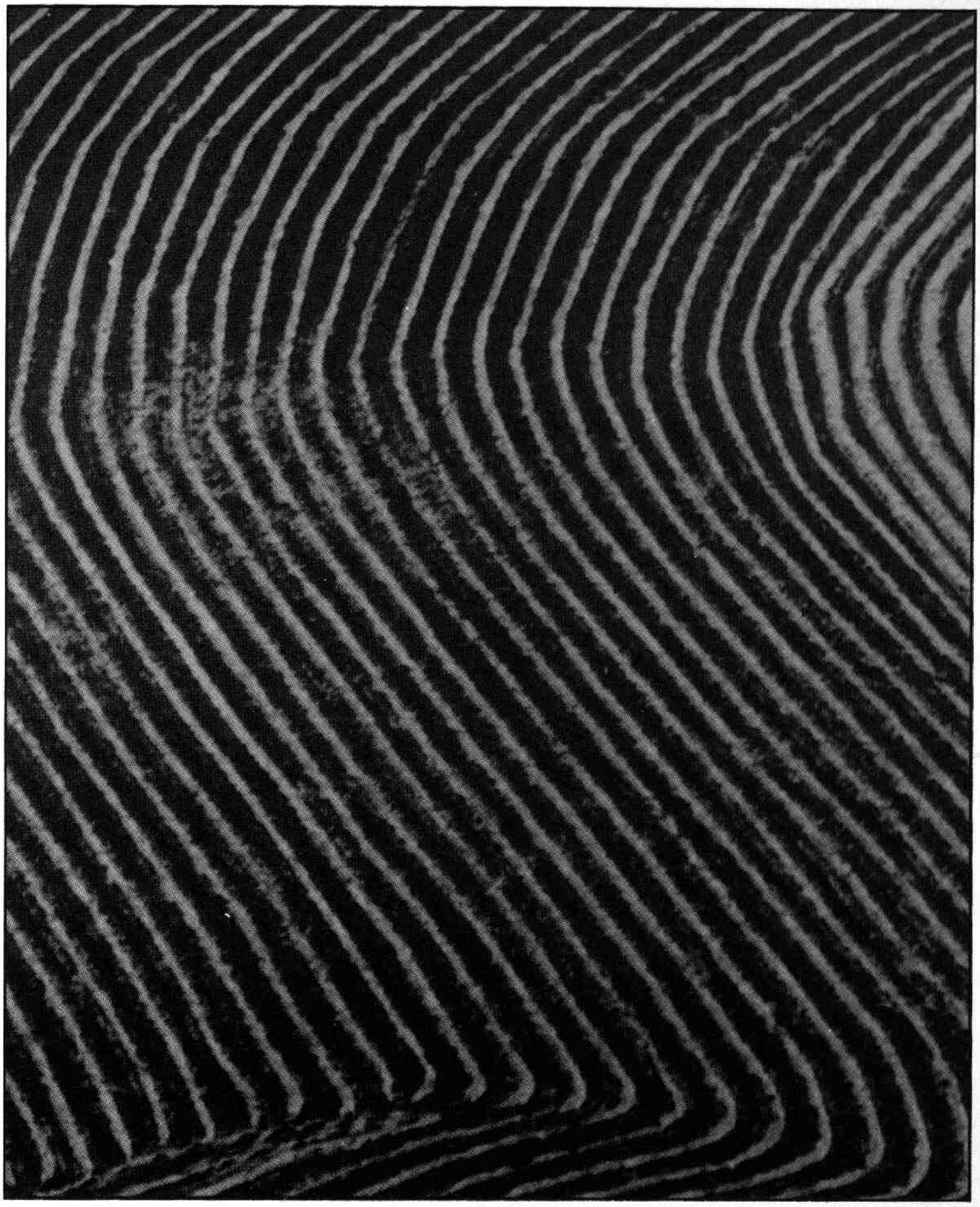
# Lineair programmeren



# LINEAIR PROGRAMMEREN

# LINEAIR

# PROGRAMMEREN

Tiberdreef 4 - 3561 GG Utrecht

LINEAIR PROGRAMMEREN

Een produktie ten behoeve van de experimenten in het kader van de Herverkaveling Eindexamenprogramma's Wiskunde 1 en 2 V.W.O.

Samenstelling: Jan de Lange Jzn
Martin Kindt

Vormgeving: Ellen Hanepen



Utrecht, november 1983.

INHOUDSOPGAVE

# 1

BIER OF ALE

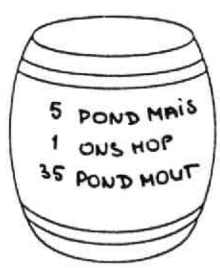
Een bierbrouwer maakt twee soorten bier: 'Bier' en 'Ale'. De laatste soort is met name populair in Groot Brittannië en de Verenigde Staten. Het verschil in bereiding zal nog ter sprake komen.

Voor beide soorten heeft hij de grondstoffen mais, hop en gerst nodig. De gerst wordt eerst geweekt; vervolgens laat men de gerst in een kelder tot kiemen komen. Daarna wordt het gedroogd. Dan heb je *gerstmout*. Deze mout wordt samen met de mais en hop tot bier en ale verwerkt.

Om één vat bier te maken heeft de brouwer nodig: 15 pond mais, 1 ons hop en 20 pond mout.


BIER

Om één vat ale te produceren heeft hij nodig: 5 pond mais, 1 ons hop en 35 pond mout.




ALE

De winst op een vat bier bedraagt *f* 25,--; op een vat ale *f* 15,--.

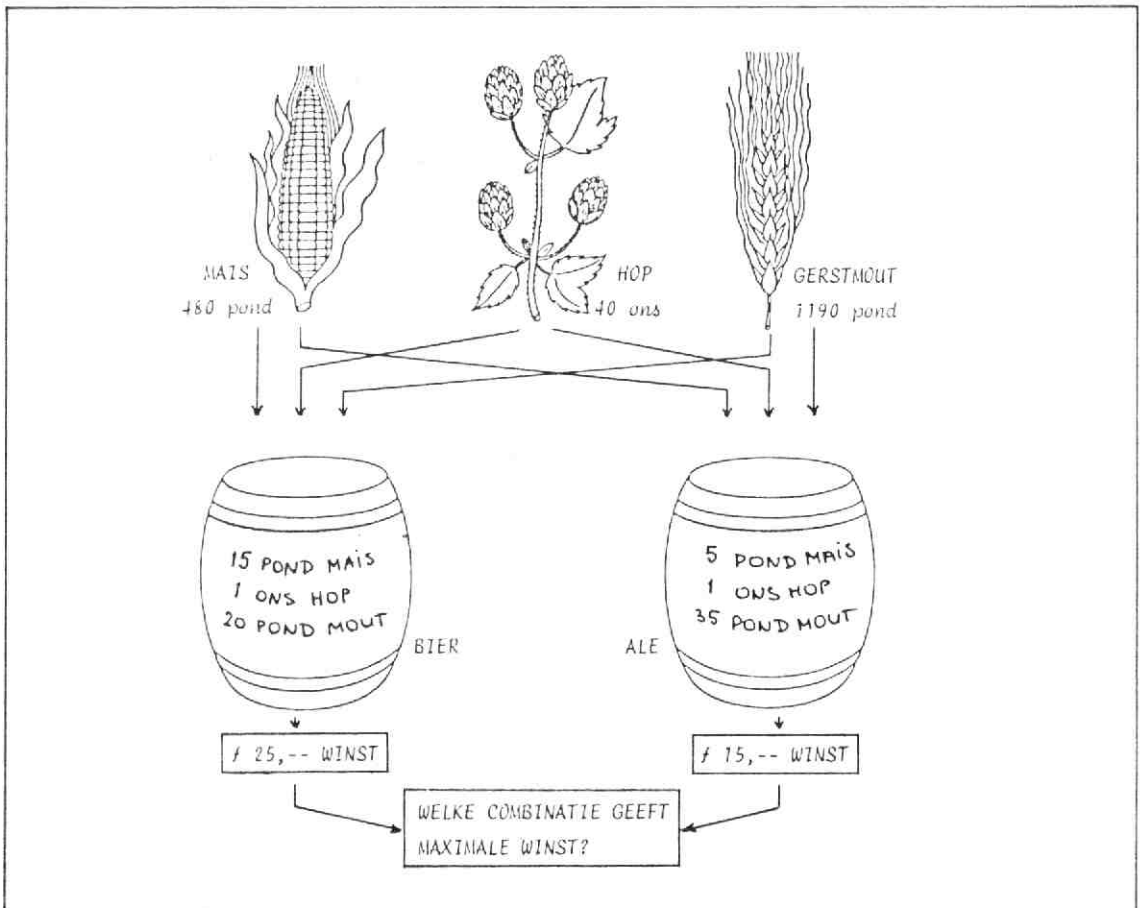
Het lijkt nogal verleidelijk voor de bierbrouwer om alleen bier te gaan brouwen. Er is echter een probleem. Op korte termijn kan hij slechts beschikken over: 480 pond mais, 40 ons hop en 1190 pond mout.

≫ 1. Stel dat de brouwer *uitsluitend* bier maakt. Hoeveel vaten kan hij dan produceren en hoeveel winst maakt hij dan?

≫ 2. Hoeveel houdt hij aan grondstoffen over?

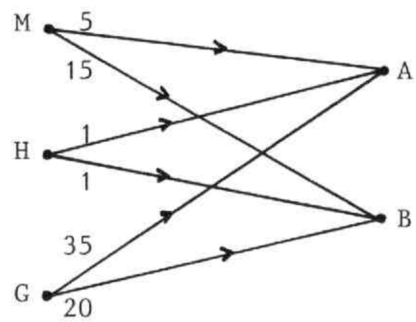
≫ 3. Denk je dat het mogelijk is om meer winst te maken? Verklaar!

Deze laatste vraag is een nader onderzoek waard.
Bij welke combinatie van twee biersoorten maakt de brouwer de meeste winst?




Het probleem van de bierbrouwer in beeld gebracht.

Het plaatje van de vorige bladzijde is in feite al bijna een (gerichte) *graaf*:




Bij deze graaf hoort de volgende *matrix*:

$$\begin{array}{c} \\ M \\ H \\ G \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{pmatrix} 5 & 15 \\ 1 & 1 \\ 35 & 20 \end{pmatrix} \end{array}$$

≫ 4. Hoeveel van elke grondstof wordt gebruikt bij produktie van 10 vaten ale en 20 vaten bier? (Bereken met matrixprodukt!)
Wat is de winst in dit geval?

≫ 5. De winst W is een functie van het aantal geproduceerde vaten ale ($=a$) en het aantal vaten bier ($=b$).
Wat is de formule voor W?

≫ 6. Teken niveaulijnen (iso-winst-lijnen) in een $O_{a,b}$ stelsel. (Neem aan dat er onbeperkte voorraden grondstoffen zijn).

≫ 7. Hoe groot is het grondstoffengebruik van ieder van de drie grondstoffen bij produktie van $a$ vaten ale en $b$ vaten bier? (Bereken met bovenstaande matrix).

≫ 8. Bij opgave ≫ 7 bleek hoeveel mais er voor de produktie van $a$ vaten ale en $b$ vaten bier nodig is.
Verklaar waarom geldt: $5a + 15b \leq 480$.

≫ 9. Teken de grafiek van $5a + 15b = 480$ in een $O_{a,b}$stelsel.
Arceer daarna het gebied waarvoor *niet* geldt: $5a + 15b \leq 480$.

Uit de voorgaande twee opgaven blijkt hoe de totale hoeveelheid mais een beperkende voorwaarde is. Maar ook de hop en de gerst leveren beperkende voorwaarden.

≫ 10. Stel, op dezelfde wijze als bij de opgaven ≫ 8 en ≫ 9 gedaan is, de beperkende voorwaarden op als gevolg van de aanwezige voorraad hop. Teken de resultaten in de grafiek van opgave ≫ 9.

≫ 11. Dezelfde opdracht voor de beperkende voorwaarden tengevolge van de aanwezige voorraad gerst.

≫ 12. Bij welke produktiehoeveelheden worden alle voorraden hop en gerstmout opgebruikt? Los dit op met de grafiek van opgave ≫ 9 tot en met opgave ≫ 11. Hoe kun je het zonder grafiek oplossen?
Hoeveel mais is er in dit geval nog over?

Door de (drie) beperkende voorwaarden is nog maar een klein gebied met mogelijkheden overgebleven, zoals uit de grafiek blijkt.

≫ 13. Ligt het binnen de mogelijkheden van de brouwer om 6 vaten ale en 13 vaten bier te maken? Zo ja, hoe groot is de winst dan?

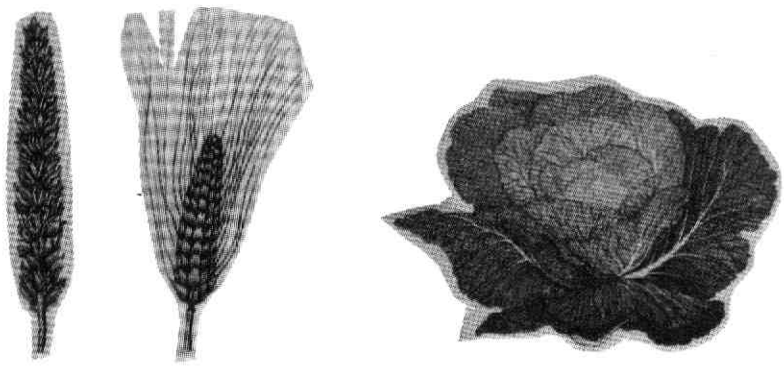
≫ 14. Teken (de grenzen van) het beperkende gebied in de grafiek met isowinst-lijnen. (Opgave ≫ 6). Concludeer aan de hand van deze grafiek wat de produktiemethode is die de meeste winst oplevert.

≫ 15. Van welke grondstof is hoeveel over? Hoe kun je dat aan de grafiek zien?

**Problemen zoals dit bierbrouwersprobleem komen nogal eens voor. Alleen meestal véél ingewikkelder. Maar de opzet is steeds hetzelfde: je zoekt naar een *maximum* (of *minimum*) van een functie op een begrensd gebied, waarbij het gaat om lineaire functies (bij het bier: $W = 15a + 25b$) op een gebied dat begrensd wordt door rechte lijnen. In zo'n geval spreken we van *Lineaire Programmering*. Bij programmering wordt dan gedacht aan planning.**
**Als je de functie waar het om gaat en de vergelijkingen van de randen van het gebied eenmaal hebt gevonden, is het probleem vaak snel opgelost. Maar juist dat 'mathematiseren' is nogal lastig.**

# 2

TARWE OF BOERENKOOL



Een boer heeft een flink stuk land waarop hij tarwe en boerenkool wil verbouwen. De twee variabelen zijn:

$t$ : het aantal te verbouwen hectare tarwe;

$b$ : het aantal te verbouwen hectare boerenkool.

De beperkende voorwaarden in matrixvorm zijn:

| | tarwe | boerenkool | (maximaal) beschikbaar |
|---|---|---|---|
| aantal werkdagen per hectare | 2 | 1 | 10 |
| kosten landarbeider per hectare in guldens | 35 | 30 | 210 |
| kosten kunstmest per hectare in guldens | 15 | 20 | 120 |

≫ 16. Schrijf deze drie beperkingen op als vergelijkingen met variabelen $t$ en $b$. (Zie opgave ≫ 9).

≫ 17. Teken het gebied waarvoor de beperkingen van opgave ≫ 16 gelden. (Neem de $t$-as horizontaal). Bereken de coördinaten van de hoekpunten.

≫ 18. Het totaal aantal hectaren dat beplant kan worden is een functie van $t$ en $b$. Welke functie? Moeten $t$ en $b$ gehele getallen zijn?

≫ 19. Wat is het *grootste* gebied dat kan worden beplant? Teken iso-oppervlakte-lijnen.

≫ 20. De winst per hectare tarwe is ƒ 40,--.
De winst per hectare boerenkool is ƒ 30,--.
Hoe maakt de boer *maximale* winst?

HEER BOMMEL

Heer Bommel voelt zich wat slapjes en raadpleegt daarom de alom bekende dr. Zielknijper. Deze constateert eenvoudig een tekort aan kalk en ijzer en schrijft heer Bommel *minstens* 50 mg kalk en *minstens* 8 mg ijzer per dag voor.

Aangekomen bij de Rommeldamse apotheek blijkt dat Bommel de keus heeft uit twee soorten pillen:

- merk A, bevattend 5 mg kalk en 2 mg ijzer;
- merk B, bevattend 10 mg kalk en 1 mg ijzer.

Omdat heer Bommel een uitgesproken hekel heeft aan het slikken van pillen, wil hij met zo weinig mogelijk volstaan. Hij slaat aan het rekenen, maar het probleem wordt hem al gauw te machtig. Gelukkig is daar Tom Poes die met behulp van de algebra en heer Bommel's ruitjesjas, het probleem vlotweg oplost.

Hij stelt: $a$: het aantal pillen A;
$b$: het aantal pillen B.

≫ 21. Hoeveel pillen moet heer Bommel *minimaal* slikken?

Hint: Bepaal eerst de beperkende voorwaarde die voortvloeit uit de eis dat heer Bommel genoeg kalk krijgt. Daarna die voor ijzer. Teken tenslotte het beperkende gebied met daarop die iso-aantal-pillen-lijnen.

TERUGKIJKEND:

Het doel van de bierbrouwer was zoveel mogelijk winst maken. Dus zocht hij naar het *maximum* van de *doelfunctie* (van twee variabelen):

$$W = 15a + 25b$$

op een door rechte lijnen begrensd gebied. Dat gebeurt door het tekenen van hoogtelijnen (iso-winstlijnen).

Het doel van de boer was om zoveel mogelijk winst te maken. Dus zoekt hij naar het *maximum* van de *doelfunctie* (van twee variabelen):

$$W = 40t + 30b$$

op een door rechte lijnen begrensd gebied. Ook hier via iso-winstlijnen.

Het doel van heer Bommel was om zo weinig mogelijk pillen te slikken. Dus zoekt hij naar het *minimum* van de *doelfunctie* (van twee variabelen):

$$D = a + b$$

op een door rechte lijnen begrensd gebied. Dat gebeurt met iso-aantal-pillen-lijnen.

WERKWEEK

De hoogste klassen van een school in Haarlem gaan op werkweek. De reis zal gemaakt worden met huurbusjes. Er zijn twee soorten beschikbaar: VW en Ford Transit. In totaal gaan er 72 personen mee en 48 dozen bagage. In een VW-bus kunnen 6 personen en 6 dozen, in een Transit 8 personen en 4 dozen. De busjes kosten *f* 80,-- per dag per bus.

≫ 22. Hoeveel busjes moeten er van iedere soort gehuurd worden om zo goedkoop mogelijk uit te zijn?
Wat zijn de kosten in dat geval?

BOEKENREKJES

Een bedrijf maakt metalen boekenrekjes. Voor ieder rekje zijn drie machines nodig. Er zijn twee uitvoeringen van de rekjes: normaal en abnormaal (mooi).

De normale rekjes worden in 5,6 uur gemaakt:

2,0 uur door machine I; 1,2 uur door machine II; 2,4 uur door machine III.

Dezelfde machines worden ook gebruikt voor de mooie rekjes:

2,0 uur door machine I; 2,4 uur door machine II; 0,8 uur door machine III.

De machines draaien (ieder) maximaal 48 uur per week. De winst per normaal rekje is *f* 2,40; de winst op een abnormaal rekje is *f* 4,80.

≫ 23. Hoeveel rekjes van iedere soort zou de fabrikant moeten maken als hij maximale winst zou willen maken?
Is er meer dan één oplossing?

VITAMINEN

Vitaminen heb je nodig, omdat het lichaam ze niet of niet voldoende produceert. Met elk vitamine*tekort* heb je kans op het optreden van kwalen en stoornissen. De bekendste zijn scheurbuik (tekort aan vit. C); rachitis, een vervorming van de wervelkolom (vit. D); beri-beri, een tropische ziekte (vit. B) en een bepaald soort ernstige hoornvliesontsteking (vit. A). Het mag dus niet al te verbazend worden genoemd dat er nogal wat vitaminedrankjes en -pillen op de markt zijn.

Een bepaald vitamine-extract V kost 30 cent per gram.
Een ander vitamine-extract W kost 150 cent per gram.

De samenstelling per gram is:

| vitamine | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| vitamine-extract | 12 | 1 | 20 | 1 | 2 |
| vitamine-extract | 6 | 10 | 30 | 3 | 2 |

(de hoeveelheden in internationale eenheden).

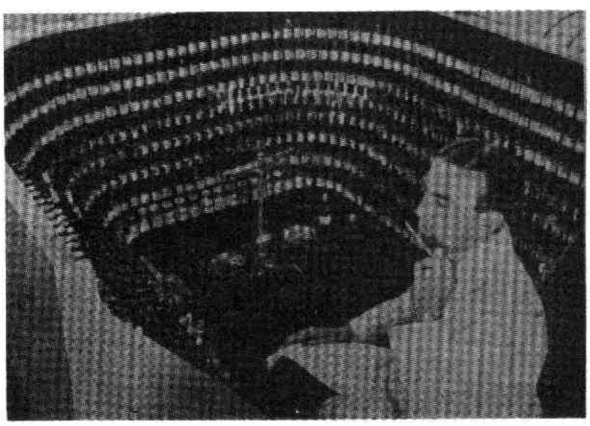
Een farmaceutisch bedrijf wil door $v$ gram V en $w$ gram W te mengen een nieuw extract maken, zó dat $(v + w)$ gram van dat mengsel *minstens* bevat:

| vitamine | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| vitamine-extract "V + W" | 84 | 70 | 240 | 30 | 15 |

≫ 24. In welke verhouding moeten de extracten V en W gemengd worden, zó dat de kosten van "V + W" *minimaal* zullen zijn?

PARFUM

Een persoon die parfums samenstelt heet een parfumeur, of iets theatraler: een parfumcomponist.
Op de foto zie je zo'n parfumcomponist achter z'n werktafel zitten, die geheel in stijl, een parfumorgel wordt genoemd.



De parfumeur heeft de hand kunnen leggen op enkele exclusieve "essences" waar hij twee perfecte parfums van wil maken.

Hij heeft 300 ml van essence $a$; 350 ml van essence $b$ en 200 ml van essence c.
De parfums die hij wil maken heeft hij in een creatieve bui "Moonlight" en "Daydream" genoemd.

De samenstelling is:

| | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|
| Moonlight | 5 | 5 | 2 |
| Daydream | 2 | 7 | 5 |

(de hoeveelheden in milliliters).

Op een flesje "Moonlight" maakt hij een winst van ƒ 40,-- en op een flesje "Daydream" ƒ 50,--.

≫ 25. Hoeveel moet hij van ieder maken voor de maximale winst?

RADIO OF T.V.

Een fabrikant wil een deel van z'n budget besteden aan reclame op radio of t.v. Hij wil een aantal minuten op de radio ($r$) en een aantal minuten op t.v. ($t$).
Er zijn nogal wat randvoorwaarden:
- hij wil minstens 30 seconden radio;
- hij wil minstens 3 minuten t.v.;
- de radio kost ƒ 1.000,-- per minuut, de t.v. ƒ 4.000,--;
- het totaal te besteden bedrag is maximaal ƒ 20.000,--;
- hij wil minstens tweemaal zoveel tijd op t.v. als op de radio.

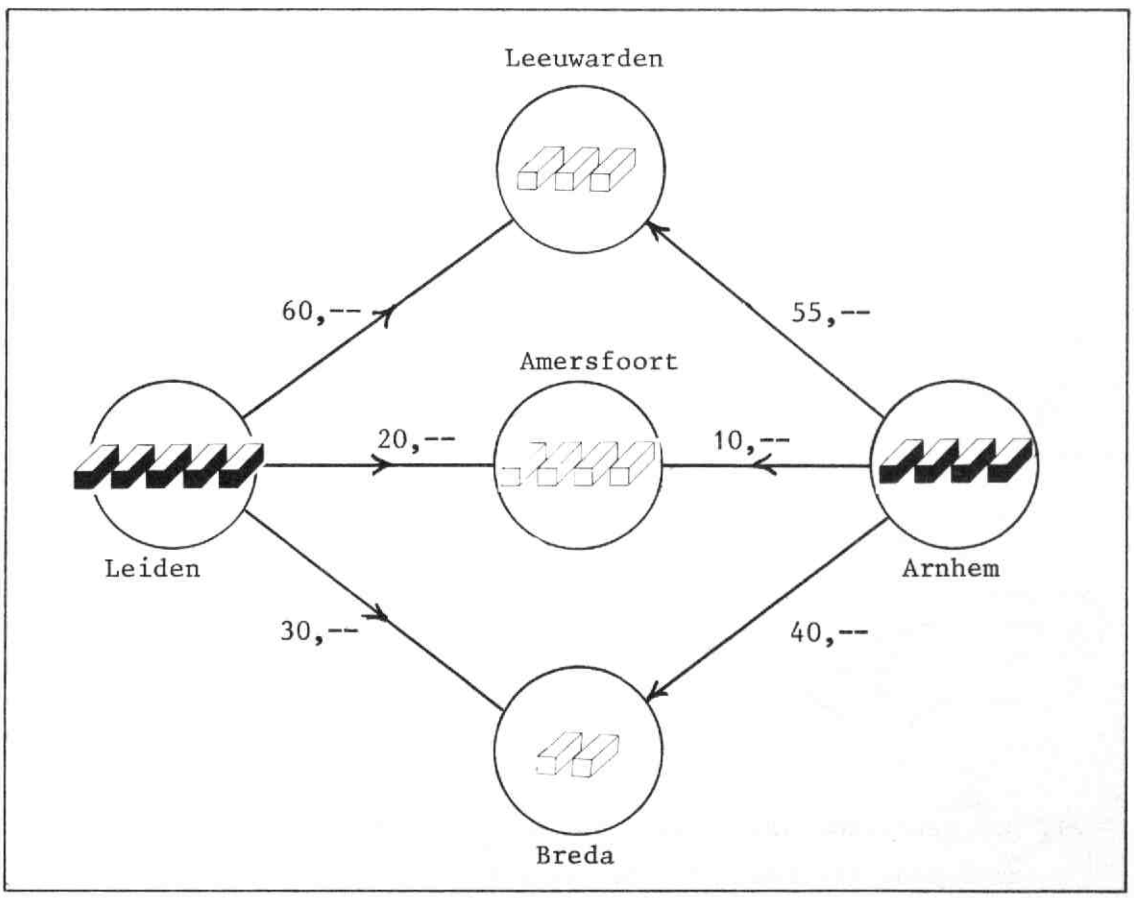
≫ 26. Schrijf de beperkingen op als vergelijkingen en/of ongelijkheden en teken het gebied (de grafiek) dat ontstaat als deze beperkingen gelden.

≫ 27. De uitgezonden spots moeten veelvouden van 30 sec. zijn. Wat is het *grootste* aantal minuten dat kan worden uitgezonden?

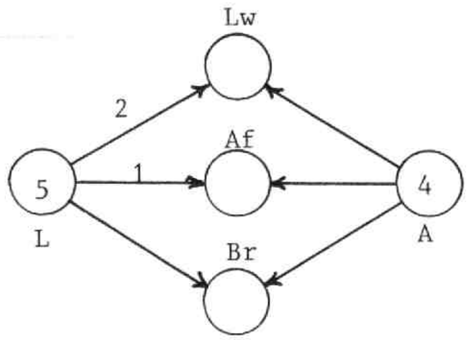
≫ 28. Het budget wordt later verlaagd met 20%.
Wat zijn nu de mogelijkheden?

# 3 TRANSPORTPROBLEMEN

Een fabriek die o.a. diepvrieskasten maakt heeft twee voorraadhallen. Eén in Leiden en de ander in Arnhem. Van een bepaald type diepvriezer staan er in Leiden vijf en in Arnhem vier. Die moeten allemaal op korte termijn bezorgd worden in Leeuwarden (drie), in Amersfoort (vier) en in Breda (twee). De transportkosten per vriezer zijn natuurlijk afhankelijk van de afstanden van de voorraadhallen tot de te bezoeken plaatsen.
In de volgende graaf staan de transportkosten per kist langs de wegen (in guldens):



De vraag is nu hoe het bedrijf zo goedkoop mogelijk uit is: hoeveel uit Leiden moeten er naar Leeuwarden, naar Amersfoort, enz.?
Dit lijkt een heel ander probleem dan het voorgaande, maar dat valt wel mee.
De eerste vraag is: wat is de (doel)functie, ofwel: wat zijn de *variabelen*?
Voordat we die proberen te beantwoorden, gaan we het probleem eerst wat verkennen met grafen en matrices:



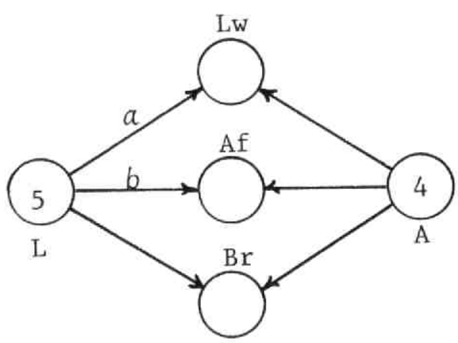

$$\begin{array}{ccc} & & \text{NAAR} \\ & & \begin{array}{ccc} \text{Lw} & \text{Af} & \text{Br} \end{array} \\ \text{VAN} & \begin{array}{c} \text{L} \\ \text{A} \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & .. \\ .. & .. & .. \end{pmatrix} \end{array}$$

Hier zie je (een gedeelte van) één mogelijkheid:

twee Leidse vriezers naar Leeuwarden;
één Leidse vriezer naar Amersfoort.

≫ 29. Laat zien dat je nu de getallen bij de andere pijlen óók weet. Maak de matrix ernaast af; maak ook een transportkostenmatrix (ook $2 \times 3$) en bepaal de totale kosten.

≫ 30. Bepaal op analoge wijze een andere oplossing.




≫ 31. Doe hetzelfde als je weet dat er $a$ vriezers van L naar Lw gaan; en $b$ naar Af. Laat zien dat voor de totale kosten K geldt:

$$K = 15a + 20b + 235$$

Nu is het niet zo moeilijk meer met lineair programmeren het probleem op te lossen. Als variabelen kiezen we $a$ en $b$ uit de graaf van opgave ≫ 30. Aangezien er zes wegen in de graaf staan, krijgen we zes beperkende voorwaarden.

≫ 32. Welke zes zijn dat?

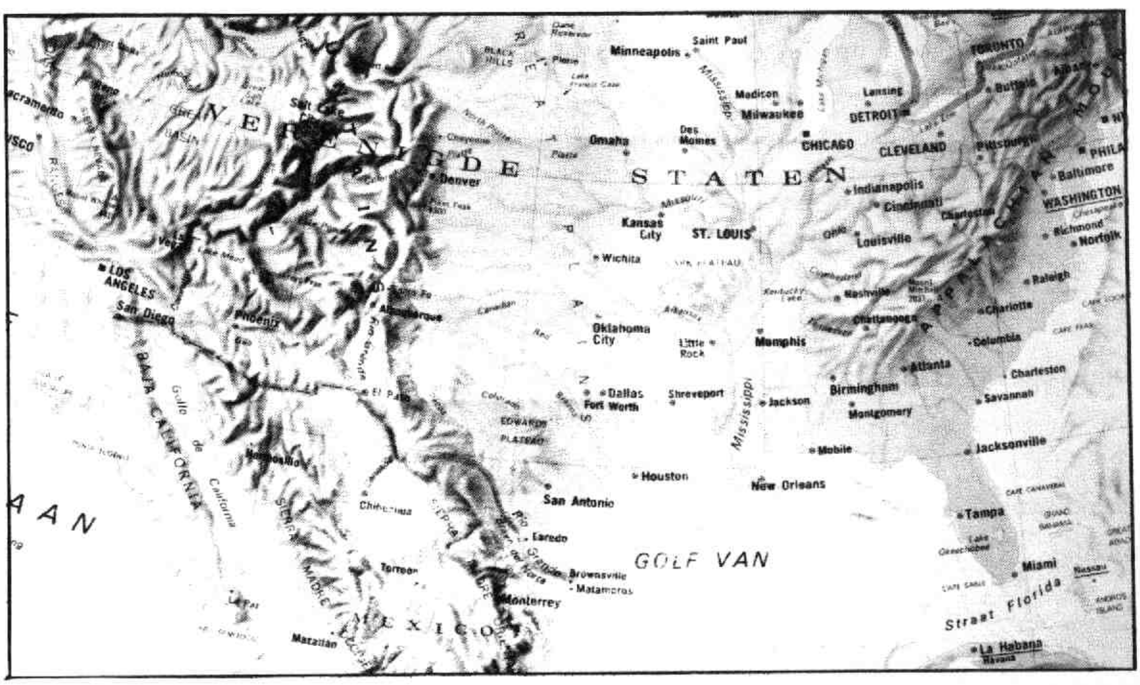
≫ 33. Teken het toegestane gebied dat door deze zes beperkingen wordt gevormd. ($a$-as horizontaal).

≫ 34. Hoeveel mogelijke oplossingen zijn er?

≫ 35. Bij opgave ≫ 31 had je al een formule voor de totale kosten, uitgedrukt in $a$ en $b$. Teken iso-kostenlijnen in de grafiek en bepaal de oplossing met de laagste kosten.

TARWETRANSPORT

Het middenwesten van de Verenigde Staten vormt de graanschuur van de V.S. en van een groot deel van de wereld daarbuiten.
Een tarwegroothandelaar heeft pakhuizen in Omaha en Chicago. In het eerste pakhuis heeft hij 50 vrachtwagenladingen tarwe, in het tweede 40.



Hij heeft 20 wagenladingen verkocht naar Denver, 36 naar Miami en 34 naar New York.
De transportkosten per wagenlading zijn:

NAAR

$$\begin{array}{lll} & & \begin{array}{ccc} \text{Denver} & \text{Miami} & \text{New York} \end{array} \\ \text{VAN} & \begin{array}{l} \text{Omaha} \\ \text{Chicago} \end{array} & \begin{pmatrix} 42 & 55 & 60 \\ 36 & 47 & 51 \end{pmatrix} \end{array}$$

(de hoeveelheden in dollars).

≫36. Zoek de plaatsen op de kaart op. Maak een gerichte graaf (zoals vóór opgave ≫29) bij de situatie dat de handelaar vanuit Omaha 10 ladingen naar Denver en 20 naar Miami verstuurt.

≫37. Doe hetzelfde als je weet dat er $x$ ladingen van Omaha naar Denver en $y$ naar Miami (ook uit Omaha) worden verstuurd.

≫38. Bepaal nu de oplossing die voor de handelaar het goedkoopste is.

Transportproblemen, zoals in de twee voorbeelden, kunnen dus met lineair programmeren opgelost worden.
Het is zaak goed op de gevolgde oplossingsmethode te letten, daar deze aanvankelijk sterk afwijkt van die bij de 'normale' lineaire programmeringsproblemen.

# 4 LINEAIR PROGRAMMEREN

Lineair programmeren is:
het zoeken naar een minimum of maximum van een lineaire (eerstegraads) functie:

$$f(x,y) = ax + by + c$$

op een bepaald gebied, dat gevormd wordt door enkele lineaire vergelijkingen of lineaire ongelijkheden.

Niveaulijnen van $f(x,y) = ax + by + c$ kunnen daarbij een rol spelen.

De functie $f(x,y) = ax + by + c$ heet *doelfunctie* of *doelstellingsfunctie*.

Het gebied waarop de doelstellingsfunctie geminimaliseerd of gemaximaliseerd moet worden, heet het *toelaatbare gebied*. In feite is dit gebied het domein van de doelstellingsfunctie.

Het voorgaande is een enge beperking van het lineair programmeren, want in werkelijkheid zal de doelstellingsfunctie niet een functie van *twee* variabelen zijn, maar eerder van *tientallen* variabelen of zelfs nog veel meer. Maar laten we eerst eens kijken naar een doelstellingsfunctie van *drie* variabelen. Je kunt dan de methode met de niveaulijnen nog wel toepassen (in zeer eenvoudige gevallen), maar zelfs dan wordt de zaak gecompliceerd, zoals blijkt uit dit voorbeeld:

We beperken ons tot de wiskundige kant van de zaak.

De te *maximaliseren doelfunctie* (winst) is:

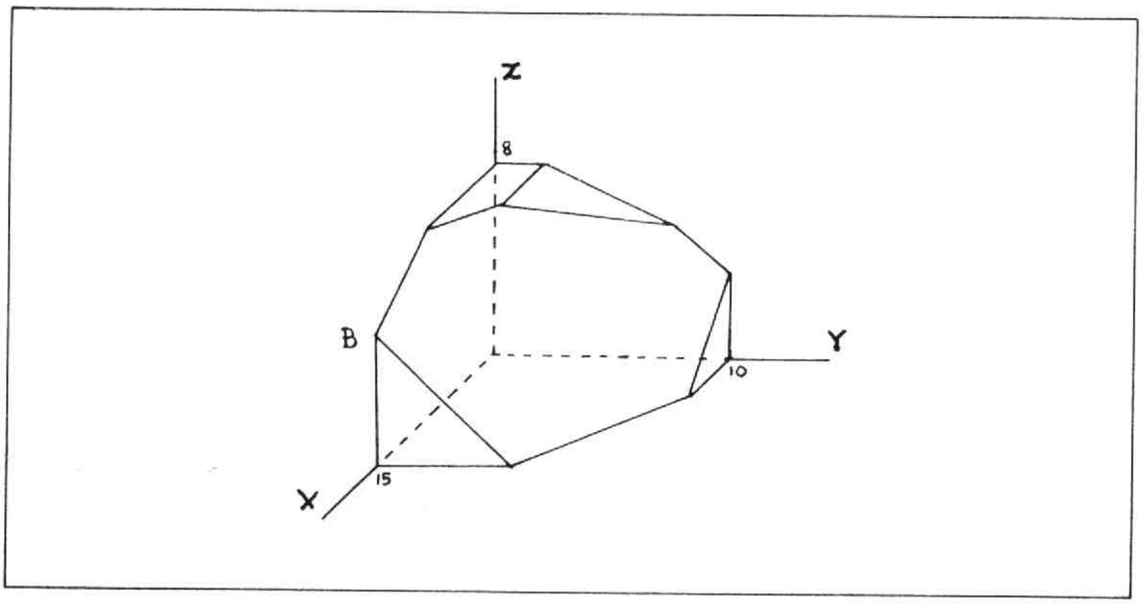
$$W = 50x + 200y + 300z.$$

Het *toelaatbare gebied* wordt gegeven door:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}x + y + z &\leqq 13 \\ y + 2z &\leqq 18 \\ x &\leqq 15 \\ y &\leqq 10 \\ z &\leqq 8 \end{aligned}$$

en $x \geqq 0$; $y \geqq 0$; $z \geqq 0$.

Omdat we nu een doelfunctie van drie variabelen hebben, is het toelaatbare gebied niet een vlakdeel maar een deel van de ruimte:

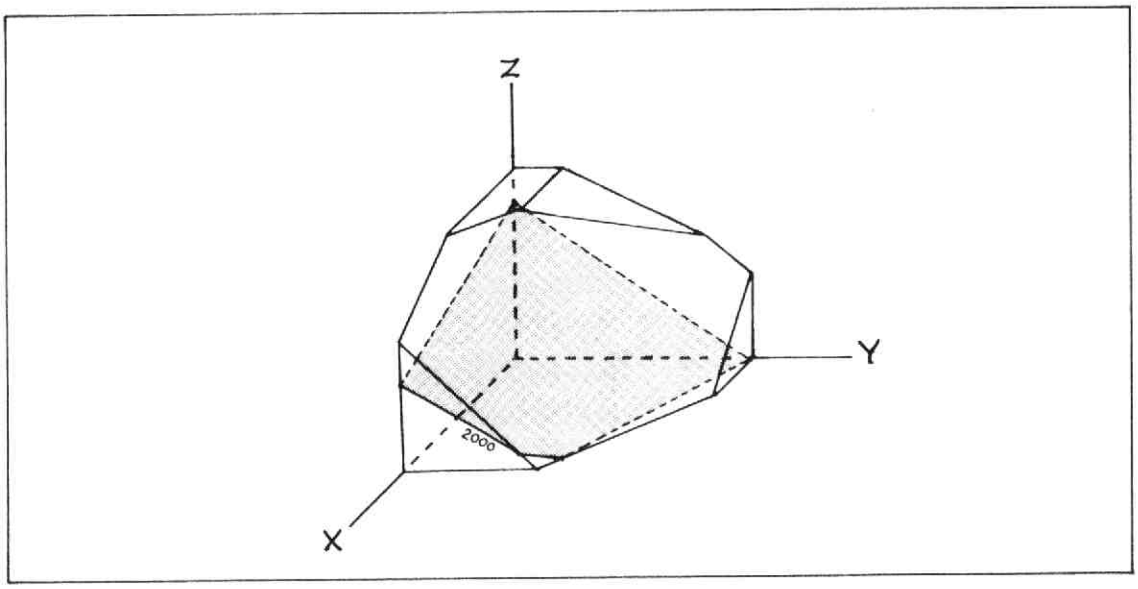


≫ 39. Er zijn acht beperkende voorwaarden. Het toelaatbare gebied heeft ook acht grensvlakken.
Geef aan welk grensvlak bij welke beperkende voorwaarde hoort.

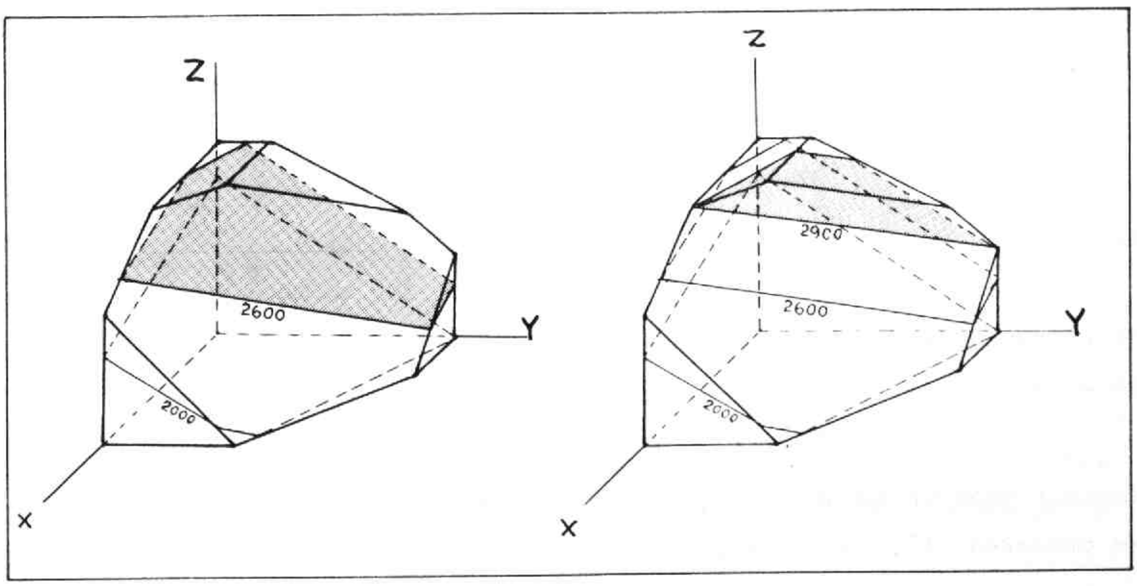
In plaats van niveau*lijnen* bij een doelfunctie van twee variabelen zijn er nu niveau*vlakken*. Zo levert een winst(niveau) van *f* 2.000,--:

$$2000 = 50x + 200y + 300z$$

het volgende *isowinstvlak* op:




Andere isowinstvlakken zijn hiermee evenwijdig:



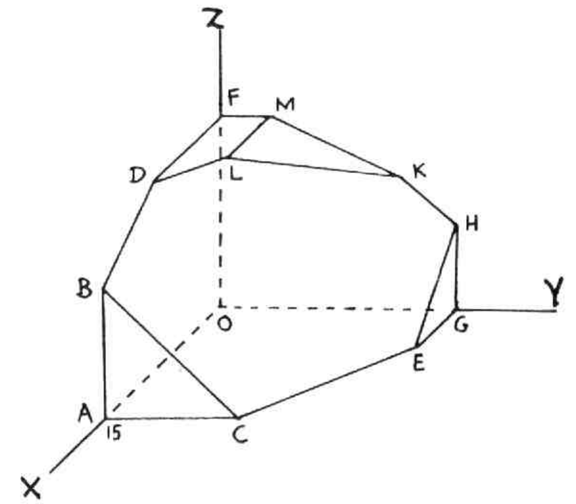
≫ 40. Kun je aan de hand van deze isowinstvlakken al een voorspelling doen over de maximale winst?

Erg duidelijk is een dergelijke tekening niet. En als er meer dan drie variabelen in het spel zijn gaat deze grafische methode helemaal niet meer.

≫ 41. Waarom?

Er is echter een andere methode die ons in dat geval uit de brand kan helpen. Bij deze methode loop je als het ware over de randen van het toegestane gebied, en wel steeds van het hoekpunt waar je bent naar een hoekpunt dat 'hoger' ligt. Dus naar een punt waar de winst hoger is.

Bekijken we nog eens het toegestane gebied:




We kunnen de wandeling beginnen in het punt (0,0,0).
De winst is daar:

$$W(0,0,0) = 0$$

Vandaar gaan we wandelen over de rand naar een 'hoger' punt.
We proberen (15,0,0) (= A).

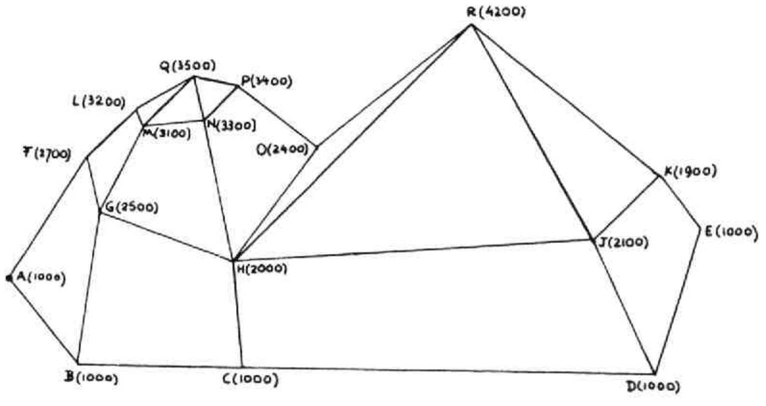
≫ 42. Bereken de winst in A. Maak een tabel als volgt:

| punt | winst |
|---|---|
| 0,0,0 | 0 |
| 15,0,0 | ..... |
| | |

Wandel vanuit A naar B of naar C. Bereken de coördinaten van het door jou uitgekozen punt en bereken daar de winst. Vul deze in de tabel in.

≫ 43. Zet je wandeling over de randen voort, net zo lang tot je in het punt bent aangekomen dat het hoogste lijkt te liggen. Vul de gevonden waarden steeds in de tabel in.
Vergelijk je antwoorden steeds met de tekening waarin de isowinstvlakken waren getekend.

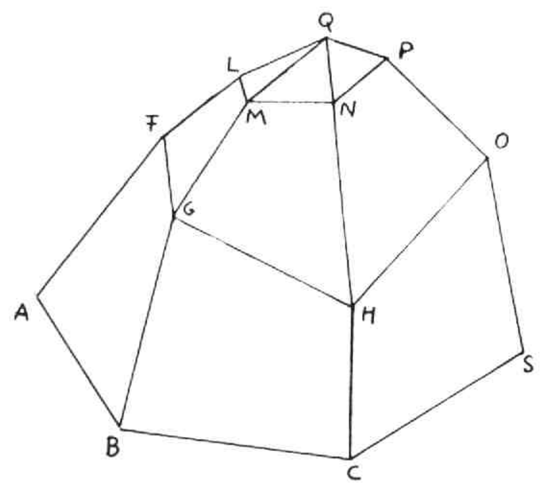
≫ 44. Welk voordeel heeft het om op deze manier van een punt naar een 'naastgelegen' hoger punt te lopen tot je 'boven' bent, ten opzichte van het berekenen van de winstwaarde in *alle* hoekpunten en dan de grootste te nemen?




Een wat ingewikkelder gebied, met bij alle zichtbare hoekpunten de functiewaarde van de doelfunctie. Met enige fantasie zijn er twee bergen in te herkennen met daartussen een zadelpunt.

≫ 45. Begin de wandeling in B. Ga vandaar naar een naastgelegen hoekpunt met een *hogere* functiewaarde. Maak weer een tabel als bij opgave ≫ 42. Wat wordt zo het hoogste punt? Wat vind je van de randenwandelmethode in dit geval?

De randenwandelmethode levert bij zo'n gebied met meerdere toppen geen goede oplossing.
Wèl als we te maken hebben met een 'alleenstaande' berg:




Gelukkig hebben toelaatbare gebieden bij lineair programmeren altijd een 'eenzame berg'-vorm. Over de achtergronden daarvan zullen we het niet hebben, maar het is wel snel te zien wanneer een gebied een 'eenzame berg' is.
Neem je namelijk in bovenstaande tekening twee willekeurige punten op de berg (b.v. G en O), dan loopt de verbindingslijn *door* de berg (een tunnel).

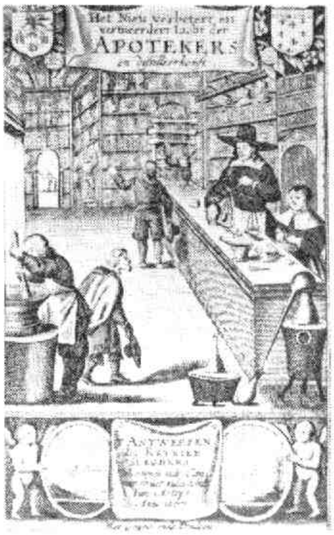
≫ 46. Laat zien dat in de tekening van de *dubbelberg* (minstens) een paar punten te vinden zijn, waarvan de verbindingslijn niet *dóór* de bergen lopen (tunnel) maar *buiten* het gebied ('kabelbaan').

Men zegt wel dat de 'eenzame berg' *convex* is en de dubbelberg niet.
Toelaatbare gebieden bij lineaire programmering zijn altijd convex.
Als gevolg daarvan kunnen we de randenwandelmethode gebruiken.

# 5

# RANDEN WANDELEN

## MEDICIJNEN




Een farmaceutisch bedrijf moet binnen een tijdsbestek van 190 uur grote hoeveelheden van drie medicijnen maken (1), die we even U, V en W noemen.

1000 flesjes U maken kost 3 uur;
1000 flesjes V maken kost 2 uur;
1000 flesjes W maken kost 4 uur.

Hij kan niet meer dan 30.000 flesjes U, (2)
40.000 flesjes V, (3)
en 20.000 flesjes W maken. (4)

Het aantal duizendtallen te maken flesjes U noemen we $u$; het aantal duizendtallen flesjes V noemen we $v$ en van W maken we er $w$ duizend.

≫ 47. Laat zien dat de beperkende voorwaarden (2), (3) en (4) een toelaatbaar gebied in de vorm van een blok opleveren. Teken het.

≫ 48. Laat zien dat de beperkende voorwaarde (1) een vlak oplevert. Teken dit in dezelfde tekening en bepaal het toelaatbare gebied als je alle vier beperkende voorwaarden bekijkt.

Per duizend flesjes U maakt de fabriek *f* 24,-- winst. Voor V en W liggen die getallen als volgt: *f* 35,-- en *f* 18,--.

≫ 49. Bepaal de doelfunctie, in dit geval de winstfunctie.

≫ 50. Probeer via de randenwandelmethode (te beginnen in (0,0,0) de maximale winst te vinden.

BISTRO

Een bistrohouder koopt vlees van drie leveranciers.

Slager A kan hem maximaal 30 kg leveren;
slager B kan hem maximaal 50 kg leveren;
slager C kan hem onbeperkt leveren.

De bistro-eigenaar bestelt $a$ kg bij A; $b$ kg bij B en $c$ kg bij C.

≫ 51. Aan welke voorwaarden moeten $a$, $b$ en $c$ voldoen? Teken dit gebied in een driedimensionaal stelsel.

De eigenaar wil niet meer dan 120 kg bestellen.

≫ 52. Schets het toelaatbare gebied in het driedimensionaal stelsel van opgave ≫ 51.

De bistro-eigenaar maakt op het vlees van A *f* 25,-- winst per kilo. Op het vlees van B *f* 20,-- en op dat van C *f* 15,--.

≫ 53. Zonder verdere berekening kun je al zeggen wat het handigst is voor de bistroeigenaar. Wat?

Om in te zien hoe de randenwandelmethode werkt, proberen we dit antwoord ook op deze manier te vinden:

≫ 54. Bepaal de doelfunctie, in dit geval de winstfunctie.

≫ 55. Probeer via de randenwandelmethode (te beginnen in (0,0,0)) de maximale winst te vinden.

Deze randenwandelmethode laat zich ook toepassen in gevallen waarbij er *meer* dan drie variabelen zijn. Alleen het tekenen gaat dan niet meer.

De randenwandelmethode staat bekend onder de naam: *SIMPLEX*methode. De simplexmethode kan met behulp van de computer ook worden gebruikt in lineaire programmeringsproblemen met *honderden* variabelen.
Maar in eenvoudiger gevallen is ook een oplossing zonder computer mogelijk, maar dat vereist wat meer wiskundevoorkennis.

# 6 SPELINGSVARIABELEN

Even terug naar opgave ≫ 23: BOEKENREKJES.

*Een bedrijf maakt metalen boekenrekjes. Voor ieder rekje zijn drie machines nodig. Er zijn twee uitvoeringen van de rekjes: normaal en abnormaal (mooi).*

*De normale rekjes worden in 5,6 uur gemaakt:*

*2,0 uur door machine I;*
*1,2 uur door machine II;*
*2,4 uur door machine III.*

*Dezelfde machines worden ook gebruikt voor de mooie rekjes:*

*2,0 uur door machine I;*
*2,4 uur door machine II;*
*0,8 uur door machine III.*

*De machines draaien (ieder) maximaal 48 uur per week.*
*De winst per normaal rekje is f 2,40.*
*De winst op een abnormaal rekje is f 4,80.*

*≫ Hoeveel rekjes van iedere soort zou de fabrikant moeten maken als hij maximale winst zou willen maken? Is er meer dan één oplossing?*

De doelstellingsfunctie is:

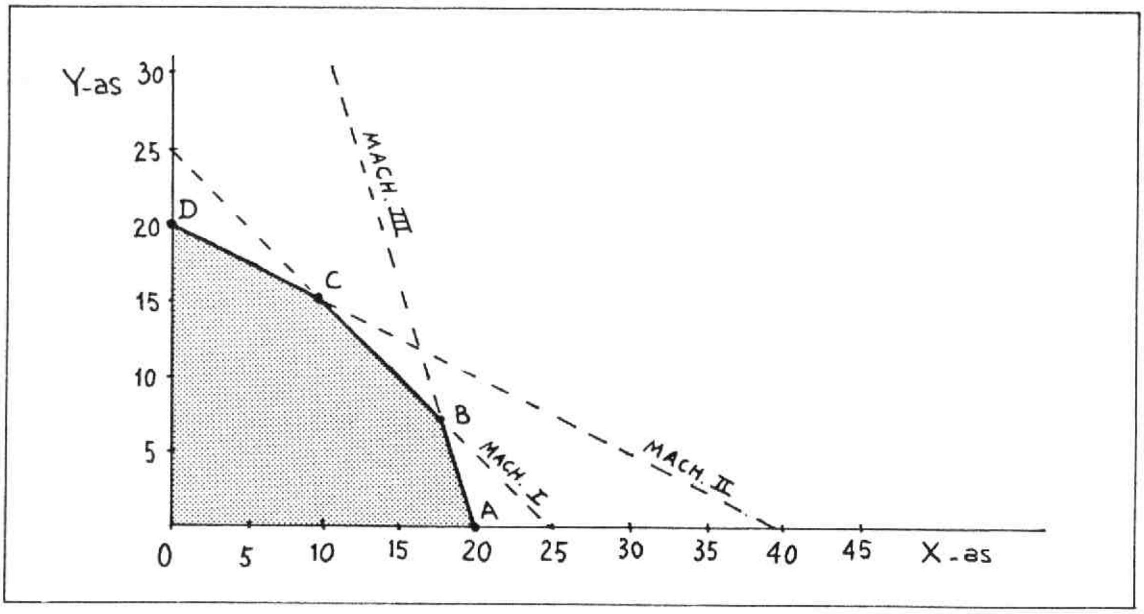
$$W = 2{,}40x + 4{,}80y$$

met $x$: het aantal normale rekjes;
$y$: het aantal abnormale rekjes.

Het toelaatbare gebied is:

$$2{,}0x + 2{,}0y \leqq 48 \text{ (machine I)}$$
$$1{,}2x + 2{,}4y \leqq 48 \text{ (machine II)}$$
$$2{,}4x + 0{,}8y \leqq 48 \text{ (machine III).}$$

Dit geeft het volgende toelaatbare gebied:




Bij opgave ≫ 23 losten we dit probleem op met niveaulijnen van de doelfunctie:

$$W = 2{,}40x + 4{,}80y.$$

Nu gaan we kijken wat de randenwandelmethode hier oplevert:

≫ 56. Begin in (0,0) en wandel naar het hoogste punt of de hoogste punten.

Maak een tabel:

| Punt | Winst |
|---|---|
| (0,0) | ..... |
| ⋮ | ⋮ |

Bij deze methode ga je er - terecht - vanuit dat het maximum in een hoekpunt of op de rand bereikt wordt. We hoeven dus niet het hele toelaatbare gebied te inspecteren, maar alleen de randen.
Het inspecteren van die hoekpunten wordt bij meer variabelen en meer beperkingen een verschrikkelijke hoeveelheid werk. Gelukkig kunnen we gebruik maken van de computer. Dan moeten we echter de wiskundige formulering van het probleem wat anders noteren. Ogenschijnlijk zelfs veel ingewikkelder.

We hebben:

Maximaliseer: $W = 2{,}40x + 4{,}80y$

op het toelaatbare gebied:

$$2{,}0x + 2{,}0y \leqq 48$$
$$1{,}2x + 2{,}4y \leqq 48$$
$$2{,}4x + 0{,}8y \leqq 48$$

Nu kan door een list $2{,}0x + 2{,}0y \leqq 48$
geschreven worden als:

$$2{,}0x + 2{,}0y + r = 48$$

≫ 57. Verklaar de list.
$r$ wordt een *spelingsvariabele* genoemd. Waarom?

Op dezelfde wijze kun je

$$1{,}2x + 2{,}4y \leqq 48$$

herschrijven als:

$$1{,}2x + 2{,}4y + s = 48.$$

≫ 58. Pas de list ook toe op de derde beperkende voorwaarde. Noem de derde spelingsvariabele $t$.

Het probleem kan nu opnieuw geformuleerd worden:

Maximaliseer: $W = 2{,}40x + 4{,}80y$

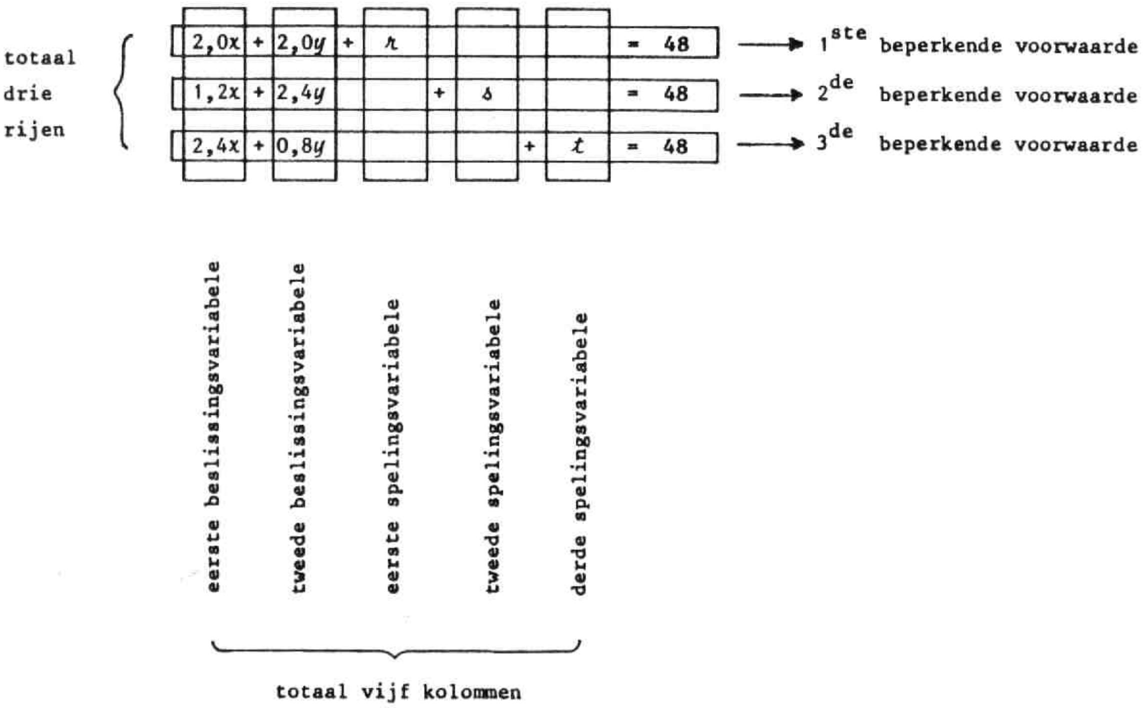
waarbij $x$ en $y$, evenals de spelingsvariabelen $r$, $s$ en $t$ (allemaal $\geqq 0$) oplossingen moeten zijn van het stelsel lineaire vergelijkingen:

$$\begin{array}{lcll} 2{,}0x + 2{,}0y + r & & = 48 & \text{(machine I)} \\ 1{,}2x + 2{,}4y & + s & = 48 & \text{(machine II)} \\ 2{,}4x + 0{,}8y & & + t = 48 & \text{(machine III)} \end{array}$$

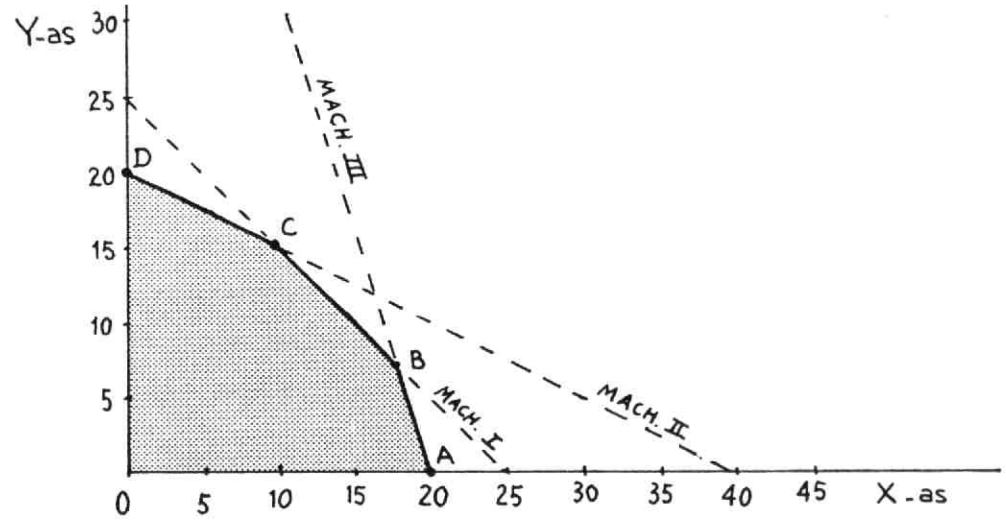
We noemen dit de *kanonieke* vorm van een lineair programmeringsprobleem. $x$ en $y$ worden de *beslissingsvariabelen* genoemd.

≫ 59. Waarom?

Van groot belang bij het opstellen van de kanonieke vorm is de *structuur* van de manier van opschrijven. Die structuur is bij het voorbeeld als volgt:



Wat betekent dit nu allemaal? En met name, wat is de betekenis van de list die ons de spelingsvariabelen $r$, $s$ en $t$ opleverde?




Wat is er aan de hand als $r = 0$? Dan is er géén speling op machine I en dus geldt:

$$2,0x + 2,0y = 48.$$

Dat is precies de grenslijn van het gebied bepaald door machine I.

≫ 60. Verklaar waarom de andere grenslijnen ook op zo'n manier zijn voor te stellen. Zet bij iedere grenslijn de juiste voorwaarde.

Bij de randenwandelmethode wandel je van hoekpunt naar hoekpunt. Stel dat we beginnen in $O$ (dus: $x = 0$; $y = 0$).

Als we $x = 0$, $y = 0$ invullen in de kanonieke vorm, krijg je:

$$\begin{aligned} 0 + 0 + r \phantom{{}+s+t} &= 48 \\ 0 + 0 \phantom{{}+r} + s \phantom{{}+t} &= 48 \\ 0 + 0 \phantom{{}+r+s} + t &= 48 \end{aligned}$$

en de winst is $0 + 0 = 0$.

Er wordt dus niets geproduceerd en geen winst gemaakt.
De oplossing van het stelsel is (0,0,48,48,48).

≫61. Wat betekent het dat $r = 48$?

We wandelen vanuit $O$ naar A.

≫62. Waarom geldt in A dat $y = 0$; $t = 0$?

≫63. Vul deze waarden in de kanonieke vorm in en los het stelsel op. Bepaal de winst.

≫64. Doe hetzelfde (als bij de opgaven ≫62 en ≫63) voor B.

≫65. Ook voor C en D.

Het is overduidelijk dat deze methode erg veel tijd en moeite kost. Echter, deze manier kan men ook toepassen voor een *willekeurig* aantal beslissingsvariabelen en een *willekeurig* aantal spelingsvariabelen.

SAMENGEVAT:

Er moest een (lineaire) doelfunctie van *twee* variabelen gemaximaliseerd worden.
Het *toelaatbare* gebied voldeed aan *drie* (lineaire) ongelijkheden. Door introductie van *drie* spelingsvariabelen werden dit vergelijkingen.
In totaal kreeg je dan *vijf* variabelen.
Om een hoekpunt (en dus een oplossing) te vinden moeten (minstens) *twee* variabelen nul zijn.
We zoeken net zo lang tot we het hoogste punt gevonden hebben.

# 7 KANONIEKE VORM

Als er erg veel variabelen in het spel zijn, kan het alfabet tekort schieten. Stel dat er een probleem is met 15 beslissingsvariabelen en 21 spelingsvariabelen, dan gaat het mooi mis met $x, y$, ... en $r$, $s$, $t$, ... Daarom zullen we beslissingsvariabelen vaak:

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots.$$

en de spelingsvariabelen:

$$s_1,\ s_2,\ s_3,\ \ldots.$$

noemen.

≫ 66. Schrijf in de kanonieke vorm (denk daarbij aan de goede structuur!):

Maximaliseer: $3x_1 + 2x_2$

met:

$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 &\leqq 200 \\ x_1 + x_2 &\leqq 80 \\ \tfrac{1}{3}x_1 + x_2 &\leqq 60 \end{aligned}$$

≫ 67. Schrijf in de kanonieke vorm:

Maximaliseer: $3x_1 - 2x_2 + 5x_3$

met:

$$\begin{aligned} 6x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\leqq 6 \\ -2x_2 + x_3 &\leqq 3 \\ x_3 - 5x_1 &\leqq 2 \end{aligned}$$

≫ 68. Schrijf het bier/ale-probleem uit het eerste hoofdstuk in de kanonieke vorm en los het probleem op met de in hoofdstuk 6 geschetste methode.

Een fabriek van elektronische apparatuur maakt twee soorten produkten: A en B.

De eindmontage van A vergt 4 uur.
De eindmontage van B vergt 2 uur.
De eindcontrôle van A kost 2 uur.
De eindcontrôle van B kost 5 uur.

Voor de montage zijn twee werknemers beschikbaar en voor de eindcontrôle drie. Een werknemer werkt 8 uur per dag.
De winst op A bedraagt *f* 20,-- en op B *f* 30,--.

≫69. Schrijf dit probleem - waarbij het gaat om de maximale winst - in de kanonieke vorm.

≫70. Teken het toelaatbare gebied en geef daarin aan welke twee voorwaarden in ieder hoekpunt gelden (als bij opgave ≫62).

≫71. Vul die waarden uit opgave ≫70 in de kanonieke vorm in.
Waarom krijg je steeds twee vergelijkingen met twee onbekenden?
Is zo'n stelsel in principe op te lossen?

Hoofdstuk 4 begon met het voorbeeld:

Te maximaliseren: $W = 50x + 200y + 300z$.

Toelaatbare gebied:

$$\begin{array}{rcrcrcl} \tfrac{1}{2}x & + & y & + & z & \leq & 13 \\ & & y & + & 2z & \leq & 18 \\ x & & & & & \leq & 15 \\ & & y & & & \leq & 10 \\ & & & & z & \leq & 8 \end{array}$$

≫72. Hoeveel beslissingsvariabelen zijn hier?

≫73. Hoeveel spelingsvariabelen zijn er?

≫74. Schrijf dit voorbeeld in de kanonieke vorm.
(Gebruik $x_1$, .... voor beslissingsvariabelen
en $s_1$, .... voor spelingsvariabelen).

≫ 75. Verklaar waarom voor hoekpunt B van de figuur op blz. 16 geldt:

$x_2 = 0$

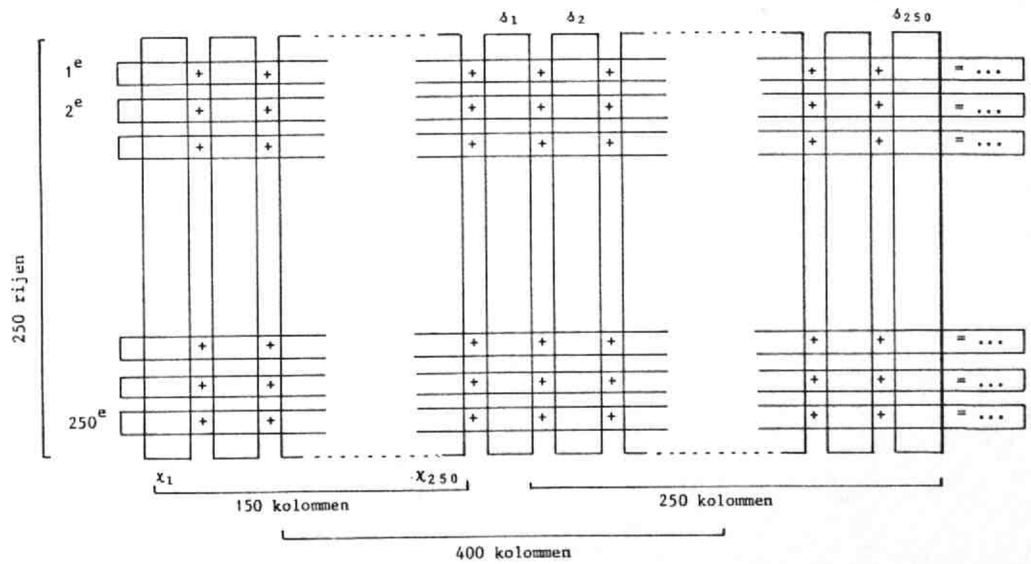
$s_1 = 0$

$s_3 = 0$ Waarom *drie* voorwaarden?

≫ 76. Waarom hou je een stelsel van vijf vergelijkingen over met vijf onbekenden als je de voorwaarde van B invult in de kanonieke vorm? Is zo'n stelsel op te lossen?

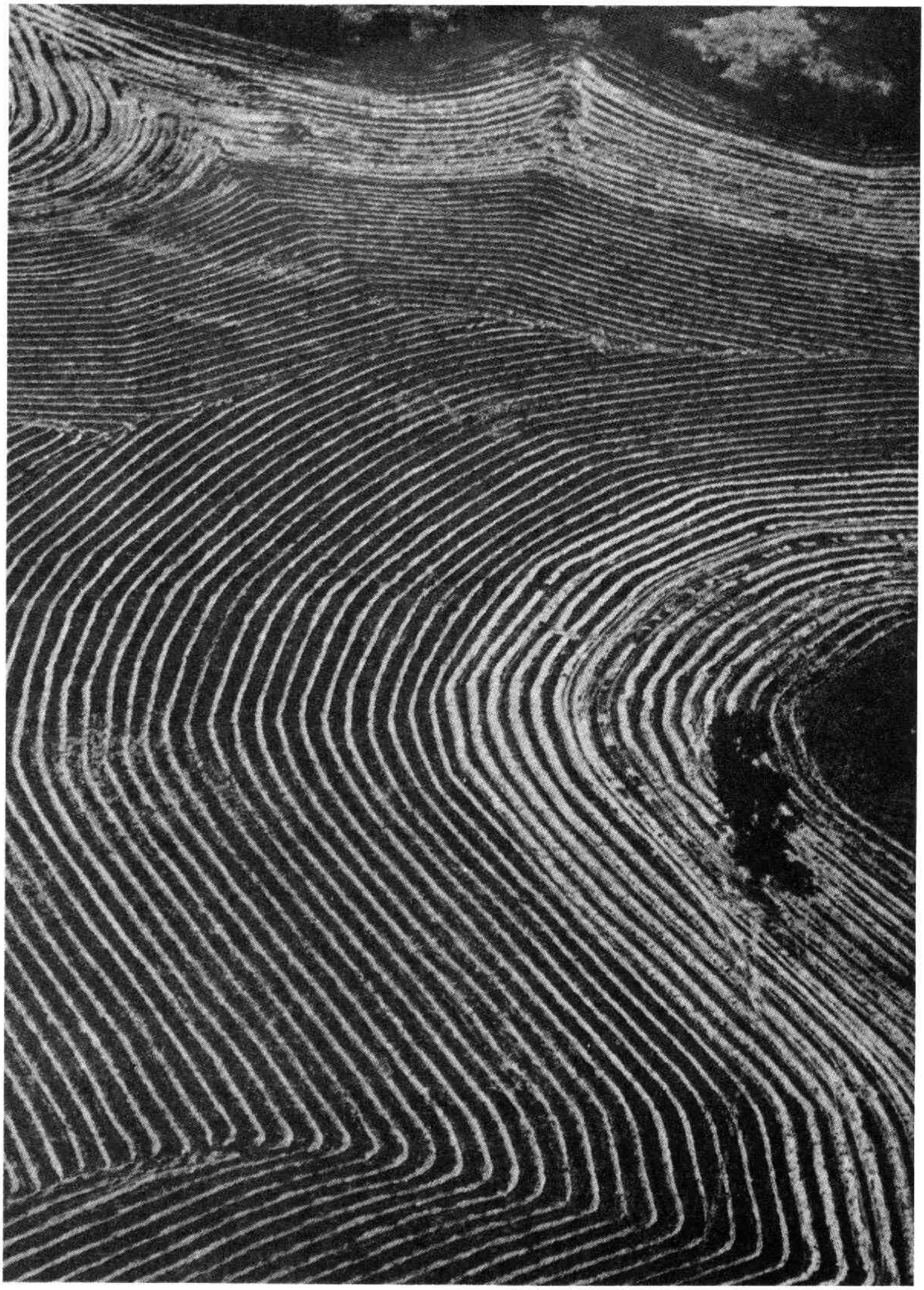
Misschien wordt nu duidelijk waarom deze methode 'altijd' werkt. Als je 150 beslissingsvariabelen hebt en 250 spelingsvariabelen, krijg je in principe een systeem van 250 vergelijkingen met 400 onbekenden.

De structuur van de kanonieke vorm ziet er dus als volgt uit:




Maar voor ieder 'hoekpunt' geldt dat er 150 variabelen gelijk aan nul zijn. Vul je dat in de kanonieke vorm in, dan blijft er een systeem over van 250 vergelijkingen met 250 onbekenden. En dat is in principe oplosbaar. Zeker met de computer.

In het volgende hoofdstuk zullen we zien hoe je een systeem van b.v. zes vergelijkingen met zes onbekenden oplost.



*Op deze foto, die ook op de voorkant van dit boekje staat, zijn door een tractor voren in de grond getrokken. In heuvelachtig terrein zo-als hier, zijn deze lijnen in feite niets anders dan hoogtelijnen. Overigens: L.P. wordt nogal eens gebruikt in de landbouw.*

# 8 VEGEN

In dit hoofdstuk wordt bekeken hoe een stelsel van $n$ vergelijkingen met $n$ onbekenden kan worden opgelost.

Het eenvoudigste geval is $n = 2$; dus twee vergelijkingen met twee onbekenden:

$$\begin{cases} 3x + 5y = 11 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Een manier van oplossen gaat als volgt:
vermenigvuldig de tweede vergelijking met 3 en trek die van de eerste vergelijking af:

$$\begin{array}{l} 3x + 5y = 11 \\ \underline{3x - 3y = 3} \; - \\ 0 \cdot x + 8y = 8 \end{array}$$

De eerste vergelijking van het stelsel wordt nu door dit resultaat vervangen:

$$\begin{cases} 0 \cdot x + 8y = 8 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

waaruit gemakkelijk volgt:

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

ofwel: $(x,y) = (2,1)$

≫ 77. Los zelf het volgende stelsel op:

$$\begin{cases} 3a + 5b = 11 \\ a - b = 1 \end{cases}$$

Zoals te verwachten, was er geen 'echt' verschil tussen:

$$\begin{cases} 3x + 5y = 11 \\ x - y = 1 \end{cases} \quad \text{en} \quad \begin{cases} 3a + 5b = 11 \\ a - b = 1 \end{cases}$$

Van belang zijn eigenlijk alleen de coëfficiënten en de plaats daarvan!

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $3x$ | + | $5y$ | = | 11 | → eerste vergelijking |
| $1x$ | − | $1y$ | = | 1 | → tweede vergelijking |
| kolom $x$ | | kolom $y$ | | | |

In matrixnotatie:

$$\begin{array}{ll} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 5 & 11 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right) & \begin{array}{l} \longrightarrow \text{eerste vergelijking} \\ \longrightarrow \text{tweede vergelijking} \end{array} \\ \begin{array}{cc} \text{kolom } x & \text{kolom } y \end{array} & \end{array}$$

≫ 78. Verklaar dat beide vergelijkingen van hierboven in matrixnotatie als volgt opgelost (kunnen) worden.
Schrijf daartoe iedere matrix weer in de vorm van een stelsel vergelijkingen.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 5 & 11 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \quad \text{wordt:}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 8 & 8 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \quad \text{wordt:}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \quad \text{wordt:}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

≫ 79. Stel dat iemand een systeem van vier vergelijkingen met vier onbekenden heeft teruggebracht tot:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Breng deze matrixnotatie terug tot een stelsel van vier vergelijkingen met vier onbekenden.
Geef de oplossing van het stelsel.

≫ 80. Schrijf het stelsel:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \qquad\quad - 2x_4 = 3 \\ \qquad 2x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 \qquad\quad = 6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 6 \end{cases}$$

in matrixvorm.

≫ 81. Schrijf het stelsel:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 4 \\ x_3 + 2x_4 = 6 \\ x_2 - x_4 = 1 \\ x_3 + 2x_1 = 3 \end{cases}$$

in matrixvorm.

≫ 82. Schrijf het stelsel:

$$\begin{cases} x_1 - 3 = x_2 + 2x_4 \\ x_3 + x_4 = 4 - 2x_2 \\ x_1 + x_3 = 6 - x_2 \\ x_4 + x_2 + x_1 = 6 - 2x_3 \end{cases}$$

in matrixvorm.

Om te laten zien hoe het oplossen van een stelsel van drie vergelijkingen met drie onbekenden gaat in matrixnotatie en in de vergelijkingennotatie, het volgende voorbeeld:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2 \end{cases} \qquad \text{of} \qquad \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

We gaan de $x_1$ *elimineren* uit de tweede vergelijking door de eerste er twee keer af te trekken.
We krijgen dan:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 0 - 5x_2 - x_3 = -11 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2 \end{cases} \quad \text{of} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -5 & -1 & -11 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

We gaan de $x_1$ elimineren uit de derde vergelijking door de eerste er af te trekken.
We krijgen dan:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 0 - 5x_2 - x_3 = -11 \\ 0 - 2x_2 + 0 = -4 \end{cases} \quad \text{of} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -5 & -1 & -11 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \end{array}\right)$$

De derde vergelijking kan anders geschreven worden:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 0 - 5x_2 - x_3 = -11 \\ 0 + x_2 + 0 = 2 \end{cases} \quad \text{of} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -5 & -1 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

De oplossing $x_2 = 2$ is nu zowel links als rechts af te lezen.
Maar we gaan verder met elimineren.

≫83. Verklaar de volgende stappen:

$$\begin{cases} x_1 + 0 + x_3 = 4 \\ 0 + 0 - x_3 = -1 \\ 0 + x_2 + 0 = 2 \end{cases} \quad \text{of} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

en tenslotte:

$$\begin{cases} x_1 + 0 + 0 = 3 \\ 0 + 0 + x_3 = 1 \\ 0 + x_2 + 0 = 2 \end{cases} \quad \text{of} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

dus: $(x_1, x_2, x_3) = (3,2,1)$.

De stelsels die bij de opgaven ≫80 en ≫82 staan zijn dezelfde zoals blijkt uit hun matrixvorm. De oplossing van opgave ≫79 is tevens oplossing van ≫80 en ≫82.

≫ 84. Hoe kun je dat controleren?

De vraag is nu hoe je van de matrixvorm van opgave ≫ 80 (82) naar die van ≫ 79 kunt komen.
Dat gaan we nu in detail bekijken.

Dus hoe kom je van:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 6 \end{array}\right) \quad \text{naar:} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

We beginnen met:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

We gaan nu proberen in de linker vier kolommen steeds één 1 en drie nullen te krijgen. En die énen moeten ieder in een andere rij staan.
We laten eerst het oog vallen op de 1 links boven. Die mag blijven:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

Met deze 1 op de 'vierde etage' gaan we de linkerkolom (schoorsteen) schoon vegen. Dat wil zeggen: alle getallen *nul* maken. Dus de linkerkolom moet zó worden:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ 0 & \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ 0 & \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ 0 & \cdots\cdots\cdots & \cdots \end{array}\right)$$

Op de derde etage valt niets te vegen, die is al schoon. (Er is al een nul).

De 1 op de tweede etage 'vegen' we door de vierde etage van de tweede af te trekken.
Je krijgt dan:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

Van de linker schoorsteen moet nu alleen nog de eerste etage worden geveegd. Ook weer door er de vierde etage vanaf te trekken:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

Zo. Daarmee is de linker schoorsteen geveegd.

Nu een andere. In de derde kolom staat een 1 op de derde etage. Laten we daarmee de derde schoorsteen schoonvegen:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

≫ 85. a. Verklaar de volgende stap:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & -5 \end{array}\right)$$

Nu is ook de derde schoorsteen geveegd.

De volgende kolom die zich leent om geveegd te worden is de vierde, want daar zitten al twee bruikbare enen in.

≫ 85. b. Er staan *drie* énen in de vierde kolom.
Waarom zijn er maar twee bruikbaar?

≫ 85. c. Verklaar:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & -5 \end{array}\right)$$

wordt:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right)$$

Tenslotte vegen we de nog overgebleven vuile schoorsteen, namelijk de tweede.

≫ 85. d. Verklaar waarom de $-2$ moet blijven (in die tweede kolom) en laat zien dat we uiteindelijk krijgen:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Hiermee zijn we terug bij opgave ≫ 79 en is het probleem opgelost.
Dit principe - de schoorsteenveegmethode - is ook in moeilijker gevallen bruikbaar.

≫ 86. Los op (met de veegmethode):

$$\begin{aligned} 2x_1 \phantom{{}+2x_2} - x_3 &= -4 \\ -x_1 + 2x_2 \phantom{{}-x_3} &= 3 \\ 3x_2 + 2x_3 &= 7 \end{aligned}$$

≫ 87. Los op:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 15 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 13 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 9 \end{aligned}$$

≫ 88. Los op:

$$\begin{aligned} 2x_1 \phantom{{}+2x_2} + x_3 + x_4 &= 8 \\ x_1 + 2x_2 \phantom{{}+x_3} + 3x_4 &= 9 \\ x_1 \phantom{{}+2x_2} + 3x_3 + 2x_4 &= 7 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 10 \end{aligned}$$

≫ 89. Los op:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 \phantom{{}-x_3} + 2x_4 &= 3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 &= -1 \end{aligned}$$

# 9

## SIMPLEX METHODE (I)

De Simplex- of Randenwandelmethode wordt in dit hoofdstuk gebruikt bij het opstellen van het ale- en/of bierprobleem uit hoofdstuk 1. Daarbij passen we de veegmethode toe uit het vorige hoofdstuk.

### DE EERSTE STAP

De eerste stap is het opstellen van de *doelfunctie* en de *beperkende voorwaarden*.
In het eerste hoofdstuk werd dit stap voor stap gedaan met het volgende resultaat:

*Doelfunctie:* $W = 15x_1 + 25x_2$

*Beperkende voorwaarden:*

$$\begin{array}{rcrcl l}
5x_1 & + & 15x_2 & \leqq & 480 & \text{(maïs)} \\
x_1 & + & x_2 & \leqq & 40 & \text{(hop)} \\
35x_1 & + & 20x_2 & \leqq & 1190 & \text{(gerstmout)}
\end{array}$$

### DE TWEEDE STAP

De tweede stap is het invoeren van *spelingsvariabelen*.
Het probleem kan dan in de kanonieke vorm geschreven worden:

$$\begin{array}{rcrcccl}
5x_1 & + & 15x_2 & + s_1 & & & = 480 \\
x_1 & + & x_2 & & + s_2 & & = 40 \\
35x_1 & + & 20x_2 & & & + s_3 & = 1190 \\
\hline
15x_1 & + & 25x_2 & & & & = W
\end{array}$$

DE DERDE STAP

De kanonieke vorm wordt nu in *matrixnotatie* geschreven:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 15 | 1 | 0 | 0 | 480 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 40 |
| 35 | 20 | 0 | 0 | 1 | 1190 |
| 15 | 25 | 0 | 0 | 0 | W |

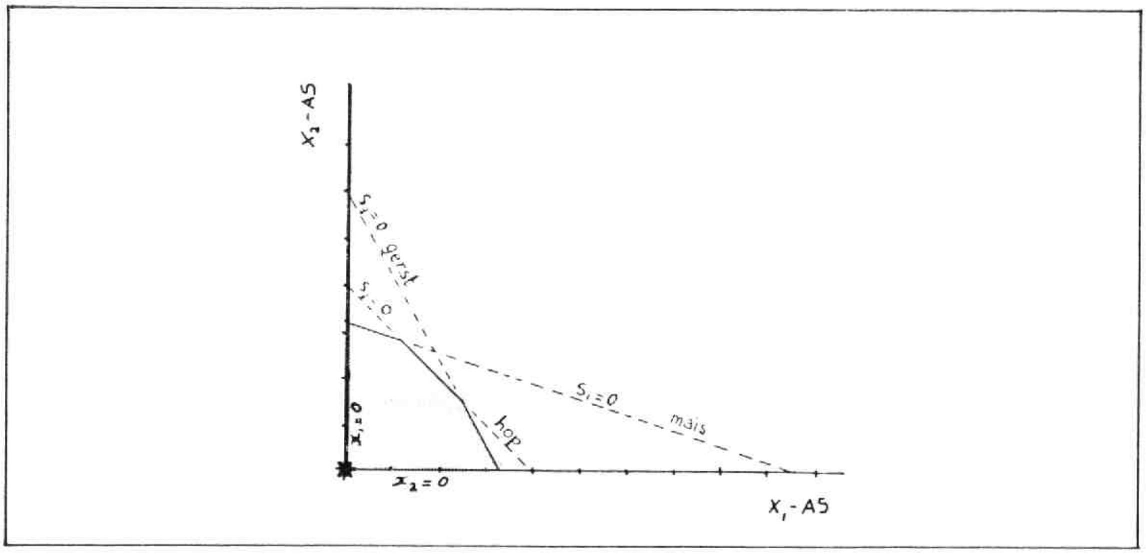
Dit wordt het *SIMPLEX-TABLEAU* genoemd.

Een eerste oplossing is direct uit het tableau af te lezen:

$$x_1 = 0,\quad x_2 = 0,\quad s_1 = 480,\quad s_2 = 40,\quad s_3 = 1190.$$

≫ 90. Verklaar deze oplossing in termen van het ale-/bierprobleem.
Hoe groot is de winst?

Omdat er maar *twee beslissingsvariabelen* zijn is de oplossing grafisch weer te geven:




De eerste basisoplossing is dus:

$$x_1 = 0,\quad x_2 = 0,\quad s_1 = 480,\quad s_2 = 40,\quad s_3 = 1190\,.$$

ofwel: (0, 0, 480, 40, 1190).

DE VIERDE STAP

We gaan nu wandelen vanuit het eerste hoekpunt (vanuit de eerste basisoplossing).

De vraag is: Welke kant op?
Het slimste is om in die richting te wandelen die de snelste toename in de winst geeft. (We willen zo steil mogelijk klimmen).

De winstfunctie is: $W = 15x_1 + 25x_2$.

≫ 91. Welke variabele moeten we vermeerderen om zo snel mogelijk te stijgen: $x_1$ of $x_2$?

We zitten in de eerste basisoplossing $x_1 = 0$, $x_2 = 0$.
Uit het antwoord op opgave ≫ 91 volgt dat we moeten gaan wandelen langs de rand $x_1 = 0$. (Grafiek!).

Nu kan $x_1 = 0$ in principe snijden met $s_1 = 0$
met $s_2 = 0$
en met $s_3 = 0$

≫ 92. Welk van de drie snijpunten moeten we hebben:
$x_1 = 0$, $s_1 = 0$ of $x_1 = 0$, $s_2 = 0$ of $x_1 = 0$, $s_3 = 0$?

Uit de antwoorden van opgave ≫ 90 en ≫ 91 volgt dat het verstandig is om:

1. $x_2$ groter te laten worden, omdat de *coëfficiënt* van $x_2$ (*in de doelfunctie*) het *grootst* is;
2. te wandelen naar het hoekpunt dat het *dichtst bij* ligt om er zeker van te zijn dat we nog in het toelaatbare gebied zitten.
(In dit geval $x_1 = 0$, $s_1 = 0$).

## DE VIJFDE STAP

In deze vijfde stap wandelen we van de eerste basisoplossing naar de volgende.

We hadden:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 15 | 1 | 0 | 0 | 480 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 40 |
| 35 | 20 | 0 | 0 | 1 | 1190 |
| 15 | 25 | 0 | 0 | 0 | $W$ |
| | 1 | | | | |

Een oplossing: (0, 0, 480, 40, 1190); Winst: 0.

1 geeft de grootste coëfficiënt van de doelfunctie aan.
Om $x_2$ direct uit de matrix te kunnen aflezen, gaan we de $x_2$ - kolom vegen.

Omdat die kolom geveegd moet worden, gaan we er eerst allemaal énen van maken:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{3}$ | 1 | $\frac{1}{15}$ | 0 | 0 | 32 | ← 2 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 40 | |
| $1\frac{3}{4}$ | 1 | 0 | 0 | $\frac{1}{20}$ | 59,5 | |
| 15 | 25 | 0 | 0 | 0 | $W$ | |
| | 1 | | | | | |

≫ 93. Waar vind je de getallen 32, 40 en 59,5 in de grafiek terug?
Hoe kun je aan het bovenstaande tableau zien dat $x_1 = 0$; $s_1 = 0$ het meest nabije snijpunt oplevert?

Omdat we naar het meest nabije snijpunt moeten, is nu niet alleen de vegerij (1), maar ook welk element 1 mag blijven ( ← 2) bekend.

Vegen levert dan:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{3}$ | 1 | $\frac{1}{15}$ | 0 | 0 | 32 |
| $\frac{2}{3}$ | 0 | $-\frac{1}{15}$ | 1 | 0 | 8 |
| $1\frac{5}{12}$ | 0 | $-\frac{1}{15}$ | 0 | $\frac{1}{20}$ | 27,5 |
| $6\frac{2}{3}$ | 0 | $-\frac{25}{15}$ | 0 | 0 | $W-800$ |

De schone kolommen (de tweede, vierde en vijfde) brengen we in de eenheidsmatrixvorm, zodat een oplossing direct is af te lezen.
Daartoe wordt de derde rij vermenigvuldigd met 20.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{3}$ | 1 | $\frac{1}{15}$ | 0 | 0 | 32 |
| $\frac{2}{3}$ | 0 | $-\frac{1}{15}$ | 1 | 0 | 8 |
| $\frac{85}{3}$ | 0 | $-\frac{4}{3}$ | 0 | 1 | 550 |
| $6\frac{2}{3}$ | 0 | $-\frac{5}{3}$ | 0 | 0 | $W-800$ |

≫ 94. Een oplossing van dit stelsel is nu: (0, 32, 0, 8, 550). Verklaar!

≫ 95. Verklaar ieder der coördinaten van de oplossing binnen het kader van het bier-/aleprobleem.

≫ 96. Hoe groot is de winst? Waar vind je die in het tableau?

≫ 97. Wijs de oplossing aan in de grafiek van blz.44.

Deze oplossing wordt een *tweede* basisoplossing genoemd.

## DE ZESDE STAP

Vanuit het hoekpunt $x_1 = 0$, $s_1 = 0$ moeten we verder wandelen naar een hoger gelegen punt.

We moeten $s_1 = 0$ laten snijden met $s_2 = 0$

of $s_3 = 0$

of $s_2 = 0$

We gaan op precies dezelfde wijze te werk als bij de vijfde stap:

We hadden:

$$\begin{array}{ccccc|c}
\frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{15} & 0 & 0 & 32 \\
\frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{15} & 1 & 0 & 8 \\
\frac{85}{3} & 0 & -\frac{4}{3} & 0 & 1 & 550 \\
\hline
6\frac{2}{3} & 0 & -\frac{5}{3} & 0 & 0 & W-800 \\
\uparrow & & & & & \\
1 & & & & &
\end{array}$$

We hebben geen keuze in veegkolom, want alléén verandering in $x_1$ levert vermeerdering op.

≫ 98. Verklaar dit en de stappen naar de volgende tableaus:

$$\begin{array}{ccccc|cl}
1 & 3 & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 96 & \\
1 & 0 & -\frac{1}{10} & \frac{3}{2} & 0 & 12 & \leftarrow 2 \\
1 & 0 & -\frac{4}{85} & 0 & \frac{3}{85} & \frac{330}{17} = 19,\ldots & \\
\hline
6\frac{2}{3} & 0 & -\frac{25}{15} & 0 & 0 & W-800 & \\
\uparrow & & & & & & \\
1 & & & & & &
\end{array}$$

wordt:

$$\begin{array}{ccccc|c}
0 & 3 & \frac{3}{10} & -\frac{3}{2} & 0 & 84 \\
1 & 0 & -\frac{1}{10} & \frac{3}{2} & 0 & 12 \\
0 & 0 & \frac{9}{170} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{85} & \frac{126}{17} \\
\hline
0 & 0 & -1 & -10 & 0 & W-880
\end{array}$$

wordt:

$$\begin{array}{ccccc|c}
0 & 1 & \frac{1}{10} & -\frac{1}{2} & 0 & 28 \\
1 & 0 & -\frac{1}{10} & \frac{3}{2} & 0 & 12 \\
0 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{85}{2} & 1 & 210 \\
\hline
0 & 0 & -1 & -10 & 0 & W-880
\end{array}$$

≫ 99. We lezen direct een oplossing uit dit tableau af. Welke?

≫ 100. Uit de laatste regel van het tableau volgt onmiddellijk dat $W - 880 \leq 0$ is. Dus de *maximale* winst is ƒ 880,--. Verklaar dit.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 15 | 1 | 0 | 0 | 480 | |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 40 | |
| 35 | 20 | 0 | 0 | 1 | 1190 | |
| 15 | 25 | 0 | 0 | 0 | W | |
| | ↑ 1 | | | | | |

Opstellen simplextableau.
Oplossing: (0, 0, 480, 40, 1190).
Winst: 0.

We maken van de ↑1 kolom enen, deze moet daarna geveegd worden. ($x_2$ toenemen laat de winst het snelst groeien).

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{3}$ | 1 | $\frac{1}{15}$ | 0 | 0 | 32 | ← 2 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 40 | |
| $1\frac{3}{4}$ | 1 | 0 | 0 | $\frac{1}{20}$ | 59,5 | |
| 15 | 25 | 0 | 0 | 0 | W | |
| | ↑ 1 | | | | | |

Uit ←2 volgt dat dit het meest nabije snijpunt oplevert: $x_1 = 0$, $s_1 = 0$.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{3}$ | 1 | $\frac{1}{15}$ | 0 | 0 | 32 |
| $\frac{2}{3}$ | 0 | $-\frac{1}{15}$ | 1 | 0 | 8 |
| $1\frac{5}{12}$ | 0 | $-\frac{1}{15}$ | 0 | $\frac{1}{20}$ | 27,5 |
| $6\frac{2}{3}$ | 0 | $-\frac{25}{15}$ | 0 | 0 | W - 800 |

Door vegen met 1 ontstaat dit tableau. De schone kolommen nu nog zo 'fatsoeneren' dat alleen nullen en één 1 erin staan.
(Eenheidsmatrix).

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{3}$ | 1 | $\frac{1}{15}$ | 0 | 0 | 32 |
| $\frac{2}{3}$ | 0 | $-\frac{1}{15}$ | 1 | 0 | 8 |
| $\frac{85}{3}$ | 0 | $-\frac{4}{3}$ | 0 | 1 | 550 |
| $6\frac{2}{3}$ | 0 | $-\frac{5}{3}$ | 0 | 0 | W - 800 |
| ↑ 1 | | | | | |

Oplossing: (0, 32, 0, 8, 550).
Winst: 800.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | $\frac{1}{5}$ | 0 | 0 | 96 | |
| 1 | 0 | $-\frac{1}{10}$ | $\frac{3}{2}$ | 0 | 12 | ← 2 |
| 1 | 0 | $-\frac{4}{85}$ | 0 | $\frac{3}{85}$ | $\frac{330}{17} = 19,\ldots$ | |
| $6\frac{2}{3}$ | 0 | $-\frac{25}{15}$ | 0 | 0 | W - 800 | |
| ↑ 1 | | | | | | |

$6\frac{2}{3}$ bepaalt veegkolom. Daar maken we eerst weer énen van.
(De afstandsvoorwaarde) geeft aan welk element 1 blijft in die kolom.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 3 | $\frac{3}{10}$ | $-\frac{3}{2}$ | 0 | 84 |
| 1 | 0 | $-\frac{1}{10}$ | $\frac{3}{2}$ | 0 | 12 |
| 0 | 0 | $\frac{9}{170}$ | $-\frac{3}{2}$ | $\frac{3}{85}$ | $\frac{126}{17}$ |
| 0 | 0 | -1 | -10 | 0 | W - 880 |

Vegen levert dit resultaat op.
Nu de schone kolommen nog 'mooi' maken.
(Eenheidsmatrix).

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | $\frac{1}{10}$ | $-\frac{1}{2}$ | 0 | 28 |
| 1 | 0 | $-\frac{1}{10}$ | $\frac{3}{2}$ | 0 | 12 |
| 0 | 0 | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{85}{2}$ | 1 | 210 |
| 0 | 0 | -1 | -10 | 0 | W - 880 |

Oplossing: (12, 28, 0, 0, 210).
Winst: 880.
Dus:
12 vaten ale; 210 pond mout over.
28 vaten bier.
Winst: 880 gulden.

# 10 SIMPLEX METHODE (II)

Uit het voorgaande hoofdstuk blijkt dat de simplexmethode uit de volgende stappen bestaat:

1. Stel de *doelfunctie* en *beperkende voorwaarden* op.

2. Voer *spelingsvariabelen* in. (Kanonieke vorm).

3. Maak het *simplex-tableau*; vind eerste basisoplossing.

4. Ga op zoek naar tweede basisoplossing:

   a. Veeg de kolom met de *grootste coëfficiënt* in de *doelfunctie*. Maak eerst de elementen gelijk aan 1 in die kolom.

   b. Kijk daarna naar de constantes rechts van de streep. De *kleinste constante* (kleinste afstand) bepaalt welk element in de veegkolom de 1 is.

   c. Bepaal na het vegen een tweede basisoplossing.

5. Herhaal stap 4 totdat alle coëfficiënten van de doelfunctie negatief zijn. Dan ben je op het hoogste punt.

≫ 101. Los het boekenrekjesprobleem (opgave ≫ 23) op met de simplexmethode. Controleer de oplossingen aan de hand van de grafiek van opgave ≫ 23.

≫ 102. Een hondebroodfabriek maakt twee soorten hondebrood: A en B. Voor één doos A gebruikt men 2 pond vlees en 1 pond meel. Voor de wat mindere soort B gebruikt men voor een doos 4 pond vlees en 5 pond meel.
Per dag kan maximaal 80 pond vlees en 70 pond meel worden verwerkt.
De winst op 1 doos A is *f* 3,--.
De winst op 1 doos B is *f* 10,--.
Hoeveel dozen van iedere soort zal de fabriek maximale winst opleveren? (Gebruik de simplexmethode).

≫ 103. Een fabrikant maakt glazen asbakken. Hele degelijke die *f* 5,-- kosten om te maken en waarvoor de transportkosten *f* 0,20 zijn (per stuk).
Verder goedkope reclameasbakjes: produktiekosten *f* 2,--, maar *f* 0,40 om te verzenden.
De totale produktiekosten mogen de *f* 3.000,-- niet te bovengaan.
De verzendkosten moeten onder de *f* 160,-- blijven.
Hoeveel van iedere soort zal de fabrikant maken als zijn winst op de mooie asbak *f* 2,40 en op de reclameasbak *f* 2,-- is?

Hoofdstuk 5 begon met het medicijnenprobleem (de opgaven ≫ 47, ≫ 48, ≫ 49 en ≫ 50). Bij het oplossen van dit probleem doet zich nog een kleine complicatie voor:

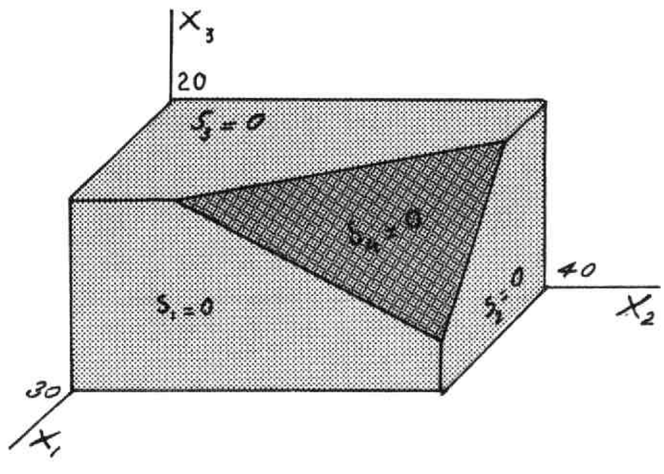
Het tableau is:

$$\begin{array}{ccccccc|c}
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 30 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 40 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 20 \\
3 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 190 \\
\hline
24 & 35 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & W
\end{array}$$

Oplossing: (0, 0, 0, 30, 40, 20, 190); $W = 0$.

≫ 104. Controleer dit tableau.

Het is snel duidelijk dat de te vegen kolom de tweede is. Daar zouden we dus van alle elementen een 1 moeten maken. Er staan echter al *twee nullen* in. Daar blijven we vanaf. Die twee nullen komen *nooit* in aanmerking om als veegelement op te treden. Het waarom blijkt uit de tekening van het toelaatbare gebied:




We zitten in (0,0,0). $x_2$ moet verhoogd worden.
We reizen dus langs de $x_2$-as. Dus $x_1 = 0$; $x_3 = 0$.
Dan kunnen we in principe snijden met een hele serie vlakken, te weten:

$$s_1 = 0$$
$$s_2 = 0$$
$$s_3 = 0$$
$$s_4 = 0$$

maar uit de tekening blijkt dat snijden met $s_1 = 0$ en $s_3 = 0$ *onmogelijk* is, omdat deze *evenwijdig* zijn met $x_2$-as!

De twee nullen in de veegrij geven aan dat er géén snijpunt is (met $s_1 = 0$ en $s_3 = 0$). Dus leveren ze zeker geen meest nabij snijpunt op. We kunnen dus slechts kiezen uit de twee andere elementen:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 30 | † | (komt niet in aanmerking) |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 40 | | |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 20 | † | (komt niet in aanmerking) |
| 3 | 2 | 4 | 0 | 0 | 0 | 1 | 190 | | |
| 24 | 35 | 18 | 0 | 0 | 0 | 0 | W | | |
| | 1 | | | | | | | | |

wordt:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 30 | † | |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 40 | ← 2 | (meest nabije snijpunt) |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 20 | † | |
| $\frac{3}{2}$ | 1 | 2 | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{2}$ | 95 | | |
| 24 | 35 | 18 | 0 | 0 | 0 | 0 | W | | |
| | 1 | | | | | | | | |

≫ 105. Los het probleem zelf verder op.

≫ 106. Los het probleem waarmee hoofdstuk 4 begint op met de simplexmethode. Controleer de basisoplossing aan de hand van de grafiek in dat hoofdstuk.

≫ 107. Doe hetzelfde met het bistroprobleem uit hoofdstuk 5.

≫ 108. Een fabrikant maakt twee soorten stof (A en B), waarbij hij gebruik maakt van drie soorten wol van verschillende kleur:

| soort wol | beschikbare hoeveelheid wol | nodig voor produktie van één rol van soort | |
|---|---|---|---|
| | | A | B |
| rood | 1400 kg | 4 kg | 4 kg |
| groen | 1800 kg | 6 kg | 3 kg |
| geel | 1800 kg | 2 kg | 6 kg |

Winst per rol A: ƒ 120,--.

Winst per rol B: ƒ 80,--.

Hoeveel rollen A en B zal hij maken om maximale winst te maken? (Gebruik de simplexmethode).

# 11

## SIMPLEX MET DE COMPUTER

Als het aantal variabelen groot wordt ligt het voor de hand de computer in te schakelen. De hele Simplex-methode is tenslotte het slaafs toepassen van enkele rekenregels en daar zijn computers buitengewoon geschikt voor. Bovendien gaat het razend snel, zelfs bij een geval met zéér veel variabelen. Het probleem is dan ook vaak niet zozeer het rekenwerk, maar het opstellen van de doelfunctie en het vinden van de beperkende voorwaarden.

Afhankelijk van het programma dat in de computer zit, kan de invoer b.v. bestaan uit:

(1) de coëfficiënten van de beperkende voorwaarden.

$$\begin{aligned} x_1 \phantom{{}+2x_2} &\leq 10 \\ x_2 &\leq 8 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 18 \\ x_1 + x_2 &\leq 13 \\ 200x_1 + 300x_2 &= W \end{aligned}$$

wordt als computer-invoer:

1, 0, 10
0, 1, 8
1, 2, 18
1, 1, 13
200, 300.

(2) de coëfficiënten van de kanonieke vorm.

$$\begin{aligned} x_1 + \phantom{3x_2} + s_1 &= 10 \\ x_2 + s_2 &= 8 \\ x_1 + 3x_2 + s_3 &= 18 \\ x_1 + x_2 + s_4 &= 13 \\ 200x_1 + 300x_2 &= W \end{aligned}$$

wordt als computer-invoer:

1, 0, 1 0 0 0 10
0, 1, 0 1 0 0 8
1, 2, 0 0 1 0 18
1, 1, 0 0 0 1 13
200, 300.

Hieronder zie je de invoer op de eerste manier. Eerst vraagt de computer het aantal beslissingsvariabelen. Daarna om het aantal beperkingen.

```
1000>  aantal beslissingsvariabelen: 10
1010>  aantal restricties: 15
1020>  20,28,28,10,45,39,28,56,18,34,3400
1030>  45,67,23,45,87,34,12,65,34,56,4567
1040>  23,56,98,67,34,28.67,88,44,56,4599
1050>  34,25,16,78,88,45,76,34.23,89,7777
1060>  54,65,29,82,46,78,25,90,45.22.8632
1070>  55,77,123,56,88,45,34,34,66,77,8888
1080>  22,55,66,987,45,23,78,80,90,45.45370
1090>  54,66,29,56,74,89,34,88,27,65,3490
1100>  90,6,30,5,4,90,34,54,76,3000,123000
1110>  11,22,33,88,45,35,76,87,80,60,4500
1120>  34,56,98,12,67,40.87,98.50,60,70000
1130>  34,56,6,7,30,87,90,45,44.44,99880
1140>  55,22,99,45,45,45,67,9,34,45,8700
1150>  4,5,6,7,8,3,5,7,3.6,800
1160>  33,60,20,80,60.50,55,66,9,5,7600
1170>  30,30,43,56.23.5.7,3,8,34
```

≫ 109. Schrijf regel 1020 in vergelijking-vorm.

≫ 110. Wat betekent regel 1170?

De output van dit probleem zie je hiernaast op de volgende bladzijde. De winst in het eerste punt is 2574,2. Deze ontstaat als $x_4 = 46,0$. Dat klopt, want de winst is dan $56 \cdot 46,0 = 2576$ (afrondingsfouten).

Na een eerste wandeling komt de computer terecht in een punt waar de winst 3211,9 is.

≫ 111. Hoe komt deze winst tot stand?

≫ 112. Toon op dezelfde wijze aan hoe de winst tot stand komt in de hogere punten.

het simplextableau ziet er zo uit:

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 19.8 | 27.4 | 27.3 | 0.0 | 44.5 | 38.8 | 27.2 | 55.2 | 17.1 | 33.5 | 2940.3 |
| 44.0 | 64.5 | 20.0 | 0.0 | 84.9 | 33.0 | 8.4 | 61.4 | 29.9 | 53.9 | 2498.5 |
| 21.5 | 52.3 | 93.5 | 0.0 | 30.9 | 26.4 | 61.7 | 82.6 | 37.9 | 52.9 | 1519.2 |
| 32.3 | 20.7 | 10.8 | 0.0 | 84.4 | 43.2 | 69.8 | 27.7 | 15.9 | 85.4 | 4191.5 |
| 52.2 | 60.4 | 23.5 | 0.0 | 42.3 | 76.1 | 18.5 | 83.4 | 37.5 | 18.3 | 4862.7 |
| 53.8 | 73.9 | 119.3 | 0.0 | 85.4 | 43.7 | 29.6 | 29.5 | 60.9 | 74.4 | 6313.8 |
| 0.0 | 0.1 | 0.1 | 1.0 | 0.0 | 0.0 | 0.1 | 0.1 | 0.1 | 0.0 | 46.0 |
| 52.8 | 62.9 | 25.3 | 0.0 | 71.4 | 87.7 | 29.6 | 83.5 | 21.9 | 62.4 | 915.8 |
| 89.9 | 5.7 | 29.7 | 0.0 | 3.8 | 89.9 | 33.6 | 53.6 | 75.5 | 2999.8 | 122770.2 |
| 9.0 | 17.1 | 27.1 | 0.0 | 41.0 | 32.9 | 69.0 | 79.9 | 72.0 | 56.0 | 454.9 |
| 33.7 | 55.3 | 97.2 | 0.0 | 66.5 | 39.7 | 86.1 | 97.0 | 48.9 | 59.5 | 69448.4 |
| 33.8 | 55.6 | 5.5 | 0.0 | 29.7 | 86.8 | 89.4 | 44.4 | 43.4 | 43.7 | 99558.2 |
| 54.0 | 19.5 | 96.0 | 0.0 | 42.9 | 44.0 | 63.4 | 5.4 | 29.9 | 42.9 | 6631.5 |
| 3.8 | 4.6 | 5.5 | 0.0 | 7.7 | 2.8 | 4.4 | 6.4 | 2.4 | 5.7 | 478.2 |
| 31.2 | 55.5 | 14.7 | 0.0 | 56.4 | 48.1 | 48.7 | 59.5 | 1.7 | 1.4 | 3922.6 |
| 28.8 | 26.9 | 39.3 | 0.0 | 20.4 | 3.7 | 2.6 | -1.5 | 2.9 | 31.4 | -2574.2 |

de waarde van de doelfunctie is 2574.18

het simplextableau ziet er zo uit:

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 13.5 | 12.2 | 0.0 | 0.0 | 35.5 | 31.0 | 9.2 | 31.1 | 6.0 | 18.1 | 2496.3 |
| 39.4 | 53.3 | 0.0 | 0.0 | 78.3 | 27.3 | -4.7 | 43.7 | 21.8 | 42.6 | 2173.7 |
| 0.2 | 0.6 | 1.0 | 0.0 | 0.3 | 0.3 | 0.7 | 0.9 | 0.4 | 0.6 | 16.2 |
| 29.8 | 14.6 | 0.0 | 0.0 | 80.9 | 40.1 | 62.7 | 18.2 | 11.5 | 79.3 | 4016.3 |
| 46.8 | 47.3 | 0.0 | 0.0 | 34.5 | 69.4 | 3.0 | 62.6 | 28.0 | 4.9 | 4480.6 |
| 26.3 | 7.2 | 0.0 | 0.0 | 46.0 | 10.0 | -49.1 | -75.8 | 12.6 | 6.9 | 4376.6 |
| 0.0 | 0.0 | 0.0 | 1.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.1 | 0.0 | 44.9 |
| 46.9 | 48.8 | 0.0 | 0.0 | 63.1 | 80.6 | 12.9 | 61.2 | 11.7 | 48.1 | 505.6 |
| 83.1 | -10.9 | 0.0 | 0.0 | -6.0 | 81.5 | 14.0 | 27.4 | 63.5 | 2983.0 | 122288.3 |
| 2.8 | 1.9 | 0.0 | 0.0 | 32.0 | 25.3 | 51.2 | 55.9 | 61.0 | 40.6 | 14.4 |
| 11.4 | 1.0 | 0.0 | 0.0 | 34.3 | 12.2 | 21.9 | 11.2 | 9.5 | 4.4 | 67869.5 |
| 32.6 | 52.5 | 0.0 | 0.0 | 27.9 | 85.3 | 85.8 | 39.5 | 41.1 | 40.5 | 99468.4 |
| 31.9 | -34.2 | 0.0 | 0.0 | 11.2 | 16.8 | 0.1 | -79.4 | -9.0 | -11.4 | 5072.1 |
| 2.6 | 1.5 | 0.0 | 0.0 | 5.9 | 1.3 | 0.8 | 1.5 | 0.1 | 2.5 | 388.4 |
| 27.8 | 47.4 | 0.0 | 0.0 | 51.5 | 44.0 | 39.0 | 46.6 | -4.2 | -6.9 | 3684.6 |
| 19.7 | 4.9 | 0.0 | 0.0 | 7.5 | -7.4 | -23.3 | -36.2 | -13.0 | 9.2 | -3211.9 |

de waarde van de doelfunctie is 3211.86

het simplextableau ziet er zo uit:

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 2.8 | 0.0 | 0.0 | -118.6 | -90.7 | -237.1 | -238.2 | -287.6 | -177.5 | 2427.1 |
| 0.0 | 26.0 | 0.0 | 0.0 | -371.7 | -328.1 | -723.8 | -742.5 | -835.6 | -528.6 | 1971.6 |
| 0.0 | 0.4 | 1.0 | 0.0 | -2.3 | -1.8 | -3.5 | -3.7 | -4.6 | -2.8 | 15.1 |
| 0.0 | -6.0 | 0.0 | 0.0 | -259.3 | -228.5 | -480.8 | -576.1 | -636.5 | -352.5 | 3863.6 |
| 0.0 | 14.9 | 0.0 | 0.0 | -499.7 | -352.4 | -850.5 | -870.5 | -989.6 | -673.1 | 4240.7 |
| 0.0 | -11.0 | 0.0 | 0.0 | -254.7 | -227.5 | -529.6 | -601.2 | -560.3 | -374.8 | 4241.5 |
| 0.0 | 0.0 | 0.0 | 1.0 | -0.1 | -0.1 | -0.1 | -0.1 | -0.1 | -0.1 | 44.8 |
| 0.0 | 16.2 | 0.0 | 0.0 | -473.1 | -342.9 | -843.9 | -875.6 | -1009.8 | -632.5 | 264.7 |
| 0.0 | -68.4 | 0.0 | 0.0 | -954.9 | -667.8 | -1502.0 | -1630.1 | -1744.0 | 1778.6 | 121862.2 |
| 1.0 | 0.7 | 0.0 | 0.0 | 11.4 | 9.0 | 18.3 | 20.0 | 21.8 | 14.5 | 5.1 |
| 0.0 | -6.9 | 0.0 | 0.0 | -95.7 | -90.4 | -185.8 | -215.9 | -238.1 | -160.6 | 67811.1 |
| 0.0 | 30.0 | 0.0 | 0.0 | -344.2 | -208.6 | -508.7 | -610.4 | -667.7 | -431.7 | 99301.3 |
| 0.0 | -56.3 | 0.0 | 0.0 | -353.5 | -271.2 | -582.5 | -716.4 | -703.6 | -474.2 | 4908.4 |
| 0.0 | -0.3 | 0.0 | 0.0 | -23.5 | -21.9 | -46.1 | -49.8 | -55.8 | -34.7 | 375.2 |
| 0.0 | 28.1 | 0.0 | 0.0 | -266.6 | -207.2 | -469.2 | -509.1 | -610.2 | -410.7 | 3541.8 |
| 0.0 | -8.7 | 0.0 | 0.0 | -217.8 | -185.3 | -383.3 | -429.8 | -442.2 | -276.8 | -3313.0 |

de waarde van de doelfunctie is 3313.05

het simplextableau ziet er zo uit:

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | -1.1 | 0.0 | 0.0 | -4.8 | -8.2 | -34.0 | -27.5 | -44.6 | -25.4 | 2363.4 |
| 0.0 | 12.3 | 0.0 | 0.0 | 26.7 | -39.3 | -13.2 | -5.2 | 14.8 | 4.0 | 1748.7 |
| 0.0 | 0.3 | 1.0 | 0.0 | 1.3 | 0.8 | 2.8 | 2.9 | 3.0 | 2.0 | 13.1 |
| 0.0 | -16.5 | 0.0 | 0.0 | 46.6 | -6.8 | 64.8 | -10.0 | 16.5 | 56.5 | 3692.4 |
| 0.0 | -1.4 | 0.0 | 0.0 | -26.6 | -9.5 | -6.6 | 5.0 | 20.2 | -40.6 | 3976.0 |
| 0.0 | -16.1 | 0.0 | 0.0 | -105.3 | -119.2 | -263.1 | -324.7 | -241.4 | -175.0 | 4157.9 |
| 0.0 | 0.0 | 0.0 | 1.0 | -0.1 | -0.1 | -0.1 | -0.1 | -0.1 | -0.1 | 44.8 |
| 0.0 | 3.5 | 0.0 | 0.0 | -103.2 | -74.8 | -184.0 | -190.9 | -220.2 | -137.9 | 57.7 |
| 0.0 | -97.7 | 0.0 | 0.0 | -101.1 | -49.0 | 20.7 | -50.2 | 78.3 | 2919.9 | 121384.4 |
| 1.0 | 1.1 | 0.0 | 0.0 | 0.8 | 1.3 | -0.8 | 0.2 | -1.0 | 0.2 | 11.1 |
| 0.0 | -7.4 | 0.0 | 0.0 | -81.5 | -80.1 | -160.4 | -189.5 | -207.7 | -141.5 | 67803.1 |
| 0.0 | 18.2 | 0.0 | 0.0 | -2.7 | 39.0 | 100.4 | 21.6 | 61.3 | 24.8 | 99110.2 |
| 0.0 | -64.3 | 0.0 | 0.0 | -118.7 | -101.0 | -163.7 | -281.9 | -202.5 | -160.4 | 4777.0 |
| 0.0 | -1.0 | 0.0 | 0.0 | -2.2 | -6.5 | -8.1 | -10.3 | -10.3 | -6.2 | 363.2 |
| 0.0 | 18.4 | 0.0 | 0.0 | 14.4 | -3.5 | 32.0 | 11.0 | -10.4 | -35.0 | 3384.5 |
| 0.0 | -14.5 | 0.0 | 0.0 | -50.6 | -64.2 | -85.1 | -120.4 | -85.4 | -53.2 | -3406.6 |

de waarde van de doelfunctie is 3406.60

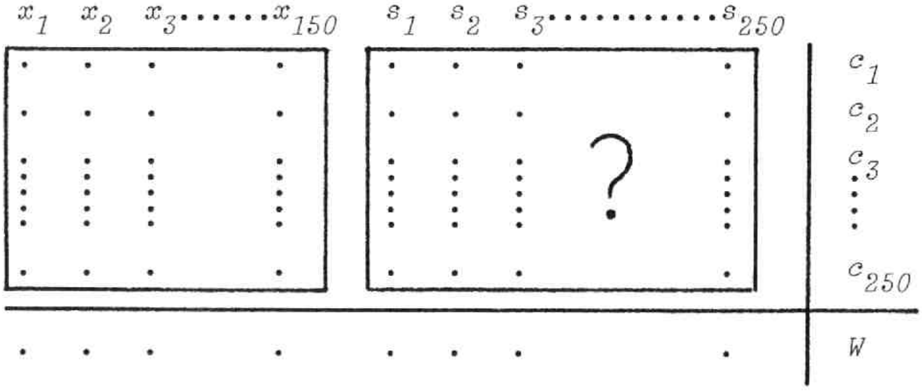
het simplextableau ziet er zo uit:

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | -2.1 | 0.0 | 0.0 | 26.1 | 14.2 | 21.0 | 29.6 | 21.3 | 15.9 | 2346.2 |
| 0.0 | 12.4 | 0.0 | 0.0 | 25.9 | -40.0 | -14.7 | -6.7 | 13.0 | 2.9 | 1749.1 |
| 0.0 | 0.3 | 1.0 | 0.0 | -0.2 | -0.3 | 0.2 | 0.2 | -0.1 | 0.0 | 13.9 |
| 0.0 | -15.6 | 0.0 | 0.0 | 21.2 | -25.2 | 19.4 | -57.1 | -37.9 | 22.5 | 3706.6 |
| 0.0 | -0.9 | 0.0 | 0.0 | -40.0 | -19.3 | -30.7 | -19.9 | -8.5 | -58.6 | 3983.6 |
| 0.0 | -20.9 | 0.0 | 0.0 | 32.2 | -19.5 | -17.8 | -70.2 | 52.1 | 8.8 | 4081.0 |
| 0.0 | 0.0 | 0.0 | 1.0 | 0.5 | 0.3 | 0.8 | 0.8 | 1.0 | 0.6 | 44.6 |
| 0.0 | 14.4 | 0.0 | 0.0 | -420.5 | -304.7 | -749.9 | -778.1 | -897.4 | -562.1 | 235.3 |
| 0.0 | -98.4 | 0.0 | 0.0 | -82.2 | -35.3 | 54.5 | -15.1 | 118.7 | 2945.2 | 121373.8 |
| 1.0 | 1.1 | 0.0 | 0.0 | 1.0 | 1.5 | -0.3 | 0.7 | -0.5 | 0.6 | 11.0 |
| 0.0 | -11.8 | 0.0 | 0.0 | 47.5 | 13.3 | 69.6 | 49.1 | 67.5 | 30.8 | 67731.0 |
| 0.0 | 18.3 | 0.0 | 0.0 | -6.0 | 36.6 | 94.5 | 15.5 | 54.2 | 20.4 | 99112.1 |
| 0.0 | -68.0 | 0.0 | 0.0 | -10.6 | -22.7 | 29.0 | -81.9 | 28.1 | -15.9 | 4716.6 |
| 0.0 | -1.1 | 0.0 | 0.0 | 2.0 | -3.4 | -0.6 | -2.6 | -1.4 | -0.6 | 360.9 |
| 0.0 | 19.1 | 0.0 | 0.0 | -6.0 | -18.3 | -4.4 | -26.8 | -53.9 | -62.3 | 3395.9 |
| 0.0 | -15.4 | 0.0 | 0.0 | -24.1 | -44.9 | -37.8 | -71.3 | -28.8 | -17.8 | -3421.4 |

de waarde van de doelfunctie is 3421.43
de optimale oplossing is nu gevonden

Op blz. 33 werd gesproken van een geval met 150 beslissingsvariabelen en 250 spelingsvariabelen. Dat is nog niet erg veel. Bij het ontwerpen van een olieraffinaderij gaat het om tienduizenden variabelen.

Het simplex-tableau voor een geval met 150 beslissingsvariabelen en 250 spelingsvariabelen zal er zó uitzien:




≫ 113. Wat komt er in de matrix met het vraagteken te staan?

≫ 114. Hoe vind je een eerste basisoplossing?
Hoeveel variabelen moeten er nul zijn in een 'hoekpunt'?

Los de volgende problemen op met behulp van de computer; vergelijk de output met je simplex-tableaus.

≫ 115. Het ale-/bierprobleem uit hoofdstuk 1.

≫ 116. Het probleem uit hoofdstuk 4.

≫ 117. Het bistroprobleem uit hoofdstuk 5.

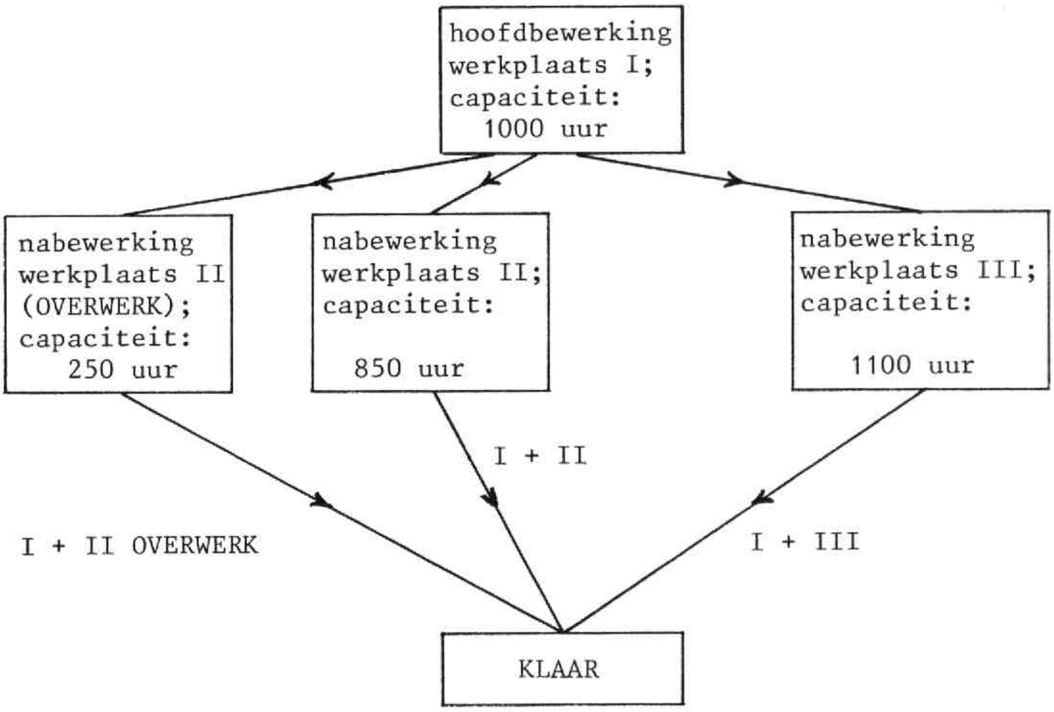
≫ 118. Het medicijnenprobleem eveneens uit hoofdstuk 5.

≫ 119. Een fabrikant maakt artikelen A en B.

De fabricage gebeurt in twee fasen:

- de hoofdbewerking in werkplaats I;
- de nabewerking, die voor beide produkten plaats kan vinden in zowel werkplaats II als werkplaats III.

In werkplaats II is de mogelijkheid tot overwerk schematisch:




Er zijn dus drie manieren om ieder produkt te maken.

Verder is gegeven:

| werkplaats | bewerkingstijd per eenheid | |
|---|---|---|
| | A | B |
| I | 0,8 | 0,5 |
| II | 0,4 | 0,5 |
| III | 0,5 | 0,6 |

(in uren)

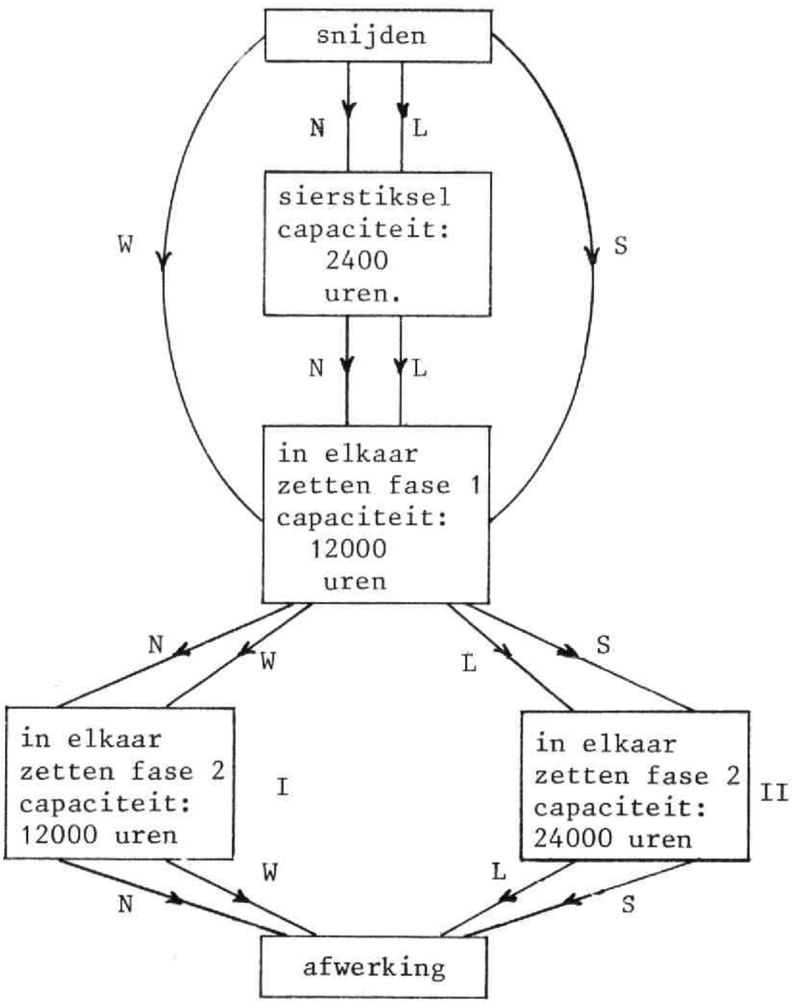
| produktie methode | winst op een eenheid | |
|---|---|---|
| | A | B |
| I + III | 13 | 7 |
| I + II | 15 | 10 |
| I + II OVERWERK | 10 | 8 |

(in guldens)

Bepaal bij welke produktie via welke methode er maximale winst is. (Hint: er zijn 6 beslissingsvariabelen en 4 spelingsvariabelen).

≫ 120. Een schoenenfabrikant heeft een produktielijn waarop zes 'handelingen' worden verricht en er worden acht produkten gemaakt. Die acht produkten zijn N(ette schoenen), W(andelschoenen), S(portschoenen) en L(aarzen). En van ieder een d(ames) en h(eren) model.

Welke schoen op welke manier door de produktielijn gaat, zie je in het volgende schema:



Voor de eerste en laatste fase van de produktie gelden géén beperkingen. Wel voor de overige vier fasen, zoals uit het schema op de vorige bladzijde blijkt.

Produktietijden (in uren per partij schoenen):

| Produkt | $N_h$ | $N_d$ | $L_h$ | $L_d$ | $W_h$ | $W_d$ | $S_h$ | $S_d$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| sierstiksel | 5 | 6 | 4 | 4 | - | - | - | - |
| 1e fase | 15 | 20 | 12 | 15 | 15 | 15 | 10 | 12 |
| 2e fase in I | 30 | 20 | - | - | 20 | 30 | - | - |
| 2e fase in II | - | - | 60 | 60 | - | - | 50 | 80 |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Winst per partij in guldens | 250 | 250 | 200 | 200 | 250 | 300 | 200 | 250 |

Bepaal de produktiehoeveelheden voor maximale winst.

Bij het ontwerpen van olieraffinaderijen kijkt men niet op van L.P.-problemen met tienduizenden variabelen.

# 12

## GEMENGDE OPGAVEN

≫ 121. a. Een jeneverstokerij produceert zowel jonge- als oude jenever. Gezien de aangevoerde hoeveelheid graan, kan er totaal hoogstens 10 ton (1 ton = 1000 liter) jenever geproduceerd worden. Daarvan mag hoogstens 5 ton jonge jenever zijn wegens een tekort aan etiketten.

In het bedrijf werken 48 mensen. Voor het maken van 1 ton jonge jenever is 4 man nodig, voor 1 ton oude jenever 5 man. Wegens groot onderhoud zijn er hoogstens 240 alcoholstampers beschikbaar. Daarbij moet je weten dat men voor 1 ton jonge jenever 30 alcoholstampers gebruikt worden en voor 1 ton oude jenever 20.

Stel de beperkende voorwaarden op en teken het toegestane gebied.

De winst op 1 ton jonge jenever is ƒ 4.000,-- en op 1 ton oude jenever ƒ 3.000,--.

Teken de iso-winst-lijnen en bereken de maximale winst.

b. De in opgave a. genoemde stokerij staat in Schiedam. Het zusterbedrijf staat in Utrecht.

In Schiedam ligt 10 ton jenever in voorraad en in Utrecht 8 ton. De Heer A. in Den Haag bestelt 8 ton. B. te Soest wenst 4 ton en C. te Haarlem wil zijn voorraad met 6 ton aanvullen.

De verkoopleider van het jeneverconcern heeft als transport-kosten-matrix (in guldens per ton):

$$\begin{array}{llccc} & & & \text{NAAR} & \\ & & \text{Den Haag} & \text{Soest} & \text{Haarlem} \\ \text{VAN} & \begin{array}{l}\text{Schiedam}\\ \text{Utrecht}\end{array} & \multicolumn{3}{c}{\begin{pmatrix}30 & 50 & 90\\ 20 & 100 & 120\end{pmatrix}} \end{array}$$

Stel uit Schiedam gaat $x$ ton naar Den Haag en $y$ ton naar Soest.

Maak een gerichte graaf.

Stel de beperkende voorwaarden op en teken het toegestane gebied.

Bereken de totale transportkosten (in $x$ en $y$).

Bepaal de minimale transportkosten.

≫ 122. In een kleine milkbar heeft men op zekere dag de beschikking over 24 liter melk, 21 liter ijs en 9 liter siroop.

Er worden twee soorten milkshakes verkocht:

'Alaska', samengesteld uit 2 dl melk, 3 dl ijs en 1 dl siroop.

'Little Prince', samengesteld uit 2 dl melk, 1 dl ijs en $\frac{2}{3}$ dl siroop.

Een 'Alaska' kost ƒ 3,-- en een 'Little Prince' ƒ 2,--.

a. Bij welke verkochte aantallen milkshakes van elke soort is er op die dag een maximale opbrengst?

De eigenaar koopt de melk voor ƒ 1,-- per liter, het ijs voor ƒ 3,-- per liter en de siroop eveneens voor ƒ 3,-- per liter in.

b. Bij welke verkochte aantallen milkshakes is de winst maximaal?

c. De eigenaar verandert zijn prijzen zodanig dat de winst maximaal is bij de verkoop van 20 'Alaska's' en 100 'Little Prince's'. De totale prijs van één 'Alaska' en één 'Little Prince' blijft hetzelfde. Welke prijzen rekent hij nu?

≫ 123. Een bedrijf in Hongkong heeft zich toegelegd op het fabriceren van Amerikaanse hardloopschoenen. Aanvankelijk maakt men twee modellen: Runner en Lady T. Het vervaardigen van 10 paar Runner kost 3 uur, terwijl men slechts 2 uur nodig heeft voor het maken van 10 paar Lady T. Vanwege de beperkte machinecapaciteit kan er per week hoogstens 300 paar Runner en 400 paar Lady T. geproduceerd worden. In totaal kan er per week niet meer dan 140 uur geproduceerd worden. Op 10 paar Runner wordt \$ 60,- en op 10 paar Lady T. \$ 50,- winst gemaakt.

a. Stel de beperkende voorwaarden op, teken het toegestane gebied en vind m.b.v. iso-winst-lijnen de produktie waarbij maximale winst wordt geboekt.

b. Runner blijkt goed in de markt te liggen en de winst per 10 paar stijgt. (De winst op Lady T. blijft hetzelfde.).
Vanaf welke winst op Runner doet de fabrikant er goed aan zijn produktieverdeling te veranderen?

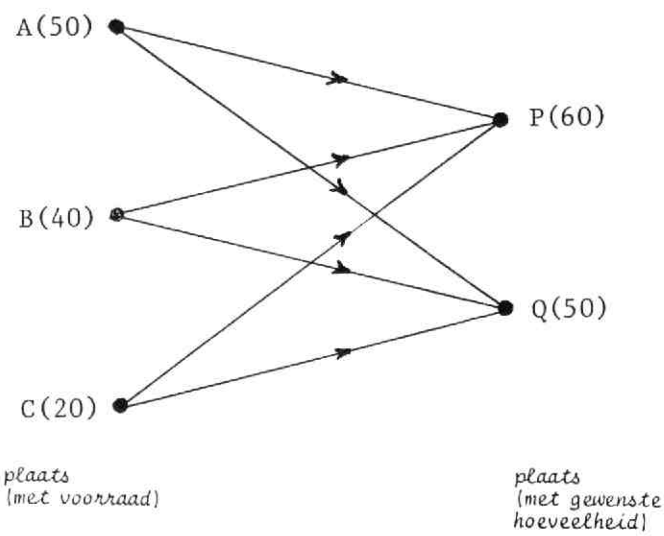
De capaciteit van het bedrijf wordt uitgebreid zodat ook nog een derde type schoenen kan worden gemaakt: de Super A. Maximaal kan er 400 paar van dit nieuwe type gemaakt worden. Voor het vervaardigen van 10 paar Super A is $2\frac{1}{2}$ uur nodig en de winst op Super A bedraagt \$ 40,- (per 10 paar). Het totale aantal produktie-uren per week wordt met 70 uitgebreid (en wordt dus 210).

c. Stel de beperkende voorwaarden op voor de nieuwe situatie en teken het toegestane gebied in een driedimensionaal assenstelsel.

d. Bepaal de maximale winst m.b.v. de randenwandelmethode (de winst op Runner is nu weer \$ 60,- per 10 paar). Begin in de oorsprong: (0,0,0).

≫ 124. In hoofdstuk 3 staat een transportprobleem: er zijn twee pakhuizen en drie plaatsen waar het graan naar toe moet.
Iets lastiger is het volgende probleem: drie pakhuizen en twee plaatsen waar afgeleverd moet worden.

De graaf is als volgt:




Wat zijn de minimale transportkosten in dit geval?
Hoeveel wordt er uit ieder pakhuis verscheept?

≫ 125. Een bierbrouwerij levert per week 11500 liter bier af in pijpjes, euroflessen en blikjes.
De inhoud van een blik en van een pijpje is $\frac{1}{3}$ en de inhoud van een eurofles is $\frac{1}{2}$ liter.
Per week zijn er 1000 kratten en 23000 flessen beschikbaar. In een krat gaan 24 pijpjes of 20 euroflessen.
De blikjes bier worden in dozen verpakt; in elke doos gaan 24 blikjes. In verband met een export-opdracht moeten er elke week minstens 6000 blikjes bier afgeleverd worden.
De winst op een krat pijpjes is *f* 1,11 en op een krat euroflessen *f* 1,35. Aan een doos blikjes wordt *f* 1,-- verdiend.
Bij welke hoeveelheid kratten pijpjes, kratten euroflessen en dozen blikjes incasseert de brouwer maximale winst?

≫ 126. Een oliemaatschappij heeft een voorraad van 200.000 barrels in Koeweit. 150.000 in Galveston en 100.000 in Caracas.
Een klant in New York heeft 300.000 barrels besteld.
Een tweede klant in Londen wil de overige 150.000 barrels afnemen.

De transportkosten in dollarcenten per barrel bedragen:

| Van \ Naar | New York | Londen |
|---|---|---|
| Koeweit | 38 | 35 |
| Galveston | 10 | 22 |
| Caracas | 18 | 25 |

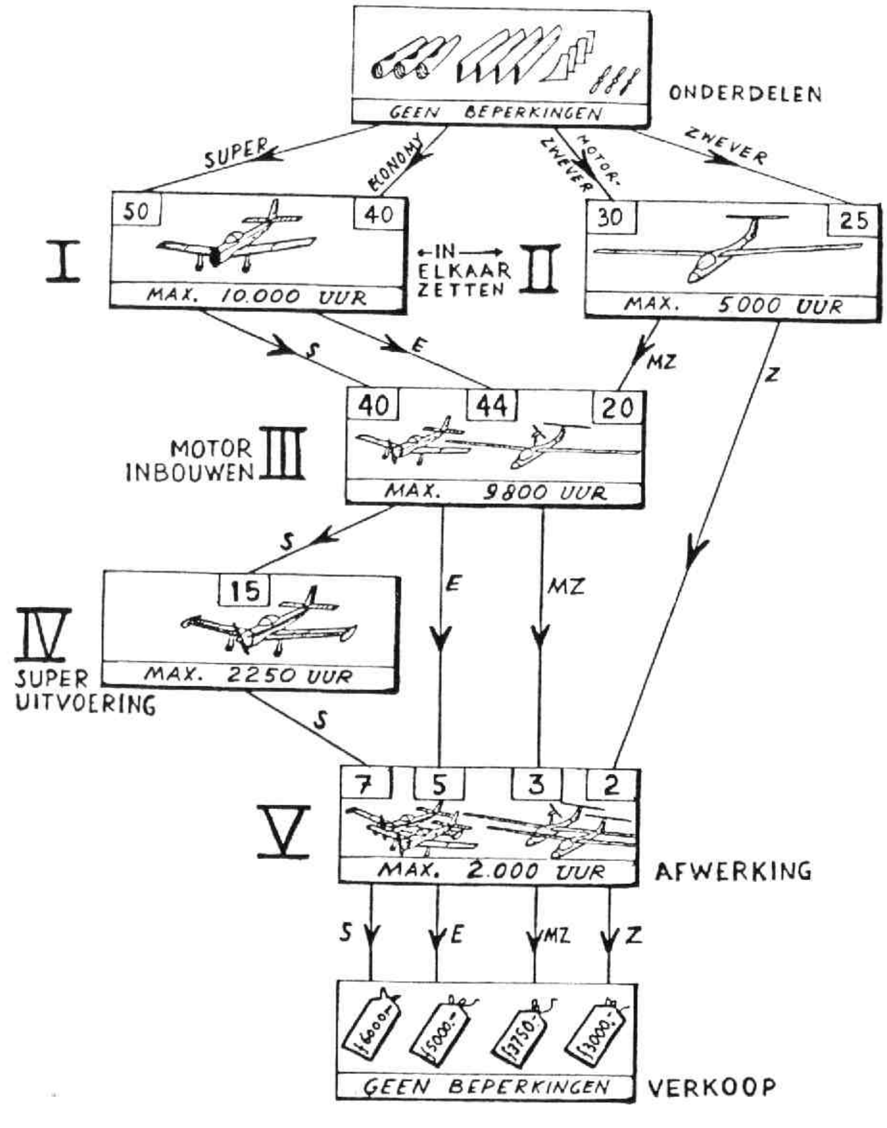
a. Maak een schema voor het transport van de totale voorraad van de oliemaatschappij in het geval er 140.000 barrels van Koeweit naar New York en 100.000 barrels van Galveston naar New York worden getransporteerd.
Hoe groot zijn de transportkosten in dat geval?

b. Bereken door middel van lineair programmeren een transportschema waarbij de transportkosten minimaal zijn.

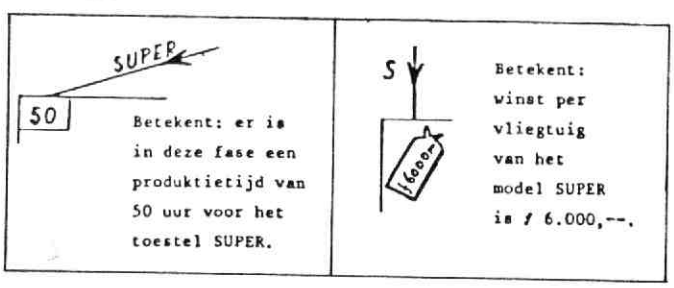
Een andere oliemaatschappij beschikt over acht depots en verkoopt haar totale voorraad aan zes klanten.

c. De bedrijfseconoom van deze maatschappij moet een optimaal transportschema vaststellen.
Met hoeveel beslissingsvariabelen krijgt hij te maken?

≫ 127. Een bedrijf maakt vier modellen vliegtuigjes. Er worden twee uitvoeringen van een sportvliegtuig gemaakt: de Super en de Economy. Daarnaast worden er twee versies gemaakt van een zweefvliegtuig: één echt zweefvliegtuig: de Zwever, en één met hulpmotor: de Motorzwever.
Het schema voor de produktie staat op deze bladzijde. Daaruit blijkt o.a. dat er naast het onderdelenmagazijn vijf produktiehallen zijn die allen een maximale capaciteit hebben.
Zo heeft hal I een produktiecapaciteit van 10.000 uur.
De produktietijden per model per hal staan ook in het schema vermeld: bijv. het in elkaar zetten van een 'Super' in hal I duurt 50 uur en het in elkaar zetten van een 'Economy' 40 uur.
Tenslotte is ook de winst af te lezen uit het schema: bij de 'verkoop' blijkt de winst op een 'Super' ƒ 6.000,-- te bedragen.




VERKLARING




a. Stel een simplex-tableau op voor de berekening van de maximale winst. (Je hoeft de berekening zelf niet uit te voeren).

De berekening wordt door de computer uitgevoerd. De laatste drie tableaus die de computer levert, zien er als volgt uit:
(1e kolom: Super; 2e kolom: Economy; 3e kolom: Motorzwever; 4e kolom: Zwever).

HET SIMPLEXTABLEAU ZIET ER ZO UIT:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.00 | 1.00 | 0.00 | 0.00 | 0.03 | 0.00 | 0.00 | -0.08 | 0.00 | 62.50 |
| 0.00 | 0.00 | 0.00 | 25.00 | 1.65 | 1.00 | -1.50 | -1.50 | 0.00 | 3425.00 |
| 0.00 | 0.00 | 1.00 | 0.00 | -0.06 | 0.00 | 0.05 | 0.05 | 0.00 | 52.50 |
| 1.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.07 | 0.00 | 150.00 |
| 0.00 | 0.00 | 0.00 | 2.00 | 0.04 | 0.00 | -0.15 | -0.20 | 1.00 | 480.00 |
| 0.00 | 0.00 | 0.00 | 3.00 | 0.08 | 0.00 | -0.19 | -0.17 | 0.00 | -1409.38 |

DE WAARDE VAN DE DOELFUNCTIE IS 1409.38

HET SIMPLEXTABLEAU ZIET ER ZO UIT:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.00 | 1.00 | 0.00 | 0.00 | 0.03 | 0.00 | 0.00 | -0.08 | 0.00 | 62.50 |
| 0.00 | 0.00 | 0.00 | 1.00 | 0.07 | 0.04 | -0.06 | -0.06 | 0.00 | 137.00 |
| 0.00 | 0.00 | 1.00 | 0.00 | -0.06 | 0.00 | 0.05 | 0.05 | 0.00 | 52.50 |
| 1.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.07 | 0.00 | 150.00 |
| 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | -0.09 | -0.08 | -0.03 | -0.08 | 1.00 | 206.00 |
| 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | -0.12 | -0.12 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | -1820.38 |

DE WAARDE VAN DE DOELFUNCTIE IS 1820.38

HET SIMPLEXTABLEAU ZIET ER ZO UIT:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.00 | 1.00 | 1.67 | 0.00 | -0.07 | 0.00 | 0.08 | 0.00 | 0.00 | 150.00 |
| 0.00 | 0.00 | 1.20 | 1.00 | 0.00 | 0.04 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 200.00 |
| 0.00 | 0.00 | 20.00 | 0.00 | -1.10 | 0.00 | 1.00 | 1.00 | 0.00 | 1050.00 |
| 1.00 | 0.00 | -1.33 | 0.00 | 0.07 | 0.00 | -0.07 | 0.00 | 0.00 | 80.00 |
| 0.00 | 0.00 | 1.60 | 0.00 | -0.18 | -0.08 | 0.05 | 0.00 | 1.00 | 290.00 |
| 0.00 | 0.00 | -0.18 | 0.00 | -0.11 | -0.12 | -0.02 | 0.00 | 0.00 | -1830.00 |

DE WAARDE VAN DE DOELFUNCTIE IS 1830.00
DE OPTIMALE OPLOSSING IS NU GEVONDEN

Aan de hand van deze tableaus moeten de directeuren een beslissing nemen over de te produceren aantallen toestellen.
De ene directeur (A) wil per sé het produktieschema uitvoeren dat tot maximale winst leidt.
De andere directeur (B) oppert de mogelijkheid om te produceren volgens het middelste tableau: de winst is wat minder, maar *alle vier* modellen worden geproduceerd.

b. Bepaal aan de hand van de simplex-tableaus hoeveel stuks er van ieder model gemaakt moeten worden, als directeur (A) zijn zin krijgt en hoeveel als directeur (B) zijn zin krijgt.

c. Bepaal bij ieder van de onder b. genoemde produktiemogelijkheden de *gemiddelde* winst per vliegtuig.

SAMENVATTING

In *hoofdstuk 1* wordt kennisgemaakt met een lineair programmeringsprobleem. Het mathematiseren vindt in kleine stapjes plaats. Het probleem werd grafisch, met niveaulijnen opgelost.

In *hoofdstuk 2* volgden meer dergelijke problemen, waarbij het steeds ging om het maximaliseren of minimaliseren van een doelfunctie op een toelaatbaar gebied.

In *hoofdstuk 3* zagen we een iets andere soort lineaire programmeringsproblemen: transportproblemen.

In de eerste drie hoofdstukken betrof het uitsluitend problemen met *twee* beslissingsvariabelen. Deze zijn grafisch met niveaulijnen op te lossen.

In *hoofdstuk 4* worden enkele - zorgvuldig uitgekozen - voorbeelden bestudeerd in drie variabelen, waarbij snel blijkt dat *niveauvlakken* nauwelijks een oplossing bieden. Als alternatief bestuderen we de waarde van de doelfunctie in een hoekpunt en wandelen naar een hoger hoekpunt tot we niet hoger kunnen. Dit is dan het maximum, omdat een toelaatbaar gebied altijd convex is.

In *hoofdstuk 5* oefenen we dit randenwandelen in twee voorbeelden.

In *hoofdstuk 6* worden de voorbereidingen getroffen om tot een professionelere randenwandelmethode, de simplexmethode, te komen. Het toelaatbare gebied wordt niet geschreven als een aantal ongelijkheden, maar als een aantal vergelijkingen. Die zijn immers gemakkelijker oplosbaar.
We gebruiken daarbij *spelingsvariabelen*.

In *hoofdstuk 7* wordt geoefend met de begrippen kanonieke vorm, beslissingsvariabelen en spelingsvariabelen. Verder werd duidelijk dat, als er 150 beslissingsvariabelen en 250 spelingsvariabelen zijn, we een systeem van 250 vergelijkingen met 400 onbekenden krijgen. In ieder hoekpunt geldt dat er 150 variabelen gelijk aan nul zijn. Vul je dat in de kanonieke vorm in, dan blijft er een systeem van 250 vergelijkingen met 250 onbekenden over.

In *hoofdstuk 8* zien we een methode waarmee je een stelsel van 250 vergelijkingen met 250 onbekenden (in principe) op kunt lossen. (Veegmethode).

In *hoofdstuk 9* wordt de *simplexmethode* aan de hand van een gedetailleerd voorbeeld uitgelegd. Hoe dat gaat vind je samengevat op de eerste bladzijde van *hoofdstuk 10*.
Verder tref je daar nog enige problemen aan, die met de simplexmethode opgelost kunnen worden.

In *hoofdstuk 11* wordt tenslotte ingegaan op de manier waarop de computer ons al het rekenwerk uit handen kan nemen.

In *hoofdstuk 12* zijn een aantal gemengde opgaven opgenomen.