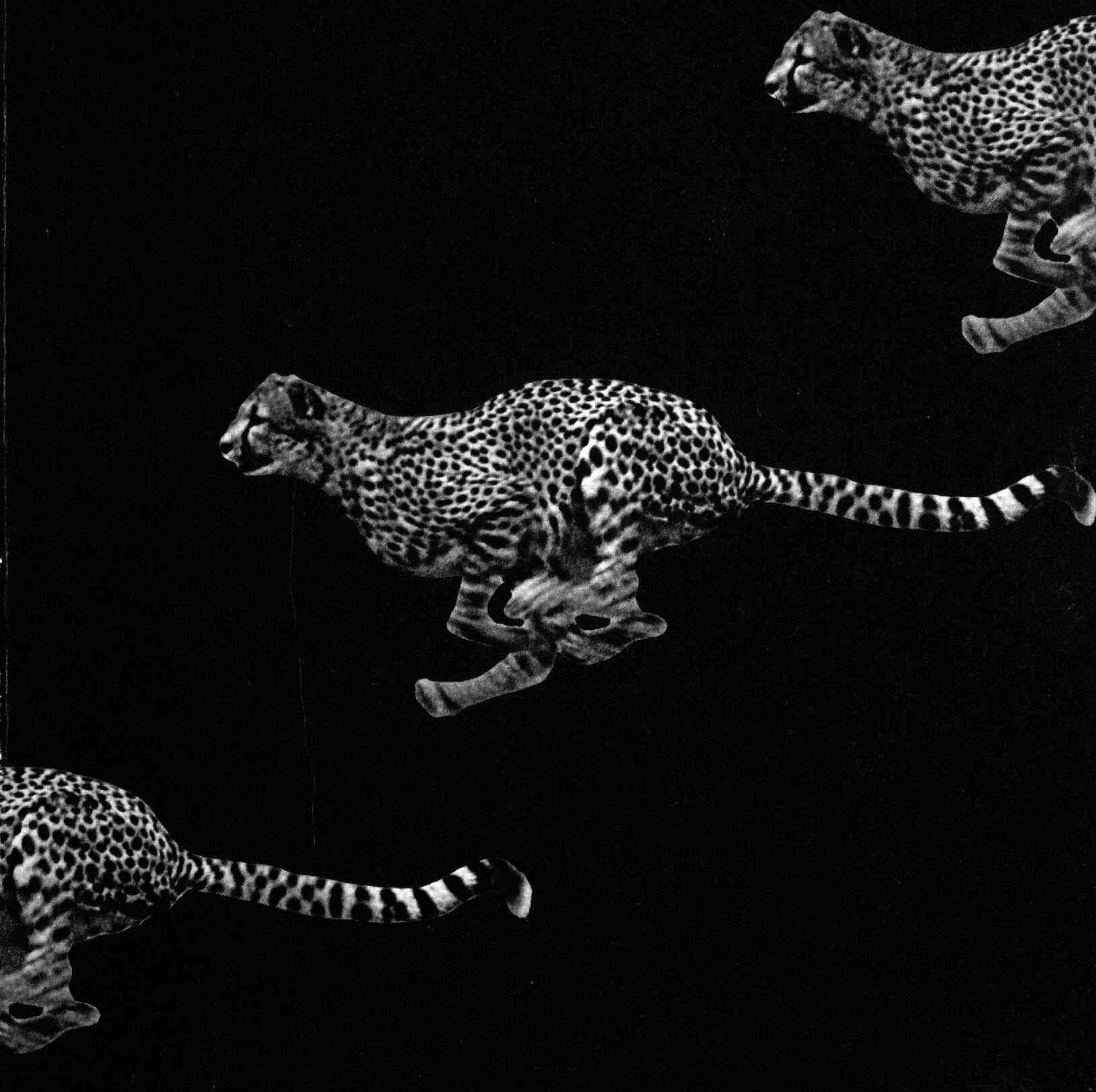
Differentiëren

https://hdl.handle.net/1874/10260

DIFFERENTIËREN 1



DIFFERENTIËREN

(EEN MANIER OM VERANDERINGEN BIJ TE HOUDEN)

1

INHOUD

DIFFERENTIËREN 1

Een produktie van het Instituut Ontwikkeling Wiskunde Onderwijs ten behoeve van de bovenbouw van het V.W.O. en H.A.V.O., in het bijzonder de 4e klas.

Ontwerp tot stand gekomen binnen de afdeling WISKIVON van het I.O.W.O.
Verantwoordelijk ontwerper:
Martin Kindt.

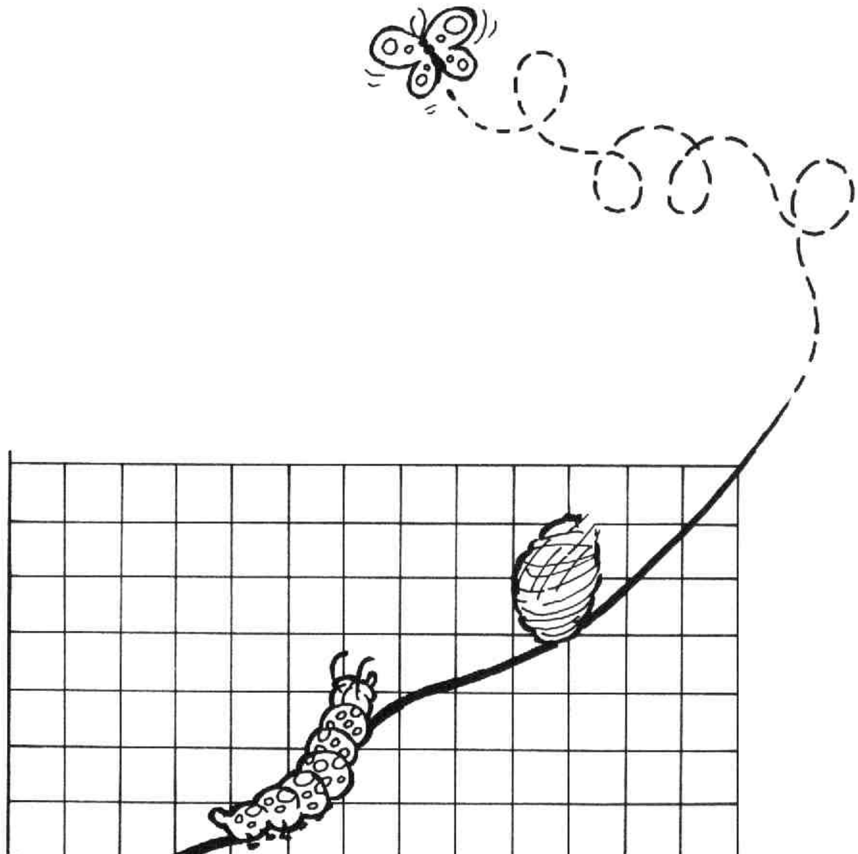
Voor leraren is een docentenhandleiding verkrijgbaar.

Utrecht, voorjaar 1979; 1e druk.

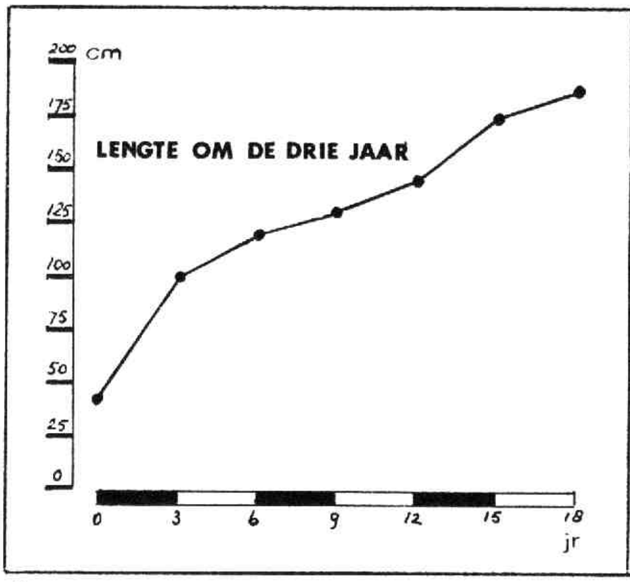
IOWO Instituut Ontwikkeling Wiskunde Onderwijs, Utrecht.

DEEL A

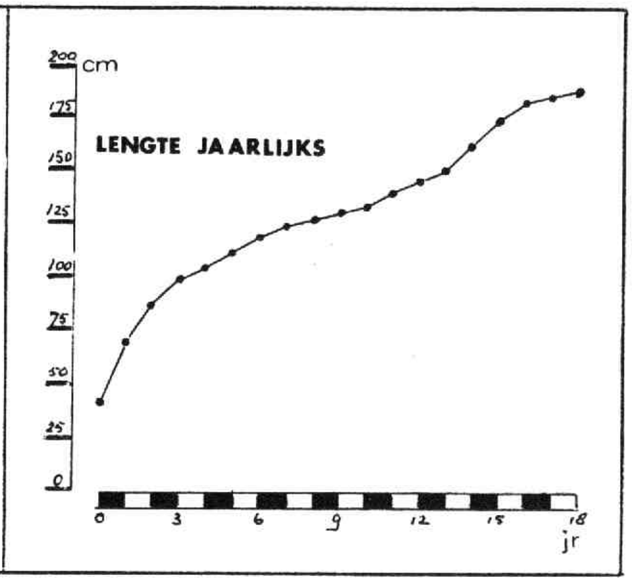
VERANDERINGEN



De Fransman De Montbeillard heeft in de periode 1759 - 1777 op elke verjaardag van zijn zoon diens lengte gemeten.
Van het resultaat van die metingen maakte hij twee grafieken.



A



B

1. Bekijk plaatje A.
   In welke periode groeide De Montbeillard's zoon het hardst?
2. Beantwoord vraag 1 ook aan de hand van plaatje B.
3. Tijdens de puberteit van De Montbeillard's zoon zette een zogenaamde *groeispurt* in.
   Op welke leeftijd begon die groeispurt?
4. Grafiek B geeft natuurlijk een beter beeld van de groei dan grafiek A.
   Hoe had de Montbeillard nog een betere grafiek kunnen krijgen?

EN DAN IS ER KOFFIE ...

Voorjaar 1977.
Sombere tijden voor koffiedrinkend Nederland.
Het dagelijkse kopje troost lijkt een dure liefhebberij te worden.
Veel landgenoten zijn aan het koffie-hamsteren geslagen en de supermarkten bieden een troost-eloze aanblik ....

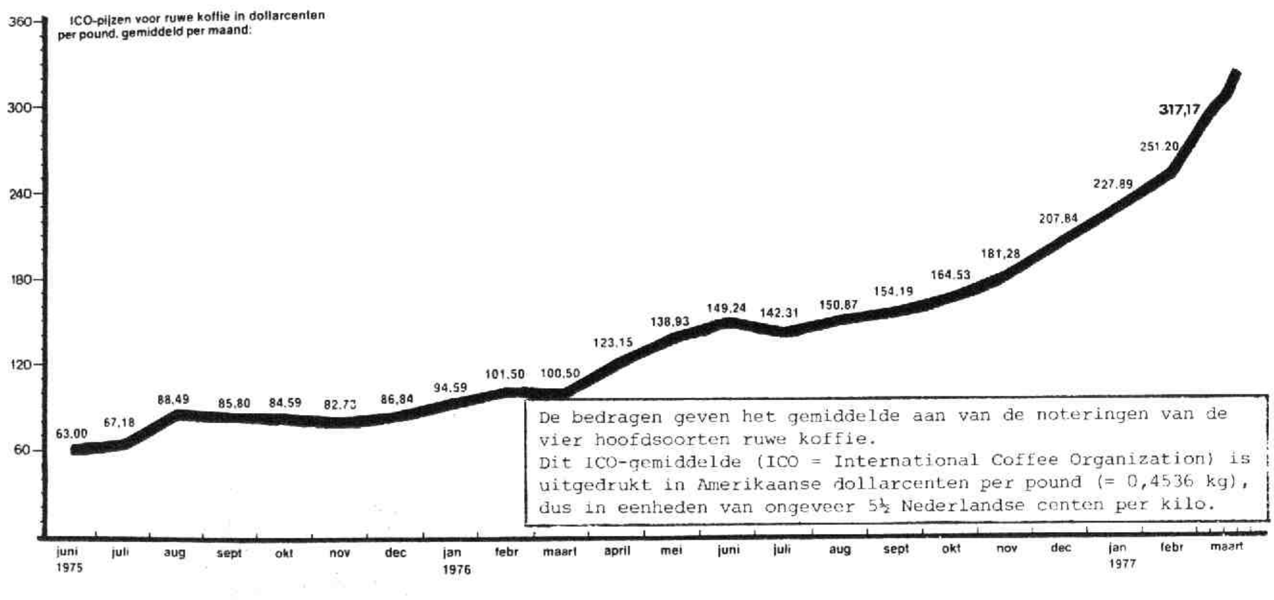
Het NRC Handelsblad schrijft (april 1977):

Koffieprijs als komeet de lucht in

Door onze redacteur W. J. van Campen

Maatregelen van de belangrijke koffielanden Brazilië en Colombia die leidden tot het nog duurder maken van de koffie-uitvoer, hebben begin deze week een nieuwe sprong van de internationale koffie-noteringen uitgelokt. De wereldmarktprijs van het populaire genotmiddel klimt de laatste weken naar steeds nieuwe hoogtepunten.
Sinds de zomer van 1975, toen de vorst zware schade aanrichtte aan een flink deel van de Braziliaanse koffie-aanplant, zijn de wereldmarktnoteringen vrijwel voortdurend gestegen. Het huidige prijspeil is al meer dan het vijfvoudige van dat van ruim anderhalf jaar geleden. De Nederlandse winkelprijzen, die de stijging op de wereldmarkt met een tussenpoos van ongeveer drie maanden volgen, zullen dan ook de komende maanden weer fors moeten worden bijgesteld.

Het artikel was verluchtigd met een grafiek:



Gebruik de grafiek bij de beantwoording van de volgende vragen:

1. Zijn de wereldprijzen steeds gestegen in de periode van juli 1975 tot en met maart 1977?
2. In de kop van het kranteartikel wordt de koffieprijs met een komeet vergeleken.
   Vind je dat een goede vergelijking?
3. In welk *kwartaal* steeg de koffieprijs het snelst?
   Hoe zie je dat in de grafiek?

4. Wat is de *gemiddelde verandering* van de koffieprijs *per maand* in het jaar 1976?
   En in het eerste kwartaal van 1977?

Die gemiddelde verandering per maand kun je opvatten als een maatstaf voor de snelheid waarmee de koffieprijs stijgt:

gemiddelde verandering (van de koffieprijs per maand) $= \dfrac{\textit{verandering van de koffieprijs}}{\textit{verandering van de tijd}}$

In de wiskunde schrijven we de dingen liefst zo kort mogelijk op.

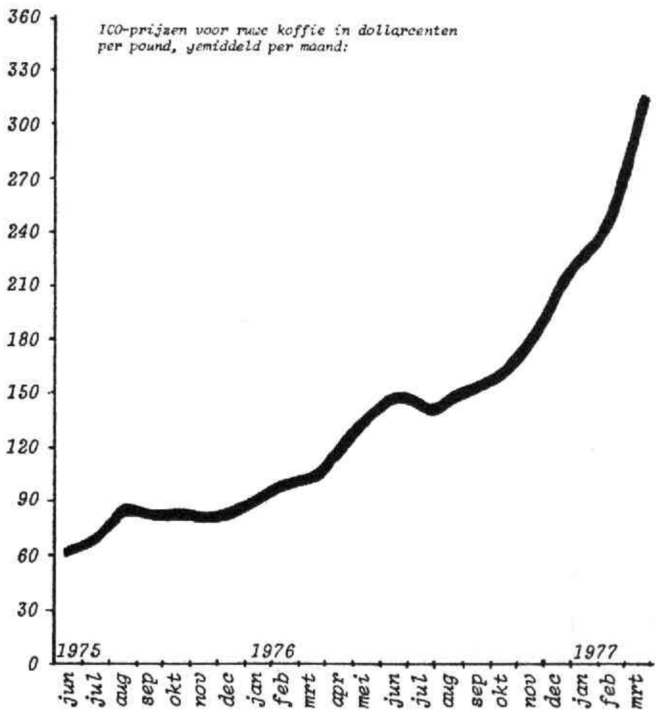
> k = *koffieprijs (in dollarcent per pound)*
>
> t = *tijd (in maanden)*
>
> *gemiddelde verandering (van de koffieprijs per maand)* $= \dfrac{\Delta k}{\Delta t}$

Het symbool Δ (de griekse hoofdletter "delta") staat voor *"verandering van"*.

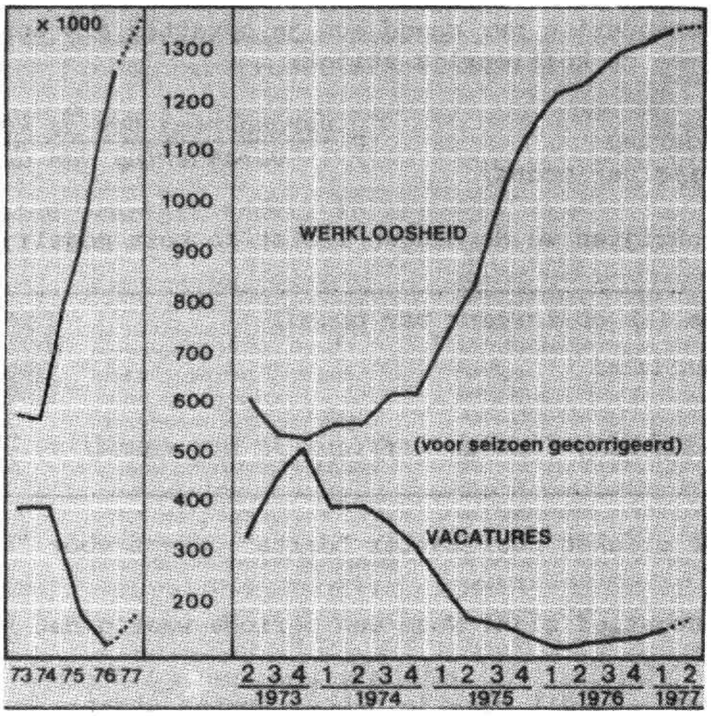
5. $\dfrac{\Delta k}{\Delta t}$ kan ook negatief zijn! Noem een periode waarin dat het geval is.

In een andere krant zou dit plaatje hebben kunnen staan:

6. Deze grafiek suggereert een sterkere stijging van de koffieprijs dan de eerste grafiek.
   Hoe komt dat?
7. Hoe zou je, zonder aan de gegevens te knoeien, nog een sterkere stijging kunnen suggereren?



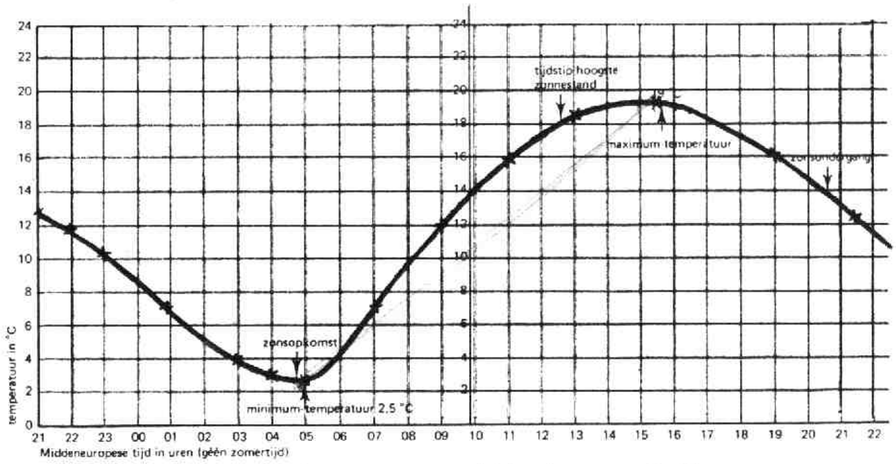
Hieronder zie je grafieken van de werkloosheid en de vacatures in Engeland over de periode april 1973 t/m mei 1977.



1. Hoeveel werklozen telde Engeland eind 1976?
2. Vergelijk de grafieken links en rechts van de cijfer-kolom. Hoe komt het dat het dieptepunt van de werkloosheidsgrafiek rechts lager ligt?
3. Wat zou dat betekenen "voor seizoen gecorrigeerd"?
4. W = het aantal werklozen in Engeland.
   V = het aantal vacatures in Engeland.
   t = de tijd (in maanden).

   Bereken $\frac{\Delta W}{\Delta t}$ en $\frac{\Delta V}{\Delta t}$ voor de jaren 1974, 1975 en 1976.
5. In welk kwartaal nam de werkloosheid het snelst toe? Met hoeveel mensen per maand steeg het aantal werklozen toen?
6. In welk kwartaal daalde het aantal vacatures het hardst? Hoeveel vrije banen verdwenen er toen gemiddeld per maand?
7. Wanneer is er een kentering begonnen in de *stijging* van de werkloosheid?
8. Wat is opvallend aan het verloop van de werkloosheid-grafiek en de vacature-grafiek over het laatste jaar?

Het weer van alledag ondervinden wij als een samenspel van de verschillende elementen, die het weerbeeld bepalen, zoals de straling van de zon, de temperatuur, de wind, de vochtigheid van de lucht en de neerslag. Van deze elementen bekijken wij hier in het bijzonder de temperatuur. Iedereen weet wel bij ondervinding dat de temperatuur sterk afhankelijk is van het uur van de dag. De meteorologen spreken van de 'dagelijkse gang'; dat wil zeggen dat de temperatuur in de loop van de morgen stijgt en in de namiddag, avond en nacht daalt. In de regel is de temperatuur het laagst kort na het moment dat de zon opgaat, dat is dan de minimumtemperatuur. De hoogste waarde van de temperatuur (het maximum) wordt meestal omstreeks 14.00 uur bereikt.



Dagelijkse gang van de luchttemperatuur op een heldere dag in mei in De Bilt

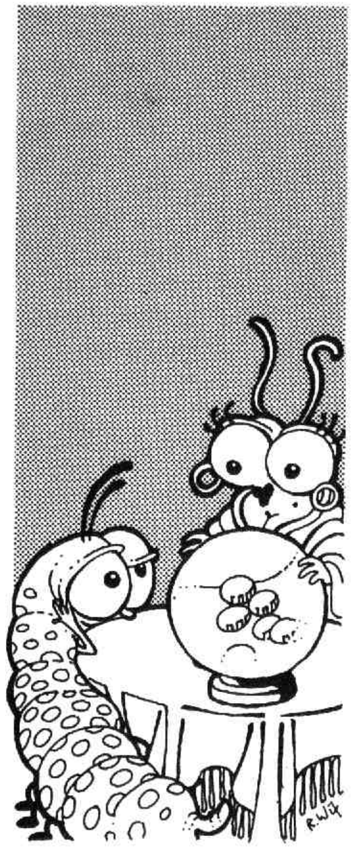
1. Op welk moment was het die dag het warmst?
   En het koudst?
2. Hoe verklaar je dat het warmste moment van de dag plaats heeft na dat de zon in de hoogste stand geweest is?
3. De temperatuur T (in ^{0}C) is een funktie van de tijd t (in uren).
   Bereken $\frac{\Delta T}{\Delta t}$ voor de periode (het interval) van 5 uur 's morgens tot 3 uur 's middags.
   Bereken dit ook voor het tijdsinterval van middernacht tot 5 uur 's morgens.
4. Op welk uur van de dag liep de temperatuur het snelst op?
   Met welke snelheid (in graden per uur) steeg die temperatuur toen ongeveer?

19, $= \frac{17}{10} = 1,7$

In deel A heb je een vijftal voorbeelden bekeken. Op 't eerste gezicht vijf verschillende onderwerpen. Maar als je door een wiskunde-bril kijkt ...

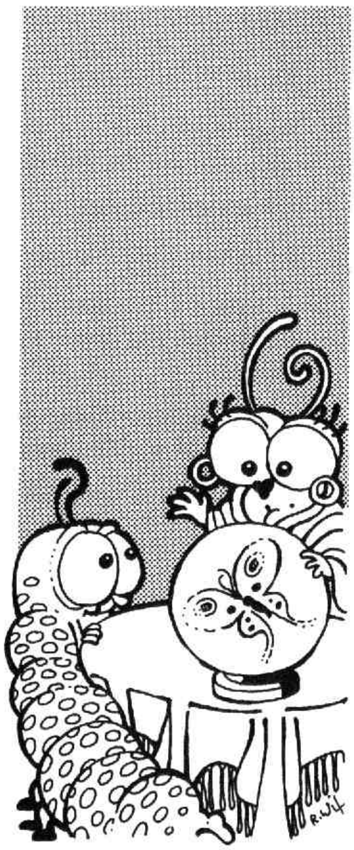
Natuurlijk bij elk voorbeeld heb je een *grafiek* gezien en was er sprake van een *funktie* (al stond dat er niet steeds uitdrukkelijk bij). Maar er is meer dat die vijf voorbeelden bindt. Samengevat in drie kernvragen (beantwoord je die even?):

1. Je kunt aan een grafiek zien of er sprake is van *toename* of *afname* van de funktie. Hoe?
2. Hoe *sneller* de verandering, hoe .... de grafiek.
3. Je kunt de *snelheid* waarmee de verandering plaatsvindt in een interval, uitdrukken in een getal. Hoe?



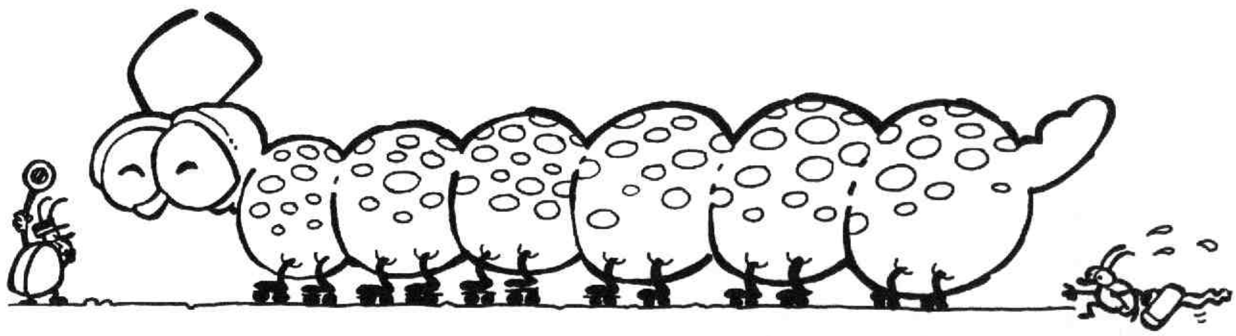
VOORUITZICHT

Dit boekje gaat dus over veranderingen van funkties, hoe snel die veranderingen gaan en soms ook hoe snel die veranderingen veranderen.
De wiskunde-theorie die daar over gaat heet *differentiaalrekening*.
Het is een vrij ingewikkelde theorie die je niet zo maar even op een achternamiddag kunt leren.
In de geschiedenis van de wiskunde is die theorie ook pas in de 17e eeuw ontwikkeld. De pioniers op dit terrein waren Newton en Leibniz (zie de tekst op de achterflap). Zij hebben de fundamenten gelegd, waar later vele andere wiskundigen op hebben voortgebouwd. En tot op de dag van vandaag is de differentiaalrekening een "hulpbron", waar technici en economen, natuurkundigen en biologen veelvuldig van profiteren.
Newton zette zijn eerste stappen voor de ontwikkeling van de differentiaalrekening bij zijn studie van bewegingen. Problemen van *tijd, afstand, snelheid, versnelling.*
In zijn voetspoor gaan we in deel B een paar van zulke problemen bekijken ....



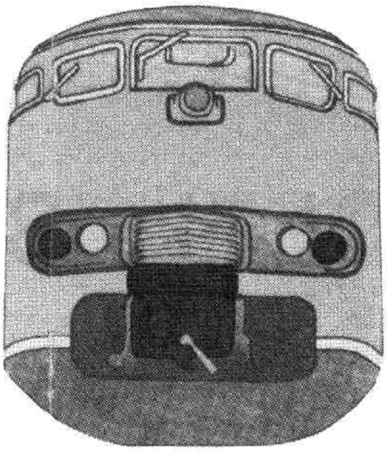
DEEL B

TIJD-AFSTAND-SNELHEID



Op het trajekt Arnhem-Utrecht rijden drie soorten personentreinen: stoptreinen, intercitytreinen, internationale (TEE)-treinen.

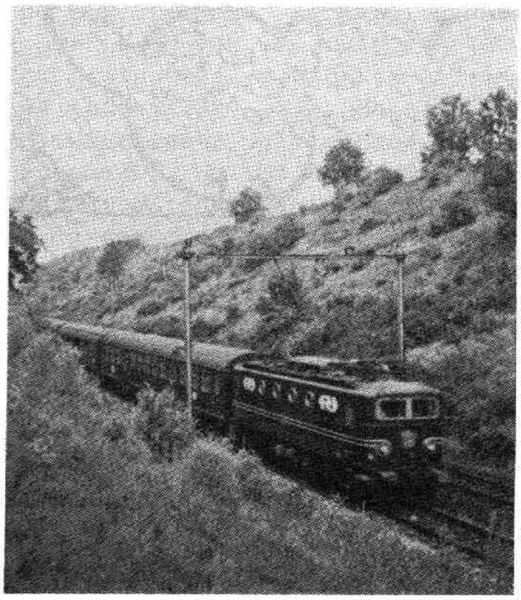
Hieronder zie je een fragment uit het spoorboekje afgedrukt met de dienstregeling op dit trajekt.

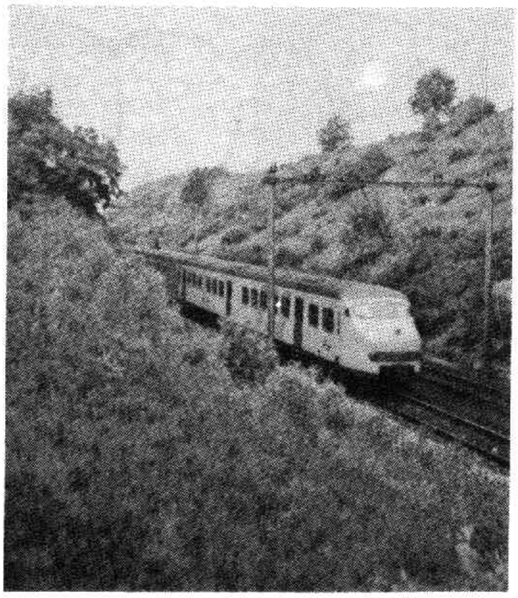


treinnummer		↓	D 222	↓	↓	1848	TEE 10	↓
Arnhem	V	13 42	1 13 58	14 09	14 12	14 38	2 14 48	14 41
Oosterbeek		13 46	|	|	14 16	|	|	14 45
Wolfheze		13 50	|	|	14 20	|	|	14 49
Ede-Wageningen	A	13 56	|	14 19	14 26	14 48	|	14 55
Ede-Wageningen	V	13 57	|	14 20	14 27	14 50	|	14 56
Veenendaal-de Klomp		14 02	|	|	14 32	|	|	15 01
Maarn		14 10	|	|	14 40	|	|	15 09
Driebergen-Zeist		14 16	|	|	14 46	|	|	15 17
Bunnik		14 20	|	|	14 50	|	|	15 21
Utrecht CS	A	14 26	14 31	⚒14 43	14 56	15 13	15 24	15 28

We richten onze aandacht op het omlijnde gedeelte.
Van de rit van de intercity (trein no. 1848) zie je op de volgende bladzijde een grafiek getekend.

1. Teken zelf in de figuur de grafiek van de stoptrein en van de TEE.
2. Welke trein haalt op zijn reis naar Utrecht een andere trein in?
   Hoe laat en waar?
3. Welke trein legt het trajekt Arnhem-Utrecht het snelst af?
   Met welke gemiddelde snelheid?
4. De stoptrein doet natuurlijk het langst over de reis.
   Maar rijdt die stoptrein *overal* langzamer dan b.v. de intercity?
   Hoe zie je dat in de grafiek?



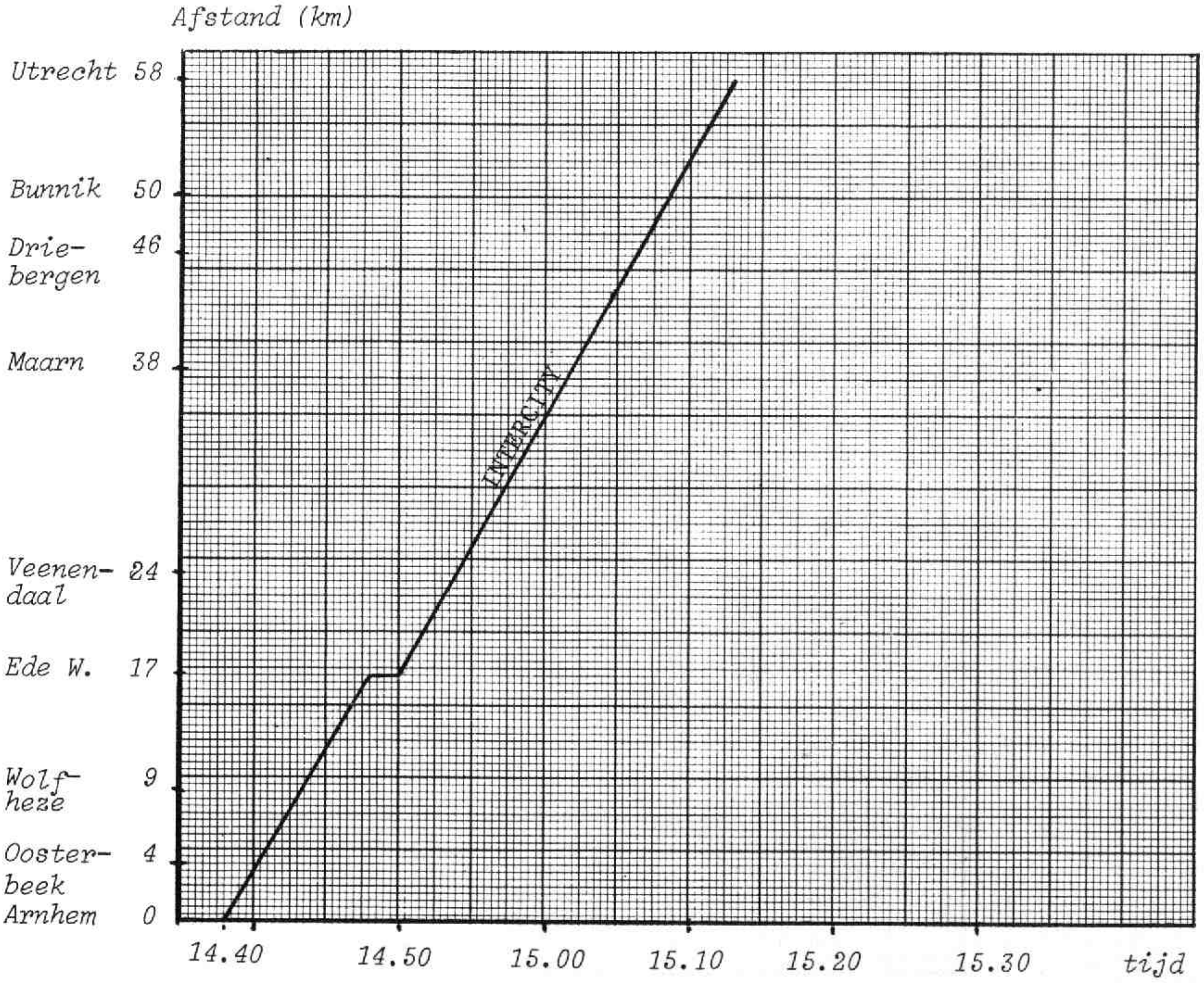


5. Bekijk nog eens de rit van de stoptrein Arnhem-Utrecht.
   De afgelegde weg s (in km) is een funktie van de tijd t (in minuten).
   Bereken $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ voor de trajekten: Arnhem - Oosterbeek;
   Wolfheze - Ede/Wageningen;
   Driebergen/Zeist - Bunnik.

   Hoe kun je de verschillen in uitkomst verklaren?

Om 14.50 vertrekt van Utrecht CS een intercity in de richting Arnhem. Deze trein stopt alleen in Ede/Wageningen (aankomst 15.13, vertrek 15.14) en arriveert volgens de dienstregeling om 15.25 in Arnhem.

6. Teken de grafiek van die treinrit (in dezelfde figuur als de drie grafieken die je al gemaakt hebt).
7. Hoe laat ongeveer ontmoet deze intercity achtereenvolgens de intercity, de stoptrein en de TEE die tussen 14.30 en 15.00 uit Arnhem vertrekken?
8. Hoeveel treinen ontmoet deze intercity op zijn weg van Utrecht naar Arnhem?
   (Je mag aannemen dat de dienstregeling was die op blz. B1 is afgedrukt zich elk uur "herhaalt").



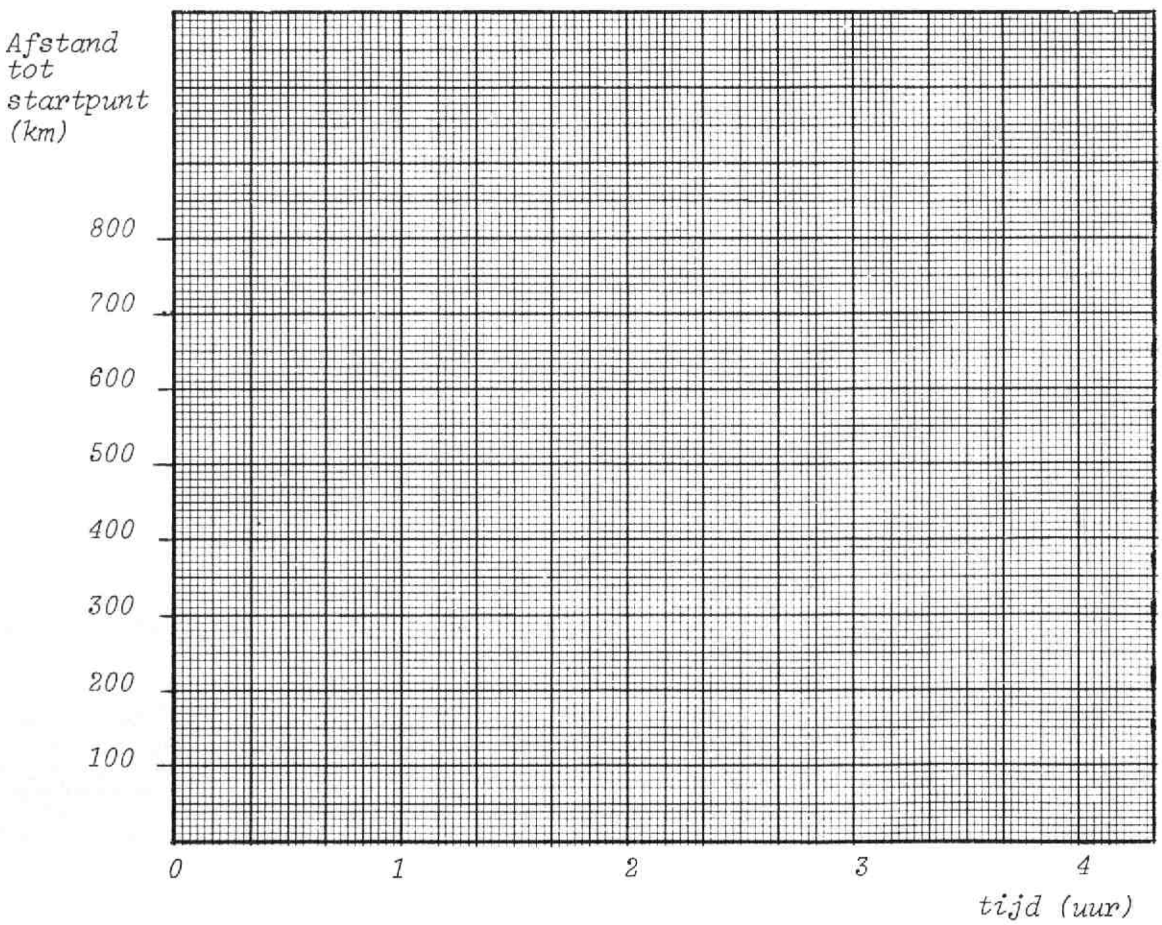
POINT-OF-NO-RETURN

De Beechcraft Bonanza (zie foto) haalt een snelheid van 300 km/u bij windstil weer. Er is brandstof voor 4 vlieguren aan boord. De piloot van dit toestel maakt een vlucht (op topsnelheid) waarbij hij eerst de wind pal mee heeft; daarna keert hij volgens dezelfde route terug, (dus met wind tegen). In de hogere regionen waait een stevige bries: 60 km per uur.

1. Teken de grafiek van die vlucht voor het geval de piloot besluit om na 2 uur vliegen terug te keren.
   Op hoeveel km van de vertrekhaven moet hij een noodlanding maken?
2. Teken met een andere kleur de grafiek voor het geval onze piloot met dezelfde hoeveelheid brandstof en steeds op volle snelheid vliegend, wel na precies 4 uur terug is.
   Na hoeveel tijd is hij nu van koers veranderd?

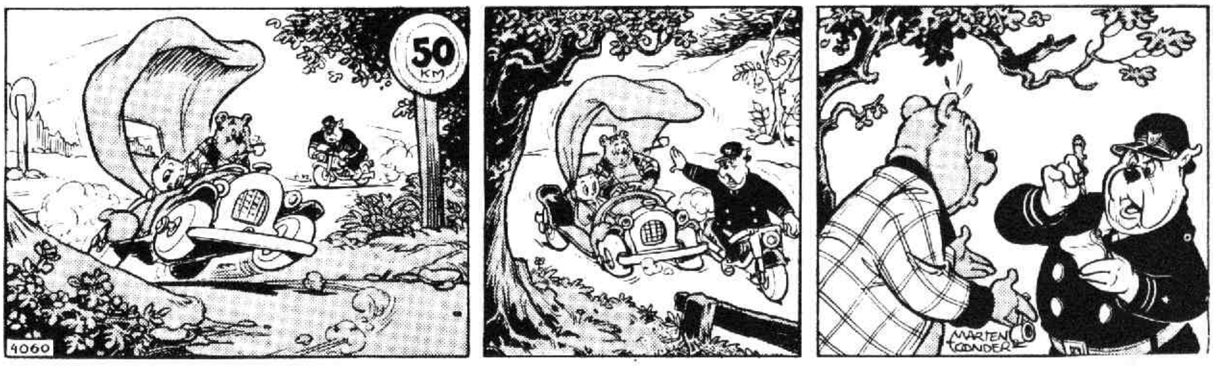
Onder het "point-of-no-return" verstaat men het punt van het trajekt waar terugkeer naar de vertrekhaven nog net mogelijk is, rekening houdend met de brandstof aan boord. (Uit: Leerboek voor de privévlieger).

3. Hoeveel km bedraagt voor deze vlucht de afstand van startpunt tot het point-of-no-return?
4. Waar ligt het point-of-no-return voor onze piloot als het 2 keer zo hard waait?



HEER IN HET VERKEER

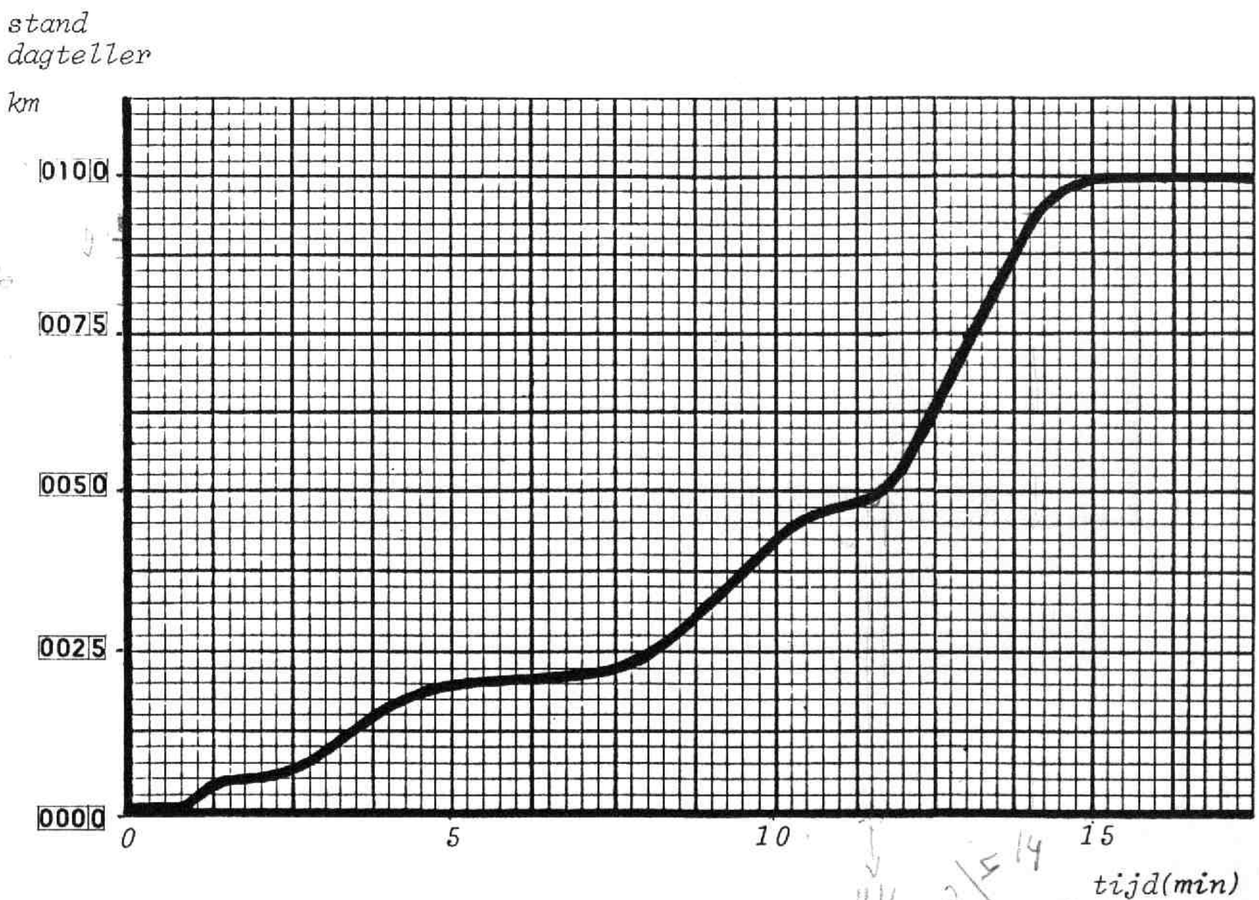
Heer Bommel was danig uit zijn humeur. Het verkeer in Rommeldam had hem veel oponthoud bezorgd en toen hij zich buiten de bebouwde kom waande, trapte hij het gaspedaal geheel in, zodat de Oude Schicht gierend over de weg vloog. Helaas ontging het hem dat hij zich op een weg bevond waar snelheidsbeperking geboden was en dat wreekte zich. Want daar naderde de commissaris van politie reeds op een brullende motor en stak een hand op.



"Hebt u zo'n haast, huh?" vroeg Bulle Bas, een notitieboekje trekkend. "Hebt u de borden niet gezien? Kunt u niet lezen?"
"Maar ik reed niet te snel!" riep heer Bommel op piepende toon. "In het afgelopen kwartier heb ik niet meer dan 10 km gereden, dat is dus 40 km per uur".

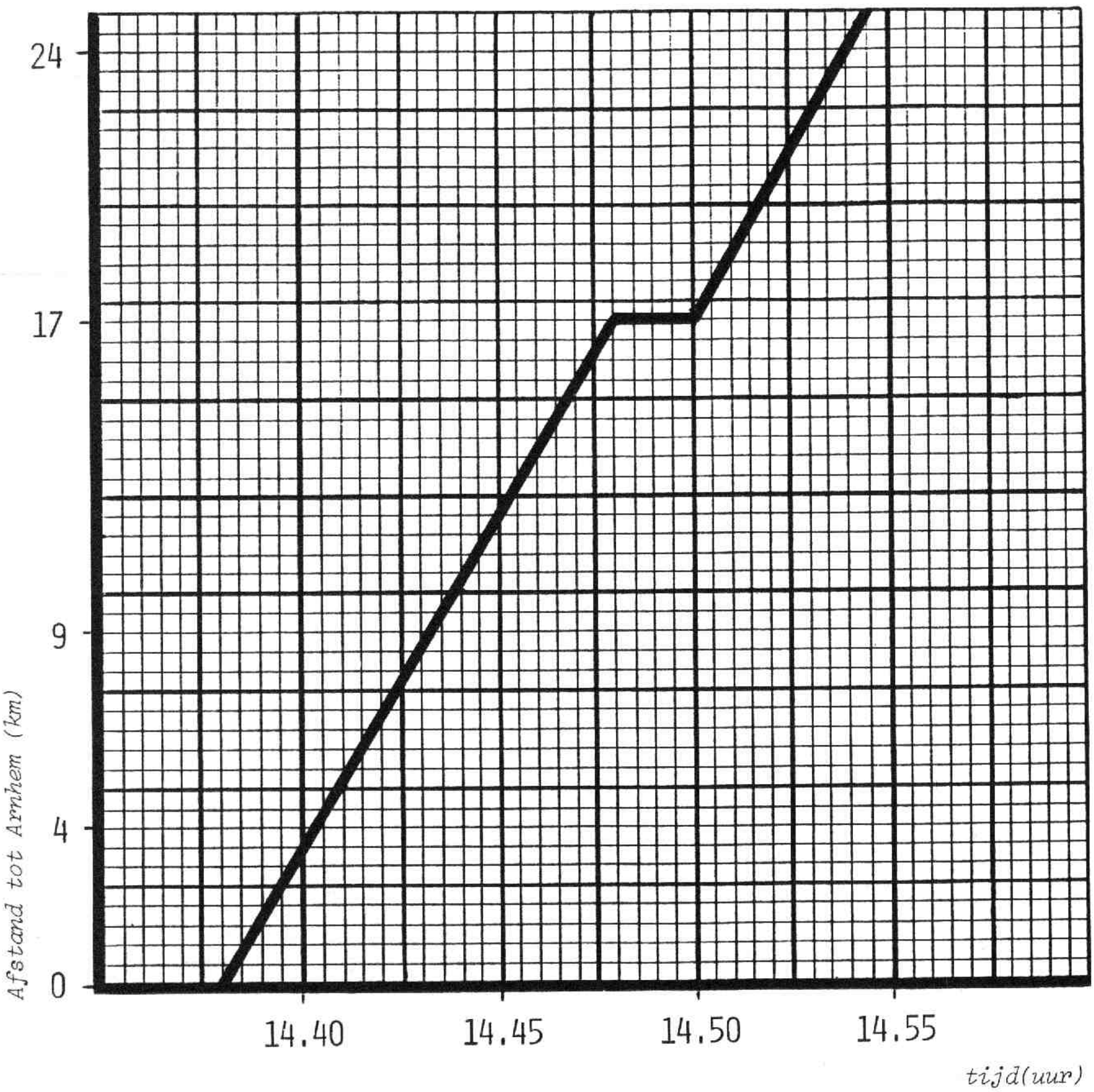
Inderdaad wees de dagteller in de Oude Schicht 10 km aan.
Maar meer informatie over Bommel's autoritje geeft onderstaande grafiek.

1. Wat zou Bulle Bas hebben geantwoord op het verweer van heer Bommel?
2. Stel je voor dat heer Bommel gelijk zou hebben. Hoe zou die grafiek er dan hebben uitgezien?

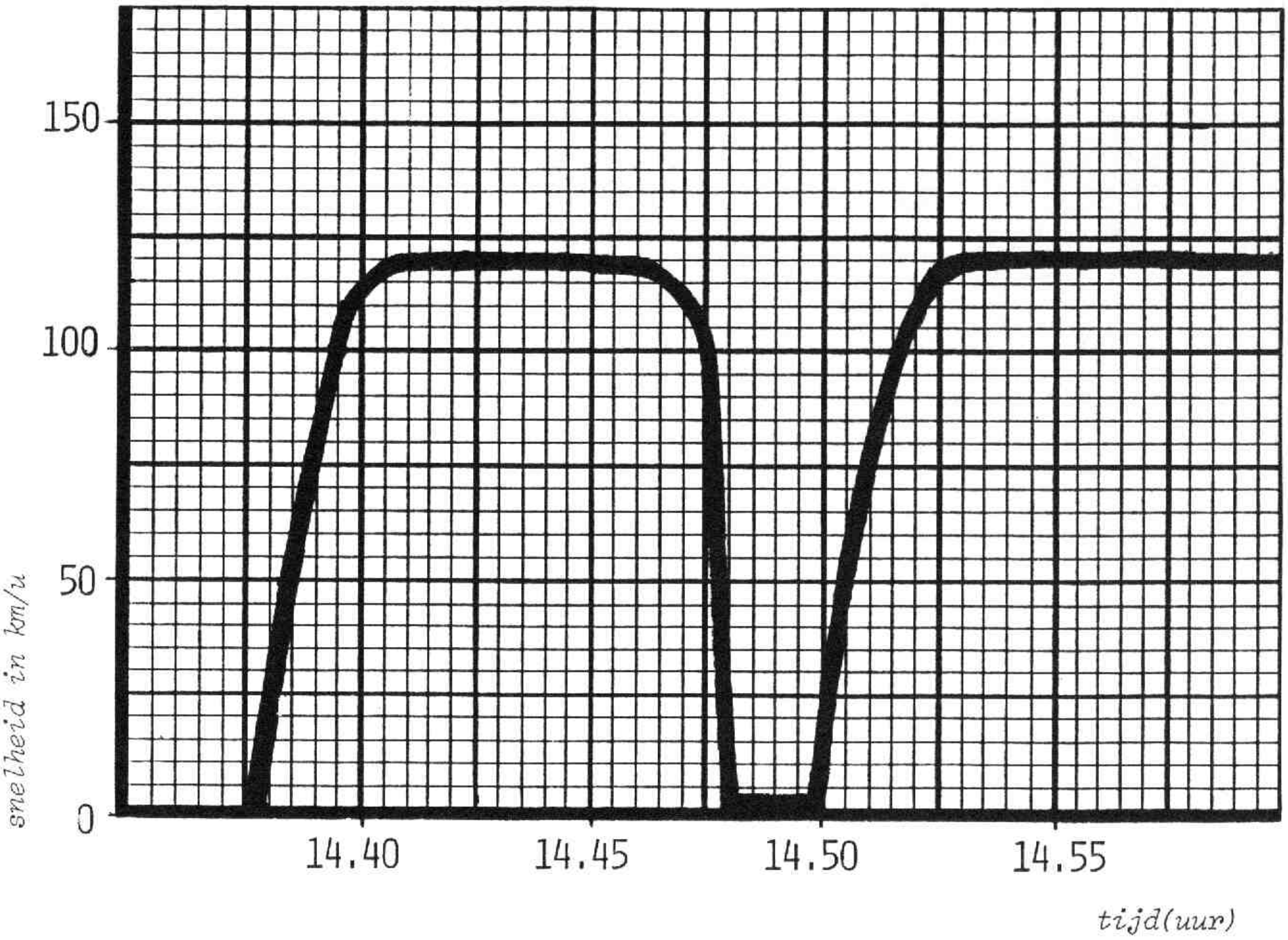


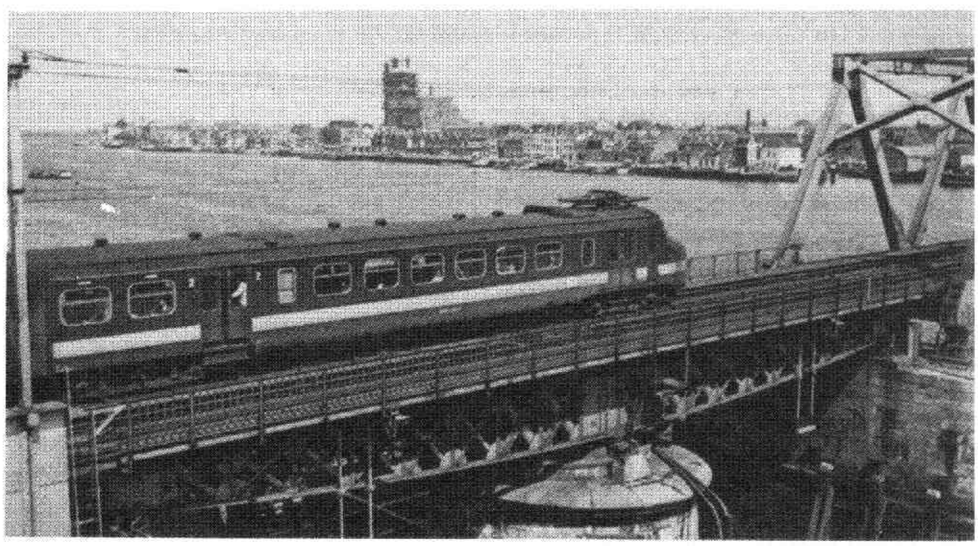
Hieronder zie je het beginstuk van de "intercity-grafiek" (blz. B2) vergroot weergegeven.

1. Waaraan kun je zien dat er in die grafiek geen rekening is gehouden met het optrekken en afremmen van de trein?
2. Je ziet op de volgende bladzijde een tijd-snelheid-grafiek waarin o.a. te zien is dat het afremmen minder tijd vergt dan het optrekken. Gebruik deze grafiek om de grafiek van de intercity-rit zo goed mogelijk te verbeteren.



Tijd-snelheid-grafiek voor de intercity:





De cheetah, de snelste hardloper uit de dierenwereld kan een snelheid bereiken van 110 km/u. Soms wandelt hij openlijk op een kudde gazellen af tot ze wegrennen, waarna hij één van hen achtervolgt. Hij heeft echter geen uithoudingsvermogen en geeft de jacht al na 450 meter op ...

Twee hardlopers. De snelheid van een dier hangt voor een deel af van de grootte van zijn passen en hardlopers zoals paarden hebben dan ook lange benen. Zowel de poten als het lichaam van de cheetah zijn korter dan die van het paard, maar door de meer flexibele gewrichten van zijn voor- en achterpoten kan hij lange sprongen maken. Hij kan in korte tijd meer dan 110 km/uur bereiken, terwijl de topsnelheid van een paard 70 km/uur is.

Snelvoetige jagers en graseters

Sommige dieren van de grasvlakten, zoals olifanten, zijn door hun grootte gevrijwaard tegen aanvallen, terwijl andere zo klein zijn dat ze zich beschermen door zich in te graven. Vele soorten zijn echter afhankelijk van hun snelheid om aan hun vijanden te ontkomen.

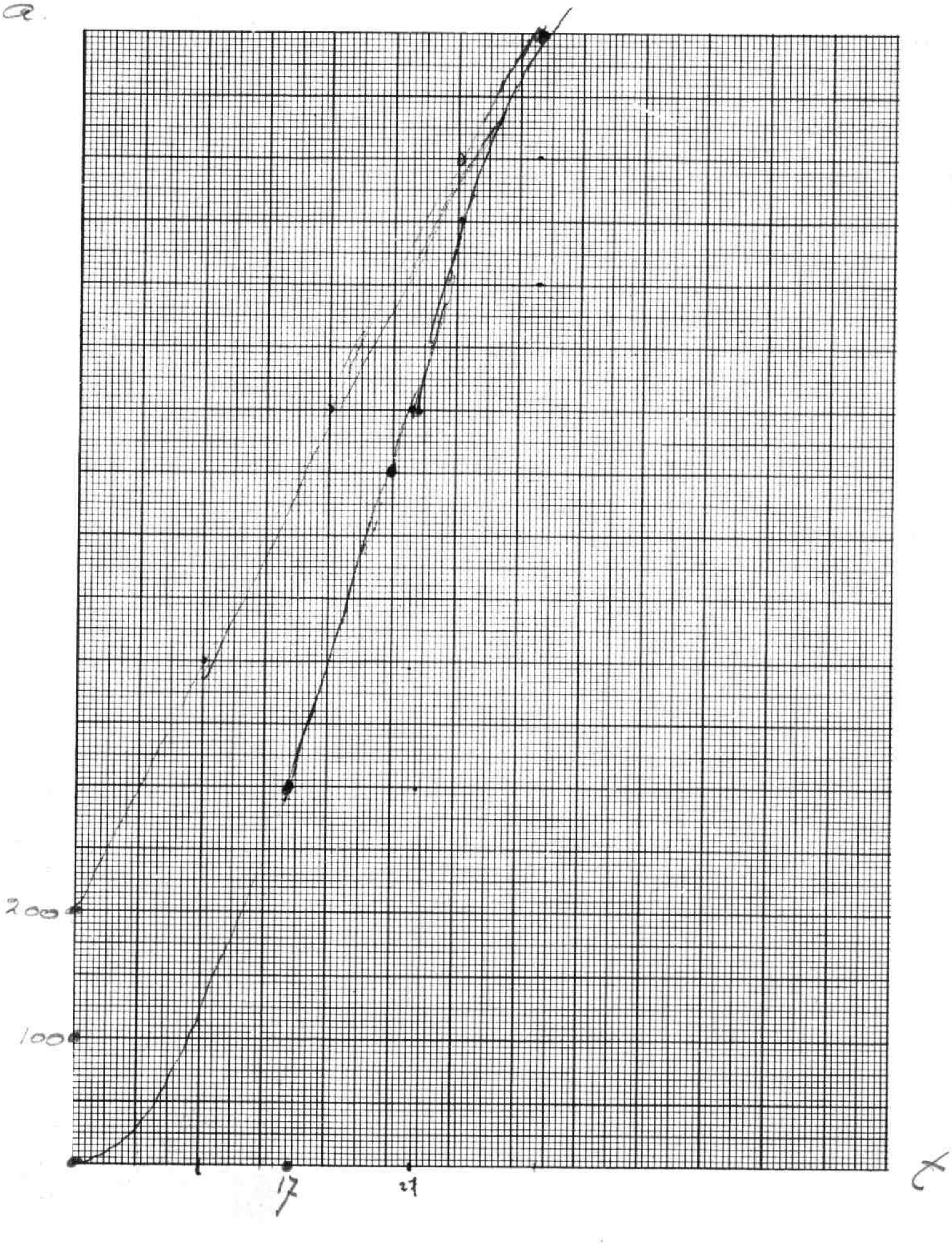
De snelheid van een dier hangt af van de grootte en de frequentie van zijn sprongen. Bij de paardachtigen zijn de voetbeenderen verlengd en het aantal tenen is gereduceerd tot één, omdat één dik beenstuk steviger is dan een aantal dunne. Deze ene teen is omgeven door een stevige hoef, die het been tegen stoten beschermt als het dier over een harde bodem galoppeert. De krachtige spieren die het been bewegen zijn bovenaan het been gebundeld, zodat een lichte spierbeweging bovenaan, het slanke onderste gedeelte van het been ruim kan bewegen.

De snelste sprinter ter wereld is de cheetah. Zijn poten zijn korter dan die van het paard, maar hij kan in 17 seconden op een snelheid van meer dan 110 km per uur komen en die volhouden over een afstand van ruim 450 m. De cheetah wordt echter gauw moe, terwijl een paard, dat een topsnelheid van 70 km/u haalt, over ruim 6 km een snelheid van 50 km kan handhaven.

HET SNELSTE DIER

Een cheetah wordt uit zijn middagslaapje gewekt door het geluid van paardenhoeven. Op het moment dat hij besluit de achtervolging in te zetten heeft het paard een voorsprong van 200 m.
Het paard dat op topsnelheid draaft, is nog lang niet aan het eind van zijn krachten.

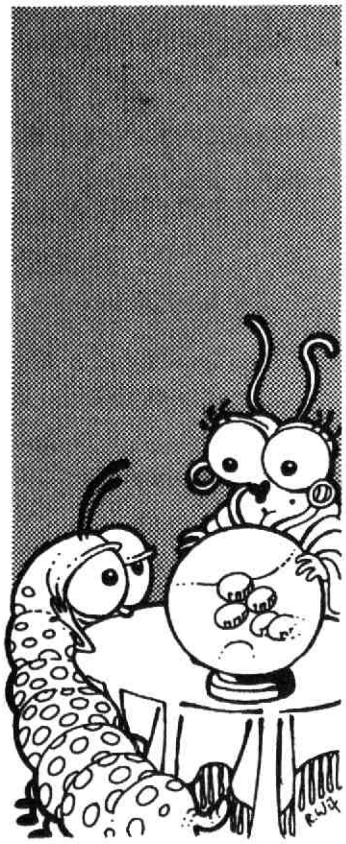
1. Haalt de cheetah het paard in?
   (Los dit probleem op met behulp van grafieken; je mag aannemen dat de cheetah in de tijd die hij nodig heeft om zijn topsnelheid te bereiken ongeveer 300 meter aflegt).



TERUGBLIK

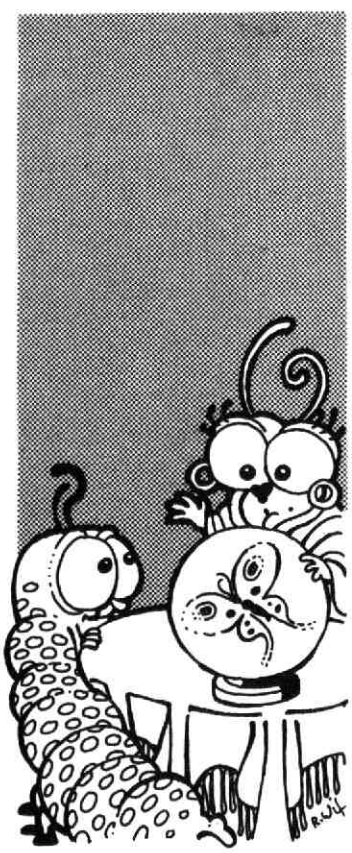
Intercity, vliegtuig, Oude Schicht, cheetah.
Deel B ging over *verandering van plaats*.
En een overzichtelijk beeld van zo'n verplaatsing krijg je vaak door een *tijd-plaats-grafiek* (of *tijd-afstand-grafiek*) te schetsen.
Stel je voor, we hebben een tijd-plaats-grafiek van een of ander bewegend voorwerp.
Een paar vragen:

1. Wat betekent het als in die grafiek een horizontaal stuk voorkomt?
2. Wat weet je van de beweging als de grafiek een kaarsrechte, maar schuine lijn is?
3. En als de grafiek een kromme lijn is?
4. Hoe groter de snelheid, hoe ..... de grafiek.
5. De afgelegde weg (s) is een funktie van de tijd (t).
   Op een zeker tijdsinterval kun je $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ berekenen.
   Wat stelt dit getal voor?



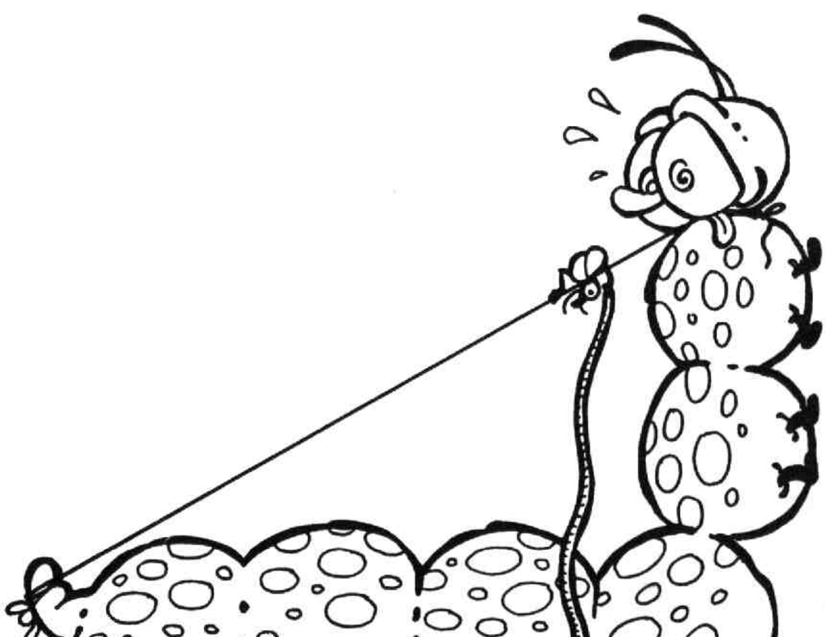
VOORUITZICHT

De mate waarin een grafiek schuin loopt, om zo te zeggen de "steilheid" van de grafiek, heeft blijkbaar te maken met de *snelheid* van de verandering.
Hoe meet je de steilheid van een, rechte of kromme, lijn?
In deel C ("Hellingen meten") hoor je daar meer van.



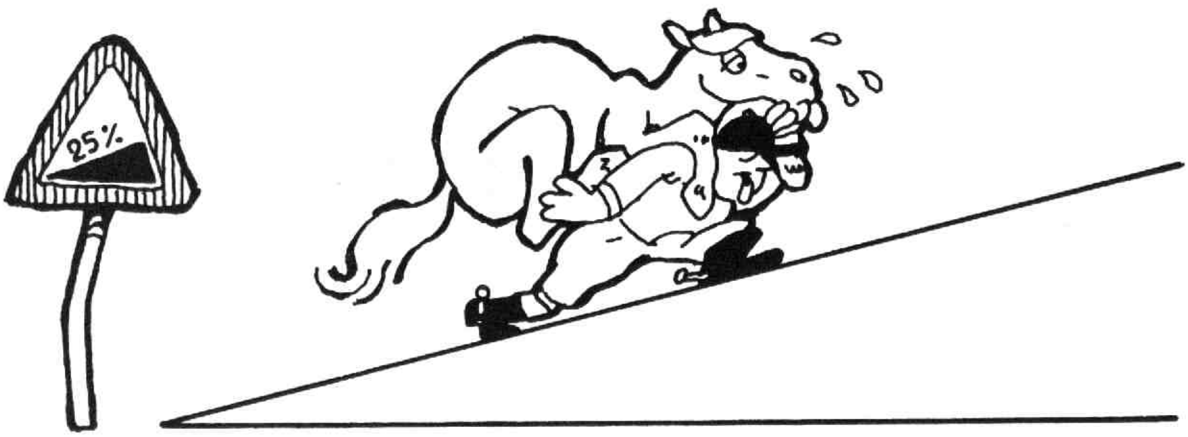
DEEL C

HELLINGEN METEN



HELLINGSPERCENTAGE

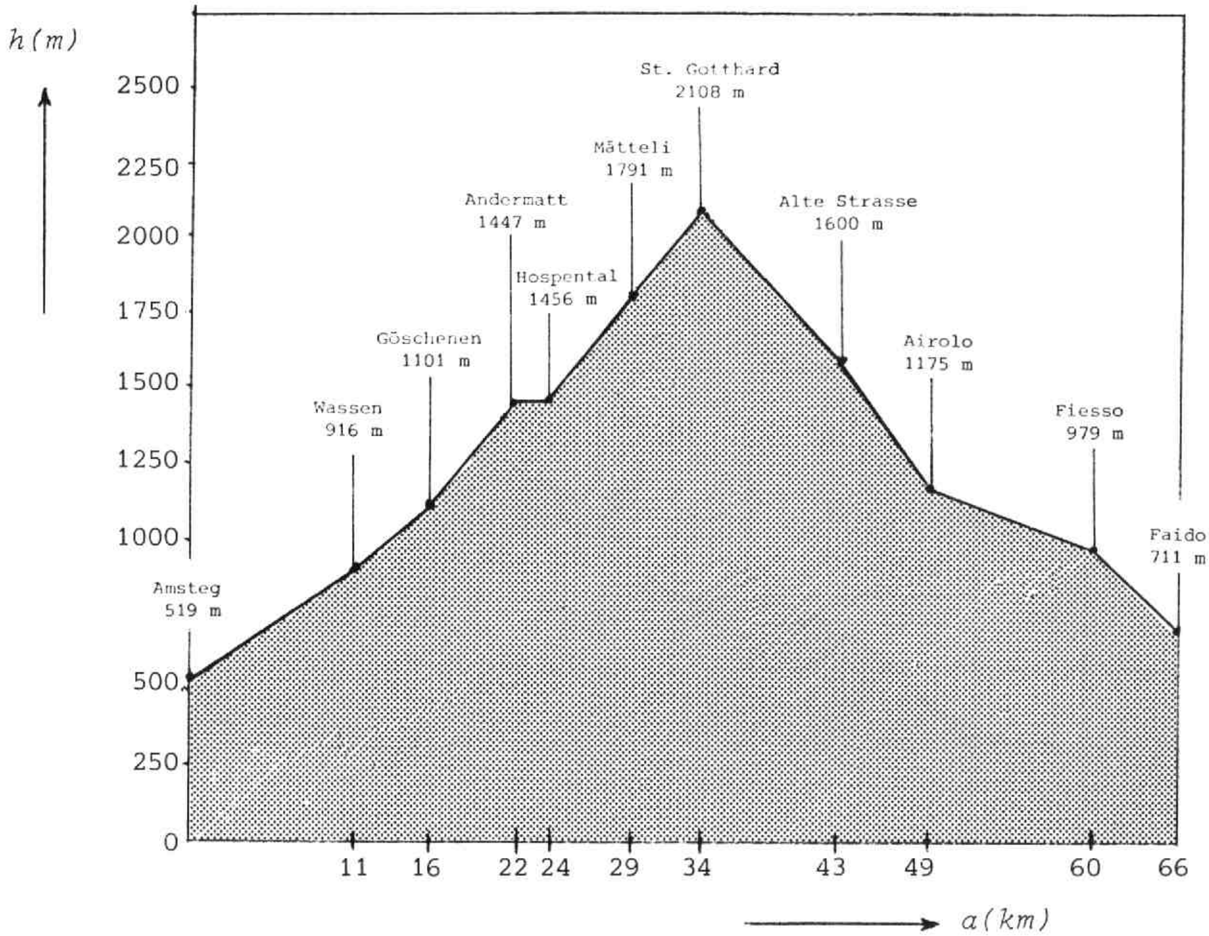
1. De helling van een oprit is 25%.



Hoe komt men aan die 25%?

2. Laat in een tekening zien hoe steil een helling van 10% is.
3. Hoe groot is ongeveer het hellingspercentage van een oprit met een hellingshoek van 30 graden?
4. Hoe groot is de hellingshoek bij een helling van 100%?
5. Vul in (gebruik een rekenmachientje of tabellenboekje):

hellingspercentage	hellingshoek in graden
0 %	________
25 %	________
50 %	________
100 %	________
200 %	________
300 %	________
400 %	________
500 %	________
1000 %	________



h = hoogte (in meters)
a = afstand hemelsbreed tot Amsteg (in km)

1. Wat is de gemiddelde stijging van de weg (in meters per km) tussen Amsteg (h = 519 m) en Wassen (h = 916 m)?

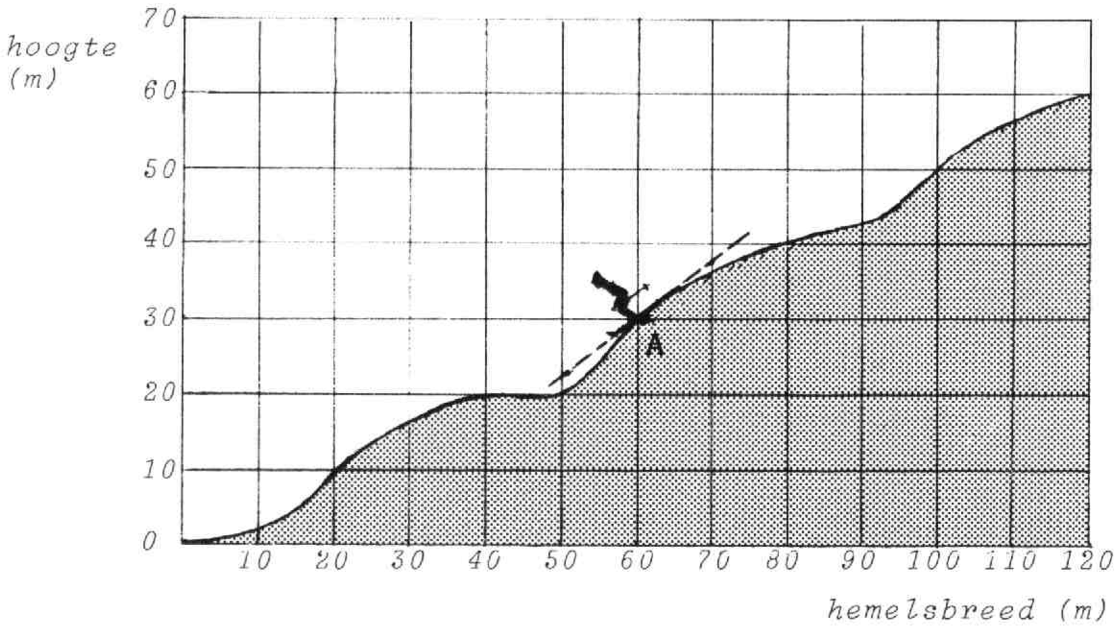
   Voor het hoogteverschil tussen twee plaatsen gebruiken we het symbool $\Delta\ h$. Voor de onderlinge afstand-hemelsbreed tussen twee plaatsen schrijven we $\Delta\ a$.
   Zo is de gemiddelde stijging van de weg tussen Wassen en Göschenen:

   $$\frac{\Delta\ h}{\Delta\ a} = \frac{185}{5} = 37 \text{ meter per km.}$$

2. Bereken $\frac{\Delta\ h}{\Delta\ a}$ van de weg tussen Hospental en Mätteli.
   Wat is het gemiddelde hellings*percentage* van die weg?

3. In het Beste Boek van de weg (uitgave ANWB) staat dat de helling tussen Hospental en Mätteli 10% is.
   Hoe kan dat?

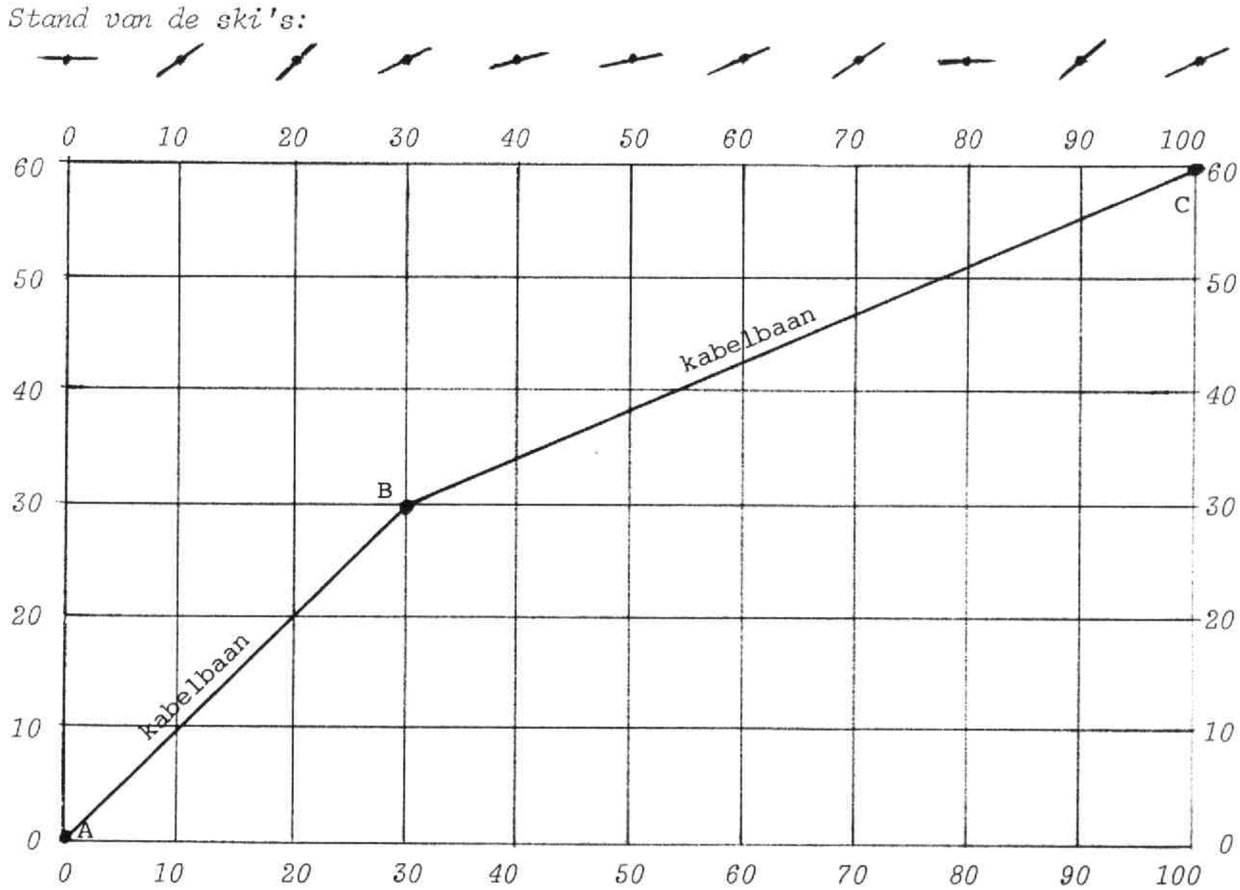
Een berghelling varieert meestal nogal in steilheid.
Als je een dwarsdoorsnede van zo'n berg maakt, krijg je geen mooie rechte lijntjes te zien. Het plaatje van de St. Gotthard is wat dat betreft bedrieglijk. Hieronder zie je het "profiel" van een stukje berghelling, toegankelijk voor skieërs.



1. Hoeveel % is de "gemiddelde helling" van het trajekt?
2. Waar is de helling het steilst?
3. Hoe steil is de helling voor de skieër in het punt A?
4. Meet de hoogte en de steilheid in de punten op 0; 20; 40; 60; 80; 100; 120 m hemelsbreed.
   Zet je antwoorden in een tabel.

afstand hemelsbreed (m)	hoogte (m)	steilheid (hellings-percentage)
0		
20		
40		
.		
.		
.		

Onze skieër heeft een andere helling (100 m hemelsbreed, 60 m hoogteverschil) met veel verve genomen.
In de tekening hieronder zie je drie punten van de helling: A, B, C.
Er loopt een kabelbaan van A via B naar C.
Bovendien zie je de stand van de ski's in de punten op 0; 10; 20; ...; 100 m hemelsbreed van A.
Probeer met behulp van deze gegevens de helling zo goed mogelijk te schetsen.



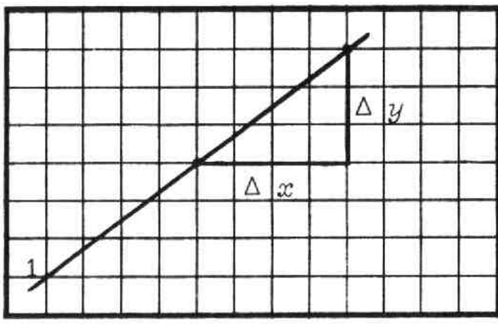
Van een ander stukje berghelling is gegeven:

afstand hemelsbreed (m)	hellings-percentage
0	0 %
10	50 %
20	100 %
30	200 %
40	50 %
50	0 %

Probeer met behulp van deze gegevens het hoogteverschil over 50 m hemelsbreed te schatten.

HELLING VAN EEN RECHTE LIJN

Een rechte lijn in een coördinatenvlak loopt overal even steil t.o.v. de horizontale richting.
We kunnen de helling van zo'n lijn gemakkelijk uitdrukken door middel van een getal.
Dat getal krijgen we door de vertikale toename $\Delta\, y$ ("hoogteverschil") te delen door de horizontale toename $\Delta\, x$ ("afstand hemelsbreed").



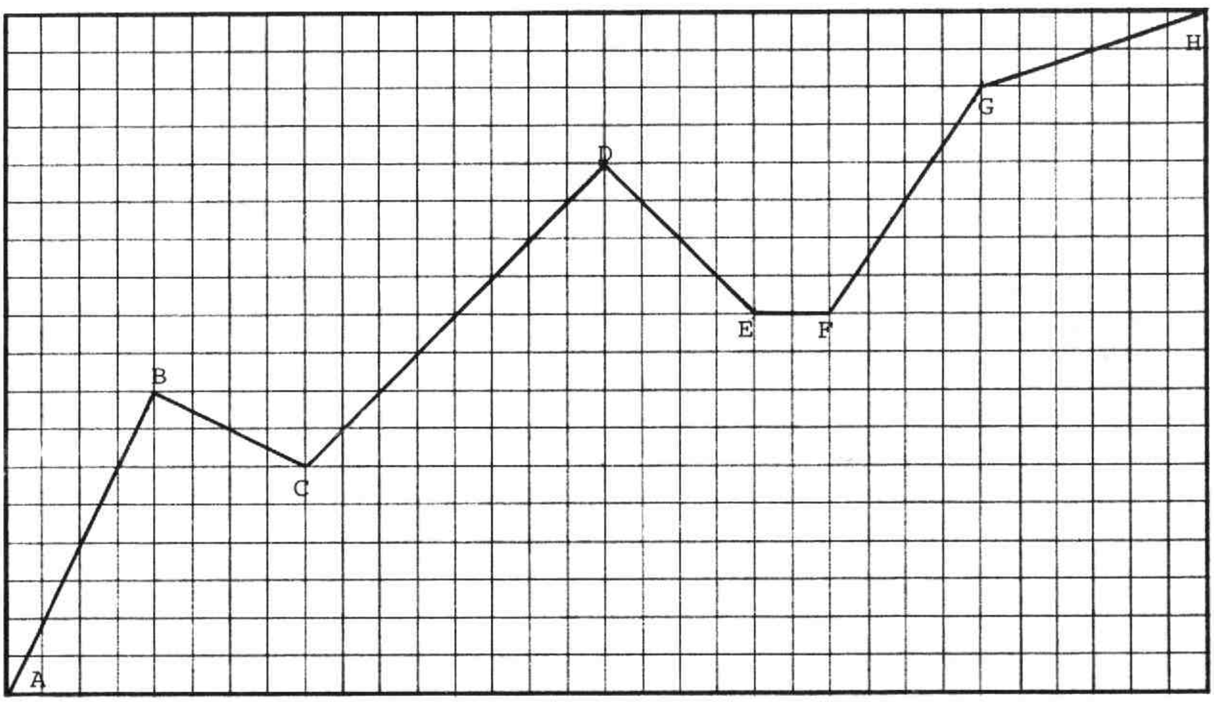
de helling van de lijn 1

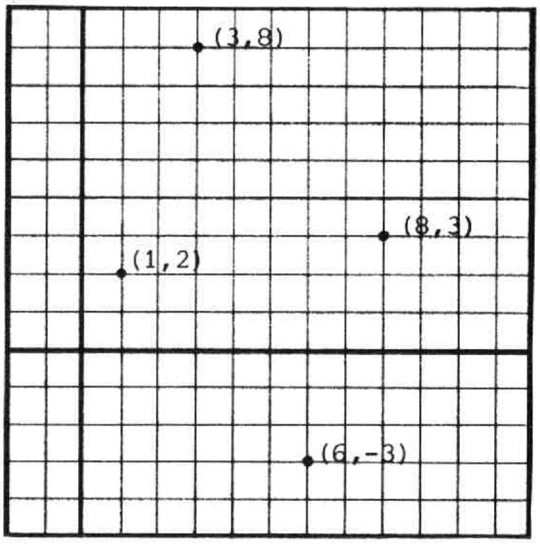
$$= \frac{\Delta\, y}{\Delta\, x} = \frac{3}{4}$$

N.B. We zeggen in de wiskunde dus niet: de helling is 75%!

In plaats van de *helling* van een lijn spreekt men ook van de *richtingscoëfficiënt* van die lijn.

1. Bekijk bovenstaande figuur.
   Hoe groot is $\Delta\, y$ als $\Delta\, x = 8$? En als $\Delta\, x = 2$? En als $\Delta\, x = 1$?
2. De helling van een lijn kan ook negatief zijn! Teken in het plaatje een lijn met een negatieve helling.
3. Bekijk de weg van A naar H (figuur hieronder).
   Wat is de helling van de wegstukken AB, BC, enz.
   Teken ook een weg van A naar H waarbij de wegstukken respektievelijk de helling $\frac{1}{2}$; 2; $-\frac{1}{2}$; 0; $\frac{2}{5}$; -4; $2\frac{1}{4}$ hebben.





1. Gegeven zijn de vier punten (1,2); (3,8); (8,3) en (6,-3). Verbind elk tweetal (van deze vier punten) door een rechte lijn. Bereken de helling van de verbindingslijnen die je getekend hebt.

2. Hoe groot is de helling van de lijn door de punten:

   a. (1,2) en (4,8);
   b. (4,8) en (10,20);
   c. (10,20) en (50,100);
   d. (p,2p) en (q,2q)?

3. Hoe groot is de helling van de lijn door de punten:

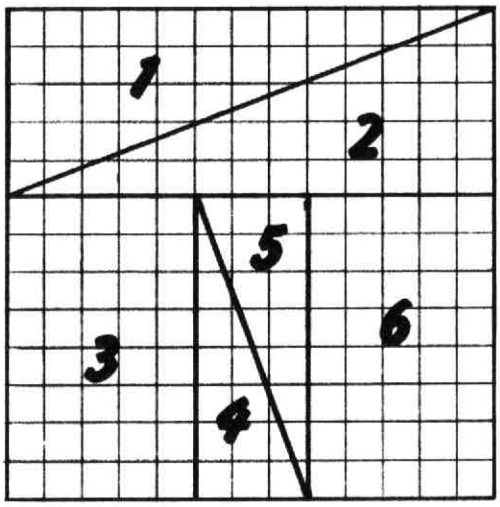
   a. (1,2) en (2,1);
   b. (10,15) en (15,10);
   c. (325,1000) en (1000,325);
   d. (p,q) en (q,p)?

4. Hoe groot is de helling van de lijn door de punten:

   a. (2,4) en (3,9);
   b. (3,9) en (5,25);
   c. (5,25) en (9,81);
   d. (t,t^2) en (s,s^2)?

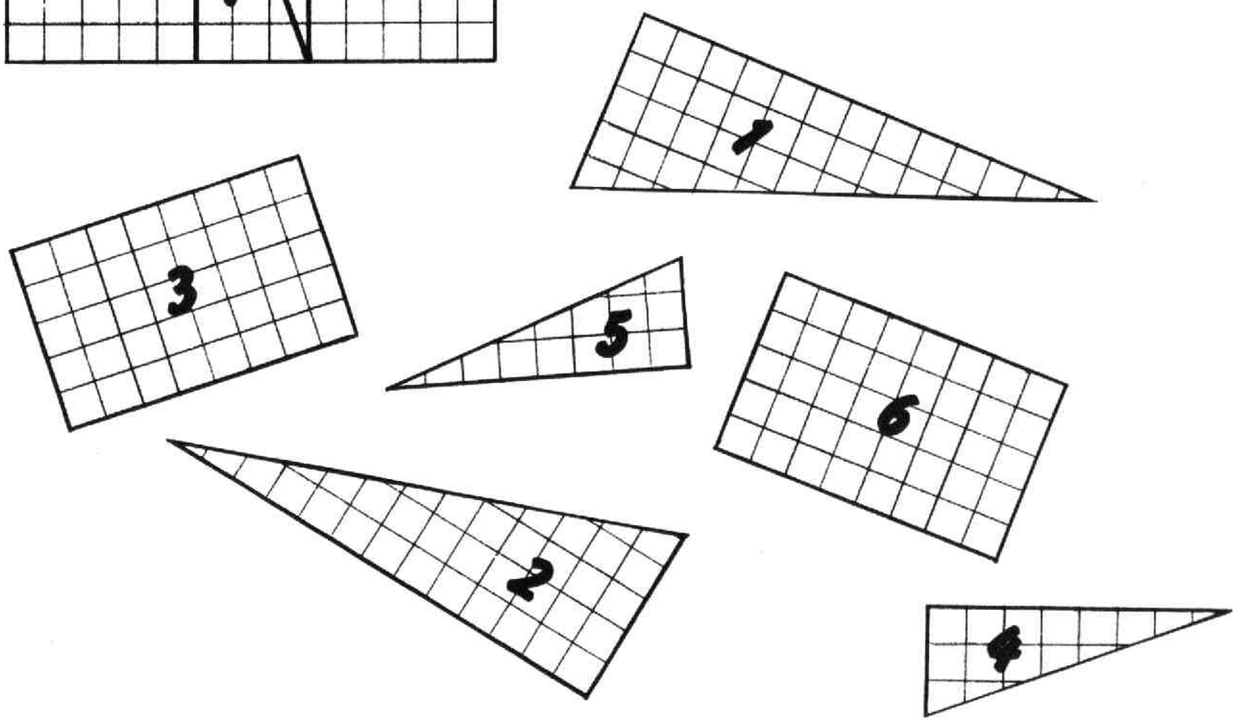
5. Gegeven zijn de punten P:(10,25); Q:(100,475) en R:(1000,4975). Hoe groot is de helling van de lijn PQ? En van QR? Liggen P, Q en R op één rechte lijn? Waarom?

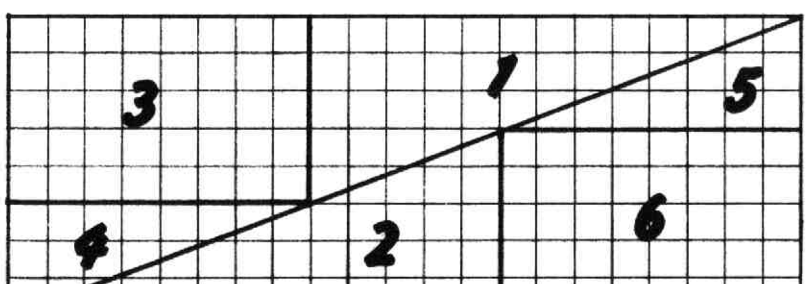
EEN VREEMDE LEGPUZZEL



Aantal vierkantjes

169 (= 13 x 13)





Aantal vierkantjes

168 (= 8 x 21)

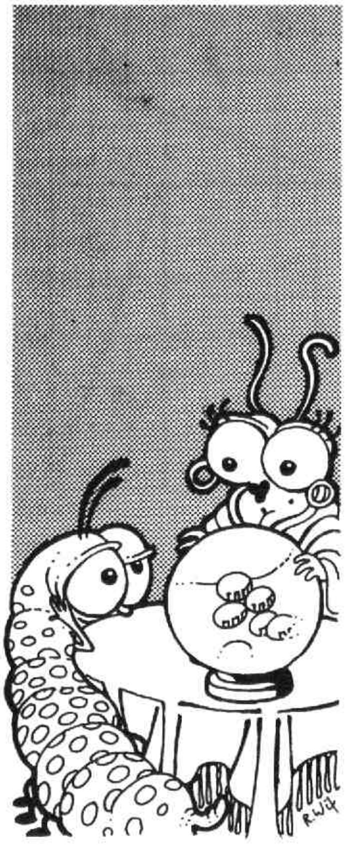
Met de zes figuurtjes kun je op twee manieren een rechthoek maken.
Maar nu is er één vierkantje verdwenen.
Hoe kan dat nou???

TERUGBLIK

De steilheid van een *rechte* lijn in een coördinatenvlak kun je gemakkelijk in een getal uitdrukken.

1. Hoe hebben we dat gedaan?
2. Wat weet je van de lijn als de helling nul is? En als de helling negatief is?

Voor *kromme* lijnen ligt dat minder simpel.
De helling van een kromme lijn is veranderlijk.
In de opdrachten over de skiër heb je gezien hoe je de helling van plaats tot plaats via een rechte lijn kunt benaderen.



VOORUITZICHT

Een rechte lijn waarmee je een kromme zo goed mogelijk benadert, noemen we een *raaklijn*.
Voorlopig tekenen we zo'n raaklijn op "gevoel".
Een beetje draaien met je liniaaltje, tot je het idee hebt, zo klopt het aardig.
Omdat de helling steeds verandert, is het interessant om de helling als funktie van de (horizontale) afstand te bekijken.
Zo'n funktie noemen we (ook voorlopig) een *hellingfunktie*.

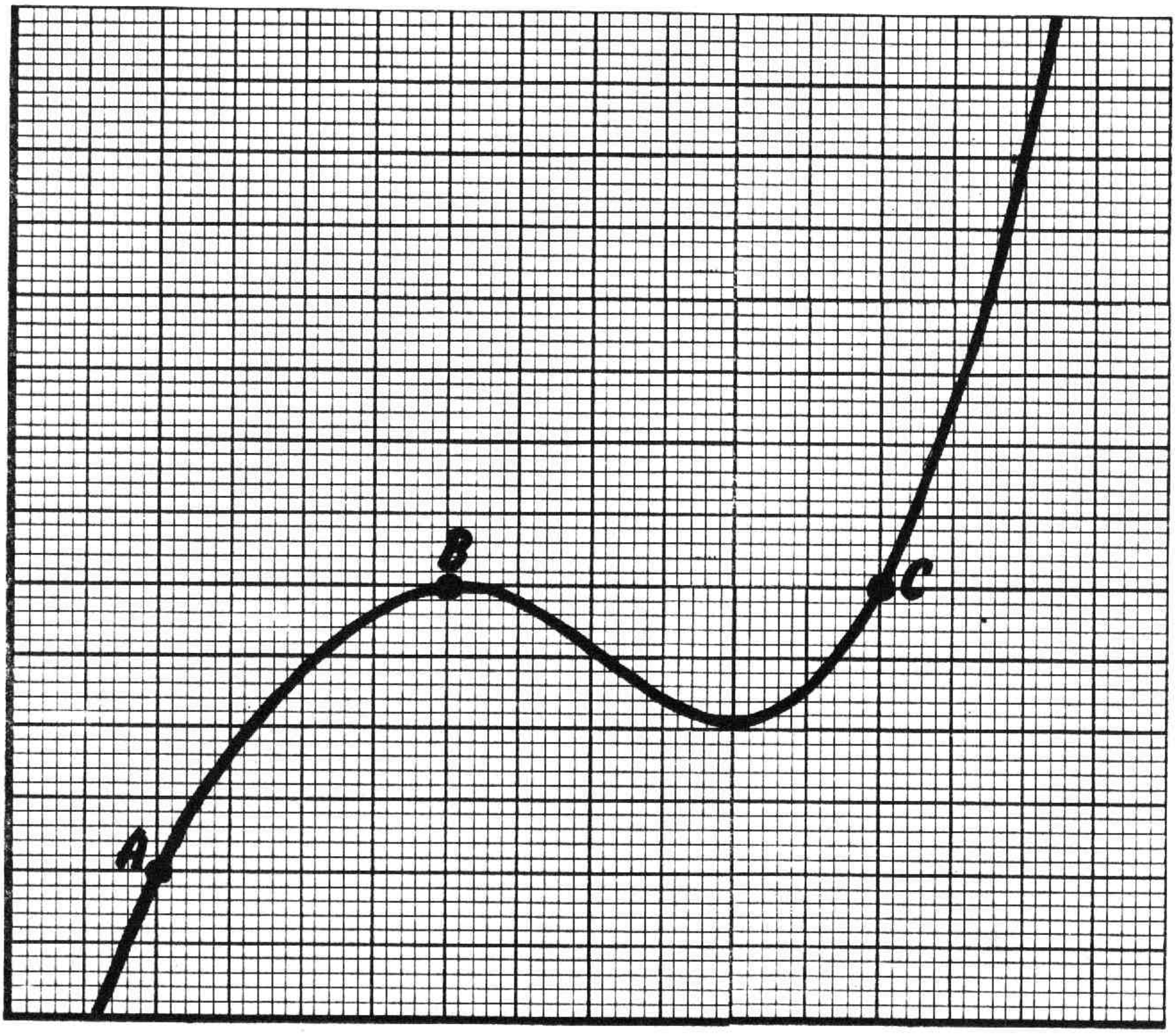
DEEL D

HELLINGFUNKTIES

RAAKLIJNEN TEKENEN D1

Op de kromme lijn zijn drie punten aangestipt.

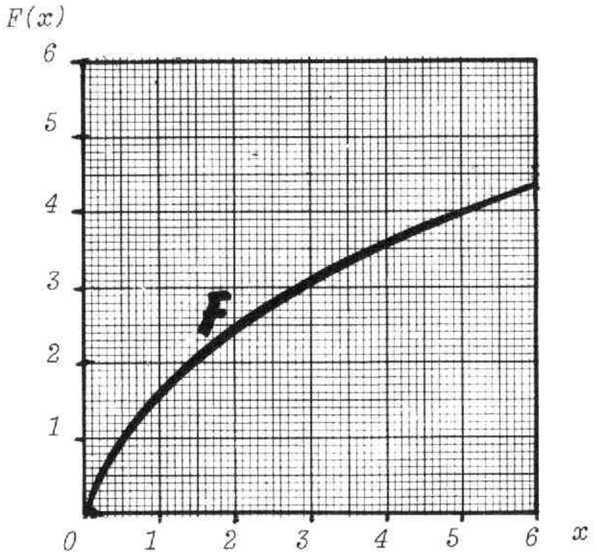
1. Draai een liniaaltje om het punt A, totdat je de "raaklijn-stand" hebt gevonden.
   Teken de raaklijn in het punt A.
   Hoe groot is de helling van de kromme lijn in A?
2. Dezelfde opdracht voor de punten B en C.
3. Hoeveel *horizontale* raaklijnen heeft de kromme lijn?
4. Kleur het deel van de kromme, waar de helling positief is "blauw" en waar de helling negatief is "rood".

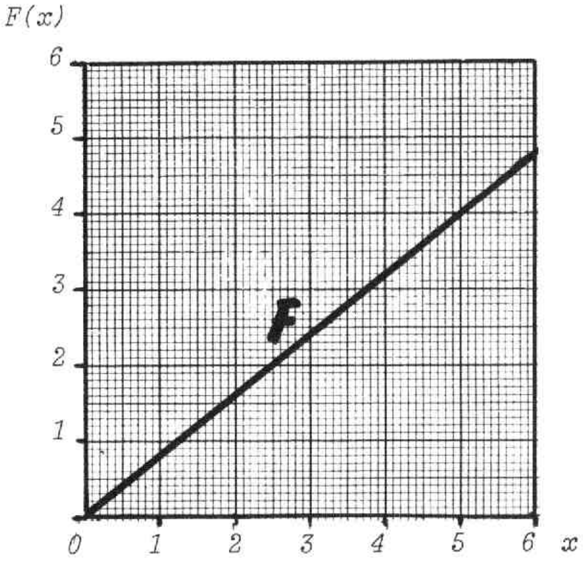


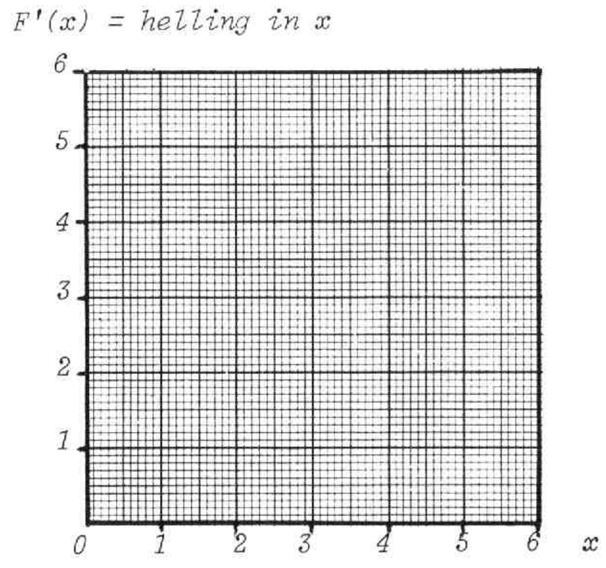
Op deze en de volgende blz. zie je een aantal grafieken. Bij elke grafiek past een funktie F.

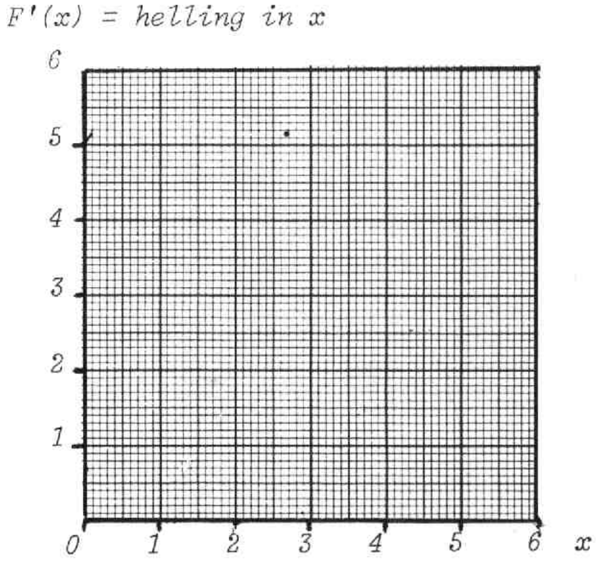
Voer voor elke grafiek de volgende opdrachten uit:

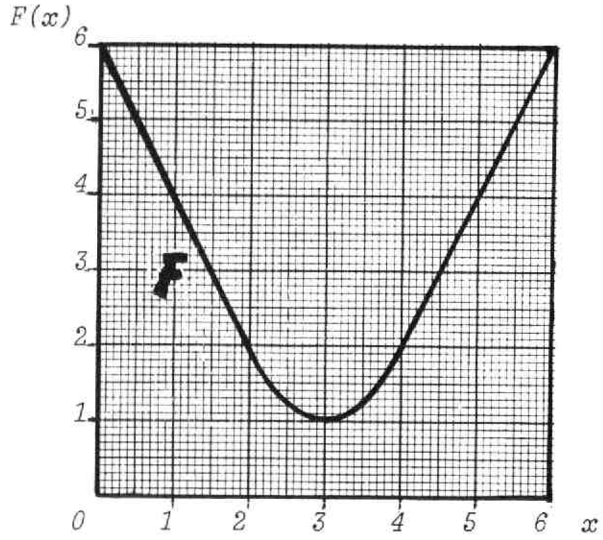
1. Meet in een aantal punten de *helling van de grafiek* (voor kromme lijnen wil dat zeggen de helling van de raaklijn!).
2. Teken een grafiek van de "helling-funktie" F' van F.
   Die hellingfunktie koppelt aan elke x de helling in dat punt.
   Kortweg: F': $x \rightarrow$ helling van F in x.

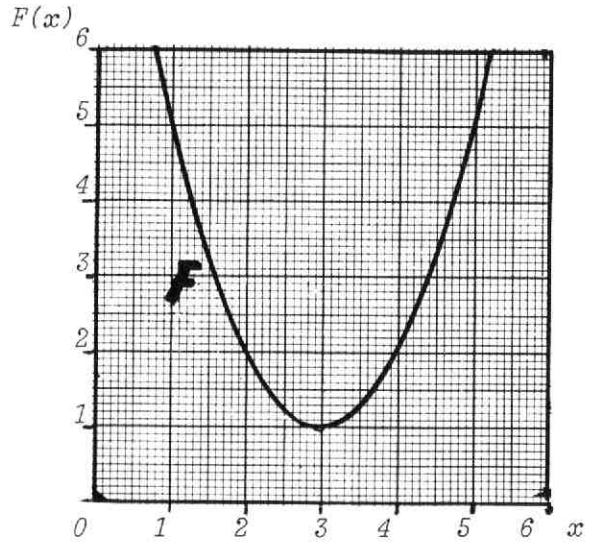


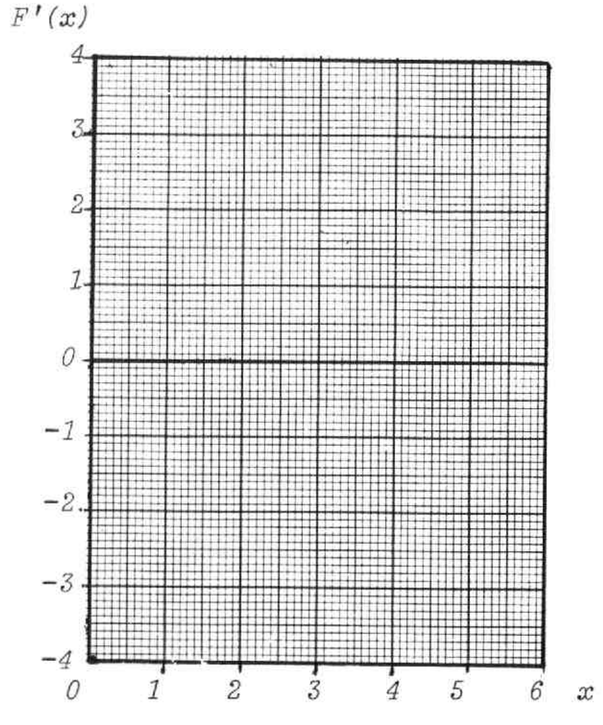


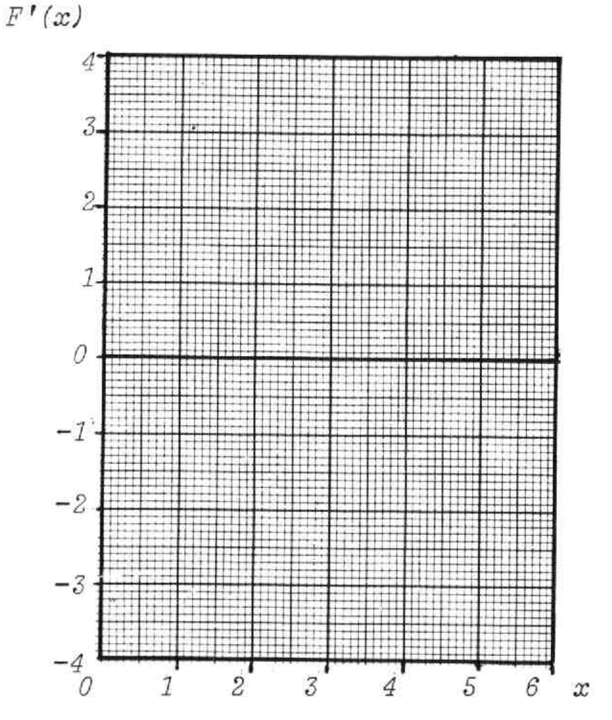


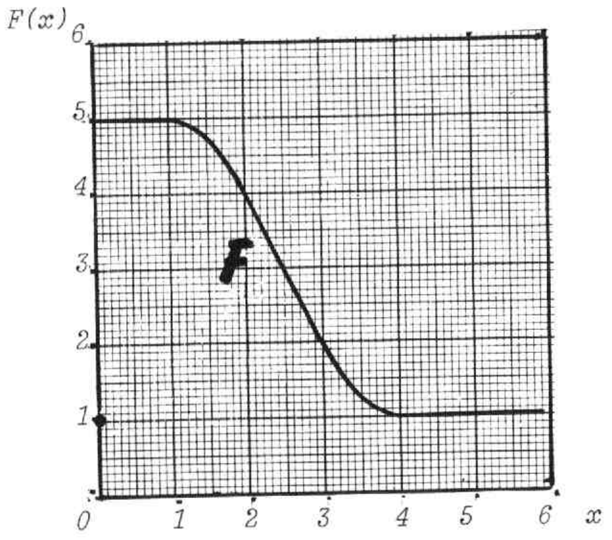


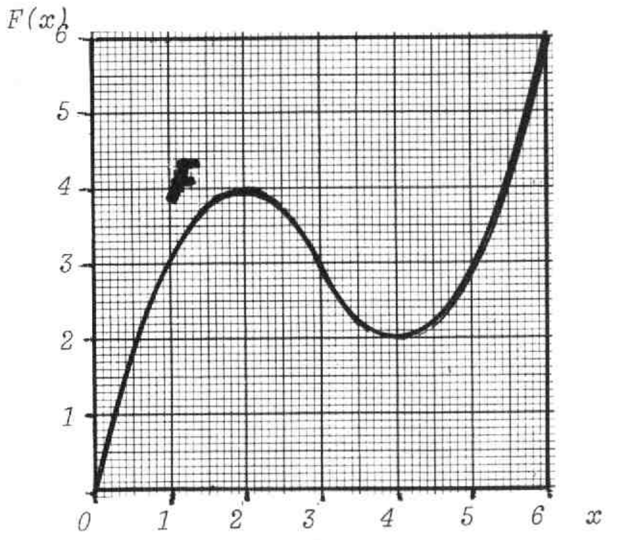

F(x)
6
5
4
3
2
1
0
1
2
3
4
5
6
x
F

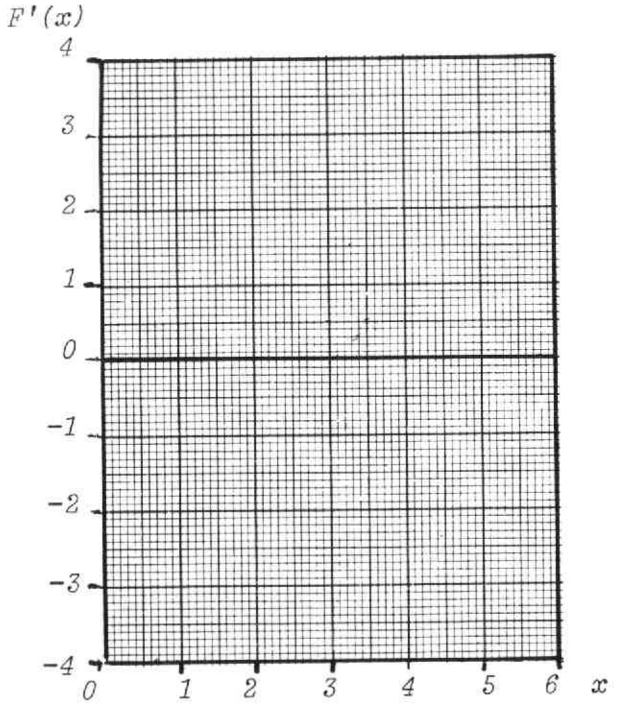

F(x)
6
5
4
3
2
1
0
1
2
3
4
5
6
x
F

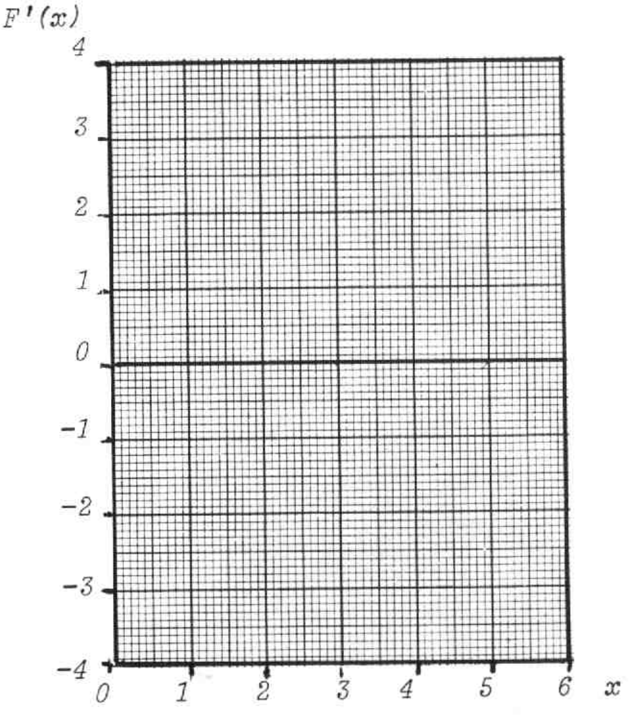

F'(x)
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
0
1
2
3
4
5
6
x


F'(x)
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
0
1
2
3
4
5
6
x


F(x)
6
5
4
3
2
1
0
1
2
3
4
5
6
x
F

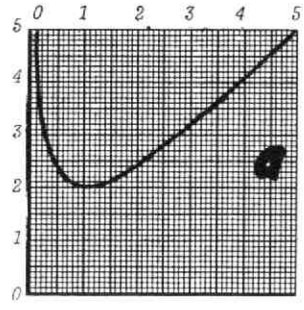

F(x)
6
5
4
3
2
1
0
1
2
3
4
5
6
x
F


F'(x)
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
0
1
2
3
4
5
6
x

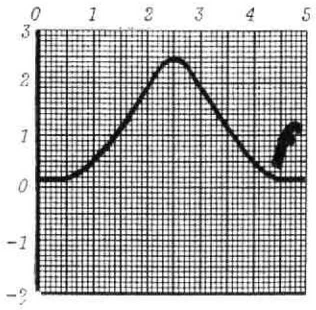

F'(x)
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
0
1
2
3
4
5
6
x

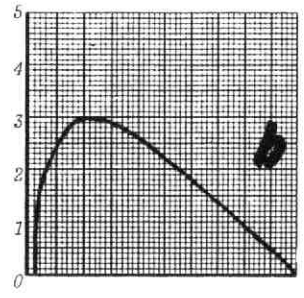
3. Bekijk nog eens de zes bovenste grafieken op de blz. D 2, 3, 4.
   Kleur van elke grafiek het deel waar de helling positief is "blauw" en het deel waar de helling negatief is "rood".
   Zie je een verband met de bijpassende hellingfunkties?
   Zo ja, welk?

4. De grafieken in de rechterstrip stellen de hellingfunkties van de funkties a, b, c, d voor, maar ze staan niet in de goede volgorde.
   Zoek bij elk van de vier de passende hellingfunktie.

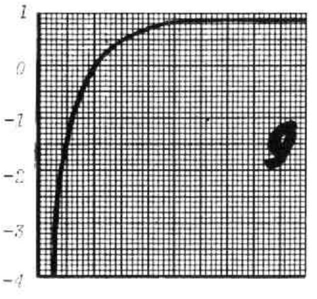


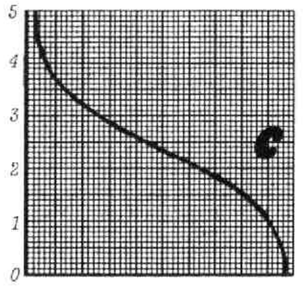
a' = ____



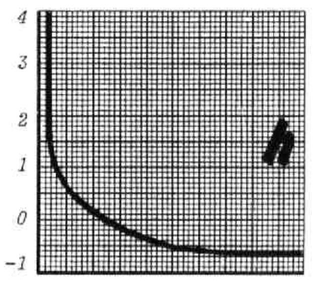


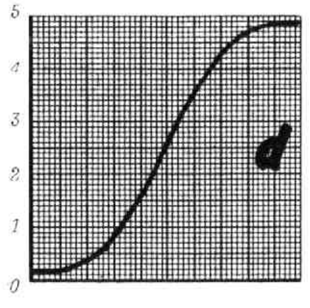
b' = ____



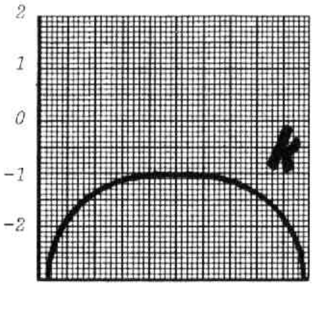


c' = ____



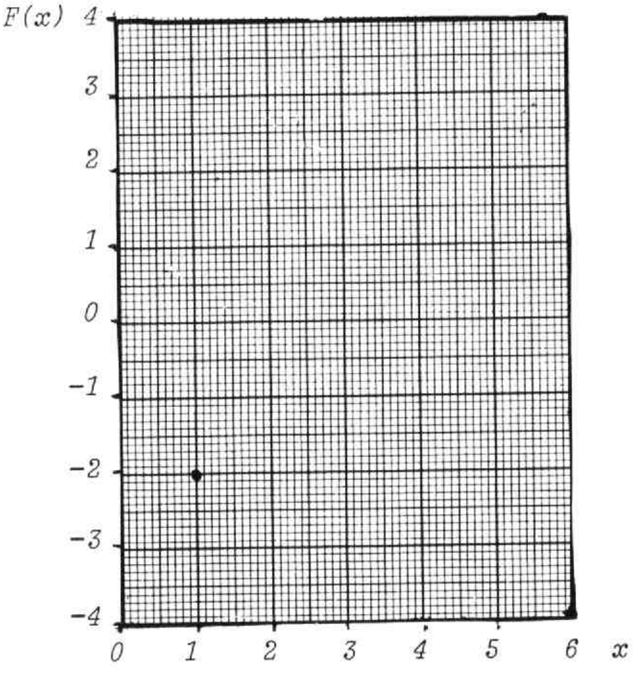


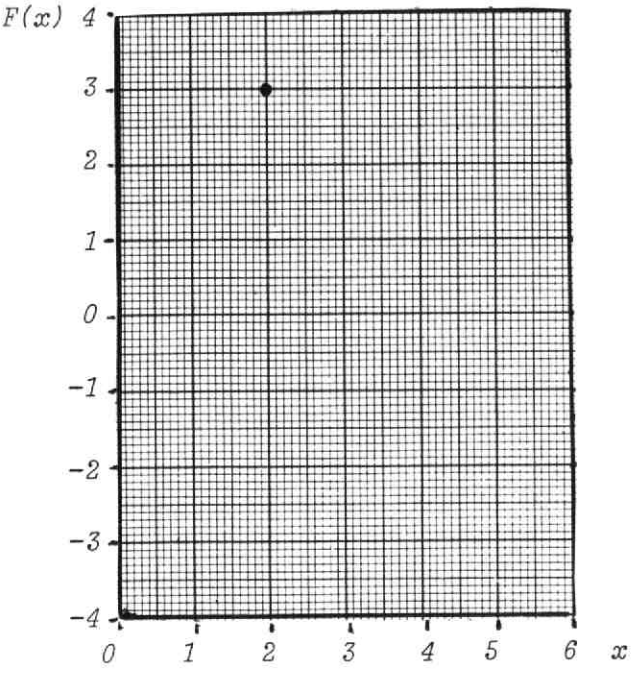
d' = ____

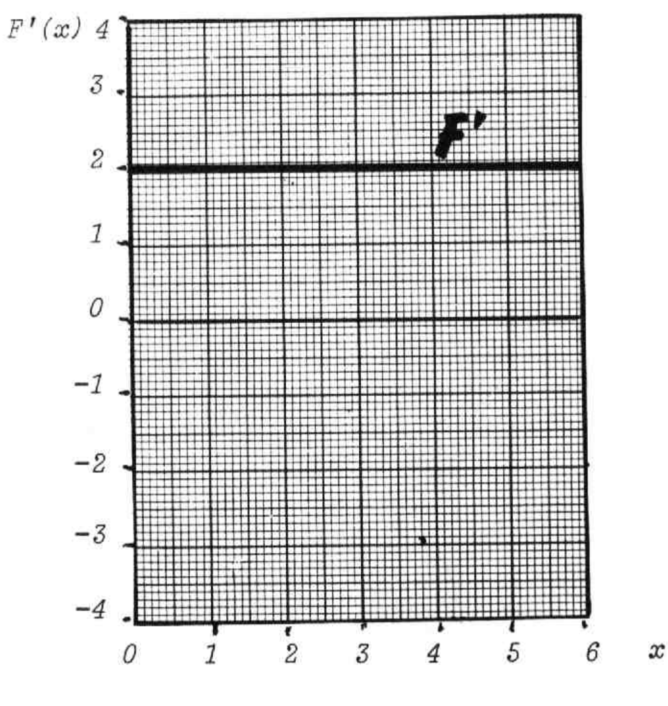


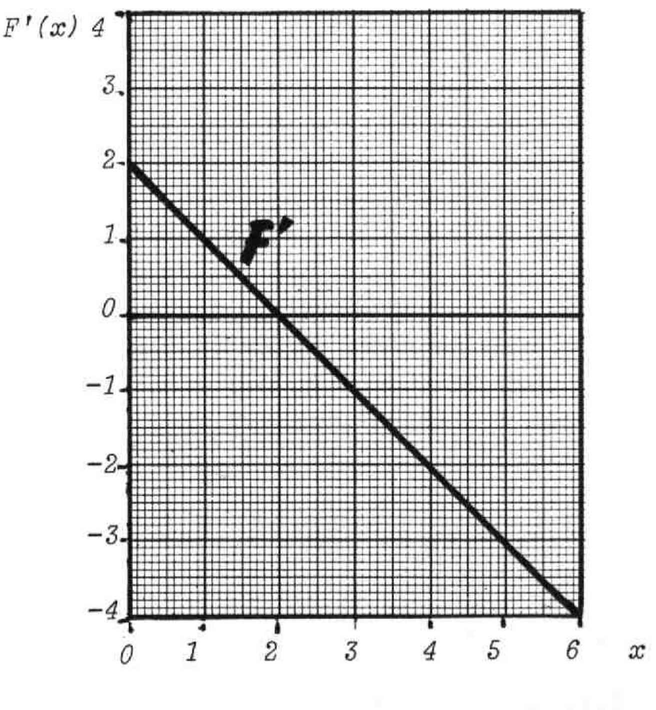
HELLING-FUNKTIES

De hellingfunktie van F is gegeven.
Teken de grafiek van F (één punt is al getekend).









In de gemeente Rommeldam zijn de boetes bij overtreding van de snelheidswet niet mals.

GEMEENTE ROMMELDAM

Politieverordening

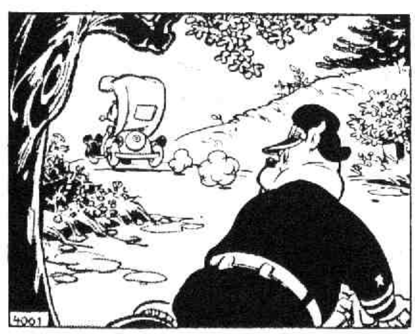
De boetes die opgelegd dienen te worden bij overtreding van Art. 243 uit het Wegenverkeersreglement zijn:

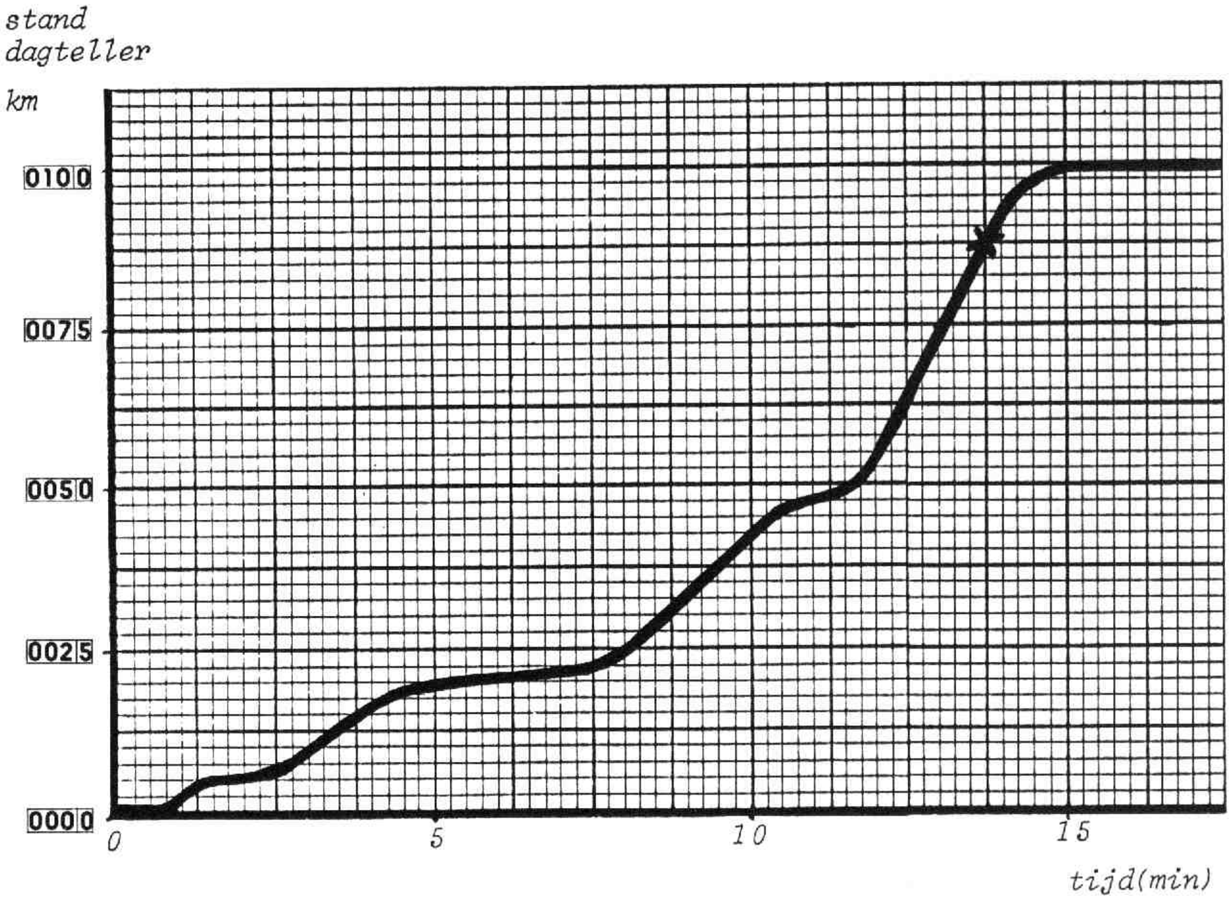
- bij een overschrijding van de toegestane snelheid met ten hoogste 10 km/u bedraagt de boete 25 florijnen;
- bij een overschrijding van meer dan 10 km/u maar ten hoogste 20 km/u is de boete 50 florijnen;
- bij een overschrijding van meer dan 20 km/u maar ten hoogste 30 km/u betaalt de overtreder 100 florijnen

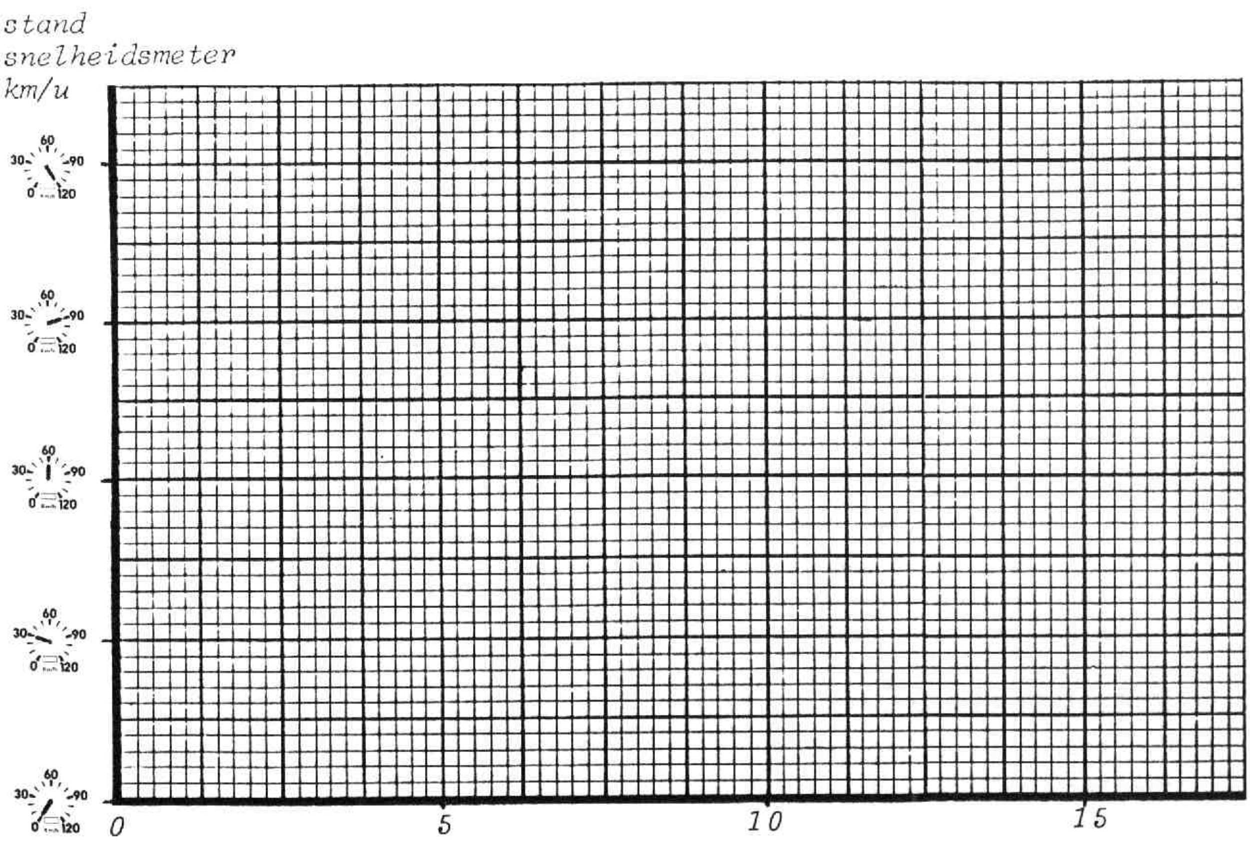
Bij elke volgende 10 km/u boven de toegestane maximum snelheid, dient men de boete opnieuw te verdubbelen.

De burgemeester van Rommeldam

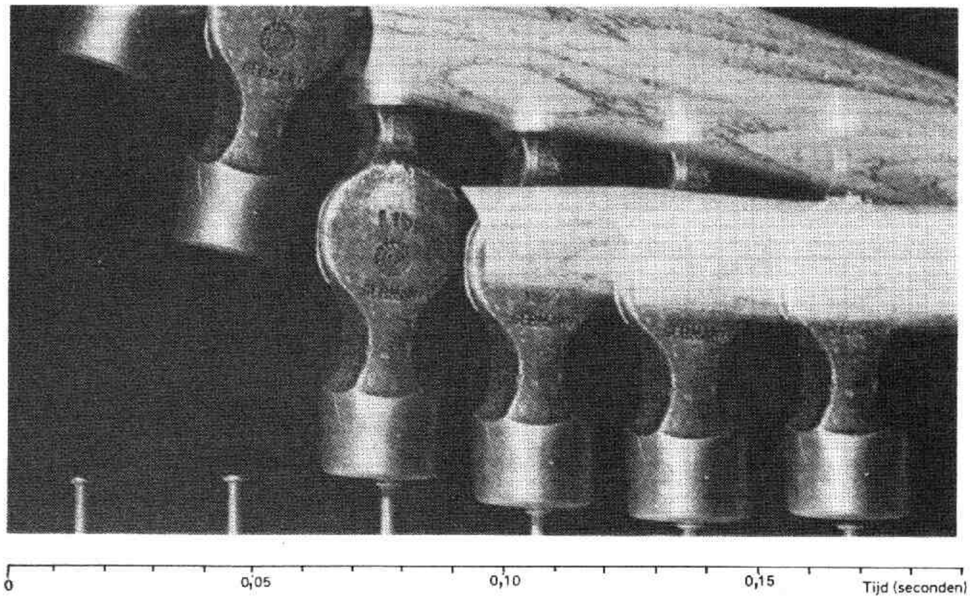
1. Bekijk de grafiek op blz. D8 van Bommels autoritje. Het aangekruiste punt geeft het moment (en de plaats) aan waar Bommels overtreding gekonstateerd werd.
   Hoeveel boete moest Bommel betalen?
2. Teken de grafiek van de snelheid, zoals die op de snelheidsmeter in de Oude Schicht tijdens het ritje werd aangegeven, als funktie van de tijd.
3. Tom Poes die naast Bommel in de auto zat beweerde later nog dat zij bijna de helft van de weg te snel hadden gereden.
   Ben jij het daarmee eens? Leg eens uit.

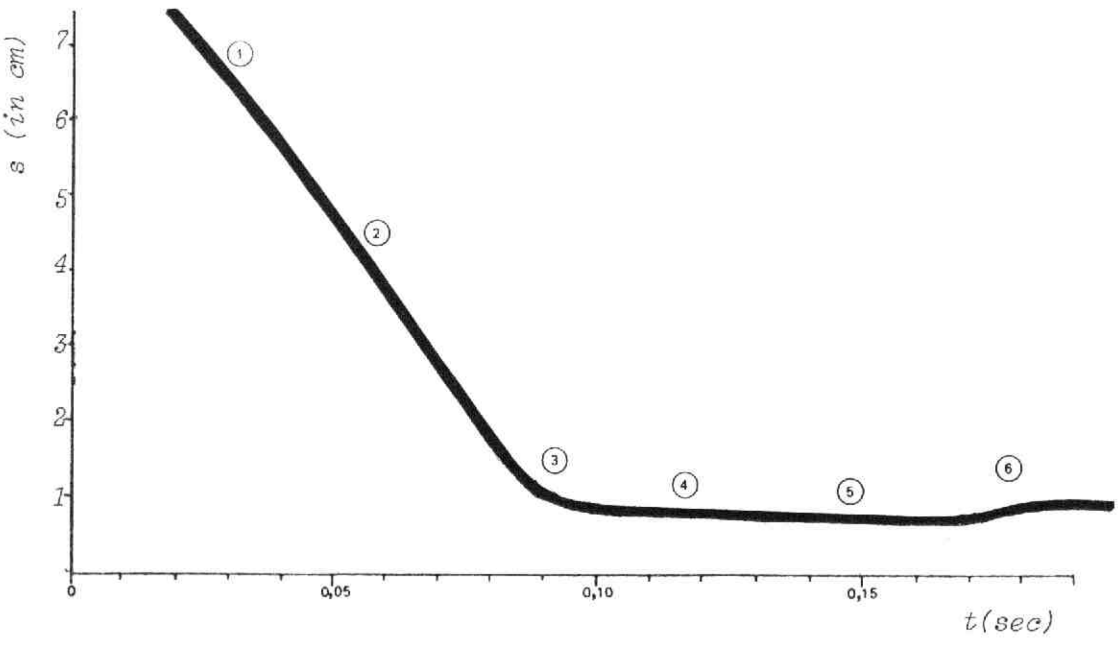



stand
dagteller
km
0100
0075
0050
0025
0000
0
5
10
15
tijd(min)


stand
snelheidsmeter
km/u
0
5
10
15
tijd(min)

Een vallende hamer is afgebeeld in 6 opnamen met intervallen van 0,03 sec.

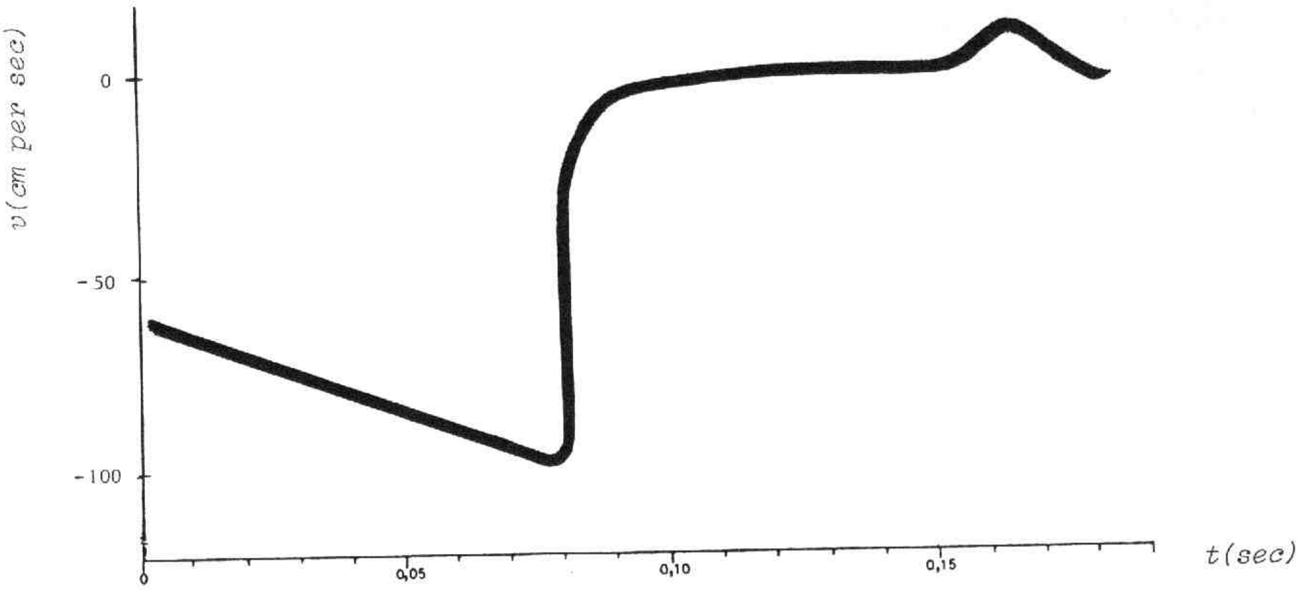




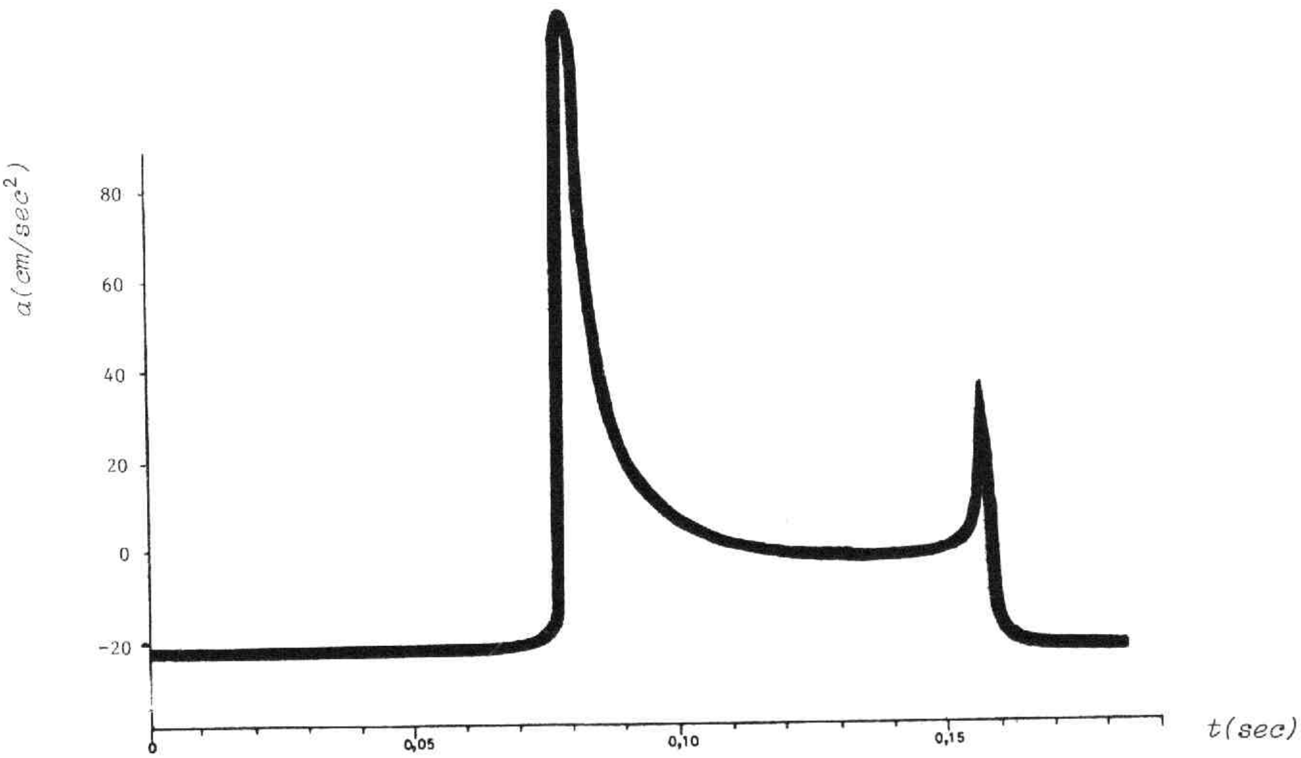
Op blz. D10 zie je een grafiek van de snelheid (v) van de hamer als funktie van de tijd.

1. Kontroleer die grafiek in de punten t = 0,05; t = 0,10; t = 0,15.

2. Hoe zou je beide grafieken (tijd-plaats en tijd-snelheid) kunnen voortzetten?



De snelheidsfunktie is de hellingfunktie van de plaatsfunktie. Omdat de snelheid van de hamer voortdurend verandert, is het interessant om ook de hellingfunktie van die snelheidsfunktie te bekijken.



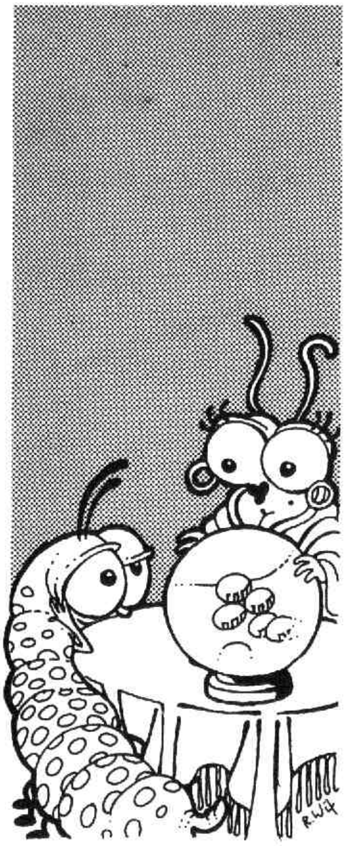
De maat voor de verandering van de snelheid noemt men *versnelling*. De versnelling is gemeten in cm/sec per sec, of zoals de natuurkundige zegt: cm/sec^2.

3. In welke periode is de versnelling konstant? Wat betekent dat voor de snelheid?
4. Welke gebeurtenissen horen er bij de twee pieken in de versnellingsgrafiek?

TERUGBLIK

Als je van een funktie de grafiek kent, kun je de grafiek van de hellingfunktie schetsen.
Omgekeerd geeft de hellingfunktie informatie over de oorspronkelijke funktie.

1. Wat weet je van de oorspronkelijke funktie in een gebied waar de hellingfunktie positief (resp. negatief) is?
2. Wat weet je van de oorspronkelijke funktie als de hellingfunktie een horizontale lijn is?
3. Stel dat de oorspronkelijke funktie een tijd-plaats-funktie is.
   Wat stelt de hellingfunktie dan voor?

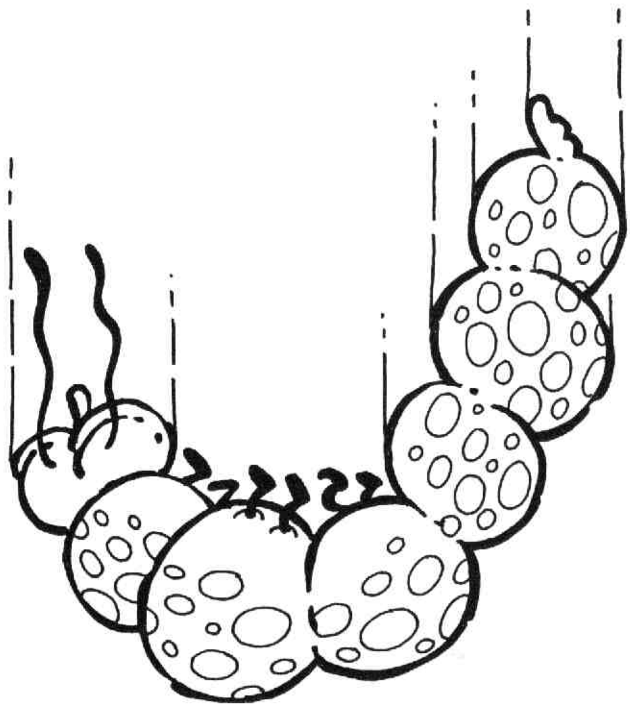


VOORUITZICHT

Tot nu toe hebben we de helling in een punt van een kromme lijn bepaald door het "op-gevoel-tekenen" van een raaklijn.
In veel gevallen geeft dat op-gevoel-tekenen echter een onnauwkeurig resultaat.
Er bestaat echter een betere methode om de hellingfunktie te vinden!
Maar voor die betere methode is nodig dat je meer van de funktie weet dan alleen een grafiek.
Je hebt een *formule* nodig waarmee de funktie beschreven wordt. Een bekend voorbeeld van een funktie waarbij we over een formule beschikken is de zogenaamde vrije val.
Daarover gaat deel E.

DEEL E

VRIJE VAL



De zwaarste bommenwerper ter wereld is de Boeing B-52H Stratofortress met 8 straalmotoren en achterwaarts gerichte vleugels; het maximumstartgewicht bedraagt 221,35 ton.
Het toestel heeft een vleugelspanwijdte van 56,38 m en is 48,02 m lang.
De snelheid is maximaal 1050 km/u
De B-52 kan 12 zware bommen (340 kg) vervoeren onder elke vleugel en 84 bommen van 226 kg in de romp.
Het totale gewicht aan bommenlading bedraagt dus 27.144 kg.

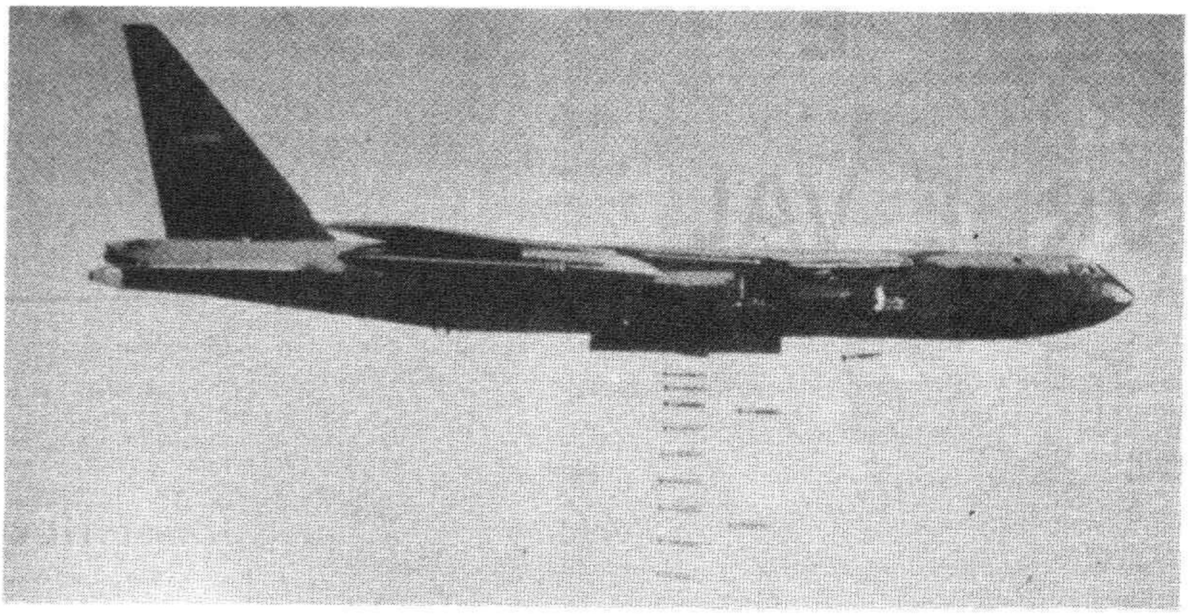
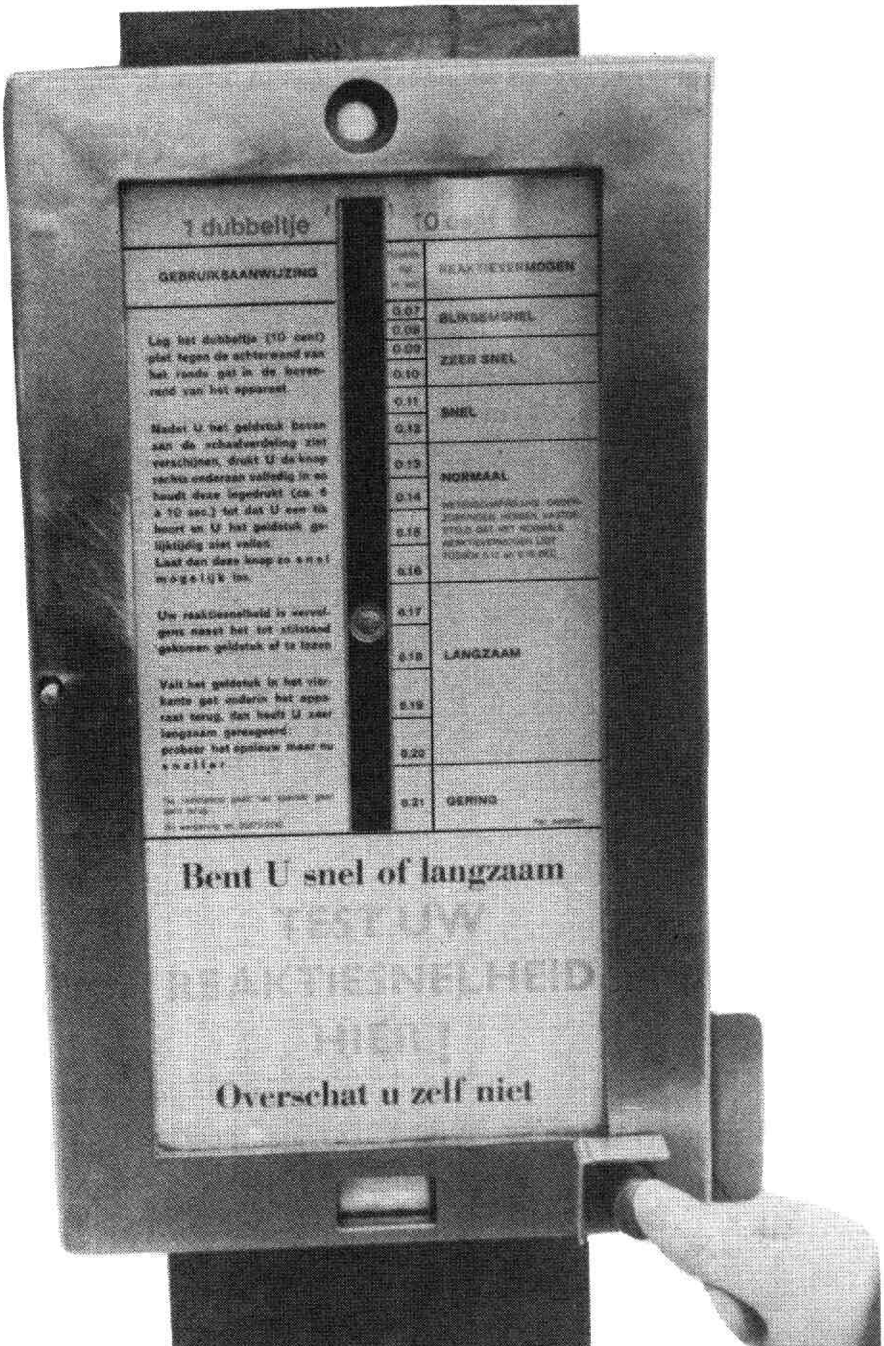


Foto genomen tijdens bombardement van Vietnam

Bekijk de foto van de bommenwerper.
De bommen worden met gelijke tussenpozen gedropt.
Klopt dat met wat je op de foto ziet?

REAKTIE-AUTOMAAT

In de stationshal van Utrecht CS staan automaten, waarmee je je reaktiesnelheid kunt meten. De bedoeling is om het ingebrachte dubbeltje, zodra dit gaat vallen, zo snel mogelijk tot stilstand te brengen.

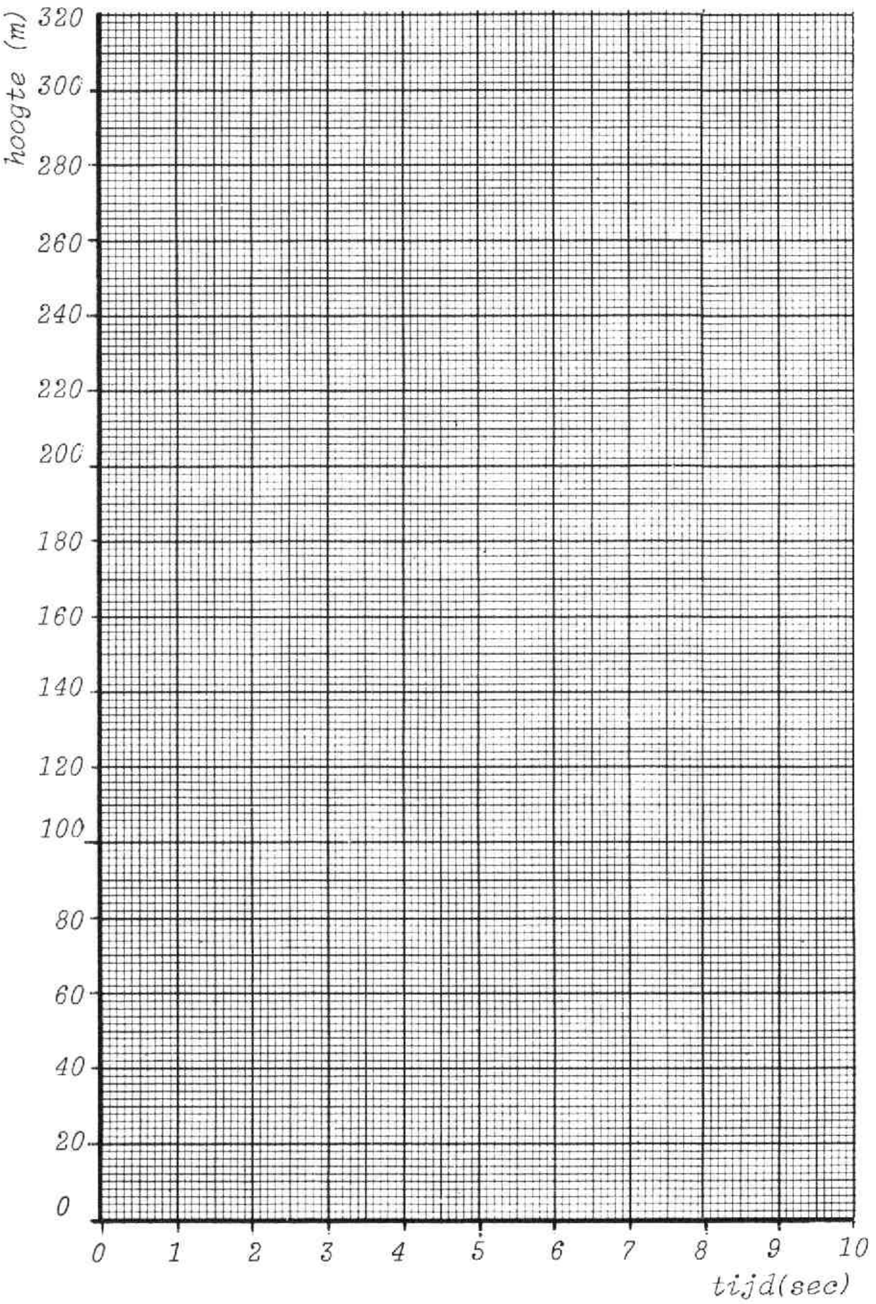


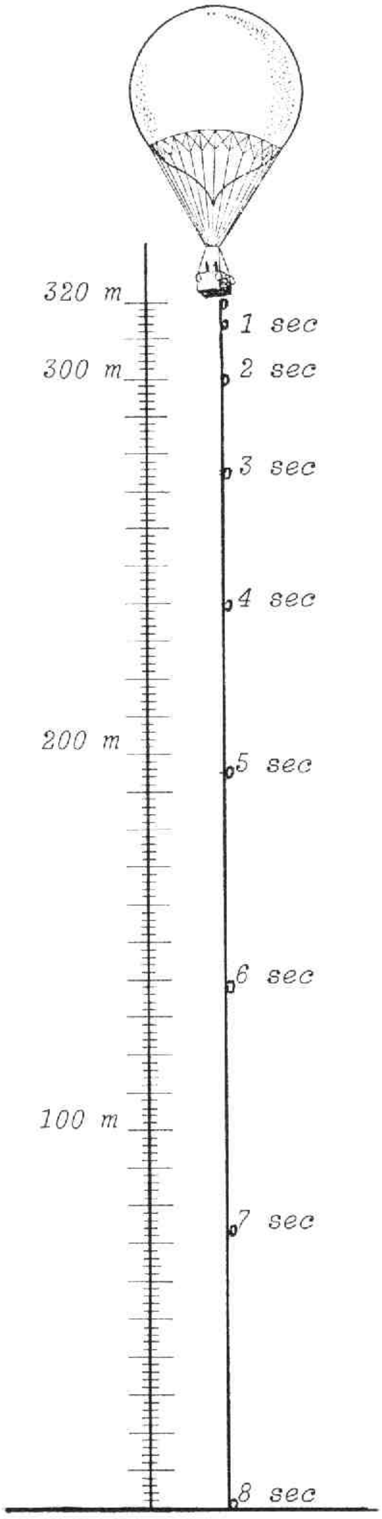
Lees de tekst op het apparaat en bekijk de kolom van de reaktietijd.
Meet de aangegeven tijdsintervallen van 0,01 sec met een liniaal.
Is die schaalverdeling wel eerlijk?

BALLAST OVERBOORD

Uit een ballon op 320 m hoogte wordt een zandzakje geworpen.
In de tekening kun je zien, waar dat zakje zich na 1, 2, 3, ... 8 sec bevindt.

1. Teken de grafiek die het verband aangeeft tussen de tijd die het zakje onderweg is en de hoogte waarop het zich bevindt.
2. Hoe kun je in die grafiek zien dat het zakje steeds sneller valt?





BALLAST OVERBOORD

Bij een vrije val letten we meestal op de *valweg* (= gevallen afstand) als funktie van de tijd.

3. Teken de grafiek van die funktie.
   Via experimenten is komen vast te staan dat de valweg s als funktie van de tijd t bij benadering gegeven wordt door de formule:

   $$s = 5t^2$$

4. Hoe kun je nu de hoogte h van het zakje als funktie van t met een formule beschrijven?

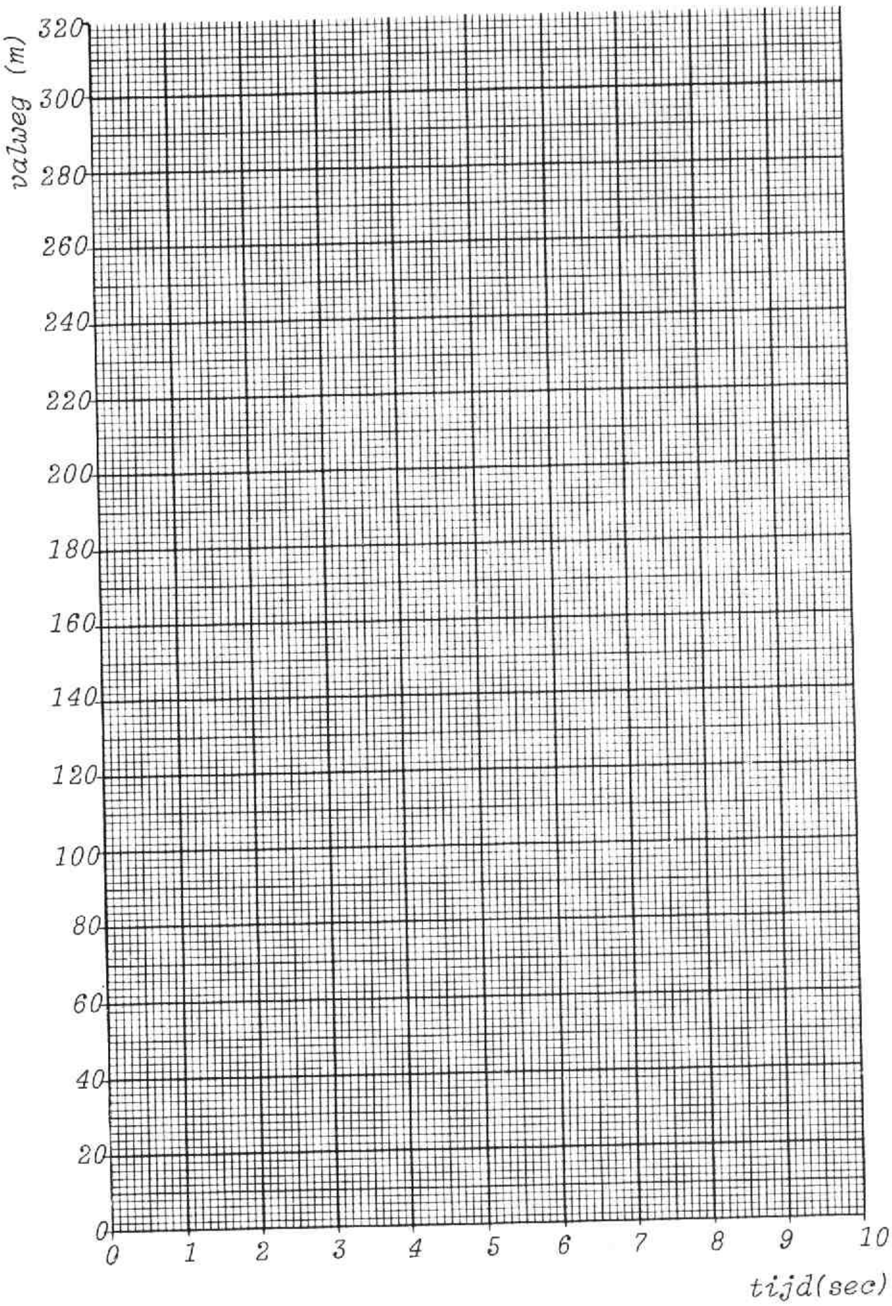
Precies 1 sec na het loslaten van het eerste zakje laat men een tweede zakje uit de ballon vallen.

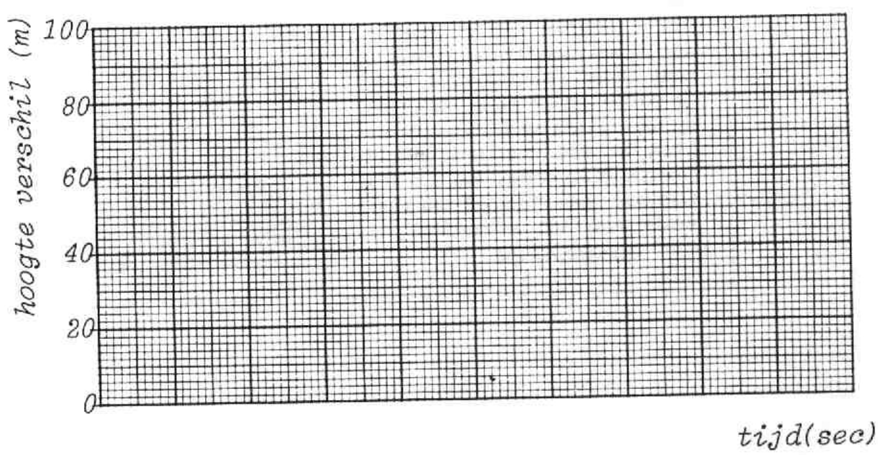
5. Teken de grafiek van de valweg van het tweede zakje als funktie van de tijd.

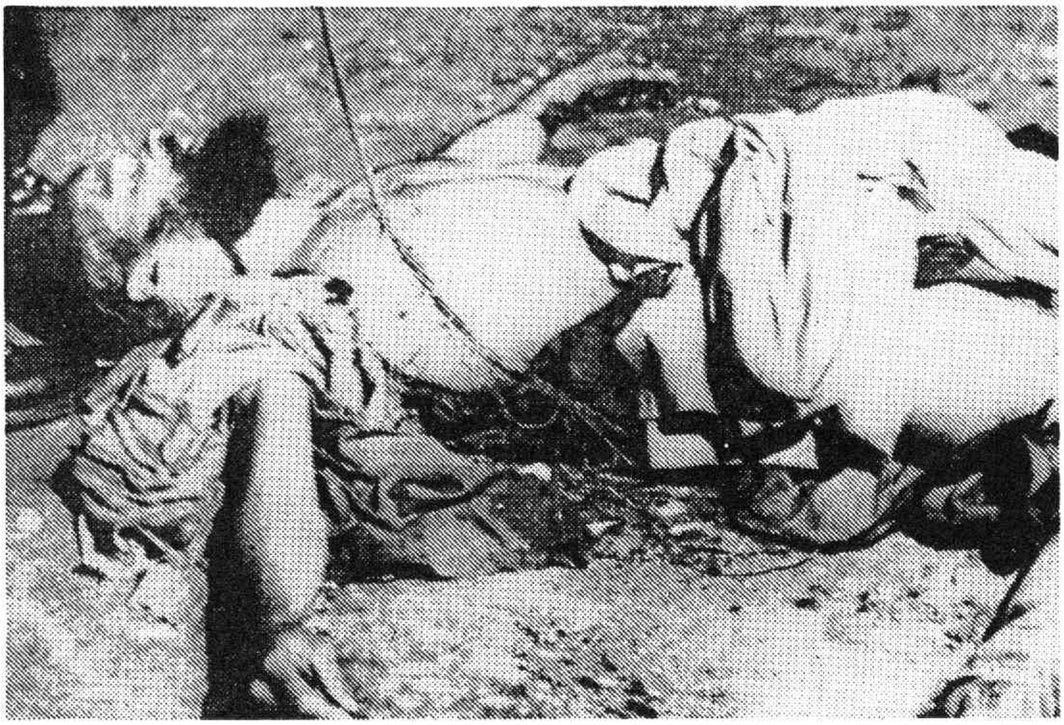
6. Hoeveel seconden later dan het eerste zakje bereikt het tweede zakje de grond?

7. Teken de grafiek van het *hoogteverschil* tussen de twee zakjes als funktie van de tijd, op het tijdsinterval van 1 tot en met 8 sec.

8. Die laatste grafiek is een rechte lijn.
   Dat had je kunnen voorspellen aan de hand van de foto's op blz. E1 en E2.
   Verklaar dat.

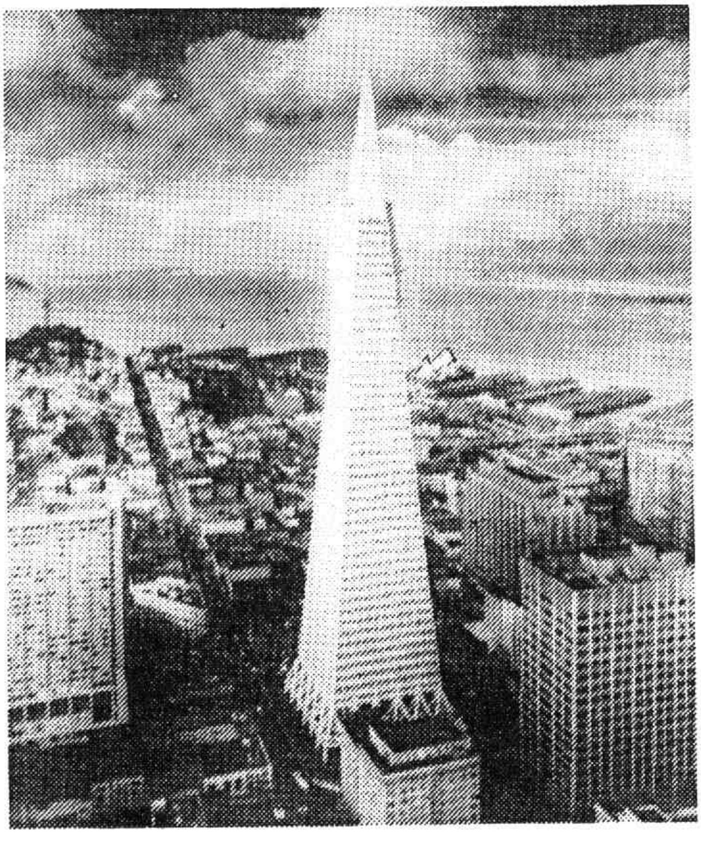






Amerikaan overleeft val van 110 m

De 22-jarige Amerikaan Harold Brown heeft niets anders dan knie-, dijbeen- en hielfracturen overgehouden aan een val van 110 meter door een luchtverversingskanaal in het piramidevormige Transamerica-gebouw in San San Francisco. Volgens de doktoren is het een wonder dat Brown, die op een betonnen vloer terecht kwam, zijn val heeft overleefd. De jongeman was het gebouw na sluitingstijd binnengedrongen al roepend: "Ik wil de man aan de top zien. Ik ben de afgezant Gods". Achtervolgd door de politie rende hij de trappen op tot hij zich op de 27e verdieping in het ventilatiekanaal stortte. Men schat dat hij bij zijn val een snelheid ontwikkelde van 160 kilometer per uur. (Reuter,AFP.)



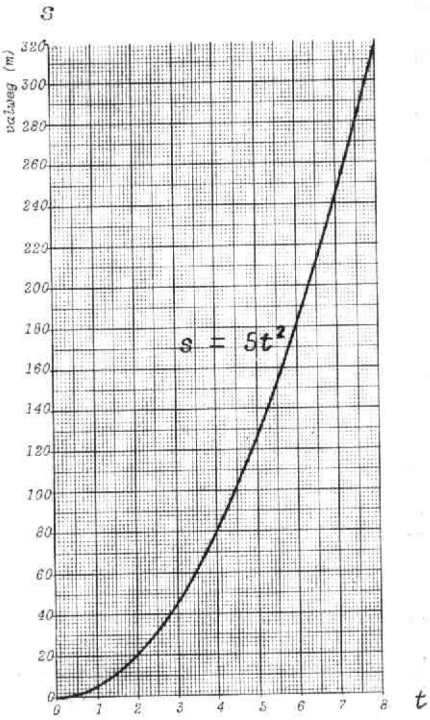
VALSNELHEID

De vrije val op aarde, of het nu een zandzakje, een hagelkorrel of een duiker van de hoge plank betreft, kan worden beschreven door de formule:

$s = 5t^2$ (s = valweg in m; t = valtijd in sec)

(Deze formule werd ontdekt door de Italiaanse astronoom en natuurkundige Galileï omstreeks het jaar 1585.
Het verhaal zegt dat hij zijn proeven deed met kleine kanonkogels die hij liet vallen van de gaanderijen in de scheve toren van Pisa).

Bekijk het kranteartikeltje op blz. E5.



Laten we aannemen dat Harold Brown een vrije, d.w.z. ongeremde val heeft gemaakt.

1. Hoeveel seconden duurde zijn val ongeveer?
2. Meet in de grafiek met welke snelheid ongeveer (in m/sec) hij is neergekomen.
3. Hoeveel km/u is dat?
   Klopt dat met het getal dat in het kranteartikeltje (blz. E5) genoemd wordt?

In een andere krant stond dat Harold Brown in zijn val afgeremd werd door botsingen tegen de wand van het luchtverversingskanaal. En gezien de hoge snelheid die bij een *vrije* val over 110 m wordt ontwikkeld lijkt het waarschijnlijk dat dit zijn redding is geweest.

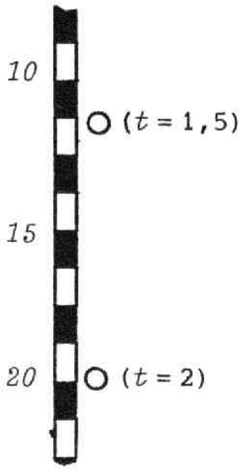
Je weet inmiddels dat de snelheid van een vallend objekt toeneemt met de valtijd. De snelheid kun je op elk gewenst moment schatten met behulp van een raaklijn aan de grafiek.

PROBLEEM: HOE KAN DE SNELHEID OP ELK GEWENST MOMENT WORDEN BEREKEND?

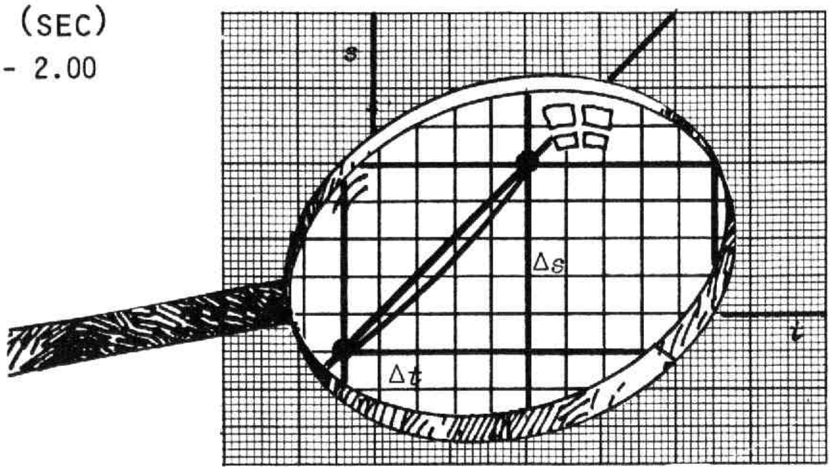
Als eerste voorbeeld kunnen we het moment $t = 2$ (de valweg is dan 20 meter).

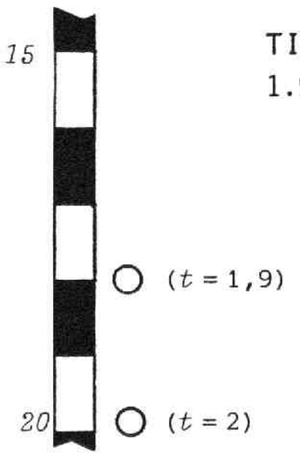
Uitgangspunt: *gemiddelde snelheid* kan voor elk interval exakt berekend worden!

Bekijk nu de plaatjes op blz. E7 en E8.

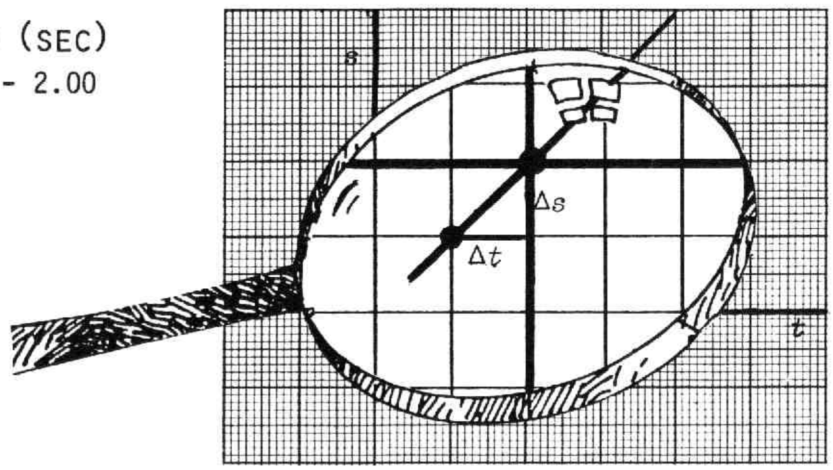


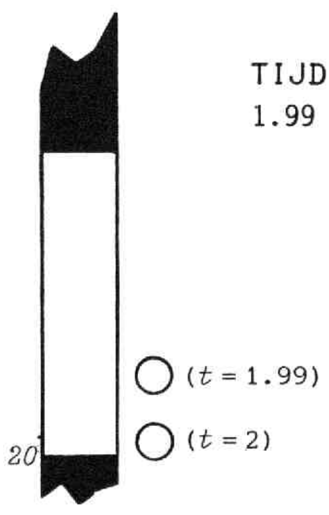
TIJD (SEC)
1.50 - 2.00



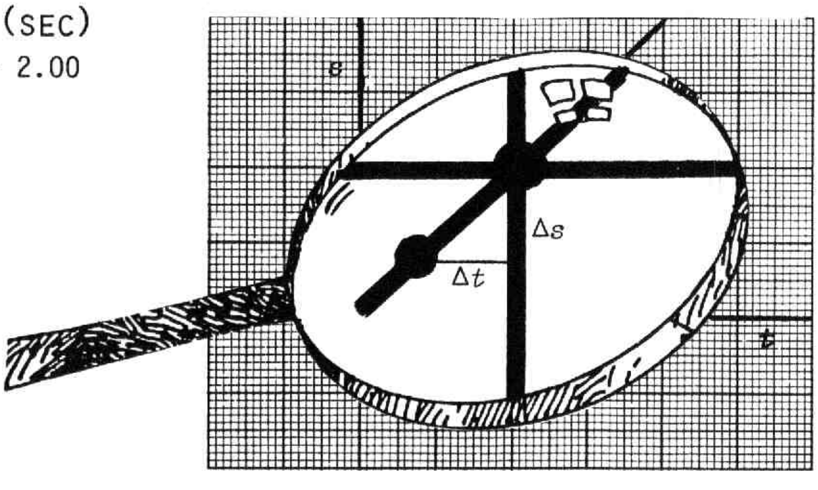


TIJD (SEC)
1.90 - 2.00

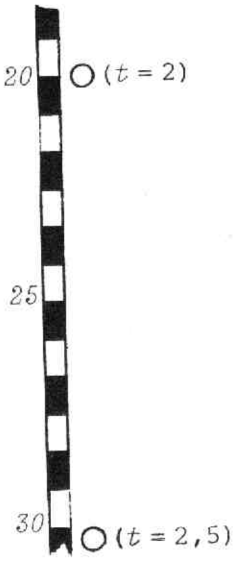




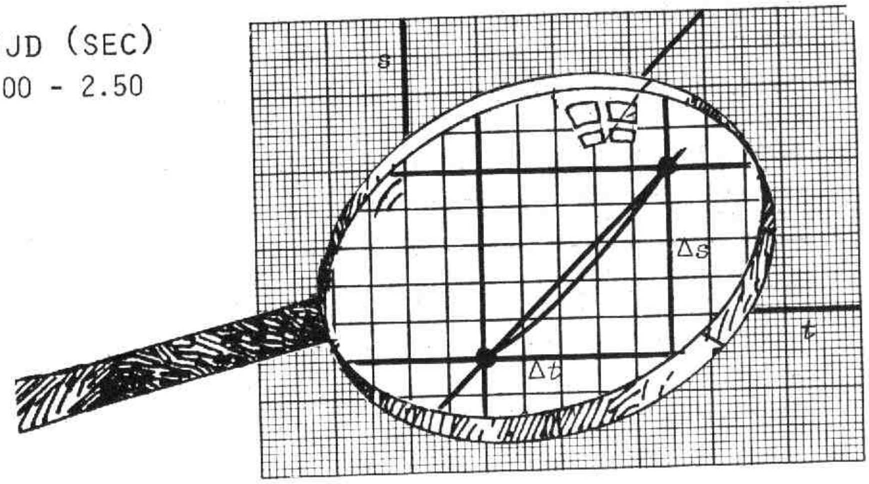
TIJD (SEC)
1.99 - 2.00

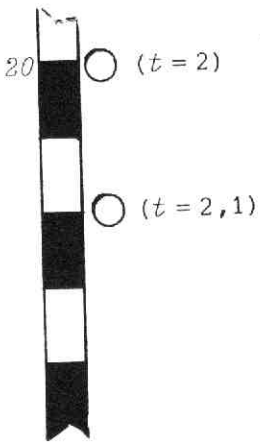


VALSNELHEID

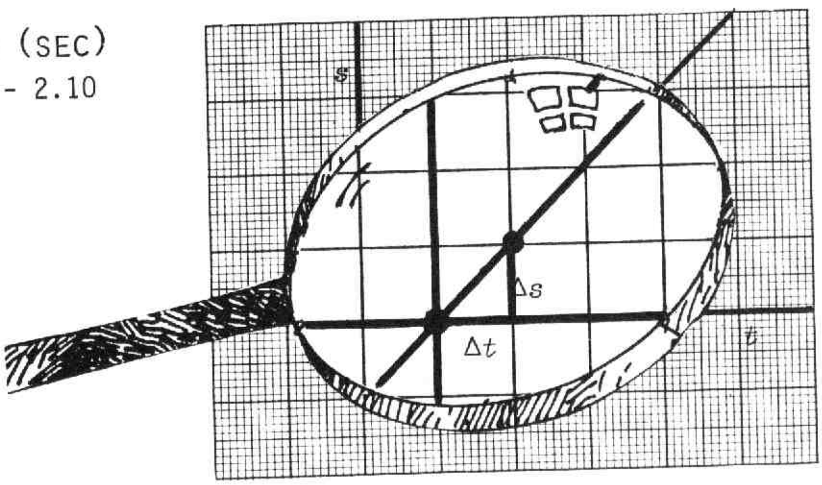


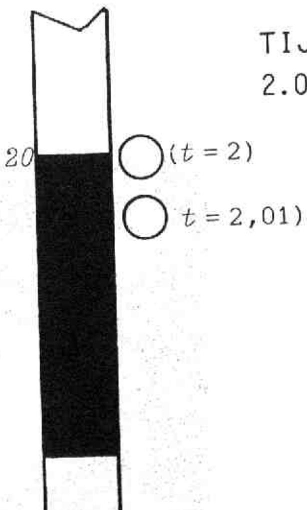
TIJD (SEC)
2.00 - 2.50



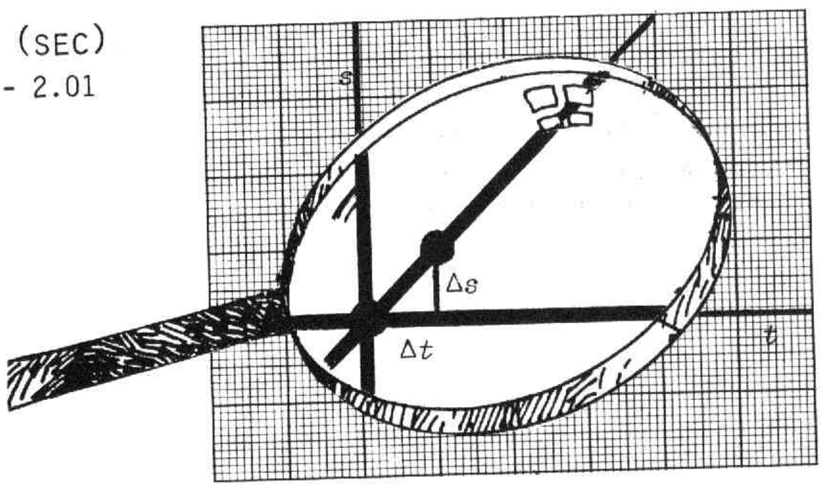


TIJD (SEC)
2.00 - 2.10





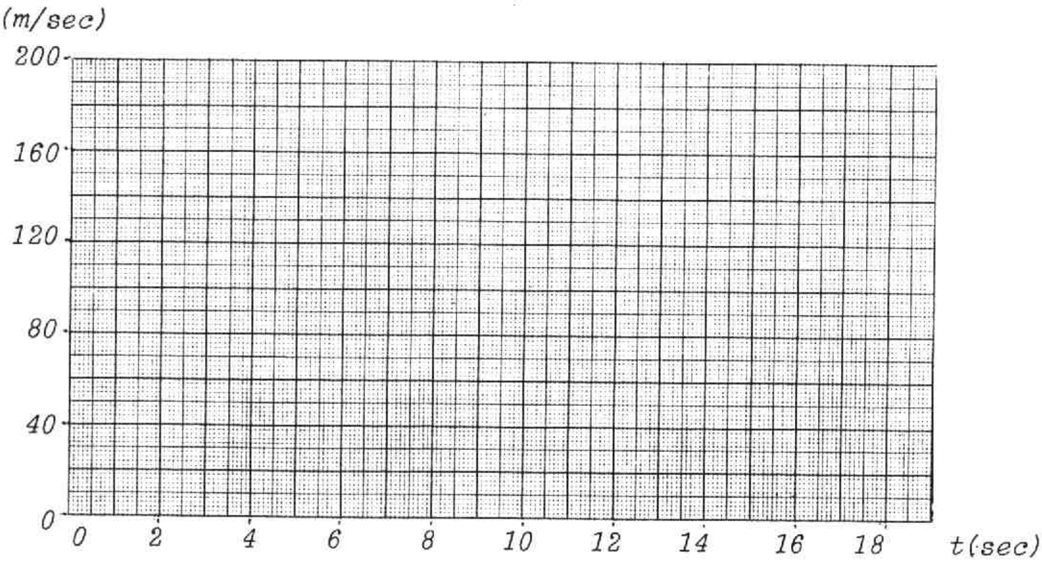
TIJD (SEC)
2.00 - 2.01



5. Bereken de gemiddelde snelheden over de tijdsintervallen op blz. E7 en E8.
6. Wat kun je op grond van die uitkomsten zeggen over de snelheid op het moment $t = 2$?
7. Op dezelfde manier kun je de valsnelheid op een aantal andere momenten bepalen.
Verdeel het werk met je klasgenoten en maak een tabel van de uitkomsten.

moment (t)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	sec
valweg (s)	0	5	20	45	80	125	180	245	320	m
snelheid (v)	0									m/sec

8. De valsnelheid v (in m/sec) is een funktie van de tijd t (in sec).
Teken een grafiek van die funktie.



9. Past je antwoord op vraag 2 (blz. E6) bij die grafiek?
10. Snelheid in km/u spreekt meer tot de verbeelding!
Vul daarom even in:

valweg (m)	0	5	20	45	80	125
valsnelheid (km/u)	0					

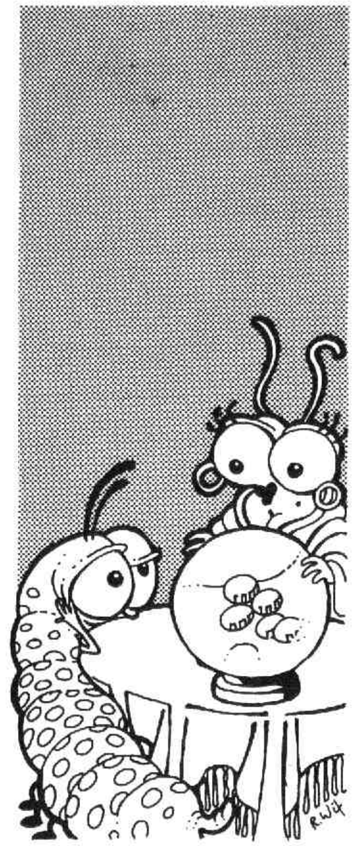
En je ziet dat zelfs bij een sprong van 5 meter hoogte het neerkomen niet bepaald zachtjes is.

TERUGBLIK

Vallen is, wiskundig gezien, een simpele zaak.
De valweg s (in meters) na t seconden vrije val neemt kwadratisch toe met de tijd: $s = 5t^2$.
De snelheid v (in m/sec) neemt lineair toe met de tijd: $v = 10t$.

Vragen:

1. Na hoeveel seconden vrije val wordt er een snelheid van 100 km/u ontwikkeld?
2. Stel F is de funktie $t \to 5t^2$ $(t \geqslant 0)$.
   Door welke formule wordt de hellingfunktie F' van F gegeven?

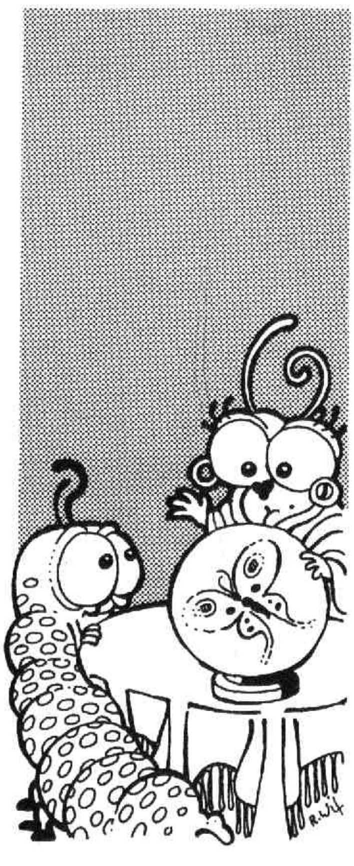


VOORUITZICHT

Het proces waarmee de hellingfunktie van een gegeven funktie bepaald wordt, noemt men *differentiëren*.
In plaats van hellingfunktie spreekt men meestal van *afgeleide funktie* (of soms van *gedifferentieerde funktie*).
Er bestaan allerlei regels om vlot de afgeleide funktie van een (door een formule gegeven) funktie op te sporen.
De meest fameuze regel gaat over het differentiëren van funkties als:

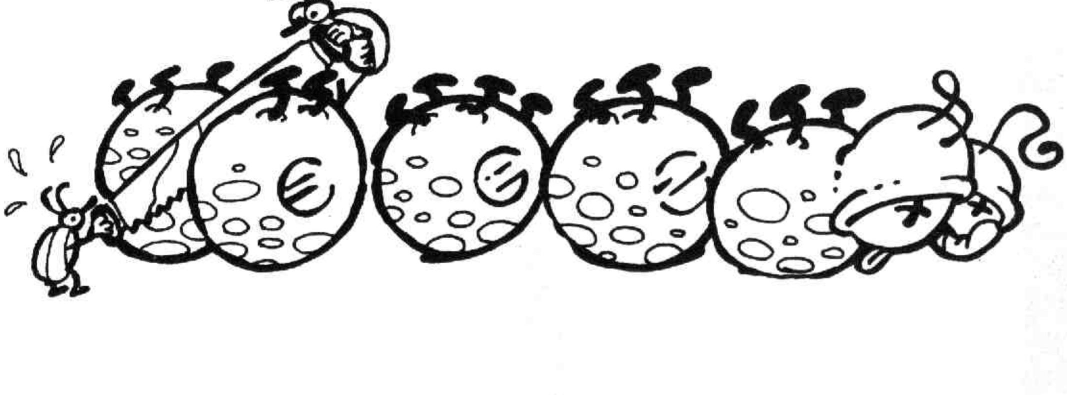
$x \to x^2$
$x \to x^3$
$x \to x^4$
enz.

Daarover meer in deel F.



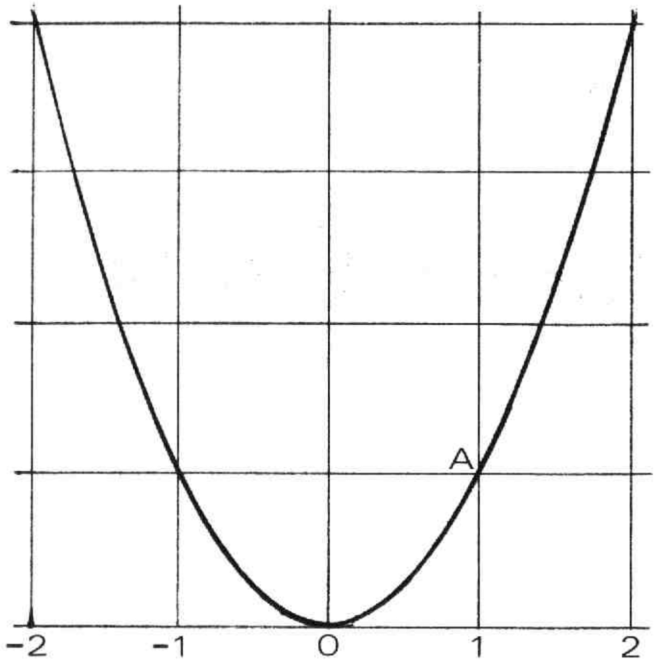
DEEL F

DIFFERENTIËREN



HELLING VAN $Y = X^2$

Grafiek $y = x^2$

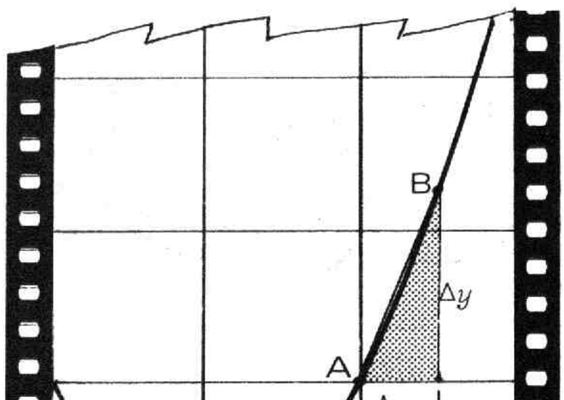


A is het punt (1,1)

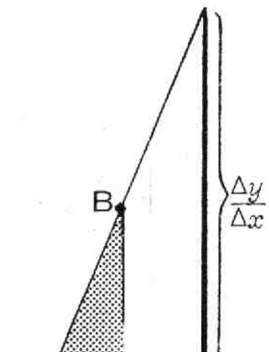
PROBLEEM: WAT IS DE HELLING VAN DE GRAFIEK IN HET PUNT A?

Op deze en de volgende bladzijde zie je een paar "filmfragmenten".
In de film kruipt een punt B over de grafiek naar A toe.

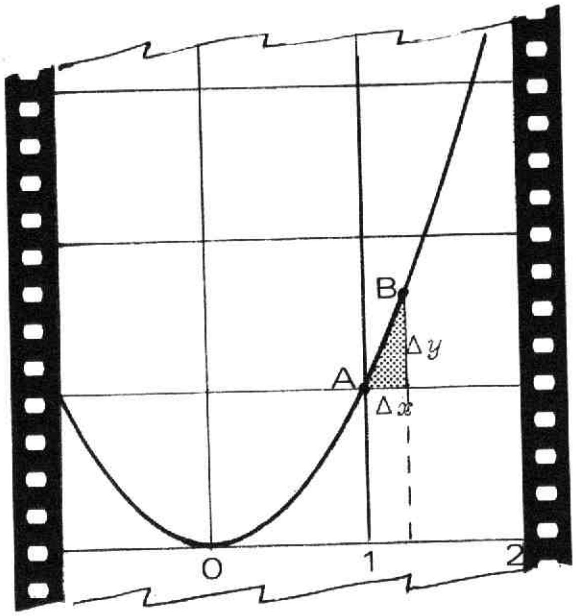
1. Bereken bij elk fragment de "gemiddelde helling" van boog AB.



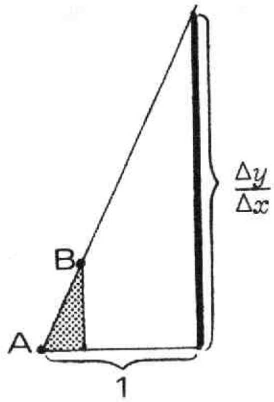
Fragment 1
($\Delta x = \frac{1}{2}$)

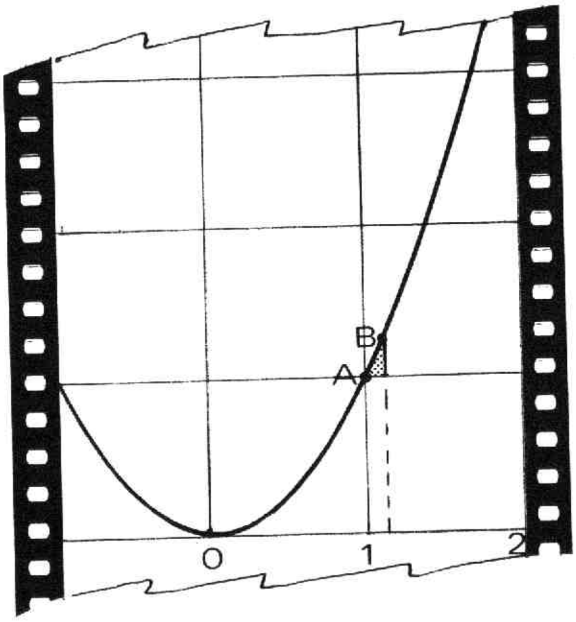


HELLING VAN $Y = X^2$

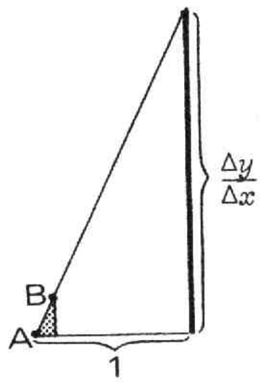


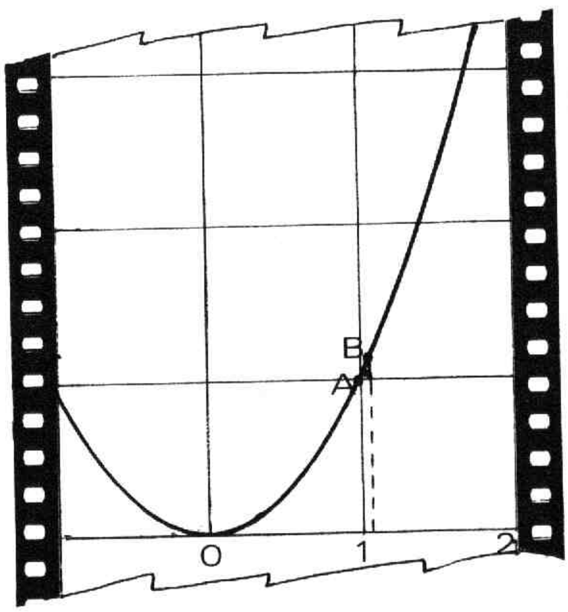
Fragment 2
($\Delta x = \frac{1}{4}$)



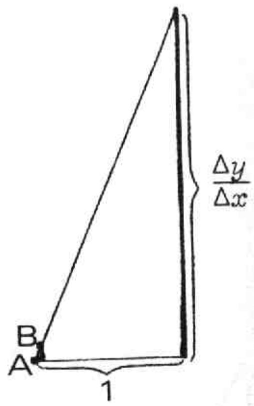


Fragment 3
($\Delta x = \frac{1}{8}$)





Fragment 4
($\Delta x = \frac{1}{16}$)



HELLING VAN $Y = X^2$

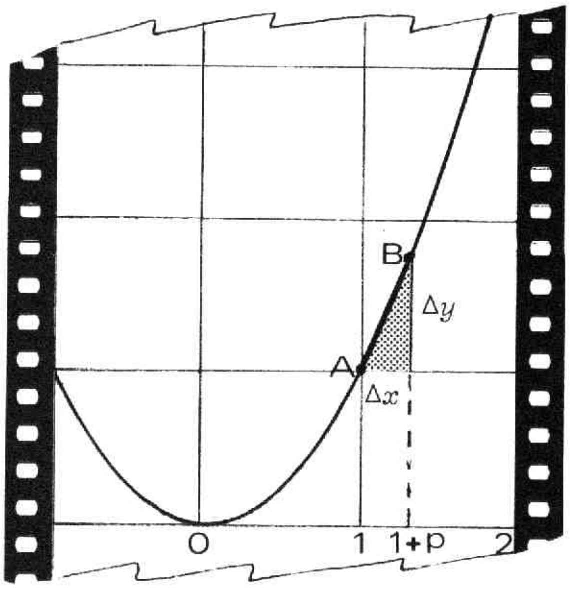
Door gebruik te maken van een variabele kan de komplete film met één formule beschreven worden!

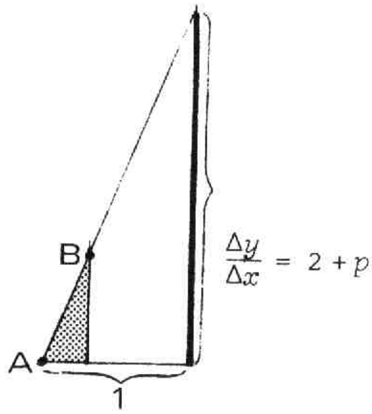
Stel: $\Delta x = p$

De x - coördinaat van B is dan: $1 + p$

De y - coördinaat van B is dan: $1 + 2p + p^2$ (Kontroleer je dat even?)

2. Toon aan dat de gemiddelde helling $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ van het stukje grafiek tussen A en B gelijk is aan $2 + p$.

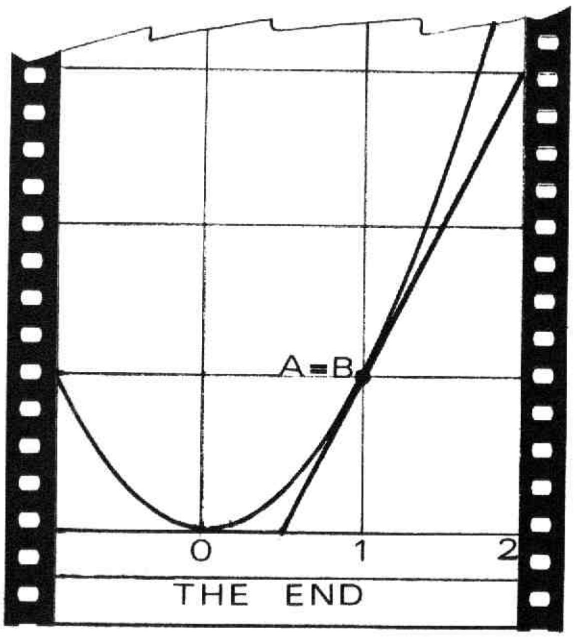


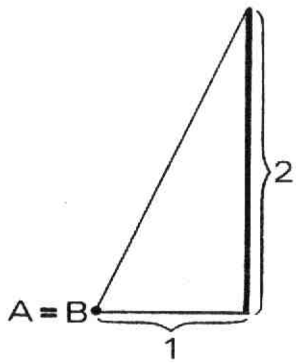


3. Kontroleer de uitkomsten bij de filmfragmenten 1, 2, 3, 4 met deze formule!

4. Iemand beweert dat de helling van de grafiek in A gelijk is aan 2,000001. Wat vind je daarvan?

5. Einde van de film; A en B hebben elkaar gevonden! Geef kommentaar bij het laatste filmplaatje.





HELLING VAN $Y = X^2$

De methode om de helling van de grafiek in A te vinden, is dus:

stel $\Delta x = p$	→	druk $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ uit in p	→	laat p tot nul naderen	→	het "grens-getal" is de helling van de grafiek	*)

Dat grensgetal (= helling van de raaklijn) wordt vaak genoteerd als $\frac{dy}{dx}$.

6. Bereken nu $\frac{dy}{dx}$ in de punten van de grafiek van $y = x^2$ met
   $x = 2;\ 3;\ 5;\ 25;\ 100;\ 0;\ -1;\ -2;\ -3;\ \sqrt{2}$.
   Verdeel het werk in de klas.

   Maak een tabel van de resultaten:

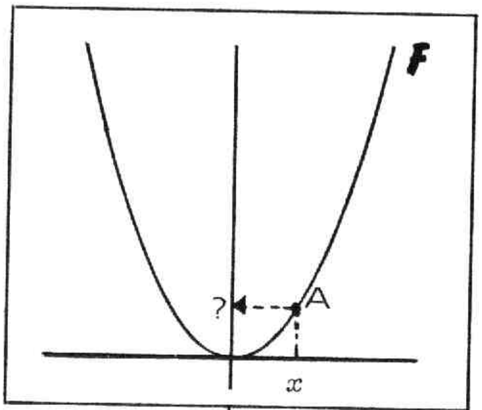
x	hoogte y	gemiddelde helling (met $\Delta x = p$) $\frac{\Delta y}{\Delta x}$	helling $\frac{dy}{dx}$
1	1	$2 + p$	2
2	4	.....	..
3	..	.....	..
..	..	.....	..
..	..	.....	..

7. Teken een grafiek van de *afgeleide funktie* van $x \to x^2$.
   Welke formule past er bij die afgeleide funktie?

*) In plaats van grens-getal spreekt men in de wiskunde meestal van *limiet*.

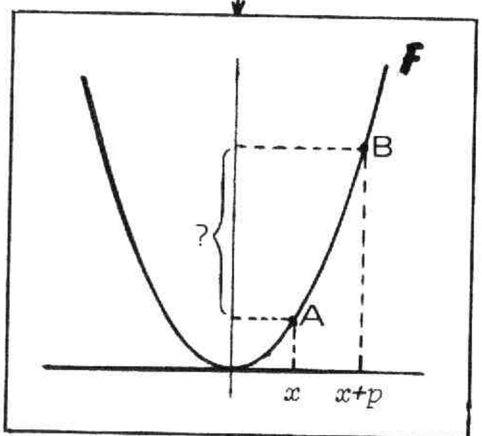
HELLINGFUNKTIE VAN $X \to X^2$

F is de funktie $x \to x^2$, met domein $\mathbb{R}$.
We kunnen ook "in één klap" de afgeleide funktie F' van F vinden!



Neem een "willekeurig" punt A op de grafiek van F.

y (= hoogte van A) = x^2

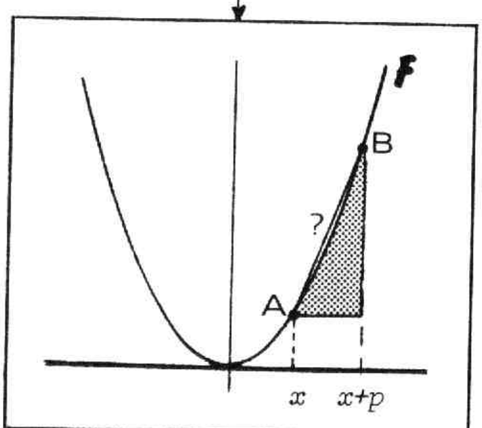


Stel: $\Delta\ x = p$

$\Delta\ y$ (= hoogteverschil tussen A en B) =

$(x + p)^2 - x^2 =$

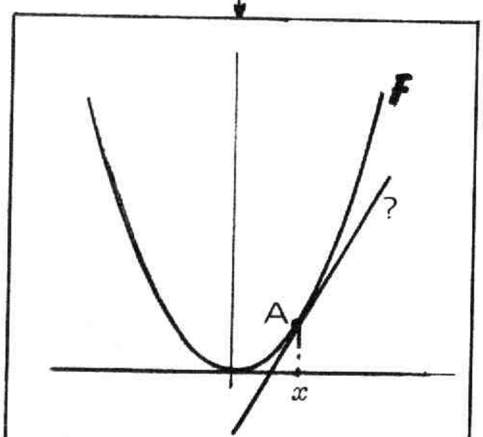
$2px + p^2$



$\dfrac{\Delta\ y}{\Delta\ x}$ (= gemiddelde helling tussen A en B) =

$\dfrac{2px + p^2}{p} = \dfrac{2px}{p} + \dfrac{p^2}{p} =$

$2x + p$



Laat p tot nul naderen en je vindt:

$\dfrac{dy}{dx}$ (= helling raaklijn in A) =

$2x$

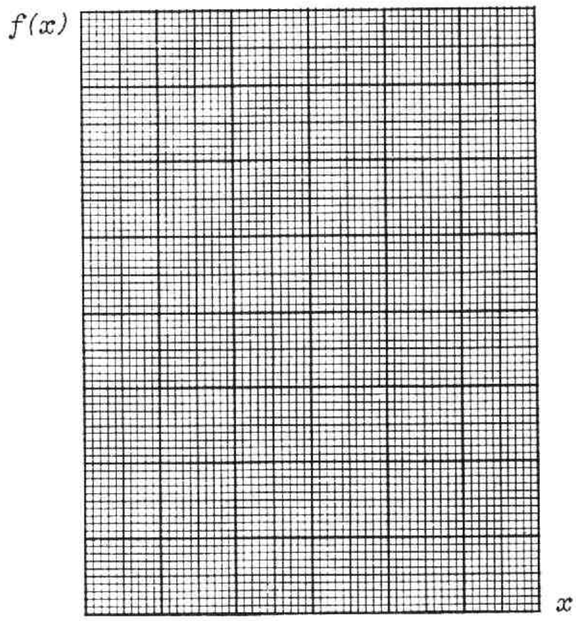
Dus F': $x \to 2x$

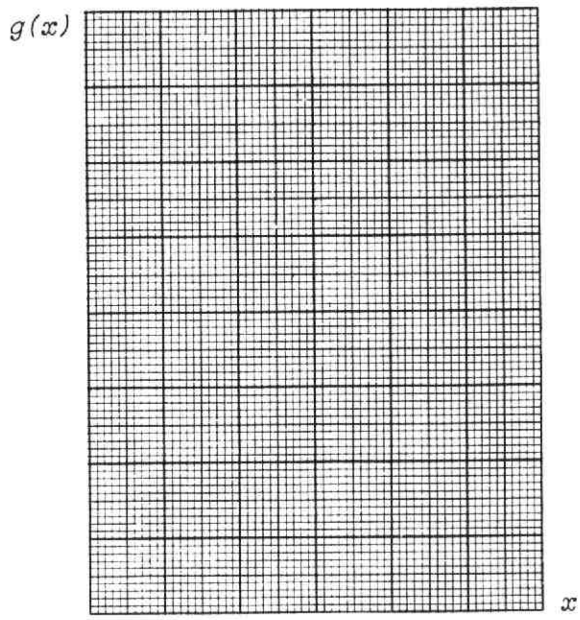
DIFFERENTIËREN

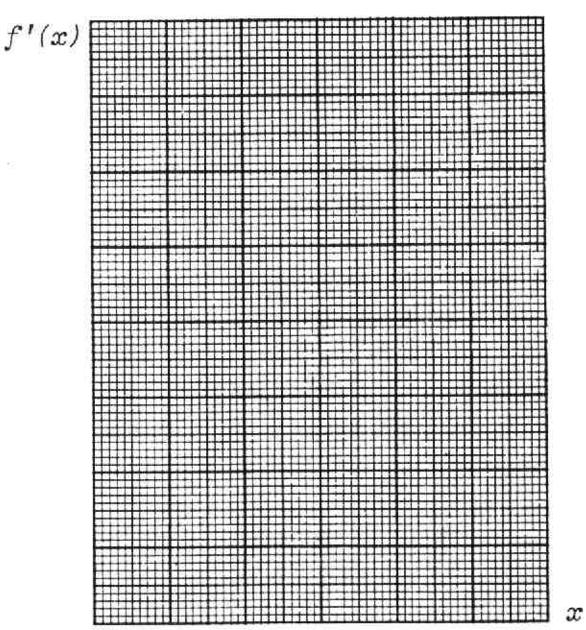
Gegeven zijn de funkties f en g met domein $\mathbb{R}$.

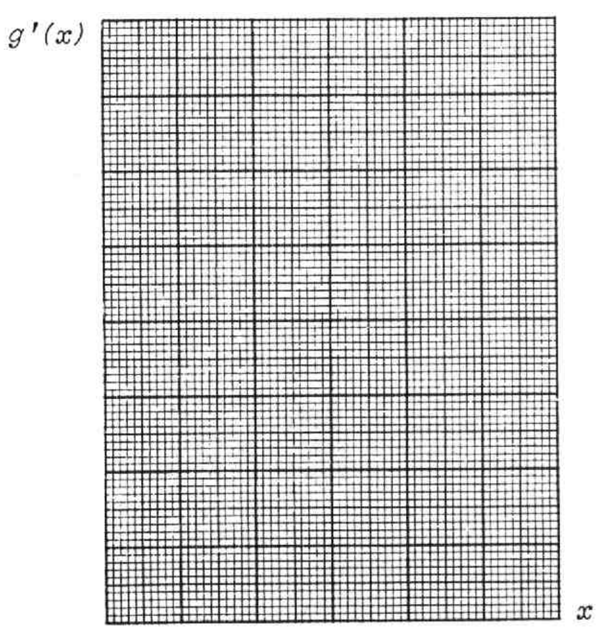
$f(x) = x^2 + x$; $g(x) = x^3$.

1. Schets de grafieken van f en g.
2. Probeer met de methode van blz. F5 de afgeleide funkties f' en g' te vinden van f en g.
3. Teken nu ook de grafieken van f' en g'.









DE FUNKTIES $X \to X^n$

Bekijk nog eens de gemiddelde helling van $y = x^2$ en $y = x^3$ op het interval $[x;\ x + p]$:

$$y = x^2 \quad : \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x+p)^2 - x^2}{p} = 2x + \boxed{p}$$

$$y = x^3 \quad : \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x+p)^3 - x^3}{p} = 3x^2 + \boxed{3xp + p^2}$$

1. Bereken en vul in:

$$y = x^4 \quad : \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x+p)^4 - x^4}{p} = 4x^3 + \boxed{\qquad\qquad}$$

De omlijnde termen bevatten alle een faktor p; vandaar dat zij tot nul naderen als p tot nul nadert!
En $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nadert dan tot respektievelijk $2x$, $3x^2$ en $4x^3$.

Samengevat:

funktie	*helling in x*
$y = x^2$	$\frac{dy}{dx} = 2x$
$y = x^3$	$\frac{dy}{dx} = 3x^2$
$y = x^4$	$\frac{dy}{dx} = 4x^3$

of

funktie	*afgeleide funktie*
$x \to x^2$	$x \to 2x$
$x \to x^3$	$x \to 3x^2$
$x \to x^4$	$x \to 4x^3$

2. Je mag aannemen dat de regelmaat in de tabel zich voortzet.
   Wat - denk je - is de afgeleide van de funktie $x \to x^5$?
   En van de funktie $x \to x^{10}$? En van $x \to x^{1978}$?

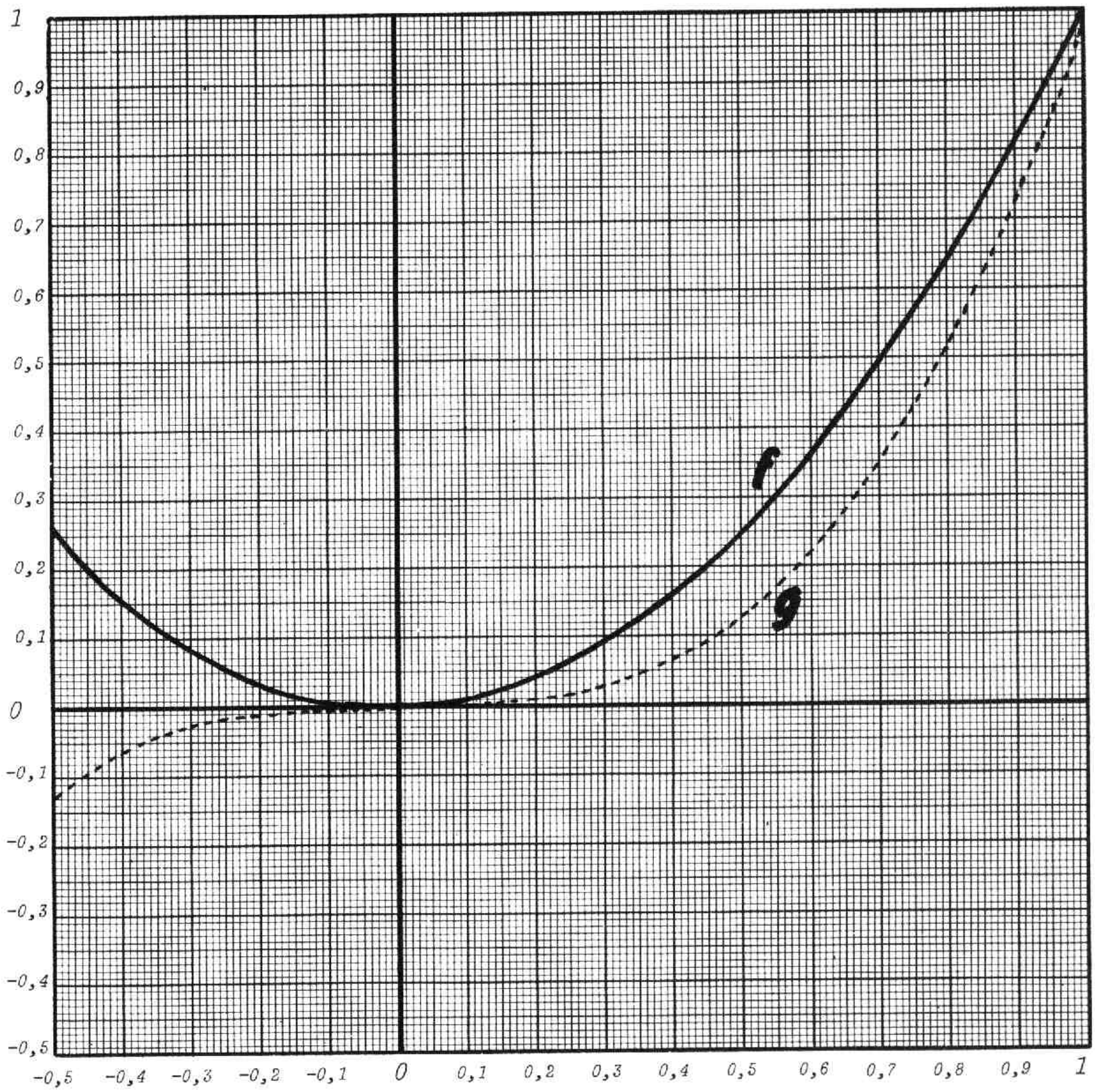
3. Je kunt die resultaten ook samenvatten in één formule.
   Vul in:
   De afgeleide van de funktie $x \to x^n$ is de funktie $x \to \ldots\ldots$ (n = 2, 3, 4 enz.)
   (Zie voor een nadere verklaring blz. F9)
   Onderzoek of die formule ook klopt voor n = 1.

4. f is de funktie: $x \to x^8$.
   Bereken $f'(2)$.

GRAFIEKEN OP GROTE SCHAAL

Hieronder zie je de grafieken getekend van $f : x \to x^2$ en $g : x \to x^3$ op het interval $[-0{,}5;\ 1]$.

1. Teken (nauwkeurig!) de grafiek van $h : x \to x^4$ erbij.



2. Hoe groot is de helling van elk van de drie grafieken in het punt (0,0)? En in het punt (1,1)?

3. Kleur de dalende stukken grafiek rood en de stijgende blauw.

4. Stel je voor dat je de opdrachten 1 en 3 ook uit zou voeren voor de funkties $x \to x^5$; $x \to x^6$; enz. Welke funkties zouden dan een "twee-kleuren-grafiek" krijgen?

5. Bekijk de drie grafieken van f, g en h op het interval $[0;\ 1]$.
Aanvankelijk is het f die het snelste stijgt, maar in de buurt van 1 stijgt f langzamer dan g en h.
Vanaf welke x gaat g sneller stijgen dan f ?
En vanaf welke x gaat h sneller stijgen dan g ?

DE FUNKTIES X → X^n

Bij het berekenen van $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ voor $y = x^2$, $y = x^3$, $y = x^4$, enz. op het interval $[x, x + p]$ stuit je op het uitwerken van $(x + p)^2$, $(x + p)^3$, $(x + p)^4$, enz. En dat wordt, wat je noemt een stuitend werkje, als de exponent groter wordt, tenzij .... je de (coëfficiënten-)driehoek van Pascal gebruikt.

$$
\begin{array}{lccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & \\
(x+p)^1 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
(x+p)^2 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
(x+p)^3 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
(x+p)^4 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
(x+p)^5 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
(x+p)^6 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}
$$

Elk getal binnen de driehoek is gelijk aan de som van zijn twee "bovenburen".

Zo krijg je bij de uitwerking van $(x + p)^4$ de veelterm:

$$1.x^4 + 4.x^3p + 6.x^2p^2 + 4.xp^3 + 1.p^4$$

En bij de uitwerking van $(x + p)^5$:

$$1.x^5 + 5.x^4p + 10.x^3p^2 + 10.x^2p^3 + 5.xp^4 + 1.p^5$$

1. Welke veelterm krijg je bij de uitwerking van $(x + p)^6$? En bij $(x + p)^7$?
2. De berekening van $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ voor $y = x^5$ levert op:

   $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x + p)^5 - x^5}{p} = 5x^4 + \boxed{10x^3p + \text{.........} + p^4}$$

   Kontroleer dit. Wat volgt hieruit voor $\frac{dy}{dx}$?
3. Bereken op deze wijze $\frac{dy}{dx}$ voor $y = x^6$.

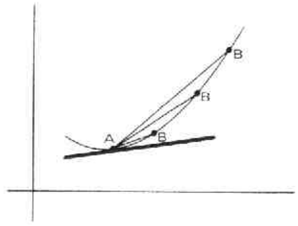
In de driehoek van Pascal zie je dat de *tweede* term bij de uitwerking van $(x + y)^n$ (voor n = 1, 2, 3, ...) de coëfficient n heeft!

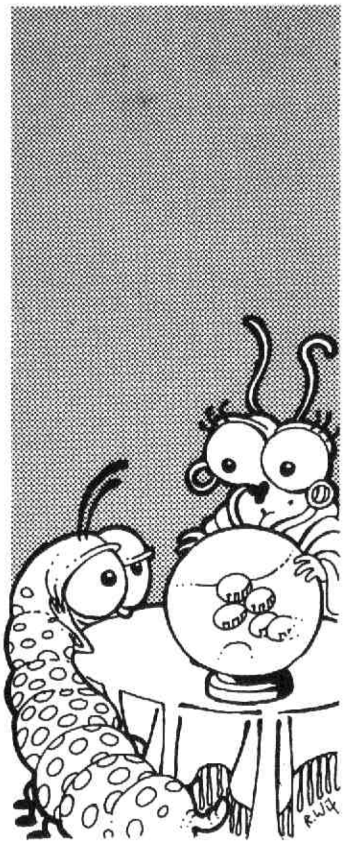
Daaruit volgt: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x + p)^n - x^n}{p} = n.x^{n-1} + \underbrace{\boxed{\text{.............................}}}_{\textit{alle termen deelbaar door } p}$

Laten we p tot *nul* naderen, dan nadert $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tot $n.x^{n-1}$.

Konklusie: $\boxed{\text{de afgeleide funktie van } x \to x^n \text{ is } x \to n.x^{n-1} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)}$

Je hebt in deel F gezien hoe je via een tamelijk ingewikkeld proces de afgeleide funktie van een (door een formule gegeven) funktie kunt vinden. Meetkundig komt dat hierop neer:
je laat een punt B over de grafiek naar een punt A toekruipen. De verbindingslijn AB voor die punten nadert tot een *raaklijn* in A.



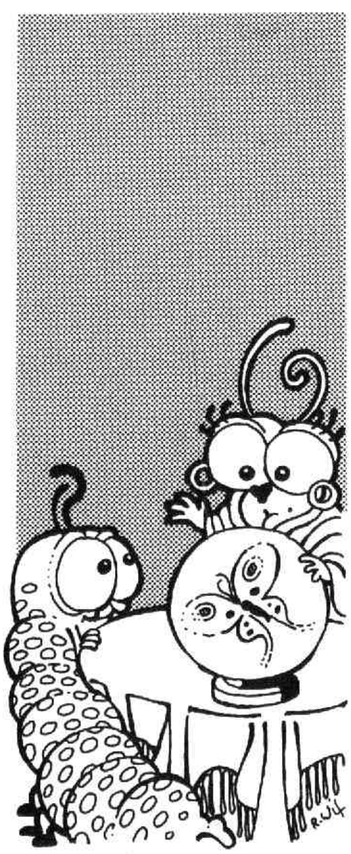


In algebra-taal:

stel $\Delta x = p$ → druk $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ uit in p → laat p tot nul naderen → het "grens-getal" is de helling van de grafiek

Gelukkig hoef je dat proces niet keer op keer te herhalen. Van de funkties $x \to x^n$ (n = 1,2,3,4,...) ken je de afgeleide funktie uit het hoofd:
$x \to n.x^{n-1}$

VOORUITZICHT



Maar daarmee is de kous natuurlijk niet af.
In veel toepassingen van de wiskunde kom je zogenaamde *veelterm-funkties* tegen, dat zijn funkties zoals: $x \to 3 + 5x + 7x^2$; $x \to 1 - 9x + 7x^2 + 9x^3$; ...
Veeltermfunkties zijn opgebouwd met behulp van de "basis-funkties" $x \to 1$; $x \to x$; $x \to x^2$; $x \to x^3$; ...
Door een stel van zulke basisfunkties te vermenigvuldigen met een getal en vervolgens op te tellen, krijg je een veeltermfunktie.

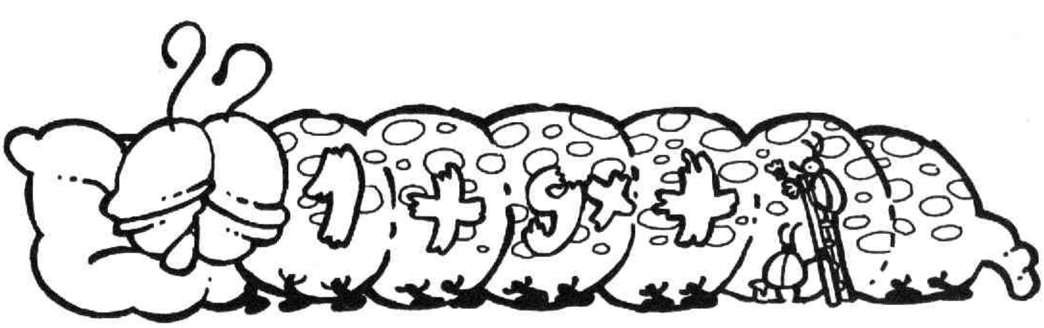
Voorbeeld:

$$\left.\begin{array}{ll} x \to 1 & \text{maal } 10 \\ x \to x & \text{maal } 2 \\ x \to x^2 & \text{maal } 0 \\ x \to x^3 & \text{maal } -5 \\ x \to x^4 & \text{maal } 1 \end{array}\right\} : x \to 10 + 2x - 5x^3 + x^4$$

Omdat je de basisfunkties al kunt differentiëren, hoef je nog slechts te weten wat er met de afgeleide gebeurt als je funkties met een constante vermenigvuldigt en daarna optelt .....

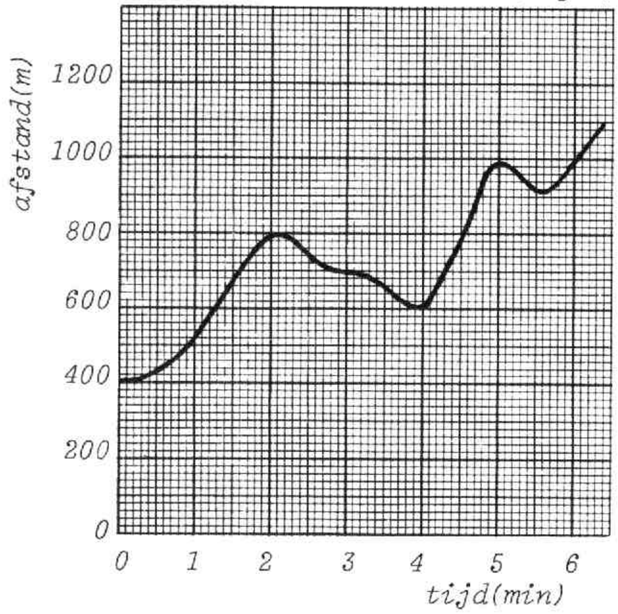
DEEL G

VEELTERMEN

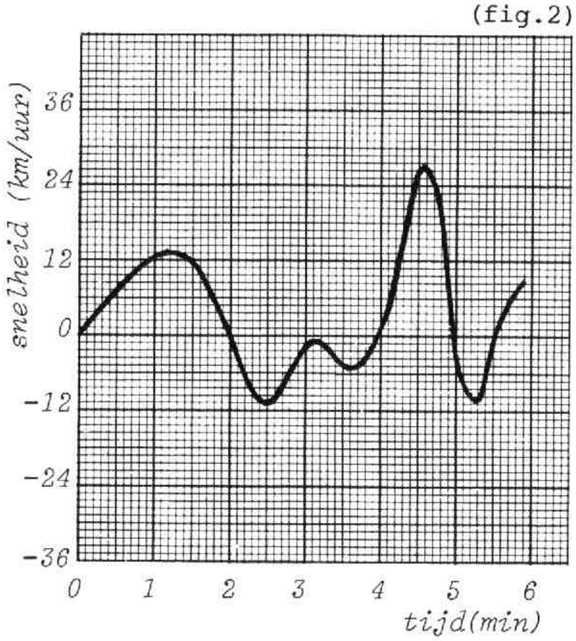


1. Een goederentrein van 100 m lengte is aan het rangeren. In fig. 1 zie je de tijd-afstand-grafiek van de locomotief.

(fig.1)



(fig.2)



a. Teken in dezelfde figuur de tijd-afstand-grafiek van de laatste wagon.
b. In fig. 2 zie je de tijd-snelheid-grafiek van de locomotief. (De snelheid bij het achteruit-rijden is negatief gerekend). Wat weet je van de tijd-snelheid-grafiek van de laatste wagon?

2. Teken in één figuur de grafieken van de funkties $x \to x^2$; $x \to x^2 + 2$; $x \to x^2 - 4$.
Teken in een tweede figuur de grafieken van de afgeleiden van deze funkties.

3. Laat F een of andere funktie zijn met afgeleide F'.
Wat weet je van de afgeleide funkties van:
$x \to F(x) + 25$; $x \to F(x) + 0{,}1$; $x \to F(x) - 3$?
Formuleer een algemene regel.

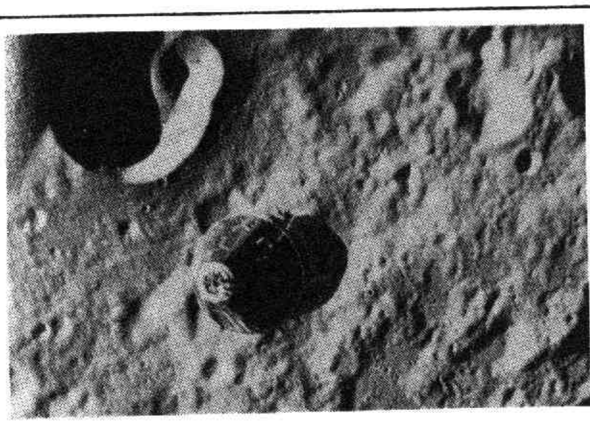
CONSTANTE FAKTOR

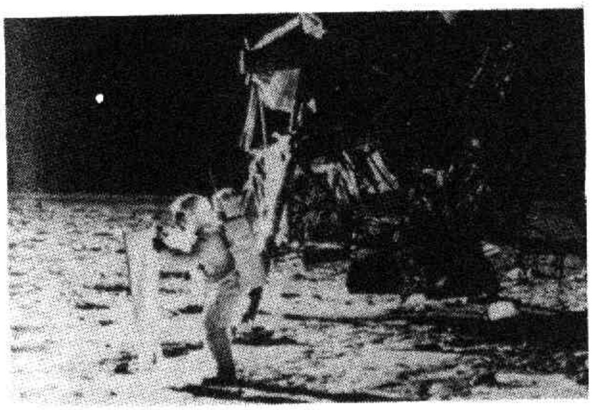
1. Je hebt ontdekt:
   de afgeleide van de funktie $t \to 5t^2$ is de funktie $t \to 10t$ (zie blz. E9);
   de afgeleide van de funktie $t \to t^2$ is de funktie $t \to 2t$ (zie blz. F5).
   Vergelijk die funkties en hun afgeleiden:
   Wat merk je op?

2. Zoals je misschien weet, val je op de maan zachter dan op de aarde.
   De valtijd-valweg-funktie beantwoordt op de maan (ongeveer) aan de formule:

$$s = 0{,}8\ t^2$$

   Een ruimtevaarder laat van 80 meter hoogte een maansteen vallen.
   Met welke snelheid ploft die op de maan?





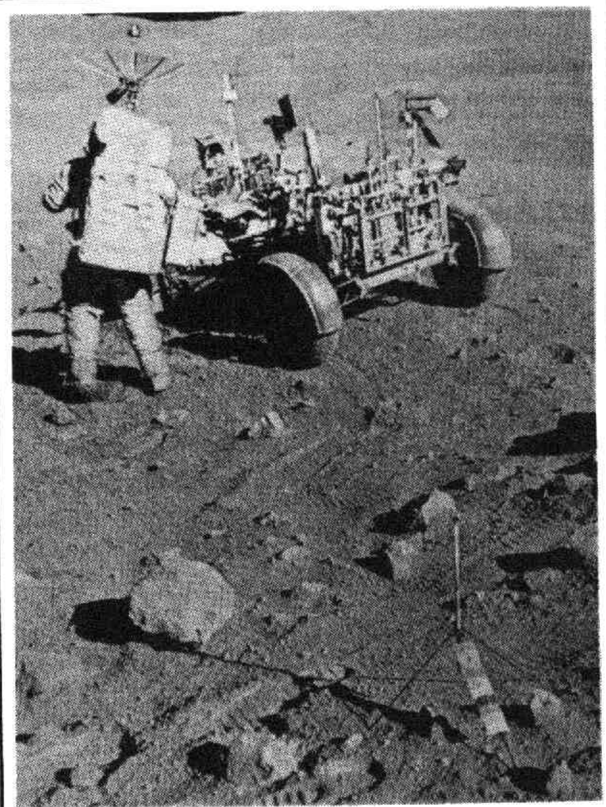


Foto links onder: Edwin Aldrin op de maanbodem gefilmd door Neil Armstrong die als eerste mens de maanbodem had betreden (juli 1969).
Foto links boven: Het besturings- en dienstcompartment van de Apollo-16 die in 1972 op de maan landde.
Foto rechts : Charles Duke met de maanauto van de Apollo-16.

3. Laat F een of andere funktie zijn met afgeleide F'.
   Wat weet je van de afgeleide funkties van:
   $x \to 25.F(x)$; $x \to 0{,}1.F(x)$; $x \to -3.F(x)$?
   Formuleer een algemene regel.

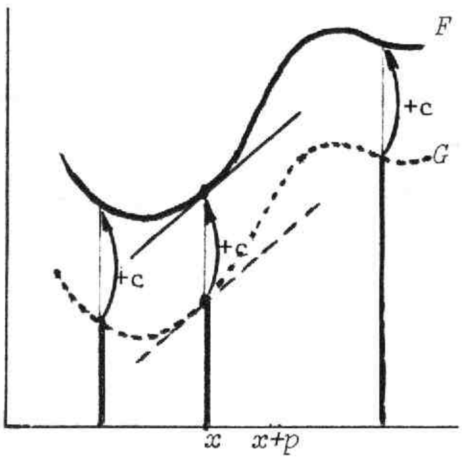
Laat F en G twee funkties zijn met hetzelfde domein D.
De afgeleide funkties van F en G zijn respektievelijk F' en G'.

Op blz. G1 en G2 heb je ontdekt:

Als de funktie F gelijk is aan de funktie G plus *een constante c, dan zijn de afgeleiden F' en G' hetzelfde.*

Kortweg:

Als $F(x) = G(x) + c$
dan $F'(x) = G'(x)$
(voor elke $x \in D$)



OPSCHUIVEN VAN DE GRAFIEK

Bewijs:

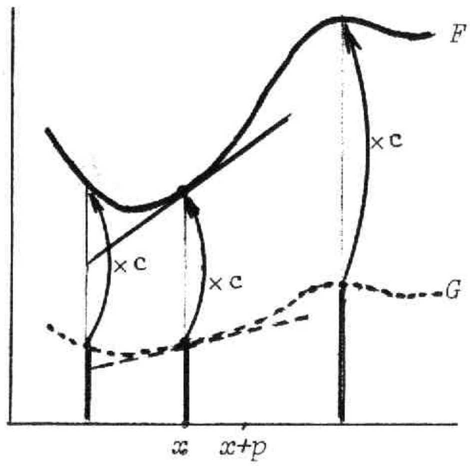
$$\begin{array}{rcl} F(x+p) &=& G(x+p) + c \\ F(x) &=& G(x) \quad\;\; + c \\ \hline F(x+p) - F(x) &=& G(x+p) - G(x) \end{array} \quad -$$

$$\frac{F(x+p) - F(x)}{p} = \frac{G(x+p) - G(x)}{p}$$

Op *elk* interval $[x;\ x+p]$, hoe klein ook, hebben de grafieken van F en G dezelfde gemiddelde helling. Dan moeten F en G in elk "punt" ook dezelfde helling hebben.

Als de funktie F gelijk is aan een constante maal *de funktie G, dan is F' gelijk aan c maal C'.*

Als $F(x) = c.G(x)$
dan $F'(x) = c.G'(x)$
(voor elke $x \in D$)



OPREKKEN VAN DE GRAFIEK

$$\begin{array}{rcl} F(x+p) &=& c.G(x+p) \\ F(x) &=& c.G(x) \\ \hline F(x+p) - F(x) &=& c.[G(x+p) - G(x)] \end{array} \quad -$$

$$\frac{F(x+p) - F(x)}{p} = c.\frac{G(x+p) - G(x)}{p}$$

Op *elk* interval $[x;\ x+p]$, hoe klein ook, is de gemiddelde helling van de grafiek in F gelijk aan c maal de gemiddelde helling van de grafiek van G. Dan moet in elk "punt" x de helling van de grafiek van F gelijk zijn aan c maal de helling van de grafiek in G.

EVEN OEFENEN

Voorbeeld: *Differentiëer de funktie* $x \to 10x^3$

Oplossing: *De afgeleide van* $x \to x^3$ *is* $x \to 3x^2$, *dus*
de afgeleide van $x \to 10x^3$ *is* $x \to 30x^2$

1. Differentiëer de volgende funkties:

$x \to 25x^2$; $x \to -5x^3$; $x \to \frac{2}{5}x^5$; $x \to 0{,}1x^{100}$;

$x \to x^3 + 9$; $x \to 9x^3 + 9$; $x \to 5x^6 - 7$; $x \to -2x^2 + 3$;

$x \to 10 + x^4$; $x \to 10 + x^4$; $x \to 10 \,.\, x^4$; $x \to (10 \,.\, x)^4$;

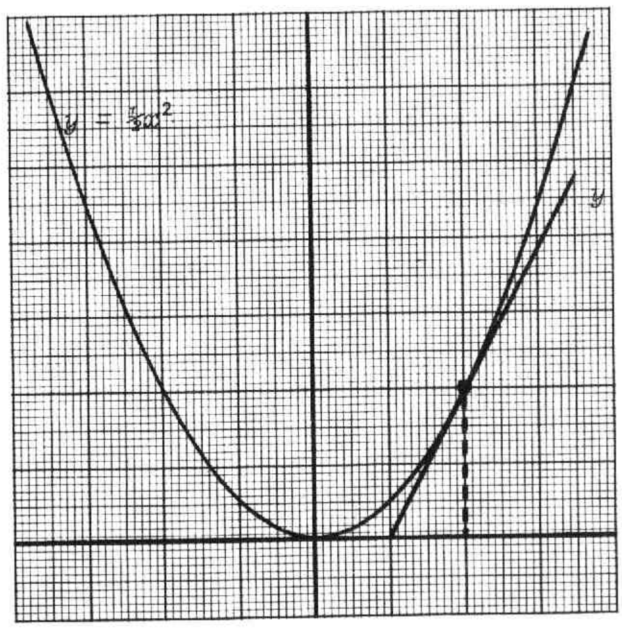
$x \to ax + b$ $(a,b \in \mathbb{R})$; $x \to cx^n$ $(c \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{R}^+)$;

2. $f(x) = x^3 = x \,.\, x^2$
Dus: $f'(x) = x \,.\, 2x = 2x^3$
Waar zit de fout??

3. Het punt (1,-1) ligt op de grafiek van $y = 12x^8 - 13$.
Bereken de helling van de raaklijn in dat punt.

4. Teken de grafiek van de funktie $x \to 4\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x^2$
Bereken de helling van die grafiek in elk van de snijpunten met het assenkruis.

5. Hiernaast zie je de grafiek van $y = \frac{1}{2}x^2$.
   a. De raaklijn in het punt (2,2) snijdt de x-as in (1,0). Reken dat na.
   b. Hoewel er maar een klein stukje van de grafiek is getekend kun je je toch voorstellen hoe die verder loopt.
   Zo kun je bijv. nagaan dat die grafiek door het punt (100,5000) gaat.
   Hoe groot is de helling in dat punt? En waar snijdt de raaklijn in dat punt de x-as?



FIETSEN OP EEN MAMMOET-TANKER

Een mammoet-tanker heeft een lengte van een paar honderd meter. De grootste ter wereld is ruim 400 m lang (en ruim 60 m breed).
Aan boord van zo'n tanker kan de bemanning beschikken over "witte" fietsen.

In fig. 1 zie je de tijd-afstand-grafiek van de achtersteven van een mammoet-tanker gedurende twee minuten vaartijd.
In diezelfde periode legt een bemanningslid op de fiets de afstand van achterdek naar voordek af (grafiek in fig. 2).

fig. 1

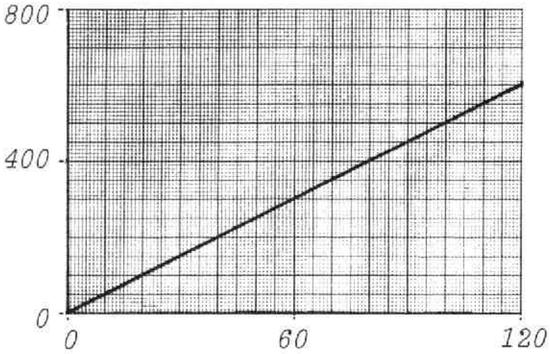
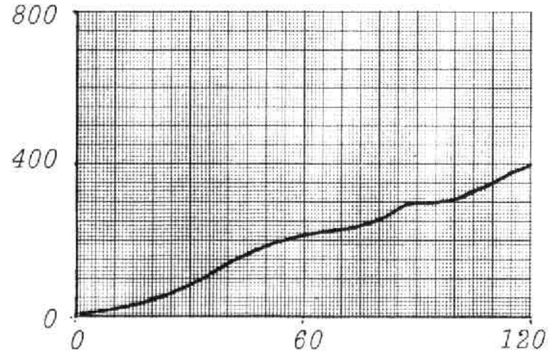
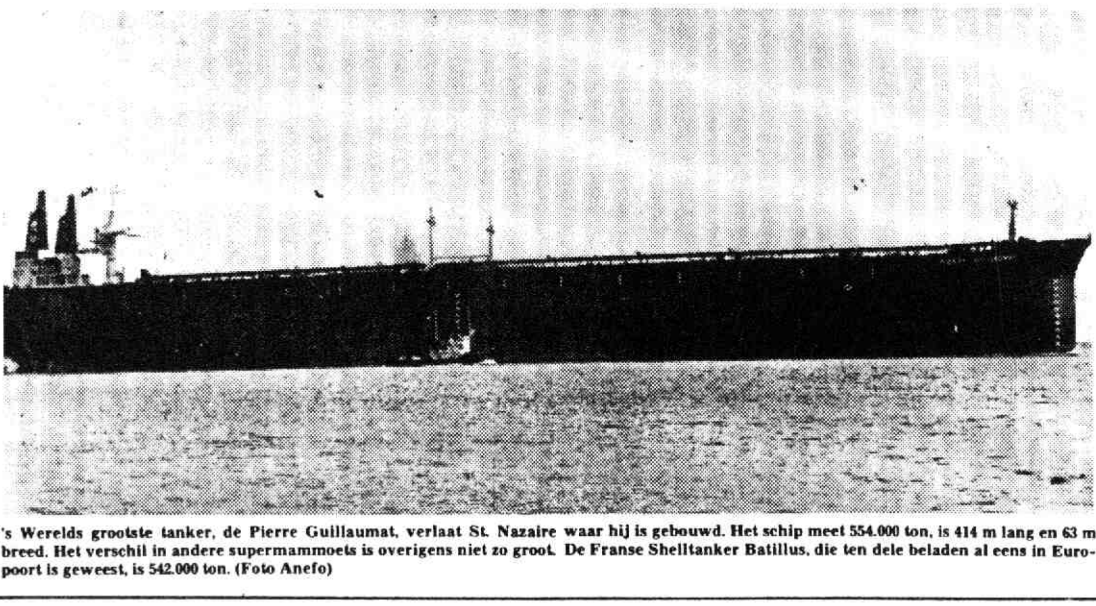


fig. 1



1. Hoeveel meter heeft die fietser op het dek afgelegd in die twee minuten? En hoeveel meter heeft hij hemelsbreed afgelegd?
2. Stel: $f(t)$ = de afgelegde afstand van de fietser op het dek (na t sec);
   $g(t)$ = de afgelegde afstand van de boot op zee (na t sec);
   $s(t)$ = de afgelegde afstand hemelsbreed van de fietser (na t sec).

   Welke betrekking bestaat er tussen $s(t)$, $f(t)$ en $g(t)$?
3. Wat stellen $f'(t)$, $g'(t)$, $s'(t)$ respektievelijk voor? En welke betrekking bestaat er tussen $f'(t)$, $g'(t)$ en $s'(t)$?



's Werelds grootste tanker, de Pierre Guillaumat, verlaat St. Nazaire waar hij is gebouwd. Het schip meet 554.000 ton, is 414 m lang en 63 m breed. Het verschil in andere supermammoets is overigens niet zo groot. De Franse Shelltanker Batillus, die ten dele beladen al eens in Europoort is geweest, is 542.000 ton. (Foto Anefo)

SOMREGEL

Laat F, G en S funkties zijn met hetzelfde domein D, respektievelijk met afgeleide funkties F', G' en S'.

Als S de som is van F en G, dan is S' de som van F' en G'

ofwel

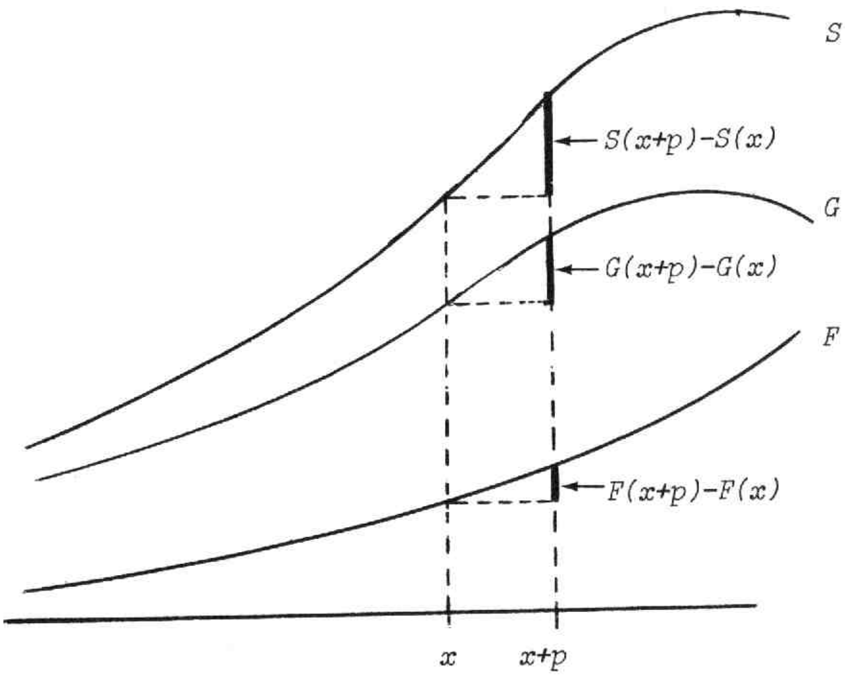
als $S(x) = F(x) + G(s)$, dan is $S'(x) = F'(x) + G'(x)$ (voor elke $x \in D$).

Bewijs:

$$\begin{array}{rcccc} S(x+p) & = & F(x+p) & + & G(x+p) \\ S(x) & = & F(x) & + & G(x) \\ \hline S(x+p) - S(x) & = & [F(x+p) - F(x)] & + & [G(x+p) - G(x)] \end{array}$$

$$\frac{S(x+p) - S(x)}{p} = \frac{F(x+p) - F(x)}{p} + \frac{G(x+p) - G(x)}{p}$$

Op elk interval $[x; x+p]$; hoe klein ook, is de gemiddelde helling van de grafiek van S gelijk aan de som van de gemiddelde hellingen van de grafieken van F en G.
Dan moet ook in elk punt x de helling van de grafiek van S de som zijn van de hellingen van de grafieken F en G.



1. Laat V de verschilfunktie zijn van F en G , dat wil zeggen $V(x) = F(x) - G(x)$.
   Wat weet je van $V'(x)$?

Voorbeeld: *differentiëer de funktie* $x \to x^4 + x^5$

Oplossing: *de afgeleide van* $x \to x^4$ *is* $x \to 4x^3$

de afgeleide van $x \to x^5$ *is* $x \to 5x^4$

de afgeleide van $x \to x^4 + x^5$ *is* $x \to 4x^3 + 5x^4$

1. Differentiëer elk van de volgende funkties.

$x \to x^2 + 10x$; $x \to 2x^3 + 3x^2$; $x \to \frac{1}{2}x^6 + x^3$; $x \to 5x^4 - 20x$

$t \to t^2 + 4t + 8$; $t \to 3t^2 - t - 2$; $t \to t^4 + 9t^3 + 7t^2 + 8t$

$u \to u^4 - u^3 + u^2 - u + 1$; $u \to 2u^{10} + 10u^5 + 2000000$

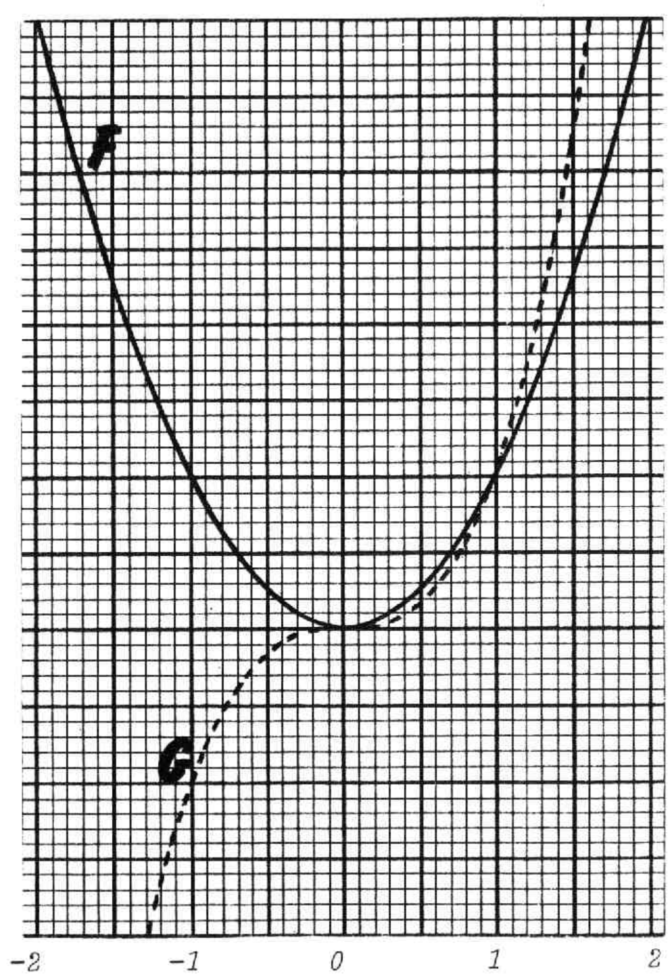
$x \to ax^2 + bx + c$ $(a, b, c \in \mathbb{R})$; $x \to x^n + x^{n+1}$ $(n \in \mathbb{Z}^+)$

2. De grafiek van $y = \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x$ gaat door het punt (2,6). Kontroleer!
   Hoe groot is de helling in dat punt?

3. In de figuur zie je de grafieken van $F : x \to x^2$ en $G : x \to x^3$.
   Teken in dezelfde figuur in rood de grafiek van de funktie $S : x \to F(x) + G(x)$.

4. In welk punt heeft de grafiek in S een horizontale raaklijn?

5. P is de "produktfunktie" van F en G. Dus
   $P(x) = F(x) \,.\, G(x) = x^2 \,.\, x^3 = x^5$
   Geldt $P'(x) = F'(x) \,.\, G'(x)$?
   Waarom?



GRAFIEKEN TEKENEN

1. f is de funktie met domein $[-1; 4]$ gegeven door $f(x) = 8 + 2x - x^2$.

   a. In welk punt van de grafiek is de raaklijn horizontaal? Teken dat punt met een stukje van die raaklijn.

   b. Teken nog enkele andere punten van de grafiek met de bijpassende raaklijn.

   c. In welk gebied is de helling van de grafiek positief? En in welk gebied negatief?

   d. Teken nu de komplete grafiek van f.

   e. Wat is het bereik van deze funktie?

2. g is de funktie met domein $[-3; 4]$ gegeven door $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x$.

   a. Bereken de punten van de grafiek, waarin de raaklijn horizontaal is.

   b. In welk(e) gebied(en) is de helling van de grafiek positief? En in welk(e) gebied(en) negatief?

   c. Teken een grafiek van g.

   d. Wat is het bereik van g?

3. f is de funktie met domein $\mathbb{R}$: $x \to 2x - \frac{1}{2}x^2$.

   a. Teken een grafiek van f.

   b. Teken in dezelfde figuur een grafiek van $g : x \to x.f(x)$.

   c. Voor welke $x \in \mathbb{R}$ geldt: $x.f(x) > f(x)$?

4. De funkties f, g en h met domein $\mathbb{R}$ zijn gegeven door: $f(x) = 2 - x$, $g(x) = x^2 + 1$ en $h(x) = (2 - x)(x^2 + 1)$.

   a. Teken in één figuur een grafiek van elk van deze drie funkties.

   b. Toon aan dat de grafiek van f een raaklijn is van de grafiek van h.

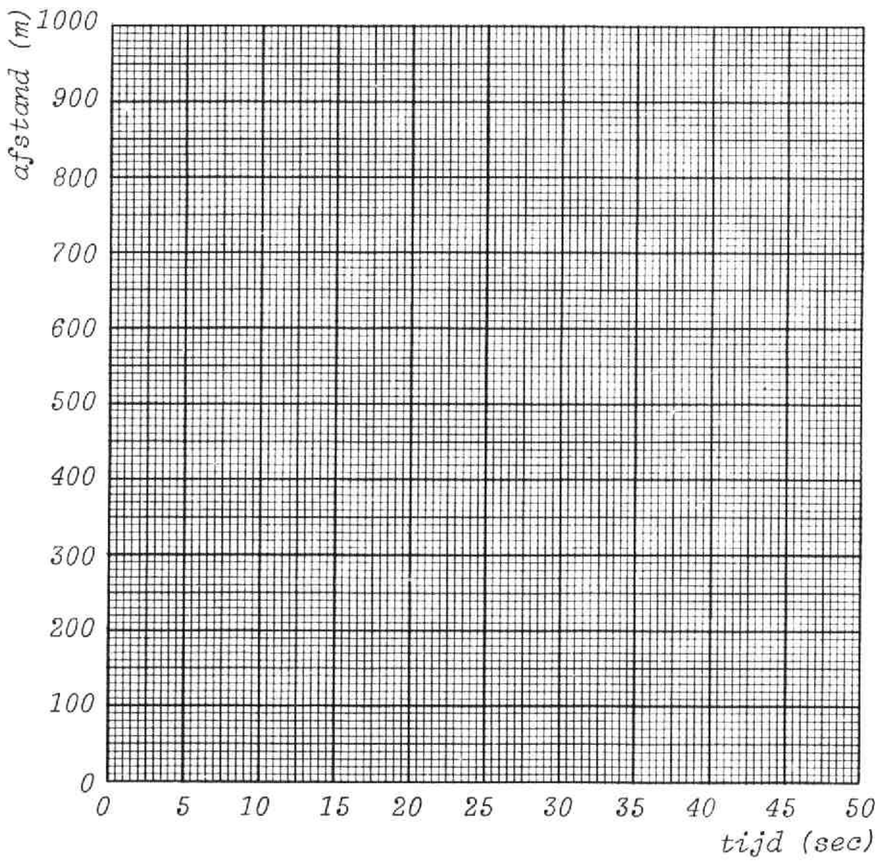
5. Probeer een funktie f met domein $\mathbb{R}$ te vinden waarvan de afgeleide f' gegeven is door $f'(x) = 2x - 3$.
   Teken een grafiek van f' en een van f.

6. Dezelfde opdracht voor g met domein $[-2; 3]$ en met $g': x \to 1 - x^2$.

ACHTERVOLGING OP DE SAVANNE

De 45-seconden-sprint van een cheetah beschrijven we met een wiskundig *model*:
Gedurende de eerste 15 seconden wordt de afgelegde afstand s (in meters) gegeven door de formule: $s = t^2$.
Voor de volgende 15 seconden geldt: $s = -225 + 30t$
En door de laatste 15 seconden: $s = -1125 + 90t - t^2$

1. Vergelijk dit model met de gegevens over de sprint van de cheetah op blz. B7.
   In hoeverre sluit dit model bij die gegevens aan? En wat klopt er niet?
2. De cheetah achtervolgt een gazelle die met een snelheid van 72 km/u voor hem uit rent.
   Hoeveel meter voorsprong moet de gazelle bij het begin van de achtervolging hebben om net buiten het bereik van de cheetah te blijven?



AFSTAND, SNELHEID, VERSNELLING

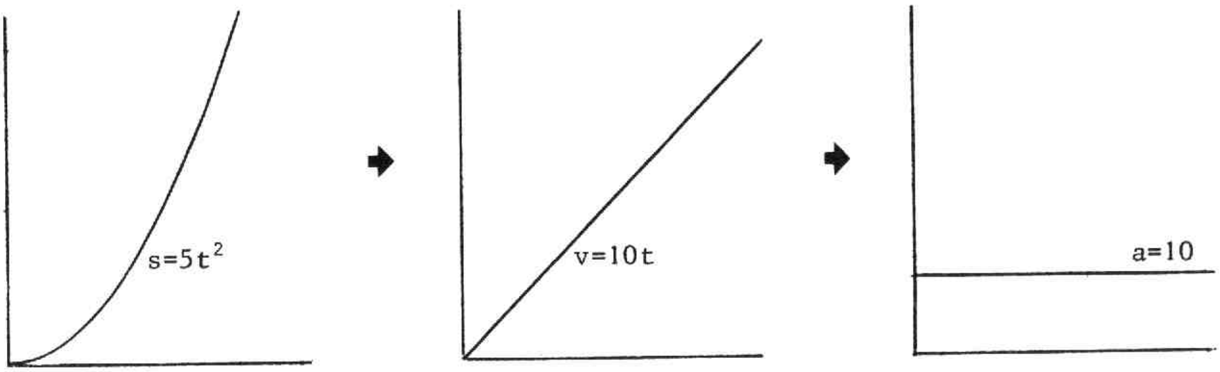
Bij vrije val op aarde wordt de valweg s (in m) als funktie van de tijd (in sec) gegeven door de formule $s = 5t^2$.

Door differentiatie vind je een formule voor de snelheid op het moment t:

$$v = \frac{ds}{dt} = 10t \ .$$

Als we deze funktie ook weer differentiëren, vinden we een formule voor de versnelling a (na t seconden:

$$a = \frac{dv}{dt} = 10$$



Dat betekent dat de snelheid van een vallend objekt toeneemt met "10 m/sec per sec" of zoals de natuurkundige zegt: 10 m/sec^2 (10 meter per seconde kwadraat).
Die (constante) versnelling wordt veroorzaakt door de zwaartekracht en wordt de *gravitatie-constante* van de aarde genoemd. *)

1. Je hebt op blz. D17 gezien dat de vrije val op de maan beschreven wordt door de formule $s = 0{,}8t^2$.
   Hoeveel m/sec^2 is de vrije-val-versnelling op de maan?

2. Op de planeet Mars is de vrije-val-versnelling 3,6 m/sec^2.
   Aan welke formule beantwoordt de tijd-valweg-funktie aldaar?

Als je een vuurpijl recht omhoog schiet dan veroorzaakt de zwaartekracht een vertraging (= negatieve versnelling).
Dus: $a = -10$ (m/sec^2).

Laat de beginsnelheid 40 m/sec zijn, dan is de snelheid na t seconden:
$v = 40 - 10t$ (in m/sec).

3. Beschrijf de afgelegde weg (=s) van die vuurpijl als funktie van t.

4. Zolang v positief is, gaat de pijl nog omhoog.
   Wanneer bereikt de pijl zijn hoogste punt?
   Hoe hoog is dat?

*) Het getal 10 is natuurlijk een benadering voor de gravitatie-constante.
Bij berekeningen wordt meestal het getal 9,8 gebruikt.
De gravitatie-constante g voor een willekeurig hemellichaam wordt gevonden via de formule:

$$g = \gamma \cdot \frac{m}{r^2} \quad (\gamma = 0{,}667 \cdot 10^{-10};\ m = \text{massa};\ r = \text{straal}).$$

Algemeen:

Een eenparig versnelde beweging is een beweging waarbij de versnelling constant (zeg a) is.
Is $a < 0$. dan spreekt men ook wel van eenparig vertraagde beweging.

De snelheid na t seconden wordt gegeven door:

$$v = v_0 + at \quad (v_0 \text{ is de snelheid op het moment } t = 0)$$

De afgelegde weg na t seconden vinden we door een funktie te zoeken waarvan v de afgeleide is *) :

$$s = s_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2 \quad (s_0 \text{ is de afgelegde weg op het moment } t = 0)$$

Meestal kiest men $s_0 = 0$, zodat de formule wordt:

$$s = v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2$$

5. Het wegenverkeersreglement schrijft voor dat de remvertraging van een auto minstens 4 m/sec^2 moet zijn.
   Stel je voor: een automobilist rijdend met 120 km/u moet plotseling op zijn rem gaan staan. Neem aan dat de auto hierdoor een eenparig vertraagde beweging krijgt. Hoeveel seconden na het indrukken van de rempedaal staat de auto stil? En hoeveel meter is de remweg?

6. Uit de Volkskrant (januari 1979)

WINTER VERGT AANGEPAST GEDRAG

Trucs tegen ongemakken

Van onze verslaggever

AMSTERDAM — Een zo winterse winter als nu heeft Nederland lang niet gekend. Het is zelfs zo lang geleden, dat velen kennelijk vergeten zijn hoe veel kleine en soms ook de wat grotere ongemakken van vorst en sneeuw met vaak eenvoudige trucs en aangepast gedrag het hoofd te bieden zijn. Met name automobilisten hebben nogal eens moeite hun verkeersgedrag in overeenstemming te brengen met de weersomstandigheden, zo weet de ANWB mee te delen. De eerste drie geboden van deze nationale bond luiden voor alles wat zich verplaatst: afstand houden, snelheid aanpassen en zorgen voor een goed zicht.

Omdat geen tien automobilisten bij het bgrip „afstand" aan een gelijk aantal meters denken, geeft de ANWB een handzame vuistregel voor besneeuwde en gladde wegen: de afstand tot de voorganger mag in meters niet minder zijn dan het kwadraat van de tientallen kilometers. Dus iemand die 80 rijdt moet 64 (acht in het kwadraat) meter achter zijn voorbuurman blijven.

Behalve alle autoruiten moeten ook de voor- en achterlichten regelmatig worden gereinigd. Zien is belangrijk, gezien worden niet minder. Voorts is het verstandig de verwarming niet op de voorruit te zetten, om te voorkomen dat opspattend pekel op de ruit opdroogt en de blik vertroebelt. Wie ondanks alle voorzichtigheid toch moet remmen, doet er goed aan die remmen niet te lang vast te houden — pompen dus — en tijdens het remmen beslist niet aan het stuur te draaien.

Vanzelfsprekend is het af te raden een vastgevroren benzinedop met een aansteker te ontdooien. Een effectieve methode is een stevige plastic zak met warm water tegen dop of portierslot te houden. Warm water er overheen gieten helpt niet, want binnen een mum van tijd is de boel dan nog vaster gevroren. Voor de rest beveelt de ANWB aan te zorgen voor een goede accu; de capaciteit neemt af naarmate het kouder wordt. Om startmoeilijkheden te voorkomen zijn voorts belangrijk een juiste afstelling van onderbrekingspunten en ontstekingstijdstip en goede bougies.

Het ziet er naar uit dat velen de al weer enige tijd geleden huis aan huis verspreide pamfletjes met tips van de waterleidingmaatschappijen bijna even lang geleden tot oud papier hebben bestempeld. De waterleveranciers werden afgelopen dagen overstelpd met honderden telefoontjes van mensen die de nood van een gesprongen waterleiding moesten trotseren. Vrijstaande woningen en boerderijen worden nog het meest geteisterd door de koude. In de stad Utrecht is het afgelopen weekeinde voor een miljoen gulden schade ontstaan door gesprongen leidingen.

Het is dus zaak die leidingen open te houden — als dat nog kan. Vooral wie zijn woning voor één of meer dagen verlaat doet er goed aan de hoofdkraan af te sluiten en de leiding af te tappen. Voorts is het verstandig de verwarming niet uit te doen, ook 's nachts niet, en bevriezing van leidingen in niet-afgesloten ruimten te voorkomen door de deuren open te laten staan.

Als het kwaad al is geschied en de koperen buizen alleen nog ijs omvatten, kan alleen de loodgieter nog uitkomst brengen. Zelf prutsen met elektrische kacheltjes of gasvlammen kan alleen maar voor nog meer narigheid zorgen. Het waterleidingbedrijf bellen heeft ook geen zin, want dat komt pas in het geweer als er buitenleidingen zijn bevroren.

In het artikel is er sprake van een vuistregel voor het berekenen van de afstand (=remweg) tussen twee auto's op de snelweg.
Klopt die vuistregel zo'n beetje met de remvertraging van 4 m/sec^2?

*) Het opsporen van een funktie waarvan de afgeleide bekend is, wordt *integreren* genoemd .

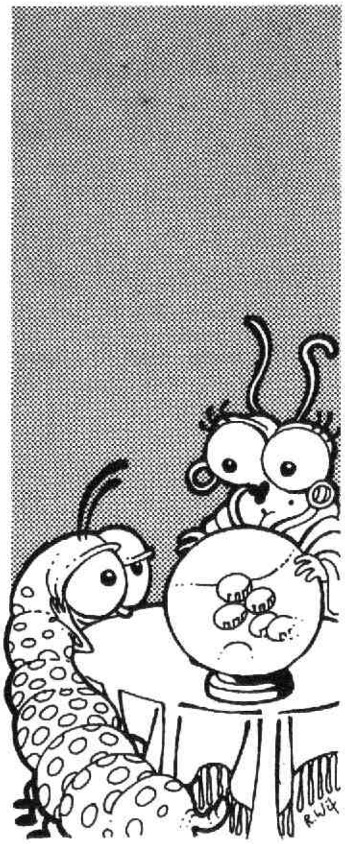
TERUGBLIK

Vier regels om te onthouden:

F, G, K zijn funkties respektievelijk met afgeleide F', G', K'.

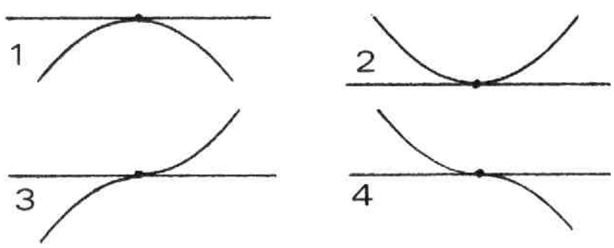
1. *Als* $K(x) = x^n$, *dan* $K'(x) = n.x^{n-1}$
2. *Als* $K(x) = F(x) + c$, *dan* $K'(x) = F'(x)$
3. *Als* $K(x) = c.F(x)$, *dan* $K'(x) = c.F'(x)$
4. *Als* $K(x) = F(x) + G(x)$, *dan* $K'(x) = F'(x) + G'(x)$

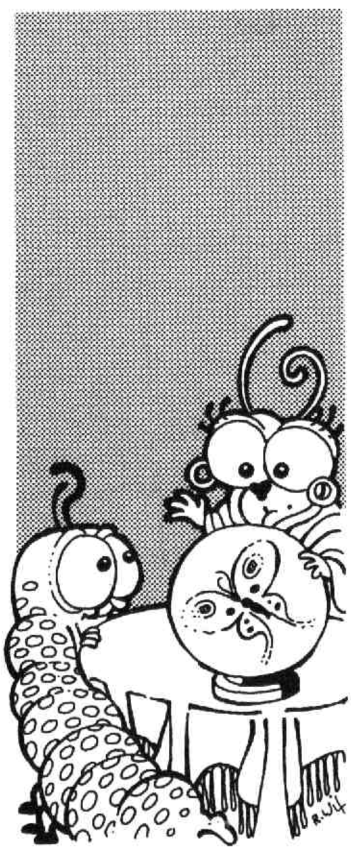
Met behulp van deze regels kun je alle veeltermfunkties differentiëren.
De afgeleide funktie is een belangrijke steun bij het tekenen van een grafiek: je kunt daarmee de punten met horizontale raaklijn vinden en ook de gebieden waarin de helling van de grafiek positief respektievelijk negatief is.



VOORUITZICHT

De punten met horizontale raaklijn zijn vaak van bijzondere betekenis. Zij zijn als het ware de "rustpunten" in de verandering van de funktie.
Er zijn vier mogelijkheden:

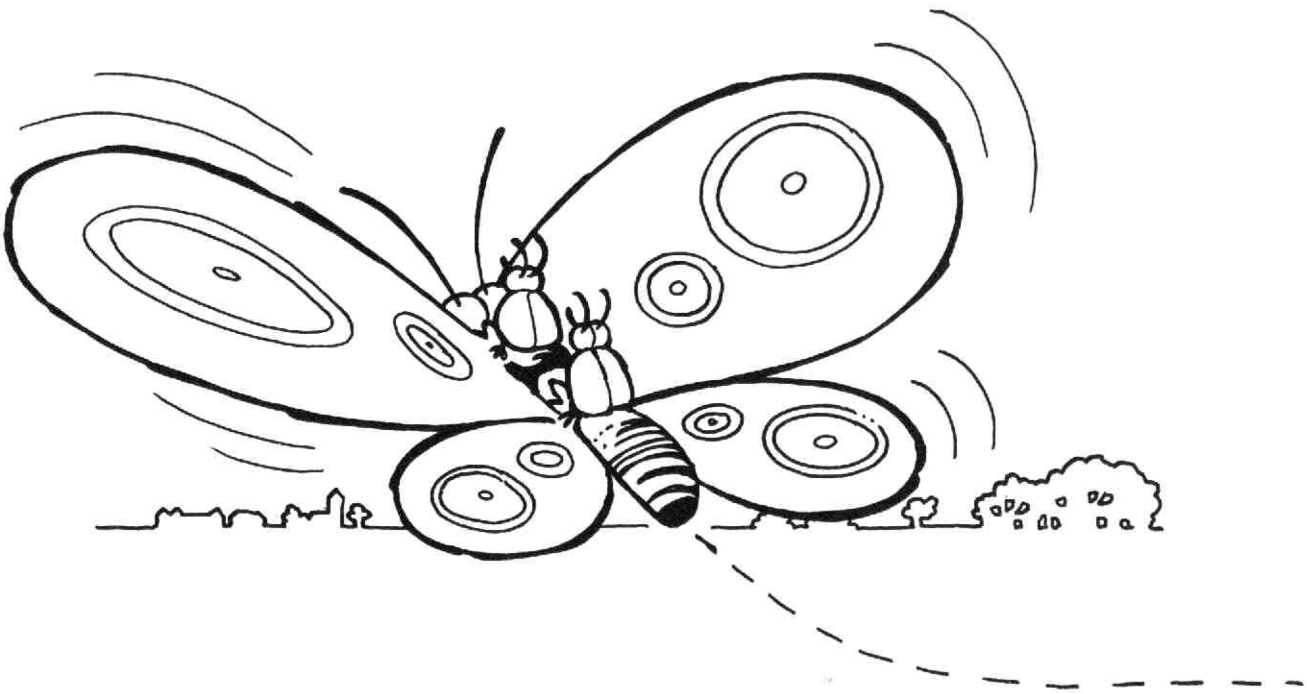




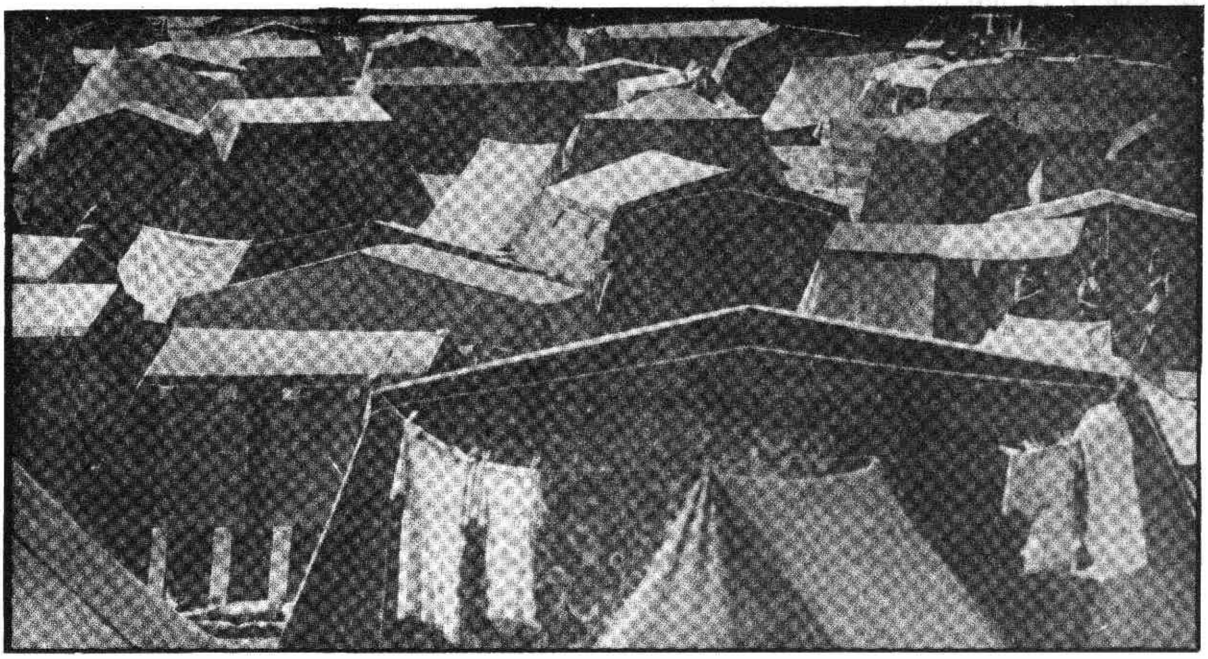
In de gevallen 1 en 2 geven de punten met horizontale raaklijn een *uiterste waarde* (maximum of minimum) van de funktie aan en dat is in de toepassingen soms erg belangrijk.....

DEEL H

MAXIMA - MINIMA



CAMPING "MIERENHOOP"



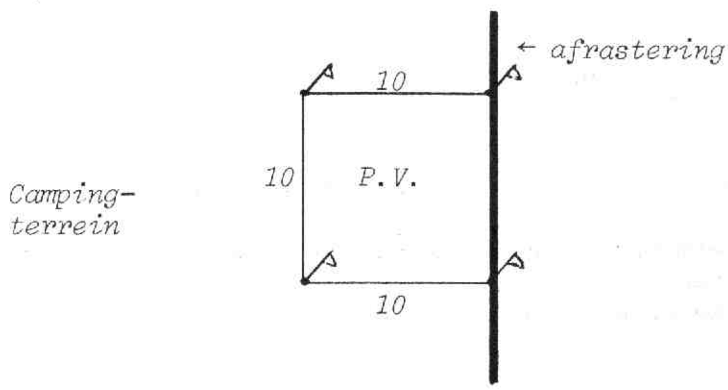
Een kampeerterrein van Zandvoort: een stad van tenten.

In het reglement van camping "Mierenhoop" staat o.a. te lezen:

Iedere nieuw aangekomen kampeerder ontvangt vier vlaggetjes en een touw van 30 meter lengte, waarmee hij een rechthoekige kavel moet afperken ....

Het campingterrein wordt aan alle kanten begrensd door een twee meter hoge afrastering.
In het voorseizoen wordt vaak oogluikend toegestaan dat deze afrastering handig wordt benut bij het uitzetten van een kavel.

Eén van de eerste kampeerders dit jaar, Piet Vroegop, heeft het goed bekeken (vindt-ie zelf):



1. Onderzoek of Piet (op deze manier profiterend van het hek) een nog groter stukje terrein met zijn touw had kunnen afperken.

CAMPING "MIERENHOOP" H2

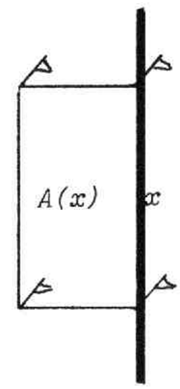
De vraag is natuurlijk: "Wat is de *grootste* rechthoek die je op deze manier met een touw van 30 meter kunt maken?"

De methode van oplossen die hier wordt behandeld, berust op twee ideeën:

a. De oppervlakte van zo'n rechthoek is een funktie van één van de zijden (zeg de zijde langs het hek).

b. De afgeleide funktie hiervan geeft inzicht hoe die oppervlakte verandert bij verandering van de zijde.

Uitwerking van deze ideeën:



a. Stel de zijde van de rechthoek langs de afrastering x meter. De oppervlakte van de rechthoek (in m^2) is een funktie van x. Noem die oppervlakte $A(x)$.

   1. Er geldt: $A(x) = 15x - \frac{1}{2}x^2$.
      Kontroleer dit.
      Wat is het domein van de funktie $x \to A(x)$?

   2. Bereken $A'(x)$.
      Voor welke x is $A'(x)$ positief (respektievelijk negatief)?

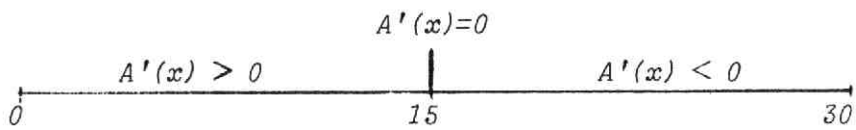
b. In het interval waar $A'(x)$ positief (respektievelijk negatief) is neemt $A(x)$ toe (respektievelijk af)!

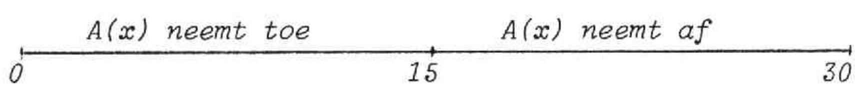
   In dit geval:

   $0 < x < 15 \Rightarrow A'(x)$ *positief* $\Rightarrow A(x)$ neemt *toe* als x toeneemt.

   $15 < x < 30 \Rightarrow A'(x)$ *negatief* $\Rightarrow A(x)$ neemt *af* als x toeneemt.

   Schema:





   3. Maak een grafiek van de funkties $x \to A(x)$.

   4. Welke afmetingen heeft de grootste rechthoek die Piet Vroegop kan uitzetten?
      En welke oppervlakte heeft dat kavel?

CAMPING "MIERENHOOP"

De oplossing van Piet Vroegop kan, grofweg gezien, worden ingedeeld in drie stappen:

Stel een van de zijden x en bereken de oppervlakte als funktie van x.

↓

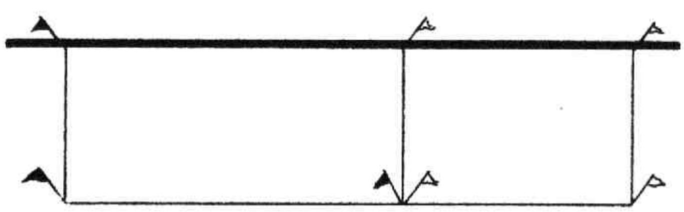
Bereken de grootste waarde van deze funktie met behulp van de afgeleide funktie en kontroleer met een grafiek.

↓

Vertaal deze resultaten terug in afmetingen en oppervlakte van het kavel.

Pas deze methode toe bij de volgende opdrachten.

Twee andere kampeerders, Jeroen Langveld en Max Kamphuis spannen samen. Zij willen het touw dat hun door de campingbaas verstrekt is (twee stukken van 30 meter) zo economisch mogelijk gebruiken.
Volgens de reglementen moet er wel een grenslijn gespannen zijn tussen de twee kavels.
En natuurlijk benutten zij ook de afrastering.



5. Welke afmetingen hebben de twee kavels voor het geval dat de totale oppervlakte maximaal is?

In het hoogseizoen is de campingbaas minder soepel. Hij maakt bekend dat elke kampeerder zijn kavel aan *alle* kanten met zijn touw moet begrenzen.
Met andere woorden, de omtrek van het kavel mag niet meer dan 30 meter zijn.

6. Welke afmetingen heeft het grootste kavel met die omtrek?

OPTIMALE STIJGSNELHEID

Bij een vliegtuigkaping is het voor de vlieger van het grootste belang om te weten met welk *vermogen* hij het langst in de lucht kan blijven. Bij luchtvervoer van een ernstig zieke patiënt is juist het probleem:
met welk vermogen ben ik het snelst op de plaats van bestemming?

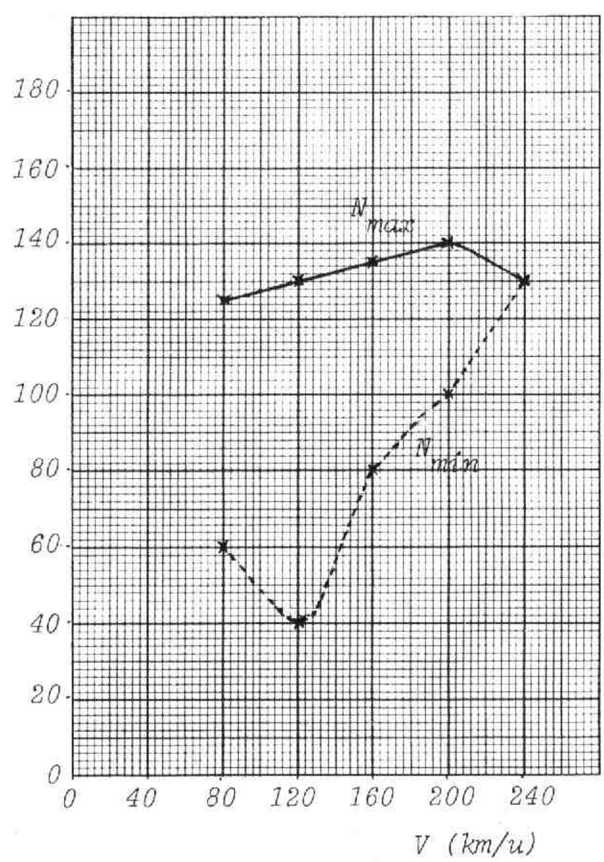
De luchtfoto-vlieger of politie-surveillance-vlieger doet juist zijn best om zo langzaam mogelijk te vliegen. En bij een onverwacht uit de nevel opduikende bergwand is het vermogen om zo snel mogelijk op te stijgen van levensbelang ...

We bekijken de gegevens voor een zeker type vliegtuig, zoals die door de fabriek worden verstrekt.

snelheid in horizontale vlucht	*maximaal vermogen*	*minimaal vermogen*
80 km/u	125 pk	60 pk
120 km/u	130 pk	40 pk
160 km/u	135 pk	80 pk
200 km/u	140 pk	100 pk
240 km/u	130 pk	130 pk

1. Stel je voor dat een vliegtuig van dit type gekaapt wordt. Welke snelheid zou de vlieger het best kunnen aanhouden?

   Hiernaast zie je grafieken van het maximaal vermogen (N_{max}) en het minimaal vermogen (N_{min}) als funktie van de snelheid (V).



2. Het verschil $N_{max} - N_{min}$ is het vermogen wat de piloot "over" heeft om vanuit horizontale vlucht te kunnen stijgen.
   Wat is de optimale stijgsnelheid, dat wil zeggen de snelheid waarbij het meeste vermogen "over" is?

   Los dit probleem op door de grafiek te tekenen van N_{stijg} ($= N_{max} - N_{min}$) als funktie van V.

Voor een ander type vliegtuig kunnen de gegevens voor N_{max} en N_{min} benaderd worden door de formule:

$$N_{max} = \frac{1}{4} V + 60 \qquad (0 \leqslant V \leqslant 240)$$

$$N_{min} = \frac{1}{160} V^2 - \frac{3}{2} V + 120$$

4. Gebruik dit "wiskundig model" om met behulp van differentiaalrekening de optimale stijgsnelheid uit te rekenen.

5. Teken ook de grafieken van N_{max}, N_{min} en N_{stijg} in één figuur.

De CESSNA 172 Skyhawk is het meest verkochte sportvliegtuig ter wereld. De prestaties van dit vliegtuig komen overeen met de gegevens in deze opgave.

Een rietsuiker-fabrikant brengt zijn produkt op de markt voor *f* 2,80 per kg.
De winst die hij maakt hangt natuurlijk af van zijn kosten i.v.m. inkoop, fabrikage en verkoop.

1. Geef een paar voorbeelden van inkoopkosten. Ook van fabrikage- en verkoopkosten.

De totale kosten (in guldens) noemen we K en de te produceren hoeveelheid rietsuiker (in kg) noemen we q.

RIETSUIKER
Bij de bereiding van rietsuiker wordt het suikerriet eerst tussen molenrollen geplet en gemalen, waarbij het suikersap (ruwsap) eruit geperst wordt. De vezelachtige rest (ampas) dient o.m. als brandstof voor stoomketels. Het ruwsap wordt door uitvlokken, bezinken en filtreren gezuiverd. Het heldere sap (schoonsap) wordt dan verder behandeld zoals bietsuiker.

Door rietsuiker te gebruiken vergroot men de politieke druk op de regeringen van de rijke landen om ook de arme landen een plaatsje onder de welvaartszon te gunnen.

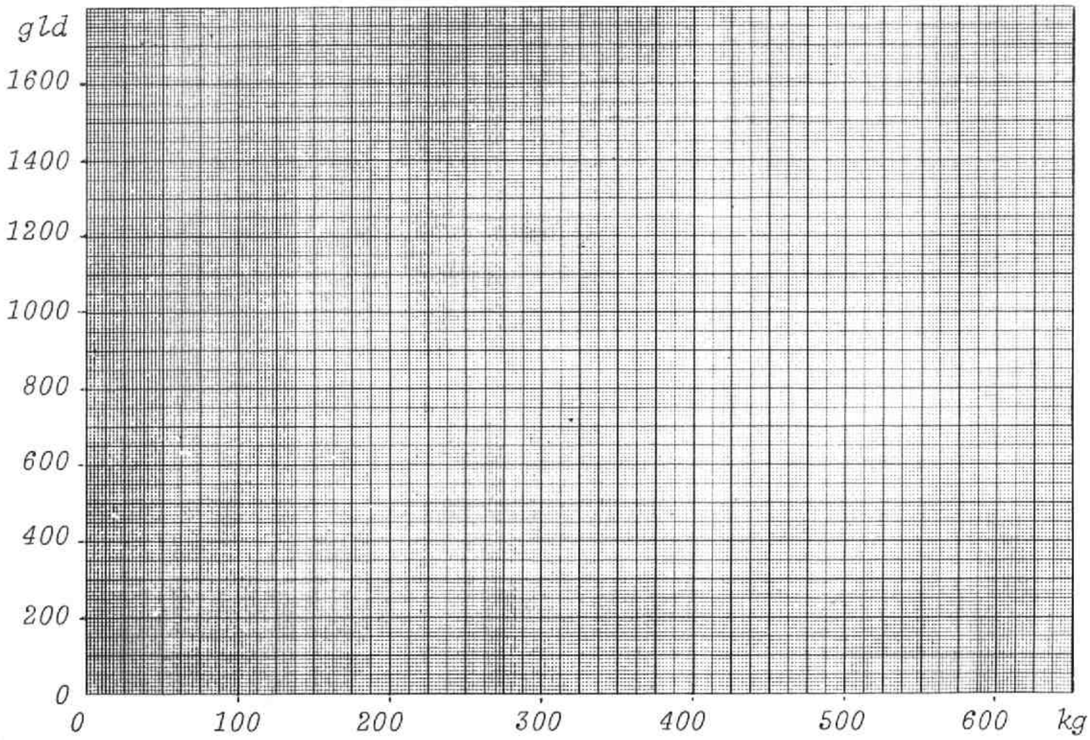
De fabrikant beschikt over de volgende gegevens:

produktie in kg q	100	200	300	400	500	600
kosten in guldens K	75	100	125	200	400	800

2. Schets een grafiek van K als funktie in q.

3. Teken in dezelfde figuur ook een grafiek van de opbrengst R (in gld) als funktie in q. (Je mag aannemen dat de totale geproduceerde hoeveelheid tegen de vastgestelde prijs wordt verkocht).

4. De winst W is gelijk aan $R - K$
Teken nu ook de grafieken van W.



De fabrikant is er in geïnteresseerd hoe kosten (en winst) veranderen bij toename van de produktie.

5. Bereken de gemiddelde kosten-stijging (in gld per kg) bij een produktietoename van 400 naar 500 kg.
   Bereken ook de gemiddelde winststijging bij die produktietoename.

De gemiddelde kostenstijging (winststijging) kan meetkundig worden gezien als de gemiddelde helling van de kostengrafiek (winst grafiek) op een interval. In de economie hecht men ook betekenis aan de helling van zo'n grafiek *in één punt*.
Zo noemt men de helling in een punt van de kosten-grafiek de *marginale kosten* (MK).
In formule: $MK = \frac{dK}{dq}$
De marginale kosten geven een maat voor de verandering van de kosten bij verandering van de produktie.
Evenzo spreekt men van *marginale winst* en *marginale opbrengst.*

6. Schat met behulp van je grafiek de marginale kosten, marginale opbrengst en marginale winst voor de rietsuikerfabrikant bij een produktie $q = 400$.

7. De fabrikant heeft een wiskundig model van zijn kostenfunctie gemaakt:

   $$K = 10Q^3 - 60Q^2 + 130Q$$

   waarin Q de produktie in hoeveelheden van 100 kg is ($Q = 100q$).

   Kontroleer of dit model aardig past bij de gegevens in de tabel op blz. H6.

8. Bereken op basis van dit model de marginale kosten en de marginale winst bij een produktie $q = 400$.

9. Bij welke produktie is volgens dit model de winst maximaal?

In het voorbeeld van de rietsuikerfabrikant hebben we verondersteld dat de prijs *(p)* van het produkt en de verkochte hoeveelheid *(q)* onafhankelijk van elkaar zijn.
Dat is niet erg realistisch, al zou je je kunnen voorstellen dat veel mensen uit idealisme ("steun de derde wereld") rietsuiker kopen, ongeacht de prijs. In de economische praktijk van alledag heeft de prijs natuurlijk wel invloed op de verkoop (hoe lager p, hoe groter q) en in het volgende voorbeeld zullen we daarmee rekening houden.

Een supermarkt verkoopt potjes vruchtenyoghurt (inhoud ½ l) tegen de adviesprijs van *f* 1,80.
Er worden wekelijks zo'n 1000 van die potjes omgezet. Dat betekent dus een opbrengst van *f* 1800,--.
De bedrijfsleider schat, dat elk dubbeltje prijsverlaging een omzetverhoging van 100 potjes tot gevolg heeft.
De laagst mogelijke prijs is *f* 1,20; dat is namelijk de prijs waartegen de potjes worden ingekocht.

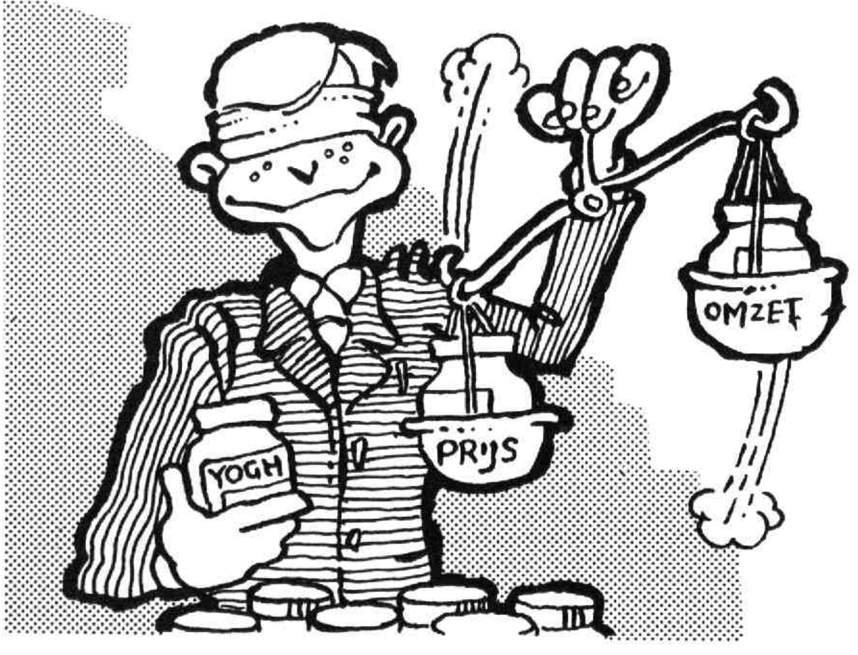
1. De bedrijfsleider heeft een wiskundig model gekozen.
   Stel: p = de verkoopprijs in centen en q = de omzet.
   Beschrijf het model van de bedrijfsleider met een algebra-formule die het verband vastlegt tussen p en q.

2. De opbrengst R (in centen) is een funktie van p.
   Welke? (Geef weer een formule).
   Wat is het domein van die funktie?

3. Bereken de "marginale opbrengst" als funktie van p.
   Wat betekent het voor de opbrengst als de marginale opbrengst positief, respektievelijk negatief is?

4. Bij welke prijs zal de opbrengst maximaal zijn?

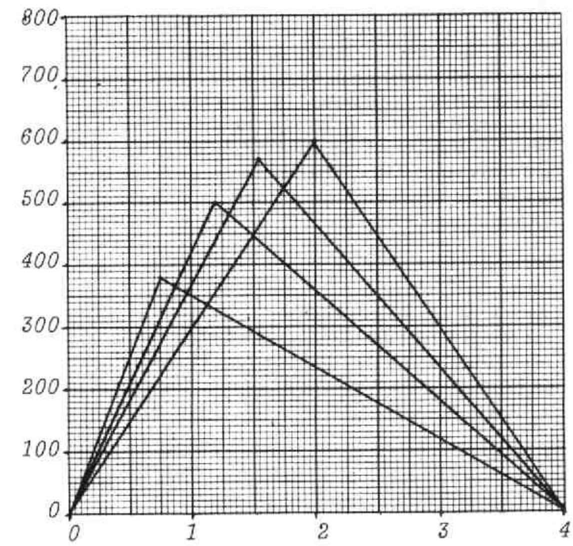
5. Teken de grafiek van R als funktie van p.



POINTS-OF-NO-RETURN

Op blz. B3 heb je gezien dat het point-of-no-return van een vliegtuig dichterbij ligt, naarmate de windkracht in de richting van de vliegroute groter is.

In het plaatje zie je een paar grafieken van de vier-uurs-vlucht van de Beechcraft Bonanza bij verschillende windsnelheden.
Daarbij is uitgegaan van een vliegsnelheid van 300 km/u t.o.v. de lucht.
De verschillende toppen die korresponderen met de points-of-no-return, liggen op een kromme lijn.
Bij die kromme lijn kunnen we een formule vinden.



Stel: y = afstand vertrekhaven tot point-of-no-return.
x = tijdstip waarop het point-of-no-return wordt bereikt (time-of-no-return).
w = de windsnelheid ($w > 0$; wind mee, $w < 0$; wind tegen)

De snelheid op de heenweg (in km/u) is $300 + w$.

Die snelheid is ook gelijk aan $\frac{y}{x}$.

Dus: $\frac{y}{x} = 300 + w$ ....(1).

1. Via de snelheid op de terugweg kun je een tweede betrekking (2) tussen y, x en w opstellen. Welke?

2. Uit (1) en (2) volgt dan: $y = 600x - 150x^2$.
   Kontroleer dit.

3. Teken de grafiek K van $y = 600x - 150x^2$.

4. Met welke situatie korrespondeert de top van K?

5. K is symmetrisch t.o.v. de lijn $x = 2$.
   Dit had je ook vooraf (zonder formule) kunnen weten.
   Waarom?

6. Bereken de helling van K in het punt (0,0).
   Ook deze uitkomst had je kunnen voorspellen.
   Verklaar dit.

Uit de 2e wereldoorlog:

1941 18 mei

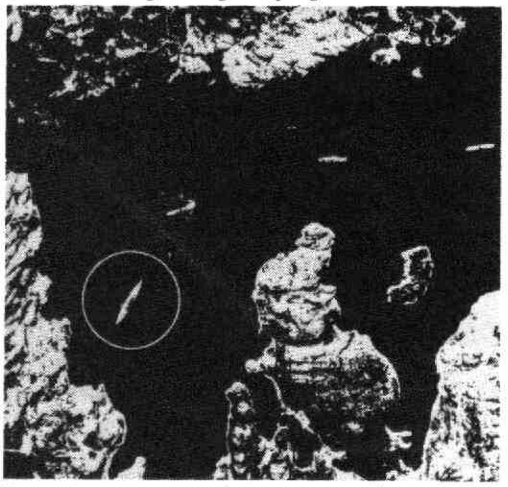
De zaken gaan voorspoedig voor de Duitsers. Overal worden overwinningen geboekt. Vanuit de haven van Gdynia (nu Polen) vertrekken de Bismarck, het sterkste slagschip ter wereld, en de kruiser Prinz Eugen. Voor de Bismarck is het de eerste reis. Het is de bedoeling om onopgemerkt door de geallieerden de Noorse fjorden te bereiken. Vandaar wil men, bij geschikt slecht weer, uitvaren naar de Atlantische Oceaan, om zoveel mogelijk vijandelijke konvooien lastig te vallen. De operatie "Rheinübung" is begonnen.

20 mei

Jammer genoeg voor de Duitsers worden ze in het Skagerrak waargenomen door een Zweedse kruiser. En zo neutraal zijn de Zweden ook weer niet. Dezelfde dag weet de Britse admiraliteit het slechte nieuws: "De Bismarck is uitgevaren".

21 mei

De Engelsen zenden verkenningsvliegtuigen uit die een foto maken, waarop de Bismarck duidelijk (zie cirkel) te zien is. Dit brengt de Engelsen pas goed in aktie.



Verwacht wordt o.a. dat de Bismarck uit zal breken naar het nauw tussen IJsland en Groenland, de Straat van Denemarken. Daarom voeren de Engelsen een bombardement uit op de fjord maar helaas, de Bismarck blijkt reeds vertrokken, gebruik makend van duisternis en mist. In de Straat patrouilleren de Engelse kruisers Suffolk en Norfolk, die snel versterking dienen te krijgen.

22 mei

Daarom vertrekt een dag later Engelands trots: het ietwat bejaarde slagschip Hood, samen met de Prince of Wales uit Scapa Flow (Schotland) naar de Straat.

23 mei 12.00 uur

De Bismarck en de Prinz Eugen varen de Straat binnen en worden om 19.22 uur gezien door de Suffolk en Norfolk, aangezien de beloofde mist de Duitsers in de steek laat. De twee Engelse schepen schaduwen de Bismarck met behulp van hun radar, zorgvuldig op afstand blijvend, en daardoor zo af en toe het contact verliezend. Admiraal Lütjens op de Bismarck maakt zich nauwelijks zorgen. De twee Engelsen zijn geen partij voor hem, en volgens een Duits verkenningsvliegtuig zijn de Hood en de Prince of Wales nog niet uitgevaren. Een kostbare fout van de vlieger, want inmiddels zijn beide schepen wel degelijk in de Straat aangekomen.

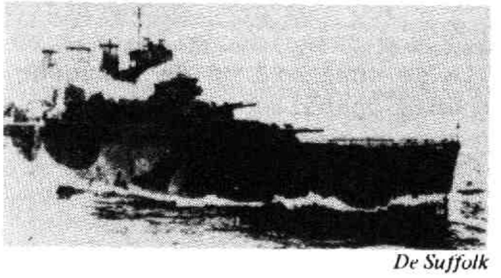
Pech voor Lütjens is ook, dat de Engelse radar veel beter is dan de Duitsers denken zodat ze de Suffolk maar niet kwijt kunnen raken. Dat valt behoorlijk tegen. Zeker als hij ook nog ontdekt dat de Hood inmiddels in de buurt is. Via de radio hoort Lütjens dat de Suffolk aan de Hood de positie van de Bismarck doorgeeft.

24 mei 05.52 uur

De Hood opent het vuur op de fantastisch gepantserde Bismarck. Jammer genoeg voor de Engelsen heeft de Hood niet zo'n geweldige pantsering, met name op het bovendek. En uitgerekend daar treft het vijfde salvo van de Bismarck de Hood. Een verschrikkelijke explosie wordt gevolgd door enorme rookwolken. Al die optrekken is de zee weer geheel verlaten. Drie van de 1400 opvarenden worden gered... De Prince of Wales weet niet hoe snel hij van het strijdtoneel moet vertrekken.
De jubelstemming waarin Lütjens verkeert is er verantwoordelijk voor dat deze de raad van de kapitein van de Bismarck, om nu maar snel met het beschadigde schip naar huis te koersen, in de wind slaat. Een kostbare overmoedigheid.

24 mei 24.00 uur

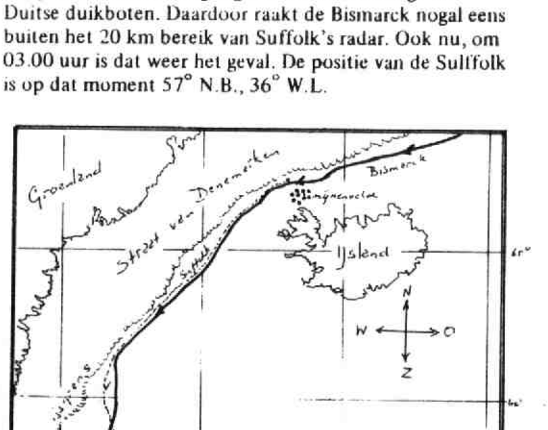
De Engelsen doen een verbeten aanval op de Bismarck met torpedo's gelanceerd door Swordfish vliegtuigen, maar de pantsering van de Bismarck is superieur. Maar een toch wat nerveus geworden Lütjens besluit alsnog maar naar Frankrijk terug te keren.



De Suffolk

25 mei 03.00 uur

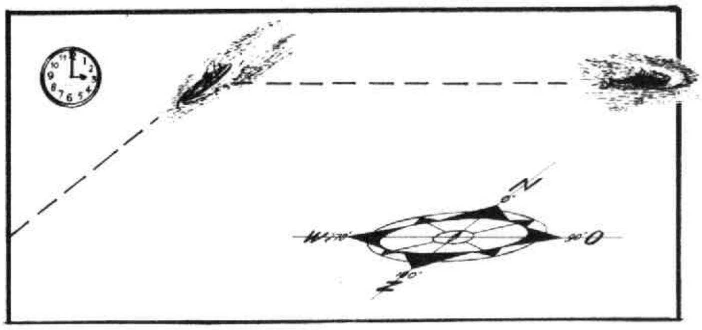
De Suffolk achtervolgt de Bismarck. Het is zeer slecht weer. Een donkere nacht met dichte mist. Bovendien is de bemanning van de Sulffolk uitgeput. Tot overmaat van ramp moeten ze een zig-zag-koers varen vanwege de Duitse duikboten. Daardoor raakt de Bismarck nogal eens buiten het 20 km bereik van Suffolk's radar. Ook nu, om 03.00 uur is dat weer het geval. De positie van de Sulffolk is op dat moment 57° N.B., 36° W.L.



DE ACHTERVOLGING VAN DE BISMARCK

De Bismarck vaart zuidwaarts met een snelheid van 40 km per uur. Ze is licht beschadigd in het gevecht met de Hood en kan daardoor niet op volle snelheid varen.

De Suffolk is het spoor bijster en vaart in westelijke richting met een snelheid van 60 km per uur.



Om 03.00 uur is de afstand tussen beide schepen 39 km, zodat de Bismarck royaal buiten het bereik van Suffolk's radar is.
Het daarop volgende uur veranderen de beide schepen niet van koers.

PROBLEEM: BLEEF DE BISMARCK ONZICHTBAAR OP HET RADARSCHERM VAN DE SUFFOLK?

1. Meet (of bereken) de onderlinge afstand van beide schepen om 03.00 uur; 03.15; 03.30; 03.45; 04.00; 04.15 uur.

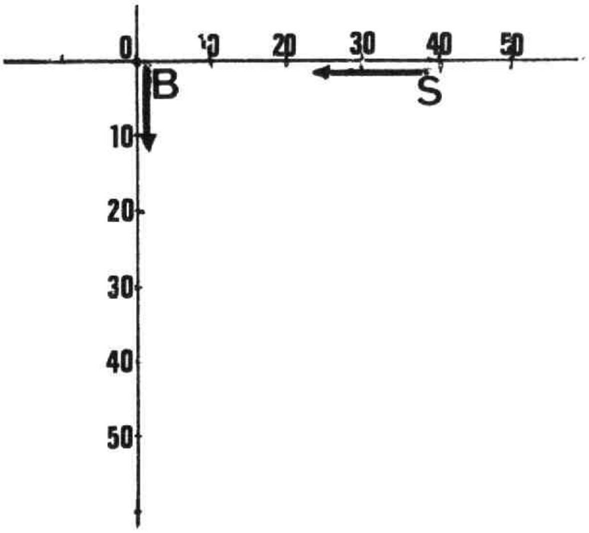
2. Zet je resultaten uit in een grafiek.

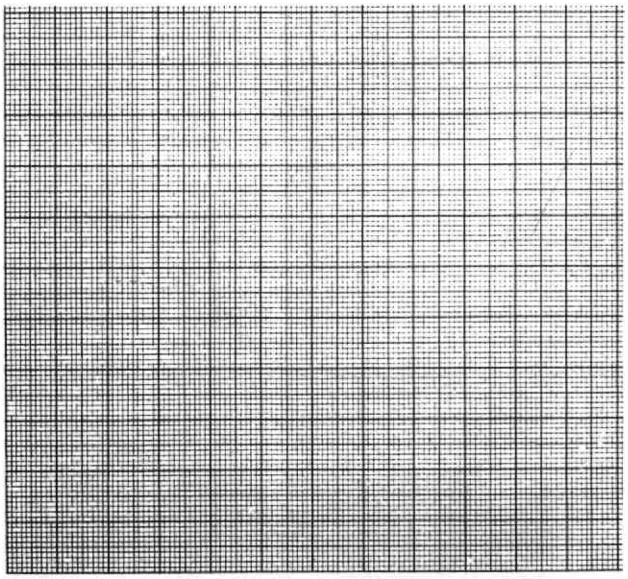
3. In welke periode - denk je - is de onderlinge afstand van beide schepen minimaal geweest?

4. De afstand tussen beide schepen om t minuten na 03.00 uur noemen we $a(t)$.
   Met behulp van de stelling van Pythagoras kun je gemakkelijk het kwadraat van die afstand uitdrukken in t.
   Vul in:
   $f(t) = a^2(t) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

5. Bereken de afgeleide van f.
   Op welk moment is $f(t)$ (en dus ook $a(t)$!) minimaal?

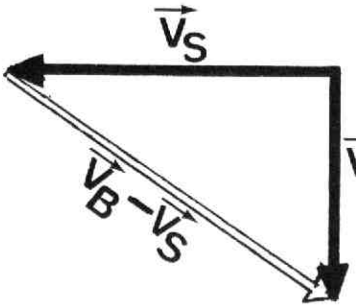
6. Bleef de Bismarck buiten het radarbereik van de Suffolk?



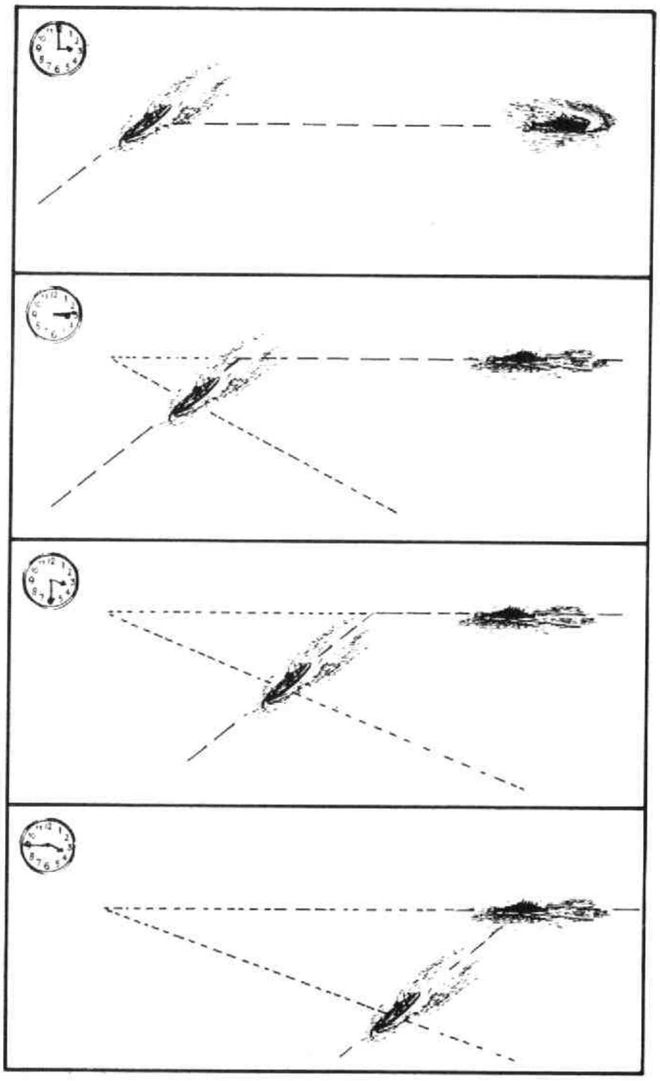


Het vraagstuk kan ook meetkundig worden opgelost!
Noem de snelheidvectoren van de Bismarck en de Suffolk respektievelijk $\vec{V}_B$ en $\vec{V}_S$
De relatieve snelheid van de Bismarck ten opzichte van de Suffolks is het verschil van de vectoren $\vec{V}_B$ en $\vec{V}_S$.

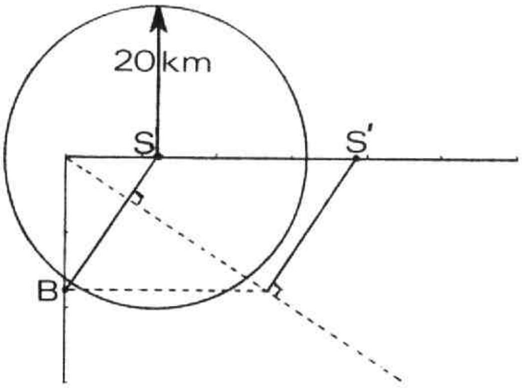
De Bismarck beweegt zich ten opzichte van de Suffolk langs een rechte lijn, waarvan de richting door de vectoren $\vec{V}_B - \vec{V}_S$ bepaald wordt.



In de serie plaatjes is dat duidelijk te zien.



De *konstruktie* van de kortste afstand is nu niet moeilijk meer. Op het moment dat de lijn *BS* loodrecht staat op de stippelroute is de afstand minimaal. En zoals uit de tekening blijkt is die minimale afstand iets meer dan 20 km.



Hoe het allemaal afliep:

25 mei 06.05 uur

Het oppercommando in Engeland krijgt het bericht: We zijn de Bismarck kwijt. Maar dan maakt Lütjens een nieuwe blunder. Hij doorbreekt de radiostilte om een half uur lang met de Führer over z'n geweldige succes te praten. (De Prinz Eugen was ondertussen onopgemerkt z'n eigen weg gegaan).
De Engelsen hebben aan dat halve uur ruim genoeg om de Bismarck nauwkeurig te peilen. Maar nu begaan de Britten op hun beurt een stommiteit: ze zetten de peilingen uit op een navigatiekaart en niet op de speciale gnomische kaart. Daardoor komen ze uit op een punt 300 km (!) verwijderd van de ware positie. Kortom de Engelsen menen dat de Duitsers rechtsomkeert gemaakt hebben en zenden al hun schepen de verkeerde kant op. Maar een nieuwe fout brengt de Engelsen weer terug in de strijd: ze vangen een bericht op van een U-boot maar denken dat het de Bismarck is, en zowaar, die is wel degelijk daar in de buurt.

26 mei

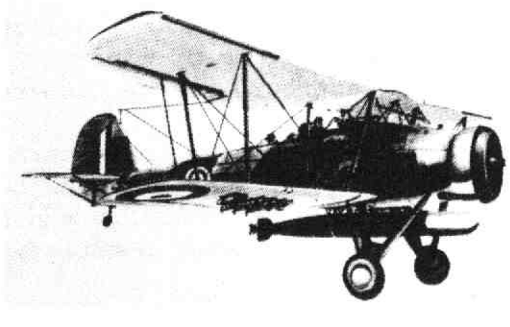
Zoekakties tussen IJsland en Frankrijk hebben resultaat: om 10.36 uur vindt een Catalina vliegboot de Bismarck weer. Alleen kan nu geen van de Engelse oorlogsschepen op tijd zijn om de Bismarck te onderscheppen. Daarom wordt besloten tot een laatste luchtaanval.

26 mei 14.30 uur

De vliegtuigen van de Ark Royal stijgen op. De eerste aanval is niet direct de beste. Weliswaar worden elf torpedo's gelanceerd, maar op een Engels schip, de Sheffield. Een gelukkig niet noodlottige vergissing, maar de tijd dringt nu erg.

26 mei 19.10 uur

In storm en regen stijgen de vliegtuigen weer op. Van de onder deze zeer moeilijke omstandigheden gelanceerde dertien torpedo's treffen er twee doel. Eén midscheeps, maar zoals al eerder bleek, kan dat niet veel kwaad. In feite is de enige kwetsbare plek van de Bismarck het roer en de schroeven. Daar treft de tweede torpedo het schip. Dan is het een paar minuten voor negen.

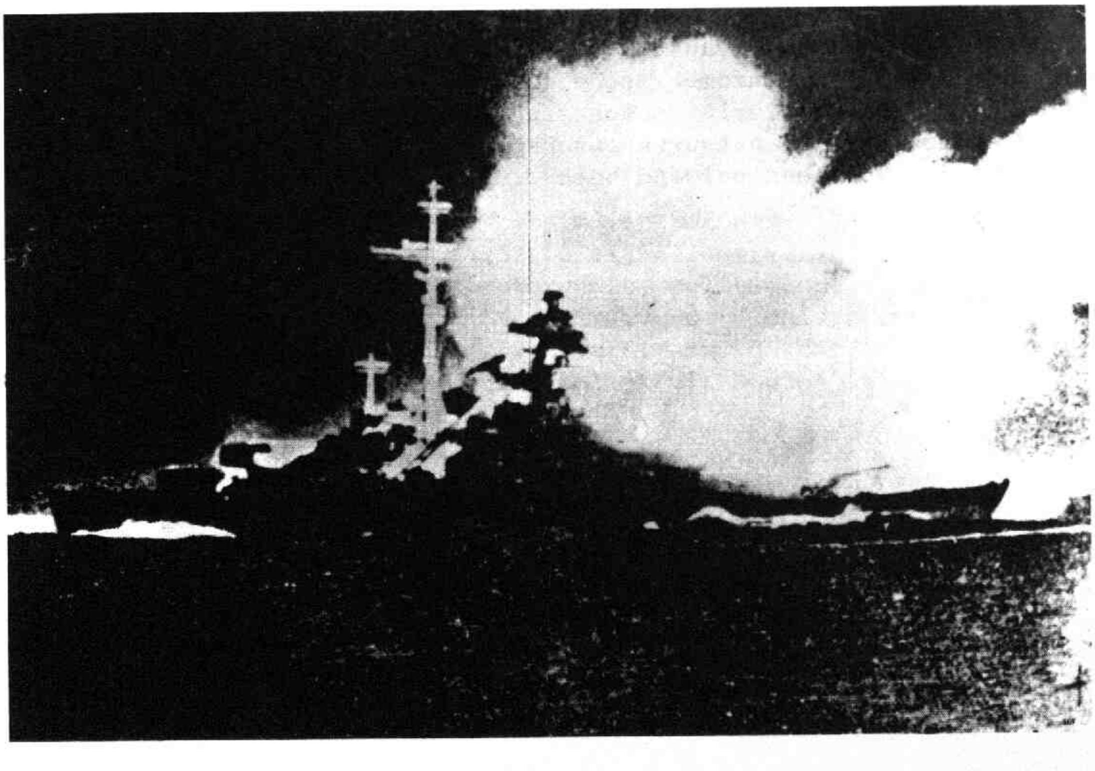


De Fairey Swordfish, een 2-persoons torpedovliegtuig, geschikt voor vliegdekschepen. Er kan slechts één torpedo worden meegenomen (duidelijk zichtbaar tussen het landingsgestel).

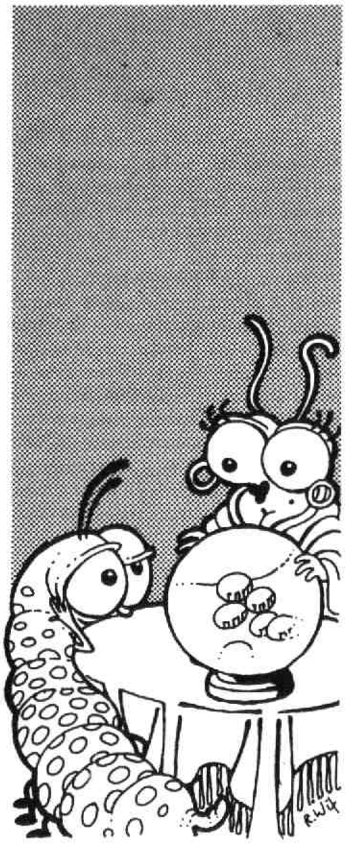
Nu is Lütjens in paniek. Want wat te doen met een prima slagschip waarvan het roer vastzit onder een hoek van 15 graden met de langsas van het schip, en dat bovendien maar op halve kracht kan varen? Een IJzeren Kruis wordt uitgeloofd voor degene die het roer kan repareren. Tevergeefs. De Bismarck vaart rondjes, wachtend op z'n afslachting. Die laat niet lang meer op zich wachten.

27 mei 10.40 uur

Nadat het geschut van de Bismarck door de Rodney is uitgeschakeld wordt het schip tot zinken gebracht door torpedo's van de Dorsetshire. Van de 2300 opvarenden worden er slechts 105 gered, omdat een Engelse uitkijk denkt een U-boot te zien (die er niet is) waardoor de Engelsen hun reddingsakties staken, daarmee de Duitsers in het water achterlatend. De eerste en enige reis van de Bismarck is ten einde.



TERUGBLIK



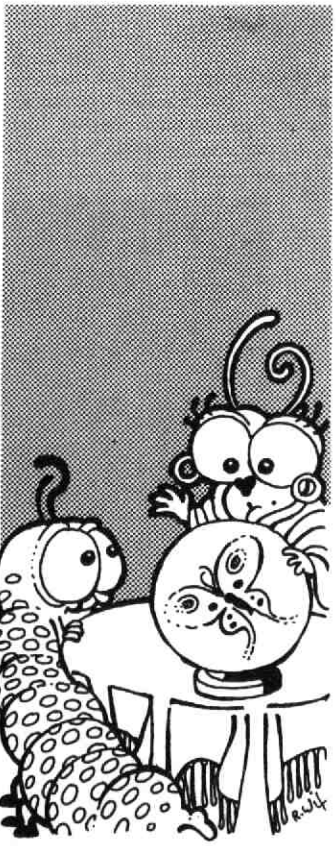
Je hebt in deel H gezien dat differentiaalrekening gebruikt kan worden om uiterste waarden (maxima, minima) van funkties op te sporen.
In dat verband zijn vooral de punten waarin de afgeleide nul is, interessant.

Vraag:

Vind je in zo'n punt (met horizontale raaklijn) altijd een maximum of minimum?
Licht je antwoord toe met voorbeelden.

Als je de vraag goed beantwoord hebt, zal het je duidelijk zijn, waarom het zo belangrijk is om te letten op het *tekenverloop* van de afgeleide funktie (waar is de afgeleide positief, waar negatief?)
Vergeet dat nooit!

VOORUITZICHT



Einde van het boek.
Maar niet het einde van de differentiaalrekening.
Behalve "veeltermfunkties" is er in de wiskunde veel meer te koop.
Andere funkties die je nog moet leren differentiëren.
Daarvoor zijn weer meer regels nodig.
Voor het differentiëren van het produkt, quotiënt en ketting (= samenstelling) van twee funkties.
Voor logaritmische en goniometrische funkties.
En daarvan zijn weer allerlei toepassingen te vinden in de economische en de natuurwetenschappen.
Genoeg stof dus voor een volgend boek ...

Galileo Galileī (1564 - 1642), is vooral beroemd door het feit dat hij, overtuigd aanhanger van Copernicus' visie op het wereldstelsel (de aarde draait om de zon), door de kerkelijke inquisitie werd gedwongen zijn mening te herroepen.
Galileī die een veelzijdig sterre-, wis-, en natuurkundige was, geldt als de grondlegger van de moderne mechanica en met de ideeën die hij in de kinematica (bewegingsleer) ontwikkelde, is hij een van de voorlopers van de differentiaalrekening.

Sir Isaac Newton (1642 - 1737) wordt beschouwd als een van de grootste wis- en natuurkundigen die ooit heeft geleefd. Van hem heeft Einstein gezegd: "de natuur was voor hem een open boek, waarin hij met het grootste gemak las".
Een groot deel van zijn leven besteedde Newton echter aan de theologische studie en later aan zijn werk als muntmeester.
Hij schreef zijn versie van de differentiaalrekening in 1665, maar publiceerde dit werk pas in 1704.

Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646 - 1716) was een knap geleerde in bijna iedere tak van wetenschap. Hij studeerde wetskennis, religie, politieke wetenschap, geschiedenis, letterkunde, logica, metafysica en filosofie. Zijn versie van de differentiaalrekening, die hij onafhankelijk van Newton ontwikkelde, zag in 1684 het licht.