Lessen in ruimtemeetkunde

https://hdl.handle.net/1874/10259

LESSEN

IN

RUIMTEMEETKUNDE 2

LESSEN

IN

RUIMTEMEETKUNDE 2

Tiberdreef 4 - 3561 GG Utrecht

Foto omslag:

De Andromeda-nevel is een stelsel van miljarden sterren buiten onze Melkweg. De Arabische sterrenkundige Al-Soefi heeft dit spiraalstelsel reeds in de 10e eeuw waargenomen.

LESSEN IN RUIMTEMEETKUNDE 2

Een produktie ten behoeve van de experimenten in het kader van de Herverkaveling Eindexamenprogramma's Wiskunde 1 en 2 V.W.O.

Samenstelling: Martin Kindt
Jan de Lange Jzn

Vormgeving: Ellen Hanepen

Utrecht, september 1984.

INHOUDSOPGAVE

1. ISO-HOOGTELIJNEN pag. 1

2. BOLLEN 5

3. CILINDERSNEDEN 11

4. DE ELLIPS NADER BEKEKEN 19

5. KEGELSNEDEN 27

6. BEREKENING VAN INHOUD 33

1 ISO-HOOGTELIJNEN

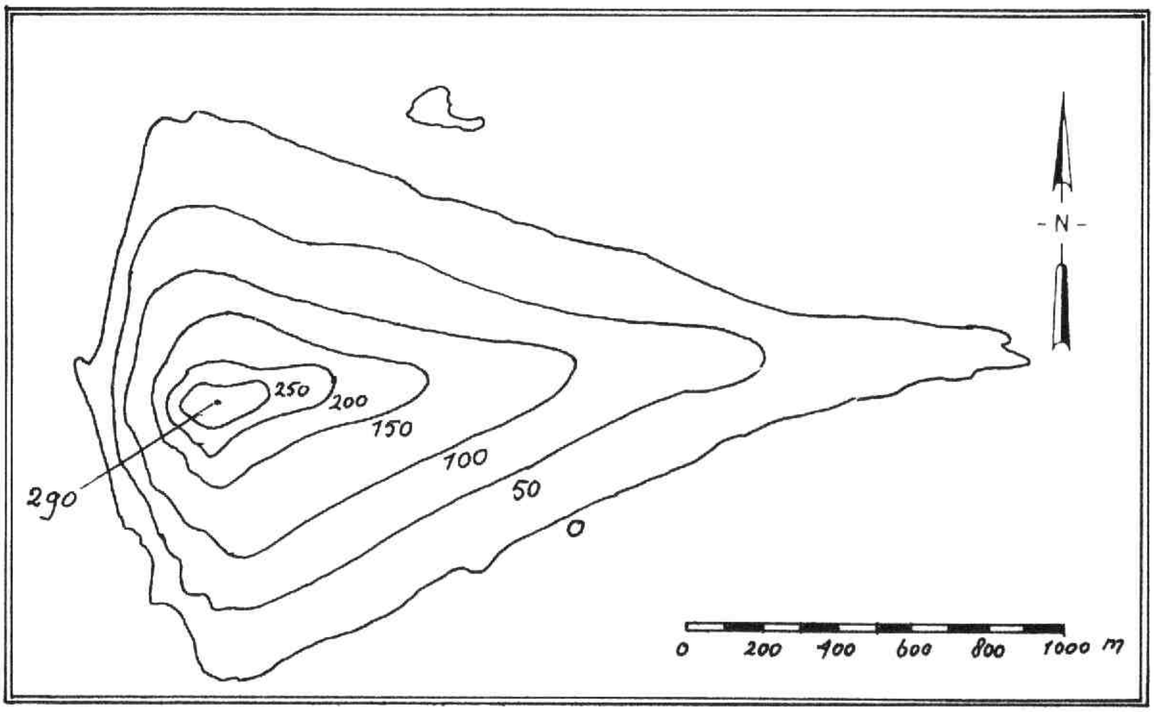


fig. 1-1

» 1. Je ziet in fig. 1-1 het *hoogtekaartje* van een bergeiland. De getallen bij de *iso-hoogtelijnen* geven de hoogte in meters aan.

a. Een boot nadert het eiland vanuit het westen.
Teken (op schaal) de vorm van de berg zoals die vanaf de boot uit de verte wordt waargenomen.

b. Dezelfde opdracht voor het geval de boot het eiland vanuit het zuiden nadert.

» 2. *Hoogtekaartje van een heuvellandschap.*

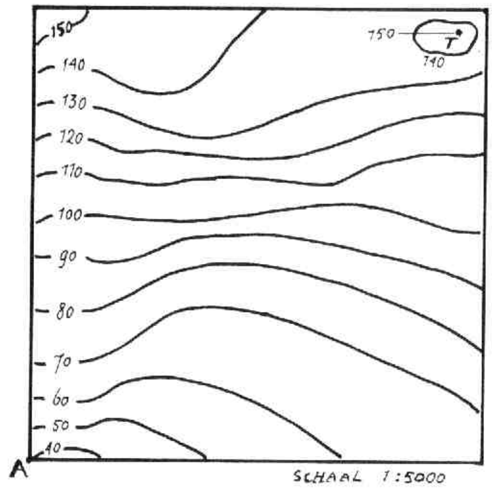


fig. 1-2

Iemand wandelt van A naar de top T volgens de rechtlijnige route op de kaart.

a. Hoeveel % is de gemiddelde helling van die weg?

b. Is het mogelijk om vanuit A de top T te bereiken zonder dat de steilte van de klim ooit meer dan 10% is?
   Zo ja, maak een tekening van een dergelijke route.

c. In het landschap is een autoweg aangelegd (fig. 1-3). De breedte van het wegdek is 60 m.
   Trek het hoogtelijnkaartje (fig. 1-2) over en teken met een afwijkende kleur het hoogtekaartje voor de nieuw ontstane situatie.

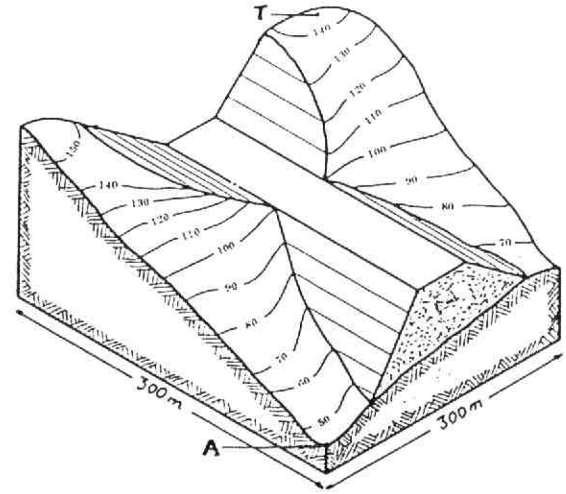


fig. 1-3

≫ 3. Fig. 1-4 laat twee projecties zien van een kegelvormige berg.
De hoogte van de kegel is 4, evenals de diameter van de grondcirkel.

a. Teken fig. 1-4 twee keer zo groot over en teken de derde projectie van de kegel (op het XOZ-vlak).

b. Teken in elk van de drie projectiefiguren de iso-hoogtelijnen op hoogte 1, 2 en 3.

c. Een route over de berg is zó dat elk punt van die route de Y-coördinaat 5 heeft.
Teken die route in de drie projectiefiguren.

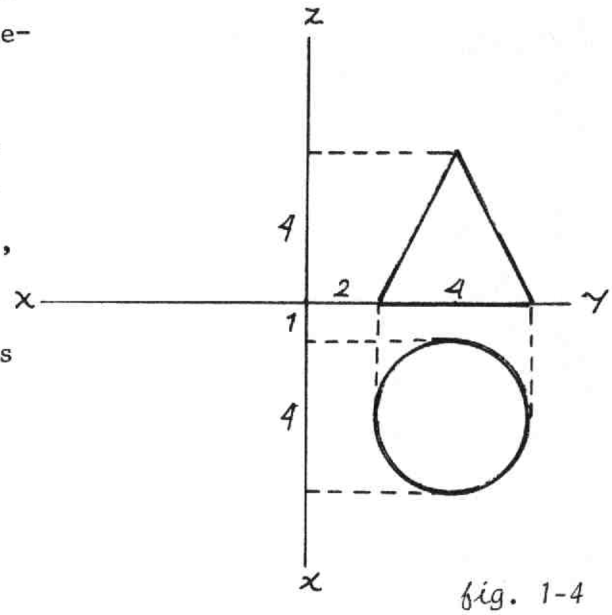


fig. 1-4

≫ 4. Van een piramide zijn de hoekpunten t.o.v. een 3-dimensionaal assenstelsel gegeven door:
T: (4,4,6), A: (4,1,0), B: (7,4,0), C: (4,7,0) en D: (1,4,0).

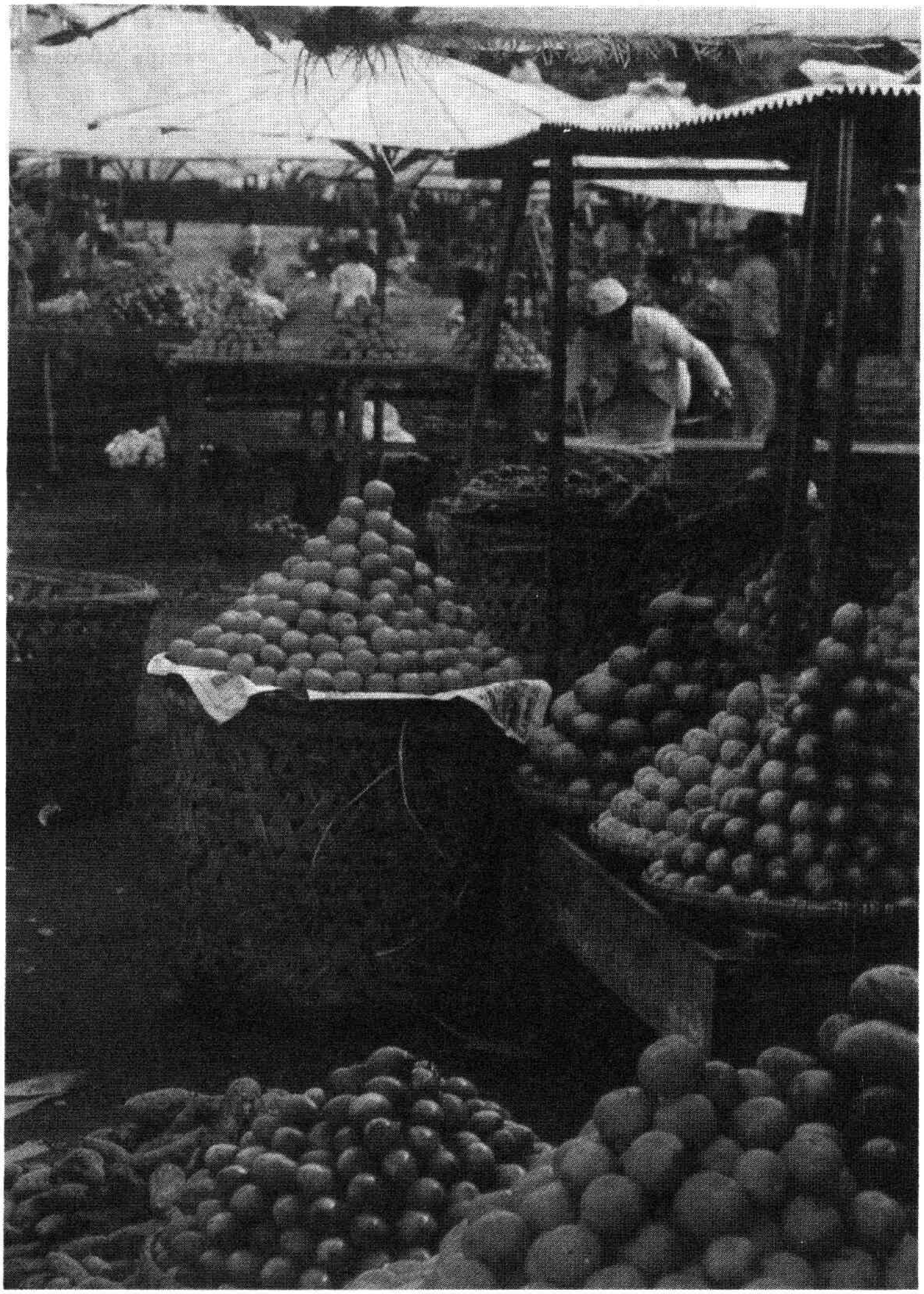
a. Teken de drie projecties van de piramide op de drie coördinaatvlakken in één figuur.

b. Teken in elk van de drie projectiefiguren de iso-hoogtelijnen op hoogte 0, 2 en 4.

c. Een rondwandeling over de piramide begint in het punt B. De route op elk zijvlak is een rechte lijn. De wandeling voert langs de punten P op TC ter hoogte 2, Q op TD ter hoogte 4 en R op TA ter hoogte 2.
Teken die rondwandeling in elk van de drie projectiefiguren.

d. De route ligt niet in één plat vlak. Beredeneer dit.

e. De route wordt gewijzigd zodat zij wel in één plat vlak komt te liggen. De punten P en R blijven als tussenstations gehandhaafd en het vertrekpunt is weer B.
Welk punt van TD ligt nu op de route?



2

BOLLEN

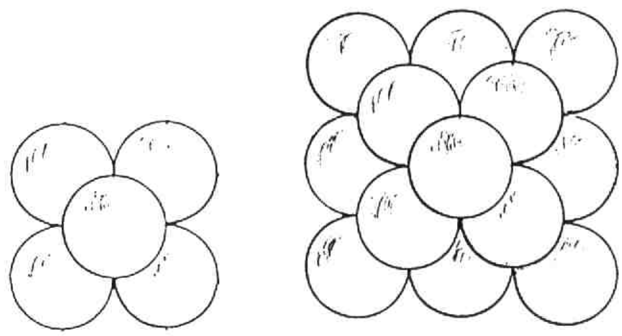


fig. 2-1

≫ 5. In fig. 2-1 zie je de bovenaanzichten van piramides bestaande uit 5 resp. 14 even grote bollen (straal 1).
Hoe hoog zijn die piramides?

≫ 6. Fig. 2-2 is een zij-aanzicht van een andere 'bol-piramide' bestaande uit 11 bollen.

a. Teken het bovenaanzicht.

b. Is deze piramide hoger of lager dan de 'drie-lagen-piramide' van fig. 2-1?
(De straal van elke bol is weer 1).

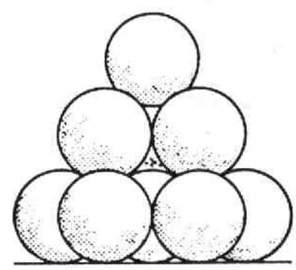
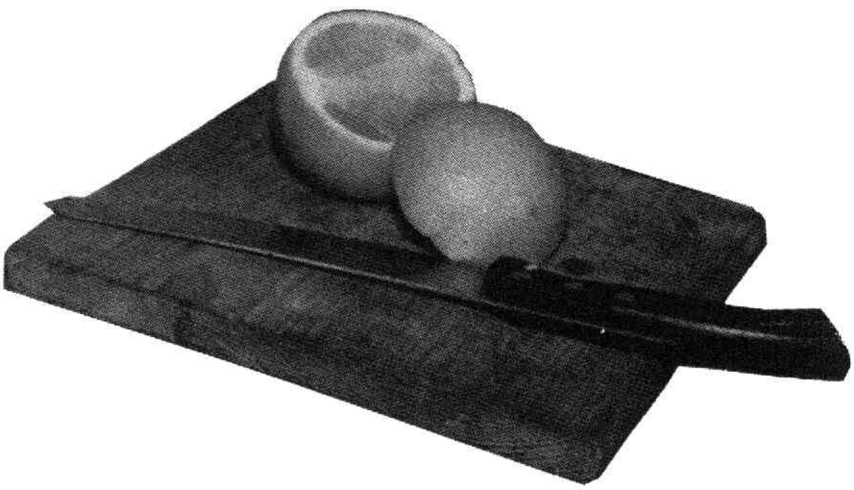


fig. 2-2

≫ 7. In een kubusvormige doos worden gummiballen verpakt met een diameter van 2 dm.
Lengte, breedte en hoogte van de doos zijn 1,20 m.
Hoeveel ballen gaan er in die doos?

Als een vlak een bol snijdt, heeft de doorsnede de vorm van een cirkel.



Bovenstaande regel is eenvoudig af te leiden met behulp van de stelling van Pythagoras.

Projecteer M loodrecht op het snijvlak α.
De projectie K ligt op een afstand s van M.
De afstand s is kleiner dan de straal r van de bol.
Alle punten P van de snijkromme hebben dezelfde afstand tot K, nl. $\sqrt{r^2 - s^2}$.

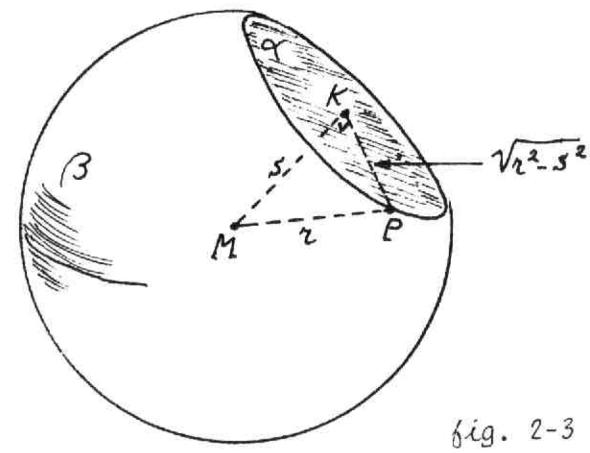


fig. 2-3

Kortom: de punten P liggen op de cirkel in α met middelpunt K en straal $\sqrt{r^2 - s^2}$

≫ 8. Een bol zakt langzaam door een horizontaal vlak. Beschrijf hoe de snijkromme van bol en vlak verandert.

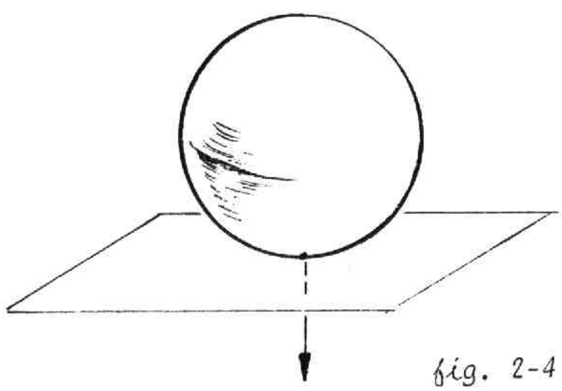


fig. 2-4

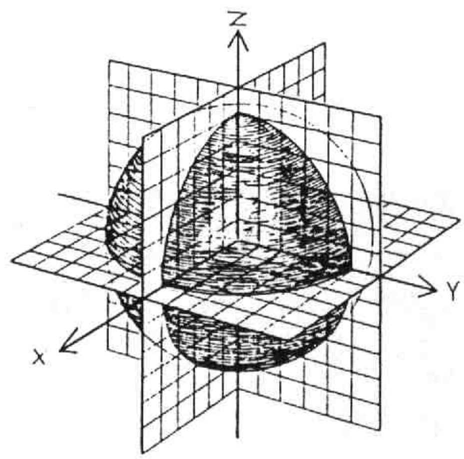


fig. 2-5

≫ 9. β is de bol met vergelijking: $x^2 + y^2 + z^2 = 25$.
α is het vlak met vergelijking: $x + y = 4$.

a. Wat zijn de coördinaten van het middelpunt van de snijcirkel van α en β?

b. Hoe groot is de straal van die snijcirkel?

c. Wat zijn de coördinaten van de punten van de snijcirkel die in het OYZ-vlak liggen?

≫ 10. De bolpiramiden van fig. 2-1 hebben elk vier symmetrievlakken. Teken de verschillende doorsneden van de bolpiramiden met die symmetrievlakken (in ware gedaante).

≫ 11. De bovenste bol van de kleine piramide is van zijn 'voetstuk' gerold ......

a. Hoe is het mogelijk om met één vlak loodrecht op de tafel, de groep van vijf bollen te verdelen is twee delen met gelijke inhoud.

b. Teken de doorsnede van de 'vijfbollengroep' met dat vlak (in ware gedaante).

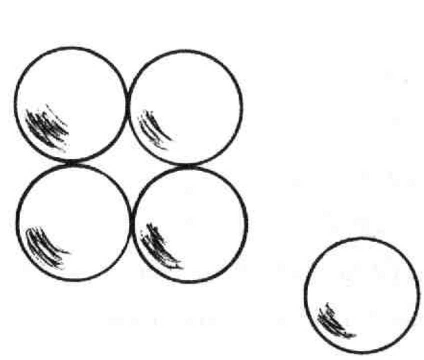
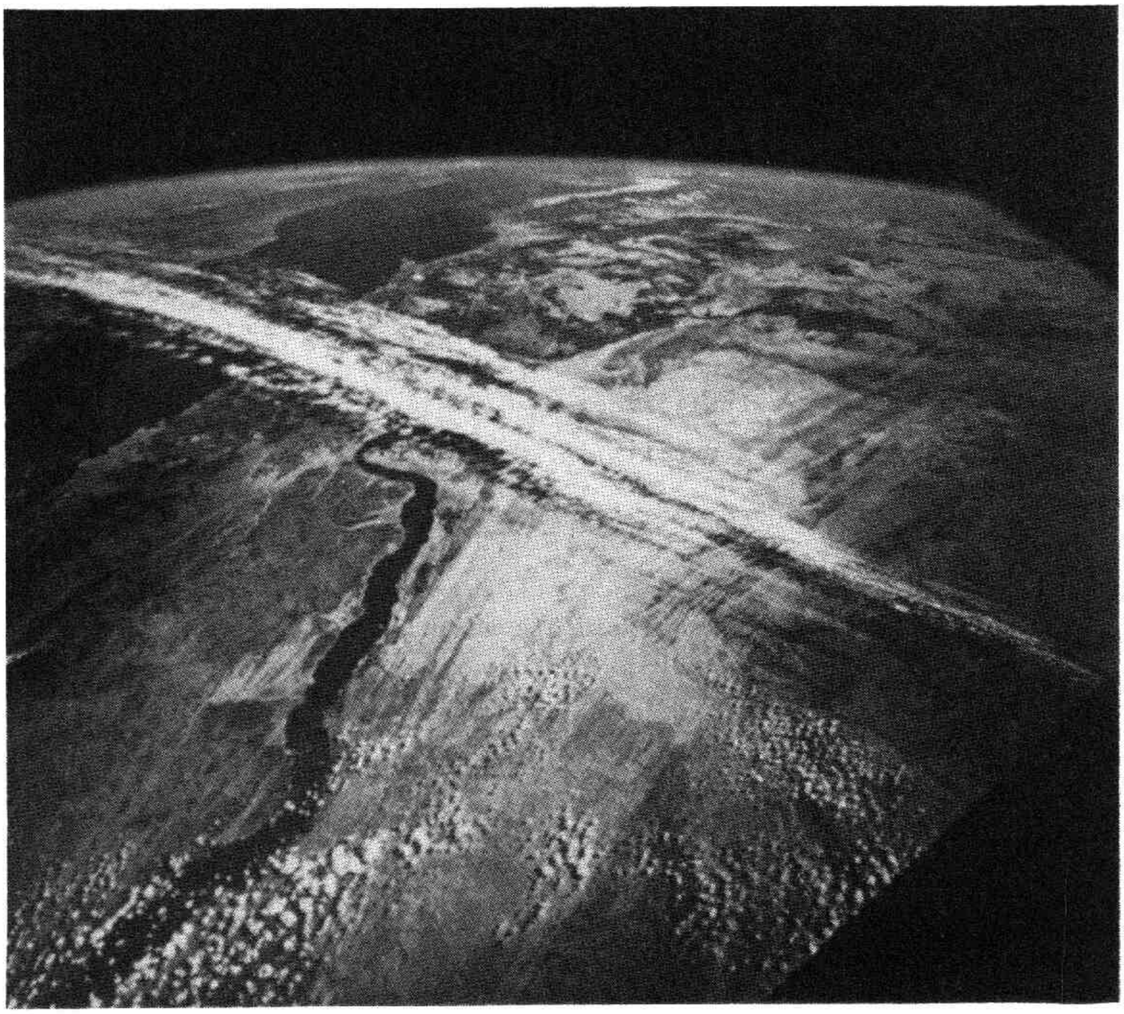


fig. 2-6

NASA-foto (Gemini). Datum opname 15-11-1966.
Schaal (foto midden) ca 1 : 750.000.
Door de foto bestreken gebied: Egypte/Soedan.



Op de foto is de rivier de Nijl duidelijk zichtbaar; rechts op de voorgrond zie je de Lybische woestijn, links boven de Rode Zee.
Opvallend op de foto is de 'Jet-stream' die als een rechte lijn over een lengte van enige honderden kilometers door wolken is gemarkeerd.
(Een Jet-stream is een zeer krachtige storm in de vorm van een brede slang die woedt op een hoogte van ca 12 km en een windkracht kan hebben van 100 tot maximaal 600 km/u).

≫ 12. Een halve bol met straal 5 ligt op het OXY-vlak.

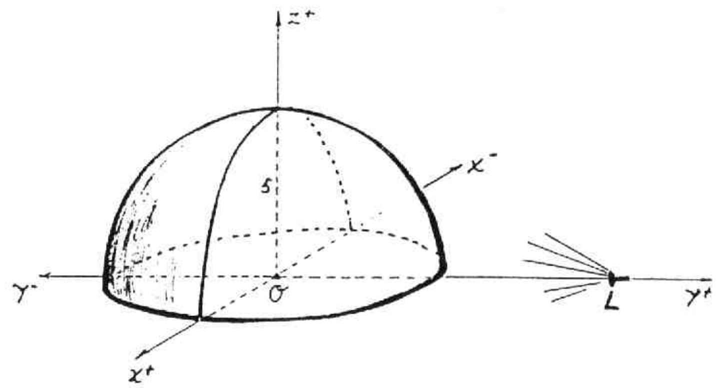


fig. 2-7

a. Teken in een bovenaanzicht de iso-hoogtelijnen van de halve bol met hoogte resp. 4, 3, 2, 1.

b. In het punt (0,10,0) staat een lamp L gericht op de bol. Bereken de hoogte (precies!) van het hoogste punt K op de bol dat nog wordt belicht.

c. Een deel van de halve bol ligt in de schaduw. Teken dat deel in het hoogtekaartje.

≫ 13. a. Hoeveel raaklijnen kun je uit het punt P: (0,0,5) trekken aan de bol β: $x^2 + y^2 + z^2 = 9$?

b. Hoe groot is de afstand van de raakpunten tot P?

c. Wat voor een figuur wordt er beschreven door de raaklijnen uit P?

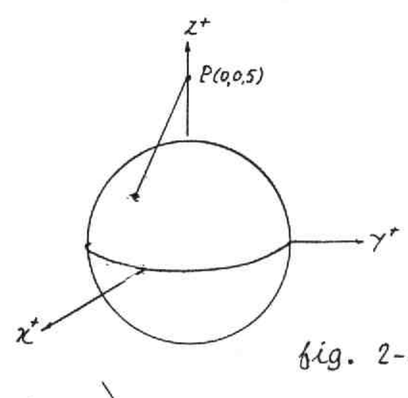


fig. 2-8

≫ 14. Het ruimteschip Gemini bevindt zich op een afstand van 1600 km van de aarde.
De bemanning van het ruimtevaartuig ziet de aarde als een deel van een cirkelvormige schijf.
Hoeveel km is de straal van die schijf?

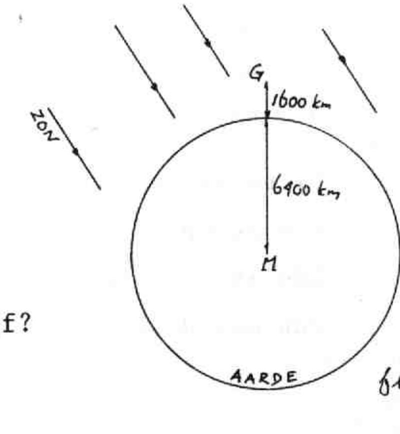
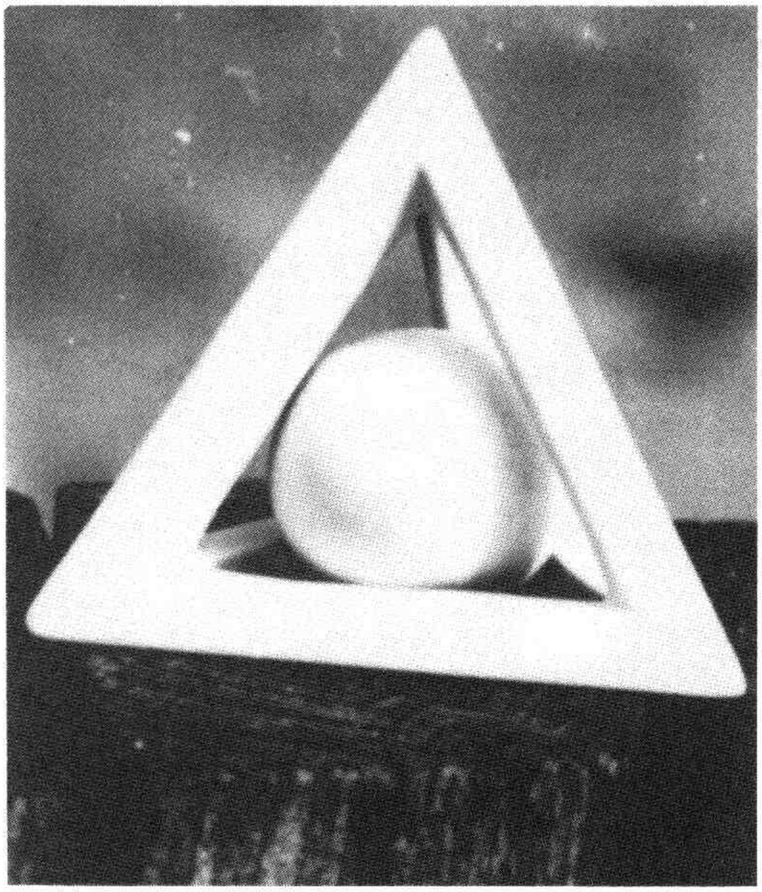


fig. 2-9

Beeldhouwwerk van Bart Zevenhek: 'bol gevangen in een tetraëder'.



≫ 15. In de kubus is een tetraëder geplaatst. Een bol raakt aan de zes ribben van de tetraëder.

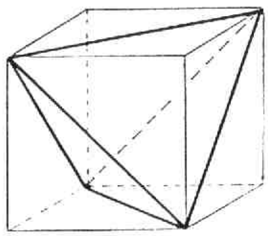


fig. 2-10

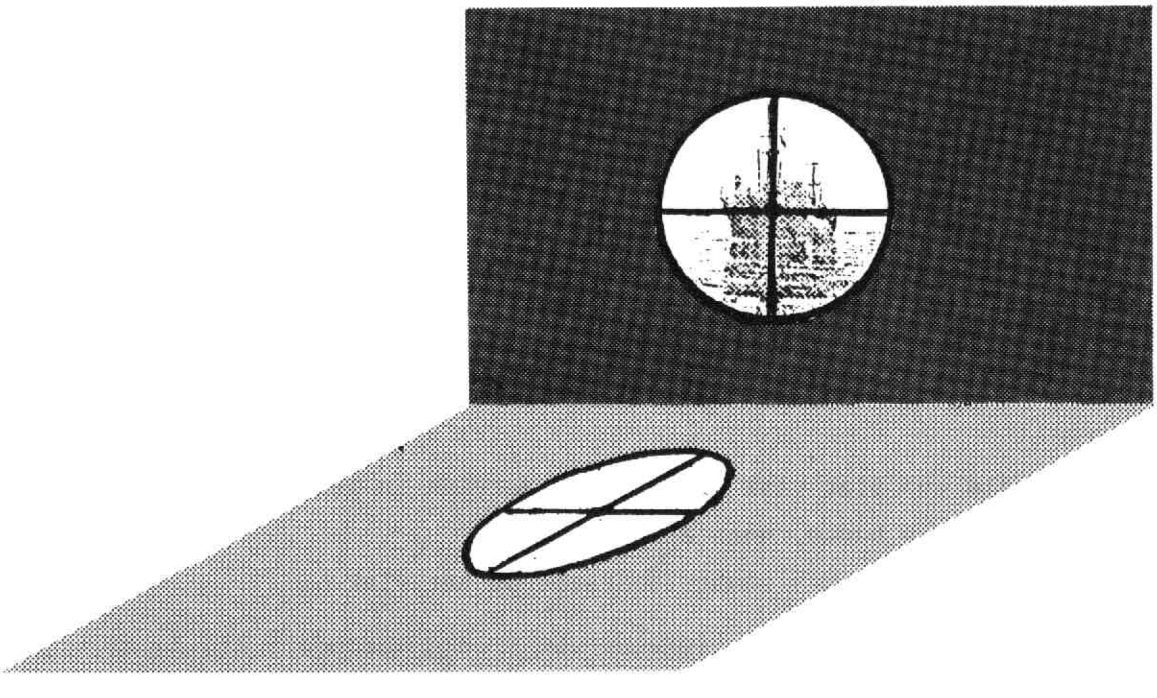
a. Hoe verhouden de ribbe van de tetraeder en de straal van die bol zich?

b. De zes raakpunten zijn de hoekpunten van een octaëder in de bol.
Hoe verhouden zich de ribbe van de octaëder en de straal van die bol?

c. De tetraëder heeft ook een ongeschreven bol (= bol door de vier hoekpunten).
Hoe is de verhouding van de ribbe van de tetraëder en de straal van die bol?

3

CILINDERSNEDEN



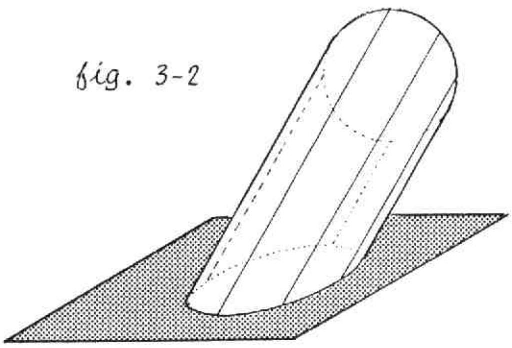
≫ 16. De schaduw van de 'patrijspoort' op de grond is een zgn. ellips. De hoogte van de zon is 30°, dat betekent dat de zonnestralen de aarde treffen onder een hoek van 30°.

a. Hoe verhouden zich de lengten van de beide tralies in het schaduwbeeld?

b. De schaduw van de patrijspoort kan ook een cirkel zijn! Hoe hoog moet de zon dan staan?

De zonnestralen in opgave 16 vormen een 'scheve cilinder'.
De schaduwellips is op te vatten als de snijkromme van die cilinder met een plat vlak (de vloer waarop de schaduw valt).
Omdat dit meetkundig gezien eenvoudiger is, richten we voorlopig onze aandacht op doorsneden van 'rechte' cilinders met vlakken.

fig. 3-2



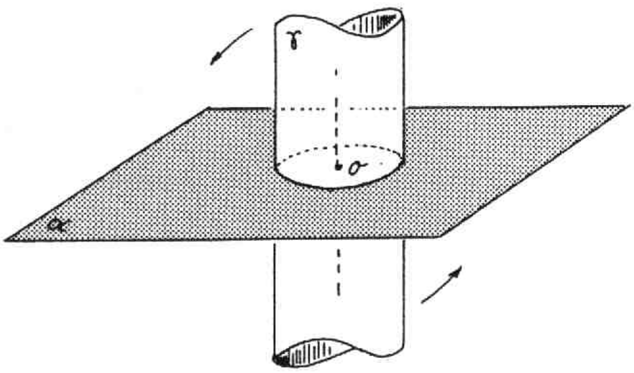
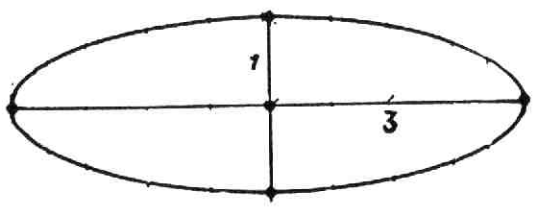


fig. 3-3

≫ 17. Evenals een plat vlak is een cilindervlak in principe onbegrensd (heeft noch bodem, noch deksel).
Het cilindervlak γ staat loodrecht op het vlak α.

a. Beschrijf hoe de snijfiguur van γ en α verandert als de cilinder langzaam gekanteld wordt, waarbij alleen het punt O op zijn plaats blijft.

b. Hoeveel graden moet de cilinder worden gekanteld om een doorsnede van deze vorm te krijgen:



We letten nu niet op de twee 'randgevallen' waarbij α loodrecht op de as staat of waarbij de as in α ligt.

Het vlak α dat nu 'scheef' staat t.o.v. de cilinderas, is als het ware een tussenschot in de cilinderbuis.

Je kunt je nu voorstellen dat twee bollen (die precies in de cilinder passen) van twee kanten door de buis rollen tot zij tegen het tussenschot rusten.

Wiskundig gezegd: je kunt twee bollen β_1 en β_2 aanbrengen die dezelfde straal hebben als de cilinder, de cilinder 'inwendig' raken en bovendien raken aan het vlak α.

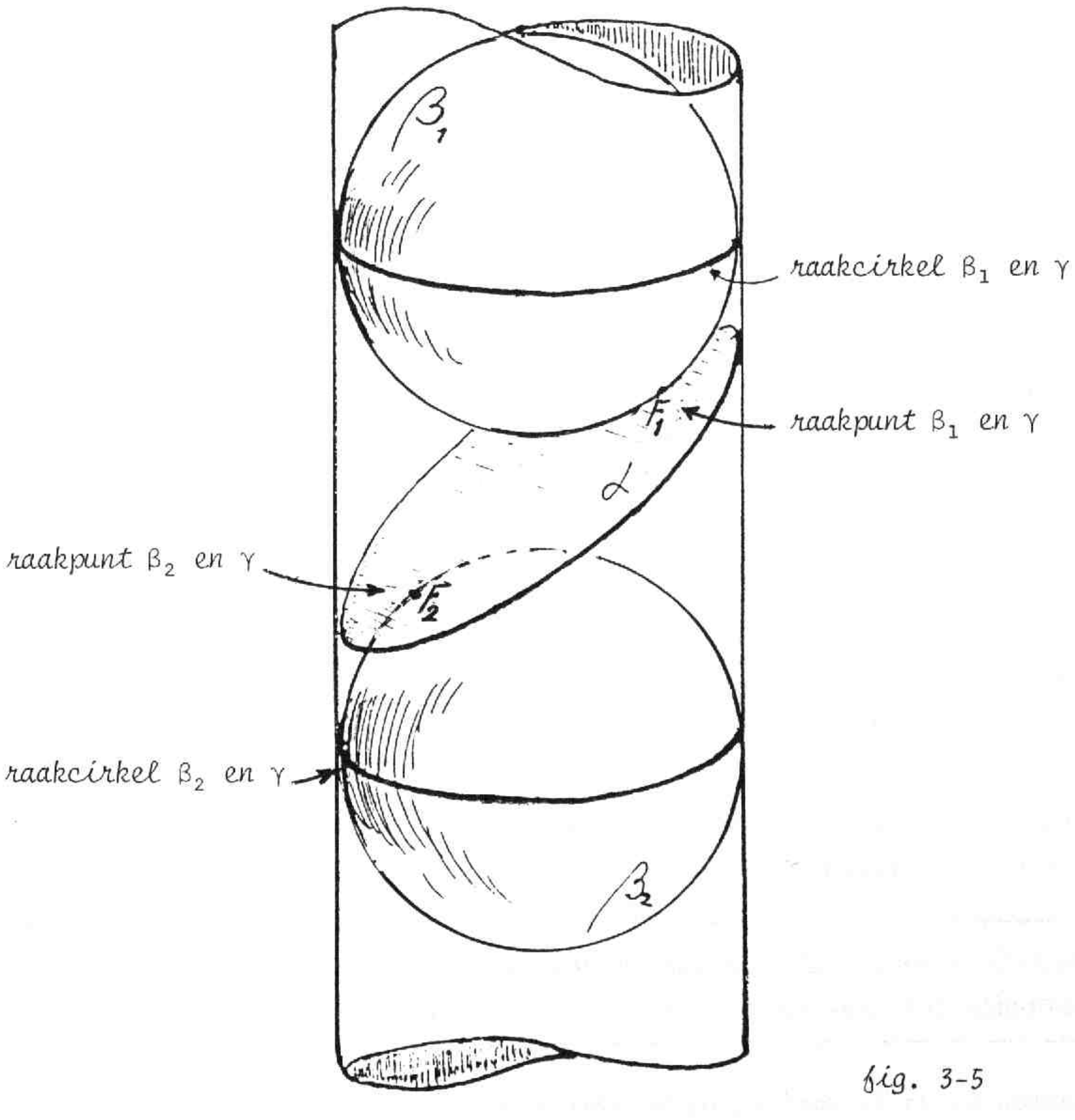


fig. 3-5

In fig. 3-6 zie je een lengtedoorsnede van de cilinder met de beide bollen; de halve afstand tussen de twee raakcirkels noemen we a, de halve afstand tussen de raakpunten F_1 en F_2 heet c.

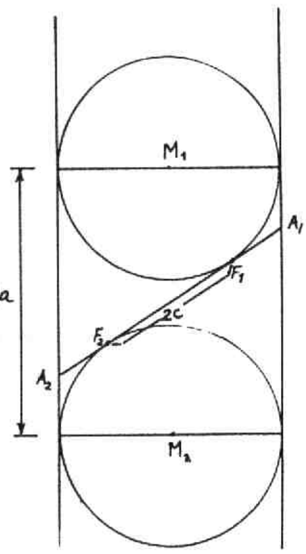


fig. 3-6

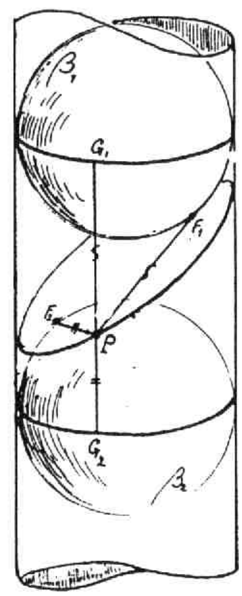


fig. 3-7

P is een willekeurig punt op de snijkromme van α en de cilinder.
In fig. 3-7 zie je twee raaklijnen getekend uit P aan de bol β_1, namelijk de lijn PF_1 en de lijn PG_1 (parallel met de cilinder-as).
Evenzo zie je de raaklijnstukken PF_2 en PG_2 aan β_2.

≫ 18. $PF_1 + PF_2 = 2a$. Verklaar!

Hiermee is de stelling van Dandelin verklaard.

Voor elk punt van de snijkromme van het vlak α en de cilinder γ is de som van de afstanden tot F_1 en F_2 constant, nl. $2a$.

Bovengenoemde eigenschap van de snijkromme wordt vaak gebruikt om een ellips te definiëren.

Een ellips is de verzameling van punten in een plat vlak waarvan de afstanden tot twee gegeven punten F_1 en F_2 een constante som hebben.

De punten F_1 en F_2 worden, om redenen waarin we in hoofdstuk 4 op in zullen gaan, de brandpunten van de ellips genoemd.

≫ 19. Hoe kun je een ellips tekenen met behulp van een touwtje en twee punaises?

≫ 20. Bekijk nog eens de lengtedoorsnede van de cilinder met de twee bollen. (Zie fig. 3-6).
Het lijnstuk A_1A_2 wordt de *lange as* van de ellips genoemd.
Toon aan: $A_1A_2 = 2a$.

≫ 21. Er zijn twee punten (B_1 en B_2) op de ellips die even ver van F_1 en F_2 (afstand a) afliggen.
Het lijnstuk B_1B_2 heet de *korte as* van de ellips.
Hoe verandert de ellips van vorm als we α om de lijn B_1B_2 laten draaien? Wat verandert er dan aan de ligging van de punten F_1 en F_2?

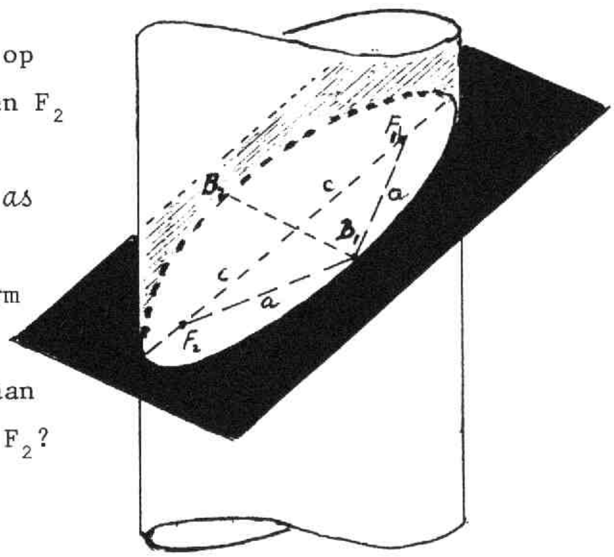


fig. 3-8

Opmerkingen:

(i) De verhouding tussen de brandpuntsafstand (= $2c$) en de lange as (= $2a$) van een ellips is een maat voor de vorm. Die verhouding wordt de *excentriciteit* e van de ellips genoemd.
Er geldt: $e = \frac{c}{a}$ en $0 < e < 1$.
Hoe dichter e bij 0 ligt, hoe meer de ellips op een cirkel lijkt.
Hoe dichter e bij 1 ligt, hoe langwerpiger de ellips is.

(ii) De lengte van de halve korte as van een ellips noemen we b. Omdat de eindpunten van de korte as (B_1 en B_2) op een afstand a van F_1 en F_2 afliggen kan bij een ellips met gegeven assen gemakkelijk de plaats van de brandpunten worden geconstrueerd en/of berekend. (Zie fig. 3-9).

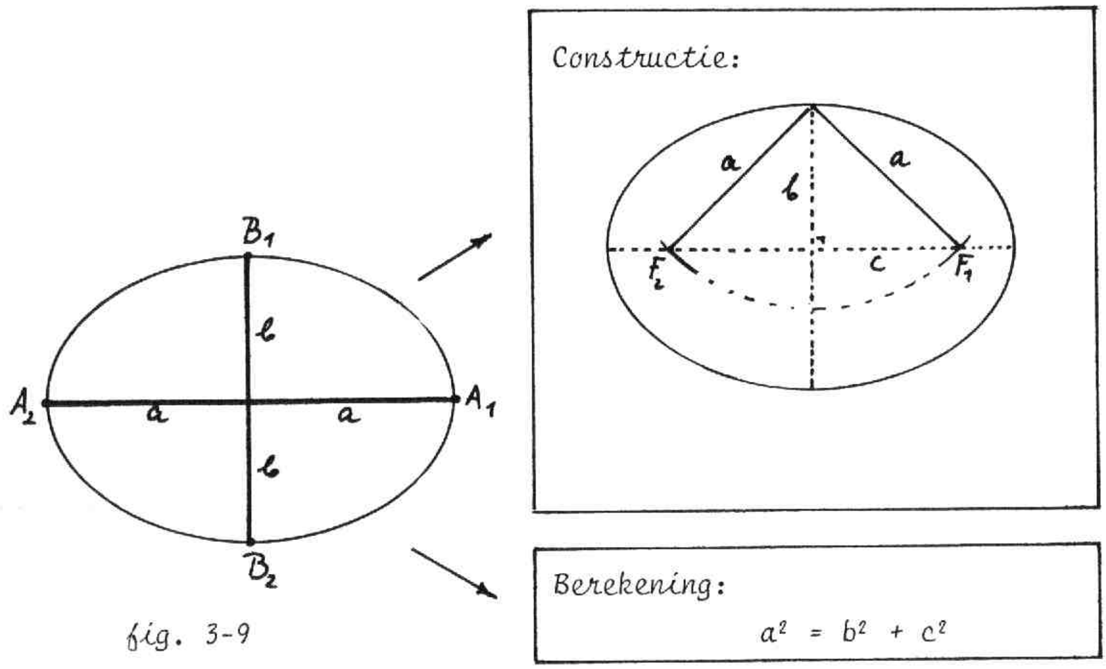


fig. 3-9

(iii) De stelling van Dandelin spreekt zich slechts uit over de snijkromme van een 'rechte' cilinder en een vlak dat scheef staat t.o.v. de cilinders.

Voor een scheve cilinder, zoals de bundel zonnestralen door de patrijspoort, geldt ook dat de doorsnede van een vlak met de cilinder of een cirkel is, of een ellips, of bestaat uit twee evenwijdige lijnen.

In hoofdstuk 4 volgt het bewijs hiervan.

≫ 22. Van een punt P is gegeven dat het op een ellips lijkt met brandpunten F_1 en F_2 en dat $PF_1 = 7$ en $PF_2 = 3$.
Bovendien geldt: $F_1F_2 = 8$.

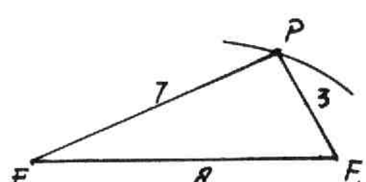


fig. 3-10

a. Hoe lang zijn de assen van de ellips?

b. Hoe groot is de excentriciteit?

≫ 23. Een blikje sap heeft een hoogte van 12 cm en een diameter van 5 cm. Als het blikje half vol is dan kan, al naar gelang de stand, de vloeistofspiegel vier vormen aannemen: cirkel, ellips, 'afgekapte' ellips en rechthoek.
Hoe moet je het blik houden om een (niet afgekapte) ellips met maximale excentriciteit te krijgen? Hoe groot is die excentriciteit?

≫ 24. Als de 'mantel' van een bierblikje wordt uitgerold krijg je een rechthoek.
Hoe denk je dat de figuur eruit ziet die je krijgt door een scheef afgekapte cilinder uit te rollen? Controleer je antwoord met de volgende proef:
Neem een kaars en rol er een velletje papier omheen; snijdt vervolgens kaars en papier scheef door.

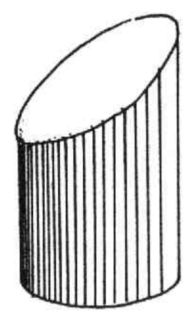


fig. 3-11

≫ 25. De cilinder $x^2 + y^2 = 100$ wordt gesneden met vlak $y = z$.

a. Wat is de excentriciteit van de snijkromme e?

b. Geef een parametervoorstelling van de cilinder. (Parameters t en u).

c. Welke betrekking bestaat er tussen t en u voor de punten op de kromme e?

d. De cilinder wordt opengeknipt langs de lijn door (10,0,0) parallel met de z-as en uitgerold.
Teken de uitslag met een rooster van u-lijnen ($u = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$, ..., 2π) en t-lijnen ($t = 0, \pm 2, \pm 4, \ldots \pm 10$= en teken in dat rooster de uitgerolde ellips e.

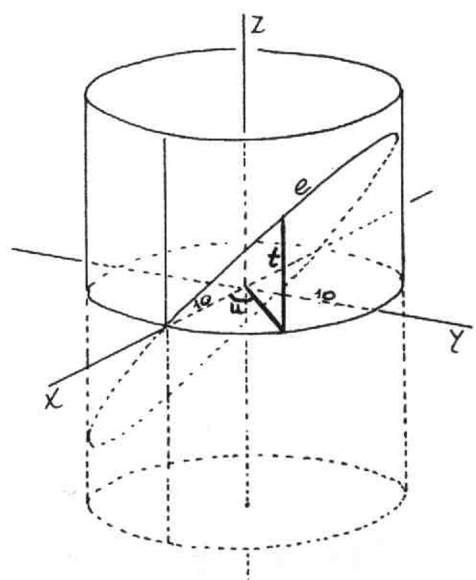


fig. 3-12

≫ 26. Wat heeft dit knippatroon met de beide vorige opgaven te maken?

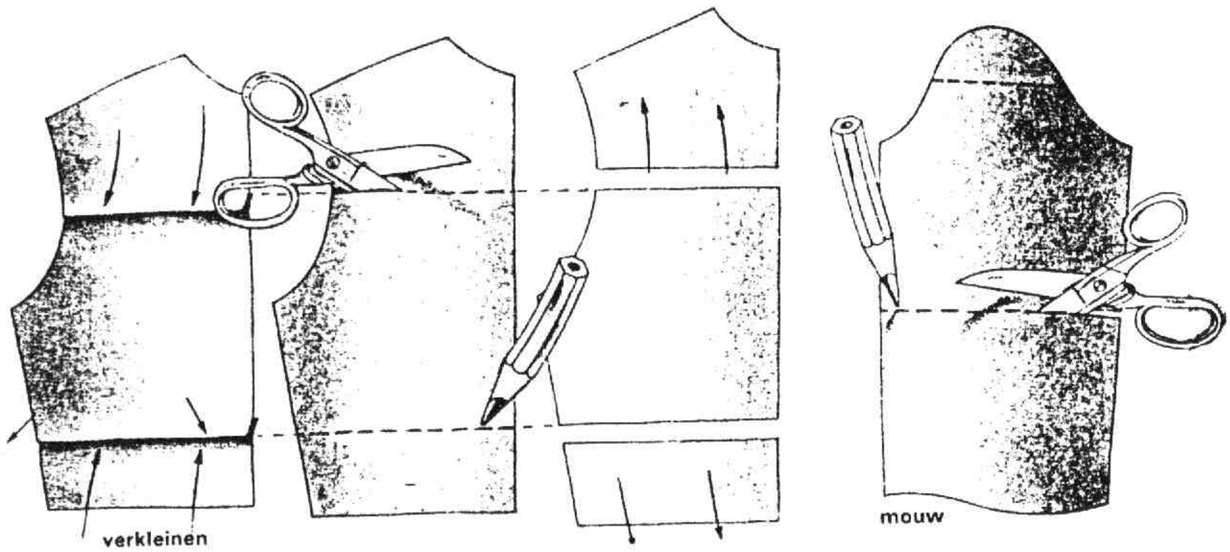


fig. 3-13

≫ 27. Twee uitslagen van cilinderstukken (A en B) met elliptisch bodem- en dekselgat.

Hoe liggen die ellipsen t.o.v. elkaar bij A? En bij B?

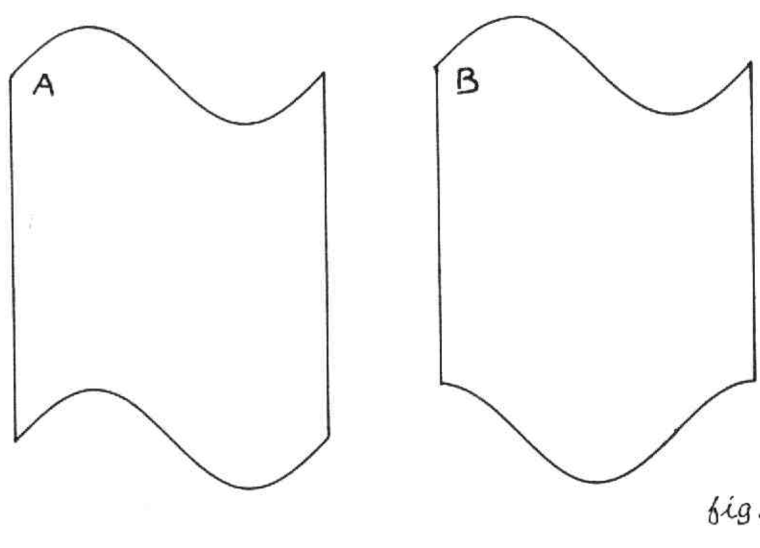


fig. 3-14

4

DE ELLIPS NADER BEKEKEN

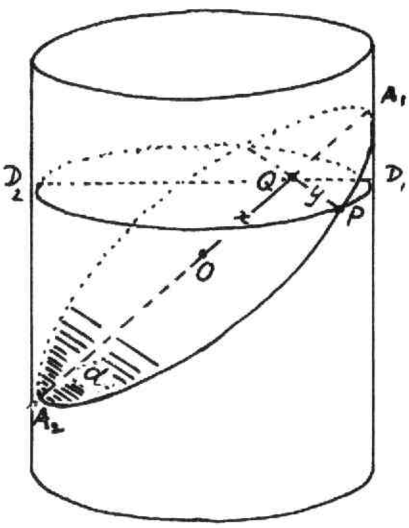


fig. 4-1

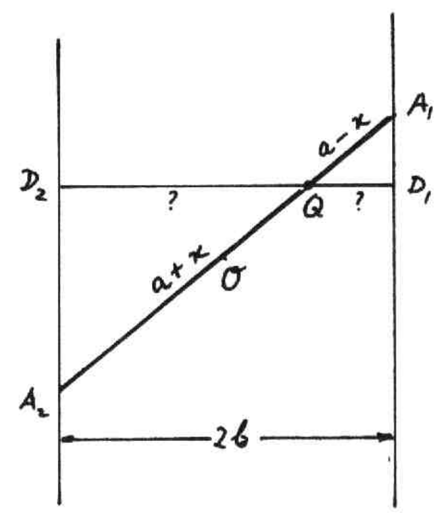


fig. 4-2

≫ 28. Een (rechte) cilinder met straal b wordt gesneden met een vlak α. P is een punt op de snij-ellips waarvan de assen $2a$ en $2b$ zijn. (Zie fig. 4-1).
Q is het voetpunt van de loodlijn uit P op de lijn A_1A_2.
$OQ = x$ en $PQ = y$.
Toon aan: $QD_1 = \frac{b}{a}(a - x)$ en $QD_2 = \frac{b}{a}(a + x)$

≫ 29. De doorsnede van het 'horizontale' vlak door P met de cilinder is de cirkel met middelpunt M en straal b. Druk PQ, QD_1 en QD_2 uit in b en s en bewijs: $PQ^2 = QD_1 \cdot QD_2$.

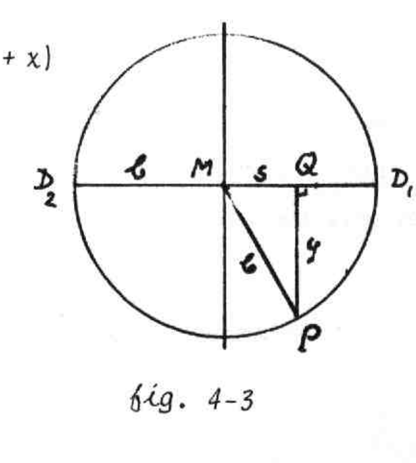


fig. 4-3

Uit de opgaven 28 en 29 volgt:

$$y^2 = \frac{b}{a}(a - x) \cdot \frac{b}{a}(a + x) \quad \text{ofwel}$$

$$\boxed{y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)} \quad \text{.... (1)}$$

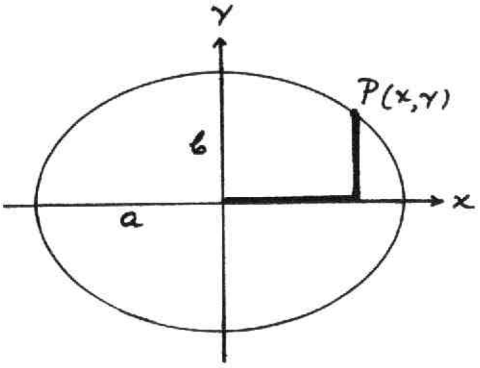


fig. 4-4

Hiermee is de vergelijking gevonden van een ellips waarvan lange as en korte as resp. langs x-as en y-as vallen.

≫ 30. Laat zien dat de ellips-vergelijking (1) kan worden herleid tot:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} \quad \text{.... (2)}$$

Uit de ellipsvergelijking (1) kan worden afgeleid dat de scheve projectie van een cirkel op een vlak (dat niet parallel is met de projectiestralen) een ellips (of eventueel een cirkel) is.
Kijk naar fig. 4-4 (blz. 21).
Door de projectie worden afstanden loodrecht op vlak τ met factor $\frac{b}{a}$ vermenigvuldigd, terwijl afstanden parallel met τ gelijk blijven.

Stel: $OQ = x$ $\quad PQ = y$

$\qquad O'Q' = x'$ $\quad P'Q' = y'$

Dan geldt dus: $x' = x$ en $y' = \frac{b}{a} \cdot y$

Omdat: $y^2 = a^2 - x^2$ volgt: $y'^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x'^2)$
en dat komt overeen met vergelijking (1).
Hieruit volgt dat in het geval $b \neq a$ de projectie van de cirkel inderdaad een ellips is.

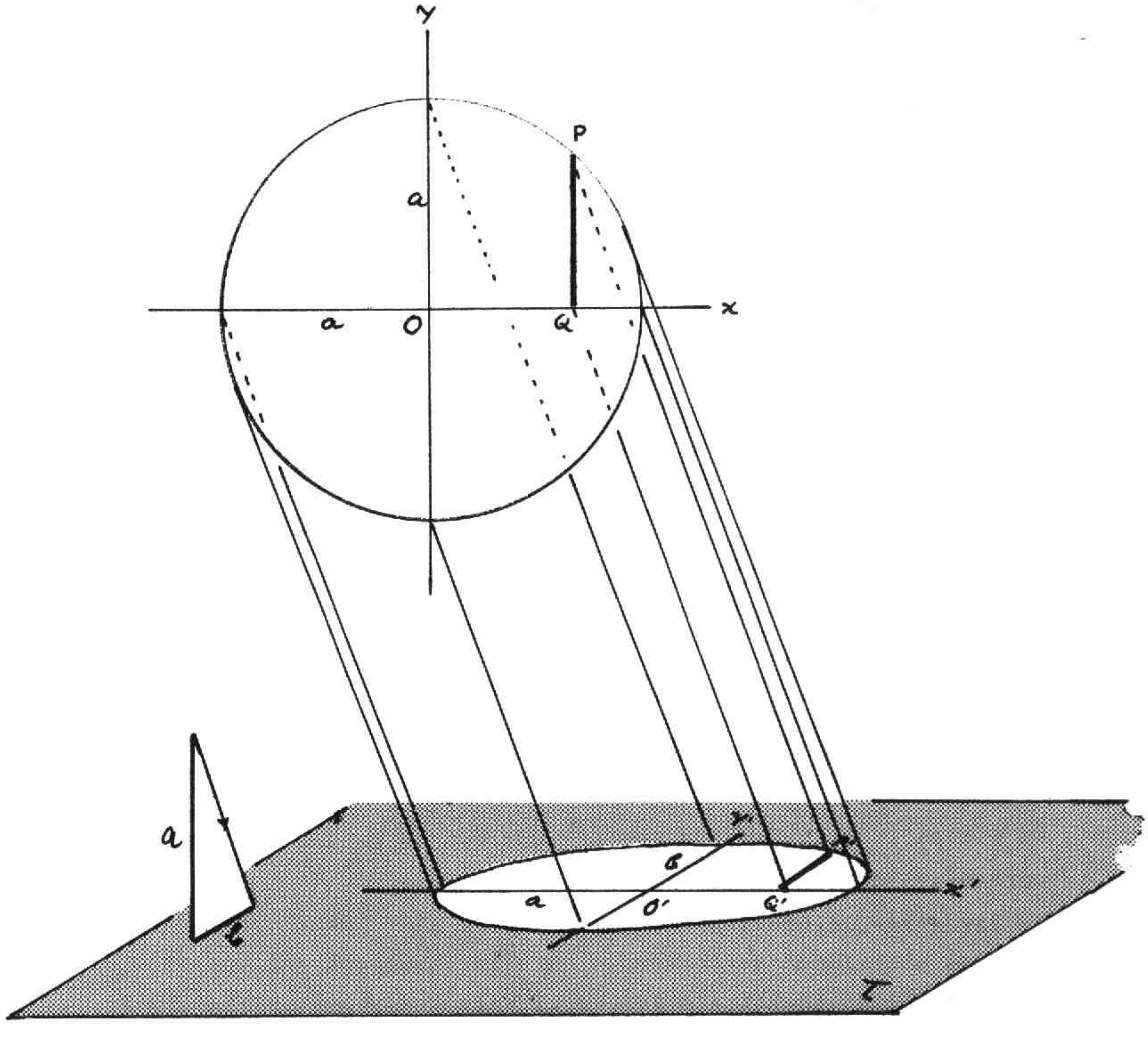


fig. 4-5

$OQ = x \qquad\qquad O'Q' = x$

$PQ = \sqrt{a^2 - x^2} \qquad\qquad P'Q' = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$

≫ 31. De cirkel in fig. 4-5 wordt gedraaid om de x-as, terwijl projectierichting en tafereel niet veranderen.
De excentriciteit van de projectie-ellips verandert.
In welke situatie is de projectie van de cirkel geen ellips?

≫ 32. Nogmaals de schaduw van de patrijspoort (blz. 11).

a. Bereken de excentriciteit van de schaduw-ellips bij een zonnehoogte van 30°.

b. Doe dit ook voor een zonnehoogte van 60°.

Twee projecties van een om een middellijn draaiende cirkel in één assenstelsel:

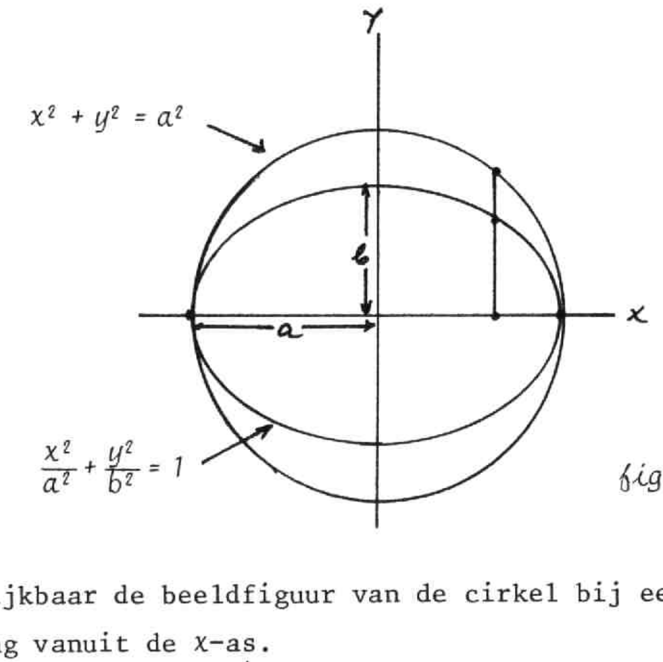


fig. 4-6

De ellips is blijkbaar de beeldfiguur van de cirkel bij een verticale vermenigvuldiging vanuit de x-as.
De vermenigvuldigingsfactor is $\frac{b}{a}$.

≫ 33. a. Teken in OXY-stelsel de cirkels $x^2 + y^2 = 4$ en $x^2 + y^2 = 25$.

b. Teken op de grote cirkel de punten die de cirkel in 12 even grote bogen verdelen, te beginnen bij het punt (5,0).

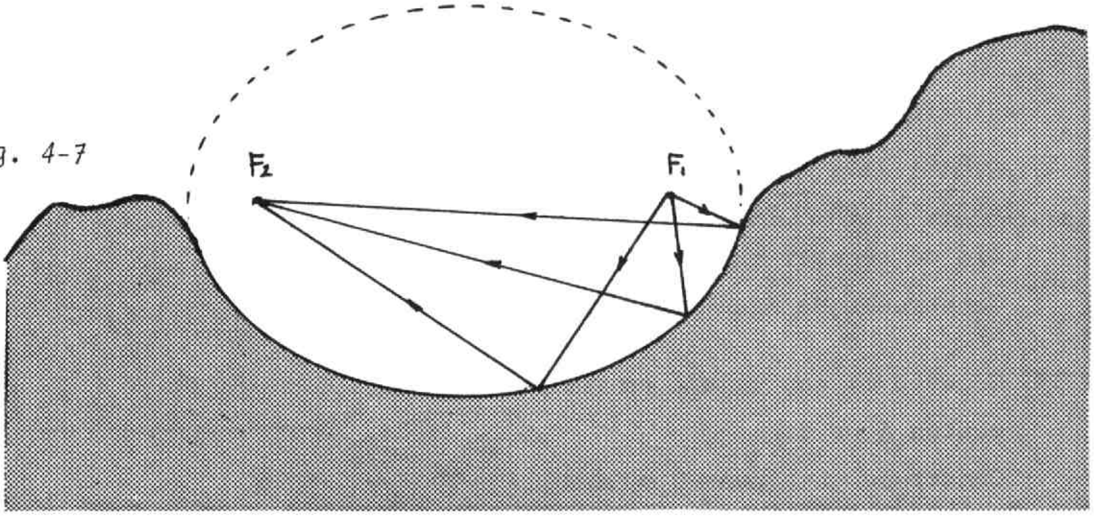
c. Vermenigvuldig die 12 punten vanuit de x-as in verticale richting met factor $\frac{2}{5}$. Dit gaat heel handig door zo'n punt met O te verbinden er vanuit het snijpunt van die straal met de kleine cirkel een horizontaal lijntje te tekenen.

d. Schets de ellips door de 12 beeldpunten. Welke vergelijking heeft die ellips.

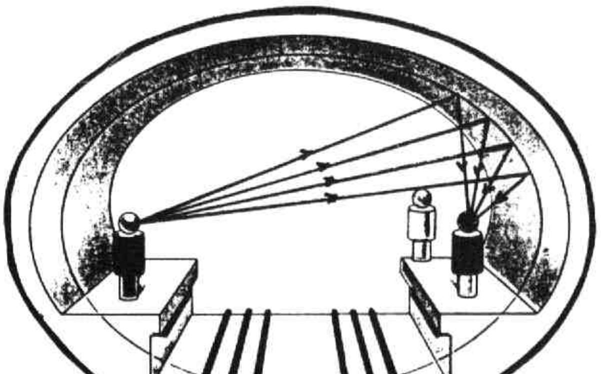
DE RAAKLIJNEIGENSCHAP VAN DE ELLIPS

Sommige duinvalleien worden 'fluisterkommen' genoemd. Is een verticale doorsnee van zo'n vallei bij benadering ellipsvormig, dan is een zwak geluidsignaal voortgebracht vanuit het ene brandpunt (F_1) goed hoorbaar in het tweede brandpunt (F_2). Zelfs als iemand, met zijn rug naar F_2 gekeerd, fluisterend spreekt, kunnen zijn woorden in F_1 verrassend duidelijk worden verstaan.

fig. 4-7



Een dergelijk verschijnsel kent de Parijse metro waarvan sommige tunnels vrijwel elliptisch een doorsnede zijn en mensen op verschillende perrons zonder stemverheffing een goed gesprek kunnen voeren, mits zij op de goede plaatsen (de brandpunten) staan.



Deze merkwaardige eigenschap van de ellips gaan we meetkundig verklaren. De volgende vraagstukken leiden naar dat doel.

≫ 34. P ligt in het voorvlak en Q is het rechter-zijvlak van de kubus met ribbe 8.
Bereken de lengte van de kortste weg van P naar Q over de kubus.

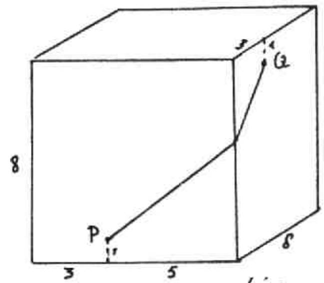


fig. 4-8

≫ 35. Op een vierkant biljart (zijde 8) liggen ballen in P en Q.
Een biljartbal wordt (zonder effect) van P naar Q gespeeld via de rechter band.
Construeer de baan van de bal.

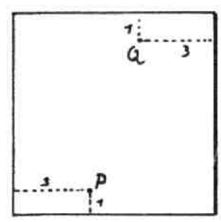


fig. 4-9

≫ 36. Gegeven is een lijn ℓ en twee punten A en B.
Construeer het punt C op ℓ zó dat AC en BC gelijke hoeken met ℓ maken.

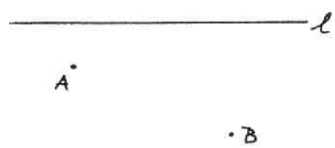


fig. 4-10

≫ 37. Door een punt P van de ellips met lange as $2a$ wordt de bissectrice van $\angle F_1PF_2$ getekend.
De lijn ℓ staat loodrecht op die bissectrice en maakt dus gelijke hoeken met PF_1 en PF_2.
Toon aan:
als Q een punt van ℓ is dat niet samenvalt met P, dan geldt:
$QF_1 + QF_2 > 2a$.

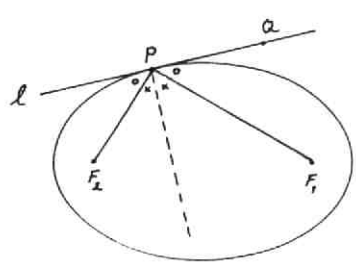


fig. 4-11

GEVOLGEN/OPMERKINGEN

1. Als P een punt van een ellips is met brandpunten F_1 en F_2, dan is de loodlijn ℓ van P op de bissectrice van $\angle F_1PF_2$ een *raaklijn* aan de ellips.

   Immers: ℓ heeft slechts één punt P met de ellips gemeenschappelijk.
   Alle andere punten van ℓ liggen *buiten* de ellips.
   (Zie opgave 37).

2. De bissectrice van $\angle F_1PF_2$, die loodrecht op de raaklijn in P staat, wordt om die reden de *normaal* van de ellips in P genoemd.

3. Alle stralen vanuit F_1 die via de ellips worden teruggekaatst volgen het principe 'hoek van inval' = 'hoek van terugkaatsing'; worden teruggekaatst door F_2.

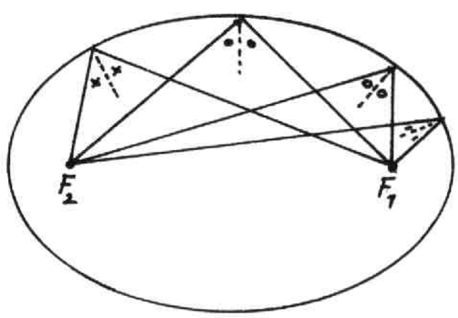
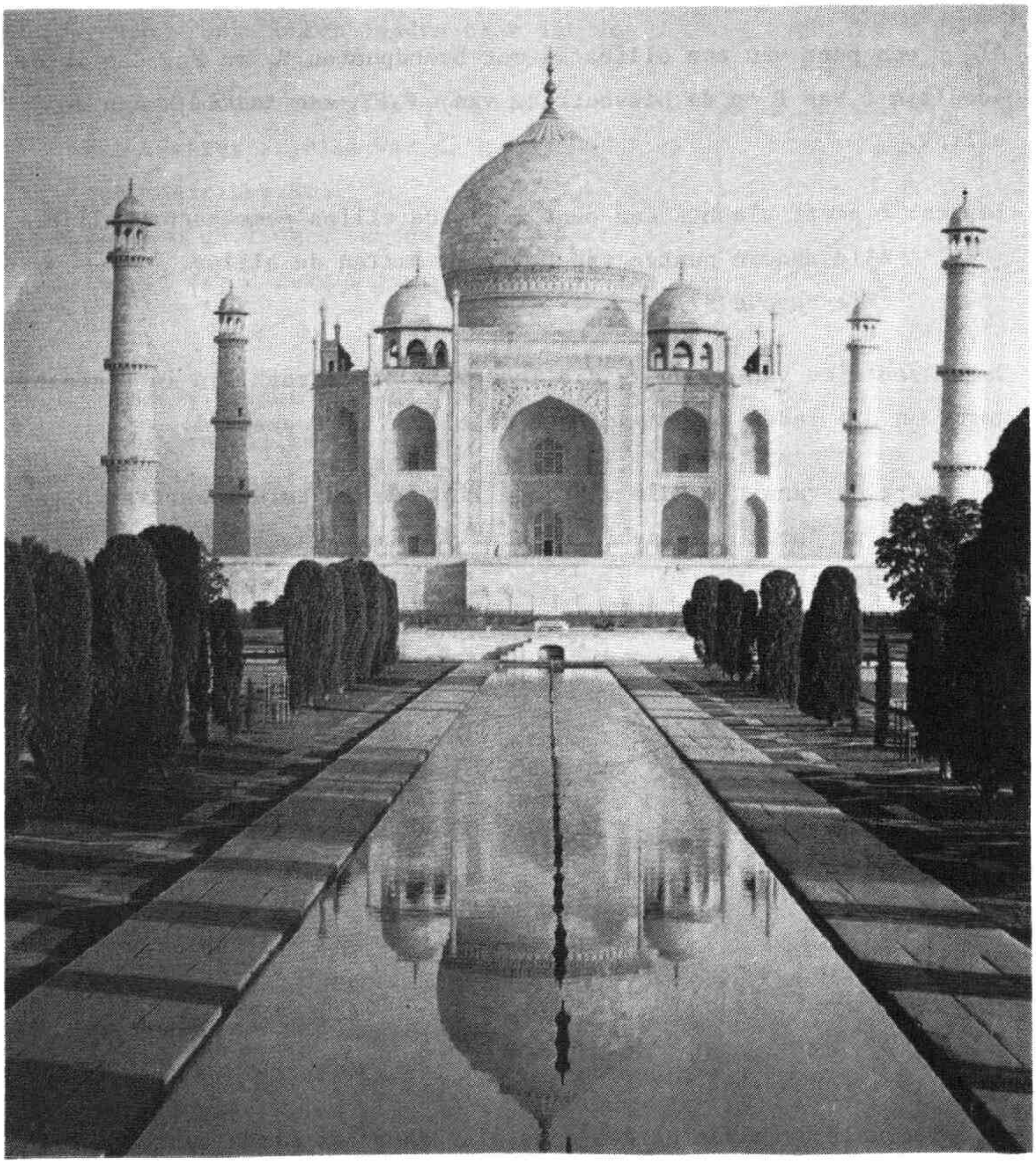


fig. 4-12

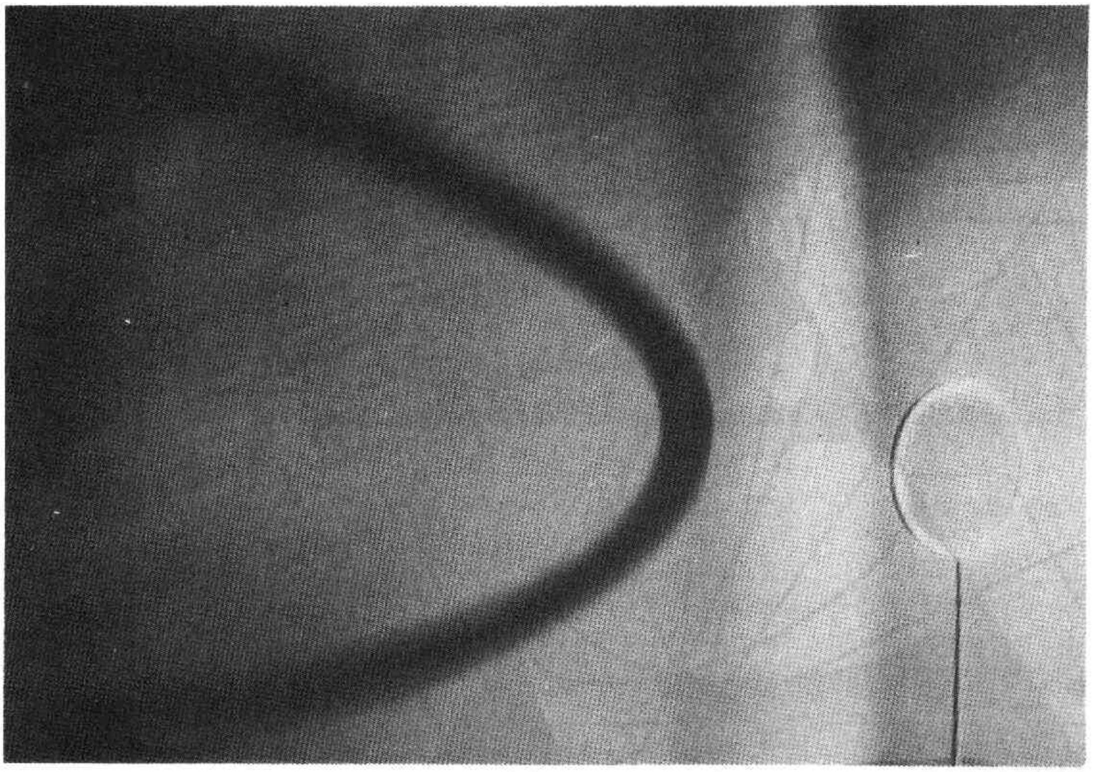
≫ 38. De normalen van een cirkel gaan alle door het middelpunt van die cirkel.
Hoe zit dat bij een ellips?



In de Tadj Mahal in India is een zgn. fluisterzaal te vinden met een vloer in de vorm van een ellips.
Bruidsparen die de Tadj Mahal in het verleden bezochten werden in de fluisterzaal verdeeld over de beide brandpunten. De bruidegom beloofde op zachte fluistertoon zijn bruid eeuwig trouw. Zijn woorden werden alleen door de bruid (op een afstand van meer dan 15 meter) gehoord.

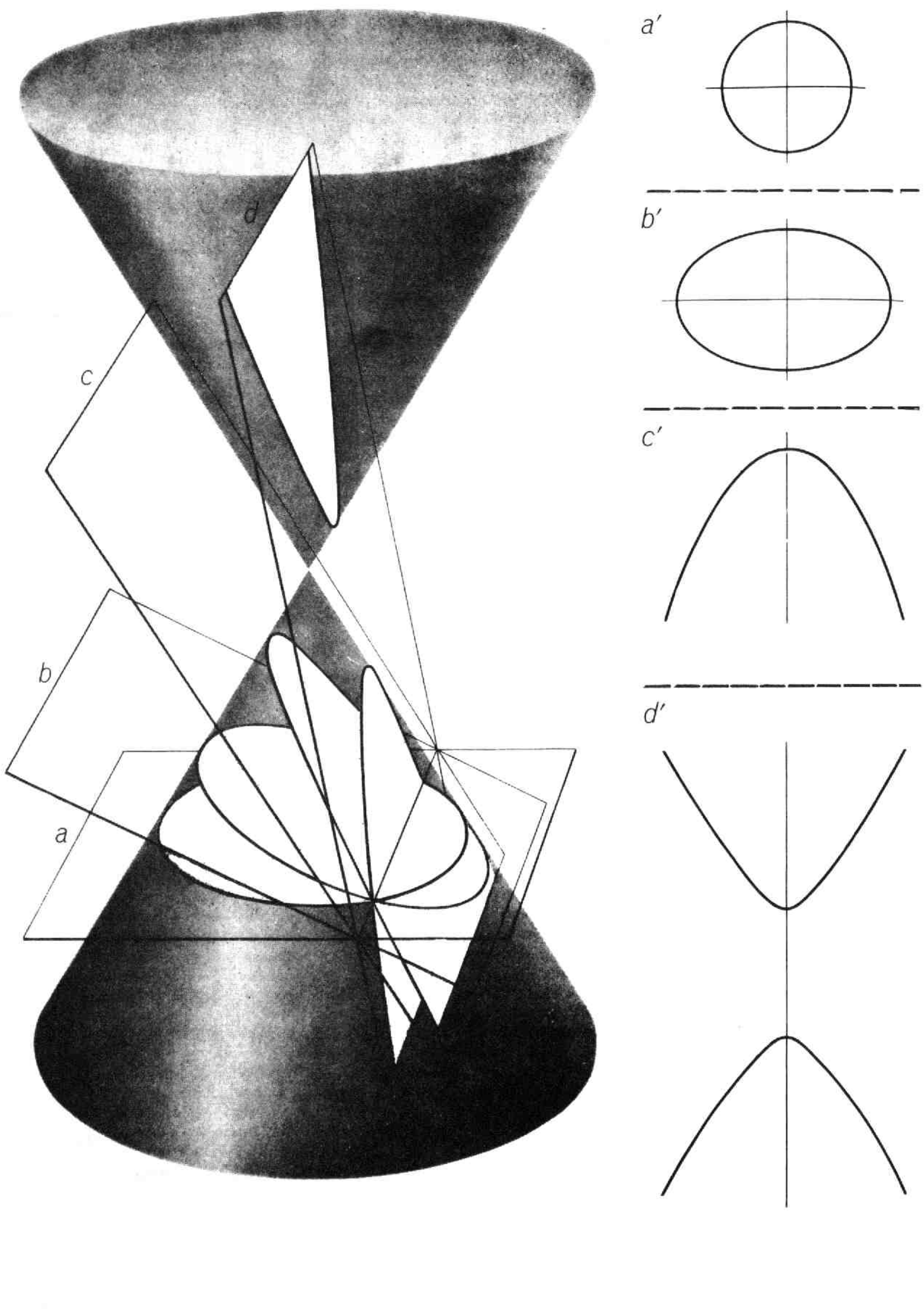
5

KEGELSNEDEN



De zonneschaduw van een ring is meestal een ellips, een enkele keer een cirkel of een recht lijnstuk.

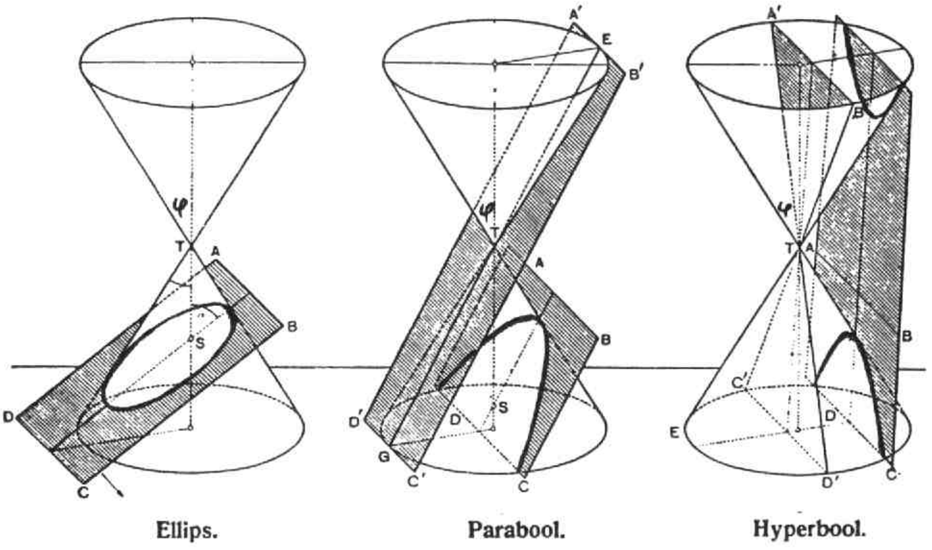
Voor een schaduw van een ring veroorzaakt door een lamp, zijn er meer mogelijkheden. Dat heeft te maken met het feit dat de doorsnede van een kegel met een plat vlak in meer verschillende vormen voorkomt dan de doorsnede van een cilinder en een vlak.


d
c
b
a
a′
b′
c′
d′

De doorsnede van een (rechte) kegel met een plat vlak kan ook een *parabool* of *hyperbool* zijn.

De vorm van de *kegelsnede* hangt af van de stand van het snijvlak t.o.v. de as van de kegel.

fig. 5-1



Veronderstel dat de halve tophoek van de kegel gelijk is aan ϕ.

≫ 39. Neem nu een *vlak door de top* van de kegel.

Hoe ziet de doorsnede eruit als de hoek van dat vlak met de as:

a. kleiner is dan ϕ;

b. gelijk is aan ϕ;

c. groter is dan ϕ.

≫ 40. Neem nu een vlak dat niet door de top gaat. Raadpleeg bovenstaande figuur.

Wat weet je van de vorm van de kegelsnede als de hoek van dat vlak met de as:

a. recht is;

b. scherp is, maar groter dan ϕ;

c. gelijk is aan ϕ;

d. kleiner is dan ϕ.

Opmerking: Alleen in geval 39b is er sprake van een *raakvlak* aan de kegel.

≫ 41. Van een kegel κ is de tangens van de halve tophoek $\frac{3}{4}$. De hoogte van de kegel is 8. Een vlak α is parallel met het raakvlak door TS en snijdt vlak TRS volgens AM.

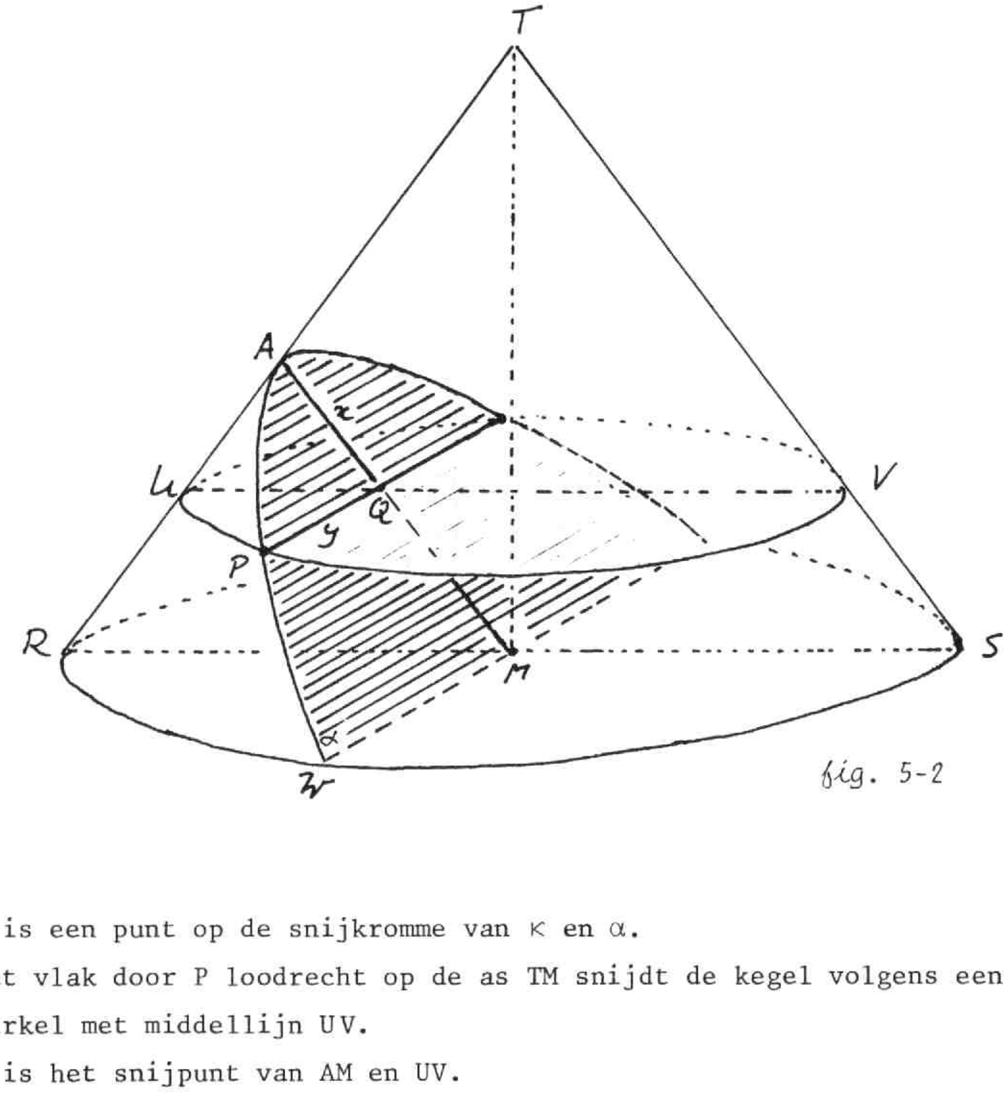


fig. 5-2

P is een punt op de snijkromme van κ en α.

Het vlak door P loodrecht op de as TM snijdt de kegel volgens een cirkel met middellijn UV.

Q is het snijpunt van AM en UV.

Stel: PQ = y, AQ = x.

a. Bereken AM.

b. Toon aan: UQ = $\frac{6}{5}x$.

c. Omdat PQ // WM, geldt $PQ \perp UV$ en dus $PQ^2 = UQ \cdot QV$.
(Zie ook opgave 29).
Leidt hieruit een betrekking af tussen y en x.

d. Wat voor een kromme is de doorsnede van κ en α?

≫ 42. Vlakken die parallel zijn met twee beschrijvende lijnen van de kegel snijden de kegel volgens een hyperbool.
In de figuur zie je de doorsneden van K: $x^2 - y^2 + z^2 = 0$ met de vlakken $z = 1$, $z = 2$, $z = 3$, ...

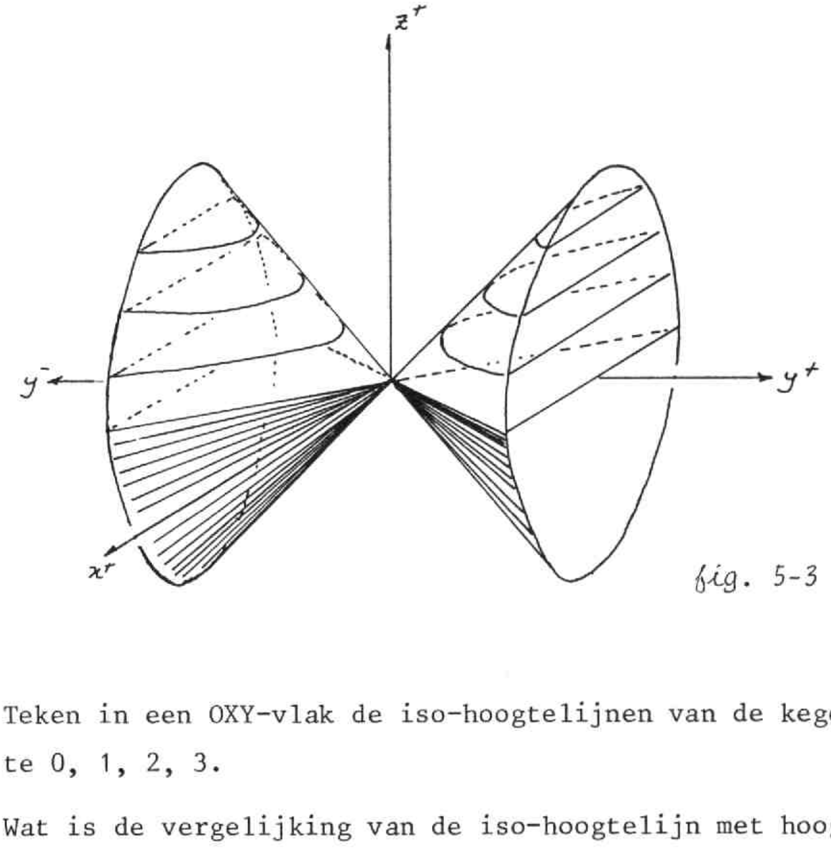
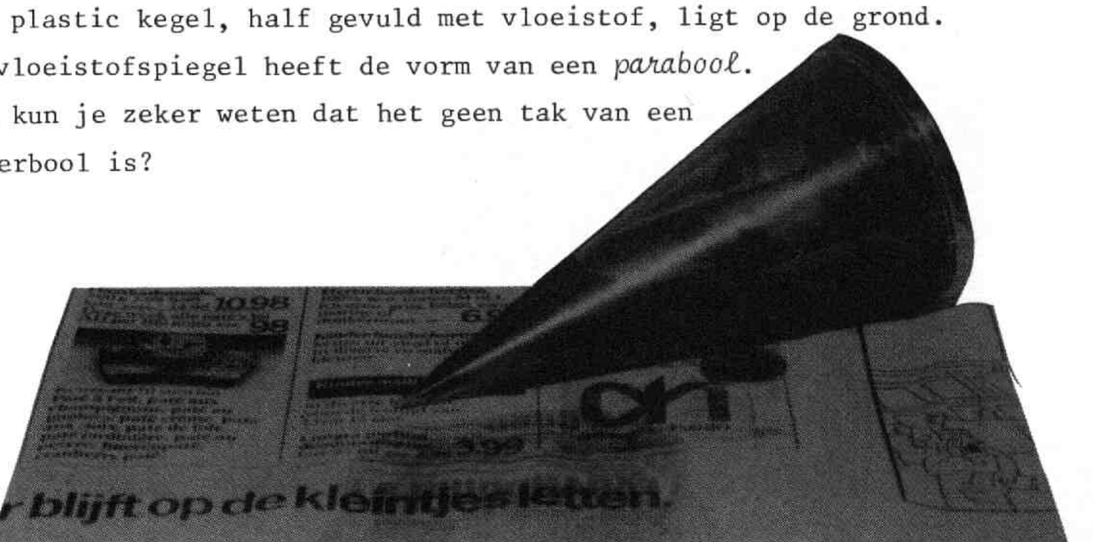


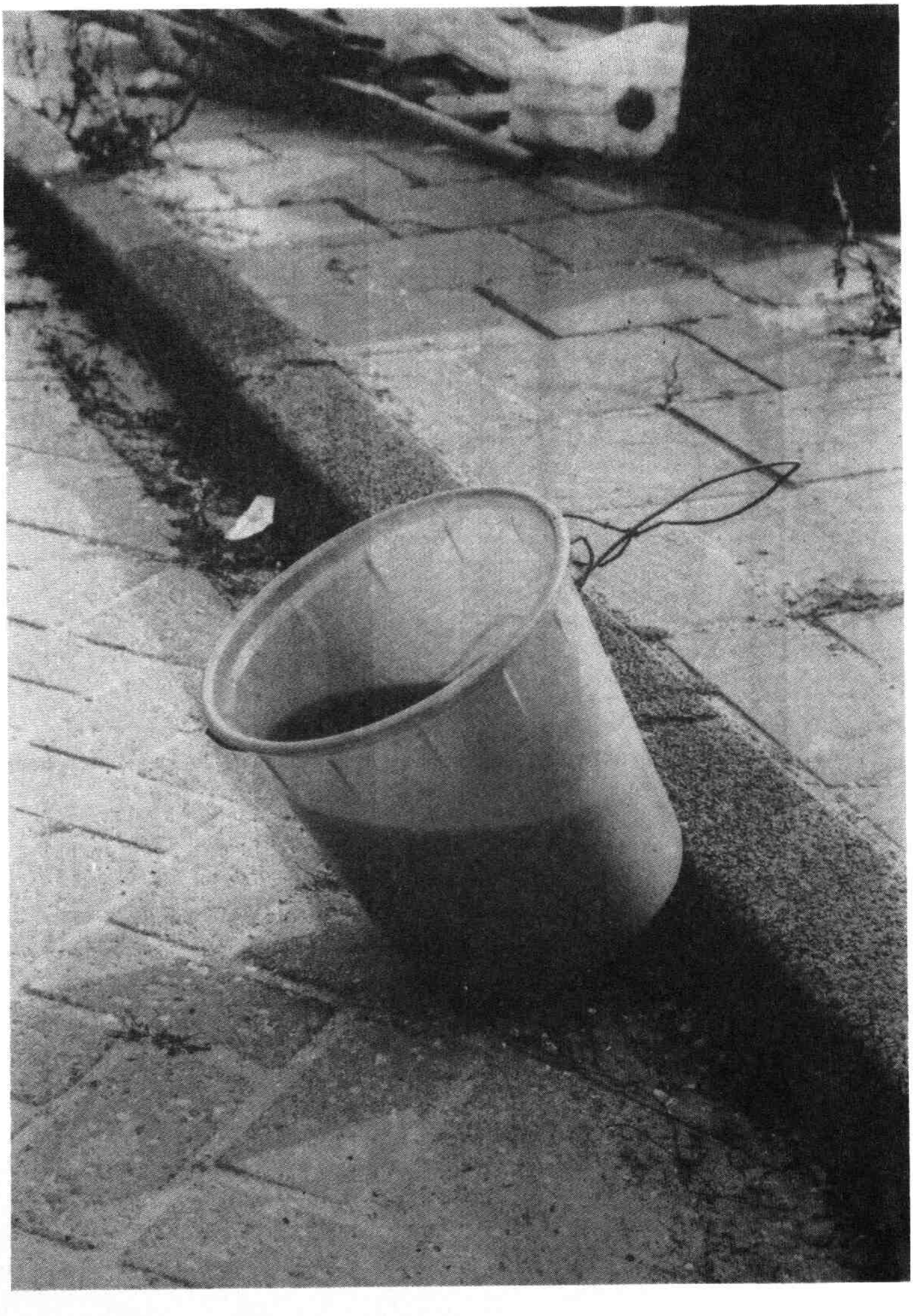
fig. 5-3

a. Teken in een OXY-vlak de iso-hoogtelijnen van de kegel met hoogte 0, 1, 2, 3.

b. Wat is de vergelijking van de iso-hoogtelijn met hoogtegetal 2.

≫ 43. Een plastic kegel, half gevuld met vloeistof, ligt op de grond.
De vloeistofspiegel heeft de vorm van een *parabool*.
Hoe kun je zeker weten dat het geen tak van een hyperbool is?





6 BEREKENING VAN INHOUD

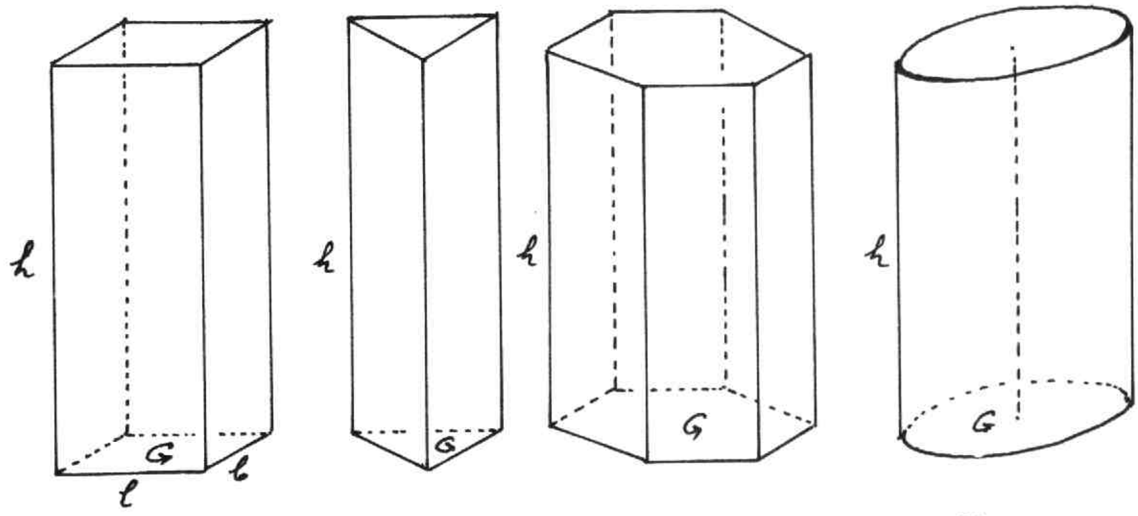


fig. 6-1

De inhoud van een balk is, zoals bekend:

hoogte × lengte × breedte

Deze formule is niet van toepassing op prisma's waarvan grond- en bovenvlak geen richthoeken zijn, laat staan op cilinders.

Daarom hanteren we liever een andere inhoudsformule voor de balk:

Inhoud = hoogte × oppervlakte grondvlak,

of kortweg:

$I = h \cdot G$

Die formule is wèl op andere prisma's en cilinders toe te passen.

Dat de formule $I = h \cdot G$ geldig is voor rechte prisma's en voor cilinders, ja zelfs voor grillige 'cilinderachtigen', zoals:

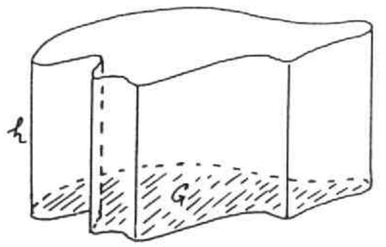


fig. 6-2

kan gemakkelijk worden aangetoond.

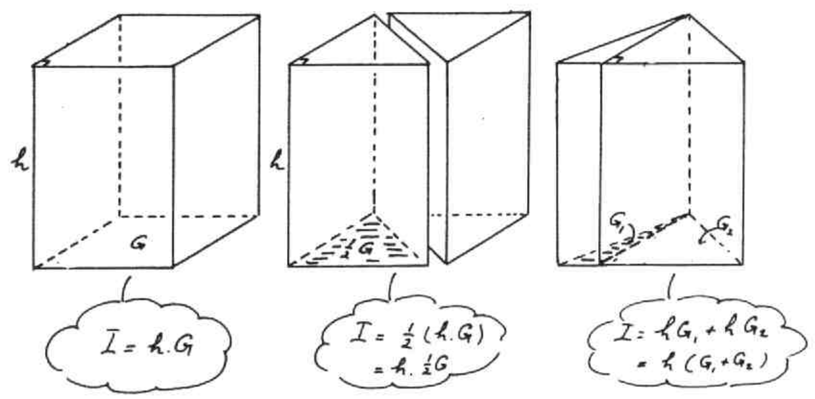
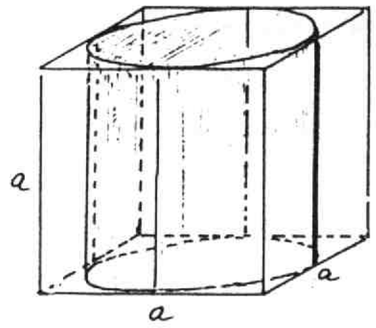


fig. 6-3

De formule $I = h \cdot G$ klopt dus voor alle driezijdige prisma's en daarmee voor alle n-zijdige prisma's ($n = 4,5,6,..$) want zo'n prisma kan altijd in driezijdige prisma's worden opgedeeld!
Hebben we te maken met een cilinderachtige waarvan grond- en bovenvlak door kromme lijnen worden begrensd, dan kan de oppervlakte van het grondvlak willekeurig dicht door de oppervlakte van veelhoeken worden benaderd en daarmee wordt de inhoud van het lichaam willekeurig dicht benaderd door de inhoud van een veelzijdig prisma. Op grond daarvan kun je inzien dat de inhoud van de cilinder ook gelijk is aan $h \cdot G$.

≫ 44. In een kubus met ribbe a is een cilinder beschreven. Hoe verhouden de inhouden van cilinder en kubus zich?



≫ 45. Bereken de inhoud van het scheef afgesneden stuk cilinder.

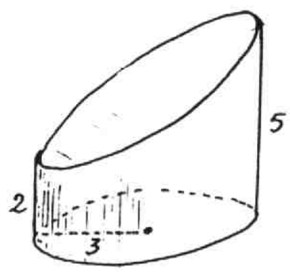


fig. 6-4

≫ 46. Het principe 'Inhoud = hoogte × oppervlakte grondvlak' is ook van toepassing op scheve prisma's en scheve cilinders.
Toon aan dat de inhoud van PQRS • EFGH gelijk is aan $h \cdot G$.

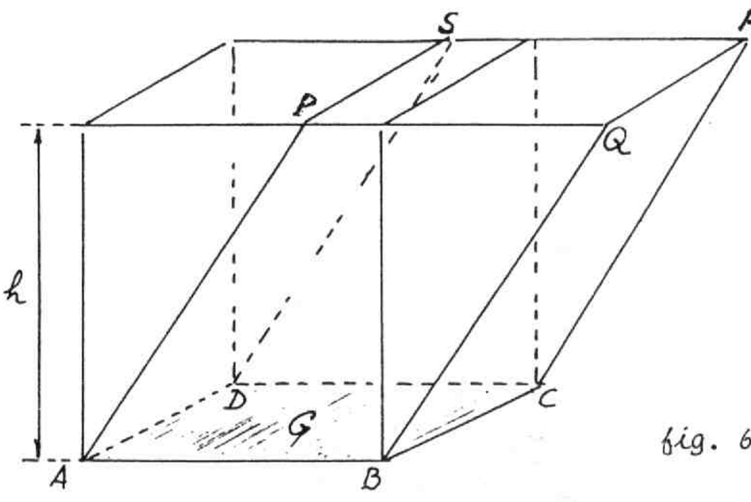


fig. 6-5

Bij het berekenen van inhouden kan met vrucht gebruik worden gemaakt van de integraalrekening.

Neem een lichaam waarvan grond- en bovenvlak in evenwijdige vlakken α en β liggen.

De afstand tussen α en β is de hoogte van het lichaam.

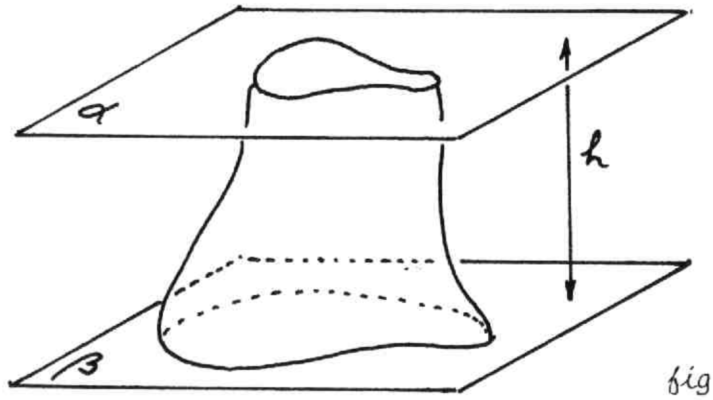


fig. 6-6

De oppervlakte van de doorsnede van een willekeurig vlak γ parallel met α op de 'hoogte' x (gemeten vanaf α) is een functie van x.

Die oppervlakte noemen we $O(x)$.

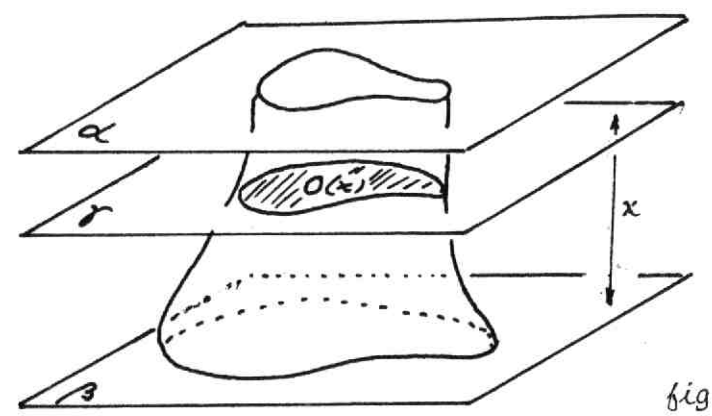


fig. 6-7

Er geldt dan:

$O(0)$ = oppervlakte grondvlak;

$O(h)$ = oppervlakte bovenvlak.

De inhoud van het 'lichaamsdeel' dat tussen β en γ ligt is ook een functie van x: $I(x)$.
We laten nu zien:

$$\boxed{O \text{ is de afgeleide functie van } I.}$$

Een kleine toename van x met Δx leidt tot de toename van de inhoud:

$$I(x+\Delta x) - I(x).$$

Dat is de inhoud van een 'plakje' met hoogte Δx en grondoppervlakte $O(x)$.
Voor kleine waarden van Δx is $I(x+\Delta x) - I(x)$ bij benadering gelijk aan $\Delta x \cdot O(x)$.
Sterker nog:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{I(x+\Delta x) - I(x)}{\Delta x} = O(x)$$

ofwel $\quad I'(x) = O(x).$

Als $O(x)$ in formule bekend is, kan de inhoud van het lichaam gevonden worden door het berekenen van de integraal:

$$I(h) = \int_0^h O(x)\,dx$$

Dit principe passen we nu toe op een piramide:

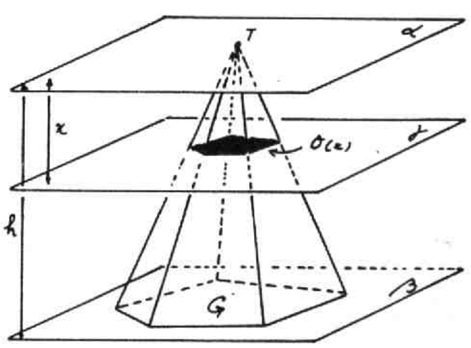


fig. 6-8

We rekenen nu de hoogte x vanaf het vlak α door de top evenwijdig aan het grondvlak β.
Door de veelhoek is het grondvlak vanuit T met factor $\left(\frac{x}{h}\right)$ te vermenigvuldigen, krijg je de doorsnedefiguur.

Noemen we de oppervlakte van het grondvlak G, dan geldt:

$$O(x) = \frac{x^2}{h^2} \cdot G.$$

(Bij gelijkvormige figuren verhouden de oppervlakten zich als het kwadraat van de vermenigvuldigingsfactor!).

De inhoud van de piramide is dan:

$$\int_0^h \frac{x^2}{h^2} G \cdot dx = \left[\frac{G}{h^2} \cdot \tfrac{1}{3} x^3 \right]_0^h = \tfrac{1}{3} hG.$$

Dus voor een piramide met hoogte h en grondoppervlakte G geldt: $I = \frac{1}{3} \cdot hG$

≫ 47. M is het middelpunt van een kubus met ribbe a.
Bereken de inhoud van de piramide met M als top en de 'vloer' van de kubus als grondvlak.

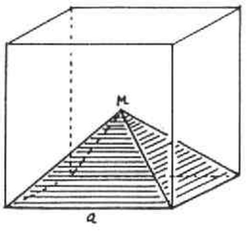


fig. 6-9

≫ 48. Bereken de inhoud van een kegel waarvan de tophoek 45° is en de straal van de grondcirkel gelijk is aan r.

≫ 49. Hoe verhouden de inhoud van de tetraëder en de kubus zich?

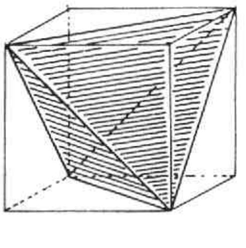


fig. 6-10

≫ 50. En hoe verhouden de inhoud van de octaëder en de kubus zich?

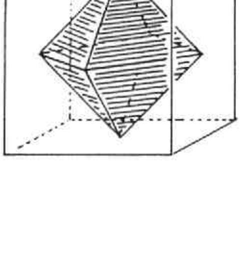
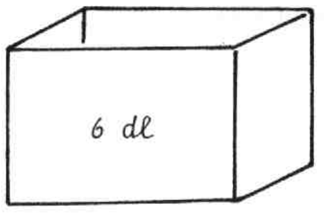
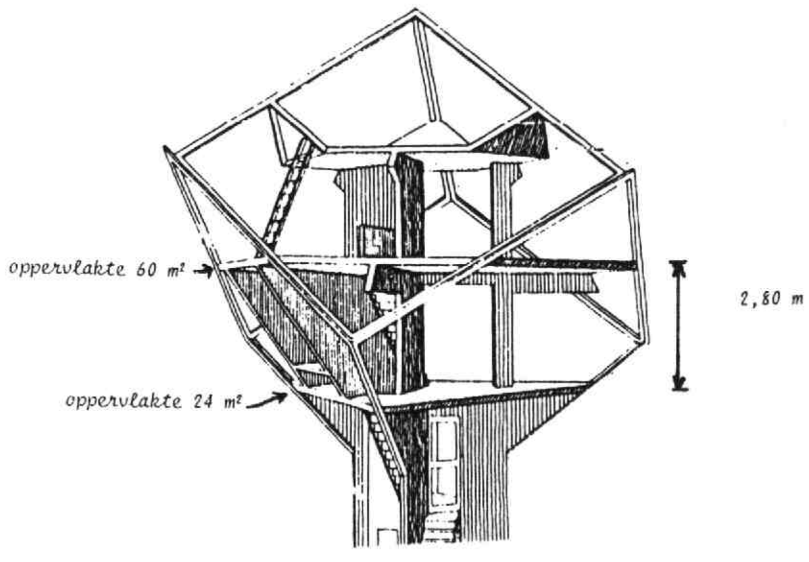


fig. 6-11

≫ 51. Iemand beschikt over een rechthoekig bakje met een inhoud van 6 dl. Hoe kan hij zonder gebruik te maken van een ander meetinstrument met dit bakje precies 1 dl water afmeten?



≫ 52. Opnieuw het kubushuis van architect Blom.
De onderste woonlaag wordt het 'straathuis' genoemd. De vloeroppervlakte van het straathuis is 24 m² en de hoogte is 2,80 m. De ribbe van het kubushuis is 6,80 m.
Hoeveel m³ is de inhoud van het straathuis?



≫ 53. We passen nu het integraalprincipe toe om de inhoud van een halve bol te berekenen.

a. Ga na: $O(x) = \pi(r^2 - x^2)$.

b. Toon met behulp van integraalrekening aan dat de inhoud van de halve bol gelijk is aan $\frac{2}{3}\pi r^3$.

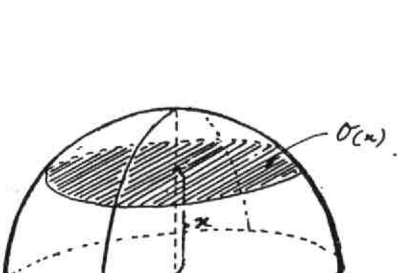


fig. 6-12

We hebben dus:

De inhoud van een bol met straal r is gelijk aan $\frac{4}{3}\pi r^3$.

≫ 54. In een cilinder past precies een bol met straal r. (De bol raakt bodem en deksel van de cilinder). Hoe verhouden de inhouden van bol en cilinder zich?

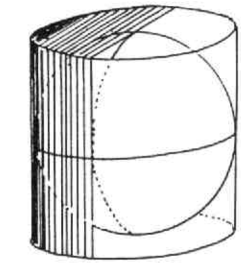


fig. 6-13

≫ 55. Van een kegel is de halve tophoek 30°. Een bol met straal r raakt de bodem en de kegelmantel. Bereken de verhouding van de inhouden van kegel en bol.

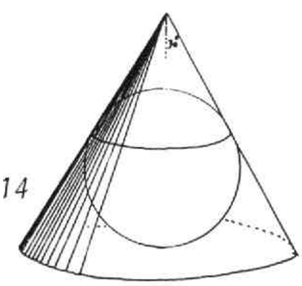


fig. 6-14

Door de grafiek van een functie $y = f(x)$ te laten draaien om de x-as, ontstaat een *omwentelingslichaam*.

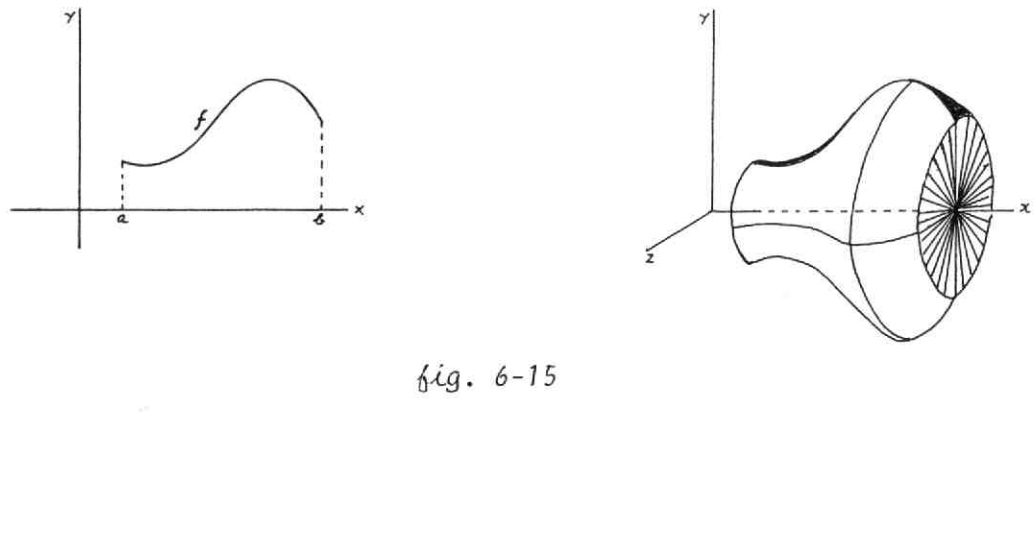


fig. 6-15

De oppervlakte van een doorsnede loodrecht op de x-as, op een afstand x van de oorsprong, is gelijk aan $\pi f^2(x)$.

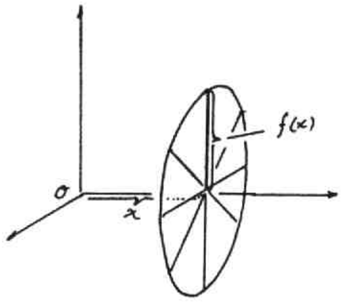


fig. 6-16

De inhoud van het omwentelingslichaam begrensd door de vlakken $x = a$ en $x = b$ is dus:

$$\int_a^b \pi f^2(x)\,dx.$$

≫ 56.

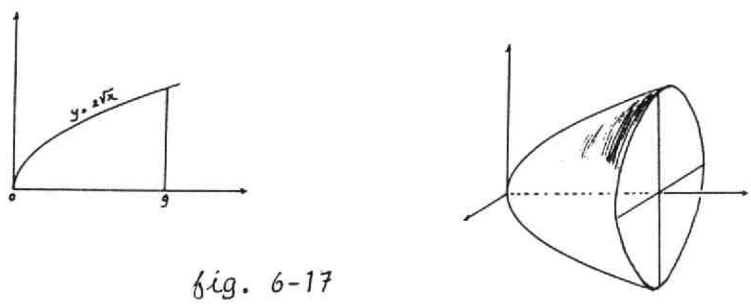


fig. 6-17

Bereken de inhoud van de *paraboloïde* die ontstaat door de grafiek van $y = 2\sqrt{x}$ tussen $x = 0$ en $x = 9$ te draaien om de x-as.

≫ 57. Bereken de inhoud van de 'hoed' die ontstaat door de grafiek van $y = \frac{1}{4}x^2$ tussen $x = 0$ en $x = 3$ te wentelen om de x-as.

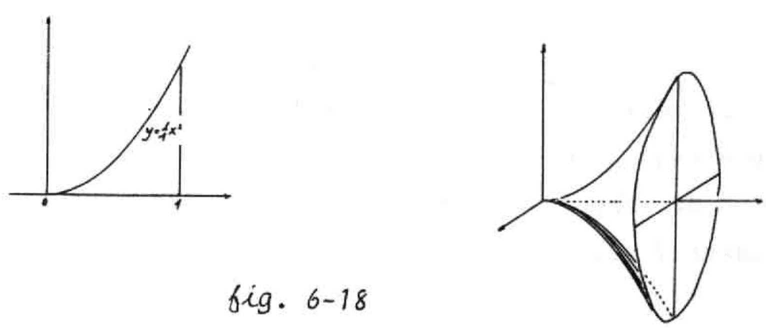


fig. 6-18

≫ 58.

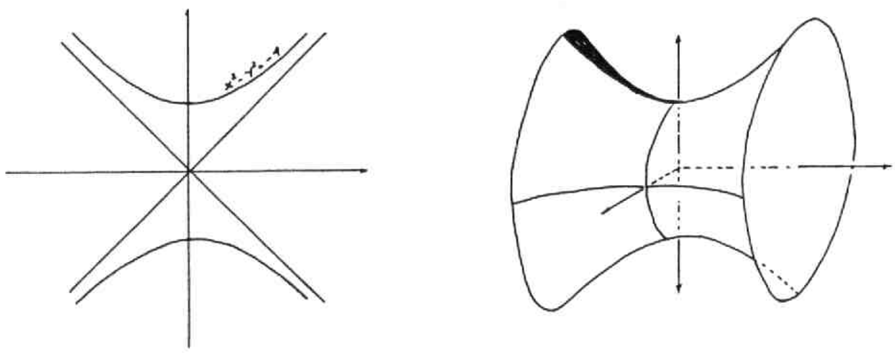


fig. 6-19

Bereken de inhoud van de *hyperboloïde* die ontstaat door de hyperbool $x^2 - y^2 = -4$ tussen de lijn $x = 2$ en $x = -2$ te wentelen om de x-as.

≫ 59.

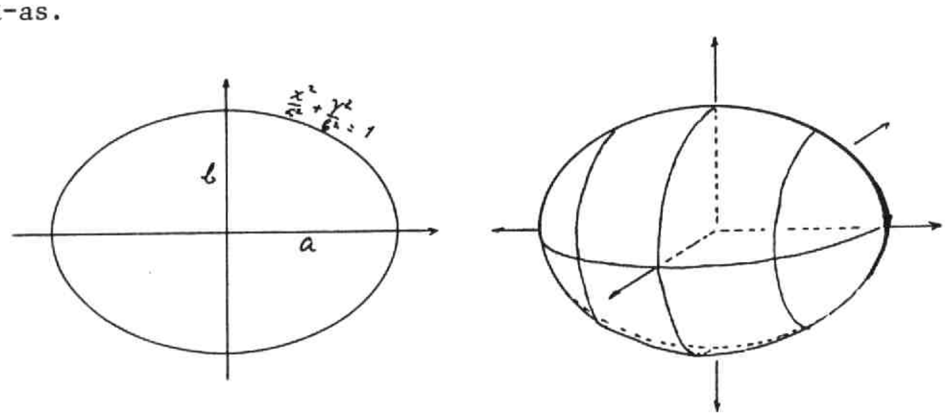


fig. 6-20

Bereken de inhoud van de *ellipsoïde* die ontstaat door de ellips $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ te wentelen om de x-as.

≫ 60. Tot slot van dit hoofdstuk een extra moeilijke opgave.
Twee cilinders met dezelfde straal (r) zijn zó geplaatst dat de assen elkaar loodrecht snijden.
Bereken de inhoud van het deel van de ruimte dat binnen allebei de cilinders ligt.