Differentiëren

https://hdl.handle.net/1874/10253

DIFFERENTIËREN 3

Freudenthal instituut
Archief

DIFFERENTIËREN 3

OW&OC

Tiberdreef 4 - 3561 GG Utrecht

DIFFERENTIËREN 3

Een produktie ten behoeve van experimenten in het kader van de Herverkaveling Eindexamenprogramma's Wiskunde 1 en 2 V.W.O.

Samenstelling: Martin Kindt
Jan de Lange Jzn

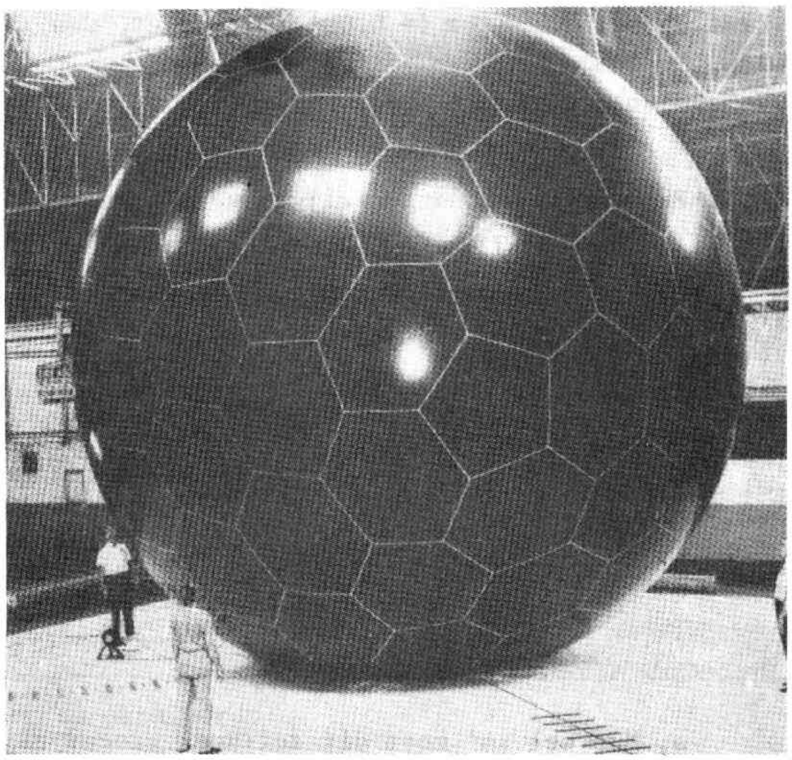
Vormgeving: Ellen Hanepen

Utrecht, juli 1984.

INHOUDSOPGAVE

1

OMTREK, OPPERVLAKTE, INHOUD



≫ 1. a. Een (bekende?) puzzel.

Iemand reist naar de maan met een kolossale hoeveelheid touw. Hij wil dat touw rondom de maan aanbrengen, een meter boven het maanoppervlak en parallel met de maanevenaar.
De straal van de maan is ca 1760 km en de omtrek is ca 11060 km.
Hoeveel km moet het touw langer zijn dan de maan-evenaar?

b. De mannen op de foto zijn wat bescheidener.
Zij willen een touw aanbrengen op een meter afstand van de bol parallel met een 'evenaarcirkel'.
Hoeveel meter zal dit touw langer moeten zijn dan de omtrek van de bol?

De verrassende oplossing van opgave ≫ 1 is:

6,28 meter,

onafhankelijk van de straal van de bol!

Dat kan worden aangetoond via de formule:

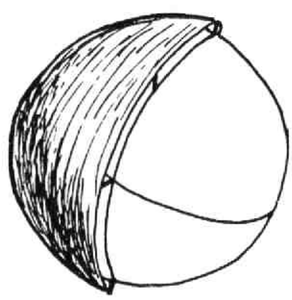
$$P = 2\pi r$$

waarbij r de straal en P de omtrek van de (evenaar)cirkel is, gemeten in een of andere lengte-eenheid (zeg kilometers).

Wordt de straal nu 1 m (= 0,001 km) groter, dan is de toename van de omtrek:

$$\Delta P = 2\pi(r + 0{,}001) - 2\pi r = 2\pi \cdot 0{,}001 \text{ km (} = 2\pi \text{ meter).}$$

≫ 2. Een andere situatie krijgen we als we een bol met een zeildoek op 1 m hoogte willen afdekken.
Om het rekenwerk niet al te ingewikkeld te maken, nemen we eerst een bol met een straal van 1 km.



a. Hoeveel km² moet dit zeildoek groter zijn dan de oppervlakte van de bol?
(Formule voor de oppervlakte O van de bol als functie van de straal: $O = 4\pi r^2$).

b. Wat is het antwoord als je een bol met een straal van 10 km neemt?

Het verschil in resultaat: 'bij het touw doet het er niet toe hoe groot de straal van de bol is, bij het zeildoek wel', heeft meer met differentiëren te maken dan je misschien denkt.

Vergelijk de formules die de *omtrek van een cirkel* (P) en de *oppervlakte van een bol* (O) beschrijven als functie van de *straal* (r):

$$P = 2\pi r \qquad \text{en} \qquad O = 4\pi r^2$$

Differentiëren van deze functie naar r, geeft:

$$\frac{dP}{dr} = 2\pi \qquad \text{en} \qquad \frac{dO}{dr} = 8\pi r$$

Dat betekent: bij een kleine toename van de straal met Δr, geldt:

$$\Delta P \approx 2\pi \cdot \Delta r \qquad \text{en} \qquad \Delta O \approx 8\pi r \cdot \Delta r$$

Voor een keus van Δr (in ons geval $\Delta r = 0{,}001$) zie je dat ΔP *niet* van r en ΔO *wel* van r afhangt!

≫ 3. Controleer de uitkomsten voor opgave ≫ 2 met behulp van de betrekking $\Delta O \approx 8\pi r \cdot \Delta r$.

Het differentiëren van formules voor omtrek, oppervlakte en inhoud brengt trouwens aardige verbanden aan het licht.
Neem nu de bekende formules:

$$O = \pi r^2 \qquad \text{en} \qquad P = 2\pi r$$

resp. voor oppervlakte en omtrek van een cirkel.
Differentiatie van de oppervlakte geeft de omtrek, ofwel:

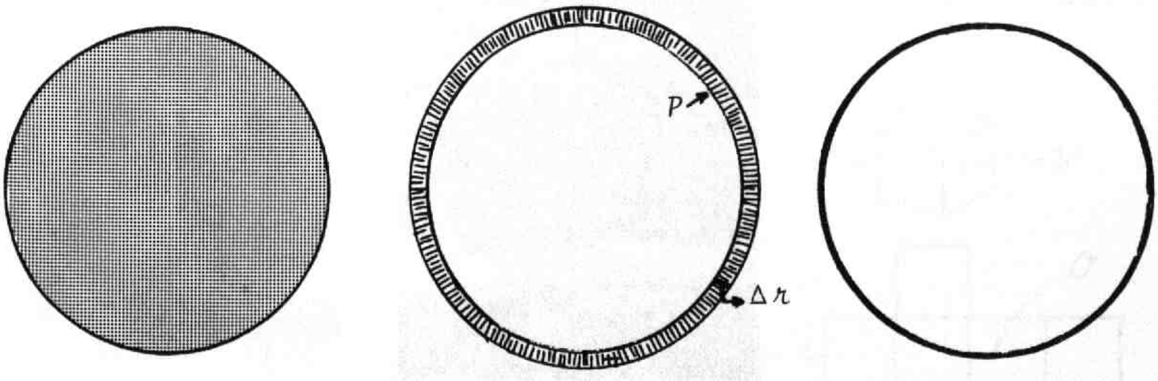
$$\frac{dO}{dr} = P.$$

Dit kan meetkundig worden verklaard:

opp. cirkel: $O = \pi r^2$

opp. ring: $\Delta O \approx \Delta r \cdot P$

omtrek cirkel: $P = 2\pi r$



$$\frac{\Delta O}{\Delta r} \approx P$$

≫ 4. Voor het volume (V) en de oppervlakte (O) van een bol geldt een soortgelijk verband: $\frac{dV}{dr} = O$.

Er geldt: $O = 4\pi r^2$ (zoals je bij opgave ≫ 2 al hebt gezien).
Leid een formule af voor V als functie van r.

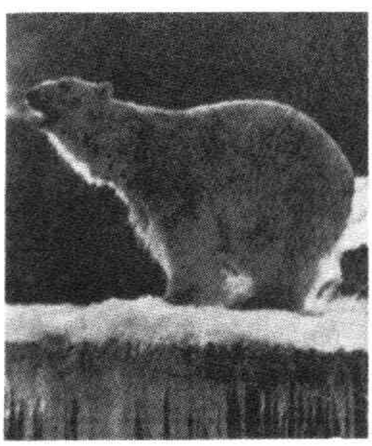
≫ 5. Bereken op twee verschillende manieren het volume van het dunne laagje tussen bol en zeildoek in de situatie geschetst in opgave ≫ 2. (Straal bol = 1 km).

Het warmteverlies van mens of dier is afhankelijk van de totale huidoppervlakte. Physiologen zijn o.a. daarom geïnteresseerd in een verband tussen de huidoppervlakte van een dier en zijn gewicht.
Een formule die wel eens gebruikt wordt is:

$$O = c \cdot G^{\frac{2}{3}}$$

waarbij G het gewicht in kg is, O de huidoppervlakte in m² en c een constante is.

In woorden: de huidoppervlakte van een diersoort is evenredig met het gewicht tot de macht twee-derde.
De evenredigheidsconstante c is afhankelijk van de diersoort, maar ligt voor de meeste dieren in de buurt van 0,1.



G

O

≫ 6. Voor een paard is de constante c ongeveer gelijk aan 0,1.

a. Hoe groot zal de huidoppervlakte (in m^2) van een paard van 250 kg zijn?

b. Teken de grafiek van O als functie van G voor een paard.

c. Bereken $\frac{dO}{dG}$. Wat is de betekenis hiervan in dit verband?

d. Een paard van 200 kg komt in één maand 5 kg aan.
Met hoeveel cm^2 zal de huidoppervlakte zijn toegenomen?

≫ 7. Hieronder zie je een tabel van waarden van c voor verschillende dieren.

Bird	0.10
Cat	0.100
Cow and Steer	0.090
Dog (over 4 kg)	0.112
(under 4 kg)	0.101
Guinea Pig	0.090
Horse	0.100
Man	0.11
Monkey	0.118
Mouse	0.090
Rabbit	0.0975
Rat	0.091
Sheep (sheared weight)	0.084
Swine	0.090

* From A. C. Guyton, *Circulatory Physiology: Cardiac Output and Its Regulation*, Second Edition, W. B. Saunders Company, Philadelphia, 1973

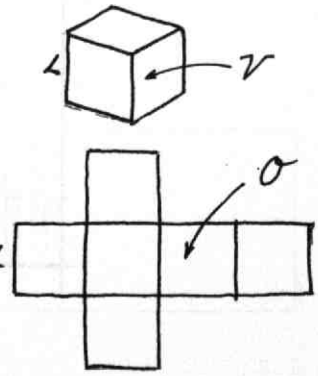
Voor een mens geldt dus bij benadering $O = 0{,}11\,G^{\frac{2}{3}}$ en voor een varken $O = 0{,}09\,G^{\frac{2}{3}}$.
Hoe kun je verklaren dat de constante voor een varken kleiner is dan die voor een mens?

Om wat meer inzicht in de formule $O = c \cdot G^{\frac{2}{3}}$ te krijgen, bekijken we het verband tussen oppervlakte en volume van een paar 'meetkundige lichamen'.

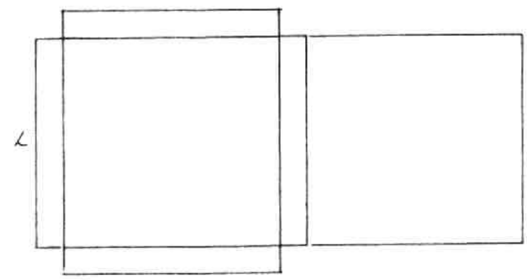
≫ 8. Neem de kubus met lengte L.

a. Druk de totale oppervlakte (O) van de kubus uit in L.
Doe hetzelfde voor het volume (V).

b. Leid vervolgens een formule af voor O als functie van V.
(Aanwijzing: druk eerst L uit in V).



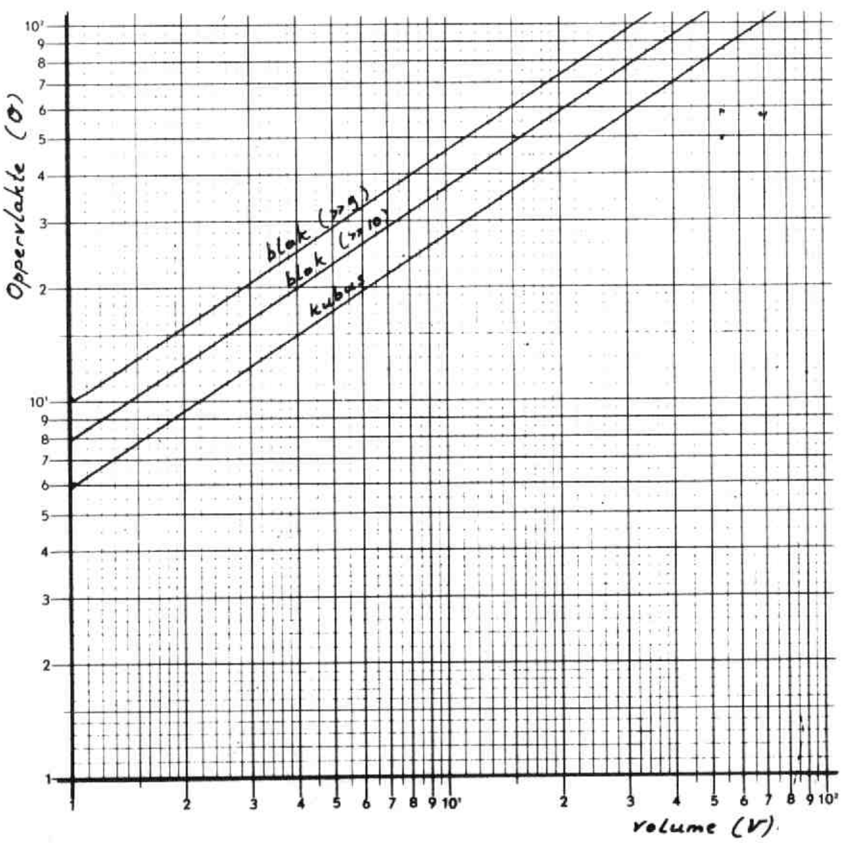
≫ 9. a. Geef een formule voor de totale oppervlakte als functie van het volume van een blok met vierkante bodem, waarvan de hoogte $\frac{1}{8}$ van de lengte is.



≫ 10. Doe hetzelfde voor een blok waarvan diepte, lengte en hoogte zich verhouden als 1 : 2 : 4.

≫ 11. Hoe zal, algemeen gesproken, de formule van de totale oppervlakte van een meetkundig lichaam als functie van het volume er uit zien?

≫ 12. Op dubbellogaritmisch papier zijn de grafieken van O als functie van V getekend voor de kubus en de blokken bedoeld in opgave 9,10.



a. Hoe verklaar je dat die grafieken evenwijdige lijnen zijn?

b. Aan welke kant van de 'kubus-lijn' verwacht je de volume-oppervlakte-grafiek van de bol?

c. Stel de O-V-formule voor de bol op.

SAMENVATTING

In dit hoofdstuk hebben we het begrip 'afgeleide functie' in verband gebracht met zaken als omtrek, oppervlakte, volume.
Ook heb je gezien hoe je uit twee functies een nieuwe kunt maken, bijvoorbeeld als L, O, V resp. lengte, oppervlakte en volume van een kubus zijn:

(1) L is een functie van V (2) O is een functie van L	$\longrightarrow$	(3) O is een functie van V

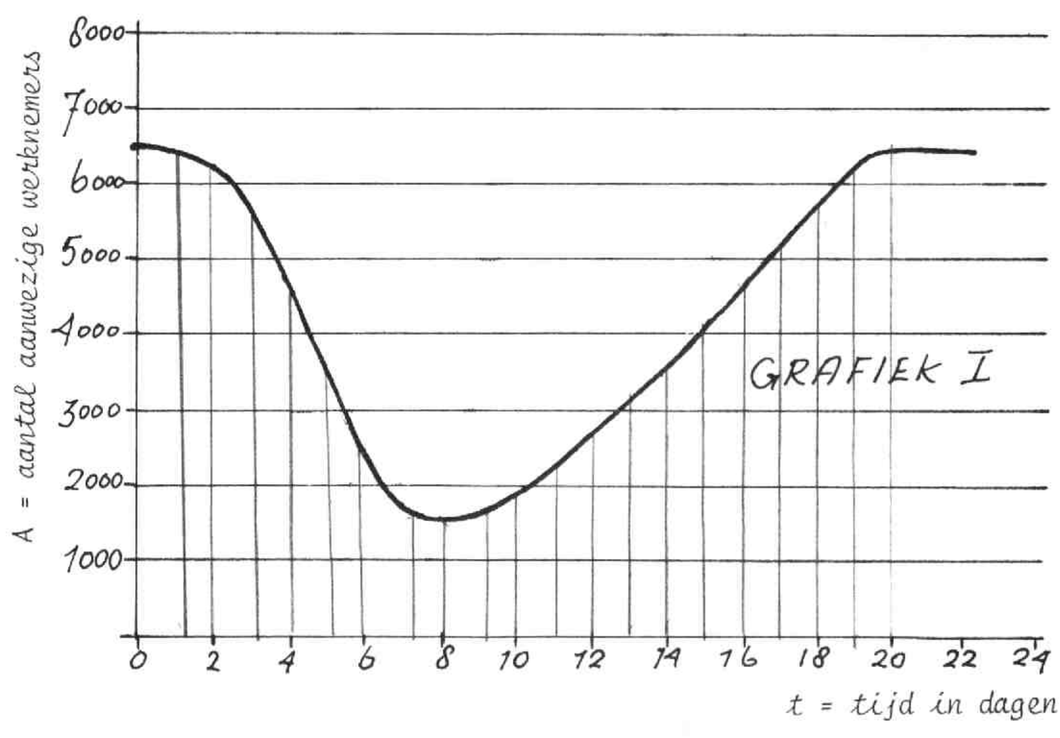
In formule:

(1) $L = V^{\frac{1}{3}}$ (2) $O = 6L^2$	$\longrightarrow$	(3) $O = 6V^{\frac{2}{3}}$

In 1918 werd New York getroffen door een verschrikkelijke griepepidemie. De politieagent op de foto schijnt het virus een halt toe te willen roepen. Het mocht niet baten. De epidemie eiste talloze levens.

2

EEN GRIEPGOLF



≫ 13. Een groot bedrijf wordt getroffen door een hevige griepgolf. Toen de epidemie zijn top bereikte was zo'n 80% van het totale werknemersbestand geveld door de griep.
Hierboven zie je de grafiek van het aantal aanwezige werknemers (= A) als functie van de tijd in dagen (= t) in de dagen na het uitbreken van de epidemie.

a. Hoeveel werknemers telt het bedrijf ongeveer?

b. Wanneer was het ziekteverzuim het grootst?

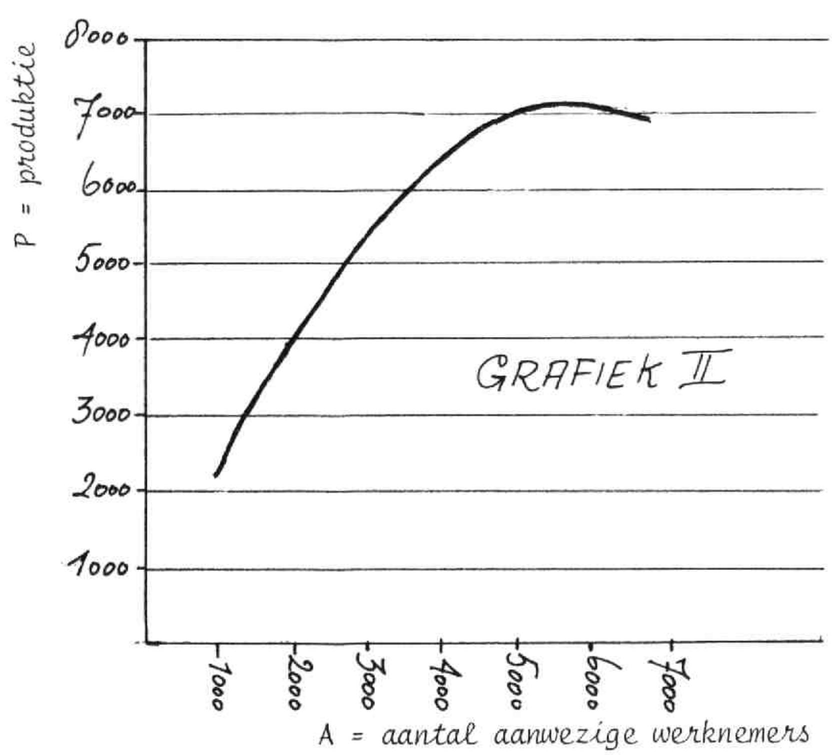
c. Wanneer nam het ziekteverzuim het sterkst toe?

≫ 14. In die 22 dagen na het uitbreken van de epidemie was griep de hoofdoorzaak van afwezigheid op het werk. Andere oorzaken van absentie vielen hierbij volkomen in het niet.
Het aantal zieke werknemers per dag noemen we Z.

a. Teken de grafiek van Z als functie van A.

b. Z is ook een functie van t. Teken de grafiek van deze functie.

De bedrijfsleider was de eerste dagen nauwelijks verontrust door het ziekteverzuim. Hij beschikte namelijk over de gegevens betreffende de produktie (= P) als functie van het aantal werknemers.



≫ 15. a. Verklaar waarom de bedrijfsleider de eerste dagen nog niet zo somber gestemd was.

b. Hoeveel dagen na het uitbreken van de epidemie bereikte de produktie een maximum?

c. Schets de grafiek van P als functie van t.

≫ 16. Terug naar grafiek I (blz. 9).

In drie punten is de helling gemeten:

t	A	$\frac{dA}{dt}$
2	6200	- 300
4	4500	-1200
10	1800	300

a. Wat is de betekenis van de getallen -300, -1200, 300 in dit verband?

b. Wat kun je zeggen van $\frac{dZ}{dt}$ op de momenten $t = 2,\ 4,\ 10$?
(Z = het aantal zieke werknemers).

≫ 17. In de vorige opgave was er sprake van drie 'momentopnamen' van het bedrijf ten tijde van de griepgolf.
Op diezelfde momenten kunnen we ook de verandering van produktie t.o.v. het aantal werknemers bekijken:

A	P	$\frac{dP}{dA}$
6200	7190	-0,1
4500	6750	0,6
1800	3670	1,7

a. Beredeneer dat op het tijdstip $t = 4$ de produktie afnam met 720 stuks per dag.

b. Op het tijdstip $t = 10$ nam de produktie weer toe.
In welke mate?

c. Hoe zit het met de produktieverandering op het tijdstip $t = 2$?

d. Welk verband bestaat er, denk je, tussen $\frac{dP}{dt}$, $\frac{dA}{dt}$ en $\frac{dP}{dA}$?

≫ 18. Bestaat er een dergelijk verband tussen $\frac{dZ}{dt}$, $\frac{dA}{dt}$ en $\frac{dZ}{dA}$?

SAMENVATTING

In dit hoofdstukje ben je vijf functies tegengekomen:

(1) A als functie van t

(2) Z als functie van A

(3) Z als functie van t

(4) P als functie van A

(5) P als functie van t

De functie (3) krijg je door 'schakeling' van de functies (1) en (2).

(1) A is functie van t en (2) Z is functie van A	$\longrightarrow$	(3) Z is functie van t

Evenzo is (5) een *kettingfunctie* die ontstaat door schakeling van de functies (1) en (4).

(1) A is functie van t en (4) P is functie van A	$\longrightarrow$	(5) P is functie van t

Tussen de afgeleide functies van (1), (4) en (5) bestaat een belangrijk verband:

$$\frac{dP}{dt} = \frac{dA}{dt} \cdot \frac{dP}{dA}$$

Dit verband, de zogenaamde *kettingregel*, gaan we in hoofdstuk 4 verder bestuderen.

3

KETTINGFUNCTIES

```
INPUT X
U = √X
V = U + 2
Y = log (V)
PRINT Y
```

≫ 19. Bekijk bovenstaand computerprogramma.

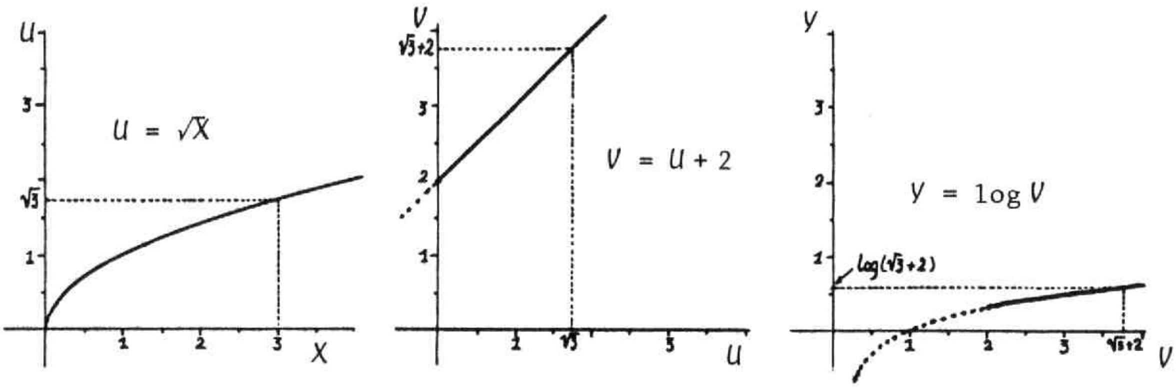
a. Ga na dat bij invoer van het getal 3 de uitvoer gelijk is aan 0,5719475.

b. Bereken de uitgevoerde Y-waarde voor het geval 6 wordt ingevoerd. Doe hetzelfde voor 16 en 64.

c. De laatste uitkomst is mooi.
Kun je nog een getal bedenken waarbij de uitkomst een 'rond' getal is?

d. Schets een grafiek van Y als functie van X.
Welke formule hoort er bij die functie?

In opgave ≫ 19 is Y een kettingfunctie van X.
De schakels waaruit de ketting is opgebouwd kun je terugvinden in het computerprogramma: $U = \sqrt{X}$, $V = U + 2$ en $Y = \log(V)$.
Van die schakels afzonderlijk kan natuurlijk ook een grafiek worden gemaakt.



≫ 20. a. Waarom zouden delen van de tweede en derde grafiek gestippeld zijn?

b. Laat X het interval [25,100] doorlopen.
Welk interval doorloopt U? En V? En Y?

≫ 21. In het computerprogramma verwisselen we de wortel-functie en de logaritmische functie.
Er komt dan:

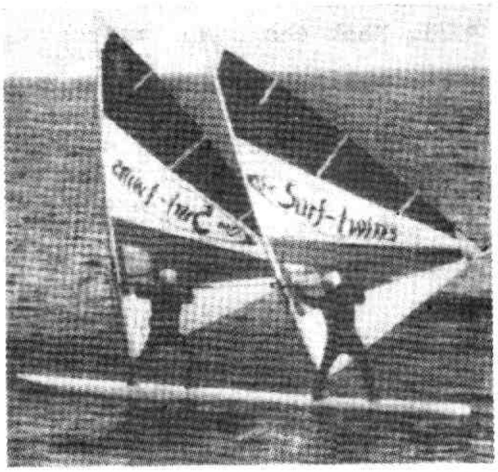
```
INPUT X
U = log(X)
V = U + 2
Y = √V
PRINT Y
```

a. Bedenk een invoergetal waarbij de uitvoer een geheel getal is.

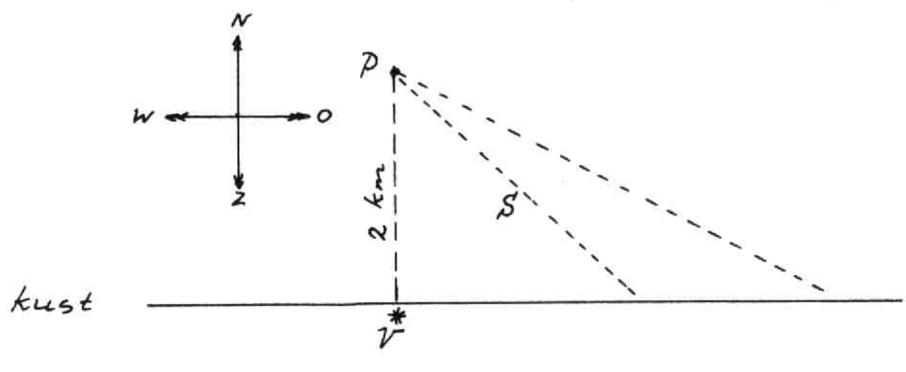
b. Welk interval doorloopt Y, als X het interval [10,1000] doorloopt?

c. Schrijf Y als functie van X.

d. Kun je elk getal als invoer kiezen?



≫ 22. Een surf-twin bevindt zich in P op 2 km van de kust, recht voor de vuurtoren V.



Het duo zeilt volgens een rechte lijn naar de kust.

a. Welke afstand is afgelegd vanaf P als het surfduo $1\frac{1}{2}$ km ten oosten van V het strand bereikt?

b. Noem de afstand (in km) van V tot het punt waar het strand wordt bereikt X. Reken X positief als de aankomst ten oosten van V is en negatief als het strand ten westen van V wordt bereikt. Druk de afstand S die het duo aflegt uit in x.

c. S kan worden opgevat als een kettingfunctie. Uit welke schakels bestaat die functie?

d. Schets de grafiek van S als functie van X.

≫ 23. Maak een computerprogramma waarbij de volgende kettingfuncties gesplitst worden in drie schakelfuncties.

Voorbeeld: $y = (\sin x + 1)^3$

Oplossing:

```
INPUT X
U = sin X
W = U + 1
Y = W³
PRINT Y
```

a. $y = (e^x - 2)^2$

b. $y = \sqrt[3]{x^2 + 8}$

c. $y = e^{\cos x - 1}$

d. $y = \sqrt{100 + \sqrt{x}}$

e. $y = \sin(x^2 + 1)$

f. $y = \sin x^2 + 1$

g. $y = \sin^2 x + 1$

h. $y = \sin^2(x + 1)$

4 KETTINGREGEL

x	$\sin(x^2+1)$ $(=y)$	$^{dy}/_{dx}$	(1) $\cos(x^2+1)$	(2) $\sin(2x)$	(3) $\cos(2x)$
1	0.909	-0.832	-0.416	0.909	-0.416
2	-0.959	1.134	0.284	-0.757	-0.654
3	-0.544	-5.033	-0.839	-0.279	0.960
4	-0.961	-2.202	-0.275	0.989	-0.145
5	0.763	6.489	0.647	-0.544	-0.839
6	-0.644	9.223	0.765	-0.537	0.844
7	-0.262	13.534	0.965	0.991	0.137
8	0.827	-9.010	-0.562	-0.288	-0.958
9	0.313	17.067	0.950	-0.751	0.660
10	0.452	17.950	0.892	0.913	0.408

Misschien wel de lastigste van alle regels voor het differentiëren gaat over kettingfuncties.

De vraag is bijvoorbeeld: hoe differentiëer je $y = \sin(x^2 + 1)$.

De afgeleide van de functie sin is de functie cos en de afgeleide van $x^2 + 1$ is $2x$, dus wat is het nu:

(1) $\frac{dy}{dx} = \cos(x^2 + 1)$, (2) $\frac{dy}{dx} = \sin(2x)$, of misschien wel (3) $\frac{dy}{dx} = \cos(2x)$?

We hebben een computer de helling $\frac{dy}{dx}$ laten benaderen in de punten met $x = 1, 2, \ldots, 10$ en ook de waarden van $\cos(x^2 + 1)$, $\sin(2x)$ en $\cos(2x)$ laten afdrukken.

Je ziet daaraan dat zowel (1), (2) als (3) foutief zijn.

≫ 24. Als je alleen op de mintekens let, is kolom (1) nog zo gek niet. Er bestaat inderdaad een mooi verband tussen $\frac{dy}{dx}$ en $\cos(x^2 + 1)$. Deel de getallen van de kolom $\frac{dy}{dx}$ door die van kolom (1). Enig idee wat de afgeleide functie van $y = \sin(x^2 + 1)$ is?

samenstelle v.e. lineaire functie
geeft product v.d. r.c.

In hoofdstuk 2 (de 'griepgolf') heb je een verband gezien tussen de afgeleide van een kettingfunctie en de afgeleide van de schakels:

A is een functie van t en P is een functie van A	$\longrightarrow$	P is een functie van t

en

$$\frac{dP}{dA} \cdot \frac{dA}{dt} = \frac{dP}{dt}$$

9
binairbomen?

Deze regel staat bekend onder de naam kettingregel.

KETTINGREGEL

ALS u een differentieerbare functie is van x en
y een differentieerbare functie is van u.

DAN is y een differentieerbare functie van x met:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Passen we dit toe op de functie $y = \sin(x^2 + 1)$.

Deze functie is opgebouwd uit: (1) $y = \sin u$
(2) $u = x^2 + 1$

Er geldt: $\frac{dy}{du} = \cos u$ (1')

$\frac{du}{dx} = 2x$ (2')

Volgens de kettingregel:

$$\frac{dy}{dx} = \cos u \cdot 2x = 2x \cdot \cos(x^2 + 1)$$

En dat resultaat is in overeenstemming met de computeroutput op blz.17!

Bij toepassingen van de kettingregel is het van belang om de te differentiëren functie in 'geschikte' schakels te ontbinden.
'Geschikt' wil hier zeggen: eenvoudig te differentiëren.

Voorbeeld: $y = e^{\sqrt{x}}$

$$\begin{cases} y = e^{u} \longrightarrow \dfrac{dy}{du} = e^{u} \\ u = \sqrt{x} \longrightarrow \dfrac{du}{dx} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = e^{u} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot e^{\sqrt{x}}$$

≫ 25. Differentieer de volgende functies met behulp van de kettingregel.

$y = \cos x^2$

$y = \sqrt{\sin x}$

$y = e^{3x}$

$y = (e^{x})^3$

$y = e^{\sin x}$

$y = (1 + x^2)^{\frac{1}{3}}$

$y = \sin(5x)$

$y = (\sin x)^5$

≫ 26. Bereken:

$\frac{d}{dx} \cos^2 x$

$\frac{d}{dx} \sin\sqrt{x}$

$\frac{d}{dx} e^{x^2 + 2x}$

$\frac{d}{dx} \cos(2x - 3)$

$\frac{d}{dt} \sin(\pi t)$

$\frac{d}{dt} \sin(e^{t})$

$\frac{d}{dt} e^{-t}$

$\frac{d}{dt} 2^{1 - t^2}$ $(c_2 \approx 0{,}6970)$

≫ 27. De surf-twin van opgave ≫ 22.

a. Bereken $\frac{dS}{dX}$.

b. Voor welke X geldt: $\frac{dS}{dX} = 0$?

c. Schets het tekenverloop van $\frac{dS}{dX}$.

d. Had je dit tekenverloop kunnen verwachten (zonder $\frac{dS}{dX}$ te berekenen)?

≫ 28. Differentieer:

a. $f(x) = \sqrt[3]{x+8}$

b. $f(x) = \sqrt[3]{8x}$

c. $f(x) = (2x+1)^{-1}$

d. $f(x) = \dfrac{1}{(2x+1)^3}$

e. $f(x) = e^{5-x}$

f. $f(x) = e^{\frac{5}{x}}$

g. $f(x) = \dfrac{5}{(1-x)^2}$

h. $f(x) = \dfrac{5}{e^x}$

≫ 29. Differentieer de functies van opgave ≫ 23 (blz. 16).

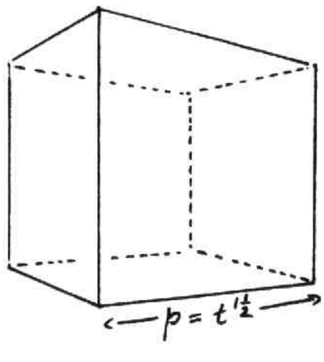
≫ 30. De ribbe van een kubusvormige cel is p.

Deze cel is aan veranderingen onderhevig.

De ribbe verandert volgens de formule: $p = t^{1\frac{1}{2}}$. (t is de tijd).

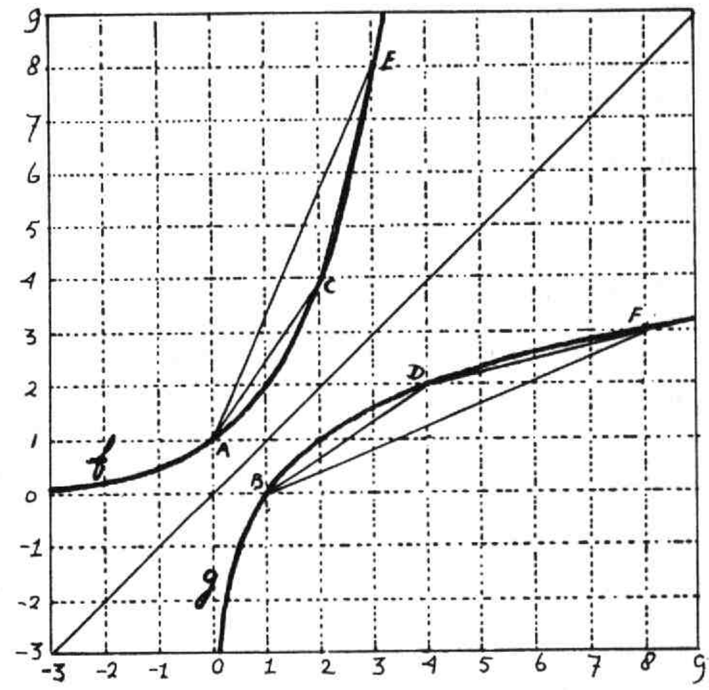
a. Bereken $\dfrac{dO}{dt}$ en $\dfrac{dV}{dt}$. (O is de totale buitenoppervlakte van de cel en V is het volume).

b. Bereken $\dfrac{dV}{dp}$ en controleer: $\dfrac{dV}{dt} = \dfrac{dV}{dp} \cdot \dfrac{dp}{dt}$.



5

DIFFERENTIËREN VAN LOGARITMISCHE FUNCTIES



≫ 31. In één figuur de grafieken van:

$f(x) = 2^x$ en $g(x) = {}^2\log x$

a. Hoe groot is de *gemiddelde* helling van de grafiek van f:
tussen A en E; tussen C en E; tussen C en A?

b. Hoe groot is de gemiddelde helling van de grafiek van g:
tussen B en F; tussen D en F; tussen D en B?

c. Bereken in drie decimalen nauwkeurig de helling van de grafiek van f in het punt C. ($c_2 \approx 0{,}6930$).
Hoe kun je hieruit de helling van de grafiek van g in het punt D afleiden?

d. Bereken $g'(1)$ en $g'(8)$ in drie decimalen nauwkeurig.

De grafiek van de logaritmische functie $g(x) = {}^{a}\log x$ is het spiegelbeeld van de grafiek van $f(x) = a^x$ bij spiegeling in de lijn $x = y$.
Daaruit volgt dat de helling in een punt van de grafiek van g gevonden kan worden door het *omgekeerde* te berekenen van de helling van de grafiek van f in het spiegelpunt.

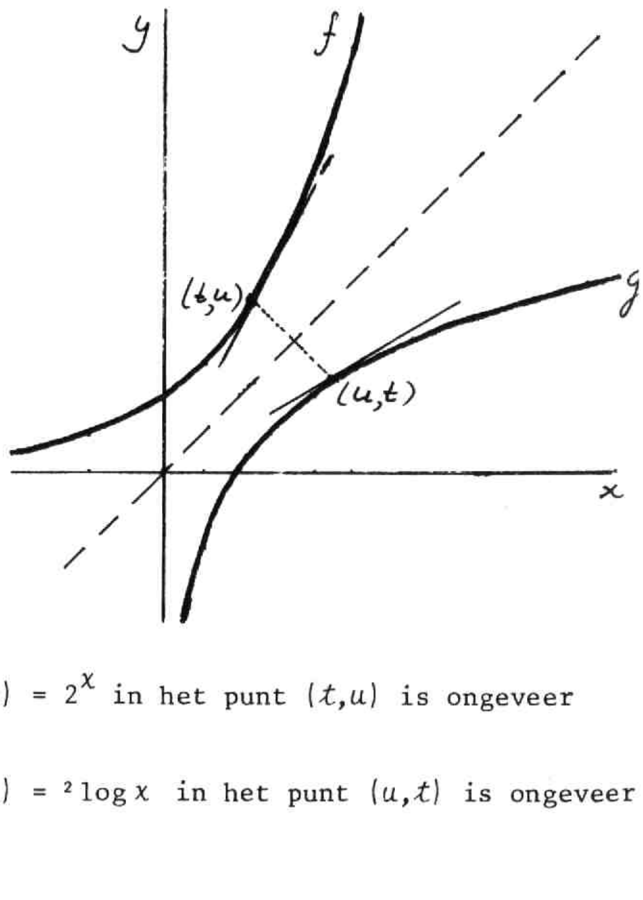
Voorbeeld: $a = 2$.

Gevraagd:

De helling van de grafiek van $g(x) = {}^{2}\log x$ in het punt (u,t).

Oplossing:

Het spiegelbeeld (t,u) ligt op de grafiek van $f(x) = 2^x$.



De helling van de grafiek van $f(x) = 2^x$ in het punt (t,u) is ongeveer $0{,}6930 \cdot 2^t$ ofwel $0{,}6930 \cdot u$.
De helling van de grafiek van $g(x) = {}^{2}\log x$ in het punt (u,t) is ongeveer

$$\frac{1}{0{,}6930 \cdot 2^t} \quad \text{ofwel} \quad \frac{1}{0{,}6930 \cdot u}$$

Dus: $f'(t) = c_2 \cdot 2^t$

$g'(u) = \dfrac{1}{c_2 \cdot u}$ $\quad (c_2 \approx 0{,}6930)$

Voor andere grondtallen verandert alleen de constante factor c_2.

Er geldt:

Als $g(x) = {}^{a}\log x$, dan $g'(x) = \dfrac{1}{c_a x}$ $\quad (a > 0,\ a \neq 1)$

≫ 32. $f(x) = {}^{10}\log x$.

Bereken $f'(5)$ in twee decimalen nauwkeurig. ($c_{10} \approx 2{,}3026$).

≫ 33. $g(x) = {}^{2}\log x$.

Bereken in twee decimalen nauwkeurig de x-coördinaat van het punt op de grafiek van g, waarin de helling 1 is.

≫ 34. $y = {}^{e}\log x$, ofwel $y = \ln x$.

Met behulp van een computer is een benadering van de helling in de punten met $x = 1, 2, \ldots, 10$ berekend.

De helling van y = ln(x)

x	y	helling
1	0.000	1.000
2	0.693	0.501
3	1.099	0.334
4	1.386	0.250
5	1.609	0.200
6	1.792	0.167
7	1.946	0.143
8	2.079	0.124
9	2.197	0.112
10	2.303	0.100

a. Bij de berekening is steeds $\Delta x = 0{,}0001$ genomen.
Reken met je rekenmachientje het resultaat na van $x = 4$.

b. Welk verband bestaat er tussen $\frac{dy}{dx}$ en x?

≫ 35. Differentiëer elk van de volgende functies:

a. $y = {}^{10}\log 3x$

b. $y = {}^{10}\log 3 + {}^{10}\log x$

c. $y = 3 \cdot \ln x$

d. $y = x \cdot \ln x$

e. $y = {}^{2}\log(x + 1)$

f. $y = {}^{2}\log(1 - x)$

g. $y = \dfrac{\ln x}{x}$

h. $y = \dfrac{x}{\ln x}$

≫ 36. Neem de functie uit opgave ≫ 35g.

a. In welk punt heeft de grafiek een horizontale raaklijn?

b. Teken de grafiek van die functie.

≫ 37. Op een zakrekenmachientje vind je alleen toetsen voor de 10-logaritme (log) en de e-logaritme (ln).
Hoe kun je $^2\log 7$ met de log-toets berekenen?
En met de ln-toets?

≫ 38. a. Druk $^2\log x$ uit in *natuurlijke logaritmen* (d.w.z. logaritmen met grondtal e).

b. Laat zien, door $y = {}^2\log x$ op twee manieren te differentiëren, dat geldt: $c_2 = \ln 2$.

c. Bereken c_2 met je rekenmachientje.

≫ 39. In het boekje 'Groei' heb je een paar eigenschappen van de constante c_a ontdekt.

Voorbeeld:

Uit $\frac{d}{dx}(2^x \cdot 5^x) \overset{\text{produktregel}}{=} (c_2 \cdot 2^x) \cdot 5^x + 2^x \cdot (c_5 \cdot 5^x) = (c_2 + c_5) \cdot 10^x$

en

$$\frac{d}{dx} 10^x = c_{10} \cdot 10^x$$

volgt: $c_2 + c_5 = c_{10}$.

Hoe kun je deze eigenschap nu verklaren uit opgave ≫ 38?

≫ 40. a. $c_2 \approx 0{,}6931$ $\qquad c_3 \approx 1{,}0986$
Hoe bereken je hieruit $c_{2/3}$?

b. Welk verband bestaat er tussen c_3 en $c_{1/3}$?

Het voorgaande vatten we samen in de twee regels voor het differentiëren van exponentiële en logaritmische functies:

Als $f(x) = a^x$, dan $f'(x) = \ln a \cdot a^x$
Als $g(x) = {}^{a}\log x$, dan $g'(x) = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x}$
$(a > 0,\ a \neq 1)$.

≫ 41. Differentiëer de volgende functies:

a. $y = \frac{1}{\ln 5} \cdot 5^x$

b. $y = \frac{1}{\ln 5} \cdot 25^x$

c. $y = e^{5x}$

d. $y = 5^{ex}$

e. $y = {}^{5}\log x$

f. $y = \ln(5x + 4)$

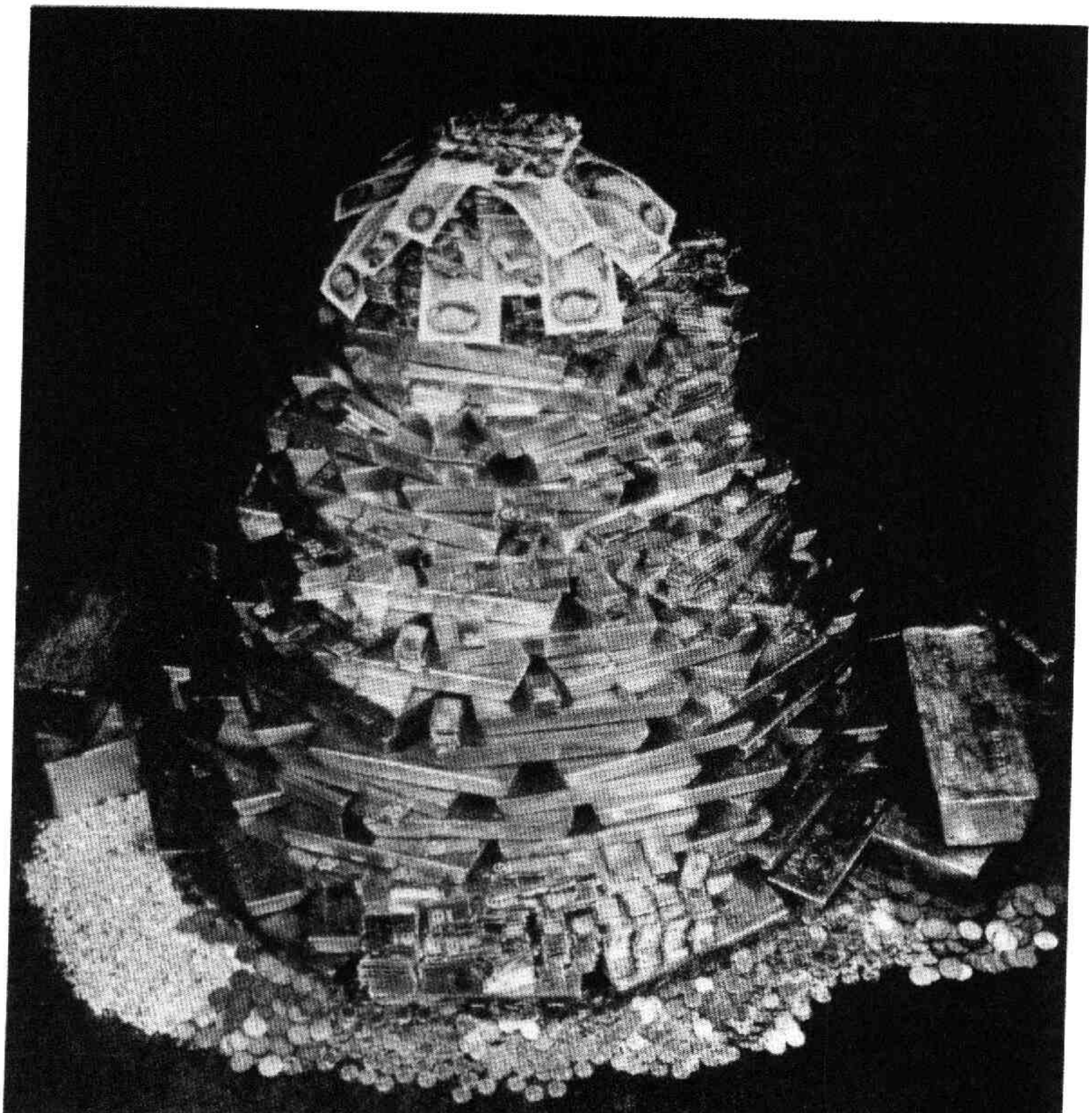
g. $y = \ln(e^x + 4)$

h. $y = {}^{5}\log(5^x + 4)$

≫ 42. De opbrengst ($= O$) als functie van de hoeveelheid verkochte artikelen ($= q$) van een zeker produkt, wordt gegeven door de formule:

$$O = 300 \ln(q + 1) \qquad (0 \leq q \leq 100)$$

De kostenfunctie K wordt gegeven door $K = 10q$.
Voor welke q is de winst $O - K$ maximaal?



Rente op rente op rente op rente ....

6 RENTE OP RENTE OP RENTE OP ...

Een spaarbank biedt de spaarder de volgende mogelijkheden:

5% Spaar-direct rekening.
Direct opvraagbaar tot *f* 3.000,--.
Voor hogere bedragen geldt een opzegtermijn van 1 maand.

7% Vast-tegoed rekening.
Het bedrag kan niet binnen 1 jaar na storting worden opgevraagd.
De rente is direct opvraagbaar.

» 43. Iemand opent een spaarrekening op bovengenoemde bank. Hij stort een zeker bedrag op een spaar-direct rekening. Na 1 jaar boekt hij het totale bedrag op een vast-te-goed rekening.

a. Hoeveel rente (in % van het oorspronkelijke bedrag) heeft hij in totaal na 2 jaar ontvangen?

b. Hoeveel zou dat geweest zijn als hij in omgekeerde volgorde had gehandeld?

≫ 44. Een concurrerende bank biedt 6% rente met een opzegtermijn van een half jaar.
Levert dat, bij hetzelfde beginkapitaal precies hetzelfde bedrag op aan rente over twee jaar, als het bedrag dat de spaarder van opgave ≫ 43 inde?

≫ 45. a. Jij zet een bedrag op een 5% spaarrekening.
Na hoeveel jaren is dat bedrag verdubbeld?

b. Dezelfde vraag voor een spaarrekening met 7% rente.

Kapitaal dat uitgezet wordt tegen samengestelde interest ('rente op rente') groeit exponentiëel.
Als p het rente percentage is, is de groeifactor $1 + \frac{p}{100}$.
De verdubbelingstijd bereken je handig met behulp van logaritmen.

Immers: uit: $\left(1 + \frac{p}{100}\right)^{d} = 2$ (d = verdubbelingstijd)

volgt: $d = \dfrac{\ln 2}{\ln\left(1 + \frac{p}{100}\right)}$

≫ 46. a. Verklaar die laatste formule.

b. Maak een tabel van rentepercentage (p) met bijbehorende verdubbelingstijd (d) voor p = 1, 2, ..., 10%.

c. Teken de grafiek van de verdubbelingstijd als functie van het rentepercentage.

d. In de economie gebruikt men een handige vuistregel voor het berekenen van de verdubbelingstijd:

$$d \cdot p = 70$$

Klopt dat met jouw bevindingen.

e. Is die vuistregel ook geldig voor een hoog rentepercentage, bijv. p = 50%?

De vuistregel van opgave ≫ 45d kun je ook gebruiken bij andere situaties van exponentiële groei, mits de groeifactor niet al te groot is.
Pas de vuistregel toe bij de volgende opgaven.

≫47. Neem aan dat de inflatie in Nederland over een lange reeks van jaren 7% per jaar zal bedragen.

a. In welk jaar is een 'briefje van vijf' evenveel waard als een rijksdaalder van nu?

b. In welk jaar zal een 'tientje' evenveel zijn als een rijksdaalder van nu?

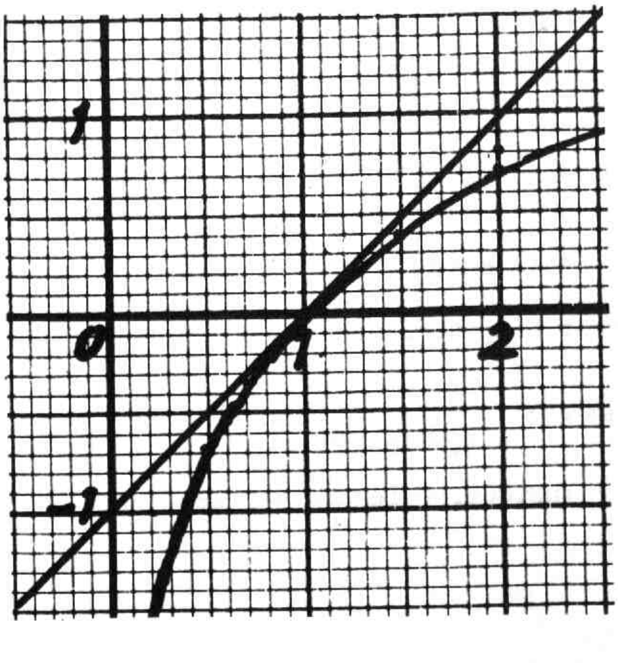
c. Wat zal de waarde zijn van ƒ 1.000,-- over 100 jaar in guldens van nu? (Bij een voortdurende inflatie van 7% per jaar)?

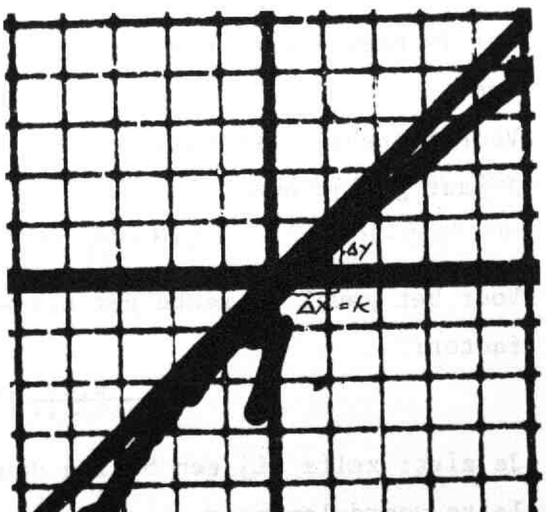
≫48. In een laboratorium wordt een bacterie gekweekt. De omstandigheden zijn zodanig dat er onbelemmerde groei is, met een groeipercentage van $2\frac{1}{2}$ % per dag.

a. Na hoeveel weken heeft de bacteriekolonie zich verdubbeld?

b. Laat zien (zonder rekenmachientje) dat de groeifactor over een jaar ongeveer gelijk is aan 8000.

De vuistregel voor de berekening van de verdubbelingstijd is handig voor het maken van snelle, maar enigszins ruwe schattingen over de groei op lange termijn. Voor preciezere berekeningen gebruik je natuurlijk je rekenmachine.
De vuistregel kan worden verklaard met differentiaalrekening.
Hieronder zie je de grafiek van $y = \ln x$ met de raaklijn in het punt (1,0).
Daarnaast zie je een uitvergroot detail van de figuur.





≫49. a. Laat zien dat de helling van de grafiek in het punt (1,0) gelijk is aan 1.

b. Neem Δx in de detailfiguur gelijk aan k.
Druk Δy uit in k.

c. k is een klein getal ($k < 0{,}1$).
Verklaar: $\ln(1 + k) \approx k$.

≫50. Op bladzijde 28 staat de formule:

$$d = \frac{\ln 2}{\ln(1 + \frac{p}{100})}$$

Herleid met behulp van opgave ≫49c deze betrekking tot $d \cdot p \approx 70$.

Dat de vuistregel '$dp \approx 70$' een beetje 'ruw' is, blijkt uit het volgende.
Stel: je wint 'de honderdduizend' en bent van plan dit zojuist verworven kapitaal uit te zetten tegen 6% rente per jaar.
Een concurrerende bank doet je een aanbod van 3% per half jaar.
Volgens de vuistregel zou dit geen verschil uitmaken.
Immers: de verdubbelingstijd in het eerste geval is $\frac{70}{6}$ jaar.
In het tweede geval: $\frac{70}{3} \times \frac{1}{2}$ jaar, dus ook $\frac{70}{6}$ jaar.

≫51. a. Laat door exacte berekening zien dat het tweede voorstel gunstiger is dan het eerste.

b. Een derde bank doet een nog beter voorstel: ½% rente per maand.
Hoeveel rente levert dat op na 1 jaar?

Het is mogelijk om over nog kleinere termijnen rente te laten bijschrijven.
Voor rentebijschrijving per dag is de groeifactor van het kapitaal over 1 jaar gelijk aan:

$$\left(1 + \frac{0{,}06}{365}\right)^{365} = 1{,}06183131$$

Voor het geval de rente per uur wordt bijgeschreven is de jaarlijkse groeifactor:

$$\left(1 + \frac{0{,}06}{365 \times 24}\right)^{365 \times 24} = 1{,}06183619$$

Je ziet: zelfs bij een bedrag van ƒ 100.000,-- levert dat geen spectaculaire voordelen meer op.

Noem het aantal termijnen waarover de rente (6% per jaar) wordt bijgeschreven: n.
De groeifactor van het kapitaal is afhankelijk van n.

n	groeifactor
1	1,06
2	1,0609
12	1,06167781
365	1,06183131
8760	1,06183619

Je ziet: voor een grote waarde van n valt die afhankelijkheid nogal mee; de groeifactor blijft vrijwel constant.
Dit valt weer te verklaren met: $\ln(1+k) \approx k$ voor een kleine waarde van k.
Immers:
Als je de 6% rente verdeelt over n termijnen, is de groeifactor over één jaar:

$$g = \left(1+\frac{0{,}06}{n}\right)^n$$

Hieruit volgt: $\ln g = n \cdot \ln\left(1+\frac{0{,}06}{n}\right)$.
Omdat $\ln\left(1+\frac{0{,}06}{n}\right)$ ongeveer gelijk is aan $\frac{0{,}06}{n}$ (voor $n = 1, 2, 3, \ldots$), volgt:

$$\ln g = n \cdot \frac{0{,}06}{n} = 0{,}06$$

$$g = e^{0{,}06}$$

≫ 52. Bereken $e^{0{,}06}$ op je rekenmachientje en vergelijk de uitkomst met die van $\left(1+\frac{0{,}06}{365 \times 24}\right)^{365 \times 24}$.

Een bank kan de rente als het ware elk moment laten bijschrijven. De groeifactor van het kapitaal over 1 jaar is dan $e^{0{,}06}$. Men spreekt in dat geval van *continue rentebijschrijving*.

≫ 53. Een ondernemer wil een kapitaal beleggen.
Hij heeft de keus tussen $7\frac{3}{4}$% rente per jaar continu bijgeschreven, of 8% rente per jaar halfjaarlijks bijgeschreven.
Wat is gunstiger?

≫ 54. Iemand zet *f* 5.000,-- uit tegen 5% per jaar.
De rente wordt continu bijgeschreven.
Welk bedrag heeft hij na 10 jaar?

≫ 55. Een vader spreekt op de 10^de^ verjaardag van zijn dochter af:
"Als je tot die tijd niet rookt, krijg je op je 18^de^ verjaardag *f* 200,--."
De volgende dag gaat hij naar de bank en zet een bedrag uit tegen 8% continue rente. Hoeveel moet hij storten om op de 18^de^ verjaardag te beschikken over *f* 200,--.

≫ 56. Een kapitaal K_0 wordt uitgezet tegen r% rente per jaar, continu bijgeschreven.
K_t is het kapitaal na t jaar. Druk K_t uit in t.

≫ 57. Een groot kantoorgebouw werd gekocht voor $1\frac{1}{2}$ miljoen gulden.
Tien jaar later werd het bedrag betaald; er moest toen 4 miljoen worden betaald. De rente op de schuld werd continu berekend.
Van welk rentepercentage per jaar werd er uitgegaan?

7 OEFENINGEN IN DIFFERENTIËREN

Regels voor het differentiëren van standaardfuncties:

Algemeen		Bijzondere gevallen	
$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
x^p	px^{p-1}	x^2	$2x$
		$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
		$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}$
(p willekeurig reëel)		x	1
p^x	$\ln p\cdot p^x$	e^x	e^x
($p > 0$, $p \neq 1$)			
${}^p\log x$	$\frac{1}{\ln p\cdot x}$	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
($p > 0$, $p \neq 1$)			
$\sin px$	$p\cos px$	$\sin x$	$\cos x$
$\cos px$	$-p\sin px$	$\cos x$	$-\sin x$
(p willekeurig reëel)			

Door optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen en kettingvorming worden uit deze standaardfuncties nieuwe, meer ingewikkelde functies gebouwd. Het differentiëren daarvan gaat met behulp van de 'som/verschil-regel', 'produktregel', 'quotiëntregel' en 'kettingregel'.
Verder zijn de regels voor het optellen en vermenigvuldigen met een constante van belang.

≫ 58. Differentiëer de functie f in het geval $f(x)$ =

x^{10} ;	10^x ;	$\frac{1}{10+x}$;	$\frac{1}{10x}$
10 ;	$\frac{1}{x^{10}}$;	$\sqrt[10]{x}$;	$\sqrt{10^x}$
$^{10}\log x$;	$\sin(\frac{1}{10})$;	$\sin(10-x)$;	$\sin^{10} x$

≫ 59. Van een insectenpopulatie is de omvang $N(t)$ gegeven door:

$N(t) = 300 \cdot e^{0,1t}$

waarbij t de tijd in dagen is, gerekend vanaf een zeker moment. Hoe groot is de groeisnelheid van de populatie op het tijdstip $t = 5$? En op het tijdstip $t = 10$?

≫ 60. a. Bereken de helling in het punt met x-coördinaat 0 van de grafiek van $y = e^x \cdot \cos x$.

b. Bereken de helling in het punt met x-coördinaat π van de grafiek van $y = x \cdot \sin 2x$.

≫ 61. De opbrengst R van een zeker produkt is als functie van de geproduceerde hoeveelheid gegeven door:

$R = 600 \cdot \sqrt[3]{q^2}$.

Bereken de marginale opbrengst voor $q = 125$.
De marginale opbrengst is de verandering van de opbrengst (per geproduceerde eenheid).

≫ 62. De waterhoogte (in m boven N.A.P.) van een zeehaven wordt benaderd met de formule:

$W(t) = 1,5 \sin \frac{1}{2}t$

waarbij t de tijd in uren is.
Hoe groot is de snelheid (in meters per uur) waarmee het water stijgt op het moment dat het niveau gelijk is aan 0 m N.A.P.?

≫ 63. $f(x) = {}^{10}\log x$.

a. Bereken de x-coördinaat van het punt waarin de helling gelijk is aan 0,1.

b. Toon aan: $f'(x) = \frac{^{10}\log e}{x}$.

≫ 64. Herhaald differentiëren.

Voorbeeld:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^4 \\
f'(x) &= 4x^3 \\
f''(x) &= 12x^2 \\
f'''(x) &= 24x \\
f^{iv}(x) &= 24 \\
f^{v}(x) &= 0 \\
f^{vi}(x) &= 0
\end{aligned}
$$

Maak ook zo'n rijtje voor:

a. $f(x) = \sin x$ b. $f(x) = \ln x$ c. $f(x) = xe^x$.

≫ 65. f'' wordt de *tweede* afgeleide van f genoemd.
f''' de *derde* afgeleide, enz.

a. Welke functie is de 25^e afgeleide van $f(x) = \sin x$?

b. En van $f(x) = \ln x$?

c. En van $f(x) = xe^x$?

8 DE TWEEDE AFGELEIDE

De eerste afgeleide is een maat voor de verandering van de functie;
de tweede afgeleide is een maat voor de verandering van de eerste afgeleide;
de derde afgeleide is een maat voor de verandering van de tweede afgeleide;
enz.

Voorbeeld:

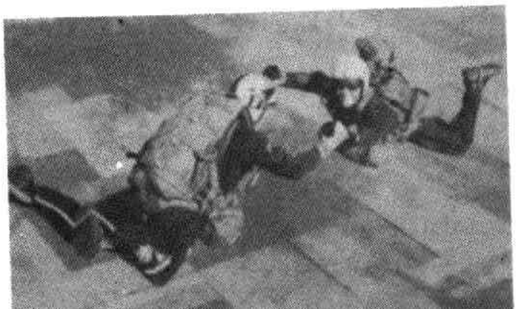
Bij een (niet afgeremde) vrije val wordt de valweg S als functie van de tijd gegeven door $S = 5t^2$. Differentiatie van deze functie geeft de snelheid als functie van de tijd:

$$S' = V, \text{ dus } V = 10t.$$

Nog een keer differentiëren levert de snelheidsverandering, de *versnelling*, op:

$$S'' = V' = a\,, \text{ dus } a = 10.$$

De versnelling bij vrije val is constant: de snelheid neemt per seconde toe met 10 m/sec.
In de natuurkunde zegt men:
de versnelling is 10 m/sec².



≫ 66. Een automobilist rijdt met een snelheid van 72 km/uur (dat is dus 20 m/sec) op het moment dat hij een stoplicht op rood ziet springen. Hij drukt meteen het rempedaal in en komt vlak voor de witte streep tot stilstand.
Vanaf het moment dat hij tot stilstand komt geldt voor de afgelegde weg $S(t) = 20t - 2\frac{1}{2}t^2$.

a. Bereken $S'(t)$ en $S''(t)$.

b. Na hoeveel seconden stond de auto stil?

c. Hoe lang was de remweg?

d. Hoeveel m/sec² was de remvertraging?

≫ 67. Een parachutespringer opent zijn valscherm op het moment (zeg: t=0) dat hij 800 m boven de grond is.
De valweg (in meters) na t seconden wordt gegeven door:

$$S(t) = 27{,}5 + 6t - 27{,}5\,e^{-1{,}6t}.$$

a. Welke snelheid (in m/sec) had de parachutist op het moment dat zijn parachute openging?
Hoeveel km/u is dat?

b. Welke vertraging (in m/sec²) ondervond hij na 1 seconde? En na 3 seconden?

c. Beredeneer dat de snelheid van de parachutist afneemt tot ongeveer 6 m/sec.

≫ 68. $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$

a. Bereken $f'(x)$ en $f''(x)$.

b. In welk punt van de grafiek van f is de raaklijn horizontaal?
Heeft de grafiek in dat punt een 'top' en 'dal', een 'dal' of geen van beiden?

c. Schets de grafiek van f.

d. Ergens in een punt P links van de y-as heeft de grafiek een maximale helling. Dit punt kan exact worden berekend met behulp van $f''(x)$. Het gaat immers om een maximum van $f'(x)$!
Laat zien dat P de x-coördinaat -1 heeft.

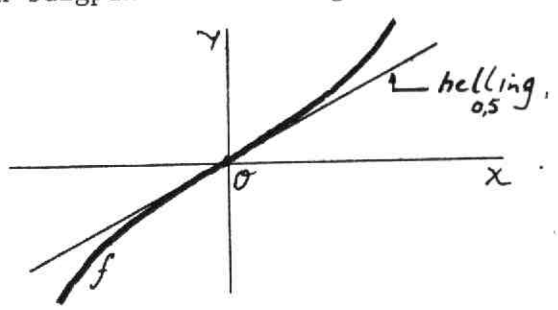
e. In welk punt is de helling minimaal?

Opmerking:

De grafiek van f heeft de vorm van de zgn. 'normale kromme' (klok-kromme) die in de statistiek een vooraanstaande rol speelt.

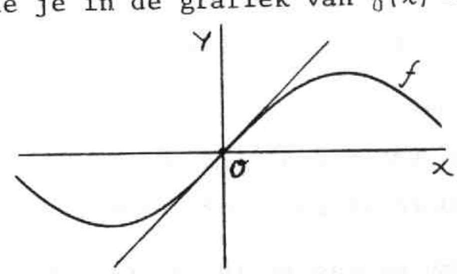
De punten met maximale en minimale helling zijn de *buigpunten* van de grafiek.

Een voorbeeld van zo'n buigpunt levert de grafiek van $f(x) = 0{,}1x^3 + 0{,}5x$:



$f'(x) = 0{,}3x^2 + 0{,}5$.
De minimale helling van de grafiek wordt bereikt in (0,0) en is gelijk aan 0,5.
Omdat $f'(x)$ zo eenvoudig is dat je het minimum direct kunt zien, hoef je niet met f'' te werken.
Er geldt overigens: $f''(x) = 0{,}6x$ waaruit ook direct volgt dat het minimum van $f'(x)$ bereikt wordt voor $x = 0$.

Een ander voorbeeld zie je in de grafiek van $f(x) = \sin x$.



In (0,0) is de helling maximaal (n.l. 1), immers $f'(x) = \cos x$.

≫ 69. $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

a. Bereken $f'(x)$ en $f''(x)$.

b. In welke punten van de grafiek van f is de helling 1?

c. Bereken het minimum van $f(x)$.

d. Bereken de punten op de grafiek van f waarin de helling maximaal (resp. minimaal) is.

e. Teken de grafiek van f.

≫ 70. In een krant stond te lezen: 'de werkloosheidsstijging neemt af'.

a. Betekent dit dat het aantal werklozen minder wordt?

b. Geef met een globaal geschetst grafiekje aan wat de journalist bedoelt.

c. Veronderstel dat het aantal werklozen ($= W$) een functie van t is waarvan de eerste en tweede afgeleide resp. W' en W'' zijn.
Wat weet je van W' (positief, nul of negatief) op het tijdstip waarover de krant schrijft?

d. En wat weet je van W'' op dat tijdstip?

≫ 71. In de maand maart is het in een bepaalde streek van Zuid-Europa zeer constant weer.
De dagelijkse gang van de luchttemperatuur wordt beschreven door de formule:

$$T = 10 - 8\sin\frac{\pi(u + 2)}{12}$$

waarbij u de tijd in uren is vanaf middernacht en T de temperatuur in °C.

a. Teken een grafiek van het temperatuurverloop gedurende één etmaal.

b. 's Morgens vroeg loopt de temperatuur snel op.
Met hoeveel °C per uur stijgt de temperatuur om 08.00 uur ongeveer (Rond je antwoord af in 1 dec. nauwkeurig).

c. Op welk uur van de dag stijgt de temperatuur het sterkst?

≫ 72. Een bioloog stelde het volgende wiskundige model op voor de groei van een pompoen:

$$G = \frac{3000}{1 + 9e^{-1,2t}}$$

(t is de tijd in dagen, G is het gewicht in grammen).

a. Laat zien dat geldt:

$$G' = 1,2G \cdot \frac{9e^{-1,2t}}{1 + 9e^{-1,2t}}$$

b. Hoe kun je aan die formule zien dat de pompoen op den duur vrijwel niet meer groeit?

c. Leidt uit a af:

$G' = 1,2G - 0,0004G^2$.

d. Laat zien dat geldt:

$G'' = 0$ voor $G = 1500$.

e. Schets de grafiek van G als functie van t voor de periode tussen $t = 0$ en $t = 10$.

Geef de plaats van het buigpunt aan.

Wat is de betekenis van dit punt voor de groei?