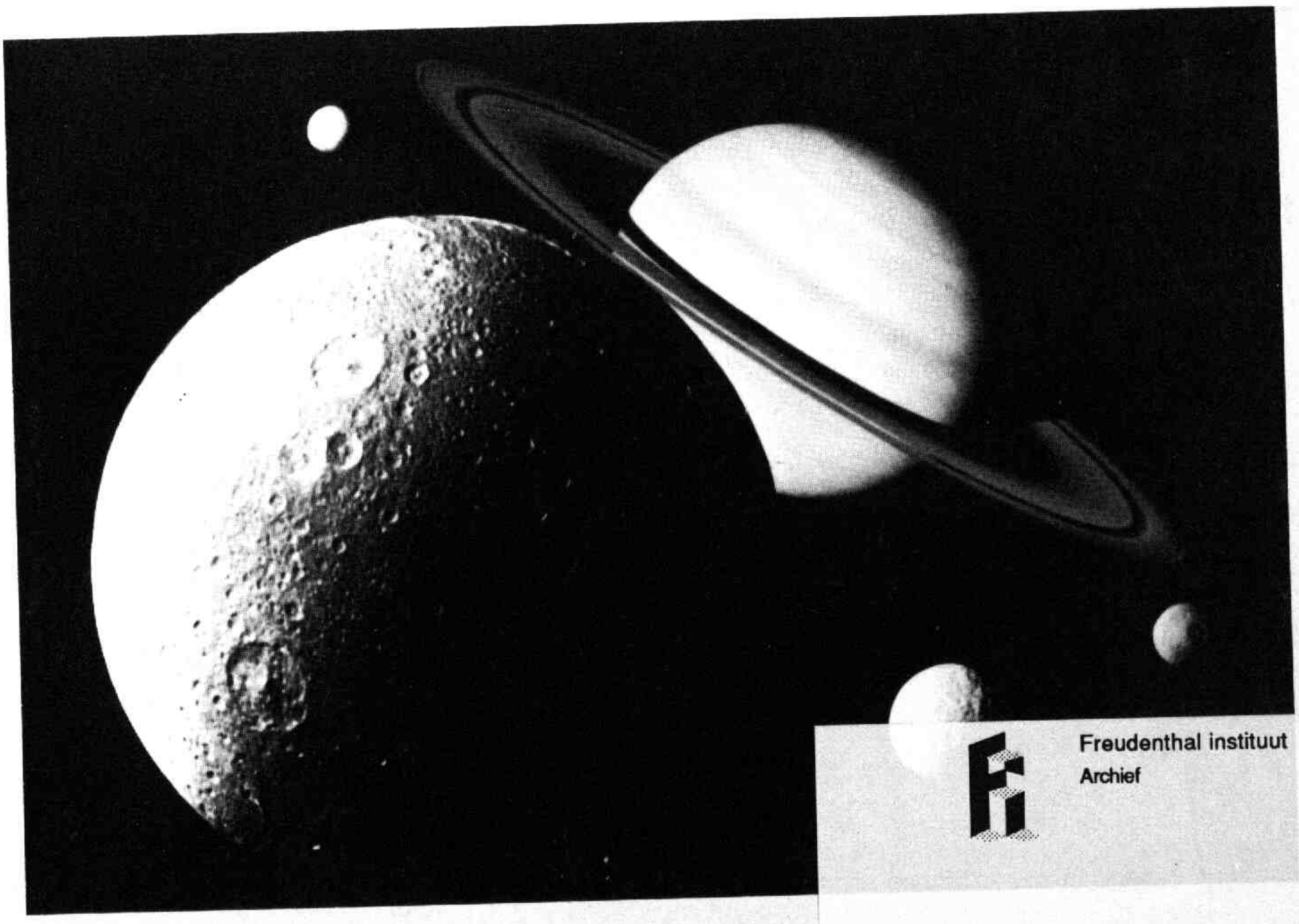
Lessen in ruimtemeetkunde

https://hdl.handle.net/1874/10258

LESSEN

IN

RUIMTEMEETKUNDE 1



LESSEN

IN

RUIMTEMEETKUNDE 1

Tiberdreef 4 - 3561 GG Utrecht

LESSEN IN RUIMTEMEETKUNDE 1

Een produktie ten behoeve van de experimenten in het kader van de Herverkaveling Eindexamenprogramma's Wiskunde 1 en 2 V.W.O.

Samenstelling: Martin Kindt
Jan de Lange Jzn

Vormgeving: Ellen Hanepen

Utrecht, december 1982.

De met * gemerkte opdrachten kunnen in het werkblok worden uitgevoerd.

1

KIJK MAAR, JE ZIET NIET WAT JE ZIET

(1)

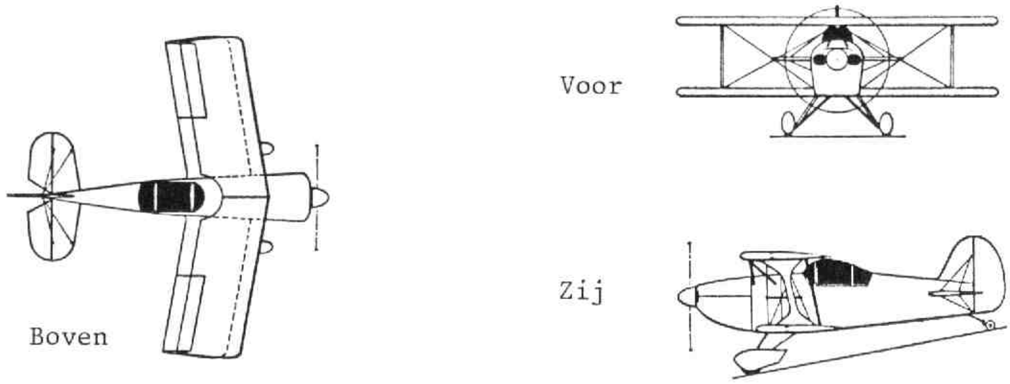
(2)

≫ 1. a. Twee foto's van hetzelfde huis. De boom die op foto (1) links staat is op foto (2) naar rechts verhuisd. Hoe kan dat nou?

b. De werkelijke positie van de boom t.o.v. het huis kun je uit deze foto's blijkbaar moeilijk aflezen. Wat dat betreft zou een luchtfoto meer houvast bieden. Hoe zou je uit een luchtfoto het verschil tussen de foto's (1) en (2) kunnen verklaren?

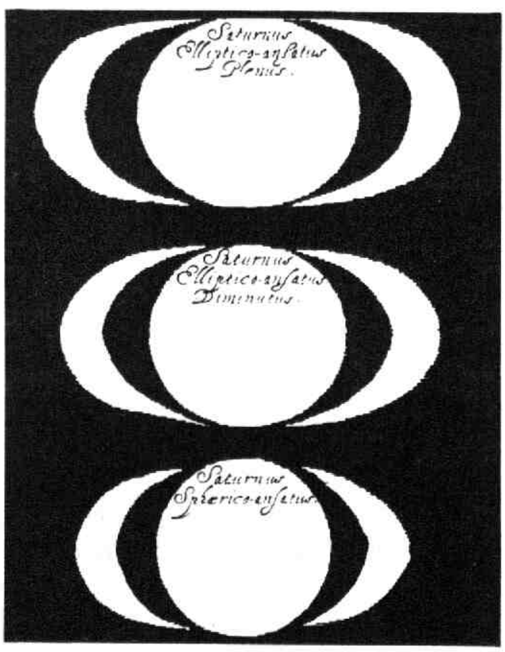
Om inzicht te krijgen in hoe een ruimtelijk object er uitziet, of hoe verschillende objecten t.o.v. elkaar zijn gegroepeerd, kun je meestal niet met één foto of tekening volstaan. Je hebt dan verschillende *aanzichten* nodig.

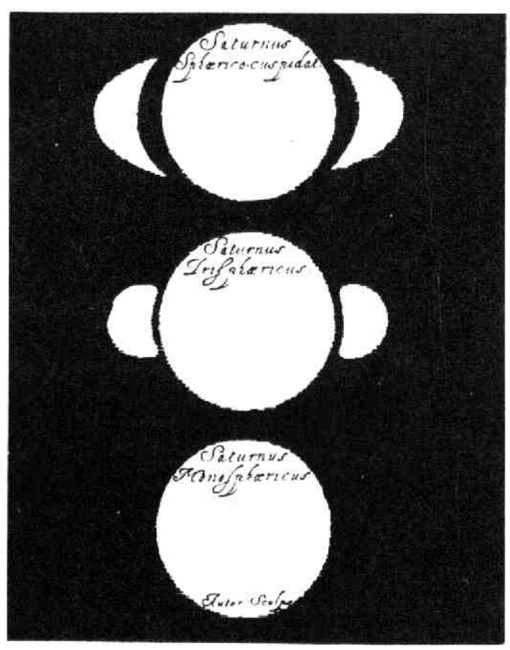
≫ 2. Hieronder zie je drie verschillende aanzichten van een sportvliegtuigje.



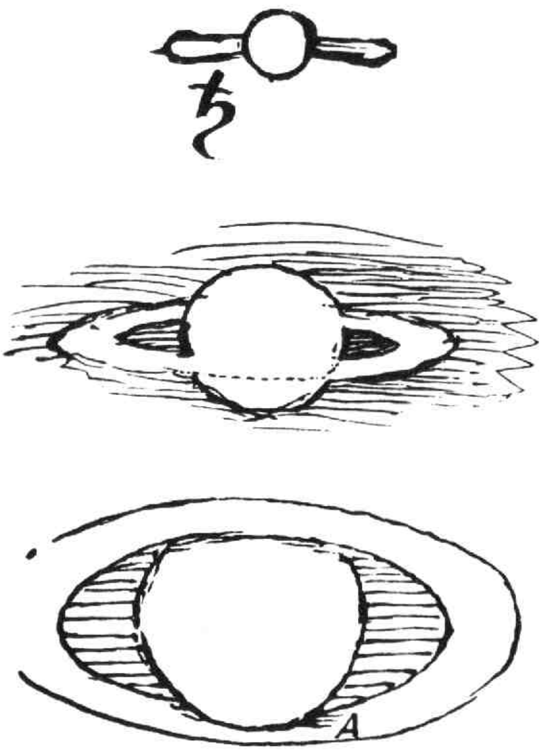
Noem een paar bijzonderheden van het hier afgebeelde sportvliegtuigje en zeg erbij uit welke van de drie aanzichten je die afleest.

Dat een aantal verschillende aanzichten lang niet altijd inzicht verschaft over vorm en gedaante bewijst de serie plaatjes, gemaakt van de planeet Saturnus uit een 17e eeuws sterrekundeboek.



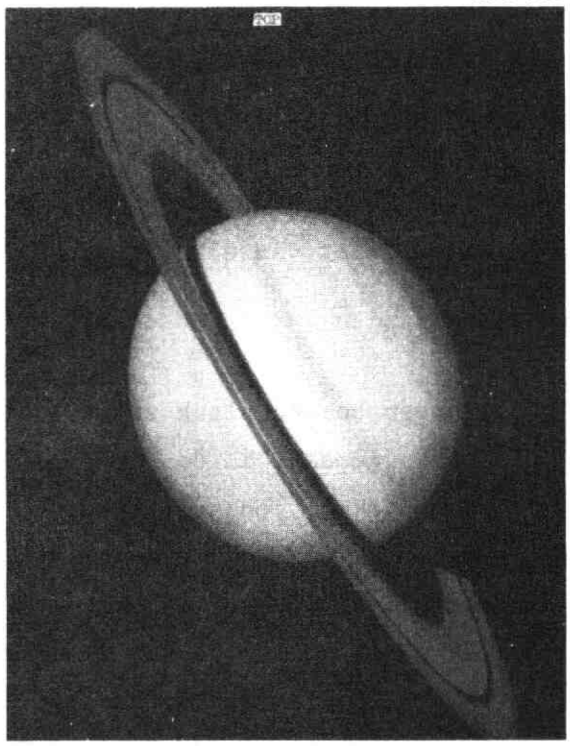


De sterrekundigen uit de 17e eeuw wisten aanvankelijk niet goed raad met het beeld dat zij van Saturnus opvingen. Galileï bijvoorbeeld dacht aan een soort van drievoudige planeet. Christiaan Huygens die zo'n 40 jaar later over een veel betere (zelf vervaardigde!) telescoop beschikte, wist zijn verschillende waarnemingen op de juiste wijze te combineren, getuige de schetsjes die hij van Saturnus maakte.



Schetsen van Christiaan Huygens

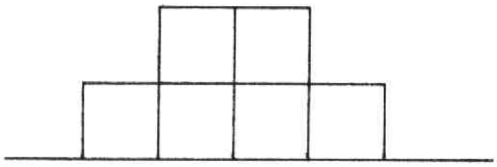
ANP-foto



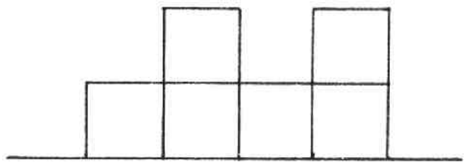
≫ 3. a. Hoe is het mogelijk dat er zoveel verschillende beelden van Saturnus werden waargenomen, getuige het oude sterrekundeboek?

b. Galileï nam op zeker moment Saturnus waar als één cirkelschijf (zie het zesde plaatje van de serie op blz. 2). Kun je verklaren hoe het kwam dat de beide 'oortjes' verdwenen waren? Wat zou Galileï gezien kunnen hebben als hij toen over een sterkere kijker zou hebben beschikt?

≫ 4. Een aantal kubusjes (van gelijke grootte) is zo op een tafel gegroepeerd dat fig. (a) het vooraanzicht en fig. (b) het zijaanzicht van het bouwsel is.



(a)



(b)

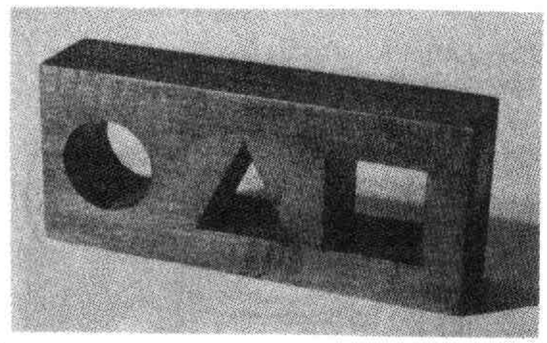
a. Hoeveel kubusjes kunnen er *hoogstens* gebruikt zijn?

b. En hoeveel kubusjes zijn er *minstens* gebruikt?

≫ 5. Noem een paar figuren/voorwerpen waarvan boven-, voor- en zijaanzicht niet van elkaar verschillen.

Extra opgave

≫ 6. In een houten plank zijn drie gaten gemaakt in de vorm van een cirkel, een gelijkbenige driehoek en een vierkant. De middellijn van de cirkel, de basis en hoogte van de driehoek en de zijde van het vierkant hebben alle dezelfde lengte.



Een kurk is zo gesneden dat hij in *elk* van de drie gaten past en elk gat geheel kan verduisteren. Hoe ziet zo'n kurk eruit?

2

ZON, AARDE, MAAN

Stel je voor: een schemerachtige kamer, een sterke lamp, een grote bol.
De lichtbundel wordt op de bol gericht.

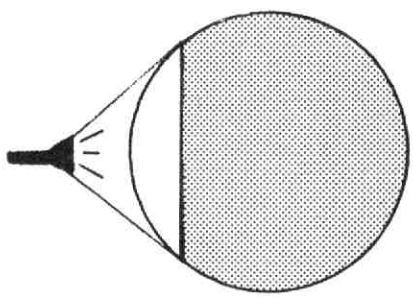


fig. 2.1

≫ 7. In het zij-aanzicht is de schaduwgrens een rechte lijn.
Welke vorm heeft de schaduwgrens in werkelijkheid?

≫ 8. a. Wat gebeurt er met de schaduwgrens als de lamp verder van de bol wordt verwijderd?

b. Kan de bol door de lamp voor de helft worden belicht?

≫ 9. Waar moet een waarnemer zich bevinden om de bol geheel in de schaduw te zien?

≫ 10. Kijken naar de maan is kijken naar een verlichte bol.
Leg uit hoe het kan dat we soms "halve maan" zien.

Hieronder zie je een schets van het rondje dat de maan in 29 dagen om de aarde maakt. Omdat de lamp die de maan verlicht zo ontzettend ver weg staat, zijn haar lichtstralen evenwijdig getekend.

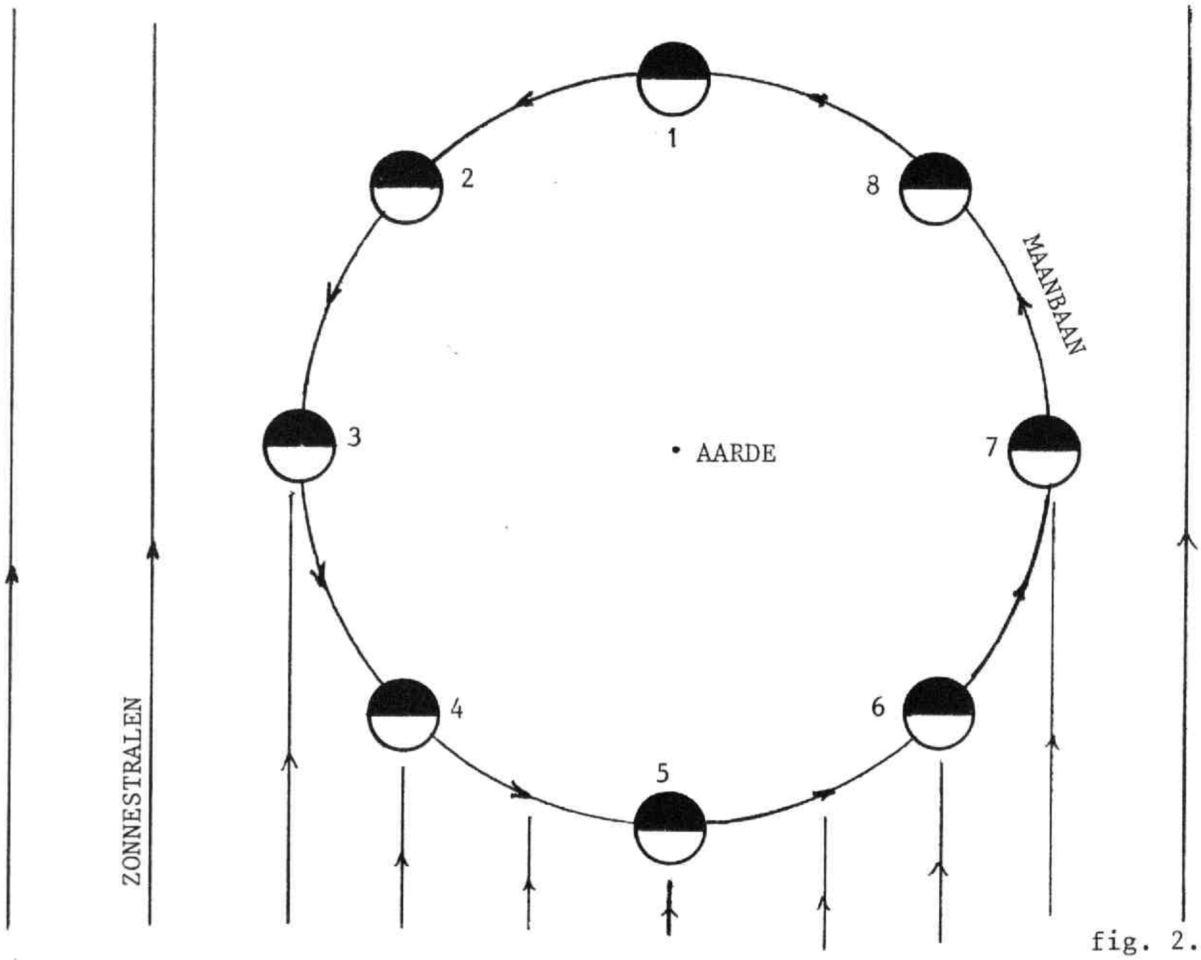


fig. 2.2

≫ 11. Van 'boven' af gezien zie je uitsluitend halve maantjes, maar vanaf de aarde is het maangezicht gevarieerder.
Teken de maangezichten die je vanaf de aarde ziet als de maan achtereenvolgens de standen 1, 2, ..., 8 inneemt.

Aristarchos van Samos, een Grieks sterrekundige in de 3e eeuw voor Chr. berekende de verhouding tussen de afstanden van de aarde tot de zon en de maan. Bij halve maan, zo redeneerde hij, is de hoek Z(on)M(aan)A(arde) negentig graden ...

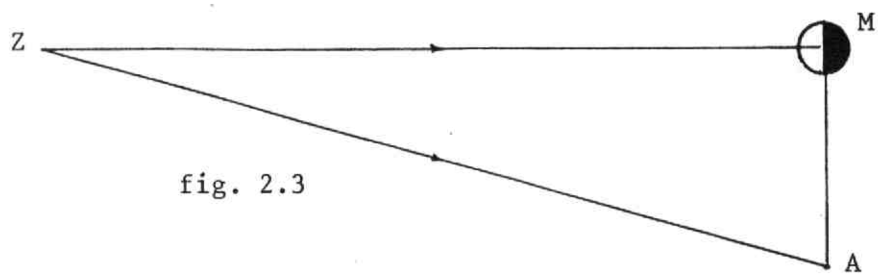
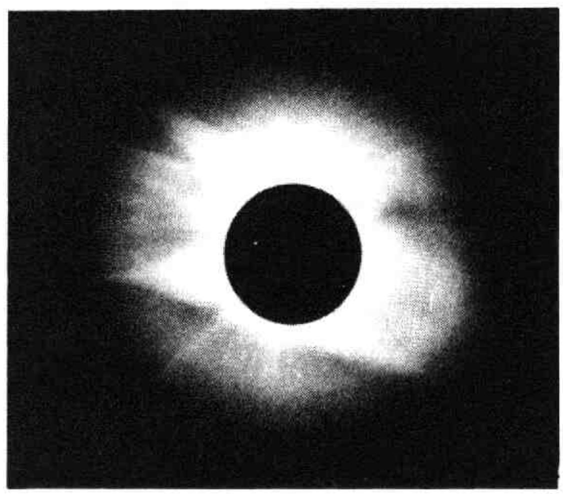


fig. 2.3

Onder goede atmosferische omstandigheden is de maan ook overdag zichtbaar en zo was Aristarchos bij machte om de hoek ZAM te meten. Met behulp van die hoek bepaalde hij de verhouding tussen de afstanden ZA en MA.

≫ 12. Aristarchos schatte de hoek ZAM 87° en vond daaruit dat de zonneafstand 20 keer zo groot is als de afstand aarde-maan. Controleer zijn conclusie. (Gebruik een rekenmachientje).

≫ 13. Het resultaat van Aristarchos was veel te laag. We weten nu dat de zon ongeveer 400 keer zo ver van de aarde afstaat als de maan. De fout van Aristarchos school niet zo zeer in zijn methode, als wel in de onnauwkeurigheid waarmee hij hoek ZAM bepaalde. Hoe groot zal die hoek dan wèl moeten zijn?



Zonsverduistering, gefotografeerd in Kenia (1973).

≫ 14. Zon en maan schijnen ons op aarde even groot toe (denk maar eens aan een zonsverduistering, de maan bedekt de zon dan heel precies!). Laat in een figuur zien hoe de onderlinge posities van een waarnemer (op aarde), zon en maan zijn bij een totale zonsverduistering.

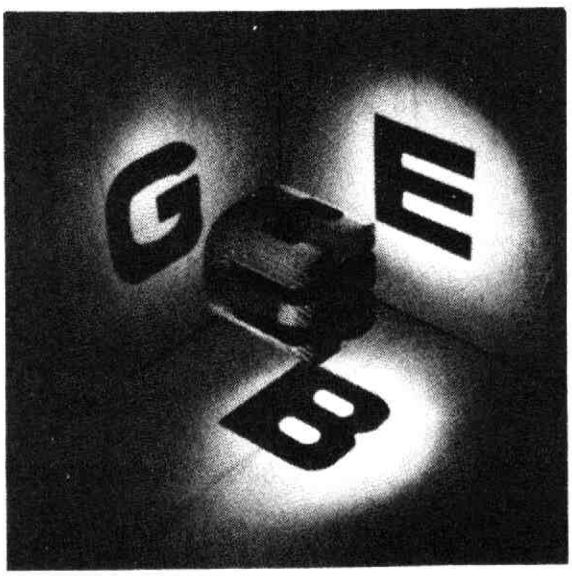
≫ 15. Uit de verhouding van de afstanden van de aarde tot zon en maan kan de verhouding van de diameters van die beide laatste hemellichamen worden afgeleid (Aristarchos deed dat trouwens ook). De diameter van de maan is ongeveer 3520 km. Hoe groot is de diameter van de zon?


I. LUYTS
PHIL. PROFES.
Institutio
ASTRONOMICA.
TRAJECTI AD RHENUM,
Apud FRANCISCUM HALMAM Acad.
Typograph. cIↄ Iↄ C L XXXII.

3

PROJECTIES EN COÖRDINATEN

Douglas R. Hofstadter [1] vervaardigde op vernuftige wijze een drie-letter-kubus. Drie lichtbundels *projecteren* het blokje op drie vlakken die in de hoek van een kamer samenkomen.
De letterfiguren E, G en B zijn de drie *projecties* van het blokje redwood.
De lichtstralen worden wel *projecterende stralen* genoemd en de vlakken waarop geprojecteerd wordt noemt men *projectievlakken* (of *taferelen*).



[1] D.R. Hofstadter, informaticus, is auteur van het boek Gödel, Escher, Bach: *An eternal golden braid*. De foto is als illustratie in dat boek gebruikt.

In figuur 3.1 zie je een (onvoltooide) projectie op drie taferelen. De projecterende stralen zijn lijnen parallel met de ontmoetingslijnen (X-as, Y-as en Z-as) van de drie projectievlakken. (De denkbeeldige lichtbronnen zijn "oneindig" ver).

≫ 16. Hoe zien de projecties op het XOY-tafereel en het XOZ-tafereel eruit?

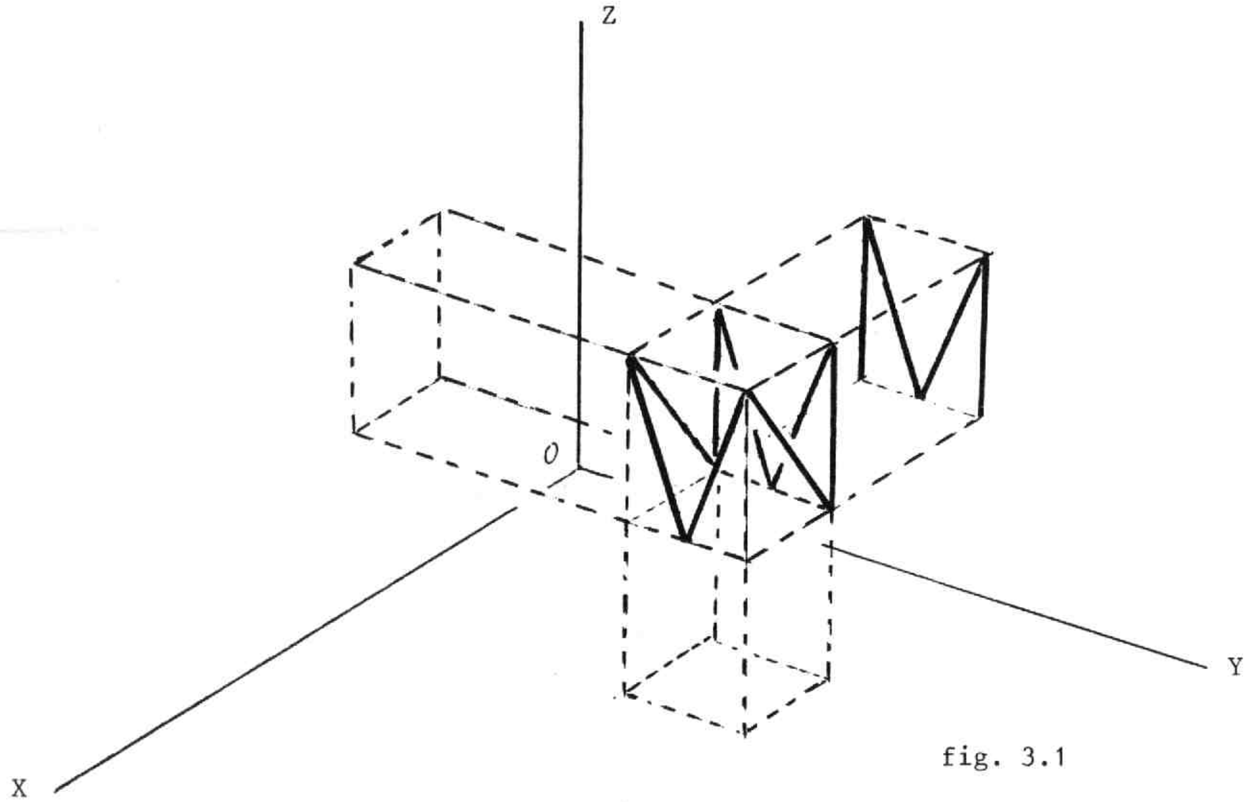


fig. 3.1

Op de X-as, Y-as en Z-as kiezen we dezelfde lengte-eenheid.
Als je vanuit O twee eenheden in de X-richting, drie in de Y-richting en vier in de Z-richting gaat, bereik je het punt R: (2,3,4). Onderweg ben je dan o.a. de punten P: (2,0,0) en Q: (2,3,0) gepasseerd.

≫ 17. Wat zijn de coördinaten van het middelpunt van respectievelijk OP; PQ; QR; RO?

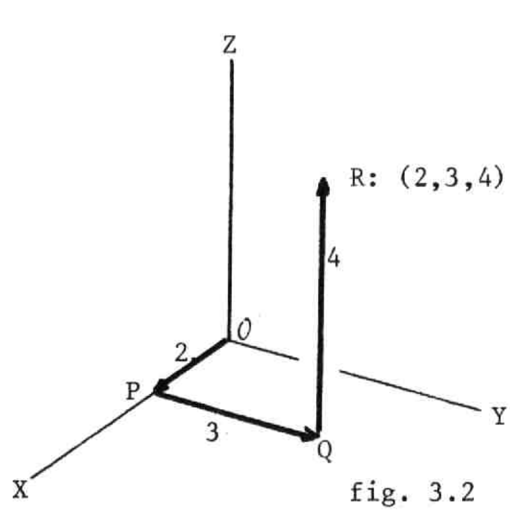


fig. 3.2

≫ 18. Het punt Q is de projectie op het XOY-vlak (de "Z-projectie") van R. We schrijven ook wel: $Q = R_z$.
Wat zijn de coördinaten van de projecties R_y (van R op het XOZ-vlak) en R_x(van R op het YOZ-vlak)?

≫ 19. a. Teken fig. 3.3 twee keer zo groot over en knip de zo verkregen figuur uit. Vouw het XOY-vlak en het XOZ-vlak respectievelijk langs de Y-as en de Z-as en breng de X-assen tegen elkaar. Zo krijg je een model van een driedimensionaal assenstelsel.

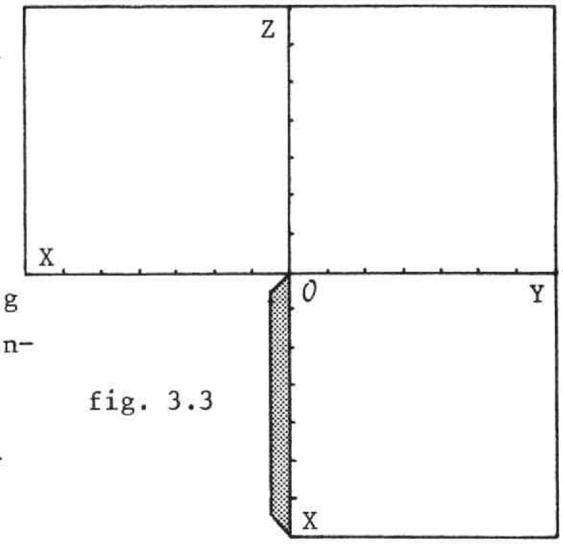


fig. 3.3

b. Teken in dit model de projecties A_x, A_y, A_z van het punt A: (5,4,6).

≫ 20. Als we het punt A (van ≫ 19) laten bewegen, bewegen de projecties A_x, A_y en A_z mee. Hoe bewegen die projecties zich als:

a. A zich in rechte lijn beweegt naar het punt (0,0,6)?

b. A zich recht omhoog beweegt (in de richting van de Z-as)?

c. A zich over een cirkel met straal 1 en middelpunt (4,4,6) beweegt, waarbij de Z-coördinaat van A niet verandert?

* ≫ 21 Van een punt P zie je in een aantal gevallen twee van de drie projecties getekend. Teken in elk van die gevallen het derde projectiepunt. (* betekent: zie werkblok).

≫ 22. Wat zijn de coördinaten van de projecties P_x, P_y, P_z van het punt P: (a,b,c)?
(a,b,c zijn reëele getallen).

* ≫ 23. Twee van de drie projectietekeningen van een fotocamera. Maak het "drieluik" compleet.

* ≫ 24. In de tekening zie je de Y- en de Z-projectie van een piramide.

a. Waarom is de lijn TA in de Y-projectie gestippeld?

b. Teken de X-projectie van de piramide.

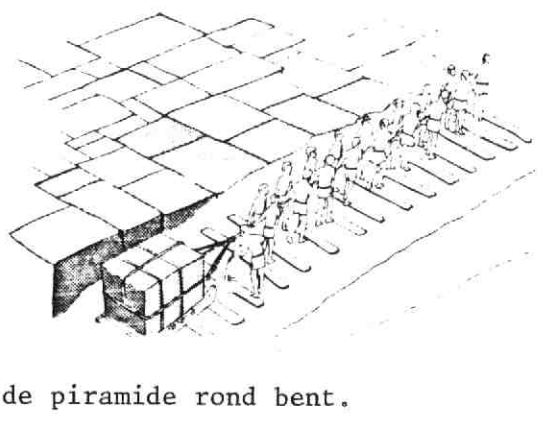
c. Wat zijn de coördinaten van de hoekpunten van de piramide?

d. De piramide wordt afgeknot d.m.v. een vlak parallel met het grondvlak; de afgeknotte piramide is half zo hoog als de oorspronkelijke piramide.
Teken de drie projecties van de afgeknotte piramide in je werkboek (gebruik een andere kleur).

e. Wat zijn de coördinaten van de hoekpunten van het bovenvlak van die afgeknotte piramide?

* ≫ 25. De tekening hiernaast toont een Egyptische piramide in aanbouw. De enorme hoeveelheid zware steenblokken (voor de piramide van Cheops werden er ongeveer 2.300.000 van gemiddeld $2\frac{1}{2}$ ton gebruikt) werden omhoog gesleept via spiraalsgewijs aangelegde hellingen ...

In je werkboek zie je drie projectietekeningen van een piramide en het begin van zo'n spiraalweg naar de top. De volgende weggedeelten gaan even steil omhoog als het beginstuk.



a. Teken het vervolg van die spiraalweg (in de drie projectiefiguren) tot je twee keer de piramide rond bent.

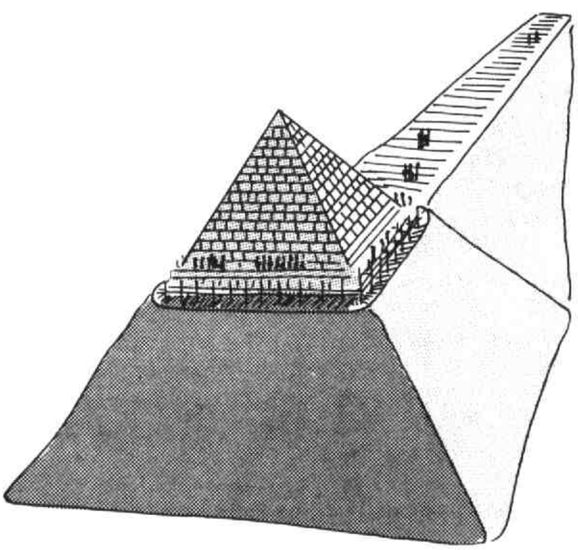
b. Hoe kun je uit de figuur het hellingspercentage van de spiraalweg berekenen?

Extra opgave.

≫ 26. Bekijk opnieuw een spiraalweg om de piramide TABCD, beginnend in punt A. De keerpunten op de ribben TB, TC, ... noemen we achtereenvolgens A_1, A_2, ...

a. Stel TA = 1 en $TA_1 = r$.
Wat weet je van de lengte van TA_2, TA_3, enz.

b. Na hoeveel rondgangen heb je meer dan 80% van de te overwinnen hoogte afgelegd in het geval $r = 0{,}9$?
En na hoeveel rondgangen ben je de top op ongeveer 5% van de te overwinnen hoogte genaderd?



4

KUBUS IN PERSPECTIEF

≫ 27. Een slechte tekening van een kubus. Of valt het mee?
Knijp één oog dicht en beweeg het andere naar het plaatje toe.
Wordt de tekening al beter?
Waar moet je ongeveer kijken om er echt een kubus in te zien?

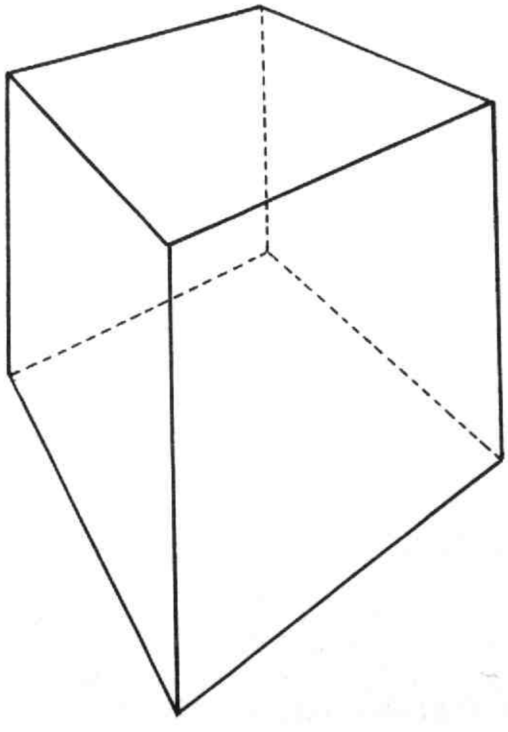
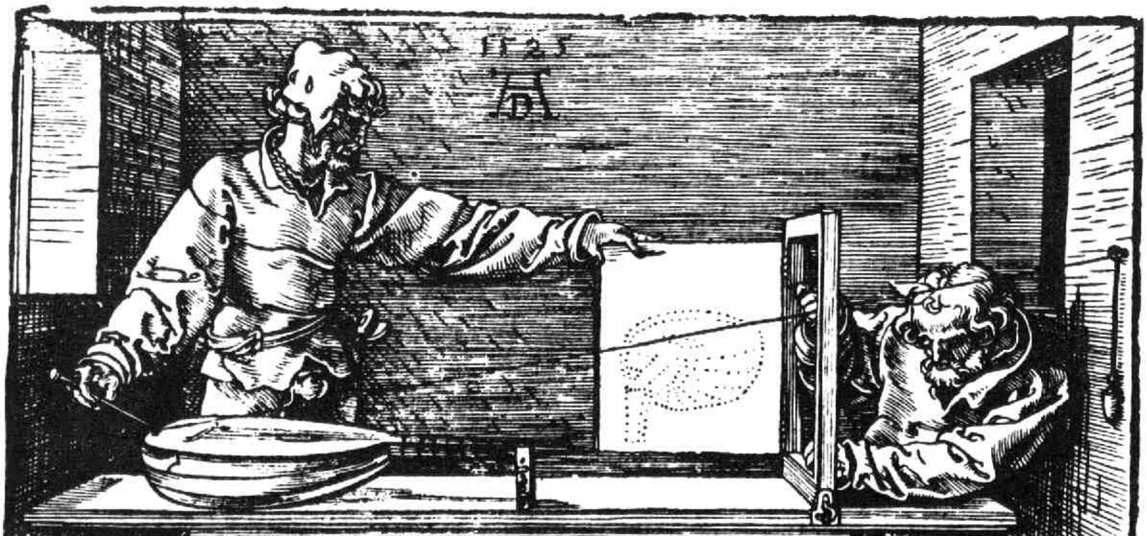
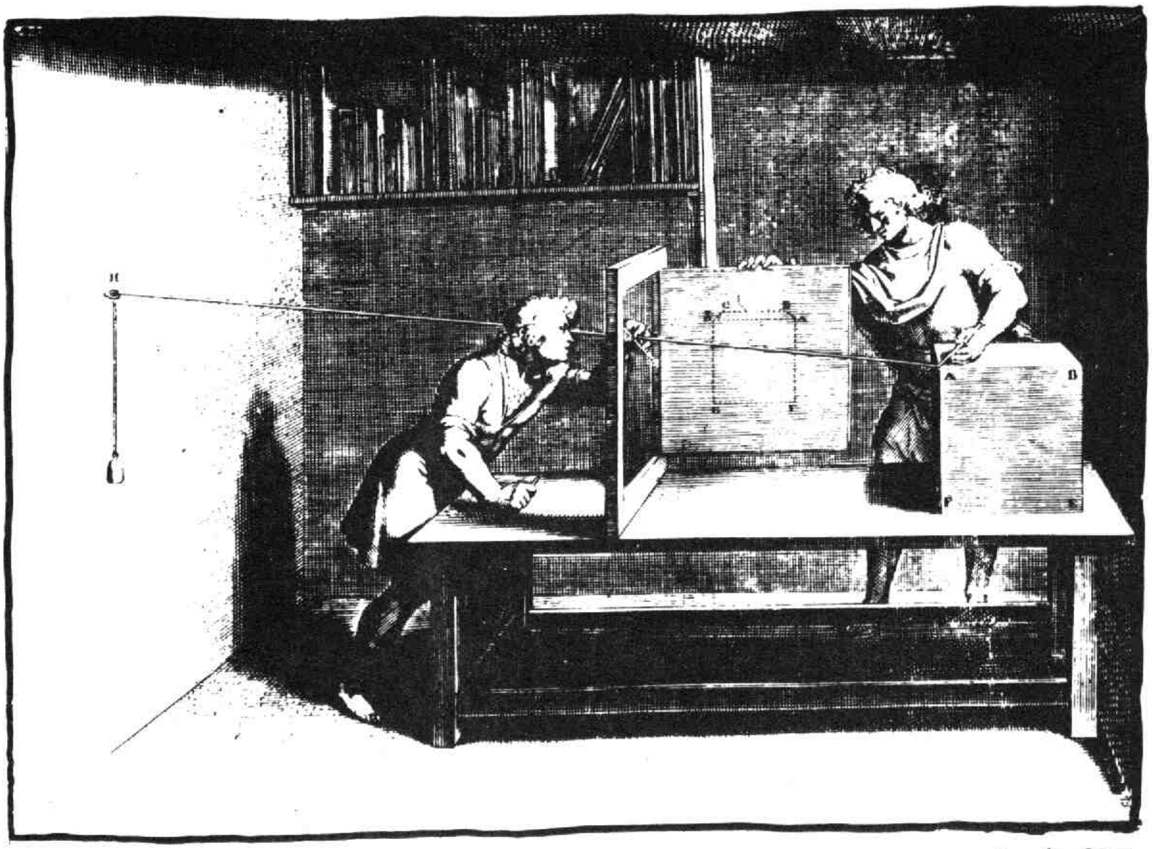


fig. 4.1

Bij het tekenen van een ruimtelijk object is het probleem dat je de (driedimensionale) *ruimte* moet afbeelden op het (tweedimensionale) *vlak*.
Met dit probleem hebben door de eeuwen heen schilders en ontwerpers geworsteld. De methode van de drie projecties (boven-, voor- en zijaanzicht) die je in de vorige lessen hebt leren kennen, is een van de vele afbeeldingsmethoden. Hij wordt vooral gebruikt door technisch tekenaars, architecten e.d.
Zij zijn geïnteresseerd in "maatgetrouwe" afbeeldingen waaruit hoeken en lengteverhoudingen kunnen worden afgelezen.
In de beeldende kunst heeft men naar andere manieren gezocht om de ruimte uit te beelden.
Van de Griek Agatarchos (± 450 voor Chr) wordt verhaald dat hij decors schilderde bij de tragedies van Aischylos met een sterke ruimte-suggestie.
En onze huidige decorontwerpers weten daar ook wel raad mee.
De methode om de ruimte "zichtgetrouw" af te beelden op een vlak, zodat de schijn gewekt wordt of je werkelijk de ruimte ziet, noemt men de methode van het *perspectief*.
De tekening op pag. 15 is een perspectieftekening van een kubus.



A. *Dürer*



S. de Caes

Op de twee prenten resp. van Albrecht Dürer (1471-1528) en Simon de Caes (1567-1626) kun je zien hoe je heel nauwkeurig een perspectieftekening op een (draaibaar) tekenscherm kunt construeren.

≫ 28. Ga na hoe de beide tekenaars te werk gaan. Waarvoor dient het touw-met-gewicht?

≫ 29. In beide tekeningen kun je één punt in de kamer aanwijzen van waaruit de luit resp. de kubus precies zo te zien is als op het scherm. Welk punt is dat en waarom?

≫ 30. Dürer suggereert dat de tekening van de luit stipsgewijs wordt gemaakt. Op de prent van De Caes is het niet zo goed te zien, maar ook daar lijkt het erop of de kubus stip-voor-stip op het scherm komt. Is dat handig van die twee "kubisten"?

Voor het maken van een nauwkeurige perspectieftekening kunnen we het stellen zonder hulpmiddelen als een draaibaar tekenscherm en een touw-met-gewicht! Wel houden we daarbij de methode van Dürer in gedachten ...

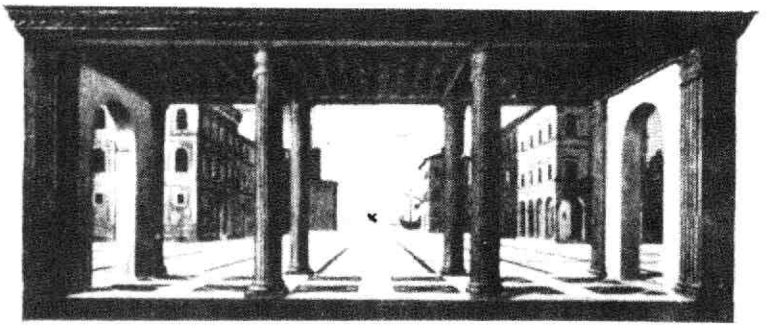
* ≫ 31. a. In figuur 31a van je werkblok zie je een bovenaanzicht van de kubus (nu scheef op tafel), het tekenscherm en de plaats van het oog (H). Geef op het tekenscherm de plaatsen aan waar je de hoekpunten op het scherm ziet.

b. Teken in fig. 31b het zijaanzicht van de kubus (stippel de onzichtbare ribbe). Geef op het scherm nauwkeurig aan hoe hoog je elk van de acht hoekpunten ziet.

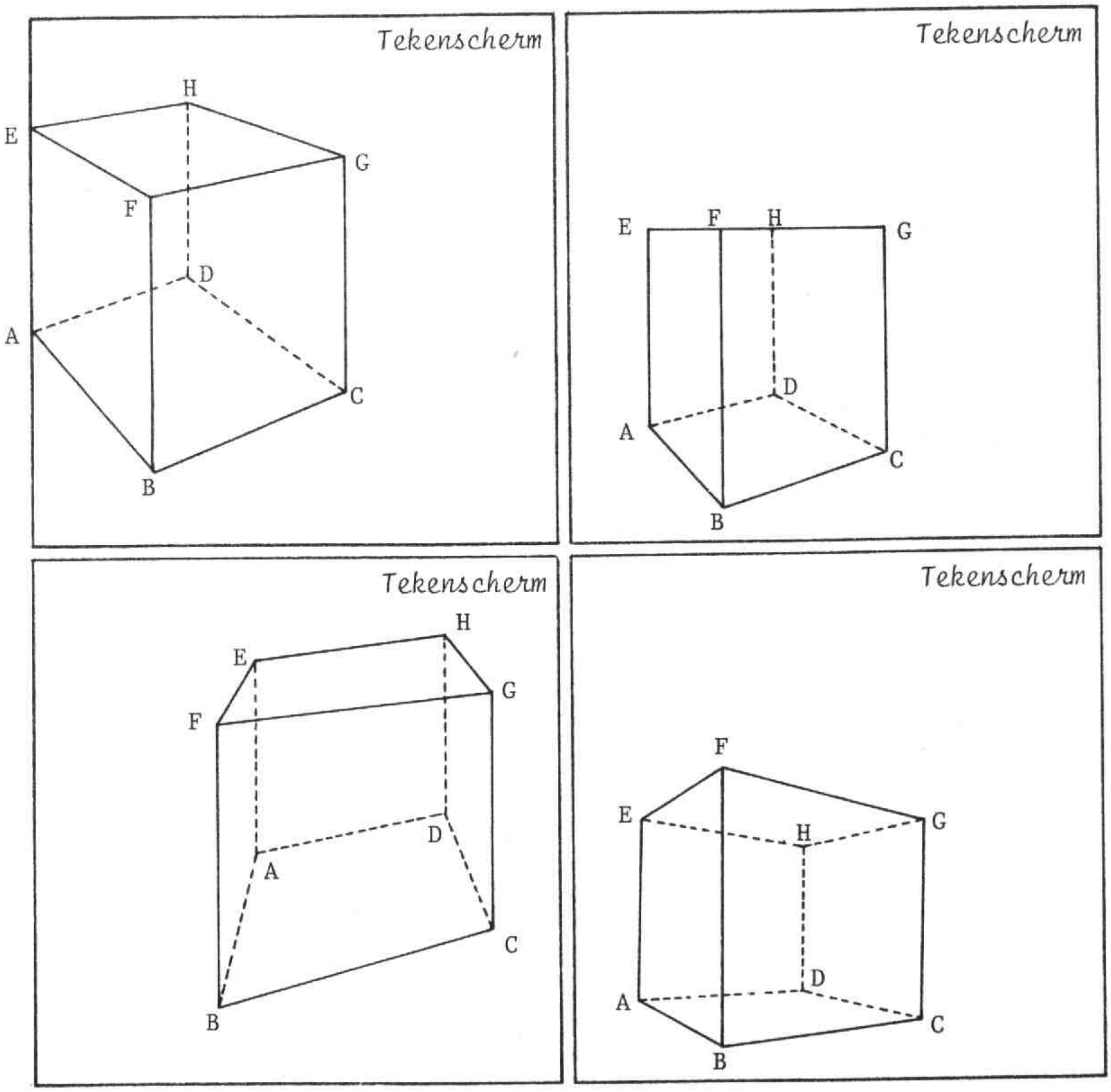
c. In fig. 31c zie je het tekenscherm in vooraanzicht. Voor het gemak hebben we dat scherm van een coördinatenstelsel voorzien (oorsprong linksonder, Y-as horizontaal, Z-as vertikaal).
In de figuren 31a en 31b kun je de Y- en Z-coördinaten van de hoekpunten van de "kubus-op-het-scherm" opmeten met je passer. Teken die punten nauwkeurig op het scherm. Voltooi nu de perspectieftekening van de kubus (onzichtbare ribben stippelen).

d. Neem de X-as langs de tafelrand (positieve richting naar de waarnemer toe). Wat zijn de coördinaten van de plaats van het oog? Kijk nog eens naar je perspectieftekening vanuit dat punt.

De methode van perspectiefconstructie die we hier hebben gevolgd, kan worden toegeschreven aan de 15e eeuwse Italiaanse meester Piero della Francesca. Van hem is onderstaande prent. De plaats van het oog is ongeveer 6 cm boven het kruisje.



≫32. We laten de kubus in dezelfde positie t.o.v. tekenscherm en tafel (zie ≫31) en variëren de plaats van het oog. Zo ontstaan vier nieuwe perspectieftekeningen. Ga bij elk van de vier na waar ongeveer de plaats van het oog moet zijn.

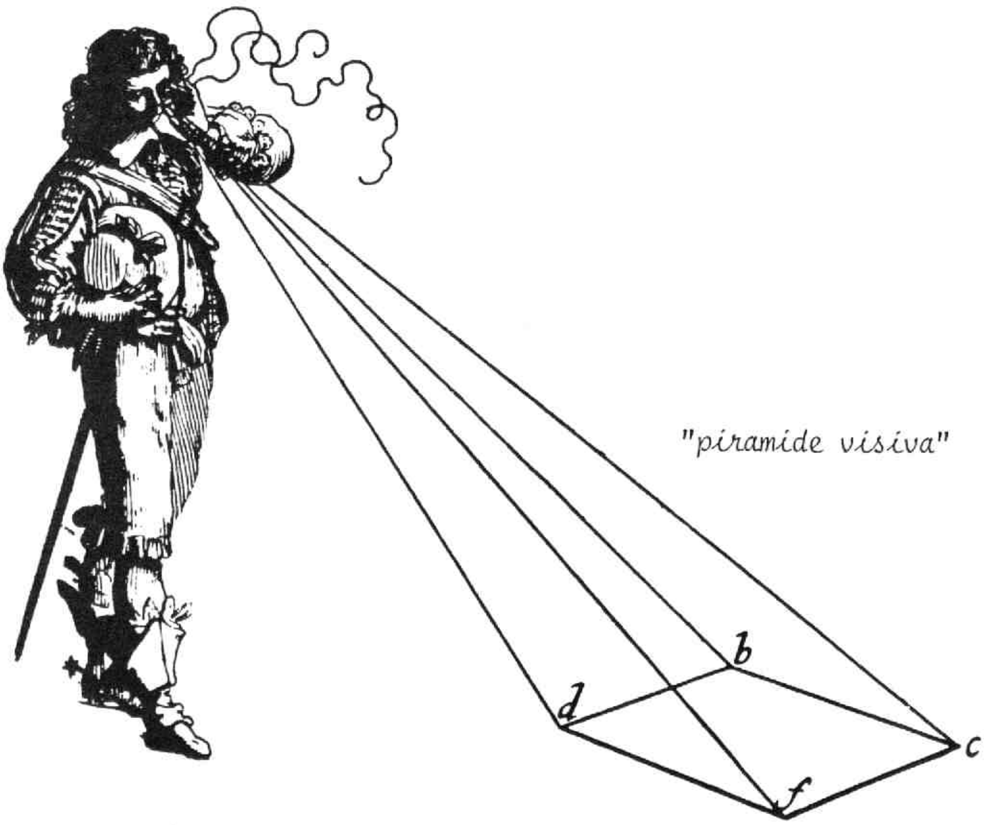


* ≫33. Door de tekenmethode via boven- en zijaanzicht terug te volgen kun je de plaats van het oog exact reconstrueren.
Doe dat voor de vierde kubusfiguur.

De Italiaanse schilders en tekenaars uit de 15e eeuw hielden zich intensief bezig met de perspectiefleer. En dat zij er poëtisch over konden schrijven bewijst het volgende fragment van Battista Alberti (1435):

"We moeten ons de stralen voorstellen als zeer dunne draden, met een sterke band als een bundel bijeengehouden in het oog ...
Als een geknotte stronk van stralen, waarvan de knoop jonge takken direct recht naar elk tegen te komen oppervlak stuurt."

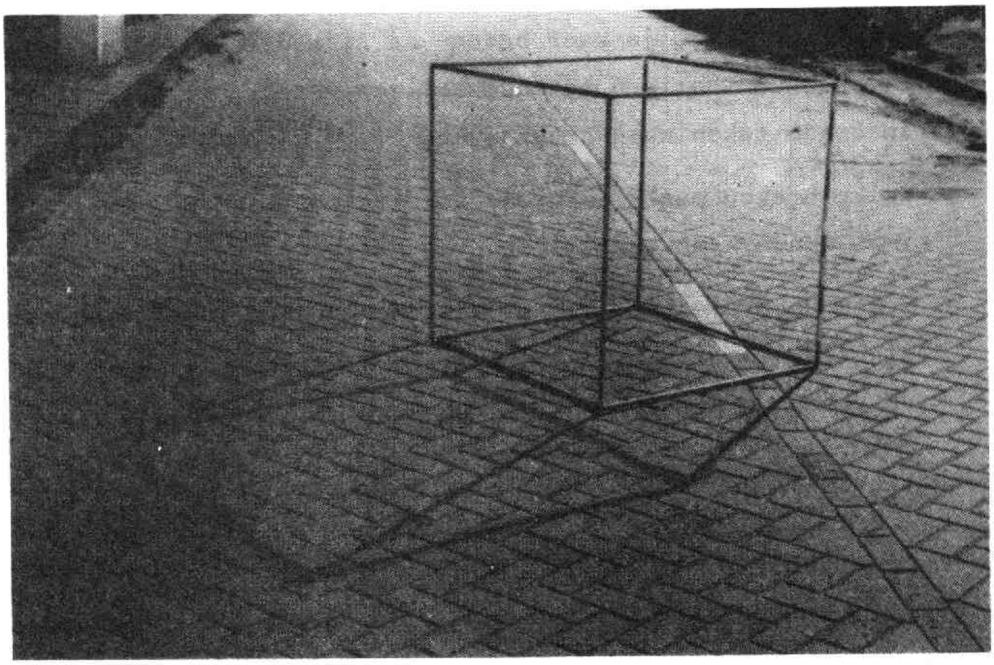
De bundel stralen naar het oog werd door Alberti de "piramide visiva", de zichtpiramide genoemd.



In de wiskunde drukt men zich minder dichterlijk uit: een perspectiefafbeelding wordt verkregen door het voorwerp van tekening *centraal* op een vlak te *projecteren*. De *projecterende stralen* ("kijklijnen") ontmoeten elkaar in het *centrum* van projectie ("het oog").

5

PARALLELPROJECTIE



≫ 34. Maak een kubus van ijzerdraad of limonaderietjes. Beschijn je kubus met een lamp en vang de schaduw op een vel papier of op een witte muur. Probeer de figuren van pag. 19 als schaduw te krijgen.

≫ 35. Voer het schaduwexperiment met de kubus nog eens uit, maar nu met zonlicht. Teken een paar heel verschillende schaduwkubussen.

In ≫34 heb je de kubus centraal geprojecteerd. Het centrum van projectie was de plaats van de lichtbron.
In ≫35 is de lichtbron zo ver weg dat de projecterende lijnen als parallel kunnen worden beschouwd. In dat geval spreken we van *parallelprojectie*.

≫36. Zoals je hebt kunnen zien zijn er duidelijke verschillen tussen een centrale projectie en een parallelprojectie van een kubus. Noem eens een paar van die verschillen.

Van een kubus kunnen we een parallelprojectief beeld construeren op een manier die veel lijkt op Piero della Francesca's constructiemethode van het perspectief.

* ≫37. In je werkboek zie je weer boven- en zijaanzicht van een kubus op tafel, scheef voor een tekenscherm geplaatst. De projectierichting is in beide tekeningen aangegeven.

a. Welke hoeken maakt de projectierichting met de X-as (tafelrand), Y-as (onderkant scherm) en Z-as (zijkant scherm)?

b. Teken de projecties van de acht hoekpunten in elk van beide aanzichten. Construeer met behulp daarvan de parallelprojectie van de kubus op het scherm.

De projectierichting bij een parallelprojectie kan t.o.v. een coördinatenstelsel worden vastgelegd door middel van een *richtingsvector* $\underline{r}$.

De oorsprong kiezen we als beginpunt voor $\underline{r}$.
De *kentallen* van $\underline{r}$ zijn juist de coördinaten van zijn eindpunt.

Voorbeeld (zie figuur):
$\underline{r} = (1,2,3)$

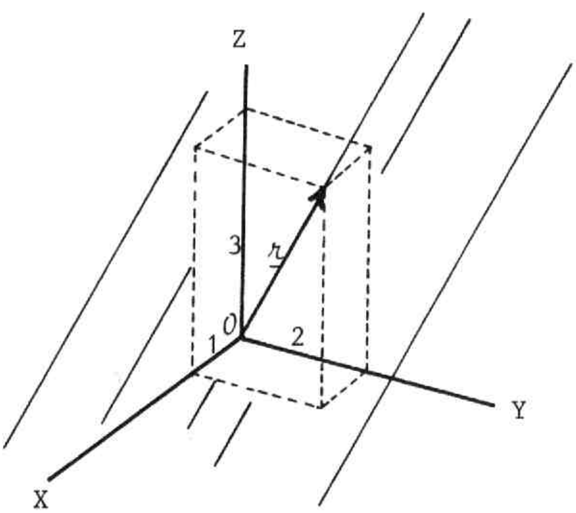


fig. 5.1

* ≫ 38. Teken de vectoren:

$\underline{a} = (2,0,0)$; $\underline{b} = (1,0,3)$; $\underline{c} = (0,2,1)$; $\underline{d} = (1,4,0)$;

$\underline{e} = (2,4,6)$; $\underline{f} = (0,0,-2)$; $\underline{g} = (1,0,-2)$; $\underline{h} = (1,2,-5)$.

≫ 39. Geef bij elk van onderstaande plaatjes (de kentallen van) de richtingsvector van de parallelprojectie.
Het blok heeft de zijden 1,2 en 3 resp. langs de X-, Y- en Z-as.
Eén projectiestraal gaat door de punten A en B.

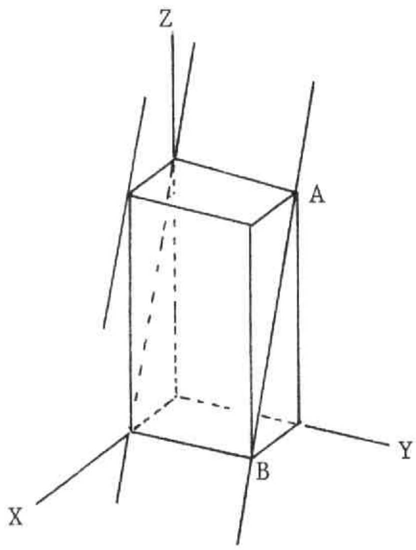


fig. 5.2

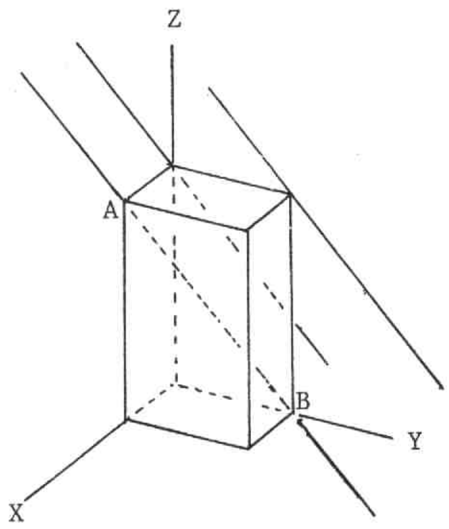


fig. 5.3

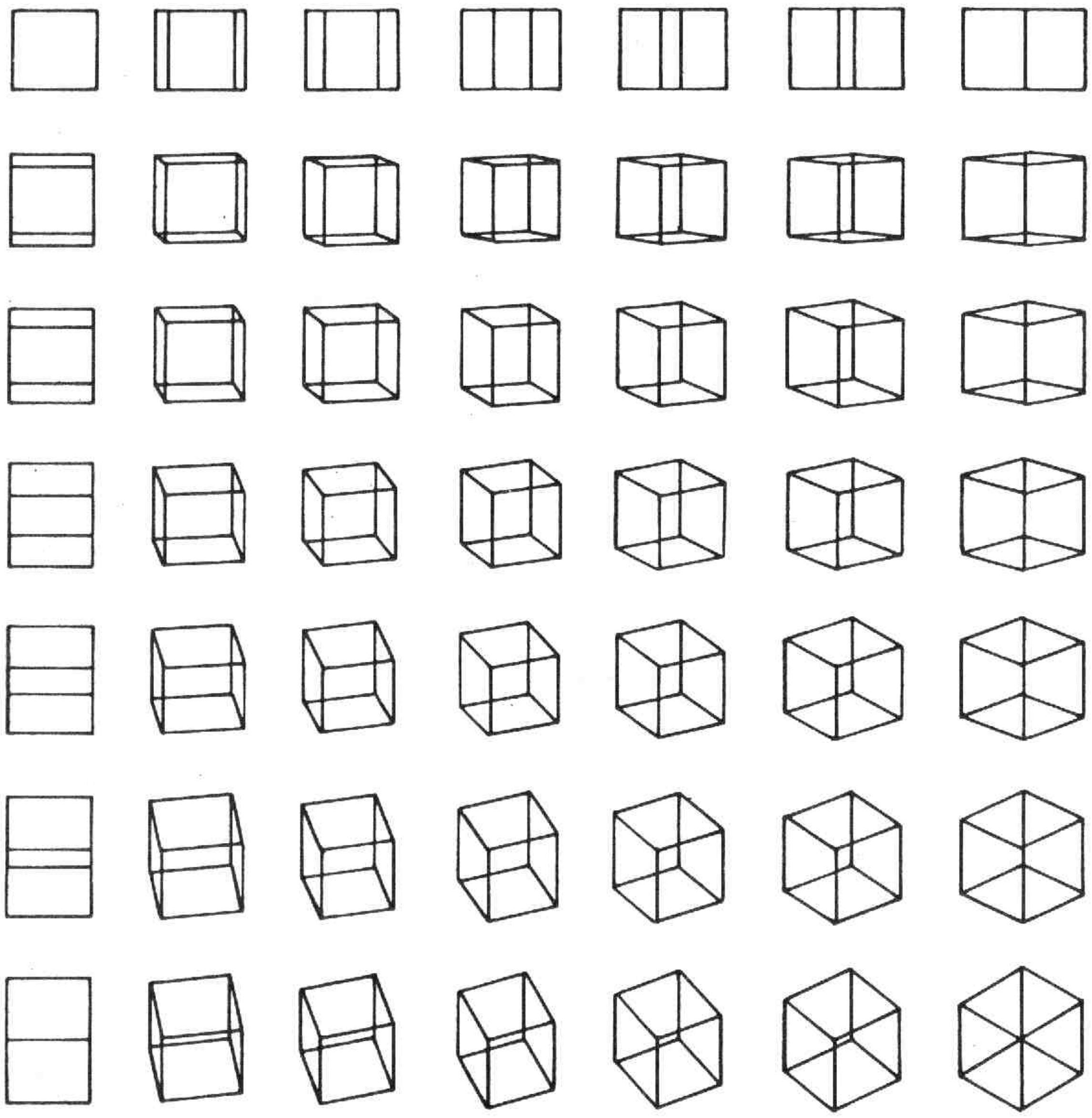
≫ 40. Neem het XOY-vlak als vlak van tekening en teken voor beide gevallen (fig. 5.2 en fig. 5.3) de projectie van het blok.

≫ 41. Wat is de richtingsvector van de parallelprojectie die je in ≫ 37 gehanteerd hebt?

≫ 42. Op pag. 24 zie je 49 parallelprojecties van de kubus.

a. Welke lijkt het meest op de projectie die jij getekend hebt bij ≫ 37?

b. Bij welke projectierichting (richtingsvector!) krijg je het plaatje linksboven? (Kubus staat recht voor het scherm).



≫ 43. Het projectiescherm wordt t.o.v. de kubus gedraaid. De projectierichting is steeds loodrecht op het scherm. De coördinaat-assen vallen langs de ribben van de kubus (oorsprong links-achter-onder).

a. Hoe moet de projectierichting t.o.v. de kubus veranderen om de figuren op de bovenste rij van links naar rechts te krijgen?

b. Wat is de richtingsvector bij de projectie die de figuur rechts onderaan te zien geeft?

6

PUNTEN, LIJNEN, VLAKKEN

We kijken nog eens naar de prent van Simon de Caes (pag. 17). Op het draaibare tekenbord zie je hoe de ribben van de kubus stipsgewijs getekend zijn (net als de lijnen van de luit op de prent van Dürer, op pag. 16). Het lijkt wel of de tekenaar er niet op wilde vertrouwen dat die ribben weer als rechte lijnen op het bord zouden verschijnen!

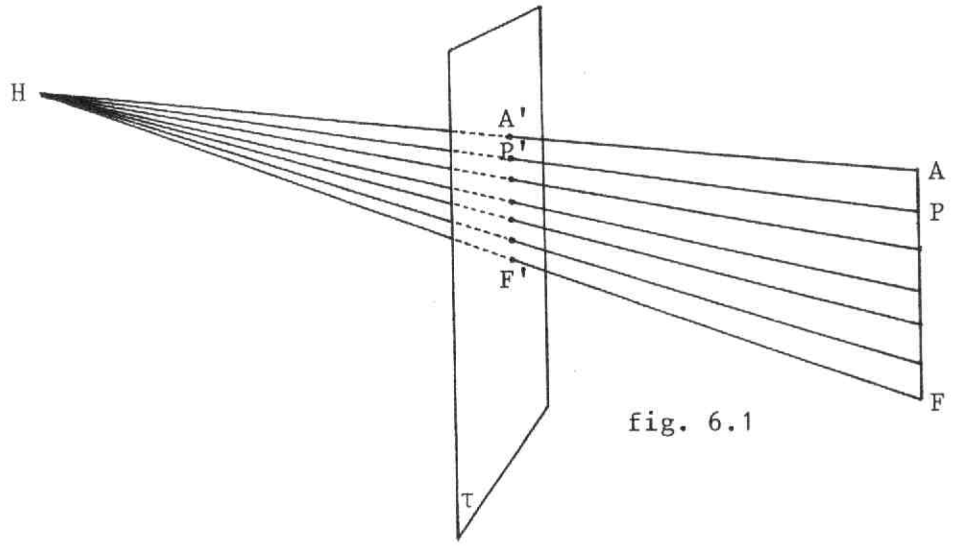


fig. 6.1

Je kunt je afvragen of het eigenlijk wel zo vanzelfsprekend is dat het beeld van een rechte lijn bij (centrale) projectie ook weer een rechte lijn is. Laten we als voorbeeld de ribbe FA nemen uit de prent van De Caes. De "kijklijnen" uit H verbinden H met de punten van die ribbe. Die lijnen snijden het vlak τ ("tafereel") in een reeks punten: A', P', ..., F'.

De vraag waar het nu om gaat is: "waarom liggen de snijpunten A', P', ... F' op één rechte lijn?

Voordat we daar dieper op ingaan eerst een opgave.

≫ 44. Een kromme lijn van A naar F zal in het algemeen als kromme lijn op het tafereel verschijnen (zoals de lijnen van de luit op Dürer's tekening). Maar het is ook mogelijk om een kromme verbindingslijn van A en F als recht lijnstuk op het tafereel te zien. Hoe?

Nu ons probleem.

De kijklijnen die vanuit H naar de punten van AF lopen, spannen als het ware een plat vlak op. Dat "kijkvlak" noemen we κ.

En zoals het muurvlak van een kamer en de vloer elkaar in een rechte lijn ontmoeten, zo zullen het tafereel τ en het kijkvlak κ een rechte lijn als ontmoetingslijn of *snijlijn* hebben. (Zie fig. 6.2).

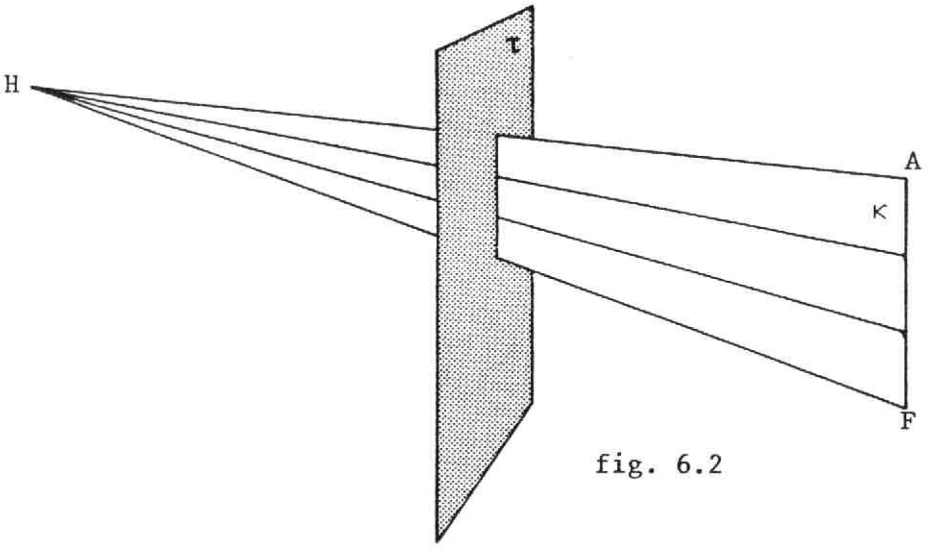


fig. 6.2

Op de snijlijn van twee vlakken liggen de gemeenschappelijke punten van beide vlakken, in dit geval dus zeker ook de snijpunten van de kijklijnen met het tafereel.

Anders gezegd: de punten A', P', ..., F' liggen op een rechte lijn.

Opmerking:

Als we spreken over vlak, dan bedoelen we een *onbegrensd* vlak; het vierkante tekenscherm en de driehoek HAF zijn delen van de vlakken τ en κ, zoals het lijnstuk A'F' een deel van de snijlijn van τ en κ is.

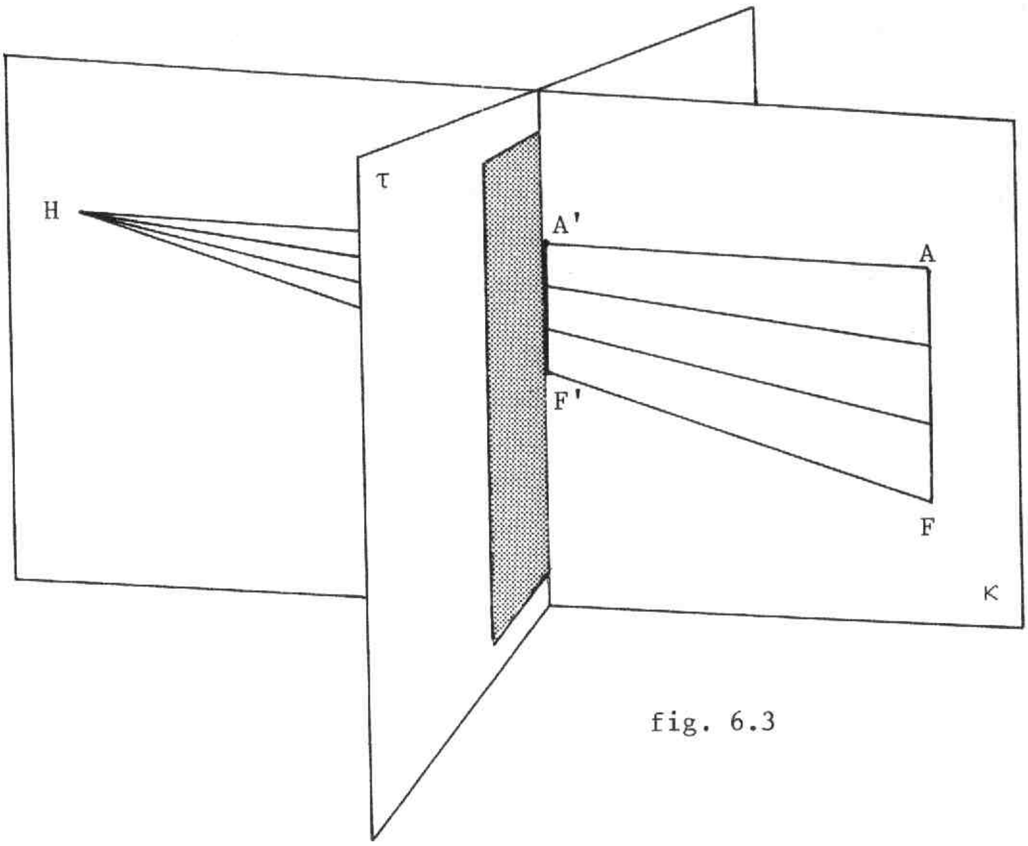


fig. 6.3

≫ 45. De redenering van pag. 26 begint met de constatering dat de lijnen die een punt (H) met een *rechte* lijn (AF) verbinden een *plat* vlak opspannen. Dat is i.h.a. niet het geval met de lijnen die een punt met een *kromme* lijn verbinden.
Wat spannen die lijnen op als de kromme lijn een cirkel is?
Kan het opspansel in dat geval toch een deel van een plat vlak zijn?

≫ 46. Aan boord van een schip zie je in de verte een zandbank. Bij eerste waarneming doet die zich voor als een streep, maar als je wat dichterbij komt zie je toch dat het een "pannekoek" is.
Hoe kun je dat verschil in waarneming verklaren? Wat moet je doen om de zandbank van dichtbij ook als een streep te zien?

In de redenering van pag. 26 zitten nogal wat veronderstellingen.
Zo zou je je kunnen afvragen:

- *Waarom liggen de kijklijnen (van H naar AF) in één plat vlak?*
- *Waarom snijden twee vlakken elkaar in één rechte lijn?*

Als je die vragen wilt beantwoorden heb je weer andere veronderstellingen nodig, waarvan je je ook weer kunt afvragen waarom ...
Omdat we natuurlijk niet tot in het oneindige kunnen doorgaan met het stellen van de vraag "waarom ...", hebben we een aantal uitgangspunten (veronderstellingen) gekozen. Die uitgangspunten van de ruimtemeetkunde moet je zien als een soort spelregels waar we verder niet aan tornen.
Zulke spelregels noemt men in de wiskunde meestal *axioma's* of *postulaten*.
Als eerste postulaat kiezen we:

REGEL 1 :

Door een rechte lijn en een punt buiten die lijn gaat precies één plat vlak.

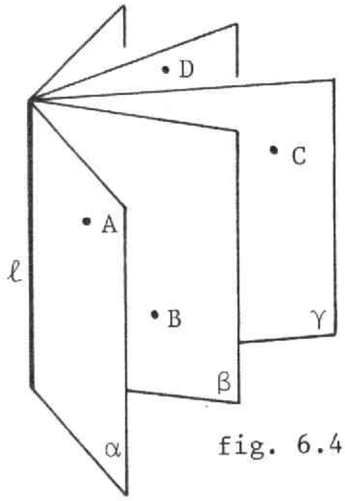


fig. 6.4

Illustratie: door een rechte lijn gaan een heleboel vlakken, zoals een opendraaiende deur een heleboel standen in kan nemen. Wijs je één punt aan (in het draaibereik van de deur), dan leg je daarmee de stand van de deur vast.

In de redenering op pag. 26 is κ het (enige) vlak door het punt H en de lijn AF. De lijnen die H met de punten van AF verbinden liggen geheel in κ volgens het tweede postulaat.

REGEL 2:

Als een rechte lijn twee punten van een plat vlak met elkaar verbindt, dan ligt deze lijn in dat vlak.

Populair gezegd:
Je kunt een rechte liniaal langs twee punten *op* het bord of *op* een vlak stuk papier leggen.

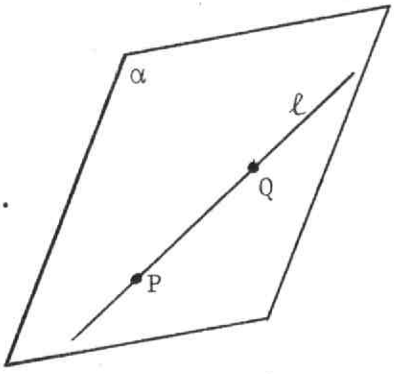


fig. 6.5

≫ 47. Hoe kun je met een touwtje uitmaken of je tafelblad echt vlak is?

≫ 48. Heel nadrukkelijk is er in *regel 2* sprake van een *plat* vlak; dit om het verschil met een *gebogen* vlak te benadrukken.
Bedenk eens een paar gebogen vlakken waarop rechte lijnen liggen.
Geldt daarbij *regel 2*?

Voor onze redenering bij de prent van Simon de Caes hebben we nog een derde postulaat nodig.

REGEL 3:

Als twee verschillende platte vlakken elkaar snijden, dan is de doorsnede een rechte lijn.

Zoals de schuine zijwanden van een tent elkaar snijden in de "noklijn" ...
De snijlijn van twee vlakken bevat *alle* gemeenschappelijke punten van die vlakken. In de figuur: $\alpha \cap \beta = \ell$.

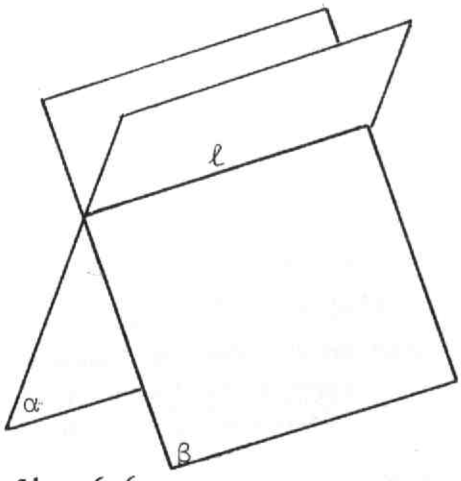


fig. 6.6

≫ 49. Kan de snijlijn van een plat vlak en een gebogen vlak ook een rechte lijn zijn? Geef een paar voorbeelden waarbij dat wel, en een paar voorbeelden waarbij dat niet het geval is.

≫ 50. De zijvlakken TAB en TCD van de piramide TABCD snijden elkaar in het punt T. Is dat niet in tegenspraak met *regel 3?*

In een wiskundige theorie wordt meestal onderscheid gemaakt tussen de "aangenomen" of "voorgeschreven" spelregels (de postulaten) en de daarmee "afgeleide" spelregels (de stellingen). Zo kun je uit de *regels 1* en *2* een nieuwe regel afleiden.

REGEL 4 [1)]

Door drie punten die niet op één lijn liggen gaat precies één vlak.

De afleiding gaat als volgt:
Laat A, B, C die drie punten zijn. Door A en de verbindingslijn ℓ van B en C, gaat (*regel 1*) één vlak, zeg α. Dat vlak α bevat de drie punten.

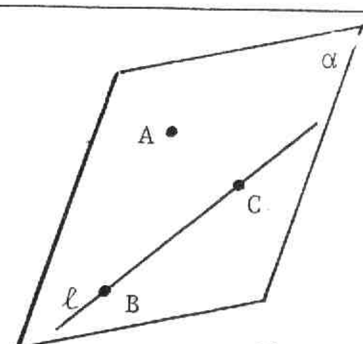


fig. 6.7

Nu zou je ook een vlak β door A, B en C kunnen leggen met behulp van de lijn AC en het punt B.

Uit *regel 1* en *2* volgt dat dit vlak β hetzelfde is als α.

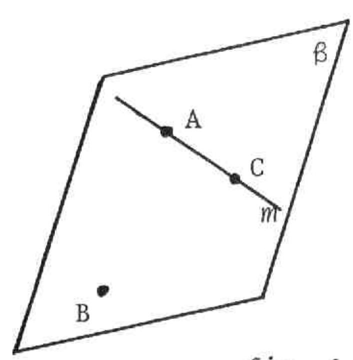


fig. 6.8

----

1) We zullen in dit boek "postulaten" en "stellingen" beide met de term "regel" aanduiden. Je mag namelijk vergeten wat aangenomen en wat afgeleide regels zijn. Aangenomen en afgeleide regels zijn trouwens soms uitwisselbaar. Zo kun je regel 4 i.p.v. regel 1 als postulaat kiezen en daaruit (m.b.v. regel 2) weer regel 1 afleiden.

≫ 51. Laat zien hoe je afleidt dat vlak β hetzelfde is als α.

≫ 52. Hoeveel vlakken zijn er die door twee punten gaan? (Denk aan twee scharnierpunten van een deur). Is het mogelijk dat er door drie punten meer dan één vlak gaat?

≫ 53. Hoe komt het dat een krukje met vier poten kan wiebelen en een krukje met drie poten niet?

≫ 54. Probeer zelf de volgende *regel* uit de *regels 1* en *2* af te leiden

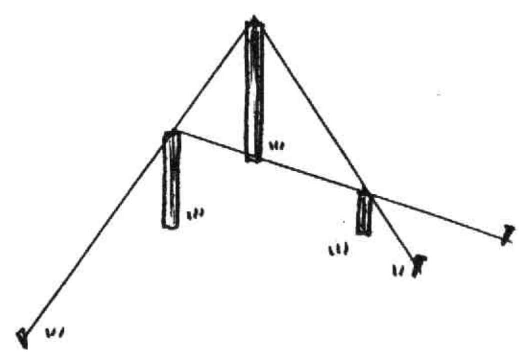
REGEL 5:

Door twee snijdende lijnen gaat precies één vlak.

≫ 55. Op een vlak stuk grond staan drie paaltjes van ongelijke hoogte. Langs de toppen van de paaltjes worden touwen gespannen die met pennen in de grond worden bevestigd.

a. De drie pennen zullen op één lijn moeten liggen. Hoe kun je dat verklaren?

b. Wat gebeurt er met die lijn als je van alle paaltjes een even groot stuk afzaagt?



≫ 56. Volgens *regel 2* kan een lijn ℓ die *niet* in het vlak α ligt hoogstens één punt met α gemeenschappelijk hebben. Als ℓ en α inderdaad zo'n gemeenschappelijk punt P bezitten, dan zeggen we dat ℓ het vlak α in P *snijdt*. (Zoals de kijklijnen in fig. 6.1 het tafereel τ snijden). Hoeveel snijpunten kan een lijn met een cilindervlak hebben? En met een torus (dit is een oppervlak in de vorm van een binnenband)?

7

RUIMTE-CONSTRUCTIES

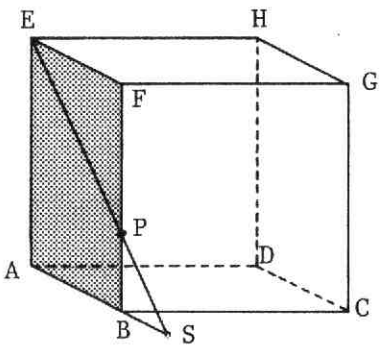


fig. 7.1

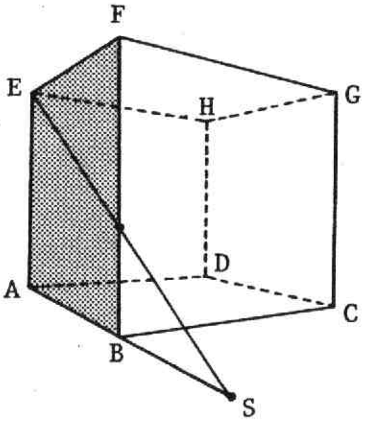


fig. 7.2

≫ 57. De figuren 7.1 en 7.2 zijn respectievelijk een parallelprojectie en een centrale projectie van de kubus ABCD EFGH. Het punt E is verbonden met een punt P op de ribbe BF. Het snijpunt van de lijn EP met het grondvlak ligt ergens op de lijn AB.

a. Het punt P beweegt zich van B naar F. Beschrijf hoe het snijpunt S beweegt.

b. Wat gebeurt er met S in figuur 7.2 als P naar F toeloopt?

≫ 58. a. Teken fig. 7.1 over in je schrift (zonder de punten P en S) en teken op de kubus ABCD EFGH een tweede kubus (EFGH KLMN). Teken het vlak door MN en FE en 'construeer' de snijlijn met het grondvlak (= vlak door A, B en C).

b. Dezelfde opdracht voor fig. 7.2.

In de perspectieftekening (fig. 7.2) gebeurt er iets geks als je P omhoog schuift naar het punt F.
Het punt S dat, zolang P lager ligt dan F, toch zeker *vóór* de kubus moet liggen, duikt plotseling aan de achterzijde op!
Dit perspectiefverschijnsel kun je bijv. ook waarnemen als je wandelend in Utrecht een denkbeeldige lijn trekt van de top van een lantaarnpaal (waar je vlak bij staat) naar het puntje van de Domtoren (die je in de verte ziet). Die lijn lijkt de grond ergens "achter" de Dom te snijden, zo bedrieglijk is perspectief.
Ook in ≫ 58 'wringt' er iets als je kijkt naar het vlak MNEF in de perspectieffiguur.
Je kunt je vermoedelijk wel voorstellen waarom we bij 'ruimteconstructies' waarbij het gaat om het tekenen van snijpunten van lijnen en vlakken, liever gebruik maken van een parallelprojectie zoals fig. 7.1.

Bij de volgende serie opdrachten vind je alle figuren in je werkblok.

* ≫ 59. Het punt H is verbonden met de punten op het verlengde van AB. Waar liggen de snijpunten van die verbindingslijnen met zijvlak BCGF?

* ≫ 60. P, Q en R liggen resp. op de ribben EF, BF en FG van de kubus. De kubus staat op het vlak α.

a. Teken het snijpunt van de lijn PQ met vlak α.
b. Teken de snijlijn van het vlak PQR met het vlak α.

* ≫ 61. De punten A, B en C hebben t.o.v. het driedimensionaal assenstelsel resp. de coördinatenrijtjes (3,0,1), (1,0,3) en (2,3,0).
α is het vlak door A, B en C.

a. Teken de snijlijn van α met achtereenvolgens het XOZ-, het XOY- en het YOZ-vlak.

b. Wat zijn de coördinaten van de snijpunten van α met de coördinaat-assen?

c. Dezelfde opdracht voor het geval A: (3,0,1); B: (1,0,3) en C: (4,3,0).

* ≫ 62. Op een vlak stuk grond staan twee paaltjes in de nabijheid van een luik. Paaltje 2 staat dichter bij het luik dan paaltje 1 en is bovendien korter dan paaltje 1. Het luik wordt opengedraaid.

a. Kan het luik op beide paaltjes rusten? Waarom?

b. Zo nee, van welk paaltje moet je iets afzagen? Geef in de tekening aan hoe hoog dat paaltje moet worden.

* ≫ 63. Het vlak ABGH is een "diagonaalvlak" van de kubus.
De lichaamsdiagonaal EC ligt in drie van zulke diagonaalvlakken.
Teken die drie diagonaalvlakken.

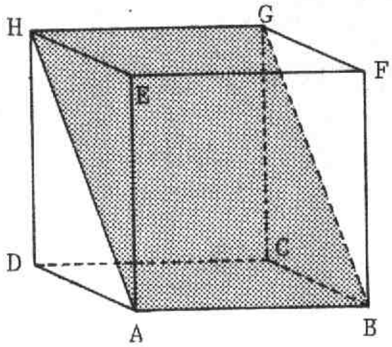


fig. 7.3

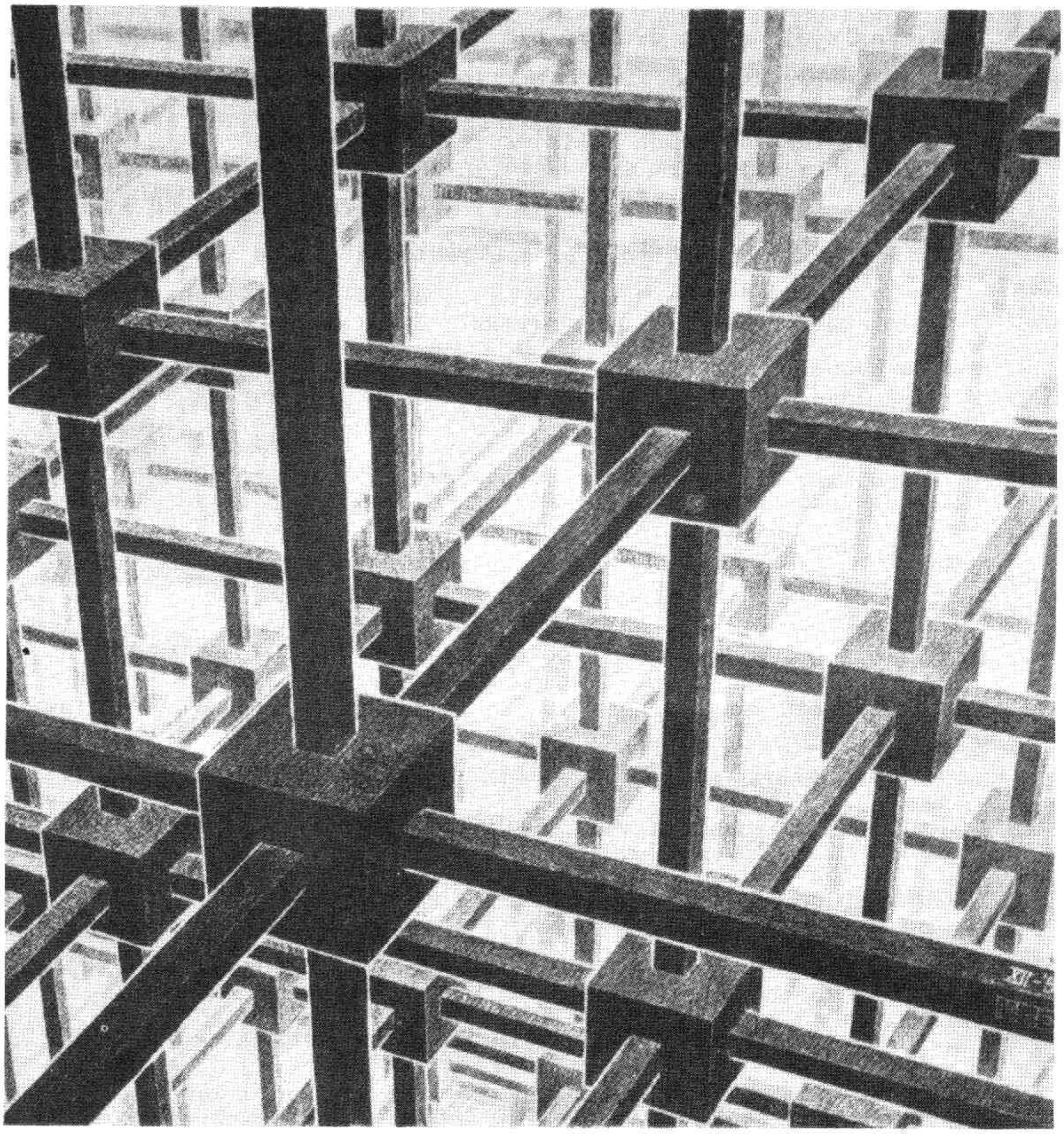
* ≫ 64. Construeer het snijpunt van de lichaamsdiagonaal EC met het vlak AHF.

* ≫ 65. Construeer het snijpunt van de lijn FS met het grondvlak α.

* ≫ 66. Construeer de snijpunten van de lijn PQ (Q is het grondvlak, P ligt op de cilinderas) met het cilindervlak.

Extra opgave

* ≫ 67. De punten A, B en C zijn gegeven door hun projectie op resp. het XOY-vlak, het YOZ-vlak en het XOZ-vlak.
Construeer de snijlijnen van het vlak α door A, B en C met de drie coördinaatvlakken.



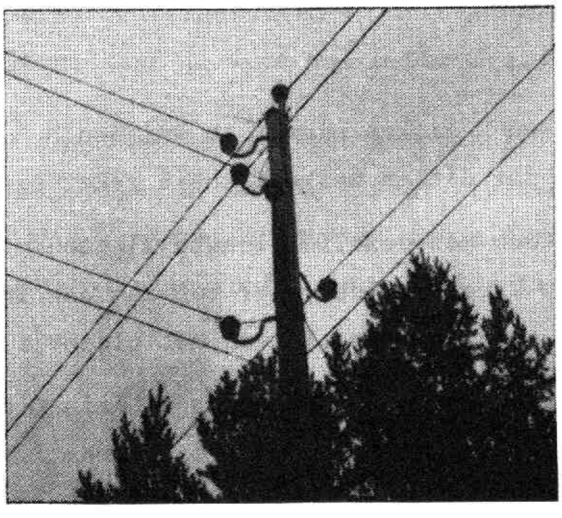
Kubische ruimtevulling, M.C. Escher

8

KRUISENDE LIJNEN

≫ 68. Op de prent van Maurits Escher (pag. 36) zie je balken in drie richtingen lopen. Als je de afmetingen verwaarloost kun je de balken als rechte lijnen en de verbindingskubussen als punten opvatten. Zo krijg je een driedimensionaal rooster dat is opgebouwd m.b.v. drie stelsels parallelle lijnen.
Twee parallelle lijnen hebben, zoals bekend, geen ontmoetingspunt. Maar geldt het omgekeerde ook: twee lijnen in de ruimte die geen ontmoetingspunt hebben zijn parallel?

≫ 69. De telefoondraden sluiten een vierhoekje in. Of niet soms?



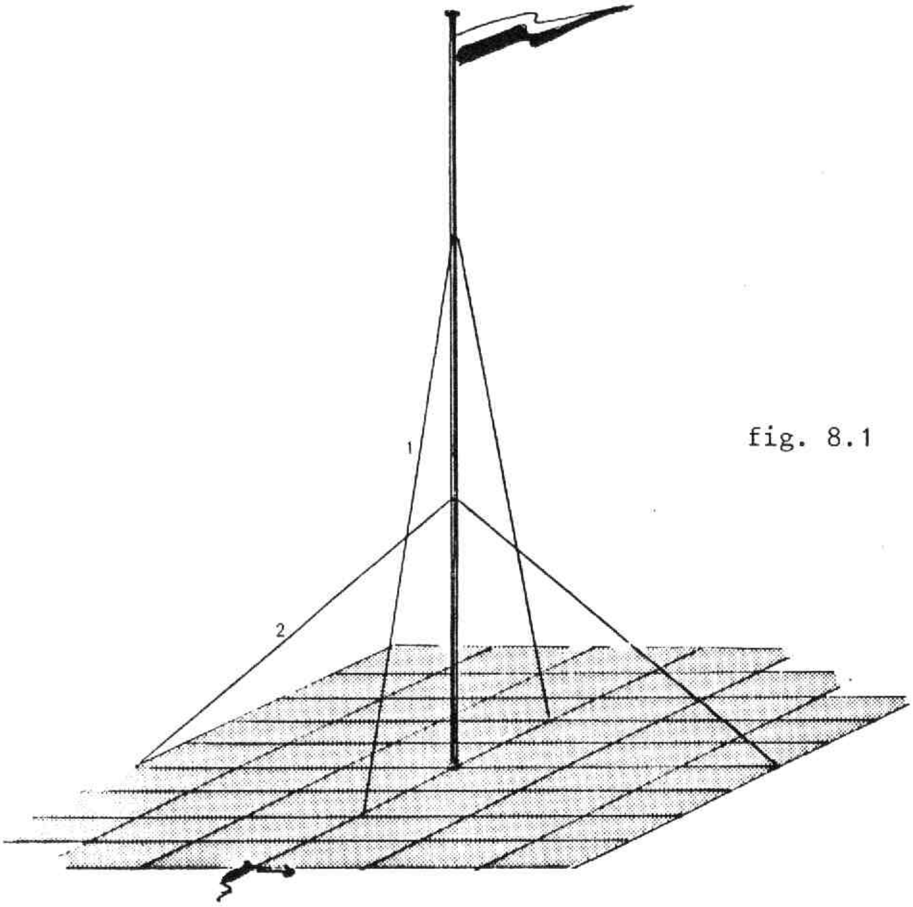


fig. 8.1

≫ 70. Bekijk figuur 8.1.

a. De touwen 1 en 2 lijken elkaar te snijden.
Hoe weet je dat dit in werkelijkheid zeker niet het geval is?

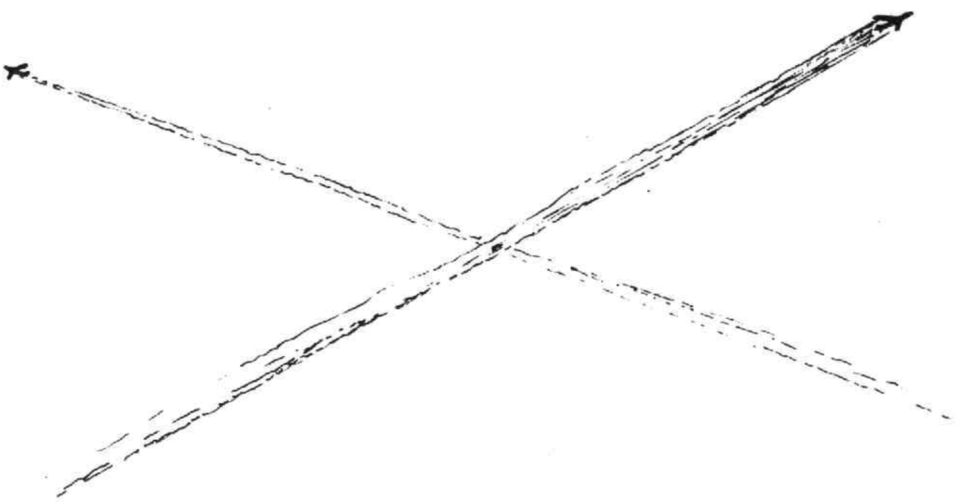
b. Als je een touw met dezelfde lengte als touw 1 zou willen spannen dat touw 2 wel snijdt, waar zou dat dan in de vloer bevestigd moeten zijn? (De tegels van het pleintje zijn vierkant).

c. Een muis zit op de hoek van een tegel (zie figuur) en kijkt naar de vlaggemast. Waar ziet de muis de touwen 1 en 2 elkaar "kruisen"?

d. Hoe verandert de plaats van het "kruispunt" als die muis in de richting van de pijl (langs de rand van het pleintje) wandelt? Waar ziet de muis het "kruispunt" op de grond?

Lijnen die niet parallel zijn en toch geen snijpunt hebben noemen we *kruisende lijnen.*

De naam is misschien een beetje ongelukkig gekozen; bij "kruisende levenspaden" of "kruisende blikken" denk je juist wel aan een ontmoeting. Maar als je aan "kruisende wegen" in het luchtruim denkt, dan klinkt het toch niet zo gek ...



De witte sporen die beide vliegtuigen op de blauwe hemel achterlaten lijken elkaar te snijden, maar je weet wel beter ...

≫ 71. Veronderstel dat twee vliegtuigen met dezelfde snelheid vliegen volgens rechtlijnige routes die elkaar kruisen. Wat kun je zeggen van hun onderlinge afstand? Hoe zit dat als ze met dezelfde snelheid volgens parallelle routes in dezelfde richting vliegen?

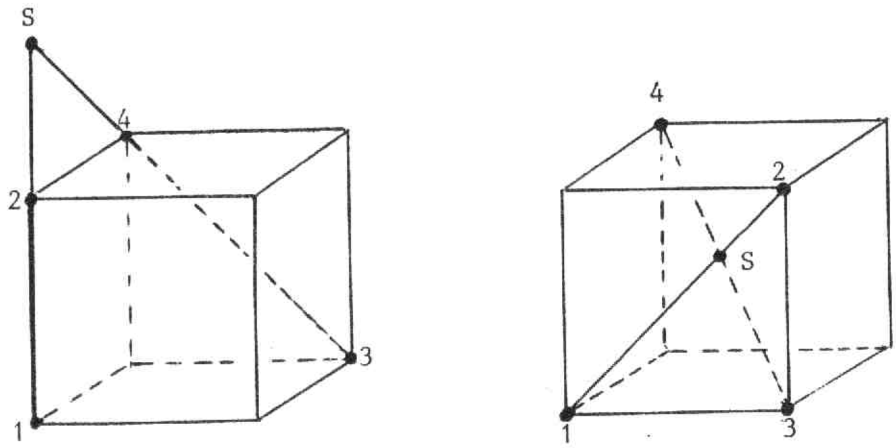
* ≫ 72. Een vliegtuig (A) vliegt op 10 km hoogte in noordelijke richting. Een tweede vliegtuig (B) vliegt op 8 km hoogte naar het oosten.

a. Teken een mogelijke routelijn voor A en een voor B.

b. Wat is de kleinst mogelijke onderlinge afstand van die twee vliegtuigen?

c. Hoeveel graden is de hoek tussen die twee routelijnen?

≫ 73. Bekijk onderstaande kubus-plaatjes. De lijn door 1 en 2 snijdt de lijn door 3 en 4 in S. Ben je het daar mee eens?



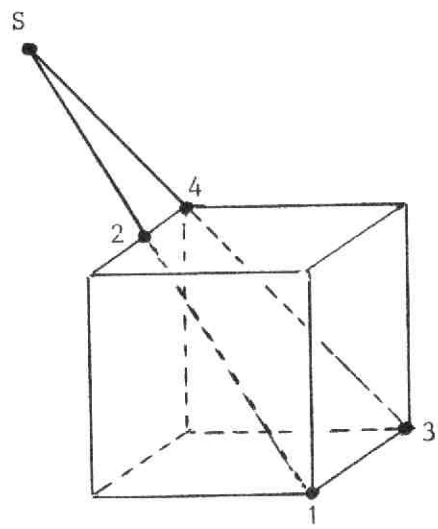
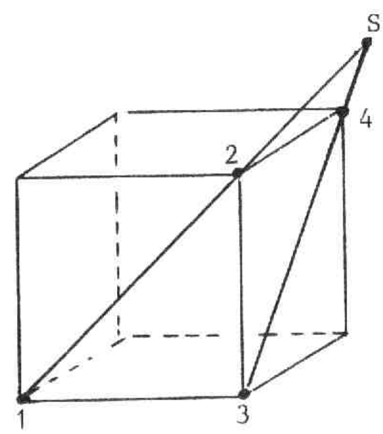


fig. 8.2



≫ 74. Op de ribben HG resp. CG liggen de punten Y en Z. (HY = y en CZ = z).

a. Waarom zullen de lijnen EY en BZ elkaar in het algemeen kruisen?

b. Wat weet je van y en z als EY en BZ elkaar snijden?

c. En wat als de lijn BZ de lijn EY "achter langs" kruist?

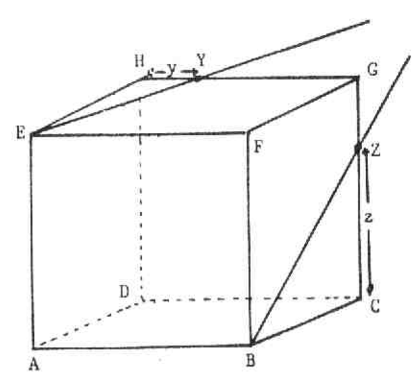


fig. 8.3

≫ 75. a. De zijvlaksdiagonalen AF en BG ontmoeten elkaar (ook na verlenging) niet! Hoe kun je dat beredeneren?

b. We verdelen AF en BG nu in vier gelijke stukken. Welke van de vijf verbindingslijnstukken is het kortst? (Licht je antwoord toe).

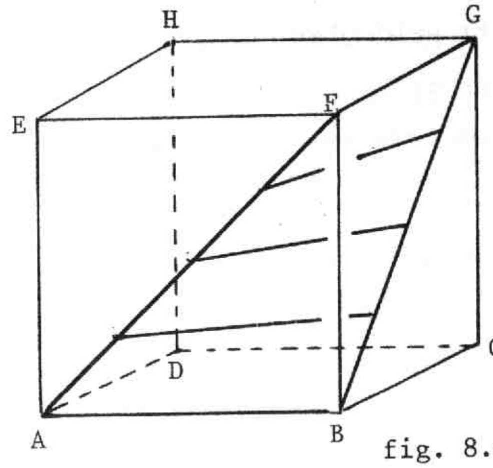


fig. 8.4

Met een beetje fantasie kun je in de bovenstaande figuur een ontwrichte ladder of verwrongen hekwerk zien. Timmerlieden spreken in dat geval van *scheluw*.[1] Bij een raamwerk van bijv. een deur, is het zaak dat de latten niet scheluw, niet kruisend mogen zijn. Door kruisende lijnen kan n.l. geen plat vlak worden gelegd! Allicht: als twee lijnen wel in een plat vlak liggen, dan zijn ze òf snijdend òf parallel.

----

1) Van Dale: *scheluw* = verwrongen, uit het platte vlak gebogen;
scheluw hout = door ongelijke krimping gedraaide, scheve planken.

Er geldt dan:

REGEL 6:

Door twee kruisende lijnen gaat geen plat vlak.

In tegenstelling tot:

REGEL 7:

Door twee parallelle lijnen gaat één plat vlak.

≫ 76. In hoofdstuk 6 heb je gezien dat de verbindingslijn van een rechte lijn ℓ met een punt H buiten ℓ één vlak opspannen.
Als dat punt H heel ver weg van ℓ ligt, lopen die lijnen van H "bijna-parallel".

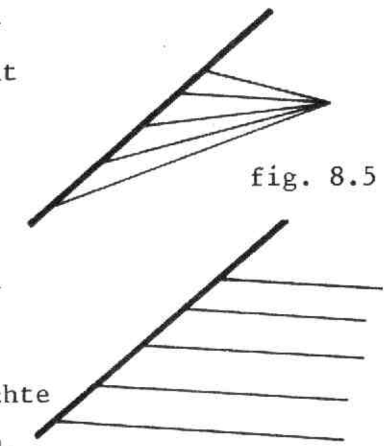


fig. 8.5

a. Hoe zit het als die lijnen echt parallel zijn? Spannen ze een vlak op?

b. Gevolg: de parallelprojectie van een rechte lijn op een vlak is weer een rechte lijn. Geldt dit in elke situatie?

De *regels 1, 4, 5* en *7* hebben alle betrekking op het "bepaald zijn van een plat vlak".
We vatten ze hier even samen.

Een plat vlak is bepaald door:
a. een rechte lijn en een punt daarbuiten;
b. drie punten niet-op-één-rechte-lijn;
c. twee snijdende rechte lijnen;
d. twee parallelle rechte lijnen.

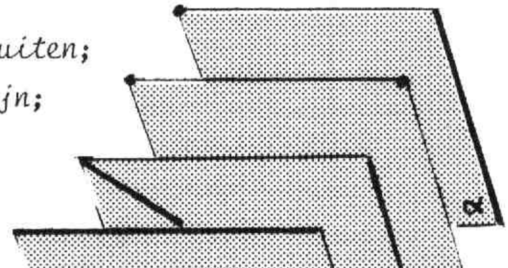
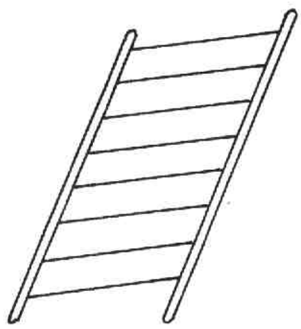


fig. 8.6

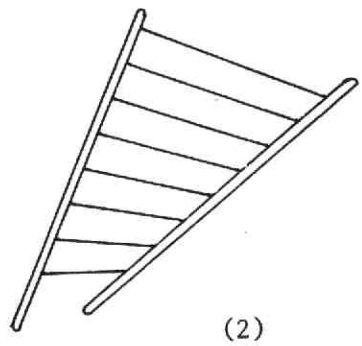
≫ 77. Door twee parallelle lijnen gaan (behalve één plat vlak) vele gebogen vlakken.
Kun je een voorbeeld geven van een gebogen vlak door twee parallelle lijnen?

Minder bekend zijn gebogen vlakken die door kruisende lijnen gaan. Zo'n vlak kun je eenvoudig maken met behulp van twee latjes en een rekbaar koord. Span op gelijke afstand tussen de twee latjes een aantal draden. Als je de latten parallel houdt met de touwtjes gespannen (en ook parallel) krijg je een plat vlak.
Draai je nu een van beide latjes t.o.v. de andere, zodat de latjes elkaar kruisen, dan spannen de draden een gebogen vlak op.



(1)

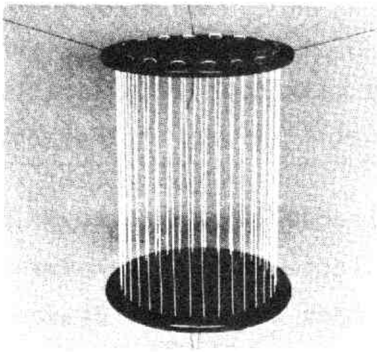
fig. 8.7

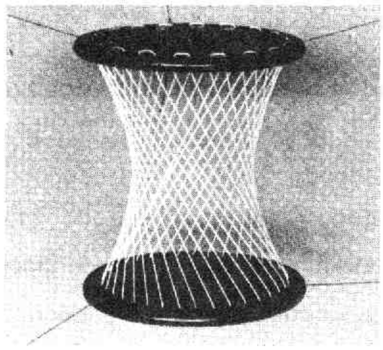


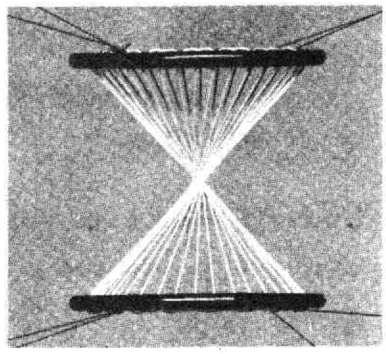
(2)

≫ 78. Behalve die twee kruisende latjes in (2) zijn ook de verbindingsdraden twee aan twee kruisend. Waarom?

In plaats van twee rechte latjes kun je ook twee ringen of cirkelschijven nemen, waartussen de draden worden gespannen. Zijn de draden parallel, dan spannen ze een cilindervlak (zie foto 1, pag. 44) op. Als je nu de ene cirkel een beetje draait t.o.v. de andere, ontstaat een fraai gebogen vlak, opgespannen door kruisende lijnen (foto 2). Dat gebogen vlak heet een *hyperboloïde*. (Heb je enig idee waarom?).







1. parallelle lijnen 2. kruisende lijnen 3. snijdende lijnen

≫ 79. Hoeveel graden moet je de bovenste cirkel t.o.v. de onderste draaien om het kegelvlak (foto 3) te krijgen?

≫ 80. Is een cilindervlak zoals op foto 1 bepaald door twee parallelle lijnen? Zo nee, door hoeveel lijnen dan wel?

* ≫ 81. Een muis zit in het hoekpunt "links-voor-beneden" van de kubus. Hij ziet een "kruispunt" van de kruisende lijnen ℓ en m. Construeer in de figuur de plaats waar hij dat "kruispunt" op ℓ en waar hij het op m ziet.

≫ 82. Bekijk nog eens figuur 8.4.
Stel je voor dat AF en BG twee latjes zijn en de verbindingslijnen rekbare draden. Door het latje AF te draaien waarbij alleen A op zijn plaats blijft, kun je die draden in één vlak krijgen.

a. Welke plaats neemt het latje AF dan in?

b. Hoe groot is de hoek tussen de oorspronkelijke en de nieuwe stand van het latje?

c. Hoeveel graden is de hoek tussen de kruisende lijnen AF en BG?

9

PARALLELLITEITEN (1)

In de vorige hoofdstukken hebben we nogal wat aandacht besteed aan de onderlinge ligging van punten, lijnen en vlakken in de ruimte.
De tabel geeft een overzicht van de mogelijkheden:

	PUNT	LIJN	VLAK
PUNT	- valt samen met - valt niet samen met	- ligt op - ligt niet op	- ligt in - ligt niet in
LIJN	- gaat door - gaat niet door	- valt samen met - is parallel met - snijdt - kruist	- - -
VLAK	- gaat door - gaat niet door	- - -	- - -

≫ 83. Drie vakken zijn nog open. Wat moet daar staan?

≫ 84. Wanneer zul je een lijn parallel met een vlak noemen?
Geef een paar voorbeelden uit je omgeving.

≫ 85. Kan een zonnestraal parallel met het aardoppervlak zijn?

≫ 86. Stel je voor, iemand beschikt over een touw dat precies even lang is als de evenaar. Hij wil dat touw parallel aan het aardoppervlak op 1 m hoogte boven de evenaar aanbrengen.
Hoeveel meter touw komt hij tekort?

≫ 87. Hoeveel meter touw zou hij tekort komen als de aarde een hele grote kubus was?

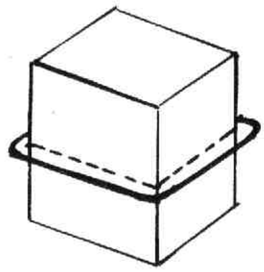


fig. 9.1

≫ 88. Waar/onwaar?

a. Twee lijnen die parallel zijn met een derde lijn zijn onderling parallel.

b. Twee lijnen die parallel zijn met één vlak zijn onderling parallel.

≫ 89. Met een stukje papier kun je een modelletje van twee snijdende vlakken vouwen. Onderzoek met zo'n modelletje of er lijnen bestaan die parallel zijn met twee snijdende vlakken.

≫ 90. Noem de twee vlakken om de vouwlijn: α en β.
Kies een punt A in α en een punt B in β.
Hoe vind je de kortste route van A via de snijlijn naar B?

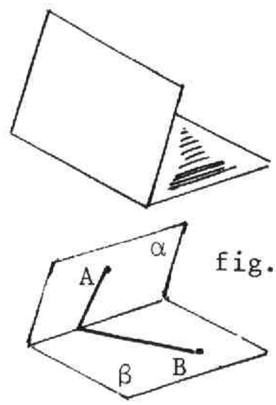


fig. 9.2

≫ 91. Twee lijnen ℓ en m liggen in één vlak γ. De lijn k ligt niet in γ, snijdt ℓ en is parallel met m. Maak een schetsje van die situatie.

≫ 92. Wanneer zul je twee vlakken parallel noemen? Geef voorbeelden uit je omgeving.

≫ 93. Ergens op 20 km van het aardoppervlak ligt het (denkbeeldige) grensvlak tussen de troposfeer en de stratosfeer. Welke vorm heeft dat grensvlak?

≫ 94. Gegeven een kubus met ribben van 5 cm. Wat kun je vertellen van de verzameling van alle punten *buiten* de kubus die op een afstand van 1 cm van het kubusoppervlak liggen?

≫ 95. Een punt P ligt buiten een vlak γ. Hoeveel lijnen kun je door P trekken die parallel zijn met γ? Wat weet je van die lijnen?

≫ 96. Een punt P ligt buiten de lijn c. Hoeveel vlakken kun je door P aanbrengen die parallel zijn met c? Wat weet je van die vlakken?

≫ 97. Wat kun je zeggen van de verzameling van alle lijnen die parallel zijn met een gegeven lijn (resp. een gegeven vlak) en een afstand van 1 cm tot die lijn (resp. dat vlak) hebben?

≫ 98. Gegeven: een lijn c in het vlak γ.
Geef commentaar bij de volgende uitspraken.

a. Elke lijn ℓ die c kruist is parallel met γ.

b. Elke lijn ℓ die parallel is met c, is parallel met γ.

≫ 99. Twee lijnen die in parallelle vlakken liggen zijn parallel.
Is dat waar?

≫ 100. Twee parallelle vlakken snijden een derde vlak. Wat weet je van de snijlijnen met dat derde vlak?

≫ 101. Waar/onwaar?

a. Een vlak dat een lijn parallel met een tweede vlak bevat, is parallel met dat tweede vlak.

b. Een vlak dat twee lijnen parallel met een tweede vlak bevat, is parallel met dat tweede vlak.

≫ 102. Twee vlakken verdelen de ruimte in drie of vier delen (al naar gelang ze parallel of snijdend zijn).
Hoe zit dat met drie vlakken? Schets alle mogelijkheden!

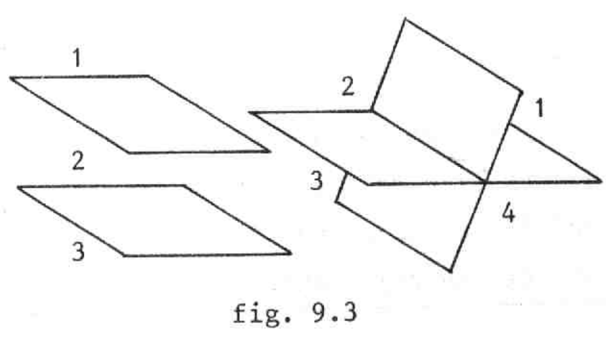


fig. 9.3

Je hebt 20 opgaven gemaakt over parallelliteit van lijnen en vlakken.
Een paar belangrijke zaken lichten we er uit.
Allereerst twee definities:

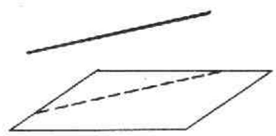
Een lijn ℓ en een vlak α zijn parallel als ze geen punten gemeenschappelijk hebben. Notatie: $\ell // \alpha$ of $\alpha // \ell$.

Twee vlakken α en β zijn parallel als ze geen punten gemeenschappelijk hebben. Notatie: $\alpha // \beta$.

Uit de definities en de regels 1 tot en met 7 kunnen de volgende regels worden afgeleid:

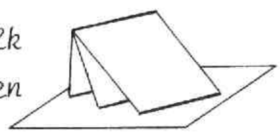
REGEL 8

Als een lijn parallel is met een lijn in een vlak en zelf niet in dat vlak ligt, dan is die lijn parallel met dat vlak.



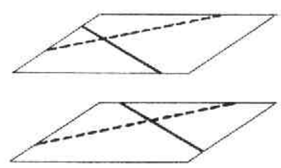
REGEL 9

Als een lijn parallel is met een vlak, dan heeft elk vlak, dat dit vlak snijdt en door die lijn gaat, een snijlijn met dit vlak die parallel is met die lijn.



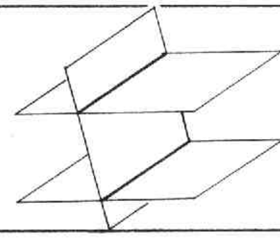
REGEL 10

Als twee snijdende lijnen in één vlak parallel zijn met twee snijdende lijnen in een tweede vlak, dan zijn die vlakken parallel.



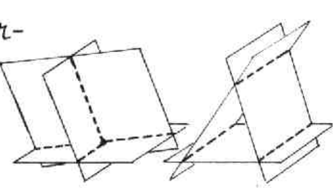
REGEL 11

Als twee parallelle vlakken gesneden worden door een derde vlak, dan zijn de snijlijnen met dat derde vlak parallel.

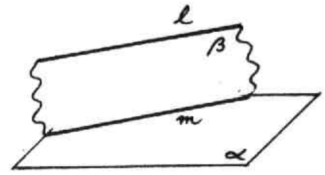


REGEL 12 (DRIEVLAKKENREGEL)

*Als drie vlakken elkaar snijden volgens drie verschillende lijnen zijn er twee mogelijkheden:
óf de drie snijlijnen gaan door één punt,
óf de drie snijlijnen zijn parallel.*

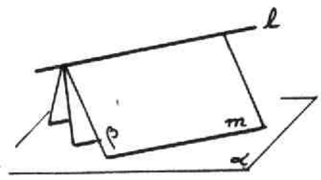


BEWIJS REGEL 8



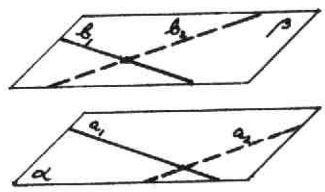
Gegeven: ℓ is parallel met de lijn m in α; ℓ niet in α.
Door ℓ en m gaat één vlak (regel 7), zeg β.
Een eventueel snijpunt van ℓ en α zou moeten liggen op $\alpha \cap \beta$ (= lijn m) en dat is in strijd met het gegeven $\ell /\!/ m$.
Conclusie: $\ell /\!/ \alpha$.

BEWIJS REGEL 9



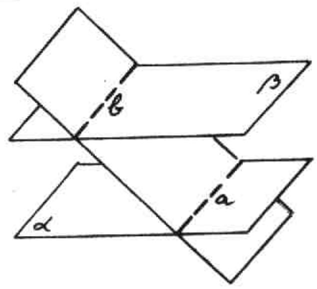
Gegeven: ℓ is parallel met α.
Laat m de snijlijn van een vlak β door ℓ met α zijn.
Omdat ℓ en m in één vlak liggen kunnen zij elkaar niet kruisen. Zij kunnen elkaar ook niet snijden, want dan zou ℓ niet parallel zijn met α.
Conclusie: $\ell /\!/ m$.

BEWIJS REGEL 10



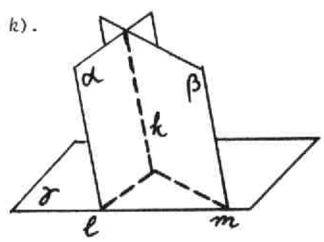
Gegeven: De snijdende lijnen b_1 en b_2 in vlak β zijn resp. parallel met de lijnen a_1 en a_2 in vlak α.
Volgens regel 8 zijn b_1 en b_2 parallel met α. Volgens regel 9 zou een eventuele snijlijn van β met α parallel moeten zijn met zowel b_1 als b_2; dit is onmogelijk omdat b_1 en b_2 elkaar snijden!
Conclusie: $\beta /\!/ \alpha$.

BEWIJS REGEL 11



Gegeven: De parallelle vlakken α en β snijden γ resp. volgens de lijnen a en b.
De lijnen a en b kunnen elkaar niet kruisen, want ze liggen beide in γ. Ze kunnen elkaar evenmin snijden, want α en β hebben geen gemeenschappelijke punten.
Conclusie: $a /\!/ b$.

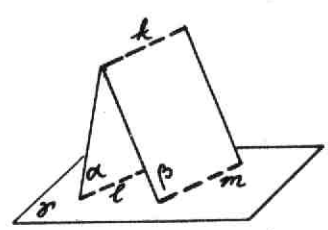
BEWIJS REGEL 12



Gegeven: α, β, γ zijn drie vlakken met: $\alpha \cap \beta = k$, $\beta \cap \gamma = \ell$ en $\gamma \cap \alpha = m$. ($k \neq \ell \neq m \neq k$).
We letten nu op de lijn k en het vlak γ.
De lijn k ligt zeker niet in γ. (Immers: k in α, $\alpha \cap \gamma = m$ en $k \neq m$).
Er blijven nu twee mogelijkheden over:

(i) k snijdt γ in S. S ligt in α en β (want $S \in k$) en S ligt in γ.
Dus S is het gemeenschappelijke punt van α, β en γ (en van k, ℓ en m).
Conclusie: k, ℓ, m snijden elkaar in S.

(ii) $k /\!/ \gamma$.
Volgens regel 9 zijn ℓ en m parallel met k.
Conclusie: $k /\!/ \ell /\!/ m$.



10

PARALLELLITEITEN (2)

≫ 103. Het "zuiver" Nederlandse woord voor parallel is *evenwijdig* (van even wijd = even ver).
Bekijk de twee definities op pag. 48.
Kun je alternatieve definities bedenken die aansluiten bij de letterlijke betekenis van het woord evenwijdig?

≫ 104. In fig. 10.1 zie je een vlak door het punt (0,0,3) parallel met het XOY-vlak.

a. Dat vlak wordt aangeduid met: "$z = 3$". Kun je dat verklaren?

b. Wat kun je zeggen van de ligging van de vlakken "$x = 2$" en "$y = -1$"?

c. Het vlak "$z = 3$" draaien we om de snijlijn met het YOZ-vlak (in de aangegeven richting). In de nieuwe stand wordt het XOY-vlak gesneden. Wat weet je van de ligging van de snijlijn?

Hoever ligt die lijn van de oorsprong af in het geval dat je het vlak "$z = 3$" over een hoek van 1° draait? En bij een draaiingshoek van 2°?

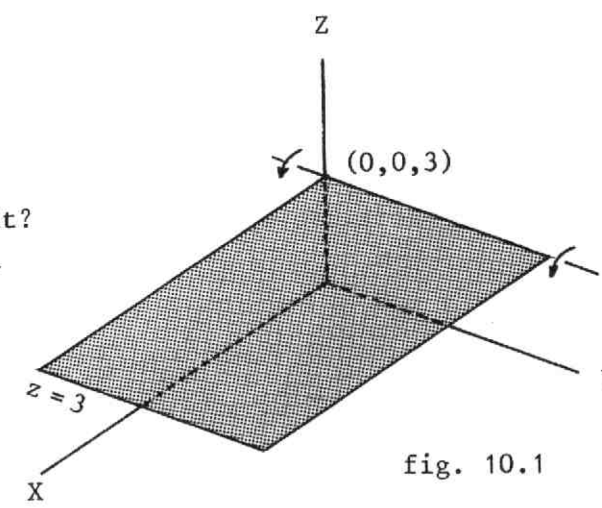


fig. 10.1

* ≫ 105. De vlakken α en β zijn parallel. De lijnen ℓ_1 en ℓ_2 snijden elkaar in P. A_1 en B_1 zijn de snijpunten van ℓ_1 met α en β. A_2 is het snijpunt van ℓ_2 met α. Construeer het snijpunt B_2 van ℓ_2 met β.

* ≫ 106. De vlakken α, β en γ zijn parallel; de lijnen ℓ_1 en ℓ_2 kruisen elkaar. A_1, B_1 en C_1 zijn de snijpunten van ℓ_1 met resp. α, β en γ; A_2 en B_2 zijn de snijpunten van ℓ_2 met resp. α en β. Construeer het snijpunt C_2 van ℓ_2 met γ. (Aanwijzing: trek een "hulplijn").

* ≫ 107. Gegeven is de kubus ABCD EFGH.
α is het vlak door A, C en H; ℓ is de lijn door A en H.

a. Teken vier lijnen door B die parallel zijn met α.

b. Teken drie vlakken door B die parallel zijn met ℓ.

* ≫ 108. a. Teken het vlak α door de punten (4,0,0) en (0,4,0) dat parallel is met de Z-as.

b. Voor de punten van α die in het XOY-vlak liggen geldt dat de som van de x- en y-coördinaat gelijk is aan 4. Hoe zit dat voor de punten van α die *niet* in het XOY-vlak liggen?

c. Wat weet je van de verzameling punten (x,y en z) in de ruimte waarvoor geldt: $x + y = 6$? Maak een tekening.

d. Teken (in een andere kleur) de verzameling punten met $y + z = 8$.

≫ 109. Bekijk nog eens fig. 10.1.
Het vlak "$z = 3$" wordt in de aangegeven richting om de snijlijn met het YOZ-vlak over een hoek van 45° gedraaid. Welke "vergelijking" heeft het vlak dat je zo krijgt?

* ≫ 110. De drie coördinaatvlakken ($x = 0$, $y = 0$ en $z = 0$) verdelen de ruimte in acht delen, de zogenaamde *octanten*.
Het vlak $x + 2z = 4$ gaat door zes van de acht octanten. Teken het vlak (voorzover zichtbaar) in die zes octanten.

* ≫ 111. In een driedimensionaal assenstelsel zijn gegeven de punten A: (2,0,2); B: (2,5,0); C: (5,0,5) en D: (5,2,0).

a. Teken die punten.

b. De kruisende lijnen AB en CD zijn beide parallel met het YOZ-vlak. Hoe kun je dat beredeneren?

c. Construeer de verbindingslijn van AB en CD die parallel is met de x-as.

d. Bereken de coördinaten van de punten op AB en CD die door die lijn worden verbonden.

* ≫ 112. P, Q, R en S zijn de middens van resp. de ribben AB, AC, DC en DB van het viervlak.

a. PQ//RS. Waarom?

b. Uit a. volgt dat de vier punten P, Q, R en S in één vlak - zeg α - liggen. Het vlak α is parallel met de ribben AD en BC. Waarom?

c. Er zijn drie van zulke "middenvlakken" in een viervlak. Teken de drie middenvlakken α, β en γ van het viervlak ABCD. Teken ook het snijpunt van die drie vlakken in je werkblok.

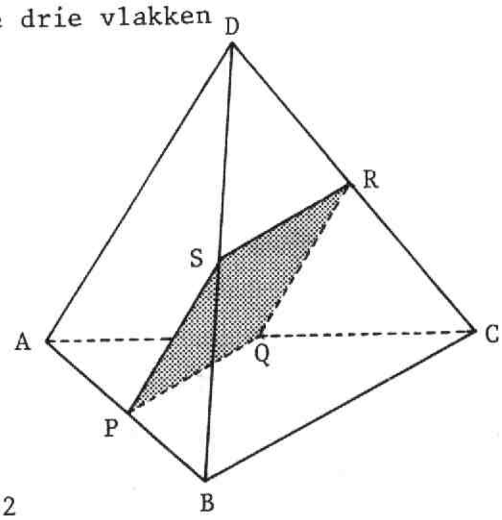


fig. 10.2

≫ 113. Gegeven zijn twee kruisende lijnen a en b. Door a wordt een vlak α, door b een vlak β aangebracht.

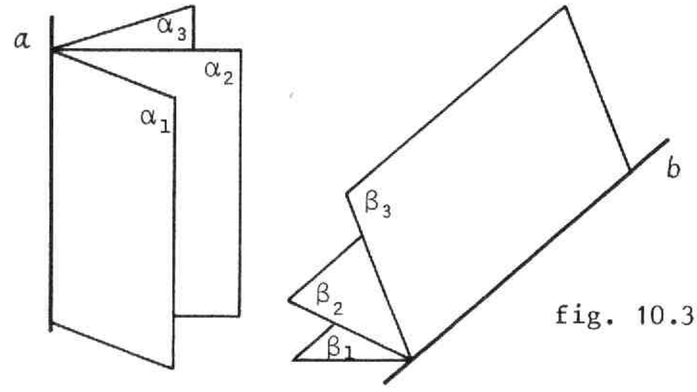


fig. 10.3

a. Is het zeker dat α en β elkaar snijden? Zo nee, hoeveel vlakken α en β zijn er waarvoor dit niet het geval is?
(Je kunt wat experimenteren met twee agenda's als "vlakkenbundels").

b. Veronderstel dat α en β elkaar snijden in de lijn c.
Wat weet je van de ligging van c t.o.v. de lijnen a en b?

c. Hoe kun je het voorgaande gebruiken om door een gegeven punt P een verbindingslijn van a en b te construeren?

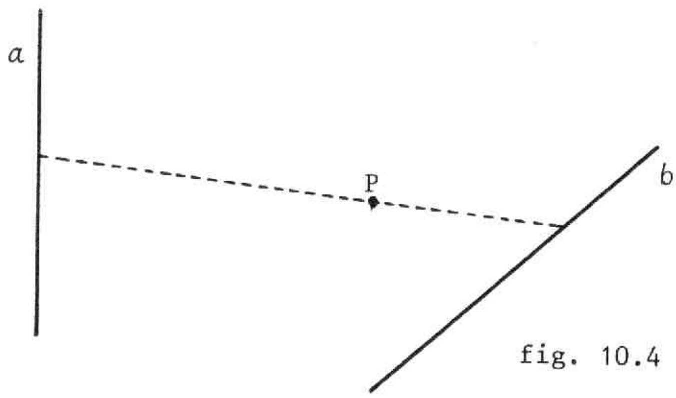


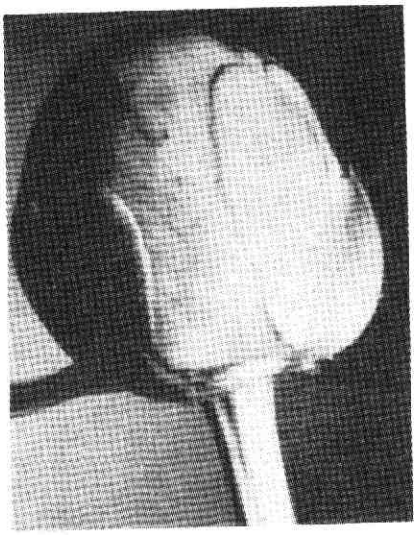
fig. 10.4

d. Er zijn drie soorten punten in de ruimte:
   i. Punten waardoor oneindig veel verbindingslijnen van a en b gaan.
   ii. Punten waardoor geen verbindingslijnen van a en b gaan.
   iii. Punten waardoor één verbindingslijn van a en b gaat.

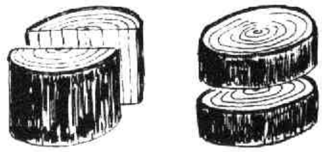
   Beschrijf de ligging van de punten van elke soort.

11

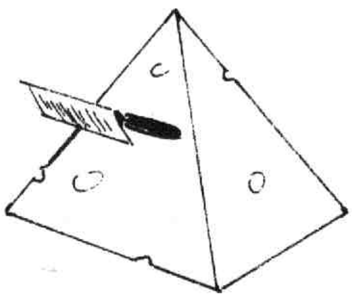
DOORSNEDEN



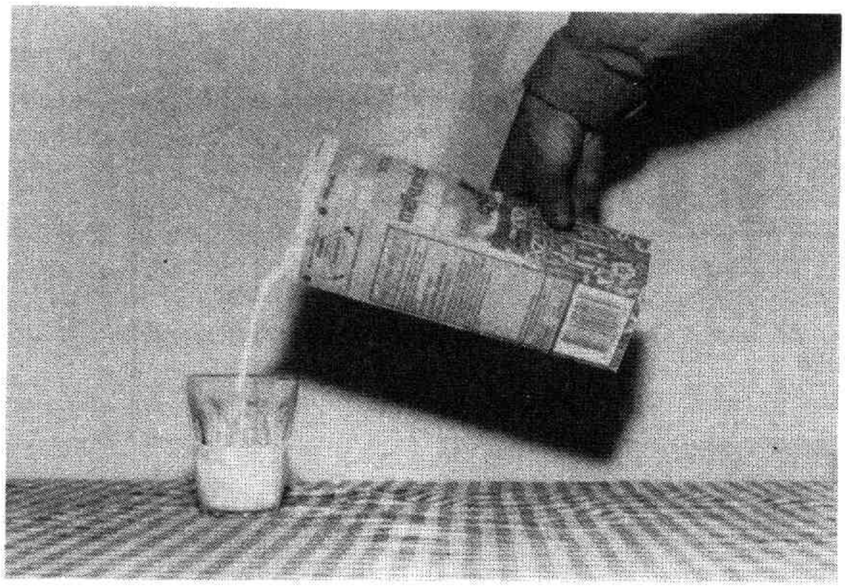
≫ 114. Een houtblok in tweeën. Hoe ziet het zaagvlak eruit als je het blok niet vertikaal of horizontaal, maar *diagonaal* doorzaagt?



≫ 115. Een stuk kaas in de vorm van een vierzijdige piramide. Alle ribben zijn 6 cm lang. Het kaasbijltje wordt parallel met een van de opstaande zijvlakken bewogen en begint in het midden van een ribbe.
Welke vorm heeft het snijvlak?
Construeer dat snijvlak op ware grootte.



≫ 116.

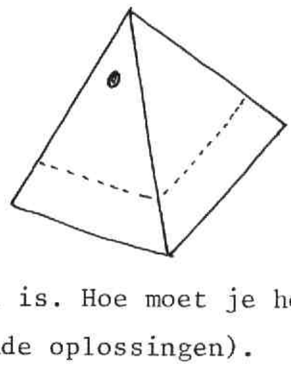


Een literpak melk heeft de afmetingen 7 bij 7 bij 20 cm.
In één van de hoeken van het bovenvlak zit een schenkgaatje.
Het pak melk op de foto was half vol (de melk trouwens ook).
Kijk goed naar de stand van het pak.
Welke vorm had de vloeistofspiegel toen Aad begon te schenken?
Teken die vloeistofspiegel nauwkeurig op schaal.

≫ 117. Melk- en frisdranken worden ook wel verkocht in "viervlakverpakking".

a. Zo'n viervlakpakje kun je vouwen uit een rechthoekig vel papier (afmetingen 8 bij 18 cm). Hoe?

b. Stel je voor dat je zo'n pakje hebt van doorschijnend verpakkingsmateriaal.
Als je een half vol pakje op tafel zet staat de vloeistofspiegel onder het midden. Je kunt dan niet zien dat het pakje precies voor de helft gevuld is. Het is echter mogelijk om het pakje zo te houden dat je wel met één oogopslag kunt zien dat het precies voor de helft vol is. Hoe moet je het pakje dan houden? (Er zijn twee verschillende oplossingen).



* ≫ 118. Gegeven is de kubus ABCD EFGH.

a. Bewijs dat de vlakken AHF en BDG parallel zijn.

b. In de middens van drie ribben van de kubus zitten drie kubuskruipers. Zij maken alle drie een rondwandeling over de kubus en lopen daarbij steeds in één richting parallel met vlak AHF.
Teken de drie rondwandelingen over de kubus.

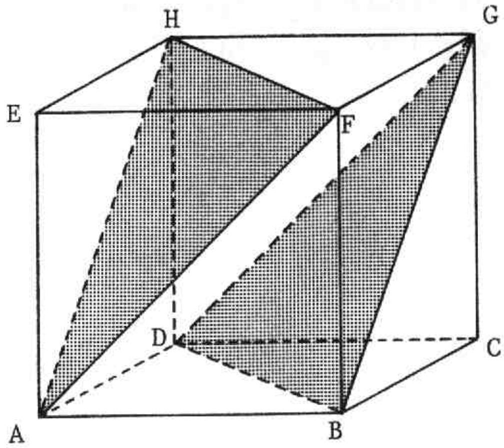


fig. 11.1

c. Wat weet je van de onderlinge lengteverhouding van de drie routes?

d. Een vierde kubuskruiper loopt ook een route parallel met vlak AHF, maar start op een andere plaats tussen A en B.
Hij meent dat het er niet toe doet waar je tussen A en B begint (alle rondwandelingen zijn even lang).
Zoek uit of dat waar is.

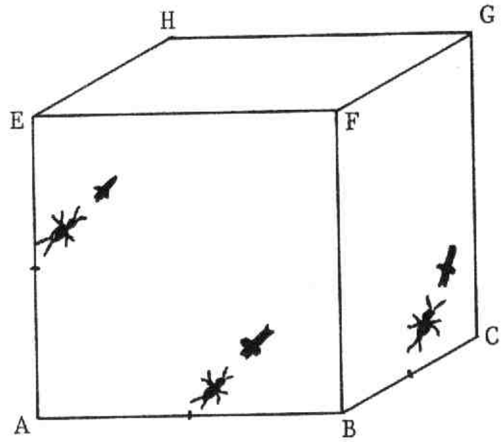


fig. 11.2

Let nog eens op fig. 11.1. Daarin zijn de vlakken AHF en BDG duidelijk aangegeven. Je weet natuurlijk dat het vlak AHF veel groter is dan in de tekening wordt gesuggereerd, in feite is het onbegrensd! Wat we getekend hebben is het deel van het vlak dat door de kubus "snijdt". We noemen dat dan ook de *doorsnede* van de kubus met het vlak.
De zaagvlakken en de vloeistofspiegels van de vorige opgaven zijn ook voorbeelden van een doorsnede van een plat vlak en een ruimtelijke figuur.

In figuur 11.3 zie je de doorsnede van de piramide TABCD met het vlak γ dat door het midden P van ribbe TA gaat en parallel is met het zijvlak TCD.

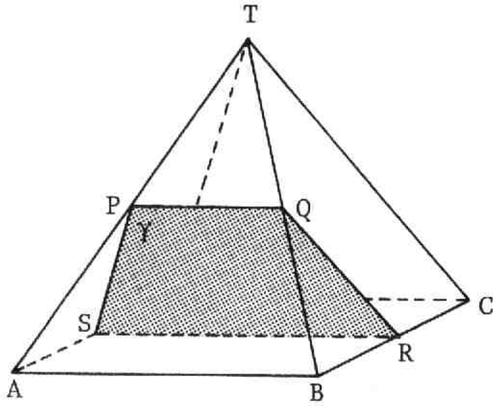


fig. 11.3

* ≫ 119. We laten het vlak γ langzaam draaien om de lijn PQ. Probeer je goed voor te stellen hoe de doorsnede van γ met de piramide geleidelijk verandert. Teken drie verschillenden tussenstanden.

* ≫ 120. Dezelfde opdracht als in ≫ 119, maar nu draait γ om de lijn QR.

* ≫ 121. P en Q zijn de middens van twee aansluitende ribben van de kubus in het bovenvlak. We laten een vlak α door de lijn PQ draaien om die lijn. De doorsnede van α met de kubus neemt achtereenvolgens de vorm aan van: een gelijkzijdige driehoek, een rechthoek, een symmetrisch trapezium, een regelmatige zeshoek, een symmetrische vijfhoek en een vierkant. Teken die doorsneden.

* ≫ 122. In een driedimensionaal assenstelsel is een kubus met ribbelengte 6 getekend. γ is het vlak door de punten P: (8,0,0); Q: (0,4,0) en R: (0,0,8).

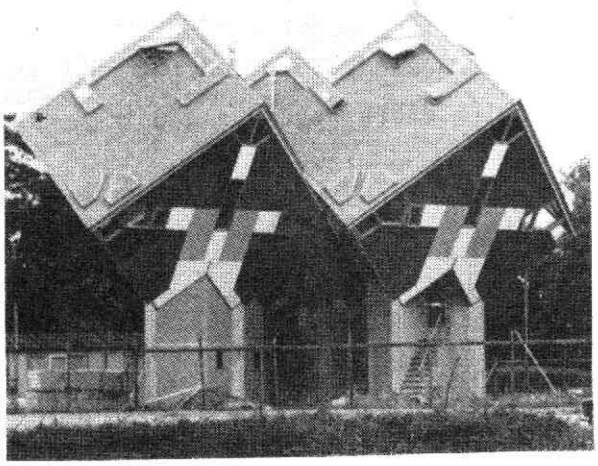
a. Teken de doorsnede van γ met de kubus.

b. Welke coördinaten hebben de hoekpunten van die doorsnede?

We laten nu Q langs de y-as lopen, waarbij de y-coördinaat van Q toeneemt.

c. Hoe groot moet de y-coördinaat van Q zijn om een zeshoek als doorsnede te krijgen? En vanaf welke y-coördinaat wordt de doorsnede een vierhoek?

d. Teken de "limietstand" van de doorsnede van γ met de kubus voor het geval de y-coördinaat van Q naar ∞ nadert.

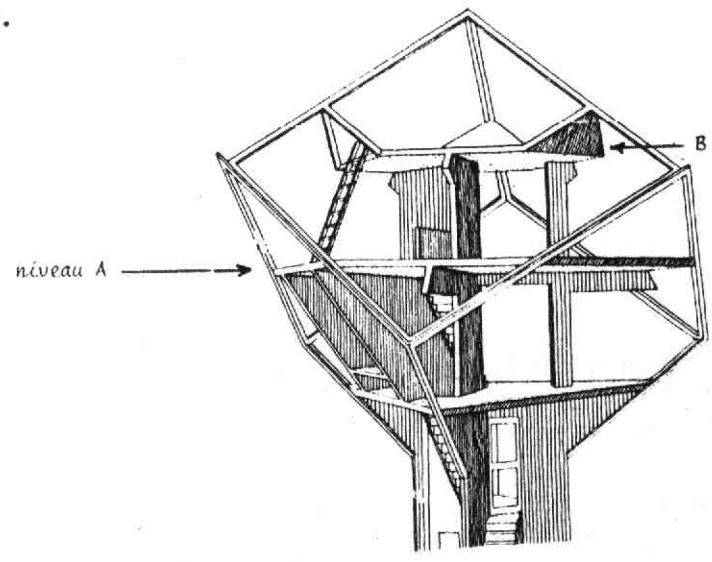


Paalwoningen
(architect P. Blom).

≫ 123. Kubuswoningen op palen bestaan echt. Als je in de buurt van Helmond komt moet je ze maar eens opzoeken. Sommige bewoners van deze merkwaardige huizen schijnen last van evenwichtsstoornissen te hebben, maar afgezien van dit ongerief is het knus wonen in de paalhuizen.

a. Teken het bovenaanzicht van zo'n kubus.

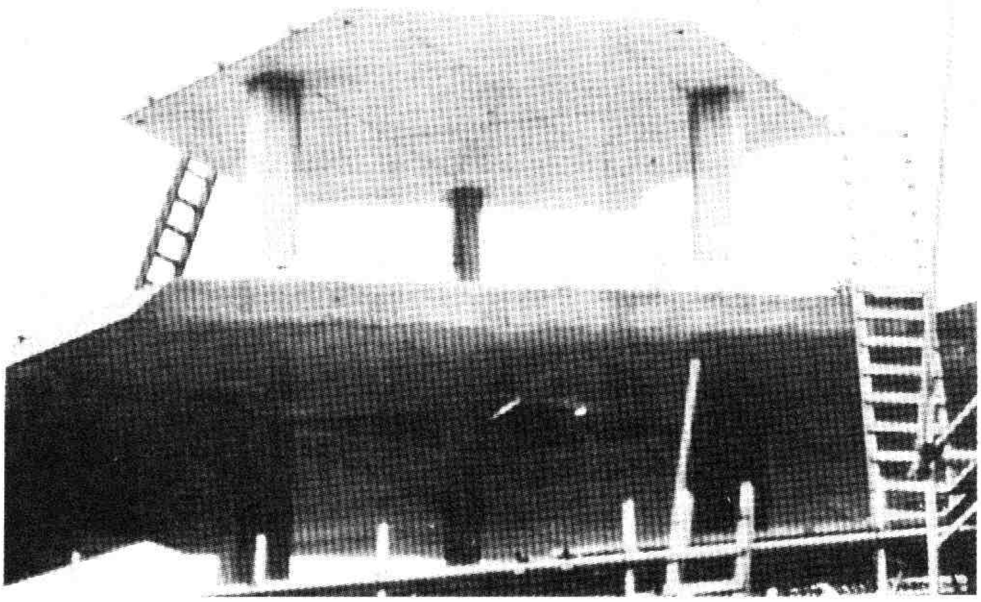
b. In de tekening hieronder zie je dat er drie verdiepingen zijn. Teken in het bovenaanzicht de vloer van de kubus die zich op niveau A bevindt.



c. De oppervlakte van die vloer is 60 m². Hoe lang is de ribbe van het kubushuis?

d. Hoe verandert de vloeroppervlakte bij A als je die vloer een beetje laat zakken (of een beetje omhoog schuift)?

e. De vloer van de zolderkamer (B) heeft de vorm van een regelmatige zeshoek. Kijk maar naar de foto van het kubushuis in aanbouw. Welke vorm zou die vloer hebben als deze door zou lopen tot het "dak"?



f. De hoogte van de grote kamer is 2.40 m. Hoe hoog is de zolderkamer?

12

RUIMTECONSTRUCTIES (2)

Een "stripverhaal" van een ruimteconstructie. Het gaat om de constructie van het vlak γ door P, Q en R met de piramide TABCD. Bij de constructie is gebruik gemaakt van het drievlakkenpunt K.

≫ 124. Vertel in woorden hoe de constructie is uitgevoerd.

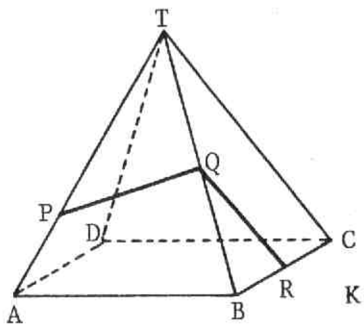


fig. 12.1

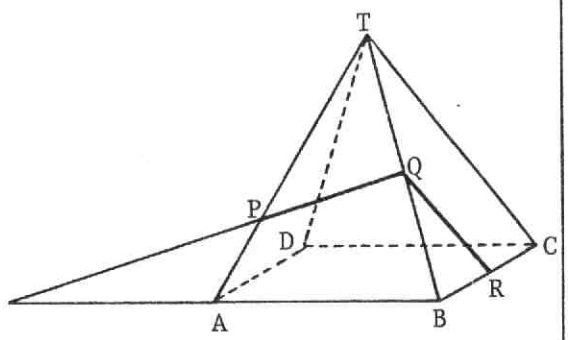


fig. 12.2

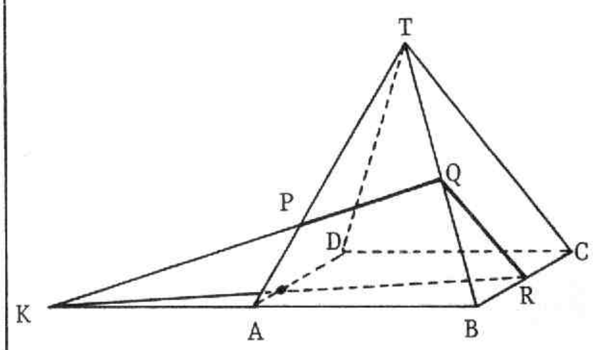


fig. 12.3

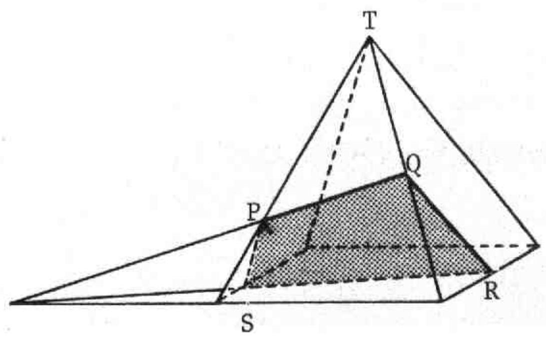
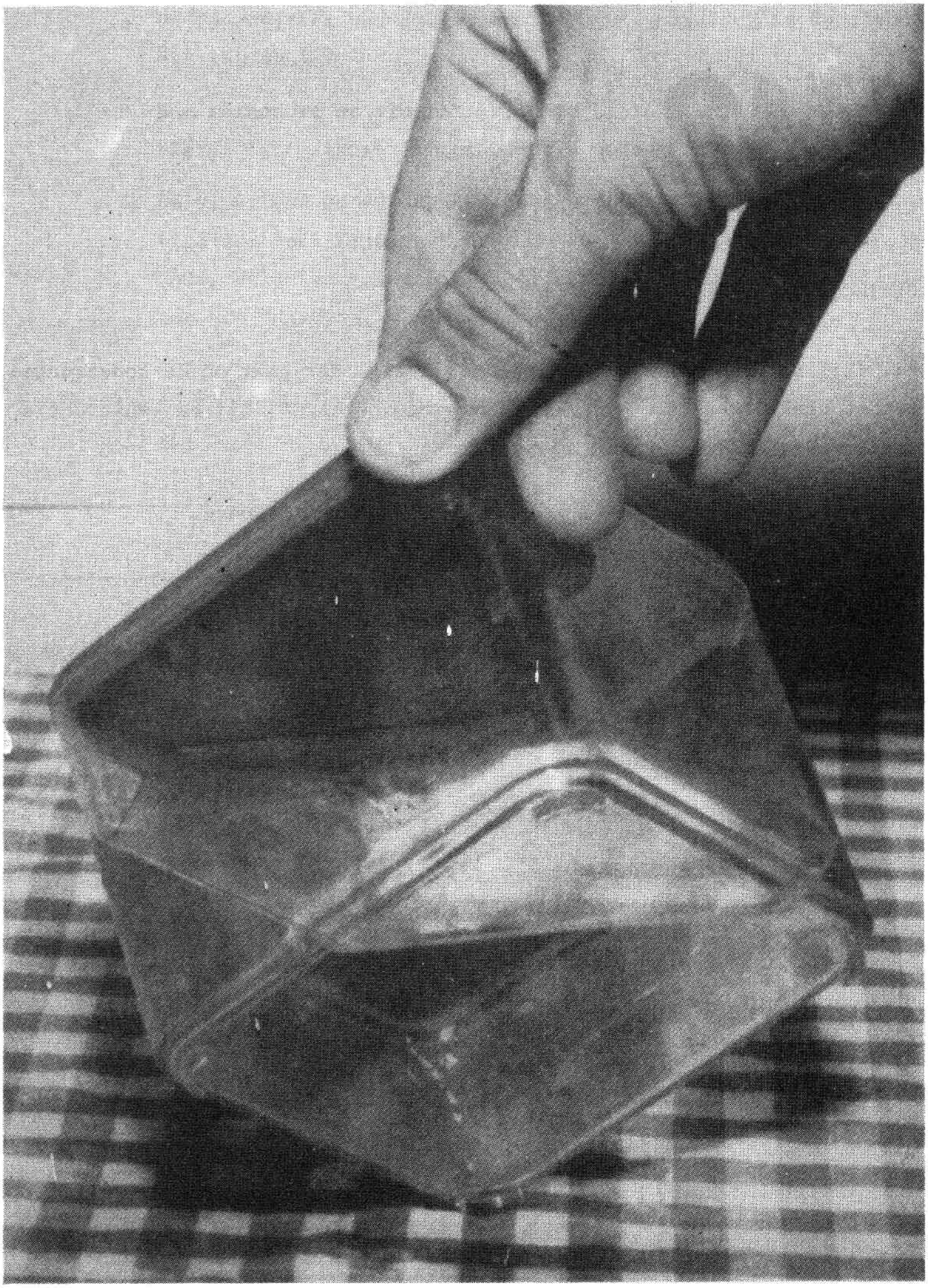


fig. 12.4



≫ 125. Bekijk opnieuw de figuren op de vorige pagina.
De lijn QR is parallel met de opstaande ribbe TC. Wat weet je van de snijlijn van vlak γ met het vlak TCD? Hoe zou je die lijn kunnen construeren?

* ≫ 126. P en Q liggen resp. op de ribben AD en AB van het prisma ABCDEF; R ligt in het zijvlak BEFC; γ is het vlak door P, Q en R.
Construeer de doorsnede van het vlak γ met het prisma.

* ≫ 127. Nu liggen P, Q en R resp. in de zijvlakken ABD, BCD en ACD van het viervlak ABCD. γ is weer het vlak door P, Q en R.

a. Construeer de snijlijn van γ met het grondvlak (d.i. de zogenaamde *grondlijn*).

b. Construeer de doorsnede van γ met de piramide.

* ≫ 128. γ is het vlak door C_1, C_2, C_5 resp. op de ribben A_1B_1, A_2B_2 en A_5B_5 van het prisma.
Construeer de doorsnede van γ met het prisma.

* ≫ 129. Construeer de doorsnede van de piramide met het vlak door A, B en C. (Let op: de grondlijnconstructie is niet goed uitvoerbaar!).

* ≫ 130. Construeer de doorsnede van het zeszijdige prisma met het vlak door de ribbe A_1A_2 dat de ribbe A_4B_4 halveert.

* ≫ 131. Van een vierzijdige afgeknotte piramide is het grondvlak en één punt van het bovenvlak (nl. G) getekend. Grond- en bovenvlak snijden elkaar in de lijn ℓ. Voltooi de tekening van die afgeknotte piramide.

* ≫ 132. Een kubus staat op het tafelblad γ. De zonnestralen zijn parallel met de getekende lichaamsdiagonaal.

a. Welke zijvlakken van de kubus zijn in de schaduw?

b. Teken de schaduw die de kubus op tafel werpt.

* ≫ 133. In het punt bevindt zich een lampje. De zeshoek $A_1A_2...A_6$ werpt een schaduw op het vlak τ. Drie hoekpunten van de schaduwzeshoek zijn al getekend. Teken die schaduwzeshoek af.

* ≫ 134. Een vlak α door B en P (op het verlengde van DH) snijdt de kubus volgens een veelhoek waarvan PB de symmetrie-as is. Construeer die veelhoek.

* ≫ 135. Construeer de doorsnede van de kubus met het vlak door P, Q en het middelpunt M van de kubus. Wat weet je van de stukken waarin dit vlak de kubus verdeelt?

* ≫ 136. Een groepje van drie kubussen. Je kunt met één vlak alle drie de kubussen in twee congruente stukken verdelen. Teken de doorsnede van dat vlak γ met de drie kubussen.

Extra opgave

≫ 137. Kan de doorsnede van een kubus met een vlak door het middelpunt ook een vijfhoek zijn? Waarom?

13

ALGEBRAÏSCHE VOORSTELLING VAN DE RECHTE LIJN

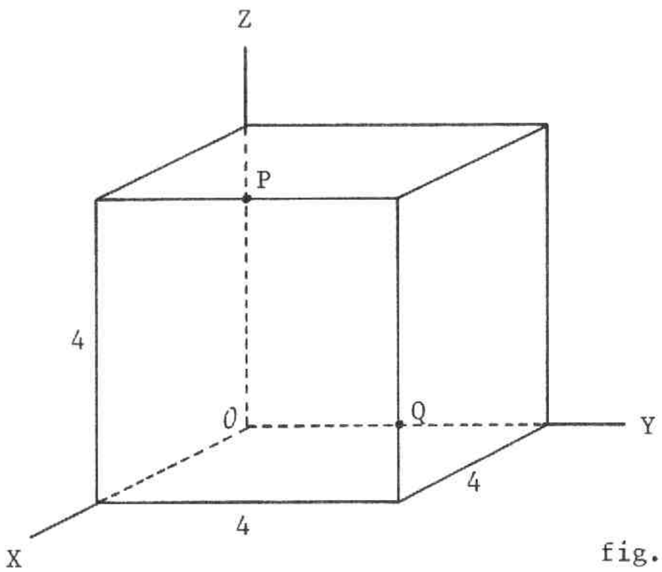


fig. 13.1

≫ 138. Parallelprojectie van een kubus met assenstelsel.

a. Bob: "Het punt P heeft de coördinaten (4,2,4)".
Wim: "Volgens mij (0,0,3)".
Wie van de twee heeft gelijk?

b. Welk misverstand zou er m.b.t. het punt Q kunnen bestaan?

c. Bob geeft in de figuur heel precies het punt (4,2,1) aan.
Waar vind je dat punt in de figuur?

d. En waar vind je het punt $(2,1,\frac{1}{2})$? En waar het punt $(-4,-2,-1)$?
En $(-40,-20,-10)$?

e. In welke richting is de kubus op het papier geprojecteerd,
d.w.z. wat is de richtingsvector van de projectstralen?

De kubusfiguur op pag. 65 is de tweedimensionale voorstelling van een driedimensionale vorm. Bij zo'n voorstelling kan het niet anders of verschillende punten van de ruimte worden door dezelfde stip voorgesteld. Vandaar het meningsverschil van Bob en Wim.

Sterker gezegd:

Elk punt in de figuur vertegenwoordigt oneindig veel punten, namelijk alle punten van de projectiestraal door dat punt.

Dat kan duidelijk worden gemaakt in een tekening waarbij het projectietafereel *niet* samenvalt met het tekenvlak.

Het XOY-vlak is het projectietafereel.
De richting van de projectie wordt vastgelegd door de vector $\underline{r}$ = (2,3,4).

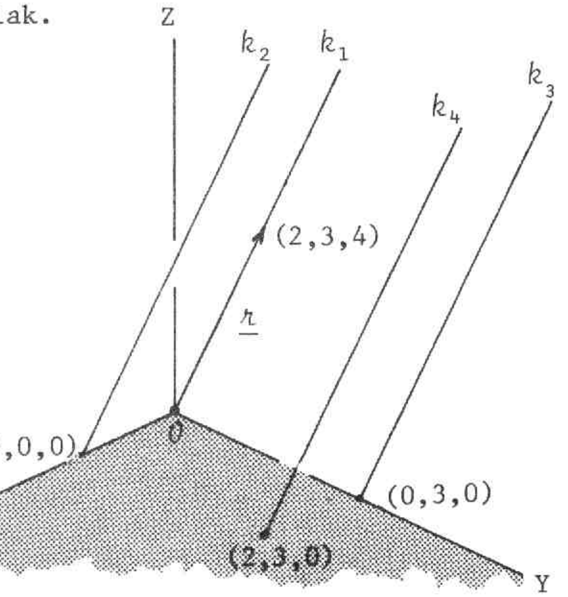


fig. 13.2

Alle punten van de lijn k_1, hebben dezelfde projectie n.l. het punt (0,0,0). Evenzo worden k_2 (resp. k_3, resp. k_4) geprojecteerd in de punten (2,0,0) (resp. (0,3,0), resp. (2,3,0)).

≫ 139. Noem (de coördinaten) van twee punten "boven" en twee punten "onder" het XOY-vlak waarvan het punt (2,0,0) de projectie is.
Dezelfde vraag voor (0,3,0) en voor (2,3,0).

De coördinaten van een punt van k_1 vind je eenvoudig door de coördinaten van het punt R: (2,3,4) met een of ander reeel getal te vermenigvuldigen. Zo vind je bijv. (4,6,8); (20,30,40); ($\frac{1}{2}$,$\frac{3}{4}$,1); (-10,-15,-20) als punten van k_1, punten die allemaal in de oorsprong worden geprojecteerd.

Kortom: k_1 is de verzameling punten ($2t$, $3t$, $4t$) met $t \in \mathbb{R}$.

We schrijven dat zó op:

$$k_1 : (x,y,z) = (2t,3t,4t)$$
of
$$k_1 : (x,y,z) = t(2,3,4) \qquad \ldots (1)$$

≫ 140. Bekijk het rijtje punten van k_1 onderaan pag. 66 ((4,6,8); enz.)
Hoe kun je bij dit rijtje gemakkelijk vier punten van k_2 vinden?
En punten van k_3? En van k_4?

In ≫ 140 heb je waarschijnlijk gevonden dat je de punten van k_2 kunt vinden door de punten van k_1 te verschuiven over de vector (2,0,0).
Verschuiven over de vector (2,0,0) betekent: "bij de eerste coördinaat 2 optellen".

$$k_2 : (x,y,z) = (2+2t,3t,4t)$$
of
$$k_2 : (x,y,z) = (2,0,0) + t(2,3,4) \qquad \ldots (2)$$

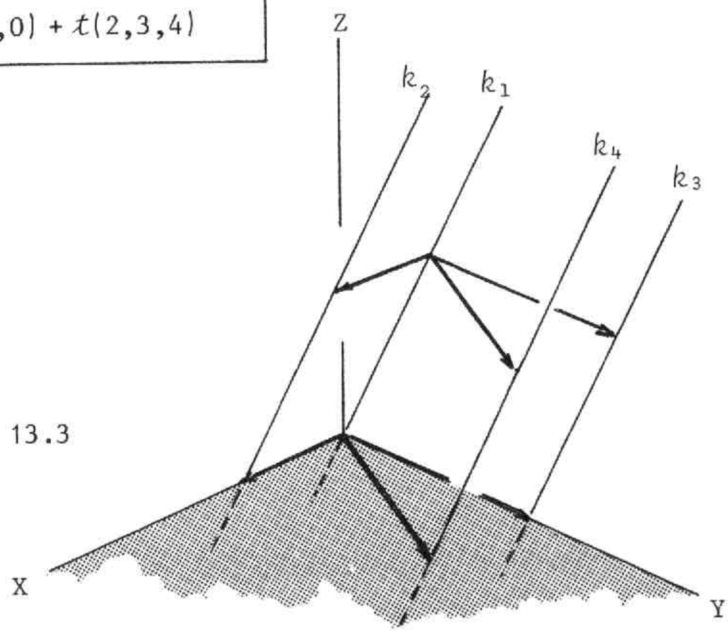


fig. 13.3

(1) en (2) zijn algebraïsche voorstellingen van de lijnen k_1 en k_2.
Men noemt dit ook wel *parametervoorstellingen*. De variabele t is de zogenaamde *parameter*.

≫ 141. Schrijf een parametervoorstelling van k_3 op. (Op twee manieren). Ook voor k_4.

Kijk nog eens naar de lijn k_2.
De vector (2,3,4) legt de richting van k_2 vast en wordt daarom ook wel een *richtingsvector* van k_2 genoemd.
De lijn k_2 steunt als het ware op de vector (2,0,0) en deze heet dan ook wel een *steunvector* van k_2.

$$k_2 : (x,y,z) = \underbrace{(2,0,0)}_{\textit{steunvector}} + \underbrace{t}_{\textit{parameter}}\underbrace{(2,3,4)}_{\textit{richtingsvector}}$$

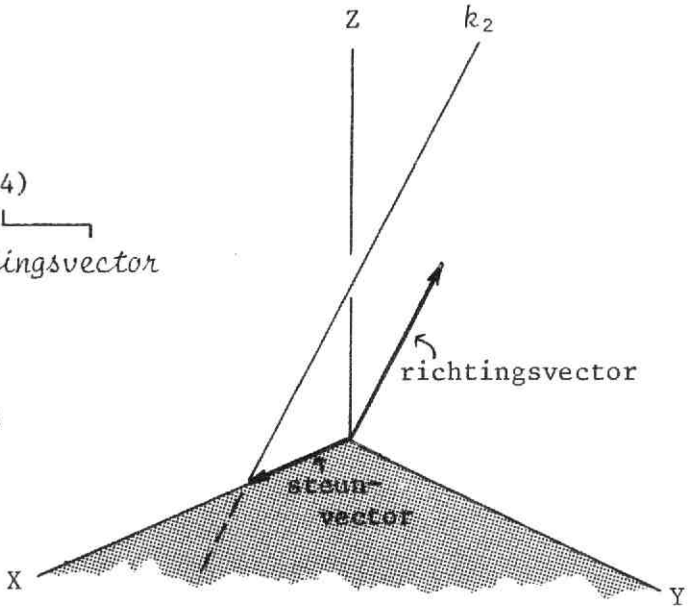


fig. 13.4

Twee opmerkingen.

i In principe kun je elk punt van de lijn als eindpunt van de steunvector kiezen. Voor de lijn k_2 bijvoorbeeld (6,6,8) in plaats van (2,0,0).
Ook kun je elke vector parallel met k_2 als richtingsvector nemen. Voor k_2 bijvoorbeeld (20,30,40) in plaats van (2,3,4).
Zo krijg je dan "$(x,y,z) = (6,6,8) + u(20,30,40)$" hetgeen evengoed een parametervoorstelling van k_2 is als "$(x,y,z) = (2,0,0) + t(2,3,4)$".

ii In de parametervoorstelling (1) van k_1 ontbreekt ogenschijnlijk de steunvector. Als steunpunt van die lijn kun je echter (0,0,0) kiezen; "$(x,y,z) = t(2,3,4)$" is ook te schrijven als: "$(x,y,z) = (0,0,0) + t(2,3,4)$".

≫ 142. Schrijf een parametervoorstelling op van de lijn $k_5 /\!/ k_1$ die door het punt (0,0,4) gaat.
Welk punt van het XOY-vlak is de projectie van het punt (0,0,4) bij een parallelprojectie met richtingsvector (2,3,4)?

$\underline{r}$ = (2,3,4)

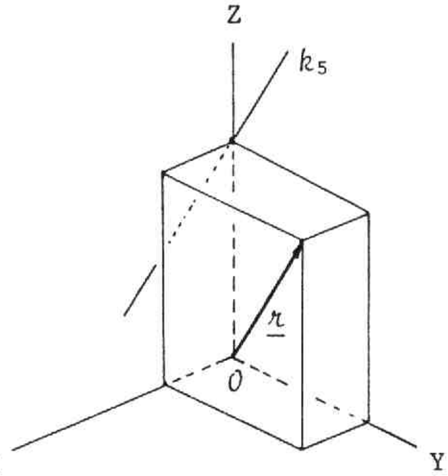


fig. 13.5

≫ 143. K is de kubus met ribben langs de positieve X-, Y- en Z-as en ribbelengte 4.
De kubus K wordt parallel geprojecteerd op het XOY-vlak in de richting (2,3,4).

a. Bereken de coördinaten van de projecties van de hoekpunten van het bovenvlak van K.

b. Neem het XOY-vlak als tekenvlak en teken daarin de projectie van K.

≫ 144. Bekijk fig. 13.3 op pag. 67.
Hoe kun je beredeneren dat k_4 de Z-as snijdt?
In welk punt gebeurt dat?

≫ 145. Bekijk opnieuw figuur 13.1 (pag. 65).
De punten (4,2,4) en (0,0,3) hebben daarin dezelfde projectie.

a. Hoe kun je uit de coördinaten van die twee punten de richtingsvector van de projectie terugvinden?

b. Noem nog drie punten die in de tekening door P worden voorgesteld.

* ≫ 146. P en Q zijn roosterpunten in het YOZ-vlak en het XOZ-vlak.
Bij een parallelprojectie op het XOY-vlak hebben P en Q hetzelfde beeldpunt.

a. Construeer in de figuur dat beeldpunt.

b. Wat is de richtingsvector van die parallelprojectie?

c. De punten A en B liggen twee eenheden vertikaal "boven" P resp. Q. Bereken de coördinaten van het snijpunt van de lijn AB met het XOY-vlak.

d. Laat β het vlak zijn door de Z-as waarvan de snijlijn met het XOY-vlak de richtingsvector (1,1,0) heeft.
Teken het spiegelbeeld van de lijn PQ bij spiegeling in het vlak β. Geef ook een parametervoorstelling van dat spiegelbeeld.

≫ 147. De kubus K uit ≫ 143 wordt nu centraal geprojecteerd op het XOY-vlak. Het projectiecentrum is het punt (6,6,8).

a. Bereken de coördinaten van de projecties van de hoekpunten van K's bovenvlak.

b. Teken de projectiefiguur van K. (Neem het XOY-vlak als tekenvlak).

≫ 148. Een deeltje beweegt zich t.o.v. een driedimensionaal coördinatenvlak in een vaste richting met constante snelheid.
Op het tijdstip 0 bevindt het zich in het punt (0,3,2); één seconde later (op "het tijdstip 1") is het in (2,4,4).

a. Welke positie heeft het deeltje op "het tijdstip 10" (d.w.z. 10 seconden nadat het in (0,3,2) arriveerde)?

b. Waar is het deeltje op "het tijdstip -2" (2 seconden voorafgaande aan het tijdstip 0)?

c. En waar op het tijdstip t?

d. De eenheid van het coördinatenstelsel is 1 m.
Toon aan dat de snelheid van het deeltje 3 m/s bedraagt.

≫ 149. Van een deeltje dat zich in de ruimte beweegt is de positie (t.o.v. een rechthoekig coördinatenstelsel met als eenheid 1m) op het tijdstip t gegeven door:

$$\underline{s}_t = (2-t,\ 1,\ t)$$

We noemen $\underline{s}_t$ de *plaatsvector* van het deeltje op het tijdstip t.

a. Welke vector geeft de snelheid van het deeltje aan?

b. Hoe snel (in m/s) beweegt het deeltje zich?

c. Teken de baan van het deeltje voorzover die zich binnen de kubus (fig. 13.6) bevindt.

d. Gedurende welk tijdsinterval bevindt het deeltje zich binnen de kubus?

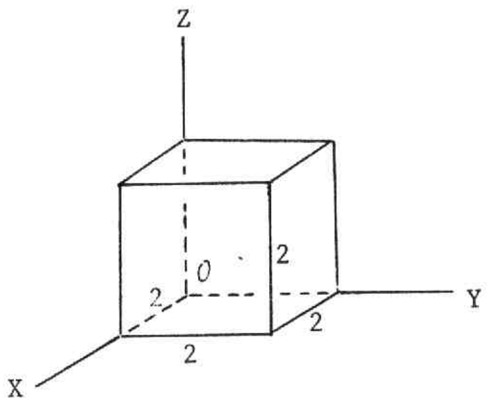


fig. 13.6

≫ 150. Dezelfde opgave voor het geval: $\underline{s}_t = (2+t,\ -t,\ 2+t)$.

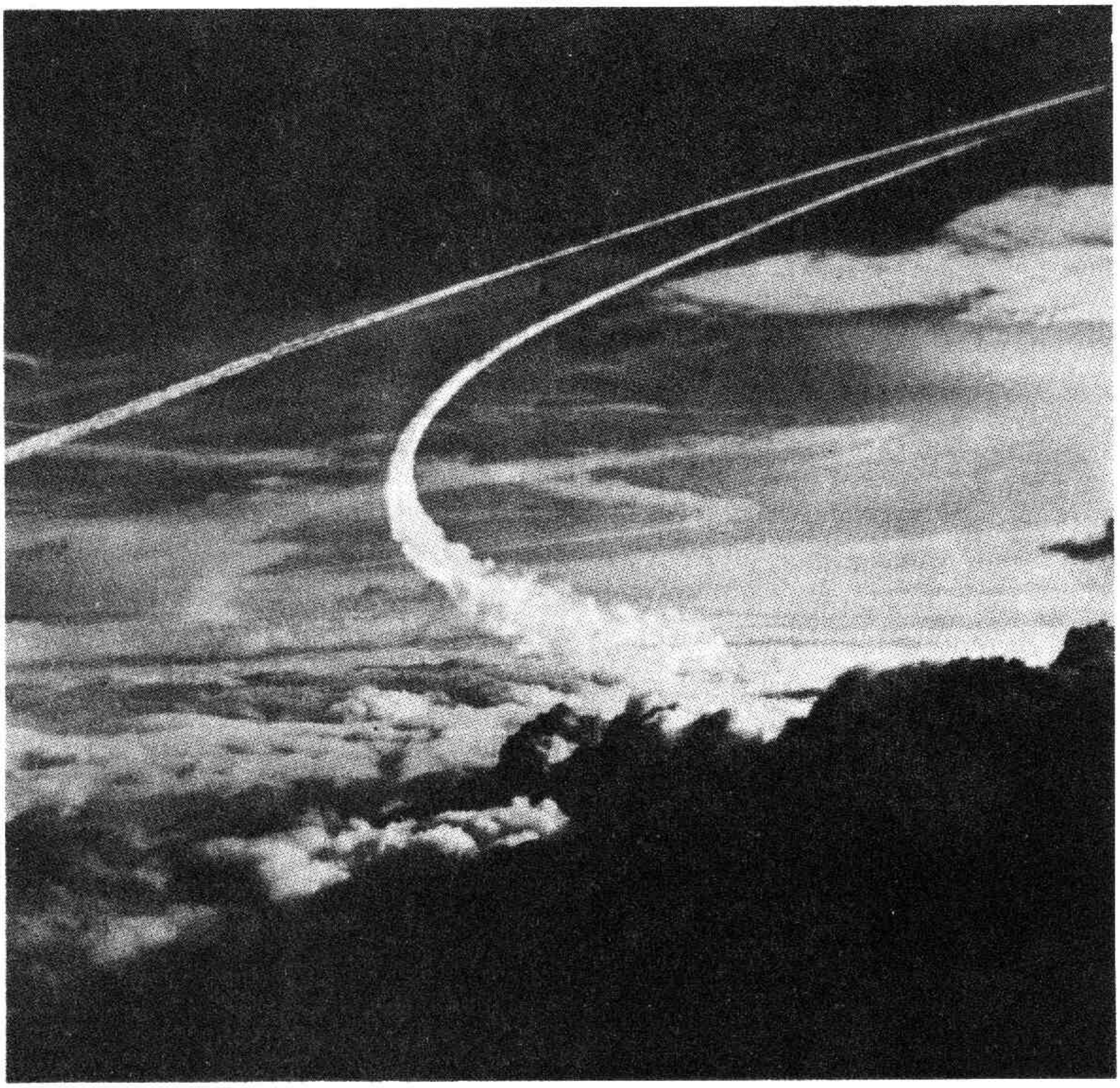
≫ 151. Laat $\underline{s}_t$ de plaatsvector zijn van een deeltje op het tijdstip t en $\underline{v}$ de (constante) snelheidsvector.
Ga na dat de (rechtlijnige) baan van het deeltje gegeven wordt door de parametervoorstelling:

$$\underline{s}_t = \underline{s}_0 + t\underline{v}.$$

≫ 152. De baan in de vorige opgave kan ook beschreven worden als:

$$\underline{s}_t = \underline{s}_0 + t(\underline{s}_1 - \underline{s}_0)$$

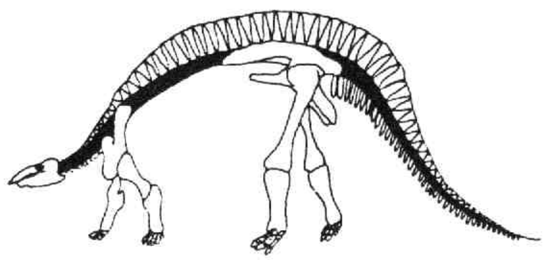
Waarom?



Fraaie ruimtekrommen worden gevormd door hoogvliegende vliegtuigen.
Deze krommen bestaan uit kunstmatige condensatiewolken.

1-4

KROMMEN IN DE RUIMTE



≫ 153. Van een bewegend deeltje wordt de baan (t.o.v. een driedimensionaal assenstelsel) gegeven door: $\underline{s}_t = (1,t,t^2)$.

a. Enig idee hoe die baan er uitziet?

b. In welk vlak beweegt het deeltje zich?

c. Schets in een driedimensionaal assenstelsel de baan die het deeltje doorloopt.

≫ 154. Dezelfde opdracht voor:

a. $\underline{s}_t = (\cos t, 3, \sin t)$.

b. $\underline{s}_t = (t,t,\frac{1}{2}t^2)$.

De deeltjes, waarvan de beweging beschreven wordt in ≫ 153 en ≫ 154, bewegen zich langs kromme banen. Bij zo'n kromlijnige beweging verandert het deeltje voortdurend van richting, m.a.w. de snelheidsvector is *niet constant*. De kentallen van de (variabele) snelheidsvector op het tijdstip t vind je door de kentallen van de plaatsvector naar t te differentiëren. De volgende redenering, geldig voor een willekeurige kromlijnige baan, maakt dat duidelijk.

Stel het deeltje is op tijdstip t in het punt P met plaatsvector

$$\underline{S}_t = (x(t),\ y(t),\ z(t)).$$

Een klein poosje (Δt) later bevindt het deeltje zich in Q met plaatsvector:

$$\underline{S}_{t+\Delta t} = (x(t+\Delta t),\ y(t+\Delta t),\ z(t+\Delta t)).$$

Stel je voor dat het deeltje zich rechtlijnig van P naar Q zou bewegen. De snelheidsvector zou in dat geval gelijk zijn aan:

$$\frac{1}{\Delta t}\cdot(\underline{S}_{t+\Delta t}-\underline{S}_t) =$$

$$\left(\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t},\ \frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t},\ \frac{z(t+\Delta t)-z(t)}{\Delta t}\right)$$

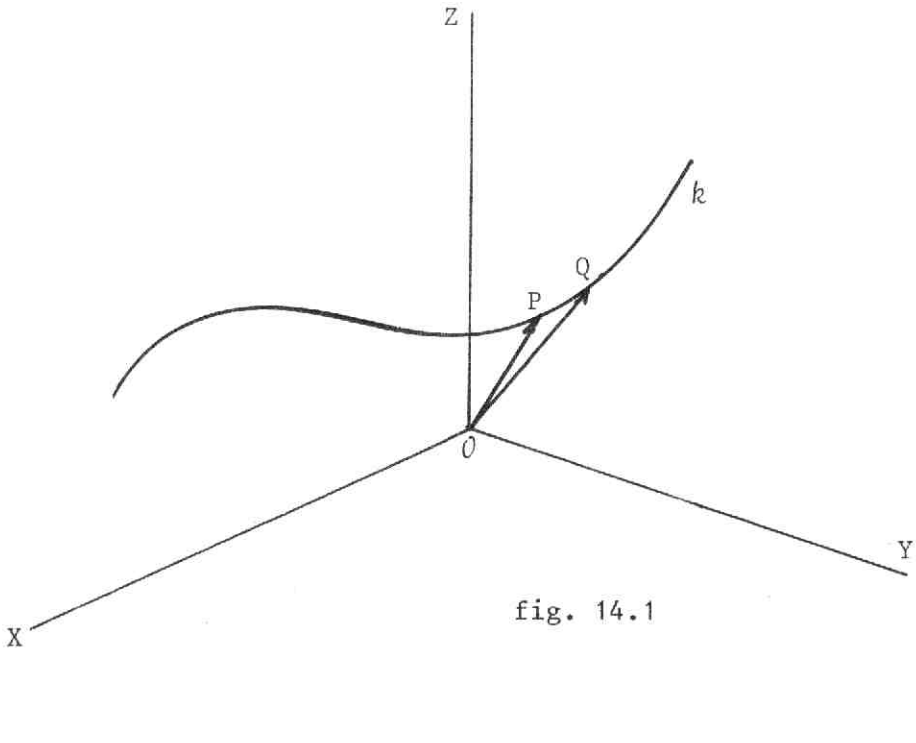


fig. 14.1

Laten we nu Δt tot nul naderen, dan vinden we de snelheidsvector op het tijdstip t:

$$\underline{v}_t = (x'(t),\ y'(t),\ z'(t))$$

ofwel:

$$\underline{v}_t = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$$

Om aan te geven dat we $\underline{v}_t$ door differentiëren uit $\underline{S}_t$ vinden, noteren we ook wel: $\underline{v}_t = \underline{S}'_t$. [1)]

Voorbeelden:

In ≫ 153 geldt: $\underline{v}_t = (0,1,2t)$

In ≫ 154a geldt: $\underline{v}_t = (-\sin t,\ 0,\ \cos t)$

In ≫ 154b geldt: $\underline{v}_t = (1,1,t)$

≫ 155. Zie ≫ 150.
Wat is het resultaat als je de plaatsvector naar t differentieert?

* ≫ 156. $\underline{S}_t = (\frac{1}{2}t,\ \frac{1}{4}t^2,\ \frac{1}{8}t^3)$ is de algebraïsche voorstelling van de baan van een zich bewegend deeltje.

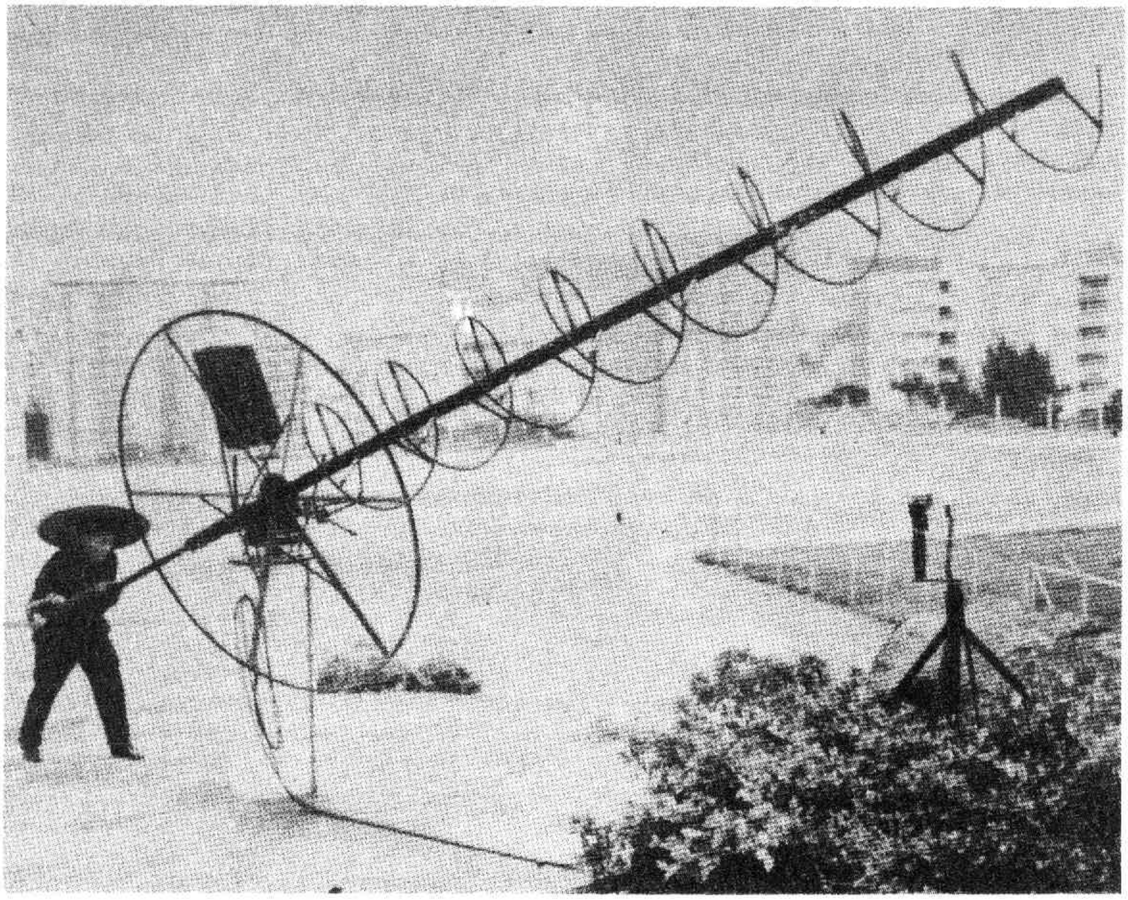
a. Teken de baan die het deeltje gedurende het tijdsinterval [0;2] doorloopt.

b. Teken de snelheidsvector op de tijdstippen $t = 0$ en $t = 1$.

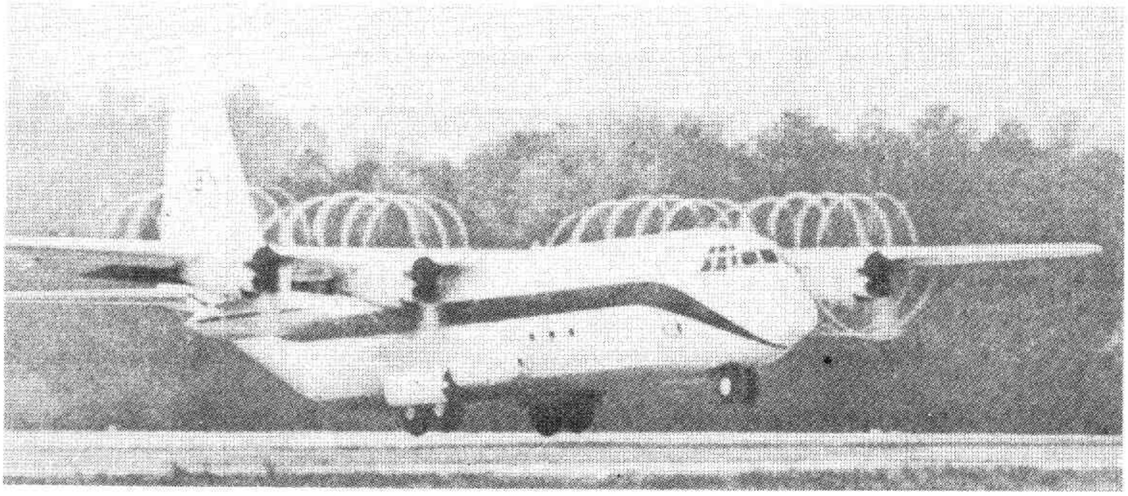
c. Teken de loodrechte projecties van de baan op het XOY- en het XOZ-vlak.

d. Ligt de baan van het deeltje in een plat vlak?

1) Men gebruikt hier ook wel het "fluxie-symbool" waarvan Newton zich bij zijn differentiaalrekening bediende: $\underline{v}_t = \dot{\underline{S}}_t$.



(1)



(2)

Meetkundig gezien is de snelheidsvector op het tijdstip t (zoals bijv. in ≫ 156) een richtingsvector van de *raaklijn* aan de kromme in het punt met parameter t.

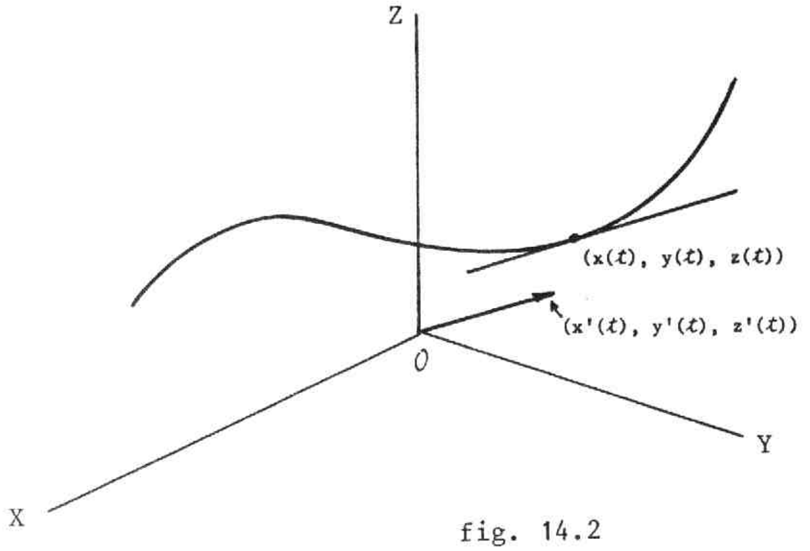


fig. 14.2

≫ 157. Gegeven de ruimtekromme k met parametervoorstelling

$$(x,y,z) = (t, \sqrt{t}, t^2 - 1)$$

De raaklijn aan k in het punt met $t=4$ is ℓ.

Geef een parametervoorstelling van die lijn ℓ.

Een fraai bekend voorbeeld van een "ruimtekromme" is de zgn. *schroeflijn* of *helix*.
Voorbeelden hiervan zijn:
de draad in een schroef, de leuning van een wenteltrap, de baan van een propellertip, ...
Foto 1 toont een miniatuur radiotelescoop in Hong Kong met schroeflijn-antenne, ingesteld op een passerende Amerikaanse weersatelliet.
Foto 2 laat zien dat je onder bepaalde atmosferische omstandigheden de "propellerschroeflijn" bij een startend vliegtuig met eigen ogen kunt waarnemen.

Kijk naar de beweging van de propellertip:

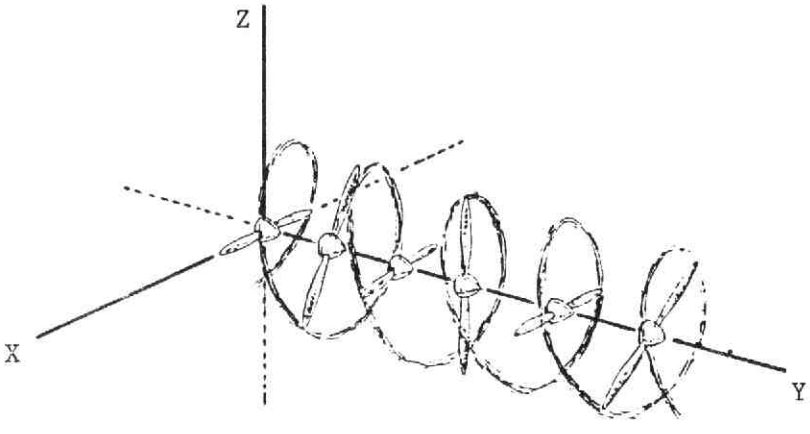


fig. 14.3

Deze "schroefbeweging" is de resultante van:

(1) een cirkelbeweging in het XOZ-vlak;

(2) een rechtlijnige beweging in de richting van de y-as.

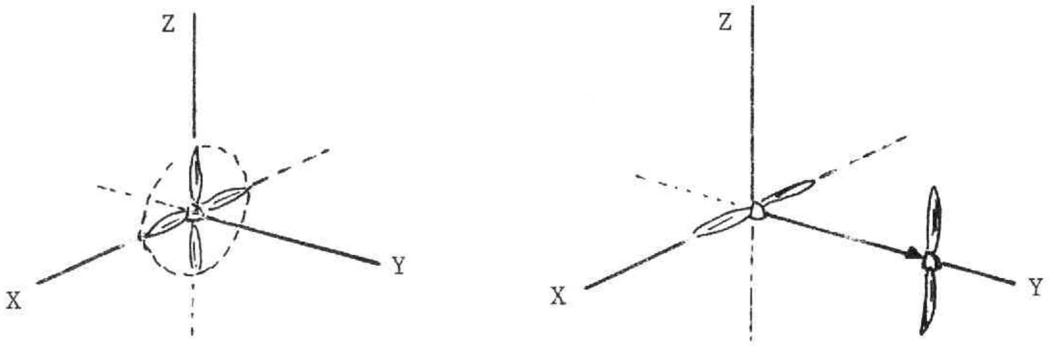


fig. 14.4

Kiezen we de tijdseenheid zó dat de propeller in 2π tijdseenheden een volle slag maakt, stellen we de lengte van de propeller r en de snelheid van het vliegtuig v, dan worden de bewegingen (1) en (2) algebraïsch beschreven als:

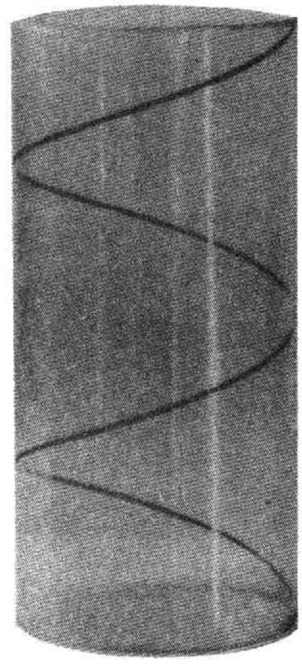
(1) : $(x,y,z) = (r\cos t,\ 0,\ r\sin t)$

(2) : $(x,y,z) = (0, vt, 0)$.

≫ 158. a. Verklaar de parametervoorstellingen (1) en (2).

b. Geef een parametervoorstelling van de schroeflijn die de propellertip beschrijft.

≫ 159. Op de cilinder zie je een schrijflijn aangebracht.



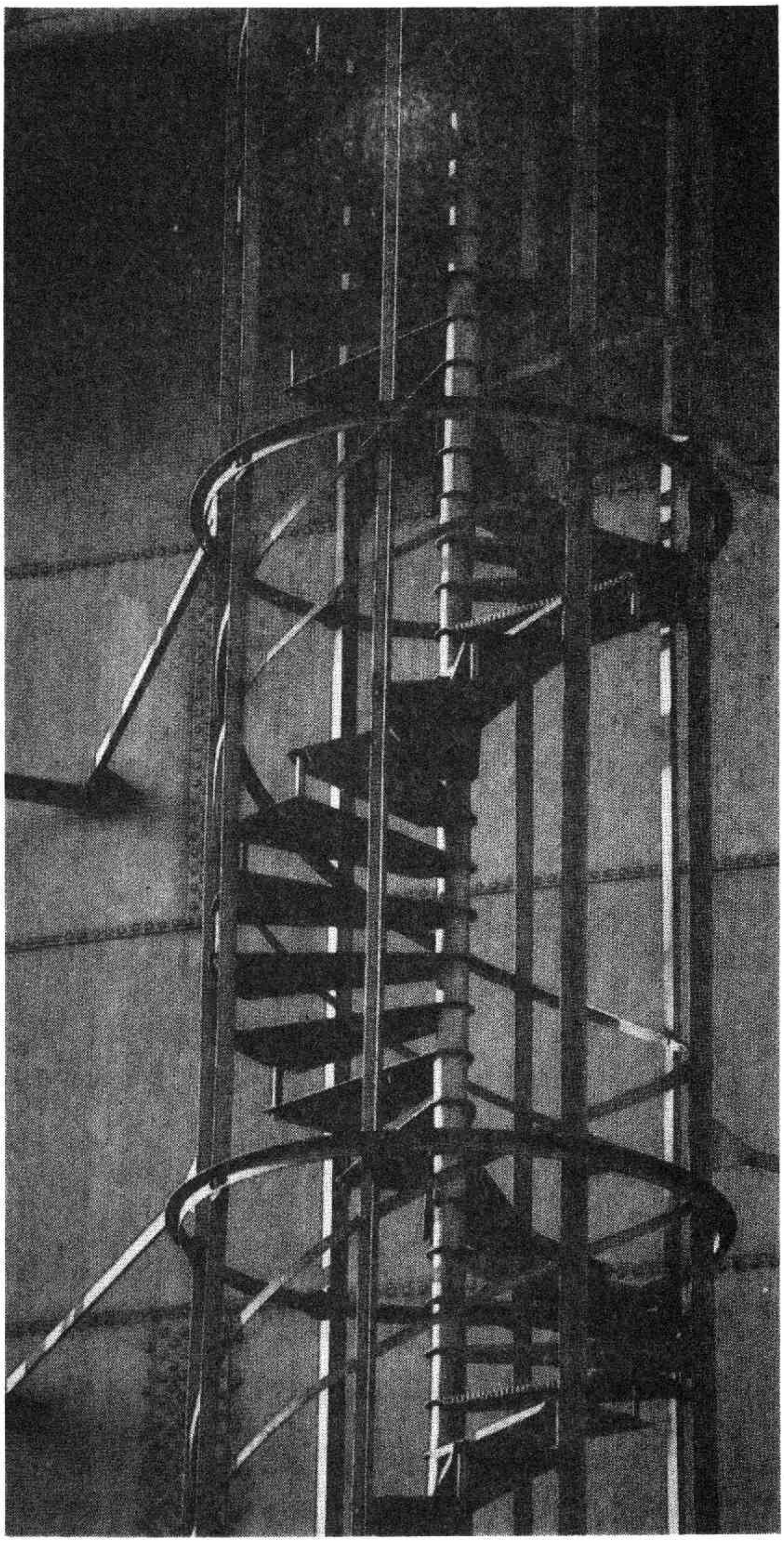
a. Geef een parametervoorstelling van de schroeflijn.
Neem daarbij het volgende aan:
1. De Z-as is de as van de cilinder.
2. De straal van de cilinder is 1.
3. Het beginpunt ($t = 0$) ligt op de X-as.
4. De hoogte van de schroeflijn na één volle slag is 2π.

b. Bereken de kentallen van een richtingsvector van de raaklijn aan de schroeflijn in het punt met parameterwaarde t.

c. Toon aan dat de in b. bedoelde raaklijn een hoek van 45° met de Z-as maakt.

d. De cilinder (met hoogte 4π) wordt opengeknipt langs de lijn door (1,0,0) parallel met de cilinderas en vervolgens uitgerold.
Zo ontstaat er een rechthoek.
Teken die rechthoek en daarin de schroeflijn.

≫ 160. De schroeflijn op de foto is een zogenaamde rechtsdraaiende schroeflijn.
Geef een parametervoorstelling van een "linksdraaiende" schroeflijn die in hetzelfde punt begint.



Rechtsdraaiende wenteltrap

15

ALGEBRAÏSCHE VOORSTELLING VAN PLATTE EN GEBOGEN VLAKKEN

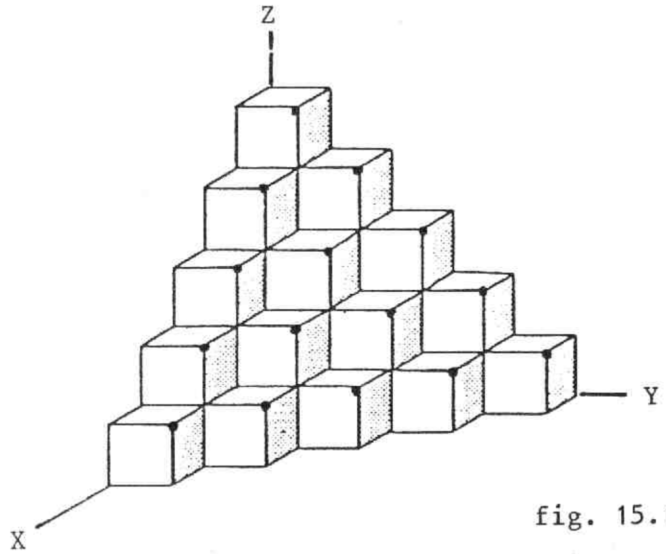


fig. 15.1

≫ 161. Een bouwsel van kubusjes met ribbe 1.

a. Uit hoeveel kubusjes bestaat het bouwsel?

b. Vijftien hoekpunten zijn er aangestipt.
Geef de coördinaten van elk van die hoekpunten.

c. Welke betrekking bestaat er tussen die coördinaten van elk van die vijftien hoekpunten?

d. Hoe kun je beredeneren dat die vijftien hoekpunten in één vlak -zeg α - liggen?

e. In welke punten snijdt het vlak α de drie coördinaatassen?

Opvallend aan de vijftien punten van fig. 15.1 is dat de *som van de co-ordinaten* voor alle vijftien gelijk is aan 7. Bovendien liggen die vijftien in één vlak α.
Er is weinig fantasie voor nodig om op het idee te komen dat voor *elk* punt van α de coördinatensom wel eens gelijk zou kunnen zijn aan 7.

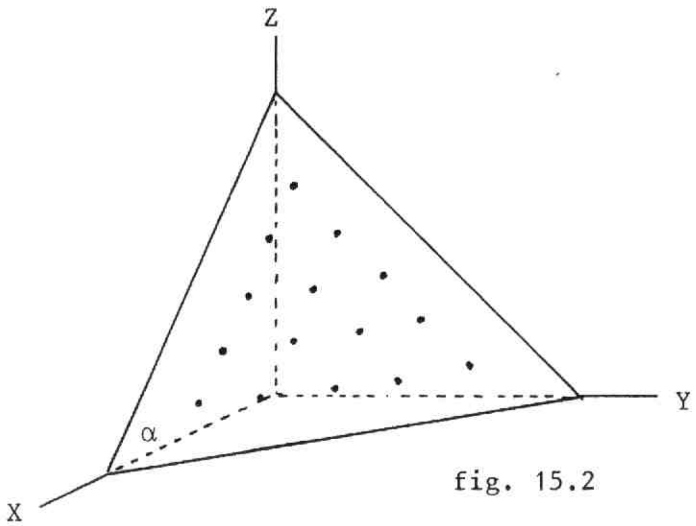


fig. 15.2

≫ 162. Kies twee punten uit de vijftien van fig. 15.2 en stel een parametervoorstelling op van de verbindingslijn van die door jou gekozen punten.
Laat nu zien dat voor elk punt van die verbindingslijn de coördinatensom inderdaad gelijk is aan 7.

≫ 163. De punten van de ruimte worden parallel geprojecteerd op het XOY-vlak. De richtingsvector van de projectie is $(1,0,-1)$.

a. Wat kun je zeggen van de projecties van de punten van α?

Laat ℓ de snijlijn zijn van α met het XOY-vlak.

b. Geef een parametervoorstelling van ℓ.

c. Neem een willekeurig punt van ℓ (coördinaten uitgedrukt in één parameter).
Geef een parametervoorstelling van de projectiestraal van dat punt.

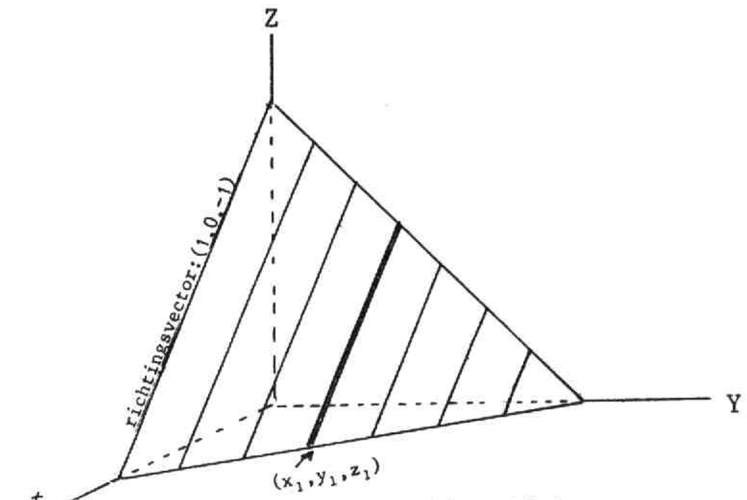


fig. 15.3

d. Bereken de coördinatensom van een willekeurig punt van die projectiestraal. En?

Uitgaande van de parametervoorstelling $(x,y,z) = (7,0,0) + t(1,-1,0)$ van de lijn ℓ, vind je als parametervoorstelling van een "willekeurige" projectiestraal in α:

$$(x,y,z) = (7+t,\ -t,\ 0) + u(1,0,-1)$$

ofwel:

$$\boxed{(x,y,z) = (7+t+u,\ -t,\ -u)} \qquad (1)$$

Omdat elk punt van α op deze manier beschreven kan worden, noemen we (1) een *parametervoorstelling van het vlak* α. Hierin komen de twee onafhankelijke parameters t en u voor.

In plaats van (1) kunnen we ook schrijven:

$$\boxed{(x,y,z) = (7,0,0) + t(1,-1,0) + u(1,0,-1)} \qquad (1')$$

Uit (1) volgt onmiddellijk dat de coördinatensom van elk punt (x,y,z) is α gelijk is aan 7.

Zo hebben we een tweede algebraïsche voorstelling van α

$$\boxed{x + y + z = 7} \qquad (2)$$

die ook wel een *vergelijking van* α wordt genoemd.

Bekijk nog eens de parametervoorstelling (1').
Als je voor t een vaste waarde kiest (en u laat variëren), krijg je een lijn in α met richtingsvector (1,0,-1).
Kies je voor u een vaste waarde (en laat je t variëren), dan krijg je een lijn in α met richtingsvector (1,-1,0).
In de figuur hieronder zie je een aantal "t - lijnen" en "u - lijnen" getekend. Men noemt dit ook wel *parameterlijnen* van α.

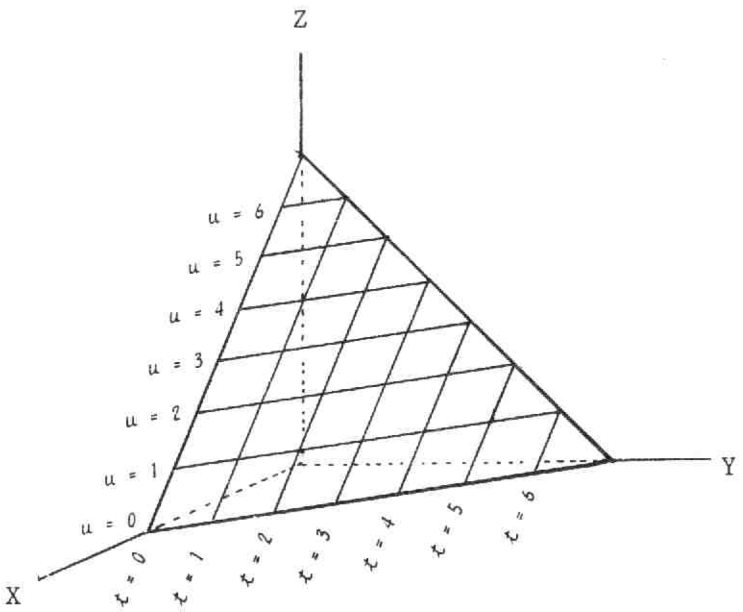


fig. 15.4

≫ 164. Elk punt van het vlak α correspondeert met twee parameterwaarden t en u.
Neem fig. 13.4 over en teken daarin de verzameling punten waarvoor geldt: $t = u$.
Dezelfde opgave voor: $t + u = 4$. Ook: $t - u = 2$.

≫ 165. Bij een parametervoorstelling van een lijn hebben we onderscheid gemaakt tussen een "steunvector" en een "richtingsvector".
Welke vectoren in (1') zou je steun- resp. richtingsvector willen noemen?

≫ 166. α is het vlak door het punt (4,0,0) parallel met het YOZ-vlak.

a. Geef een parametervoorstelling van α.

b. Hoe lopen de parameterlijnen?

c. De vergelijking van α is wel heel simpel. Hoe?

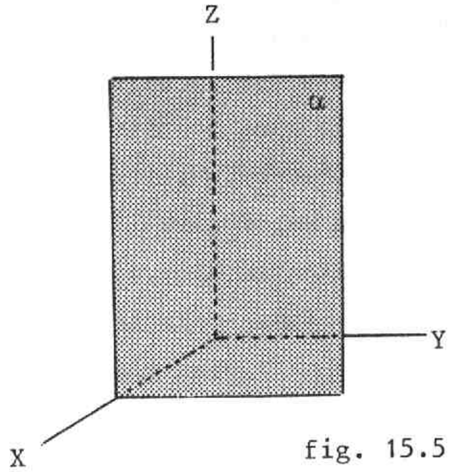


fig. 15.5

≫ 167. β is het vlak door de punten (4,0,0) en (0,0,4) parallel met de Y-as.

a. Geef een parametervoorstelling van β.

b. Hoe lopen de parameterlijnen?

c. Geef een vergelijking van β.

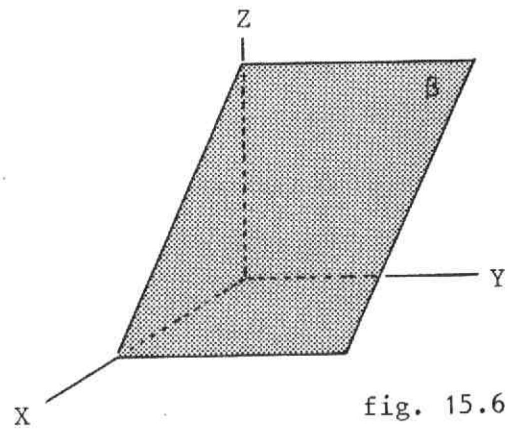


fig. 15.6

≫ 168. Kijk nog eens naar het kubusbouwsel in fig. 15.1. Hoeveel kubusjes liggen er "boven" het vlak $z = 2$? En hoeveel liggen er "achter" het vlak $x + y = 3$?

Houd goed uit elkaar:

In een tweedimensionaal coördinatenstelsel is $x + y = 3$ de vergelijking van een (*rechte*) *lijn*.

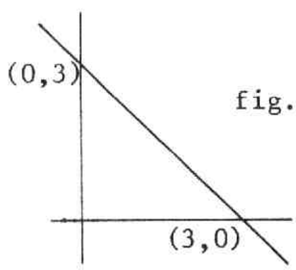


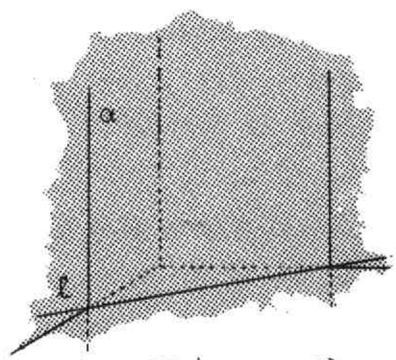
fig. 15.7

In verzamelingentaal:

$\ell = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 3\}$

In een driedimensionaal coördinatenstelsel is $x + y = 3$ de vergelijking van een (*plat*) *vlak*.

fig. 15.8



$\alpha = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 3\}$

Het eerste weet je nog van vroeger.
Het tweede kun je bijv. als volgt beredeneren:
"Kies een punt in het OXY-vlak, waarvan de coördinaten voldoen aan $x + y = 3$ (zo'n punt ligt op de lijn ℓ). Als je dit punt in vertikale richting verschuift (omhoog of omlaag), verandert alleen de z-coördinaat! De coördinaten blijven dus voldoen aan $x + y = 3$. Zo krijg je allemaal vertikale lijnen (parallel met de Z-as) door punten van ℓ en die vormen met z'n allen een plat vlak!"

* ≫ 169. K is de kubus $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leqq x \leqq 4 \text{ en } 0 \leqq y \leqq 4 \text{ en } 0 \leqq z \leqq 4\}$

a. Teken (in verschillende kleuren) de doorsneden van de vlakken
$\alpha : x + y = 2$; $\beta : x + z = 3$; $\gamma : y + z = 4$
met de kubus K.

b. Construeer het snijpunt van de vlakken α, β en γ.

c. Bereken de coördinaten van dat punt.

≫ 170. De vergelijking van het diagonaalvlak α in de kubus (ribbe 6) is:
$x - z = 0$ ofwel $x = z$.
De kubus heeft nog vijf andere diagonaalvlakken.

a. Welke vergelijkingen passen daarbij?

b. Welk punt ligt in alle zes diagonaalvlakken?

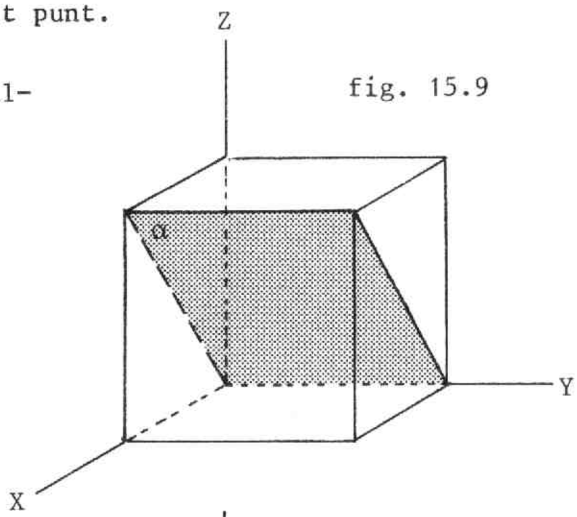


fig. 15.9

≫ 171. In het begin van dit hoofdstuk heb je ontdekt dat $x + y + z = 7$ een vergelijking is van het vlak door de punten (7,0,0), (0,7,0) en (0,0,7).
Wat voor een vlak krijg je als je die 7 in de vergelijking vervangt door een ander getal?

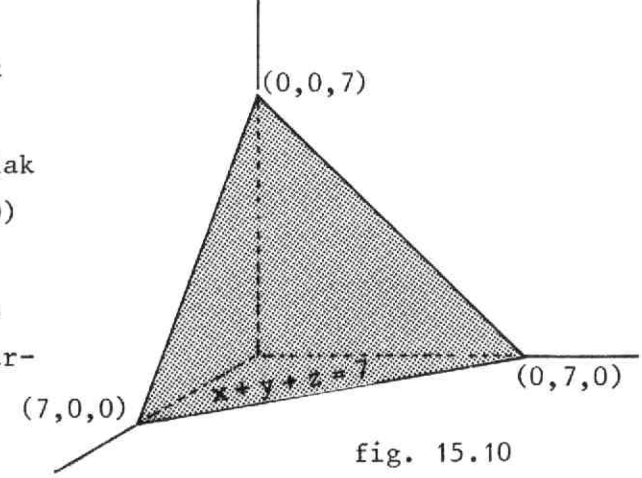


fig. 15.10

* ≫ 172. a. Teken de doorsnede van de kubus K met het vlak α: $x + y + z = c$.

b. Voor welke $c \in \mathbb{R}$ is die doorsnede een driehoek?

c. Bereken de oppervlakte van die doorsnede als functie van c. (Onderscheid de gevallen $0 \leqq c \leqq 2$, $2 \leqq c \leqq 4$ en $4 \leqq c \leqq 6$).

d. Teken de grafiek van de functie bedoeld in de vorige vraag in je werkboek.
Voor welke $c \in \mathbb{R}$ is de oppervlakte van de doorsnede maximaal? (Vergelijk je resultaat met de opgave over het kubushuis van Blom, pag. 60 vraag d!).

≫ 173. α is het vlak door de punten (2,0,0), (0,5,0) en (0,0,3).

a. Geef een parametervoorstelling van α.

b. Leid hieruit af dat voor elk punt van α geldt:

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{5} + \frac{z}{3} = 1$$

ofwel:

$$15x + 6y + 10z = 30.$$

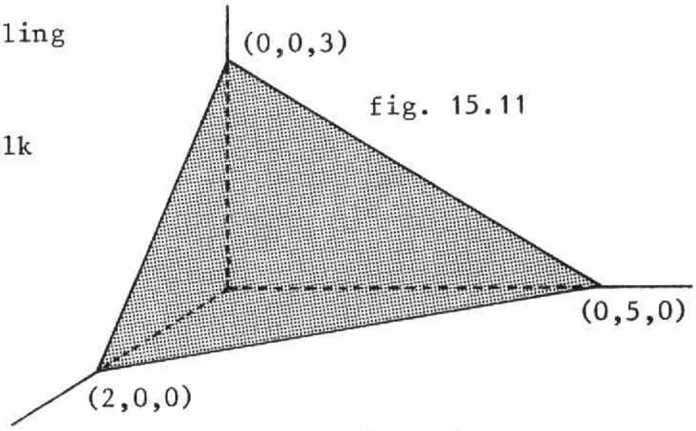


fig. 15.11

≫ 174. Geef een vergelijking van het vlak door de punten: (25,0,0), (0,10,0) en (0,0,20).
Ook van een vlak door de punten: $(p,0,0)$, $(0,q,0)$ en $(0,0,r)$. (p, q, r zijn reële getallen $\neq 0$).

In het algemeen geldt:

Een plat vlak heeft t.o.v. een x,y,z-stelsel een vergelijking van de vorm: $ax + by + cz = d$.

≫ 175. In bovenstaande vergelijking mogen de *coëfficiënten* a, b *en* c niet alle drie gelijk zijn aan 0.

a. Wat weet je van de ligging van het vlak als $a = 0$, $b \neq 0$ en $c \neq 0$?

b. En wat als $a = 0$, $b = 0$ en $c \neq 0$?

c. En wat als $d = 0$?

* ≫ 176. Teken de doorsneden van het blok met de vlakken:

α: $2x + 3y + 6z = 6$; β: $2x + 3y + 6z = 12$ en γ: $2x + 3y + 6z = 18$.

* ≫ 177. a. Teken in het blok (in verschillende kleuren) de vlakken:

α: $3x + 4y + 8z = 24$; β: $3y + 2z = 9$ en γ: $2z = 3$.

b. Construeer het snijpunt van α, β en γ en bereken de coördinaten van dat punt.

* ≫ 178. a. Teken in het coördinatenstelsel de verzameling punten (x,y,z) die voldoen aan $|x| + |y| = 3$ en $0 \leqq z \leqq 6$.

b. Teken de doorsnede van de in a. genoemde verzameling met het vlak $8x + 2y + 3z = 12$.

* ≫ 179. a. Teken in het coördinatenstelsel de verzameling punt (x,y,z) die voldoen aan $|x| + |y| + |z| = 6$.

b. Wat is de "meetkundige" naam van die verzameling?

c. Beschouw de zwaartepunten van de zijvlakken van het veelvlak dat je getekend hebt.

Van wat voor een figuur zijn die zwaartepunten juist de hoekpunten?

16

ALGEBRAÏSCHE VOORSTELLING VAN GEBOGEN VLAKKEN

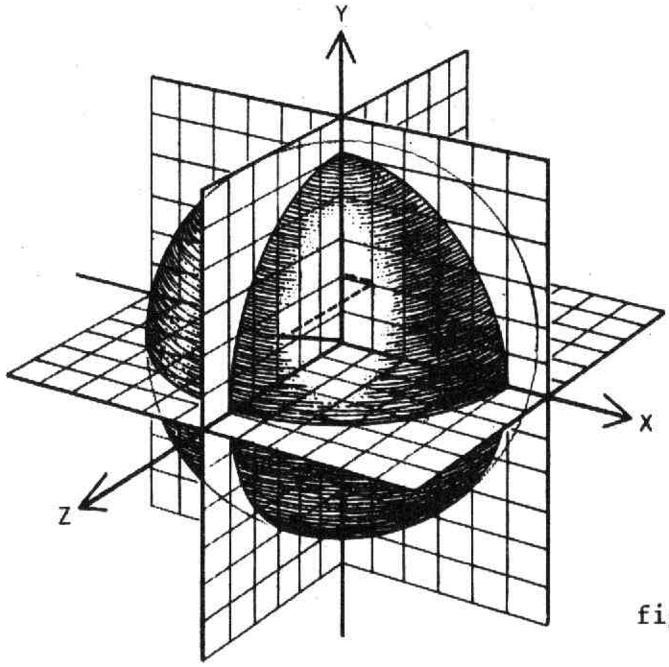


fig. 16.1

≫ 180. Bol met middelpunt O en straal 5 in een assenstelsel.

a. Welke van de volgende punten liggen op die bol?
Welke binnen, welke buiten?
(4,2,0); (3,4,0); (3,4,1); (2,3,3); (3,3,3); ($2\sqrt{2}$,4,1).

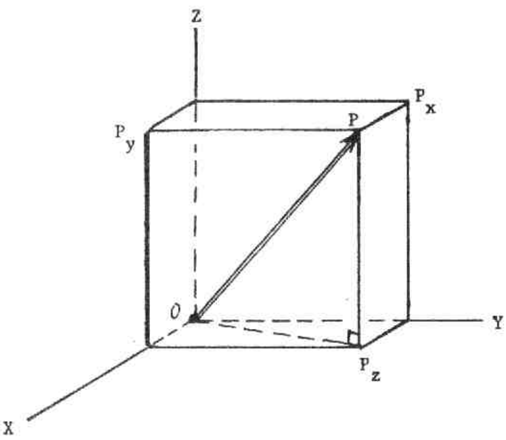
b. Aan welke vergelijking (in x, y en z) voldoen alle punten van de bol?

c. Hoe ziet de doorsnede eruit van de bol met het vlak $z = 4$?

d. En de doorsnede met het vlak $x = y$?

De afstand van een punt in de ruimte tot de oorsprong vind je via de stelling van Pythagoras.

Voorbeeld:



$$
\begin{aligned}
P &= (1,2,2) \\
PO^2 &= PP_z^{\,2} + OP_z^{\,2} \\
&= PP_z^{\,2} + PP_y^{\,2} + PP_x^{\,2} \\
&= 2^2 + 2^2 + 1^2 \\
&= 9
\end{aligned}
$$

Dus: $PO = 3$

Kortom: Als P: (x,y,z), dan: $PO = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

De formule geldt ook als één of meer coördinaten van P negatief zijn.

Uit bovenstaande afstandsformule volgt onmiddellijk dat voor elk punt (x,y,z) op de bol met middelpunt O en straal r geldt:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \qquad \ldots\ldots \ (1)$$

Omgekeerd: elk punt (x,y,z) waarvoor (1) geldt, heeft een afstand r tot O en ligt dus op de bol (O,r).

Kortom: $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ is een *vergelijking* van de bol (O,r).

Anders gezegd: $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$ stelt de bol (O,r) voor.

≫ 181. Wat voor een meetkundige figuur stelt $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 9 \leqq x^2 + y^2 + z^2 \leqq 25\}$ voor?

* ≫ 182. De ribbe van de kubus in je werkboek heeft de lengte 2.

a. Teken de doorsnede van de bol β_1 : $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ met de kubus.

b. De bollen β_2 en β_3 zijn *concentrisch* met β_1 (d.w.z. ze hebben hetzelfde middelpunt) en gaan resp. door de punten (2,0,1) en (2,0,2).

Teken (in andere kleuren) de doorsneden van β_2 resp. β_3 met de kubus.

* ≫ 183. a. Teken, voorzover zichtbaar, de punten (x,y,z) in het XOY-vlak, die voldoen aan $x^2 + y^2 = 25$.

b. Teken ook de punten in het vlak $z = 6$ die aan $x^2 + y^2 = 25$ voldoen.

c. Enig idee wat $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 25\}$ voorstelt? Maak een tekening!

≫ 184. β is de bol met middelpunt O en straal 5.
γ is de cilinder met de Z-as als as en straal 3.

a. Geef een vergelijking van γ.

b. Waaruit bestaat de doorsnede van β en γ?

≫ 185.

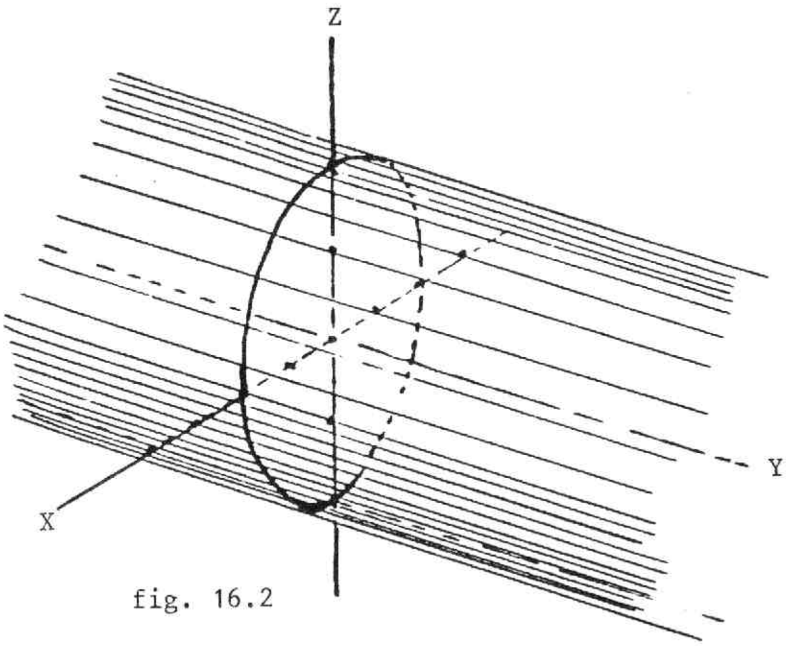


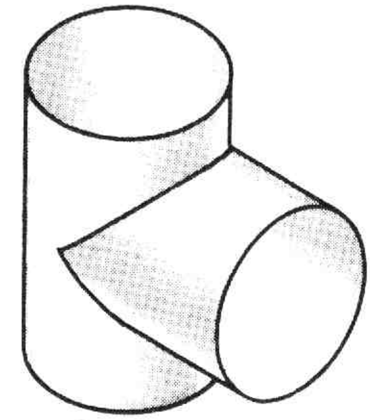
fig. 16.2

a. De cilinder-as is de Y-as en de straal van de cilinder is 2. Geef een vergelijking van die cilinder.

b. Waaruit bestaat de doorsnede van die cilinder met het vlak $x = 1$? En wat is de doorsnede van de cilinder met het vlak $y = 1$?

c. Dezelfde opdracht als b. maar nu voor de vlakken $x = z$ resp. $x = y$.

≫ 186. De cilinder van opgave 185 gaan we snijden met een tweede dilinder met straal 2, waarvan de Z-as de as is.



a. Heb je enig idee hoe de doorsnijdingsfiguur van beide cilinders eruit ziet?

b. Leidt uit de vergelijking van beide cilinders af dat de doorsnijdingskrommen in de vlakken $y = z$ en $y = -z$ liggen.

c. Wat weet je dus van de doorsnijdingsfiguur?

PARAMETERVOORSTELLING VAN EEN CILINDER

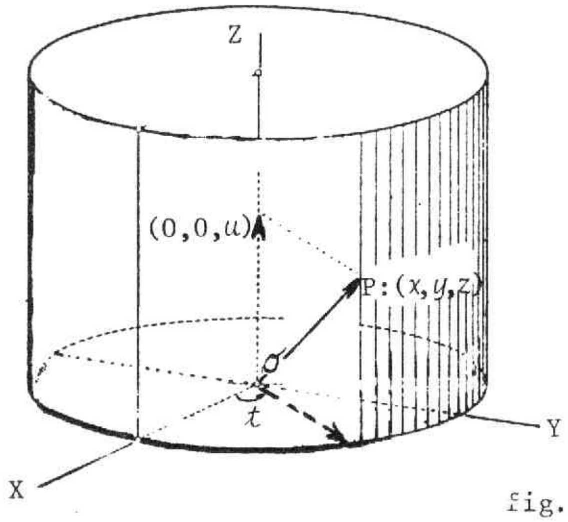


fig. 16.3

Op een eenvoudige wijze kunnen we van de cilinder met de Z-as als as en straal 5 een parametervoorstelling maken.
Een plaatsvector van een willekeurig punt P op de cilinder kan worden ontbonden in twee componenten:

één component in het XOY-vlak: $(5\cos t, 5\sin t, 0)$

één component langs de Z-as : $(0, 0, u)$

Gevolg: $(x,y,z) = (5\cos t, 5\sin t, u)$ $(0 \leq t < 2\pi\ ,\ \ u \in \mathbb{R})$.
is een parametervoorstelling van de cilinder.

De parameterlijnen (resp. t = constant, u = constant) zijn resp. de rechte lijnen (// Z-as) en de cirkels (// XOY-vlak) op de cilinder.

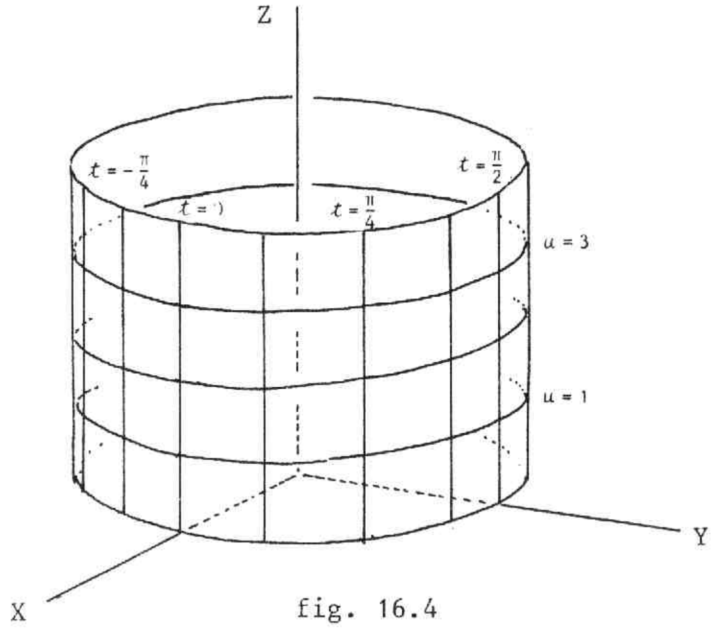


fig. 16.4

≫ 187. Uit de parametervoorstelling van de cilinder:

$$(x,y,z) = (5\cos t, 5\sin t, u)$$

kun je de vergelijking $x^2 + y^2 = 25$ afleiden. Hoe?

≫ 188. De parameterlijnen op de cilinder vormen een 'rooster' op de cilinder. Elk punt van de cilinder correspondeert met één t-waarde en één u-waarde.
Wat weet je van de verzameling punten op de cilinder waarvoor geldt: $t = u$?

≫ 189. Geef een parametervoorstelling van de cilinder van opgave 185.

PARAMETERVOORSTELLING VAN DE BOL

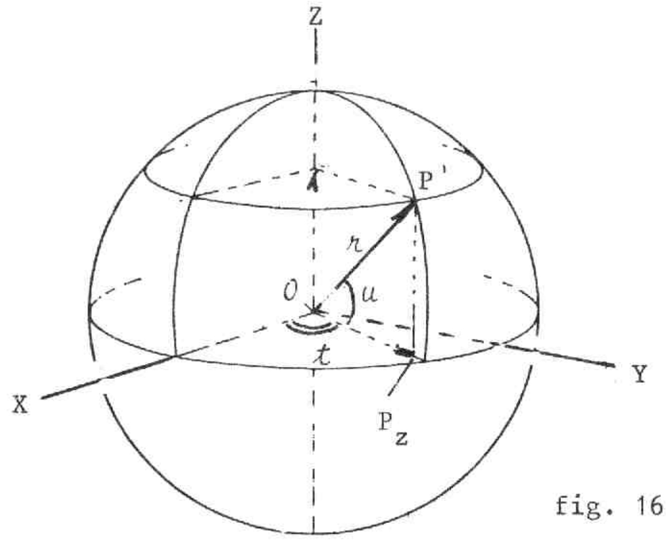


fig. 16.5

β is de bol met middelpunt O en straal r.
We kiezen een punt P op de bol.
De plaatsvector van P ontbinden we in een component langs de Z-as en een component in het XOY-vlak.

≫ 190. a. Wat is de lengte van OP_z uitgedrukt in r en u?

b. Ga na dat: $(x,y,z) = (r\cos u\cos t,\ r\cos u\sin t,\ r\sin u)$
met $\frac{-\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}$, $-\pi \leq t \leq \pi$
een parametervoorstelling van β is.

c. Hoe kun je uit die parametervoorstelling de vergelijking $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ afleiden?

≫ 191. De parameter t wordt wel de 'lengte' en de parameter u de 'breedte' van het bijbehorende punt op de bol genoemd. Dit in navolging van het taalgebruik in de geografie.
Hoe zou je, overeenkomstig geografisch taalgebruik, de parameterlijnen "t = constant" resp. "u = constant" willen noemen?

≫ 192. Van welke breedtecirkels op de bol is de omtrek half zo lang als de "evenaar"?

≫ 193. a. Geef een parametervoorstelling van de "meridiaan" $t = \frac{\pi}{3}$.

b. Bereken de x-, y- en z-coördinaat van het snijpunt van deze meridiaan met de breedtecirkel $u = \frac{\pi}{3}$.

c. Bereken (de kentallen van) de richtingsvector van de raaklijn in P aan de breedtecirkel resp. meridiaan door P.

d. Geef een parametervoorstelling of vergelijking van het raakvlak in P aan de bol.

≫ 194. Op een bol met middelpunt O wordt een rooster van parameterlijnen (breedtecirkels en meridianen) aangebracht.
De bol (met rooster) wordt orthogonaal geprojecteerd op het XOY-vlak.

a. Neem het XOY-vlak als tekenvlak en teken daarin de projectie van het rooster.

b. Dezelfde opdracht maar nu bij een loodrechte projectie van de bol op het YOZ-vlak.

≫ 195. κ is de kegel met de oorsprong als top, Z-as als as en een halve tophoek van 45°. (Zie tekening op pag. 96).
De plaatsvector van een willekeurig punt P: (x,y,z) op de kegel wordt ontbonden in componenten op de gebruikelijke wijze.

a. Welke parametervoorstelling kun je nu van κ opstellen?
(De parameters t en u zijn aangegeven in de figuur).
Aanwijzing: $\angle\, POP_z = 45°$.

b. Laat zien dat $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ een vergelijking van κ is.

c. Wat voor een figuur is de doorsnede van κ met het vlak $z = 2$?

d. Teken de doorsnede van κ met het vlak $x = 2$.
Aanwijzing: Breng in het vlak $x = 2$ een assenstelsel aan // YOZ-stelsel, met (2,0,0) als oorsprong.

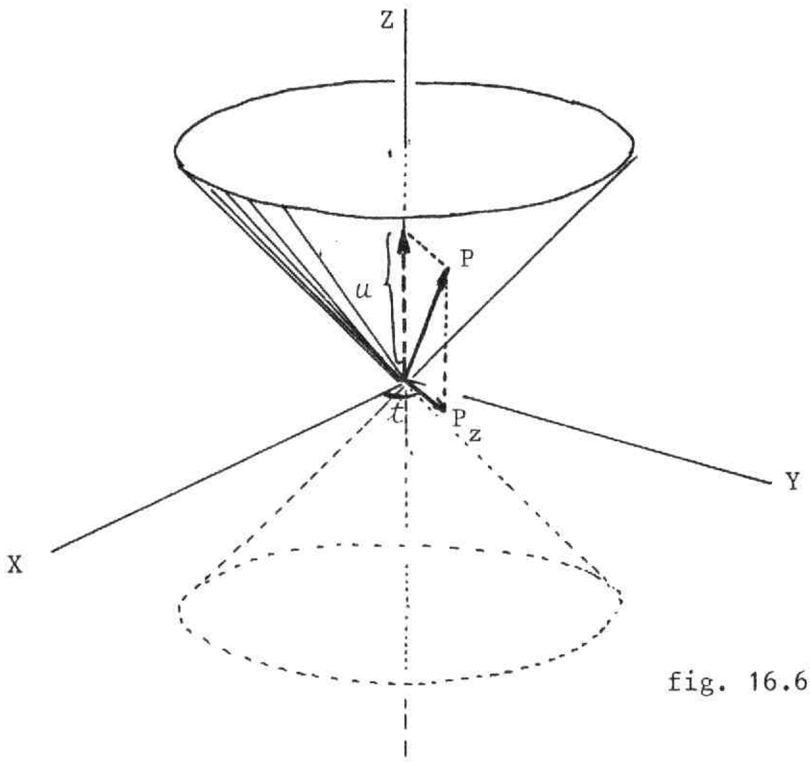


fig. 16.6

≫ 196. Bekijk nog eens de kegel κ.

Het gedeelte van κ tussen de vlakken $z = 0$ en $z = 4$ wordt opengeknipt langs de lijn "$t = 0$" en vervolgens uitgerold zó dat een vlakke figuur ontstaat.

a. Beredeneer dat die figuur een sector van een cirkel met straal $4\sqrt{2}$ is.

b. Teken die cirkelsector. (Aanwijzing: bereken eerst de omtrek van de cirkel "$u = 4$").

c. Hoe vind je de parameterlijnen ("u = constant", "t = constant") op de uitslag van de kegel terug?

≫ 197. Van een kegel is de uitslag precies een halve cirkel.

a. Hoe groot is de halve tophoek van de kegel?

b. Als je die kegel in een driedimensionaal assenstelsel plaatst (top in de oorsprong, as langs de Z-as), wat wordt dan de vergelijking van die kegel?

* ≫ 198. Op de kegel κ: $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ zie je een rooster van parameterlijnen aangebracht. Door de vergelijking $u = t$ wordt een kromme op de kegel bepaald.

a. Schets een deel van die kromme.

b. Bewijs dat de parameterlijn "$t = 0$" de raaklijn aan de kromme in de oorsprong is.

c. Een deeltje beweegt zich langs de kromme "$u = t$"; t is de tijdparameter.
Toon aan dat (de grootte van) de snelheid op het tijdstip t gelijk is aan $\sqrt{2 + t^2}$.

De kromme bedoeld in ≫ 198 is een soort "kegel-spiraal".
Uit het resultaat van 198 c. kun je afleiden dat de hoek die de spiraal maakt met de Z-as voortdurend verandert:

$$\cos \measuredangle \mathrm{AOB} = \frac{1}{\sqrt{2 + t^2}}$$

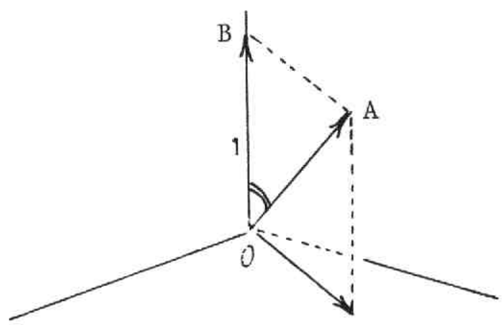
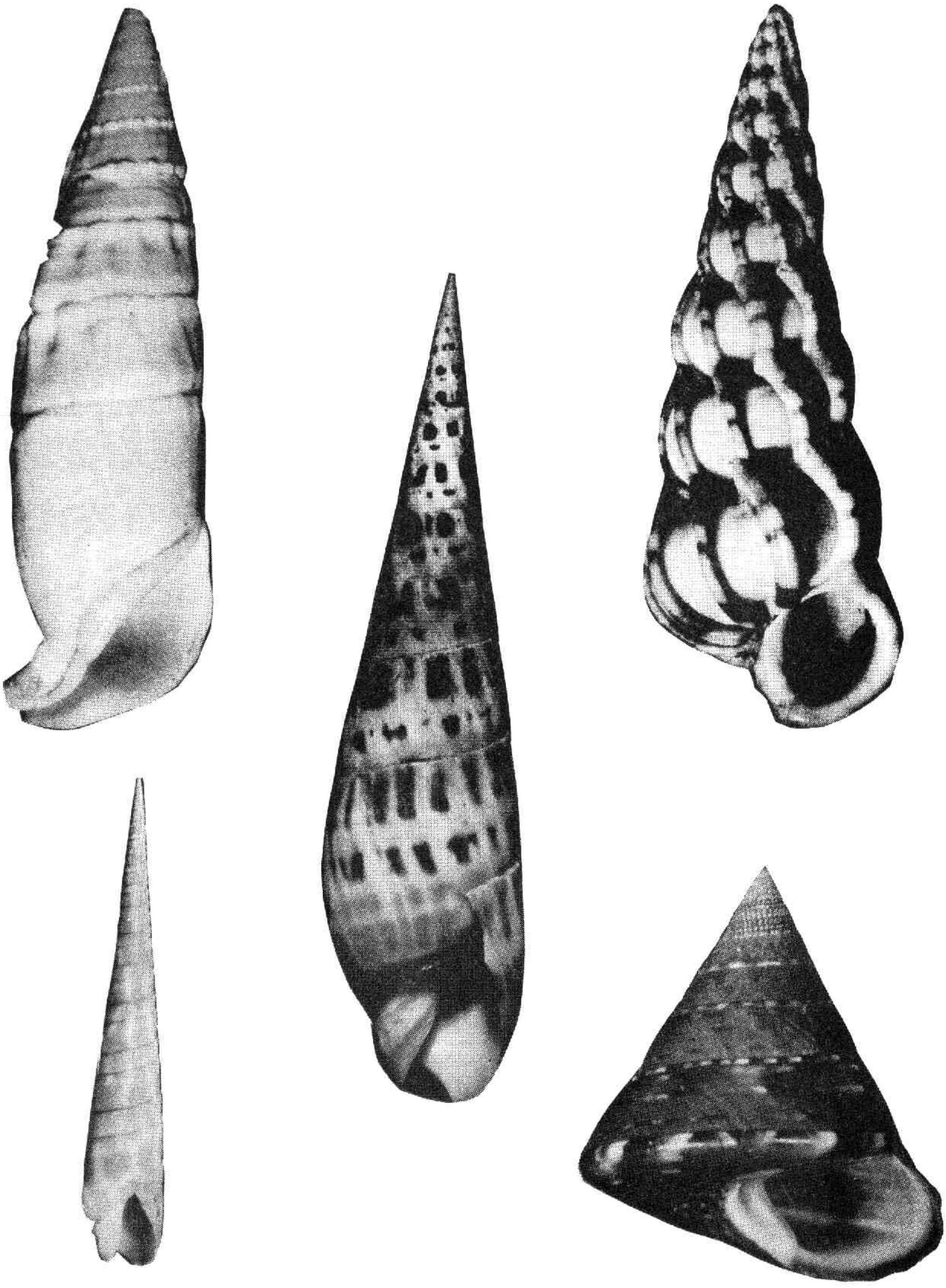


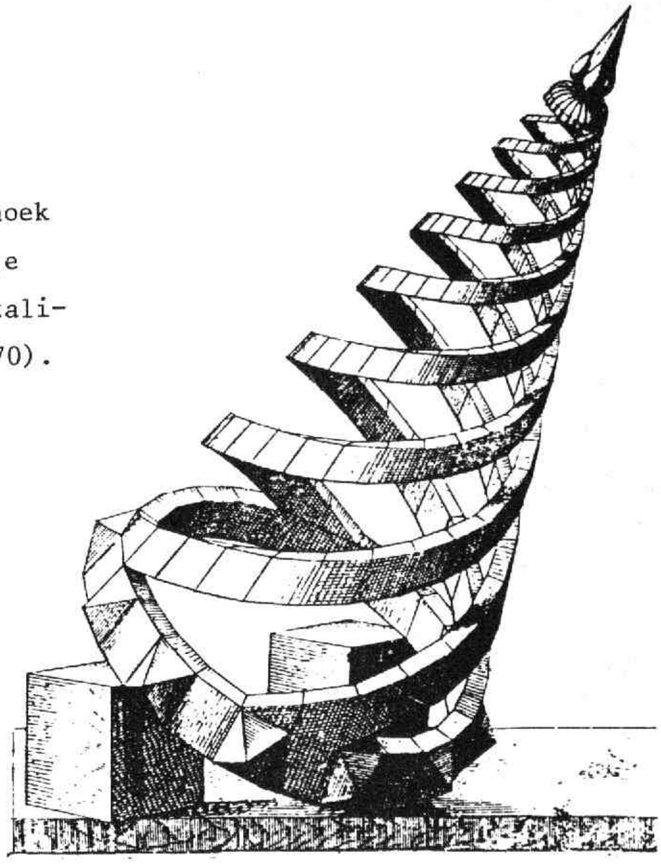
fig. 16.7

Preciezer: Als we t laten toenemen van 0 tot ∞ neemt de sinus van de hoek tussen de Z-as en de raaklijnvector toe van $\frac{1}{\sqrt{2}}$ tot 1. De spiraal gaat dan steeds steiler omhoog!

Schelpen en spiralen.



Vier kegelspiralen waarbij de hoek met de as niet verandert, zie je hiernaast uitgebeeld door de Italiaan Daniele Barbaro (1513 - 1570).



≫ 199. Een gelijke-hoek-spiraal op onze kegel κ wordt bepaald door de vergelijking $u = e^t$.

De parametervoorstelling van die ruimte kromme is dan:

$$(x,y,z) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t).$$

a. Bewijs dat de lengte van de raaklijnvector in het punt met parameter t gelijk is aan $\sqrt{3} \cdot e^t$.

b. Bewijs dat hieruit volgt dat de cosiuns van de hoek tussen zo'n raaklijn en de Z-as steeds gelijk is aan $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

c. Wat kun je zeggen over het verloop van de spiraal als t afneemt van 0 tot $-\infty$?

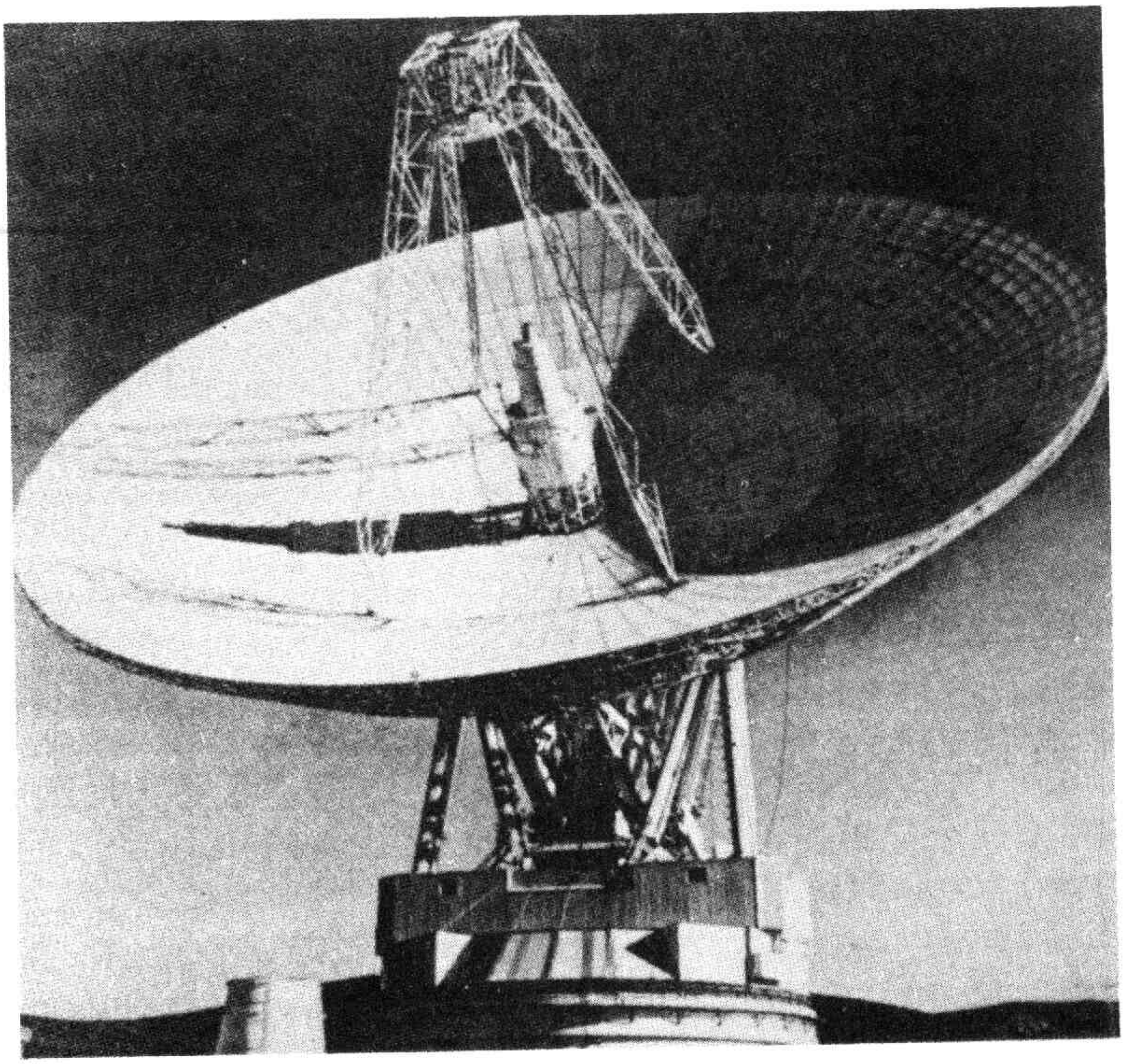
≫ 200. Een gebogen vlak α heeft de parametervoorstelling:

$$(x,y,z) = (u\cos t, u\sin t, u^2)$$

a. Maak een schets van α in een driedimensionaal stelsel.

b. Geef een vergelijking van α.

c. Hoe ziet de doorsnede van α met het vlak $y = 0$ eruit?
Niet zo erg verbazend dat α een paraboloïde genoemd wordt.



Grote radiotelescopen zoals deze in Goldstone (Californië) hebben vaak de vorm van een paraboloïde. Waarom juist deze vorm voor dat doel geschikt is, kom je tegen in deel 2 van "Lessen in Ruimtemeetkunde". Overigens, de hier afgebeelde antenne kan signalen uit de ruimte over een afstand van meer dan 200.000.000 mijl opvangen.