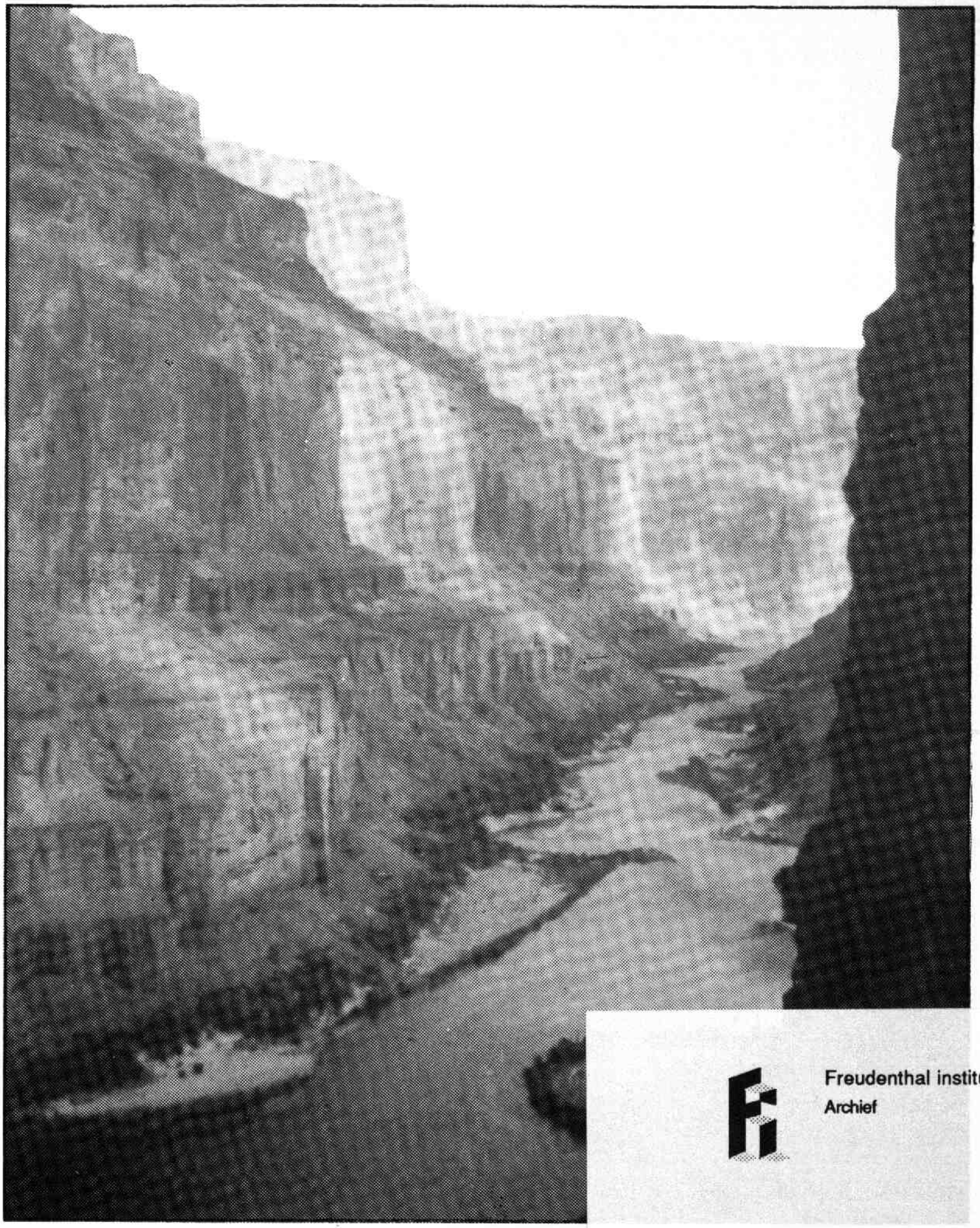
Functies van 2 variabelen

https://hdl.handle.net/1874/10255



FUNCTIES VAN 2 VARIABELEN

FUNCTIES VAN 2 VARIABELEN

OW&OC

Tiberdreef 4 - 3561 GG Utrecht

FUNCTIES VAN TWEE VARIABELEN

Een produktie ten behoeve van de experimenten in het kader van de Herverkaveling Eindexamenprogramma's Wiskunde I en II V.W.O.

Samenstelling: Jan de Lange Jzn
Martin Kindt

Vormgeving: Ellen Hanepen

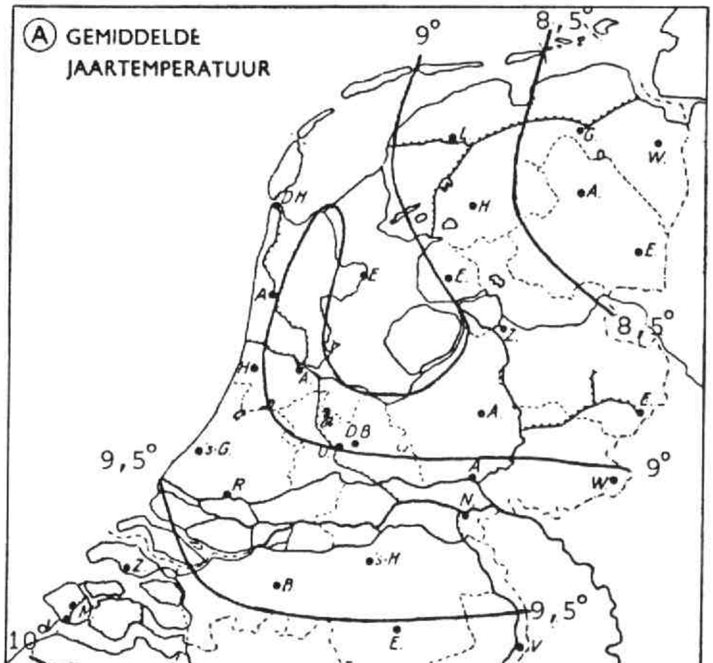
gebaseerd op de I.O.W.O.-uitgave:
Funkties van twee variabelen 1978.

Utrecht, februari 1983.

INHOUDSOPGAVE

1

ISOLIJNEN



Isothermen zijn lijnen die punten met gelijke temperatuur met elkaar verbinden.

Op bovenstaand kaartje - te vinden in bijna iedere atlas - zie je isothermen getekend die de gemiddelde jaartemperatuur (1960) weergeven.

≫ 1. Verklaar het grillige verloop van de 9° isotherm.

≫ 2. Op dit moment is de inpoldering van het IJsselmeer al weer verder gevorderd. Hoe verwacht je dat de 9° isotherm nù zal lopen?

≫ 3. Waar is het - gemiddeld - het koudst in Nederland?
En waar het warmst?

In je atlas vind je nog meer *iso-lijnen* b.v.:

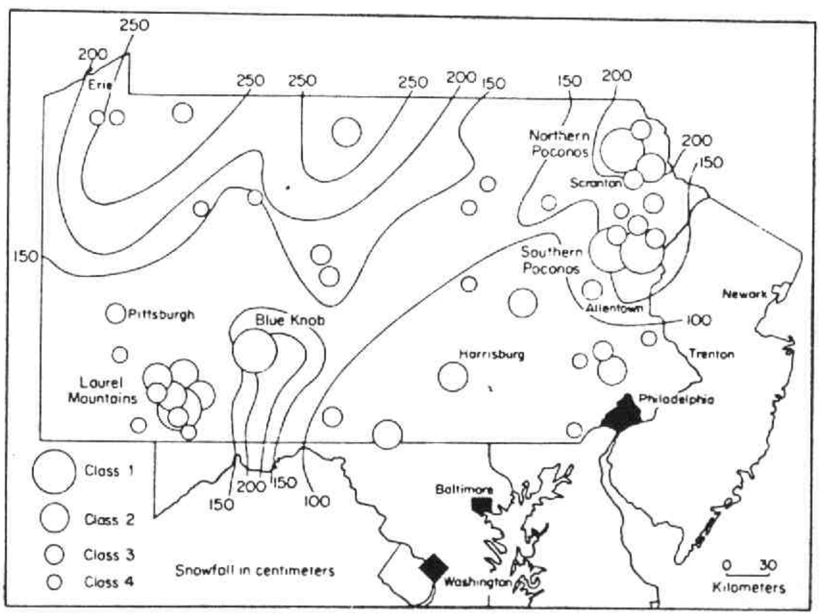
Isobaren, die punten van gelijke luchtdruk verbinden;
(Iso)hoogtelijnen, die punten met gelijke hoogte verbinden en lijnen die punten verbinden met gelijke
- neerslag
- aantal dagen sneeuw per jaar
- aantal zomerse dagen per jaar
- gemiddelde windsnelheid
- aantal dagen vorst.

Ook in de krant vind je vaak weerkaartjes waarop soms één of meer van bovengenoemde lijnen voorkomen.
In plaats van *iso-lijnen* wordt ook wel de term *isohypsen* gebruikt, zoals in dit voorbeeld:

Schema der gelaats-isohypsen.

uit: GAADE'S TEKEN EN SCHILDERBOEK , 1961.

Enkele andere voorbeelden volgen nu:



PENNSYLVANIA; U.S.A.

Isoquanten zijn lijnen die punten met een gelijke hoeveelheid (kwantiteit) verbinden, in dit geval: hoeveelheid sneeuw per jaar.

Op bovenstaand kaartje zie je tevens de wintersportcentra, ingedeeld in klassen van belangrijkheid, getekend.

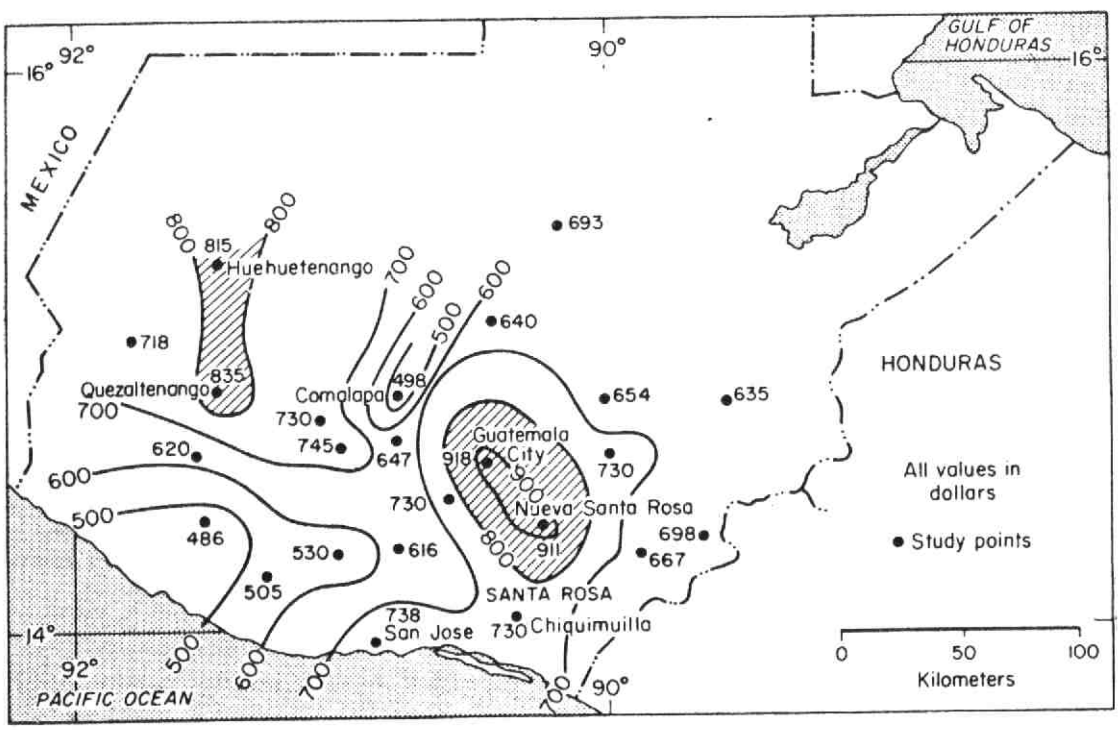
≫ 4. Is er enig verband tussen de gebieden waar meer dan 150 cm sneeuw valt en de ligging van de centra?

Isokostenlijnen verbinden punten met gelijke kosten, in dit geval de kosten van levensonderhoud per familie per jaar in Guatemala (in US $).

≫ 5. Zoek de hoofdstad Guatemala City op. Het 'dure' gebied is gearceerd.
Wanneer is iets duur, dus wat is de ondergrens van het dure gebied?

≫ 6. Arceer zelf het 'goedkope' gebied. Neem als bovengrens 600 US $.
Teken zelf de isokostenlijn behorend bij US $ 730, afgaande op de gegevens op de kaart.
Is die lijn erg nauwkeurig bepaald?

≫ 7. Als je weet dat alle andere lijnen op dit kaartje gebaseerd zijn op de getalletjes bij de stippen, wat kun je dan in het algemeen over de nauwkeurigheid opmerken?



Isopreferentielijnen zouden ook *isovoorkeurlijnen* genoemd kunnen worden. Op dit kaartje van Ghana staat aangegeven hoe de voorkeur ligt van de ambtenaren voor een betrekking. Er staan geen getallen bij, maar je ziet wel *high* (sterke voorkeur) en *low* staan.

≫ 8. Arceer het gebied met de grootste voorkeur en arceer eveneens het gebied met de kleinste voorkeur.

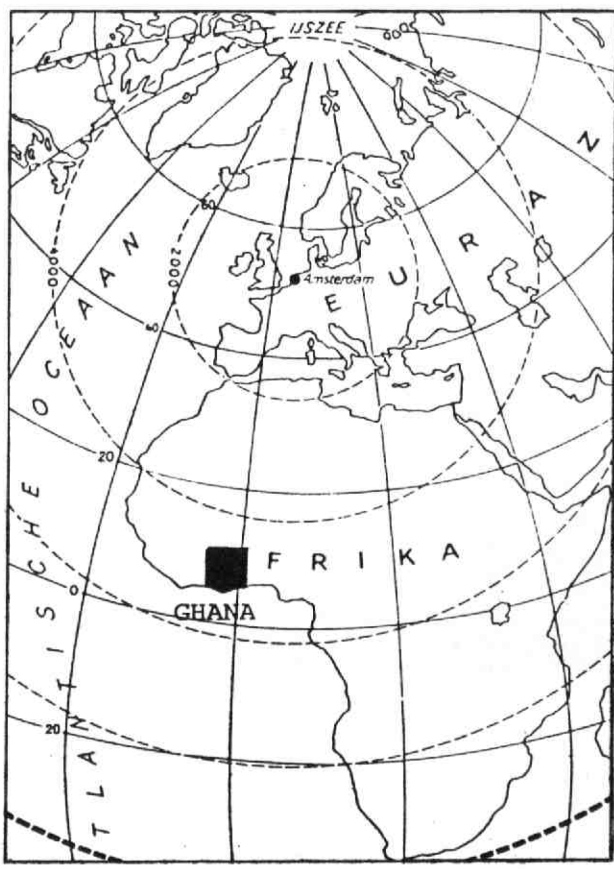
a. Probeer een verklaring te geven voor het feit dat de lijnen zo lopen.

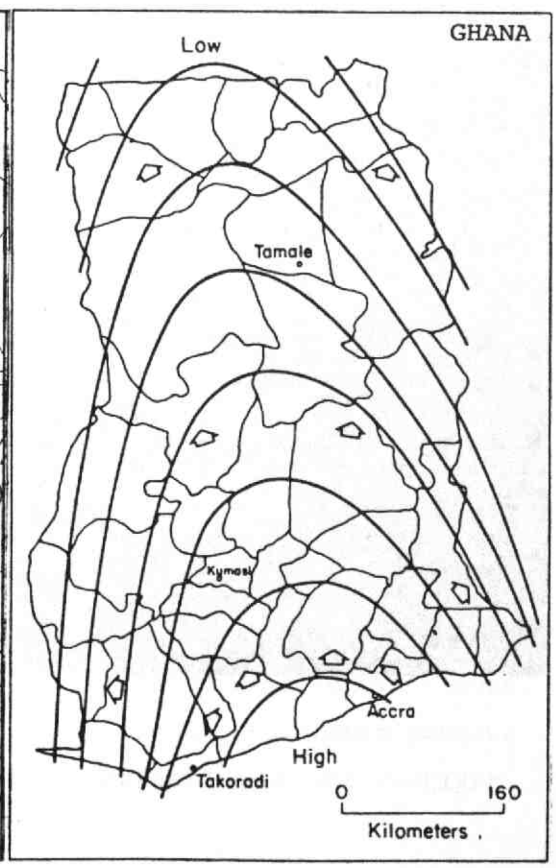
b. Denk je dat de lijnen erg nauwkeurig zijn?

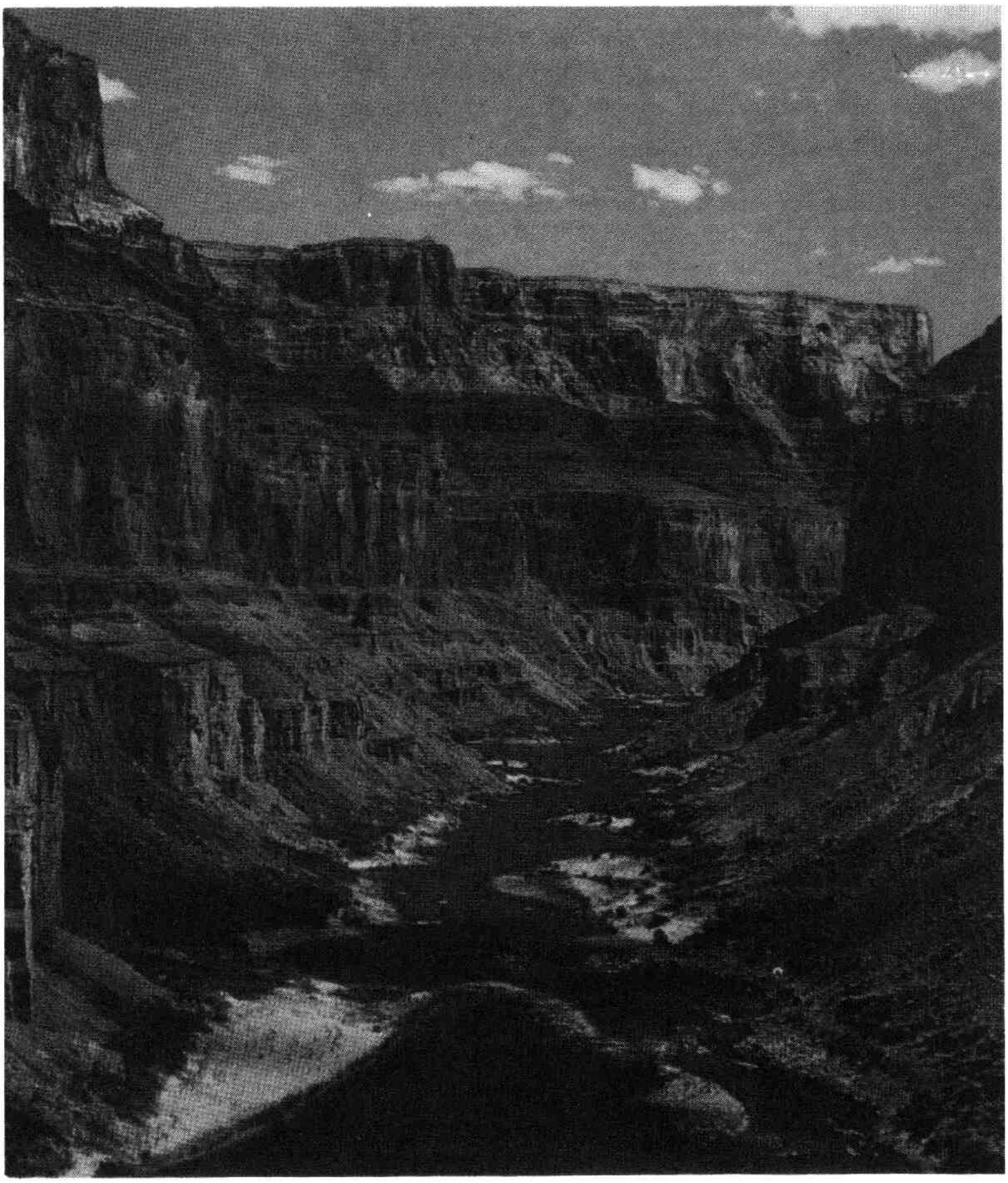
c. Van wat voor soort functies lijken de lijnen grafieken?

≫ 9. Op het linker kaartje tref je nog een ander soort iso-lijnen aan, namelijk *iso-afstandslijnen*.

Op welke afstand van Amsterdam ligt Ghana ongeveer?

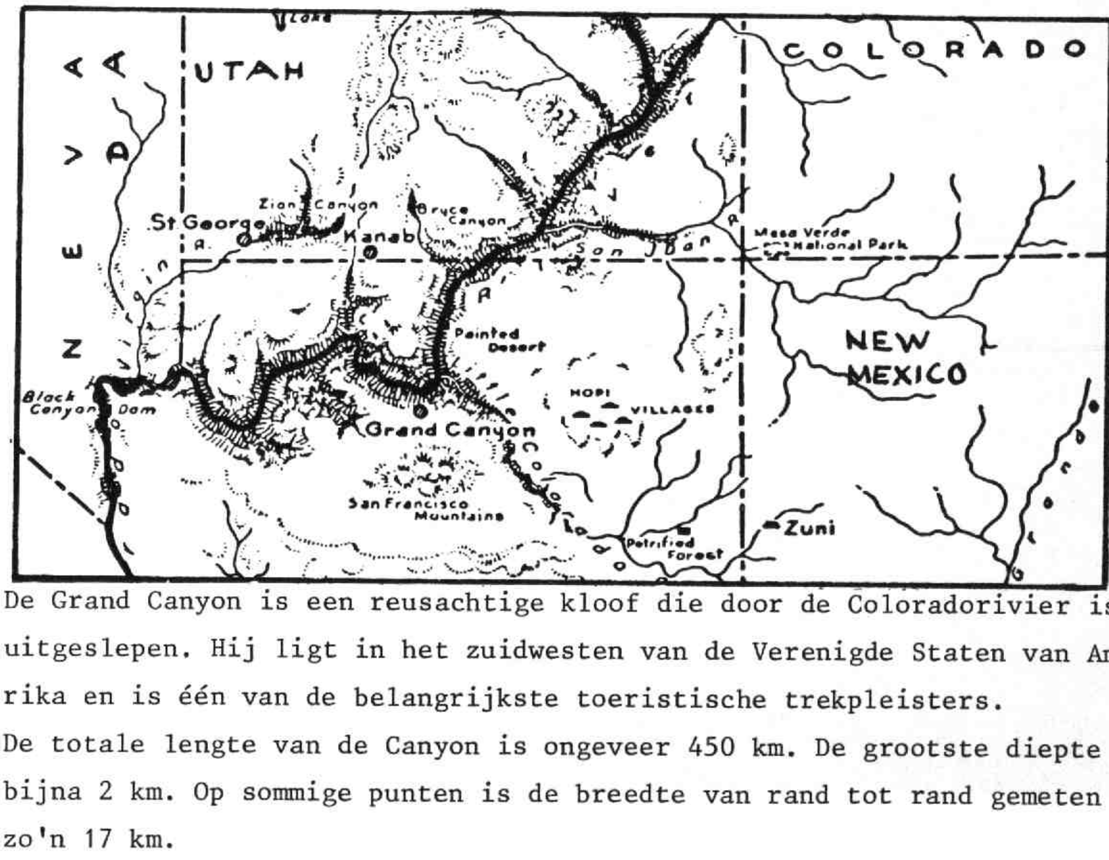






2

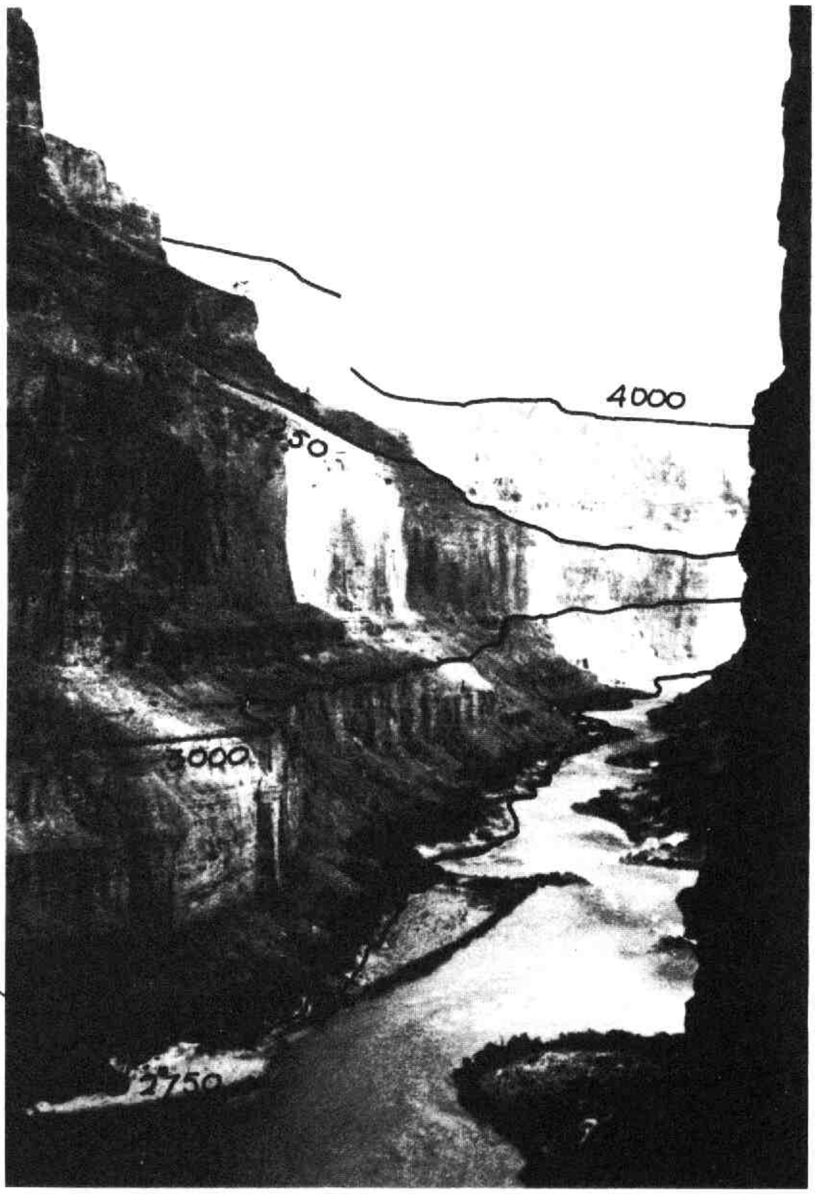
GRAND CANYON



De Grand Canyon is een reusachtige kloof die door de Coloradorivier is uitgeslepen. Hij ligt in het zuidwesten van de Verenigde Staten van Amerika en is één van de belangrijkste toeristische trekpleisters.
De totale lengte van de Canyon is ongeveer 450 km. De grootste diepte is bijna 2 km. Op sommige punten is de breedte van rand tot rand gemeten zo'n 17 km.

De rivier en de Canyon hebben ook veel avonturiers aangetrokken: vooral vroeger was het levensgevaarlijk om de rivier af te zakken. Pas in 1869 is dat voor het eerst gelukt door majoor Powell. Veel mensen zijn vóór en na die tijd verdronken bij hun poging de Coloradorivier te overwinnen. Tegenwoordig is het een stuk veiliger omdat er enkele stuwdammen gebouwd zijn vóór en ná de Canyon, waardoor de stroomversnellingen wat rustiger zijn geworden. Alhoewel....

p

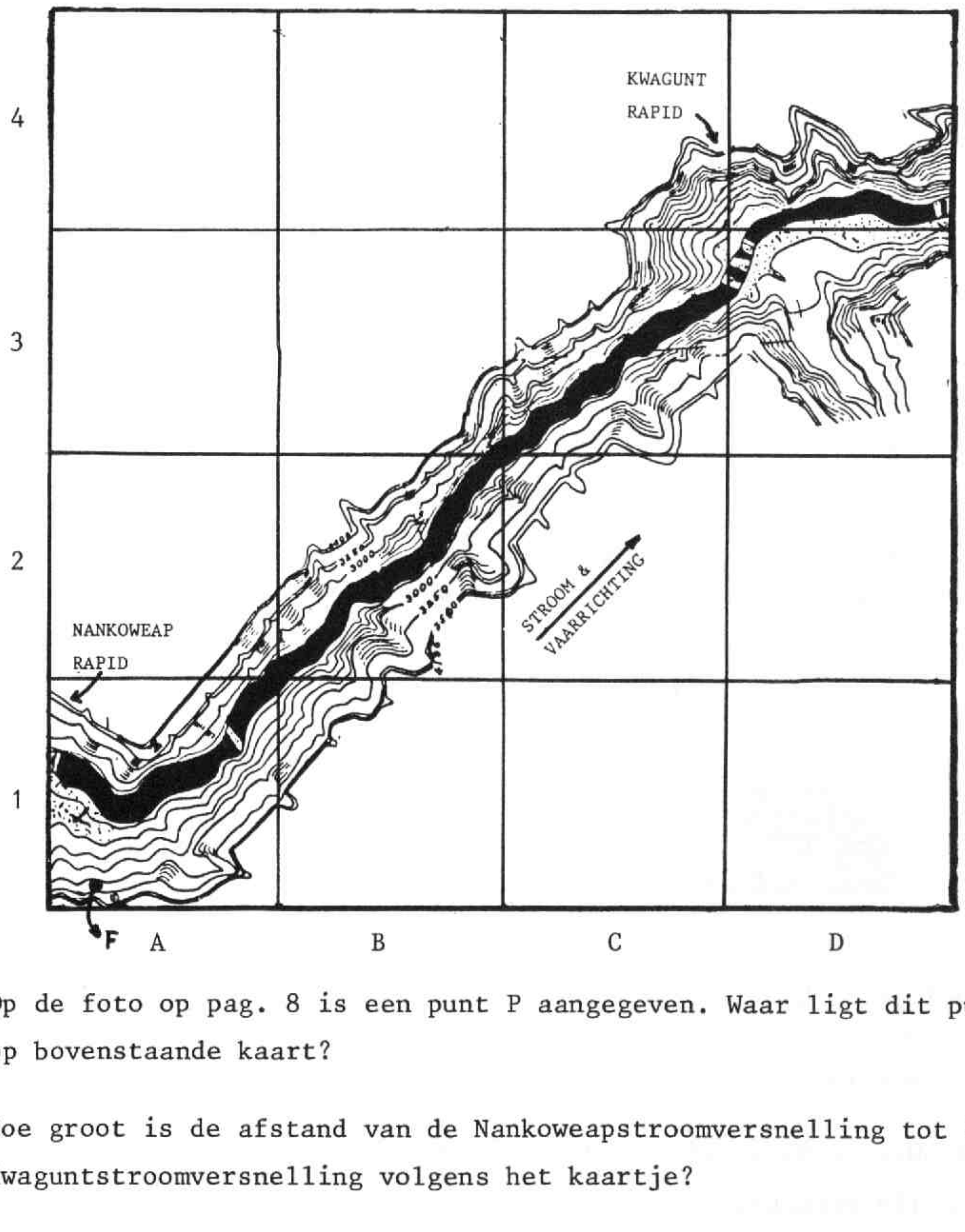


De Canyon kent maar weinig rechte stukken.
De omslagfoto toont zo'n recht stuk en wel het stuk van de Nankoweapstroomversnelling tot de Kwaguntstroomversnelling (achteraan op de foto). In totaal zie je ongeveer vijf kilometer van de rivier.

Om aan te geven hoe hoog de Canyon hier is zijn op de foto lijnen getekend die punten op gelijke hoogte met elkaar verbinden. Zo zie je dat de bovenrand hier op de foto ongeveer 4000 voet (1 voet $\approx$ 30,5 cm) boven zeeniveau ligt. Ook de hoogtelijnen op niveau 2750-, 3000- en 3250 voet zijn aangegeven.
Verder zie je een punt aan de oever aangegeven met de letter P.

Speciaal voor mensen die per bootje de rivier willen afzakken zijn er gedetailleerde kaarten van de rivier gemaakt. Hieronder zie je zo'n stukje kaart. En wel dàt stuk dat betrekking heeft op de foto. Op de kaart is ook aangegeven vanaf welk punt de foto is genomen. (F in hokje A1).

Schaal: 1 : 40.000



≫ 10. Op de foto op pag. 8 is een punt P aangegeven. Waar ligt dit punt op bovenstaande kaart?

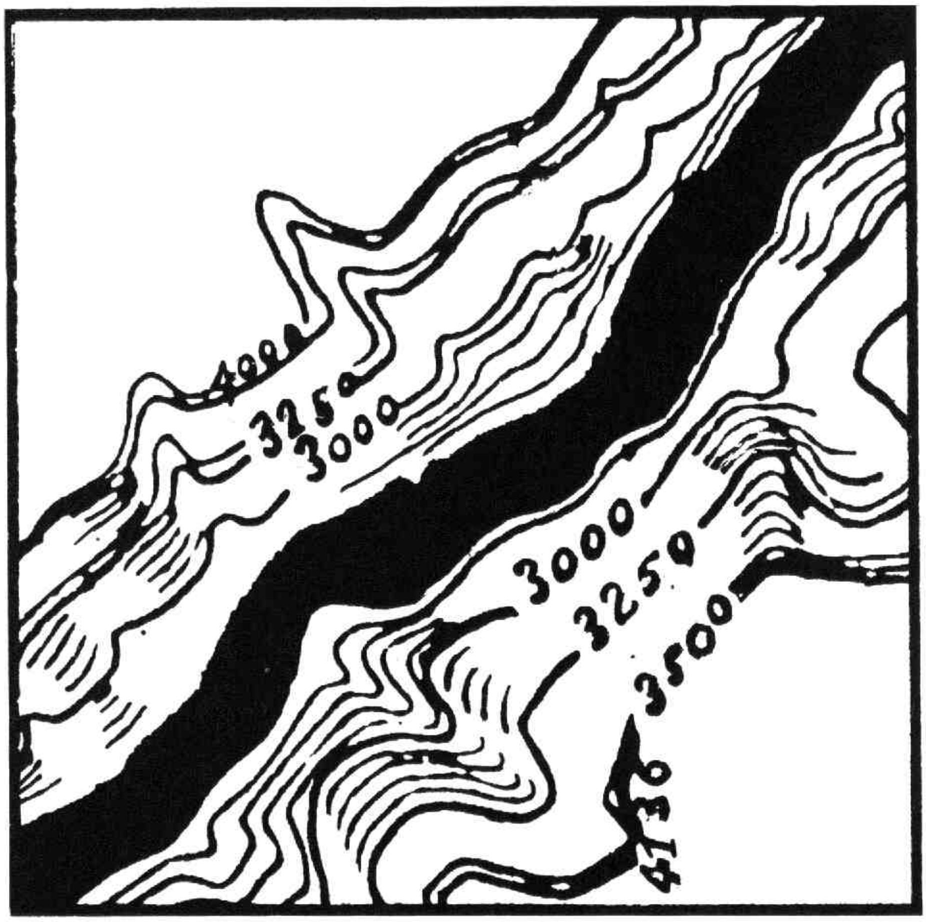
≫ 11. Hoe groot is de afstand van de Nankoweapstroomversnelling tot de Kwaguntstroomversnelling volgens het kaartje?

≫ 12. Schat de breedte van de rivier met behulp van het kaartje (in meters).

≫ 13. Schat de breedte van de rivier met behulp van de foto. Verklaar eventueel verschil met het antwoord op ≫ 12.

≫ 14. Schat de hoogte *boven de rivier* waarop de foto is genomen.

We bekijken een kleiner stukje van de Canyon. En wel het deel binnen het vak van blokje B2.
We vergroten dat tot het dezelfde afmetingen heeft als ons oorspronkelijke kaartje.



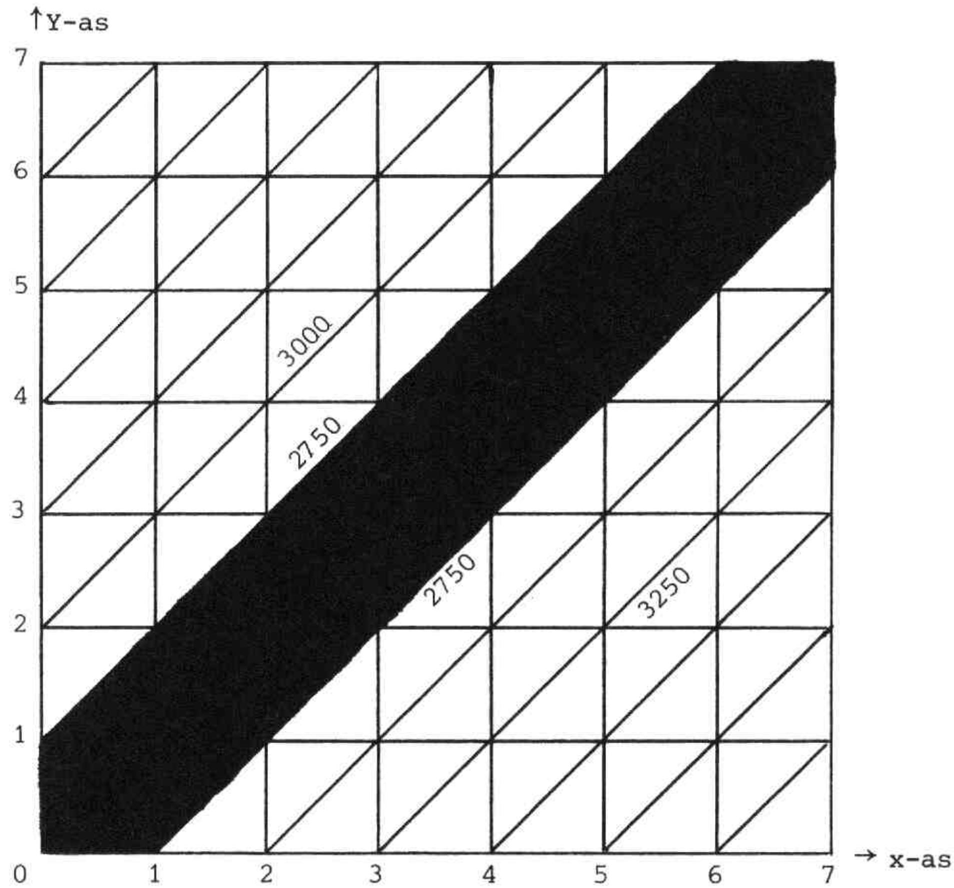
Je ziet de hoogtelijnen nu wat duidelijker.
Vergelijk de hoogtelijnen op dit kaartje met die op de foto.

≫ 15. Wat is de *schaal* van dit laatste kaartje?

≫ 16. Wat is de hoogte van het hoogste punt dat op dit kaartje staat? (In meters).

≫ 17. Welke conclusie is er te trekken uit het feit dat de hoogtelijnen van 3500 voet en 4000 voet zo dicht bij elkaar lopen?

Onderstaand kaartje toont enige gelijkenis met het vorige kaartje van de Canyon. Vergelijk beide kaartjes en beantwoord de volgende vragen.



≫ 18. Wat is er met de hoogtelijnen uit het 'echte' kaartje gebeurd in het nieuwe kaartje?

≫ 19. Zet in het nieuwe kaartje bij alle hoogtelijnen de hoogte (in voet). Hou rekening met de regelmatigheid van het kaartje.

≫ 20. Kijk nog eens naar ≫17. Hoe zit dat in het "vereenvoudigde" kaartje?

≫ 21. Geef een schatting van de diepte van de Coloradorivier aan de hand van dit vereenvoudigde kaartje.

≫ 22. Wat zijn de voor- en nadelen van zo'n vereenvoudigd kaartje?

≫ 23. Als de randen van het kaartje meedoen, wat is dan het hoogste punt van het kaartje?

≫ 24. Wat is de hoogte van het punt met coördinaten (4,2)?
Schrijf dit op als $h(4,2)$ = ...

≫ 25. Bepaal $h(2,4)$; $h(1,6)$; $h(6,1)$; $h(5,5)$.
Wat kun je zeggen van $h(a,b)$ en $h(b,a)$?
Hoe kun je dat aan de hand van het kaartje duidelijk maken?

De hoogte van een punt op de kaart is een functie van zijn plaats.

Of:

Bij ieder punt (a,b) van het kaartje hoort een (functie)waarde $h(a,b)$, namelijk de hoogte van dat punt boven zeeniveau.

Of:

(punt op de kaart) $\xrightarrow{h}$ (hoogte van dat punt boven zeeniveau).

≫ 26. Wat is de hoogte behorend bij (3,3)?
Welke andere punten hebben ook die hoogte? Welk verband (of formule) geldt voor al dergelijke punten?

≫ 27. Teken in een OXY-stelsel alle punten die als functiewaarden 2750 hebben. Dit zijn dus de *originelen* van 2750.
Kun je voor deze originelen een formule vinden?

≫ 28. (1,6) is een punt van de lijn $y = x + 5$ (zie kaartje).

a. Alle punten die op die lijn liggen hebben dezelfde functiewaarde h. Welke functiewaarde is dat?

b. Welke andere punten hebben diezelfde functiewaarde?

≫ 29. Welke punten zijn het origineel van 4250?

Het *domein* van de functie is bij ons kaartje:
de verzameling (x,y) met $0 \leqq x \leqq 7$ en $0 \leqq y \leqq 7$.
Dit wordt ook wel geschreven als:
$[0,7] \times [0,7]$.

≫ 30. Wat is het *bereik* van de (hoogte)functie h?

≫31. En wat is het bereik als het domein $[2,5] \times [2,5]$ is?

≫32. Maak op het kaartje een tocht langs de lijn $x = 3$.
Geef een beschrijving van die tocht.

SAMENVATTING

De functie h:

$$(a,b) \xrightarrow{h} \text{hoogte } (a,b)$$

voegt aan ieder punt van de kaart de hoogte van dat punt toe (boven zeeniveau).

Of: de hoogte is een functie van de plaats.

Voorbeeld: $(4,2) \xrightarrow{h} 3000$ *of* $h(4,2) = 3000$.

Onder het domein verstaan we alle punten waarvoor een functiewaarde gedefinieerd is. In het geval van het kaartje is dat:

$$D = [0,7] \times [0,7]$$

Onder het volledig origineel van (de functiewaarde) 3000 verstaan we ALLE punten die 3000 als functiewaarde hebben.

In het geval van het kaartje zijn dat alle punten van de lijnen:

$$y = x - 2 \quad \text{en} \quad y = x + 2$$

(voorzover ze binnen het domein liggen).

Dit is ook te schrijven als:

$$|x - y| = 2$$

≫ 33. Maak de volgende tabel af die behoort bij het vereenvoudigde kaartje van de Canyon:

$|x - y| = 0 \quad \rightarrow \quad z = 2500$

$|x - y| = 1 \quad \rightarrow \quad z = ...$

$|x - y| = 2 \quad \rightarrow \quad z = ...$

$|x - y| = 3 \quad \rightarrow \quad z = ...$

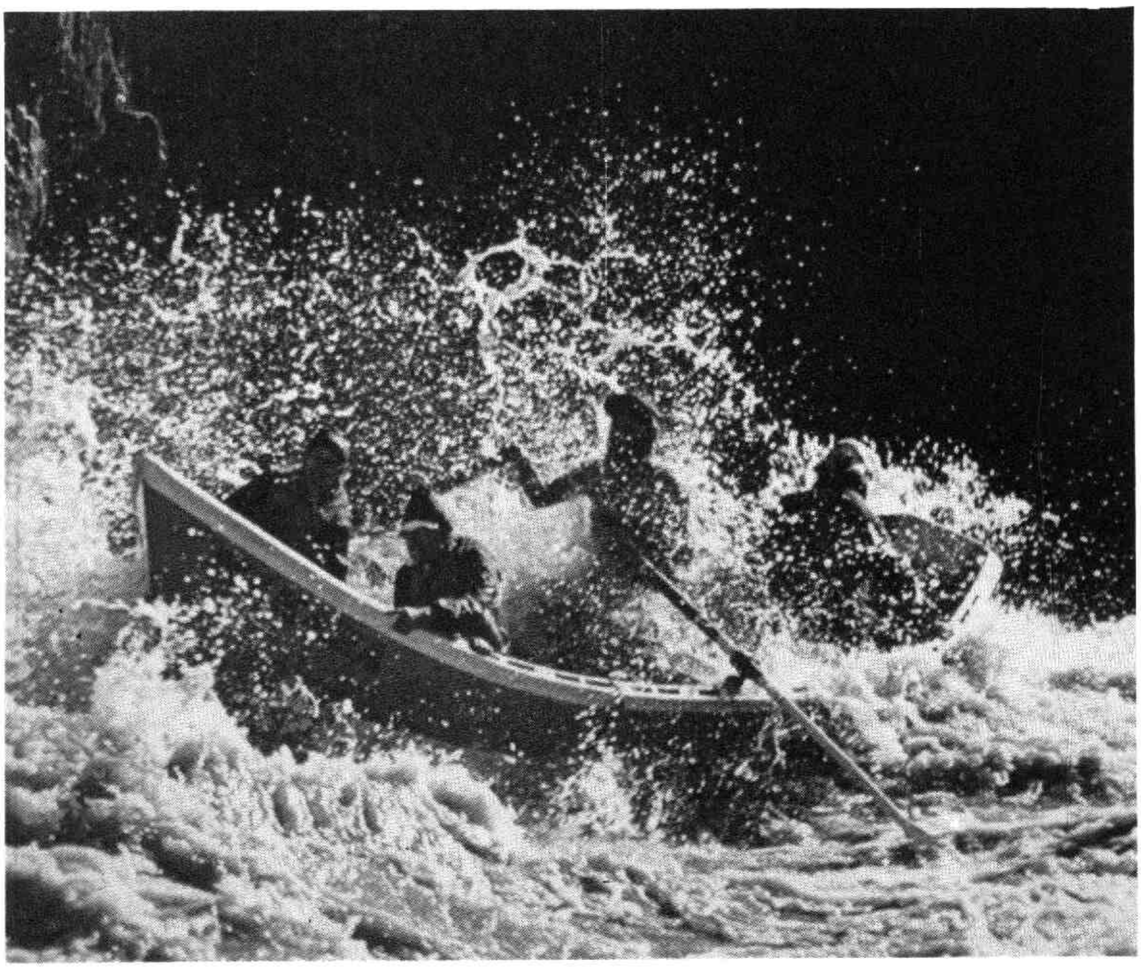
$|x - y| = 4 \quad \rightarrow \quad z = ...$

....

≫ 34. Stel dat het domein $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ is en dat het verband uit ≫33 zich voortzet. Vul aan:

$|x - y| = 73 \quad \rightarrow \quad z = ...$

Zie je kans een functievoorschrift te vinden voor functie h?



Een dory (speciaal soort roeiboot) in één van de ruim 100 stroomversnellingen

3

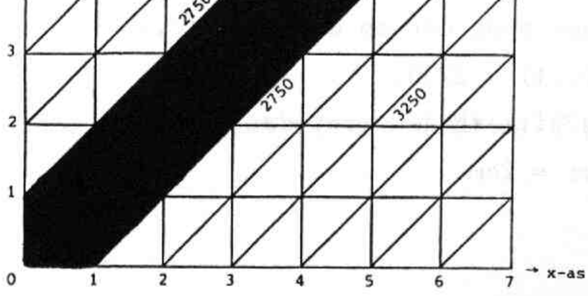
EEN RUIMTELIJK MODEL

De foto op de omslag van dit boekje is een platte tweedimensionale weergave van een driedimensionaal iets: de Canyon.
Iedereen ziet ook "diepte" in zo'n foto: je weet wat dichtbij is en wat ver af.

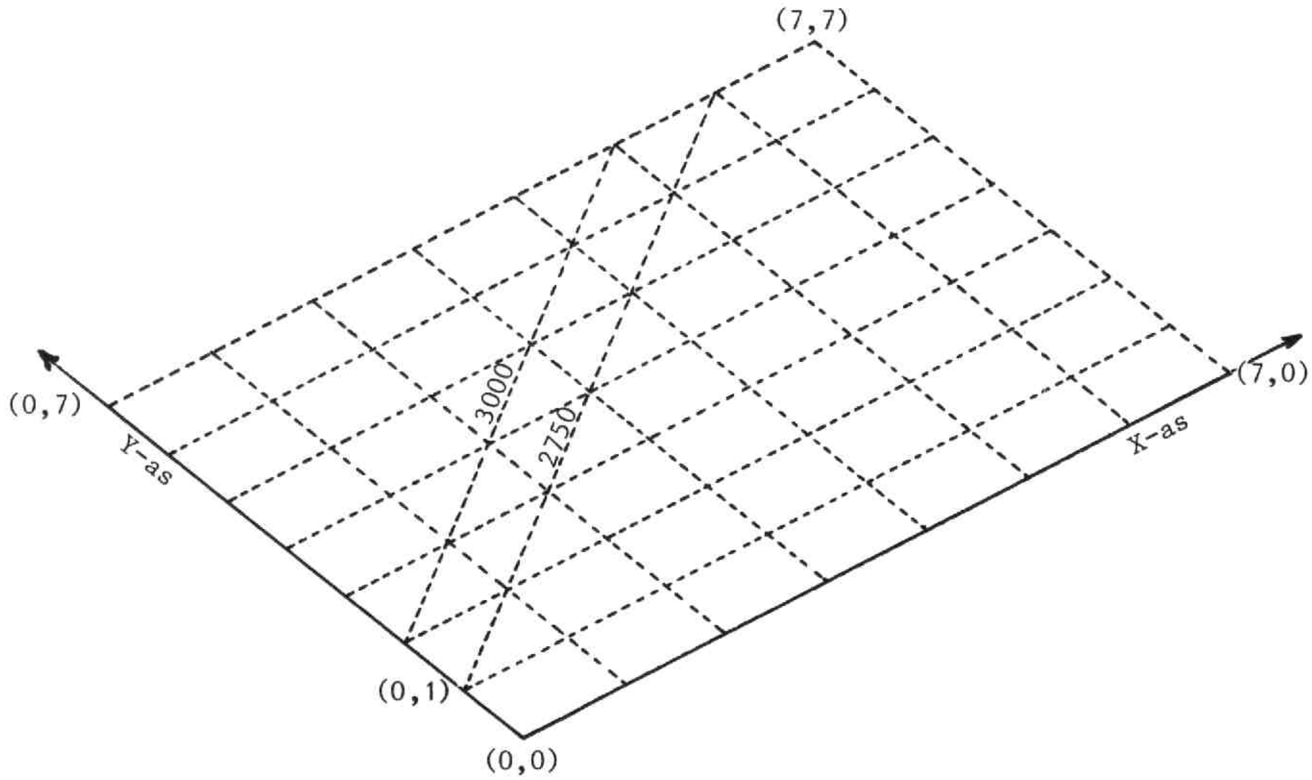
De foto is op te vatten als een ruimtelijke weergave van het kaartje op blz. 9.

In dit hoofdstukje zullen we proberen zelf een ruimtelijke tekening te maken van het *vereenvoudigde* kaartje op blz. 11.
En aangezien de twee kaartjes wel wat van elkaar weg hebben, zullen ook de te maken ruimtelijke tekening en de foto enigszins vergelijkbaar moeten zijn.
Dat tekenen is geen eenvoudige zaak.

Hieronder nogmaals het kaartje ("plattegrond"):



We vliegen nu als het ware recht boven de Canyon. Om een ruimtelijke tekening te maken vliegen we een eindje weg van ons gebied, zodat we er 'schuin' tegenaan kijken.
De plattegrond is dan b.v. zó voor te stellen:

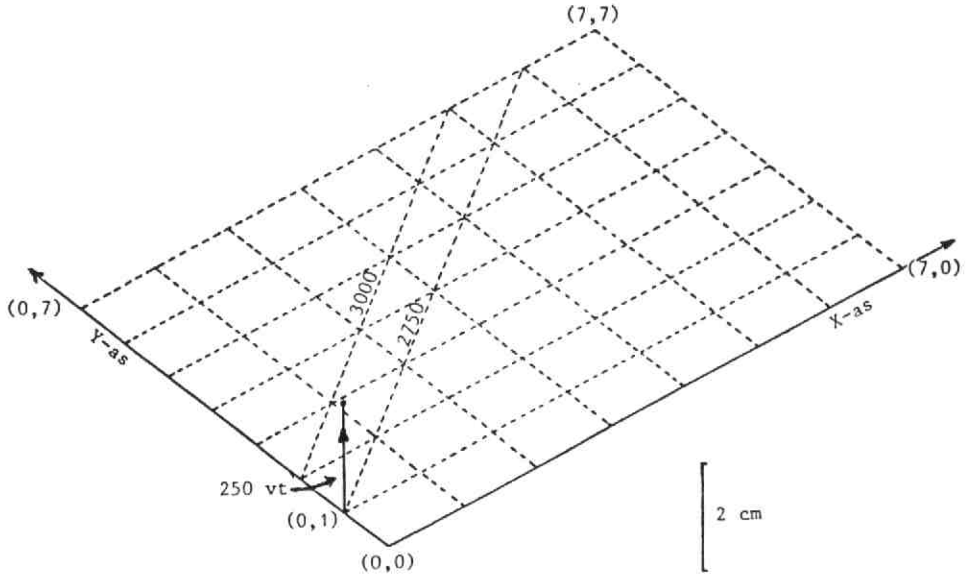


Het kaartje is niet volledig. Slechts twee hoogtelijnen zijn getekend: één van 2750 vt en één van 3000 vt.

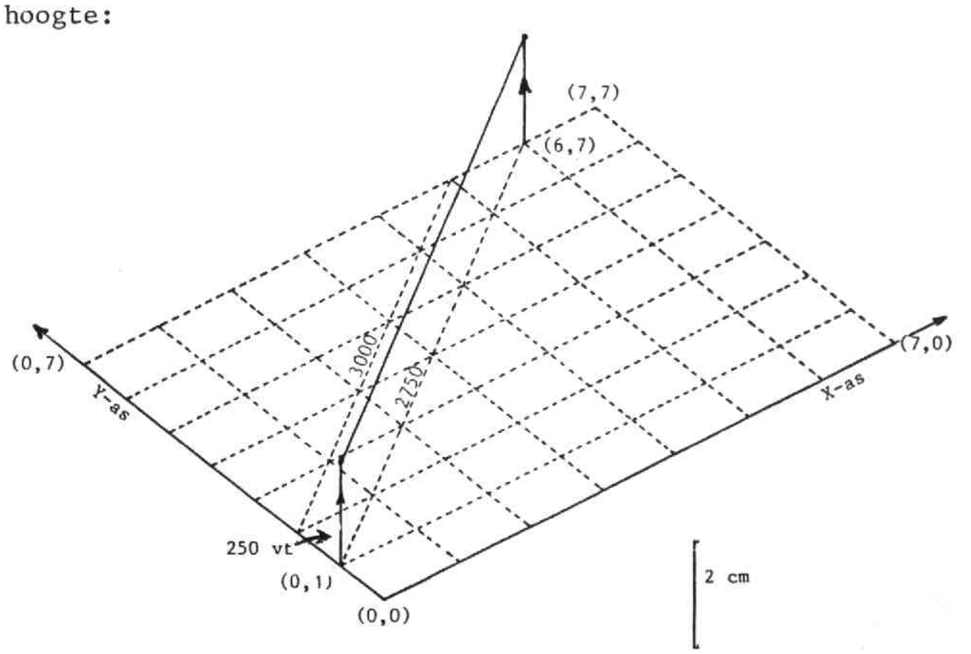
≫ 35. Teken alle andere hoogtelijnen ook in het kaartje (in je schrift).

Vanaf dit grondvlak gaan we nu omhoog werken en de Canyon 'reconstrueren'. Bekend is dat de bodem van de rivier op 2500 vt ligt. Dat is de lijn van (0,0) naar (7,7). Die ligt al op de goede hoogte. Alle andere punten liggen hoger. B.v. het punt dat op de kaart (0,1) is.
Daarvoor geldt $h(0,1) = 2750$.
Vergeleken met de rivierbodem moet dat punt dus 250 vt omhoog. We nemen als schaal: 250 vt = 2cm.

Dit kan dan als volgt worden getekend:



In principe zou je alle punten zo 'op kunnen tillen'.
Handig is dat niet. Je weet dat alle punten tussen (0,1) en (6,7) als functiewaarde 2750 hebben. Dus tillen we die hele hoogtelijn naar de goede hoogte:



≫ 36. Doe hetzelfde voor alle punten tussen (0,2) en (5,7).

≫ 37. Daarna voor alle punten tussen (0,3) en (4,7)
en (0,4) en (3,7).

≫ 38. Teken nu de linkerzijwand van het Canyon-model.

≫ 39. Teken ook de rechterzijwand en daarna de rivier.

SAMENVATTING

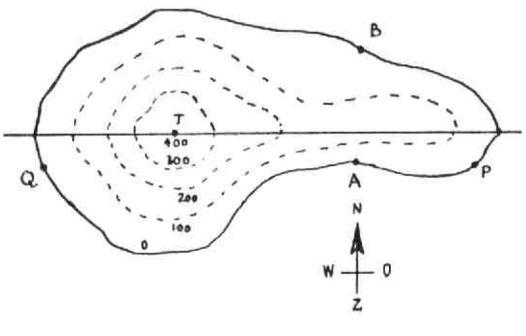
Een methode om een ruimtelijke tekening te maken aan de hand van een hoogtelijnenkaartje is:

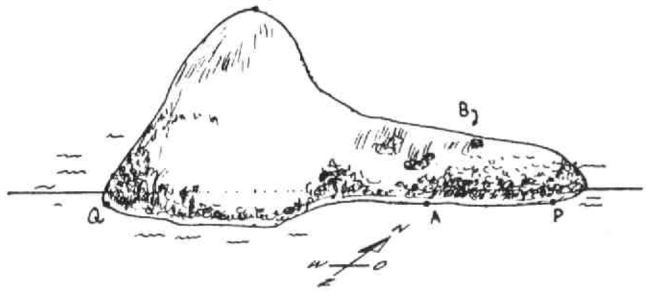
- *Eerst wordt het kaartje driedimensionaal getekend (je kijkt schuin tegen het kaartje aan).*
- *Daarna richt je in 'ieder' punt een hoogtelijntje op met de juiste lengte. Als het even kan til je een hoogtelijn in zijn geheel op.*

4

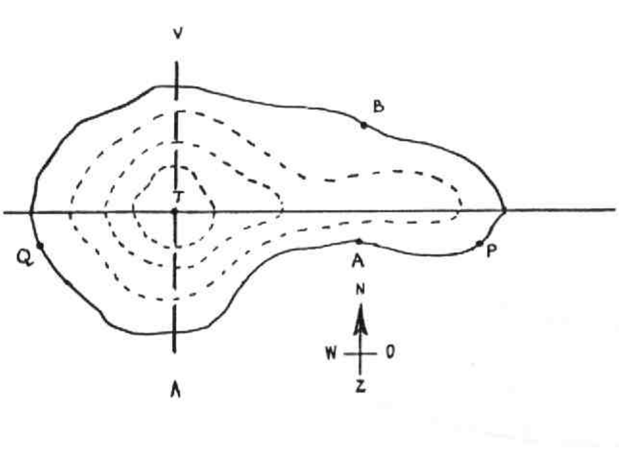
HOOGTELIJNEN

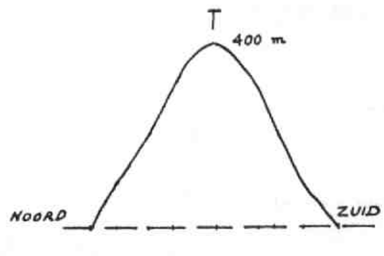
Hieronder zie je een kaart en een tekening van een eiland:



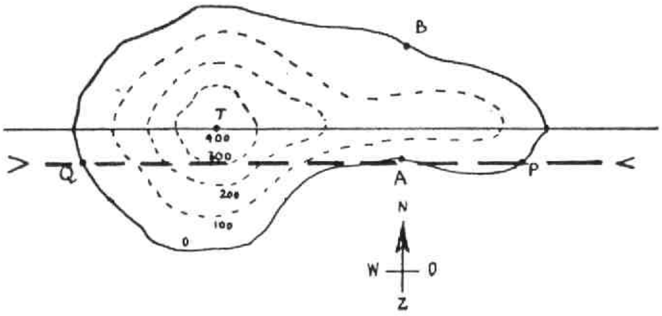


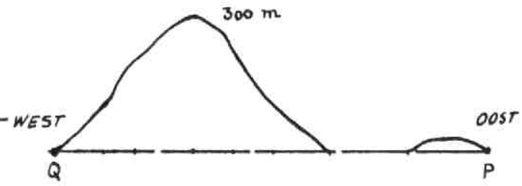
In de aardrijkskunde, maar ook in de wiskunde, wordt vaak met doorsneden gewerkt. Zo kunnen we een doorsnede van het eiland nemen in N.Z.-richting door de top (loodrecht op het grondvlak).
We krijgen dan:





Of wat lastiger, de doorsnede (loodrecht op het grondvlak) die door P en Q gaat.

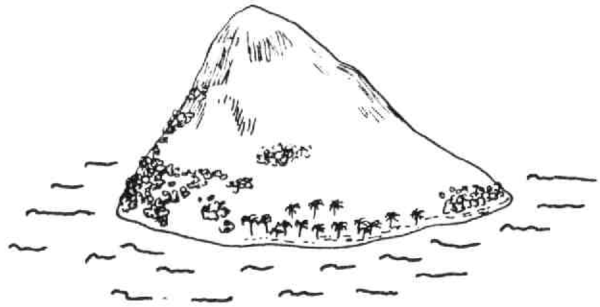




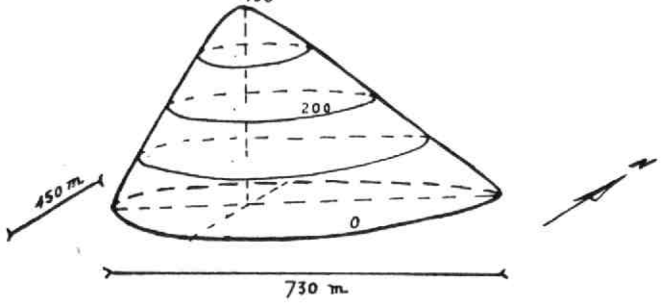
≫40. Teken zelf de doorsnede (loodrecht op het grondvlak) door de top T in W.O.-richting.

≫41. Ook die door A en B.

Een paradijselijk eilandje in de Stille Oceaan, 403 m hoog, in vogelvlucht vanuit het zuidoosten.

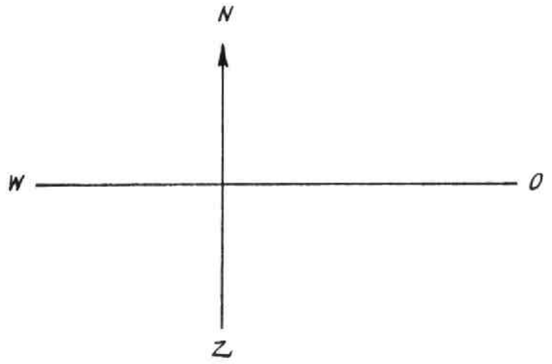


Van dat eilandje kunnen we een model tekenen:



Je ziet de kompasrichtingen, enkele hoogtelijnen en de afmetingen van het eiland op zeeniveau.

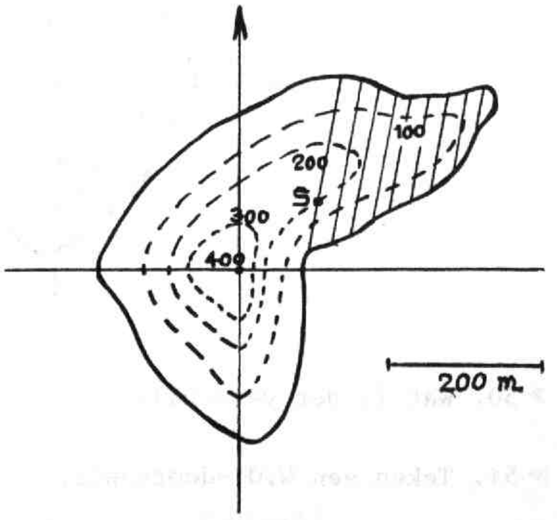
≫ 42. Maak een kaart ('plattegrond') van het eiland met daarin ook de hoogtelijnen:



≫ 43. Hoe kun je aan het kaartje zien dat het eiland aan de westkant erg steil is?

≫ 44. Maak een wandeling beginnend aan het meest westelijk gelegen punt via de top naar het meest oostelijk gelegen punt. Beschrijf en teken die wandeling door een W.O.-doorsnede te tekenen.

Een Heer van stand koopt het gearceerde stuk grond op het eiland hiernaast. Hij bouwt zijn huis op het hoogste punt van zijn stukje.



≫ 45. Waar?

Hij wil een rechte weg naar beneden laten aanleggen die zo *vlak* mogelijk loopt.

≫ 46. Teken hoe die weg zal lopen.

De zojuist getekende weg loopt nogal steil.

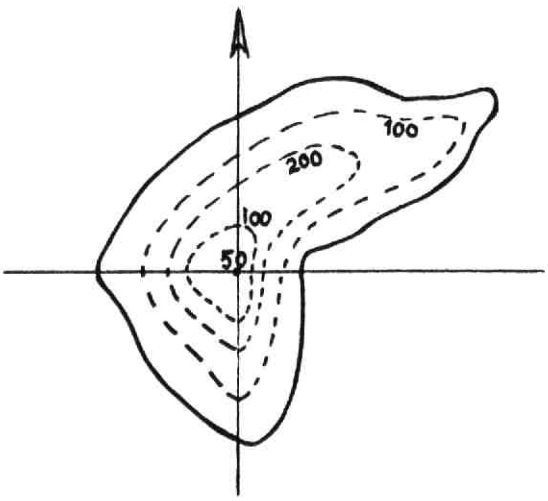
≫ 47. Hoe steil gemiddeld (in %)?

≫ 48. Teken een betere weg.

Een heer van stand mag dan rijk zijn, dat houdt niet automatisch in dat hij handig is. Bij een bezoek aan de top verliest bij het - wankel-evenwicht en rolt de berg af.

≫ 49. Waar ongeveer zal hij te water raken?
Als hij reeds bij punt S gevallen zou zijn, waar zou hij dan in het water terecht gekomen zijn?

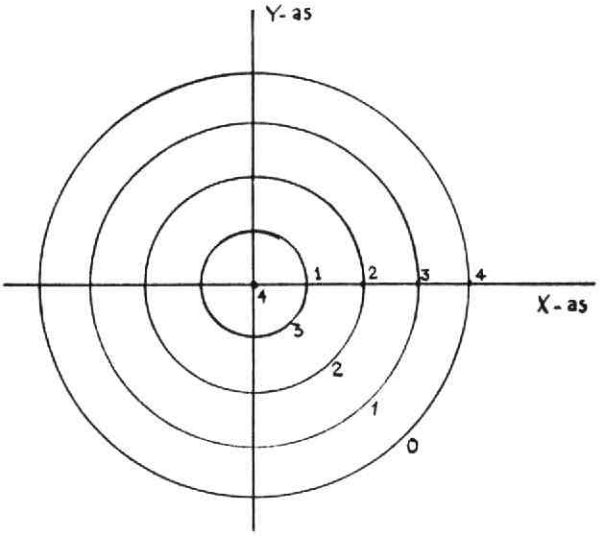
Een ander eiland lijkt op de kaart erg veel op ons eiland:



≫ 50. Wat is het verschil?

≫ 51. Teken een W.O.-doorsnede.

Hieronder zie je een hoogtelijnenkaart getekend van een wiskundige 'berg'.



≫ 52. Hoe wordt deze figuur genoemd?

Bij ieder punt behoort weer een functiewaarde. Zo is $h(0,0) = 4$. En $h(2,0) = 2$.

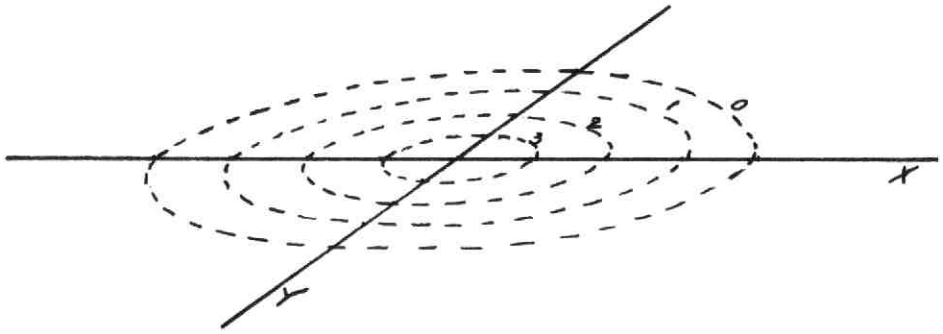
≫ 53. Welke punten hebben 2 als functiewaarde, of, wat is het origineel van 2 in vergelijkingvorm?

≫ 54. Wat is het origineel van 3?

≫ 55. Maak de tabel af:

$$x^2 + y^2 = 0 \rightarrow z = 4$$
$$x^2 + y^2 = 1 \rightarrow z = 3$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

≫ 56. Hoe luidt het functievoorschrift voor deze functie?



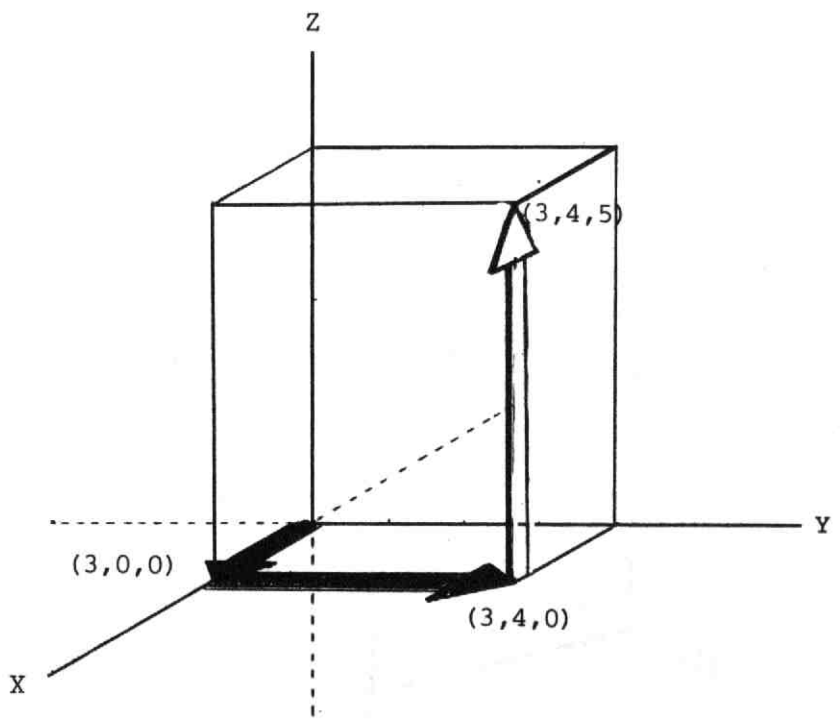
≫ 57. Hierboven zie je het kaartje driedimensionaal getekend. Teken de ruimtelijke figuur op dezelfde manier als bij de Canyon.

5

COÖRDINATEN IN DE RUIMTE

Bij de eilanden uit het vorige hoofdstuk werd in feite gewerkt met drie coördinaatassen: de N.Z.-as, de O.W.-as en de *h*-as.

Ieder punt in zo'n driedimensionaal assenstelsel wordt bepaald door drie coördinaten.
Zo vind je het punt (3,4,5) als volgt:



* 3 eenheden in de richting van de eerste (of X-as) te wandelen; daarna
* 4 eenheden in de richting van de tweede (of Y-as) te wandelen; daarna
* 5 eenheden in de richting van de derde (of Z-as).

≫ 58. Schrijf de coördinaten op van de overige hoekpunten van het getekende blok.

≫ 59. Neem het blok over in je schrift.
Arceer het *boven*vlak van het blok. Waarom geldt voor *ieder punt* van dat bovenvlak dat $z = 5$?

≫ 60. Voor welk vlak (van het blok) geldt $z = 0$?

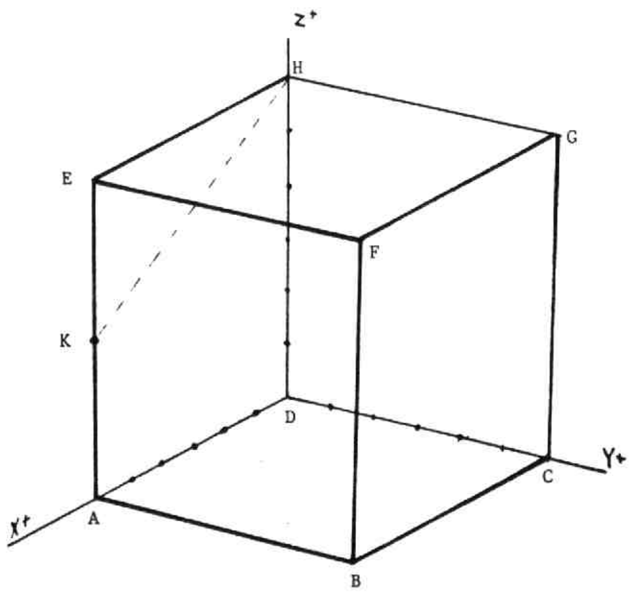
≫ 61. Teken in het blok alle punten waarvoor geldt $z = 2\frac{1}{2}$.

≫ 62. Verklaar waarom het rechterzijvlak van het blok wordt bepaald door $y = 4$.

≫ 63. Wat is de vergelijking die behoort bij het *linker* zijvlak?

≫ 64. Welke vergelijking behoort bij het voorvlak?

≫ 65. En welke bij het achtervlak?



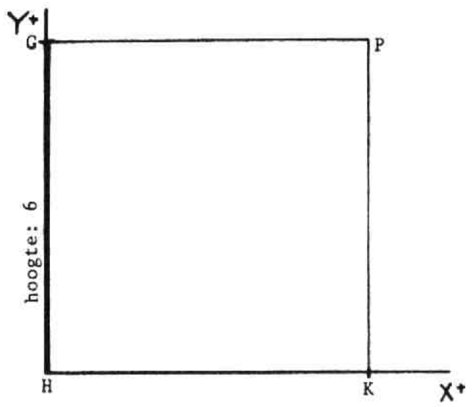
Deze kubus is getekend in een driedimensionaal assenstelsel. De ribben van de kubus zijn 6 lang.

≫ 66. Geef de coördinaten van de hoekpunten van de kubus.

≫ 67. Teken het punt K(6,0,3) in de kubus. Trek HK door tot deze de X-as snijdt. Noem dat snijpunt L. Wat zijn de coördinaten van L?

≫ 68. Trek de lijn door G (in het vlak $y = 6$) die evenwijdig is aan de lijn HL. Teken het snijpunt met het grondvlak ($z = 0$).
Noem dat punt R.
Wat zijn de coördinaten van R? Waar en waarom snijdt GR de ribbe BF? Noem dat punt P.

≫ 69. Arceer het vlak HKPG in de kubus.



Hier zie je een 'kaartje' van het vlak HKPG uit de vorige kubus, met daarin de hoogtelijn bij hoogte 6.

≫ 70. Teken de hoogtelijnen op het niveau 3, 4 en 5 in dit 'kaartje'.

De 'hoogtefunctie' die behoort bij dit kaartje is vrij eenvoudig te vinden.
Alle punten waarvoor de X-coördinaat nul is, hebben hoogte 6.

≫ 71. Vul de tabel aan:

$x = 0 \rightarrow z = 6$

$x = 1 \rightarrow z = ..$

$x = 2 \rightarrow ...$

en geef de vergelijking van het vlak.

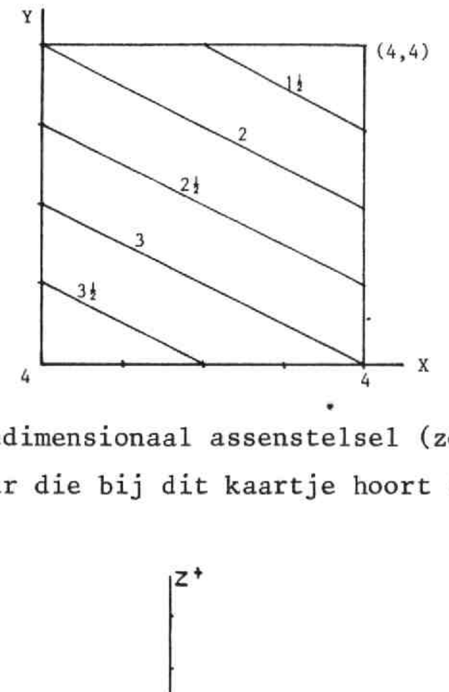
6

FUNCTIES VAN TWEE VARIABELEN

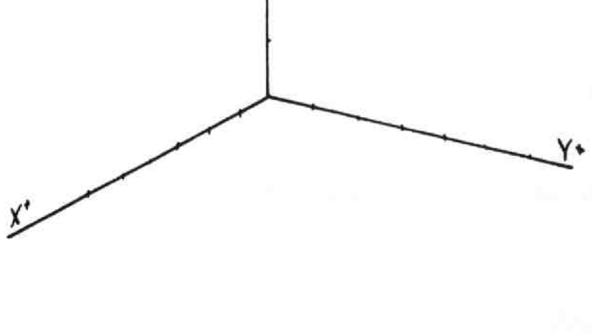
Hieronder zie je een hoogtekaartje van een gebied A.

$A = [0,4] \times [0,4]$

De hoogtefunctie noemen we f.



≫ 72. Teken in een driedimensionaal assenstelsel (zoals hieronder) de ruimtelijke figuur die bij dit kaartje hoort (dus de "ruimtelijke grafiek").



≫ 73. Als een bal wordt neergelegd in het punt met coördinaten (0,0,4) zal deze langs het schuine vlak naar beneden rollen. Geef in het hoogtekaartje aan waar de bal van het vlak af zal rollen. Geef ook in de ruimtelijke grafiek deze baan aan.

≫ 74. Teken in de ruimtelijke tekening ook de hoogtelijn behorend bij niveau 0.

Van de functie f hebben we nu een hoogtelijnenkaartje en een ruimtelijke grafiek.
Kunnen we daarmee nu het functievoorschrift van f vinden?
Dat kan op dezelfde manier als in hoofdstuk 3 en 4 met een tabel:

Uit het kaartje is af te lezen:
het origineel van $z = 4$ is $y = -\frac{1}{2}x$ of $y + \frac{1}{2}x = 0$.

Dus:	$y + \frac{1}{2}x = 0$	$\to$	$z = 4$
Analoog:	$y + \frac{1}{2}x = 2$	$\to$	$z = 3$

≫ 75. Maak de tabel af:

$y + \frac{1}{2}x = 0$	$\to$	$z = 4$
$y + \frac{1}{2}x = 2$	$\to$	$z = 3$
$y + \frac{1}{2}x = 4$	$\to$	$z = ..$
$\vdots$		$\vdots$

≫ 76. Controleer tenslotte dat geldt:

$$y + \tfrac{1}{2}x = c \quad \to \quad z = 4 - \tfrac{1}{2}c.$$

Als je in de betrekking $z = 4 - \frac{1}{2}c$ de c vervangt door $y + \frac{1}{2}x$ vind je z als functie van x en y. Doe dat.

Zoals steeds bij de functies in dit boekje, hebben we te maken met een functie die aan een punt (x,y) een functiewaarde z toevoegt. Die functiewaarde hangt af van zówel x àls y.
We spreken dan van een *functie van twee variabelen*.

Hiernaast de grafiek van een functie van twee variabelen: h.

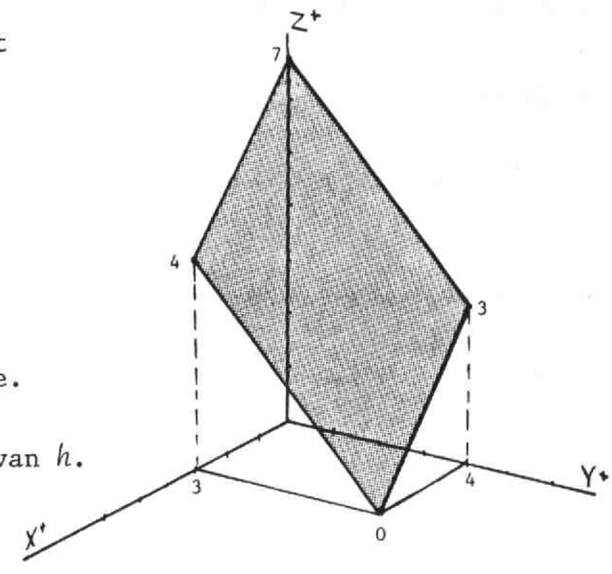
De grafiek is een deel van een plat vlak. Voor de hoekpunten geldt:

$h(3,4) = 0$

$h(3,0) = 4$

$h(0,4) = 3$

$h(0,0) = 7$

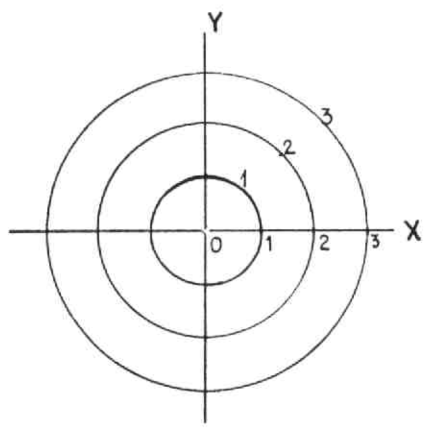


≫ 77. Teken het hoogtelijnenkaartje.

≫ 78. Vind het functievoorschrift van h.

≫ 79. Wat is het domein van h?
En het bereik?

Hieronder een hoogtekaartje met daarin de hoogtelijnen op niveau 1, 2 en 3. (En die op niveau 0).



≫ 80. Teken zelf de hoogtelijnen bij niveau 4 en 5, waarbij je uit mag gaan van een regelmatig opgebouwd figuur.

≫ 81. Hoe heet deze figuur?

≫ 82. Maak de ruimtelijke tekening.

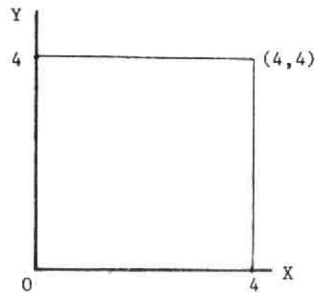
≫ 83. De hoogte z van ieder punt (x,y) is gelijk aan de afstand van dat punt (x,y) tot $(0,0)$.
Kun je het functievoorschrift van z daaruit afleiden?

We hebben nu een aantal malen het functievoorschrift afgeleid uit de grafiek. Hoe gaat het omgekeerd? Dus: hoe kun je een ruimtelijke grafiek tekenen als je het functievoorschrift kent?
Vaak is het handig om *eerst* een hoogtelijnenkaartje te tekenen.

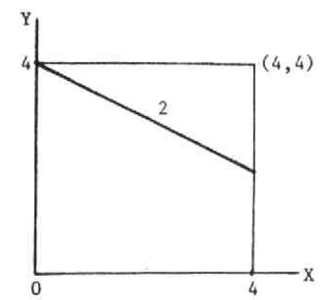
Een voorbeeld:

Teken de ruimtelijke grafiek van $z = 4 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}y$ op het gebied $A = [0,4] \times [0,4]$.

Teken eerst het gebied A:



Dan enkele niveau- of hoogtelijnen naar keuze.
Kies b.v. eerst de hoogtelijn op hoogte 2:
dan geldt: $2 = 4 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}y$
of: $y = -\frac{1}{2}x + 4$.



Deze rechte lijn teken je dan in het gebied A.
Vervolgens teken je nog enkele andere hoogtelijnen. Daarna op de bekende manier de ruimtelijke tekening.

≫ 84. Het gebied D is de driehoek met de hoekpunten (0,0), (3,0) en (0,3); inclusief de randen.
Op dat gebied is de functie gegeven:
$h(x,y) = 3 - x - y$.

a. Teken een niveaulijnenkaartje.

b. Teken de ruimtelijke grafiek van h.

c. Wat is het bereik van h op D?

≫85. Het gebied F wordt gegeven door: $F = [0,6] \times [0,6]$.

Op dat gebied is de functie gegeven:

$f(x,y) = 4 - \frac{1}{2}x - y$.

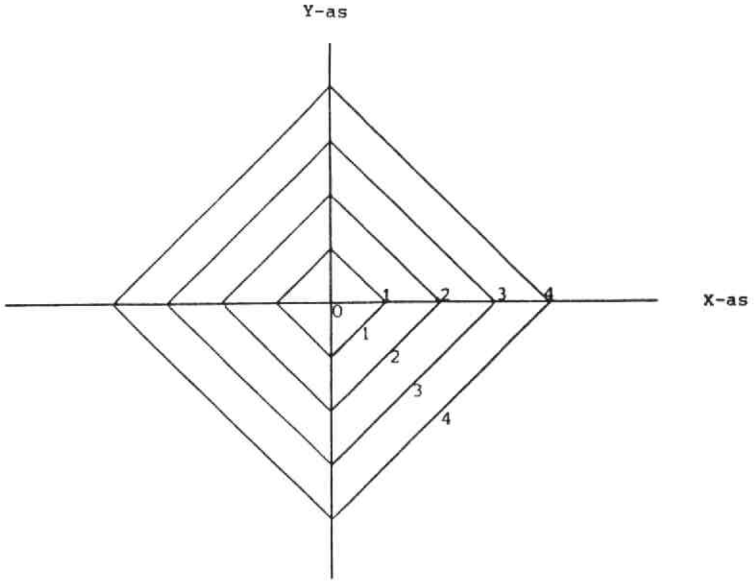
Beantwoord dezelfde vragen als bij de vorige opgave.

≫86. a. Teken in een assenstelsel (driedimensionaal) de piramide met hoekpunten A(4,0,0); B(0,0,0); C(0,4,0); D(4,4,0); E(2,2,4).

b. Teken een doorsnede van deze piramide die gaat door de punten A, C en E.

c. Teken een hoogtelijnenkaartje van de piramide.

d. Kleur in de ruimtelijke figuur alle punten binnen de piramide die op hoogte 1 liggen.

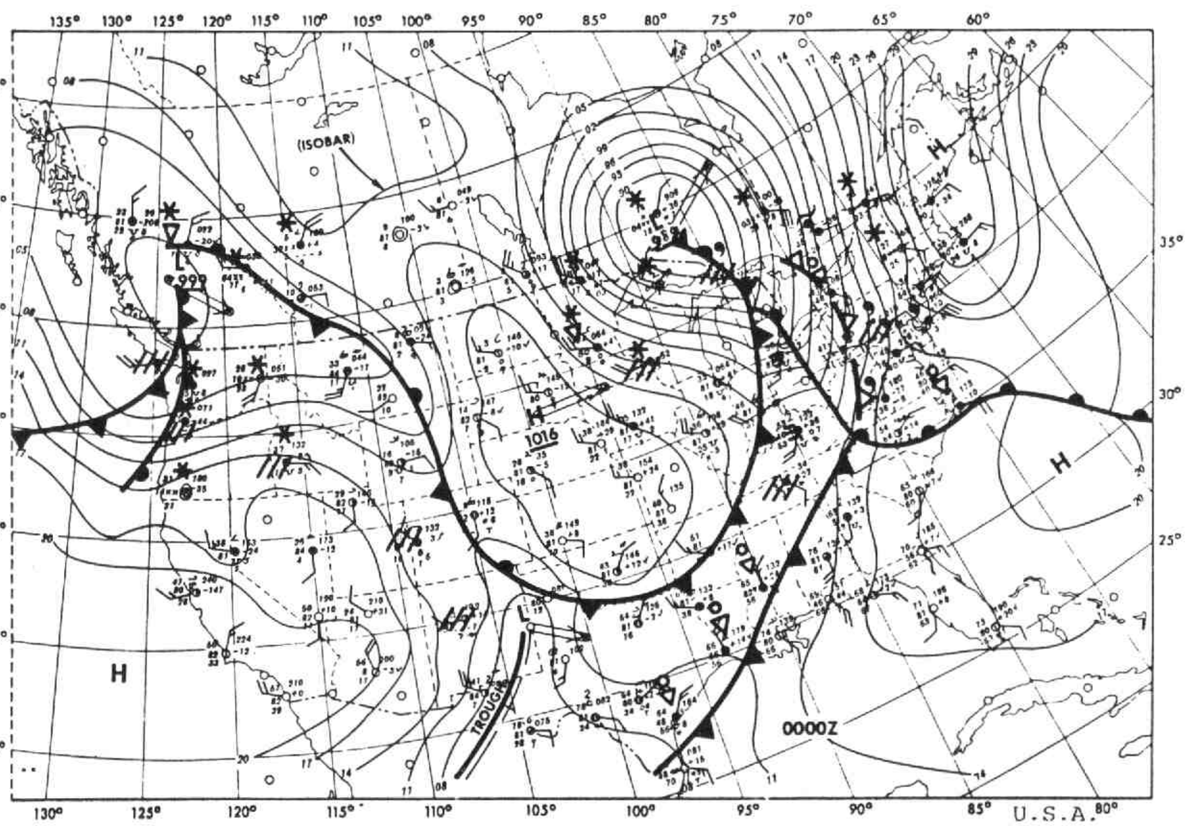


≫87. a. Teken in een driedimensionaal assenstelsel een figuur die past bij het bovenstaande niveaulijnenkaartje.

b. Enig idee van welke functie dit de grafiek zou kunnen zijn?

7

ISOBAREN EN ZADELPUNTEN



Op bovenstaande weerkaart komen ook een soort 'hoogtelijnen' voor, namelijk *isobaren*, d.w.z. lijnen die punten van gelijke druk verbinden (op de 110° W.L.-lijn zie je het woord *isobar* staan).
Als je bij zo'n isobaar *11* ziet staan, wordt er bedoeld: 10*11* millibar. (1013 mb ≈ 76 cm Hg).

≫ 88. a. Vind vier hogedrukgebieden (H).

b. Vind drie lagedrukgebieden (L).

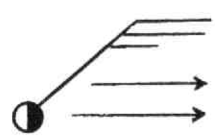
c. Welke isobaren staan getekend rond het L-gebied op 87 WL en 50 NB?

d. Bij één van de vier H-gebieden staat de druk (1016).
Geef een schatting van de luchtdruk in de andere H-gebieden.

Behalve isobaren vind je nog veel andere gegevens, zoals:

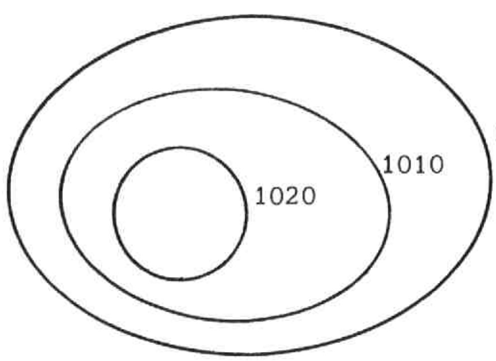
koude front:

warmte front:



sterke wind
richting wind (hier N.O.)
half bewolkt

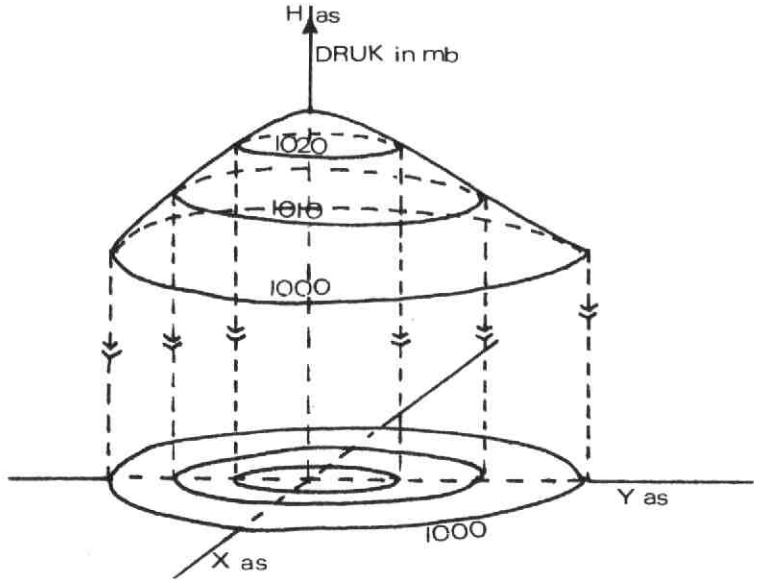
Bekijken we nu het volgende hogedrukgebied:



Dit lijkt sprekend op het plaatje van onze berg. Echter dit is een hogedrukgebied, d.w.z. de getalletjes 1000, 1010, enz. geven de luchtdruk aan in mb. Omdat de druk is het midden het grootst (hoogst) is, noemen we dit een *hogedrukgebied.*

≫ 89. Teken zelf een lagedrukgebied.

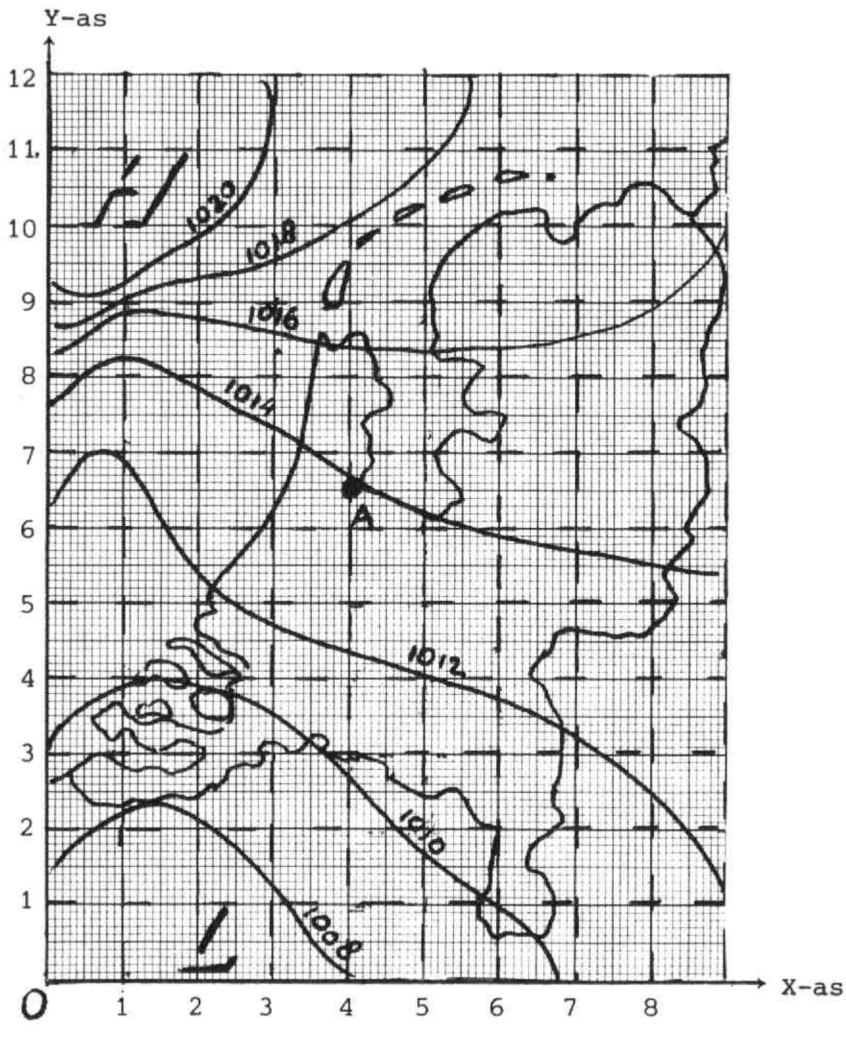
Een ruimtelijke voorstelling van een H-gebied zou er zó uit kunnen zien:



Wind ontstaat door *verschil* in luchtdruk: het is de beweging van lucht van een gebied met hogere druk naar een gebied met lagere druk (denk aan een bal die naar beneden rolt).

≫ 90. Hoe zal de windrichting (in principe) zijn ten opzichte van de richting van de isobaren? (Door de draaiing der aarde is de werkelijke richting bijna evenwijdig aan de isobaren!).

Kijken we tenslotte naar het volgende weerkaartje:



≫91. a. Waar heerst harde wind?

b. Wat is de (theoretische) windrichting daar?

c. Waar zal het hard waaien boven Nederland?

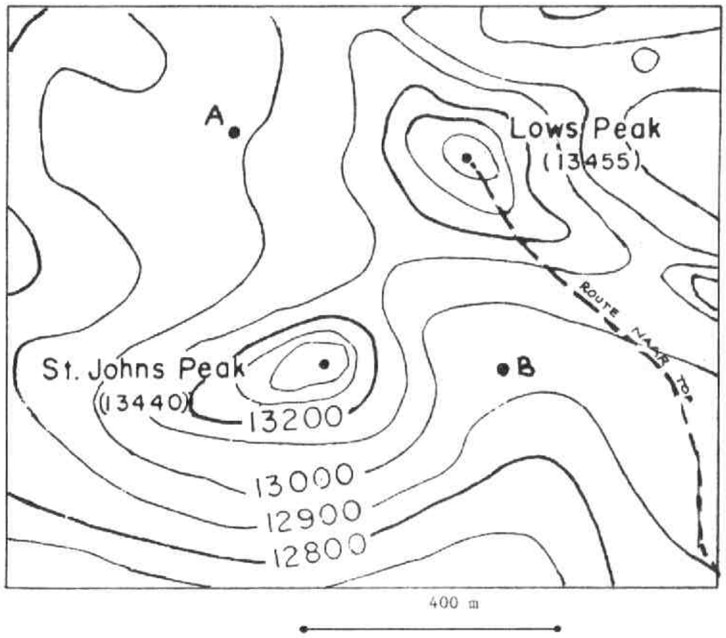
≫92. We noemen de functie die aan elke plaats de luchtdruk in die plaats toevoegt: d.
Bepaal: $d(4,6\frac{1}{2})$.

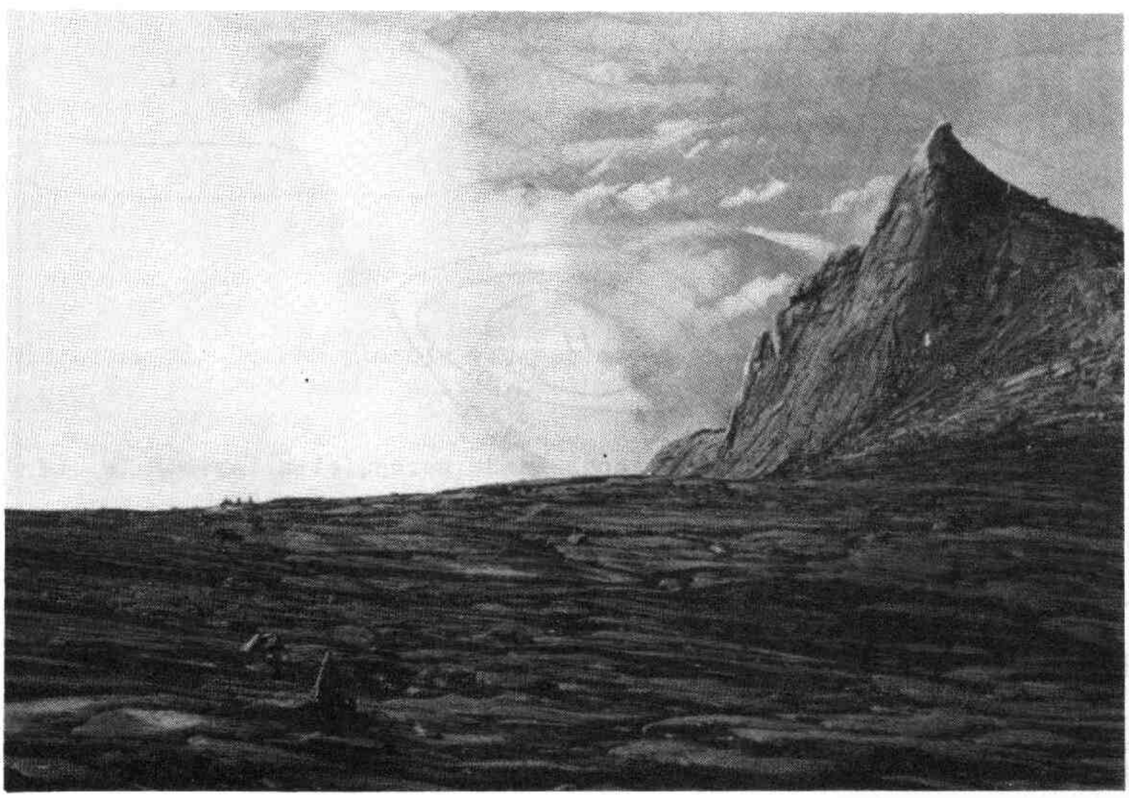
≫93. a. Wat is de laagste druk die boven Nederland voorkomt?
Geef de coördinaten.

b. Hetzelfde (schatting) voor de hoogste druk.

c. Wat is het domein en bereik van de functie d?

Op Noord Borneo bevindt zich de "Berg der doden", ofwel Gunung Kinabalu. Het hoogste punt is 13455 voet en heet Lows Peak, naar de Engelse ontdekkingsreiziger Low. Maar er zijn meer pieken zoals uit het volgende kaartje blijkt:





Deze foto is genomen dichtbij Lows Peak, op de route naar de top. De piek die je ziet is St. John's peak. Geef op het kaartje aan waar de foto is genomen.

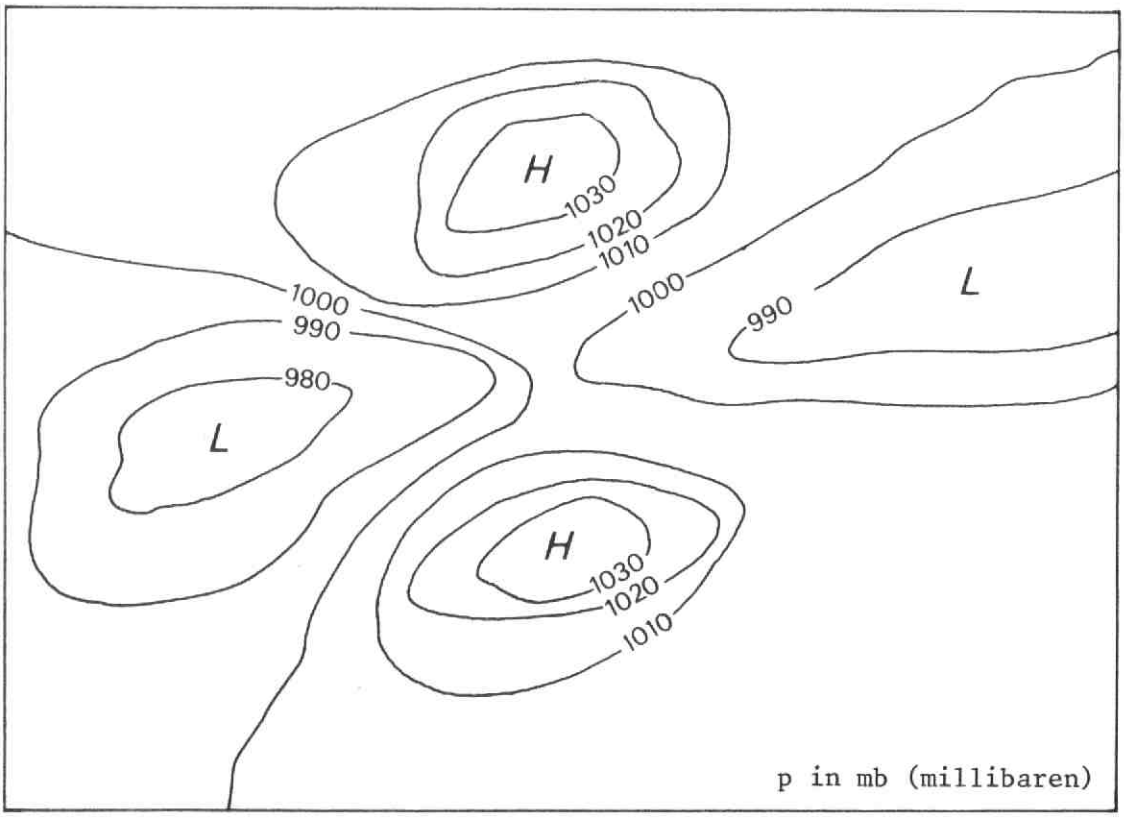
≫ 94. Je ziet met een stippellijn de route naar de top aangegeven. Hoe steil loopt die route het laatste gedeelte, d.w.z. vanaf 13.100 voet tot de top?

≫ 95. Teken de dwarsdoorsnede die door St. John's Peak en Lows Peak gaat. Wat is het laagste punt tussen die twee pieken?

≫ 96. Teken de dwarsdoorsnede die van A naar B gaat. Wat is het hoogste punt tussen A en B? Noem dit punt Z.

Zo'n punt als Z, dat enerzijds een maximum en anderzijds een minimum is, noemen we een *zadelpunt*. Kun je dat zadelpunt op de foto terugvinden?

Ook in de meteorologie spelen zadelpunten een belangrijke rol.
Wijs het zadelpunt aan op het volgende kaartje:

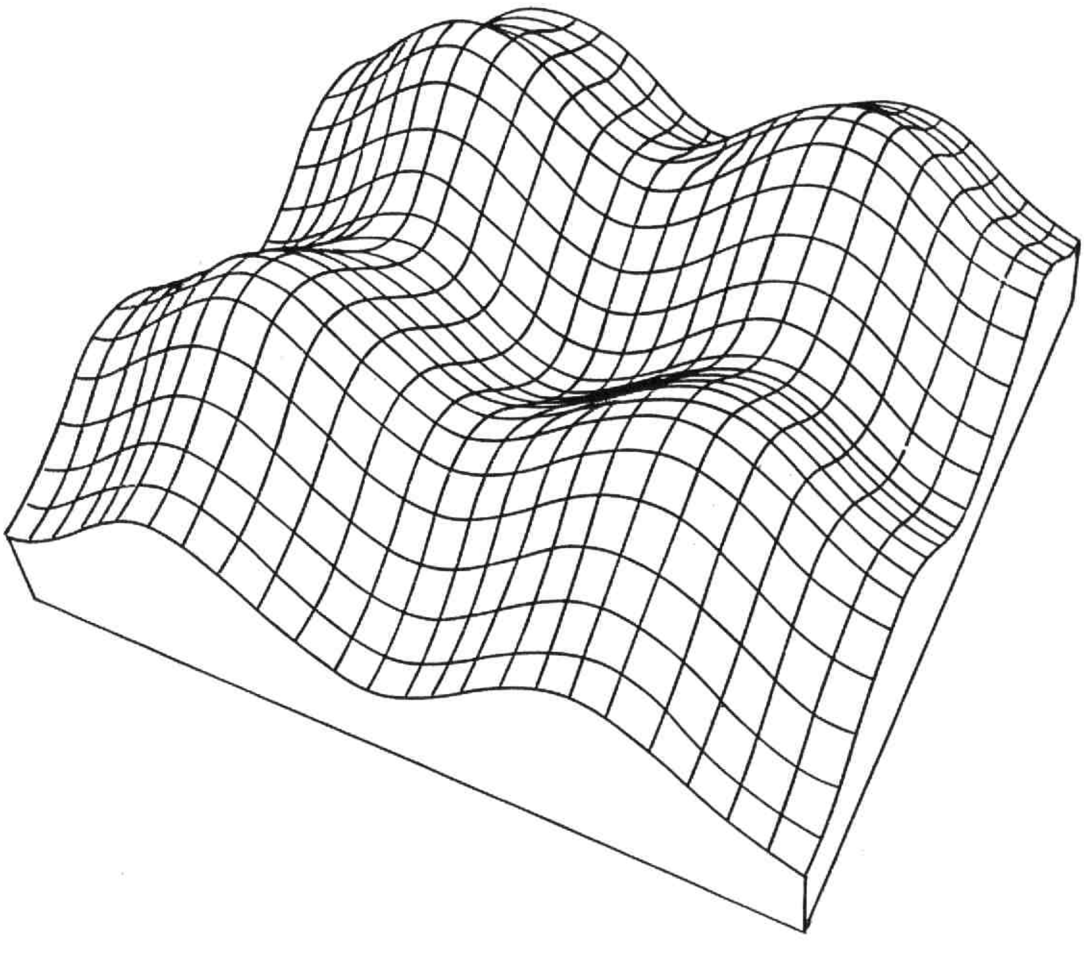


In een zadelgebied heerst meestal rustig weer.

≫ 97. Zou je kunnen verklaren waarom?

Verder overheerst het drukgebied waarvan de isobaren het sterkst gekromd zijn langs het zadelgebied.

≫ 98. Overheerst hier een hoge- of lagedrukgebied?



Hierboven zie je een plaatje van een model van een heuvelachtig landschap.

≫ 99. a. Hoeveel zadelpunten staan erop? Waar?

b. Hoeveel maxima staan erop? Waar?

c. Hoeveel minima staan erop? Waar?

d. Hoe zal dit model eruit zien als wij er loodrecht boven vliegen?

e. Als verder gegeven is dat de maxima op 400 m, de zadelpunten op 200 m en de minima op 0 m liggen, probeer dan een kaartje met niveaulijnen te maken van bovenstaand model.

8

NIVEAULIJNEN

We vatten enkele belangrijke zaken eerst nog even samen.
Er werd in de eerste zes hoofdstukken steeds gekeken naar lijnen die punten met gelijke 'hoogte' verbinden.
Zulke lijnen heten *iso-lijnen* of *niveaulijnen*.

Als je dat wiskundig netjes wil zeggen kan dat als volgt:

$$z = h(x,y)$$

of

$$(x,y) \to h(x,y)$$

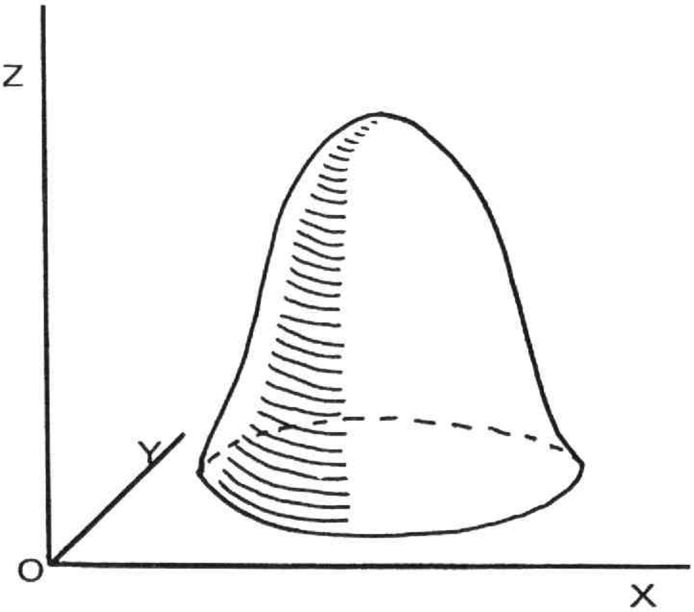
Het domein van de functie h is een gedeelte van het XOY-vlak, of: een deelverzameling van $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (want $x \in \mathbb{R}$ en $y \in \mathbb{R}$).
Het bereik is een deelverzameling van $\mathbb{R}$.

Zie bijvoorbeeld op blz. 32:

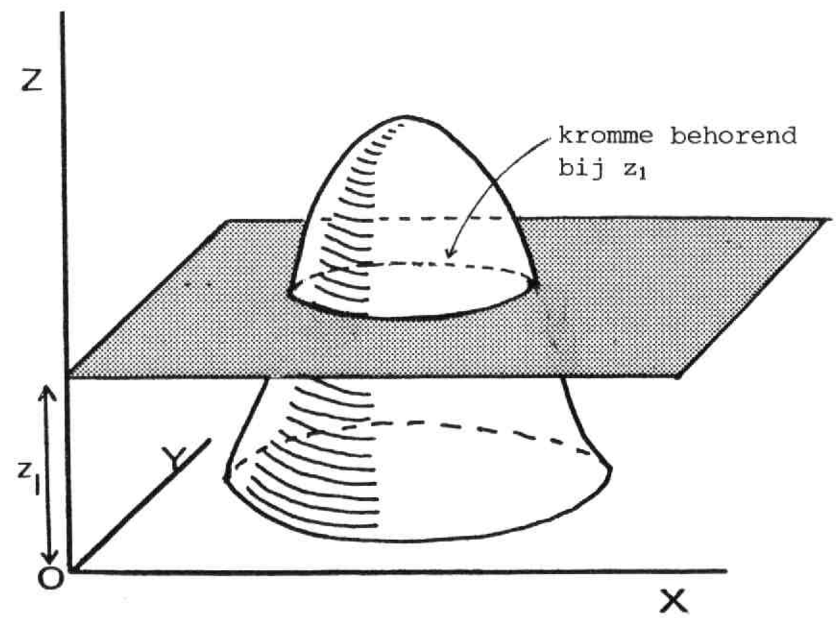
$$h = 4 - \tfrac{1}{4}x - \tfrac{1}{2}y$$

domein : $A = [0,4] \times [0,4]$
bereik : $[1,4]$

Stel dat de grafiek van een willekeurige functie h er zó uit ziet:

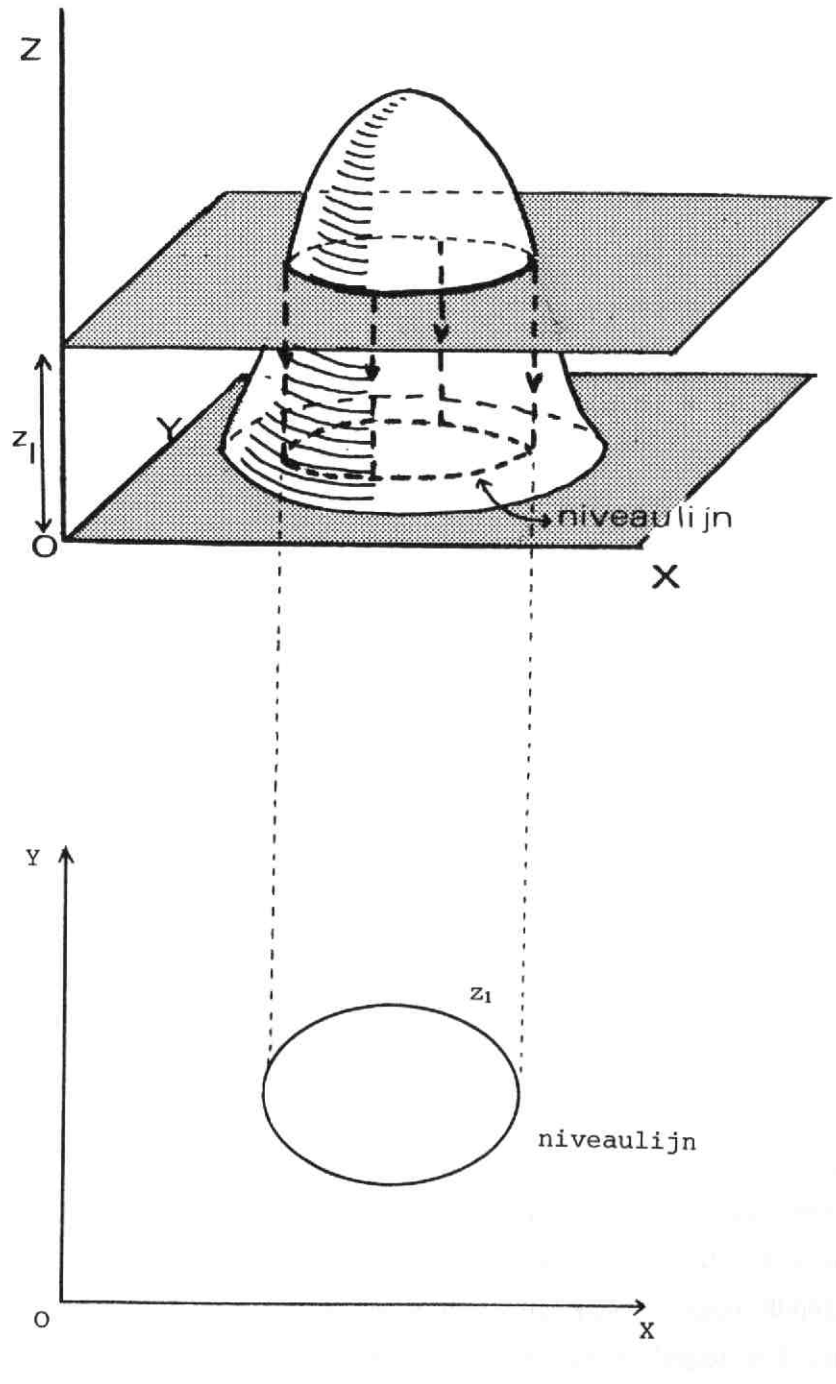


Als je die grafiek doorsnijdt met een vlak, evenwijdig met het XOY-vlak op een hoogte z_1, dan ontstaat een kromme, behorend bij die hoogte z_1.



Vervolgens 'projecteren' we die kromme op het XOY-vlak ('wij laten hem loodrecht naar beneden vallen').

Als nu het OXY-vlak vlak van tekening wordt, dan krijg je:



De nu ontstane kromme heet *niveaulijn* bij niveau z_1, of volledig *h*-origineel van z_1.

$\gg$100. De functie $z = 2x + 3y$ heeft als domein $A = [1,3] \times [2,5]$.

a. Teken het niveaulijnenkaartje.

b. Wat is het bereik van de functie $z = 2x + 3y$ op A?

$\gg$101. De functie $f(x,y) \to y - x$ heeft als domein $B = [-2,2] \times [-1,3]$. $(f, y, z \in \mathbb{R})$.

a. Teken het niveaulijnenkaartje.

b. Wat is het bereik van de functie f?

Een domein kan natuurlijk ook een andere vorm hebben dan een 'rechthoek' van de vorm $[a,b] \times [c,d]$, zoals b.v. in de volgende opgave.

$\gg$102. Ten opzichte van een rechthoekig XY-stelsel is C het gebied van de punten $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ waarvoor geldt:

$x \geqq 0$ èn $1 \leqq y \leqq 6$ èn $2 \leqq x + y \leqq 8$

Dit gebied C is het domein voor een functie h die gegeven wordt door: $h(x,y) = x + 2y$.

a. Teken het domein C door eerst de lijnen $x = 0$; $y = 1$; $y = 6$; $x + y = 2$ en $x + y = 8$ te tekenen.

b. Teken het niveaulijnenkaartje.

c. Wat is het bereik van h op A?

Niveaulijnen waren in dit boekje heel vaak rechte lijnen (die evenwijdig waren; waarom?). Maar er zijn natuurlijk ook andere mogelijkheden zoals b.v. cirkels (b.v. als de grafiek een kegel is).

In de volgende opgave maak je kennis met weer een heel andere soort niveaulijnen, die nogal eens in de economie voorkomen.

≫103. Ten opzichte van een rechthoekig XY-stelsel is D het gebied dat wordt gegeven door:

$x \geqq 0$ èn $y \geqq 0$ èn $x + 2y \leqq 8$

Dit gebied D is het domein van een functie f die gegeven wordt door:

$f : (x,y) \to xy \qquad (f,x,y \in \mathbb{R})$.

a. Teken het gebied D.

b. Teken enkele niveaulijnen voor f.

c. Wat is het bereik van f op D?

9

NOG MEER ISOLIJNEN

In Duitsland is door ene Dr. Ritter in 1960 een onderzoek gehouden over de kosten van zandtransport voor wegenaanleg. De negen technische mogelijkheden waren als volgt:

1. Graven met scheppen.
   Transport met treintje naar kiepkarren.
   Kiepkarren geduwd door arbeiders.
2. Als (1), maar transport per transportband.
3. Als (2), maar locomotief voor kiepkarren.
4. Dragline met capaciteit 0,35 m^3, transport als bij (3).
5. Dragline met capaciteit 0,90 m^3, transport als bij (3).
6. Dragline met capaciteit 1,35 m^3, transport als bij (3).
7. Dragline met capaciteit 1,80 m^3, transport als bij (3).
8. Drie scrapers met capaciteit 8,4 m^3. (Verzorgen tevens transport).
9. Drie scrapers met capaciteit 13,4 m^3. (Verzorgen tevens transport).

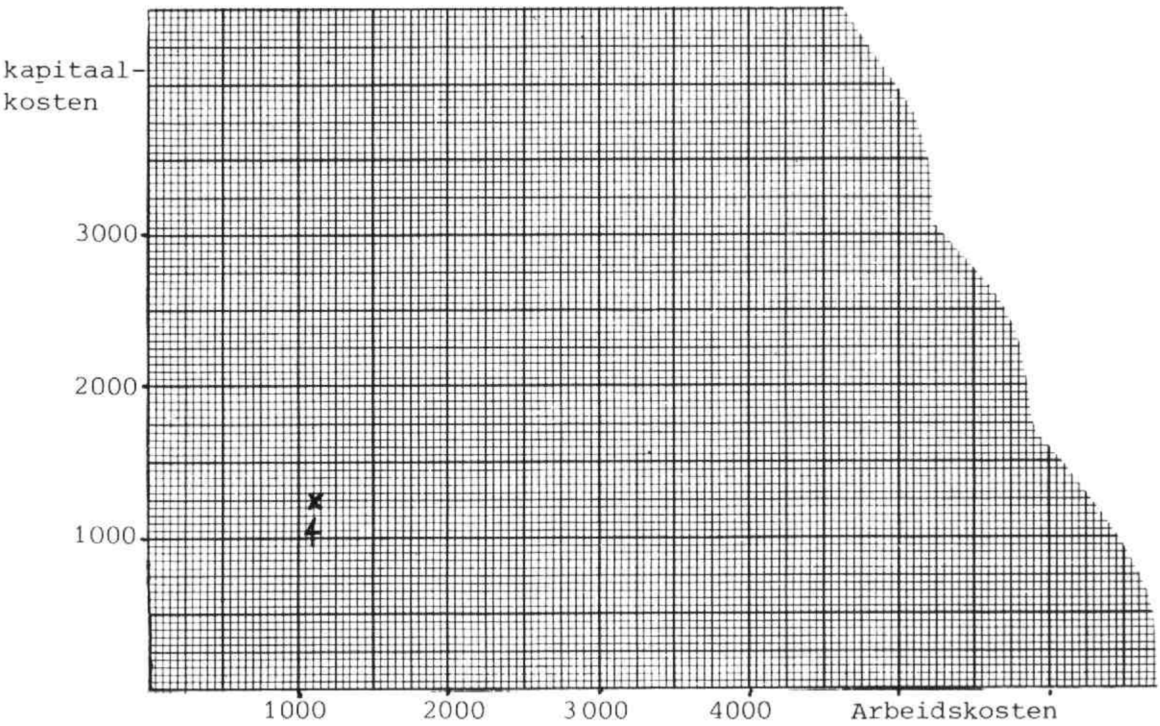
De totale kosten werden uitgerekend voor een hoeveelheid zand van 1000 m^3 over 600 m.
En die kosten zijn dan weer te splitsen in:
- kapitaalkosten (machines e.d.);
- arbeidskosten.

Het zal duidelijk zijn dat de eerste methode veel arbeidskosten met zich meebrengt, wat ook blijkt uit de volgende tabel:

Produktie-methode	Kapitaal-kosten	Arbeids-kosten	Totale kosten
1	326	4440	4766
2	422	3895	4317
3	542	2485	3027
4	1260	1088	2348
5	1099	896	1995
6	1022	799	1821
7	1330	765	2095
8	1635	400	2035
9	2005	372	2377

Een SCHRAPER.

Wegenbouw is tegenwoordig ondenkbaar, zonder deze grondverzet machines. Moderne versies kunnen tot 100 m³ grond opschrapen en vervoeren.



We gaan nu een grafiek tekenen die aangeeft hoe de arbeidskosten en kapitaalkosten bij iedere mogelijkheid liggen.
Als voorbeeld is *produktiemethode 4* (1088,1260) al ingetekend.

≫104. a. Teken de overige acht punten.

b. Teken een *vloeiende* kromme door de negen punten.

c. Mag eigenlijk wel wat je bij (b) gedaan hebt?

We hebben nu een kromme getekend die punten verbindt van gelijke hoeveelheden (zand). Immers, voor *alle* methoden ging het over een hoeveelheid van 1000 m³ zand.

Zo'n lijn noemen we een *ISOQUANT*.
Deze isoquant behoort bij het niveau 1000 (m³).

d. Teken de niveaulijn behorend bij 2000 (m^3) uitgaande van de volgende gegevens:

Produktie-methode	Kapitaal-kosten	Arbeids-kosten	Totale kosten
1	600	8000	8600
2	800	7500	8300
3	1000	6000	7000
4	2000	2200	4200
5	2200	1700	3900
6	2400	1500	3900
7	2700	1200	3900
8	3100	900	4000
9	3700	600	4300

In de praktijk benaderen we ook hier de werkelijkheid met een *MODEL*. Zo hebben veel isoquanten de formule: $q = \sqrt{a \cdot k}$ $\qquad a,k > 0$ met a : arbeid; k : kapitaal en q : quantiteit of hoeveelheid.

≫105. Teken de isoquanten behorend bij de niveaus 1, 2, 3 en 4.

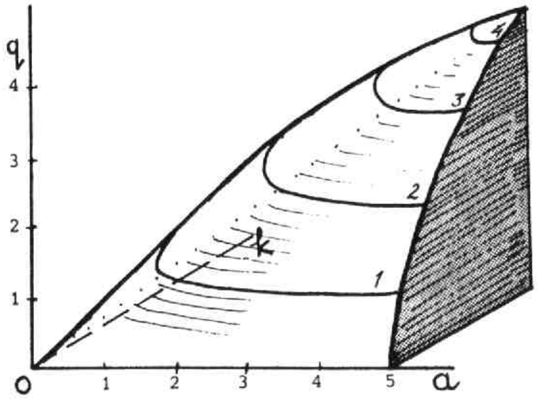
≫106. Vergelijk deze isoquanten uit het model met de isoquant(en) uit de werkelijkheid van blz. 50 en deze bladzijde.

≫107. Los op met de grafiek:
Hoeveel goederen kan ik maximaal produceren met twee eenheden arbeid en één eenheid kapitaal?

≫108. Hetzelfde voor twee eenheden arbeid en twee eenheden kapitaal.

≫109. De totale kosten zijn $a + k$.
Teken enkele iso-kostenlijnen in je grafiek en bepaal wanneer de kosten minimaal zijn bij een gegeven isoquant.

Tenslotte hieronder de ruimtelijke grafiek van $q = \sqrt{ak}$ met $a,k \geq 0$.
Je ziet de hoogtelijnen van niveau 1, 2, 3 en 4 getekend.
Vergelijk dit met je isoquanten.



ISO-KAPITAALLIJNEN

In de statuten van de dakpannenfabriek "Lekwater", een N.V. te Vreeswijk staat o.a.:

"Eerst wordt aan aandeelhouders (van de netto-winst) uitgekeerd vijf procent over het nominale bedrag van hun aandelen en van het restant twintig procent aan het personeel."

≫ 110. Noem het geplaatste kapitaal k, de winst w en de uitkering aan het personeel u.

a. Laat zien dat de uitkering gelijk is aan:

$u = \frac{1}{5}(w - \frac{1}{20}k)$ en daarna:

$k(w,u) = 20w - 100u$.

b. Teken een assenstelsel met horizontaal de w-as, vertikaal de u-as. Teken daarin niveaulijnen van k, bij de niveaus 1 miljoen, 2 miljoen, enz.
Deze lijnen heten *iso-kapitaallijnen*.

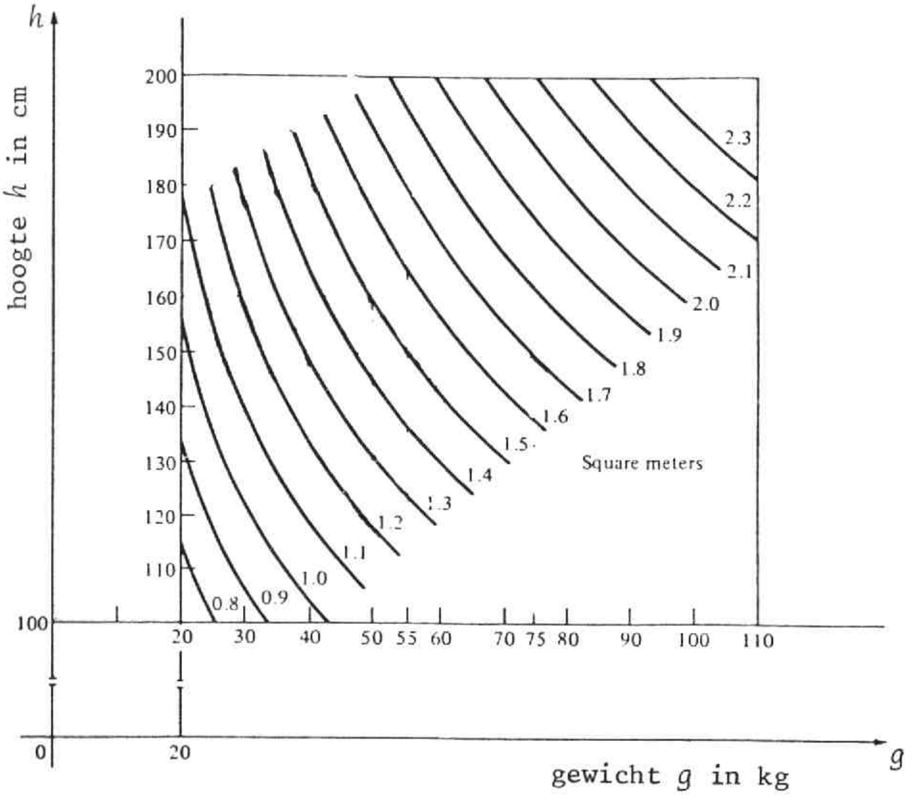
≫ 111. Als door een aandelenemissie het geplaatste kapitaal met *f* 1.000.000,-- toeneemt, met welk bedrag moet de winst dan toenemen wil de uitkering aan het personeel gelijkblijven? (Neem u b.v. *f* 10.000,--).

ISO-OPPERVLAKTELIJNEN

Experimenteel is vastgesteld dat de huidoppervlakte van mensen afhangt van het gewicht en de lengte. Dat is niet zo verwonderlijk. Daarmee is de oppervlakte een functie van twee variabelen.
Volgens een onderzoeker (Dubois) luidt het functievoorschrift:

$$O(g,\ell) = 0{,}007184 \cdot g^{0,425} \cdot \ell^{0,725}$$

met het gewicht g in kg, de lengte ℓ in cm en de opp. O in m².
De grafiek is uiteraard een ruimtelijke grafiek, maar met een hoogtelijnenkaartje komen we ook een eind.

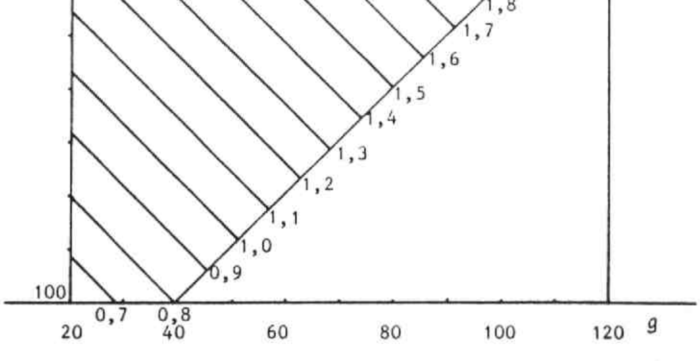


≫ 112. Hoe groot is de oppervlakte van iemand die 1.50 m lang en 75 kg zwaar is?
En van een iets minder zwaarljjvig type dat 1.50 m lang is en 55 kg weegt?

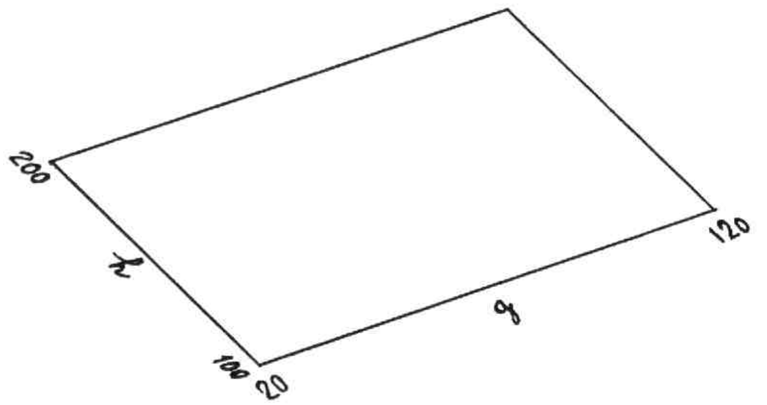
≫ 113. Iemand heeft een huidoppervlakte van 2,0 m².
Geef een aantal (4) mogelijkheden voor bijpassende lengte en gewicht.

≫ 114. Iemand is tweemaal zo lang als een ander. Is het mogelijk dat zijn oppervlakte dan ook tweemaal zo groot is?
Geef een voorbeeld.

Een ruimtelijke grafiek tekenen is niet zo gemakkelijk. Maar als we de iso-oppervlaktekrommen als rechte lijnen tekenen, wordt het een stuk eenvoudiger.
De grafiek zoals die was vereenvoudigen we tot:



Teken de ruimtelijke grafiek in een assenstelsel als volgt:



In hoeverre zal de echte ruimtelijke grafiek afwijken van deze wat vereenvoudigde?