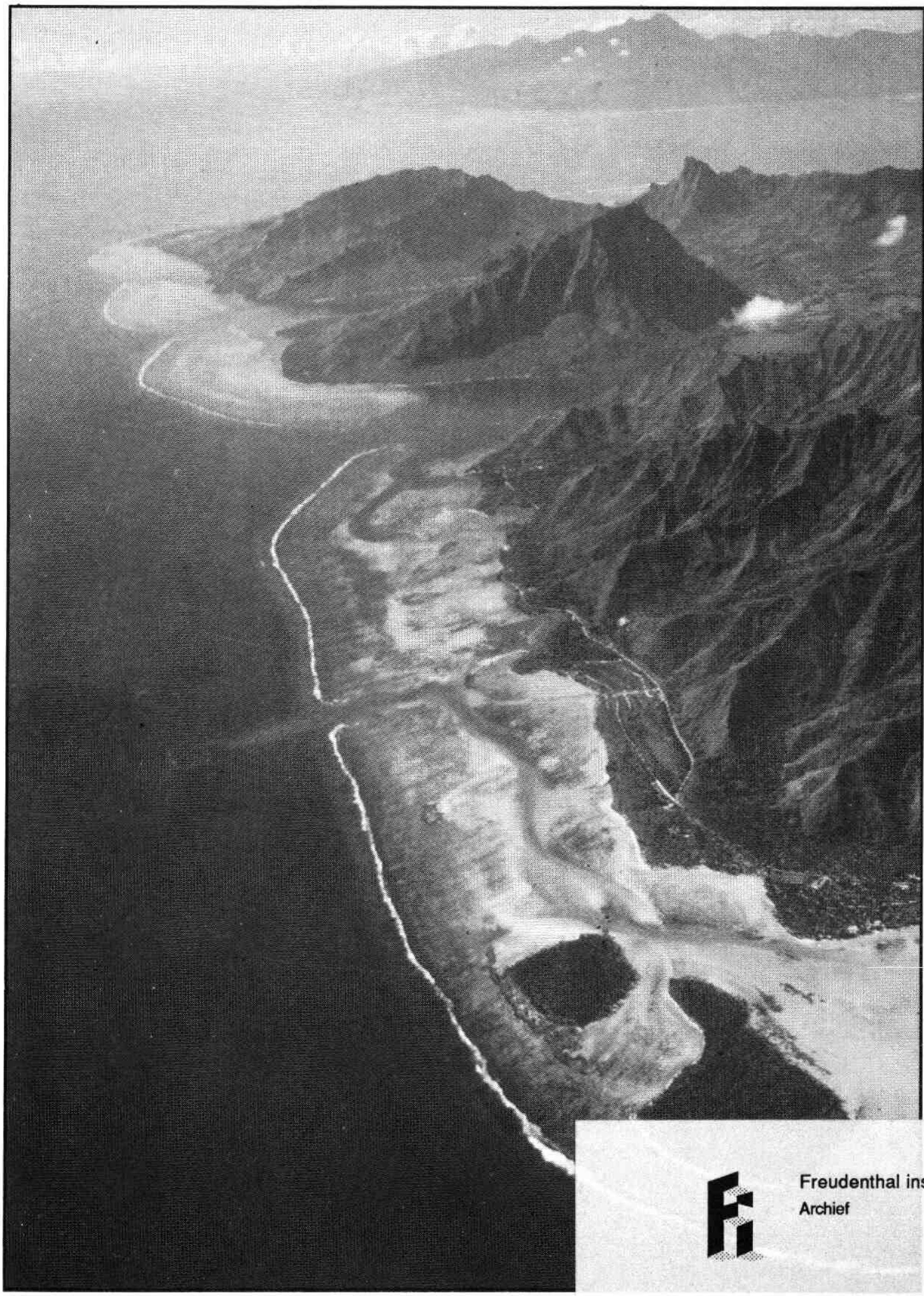
Matrices

https://hdl.handle.net/1874/10254



MATRICES

MATRICES

OW & OC

Tiberdreef 4 - 3561 GG Utrecht

Foto omslag:

Moorea, en wel de noordkust. Op de achtergrond Tahiti.
(Zie ook blz. 16)

MATRICES

Een produktie ten behoeve van de experimenten in het kader van de Herverkaveling Eindexamenprogramma's Wiskunde 1 en 2 V.W.O.

Samenstelling: Jan de Lange Jzn
Martin Kindt

M.m.v.: Heleen Verhage
Guus Vonk

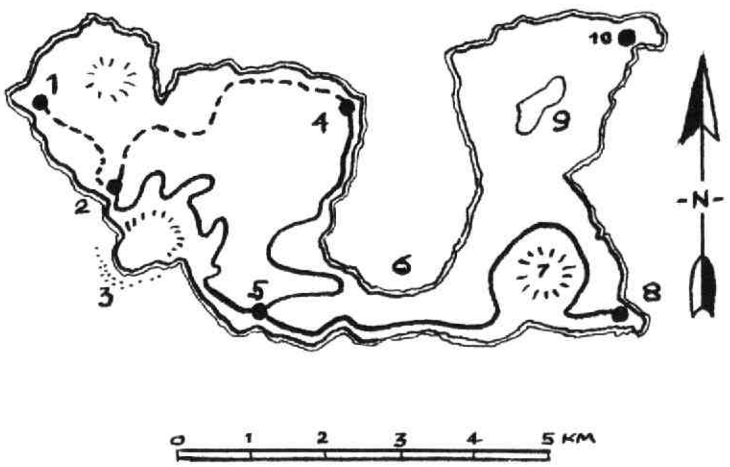
Vormgeving: Ellen Hanepen

Utrecht, april 1983.

INHOUDSOPGAVE

1

GRAFEN EN MATRICES



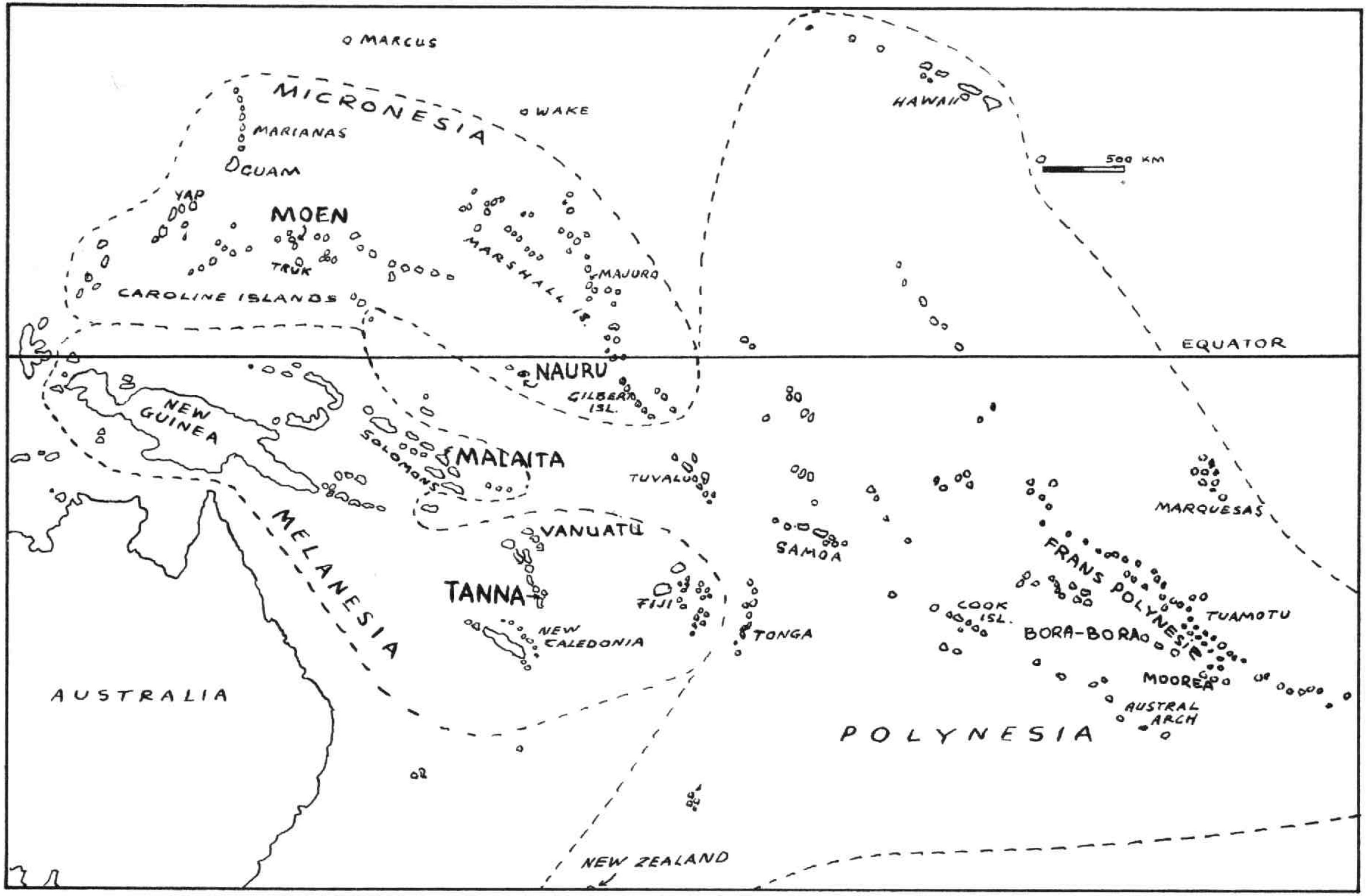
HAU

1. Point Hau
2. Lalou
3. lalou Lagoon
4. Moau
5. St. Haula
6. Lonely Bay
7. Gunung Suray
8. Kota Hau
9. Lake Lae
10. Kaap Hau

fig. 1

Hierboven een kaart van het - denkbeeldige - eilandje HAU, gelegen in de Stille Oceaan en, zoals zoveel eilandjes daar, vulkanisch van oorsprong en gedeeltelijk met oerwoud bedekt. Je ziet slechts drie verharde wegen, van de 'hoofdstad' St. Haula naar Moau en van St. Haula naar Lalou; en van St. Haula naar Kota Hua; de lengtes zijn respectievelijk 4, 7 en 9 km.
Verder zijn er wegen van Lalou naar Moau en Pt. Hau, resp. 6 en 3 km. In het kader van de ontwikkelingshulp kan er een schooltje worden gebouwd. Besloten wordt deze school in één van de vijf aan de wegen liggende plaatsen te zetten.

≫ 1. Welke zaken zullen een rol kunnen spelen bij het bepalen van de 'juiste' plaats van een school?



DE STILLE OCEAAN: MET DAARIN DE IN DIT BOEKJE VOORKOMENDE EILANDEN W.O. MOEN, NAURU, MALAITA EN TANNA.

Eén van de zaken die een rol zal (kunnen) spelen is het aantal kilometers dat een leerling zal moeten fietsen of lopen om de school te bereiken. Het maken van een afstandstabel lijkt daarbij gewenst. Dat gaat iets gemakkelijker als je het wegennet op HAU schematiseert:

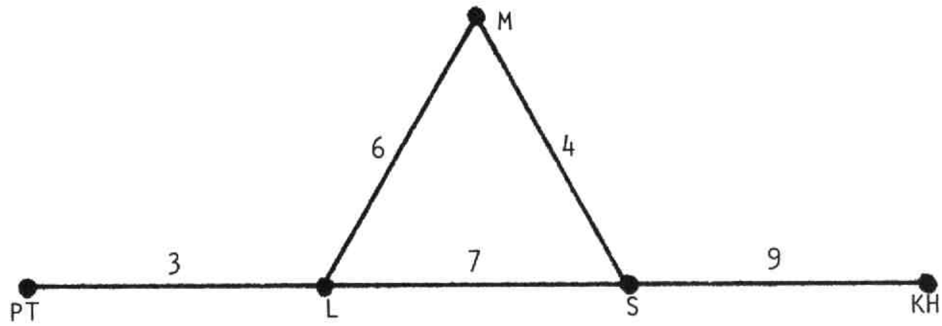


fig. 2

of, als Kaap Hau meedoet:

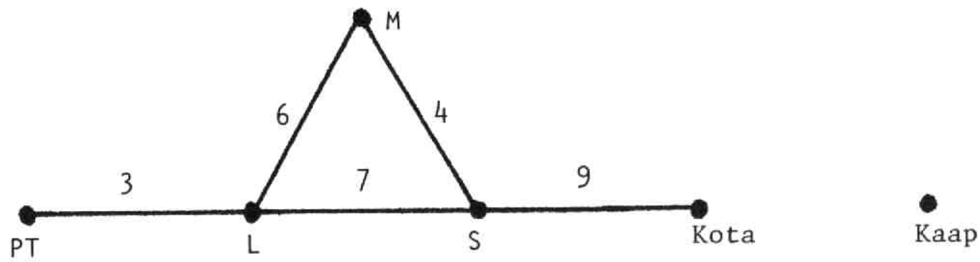


fig. 3

Zo'n voorstelling wordt een *graaf* genoemd; d.w.z. een verzameling (*knoop*) *punten*, al of niet verbonden door *takken* of *wegen*.

≫ 2. Welke verschillen zijn er tussen dit plaatje en het kaartje?

≫ 3. Maak een afstandstabel met daarin de afstanden tussen de vijf verbonden plaatsen van HAU. Kun je die tabel ook maken met Kaap erbij?

Eén van de voorwaarden voor het plaatsen van de school is:
de grootste afstand voor een leerling moet zo klein mogelijk zijn.

≫ 4. Als dit de enige voorwaarde zou zijn, waar komt de school dan?

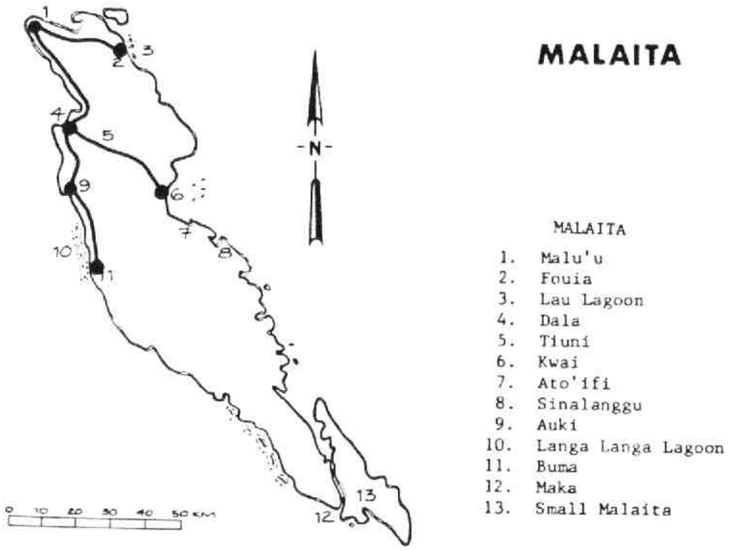


fig. 4

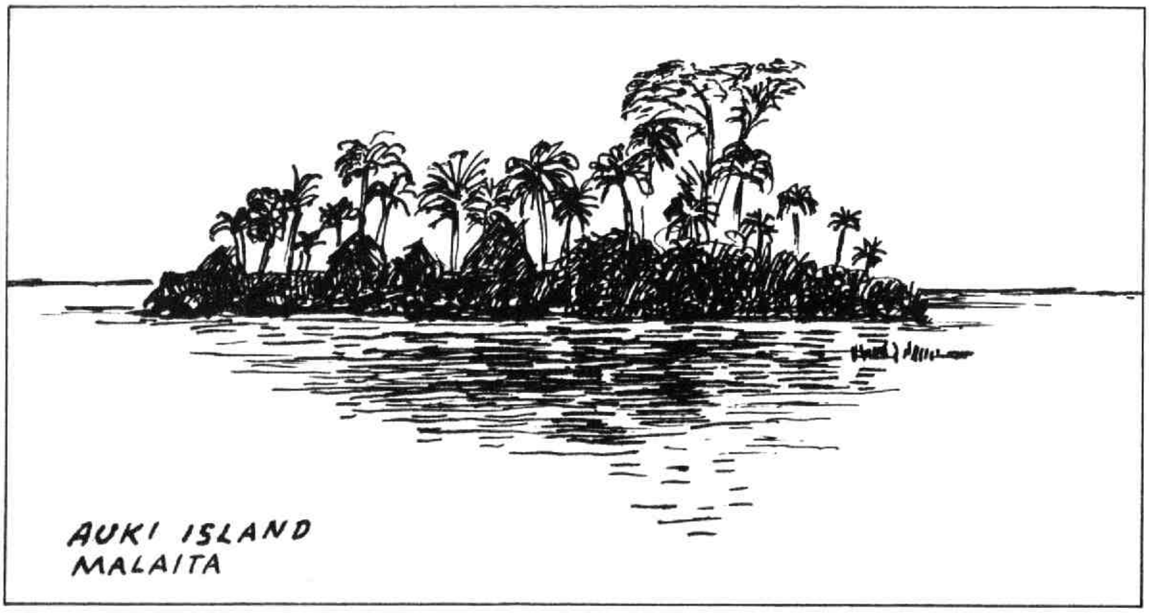
MALAITA is het op één na grootste eiland van de Solomon Eilanden, ook in de Stille Oceaan. De grootste 'stad' is Auki (9).

Andere belangrijke plaatsen zijn:

Malu'u (1); Fouia (2); Dala (4); Kwai (6) en Buma (11).

In totaal wonen er zo'n 60.000 mensen op het eiland.

≫ 5. Maak een graaf van het wegensysteem tussen deze vijf plaatsen.



≫ 6. Hoeveel knooppunten zijn er en hoeveel wegen? Hoeveel wegen kunnen er aangelegd worden zodat ieder knooppunt een *directe* weg heeft naar ieder ander knooppunt?
(Directe weg van A naar D: er liggen géén knooppunten tussen A en D).

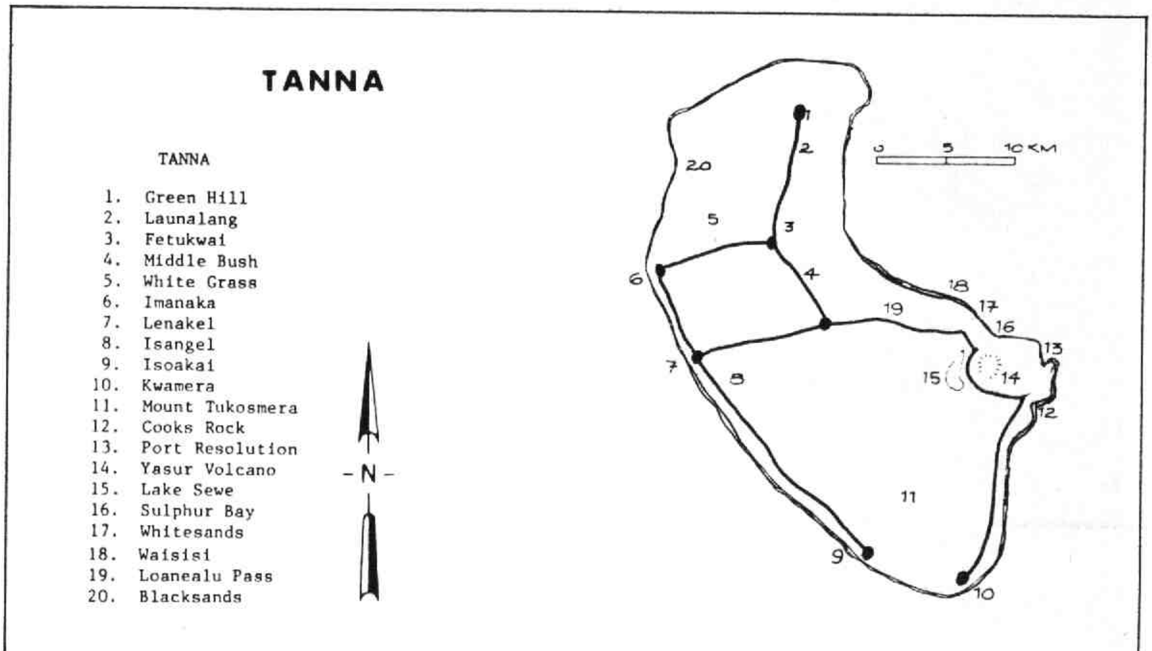
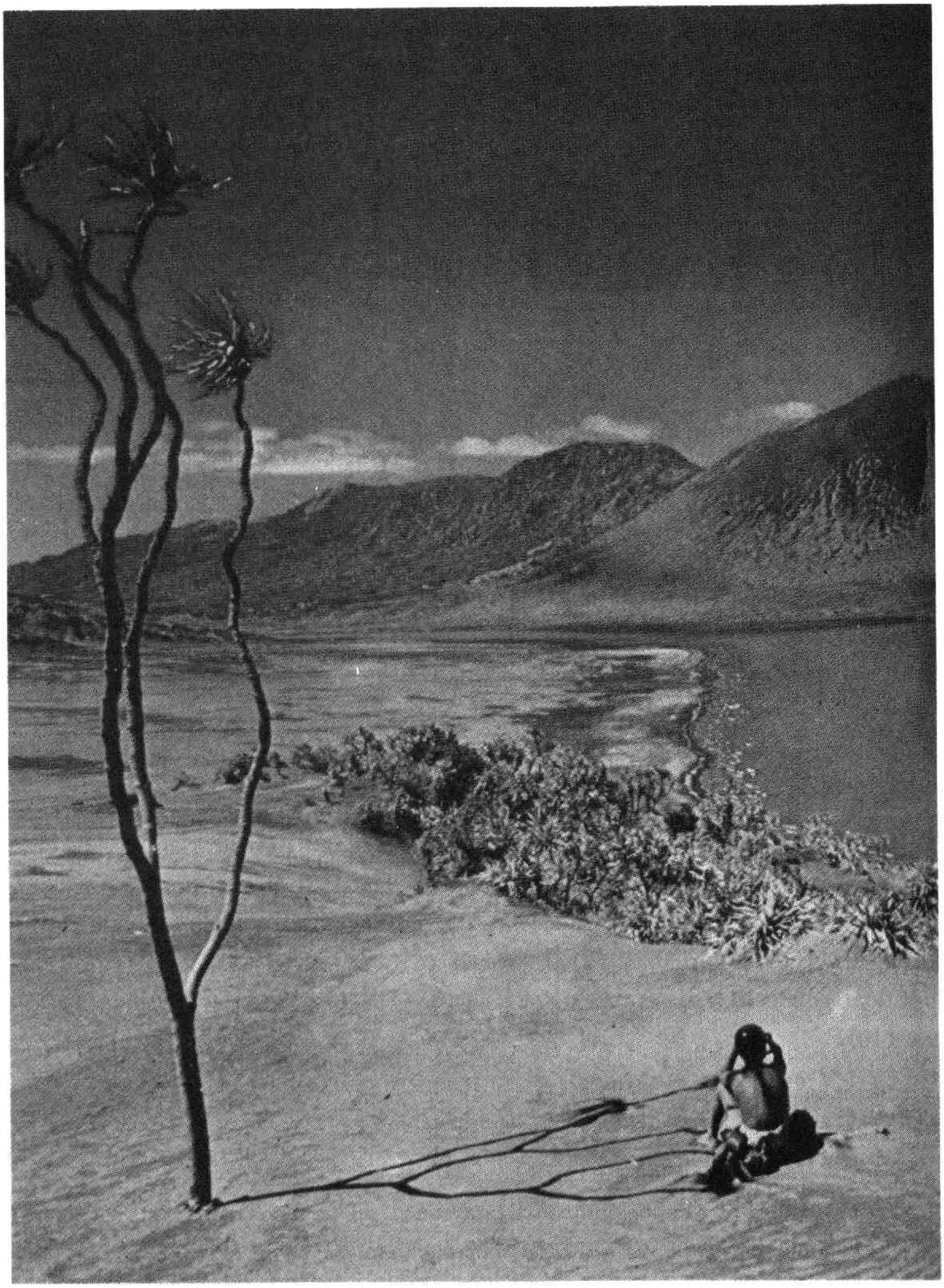


fig. 5

Zo'n 1000 km ten zuidoosten van MALAITA ligt het eiland TANNA, dat deel uitmaakt van het sinds 1980 zelfstandige VANUATU. Dit eiland wordt gedomineerd door de vulkaan YASUR (14). De belangrijkste knooppunten zijn Green Hill (1), Fetukwai (3), Imanaka (6), Lenakel, de hoofdplaats (7), het kruispunt bij Middle Bush (4) en de gehuchten Isoakai (9) en Kwamera (10).
De taxi's op TANNA (LandRovers) zijn nogal prijzig; gemiddeld zo'n 75 Australische dollarcent per km; ander openbaar vervoer is er niet.
(A$ 1 = *f* 3,-- , 1982).

≫ 7. Als je alle (knoop)punten wilt bezoeken met de taxi, waar (in welk knooppunt) moet je je kamp dan opslaan om zo zuinig mogelijk met je geld om te springen?
(Iedere dag 1 knooppunt, iedere dag terug naar het kamp).



TANNA, rechts de vulkaan de Yasur.

Een afstandstabel is een bijzondere vorm van een MATRIX. Een *matrix* is een schema van getallen die gerangschikt zijn in *rijen* (horizontaal) en *kolommen* (vertikaal).
De *afmeting* of *orde* van de matrix is het aantal rijen maal het aantal kolommen.

Bij HAU hadden we dus een 5 × 5 matrix en bij TANNA een 7 × 7 matrix; beide in de vorm van een afstandstabel.

≫ 8. Hoe kun je gemakkelijk aan een TAXIKOSTEN-matrix voor TANNA komen?

Figuur 2 gaf de graaf van de wegen van het eiland HAU. Vanwege de toenemende drukte op het paradijselijke eiland (toeristen!) wordt besloten tot éénrichtingsverkeer op de L, S, M driehoek en wel linksom (op de kaart).

≫ 9. Stel de afstandsmatrix in dit geval op.

≫ 10. Welk opvallend verschil is er met een tweerichtingsverkeers-afstandsmatrix?

≫ 11. Waar komt de school in dit geval? (Alleen rekening houdend met de afstandsvoorwaarde).

≫ 12. Hoe zou je in de graaf aangeven dat het nu éénrichtingsverkeer is?

Matrices worden vaak als volgt opgeschreven:

$$\begin{array}{cc} & \text{VAN} \\ & \begin{array}{ccccc} K & R & N & O & L \end{array} \\ \text{NAAR} \begin{array}{c} K \\ R \\ N \\ O \\ L \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 5 & 7 \\ 3 & 0 & 4 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 0 & 6 & 8 \\ 5 & 2 & 6 & 0 & 2 \\ 7 & 4 & 8 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \text{of kortweg: } A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 5 & 7 \\ 3 & 0 & 4 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 0 & 6 & 8 \\ 5 & 2 & 6 & 0 & 2 \\ 7 & 4 & 8 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

K = Katwijk; N = Noordwijk; R = Rijnsburg; O = Oegstgeest; L = Leiden.

De graaf behorend bij de bovenstaande matrix A is:

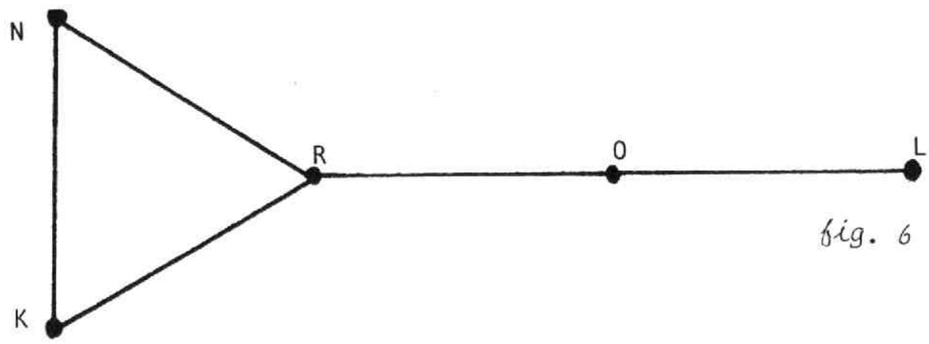


fig. 6

≫ 13. Vul de afstanden in de graaf in.

≫ 14. Tijdens het bloemencorso is er tijdelijk éénrichtingsverkeer op de *NRK*-driehoek, met de wijzers van de klok mee.
Geef de afstandsmatrix voor de hele regio in die situatie.

Behalve de afstandsmatrix kun je van een graaf ook een verbindingsmatrix maken. Zo is de verbindingsmatrix van fig. 6 de volgende:

$$\begin{array}{ccc} & & \textit{VAN} \\ & & \begin{array}{ccccc} K & R & N & O & L \end{array} \\ & \begin{array}{c} K \\ R \\ N \\ O \\ L \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

NAAR (rijen)

≫ 15. Geef weer wat met een 'verbindingsmatrix' bedoeld wordt.

≫ 16. Aan de hand van de graaf (fig. 6) kun je aardig goed zien welke plaats de beste verbindingen heeft. Hoe vind je dat terug in de verbindingsmatrix?
Wanneer is zo'n matrix handiger en/of duidelijker dan een graaf?

Op HAU is een eenvoudige busdienst, die - uiteraard - met jeeps wordt gereden. Het routenet is nogal beperkt: Alleen op St. Haula - Moau v.v. en St. Haula - Lalou v.v. wordt aanvankelijk gereden.

≫ 17. Geef de verbindingsgraaf van deze busdienst en de verbindingsmatrix. (Neem alle plaatsen van HAU op in de graaf en matrix).

≫ 18. Wat zijn de verschillen tussen deze verbindingsmatrix en graaf en die van de vorige bladzijde?

De frequentie van de LandRovers op de lijnen op HAU wordt gegeven door de volgende frequentiematrix (per dag):

$$\begin{array}{cc} & \text{VAN} \\ & \begin{array}{ccc} S & M & L \end{array} \\ \text{NAAR} \begin{array}{c} S \\ M \\ L \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \text{of:} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

≫ 19. Wat betekenen de getallen van D?
Wat zou $7D$ voorstellen? Schrijf de elementen van $7D$ op.

Zaterdags is er markt in Lalou. Iedereen neemt alles wat hij kwijt wil mee naar de markt en ruilt dat tegen wat nuttigers. Op zo'n markt vind je fruit en groente, vlees en vis, maar ook koeien en landbouwwerktuigen. Uiteraard worden er *extra* LandRovers ingezet. En wel volgens frequentiematrix:

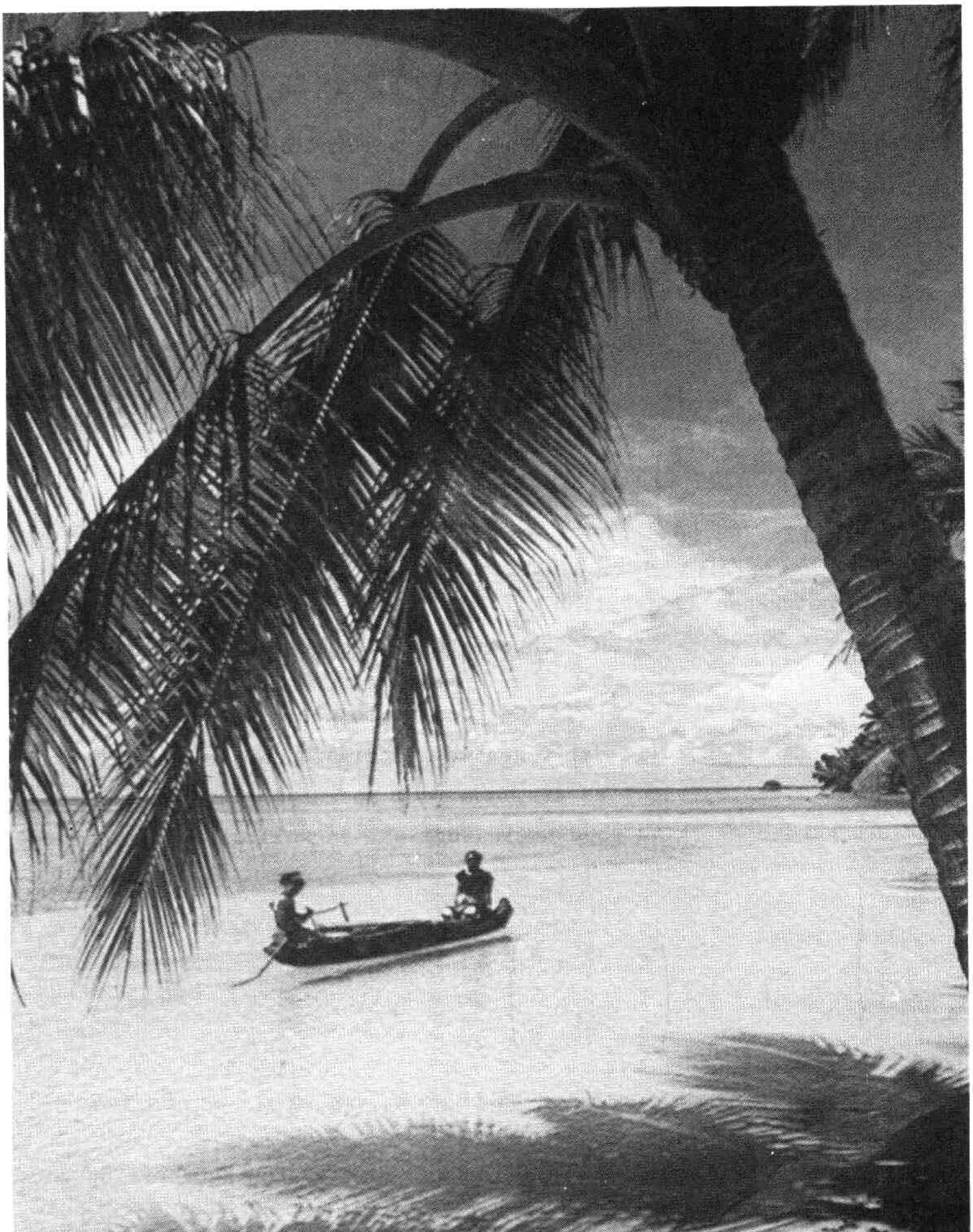
$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & 5 \\ 7 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

≫ 20. Vergelijk E met D; verklaar het belangrijkste verschil.

≫ 21. Geef de matrix die het *totale* aantal busdiensten aangeeft op zaterdag: Z.

≫ 22. Welke matrix zou je aangeven met $7D + E$? Welke betekenis heeft deze matrix?

≫ 23. Hoe heb je de matrices uit de vorige opgave bij elkaar opgeteld?



MOEN, in de Truk Lagoon.

2

VERBINDINGEN EN WEGEN

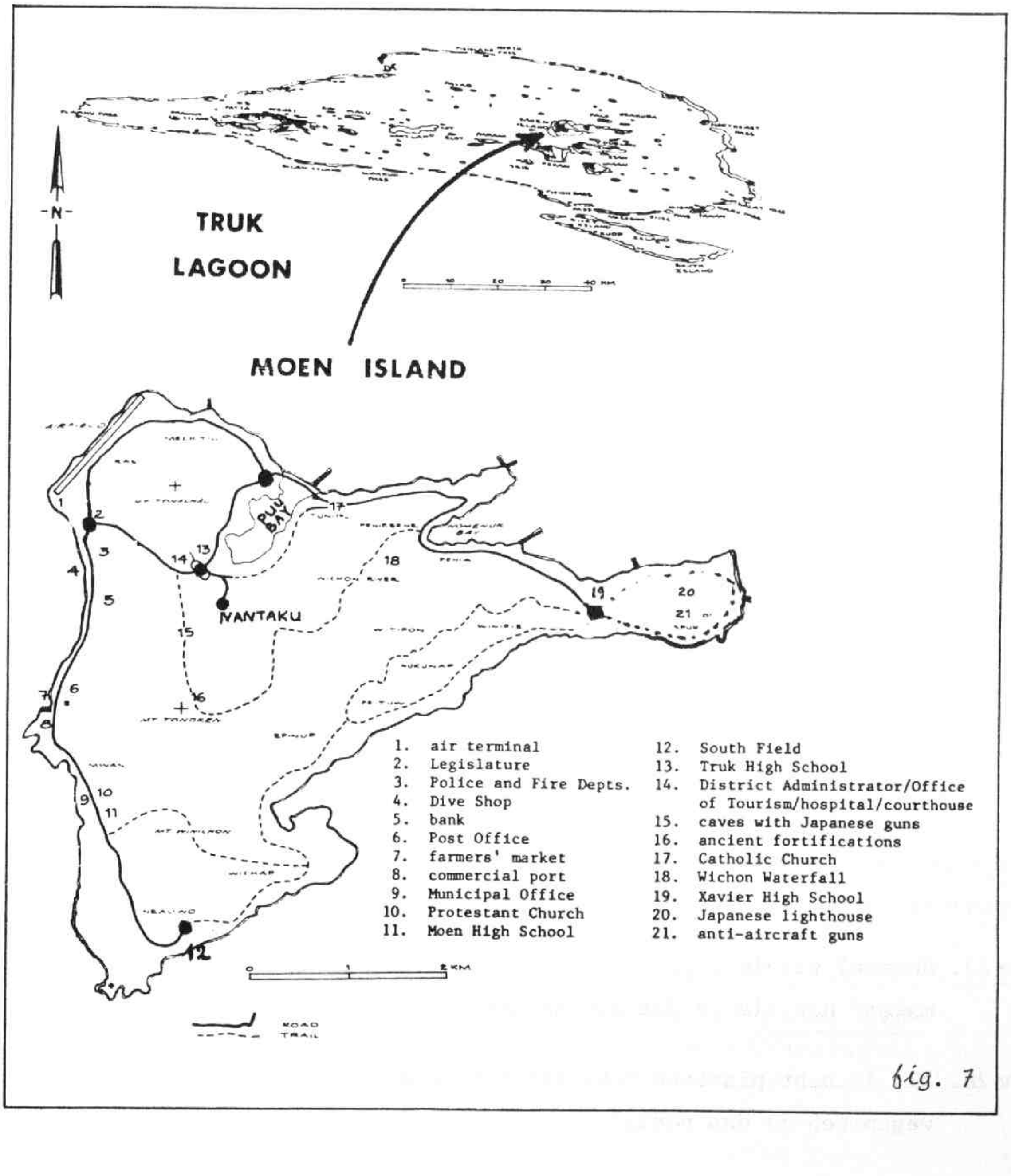


fig. 7

Het eiland MOEN is een onderdeel van de TRUK-archipel; een verzameling eilandjes en koraalriffen in MICRONESIË. Zelfs het grootste eiland MOEN is nog betrekkelijk klein.
Op het kaartje op blz. 11 zie je 6 knooppunten aangegeven: in het zuiden South Field (12), verder bij het vliegveld (2), ziekenhuis en VVV (13,14), Nantaku daar vlakbij, de wegsplitsing bij Puubay en de Xavier Highschool (19).

≫ 24. Teken een verbindingsgraaf en de bijbehorende verbindingsmatrix (6×6). Welke plaats ligt het meest centraal? En welke het meest geïsoleerd?
De eerste school op het eiland was de Truk Highschool (13). Vind je dat die op een logische plaats is gebouwd?

≫ 25. Teken de graaf die behoort bij:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{en bij} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Welk opvallend verschil is er?

Bij de graaf van A spreken we van MINIMALE VERBINDING.
Bij de graaf van B spreken we van MAXIMALE VERBINDING.

≫ 26. Teken de graaf die behoort bij:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

≫ 27. Hoeveel verbindingen zijn er nog nodig om de graaf maximaal te maken? Hoe zie je dat aan de matrix?

≫ 28. Als je acht plaatsen *minimaal* met elkaar wilt verbinden, hoeveel wegen heb je dan nodig?

≫ 29. Als je acht plaatsen *maximaal* met elkaar wilt verbinden, hoeveel wegen heb je dan nodig?

≫ 30. Terug naar HAU (zie fig. 1).
Als er op het eiland een spoorlijn moet worden aangelegd die de plaatsen Lalou, St. Haula, Moau, Kota Hau en Kaap Hau met elkaar op de goedkoopste manier - d.w.z. zo min mogelijk km spoorlijn - met elkaar verbindt, welke suggestie zou jij dan willen doen?
Geef van jouw oplossing zowel de graaf als de verbindingsmatrix.

≫ 31. Overwogen wordt om een spoorbrug te bouwen van Moau naar het oosten zodat er een rechtstreekse spoorlijn komt van Moau naar Kaap Hau. Geef de verbindingsmatrix van het complete spoorwegnet. Waar zou jij het centrale emplacement plaatsen?

Aan de verbindingsmatrix zie je snel hoeveel wegen er zijn en tussen welke plaatsen en welke er (nog) niet zijn. Ook zagen we hoe een minimale en een maximale verbindingsmatrix eruit zien. Daartussen zijn natuurlijk nog vele mogelijkheden.

≫ 32. Geef van de volgende graaf de verbindingsmatrix.

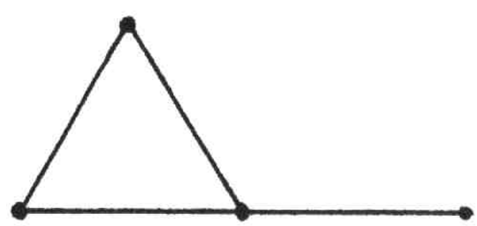


fig. 8

Hoeveel wegen zijn er en hoeveel kunnen er maximaal zijn?
Beantwoord dezelfde vraag voor het eiland MALAITA (zie ≫ 5 en ≫ 6).
Welk van de twee wegennetten geeft een grotere graad van verbondenheid?

$$\text{Graad van verbondenheid} = \frac{\text{aantal bestaande verbindingen}}{\text{maximaal aantal verbindingen}}$$

≫ 33. Geef de graad van verbondenheid van bovenstaande graaf en van de volgende:

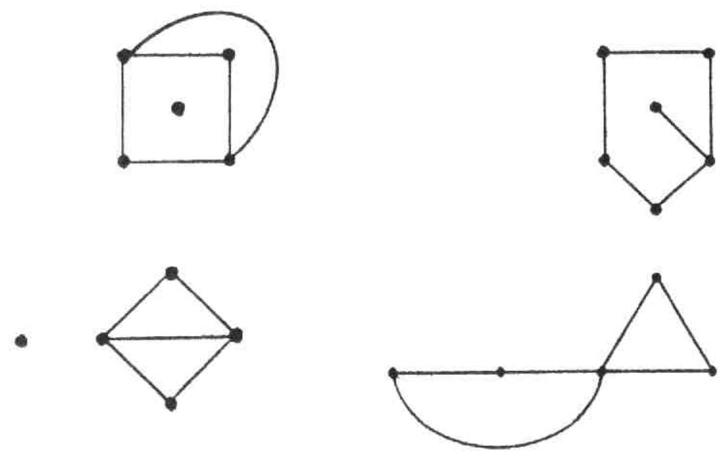


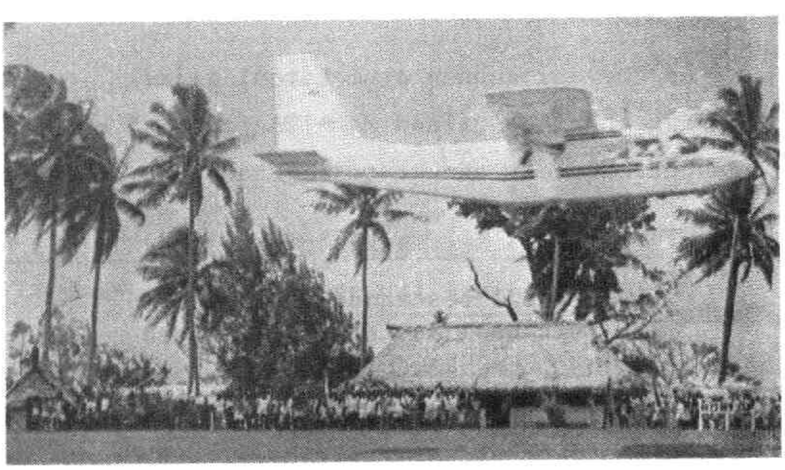
fig. 9

≫ 34. Ook van die van het complete spoorwegnet op HAU.

≫ 35. Wanneer zal de graad van verbondenheid gelijk aan nul zijn? (N.B. We spreken in dit geval *niet* van minimale verbondenheid).

≫ 36. Geef de graad van verbondenheid van zowel fig. 2 als fig. 3 op pag. 3.

≫ 37. Het spoorwegnet van HAU van ≫ 30 was een typisch voorbeeld van *minimale verbondenheid:* het aantal wegen is dan één kleiner dan het aantal punten.
Toon aan dat als er m punten zó verbonden worden, de graad van verbondenheid dan gelijk is aan $\frac{2}{m}$.



Vliegen in de Zuidzee: kleine maatschappijen met kleine vliegtuigen op kleine vliegveldjes.

In ontwikkelingslanden wordt vaak gekozen voor *minimale verbondenheid*, in hoog ontwikkelde landen vaak voor meer *maximale verbondenheid*. En de aanleg van één of meer wegen kan grote gevolgen hebben voor de belangrijkheid - als centrale plaats - van één of meer steden, zoals we al zagen. Overigens is minimale verbondenheid op meerdere manieren mogelijk, zoals blijkt uit het volgende voorbeeld:

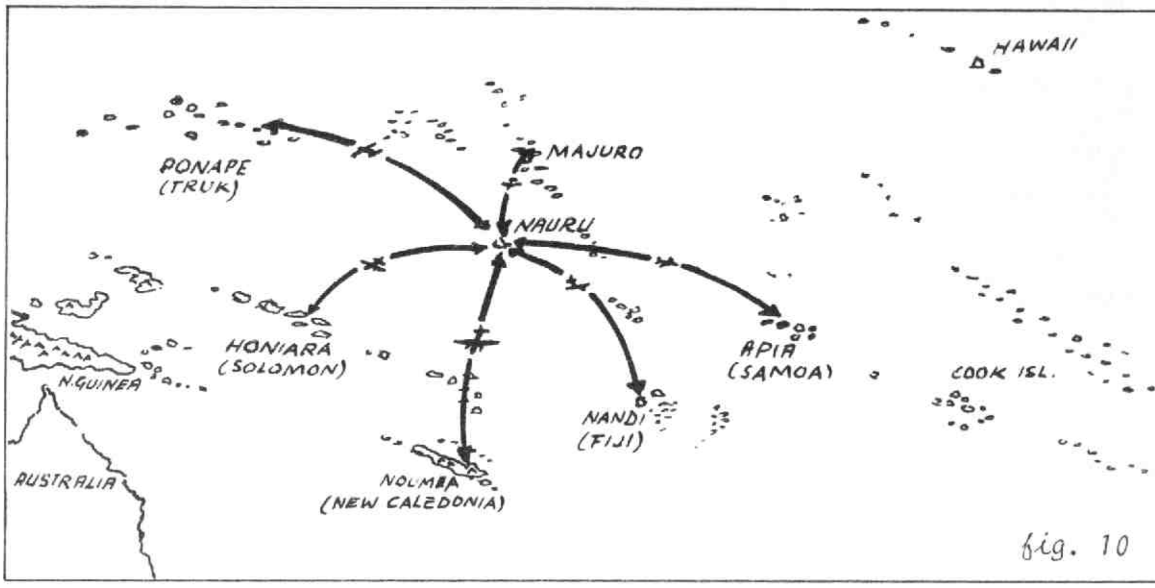


fig. 10

Hier zie je luchtlijnen van AIR NAURU, in de Stille Oceaan. Doordat de maatschappij niet bij de overkoepelende luchtvaartmaatschappijorganisatie IATA is aangesloten, mag zij uitsluitend van NAURU naar andere steden vliegen en niet b.v. van NANDI naar APIA. Maar ze zijn wel erg goedkoop, dus kan het best verantwoord zijn om b.v. van MAJURO via NAURU naar APIA te vliegen (2-étappe-vlucht).

≫ 38. Geef de verbindingsmatrix; laat zien dat de graad van verbondenheid minimaal is.
Welke plaats is 'maximaal verbonden'? Noem enkele positieve gevolgen daarvan in dit geval.

≫ 39. Teken een ander luchtlijnensysteem, waarbij alle plaatsen minimaal verbonden zijn.
Welke nadelige gevolgen zou dit voor NAURU hebben? En welke voordelige voor de luchtreizigers?

MOOREA

In de Stille Zuidzee - waar anders - liggen in Frans-Polynesië de eilanden BORA-BORA en MOOREA.
Van ieder eiland wordt gezegd dat het het mooiste eiland ter wereld is.
Hiernaast een kaartje van MOOREA.

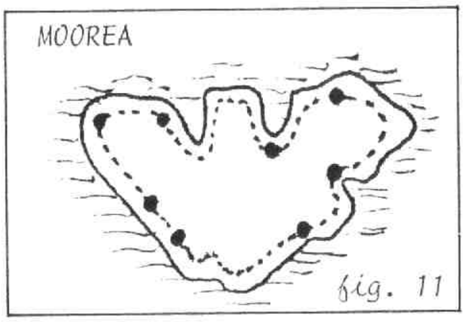


fig. 11

≫ 40. Is dit wegensysteem een systeem met minimale verbondenheid? Verklaar je antwoord.

≫ 41. Hoe groot is de graad van verbondenheid?

Hiernaast een kaartje van BORA-BORA. De weg tussen FAANUI en AEHAUTAI heeft éénrichtingsverkeer.

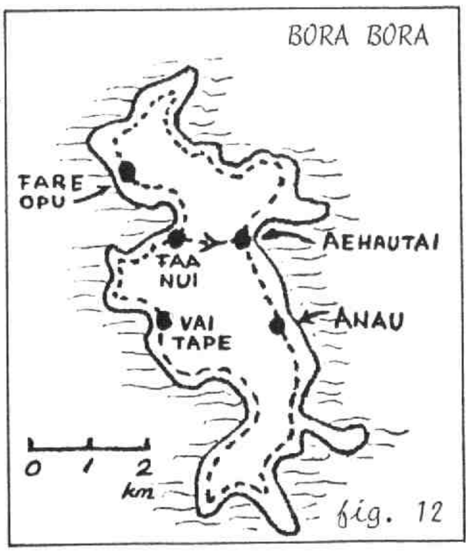
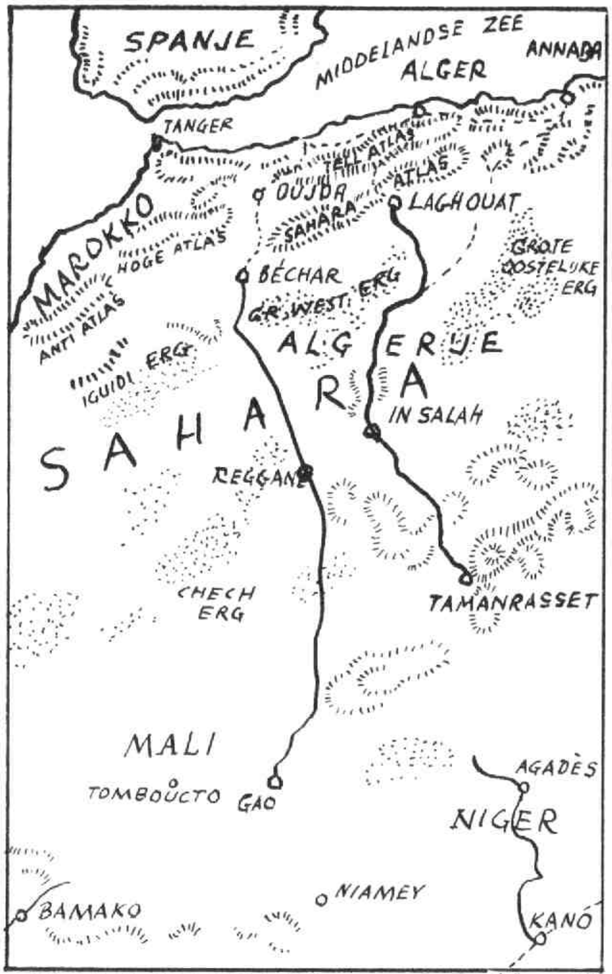


fig. 12

≫ 42. Teken de graaf (denk aan éénrichtingsverkeer).

≫ 43. Maak een verbindingsmatrix (denk aan éénrichtingsverkeer).

≫ 44. Welke plaats(en) ligt (liggen) het meest centraal?



ERG: ZANDWOESTIJN

fig. 13

Hiernaast staat een kaart afgedrukt van een gedeelte van de Sahara waarin de twee belangrijkste noord-zuidverbindingen zijn aangegeven. De linker begint in Béchar en gaat via de Oase Reggane naar Gao. De andere veel drukkere en voor een groot deel geasfalteerde route gaat van Laghouat via In Salah naar Tamanrasset in het Ahaggar gebergte.

≫ 45. Geef een 6 × 6 verbindingsmatrix en bereken de graad van verbondenheid.

≫ 46. Tegenwoordig is er een oost-westverbinding van Reggane naar In Salah. Teken de verbindingsgraaf en de 6 × 6 matrix daarbij en bereken de graad van verbondenheid.

≫ 47. Als er een weg komt van Béchar naar Laghouat, heeft dat dan positieve of negatieve gevolgen voor In Salah of kun je daar niets van zeggen?

In Salah,
bedreigd door het oprukkende zand.

≫ 48. Als je 53 plaatsen minimaal met elkaar verbindt, hoeveel wegen heb je dan nodig?

≫ 49. Zelfde als ≫ 48, maar nu maximaal.

≫ 50. Welke van de volgende grafen zijn hetzelfde als:

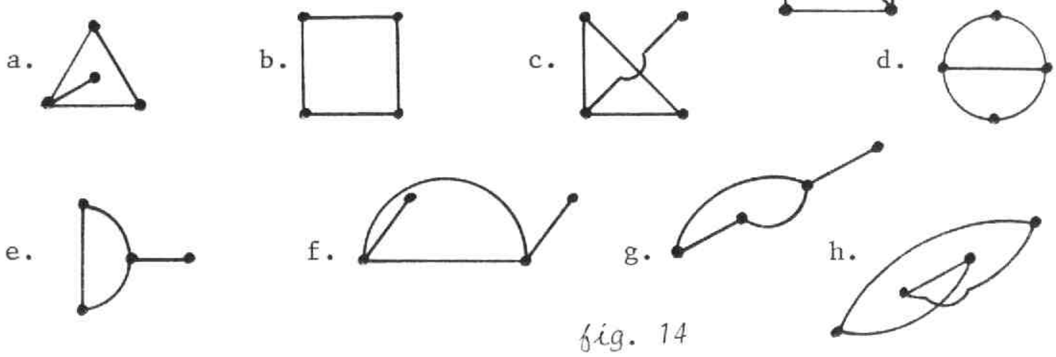


fig. 14

≫ 51. Gegeven is de matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a. Wat kun je opmerken als A een verbindingsmatrix is?

b. Kan A een afstandsmatrix zijn? Verklaar je antwoord.

c. Kan A een frequentiematrix zijn? Verklaar je antwoord.

Tot nog toe hebben we steeds grafen bekeken waarbij tussen ieder tweetal punten steeds één weg was, al of niet met tweerichtingsverkeer. Vaak zijn er meer wegen. Zo heeft de volgende graaf:

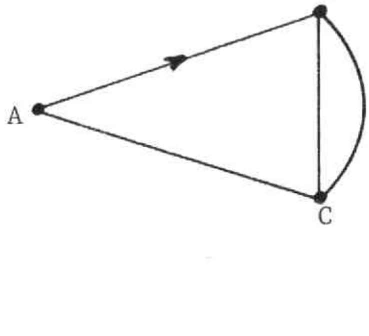


fig. 15

de volgende directe-wegen-matrix:

$$\begin{array}{cc} & \text{VAN} \\ & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \text{NAAR} \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Soms zijn er ook nog wegen die terugkeren naar de plaats van vertrek:

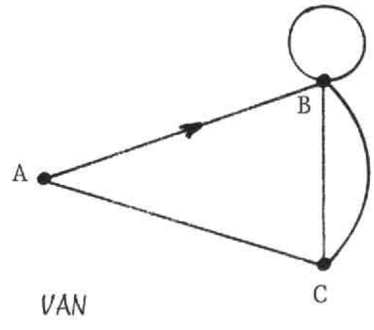


fig. 16

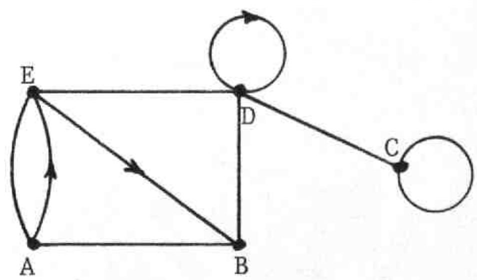
levert:

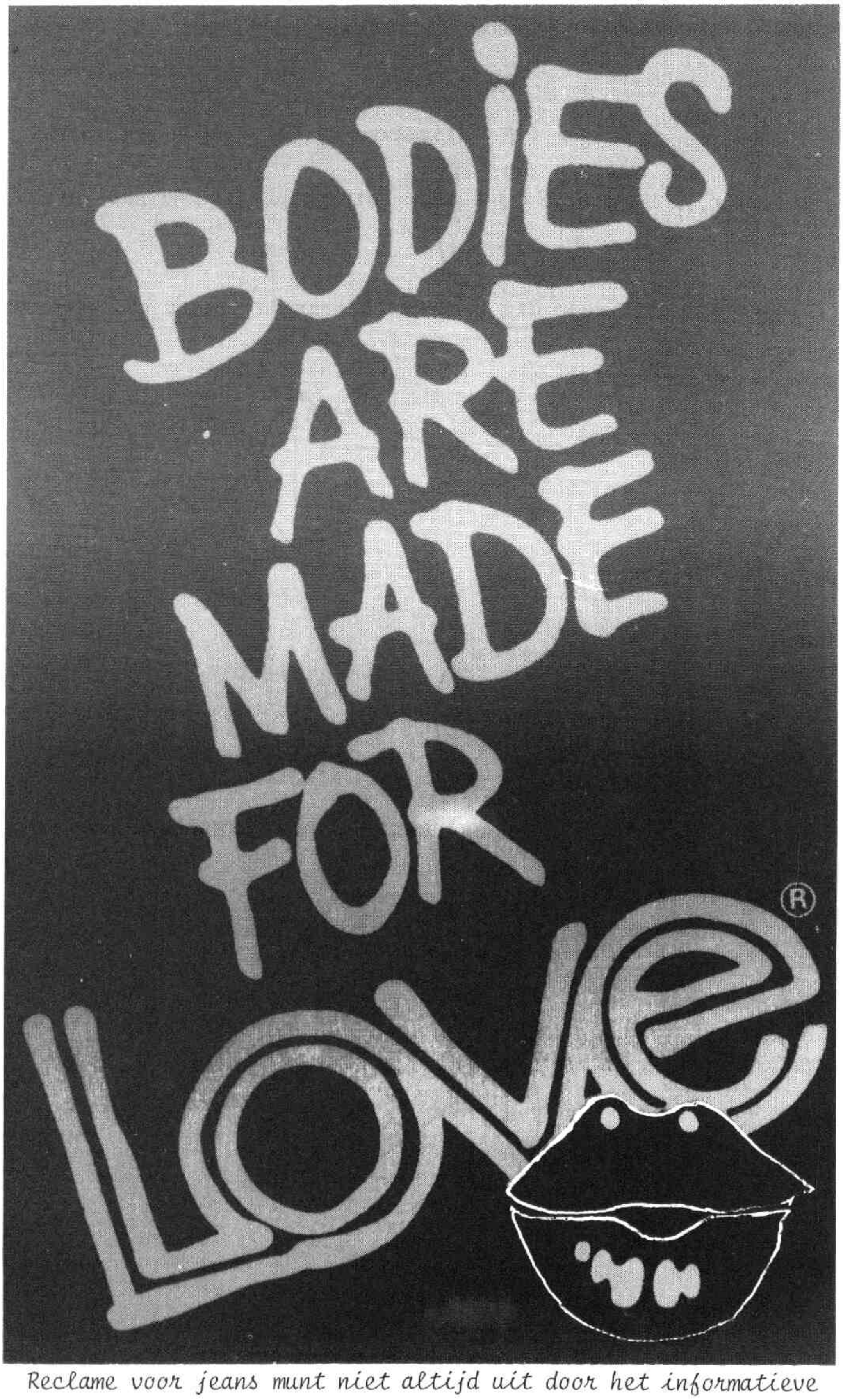
$$\begin{array}{cc} & \text{VAN} \\ & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \text{NAAR} \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

≫ 52. Waarom is $a_{2,2} = 2$? ($a_{2,2}$: het element op de 2e rij en in de 2e kolom).

≫ 53. Bepaal de directe-wegen-matrix van:

fig. 17





Reclame voor jeans munt niet altijd uit door het informatieve karakter.

3

VOORRAADMATRICES

In de vorige hoofdstukjes zagen we matrices zoals ze o.a. voorkomen in de geografie. Een ander gebied waar regelmatig naar matrices wordt gegrepen is in de economie. Zo worden voorraden van goederen vaak op een overzichtelijke manier in matrix-vorm bijgehouden. Dat is ook gemakkelijk om in de computer te stoppen.
Een simpel voorbeeld waarbij het gebruik van matrices en eventueel computer nogal overdreven lijkt, is het volgende:

JEANS

Spijkerbroeken heb je in vele maten en merken. Bij een voorraadtelling heeft een zaak drieentwintig broeken van het merk Wrangler en wel in de maten:

maten:	28" (28 inch waist)	: 3
	30"	: 11
	32"	: 6
	34"	: 3

Voor andere merken geldt:

Levi	: 5, 5, 3 en 4 resp.
Club de France	: 1, 7, 0 en 0
Bobos	: 6, 2, 2 en 2
Ball	: 3, 0, 0 en 3

Al deze informatie kan m.b.v. een matrix overzichtelijk opgeschreven worden.

≫ 54. Maak de matrix af:

$$\begin{array}{c} \\ 28'' \\ 30'' \\ 32'' \\ 34'' \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} W & L & CF & Bo & Ba \end{array} \\ \begin{pmatrix} .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. \end{pmatrix} \end{array}$$

≫ 55. Hoeveel broeken in jouw maat heeft de winkel?

≫ 56. In welke maat is de meeste keus?

De verkoper wil z'n voorraad op peil brengen, waarbij hij onder andere de volgende zaken in het achterhoofd heeft:

- van de merken Wrangler en Levi Strauss verkoopt hij ongeveer tweemaal zoveel als van de andere drie merken;
- de maten 30" en 32" 'gaan' tweemaal zo snel als 28" en 34";
- van één merk wil hij niet meer dan veertig exemplaren in huis hebben.

≫ 57. Maak zelf een bestelling op grond van bovenstaande gegevens en schrijf deze in matrixvorm.

≫ 58. Noem enige verschillen met de matrices uit de eerste hoofdstukken.

De spijkerbroeken-voorraad-matrix was een 4×5 matrix, d.w.z. vier rijen en vijf kolommen.
Voorraadmatrices hebben vaak reusachtige afmetingen.

De elementen van een matrix zijn vaak getallen, maar kunnen ook variabelen zijn, of ook weer matrices. Wij zullen ons meestal beperken tot getallen.
We hebben al een paar keer matrices *opgeteld*. Dat gebeurde door de overeenkomstige elementen bij elkaar op te tellen.

Dus vb: $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ en $B = \begin{pmatrix} p & q & r \\ s & t & u \\ v & w & x \end{pmatrix}$

dan is: $A + B = \begin{pmatrix} a+p & b+q & c+r \\ d+s & e+t & f+u \\ g+v & h+w & i+x \end{pmatrix}$

In het algemeen kun je matrices *alleen* optellen als zij *dezelfde* afmetingen hebben. Soms echter kun je best een ander soort 'optelling' rechtvaardigen. Kijk maar eens naar het volgende voorbeeld.

Twee concurrerende sportzaken verkopen hardloopschoenen. De ene heeft de volgende schoenen in voorraad:

$$\begin{array}{lc}
 & \begin{array}{cccccc} \text{maat } 38 & 40 & 42 & 44 & 46 & 48 \end{array} \\
\begin{array}{l} \text{Adidas Marathon} \\ \text{Adidas TRX} \\ \text{Nike Daybreak} \\ \text{Nike Tailwind} \\ \text{N. Balance 620} \\ \text{N. Balance 430} \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}$$

De andere zaak heeft de volgende voorraad

$$\begin{array}{lc}
 & \begin{array}{ccccccc} & & & & & & \text{maat } 50 \end{array} \\
\begin{array}{l} \text{N. Balance 620} \\ \text{N. Balance 430} \\ \text{Brooks Vantage} \\ \text{Brooks Hugger GT} \\ \text{Puma Marathon} \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}$$

≫ 59. De zaken fuseren. Wat wordt de nieuwe voorraadmatrix?

Dus in bepaalde gevallen is ook 'optelling' van *ongelijke* matrices wel mogelijk.

Verder zagen we ook al eerder dat je een matrix met een getal kunt vermenigvuldigen door alle elementen met dat getal te vermenigvuldigen. Als een matrix A met -1 wordt vermenigvuldigd, ontstaan de *tegengestelde* van A: -A.

≫ 60.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 7 & 4 & -1 \\ 1 & 6 & 8 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 1 \\ -4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Bepaal indien mogelijk $2B$; $-3C$; $2A - B$; $-B + 4D$.

Terug naar de spijkerbroekenwinkel. De voorraden zijn op peil gebracht zó dat aan de 'aandachtspunten' van de eigenaar is gedacht, met als resultaat dat er van de grootste merken, van de meest verkochte maten twaalf exemplaren in de winkel aanwezig zijn.

≫ 61. Schrijf de voorraadmatrix op (als deze verschillend is van de al eerder gevonden matrix).

≫ 62. In één week wordt er verkocht:

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 8 & 6 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Geef de voorraden aan het eind van die week in matrixvorm.

≫ 63. De (gemiddelde) winst per broek op de Wranglers is ƒ 30,--; op Levi's ƒ 35,--; op Club de France ƒ 40,--; op Bobos ƒ 25,-- en op Ball ƒ 40,--.
Hoeveel winst maakt de zaak die weken in totaal op de kleinste maat?

≫ 64. En op maat 30"? En totaal?

4

VERMENIGVULDIGEN (1)

In het vorige hoofdstukje zagen we een zaak spijkerbroeken verkopen (in één week):

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 8 & 6 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Winst op Wrangler ƒ 30,--; Levi ƒ 35,--; Club de France ƒ 40,--; Bobos ƒ 25,--; Ball ƒ 40,--.
De winst op de kleinste maat kun je als volgt vinden, waarbij we de winst per merk voorstellen als een 5×1 matrix:

$$\text{winst } 28'' \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30 \\ 35 \\ 40 \\ 25 \\ 40 \end{pmatrix} = 1.30 + 3.35 + 0.40 + 1.25 + 2.40 = 240.$$

≫ 65. Bepaal op dezelfde manier de winst $30''$; winst $32''$ en winst $34''$.

≫ 66. De winst kun je in een 4×1 matrixvorm gieten:

$$\begin{pmatrix} W\ 28 \\ W\ 30 \\ W\ 32 \\ W\ 34 \end{pmatrix}$$

We hebben dan:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 8 & 6 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 35 \\ 40 \\ 25 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \end{pmatrix}$$

Ofwel: we hebben een soort *produkt* van een 4×5 met een 5×1 matrix. Dit levert een 4×1 matrix.

De manier van matrices 'vermenigvuldigen' lijkt nogal ingewikkeld, maar heeft veel voordelen in toepassingen zoals we zullen zien. Je mag dus *niet* de overeenkomstige elementen met elkaar vermenigvuldigen zoals bij optellen.

We kijken nog even terug naar het *produkt*.
Eerst keken we naar de elementen van de eerste rij en vermenigvuldigen die met de overeenkomstige elementen van de (eerste) kolom van de tweede matrix.

$$\begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 3 \quad 0 \quad 1 \quad 2} \\ 5 \quad 8 \quad 6 \quad 1 \quad 2 \\ 2 \quad 3 \quad 5 \quad 6 \quad 0 \\ 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 30 \\ 35 \\ 40 \\ 25 \\ 40 \end{matrix}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.30 + 3.35 + 0.40 + 1.25 + 2.40 \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

Dan de tweede rij 'maal' de kolom:

$$\begin{pmatrix} 1 \quad 3 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \\ \boxed{5 \quad 8 \quad 6 \quad 1 \quad 2} \\ 2 \quad 3 \quad 5 \quad 6 \quad 0 \\ 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 30 \\ 35 \\ 40 \\ 25 \\ 40 \end{matrix}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots\cdots\cdots \\ 5.30 + 8.35 + 6.40 + 1.25 + 2.40 \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

Vervolgens de derde rij en de vierde.

≫ 67. Waarom is het 'logisch' dat zó een 4×5 en een 5×1 matrix een 4×1 matrix oplevert?

≫ 68.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Bereken $A \cdot B$.

Vergelijk de afmetingen van A, B en $A \cdot B$.

≫ 69. Doe hetzelfde met:

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

≫ 70. Ook met:

$$E = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 5 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

≫ 71. Wat heb je 'ontdekt' over het verband tussen de afmetingen van twee matrices en hun produkt?

≫ 72. Wat voor afmetingen krijg je als je een 1×12 en een 12×1 matrix met elkaar vermenigvuldigt?

Bij de volgende serie opgaven hebben we steeds vermenigvuldiging van $1 \times n$ met $n \times 1$ matrices. Het produkt uitrekenen is een fluitje van een cent. Waar het om gaat is wat het produkt nu eigenlijk voorstelt.

≫ 73. De prijzen van 1 liter melk, 1 pak boter, 1 pond kaas en 1 liter karnemelk zijn resp. (in centen): $P = (130,\ 250,\ 500,\ 120)$.

Een student koopt (resp):

$$Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bereken PQ. Wat betekent PQ?

≫ 74. In 1957 kregen de boeren in de VS de volgende prijzen voor resp. tarwe, mais, haver en gerst: $P_{57} = (193,\ 111,\ 61,\ 89)$ in dollarcenten per bushel (= schepel: ± 35 dm³).

Geproduceerd werd er in totaal:

$$Q_{57} = \begin{pmatrix} 956 \\ 3045 \\ 1290 \\ 443 \end{pmatrix}$$ (in miljoenen bushels).

Bereken $P_{57} \cdot Q_{57}$. Wat betekent dit?

In 1964 waren de prijzen als volgt: $P_{64} = (137,\ 115,\ 63,\ 95)$.

Bereken $P_{64} \cdot Q_{57}$. Wat betekent dit?

In de economie is:

$$L_{64,57} = \frac{P_{64} \cdot Q_{57}}{P_{57} \cdot Q_{57}} \cdot 100$$ de zogenaamde LASPEYRES-INDEX.

Wat geeft die index aan?

≫ 75. Leerlingen uit drie plaatsen moeten respectievelijk 10, 7 en 12 km naar school rijden. Uit de eerste plaats komen 12 leerlingen, uit de tweede 36 en uit de derde 6.

Ofwel: $A = (10,\ 7,\ 12)$ en $B = \begin{pmatrix} 12 \\ 36 \\ 6 \end{pmatrix}$

Bereken $A \cdot B$. Wat is de betekenis ervan?

De elementen van $A \cdot B$ heten *leerlingkilometers*.

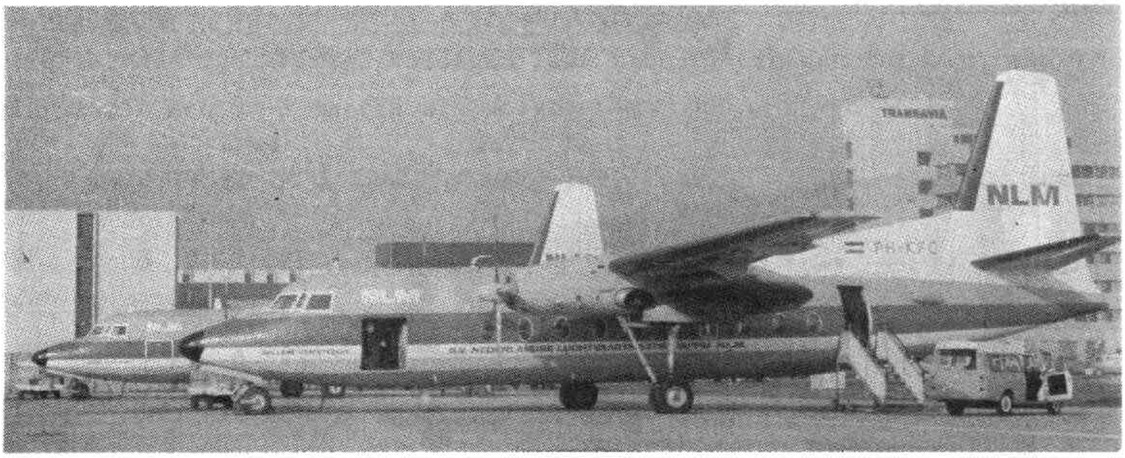
Leerlingkilometers kunnen een belangrijke rol spelen bij het bepalen van de plaats van een nieuwe school. Enig idee hoe?

≫ 76. De N.L.M.-CityHopper vliegt iedere werkdag een aantal malen vanuit Amsterdam naar Eindhoven, Enschede, Groningen en Maastricht.
De afstanden zijn resp.: $A = (120,\ 120,\ 140,\ 190)$ in kilometers.
De aantallen passagiers per vlucht zijn gemiddeld:

$$B = \begin{pmatrix} 22 \\ 19 \\ 20 \\ 24 \end{pmatrix}$$

Hiernaast zie je de 'time-table' (1979-1980).
Vertrekdag 1 betekent maandag.
Bereken het totaal aantal '*passagierkilometers*' op een woensdag via een matrix-produkt.

vertrekdagen	vertrek	aank.	vluchtnr.-type klasse
AMSTERDAM–EINDHOVEN			
1 - - - - - -	0625	0650	HN461 Y FKF
1 2 3 4 5 - -	1045	1115	HN463 Y FKF
1 2 3 4 5 - -	1310	1340	HN465 Y FKF
1 2 3 4 5 - -	1700	1730	HN467 Y FKF
- - - - 5 - -	2100	2130	HN469 Y FKF
1 2 3 4 5 - -	2110	2140	HN471 Y FKF
AMSTERDAM–ENSCHEDE			
1 - - - - - -	0620	0650	HN441 Y FKF
1 2 3 4 5 - -	0830	0940	HN443 Y FKF
1 2 3 4 5 - -	1325	1400	HN445 Y FKF
1 2 3 4 5 - -	1655	1730	HN447 Y FKF
1 2 3 4 5 - -	2120	2155	HN439 Y FKF
AMSTERDAM–GRONINGEN			
1 2 3 4 5 - -	0830	0905	HN443 Y FKF
1 2 3 4 5 - -	1325	1435	HN445 Y FKF
1 2 3 4 5 - -	1655	1805	HN447 Y FKF
1 2 3 4 5 - 7	2130	2205	HN449 Y FKF
AMSTERDAM–MAASTRICHT			
1 2 3 4 5 - -	1045	1145	HN463 Y FKF
1 2 3 4 5 - -	1310	1410	HN465 Y FKF
1 2 3 4 5 - -	1700	1800	HN467 Y FKF
- - - - - - 7	1700	17[illegible]	HN467 Y FKF
1 2 3 4 5 - -	2110	2210	HN471 Y FKF
- - - - - - 7	2110	2150	HN471 Y FKF



De FKF uit de time-table duidt de Fokker Friendship aan, waarvan je er op deze foto twee van de NLM ziet.

Levi's
YOUTHWEAR ®

Club de France
JEANS & SHIRTS

BALL®
jeans & casuals

5

VERMENIGVULDIGEN (2)

In het vorige hoofdstukje zagen we aan de hand van de spijkerbroekenzaak hoe je een 4 × 5 matrix zinvol kon vermenigvuldigen met een 5 × 1 matrix. We vatten dat nog even samen:

'VALT WEG'

$$\begin{array}{c} \\ 28'' \\ 30'' \\ 32'' \\ 34'' \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} W & L & CF & Bo & Ba \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 8 & 6 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \times \begin{array}{c} W \\ L \\ CF \\ Bo \\ Ba \end{array}\begin{array}{c} Winst \\ \begin{pmatrix} 30 \\ 35 \\ 40 \\ 25 \\ 40 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} 28'' \\ 30'' \\ 32'' \\ 34'' \end{array}\begin{array}{c} Winst \\ \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} \end{array}$$

$$4 \times \boxed{5 \qquad\qquad 5} \times 1 \qquad\qquad 4 \times 1$$

Deze methode van vermenigvuldigen laat zich uitbreiden tot b.v. een 4 × 5 matrix met een 5 × 3 matrix als volgt:

'VALT WEG'

$$\begin{array}{c} \\ 28'' \\ 30'' \\ 32'' \\ 34'' \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} W & L & CF & Bo & Ba \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 8 & 6 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \times \begin{array}{c} W \\ L \\ CF \\ Bo \\ Ba \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} Winst & Ink. & Verk. \end{array} \\ \begin{pmatrix} 30 & 45 & 75 \\ 35 & 40 & 75 \\ 40 & 40 & 80 \\ 25 & 40 & 65 \\ 40 & 45 & 85 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} 28'' \\ 30'' \\ 32'' \\ 34'' \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} Winst & Ink. & Verk. \end{array} \\ \begin{pmatrix} .. & .. & .. \\ .. & .. & .. \\ .. & .. & .. \\ .. & .. & .. \end{pmatrix} \end{array}$$

$$4 \times \boxed{5 \qquad\qquad 5} \times 3 \qquad\qquad 4 \times 3$$

≫ 77. Bereken de gehele matrix met winst, inkoop en verkoop per maat.

≫ 78. Onder welke voorwaarde voor de afmetingen kun je matrices op deze manier vermenigvuldigen?

≫ 79. $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

Bepaal $A \cdot B$ en $B \cdot A$. Wat valt op?

≫ 80. $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad D = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Bepaal $C \cdot D$ en $D \cdot C$.

≫ 81. $E = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad F = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

Bepaal $E \cdot F$. Als de 'afmetingsregel' *moet* gelden, bestaat $F \cdot E$ dan?

≫ 82. $G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad H = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

Bereken $G \cdot H$.

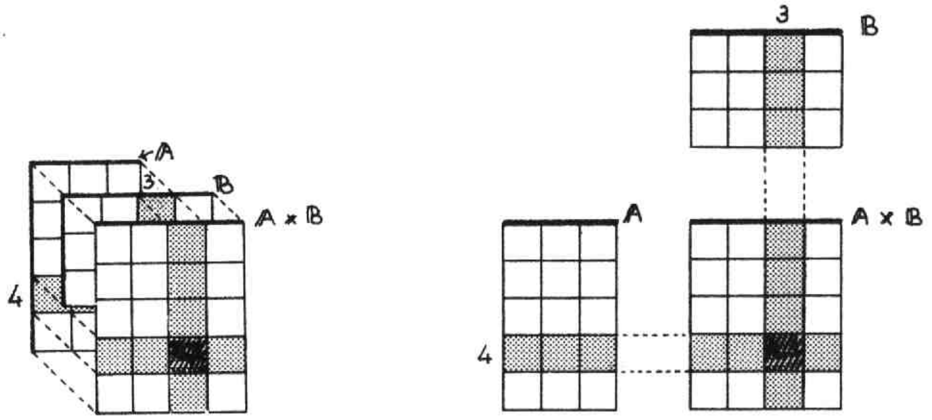
Wat voor effect op H heeft de vermenigvuldiging met G ('linksvermenigvuldiging')?

≫ 83. De 'spijkerbroekenmatrix' V was:

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 8 & 6 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Vermenigvuldig V aan de linkerkant met de matrix $W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Wat geeft de produktmatrix precies aan?



Schematische weergave van matrix-vermenigvuldiging: de 5 x 3 matrix A wordt vermenigvuldigd met 3 x 4 matrix B. Dit resulteert in de 5 x 4 matrix $A \times B$.

De 4e rij van A "maal" de 3e kolom van B levert het element van $A \times B$ op de plaats 4,3 (dubbelgearceerd) ofwel $p_{4,3}$.

Voorwaarde voor vermenigvuldigingen is dat de "breedte" (aantal kolommen) van A gelijk is aan de "hoogte" van B (aantal rijen).

≫ 84. Vertel en verklaar wat er gebeurt als je een willekeurige 3 × 3 matrix links vermenigvuldigt met:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrix E uit deze opgave wordt de *eenheidsmatrix* genoemd.

≫ 85. Hoe ziet een 6×6 eenheidsmatrix eruit?

≫ 86. Met welke matrix moet je een 4×4 matrix (links) vermenigvuldigen zó dat

- ieder element van de 4e rij met 5 vermenigvuldigd wordt
- de elementen van de 2e en 3e rij worden verwisseld.

≫ 87. Kijk nog eens naar:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wat was het effect op een 3×3 matrix?

Wat gebeurt er als je

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

loslaat op een 3×3 matrix?

≫ 88. Met welke matrix zou je een 3×3 matrix M moeten vermenigvuldigen zó dat de elementen van de 3e rij van M opgeteld worden bij de overeenkomstige van de 1e rij?

≫ 89. Wat gebeurt er als we niet links met A vermenigvuldigen naar *rechts*?

≫ 90.

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 100 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wat verwacht je bij 'linker' vermenigvuldiging?
En bij 'rechter' vermenigvuldiging?
Voer beide bewerkingen uit.

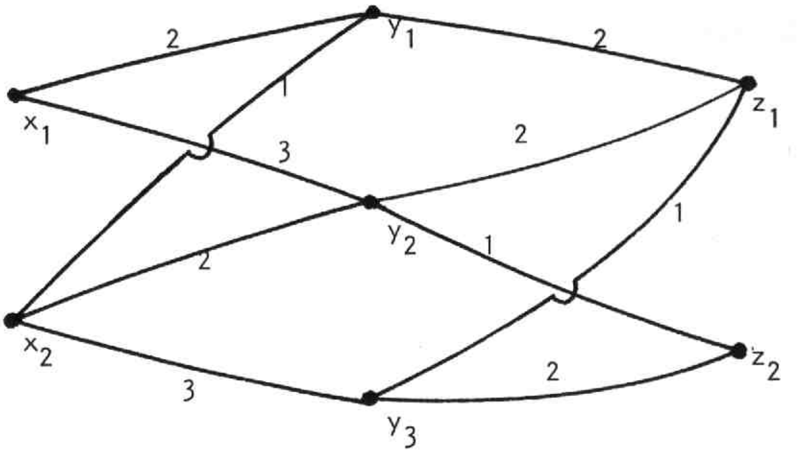


fig. 18

Hierboven zie je de graaf die het aantal vluchten per dag tussen drie landen aangeeft. x_1 en x_2 zijn vliegvelden in land X;

y_1, y_2 en y_3 zijn vliegvelden in land Y;

z_1 en z_2 zijn vliegvelden in land Z.

De gegevens van de vluchten tussen X en Y kunnen weer in een eenvoudige matrix worden weergegeven:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

≫ 91. Verklaar deze matrix en stel zelf de matrix B op voor vluchten van Y naar Z, zó dat het een 3×2 matrix wordt.

≫ 92. Hoeveel verschillende combinatie-mogelijkheden zijn er in principe om van X via Y naar Z te vliegen?
Schrijf dit ook in matrixvorm: een 2×2 matrix C.
Waarom zul je aan een groot gedeelte van die mogelijkheden waarschijnlijk niets hebben?

Iemand wil zijn vakantie doorbrengen in de prachtige woestenij van het zuidwesten van de Verenigde Staten: de staten Arizona, Utah en Nevada. Er zijn nogal wat mogelijkheden om daar te komen. De goedkoopste en geriefelijkste mogelijkheden beginnen in Amsterdam of London en gaan via New York, Los Angeles of Dallas naar Las Vegas (Nevada) of Tucson (Arizona).

fig. 19

De vier noord-amerikaanse woestijnen: Great Basin, Mohave, Sonora en Chihuahua. De laatste twee liggen voor het grootste deel in Mexico.

De frequentiematrix (per week) van de eerste étappe ziet er als volgt uit:

$$A = \begin{array}{l} \\ \text{Amsterdam} \\ \text{London} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{New York} & \text{Los Angeles} & \text{Dallas} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 14 & 7 & 5 \\ 21 & 14 & 7 \end{pmatrix} \end{array}$$

Die van de tweede étappe:

$$B = \begin{array}{l} \\ \text{New York} \\ \text{Los Angeles} \\ \text{Dallas} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Las Vegas} & \text{Tucson} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 14 & 0 \\ 56 & 0 \\ 7 & 21 \end{pmatrix} \end{array}$$

≫ 93. Teken de graaf die beide matrices combineert zoals bij de vorige opgave en geef het totale aantal mogelijkheden aan, in matrixvorm (C) om van Amsterdam/London in Las Vegas/Tucson te komen.

De tarieven zullen natuurlijk een belangrijke rol spelen, alsmede de vliegduur. Hieronder volgen de tarieven: (de goedkoopste retours)

Amsterdam	-	New York	999,--	
Amsterdam	-	Los Angeles	1.499,--	
Amsterdam	-	Dallas	1.199,--	
London	-	New York	760,--	
London	-	Los Angeles	1.360,--	
London	-	Dallas	1.230,--	
New York	-	Las Vegas	380,--	
Los Angeles	-	Las Vegas	110,--	
Dallas	-	Tucson	240,--	
Dallas	-	Las Vegas	300,--	(Prijzen zomer 1981).

≫ 94. Maak een matrix A met daarin de tarieven (A zoals hiervoor) van de eerste étappe.

≫ 95. Maak een matrix B met daarin de tarieven van de tweede étappe.

≫ 96. Hoe kom je nu aan de goedkoopste tarievenmatrix C?

$$C = \begin{array}{l} \\ \text{Amsterdam} \\ \text{London} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Las Vegas} & \text{Tucson} \end{array} \\ \begin{pmatrix} .. & .. \\ .. & .. \end{pmatrix} \end{array}$$

≫ 97. Als jij de beslissing mocht nemen, welke route zou je dan nemen en waarom?

≫ 98. Misschien spelen vliegtijden voor jou een belangrijke rol. Deze zijn - ongeveer - :

Amsterdam	-	New York	7
Amsterdam	-	Los Angeles	11
Amsterdam	-	Dallas	8
London	-	New York	6,5
London	-	Los Angeles	10,5
London	-	Dallas	7,5
New York	-	Las Vegas	5
Los Angeles	-	Las Vegas	1
Dallas	-	Tucson	2,5
Dallas	-	Las Vegas	3

Maak een matrix met minimum vliegtijden van Amsterdam/London naar Las Vegas/Tucson en vergelijk deze met die van de minimum tarieven. Besluit tot een definitieve keuze.

Uit de laatste voorbeelden blijkt duidelijk dat bij verwerking van twee matrices het resultaat niet altijd gevonden wordt door ze met elkaar te vermenigvuldigen.
Voorzichtigheid blijft te allen tijde geboden. Uit de situatie blijkt meestal duidelijk wat je moet doen.

SAMENVATTING

Een *matrix* is een schema van getallen die gerangschikt zijn in *rijen* (horizontaal) of *kolommen* (vertikaal).

De *afmeting* of *orde* van de matrix is het aantal rijen maal het aantal kolommen.

Matrices kun je met een constante vermenigvuldigen, door ieder element met dat getal te vermenigvuldigen. (Scalaire vermenigvuldiging).

Voorbeeld:

$$3\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a_{11} & 3a_{12} & 3a_{13} \\ 3a_{21} & 3a_{22} & 3a_{23} \\ 3a_{31} & 3a_{32} & 3a_{33} \end{pmatrix}$$

Matrices kun je optellen als het aantal rijen gelijk is en het aantal kolommen ook gelijk is.
De matrices worden opgeteld door de overeenkomstige elementen op te tellen.

Voorbeeld:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$$

dan is:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \end{pmatrix}$$

$A + B = B + A$ (optelling commutatief).

Matrices kun je ook vermenigvuldigen als het aantal kolommen van de eerste matrix gelijk is aan het aantal rijen van de tweede.

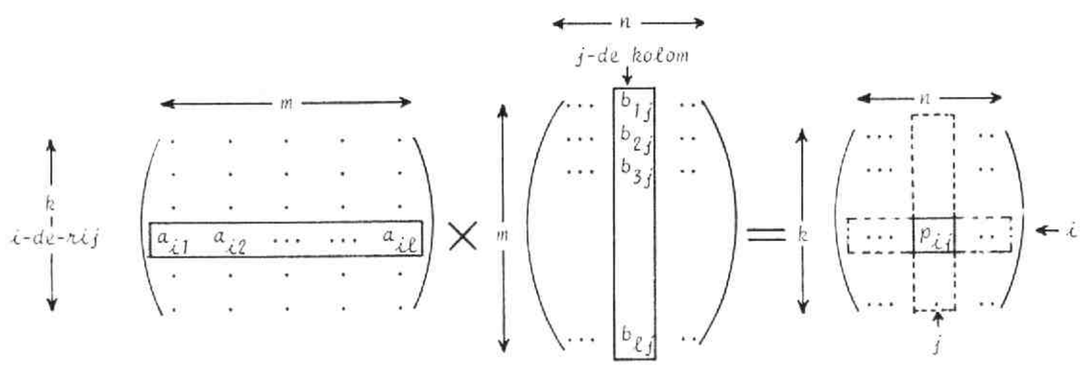
Als we nog even de vermenigvuldigingsregel 'netjes' opschrijven:

Een $k \times m$-matrix A en een $m \times n$-matrix B kunnen met elkaar vermenigvuldigd worden. Het produkt is een $k \times n$-matrix P.

De elementen van P krijg je als volgt:

het element in de *i-de rij* en *j-de kolom*: p_{ij}

ontstaat uit de *i-de rij* van A en de *j-de kolom* van B door 'overeenkomstige' vermenigvuldiging en optelling.



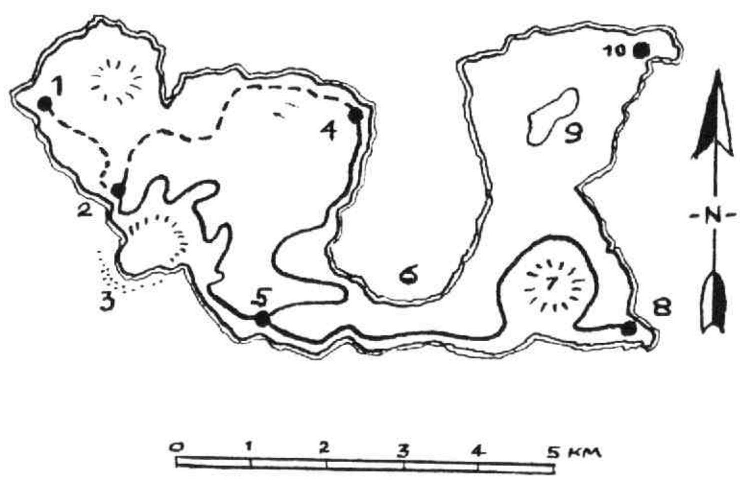
met: $A \cdot B \neq B \cdot A$ (vermenigvuldiging is *niet* commutatief).

Een vierkante matrix met op de diagonaal van a_{11} naar a_{nn} énen, en verder allemaal nullen, heet de *eenheidsmatrix*: E.

Als A een vierkante $n \times n$ matrix is, dan geldt:

$$E \cdot A = A$$

6 VERBINDINGSMATRICES



HAU

1. Point Hau
2. Lalou
3. lalou Lagoon
4. Moau
5. St. Haula
6. Lonely Bay
7. Gunung Suray
8. Kota Hau
9. Lake Lae
10. Kaap Hau

fig. 20

We begonnen in hoofdstuk 1 met dit kaartje van HAU; we bepaalden toen de plaats van een school waarbij alleen rekening werd gehouden met het aantal kilometers dat een leerling maximaal zou moeten reizen. Duidelijk zal toen ook al geweest zijn dat het aantal leerlingen dat in ieder der plaatsen woont ook een grote rol zal spelen. Ofwel: het aantal *leerlingkilometers* zal een grote rol spelen. (Zie hoofdstuk 4, opgave 75).
Het aantal inwoners van de betrokken plaatsen is:

Lalou	1200
Moau	1000
St. Haula	700
Kota Hau	250
Point Hau	150

Van de drie grote plaatsen bezoekt 15% de school, van de kleinste twee 25%

≫ 99. Bepaal m.b.v. de afstandsmatrix (hoofdstuk 1 opgave 3) en de 5×1 'leerlingmatrix' het aantal leerlingkilometers voor iedere plaats en bepaal de ideale plaats voor de school.

≫ 100. Teken een staafgrafiek waaruit duidelijk blijkt waar de school moet komen als het aantal leerlingkilometers bepalend is en één als we alleen het aantal kilometers bekijken, zoals vroeger.

We doen een stapje terug in de tijd toen de graaf van de verbindingen op HAU nog zó was:

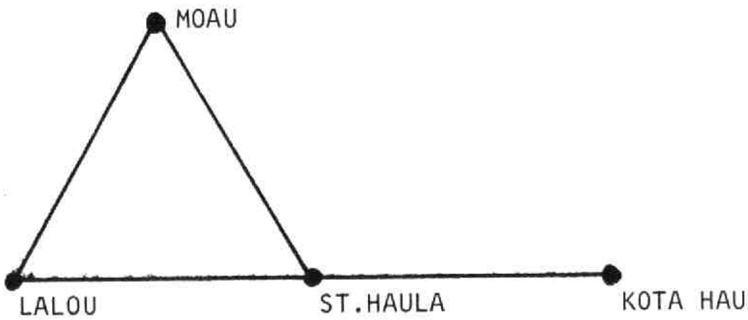


fig. 21

≫ 101. Schrijf de verbindingsmatrix op van deze situatie. Noem deze C.
(C: *Connectivity-matrix*).
Wat betekenen de elementen van deze matrix?
Welke plaats is het meest geïsoleerd?

De verbindingsmatrix C laat je dus zien of je *direct* van de ene naar een andere plaats kunt komen. Om tot een beter inzicht te komen over de mate van verbondenheid van een graaf, wordt ook vaak gekeken naar welke plaatsen uit een andere plaats bereikbaar zijn in twee 'stappen'. Of in drie. En eventueel nog meer. Zo kun je op *drie* manieren een tweestapsreis maken van St. Haula naar St. Haula:

van St. Haula naar Moau en terug,
van St. Haula naar Lalou en terug;
van St. Haula naar Kota Hau en terug.

≫ 102. Hoeveel tweestapsreizen zijn er van Lalou naar Lalou?

≫ 103. Bereken $C \cdot C = C^2$.

Vergelijk C^2 met C. Wat valt op? Wat betekent deze matrix? (Kijk nog eens naar de vorige opgave).

≫ 104. a. Bereken $C \cdot C^2 = C^3$. Wat betekent C^3?

b. Bereken $C \cdot C^3 = C^4$. Wat betekent C^4?

c. Wat zou C^0 moeten zijn?

≫ 105. Bereken $C^0 + C^1 + C^2$.

Wat betekent $C^0 + C^1 + C^2$?

Wat betekent het dat er geen nullen in deze sommatrix voorkomen?

≫ 106. Stel dat er géén weg loopt van St. Haula naar Kota Hau. Verklaar - zonder $C^0 + C^1 + C^2$ te berekenen - dat er nullen in deze matrix zullen voorkomen.

Wat we zojuist gedaan hebben kunnen we algemeen uitdrukken:
De *oplossingsmatrix* T van een graaf zonder geïsoleerde punten wordt als volgt gevonden:
Maak de rij sommatrices:

$$C^0$$
$$C^0 + C^1$$
$$C^0 + C^1 + C^2$$
$$\dots$$
$$\dots$$

De eerste matrix in deze rij waarin geen enkele nul meer voorkomt heet de oplossingsmatrix T.

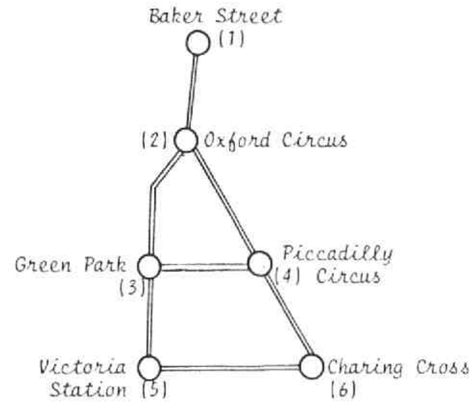
In ons voorbeeld was $T = C^0 + C^1 + C^2$. De diameter van de graaf is nu 2, te weten, de hoogste exponent van de voorkomende C^n.

≫ 107. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Teken de graaf van A en B.

Bepaal de oplossingsmatrix van A en B en de diameter.

≫ 108. Hiernaast zie je een klein gedeelte van het 'Underground'-net in Londen.



a. Geef de verbindingsmatrix C van deze graaf. (Neem de stations in de aangegeven volgorde!).

b. Bereken $C^0 + C^1 + C^2$.

c. Hoe kun je het getal dat in de 2e rij en de 3e kolom van $C + C^2$ staat in het kaartje aflezen?

d. Hoe kun je in het kaartje de diameter van deze graaf aflezen?

≫ 109. $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Teken de graaf van C en D.
Bepaal de oplossingsmatrix van C en D en de diameter.

De *oplossingsmatrix* T kan - zeker in gecompliceerde gevallen - snel bepalen of voorspellen welke plaats een centrale rol gaat spelen binnen een bepaald systeem.

≫ 110.

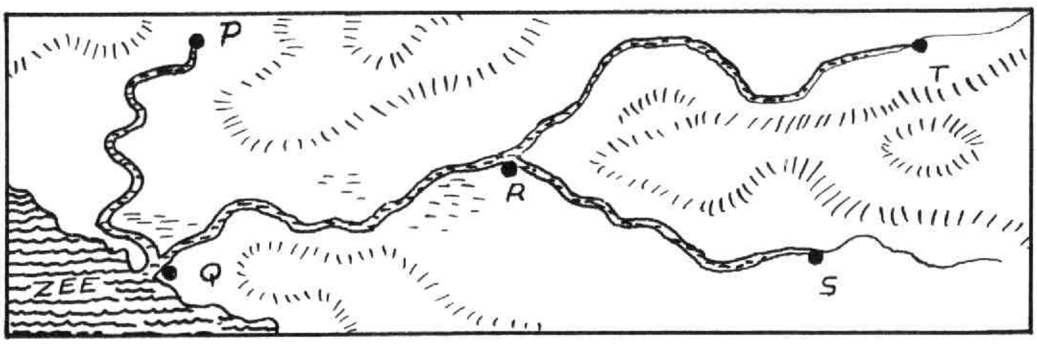


fig. 22

Vijf plaatsen P, Q, R, S en T zijn verbonden door een tamelijk snel stromend rivierensysteem. In de goede oude tijd was daardoor over de rivier alleen éénrichtingsverkeer mogelijk.

Maak een 'gerichte' (d.w.z. met pijlen) graaf van dit systeem en een verbindingsmatrix $\mathcal{D}$.

≫ 111. Bepaal $\mathcal{D}^2$, $\mathcal{D}^3$ en $\mathcal{D}^0 + \mathcal{D}^1 + \mathcal{D}^2 + \mathcal{D}^3$.
Waarom zijn vier-staps-routes niet mogelijk?
Welke plaats ligt het meest centraal?

≫ 112. Toen er stoomboten kwamen kreeg het hele systeem tweerichtingsverkeer. Noem de bijbehorende matrix F en beantwoord overeenkomstige vragen als bij ≫ 110 en ≫ 111.

≫ 113. In deze opgave gaat het om een *graaf* en z'n *verbindingsmatrix* C.
Iemand heeft C^2 berekend en dit resultaat gekregen:

$$C^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

a. Wat betekent het dat $a_{4,4} = 3$?

b. Probeer aan de hand van C^2 de graaf (van C) te vinden.

c. Probeer de matrix C te vinden.

7

VERBINDINGSMATRICES EN DE COMPUTER

Het vinden van de oplossingsmatrix $T = C + C^2 + C^3 + \ldots$ is nogal omslachtig als C een wat grotere matrix is, bijvoorbeeld 8×8. Voor bewerkelijke zaken kunnen we vaak computers inschakelen.
Laten we zo'n probleem met wat meer omvang bekijken.

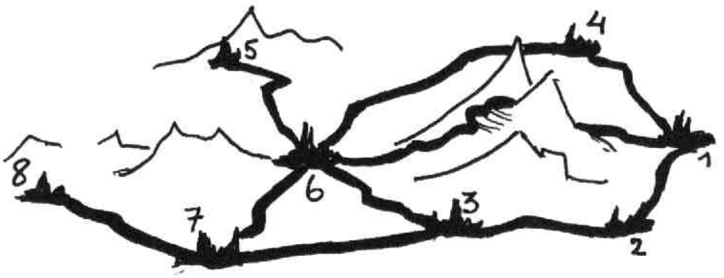


fig. 23

Acht dorpjes in bergachtig terrein zijn verbonden met wegen volgens de tekening hierboven. De weg van 1 naar 6 loopt over een bergpas.
We willen weten wat de diameter van dit wegennet is en welke plaatsen in de onderlinge verbinding met de meeste tussenstations te kampen hebben.
We noemen de ligging van deze plaatsen *diametraal*.

≫ 114. Teken de graaf van de situatie.

≫ 115. Stel de verbindingsmatrix C op.

Deze matrix gaan we doorgeven aan een computer. Deze zal dan voor ons T bepalen.
We moeten nu aangeven wat de orde van de matrix is. Eén getal is hiervoor voldoende, dus 8 voor een 8×8 matrix.
Daarna komt de matrix, rij voor rij, de getallen gescheiden door komma's.
Daarna moeten de elementen van de matrix worden aangereikt, rij voor rij, de bovenste rij eerst.

≫ 116. Verwerk de matrix met de computer.

De computer geeft nu van het bergdorpenprobleem de oplossingsmatrix T en ook wat tussenresultaten die in de berekening van T voorkomen.

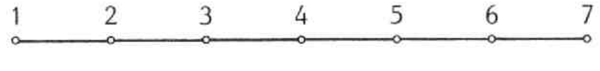
≫ 117. Wat is de diameter van ons wegennet?
Welke plaatsen liggen diametraal?

Men overweegt een tunnel aan te leggen door de bergen die dorp 3 en dorp 4 scheiden, zodat er een weg kan komen tussen deze dorpen. Deze weg zal niet in verbinding staan met de weg tussen dorp 1 en dorp 6, die immers over de bergpas leidt.

≫ 118. Teken de graaf van deze nieuwe situatie, stel de verbindingsmatrix op, bepaal de oplossingsmatrix en de diameter van dit wegennet met behulp van een computer. Vergelijk het resultaat met dat van ≫ 117.
Is de diameter vergeleken hierbij een kleiner getal geworden?

≫ 119. Hoe bepaal je uit de opeenvolgende matrices T welke plaatsen het grootste aantal 'stappen' uit elkaar liggen (diametraal zijn)?

≫ 120. Verwerk ook per computer de matrix voor minimale verbinding behorende bij de volgende graaf.

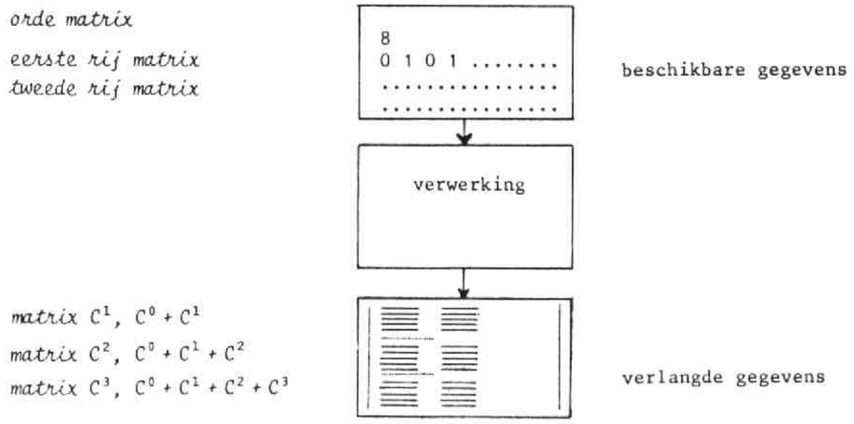


≫ 121. Verklaar het feit dat de oneven machten van C een hoofddiagonaal hebben met nullen.

De situatie van de tekening van blz.47 is een probleem geworden omdat tweerichtingsverkeer op de smalle bergwegen veelvuldig vastloopt. Men stelt voor de weg tussen 7 en 8 en de weg tussen 5 en 6 te verbreden en daarmee beter geschikt te maken voor tweerichtingsverkeer. De andere wegen wil men gaan beperken tot éénrichtingsverkeer. Daarvoor zijn er nogal wat verschillende oplossingen.

≫ 122. Verdeel die oplossingen onder elkaar en verwerk de bijbehorende matrices met de computer.
Oplossingen met de kleinste diameter worden gekozen.
Kwamen er ook gevallen voor met een oneindig grote diameter?
Geef in de verschillende gevallen zo mogelijk diametrale plaatsen aan.

We bekijken nog eens een voorbeeld van het gebruik dat we eerder van de computer gemaakt hebben:



Het bovenste blokje bevat wat we aan de computer beschikbaar stelden. We noemen dit de *beschikbare gegevens*. De computer vormde deze gegevens om tot wat we verlangden: de *verlangde gegevens*. Maar de verlangde gegevens moesten we nog goed bekijken om daaruit af te leiden wat we echt weten wilden: de diameter en diametraal liggende plaatsen. Anders gezegd, we moesten aan de gegevens nog een betekenis hechten om *informatie* te krijgen.

Nu zit de informatie over de diameter en diametraal liggende plaatsen ook al opgesloten in de beschikbare gegevens. Het omvormen of *verwerken* van de gegevens heeft plaatsgevonden om de informatie gemakkelijker beschikbaar te krijgen.
Deze verwerking van de gegevens kan 'met de hand' of, zoals we nu gedaan hebben, met behulp van een automaat: *automatische gegevensverwerking*.

Hierboven staat de kern van de automatische gegevensverwerking. We herhalen het nog eens in het kort.

Automatische gegevensverwerking is
    verwerking van beschikbare gegevens met behulp van een automaat, in het bijzonder een computer.
Gegevensverwerking
    vindt plaats om de informatie gemakkelijker uit de gegevens te kunnen afleiden.
Beschikbare gegevens
    zijn de gegevens vóór de gegevensverwerking.
Verlangde gegevens
    zijn de gegevens verkregen door de gegevensverwerking.

De wijze waarop de gegevens door computers verwerkt worden, moet vastgelegd of *beschreven* zijn. Juist omdat computers zo flexibel zijn dat ze voor vele soorten van verwerking gebruikt worden, kunnen we de verwerking niet aan het initiatief van de machine overlaten. Een beschrijving van de verwerking voor een computer heet een *programma*.
Het programma voor de verbindingsmatrix is vrij lang en we zullen het daarom niet bekijken. Wel kunnen we vermelden dat er zeven hoofdonderdelen in het programma zijn. Eén ervan heet NUL ZOEKEN. Dit onderdeel bepaalt of er nog nullen buiten de hoofddiagonaal van de matrix T zijn. Het resultaat van dit zoeken wordt gemeld: (GEVONDEN) of (NIET GEVONDEN).

Er is ook nog iets te vermelden over de volgorde waarin de hoofdonderdelen worden uitgevoerd, welke worden herhaald en welke niet. Men noteert dit vaak met behulp van een *struktuurschema*.
Dat ziet er als volgt uit:

INLEZEN MATRIX	
AFDRUKKEN MATRIX	
NUL ZOEKEN	
ZOLANG (GEVONDEN)	
	VOLGENDE MACHT BEREKENEN
	BIJ T OPTELLEN
	MATRICES AFDRUKKEN
	NUL ZOEKEN
(NIET GEVONDEN) STOP	

We kijken nog eens terug naar TANNA:

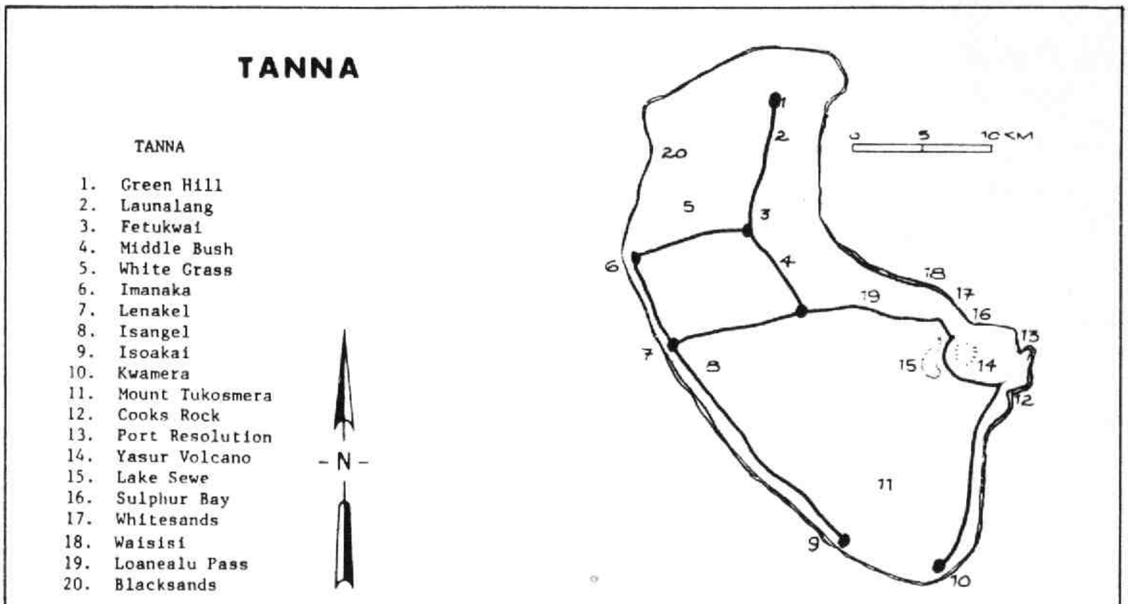


fig. 24

Zo'n 1000 km ten zuidoosten van MALAITA ligt het eiland TANNA, dat deel uitmaakt van het sinds 1980 zelfstandige VANUATU. Dit eiland wordt gedomineerd door de vulkaan YASUR (14). De belangrijkste knooppunten zijn Green Hill (1), Fetukwai (3), Imanaka (6), Lenakel, de hoofdplaats (7), het kruispunt bij Middle Bush (4) en de gehuchten Isoakai (9) en Kwamera (10).
De taxi's op TANNA (LandRovers) zijn nogal prijzig; gemiddeld zo'n 75 Australische dollarcent per km; ander openbaar vervoer is er niet.

≫ Als je alle (knoop)punten wilt bezoeken met de taxi, waar (in welk knooppunt) moet je je kamp dan opslaan om zo zuinig mogelijk met je geld om te springen?
(Iedere dag 1 knooppunt, iedere dag terug naar het kamp).

We illustreren hiermee nog eens de eerder behandelde begrippen.
- Verlangd gegeven is de aanduiding van één knooppunt.
- Informatie is dat vanuit dit knooppunt alle punten bezocht kunnen worden tegen de laagste kosten.
- Beschikbare gegevens zijn:

1. ligging van TANNA t.o.v. MALAITA;
2. de eilandengroep waartoe TANNA behoort;
3. TANNA wordt gedomineerd door een vulkaan;
4. de namen van de 7 knoop- en eindpunten;
5. namen van 13 andere topografische eenheden;
6. kaartje met weergave verbindingswegen en onderlinge ligging van de topografische eenheden;
7. schaalaanduiding bij de kaart;
8. noordrichting op de kaart;
9. merk van de taxi's;
10. taxiprijs per kilometer.

- Verwerking: het bepalen van het knooppunt waarvan de som van de afstanden over de weg tot de andere knooppunten het kleinst is.
- Beschrijving van de verwerking:
  1. maak een graaf;
  2. meet de afstanden op de kaart en vul die bij de graaf in;
  3. maak een afstandsmatrix;
  4. totaliseer de kolommen;
  5. de kolom met de laagste som behoort bij het gezochte knooppunt;
  6. geef de naam van dit knooppunt.

≫ 123. Ga na welke gegevens niet voor deze verwerking gebruikt zijn.

Deze gegevens zijn voor deze verwerking overtollig of *redundant*. In de gegevens die we wèl gebruikt hebben kan ook redundantie voorkomen. Zo kan men uit gegeven nummer 6, het kaartje, rustig de kustlijn wegvlakken zonder dat dit op onze verwerking van invloed is.

≫ 124. Noem meer redundantie in de kaart voor deze verwerking.

Vaak bepaalt de verwerking wat redundant is en wat niet. Er is ook redundantie onafhankelijk hiervan. In onze taal kunnen we vaak met veel minder woorden toe dan we gebruiken.

"Dit eiland wordt gedomineerd door de vulkaan Yasur".

"Vulkaan Yasur domineert TANNA".

De tweede zin gebruikt de helft van het aantal woorden, maar bevat de-

zelfde informatie. Waarmee we niet willen zeggen dat deze krantenkoppenstijl te prefereren zou zijn.
In het dagelijks leven ontmoeten we veel redundantie. Dat brengt er nu juist de kleur aan. Men heeft berekend dat het papierverbruik tot een derde zou verminderen als de Nederlandse geschreven taal geen redundantie meer zou bevatten. Maar taal zonder redundantie is meestal niet fijn om te lezen.

In de automatische gegevensverwerking tracht men redundantie te voorkomen in de gegevens die aan de verwerking beschikbaar worden gesteld. De voornaamste reden is dat het nog erg kostbaar is om verwerking te ontwikkelen die redundantie van noodzakelijke gegevens kan onderscheiden. Een zekere kleurloosheid is daarbij wel een nadeel.

≫ 125. Bekijk nog eens het probleem dat op blz. 36 begint.
Wat is in de gegevens redundantie voor de beantwoording van ≫ 97?

≫ 126. Ook de gewenste gegevens bij automatische gegevensverwerking bevatten vaak redundantie. Geef bij een van de resultaten van ≫ 117, ≫ 118 en ≫ 119 aan welke gegevens echt nodig zijn om de informatie 'diameter' en 'diametrale plaatsen' af te leiden.

8 INCIDENTIE- EN KANSMATRICES

De verbindingsmatrices, met daarin alleen *1* en *0* als elementen, vormen een bijzonder soort van de veel grotere groep INCIDENTIE-MATRICES. Een andere soort incidentie-matrices komt voor in de sociale wetenschappen.

Uit een verhaal lichtten we het volgende fragment:

> ... ze werden verwelkomd door A.W.S., zijn zoon Johan en dochter Geertje, Johan's vrouw Suus, hun zonen Michiel en Rokus, dochter Elma en Geertjes zoon Berend ...

Om familie - en andere - relaties te ontwarren, kun je 'gerichte grafen' gebruiken. Zo heeft de relatie "is zoon van" de volgende gerichte graaf:

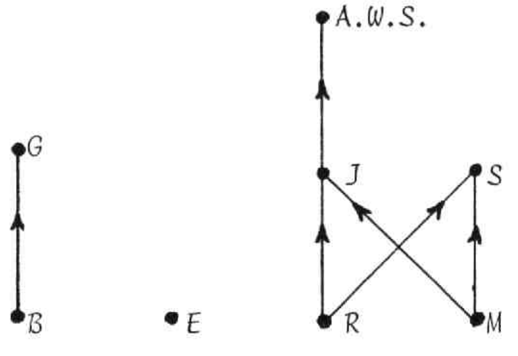


fig. 25

Ook deze graaf kun je representeren door een matrix, met nullen en énen, net als bij de verbindingsmatrix; dus, gedeeltelijk ingevuld:

$$P = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccc} A & G & B & J & S & E & R & M \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ G \\ B \\ J \\ S \\ E \\ R \\ M \end{array} & \begin{pmatrix} \; & \; & \; & \; & \; & \; & \; & \; \\ 0 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \end{pmatrix} \end{array}$$

G is géén zoon van A
B is zoon van G.

≫ 127. Verklaar aan de hand van de graaf dat $p_{M,G} = 0$ en $p_{R,S} = 1$.

≫ 128. Maak de matrix "is zoon van" af.

≫ 129. Teken de gerichte graaf en de matrix Q van de relatie "is kind van".

≫ 130. Bereken de matrix $P \cdot Q$ en leg uit wat deze betekent. Teken daarna de graaf.

≫ 131. Hiernaast zie je een gerichte graaf van de relatie "is ouder van". Maak de incidentie-matrix U van deze graaf.

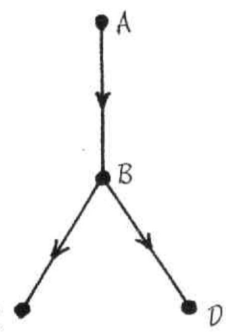


fig. 26.

≫ 132. Bereken U^2 en vertel wat deze betekent. Teken de graaf.

≫ 133. Bovenstaande graaf breiden we uit:
C is ouder van E; noem de matrix R.
Voorspel hoe de matrix R^3 eruit zal zien.

≫ 134. Bekijk de graaf van de vorige bladzijde (met A.W.S.) nog eens. Teken hem eens, met alle pijlen de andere kant op. Geef de matrix S. Welke relatie bestuderen we hier? Welk verband is er tussen de matrices P en S?

≫ 135. Doe hetzelfde voor R.

≫ 136. Hiernaast zie je een gerichte graaf van de relatie "houdt van".

a. Stel de matrix B op die behoort bij deze graaf.

b. Welke persoon wordt het meest bemind?

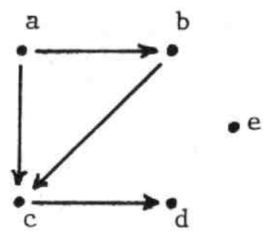


fig. 27

c. Laat zien (met matrixprodukten en de graaf) dat er precies één driestapsweg is en géén vier- of meerstapswegen.

Een andere toepassing uit de sociale wetenschappen is die waarbij we te maken hebben met *kansmatrices*.

In een ontwikkelingsland is er een wekelijks mededelingenprogramma voor landbouwers. Op een bepaald moment wordt iedere week een technologische innovatie uiteengezet in dat programma. Er is geen contact tussen de boeren onderling.
De kans dat een boer luistert is zo'n 20%.
Op $t = 0$ weet geen enkele boer van de nieuwste ontwikkeling.

Of op $t = 0$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow \text{gedeelte niet-weters} \\ \rightarrow \text{gedeelte weters} \end{array} \Bigg\} \text{ van de boeren.}$$

Na één uitzending is dit dus:

$$\begin{pmatrix} 0,8 \\ 0,2 \end{pmatrix}$$

≫ 137. Laat zien dat dit op te vatten is als het produkt van de kansmatrix P met de matrix $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, waarbij P de volgende matrix is:

$$\begin{array}{lll} & & \text{VAN} \\ & & \begin{array}{cc} \text{niet-weters} & \text{weters} \end{array} \\ \text{NAAR} & \begin{array}{l} \text{niet-weters} \\ \text{weters} \end{array} & \begin{pmatrix} 0,8 & 0 \\ 0,2 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

≫ 138. Wat betekent $p_{1,1} = 0,8$; $p_{2,1} = 0,2$?
Waarom zijn $p_{1,1} + p_{2,1} = 1$?

≫ 139. Bereken door herhaalde vermenigvuldiging met P het percentage boeren dat kennis heeft genomen van de uitzending na vijf weken.

≫ 140. Laat zien dat iedere volgende uitzending minder efficiënt is dan de vorige.

≫ 141. Zodra 75% (ongeveer) van de boodschap heeft kennisgenomen, worden de uitzendingen (wegens de kosten) gestaakt.
Na hoeveel uitzendingen is dat?

≫ 142. Beantwoord dezelfde (laatste drie) vragen als 30% van de boeren luistert.

≫ 143. Teken de aantallen boeren die bekend zijn met het radiobericht na iedere uitzending in een grafiek.
Eén plaatje waarin beide grafieken getekend worden, horizontaal de tijd in weken, vertikaal het gedeelte van de boeren dat bekend is met het radiobericht.
Wat gebeurt er als $t \to \infty$?

TENSLOTTE:

Als een matrix wordt gevormd uit een andere matrix R door de RIJEN en KOLOMMEN van die matrix R te verwisselen, ontstaat de *gespiegelde* van R. Deze wordt vaak opgeschreven als R'.

≫ 144. Bereken de gespiegelde van:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 23 & 44 & -82 & 12 \\ 1 & 32 & -17 & 0 \\ 1 & 0 & -123 & 5 \end{pmatrix}$$

≫ 145. Geef een voorbeeld van 3×3 incidentie-matrix die gelijk is aan zijn gespiegelde met bijbehorende graaf.

≫ 146. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Laat zien dat: $(AB)' = B' \cdot A'$.

9 MIGRATIE- EN LESLIEMATRICES

Bij biologie en aardrijkskunde spelen zogenaamde MIGRATIEMATRICES nogal eens een belangrijke rol. De elementen van zo'n matrix zijn verhoudingsgetallen: ieder element geeft aan welk gedeelte van de ene naar een andere plaats verhuist, over een bepaalde tijdseenheid. Laten we eens kijken naar het volgende voorbeeld:

$$\begin{array}{llcc} & & \multicolumn{2}{c}{\textit{VAN}} \\ & & \textit{KATWIJK} & \textit{NOORDWIJK} \\ \textit{NAAR} & \begin{array}{r}\textit{KATWIJK} \\ \textit{NOORDWIJK}\end{array} & \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} 7/8 & 1/16 \\ 1/8 & 15/16 \end{pmatrix}} \end{array}$$

tijdseenheid: 5 jaar.

≫ 147. Verklaar deze matrix; ook met een graaf.

≫ 148. De bevolking van Katwijk (40.000) en Noordwijk (16.000) is in matrixnotatie:

$$\begin{pmatrix} 40000 \\ 16000 \end{pmatrix}$$

Hoe ziet deze bevolking er over 5 jaar uit als je alleen rekening houdt met migratie zoals voorgesteld door deze matrix?

≫ 149. Welke nadelen en simplificaties zitten er aan deze voorstelling van zaken?

Een andere migratiematrix heeft de volgende vorm:

$$M = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \quad \text{over 10 jaar.}$$

De betreffende populaties bestaan hier uit 54.000 en 108.000 individuen.

≫ 150. Bereken de bevolking over 10 jaar.
Ook na 20 jaar, 30 jaar, enz.

≫ 151. Maak één tekening met daarin de grafieken die het verloop van beide populaties aangeven. Welke conclusies kun je trekken?

≫ 152. Doe hetzelfde als hiervoor als de migratiegraaf is:

≫ 153. Ook nog met de matrix:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Migratiematrices kunnen natuurlijk ook op meer dan twee populaties worden 'losgelaten'. En bovendien hoef je niet altijd van één plaats naar de andere te verhuizen, maar b.v. van een bepaald leeftijdscategorie naar een volgende; of van een bepaalde sociale klasse naar een naasthogere of - lagere.

We bekijken de volgende populatie:

$$\begin{pmatrix} 55 \\ 98 \\ 112 \end{pmatrix}$$

De *migratiematrix* ziet er als volgt uit:

$$M = \begin{array}{cc} & \text{VAN} \\ \text{NAAR} & \begin{pmatrix} 3/5 & 1/10 & 1/10 \\ 1/5 & 4/5 & 3/10 \\ 1/5 & 1/10 & 3/5 \end{pmatrix} \end{array}$$

≫ 154. Teken de graaf van deze matrix M.

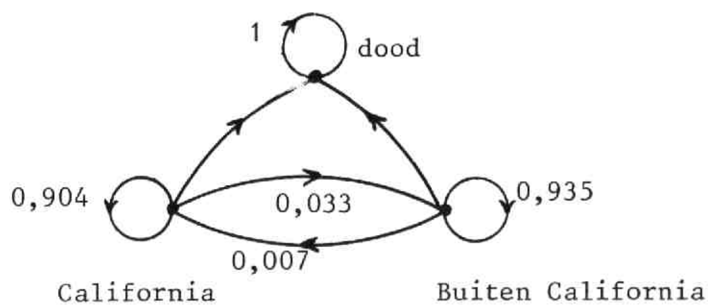
≫ 155. Bereken de samenstelling van de populatie over 3, 6 en 9 jaar en trek enige conclusies. Waarom is de som van de kolommen steeds 1?
En waarom die van de rijen niet?
Kun je deze matrix ook als kansenmatrix opvatten?

≫ 156. Je zou de matrix ook in deze vorm hebben kunnen schrijven:

$$M' = \begin{array}{cc} & \mathit{NAAR} \\ \mathit{VAN} & \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \end{array}$$

In welke relatie tot M staat deze matrix?

Hoe moet je nu vermenigvuldigen om een goed resultaat te krijgen?



Hierboven een migratiegraaf van de migratie van California naar andere staten en omgekeerd.

Alleen is deze iets reëler dan die van Katwijk en Noordwijk.

≫ 157. Verklaar waarom deze graaf wel redelijk waarheidsgetrouw is of kan zijn.

≫ 158. Bij twee pijlen staan nog geen getalletjes. Vul deze alsnog in.

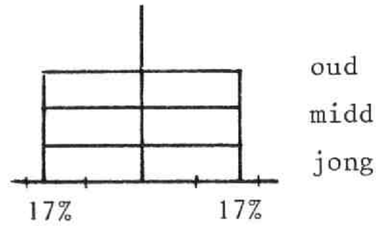
≫ 159. Maak de matrix. (*NAAR*: links; *VAN*: boven).

Een bepaalde keversoort levert - na geruime tijd van studie - de volgende bijzonderheden:

- (ongeveer) de helft van de geboren kevers overleven hun eerste levensjaar en leven dus nog in hun tweede jaar;
- een derde gedeelte daarvan maakt z'n tweede verjaardag mee;
- geen enkele kever wordt 3 jaar oud. Maar ze zitten dat laatste jaar (of gedeelte daarvan) niet stil; ieder van de in leven zijnde kevers produceert (gemiddeld) zes nakomelingen.

We starten met een ideale bevolking van 3000 kevers: 1000 die hun eerste verjaardag nog moeten vieren; 1000 in de middelste leeftijdsgroep en 1000 in de oudste groep.

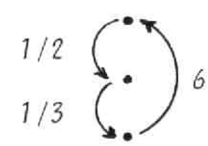
De bevolkingspyramide ziet er dus zo uit:



≫ 160. Bereken en teken de pyramides (in procenten) van de bevolkingsopbouw na 1 jaar, 2 en 3 jaar. Kun je voorspellingen doen over nog later?

≫ 161. Teken de grafieken van het bevolkingsverloop van ieder van de drie groepen in één plaatje.

≫ 162. Laat $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$ met graaf:



Verklaar de graaf en bereken $A \cdot \begin{pmatrix} 1000 \\ 1000 \\ 1000 \end{pmatrix}$

≫ 163. Verklaar waarom dit produkt de bevolkingsopbouw na één jaar oplevert. Bereken op deze manier ook de volgende populaties en controleer de resultaten.

≫ 164. Onderzoek het bevolkingsverloop als de beginpopulatie $\begin{pmatrix} 1800 \\ 900 \\ 300 \end{pmatrix}$ is.

De matrix A is een zogenaamde POPULATIE-VOORSPELLINGS-MATRIX, of: LESLIE-MATRIX, naar de Engelse zoöloog Leslie, die voor het eerst de matrices zo gebruikte (vlak na de Tweede Wereldoorlog).

Zo'n matrix bevat de volgende elementen:

- *op de eerste rij*: vruchtbaarheid van ieder der betreffende personen;
- *op de tweede rij*: 1e kolom: kans om van eerste groep naar tweede te komen (overlevingskans, promotiekans); alle andere elementen zijn nullen.
- *op de derde rij* : 2e kolom: kans om van de tweede naar de derde groep te komen; alle andere elementen zijn nullen.
- *op de vierde rij*: op analoge wijze verder.

Dus, in het algemeen:

$$A = \begin{pmatrix} v_0 & v_1 & v_2 & . & . & . & v_{n-1} & v_n \\ p_0 & 0 & 0 & & & & 0 & 0 \\ 0 & p_1 & 0 & & & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_2 & & & & 0 & 0 \\ . & . & . & & & & & \\ . & . & . & & & & & \\ . & . & . & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & p_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

≫ 165. Waarom is de laatste rij niet:

$$0 \quad 0 \quad 0 \quad . \quad . \quad . \quad 0 \quad p_n?$$

≫ 166. Verklaar de betekenis van de elementen in de volgende twee Lesliematrices:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 1 \\ 3/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/10 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0,01 & 0,47 & 1,82 & 1,37 & 0,23 \\ 0,98 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,99 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,83 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,81 & 0 \end{pmatrix}$$

Teken een graaf bij B en bij C.

≫ 167. Even terug naar ons torren-verhaal.
Door toegenomen insecticidengebruik neemt de vruchtbaarheid nogal af: i.p.v 6 jonge torren worden er in het derde jaar maar 3 geboren. Onderzoek de consequenties daarvan over langere tijd.

≫ 168. Maak zelf een Lesliematrix op grond van de volgende gegevens:
De populatie is ingedeeld in leeftijdsklassen van 15 dagen. Geen enkel individu wordt ouder dan 90 dagen.
Alleen tussen de 30e en 75e levensdag is er kans op voortplanting. Tussen de 45e en 60e dag zijn gemiddeld zo'n 10 jongen daarvan het resultaat. Daarvoor en daarna gemiddeld zo'n 4 jongen.
Wat de overlevingskansen betreft van de ene leeftijdsklasse naar de volgende is het volgende ontdekt:
De helft dan de dieren gaat de eerste 15 dagen dood. Daarna ziet het er wat florisanter uit: de kans om van de tweede naar de derde en van de derde naar de vierde groep te 'promoveren' is ongeveer gelijk en wel zo'n 75%. Daarna wordt het een stuk slechter: de volgende percentages zijn 33% en 25%.

≫ 169. We beschouwen een gemeenschap van 3000 individuen. Deze gemeenschap delen we in drie leeftijdsklassen in, ieder één jaar breed. We noemen die drie groepen: jongeren, volwassenen en ouderen.
Bij aanvang van onze studie zijn deze groepen even groot. De vruchtbaarheid en overlevingskansen:
10 jongeren brengen gemiddeld 1 jong voort;
2 volwassenen ook. En er zijn wel 100 ouderen nodig om datzelfde resultaat te bereiken.
Jongeren hebben 50% kans volwassen te worden, volwassenen 25% kans om 'ouder' te worden.

a. Geef de bevolkingsopbouw voor de komende 4 jaren.

b. Teken de bijbehorende pyramides (in procenten).

c. Teken de grafiek waarin het verloop van ieder der drie bevolkingsgroepen te zien is.

d. Teken de grafiek waarin het verloop van de totale bevolking te zien is.

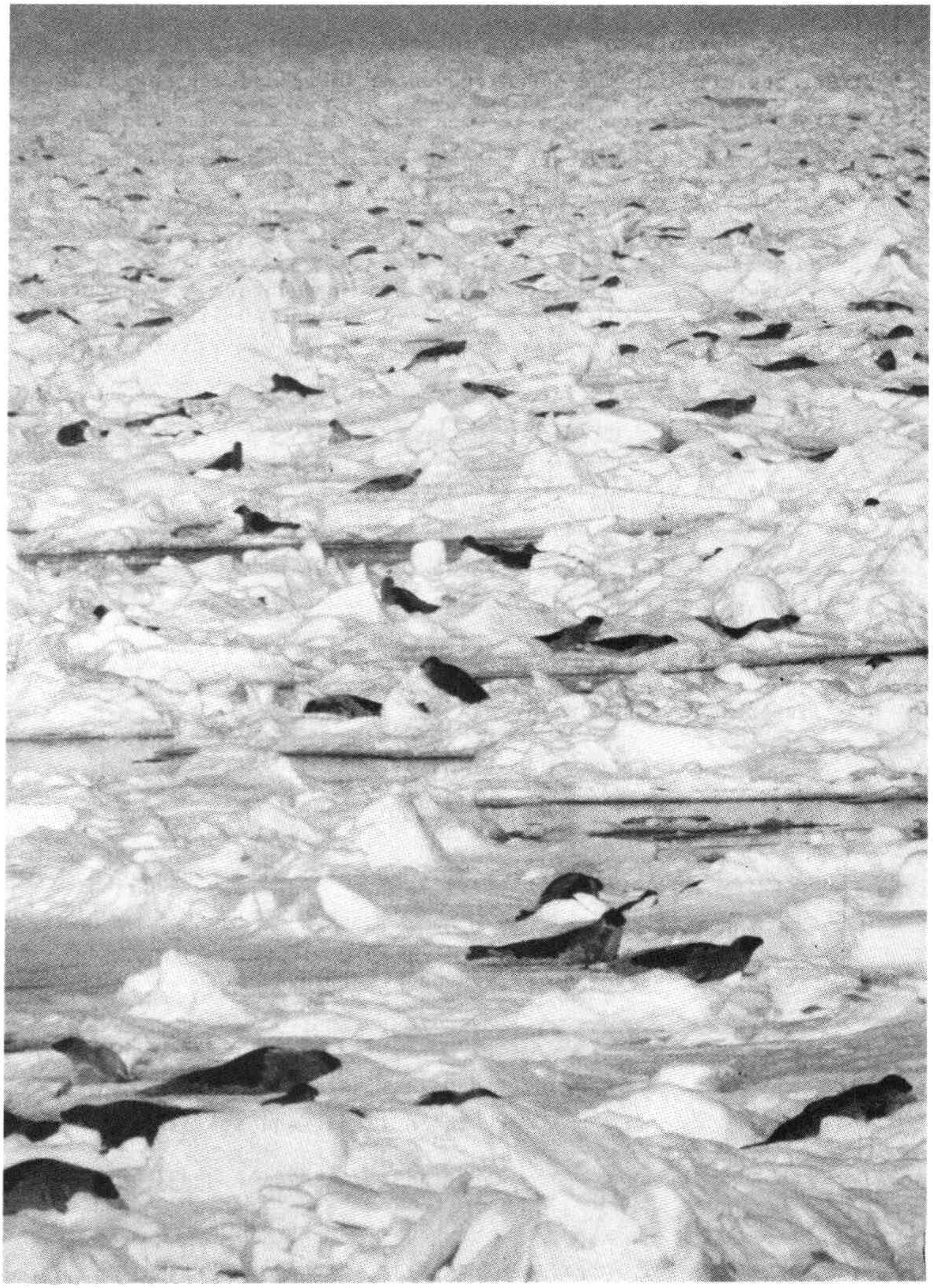
e. Welke conclusies zijn er te trekken?

≫ 170. Tenslotte een geval met authentieke cijfers:
Het betreft hier een gedeelte van de Amerikaanse vrouwelijke bevolking. Men heeft vrouwen genomen omdat die 'reproduceren' en dus goed in een Lesliematrix passen. Bovendien kun je toch een redelijke schatting geven van de totale bevolking.
De gegevens zijn:

leeftijd:	aantal vr. in 1940	aantal dochters in periode 40-55	aantal vr. in 1955
0 - 14	14.459*	4.651	16.428
15 - 29	15.264	10.403	14.258
30 - 44	11.346	1.374	14.837

- Bepaal de v_i van de Lesliematrix L.
- Bepaal de p_i van de Lesliematrix L.
- Laat zien dat L.B (B = bevolking 1940) inderdaad de bevolking van 1955 oplevert.
- Bereken de bevolking van 1970 en 1985.

*) veertieneneenhalfmiljoen.



Zadelrobben verzamelen zich om te paren op het pakijs. Uit de foto wordt duidelijk hoe kwetsbaar de dieren zijn als er op ze gejaagd wordt.

10

KLAPMUTSEN

DE JACHT OP DE KLAPMUTS

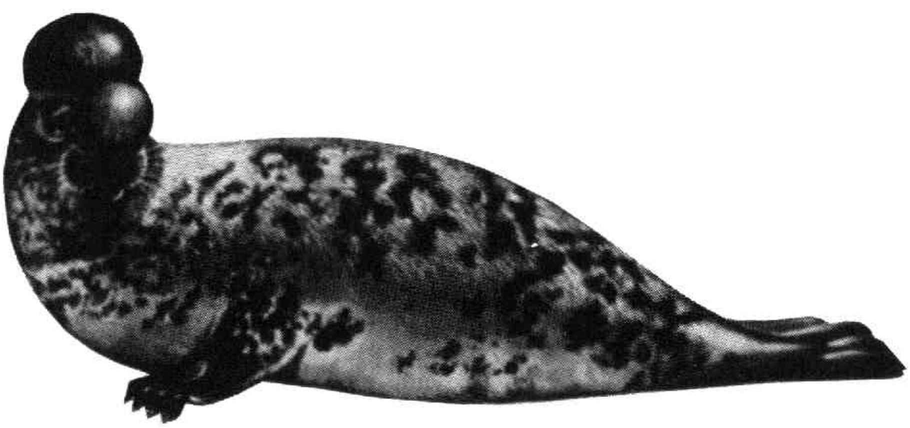
Zoölogische omschrijving van de klapmuts:

In de wateren rondom de Noordpool worden de slurfrobben vertegenwoordigd door de zeer grote en zware klapmuts (Cystophora cristata). De mannetjes kunnen bijna 4 meter lang worden en een gewicht van 400 kg halen. De vrouwtjes zijn wat kleiner (3 meter, 270 kg). Zowel mannetjes als vrouwtjes hebben een soort 'blaas' of 'muts' op de kop, bij vrouwtjes echter minder sterk ontwikkeld.
Jongen zijn vlak na de geboorte wit; daarna tot hun vierde of vijfde levensjaar blauwgrijs - robbenjagers spreken dan van blauwruggen (Bluebacks, Blaurücker, Blaumänner). Ze komen voor in de drijfijszone van de noordelijke Atlantische Oceaan en Noordelijke IJszee; de dieren trekken vaak over grote afstand, incidenteel zelfs tot Florida en Portugal.

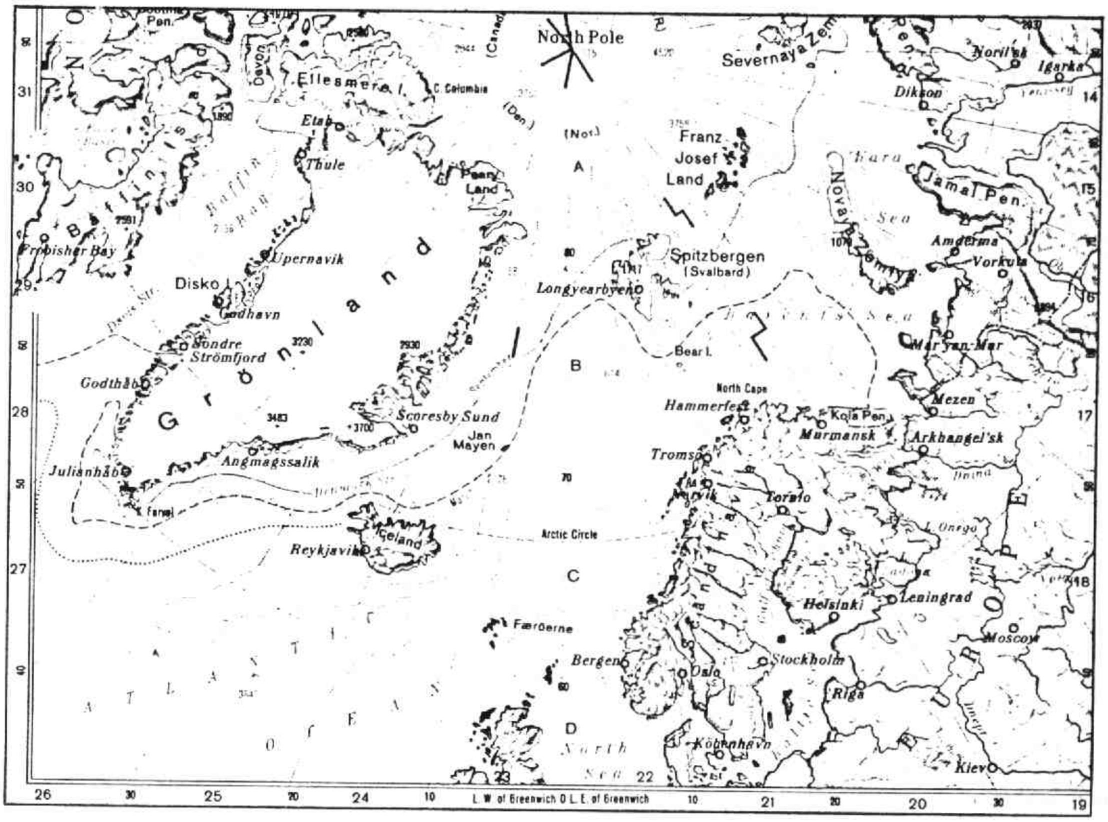
Levenswijze:

Alleen met het drijfijs komt de klapmuts in de nabijheid van het land. Hij houdt zich bij voorkeur op in diep water, waar hij jaagt op inktvissen, kabeljauwen en bodemvissen zoals de bot. Dat hij in gevangenschap zeer moeilijk te houden is zal wel voornamelijk liggen aan het feit dat geen bassin in een dierentuin diep genoeg voor hem is. Eén van zijn werpplaatsen ligt ten noordoosten van Newfoundland, de andere ten noorden van het eiland Jan Mayen.
De klapmuts blijft in de voortplantingstijd zo dicht mogelijk bij de zee. Waarschijnlijk komt dit doordat de jongen hun wollige kleed al vóór of kort na de geboorte verliezen, zodat ze al heel klein het water in kunnen vluchten. De jongen blijven ongeveer acht dagen op het ijs en leven twee

of drie weken lang uitsluitend van moedermelk. In deze tijd treft men de klapmuts meestal in familieverband aan, dus niet in 'harems' of grote kudden, zoals dat bij vele andere robben het geval is.
Nadat de jongen geboren zijn, worden de wijfjes opnieuw bevrucht. Dit gaat gepaard met veel gevechten en van verre hoorbaar gebrul van de mannetjes. In juni verzamelen de klapmutsen zich opnieuw, nu in de Denemarkenstraat tussen IJsland en Groenland, om op het drijfijs hun jaarlijkse haarwisseling door te maken. Na afloop daarvan zijn ze sterk vermagerd en gaan weer aan het zwerven in het gebied van het drijfijs tussen de oostkust van Amerika, Spitsbergen en het Bereneiland. Omtrent de door vele waarnemers vermelde trektochten van de klapmuts bestaat nog geen volledige duidelijkheid. De dieren trekken in het gezelschap van zadelrobben, maar beide soorten blijven strikt van elkaar gescheiden.



Op de klapmuts wordt helaas gejaagd. Dit is een traditionele jacht van kustbewoners van Noorwegen en Canada. De dieren worden gevangen op de werpplaatsen tijdens de zeer korte periode dat de klapmutsen op het drijfijs zijn om te werpen en te paren.
De invloed van deze jacht op de populatie behorend bij de werpplaats bij Jan Mayen-eiland, ten noordoosten van IJsland, is in 1975 onderzocht door de Nederlanders E. Flipse en E.J.M. Veling. Zij wensten te bepalen of de klapmutsen uit het betrokken gebied met uitsterven worden bedreigd als de huidige jachtintensiviteit zou worden gehandhaafd. We volgen dit onderzoek nu op de voet met behulp van automatische verwerking van Lesliematrices.



1 : 40 000 000

Boundaries of international dependency claims in the Arctic Ocean — Southern limit of permafrost — Minimum limit of pack ice — Extreme limit of drift ice — Medium limit of iceberg drift

De eenvoudigste oplossing, het enkele jaren achtereen tellen van het totale aantal, in onuitvoerbaar. Ze zijn onvindbaar in diep water en fotograferen vanuit de lucht tijdens de korte werptijd is onmogelijk door de onbereikbaarheid van het gebied voor lichte vliegtuigen.
De gegevens moeten worden ontleend aan onderzoekingen van gemerkte dieren waarmee een sterftecijfer kan worden geschat, aan secties op geschoten wijfjes waaruit vruchtbaarheidscijfers kunnen worden afgeleid en tenslotte de leeftijdsverdeling bij gevangen dieren, te bepalen uit onderzoek van de gebitten. Wat dit laatste betreft, meldt een vangst van één schip in 1975 de verdeling zoals die op de volgende bladzijde is weergegeven.

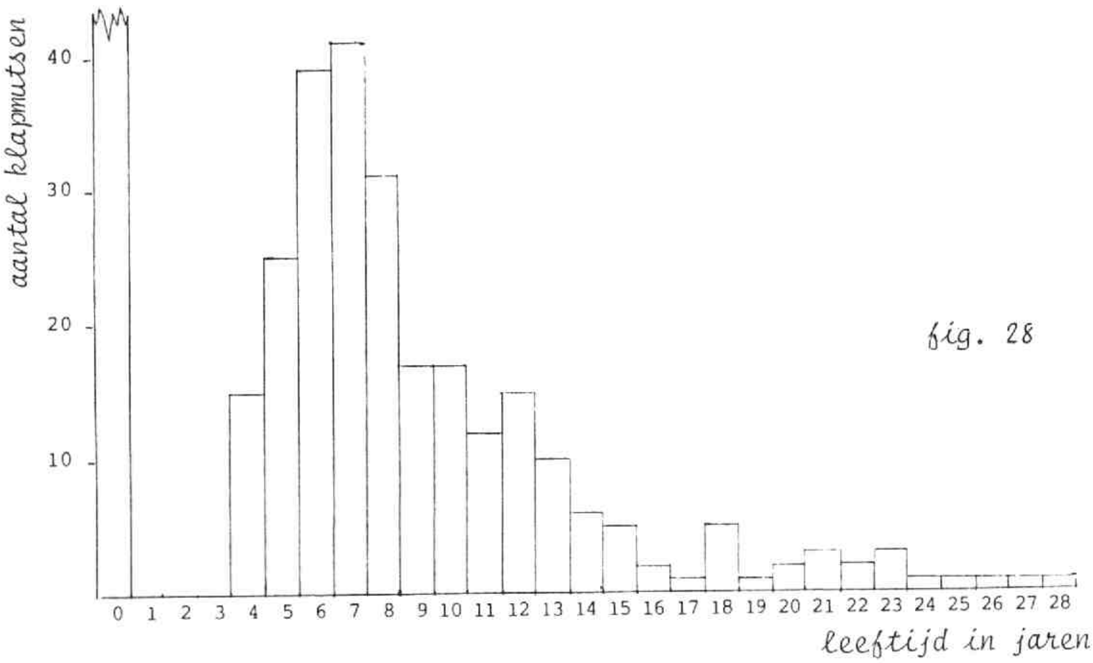


fig. 28

Het aantal gevangen pasgeboren puppies wordt niet vermeld. Toch misschien wat schaamtegevoel?

≫ 171. Verklaar het 'gat' aan de linkerkant van het histogram.

> We willen onderzoeken wat de gevolgen zijn van de jacht voor het aantal klapmutsen.
> Daartoe zal de situatie mèt jacht worden vergeleken met de situatie zònder jacht.

Bij zo'n onderzoek zou geprobeerd kunnen worden antwoorden te vinden op de volgende vragen:

- Hoe ontwikkelt zich de omvang van de *totale* populatie? Neemt deze toe of af?
- Wordt de bevolkingsopbouw op den duur stabiel, of in andere woorden: blijft na verloop van een aantal jaren de vorm van de bevolkingspyramide (in procenten) hetzelfde?
- Hoe is het aandeel van de verschillende leeftijdsklassen in de loop der jaren?

De volgende feiten kunnen daarbij helpen:

Er zijn, uit vroegere onderzoekingen, overlevingskansen bekend. Deze percentages houden nog géén rekening met de jacht, maar uitsluitend met dood door ziekte en natuurlijke vijanden buiten de mens. Voor puppies is dit 85% om de eenjarige leeftijd te halen, voor de overige is 89,4% de kans om een jaar ouder te worden. Voor de klasse 11 jaar-en-ouder geldt dat eveneens 89,4% in de klasse *blijft*. De hogere sterfte bij de puppies is voornamelijk te wijten aan darminfecties. Bovendien worden nogal wat puppies onder de voet gelopen door de mannen wanneer deze om de vrouwen vechten.

De reproductie in de verschillende leeftijdsklassen, dus de geboorten uit ouders van de verschillende leeftijden, is hieronder weergegeven in aantallen puppies per 1000 ouders.

klasse	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11+
‰	0	0	53	240	249	352	369	418	422	422	430	438

≫ 172. Stel de Lesliematrix-zonder-jacht op. Verklaar waarom het getal rechtsonder nu géén nul is.

We gaan uit van een aanvangspopulatie met in èlke leeftijdsklasse evenveel dieren.
Als je deze beginpopulatie èn de Lesliematrix in de computer invoert, rekent die de populatie na 1, 2, 3, ... jaar uit.
Dat kan op twee manieren:

1. In absolute aantallen; d.w.z. het aantal dieren per leeftijdsklasse wordt voor alle klassen uitgerekend.
2. In percentages; d.w.z. het percentage dat een klasse van de totale populatie uitmaakt wordt van jaar tot jaar uitgerekend.

Als je wilt onderzoeken of de populatie toe- of afneemt heb je de absolute aantallen nodig.
Als je wilt onderzoeken of de populatie een stabiele opbouw krijgt, heb je de percentages nodig.

≫ 173. Onderzoek of - uitgaande van een aanvangspopulatie met in èlke klasse evenveel dieren - of de totale bevolking toe- of afneemt en zo ja, met welk percentage per jaar (ongeveer).

≫ 174. Onderzoek of - uitgaande van een aanvangspopulatie met in èlke klasse evenveel dieren - of de bevolkingsopbouw in percentages na verloop van tijd stabiel wordt.
Noteer deze stabiele opbouw en teken de bevolkingspyramide daarbij. Verdeel daarbij de klasse 11-en-ouder naar eigen inzicht over de klassen 11 tot en met 28.

≫ 175. Is het realistisch om uit te gaan van een bevolkingsopbouw met in elke leeftijdsklasse evenveel dieren?

≫ 176. Maak een schatting van een meer realistische opbouw van de bevolking, uitgaande van het histogram op pag. 72 en de resultaten van opgave ≫ 174.

≫ 177. Wat voor verschil zal er zijn als je i.p.v. met een aanvangspopulatie zoals in de opgaven ≫ 173 en ≫ 174 start met een aanvangspopulatie zoals in opgave ≫ 176?
Voorspel met name hoe lang het zal duren voor de stabiele opbouw wordt bereikt.

We hebben nu het totale aantal onderzocht als geen jacht gemaakt wordt op de klapmutsen en er voldoende voedsel en ruimte aanwezig is. Nu de gevolgen van de jacht.
Geschat wordt dat van alle dieren van 3 jaar en ouder zoveel wordt afgeschoten, dat de overlevingskans daalt tot 81,1%. We houden dit percentage ook aan voor de hoogste klasse.
Van de pasgeboren puppies wordt helaas aanzienlijk meer gevangen, naar schatting 28,6%. Dit betekent dat de reproductie van alle leeftijdsklassen met dit percentage verminderd moeten worden. (Aftrekking).

≫ 178. Stel deze nieuwe matrix-met-jacht op en verwerk die in absolute aantallen en in procenten met een aanvangspopulatie zoals in opgave ≫ 176. Ook nu weer voor zoveel jaren achtereen dat de bevolkingspyramide in procenten gelijk blijft.

Noteer dit resultaat en maak hiervan een histogram. Verdeel de klasse 11-en-ouder naar eigen inzicht over de klassen 11 tot en met 28.

≫ 179. Bij opgave ≫ 178 heb je de nieuwe matrix gevonden door de reproductie van alle leeftijdsklassen met 28,6% te verminderen. Is er ook een andere methode om tot de 'matrix-met-jacht' te komen?

≫ 180. Hoe ziet het er met de overlevingskansen van de klapmuts op lange termijn uit als de jacht ongewijzigd doorgaat?

Het is in de praktijk uitgesloten dat er helemaal niet gejaagd wordt op klapmutsen, want de lokale bevolking ziet z'n boterham ook graag belegd. Vandaar dat enige tussenoplossingen zijn bestudeerd:

A - *géén* jacht op puppies, *wèl* op ouderen (vanaf 3 jaar).
B - de jacht op puppies wordt *gehalveerd*, op ouderen *ongewijzigd* jagen.
C - de jacht op puppies wordt *gehalveerd*, op ouderen wordt *niet* gejaagd.

Van deze situatie worden Lesliematrices gemaakt, in de computer ingevoerd en bekeken wat de gevolgen zijn na *tien* jaar. Op de blz. 74 zie je de gevolgen.
Linksboven op dat blad zie je de huidige situatie benaderd (bevolking op T = 0) als histogram.
Rechts zie je de toestand na 10 jaar in de vijf verschillende gevallen. Bekijk die vijf gevallen goed.

≫ 181. Probeer aan de hand van de twee gegeven matrices de matrix op te stellen voor geval A en geval B.

≫ 182. Alle vijf grafieken op T = 10 lijken veel op elkaar, al neemt de grootte van de totale populatie van boven naar beneden toe. Toch is er een opvallend verschil tussen de grafieken A en C. Wat is dat verschil en tracht dit verschil te verklaren.

BEVOLKING T = 0

0	***************
1	*************
2	************
3	***********
4	*********
5	*******
6	******
7	*****
8	****
9	***
10	***
11+	************

BEVOLKING T = 10

0	**************
1	************
2	***********
3	**********
4	********
5	*******
6	*****
7	****
8	****
9	***
10	**
11	***********

MÉT JACHT

0	********************
1	****************
2	**************
3	*************
4	**********
5	********
6	*******
7	*****
8	****
9	****
10	**
11	***********

B

JACHT OP 3-JARIGEN EN OUDER, ALSMEDE EEN HALVERING VAN HET AANTAL TE JAGEN PUPPIES

0	**************************
1	*********************
2	******************
3	****************
4	*************
5	**********
6	********
7	******
8	*****
9	****
10	**
11	***********

A

ALLEEN JACHT OP 3-JARIGEN EN OUDER, DUS *NIET* OP PUPPIES

0	**********************************
1	***************************
2	**********************
3	*******************
4	****************
5	*************
6	***********
7	*********
8	********
9	******
10	*****
11	****************************

C

ALLEEN JACHT OP HELFT VAN AANTAL PUPPIES

0	**
1	**********************************
2	****************************
3	***********************
4	*******************
5	****************
6	*************
7	***********
8	*********
9	********
10	*****
11	****************************

ZONDER JACHT