiek van $f(t) = 2^t$ én van de hellingfunctie h. (Niet exact). De output in dit geval:

dt= 0.0001

-5	0.03125	0.021793
-4	0.0625	0.043437
-3	0.125	0.086874
-2	0.25	0.173748
-1	0.5	0.346303
0	1	0.692606
1	2	1.385212
2	4	2.765656
3	8	5.531311
4	16	11.062620
5	32	22.125240
6	64	44.250490



Graf Zeppelin - 1928 - Inhoud: 105.000 m³

Vertaal het diagram in een programma. Bereken nog enige punten van de hellingfunctie, indien mogelijk nauwkeuriger.

b. Toon aan de hand van de output aan:

> *De groeisnelheid (helling) is evenredig met de aanwezige hoeveelheid;*
>
> of:
>
> *Als* $f(t) = 2^t$ *dan is* $h(t) = c \cdot 2^t$.

Geef een nauwkeurige schatting van c.

Waar in de output-tabel kun je de waarde van c direct aflezen?

≫ 21. Luchtschepen verliezen draaggas door de enigszins poreuze huid. In de beginjaren werd op deze manier de helft van het draaggas verloren in tien dagen. Om dat verlies te compenseren nam men grote hoeveelheden zand en/of water mee. Als de draagkracht minder werd, werd het zand of water over boord gezet.

We gaan uit van een ballon van 1000 m³.

a. Hoe groot is de "groei"factor van de hoeveelheid gas over tien dagen?

b. Hoe luidt de "groei"functie?

c. Teken de grafiek die het gasverlies aangeeft. (Horizontaal tijd in eenheden van 10 dagen, vertikaal gasvolume in m³).

d. Na 20% gasverlies kan de luchtballon niet meer vliegen. Hoeveel vliegdagen zijn er na vulling? (Oplossen met grafiek).

≫ 22. a. Maak een structuurdiagram zoals in opgave ≫ 20 dat enkele punten van de hellingfunctie berekent (niet exact) en wel die punten waarvoor: t = −2, t = −1, ..., t = 3.

b. Hier de output van een dergelijk programma voor dt = 0,0001.

dt= 0.0001

t	f	h
-2	4.000	-2.76804
-1	2.000	-1.38521
0	1.000	-0.69380
1	0.500	-0.34690
2	0.250	-0.17345
3	0.125	-0.08672

Laat zien dat ook in dit geval van exponentiële groei (afname = negatieve groei) de groeisnelheid evenredig is met de aanwezige hoeveel gas.

c. Geef een nauwkeurige schatting van de evenredigheidsconstante c.

d. Welk verband is er tussen de evenredigheidsconstante bij de "kroosgroei" en de "gasgroei"?

Het verschil tussen LINEAIRE en EXPONENTIËLE groei ligt in het al of niet meedoen van hetgeen reeds voorhanden is bij de nieuwe toename. Bij lineaire groei maakt het niets uit of de voorgaande groei pas begonnen of bijna voltooid is; onafhankelijk hiervan komt er steeds dezelfde portie bij. Bij exponentiële groei daarentegen draagt alles wat reeds eerder gegroeid was, aktief bij tot de verdere uitbouw. In de geldmarkt heet dit samengestelde interest.

De *groeifactor* is constant bij exponentiële groei.

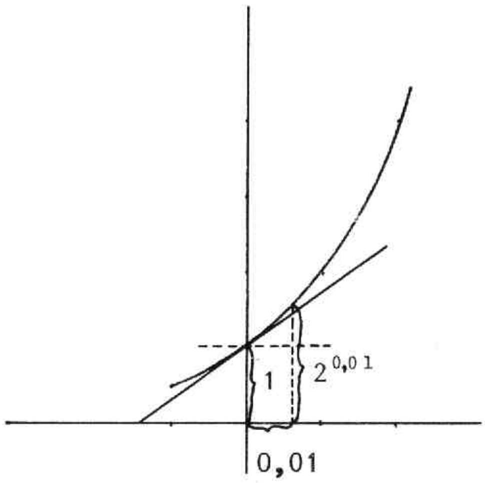
De groeisnelheid bij lineaire groei is constant. De groeisnelheid bij exponentiële groei is evenredig met de aanwezige hoeveelheid.

Of, meer in wiskunde taal:

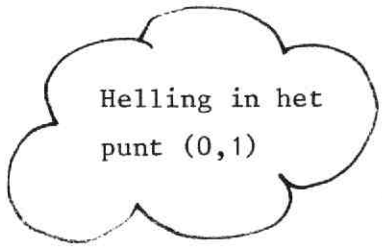
Als $f(x) = 2^x$ dan is $f'(x) = c \cdot 2^x$ (kroos) $g(x) = (\frac{1}{2})^x$ dan is $g'(x) = -c \cdot (\frac{1}{2})^x$ (luchtschip) c is ongeveer 0,69 of: $\frac{d2^x}{dx} = c \cdot 2^x$ en $\frac{d(\frac{1}{2})^x}{dx} = -c \cdot (\frac{1}{2})^x$

Verder zagen we dat c gelijk leek te zijn aan de helling in het punt (0,1). Is dat echt zo?

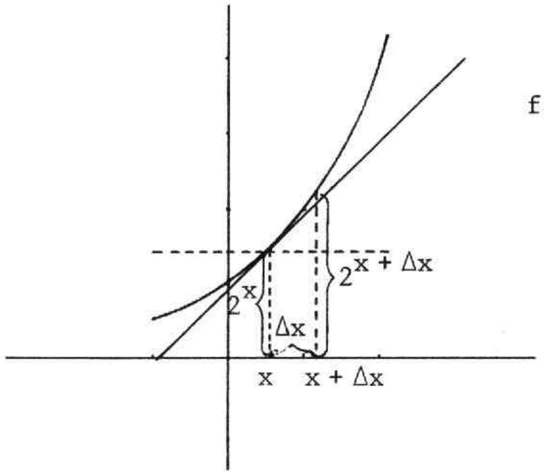
a.



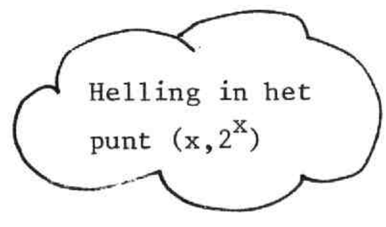
$$f'(0) \approx \frac{2^{0,01} - 2^{0}}{0,01} \approx 0,69$$



b.



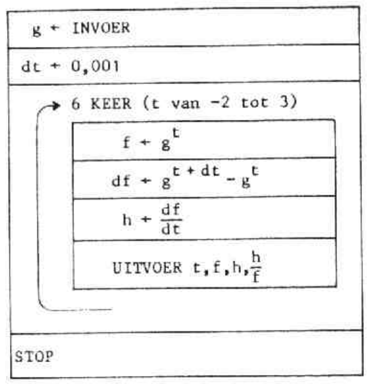
$$f'(x) \approx \frac{2^{x + \Delta x} - 2^{x}}{\Delta x} = \frac{2^{x} \cdot (2^{\Delta x} - 1)}{\Delta x}$$



Conclusie uit a en b: $f'(x) = f'(0) \cdot 2^{x}$.

Dus: *$f'(x)$ is een constante maal 2^{x} en die constante is gelijk aan de helling in het punt $(0,1)$.*

≫ 23. Het structuurschema:



en het programma daarbij maken het mogelijk de evenredigheidsconstante bij andere groeifactoren te berekenen.

a. Waarom wordt $\frac{h}{f}$ uitgerekend?

b. De output voor $g = 3$ en $g = 4$:

g= 3
dt= 0.0001

t	f	h	h/f
-2	0.111	0.12212	1.0990
-1	0.333	0.36627	1.0988
0	1.000	1.09911	1.0991
1	3.000	3.29494	1.0983
2	9.000	9.87053	1.0967
3	27.000	29.65927	1.0985

g= 4
dt= 0.0001

t	f	h	h/f
-2	0.063	0.08672	1.3876
-1	0.250	0.34660	1.3864
0	1.000	1.38640	1.3864
1	4.000	5.54562	1.3864
2	16.000	22.14432	1.3840
3	64.000	88.42469	1.3816

c. Geef nauwkeurige schattingen van de evenredigheidsconstanten behorend bij $g = 3$, $g = \frac{1}{3}$, $g = 4$, $g = \frac{1}{4}$.

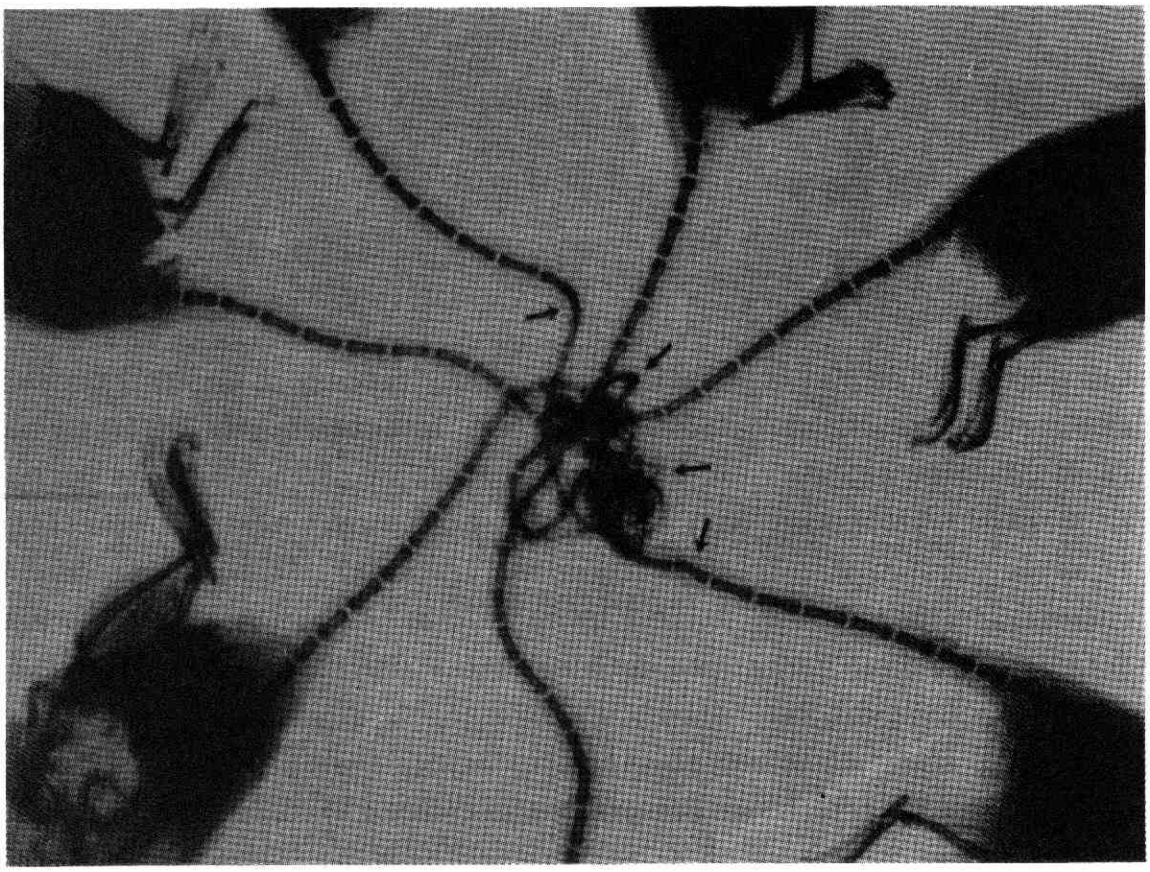
≫ 24. Bereken de afgeleiden van de volgende functies:

$y = 2^x$; $y = 3^x$; $y = 4^x$; $y = (\frac{1}{2})^x$; $y = (\frac{1}{3})^x$; $y = (\frac{1}{4})^x$.

4 GROEI VAN RATTEN

Ook over de hoeveelheid nakomelingen van één rattenpaar in één jaar worden zeer verschillende getallen verstrekt. In het volgende hoofdstuk zal ik de schaarse gegevens van onderzoek over de vruchtbaarheid van ratten in de natuur bespreken, maar het is misschien aardig hier een schatting te maken van het aantal nakomelingen van één paar, uitgaande van de meest optimale omstandigheden. Daartoe gebruik ik de volgende gegevens. Gemiddeld is het aantal jongen per worp te stellen op zes; van deze zes jongen behoren er drie tot het vrouwelijk geslacht. De draagtijd is eenentwintig dagen; het zogen duurt ook eenentwintig dagen. Een vrouwtje kan echter al bevrucht worden tijdens de periode van het zogen van haar jongen, ze kan zelfs al bevrucht worden op de dag van de bevalling. Gemakshalve stel ik de periode tussen twee bevallingen op veertig dagen. Als nu een vrouwtje op 1 januari bevalt van zes jongen is dat vrouwtje veertig dagen later opnieuw in staat om zes jongen ter wereld te brengen. De vrouwtjes van de eerste worp van zes jongen zijn zelf na honderd twintig dagen in staat om nakomelingen voort te brengen. Als ik ervan uitga dat er bij elke worp steeds drie vrouwtjes zijn en als ik dan alle nakomelingen optel van alle vrouwtjes in één jaar kom ik op 1808 ratten op 1 januari van het volgende jaar, het oorspronkelijke paar meegerekend. Dit is een fictief getal. Er is sterfte; moeders verwerpen soms hun jongen; vrouwtjes komen soms lange tijd niet in oestrus. Niettemin geeft dit getal enig idee van het leger ratten dat na een jaar ontstaan kan zijn.

Uit: "Ratten" van
Maarten 't Hart.



De lange staart van de zwarte rat wordt weleens als medeveroorzaker van de "rattenkoning" gezien.
Dat is een verschijnsel dat alleen bij zwarte ratten voorkomt en waarbij de staarten op onbekende wijze in de knoop raken.
Bovenstaande rattenkoning werd in 1963 in Rucphen (N.B.) gevonden. Vaak zijn de ratten nog in leven als ze gevonden worden.
De pijltjes wijzen op breuken, misschien ontstaan toen de ratten 'los' probeerden te komen.

Een duidelijk verhaal, maar of die 1808 klopt is niet in één oogopslag duidelijk.

≫ 25. Controleer de uitkomst 1808.

Tip: Verdeel het jaar in 9 perioden van 40 dagen (tijdseenheid: 40 dagen).

1 januari: $t = 0$.

Op 1 januari vindt de eerste bevalling plaats. Begin daarom 40 dagen eerder (dus op $t = -1$).

Aangezien er ook een vader moet zijn stellen we:

op $t = -1$ is $N(-1) = 2$

op $t = 0$ komen er 6 jongen

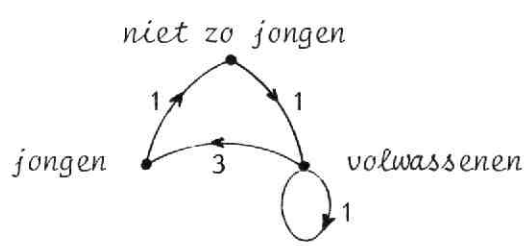
dus $N(0) = 2 + 6 = 8$.

De rest wordt aan jou overgelaten.

≫ 26. a. Laat zien: als $t \in \mathbb{Z}$ en $t \in [-1,2]$, dan is het groeiverloop lineair. Vind het functievoorschrift.

b. Ook: als $t \in \mathbb{Z}$ en $t \in [3,9]$, dan is het groeiverloop vrijwel exponentieel.
Bepaal de groeifactor (ongeveer) en vind een functievoorschrift.

≫ 27. Het groeiproces is ook te illustreren met behulp van een gerichte graaf:



a. Verklaar de graaf.

b. Bepaal de Leslie-matrix die bij deze graaf hoort.

c. Controleer - met de computer - de uitkomst van 1808.

d. Maarten 't Hart gaf al aan dat deze situatie niet erg realistisch is. Bereken het aantal ratten dat in één jaar ontstaat

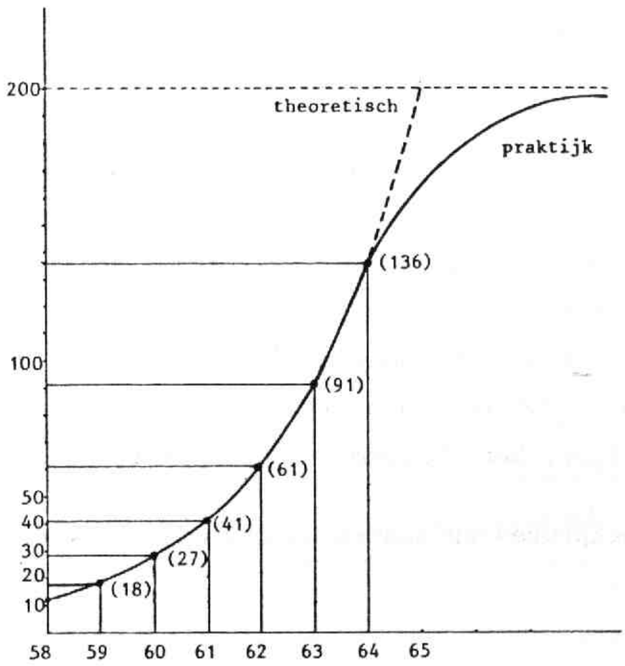
uit één paar onder de volgende voorwaarden:
Van de zes geworpen ratjes sterft er gemiddeld één al in een vroeg stadium.
Van de 'jongen' bereikt maar zo'n 80% het 'niet zo jonge' stadium.
Van de 'niet zo jongen' bereikt 75% het volwassenstadium.
En voor de volwassenen is de kans dat ze na 40 dagen nóg in deze groep zitten zo'n 80%.

5

AFGEREMDE GROEI

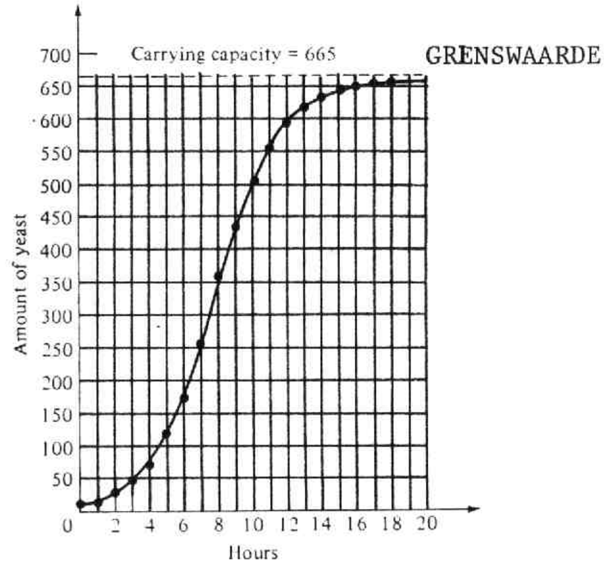
In het algemeen zal bij groeiprocessen die min of meer exponentieel zijn op een bepaald moment een fase komen waarbij de groei afneemt. Zo zal de exponentiële groei bij de ratten (uit het vorige hoofdstuk) afnemen omdat er na verloop van tijd te weinig voedsel is om alle ratten in leven te houden. Ook blijkt in zo'n situatie vaak het aantal geboorten af te nemen.
Iets dergelijks doet zich voor bij de groei van de waterhyacint in het stuwmeer van de Gebel Auliadam. De maximale oppervlakte die de plant kan bedekken is 200 km², maar lang daarvoor zal de groei al afgeremd worden doordat er zo weinig ruimte voor de plant is.

In plaats van het strikt exponentiële verloop van de groeikromme tot de grenswaarde 200 (km²) zal een meer vloeiende kromme de praktijk beter weergeven:



We zullen enkele soortgelijke groeikrommen - die weinig verrassend ook wel S-krommen genoemd worden - nader bekijken.

De volgende grafiek is gebaseerd op de resultaten van een laboratoriumexperiment met een kolonie gistcellen:



≫ 28. Laat zien dat de groeifactor(over één uur)de eerste acht uren redelijk constant is.
Geef het functievoorschrift dat de groei beschrijft over de eerste acht uur.

De horizontale asymptoot die de *grenswaarden* aangeeft wordt vastgelegd door de omgeving waarin het groeiproces plaatsvindt. Dat kan een aquarium zijn waarin niet meer dan een bepaald aantal vissen kan leven, de oppervlakte van een meer, de hoeveelheid voedsel in een bepaald gebied enz.
Ook bacteriegroei, b.v. die van een ziektebacterie, zal aanvankelijk exponentieel zijn. Maar ook door die situatie zal op zeker moment een tekort aan voedsel ontstaan. Een S-kromme is dan het resultaat.

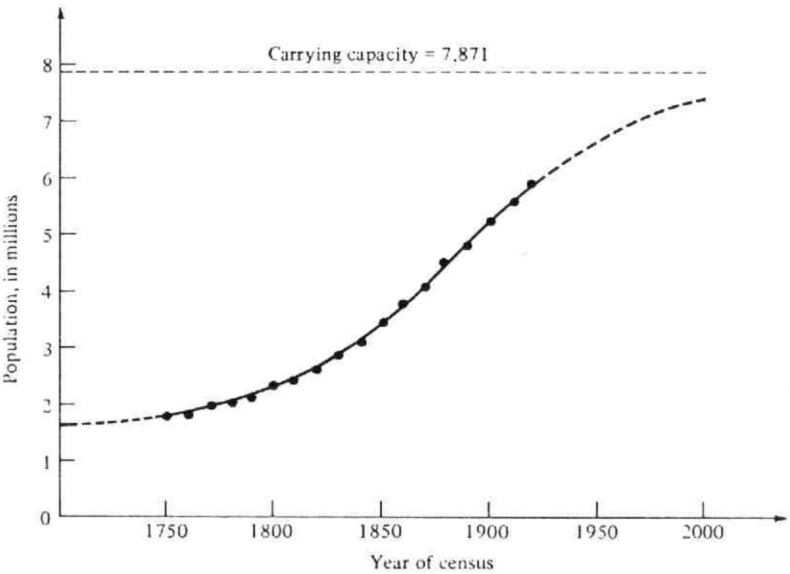
Al dit soort groeiprocessen noemen we *logistische* groeiprocessen.

We zagen in de voorbeelden van logistische groei tot nu toe dat de exponentiële fase ongeveer duurt tot halverwege de grenswaarde.

≫ 29. a. Teken de logistische groeikromme van bacteriegroei als je weet:
- op $t = 0$ zijn er 5 bacterieën;
- de grenswaarde is 25.000 bacterieën;
- aanvankelijk is de groei exponentieel en wel: in één uur verdrievoudiging.

b. Geef het functievoorschrift voor de exponentiële groeifase.

≫ 30. De groeikromme van de bevolking van Zweden ziet er ook uit als een S-kromme:



Teken de hellinggrafiek van deze grafiek. Hoe kun je, door de hellinggrafiek te vergelijken met de groeigrafiek, zien welk gedeelte van de groei min of meer exponentieel is?

Samengevat:

Men spreekt van LOGISTISCHE GROEI als de groei aanvankelijk exponentieel is; naarmate de groeikromme dichter de GRENSWAARDE nadert neemt de groei steeds meer af. Het resultaat is een S-KROMME.

≫ 31. Bij logistische groei is de eerste fase min of meer exponentieel: de groeisnelheid is evenredig met de aanwezige hoeveelheid. Ook de tweede fase is in zekere zin exponentieel. Waarmee is de groeisnelheid evenredig in deze fase?

6

EXPONENTIËLE FUNCTIES

De *hoofdeigenschap van de exponentiële* functies luidt:

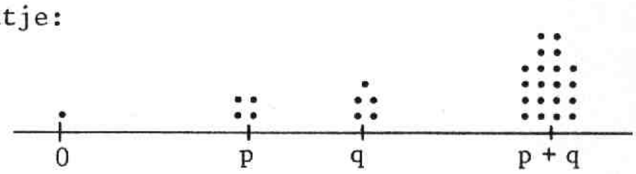
$$g^p \cdot g^q = g^{p+q} \qquad (g, p, q \in \mathbb{R};\ g > 0)$$

of: als $F(x) = g^x$ dan is: $F(p) \cdot F(q) = F(p+q)$

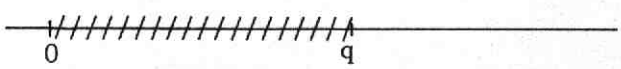
of, in woorden:

De hoeveelheid op tijdstip $p+q$	$=$	De hoeveelheid op tijdstip p	$\times$	De hoeveelheid op tijdstip q

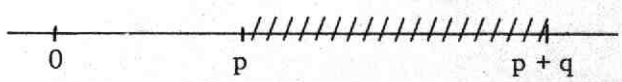
of, in een plaatje:



Een bewijs van de hoofdeigenschap:

I. 

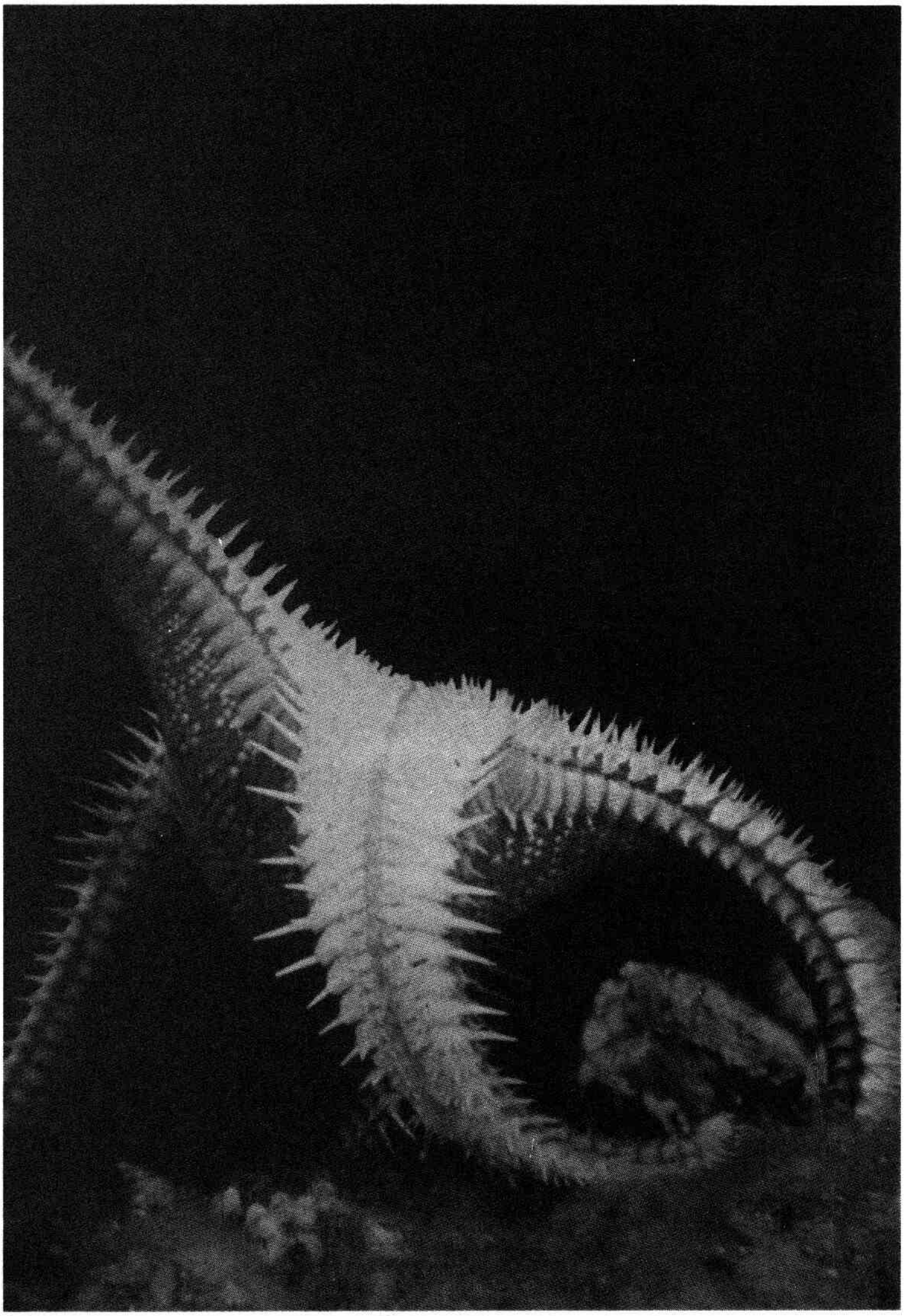
groeifactor over $[0,q]$ is $\dfrac{g^q}{g^0}$

II. 

groeifactor over $[p, p+q]$ is $\dfrac{g^{p+q}}{g^p}$

≫ 32. a. Waarom geldt nu: $\dfrac{g^q}{g^0} = \dfrac{g^{p+q}}{g^p}$?

b. Hoe volgt uit a nu de hoofdeigenschap?



Zeester, die op z'n rug lag, richt zich op.

≫ 33. De groeifactor van een zeesterrensoort is 1,25 (over 10 dagen) van $t = 3$ tot en met $t = 8$.

Op $t = 3$ heeft de ster een diameter van 3 cm.

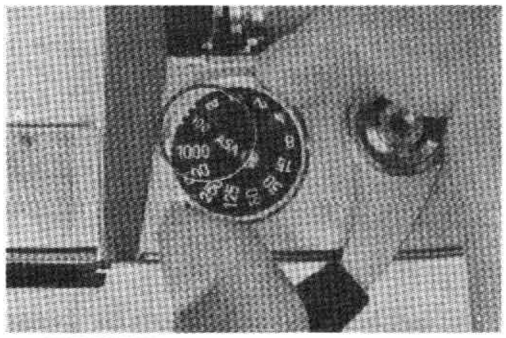
a. Hoe groot is de groeifactor over 5 dagen?

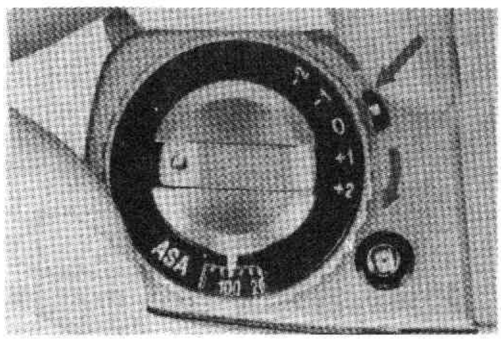
b. Hoe groot is de groeifactor over 10 dagen?

c. Hoe luidt het functievoorschrift van $t = 0$ tot en met $t = 8$ (ervan uitgaande dat de groei van $t = 0$ tot $t = 3$ ook plaatsvindt met $g = 1,25$)?

d. Als de groeifactor van de *lengte* (diameter) van de ster ongeveer 1,25 is, kun je dan een schatting maken van de groeifactor van het *gewicht?*

≫ 34. Als je een fotorolletje in de winkel gaat halen krijg je meestal een rolletje in handen gestopt met daarop de nogal mystieke aanduiding:
100 ASA/21 DIN.
Dit is een aanduiding over de korreligheid van de film. Een grove korrel heeft als voordeel dat er weinig licht bij nodig is. Men spreekt dan ook wel van een snelle film (korte belichtingstijden).





Het nadeel is dat de korrel nogal zichtbaar wordt bij vergrotingen. Bij een zeer snelle film kan op het doosje staan: 3200 ASA/36 DIN.

Langzame, dus fijnkorrelige films zijn b.v. 25 ASA/15 DIN.

Een 200 ASA film is tweemaal zo snel als een 100 ASA film en heeft dus tweemaal zo weinig licht nodig.
De ASA getallen nemen vrijwel exponentieel toe, de DIN getallen lineair.

Maak de volgende ASA/DIN tabel af:

ASA	*	*			100	200					
DIN					21	24					

* afronden op natuurlijke getallen.

Welk DIN-getal hoort bij ASA 160?
Welk ASA-getal hoort bij DIN 20?
Welk DIN-getal hoort bij ASA 40?
Welk ASA-getal hoort bij DIN 10?

Eerder zagen we:

De afgeleide functie van een exponentiële functie $f(x) = a^x$ *is een constante* (c_a) *maal de oorspronkelijke functie. Die constante hangt af van de groeifactor* a.

Dus: $\frac{da^x}{dx} = c_a \cdot a^x$

We hebben al schattingen gemaakt voor c_2, c_3 *en* c_4 *aan het slot van hoofdstuk 3.*

Hier volgen wat meer waarden:

a	c_a
1	0
2	0,6931
3	1,0986
4	1,3863
5	1,6094

q	c_a
6	1,7914
7	1,9459
8	2,0794
9	2,1972
10	2,3026

≫ 35. De tabel geeft afgeronde waarden in vier decimalen nauwkeurig. Alleen c_1 is precies 0.
Kun je dat verklaren?

≫ 36. Teken een (punten)grafiek met horizontaal de waarden van a en verticaal de waarden van c_a.

Het lijkt aannemelijk dat 'ergens' tussen de groeifactorwaarde twee en drie de evenredigheidsconstante c gelijk zal zijn aan 1. Dat is interessant, want dan is de afgeleide functie gelijk aan de functie zelf!

≫ 37. Maak aan de hand van de grafiek van opgave ≫ 36 een schatting van de waarde van de groeifactor, waarbij de evenredigheidsconstante gelijk is aan één.

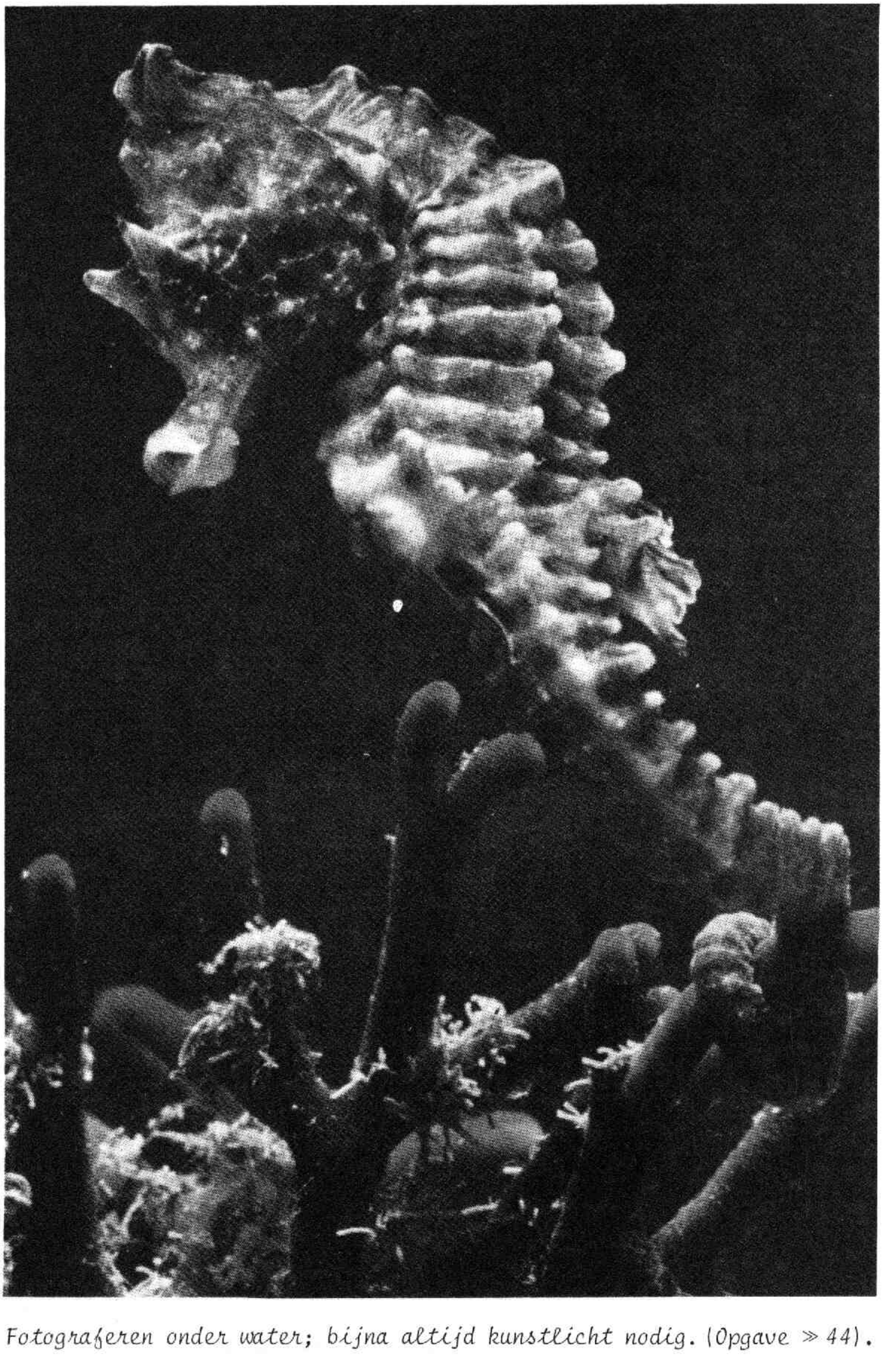
De groeifactor waarbij de evenredigheidsconstante gelijk is aan 1 noemen we e.

Een nauwkeuriger schatting van de waarde van e kan gemaakt worden met het volgende schema:

$g \leftarrow$ INVOER
$dt \leftarrow 0{,}001$
6 KEER (t van -2 tot 3)
$f \leftarrow g^t$
$df \leftarrow g^{t+dt} - g^t$
$h \leftarrow \frac{df}{dt}$
UITVOER $t, f, h, \frac{h}{f}$
STOP

≫ 38. Neem vier waarden voor de groeifactor waarvan je verwacht dat de evenredigheidsconstante ongeveer gelijk zal zijn aan 1.
Geef aan de hand van de resultaten een nauwkeurige schatting van e. (Zie bladzijde 63 van dit boek voor voorbeelden van output).

De afgeleide functie van de exponentiële functie $f(x) = e^x$ is: $f'(x) = e^x$ *of:* $\frac{de^x}{dx} = e^x$.



Fotograferen onder water; bijna altijd kunstlicht nodig. (Opgave ≫ 44).

≫ 39. Differentieer de volgende functies:

$y = 3^x + e^x$	$y = e^t \cdot \sin t$
$y = x^2 + 2^x$	$y = 5^t + \cos t$
$y = x \cdot e^x$	$y = e^{3t} - t^3$
$y = \sqrt{x} \cdot 2^x$	$y = \sqrt[3]{t} \cdot 3^t$
$y = x^2 \cdot 3^x$	$y = 2^t \cdot e^t$

≫ 40. $f(x) = \dfrac{4 \cdot 2^x}{2^x + 1}$

a. Laat zien dat f een overal stijgende functie is.

b. Teken de grafiek.

c. Wat voor soort groei hebben we hier?

≫ 41. De populatie van een diersoort wordt ingedeeld in jongen en volwassenen.

De Lesliematrix over een periode van vijf jaar is:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0{,}5 & 0 \end{pmatrix}$$

De beginpopulatie is $\begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix}$.

a. Bereken de bevolkingssamenstelling na 5, 10, 15, 20 en 25 jaar.

b. Is er sprake van min of meer exponentiële groei van deze populatie? Zo ja, wat is de waarde van de groeifactor?

c. Is er sprake van exponentiële groei onder de jongen of volwassenen apart?

d. Tracht een functievoorschrift te vinden dat de groei van de populatie als geheel redelijk weergeeft.

e. Welke functie geeft de groeisnelheid van de populatie weer?

≫ 42. De functie $y = 2^x \cdot 3^x$ kun je op twee manieren differentiëren: met de produktregel, of door eerst $2^x \cdot 3^x$ uit te rekenen: $2^x \cdot 3^x = 6^x$.

a. Welk verband moet er (dus) bestaan tussen c_2, c_3 en c_6 (evenredigheidsconstante afgeleide)?

b. Bereken zelf m.b.v. de tabel op blz. 30 c_{12}.

≫ 43. $y = \dfrac{3^x}{2^x}$. Bereken op twee manieren de afgeleide en bereken $c_{1,5}$ met de tabel.

≫ 44. Plantaardig leven in water is niet mogelijk op diepten groter dan 10 meter, omdat er daar te weinig licht is.
Globaal gesproken neemt de lichtintensiteit per meter diepte met maar liefst 75% af.

a. Iemand fotografeert normaal altijd met een 100 ASA/21 DIN film. Hij gaat snorkelen en duiken op ongeveer 1 meter diepte. Welke film zal hij nu moeten gebruiken?

b. Hoeveel procent van de oorspronkelijke lichtsterkte heerst er op 10 meter diepte?

c. Bepaal het functievoorschrift dat de lichtsterkte weergeeft (verticale as) als functie van de diepte (in meters).

d. Bepaal de afgeleide van deze functie en wat betekent deze? Bereken de evenredigheidsconstante m.b.v. de tabel op blz. 30.

≫ 45. Teken in één plaatje de grafieken van:

$f(x) = 2^x$; $g(x) = (\frac{1}{2})^x$ en $h(x) = 2^x + (\frac{1}{2})^x$.

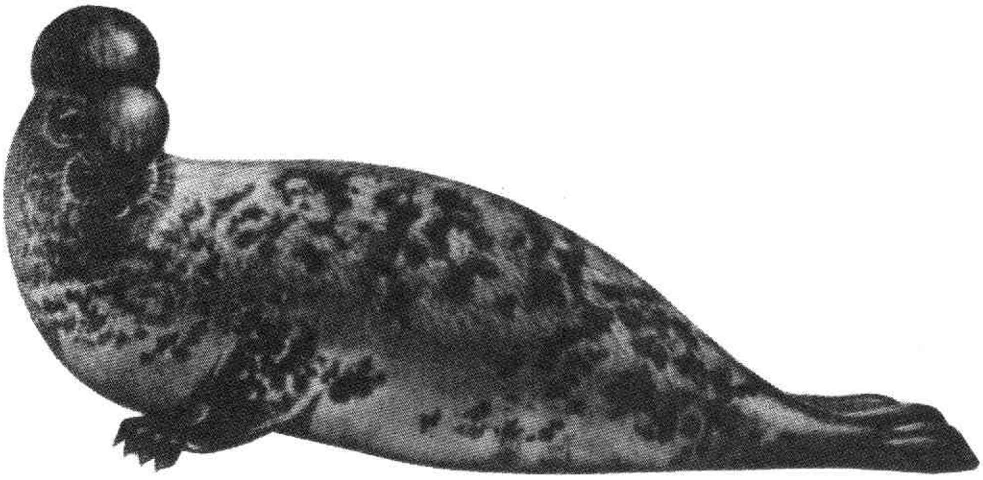
In welk punt is de raaklijn aan h(x) horizontaal?

≫ 46. a. Teken de grafiek van $c(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$; bereken daartoe o.a. $c'(x)$.

b. Teken de grafiek van $s(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$; bereken daartoe o.a. $s'(x)$.

Opmerking: de grafiek van c(x) is de zgn. 'kettinglijn': de vorm waarin een vrijhangende ketting gaat hangen.

≫ 47.



De klapmuts wordt, zoals bekend, gejaagd. Met behulp van Lesliematrices kunnen voorspellingen worden gedaan over de kans dat de klapmuts zal uitsterven.

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0.038 & 0.171 & 0.178 & 0.251 & 0.263 & 0.298 & 0.301 & 0.301 & 0.307 & 0.313 \\
0.850 & & & & & & & & & & & \\
 & 0.894 & & & & & & & & & & \\
 & & 0.894 & & & & & & & & & \\
 & & & 0.811 & & & & & & \emptyset & & \\
 & & & & 0.811 & & & & & & & \\
 & \emptyset & & & & 0.811 & & & & & & \\
 & & & & & & 0.811 & & & & & \\
 & & & & & & & 0.811 & & & & \\
 & & & & & & & & 0.811 & & & \\
 & & & & & & & & & 0.811 & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.811 & 0.811
\end{pmatrix}$$

Dit is de Lesliematrix die de huidige situatie mèt jacht weergeeft. Uitgaande van een beginpopulatie van 10.000 geeft dit de volgende resultaten (t in jaren).

tijd t	populatie
0	10.000
1	9.931
2	9.856
3	9.777
4	9.696

tijd t	populatie
5	9.535
6	9.455
7	9.375
8	9.296
9	9.219

Onderzoek of hier sprake is van exponentiële 'groei'. Zo ja, bepaal de groeifactor en het functievoorschrift.

≫ 48. Gebruik de computer bij de volgende opgave.

De huidige bevolkingsopbouw van een populatie is:

$$\begin{pmatrix} 10.000 \\ 10.000 \\ 10.000 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{ouderen} \\ \text{volwassenen} \\ \text{jongen} \end{matrix}$$

De Lesliematrix (over 1 jaar) is:

$$\begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}01 \\ 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}25 & 0 \end{pmatrix}$$

a. Bepaal de bevolkingsopbouw na 10 jaar.

b. Onderzoek of er sprake is van exponentiële groei.

c. Kun je een functievoorschrift bedenken voor de groeisnelheid van deze populatie?

In economische toepassingen is er vaak sprake van procentuele groei: als de rente 5% is, is de groeifactor 1,05.

In de economie is een ander begrip belangrijk: de *groeivoet*.

De groeivoet = groeifactor - 1.

Dus als het percentage 5% is,

is de groeifactor 1,05

en de groeivoet 0,05.

Om de betekenis van de groeivoet beter te begrijpen, even terug. Eerder zagen we al (hoofdstuk 2):

Als de percentuele toename p% is, dan is de *groeifactor*: $1 + \frac{p}{100}$
Dus: *groeivoet*: $\frac{p}{100}$.
De groeivoet geeft dus de *relatieve* verandering aan, per tijdseenheid.

≫ 49. Gegeven: $f(x) = b \cdot (1,2)^x$.
Hoe groot is de groeivoet van f(x)?

≫ 50. Gegeven: $y_t = y_0 \cdot (0,9)^t$.
Hoe groot is de groeivoet van y_t?

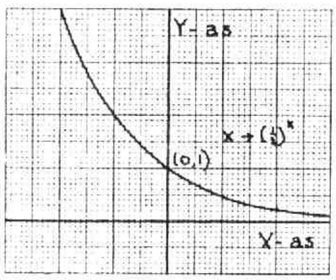
≫ 51. De groeivoet van y is 0,1.
De beginwaarde y_0 = 15.000.
Geef een functievoorschrift voor y.

Samenvatting:

Functies van de vorm $x \to b \cdot a^x$ *heten exponentiële functies.*
b *is de beginwaarde (als* $x = 0$*);* a *heet groeifactor of grondtal.*
$a > 0;\ a \neq 1.$
Als $b = 1$ *(en dat kunnen we vaak zo "regelen") krijgen we* $x \to a^x$,
met de volgende eigenschappen:

$0 < a < 1$

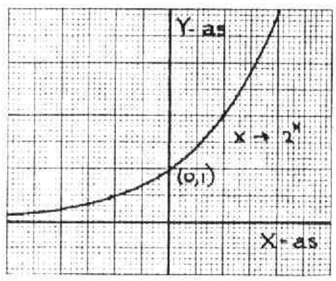
Grafiek



Domein : $\mathbb{R}$
Bereik : $\mathbb{R}^+$
Nulpunten : *geen*
Dalend
Asymptoten: *x-as*

$a > 1$

Grafiek



Domein : $\mathbb{R}$
Bereik : $\mathbb{R}^+$
Nulpunten : *geen*
Stijgend
Asymptoten: *x-as*

HOOFDEIGENSCHAP

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q} \qquad a > 0,\ a \neq 1.$$

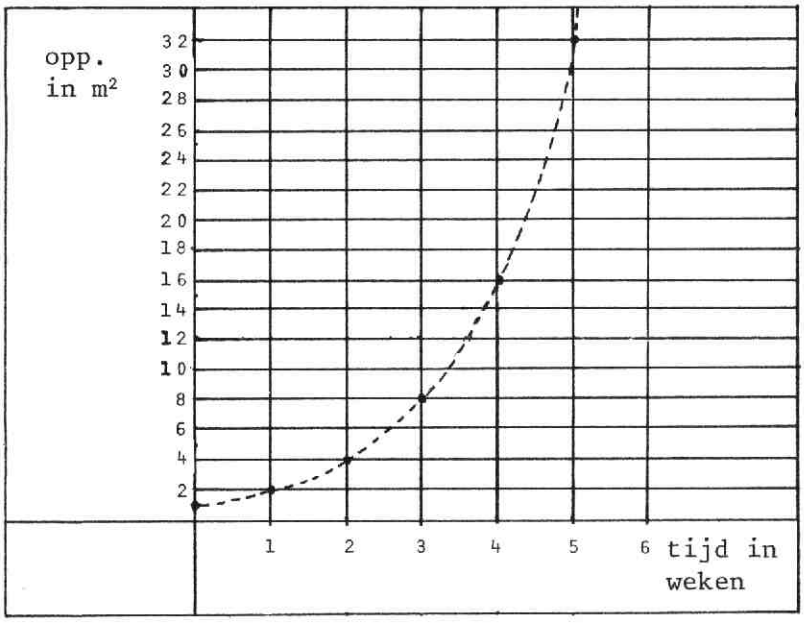
of als $F(x) = a^x$ *dan is* $F(p) \cdot F(q) = F(p+q)$.

Bij exponentiële groei is de groeisnelheid evenredig met de groeifunctie.
Of:
$$\frac{da^x}{dx} = c_a \cdot a^x$$
e *is de waarde van* a *waarvoor geldt:* $c_a = 1$, *dus* $\frac{de^x}{dx} = e^x$;
$e \approx 2,7182818284.....$

De GROEIVOET is gelijk aan de GROEIFACTOR - 1 en geeft de relatieve verandering aan per tijdseenheid.

7

Logaritmen ken je al lang. Hopelijk. Een kleine herhaling, vooral gericht op de groeifactor is misschien toch wel zinvol.



Deze grafiek geeft de groei van waterplanten weer, uitgaande van 1 m^2.

≫ 52. Schat aan de hand van de grafiek na hoeveel *dagen* er ongeveer 20 m^2 planten waren.

≫ 53. Na hoeveel dagen ligt er 40 m^2 planten? (Zonder grafiek oplossen). En 80 m^2? En 10 m^2?
Controleer het laatste antwoord grafisch.

≫ 54. Het verband tussen oppervlakte en tijd (weken) kun je vastleggen in een tabel:

oppervlakte	5	10	20	40	80
tijd in weken					

≫ 55. Bepaal het tijdstip waarop er 48 m^2 planten zijn (in weken, één decimaal nauwkeurig).

Vul daarna, zonder grafiek, de tabel in:

oppervlakte	3	6	12	24	48	96
tijd in weken						

De functie die aan de oppervlakte de tijd toevoegt heet: *Logaritmische functie*.

Of: $\boxed{\textit{oppervlakte}} \xrightarrow[\textit{functie}]{\textit{logaritmische}} \boxed{\textit{tijd}}$

terwijl: $\boxed{\textit{tijd}} \xrightarrow[\textit{functie}]{\textit{exponentiële}} \boxed{\textit{oppervlakte}}$

Omdat de groeifactor bij bovenstaand voorbeeld 2 was, wordt dat in de notatie van de logaritmische functie als volgt tot uiting gebracht:

$x \to {}^2\log x$

vb. $10 \to {}^2\log 10$

${}^2\log 10$ is het tijdstip waarop er 10 m^2 planten zijn gevormd, bij groeifactor 2 (en beginnend met 1 m^2).

≫ 56. Verklaar: ${}^2\log 16 = 4$

Ook: ${}^3\log 27 = 3$

En: ${}^5\log 25 = 2$

≫ 57. Bepaal aan de hand van de eerder gemaakte tabellen *ongeveer* en waar mogelijk *precies* de grootte van:

${}^2\log 1$	${}^2\log 4$	${}^2\log 8$	${}^2\log 16$
${}^2\log 2$	${}^2\log 5$	${}^2\log 10$	${}^2\log 20$
${}^2\log 3$	${}^2\log 6$	${}^2\log 12$	${}^2\log 24$

≫ 58. Bereken:

$^{2}\log \frac{1}{2}$ $\quad$ $^{2}\log \frac{1}{4}$ $\quad$ $^{2}\log \frac{1}{8}$ $\quad$ $^{2}\log \frac{1}{16}$

≫ 59. a. Teken de grafieken van:

$$x \to 2^{x}$$

en

$$x \to {}^{2}\log x$$

in één tekening.

b. Welke as van symmetrie heeft dit paar grafieken en waarom?

c. Geef van beide functies het domein, bereik en asymptoot.

≫ 60. Verklaar waarom:

$$^{2}\log 3 + 1 = {}^{2}\log 6$$
$$^{2}\log 7 + 1 = {}^{2}\log 14$$
$$^{2}\log 6 + {}^{2}\log 2 = {}^{2}\log 12$$

≫ 61. $f(x) = {}^{2}\log x$

Welk verband bestaat er tussen $f(4)$, $f(5)$ en $f(20)$?

≫ 62. a. Teken in één figuur de grafieken van:

$$f(x) = 2^{x}$$

en

$$g(x) = (\tfrac{1}{2})^{x}$$

b. Laat zien: $^{2}\log 3 = {}^{\frac{1}{2}}\log \frac{1}{3}$

c. Ook: $^{2}\log 7 = {}^{\frac{1}{2}}\log \frac{1}{7}$

≫ 63. Vul in: $^{\frac{1}{2}}\log \frac{1}{12} = {}^{2}\log \ldots$

Analoog: $^{5}\log \frac{1}{3} = {}^{\frac{1}{5}}\log \ldots$

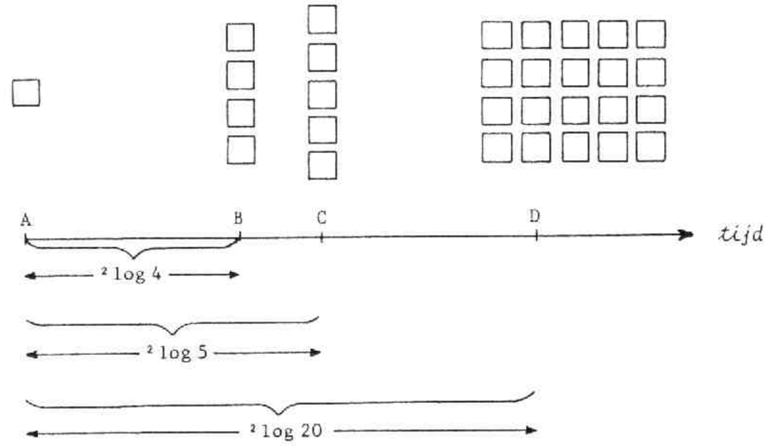
$^{\frac{1}{3}}\log 23 = {}^{3}\log \ldots$

$^2\ell og\ 4$ = "tijd nodig voor verviervoudiging"

$^2\ell og\ 5$ = "tijd nodig voor vervijfvoudiging"

$^2\ell og\ 20$ = "tijd nodig voor vertwintigvoudiging"

Of schematisch:



≫ 64. Verklaar $^2\log 4 + {}^2\log 5 = {}^2\log 20$. (of: BD = $^2\log 5$) .

De opgave hierboven was niets anders dan een "bewijs" van de *hoofdeigenschap* van de logaritmische functies:

$$^g\ell og\ ab = {}^g\ell og\ a + {}^g\ell og\ b$$

of als $F(x) = {}^g\ell og\ x$ *dan is* $F(ab) = F(a) + F(b)$

Gebruik makend van deze hoofdeigenschap zijn de volgende logaritmische vergelijkingen op te lossen: ($x \in \mathbb{R}^+$).

≫ 65. $^2\log x = {}^2\log 5 + {}^2\log \frac{1}{3}$

$^3\log x = {}^3\log 2 + {}^{\frac{1}{3}}\log 7$

$^5\log 3x + {}^5\log \frac{1}{3} = {}^5\log 3$

$^3\log (2x+1) = 1 + {}^3\log 2$

$^7\log x + {}^7\log 5 = -1$

$^{\frac{1}{5}}\log x + {}^5\log \frac{1}{2} = 2$

≫ 66. $^{10}\log x = 1 + {}^{\frac{1}{10}}\log \frac{1}{5}$

$^{\frac{3}{2}}\log x = {}^{\frac{3}{2}}\log 3 + {}^{\frac{2}{3}}\log \frac{3}{2}$

${}^{2}\log 7$ is het moment waarop er 7 m² kroos is, bij groeifactor 2.
Dus ${}^{2}\log 7$ is de oplossing van $2^x = 7$.
Of, weer anders gezegd: $2^{{}^{2}\log 7} = 7$.

≫ 67. a. Van welke vergelijking is ${}^{2}\log 5$ een oplossing?
En ${}^{5}\log 2$?

b. En ${}^{2}\log 8$?

c. Ook: ${}^{5}\log 125$; ${}^{\frac{1}{3}}\log 27$; ${}^{10}\log 1000$; ${}^{3}\log 3^p$.

d. Tevens: ${}^{0,2}\log 5$; ${}^{0,2}\log 1$; ${}^{0,2}\log 0,2$.

≫ 68. Van welke vergelijking is ${}^{g}\log a$ een oplossing?
(Bij geschikte keuze van g en a).

Samenvattend:

$$\boxed{{}^{g}\log a = x \Leftrightarrow a = g^x \qquad \text{of} \qquad g^{{}^{g}\log a} = a}$$

≫ 69. Toon aan dat ${}^{10}\log 2 \cdot {}^{2}\log 3 = {}^{10}\log 3$.
Noem daartoe ${}^{10}\log 2 = x$; ${}^{2}\log 3 = y$ en ${}^{10}\log 3 = z$,
en toon aan: $x \cdot y = z$.

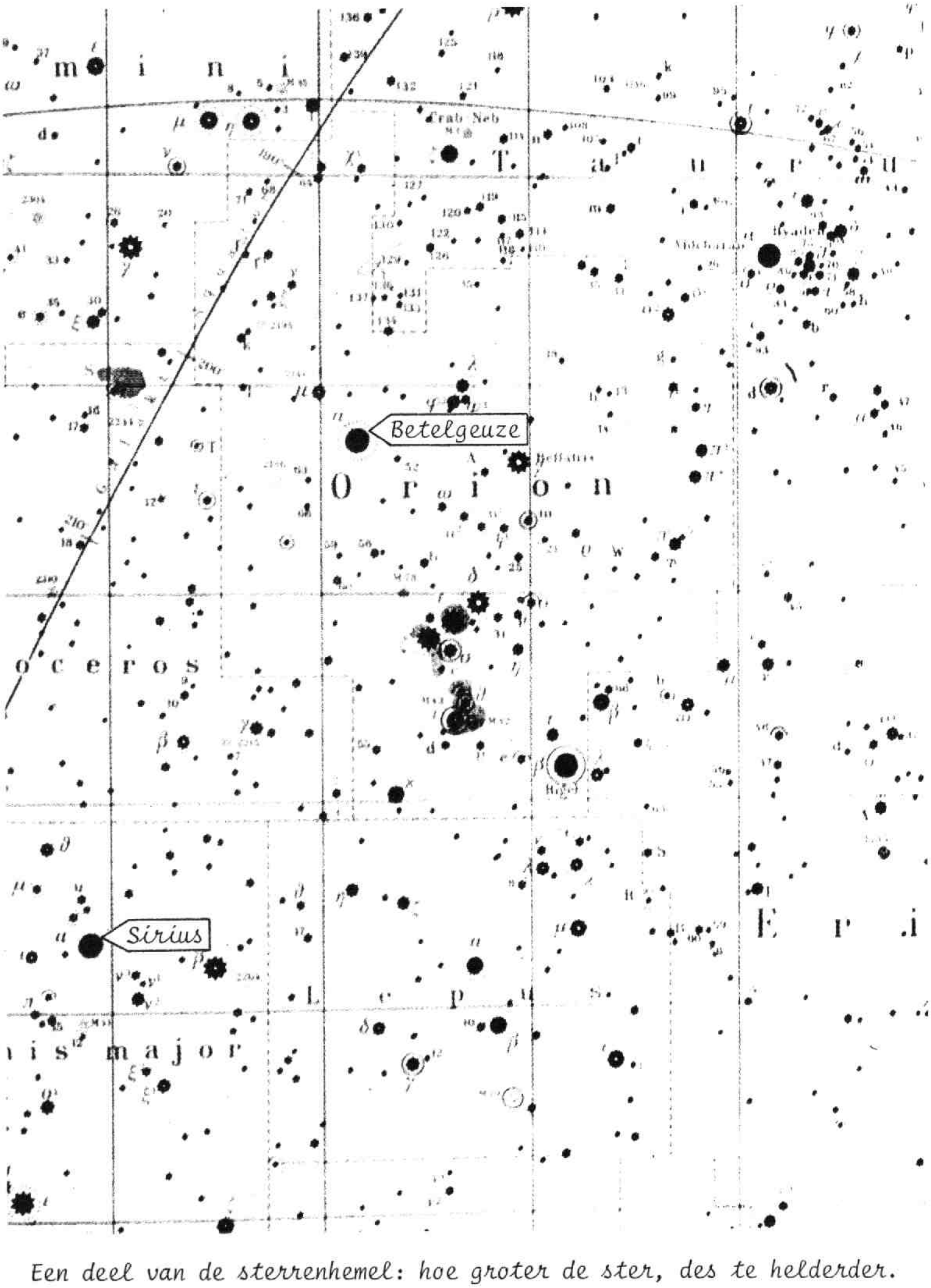
De vorige opgave luidt in algemene termen:

$$\boxed{{}^{p}\log g \cdot {}^{g}\log a = {}^{p}\log a \qquad \text{of} \qquad {}^{g}\log a = \frac{{}^{p}\log a}{{}^{p}\log g}}$$

Deze eigenschap geeft je de mogelijkheid om van grondtal te veranderen hetgeen o.a. belangrijk is als je logaritmen op de rekenmachine wilt berekenen. Als je een rekenmachine hebt die alleen logaritmen berekent met grondtal (groeifactor) 10 zou je ${}^{3}\log 5$ niet in kunnen toetsen.
Maar omdat:

$${}^{3}\log 5 = \frac{{}^{10}\log 5}{{}^{10}\log 3}$$

kun je ${}^{3}\log 5$ tòch met je rekenmachine berekenen.



Een deel van de sterrenhemel: hoe groter de ster, des te helderder. Sirius zit linksonder, Betelgeuze in het midden. Op blz. 58 vind je een foto van de opeenhoping van sterren in ORION.

Opmerking 1: Als het grondtal 10 is wordt het vaak weggelaten.
Dus ${}^{10}\log 3$ wordt geschreven als $\log 3$.

Opmerking 2: Als het grondtal e is wordt het weggelaten en wordt er ln i.p.v. log geschreven.
Dus ${}^{e}\log 3$ wordt geschreven als $\ln 3$.
Men spreekt wel van de 'natuurlijke logaritme'.

≫ 70. Bereken: ${}^{3}\log 5$; ${}^{5}\log 3$; ${}^{7}\log 10$; $\log 7$; $\ln 5$; ${}^{5}\log e$.

≫ 71. Verklaar: $e^{\ln 2} = 2$.

≫ 72. De coli-bacterie verdubbelt iedere 20 minuten in gewicht. Hoe lang duurt het voor het gewicht is toegenomen met een factor e?

Voorbeeld:

Los op: ${}^{3}\log x = \frac{1}{2}$.

Oplossing: ${}^{3}\log x = \frac{1}{2} \iff 3^{\frac{1}{2}} = x$, dus $x = \sqrt{3}$.

≫ 73. Los op:

${}^{5}\log x = 1$	${}^{x}\log 9 = 2$	$\ln x = 2$
$\ln x = \frac{1}{2}$	${}^{x}\log 27 = 3$	${}^{\frac{1}{2}}\log x = 2$
${}^{8}\log x = -\frac{2}{3}$	${}^{x}\log \sqrt{2} = 1$	$\log x = 0$

≫ 74. De groeifactor van een bacteriesoort "Repetitorum Firum" is gelijk aan 6. Op het tijdstip 0 zijn er 4 bacterieën. Bereken het tijdstip waarop er 100 bacterieën zijn.

≫ 75. De groeifactor van de totale hoeveelheid hout in een bos is 5% per jaar. Hoe lang zal het duren voor de houthoeveelheid verdubbeld is?

≫ 76. De zon is ogenschijnlijk verreweg de helderste ster uit het heelal. Dat komt omdat hij zo dichtbij staat. Er zijn andere sterren die wel zo'n 100.000 maal zo helder zijn als de zon. Maar zo'n ster zien we veel zwakker dan de zon, omdat hij zo ver weg staat.

De schijnbare lichtsterkte, dus zoals wij het zien, wordt uitgedrukt in de *schijnbare magnitude*. Een *verschil* van 5 magnitudes komt overeen met een *factor* 100 in de lichtsterkte.

a. De zon heeft een magnitude van -26.
De zwakste zichtbare ster één van +24.
Hoeveel maal zo lichtsterk is de zon ogenschijnlijk?

b. Maak de volgende tabel af:

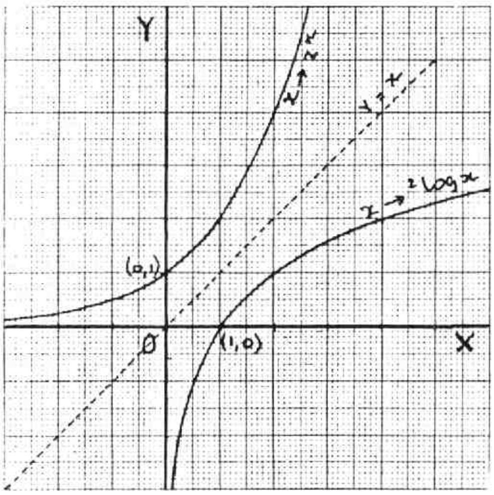
Magnitude	-30	-25	-20	-15	-10	-5	0	5	10	15	20	25
Helderheid						100	1	100^{-1}				

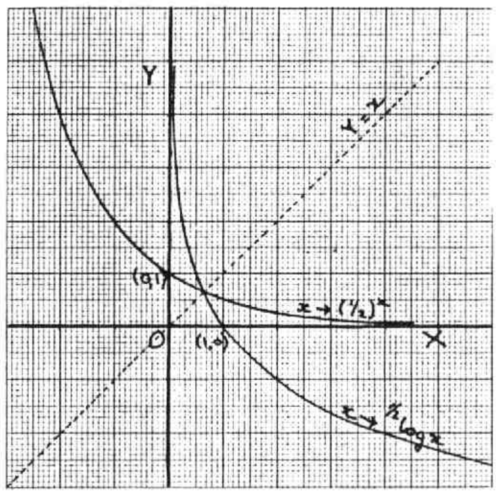
Wat heeft deze tabel met logaritmen te maken?

c. Sirius, een ster, heeft een magnitude van -1,6. Die van Betelgeuze is +0,9.
Hoeveel maal zo helder zien we Sirius aan de hemel vergeleken met Betelgeuze?

d. Sirius is de helderste ster, met z'n magnitude van -1,6. De zon heeft een magnitude van -26,9. Hoeveel maal zo helder zien we de zon vergeleken bij Sirius?

Samenvatting:





Functie	$x \to 2^x$	$x \to {}^2\log x$	$x \to (\frac{1}{2})^x$	$x \to {}^{\frac{1}{2}}\log x$
Domein	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^+$
Bereik	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}$
Snijpunt met assen	$(0,1)$	$(1,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$
Asymptoot	x-as	y-as	x-as	y-as
Stijgend of dalend	stijgend	stijgend	dalend	dalend

$${}^g\log a = x \iff a = g^x \qquad \text{of} \qquad g^{{}^g\log a} = a$$

$${}^g\log a + {}^g\log b = {}^g\log ab$$

$${}^g\log a - {}^g\log b = {}^g\log \frac{a}{b}$$

$${}^g\log a = \frac{{}^p\log a}{{}^p\log b}$$

${}^{10}\log 3$ wordt vaak geschreven als $\log 3$

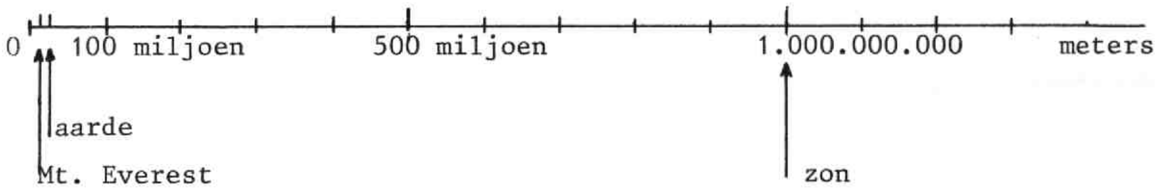
${}^e\log 3$ wordt vrijwel altijd geschreven als $\ln 3$.

8

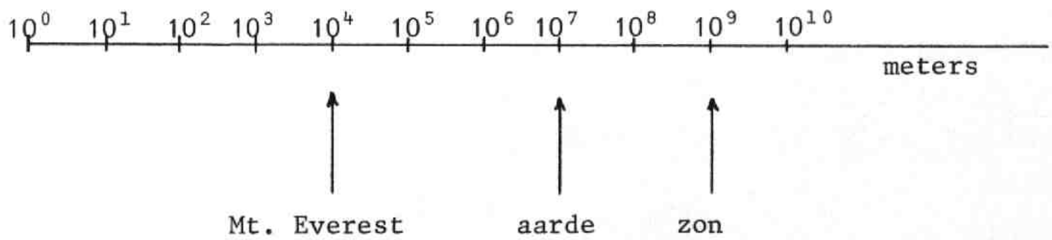
(DUBBEL)LOGARITMISCH PAPIER

De Mount Everest is ongeveer 10.000 m (8840) hoog.
De middellijn van de aarde is ongeveer 10.000.000 m.
De middellijn van de zon is ongeveer 1.000.000.000 m.

Als we deze afmetingen op de getallenlijn zetten is dat niet eenvoudig door de grote verschillen tussen de diverse getallen:



Overzichtelijker is de volgende getallenlijn:



≫ 77. Wat is er aan de hand met deze getallenlijn als je hem vergelijkt met de vorige?

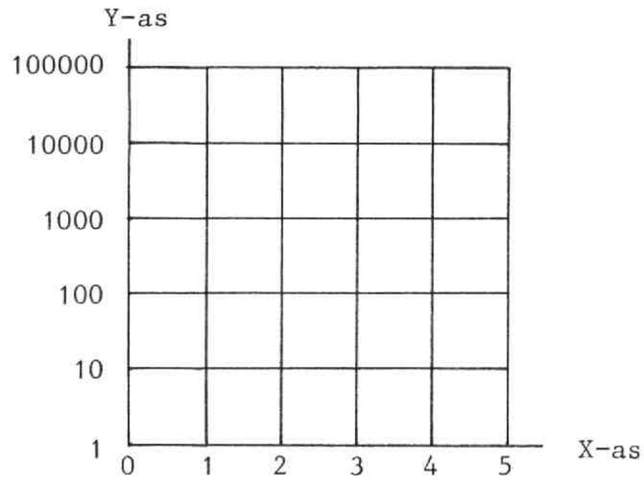
We noemen dit een "schaaltransformatie".

$10^1 \longrightarrow 1$ of $10 \rightarrow 1$
$10^2 \longrightarrow 2$ of $100 \rightarrow 2$
$10^3 \longrightarrow 3$ of $1000 \rightarrow 3$
$10^4 \longrightarrow 4$ of $10000 \rightarrow 4$

≫ 78. Welk functievoorschrift hoort er bij deze transformatie?

Soms maken we van deze schaal gebruik bij het tekenen van grafieken. De x-as heeft daar b.v. de "gewone" verdeling, en langs de y-as gebruiken we de zojuist ingevoerde schaalverdeling die (nogal logisch) de logaritmische schaalverdeling wordt genoemd.

We krijgen dan:



≫ 79. a. Maak zelf logaritmisch grafiekpapier zoals hierboven en teken daarop de grafiek van: $f : x \to 10^x$ met $x \in [0,5]$.

b. Hoe ziet de grafiek eruit? Waarom?

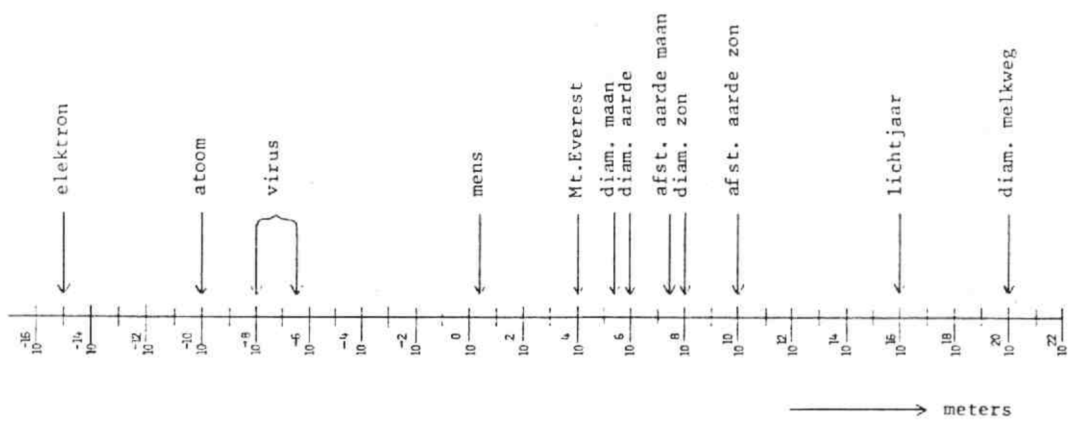
≫ 80. Probeer aan te geven waar langs de y-as 500 en 50.000 moeten staan.

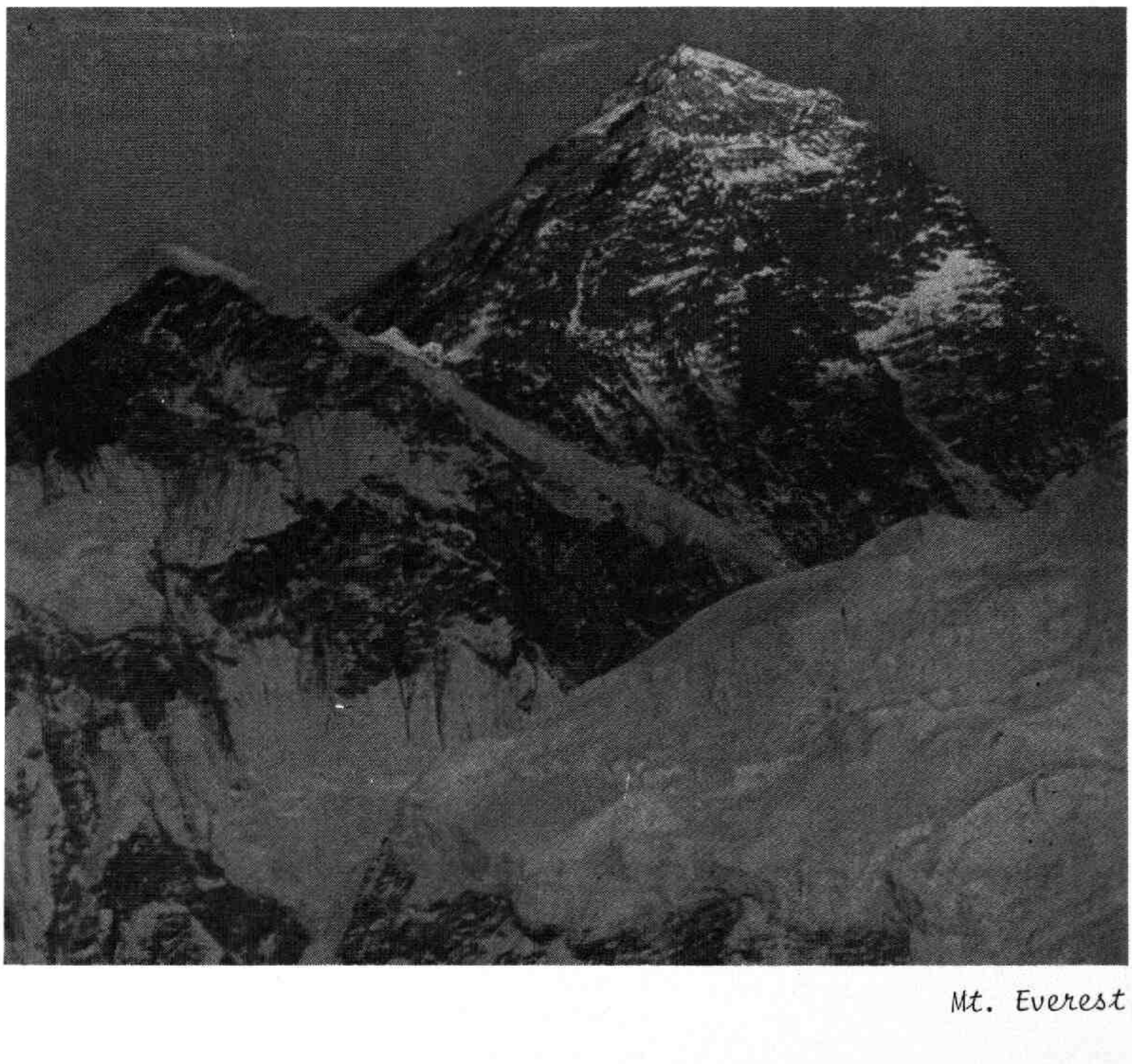
≫ 81. a. Teken op groot formaat het hokje waarvoor geldt: $x \in [0,1]$ en $y \in [1,10]$ en teken zo precies mogelijk langs de y-as de punten waarvoor geldt: $y = 2, 3, 4, \ldots, 10$.

b. Kun je nu gemakkelijk de schaalverdeling langs de y-as tussen de 10 en 100 aangeven?

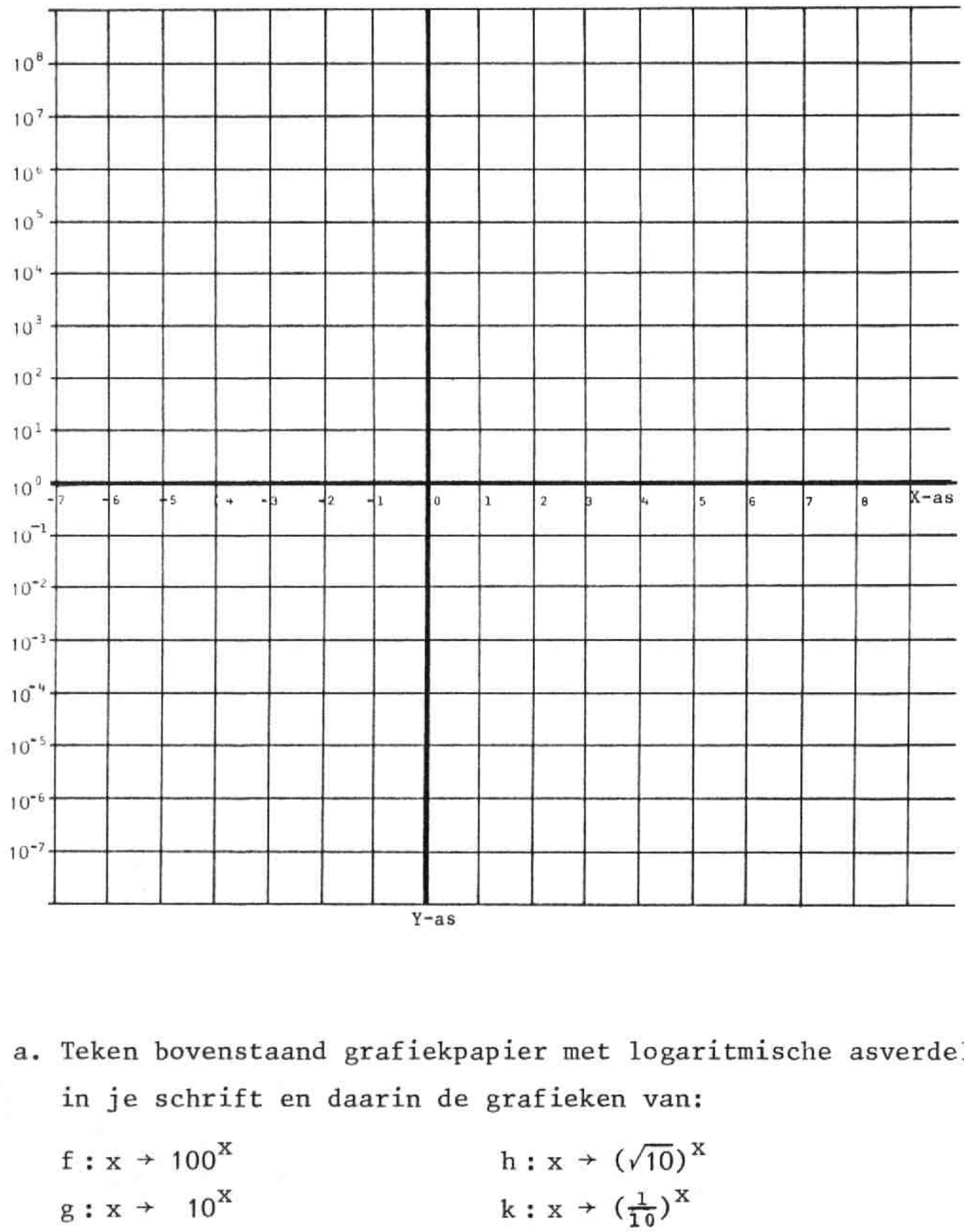
Hier zie je nog wat afmetingen uit de wereld om ons heen met elkaar vergeleken.

≫ 82. Waar is het nulpunt van de hieronder afgebeelde schaal?





Mt. Everest



≫ 83. a. Teken bovenstaand grafiekpapier met logaritmische asverdeling in je schrift en daarin de grafieken van:

$f : x \to 100^x$ $\qquad$ $h : x \to (\sqrt{10})^x$

$g : x \to 10^x$ $\qquad$ $k : x \to (\frac{1}{10})^x$

Neem steeds $x \in \mathbb{R}$.

b. Schrijf de functies f, g, h en k alle als macht van 10.

c. Welk verband bestaat er tussen de exponenten van de functies en de richtingscoëfficiënten van de grafieken?

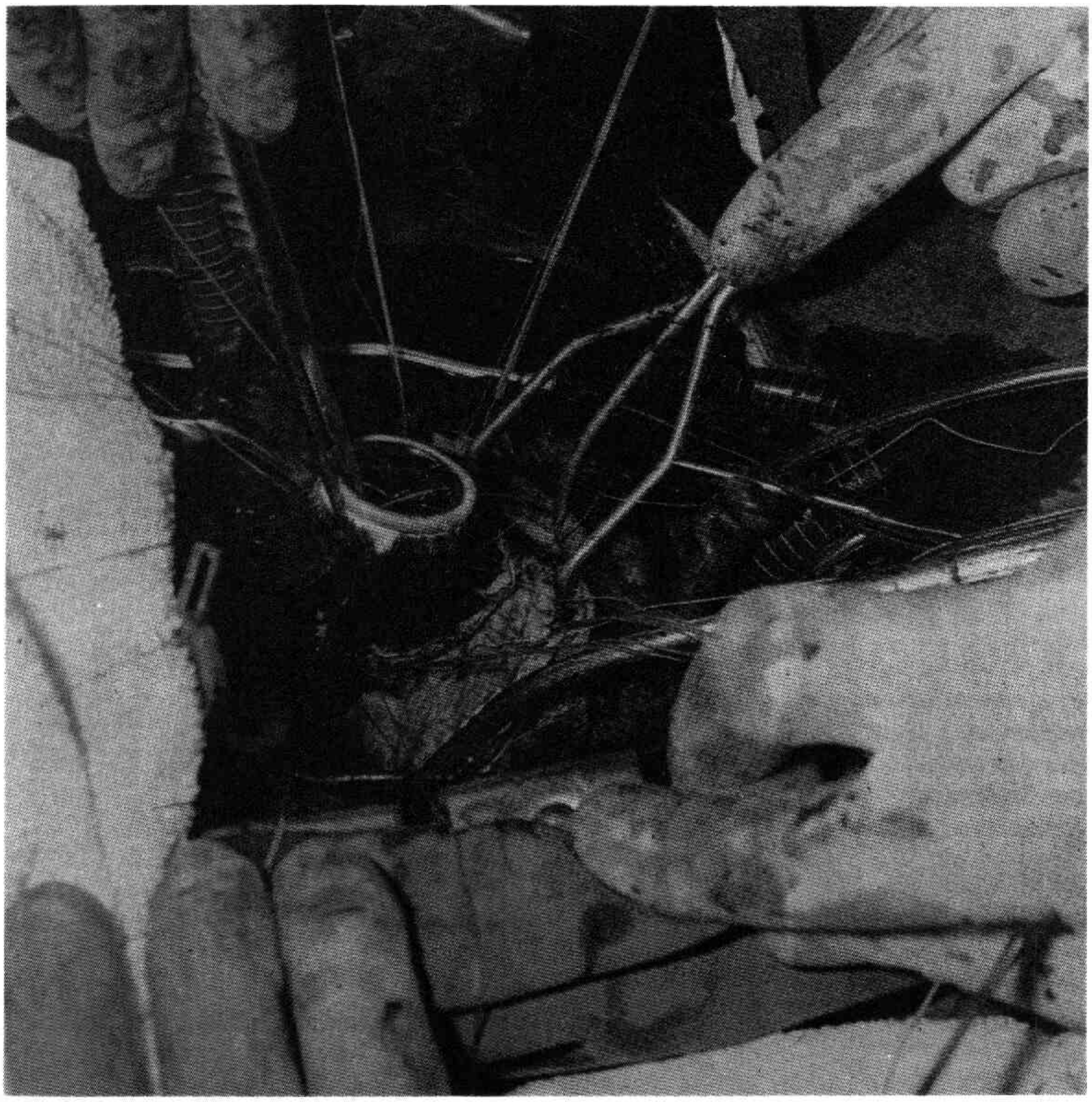
d. Teken nu ook de grafiek van: $1 : x \to 2^x$ in dezelfde figuur.

e. Verklaar waarom $2^x = 10^{({}^{10}\log 2)\cdot x}$.

f. Zie je kans uit de richtingscoëfficiënt van de grafiek van $x \to 2^x$ een schatting te geven van de grootte van ${}^{10}\log 2$?

g. Hoe zou je op soortgelijke wijze een benadering kunnen vinden voor ${}^{10}\log 3$?

Ernstig beschadigde hartkleppen worden tegenwoordig vervangen door nieuwe hartkleppen van kunststof.
Op de foto wordt zo'n klep ingebracht.



Op onderstaande grafiek zie je het aantal mensen dat in de U.S.A. sterft aan hartkwalen (per 100.000) naar leeftijd uitgezet; en wel op logaritmisch papier.

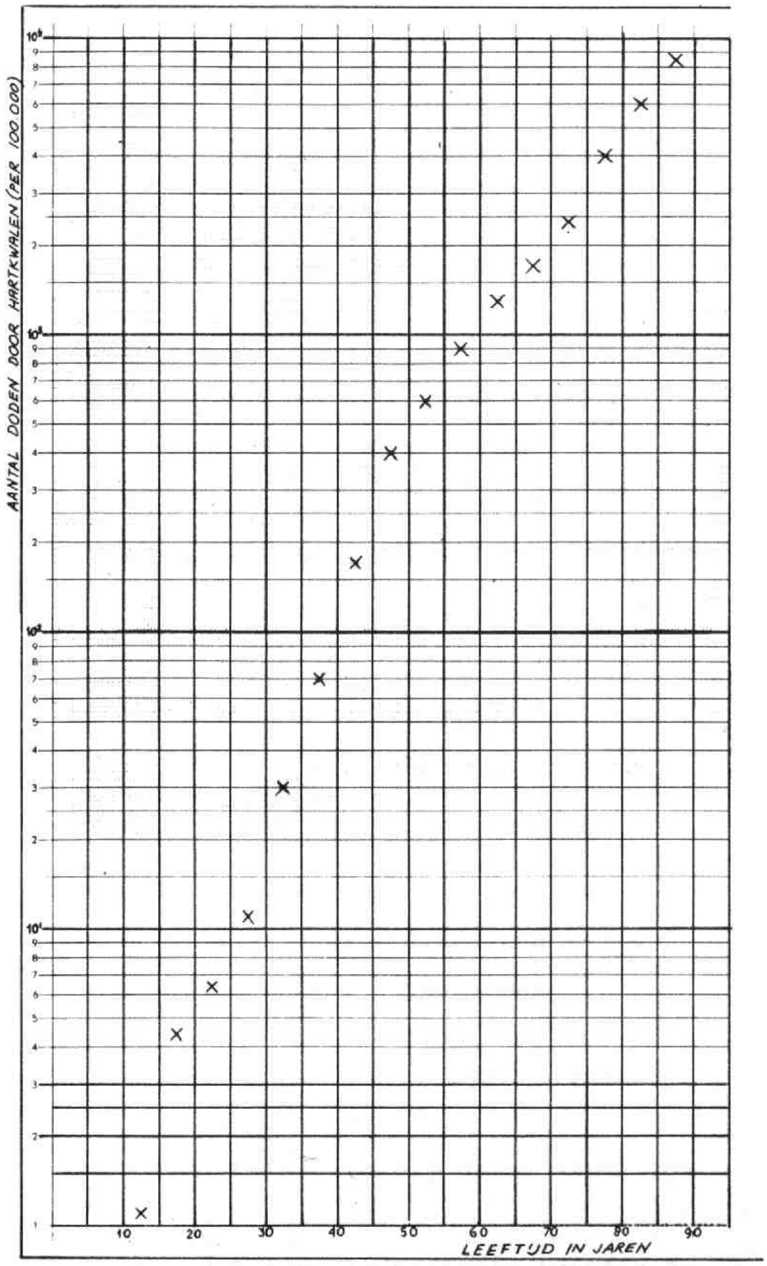
≫ 84. a. Hoe kun je zien dat de mensen ingedeeld zijn in leeftijdsgroepen van 5 jaar "breedte"?

b. Hoeveel mensen (per 100.000) sterven in de groep van 10-15 jarigen aan hartkwalen?

c. En in de groep van 85-90 jarigen?

d. Tussen de 50 en 90 jaar is de grafiek een vrijwel rechte lijn. Wat wil dat in dit geval zeggen?

e. Hoe groot is de groeifactor ongeveer (over het stuk grafiek van 50-90 jaar; 5 jaar als eenheid). Wat wil dat hier zeggen?



f. Kun je een functievoorschrift bedenken voor dat stuk grafiek?

≫ 85. Van drie landen, India, Zweden en Tsjecho-Slowakije, vind je hierbij het aantal *legale* abortussen dat plaats vindt per jaar, per 1000 vrouwen tussen 15 en 44 jaar oud.

Jaar	India	Zweden	Tsjecho-Slowakije
1967	-	6,0	32,5
1968	-	7,0	33,8
1969	-	9,0	34,0
1970	-	10,5	32,5
1971	-	12,3	32,0
1972	0,2	15,2	30,0
1973	0,4	16,2	26,2
1974	0,8	19,0	25,0
1975	1,5	21,2	-

a. Teken de drie grafieken die het verloop van het aantal abortussen in die landen aangeeft op log. grafiekenpapier.

b. In welk land neemt het aantal abortussen het snelst toe? Hoe zie je dat aan de grafiek?

c. Is de toename in dat land:
- vrijwel lineair;
- vrijwel exponentieel;
- geen van beide?

d. Hoe groot is de "groeifactor" in India? (Ongeveer).

e. Stel dat een land X dezelfde 'groeifactor' heeft als India, maak dan het volgende tabelletje af en teken de grafiek in de tekening van vraag a erbij.

Jaar	Aantal abortussen
1967	1,0
1968	...
. .	. .
1975	...

f. Wat valt op als je de grafieken van India en het land X met elkaar vergelijkt?

Als bij twee exponentiële functies de groeifactor gelijk is, worden de grafieken op logaritmisch papier evenwijdige lijnen.

g. Zie je aan de grafieken van Zweden of Tsjecho-Slowakije nog een gedeelte dat je exponentieel of lineair zou kunnen noemen? (Over minstens 4 jaar).

≫ 86. In hoofdstuk 4 zag je hoe de groei van een paar ratten tot een enorme explosie leidde bij ideale omstandigheden.(Opgave ≫ 27).

a. Teken op logaritmisch grafiekenpapier de groei onder ideale omstandigheden én onder minder ideale omstandigheden. (Zie voor bijzonderheden opgave ≫ 27).

b. Vanaf welk moment kun je in ieder der gevallen spreken van exponentiële groei?

≫ 87. In hoofdstuk 6 (opgave ≫ 33) stond de groei van zeesterren beschreven.

Deze was: groeifactor 1,25 over 10 dagen (vanaf 30ste dag tot en met 80ste dag).

Op de 30ste dag is de diameter 3 cm.

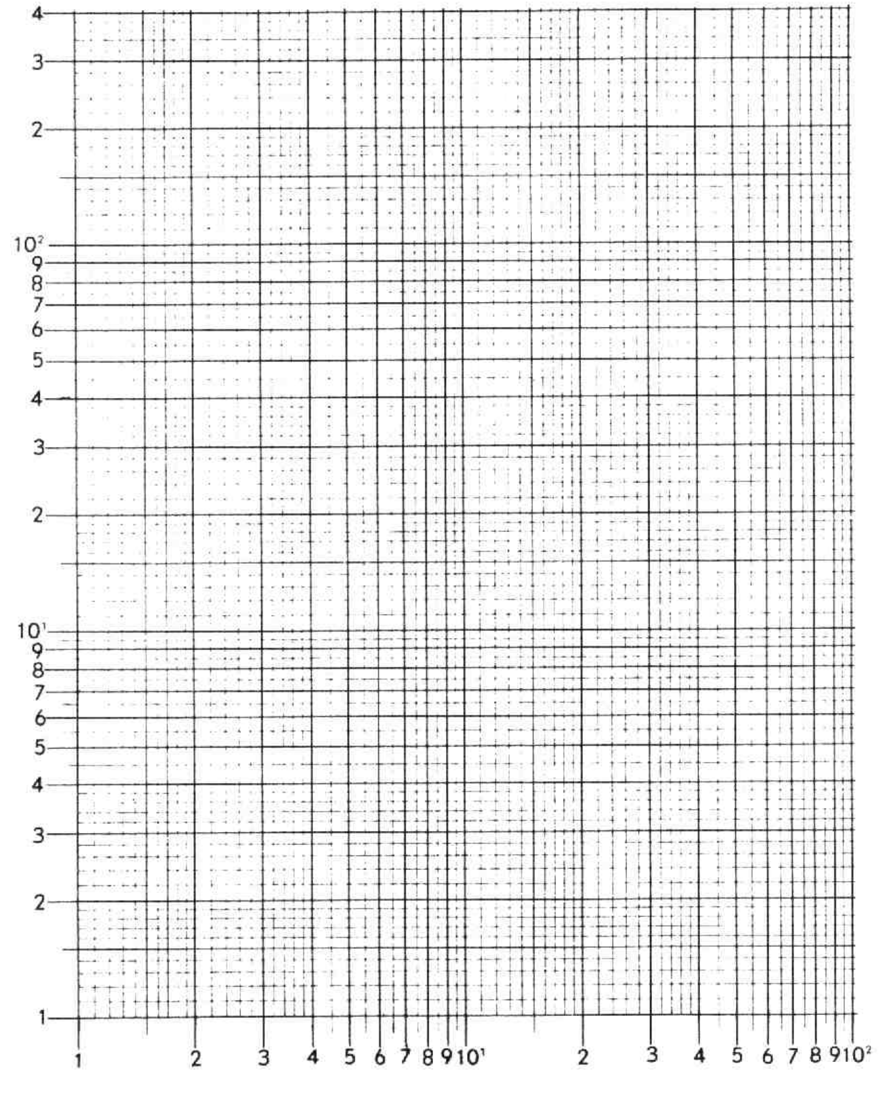
Enige aanvullende informatie over de eerste 30 dagen (bij benadering): $g(x) = (1,5)^x - 1$ (x in eenheden van 10 dagen).

Teken het verloop van de groei op logaritmisch papier.

Waarom kun je bij g(x) niet van een zuiver exponentiële functie spreken?

We hebben al kennis gemaakt met zgn. *logaritmisch grafiekpapier* waarbij de X-as "gewoon" was verdeeld en de Y-as logaritmisch.
Soms werken we ook met *dubbellogaritmisch* papier waarbij beide assen logaritmisch verdeeld zijn.
Het voordeel van logaritmisch papier was dat een *exponentiële* functie te voorschijn kwam als een *rechte lijn*.
De vraag is welke functies als grafiek op dubbellogpapier een rechte lijn hebben.

≫ 88.



a. Teken de grafieken van:
   $f : x \to x$; $g : x \to x^2$; $h : x \to x^3$; $k : x \to x^4$.

b. Hoe zal de grafiek van $p : x \to x^{-2}$ eruit zien op dubbellogpapier?

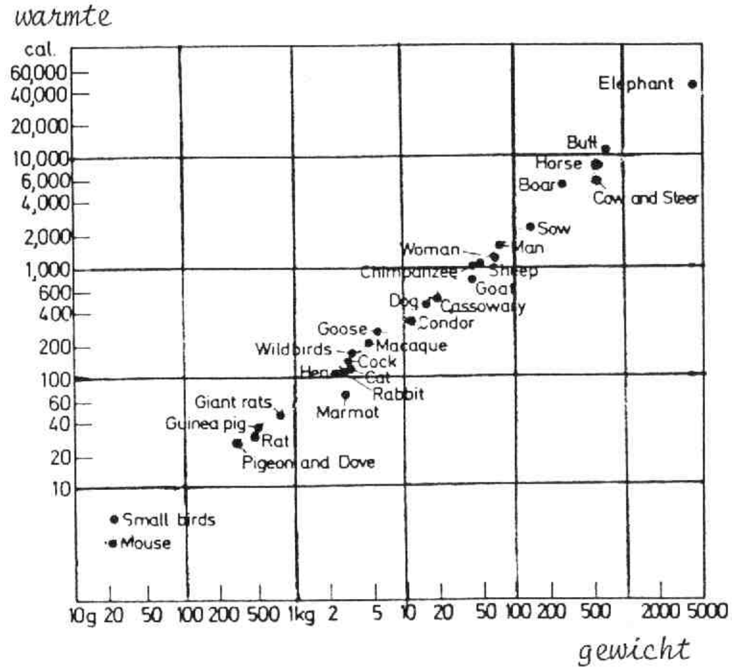
c. Hoe zal de grafiek van $q : x \to 4x^2$ eruit zien op dubbellogpapier?

≫ 89. Laat zien, d.m.v. de hoofdeigenschap dat de grafieken van *machtsfuncties rechte lijnen* worden op dubbellogaritmisch papier.
Wat valt bovendien van de richtingscoëfficiënten van die lijnen te vertellen?

Omgekeerd is het ook zo dat als de grafiek op dubbellogaritmisch papier een rechte is, de functie een functie is van de vorm:

$$x \rightarrow ax^n$$

≫ 90. Een mooi voorbeeld is de grafiek die het verband aangeeft tussen het gewicht van warmbloedige dieren en de dagelijkse hoeveelheid warmte die geproduceerd wordt:



a. Teken de rechte die bovenstaande puntengrafiek redelijk benadert.

b. Teken in hetzelfde plaatje de grafieken van:

$x \rightarrow 100 \cdot x$

en (X: gewicht in kilo's;

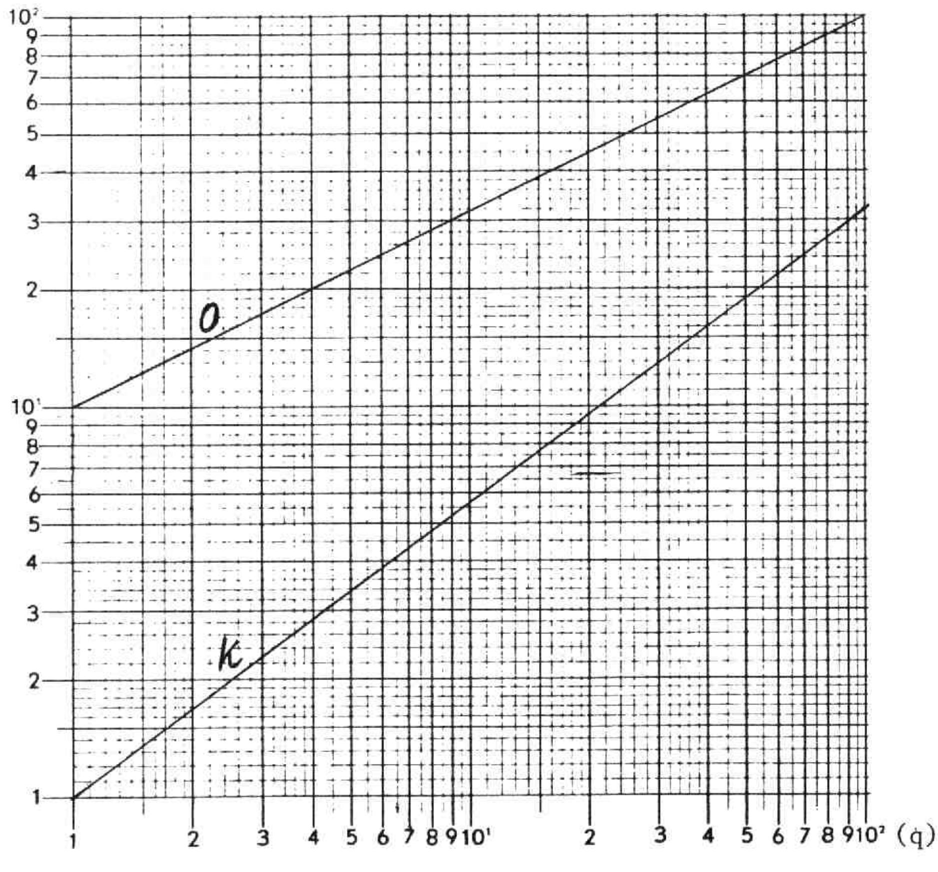
$x \rightarrow 100 \cdot x^{\frac{1}{2}}$ Y: warmte in calorieën).

c. Stel dat $x \rightarrow a \cdot x^n$ de oorspronkelijke grafiek moet weergeven. Hoe groot zal n dan ongeveer moeten zijn?

≫ 91. Opbrengst (= O) en kosten (= K) van een bepaald produkt zijn functies van de geproduceerde hoeveelheid (= q).

Op dubbellogaritmisch papier zijn de grafieken van O en K als functies van q getekend.

Neem aan dat die grafieken zich rechtlijnig voortzetten en elkaar ontmoeten in het punt (10000,1000).



a. Beschrijf O en K als functies van q met behulp van een formule.

b. Teken op millimeterpapier de grafieken van O en K voor $0 \leq q \leq 10000$ in een assenstelsel met 'gewone' schaalverdeling langs de assen. (Neem de eenheid op de verticale as tien keer zo groot als op de horizontale).

c. Bereken voor welke q de winst W maximaal is; $W = O - K$.

d. Welke van de twee grafische voorstellingen, die met logaritmische schaalverdeling, resp. lineaire schaalverdeling, leent zich het beste voor het aflezen van de maximale winst?

Samenvatting:

Er bestaan twee soorten logaritmisch grafiekpapier:

1. Logaritmisch grafiekpapier:

   - De X-as heeft de gebruikelijke verdeling: 0, 1, 2, ...
   - De Y-as heeft de 10^0, 10^1, 10^2, 10^3 ... verdeling.

   Grafieken van exponentiële functies: $b \cdot a^x$ worden op dit papier rechte lijnen.
   Het grondtal is bepalend voor de richtingscoëfficiënt van die rechte lijn: gelijke grondtallen geven dezelfde richting.

2. Dubbellogaritmisch grafiekpapier:

   - De X-as heeft de 10^0, 10^1, 10^2, ... verdeling.
   - De Y-as heeft de 10^0, 10^1, 10^2, ... verdeling.

   Grafieken van machtsfuncties: $a \cdot x^n$ worden op dit papier rechte lijnen.
   De macht (exponent) bepaalt de richting van de rechte lijn: gelijke machten geven dezelfde richting.

Output, behorend bij blz. 31, opgave ≫ 38.

g= 2.5
dt= 0.0001

t	f	h	h/f
-2	0.160	0.14663	0.9164
-1	0.400	0.36687	0.9172
0	1.000	0.91553	0.9155
1	2.500	2.28643	0.9146
2	6.250	5.71728	0.9148
3	15.625	14.28604	0.9143

g= 3
dt= 0.0001

t	f	h	h/f
-2	0.111	0.12212	1.0990
-1	0.333	0.36627	1.0988
0	1.000	1.09911	1.0991
1	3.000	3.29494	1.0983
2	9.000	9.87053	1.0967
3	27.000	29.65927	1.0985

g= 2.7
dt= 0.0001

t	f	h	h/f
-2	0.137	0.13635	0.9940
-1	0.370	0.36836	0.9946
0	1.000	0.99421	0.9942
1	2.700	2.67982	0.9925
2	7.290	7.21455	0.9896
3	19.683	19.49310	0.9904

g= 2.71
dt= 0.0001

t	f	h	h/f
-2	0.136	0.13575	0.9970
-1	0.369	0.36806	0.9974
0	1.000	0.99659	0.9966
1	2.710	2.70128	0.9968
2	7.344	7.30515	0.9947
3	19.903	19.83643	0.9967

g= 2.72
dt= 0.0001

t	f	h	h/f
-2	0.135	0.13590	1.0054
-1	0.368	0.36836	1.0019
0	1.000	1.00136	1.0014
1	2.720	2.72036	1.0001
2	7.398	7.37667	0.9971
3	20.124	20.00809	0.9943