Differentiëren

https://hdl.handle.net/1874/10252

DIFFERENTIËREN 2

Freudenthal instituut
Archief

DIFFERENTIËREN 2

Tiberdreef 4 - 3561 GG Utrecht

DIFFERENTIËREN 2

Een produktie ten behoeve van de experimenten in het kader van de Herverkaveling Eindexamenprogramma's Wiskunde I en II V.W.O.

Samenstelling: Martin Kindt
Jan de Lange Jzn

Vormgeving: Ellen Hanepen

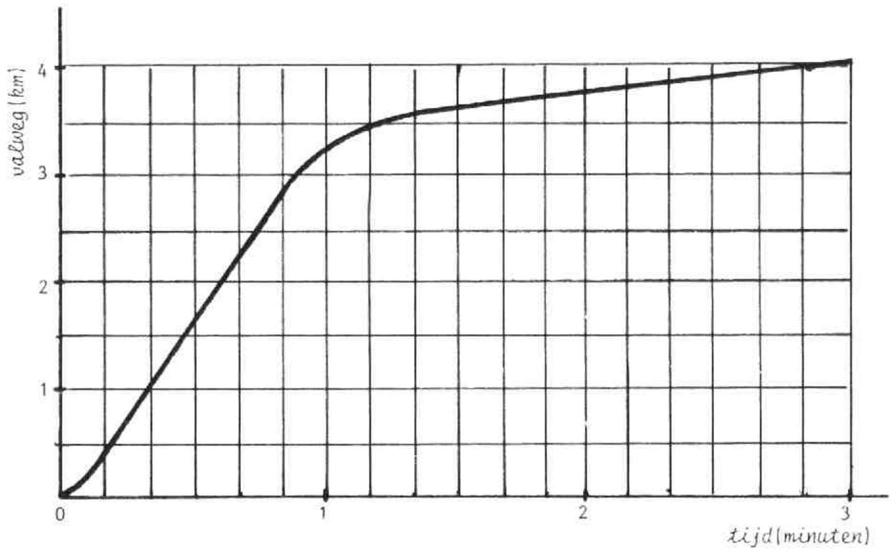
Utrecht, december 1982.

1

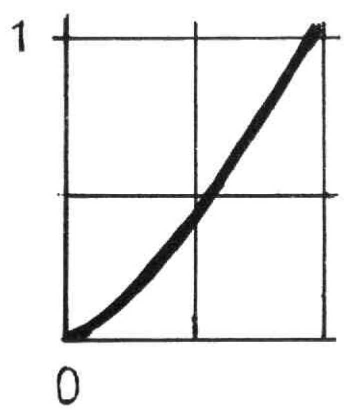
HELLINGFUNCTIES

De foto toont een parachutespringer in de zogenaamde kruishouding tijdens de 'vrije val'. In die houding ondervindt de springer een maximale luchtweerstand, waardoor zijn snelheid niet hoger wordt dan zo'n 200 km/u. Als de parachutist ca 800 m boven de aarde is, wordt het hoog tijd om de parachute open te maken. (Volgens de veiligheidsvoorschriften moet de parachute open zijn op 600 m afstand van de aarde!). Om dit in de gaten te kunnen houden heeft de springer een hoogtemeter aan de pols.....

Onderstaande figuur toont de *valweg* (in km) van een parachutist als functie van de *tijd* (in minuten).
De parachutist is neergedaald uit een helicopter op 4 km hoogte.



≫ 1. a. Hiernaast zie je het beginstuk van de grafiek uitvergroot.
Hoe groot was de *gemiddelde* snelheid van de parachutist gedurende de eerste tien seconden van zijn val?



b. En hoe groot was de *snelheid op het moment*, tien seconden na het begin van zijn val?

c. Na hoeveel meter vallen werd de maximale snelheid van 200 km/u bereikt?

d. Heeft de parachutist zich aan de veiligheidsvoorschriften gehouden m.b.t. het moment van openen van zijn parachute?

e. Met welke snelheid (in km/u) kwam de parachutist terug op moeder aarde?

f. Teken de grafiek van de *valsnelheid* (km/u) als functie van de *tijd*.

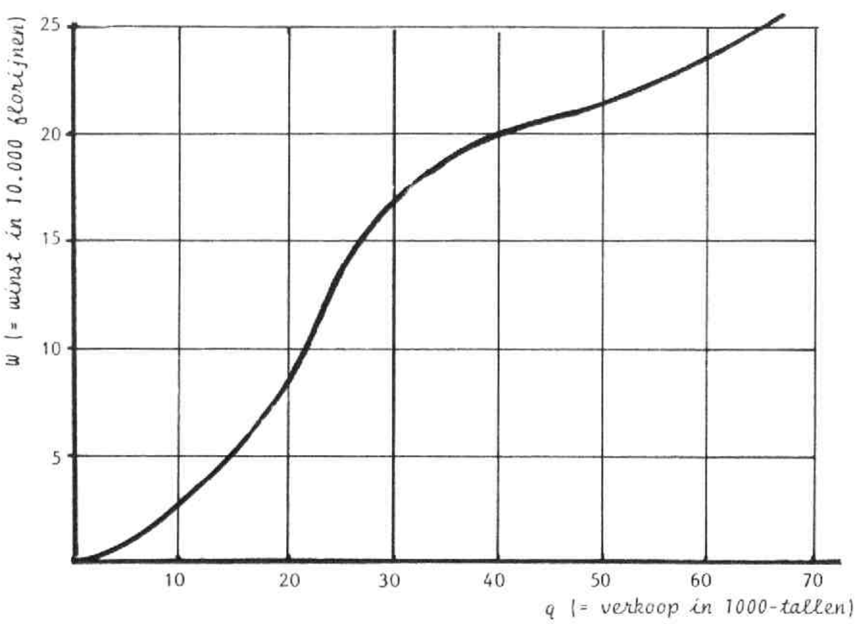
Luchtballet van het Amerikaanse National Enquirer Free Fall Team tijdens een vrije val boven Florida.

De langste vrije val die is geregistreerd werd gemaakt door Kapt. Joseph W. Kittinger, die uit een ballon op ruim 31 km hoogte sprong en pas na zo'n 26 km vallen zijn parachute opende.

Dat ook vrouwen op dit gebied van wanten weten bewees de Russin Olga Kommisarova, die er niet tegen opzag om zich met een snelheid van 200 km/u over een afstand van 14 km te laten vallen.

≫ 2.

Bovenbaas AWS en zijn trouwe secretaris Steenbreek bestuderen de winstcurve die laatstgenoemde op zijn gebruikelijke punctuele wijze heeft vervaardigd. Het betreft hier de verkoop van de 'rose brillen', een artikel waarmee AWS veel eer heeft ingelegd ...



a. Hoe kun je verklaren dat de winst niet steeds even sterk toeneemt? (Met name in de buurt van $q = 40.000$ treedt een sterke vervlakking op).

b. Hoe groot is de gemiddelde winst per bril bij een verkoop van 20.000 rose brillen?
   Bij welke hoeveelheid verkochte brillen is de gemiddelde winst per bril maximaal?

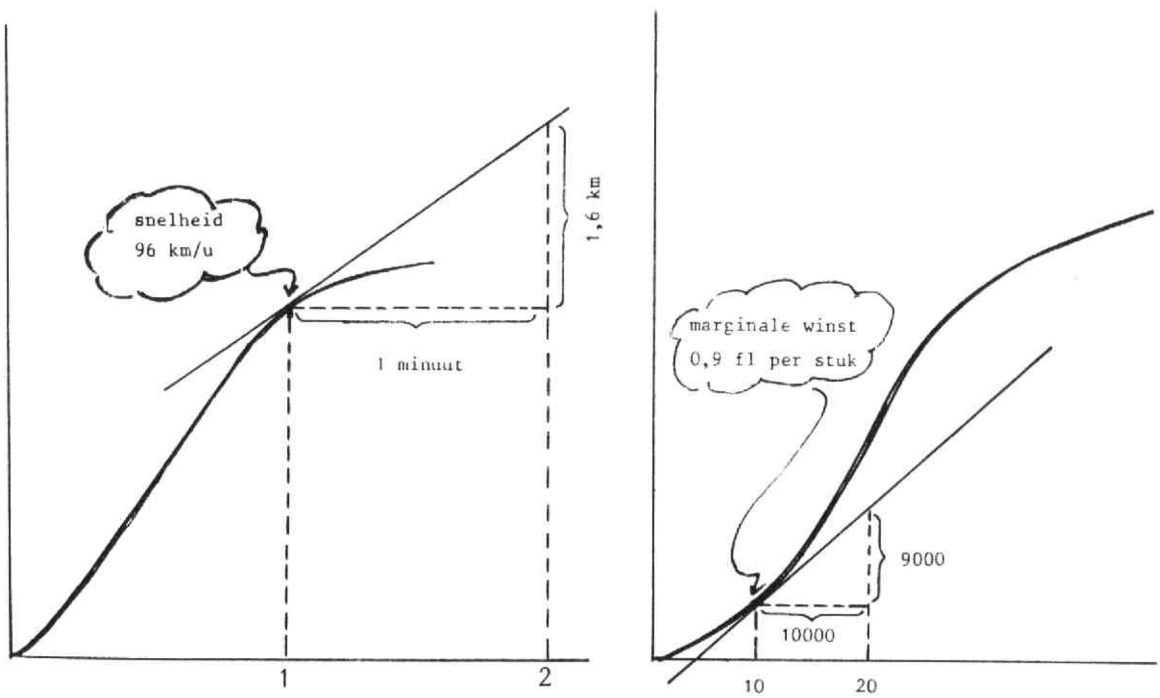
c. De 'snelheid' waarmee de winst toeneemt bij toename van de verkoop noemt men de *marginale winst*. Bij welke afzet is de marginale winst het grootst?

d. Schets de grafiek van de marginale winst als functie van de verkoop.

Even terugkijken naar de twee voorbeelden.

In beide voorbeelden speelt de *helling* van de grafiek een rol:

- in de grafiek van de parachutist vind je de snelheid (op een gegeven moment) door de helling van die grafiek in het geschikte punt te meten;
- in de winstgrafiek van AWS geeft de helling van de grafiek in een gegeven punt de zogenaamde marginale winst.



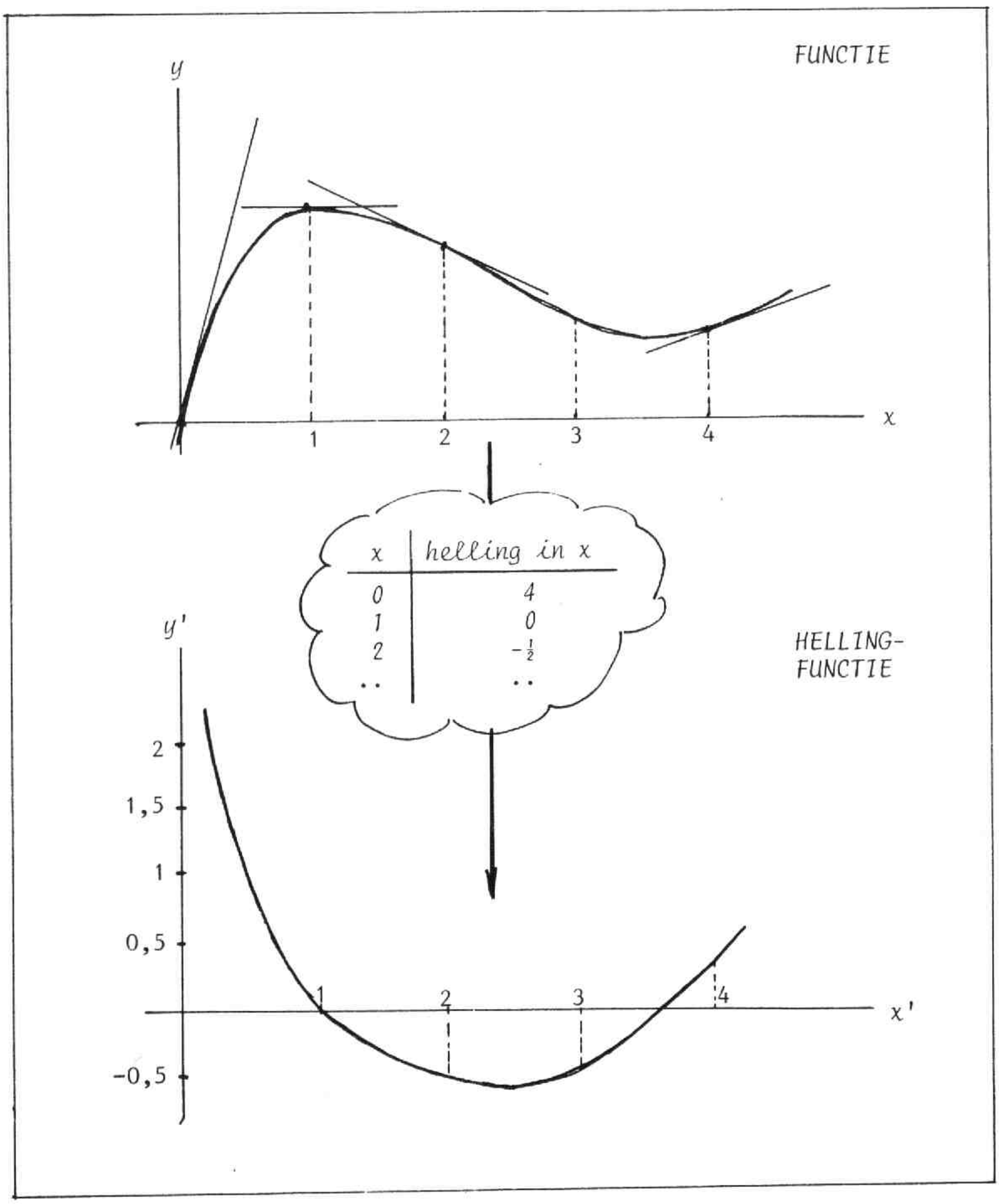
We zeggen:

- de valsnelheidsfunctie is de *hellingfunctie* of *afgeleide functie* van de valafstandsfunctie;
- de marginale winstfunctie is de hellingfunctie van de winstfunctie.

Wiskundig bekeken:

bij een functie $y = f(x)$, waarvan de grafiek een redelijk glad verloop heeft, kun je de hellingfunctie vinden door de helling van de grafiek te meten in een aantal punten.

De grafiek van de hellingfunctie krijg je, als je de helling uitzet tegen de x-coördinaat.



≫ 3. Bekijk de grafieken van pag. 6.

a. Hoe groot is de helling van de grafiek van f in het punt met $x = 4$?

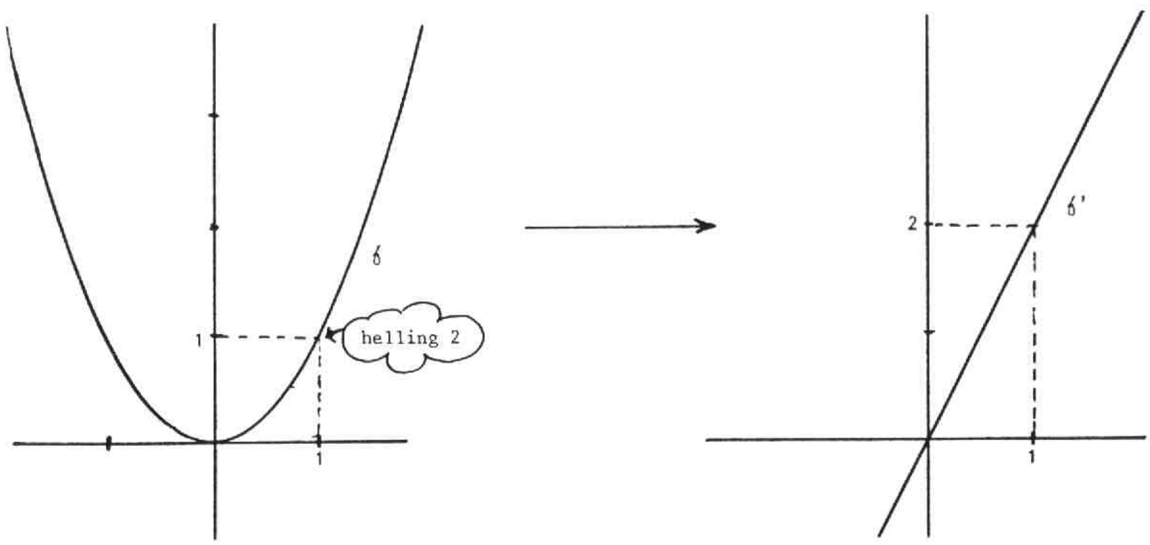
b. In welke punten heeft de grafiek van f een horizontale raaklijn?

c. Hoe zie je aan de grafiek van de afgeleide functie f' dat f dalend is in het interval $[1;3\frac{1}{2}]$?

d. In welk punt op dat interval daalt f het sterkst?

Bij een functie waarvan de grafiek niet alleen 'redelijk glad' is, maar waarbij ook een 'mooie' formule past, kunnen we de hellingfunctie vinden door *differentiëren*.

Het meest bekende voorbeeld:



$f(x) = x^2 \longrightarrow f'(x) = 2x$

punt op grafiek van $y = x^2$	(0,0)	(1,1)	(-1,1)	(3,9)	(-5,25)
helling van de grafiek	0	2	-2	6	-10

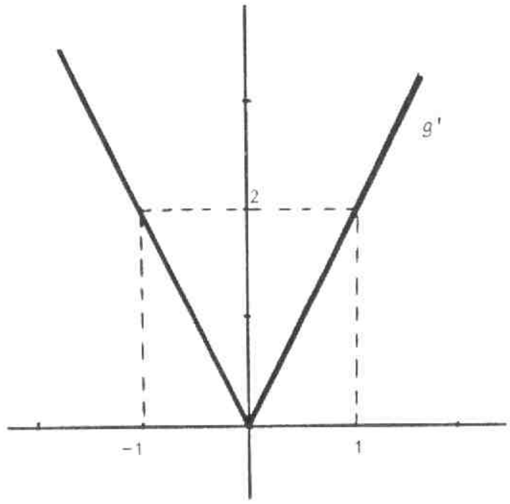
≫ 4. a. Hoe groot is de helling van de grafiek van $f(x) = x^2$ in het punt (10,100)?
Geef een vergelijking van de *raaklijn* in dat punt.

b. In welk punt van de grafiek van f maakt de raaklijn een hoek van 45° met de positieve x-as?

c. De grafiek van f is spiegelsymmetrisch (t.o.v. de y-as).
Neem twee punten van de grafiek die elkaars spiegelbeeld zijn (t.o.v. de y-as). Wat kun je zeggen van de helling van de grafiek in die beide punten?

d. Van een functie g is de hellingfunctie g' gegeven:

Hoe zou de grafiek van g eruit kunnen zien?



≫ 5. a. Teken de grafiek van $f(x) = \frac{1}{3}x^3$ op het interval [-2;2] .
(Neem de eenheid 2 cm en teken de punten met $x = 0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, -1, 1\frac{1}{2}, -1\frac{1}{2}, 2, -2$ heel nauwkeurig).

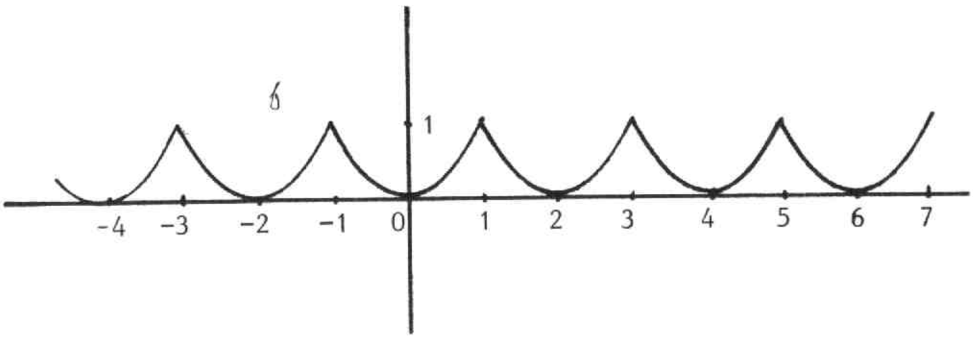
b. Meet de helling in die negen punten.

c. Teken de grafiek van de hellingfunctie op het interval [-2;2] .

d. Welke formule past er bij die hellingfunctie?

e. Noem de punten van de grafiek met x-coördinaat -2 en 2 resp. A en B. In twee punten van de grafiek is de raaklijn parallel met de lijn AB.
Welke punten zijn dat? (Bereken de coördinaten in één decimaal nauwkeurig).

≫ 6.



De functie f is periodiek met periode 2.

Voor $-1 \leq x \leq 1$ geldt: $f(x) = x^2$.

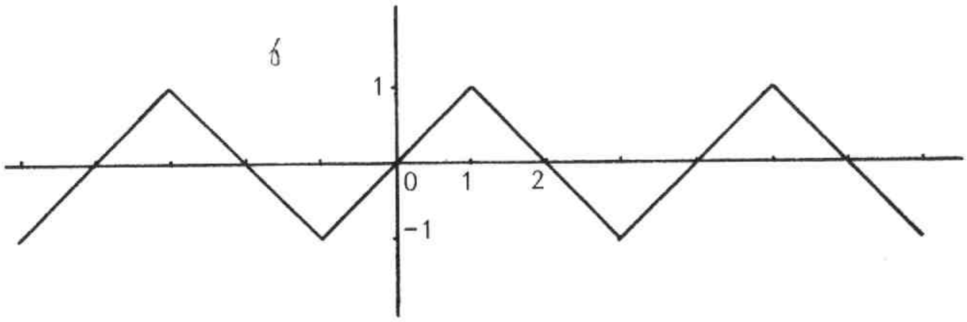
a. Teken de grafiek van de hellingfunctie op het interval [-3;7].

b. In de 'pieken' van bovenstaande grafiek, dus de punten (1,1); (-1,1); (3,1); (-3,1); (5,1) enz., is de helling van die grafiek niet gedefinieerd!
Je zou hoogstens kunnen zeggen dat er in die punten twee hellingen zijn; de grafiek verloopt in die punten niet 'glad', er is een abrupte verandering van richting.
Hoe kun je die abrupte richtingsverandering in de hellinggrafiek waarnemen?

Opmerking

Van de functie f in bovenstaand voorbeeld zeggen we dat zij *niet differentieerbaar* is in $x = 1, -1, 3, -3, 5$ enz.

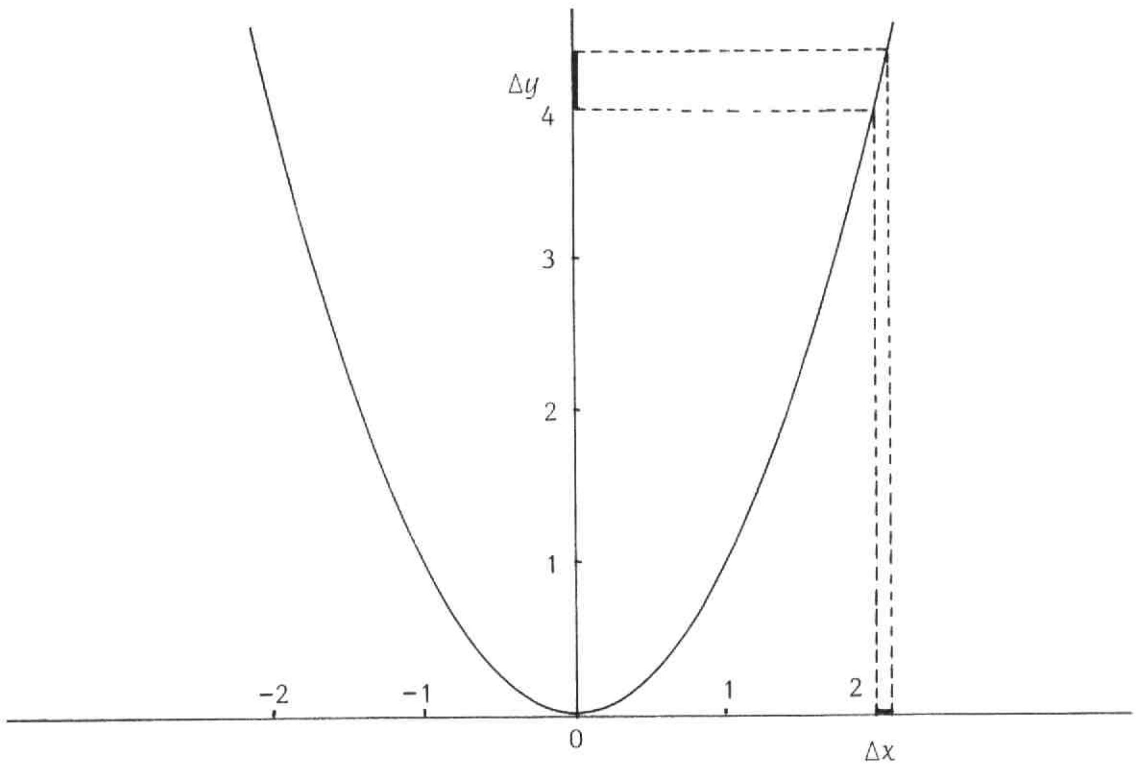
≫ 7. a. Teken ook de grafiek van de hellingfunctie f' van:



b. In welke punten is f niet differentieerbaar?

De helling in een punt van de grafiek van $y = f(x)$ is een maat voor de *verandering van y* t.o.v. de *verandering van x*.

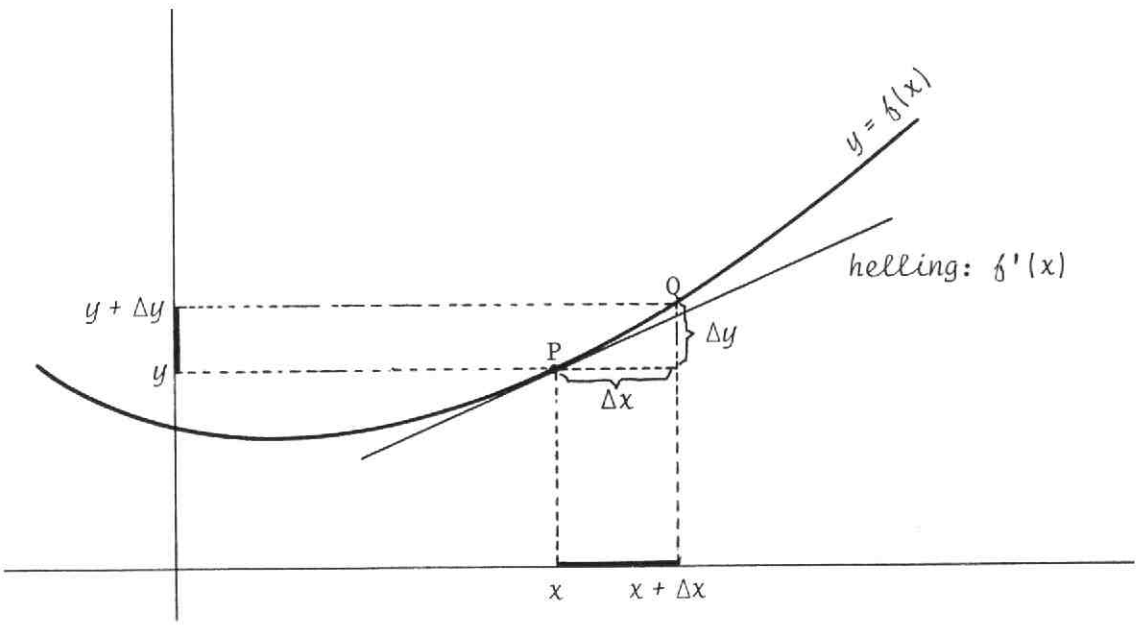
Voorbeeld:



$f(x) = x^2$; $f'(x) = 2x$, dus: $f'(2) = 4$ (= helling in het punt op $x = 2$).
Als we x laten groeien van 2 tot 2,1, groeit y van 2^2 tot $2{,}1^2$, dus van 4 tot 4,41.
De verandering van x resp. y geven we aan met Δx resp. Δy.
In bovenstaand voorbeeld (bij startpunt $x = 2$) geldt:
bij $\Delta x = 0{,}1$ hoort $\Delta y = 0{,}41$.
En dus: Δy is ongeveer 4 maal Δx. ($\Delta y \approx 4 \cdot \Delta x$).
De factor 4 is juist de helling in het punt op $x = 2$.

≫ 8. Bekijk opnieuw $f(x) = x^2$ en laat x groeien van 8 tot 8,1.
Ga na dat Δy ongeveer gelijk is aan $f'(8)$ maal Δx.

Helling benaderen.



De *gemiddelde helling* van een klein stukje grafiek (PQ) is nagenoeg gelijk aan de helling van de raaklijn in P.

Ofwel:

Als Δx heel klein is, geldt: $\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx f'(x)$ (1)

en dus: $\Delta y \approx f'(x) \cdot \Delta x$ (2)

De benaderingen (1) en (2) zijn in het algemeen nauwkeuriger naarmate Δx kleiner gekozen wordt.

Om de 'exacte' helling in P te vinden, moeten we de verandering van x als het ware 'oneindig klein' nemen.

In de wiskunde noteert men dan:

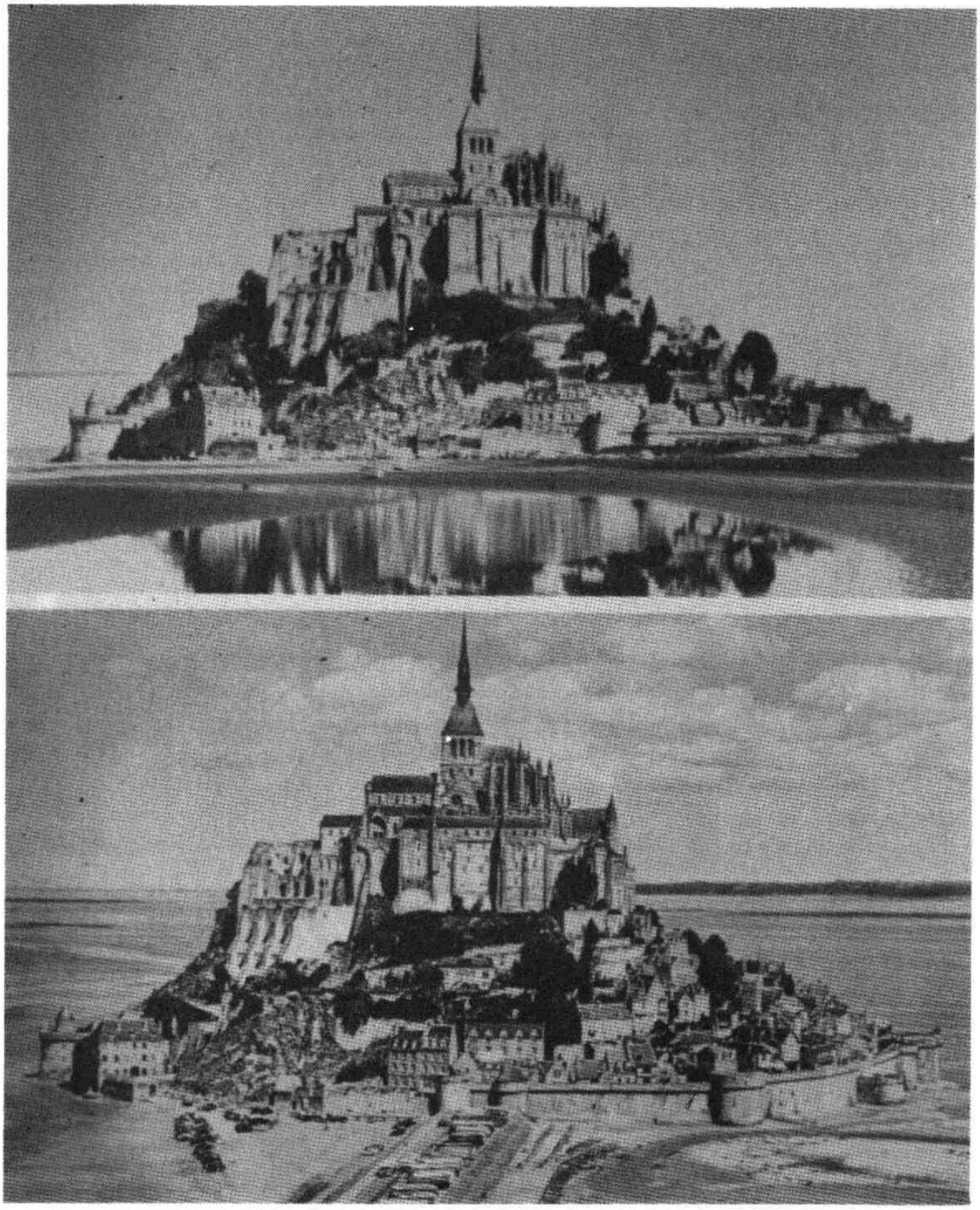
$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \qquad (3)$$

De oneindig kleine veranderingen noemt men 'differentialen' en $\frac{dy}{dx}$ wordt *differentiaalquotient* genoemd.

≫ 9. $y = x^3$. Bereken op twee manieren $\frac{dy}{dx}$ voor $x = 2$.

a. Door benadering m.b.v. $\frac{\Delta y}{\Delta x}$; neem $\Delta x = 0{,}001$.

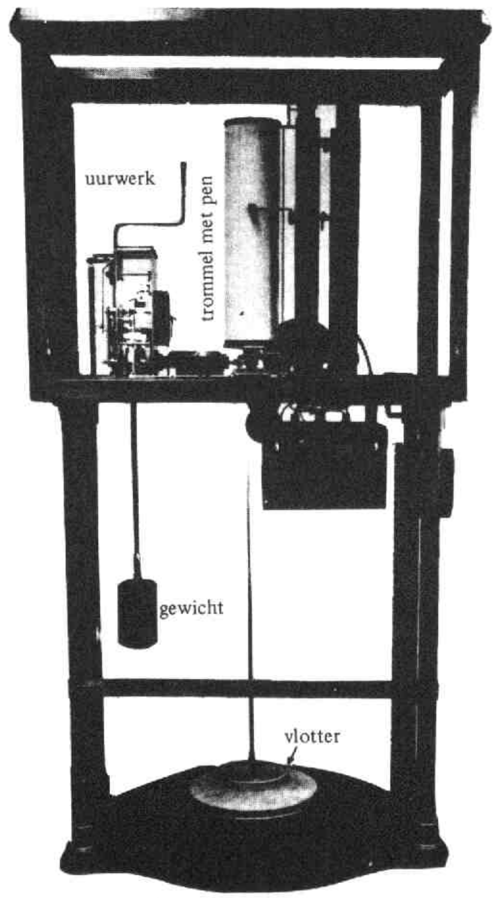
b. Door gebruik te maken van de hellingfunctie.



Mont St. Michel (Normandië) is beroemd om zijn snelle tijwisselingen. Het niveauverschil tussen hoog en laag water is 15 meter. En bij eb trekt het water zich terug tot zo'n 17 km van de kust. De vloedbeweging bereikt een snelheid van ruim 30 km per uur.

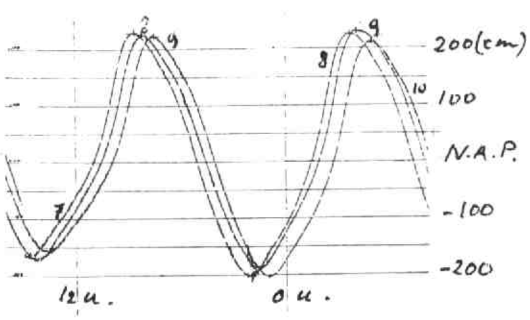
2

AFGELEIDE VAN SINUS EN COSINUS



Normaalpeilschrijver

Waterstanden worden nauwkeurig geregistreerd. Via een vernuftig geconstrueerd apparaat, waarin een vlotter verbonden is met een naald die op een langzaam ronddraaiende trommel schrijft, wordt de waterbeweging in een grafiek vastgelegd. Zo'n apparaat noemt men een "normaalpeilschrijver".
De trommel draait in één etmaal één keer rond; om papier te sparen verwisselt men dit pas na 3 of 4 dagen. Als het papier van de rol wordt gehaald, krijg je zoiets te zien:

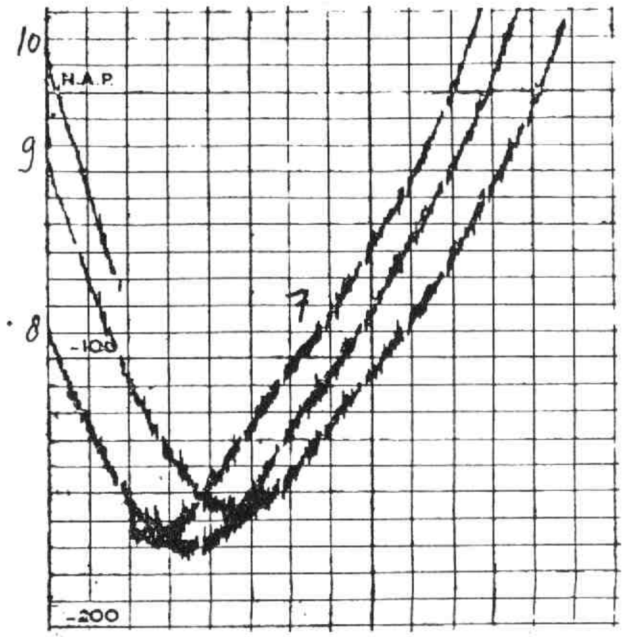


≫ 10. De grafieken zijn naar data genummerd (7, 8, 9, 10).
Hoe zou je er één doorlopende grafiek van kunnen maken?

≫ 11. a. Hoe hoog staat het water (gemiddeld) bij eb resp. vloed?

b. Hoe lang is de periode van de getijbeweging?

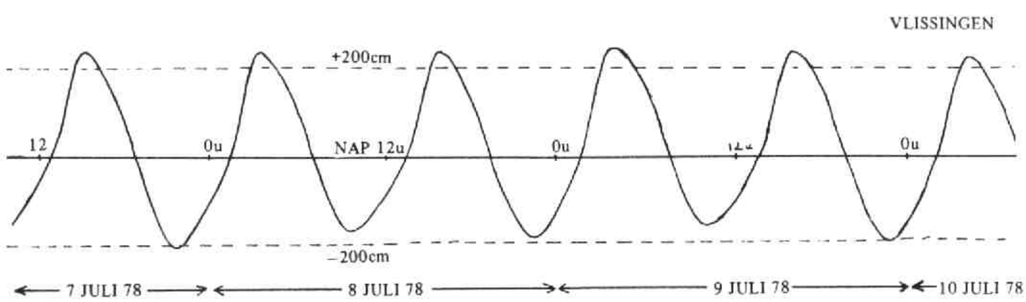
Doordat de grafiek van de getijbeweging in Vlissingen (blz. 13) sterk verkleind is afgebeeld, gaat er wat informatie verloren. Vergelijk maar eens met het stukje grafiek van het formaat zoals je dat op de rol te zien krijgt ...



12.00

≫ 12. Wat is in deze figuur duidelijker zichtbaar dan in de verkleinde grafiek?

≫ 13. Hieronder zie je de stukken Vlissingen-grafiek achter elkaar geplakt:



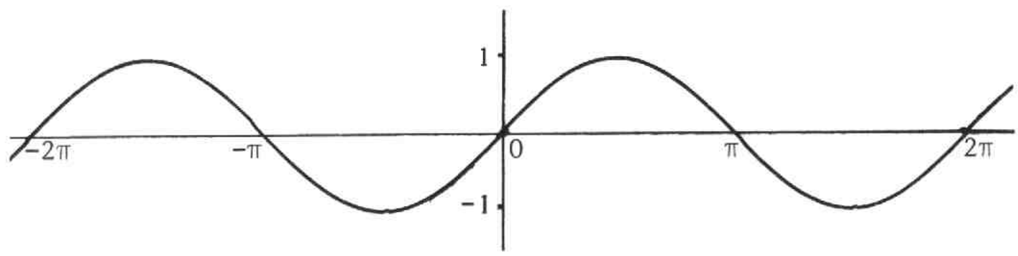
a. Wat geeft de helling in een punt van die grafiek aan?

b. Schets de hellinggrafiek voor 8 juli.

c. Hoe kun je uit die hellingfunctie de momenten van 'dood tij' aflezen?

De waterstand in Vlissingen is een periodieke functie van de tijd. De grafiek ervan is een soort golflijn die een beetje doet denken aan de 'sinusgrafiek'.

Grafiek van $f(t) = \sin t$:

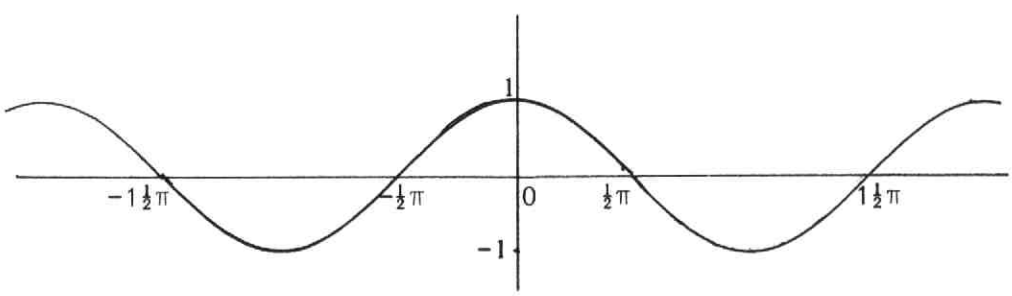


≫ 14. a. Wat is de periode van de functie $f(t) = \sin t$?

b. Lees uit de grafiek de waarden af van:
$\sin 0$; $\sin \pi$; $\sin \frac{1}{2}\pi$; $\sin 27\pi$; $\sin 15\frac{1}{2}\pi$.

≫ 15. De grafiek van $g(t) = \cos t$ krijg je door de sinusgrafiek over een afstand $\frac{1}{2}\pi$ naar links te verschuiven.

Grafiek van $g(t) = \cos t$:

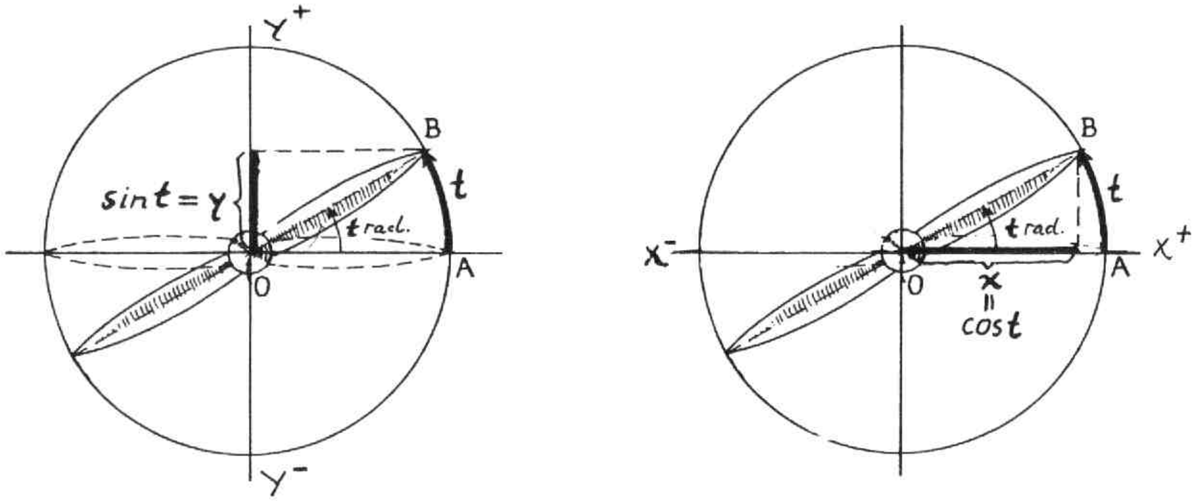


a. Wat is het bereik van de functie g?

b. Lees uit de grafiek de waarden af van:
$\cos 0$; $\cos \pi$; $\cos \frac{1}{2}\pi$; $\cos 27\pi$; $\cos 15\frac{1}{2}\pi$.

c. Vergelijk de grafieken van sinus en cosinus
Voor welke getallen tussen 0 en 2π geldt: $\sin x = \cos x$?
(Controleer met je rekenmachientje).

Het ontstaan van de sinus- resp. cosinusgrafiek kan worden verklaard uit de cirkelbeweging, bijv. van een draaiende propeller.



Een propeller (halve lengte = 1 meter) draait om het punt O. De beginstand van de propeller is horizontaal.
Als de propellertip een boog van t meter heeft afgelegd (van A naar B) zijn de *verticale projectie* (= y) resp. de *horizontale projectie* (= x) gelijk aan $\sin t$ resp. $\cos t$.

≫ 16. De omtrek van de cirkel (straal 1 m) die de propellertip beschrijft is 2π meter.
Als de propellertip een achtste deel van de cirkelomtrek heeft afgelegd, geldt $t = \frac{1}{4}\pi$.
De bijbehorende hoek AOB is dan $\frac{1}{4}\pi$ radialen.

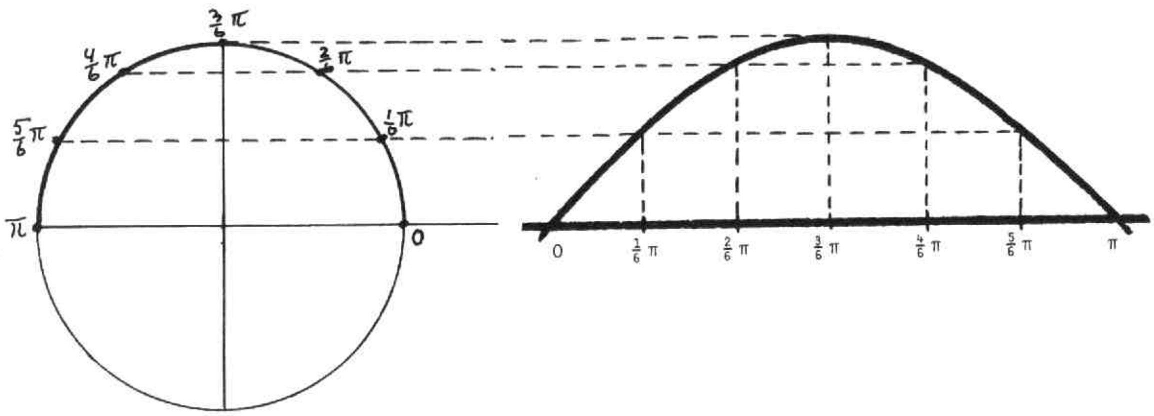
a. Hoeveel graden is dat?

b. Hoe groot is de hoek in graden tussen OA en OB als $t = \frac{3}{4}\pi$?
En als $t = \frac{4}{3}\pi$?

c. Toon aan: $\sin \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{\sqrt{2}}$. (Gebruik de stelling van Pythagoras).
Controleer de uitkomst met je rekenmachientje.

≫ 17. In de grafieken op blz. 15 kun je aflezen waar de sinus resp. de cosinus negatieve waarden aanneemt.
Hoe kun je dat aflezen uit de figuren hierboven?

De grafiek van de sinus krijg je door de y-coördinaat van de ene propellertip uit te zetten tegen de booglengte t:



≫ 18. Je gaat nu de hellingfunctie van y = sin t opsporen met een computer. Bekijk onderstaand structuurdiagram:

```
k ← INVOER
pi ← 3,14159265
dt ← k*pi
21 KEER (m van 0 tot 20)
    t ← (m/10)*pi
    dy ← sin(t + dt)-sin(t)
    h ← dy/dt
    UITVOER t,h
STOP
```

a. Als je voor k een (klein) getal kiest, bijv. 0,001, berekent dit programma in 21 punten van de grafiek van y = sin t de helling. Is die berekening exact?

b. Vertaal het structuurdiagram in een programma. Voer een kleine waarde voor k in en gebruik de output om een grafiek van de hellingfunctie te tekenen.

c. Enig idee welke functie de hellingfunctie is?

Hiernaast zie je de output voor $k = 0{,}0005$.
De keuze voor Δt (in het structuurdiagram staat er dt) is dus $0{,}0005\pi$.
Naast de hellinggetallen zie je ook de waarden van $\cos t$ voor $t = 0;\ 0{,}1\pi;\ 0{,}2\pi$ enz.
De tabel maakt het geloofwaardig dat de afgeleide functie van sinus juist de cosinusfunctie is.

t	helling (in t)	cos(t)
0.0000 pi	1.0000	1.0000
0.1000 pi	0.9508	0.9511
0.2000 pi	0.8085	0.8090
0.3000 pi	0.5872	0.5878
0.4000 pi	0.3083	0.3090
0.5000 pi	-0.0008	0.0000
0.6000 pi	-0.3098	-0.3090
0.7000 pi	-0.5884	-0.5878
0.8000 pi	-0.8095	-0.8090
0.9000 pi	-0.9513	-0.9511
1.0000 pi	-0.9999	-1.0000
1.1000 pi	-0.9507	-0.9511
1.2000 pi	-0.8085	-0.8090
1.3000 pi	-0.5871	-0.5878
1.4000 pi	-0.3082	-0.3090
1.5000 pi	0.0008	-0.0000
1.6000 pi	0.3097	0.3090
1.7000 pi	0.5884	0.5878
1.8000 pi	0.8095	0.8090
1.9000 pi	0.9512	0.9511
2.0000 pi	0.9999	1.0000

≫ 19. a. Bekijk bovenstaande getallen.
Je ziet dat de helling van de sinusgrafiek schommelt tussen 1 en −1.
Kun je dat 'aflezen' uit de sinusgrafiek (blz. 15)?

b. Controleer aan de hand van de sinusgrafiek de negatieve hellingen van bovenstaande tabel.

c. Op grond van de symmetrie van de sinusfunctie had je een symmetrisch getallenpatroon in de hellingfunctie kunnen verwachten.
In de 'cosinus-kolom' vind je dat inderdaad, maar in de 'helling-kolom' zijn er kleine afwijkingen.
Bijv. 'tweede uitkomst is 0,9508';
'voorlaatste uitkomst is 0,9512'.
Enig idee hoe die verschillen zijn ontstaan?

≫ 20. a. Voorspel de resultaten die je krijgt als je de helling laat berekenen voor de functie $y = 2\sin t$ (in de punten met $t = 0$; $t = 0{,}1\pi$; $t = 0{,}2\pi$; enz.)

b. Dezelfde opdracht voor $y = \sin t + 2$.

≫ 21. Vergelijk de grafieken van sinus en cosinus.
Wat is de afgeleide functie van de cosinusfunctie?

3

REKENREGELS

Hoe differentieer je ook al weer $3x^{10} - 5x^4 + 25$?

Niet te moeilijk:

3 keer $10x^9$ - 5 keer $4x^3$ + *nul!*

De regels die je hierbij gebruikt zijn:

1. Als $f(x) = g(x) + c$, dan is $f'(x) = g'(x)$.
   (Optellen met een constante geeft dezelfde hellingfuncties).
2. Als $f(x) = c \cdot g(x)$, dan is $f'(x) = c \cdot g'(x)$.
   (Vermenigvuldigen met een constante, betekent ook: hellingfunctie vermenigvuldigen met die constante).
3. Als $f(x) = g(x) \pm h(x)$, dan is $f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$.
   (Hellingfunctie van som of verschil is som of verschil van de hellingfunctie).
4. Als $f(x) = x^n$, dan is $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$
   (Exponent met 1 verlagen en als coëfficiënt ervoor).

Verder heb je in hoofdstuk 2 nog gezien:

5. a. Als $f(x) = \sin x$, dan is $f'(x) = \cos x$.
   b. Als $f(x) = \cos x$, dan is $f'(x) = -\sin x$.

≫ 22. Differentieer de functie f, in het geval $f(x) =$

a. $x^2 + \cos x$
b. $4x^3 + 19$
c. $5 \sin x + 4x - 3$
d. $\frac{3}{4}x^4 - 1\frac{1}{3}x^6$
e. $(1-x)(1+x)$
f. $\sin x - \cos x$

≫ 23. Men gebruikt ook de notatie $\frac{d}{dx}f(x)$ i.p.v. $f'(x)$.

Voorbeeld:

$\frac{d}{dx}(x^4 + 3x) = 4x^3 + 3$

a. $\frac{d}{dx}(x^8 - x^5 - 85) =$
b. $\frac{d}{dt}(10t^2 + 20t + 30 \sin t) =$
c. $\frac{d}{dx}(8 \cos x - 16x^3) =$
d. $\frac{d}{du}(1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + \frac{u^4}{24}) =$

≫ 24. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x$, domein $[-1; 6]$.

a. Neem de tabel over en vul in:

x	-1	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$								
$f'(x)$								

b. Teken de in de tabel aangegeven acht punten van de grafiek van f met de bijbehorende raaklijn.

≫ 25. $F(t) = 3t - t^3$, domein $[-1\frac{1}{2}; 2\frac{1}{2}]$.

a. In welke punten heeft de grafiek van F een horizontale raaklijn?

b. De functie F is *stijgend* op het interval $[-1; 1]$.
   Hoe kun je dat met behulp van F' berekenen?

c. Teken naast elkaar de grafieken van F en van F'.

d. In welk punt van de grafiek van F (tussen $x = -1$ en $x = 1$) is de helling het grootst?

Voorbeeld:

$f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 4$

- De punten met horizontale raaklijn vind je door de afgeleide functie gelijk te stellen aan nul:

  $f'(x) = -6x^2 + 6x$

  $$-6x^2 + 6x = 0$$
  $$6x(-x + 1) = 0$$
  $$x = 0 \text{ of } x = 1$$

  'Invullen' in de oorspronkelijke functie levert de punten (0,4) en (1,5) op.

- Waar stijgt resp. daalt de functie f?

  Dat zie je aan het tekenverloop van f'.

$f'(x)$	$-\ -\ -$	0	$+\ +\ +$	1	$-\ -\ -$
x		0		1	

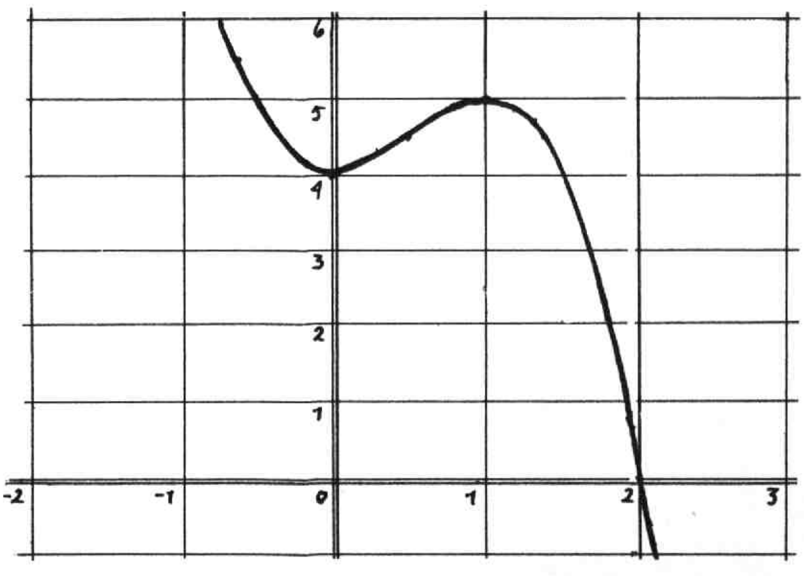
Conclusie:

Als x varieert van 0 tot ∞, daalt $f(x)$ (en wel van 5 tot $-\infty$)

Als x varieert van 0 tot 1, stijgt $f(x)$ (en wel van 4 tot 5)

Als x varieert van $-\infty$ tot 0, daalt $f(x)$ (en wel van ∞ tot 4)

- Grafiek van f:



Voor $x = 0$ heeft $f(x)$ een (plaatselijk) minimum 4.

Voor $x = 1$ heeft $f(x)$ een (plaatselijk) maximum 5.

≫ 26. $f(x) = x^4 + 2x^3 + 3$, domein $\mathbb{R}$.

a. Maak het tekenverloop van de hellingfunctie.

b. Er zijn twee punten op de grafiek met een horizontale raaklijn. Is er sprake van een (eventueel plaatselijk) maximum of minimum?

c. Teken de grafiek van f.

≫ 27. $y = 0{,}6x^5 - x^3$, domein $[-1{,}5; 1{,}5]$.

a. Maak het tekenverloop van de afgeleide functie.

b. Laat x variëren van $-1{,}5$ tot $1{,}5$.
Hoe varieert y?

c. Teken de grafiek van de functie. (Kies een 'grote' eenheid, bijv. 4 cm).

≫ 28. a. Teken in één figuur de grafieken van $f(x) = x$; $g(x) = \sin x$ en $h(x) = x + \sin x$ alle drie met domein $[0,2\pi]$.

b. Teken in een tweede figuur de grafieken van f', g' en h'.

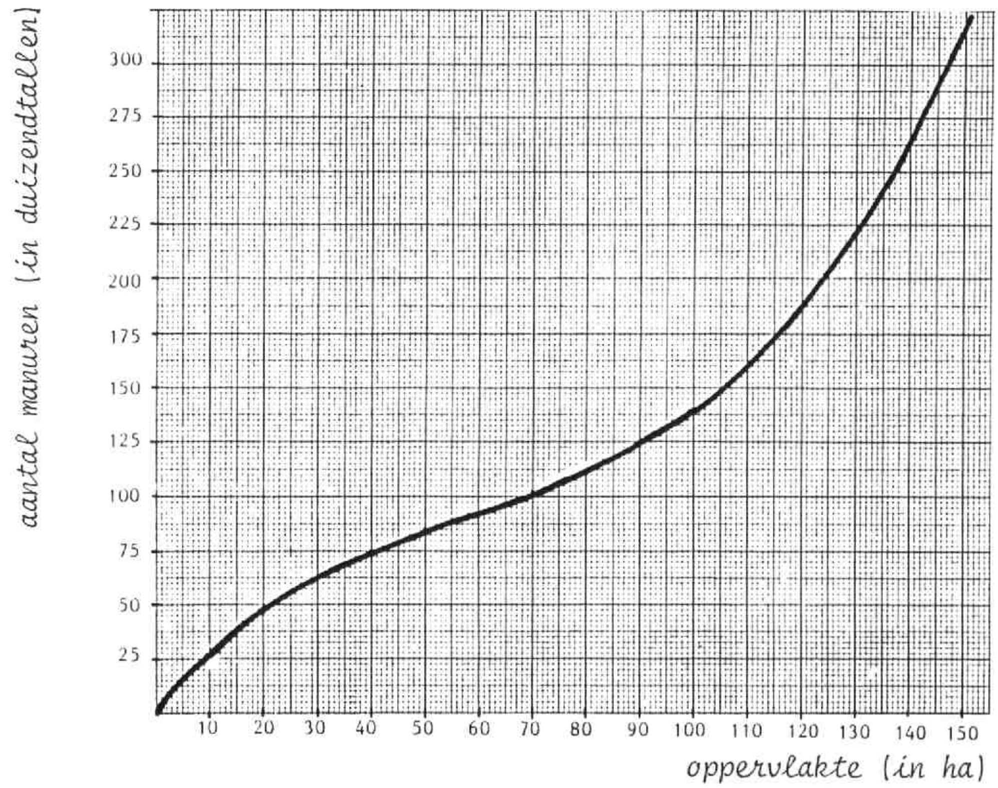
c. In welke punten heeft de grafiek van h een horizontale raaklijn?

≫ 29. a. Teken in één figuur de grafieken van $F(t) = \sin t$, $G(t) = \cos t$ en $H(t) = \sin t + \cos t$ alle drie met domein $[0; 2\pi]$.

b. De punten met horizontale raaklijn op de grafiek van H (de 'toppen' en 'dalen') liggen recht boven of onder de snijpunten van de grafieken van F en G. Hoe kun je dit verklaren met behulp van H'?

c. Wat is het bereik van de functie H?

≫ 30. Bij een landbouwproject in een van de ontwikkelingslanden is onderzocht hoe het aantal benodigde *man*uren afhangt van de oppervlakte van de landbouwgrond (in ha).



Een econoom heeft hierbij een wiskundig model opgesteld:

$$M = 0{,}2a^3 - 36a^2 + 3000a$$

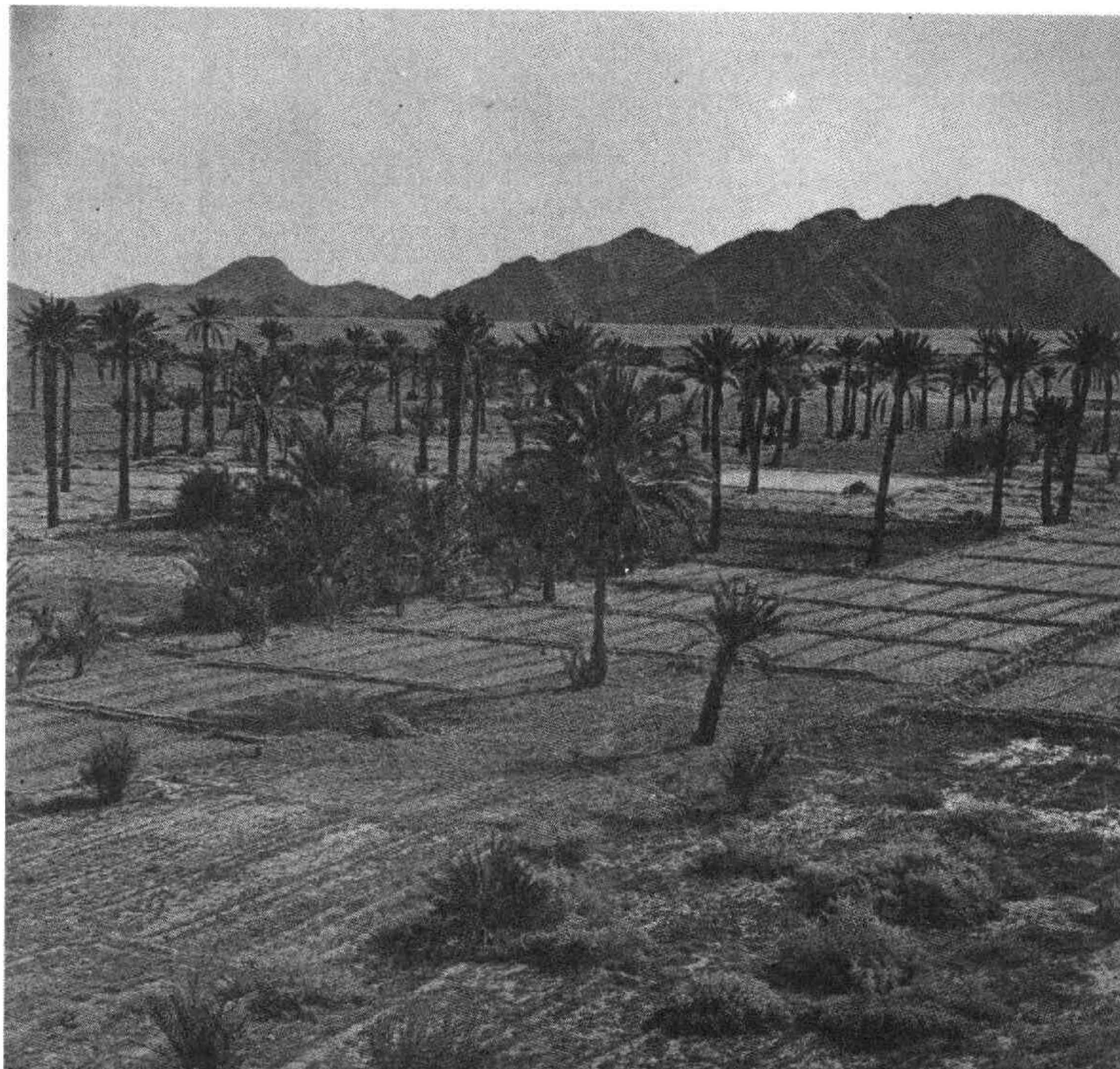
(M = aantal *man*uren; a = oppervlakte in ha).

a. Het gemiddelde aantal *man*uren per ha noemen we G.
Stel G op als functie van a.

b. Bereken bij welke landoppervlakte het gemiddelde aantal *man*uren per ha het laagst is.

c. Hoe kun je het antwoord op vraag b. ook vinden met behulp van bovenstaande grafiek?

d. Door modernisering van werktuigen e.d. wordt het aantal benodigde *man*uren verminderd met 20%.
Verandert hierdoor het antwoord bij b? Waarom?



Landbouw in de Derde Wereld

4

OPTIMALISEREN

In dit hoofdstuk tref je een aantal vraagstukken aan, waarbij het erom gaat een maximum (minimum) te vinden.
Bij deze problemen zul je gebruik kunnen maken van de computer. Achteraf zul je zien hoe je diezelfde problemen ook met differentiaalrekening aan kunt pakken.

≫ 31. In een fabriek werken aan een lopende band 40 mensen, die onderdelen klaarmaken voor electronische apparatuur.
De gemiddelde dagproduktie per man/vrouw is 100 onderdelen. De bedrijfsleider wil de totale produktie opvoeren en extra personeel aantrekken. Het effect van meer mensen aan de lopende band is echter dat de gemiddelde produktie per man/vrouw terugloopt. De bedrijfsleider vermoedt op grond van zijn ervaringen, dat iedere man/vrouw extra, de gemiddelde dagproduktie (p.p.) **met twee onderdelen** doet verminderen. Als hij dus 43 mensen laat werken aan de lopende band is de gemiddelde dagproduktie 94 onderdelen.
Ga bij beantwoording van de volgende vragen ervan uit dat de bedrijfsleider 'goed zit' met zijn schatting.

a. Vergelijk de totale dagproduktie van 40 mensen met de totale produktie van 43 mensen aan de lopende band.

b. Je ziet dat bij een toename van 40 naar 43 mensen de totale produktie is gestegen. Neemt de bedrijfsleider echter veel meer mensen in dienst, bijv. 60, dan loopt de totale produktie terug door de sterke daling van de individuele produkties.
Hoe groot is de totale produktie van 60 mensen?

Bij zo'n probleem (als in ≫31), waarbij we aanvankelijk een stijging van de totale produktie hebben maar later een daling, kun je een *optimale* situatie verwachten, waarbij de totale produktie *maximaal* is.
Voor het berekenen in dit maximum en het bijbehorende optimale aantal werknemers, schakelen we de computer in.
We laten de totale produktie berekenen voor 40, 41, 42, .., 59 werknemers.
Hieronder zie je een structuurdiagram voor deze berekening:

```
20 KEER (n van 0 tot 19)
    a ← 40+n
    p ← 100-n*2
    t ← a*p
    UITVOER a,t
STOP
```

≫32. a. Wat stellen de variabelen n, a, p, t in het structuurdiagram voor?

b. Maak een programma bij dit structuurdiagram, laat dit verwerken door de computer en noteer de resultaten.

c. Hoe groot is de maximale dagproduktie?
En het optimale aantal werknemers?

d. Zet in een grafiek de totale dagproduktie uit tegen het aantal werknemers.

≫33. EEN VREEMD TARIEF

Een sportclub reserveert een bus om de leden naar een tournooi te vervoeren. De busmaatschappij ALHATO ('als haringen in een ton') rekent het volgende tarief:

- bij het voorgeschreven aantal passagiers (30) is de prijs per passagier *f* 15,--;
- als er meer passagiers mee willen zal ALHATO een oogje dichtknijpen en de volgende prijzen berekenen:

aantal	prijs
31	*f* 14,75
32	- 14,50
33	- 14,25
..	...

kortom, elke passagier meer doet de prijs met *f* 0,25 zakken.

Er mogen niet meer dan 50 passagiers mee, zodat de prijs per passagier minstens *f* 10,-- zal bedragen.

a. Bereken het totale bedrag dat ALHATO incasseert als er resp. 30, 40 en 50 passagiers meegaan.

b. Maak een structuurdiagram en een computerprogramma voor de berekening van het totale bedrag dat ALHATO ontvangt bij 30, 31, 32, ..., 50 passagiers.

c. Welk aantal passagiers is voor ALHATO het gunstigst?

≫34. Een supermarkt verkoopt potjes vruchtenyoghurt (inhoud ½ltr) tegen de prijs van ƒ 1,90.

Er worden wekelijks zo'n 500 van die potjes omgezet. Dat betekent dus een opbrengst van ƒ 950,--.

De bedrijfsleider schat dat elk dubbeltje prijsverlaging een omzetverhoging van 100 potjes tot gevolg heeft. De inkoopprijs is ƒ 1,-- per potje.

Ga er bij het maken van de volgende opdrachten vanuit dat de schatting van de bedrijfsleider goed is.

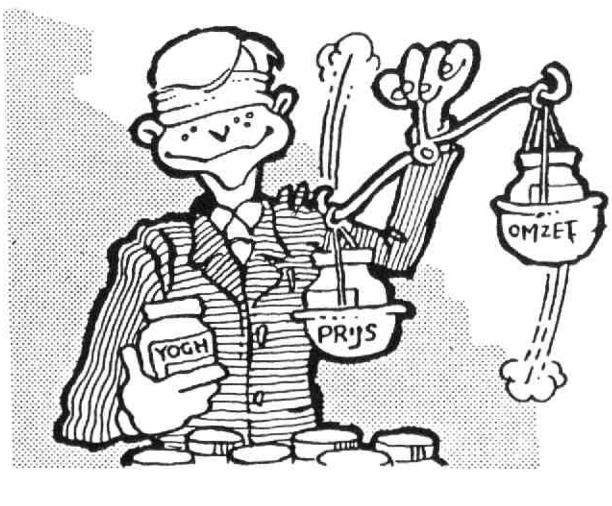
a. Wat zal de omzet zijn als de potjes yoghurt verkocht worden tegen inkoopsprijs? Welke opbrengst levert dat op?

b. Maak een computerprogramma voor het berekenen van de week-opbrengst van de potjes yoghurt voor de prijzen ƒ 1,90; ƒ1,80; ... ƒ 1,--.

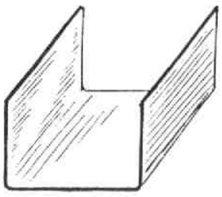
c. Dezelfde opdracht voor de totale winst per week.

d. Teken grafieken van resp. de opbrengst (per week) en de winst (per week) als functie van de prijs.

e. Welke prijs zou je de bedrijfsleider willen adviseren?



≫ 35. In het kader van ontwikkelingshulp worden naar een van de Sahelei-landen platen kunststof (60 cm breed) gezonden om goten te maken voor een bevloeiingssysteem. Het lijkt technisch het eenvoudigste om de goot zó te maken:

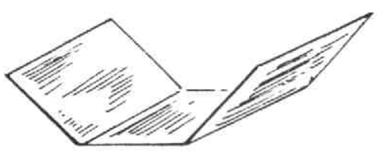


a. Een eerste opwelling is om zo'n goot 20 cm hoog en 20 cm breed te laten zijn.
Hoeveel liter water kan de goot per meter verwerken?

b. Verander de hoogte van de goot een beetje (bijv. 1 cm meer resp. 1 cm minder) en bereken de capaciteit van de goot (= aantal liter water per strekkende meter).
Zijn de in a. genoemde afmetingen optimaal?

c. Laat de hoogte van de goot variëren en maak een computerprogramma dat de capaciteit van de goot berekent en afdrukt bij verschillende afmetingen.
Conclusie?

≫ 36. a. Een van de medewerkers van het project komt op het idee om de goten zó te maken:



De opstaande randen maken hoeken van 135° met de bodem. Hoe groot is nu de capaciteit van de goot als de bodem 20 cm breed is?

b. Als je de antwoorden van 35a en 36a vergelijkt, zie je dat dit idee nog zo gek niet is.
Weliswaar wordt de goot ongeveer 30% lager, maar daar tegenover staat een winst in de breedte.

Laat de schuine opstaande rand in lengte variëren en houd een hoek van 135° met de bodem aan.

Spoor met behulp van de computer de optimale afmetingen van de goot op.

c. We variëren nu niet alleen de lengte van de opstaande rand, maar ook de hoek met de bodem. De variabelen noemen we x en φ (= "fi").

In dwarsdoorsnede:

Bekijk de computer-output voor de berekening van de capaciteit in de gevallen φ = 0, 5, 10, ..., 90 graden en x = 0, 2, 4, ..., 30 cm.

fi x=	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30
0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
5	0.00	10.11	19.52	28.23	36.24	43.54	50.15	56.06	61.27	65.78	69.59	72.70	75.11	76.82	77.83	78.14
10	0.00	20.13	38.85	56.17	72.07	86.56	99.64	111.31	121.57	130.42	137.86	143.89	148.51	151.72	153.52	153.91
15	0.00	29.99	57.83	83.54	107.10	128.53	147.81	164.95	179.95	192.81	203.53	212.10	218.54	222.83	224.99	225.00
20	0.00	39.59	76.28	110.07	140.96	168.95	194.03	216.22	235.50	251.88	265.37	275.95	283.62	288.40	290.28	289.25
25	0.00	48.87	94.03	135.50	173.28	207.35	237.73	264.41	287.39	306.67	322.26	334.14	342.33	346.83	347.62	344.72
30	0.00	57.73	110.93	159.59	203.71	243.30	278.35	308.87	334.85	356.30	373.21	385.58	393.42	396.72	395.48	389.71
35	0.00	66.12	126.82	182.10	231.97	276.42	315.44	349.05	377.24	400.02	417.37	429.30	435.82	436.92	432.60	422.86
40	0.00	73.96	141.59	202.85	257.78	306.36	348.59	384.48	414.02	437.22	454.08	464.58	468.75	466.56	458.04	443.16
45	0.00	81.20	155.08	221.65	280.90	332.84	377.47	414.78	444.78	467.47	482.84	490.90	491.65	485.08	471.20	450.00
50	0.00	87.77	167.22	238.35	301.16	355.66	401.84	439.70	469.24	490.47	503.38	507.97	504.25	492.20	471.84	443.16
55	0.00	93.62	177.90	252.83	318.41	374.65	421.53	459.07	487.26	506.10	515.60	515.75	506.55	488.00	460.10	422.86
60	0.00	98.73	187.06	265.00	332.55	389.71	436.48	472.85	498.83	514.42	519.62	514.42	498.83	472.85	436.48	389.71
65	0.00	103.04	194.64	274.81	343.53	400.83	446.68	481.10	504.08	515.62	515.73	504.40	481.64	447.44	401.80	344.72
70	0.00	106.53	200.60	282.20	351.34	408.02	452.23	483.98	503.26	510.08	504.43	486.33	455.75	412.72	357.22	289.25
75	0.00	109.18	204.91	287.19	356.01	411.37	453.28	481.73	496.73	498.28	486.37	461.01	422.19	369.91	304.18	225.00
80	0.00	110.98	207.58	289.78	357.60	411.02	450.06	474.71	484.97	480.84	462.33	429.42	382.13	320.44	244.37	153.91
85	0.00	111.92	208.60	290.03	356.22	407.16	442.86	463.31	466.52	456.49	433.21	392.68	336.91	265.90	179.64	78.14
90	0.00	112.00	208.00	288.00	352.00	400.00	432.00	448.00	448.00	432.00	400.00	352.00	288.00	208.00	112.00	0.00

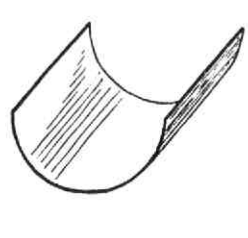
Bij welke afmetingen is (volgens de tabel) de capaciteit van de goot maximaal?

d. In de tabel zie je één rij van 'nullen' en verder vind je rechts onderin een nul. Hoe kun je die nullen meetkundig verklaren?

e. Kun je resultaten bij 35c en 36b terugvinden in de tabel?

f. Als de platen verbogen kunnen worden tot halve cilinders kun je de capaciteit nog vergroten.

Hoe groot is de capaciteit in dat geval?

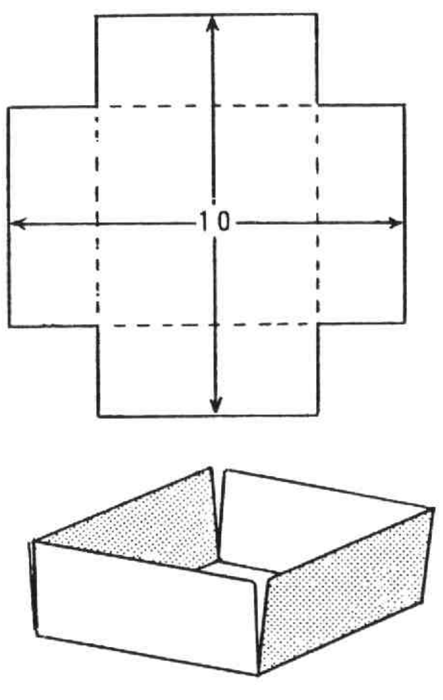


≫ 37. Een vierkante plaat metaal (afmeting 10 bij 10 cm) wordt van vier hoeken ontdaan en door opvouwen en vastsolderen van de snijranden omgevormd tot een bakje.

a. Wat voor vorm krijgt het bakje als je hele kleine hoekjes uitsnijdt?
   En als je bijna maximale hoeken uitsnijdt?

b. Laat de zijde van het uitgesneden vierkantje variëren en maak een computerprogramma dat hoogte, breedte, lengte en inhoud van het bakje berekent.

c. Wat is de maximale inhoud van het bakje?

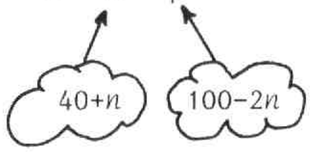


We keren terug naar het probleem van de lopende band.

```
20 KEER (n van 0 tot 19)
    a ← 40+n
    p ← 100-n*2
    t ← a*p
    UITVOER a,t
STOP
```

De *eindvariabele* t in het structuurdiagram is een functie van de *beginvariabele* n. Door substitutie van de tussenvariabelen a en p, kun je t als functie van n vinden.
Kijk maar:

$$t = a \cdot p$$



dus: $t = (40+n)(100-2n)$

ofwel: $t = -2n^2 + 20n + 4000$

≫ 38. Het maximum van deze functie kan nu worden gevonden met behulp van de afgeleide functie. Hoe?

≫ 39. Bekijk het structuurdiagram dat je dat je gemaakt hebt bij het ALHATO-probleem (≫ 33).
Schrijf de eindvariabele als functie van de beginvariabele en bereken het maximale totale bedrag m.b.v. de afgeleide functie.

≫ 40. Doe hetzelfde voor:

a. de maximale winst-berekening voor de potjes yoghurt (≫ 34).

b. de berekening van de goot met vertikale wanden die de grootste capaciteit heeft (≫ 35).

c. de berekening van het bakje met maximaal volume (≫ 36).

Bekijk opnieuw het structuurdiagram op blz. 25.

De variabele t (= totale dagproduktie) kun je ook schrijven als functie van a.

Dat gaat zó:

$$t = a \cdot p$$

$$100-2n$$

$$t = a(100-2n)$$

$a = 40+n$, dus $n = 40-a$

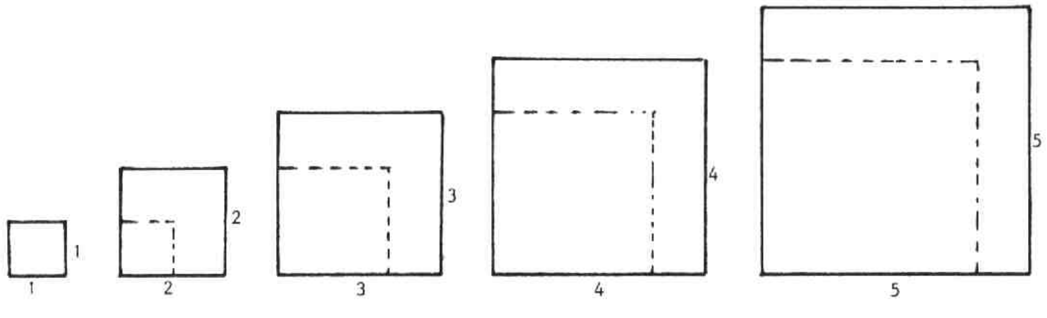
≫ 41. Schrijf t als functie van a.

Bereken het maximum van t met behulp van $\frac{dt}{da}$

5

PRODUKTREGEL

Groeiende vierkanten.



≫ 42. De plaatjes suggereren een sprongsgewijze groei van het vierkant. De zijde groeit gelijkmatig, d.w.z. de 'groeisprongen' zijn gelijk (nl. 1).
Groeit de oppervlakte ook gelijkmatig?

≫ 43. De oppervlakte van het vierkant noemen we O, de zijde x.

Vul in:

x groeit van	Δx	ΔO
1 tot 2	1	3
2 tot 3	1	5
3 tot 4	1	..
4 tot 5	1	..
20 tot 21	1	..
21 tot 22	1	..

≫ 44. Wat weet je van de aangroeiing van x in het geval $\Delta x = 1$ en $\Delta O = 105$?

≫ 45. Wat weet je van ΔO als x groeit van n tot $n+1$? (n is een of ander natuurlijk getal).

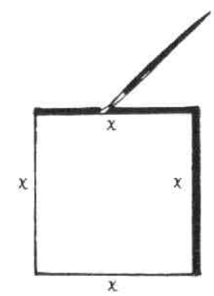
≫ 46. Maak ook een tabelletje van ΔO als x sprongsgewijs toeneemt met $\Delta x = \frac{1}{2}$.

a. Vind je eenzelfde regelmaat als in de ΔO - kolom bij ≫ 43? Hoe kun je dat in bovenstaande tekening zien?

b. Wat weet je van ΔO als x groeit van n tot $n+\frac{1}{2}$?

In theorie kunnen we het vierkant i.p.v. sprongsgewijs ook 'continu' laten groeien. Zo'n continue groei is niet eenvoudig voor te stellen. In eerste instantie kun je denken aan een groei waarbij de sprongetjes Δx zeer klein zijn. (het 'tekenfilmprincipe').

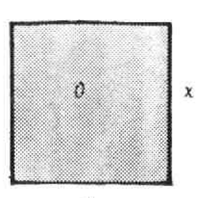
Met een penseelstreek (dikte Δx) vergroten we het vierkant.



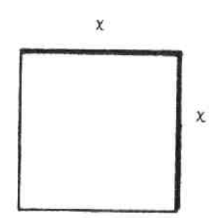
≫ 47. De groeisprong ΔO is bij benadering gelijk aan $2x \cdot \Delta x$. Waarom? En waarom 'bij benadering'?

De 'gemiddelde groei' van de oppervlakte $\frac{\Delta O}{\Delta x}$, is bij benadering dus gelijk aan $2x$. Die benadering is nauwkeuriger naarmate de penseel fijner is. Bij continue groei nemen we Δx als het ware 'oneindig klein'.
En zo komen we tot: $\frac{dO}{dx} = 2x$, waarbij $\frac{dO}{dx}$ de 'groeisnelheid' is van O ten opzichte van x.

In plaatje:



$O = x^2$

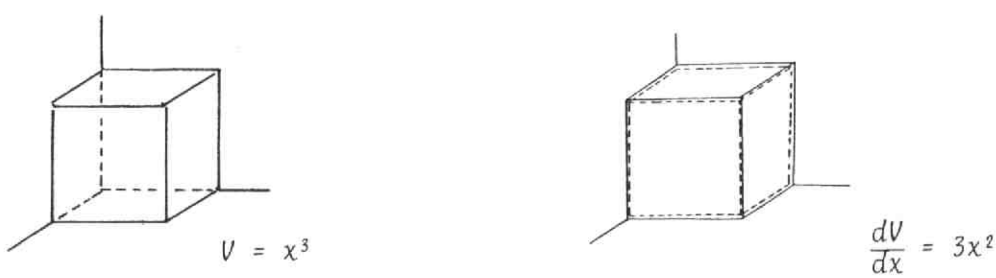


$\frac{dO}{dx} = 2x$

Een soortgelijk verhaal kunnen we houden bij de groei van een kubus (met ribbe x). Door drie vlakken van de kubus te verven bewerkstelligen we een kleine volumegroei.

Als de dikte van de verflaag gelijk is aan Δx, is de groeisprong ΔV bij benadering gelijk aan $3x^2\,\Delta x$.

Gevolg: $\dfrac{\Delta V}{\Delta x} \approx 3x^2$ en dus $\dfrac{dV}{dx} = 3x^2$ (= de groeisnelheid van V t.o.v. x).



Zo heb je nog eens langs andere weg gezien dat geldt:

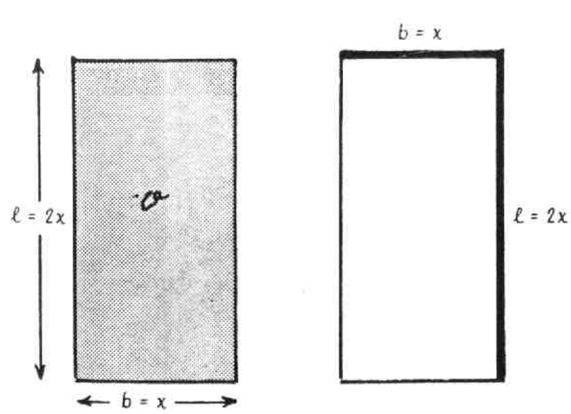
$$\frac{d}{dx}x^2 = 2x \qquad \text{en} \qquad \frac{d}{dx}x^3 = 3x^2$$

$\gg$ 48. Waarom kun je zo'n meetkundige afleiding niet meer maken voor $\dfrac{d}{dx}x^4 = 4x^3$?

Op blz. 36 heb je gezien dat, als je een vierkant in twee richtingen laat groeien, de groeisnelheid van de oppervlakte t.o.v. de zijde gelijk is aan de halve omtrek.

Geldt dit ook voor een niet-vierkante rechthoek?

Laten we een rechthoek bekijken waarvan de lengte tweemaal de breedte is. $(b = x,\ \ell = 2x)$.



$O = \ell \cdot b = 2x^2$, dus volgens de regels van het differentiëren geldt:

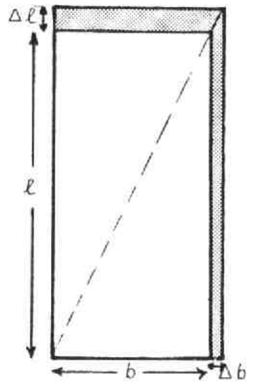
$$\frac{dO}{dx} = 4x$$

maar voor de halve omtrek geldt:

$$\ell + b = 2x + x = 3x.$$

Niet dus.

Het verschil met het vierkant zit hier in, dat de 'penseelstreek' aan de korte zijde twee keer zo dik moet zijn, wil je tenminste weer een goede lengte-breedte-verhouding hebben!



$\Delta b = \Delta x$

$\Delta\ell = 2 \cdot \Delta x$

En:

$\Delta O \approx b \cdot \Delta\ell + \ell \cdot \Delta b$

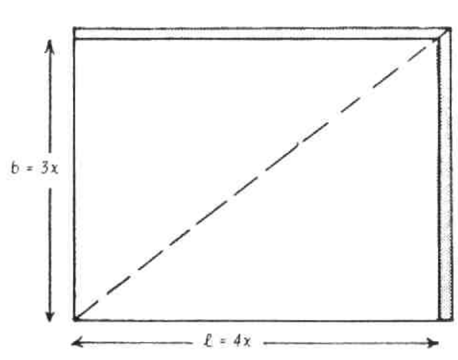
≫ 49. Leid uit het voorgaande af: $\frac{\Delta O}{\Delta x} \approx 4x$.
(Dit resultaat is wèl in overeenstemming met de regels van het differentiëren).

≫ 50. Bekijk de groei van een rechthoek met breedte-lengteverhouding 3 : 4 ($b = 3x$, $\ell = 4x$) en oppervlakte O.

a. Laat x groeien met Δx.
Hoe groot is $\Delta\ell$ resp. Δb uitgedrukt in Δx?

b. Druk ΔO uit in x en Δx.

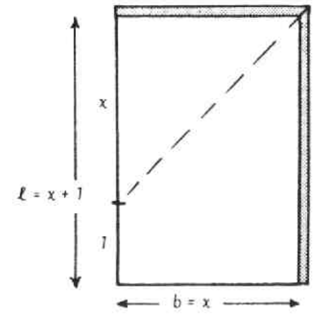
c. Ga na dat geldt: $\frac{dO}{dx} = \ell\frac{db}{dx} + b\frac{d\ell}{dx}$



In woorden:

De groeisnelheid van de oppervlakte = "lengte maal de groeisnelheid van de breedte" + "breedte maal de groeisnelheid van de lengte".

≫ 51. Van een rechthoek is de lengte 1 groter dan de breedte.



a. Laat x groeien met Δx.
   Waarom geldt: $\Delta \ell = \Delta b$?

b. Druk ΔO uit in x en Δx?

c. Ga na dat je voor de groeisnelheid van de oppervlakte eenzelfde resultaat vindt als in ≫ 50c.

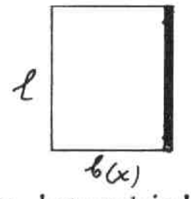
In de opgaven ≫ 49 en ≫ 50 heb je twee voorbeelden gezien waarbij de groeisnelheid van de oppervlakte van een rechthoek uitgedrukt werd in de groeisnelheden van lengte en breedte.

In beide gevallen vind je: $\frac{dO}{dx} = \ell \cdot \frac{db}{dx} + b \cdot \frac{d\ell}{dx}$.

Dit is niet moeilijk te verklaren.
Bekijk eerst twee bijzondere gevallen:

(i) ℓ is constant, b is een functie van x.
Er geldt: $O(x) = \ell \cdot b(x)$.
Volgens regel 2 (blz. 19) geldt:

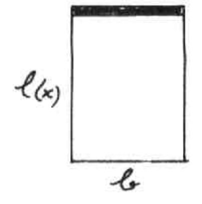
$$O'(x) = \ell \cdot b'(x)$$



In de figuur zie je de aangroeiing weergegeven met een 'strookje'.

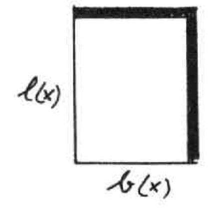
(ii) ℓ is een functie van x, b is constant.
Er geldt: $O(x) = \ell(x) \cdot b$.
Alweer volgens regel 2 geldt:

$$O'(x) = \ell'(x) \cdot b.$$



Nu algemeen:

(iii) ℓ en b zijn beide functies van x.
De groeisnelheid van O is de som van de groeisnelheden in twee richtingen, ofwel:



$$O'(x) = \ell'(x) \cdot b(x) + \ell(x) \cdot b'(x)$$

Dit laatste resultaat staat bekend onder de naam *produktregel*.

Regel 7

Als $F(x) = f(x) \cdot g(x)$, dan $F'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

eerste functie differentiëren
tweede functie 'constant' houden

eerste functie 'constant' houden
tweede functie differentiëren

Opmerkingen:

a. De afleiding zoals hierboven is weergegeven heeft alleen betrekking op 'positieve' functies. De produktregel geldt echter ook voor functies met negatieve waarden in het bereik. De enige eis waaraan de functies moeten voldoen is 'differentieerbaarheid' (zie blz. 9).

b. We schrijven de produktregel vaak in telegramstijl:

$$\boxed{(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'}$$

Hoe pas je de produktregel toe?

Voorbeeld 1

Differentieer de functie $F(x) = x^2 \sin x$.

Oplossing: $F'(x) = 2x \cdot \sin x + x^2 \cdot \cos x$

x^2 gedifferentieerd
$\sin x$ 'constant gehouden'

x^2 'constant gehouden'
$\sin x$ gedifferenteerd

Voorbeeld 2

$f(x) = (5x + 10)(4x + 20)$

$f'(x) = 5 \cdot (4x + 20) + (5x + 10) \cdot 4$

$= 20x + 100 + 20x + 40 = 40x + 140.$

≫ 52. Je kunt de afgeleide functie van f uit voorbeeld 2 ook vinden door het produkt $(5x+10)(4x+20)$ eerst uit te werken en daarna te differentiëren. Doe dat en controleer het resultaat.

≫ 53. $f(x) = x - 1$; $g(x) = x^2 + x + 1$.
Bereken op twee manieren: $\frac{d}{dx}((f(x) \cdot g(x))$.

≫ 54. Differentiëer de functie f met $f(x) =$

a. $x^2 \cdot \cos x$
b. $\sin x \cdot \cos x$
c. $(x^3 + x) \cdot \sin x$
d. $\sin^2 x$
e. $3x - x \cos x$
f. $(x^3 + x) \cdot (x^4 + 1)$

Uit de produktregel voor twee functies kun je een produktregel voor drie, vier en vijf enz. functies afleiden.

Bijv. $(fgh)' = (fg)' \cdot h + (fg) \cdot h'$
$= (f'g + fg') \cdot h + (fg) \cdot h'$
$= f'gh + fg'h + fgh'$.

Analoog kun je vinden:

$(fghk)' = f'ghk + fg'hk + fgh'k + fghk'$.

Samengevat:

Bij het differentiëren van een produkt van een aantal functies ga je als volgt te werk:

- je differentieert de eerste functie en beschouwt de andere als constanten;
- je differentieert de tweede functie en beschouwt de andere als constanten;

enz.

- tenslotte tel je de resultaten bij elkaar op.

$$(fg)' = f'g + fg'$$
$$(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'$$
$$(fghk)' = f'ghk + fg'hk + fgh'k + fghk'$$
enz.

≫ 55. Bereken op twee manieren de afgeleide functie van:
$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$

≫ 56. $f(x) = (1-x)(1+x)(1+x^2)$
Bereken $f'(1)$.

≫ 57. Bereken:

a. $\frac{d}{dx}(x \sin x \cos x)$

b. $\frac{d}{dx}(\sin^2 x \cos x)$

c. $\frac{d}{dt}(\sin^2 t \cos^2 t)$

d. $\frac{d}{dt}(\sin^2 t + \cos^2 t)$

≫ 58. $f(x) = \sin^3 x$ domein $[0, 2\pi]$.

a. In welke punten heeft de grafiek van f een horizontale raaklijn?

b. Teken in één figuur de grafieken van $g(x) = \sin x$ en $f(x) = \sin^3 x$.

≫ 59. $y = x \sin x + \cos x$ $(0 \leq x \leq 2\pi)$

a. In welke punten op de grafiek (van deze functie) is de raaklijn horizontaal?

b. Teken de grafiek van deze functie.

6

MACHTSFUNCTIES

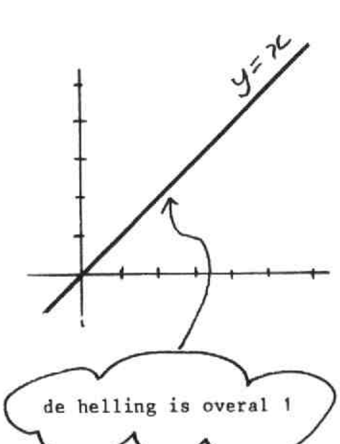
De zo zoetjes aan welbekende regel voor het differentiëren van machtsfuncties luidt:

$$\frac{d}{dx}x^n = n\,x^{n-1} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

Deze regel kun je vrij gemakkelijk 'herontdekken' met behulp van de (uitgebreide) produktregel.

Voor $n = 1$ is de regel direct meetkundig te zien.

$$\frac{d}{dx}\,x = 1$$



Voor $n = 2, 3, 4$, enz. werkt de produktregel:

$$\frac{d}{dx}x^2 = \frac{d}{dx}(x \cdot x) = 1 \cdot x + x \cdot 1 = 2x$$

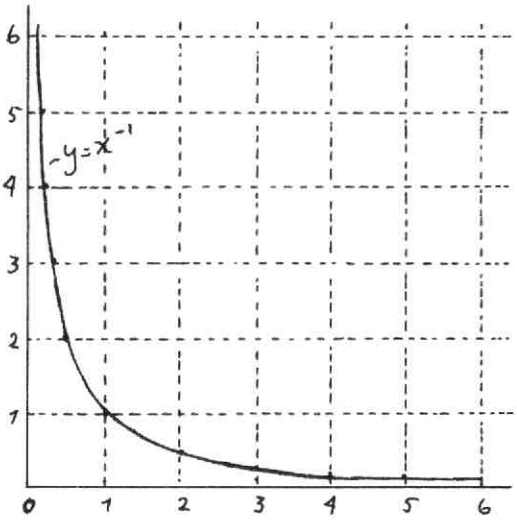
$$\frac{d}{dx}x^3 = \frac{d}{dx}(x \cdot x \cdot x) = 1 \cdot x \cdot x + x \cdot 1 \cdot x + x \cdot x \cdot 1 = 3x^2$$

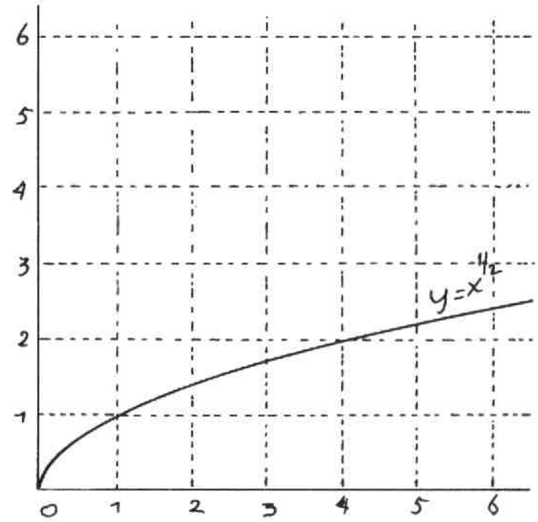
$$\frac{d}{dx}x^4 = \frac{d}{dx}(x \cdot x \cdot x \cdot x) = 1 \cdot x \cdot x \cdot x + x \cdot 1 \cdot x \cdot x + x \cdot x \cdot 1 \cdot x + x \cdot x \cdot x \cdot 1 = 4x^3$$

en zo verder, en zo voort.

De machten waarvan sprake is op blz. 43, hebben als *exponent* een *natuurlijk getal*.

Je herinnert je zonder twijfel dat er in de wiskunde ook gewerkt wordt met niet-natuurlijke (negatieve en/of gebroken) exponenten.
Hieronder zie je de grafieken van de functie $y = x^{-1}$ en $y = x^{\frac{1}{2}}$ resp. met domein $\langle 0;\infty\rangle$ en $[0;\infty\rangle$.





≫ 60. Bekijk die twee grafieken.

a. Wat betekent x^{-1} eigenlijk? En $x^{\frac{1}{2}}$?

b. Bereken (uit je hoofd): 100^{-1}; $100^{\frac{1}{2}}$; $0{,}01^{-1}$; $0{,}01^{\frac{1}{2}}$.

c. Wat gebeurt er met x^{-1} resp. $x^{\frac{1}{2}}$ als je voor x een heel groot getal kiest?
En als je voor x een heel klein positief getal kiest?

≫ 61. De vraag die nu misschien bij je opkomt is of de regel:

$$\frac{d}{dx}x^{n} = n \cdot x^{n-1}$$

ook geldt voor negatieve en/of gebroken exponenten.

Voor $n = -1$ zou dit betekenen: $\frac{d}{dx}x^{-1} = -1 \cdot x^{-2}$

En voor $n = \frac{1}{2}$: $\frac{d}{dx}x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}$

Meet de helling in een tweetal punten van elk van bovenstaande grafieken en ga na of de regel in die gevallen aardig klopt.

Om wat meer zekerheid te krijgen van het geldig zijn van de regel, schakelen we nu de computer in:

```
dx ← 0.001
10 KEER (x van 1 tot 10)
    y ← 1/x
    dy ← 1/(x+dx)-1/x
    h ← dy/dx
    u ← -1/(x*x)
    UITVOER x,y,h,u
STOP
```

```
dx ← 0.001
10 KEER (x van 1 tot 10)
    y ← √x
    dy ← √(x+dx) - √x
    h ← dy/dx
    u ← 1/(2*√x)
    UITVOER x,y,h,u
STOP
```

Met als resultaat:

x	x^{-1}	*helling*	$-1\cdot x^{-2}$
1.00000	1.00000	-0.99903	-1.00000
2.00000	0.50000	-0.24986	-0.25000
3.00000	0.33333	-0.11107	-0.11111
4.00000	0.25000	-0.06248	-0.06250
5.00000	0.20000	-0.03999	-0.04000
6.00000	0.16667	-0.02778	-0.02778
7.00000	0.14286	-0.02041	-0.02041
8.00000	0.12500	-0.01563	-0.01563
9.00000	0.11111	-0.01235	-0.01235
10.00000	0.10000	-0.01001	-0.01000

x	$\sqrt{x}$	*helling*	$\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$
1.00000	1.00000	0.49984	0.50000
2.00000	1.41421	0.35346	0.35355
3.00000	1.73205	0.28861	0.28868
4.00000	2.00000	0.24986	0.25000
5.00000	2.23607	0.22364	0.22361
6.00000	2.44949	0.20409	0.20412
7.00000	2.64575	0.18907	0.18898
8.00000	2.82843	0.17691	0.17678
9.00000	3.00000	0.16665	0.16667
10.00000	3.16228	0.15807	0.15811

≫ 62. Bekijk de twee structuurdiagrammen.

a. Hoe berekent de computer de helling in de punten 1, 2, .., 10?

b. De resultaten (3e kolom) zijn aardig in overeenstemming met de resultaten die je volgens de regel zou moeten krijgen (4e kolom). Wat moet je in het programma veranderen om nog meer overeenstemming te krijgen?

De regel $\frac{d}{dx}x^n = n\cdot x^{n-1}$ lijkt dus inderdaad 'machtiger' dan in hoofdstuk drie is verondersteld. In elk geval geeft zij voor $n = -1$ en $n = \frac{1}{2}$ bevredigende uitkomsten.
Mocht je nog niet helemaal overtuigd zijn, hieronder vind je een afleiding met behulp van de produktregel.

I. $n = -1$: $f(x) = x^{-1}$ ofwel $f(x) = \frac{1}{x}$

Eerst een 'list': $x\cdot f(x) = 1$ (want $x\cdot\frac{1}{x} = 1$).

Na differentiëren: $x\cdot f(x) = 1$

$$1\cdot f(x) + x\cdot f'(x) = 0$$

$f'(x)$ 'oplossen':

$$1\cdot\frac{1}{x} + x\cdot f'(x) = 0$$
$$x\ f'(x) = -\frac{1}{x}$$
$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} = -1\cdot x^{-2}$$

II. $n = \frac{1}{2}$: $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ ofwel $f(x) = \sqrt{x}$

De 'list' is nu: $f(x)\cdot f(x) = x$ (want $\sqrt{x}\cdot\sqrt{x} = x$)

Differentiëren: $f(x)\cdot f(x) = x$

$$f'(x)\cdot f(x) + f(x)\cdot f'(x) = 1$$

$f'(x)$ oplossen:

$$f'(x)\cdot\sqrt{x} + \sqrt{x}\cdot f'(x) = 1$$
$$2\sqrt{x}\cdot f'(x) = 1$$
$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}}$$

Dergelijke afleidingen kun je ook geven voor andere negatieve en/of gebroken exponenten.

Kortom:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Voor alle positief gehele} \\ \qquad\qquad\text{negatief gehele} \\ \qquad\qquad\text{positief gebroken} \\ \qquad\qquad\text{negatief gebroken} \\ \text{exponenten geldt:} \\ \qquad\qquad \dfrac{d}{dx} x^r = rx^{r-1} \end{array}}$$

Voorbeeld:

$f(x) = 6\sqrt[3]{x^2}$

Om te kunnen differentiëren schrijf je: $f(x) = 6x^{2/3}$

Er volgt: $f'(x) = 6 \cdot \frac{2}{3}x^{-1/3} = \dfrac{4}{\sqrt[3]{x}}$

≫ 63. Differentieer de functie f in het geval $f(x) =$

a. $\dfrac{1}{x^2}$

b. $\dfrac{5}{x^3}$

c. $\dfrac{3}{x^2} + \dfrac{5}{x}$

d. $x^2 + \dfrac{1}{x}$

e. $\dfrac{x^3 + 1}{x}$

f. $\sqrt[3]{x}$

g. $\sqrt[4]{x^3}$

h. $x^2\sqrt{x}$

i. $(\sqrt{x})^3$

j. $\dfrac{1}{x}\sqrt[4]{x}$

≫ 64. Dezelfde opdracht voor:

a. $3\sqrt{x} + \cos x$

b. $\sqrt{x} \cdot \sin x$

c. $\dfrac{1}{x} \cdot \sin x$

d. $\dfrac{\cos x}{x^2}$

e. $x^2(1 + \sqrt{x})$

f. $\dfrac{x^2 + 6x + 8}{x^4}$

g. $\dfrac{\cos x - 1}{x^3}$

h. $\dfrac{\sqrt{x} + 1}{x^3}$

≫ 65. a. Teken in één figuur de grafieken van $f(x) = x$ en $g(x) = \frac{1}{x}$ beide met domein $\langle 0,\infty\rangle$.

b. Teken in dezelfde figuur ook de grafiek van $h(x) = x + \frac{1}{x}$.

c. Welke asymptoten heeft de grafiek van h?

d. In welk punt is de raaklijn aan de grafiek van h horizontaal?

≫ 66. $f(x) = x^{1,5} - 3x$ (domein $[0,\infty\rangle$).

a. Vul in:

x	0	1	4	9	16
$f(x)$					
$f'(x)$					

b. Schets een grafiek van f.

c. Wat is het bereik van f?

≫ 67. In een destilleerderij kan per dag 1000 liter jonge jenever worden gestookt.
De produktiekosten K (in guldens) en de opbrengst O (in guldens) zijn functies van de geproduceerde hoeveelheid q (in liters).
De economisch adviseur van het bedrijf heeft een fraai wiskundig model opgesteld:

$$K = q^{2/3} \quad \text{en} \quad O = 4q^{1/2}$$

a. Teken de grafieken van K en O als functie van q.

b. Teken ook de grafiek van de winst W $(= O - K)$ als functie van q.

c. Bij welke produktieomvang is W maximaal?

d. Wat weet je in dat geval van de marginale kosten en de marginale opbrengst?

≫ 68. Op de emballage-afdeling van een fabriek vervaardigt men o.a. kartonnen dozen met een inhoud van 36 dm^3.
De bodem van zo'n doos moet een vaste vorm hebben (lengte en breedte moeten zich verhouden als 2 : 1).

a. Neem de breedte van de doos achtereenvolgens 1, 2, 3, 4, 5 dm en bereken de benodigde hoeveelheid karton. (De dozen zijn aan de bovenkant open).

b. Stel de breedte van de doos is x dm.
Schrijf de *oppervlakte* van de doos als functie van x.

c. Bij welke afmetingen is de benodigde hoeveelheid karton minimaal?

7

INGEBLIKT

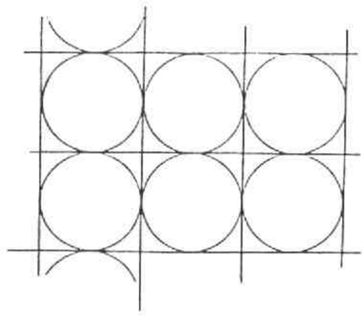
Conservenblikken, verfblikken, e.d. variëren behoorlijk in afmetingen zoals je op de foto kunt zien.
We gaan onderzoeken welke afmetingen economisch verantwoord zijn. Laten we bijv. blikken met de inhoud van 1 liter bekijken.
Hoogte en diameter van zo'n blik kun je laten variëren, op zoek naar die vorm waarbij de buitenoppervlakte *minimaal* is.

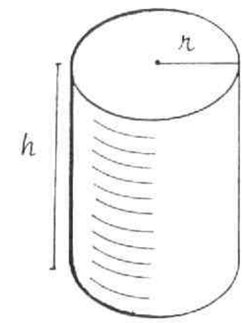
≫ 69. Noem de straal van de bodem van zo'n blik r en de hoogte h.

a. Welke betrekking bestaat er tussen r en h?

b. Zoek in een supermarkt of verfwinkel een literblik en controleer of voldaan is aan die betrekking.

≫ 70. Neem aan dat deksel en bodem van zo'n blik uit vierkanten worden 'geponst' en beschouw het restant als afval.





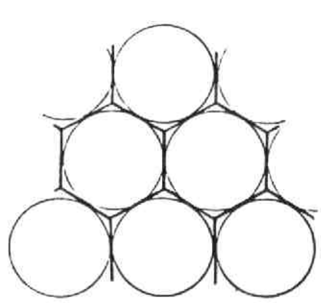
a. Hoeveel cm² blik is er nodig voor het vervaardigen van één blik (uitgedrukt in r en h)?

b. Schrijf die oppervlakte ($= O$) als functie van één variabele (r). (Gebruik het resultaat van ≫ 69!).

c. Teken de grafiek van die functie.

d. Bij welke afmetingen is de benodigde hoeveelheid blik minimaal?

≫ 71. Het ponsen van deksel en bodem kan ook zuiniger:



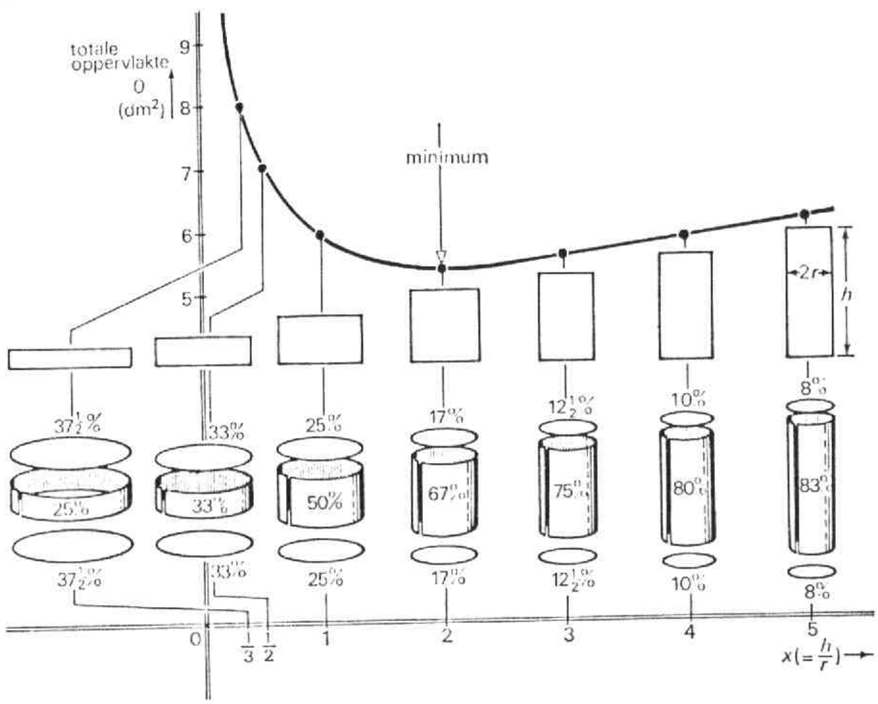
geponst met zeshoeken.

a. Laat zien dat nu geldt: $O = cr^2 + 2r^{-1}$ met $c = 4\sqrt{3} \approx 6{,}93$.

b. Welke afmetingen vind je nu voor het meest economische literblik?

≫ 72. Het allerzuinigste is natuurlijk om het blikafval zo te verwerken dat het gebruikt kan worden bij de vervaardiging van nieuwe blikken. Voor welke r is de oppervlakte nu minimaal?

≫ 73. Iemand heeft in het derde geval (zie ≫ 72) een mooie grafiek gemaakt van de oppervlakte van het literblik. Op de horizontale as heeft hij niet de straal, maar de verhouding tussen hoogte en straal afgezet.



a. Controleer of zijn minimum in overeenstemming is met wat jij in ≫ 72 vond.

b. Welke blikken zijn relatief het duurst: platte blikken of hoge blikken?

≫ 74. a. Wat verandert er in je oppervlaktefunctie van ≫ 70 als je met halve-liter-blikken te maken hebt?

b. Is het verstandig om halve literblikken gelijkvormig te maken met literblikken (d.w.z. dezelfde verhouding van diameter en hoogte)?

OPTIMALE SERIEGROOTTE

Op een kleine fabriek worden per maand 100 platenspelers (inclusief versterker) vervaardigd.
De bijbehorende luidsprekerboxen worden van een andere firma betrokken: per 3 maanden worden 300 sets van twee boxen besteld. De prijs per luidsprekerset is ƒ 100,-- en dan kost elke geplaatste bestelling nog eens ƒ 500,--. Dit laatste bedrag is onafhankelijk van het aantal bestelde boxen, vandaar dat de fabrikant ze in behoorlijke hoeveelheden aanschaft. Maar hij kan er ook weer niet teveel tegelijk kopen, want dat betekent dat een groot aantal boxen lange tijd opgeslagen zal moeten worden en dat is puur verlies. Het in voorraad houden van de luidsprekersets kost de fabrikant nl. per jaar 10% van de waarde van de gemiddelde voorraad luidsprekersets!

≫ 75. Hoe kun je die 10% voorraadkosten verklaren?

≫ 76. Stel je voor dat op een gegeven moment (zeg: tijdstip 0) de voorraad boxen juist uitgeput is en er een nieuwe bestelling van 300 sets binnenkomt.

a. Hoe groot zal de voorraad een halve maand later zijn?
En $2\frac{1}{2}$ maand later?

b. Teken een grafiek van het aantal luidsprekersets in voorraad als functie van de tijd (over een periode van één jaar).

≫ 77. a. Hoeveel sets heeft de fabrikant gemiddeld in voorraad? Welk bedrag moet hij per jaar aan voorraadkosten betalen?

b. Wat zijn zijn jaarlijkse totaalkosten (aanschaf- en voorraadkosten) van de boxen?

≫ 78. De fabrikant overweegt om de bestellingen van de luidsprekers met een andere frequentie te plaatsen (zonder dat het aantal luidsprekers dat hij per jaar bestelt, verandert).

a. Hoe verandert zijn voorraadgrafiek als hij om de twee maanden bestelt?

b. Op welk totaalbedrag aan kosten per jaar (voor de luidsprekers) komt hij dan uit?

≫ 79. Onderzoek nog andere gevallen. Schrijf de resultaten in een tabel.

Aantal bestellingen per jaar	1	2	3	4	6	12
Serie-grootte *)				300		
Gemiddelde voorraad				150		
Voorraadkosten per jaar				ƒ1500		
Aanschafkosten per jaar				ƒ122000		
Totale kosten per jaar				ƒ123500		

Welk advies zou jij de fabrikant op grond van deze tabel willen geven?

*) Is het aantal luidsprekersets per bestelling.

≫ 80. Noem de serie-grootte S, de voorraadkosten K_v, de aanschafkosten K_a en de totale (luidspreker-)kosten K_t.
Zet K_v, K_a en K_t in een grafiek uit tegen S.

≫ 81. Beschrijf K_v, K_a en K_t als functies van S.

≫ 82. Bij welke serie-grootte (ongeveer) is het totale bedrag aan kosten (K_t) minimaal?

8

QUOTIËNTREGEL

≫ 83. Twee zusjes schelen nagenoeg 5 jaar in leeftijd. Toen de oudste 10 werd zei ze trots tegen haar zusje: nu ben ik twee keer zo oud als jij.
Vijf jaar later, toen de oudste opnieuw haar verjaardag vierde, herinnerde de jongste zich dit voorval plotseling en zei: nu ben je nog maar $1\frac{1}{2}$ keer zo oud als ik.

a. Hoe is de verhouding van de leeftijden als de oudste 25 jaar wordt? En als ze 45 wordt?

b. Teken de grafiek van de functie $f(x) = \frac{x+5}{x}$ (domein $\langle 0;\infty\rangle$).

c. Wat heeft het verhaal van de twee zusjes met het verloop van de grafiek te maken?

d. Wat kun je zeggen van de verhouding van de leeftijden van beide zusjes als die het eeuwige leven zouden hebben?

≫ 84. t en n zijn functies van x : $t = 2x + 1$; $n = x + 1$ $(x \in \mathbb{R})$.

a. Bereken $\frac{t}{n}$ voor $x = 0, 1, 2, 3, 4$. Wat valt je op?

b. Wat kun je zeggen van $\frac{t}{n}$ als x 'een heel groot getal' is?

c. Bereken $\frac{t}{n}$ voor $x = -0{,}8; -0{,}9; -0{,}99$.

d. Wat kun je zeggen van $\frac{t}{n}$ als x een klein beetje groter is dan -1?

e. En als x een klein beetje kleiner is dan -1?

f. Teken de grafiek van $\frac{t}{n}$ als functie van x.

g. Welke asymptoten heeft die grafiek?

≫ 85. De functie in ≫ 84 noemen we nu f.

Dus: $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+1}$.

a. Kijk naar de grafiek van f.

In welke punten van de grafiek is de helling positief?

b. De hellingfunctie van f kan (indirect) gevonden worden uit de produktregel.

Kijk maar: $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+1}$, dus $(x+1)\cdot f(x) = 2x+1$.

Nu differentiëren: $(x+1)f(x) = 2x+1$

$$1\cdot f(x) + (x+1)\cdot f'(x) = 2$$

c. Substitueer nu $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+1}$ in deze laatste regel en leidt af:

$$f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}\,.$$

≫ 86. $g(x) = x^2$; $h(x) = x+5$; $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$.

Bereken de afgeleide functie f' via $f(x)\cdot h(x) = g(x)$.

De methode die je in ≫ 86 hebt toegepast, kan ook 'algemeen' worden uitgevoerd.

Voor het gemak stellen we: $y = f(x)$, $t = g(x)$, $n = h(x)$.

En geldt: $y = \dfrac{t}{n}$

ofwel: $n\cdot y = t$.

Differentiatie: $n'\cdot y + n\cdot y' = t'$

Dus: $n'\cdot\dfrac{t}{n} + n\cdot y' = t'$

Nu y' oplossen: $\dfrac{n't}{n^2} + y' = \dfrac{t'}{n}$, dus $y' = \dfrac{t'}{n} - \dfrac{n't}{n^2}$.

We schrijven het resultaat nog wat 'mooier':

$$y' = \frac{t'n - n't}{n^2}$$

M.a.w.

$$\boxed{f'(x) = \frac{g'(x)\cdot h(x) - h'(x)\cdot g(x)}{g^2(x)}}$$

We hebben nu de zogenaamde quotiëntregel gevonden.

In verkorte vorm:

$$\boxed{\left(\frac{t}{n}\right)' = \frac{t'n - n't}{n^2}}$$

Passen we de regel toe op $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+1}$ (≫ 85).

afgeleide teller

afgeleide noemer

dan komt er: $f'(x) = \dfrac{2.(x+1) - 1.(2x+1)}{(x+1)^2} = \dfrac{1}{(x+1)^2}$

noemer kwadrateren

Nog een voorbeeld:

$$f(x) = \frac{x^2+1}{3x-1}$$

$$f'(x) = \frac{2x\cdot(3x-1) - 3\cdot(x^2+1)}{(3x-1)^2} = \frac{3x^2-2x-3}{(3x-1)^2}$$

≫ 87. Controleer het antwoord van ≫ 86 door de quotiëntregel toe te passen op $f(x) = \dfrac{x^2}{x+5}$.

≫ 88. Differentieer de functie f in het geval $f(x) =$

a. $\dfrac{1+x}{1-x}$

b. $\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$

c. $\dfrac{x}{x^2+x+1}$

d. $\dfrac{x^2+x+1}{x}$

e. $\dfrac{x}{\cos x}$

f. $\dfrac{\sin x}{\cos x}$

g. $\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}$

h. $\dfrac{\sqrt[3]{x}}{x+1}$

≫ 89. $f(x) = \frac{4x}{x^2 + 1}$ (domein $\mathbb{R}$) .

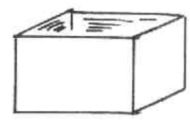
a. In welke punten heeft de grafiek van f een horizontale raaklijn?

b. Hoe groot is de helling van de grafiek van f in het punt (0,0)?

c. Ga na dat geldt: $f(10) = f(0,1)$.
Ook $f(100) = f(0,01)$; $f(1000) = f(0,001)$.

d. Teken de grafiek van f.

≫ 90. Van een (open) doos is de bodem vierkant.
De inhoud is 12 dm^3.
Het materiaal van de bodem kost per dm^2 driemaal zoveel als het materiaal voor de zijwanden.
Bij welke afmetingen zijn de materiaalkosten voor de doos het laagst?



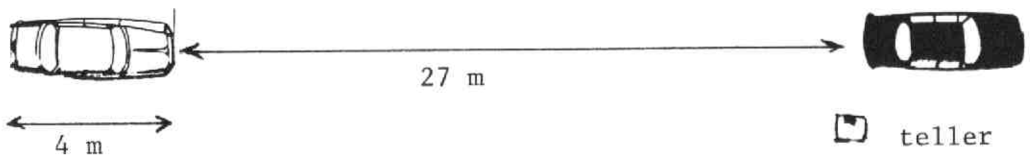
≫ 91. Met het verschijnsel 'file' hebben veel automobilisten leren leven, al levert het slakkegangetje natuurlijk de nodige ergenis op.
Hoe komt het dat bij lage snelheden er blijkbaar meer auto's verwerkt kunnen worden? En wat is de optimale snelheid voor een file?
Problemen die met de computer en/of differentiaalrekening kunnen worden opgelost. Waarmee niet gezegd wil zijn dat iedere file nu ook snel opgelost zal raken .....

a. De Vereniging voor Veilig Verkeer heeft een aardige vuistregel bedacht voor het berekenen van de remweg van een personenauto. Die regel luidt: deel de snelheid (in km/u) door 10, kwadrateer de uitkomst en vermenigvuldig het resultaat met $\frac{3}{4}$. Je krijgt dan de remweg in meters.

Hoeveel meter is de remweg bij een snelheid van 100 km/u?
En bij 50 km/u?

b. Teken de grafiek van de remweg (r) als functie van de snelheid (v).
Beschrijf die functie ook met een formule.

c. Stel dat we hebben te maken met een file van louter personenauto's. Gemiddelde lengte: 4 meter.
De snelheid van de file is 60 km/u en iedereen houdt zich keurig aan de voorgeschreven remafstand tot zijn voorligger.
De politie heeft op een bepaald punt een teller geplaatst.
Hoeveel auto's passeren er in één minuut?



d. Maak een computerprogramma voor het berekenen van het aantal auto's dat in één minuut de teller passeert bij een file-snelheid van resp. 10, 20, 30, ..., 120 km/u.

e. Welke snelheid zou jij een file willen (aan)bevelen?

f. Leid uit je computerprogramma een formule af waardoor het aantal auto's (= A) beschreven wordt als functie van de snelheid (= v).

g. Bereken de minimale waarde van A en de optimale waarde van v m.b.v. differentiaalrekening.

h. In de formule voor de remweg bij een gegeven snelheid is geen rekening gehouden met de reactietijd.
De tijd die een automobilist nodig heeft om te reageren op de remlichten van zijn voorligger is gemiddeld 0,6 sec. Rekening houdend met die reactietijd zou de afstand tussen twee auto's bij een snelheid van 60 km/u eigenlijk 37 m (= 27 + 10) moeten zijn. Ga dit na.

i. Wat verandert er aan de functie die je in f hebt opgesteld als je rekening houdt met de reactietijd? Heeft dat invloed op de optimale snelheid van de file?

OVERZICHT VAN DIFFERENTIEERREGELS

- Regels voor het gebruik van een constante:

(1)	Als $F(x) = c + G(x)$, dan is $F'(x) = G'(x)$
(2)	Als $F(x) = c \cdot G(x)$, dan is $F'(x) = c \cdot G'(x)$

- Som, verschil, produkt, quotientregel:

(3)	Als $F(x) = f(x) + g(x)$, dan is $F'(x) = f'(x) + g'(x)$
(4)	Als $F(x) = f(x) - g(x)$, dan is $F'(x) = f'(x) - g'(x)$
(5)	Als $F(x) = f(x) \cdot g(x)$, dan is $F'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
(6)	Als $F(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, dan is $F'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

- In telegramstijl:

(3)	$(f + g)' = f' + g'$
(4)	$(f - g)' = f' - g'$
(5)	$(f \cdot g)' = f'g + fg'$
(6)	$\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$

- De regels (3) en (5) kunnen gemakkelijk worden uitgebreid:

(3') $(f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_n)' = f_1' + f_2' + f_3' + \dots f_n'$

(5') $(f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot \dots \cdot f_n)' = f_1' f_2 f_3 \dots f_n + f_1 f_2' f_3 \dots f_n + \dots \dots f_1 f_2 f_3 \dots f_n'$

- Afgeleiden van speciale functies:

(7)	Als $F(x) = x^r$, dan is $F'(x) = r \cdot x^{r-1}$ (r is een rationaal getal)
(8)	Als $F(x) = \sin x$, dan is $F'(x) = \cos x$
(8')	Als $F(x) = \cos x$, dan is $F'(x) = -\sin x$

- Of in differentiaalnotatie:

$$\boxed{\begin{aligned} &(7) \quad \frac{d}{dx}x^{r} = r \cdot x^{r-1} \\ &(8) \quad \frac{d}{dx}\sin x = \cos x \\ &(8') \quad \frac{d}{dx}\cos x = -\sin x \end{aligned}}$$