De verdeeling der elektriciteit over het oppervlak eens geleiders

9.

SPECIMEN PHYSICO-MATHEMATICUM

DE

DISTRIBUTIONE FLUIDI ELECTRICI

IN

SUPERFICIE CONDUCTORIS,

QUOD,

ANNUENTE SUMMO NUMINE,

EX AUCTORITATE RECTORIS MAGNIFICI

PETRI HARTING,

MED. ET ART. OBST. DOCT. ET MATH. ET PHIL. NAT. PROF. ORD.,

NEC NON

AMPLISSIMI SENATUS ACADEMICI CONSENSU

ET

NOBILISSIMAE FACULTATIS MATHESEOS ET PHILOSOPHIAE NATURALIS DECRETO,

Pro Gradu Doctoratus

SUMMISQUE IN

MATHESI ET PHILOSOPHIA NATURALIS HONORIBUS AC PRIVILEGIIS

IN ACADEMIA RHENO-TRAJECTINA

RITE ET LEGITIME CONSEQUENDIS,

ERUDITORUM EXAMINI SUBMITTIT

CORNELIUS HUBERTUS CAROLUS GRINWIS.

Harlemensis.

A. D. III M. JULII, ANNI MDCCCLVIII, HORA II.

TRAJECTI AD RHENUM,

APUD POST UITERWEER & Soc.

MDCCCLVIII.

DE VERDEELING

DER

ELECTRICITEIT

OVER HET

OPPERVLAK EENS GELEIDERS

DOOR

C. H. C. GRINWIS.

UTRECHT,
POST UITERWEER & COMP.
1858.

VOORREDE.

Na afloop van mijn Doctoraal-examen was het mijn voornemen, een akademisch proefschrift te schrijven over de statische electriciteit. Eenigen tijd was ik met dit doel werkzaam, toen ik mij in eene betrekking geplaatst zag, die mij door de vele aan haar verbondene bezigheden mijne promotie-arbeid voorloopig moest doen staken. Echter moest die promotie, om bijzondere redenen, na eenen bepaalden tijd volbragt zijn. Aan het volbrengen van mijn aanvankelijk voorgesteld plan was niet meer te denken; ik moest mijn onderwerp bekorten en koos daartoe, in plaats van genoemd onderwerp, de behandeling van een zijner onderdeelen, zoodat ik mijn proefschrift alleen uitstrekte tot de verdeeling der electriciteit over het oppervlak eens geleiders.

Daar ik bij de behandeling hoofdzakelijk gebruik wenschte te maken van de zoogenaamde Potentiaal-functie, besloot ik, uithoofde der betrekkelijk weinige bekendheid dier functie, de beschouwing harer voornaamste eigenschappen, voor zoover ik die noodig had, benevens hare algemeenste toepassingen op de electriciteit hier als eerste hoofdstuk te doen voorafgaan. Reeds lang had ik dit gedeelte voltooid, toen in *het midden der vorige maand het academisch proefschrift van den Heer* E. VAN DER VEN, *te Leiden, verscheen, onder den titel:* Eenige beschouwingen over de Potentiaal-functie. *Veel overeenkomst zag ik tusschen dezen arbeid en de mijne; ik meende echter, vooral ook daar de tijd mij hiertoe drong, het door mij geschrevene onveranderd te moeten laten, en verwijs thans hen, die eene meer uitvoerige behandeling der Potentiaal-functie verlangen naar het werk van den geachten schrijver.*

In het tweede Hoofdstuk ging ik tot het eigenlijke onderwerp van mijn proefschrift over. Had ik meer tijd ter mijner beschikking gehad, voorzeker zoude ik in die behandeling eenen anderen weg hebben ingeslagen en meer getracht hebben, onafhankelijk van vroegere schrijvers, mijn onderwerp te behandelen; terwijl ik mij nu in menig opzigt tot de mededeeling van hunnen arbeid, schoon onder eenigzins anderen vorm, genoodzaakt zag.

Vooral doet het mij leed, bij de mededeeling der fraaije methode van GREEN, *dit onderwerp niet tot een meer opzettelijk punt van onderzoek te hebben gemaakt; terwijl ik mij, alweder om dezelfde reden, genoodzaakt zag de voorbeelden ter toepassing te gebruiken, waarvan* GREEN *zich bediende.*

Spoedig hoop ik in de gelegenheid te zijn, mijne studiën over de theorie der statische electriciteit voorttezetten. Voldoen mijne pogingen eenigzins aan mijne verwachting, zoo wensch ik die arbeid het licht te doen zien en hoop dan ook de verdeeling der electriciteit meer uitvoerig te behandelen. Ik eindig dit deel mijner voorrede na de toegevenheid mijner lezers voor deze mijne tegenwoordige arbeid te hebben ingeroepen.

Op het punt mijne akademische loopbaan te eindigen, zij het mij vergund, U, mijne Leermeesters, mijnen hartelijken dank te betuigen voor hetgeen Gij hebt bijgedragen tot bereiking van het doel, dat ik weldra zal verkregen hebben. Zoowel aan de Delftsche Akademie, waar ik mijne studiën begon, als aan de Utrechtsche Hoogeschool, waar ik ze voortzette, mogt ik mij steeds in Uwe bijzondere welwillendheid verheugen. Aan U allen draag ik deze bladzijden met warme dankbaarheid op. Ontvangt ze als van iemand die ten volste overtuigd is dat zoo hij eenige vorderingen mag gemaakt hebben, hij dit aan Uw voortreffelijk onderwijs en aan Uwe hulp en leiding, niet aan zich zelven te danken heeft.

Boven allen dank ik U, hooggeschatte Promotor, Hooggeleerde VAN REES, *aan wien ik mijne latere wetenschappelijke vorming geheel verpligt ben. Van den dag af, toen ik te Utrecht kwam, ondervond ik bij U eene hartelijke welwillendheid die alle verwachting verre overtreffen moest. Nimmer kwam ik te vergeefs bij U om hulp; zoo dikwijls ik tot U kwam zoo vaak ondervond ik Uwe hartelijke belangstelling in de hoogste mate. Ontvang, Hooggeleerde Heer, mijne openlijke hulde en hartelijken dank voor alles wat Gij voor mij gedaan hebt. Onthoud mij Uwe welwillende raad en vriendschap niet nu ik het betreuren moet Uw allergrondigst onderwijs te missen. Och, mogt Gij nog langen tijd voor Uwe dierbare betrekkingen, Uwe talrijke vrienden en dankbare leerlingen gespaard worden en zoo nog vele jaren de Wis- en Natuurkundige Wetenschappen en Utrechtsch Hoogeschool tot sieraad blijven verstrekken.*

U, Hooggeleerde LOBATTO, *breng ik in de tweede plaats mijne hulde en innigen dank voor het vele dat ik U verpligt ben. Het was toch vooral Uwe sierlijke en gemakkelijke behan-*

deling der Wiskunde, die mij besluiten deed de beoefening der exacte Wetenschappen tot doel te kiezen. Blijf mij met Uwe vriendschap vereeren, ook nu ik weldra het geluk mag hebben mij in Uwe nabijheid te vestigen. Schenk mij Uwe hulp wanneer ik in mijne verdere studiën moeijelijkheden ontmoeten zal, en wees overtuigd dat Uwe leiding steeds op den hoogsten prijs gesteld zal worden door hem, die steeds dankbaar is Uw leerling te zijn.

Neemt Gij allen Hooggeachtte Leermeesters, zoo te Utrecht als te Delft, mijnen welgemeensten dank aan voor het grondig onderwijs en de vriendschappelijke en heusche wijze waarop Gij mijne studiën bevorderd en verligt hebt.

En Gij, mijne Vrienden, vaart allen wel en blijft mijner ondanks onze scheiding in vriendschap gedenken.

DEVENTER, Junij 1858.

EERSTE HOOFDSTUK.

ALGEMEENE BEGINSELEN.

1. Ter verklaring der electrische verschijnselen, nemen wij met de meeste natuurkundigen twee hoogst fijne vloeistoffen aan, die wij door de namen van positieve en negatieve electriciteit onderscheiden.

Deze zijn, zooals haar naam reeds aanduidt, tegengesteld in werking. Terwijl de deeltjes eener zelfde vloeistof en dus ook die van twee gelijknamige vloeistoffen elkander afstooten, trekken de deeltjes van ongelijknamige vloeistoffen elkander aan. COULOMB bewees dat de kracht der electrische afstooting of aantrekking van twee vloeistofdeeltjes evenredig is aan het product der op elkander werkende hoeveelheden vloeistof, omgekeerd evenredig aan het vierkant van hunnen afstand.

In den gewonen toestand bevat elk ligchaam overal gelijke hoeveelheden van elke vloeistof; de werking naar buiten wordt hierdoor geneutraliseerd en het ligchaam vertoont geene electrische eigenschappen.

Het mengsel der beide electriciteiten in gelijke hoeveelheid wordt de onzijdige (neutrale) vloeistof genoemd.

Door wrijving en andere oorzaken kan in een zelfde ligchaam de hoeveelheid der eene vloeistof grooter worden dan die der andere. Het ligchaam is dan geëlectriseerd. De meerdere hoeveelheid der eene boven die der andere vloeistof wordt *vrije* electriciteit genoemd. De electrische verschijnselen worden alleen door de vrije electriciteit voortgebragt; bij hunne verklaring wordt de neutrale electriciteit niet in aanmerking genomen.

De ligchamen onderscheiden zich ten opzigte van de beweging der electriciteit in hun binnenste in *geleiders* en *niet geleiders of isolatoren* In de eerste kan de electriciteit zich vrijelijk bewegen. De laatste bieden aan de beweging der electriciteit eenen weerstand aan, die hare vrije uitbreiding verhindert.

Het is proefondervindelijk bewezen en wij komen hier spoedig op terug dat de vrije electriciteit eens geleiders zich geheel en al aan zijne oppervlakte bevindt. Zij vormt daar eene laag wier dikte zoo onmerkbaar klein is dat zij mag verwaarloosd en de electriciteit geacht worden zich in de oppervlakte te bevinden. Van daar dat in de wiskundige theorie der electriciteit het geval dat de electrische krachten niet van een ligchaam maar van een oppervlak uitgaan bijzonder in aanmerking komt, en dit te meer daar die theorie zich vooral met geleiders bezig houdt.

Als eenheid der electriciteit nemen wij die hoeveelheid electriciteit die op eene gelijke hoeveelheid electriciteit en op de eenheid van afstand eene kracht uitoefend gelijk aan de eenheid van kracht.

Bij de verdere ontwikkeling der theorie zullen wij veronderstellen dat de electriciteiten waarvan gesproken wordt positief zijn. De aldus verkregene formulen kunnen zonder moeite door verandering van het teeken der betrekkelijke electriciteits hoeveelheden op het geval toegepast worden dat de eene of beide electrische vloeistoffen negatief zijn.

Wij beginnen met het onderzoek der kracht, welke een geëlectriseerd ligchaam uitoefent op de eenheid van electriciteit geplaatst in eenig punt P, waarvan de coördinaren ten opzigte van drie vaste regthoekige assen zijn x, y, z. Daartoe verdeelen wij het ligchaam of bij geleiders, hun oppervlak in oneindig kleine elementen ds. Zij ϱds de hoeveelheid electriciteit bevat in een element ds welks coördinaren zijn a, b, c. De factor ϱ wordt dan de *digtheid* der electriciteit in dat element genoemd. Zij nog r de afstand van ds en P, zoo is de afstootende kracht door ϱds op de eenheid in P uitgeoefend

$$\frac{\varrho ds}{r^2}$$

en hare composanten ten opzigte der assen zijn

$$-\frac{\varrho ds}{r^2}\frac{a-x}{r},\quad -\frac{\varrho ds}{r^2}\frac{b-y}{r},\quad -\frac{\varrho ds}{r^2}\frac{c-z}{r}.$$

Integreert men dus deze uitdrukkingen over de geheele uitgestrektheid des ligchaams of zijner oppervlakte, zoo zijn de composanten X, Y, Z, der kracht door de geheele electriciteit des ligchaams in P uitgeoefend:

$$X=-\int\frac{\varrho ds}{r^2}\cdot\frac{a-x}{r},\quad Y=-\int\frac{\varrho ds}{r^2}\cdot\frac{b-y}{r},\quad Z=-\int\frac{\varrho ds}{r^2}\cdot\frac{c-z}{r}.$$

Waarbij wij opmerken, dat deze bepaalde integralen genomen ten opzigte van a, b, c, functiën der coördinaten x, y, z van het punt P zijn.

Nu is

$$r^2 = (a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2$$

weshalve

$$\frac{dr}{dx} = -\frac{a-x}{r}, \frac{dr}{dy} = -\frac{b-y}{r}, \frac{dr}{dz} = -\frac{c-z}{r}.$$

De vorige vergelijkingen worden dus

$$X = \int \frac{\varrho ds}{r^2}\frac{dr}{dx}, Y = \int \frac{\varrho ds}{r^2}\frac{dr}{dy}, Z = \int \frac{\varrho ds}{r^2}\frac{dr}{dz},$$

waarvoor men kan schrijven

$$X = -\frac{d\left(\int \frac{\varrho ds}{r}\right)}{dx}, Y = -\frac{d\left(\int \frac{\varrho ds}{r}\right)}{dy}, Z = -\frac{d\left(\int \frac{\varrho ds}{r}\right)}{dz}.$$

Voert men dus eene functie V in bepaalde door de vergelijking

$$V = \int \frac{\varrho ds}{r}.$$

Zoo ziet men dadelijk dat de vorige vergelijkingen overgaan in

$$X = -\frac{dV}{dx}\ Y = -\frac{dV}{dy}\ Z = -\frac{dV}{dz}.$$

De functie V, die eene groote rol speelt in de theorie der electriciteit, is door GREEN de *Potentiaal-functie* van het geëlectriseerde ligchaam in het punt P genoemd; GAUSS heeft haar later den naam *Potentiaal* gegeven. Wij zullen de eerste benaming behouden, daar het woord *Potentiaal* later in eene andere beteekenis gebezigd is.

2. Gaan wij na deze algemeene bepalingen tot de hoofdeigenschappen der potentiaal-functie over, voor zoover ons die noodig zijn.

Wij hebben dan:

a) Zij is eene stadige (continue) functie. Noemen wij het punt waarin de potentiaal-functie genomen wordt steeds P, zoo is het klaar, dat wanneer P zich voortdurend van de massa M verwijdert, ten opzigte waarvan de potentiaal-functie genomen wordt, de functie $\int \frac{dM}{r}$, waarin r weder de afstand van P tot dM aanduidt, nul tot limiet heeft. Vermindert de afstand van M tot P, zoo neemt de functie voortdurend toe. Oppervlakkig schijnt het, dat wanneer P in de massa zelve ligt, $\int \frac{dM}{r}$ oneindig groot wordt, daar voor de onmiddelijk aan O grenzende deelen der massa r oneindig klein is. GAUSS heeft echter aangetoond, dat in dit geval de functie V eene eindige waarde behoudt. Hij doet dit op de volgende wijze:

Zij dv een element van het volume des ligchaams, waarvan men de potentiaal-functie neemt, ϱ deszelfs van element tot element veranderlijke of constante digtheid, a, b, c zijne regthoekige coördinaten en x, y, z de coördinaten van P. Wij hebben dan

$$r = \sqrt{\{(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2\}}$$

en

$$V = \int\int\int \frac{\varrho dv}{r},$$

welke drievoudige integraal over de geheele massa uitgestrekt is.

Nemen wij nu een polair-coördinatenstelsel aan, dat zijnen oorsprong in P heeft, dan is daar r de voerstraal van dv wordt zoo ϑ en φ de andere coördinaten zijn (LOBATTO, Lessen over de Differentiaal en Integraalrekening, II. § 142).

$$dv = r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi dr$$

en heeft dus r^2 tot factor; derhalve

$$V = \int\int\int \frac{\varrho dv}{r} = \int\int\int \varrho r \sin \vartheta d\vartheta d\varphi dr,$$

V heeft alzoo steeds eene bepaalde eindige waarde, zoo de massa eindige afmetingen en digtheid heeft.

Verder zij aangemerkt, dat ook de partiële differentiaal quotienten $\frac{dV}{dx}$, $\frac{dV}{dy}$, $\frac{dV}{dz}$ steeds stadige functiën zijn. Immers hebben wij bijv.

$$\frac{dV}{dx} = \int\int\int \varrho dv \frac{d\frac{1}{r}}{dx}$$

$$= \int\int\int \varrho dv \frac{d\{(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2\}^{-\frac{1}{2}}}{dx}$$

$$=\iiint \frac{\varrho\,(a-x)\,dv}{r^3}.$$

Nu is $\dfrac{a-x}{r} = \cos\vartheta$ en $\dfrac{dv}{r^2} = \sin\vartheta d\vartheta d\varphi dr$,

dus $\dfrac{dV}{dx} = \iiint \varrho \cos\vartheta \sin\vartheta d\vartheta d\varphi dr$,

derhalve zal, zoo r en ϱ eindig blijven $\dfrac{dV}{dx}$ eene bepaalde eindige waarde behouden. Hetzelfde geldt natuurlijk voor $\dfrac{dV}{dy}$ en $\dfrac{dV}{dz}$, dan is echter

$$\frac{b-y}{r} = \sin\vartheta \cos\varphi \text{ en } \frac{c-z}{r} = \sin\vartheta \sin\varphi.$$

Voor de hoogere partiële differentiaal quotienten $\dfrac{d^2V}{dx^2}$, $\dfrac{d^2V}{dy^2}$, $\dfrac{d^2V}{dz^2}$, $\dfrac{d^2V}{dxdy}$ enz. heeft deze stadigheid niet meer plaats.

Wij hebben bijv.

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \iiint \varrho dv \frac{d\,\dfrac{a-x}{r^3}}{dx}$$

$$= \iiint \varrho dv \frac{-r^3 - 3\,(a-x)\,r^2 \dfrac{dr}{dx}}{r^6}$$

$$= \iiint \varrho \left(\frac{3\,(a-x)^2 - r^2}{r^5}\right) dv$$

$$= \iiint \varrho \left(\frac{1-3\cos^2\vartheta}{r}\right) \sin\vartheta d\vartheta d\varphi dr.$$

r blijft alzoo in den noemer over en de uitdrukking verliest dus voor oneindig kleine waarden van r zijne beteekenis. Deze differentiaal quotienten houden derhalve binnen de massa op stadige functiën te zijn.

Anders is het met de potentiaal-functie van een oppervlak gelegen, waarover eene massa verdeeld is. Zoo als in N°. 1 reeds aangemerkt is, zal wanneer dO een element van dit oppervlak en ϱdO de massa van dit element voorstelt, ϱ de digtheid dier massa zijn. Zijn verder weder r, φ en ϑ de polaire coördinaten van dit element, zoo is (LOBATTO, Integr. Rek., § 119)

$$dO = r\sqrt{\left(\left(r^2 + \frac{dr^2}{d\vartheta^2}\right)\sin^2\vartheta + \frac{dr^2}{d\varphi^2}\right)}\, d\vartheta d\varphi.$$

De potentiaal-functie

$$V = \iint \frac{\varrho\, dO}{r}$$

zal dus daar dO r tot factor heeft voor oneindig kleine waarden van r eindig blijven, hare eerste partiële differentiaal quotienten houden echter op stadige functiën te zijn. Wij hebben bijv.

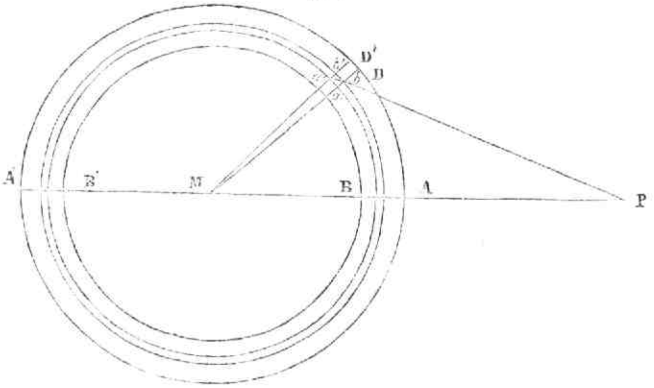
$$\frac{dV}{dx} = \iint \varrho dv\, \frac{d\frac{1}{r}}{dx} = \iint \frac{\varrho(a-x)\, dO}{r^3},$$

daar nu dO slechts de eerste magt van r tot factor heeft en $a-x = r\cos\vartheta$ is, bevat de teller de tweede; de noemer de derde magt van r en de uitdrukking verliest alzoo alle beteekenis.

Dan alleen als $\frac{a - x}{r} = 0$ is, of met andere woorden wanneer de normaal aan het oppervlak in het punt waarin men de potentiaal-functie neemt evenwijdig loopt aan de rigting volgens welke de veranderlijke ten opzigte waarvan men differentieert gerekend wordt, kan de integraal eene bepaalde waarde hebben. Zij houdt echter in ieder geval op eene stadige functie te zijn. Wij stippen dit slechts aan en zullen ons met geene verdere beschouwingen hierover inlaten, daar zij voor ons doel onnoodig zijn.

b) Niettegenstaande de aangetoonde stadigheid onzer functie, heeft de potentiaal eener door eene beslotene oppervlakte begrensde of daarover verdeelde massa en ook hare eerste partiële differentiaal quotienten eenen anderen vorm binnen en buiten die oppervlakte.

Fig. 1.



Nemen wij als eerste voorbeeld de potentiaal-fun ctie eener bolvormige schil $AA'BB'$, waarvan M het middelpunt, $MA = R$ en $MB = R'$ de stralen der buiten- en binnenoppervlakken zijn; zij ϱ hare constante digtheid, P het punt waarin de potentiaal-functie genomen wordt en $MP = a$. Beschrijven wij nu in onze figuur met de stralen $Ma = r$ en $Mb = r + dr$ twee cirkels die op eenen oneindig kleinen afstand van elkander liggen en trekken wij de lijnen MD en MD', zoodat $< DMA = \vartheta$, $< D'MA = \vartheta + d\vartheta$, zoo zullen deze twee laatste lijnen met de straks getrokkene cirkels een oneindig klein vierhoekje $aa'bb'$ begrenzen, welks inhoud door $rdrd\vartheta$ wordt uitgedrukt en dat door zijne omwenteling om MP een ringvormig ligchaam voortbrengt waarvan de inhoud is

$$rdrd\vartheta \times 2\pi r \sin \vartheta \text{ of } 2\pi r^2 dr \sin \vartheta d\vartheta.$$

Deze ring die loodregt op MP staat, is dus een element der tweede orde van onze bolvormige schil. Wij mogen daarom aannemen dat alle hare punten op gelijken afstand u van P verwijderd zijn, denken de schil uit zulke ringen zamengesteld en hebben dan voor hare potentiaal-functie,

$$V = \int\int \frac{2\pi\varrho r^2 dr \sin \vartheta d\vartheta}{u},$$

de dubbele integratie tusschen behoorlijke grenzen gedaan zijnde. Nu is

$$u^2 = a^2 + r^2 - 2ar \cos \vartheta$$

$$udu = ar \sin \vartheta d\vartheta \text{ of } \vartheta d\vartheta = \frac{udu}{ar},$$

derhalve

$$V = \int\int \frac{2\pi\varrho r^2 dr \sin \vartheta d\vartheta}{u} = \frac{2\pi\varrho}{a} \int rdr \int du.$$

De grenzen dezer integraal verschillen met de ligging van P. Wij zullen daarom de drie gevallen beschouwen waarin P, 1e buiten het buiten-oppervlak; 2e binnen het binnen-oppervlak en 3e tusschen beide oppervlakken of in de massa der schil zelven gelegen is.

1e. P buiten de schil.

De grenzen voor u, behoorende tot eene willekeurige laag, zijn hier blijkbaar $a - r$ en $a + r$; die van r zijn in elk geval R' en R. Wij hebben dan

$$V = \frac{2\pi\varrho}{a}\int_{R'}^{R} rdr \int_{a-r}^{a+r} du = \frac{4\pi\varrho}{3a}(R^3 - R'^3) \;.\;.\; (5).$$

Dus zoo wij door M de massa der schil aanduiden

$$V = \frac{M}{a} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (6).$$

Zoo P op het buitenste oppervlak ligt is $a = R$; de grenzen van u worden $R + r$ en $R - r$, dan is

$$V = \frac{M}{R},$$

zoodat V denzelfden vorm behoudt.

2e. P binnen de schil.

Thans zijn de grenzen ten opzigte van u voor eene willekeurige laag $r - a$ en $r + a$, dus

$$V = \frac{2\pi\varrho}{a}\int_{R'}^{R} rdr \int_{r-a}^{r+a} du = 2\pi\varrho\,(R^2 - R'^2) \;.\;.\; (7).$$

Deze uitdrukking is onafhankelijk van a; V blijft dus constant zoolang P binnen de schil gelegen is. Dit geldt ook voor het binnen-oppervlak waar $a = R'$; V blijft daar dezelfde waarde als binnen behouden.

Wil men V weder in de massa der schil uitgedrukt, zoo hebben wij,

$$V = \tfrac{3}{2} M \left(\frac{R + R'}{R^2 + RR' + R'^2} \right) \quad . \; . \; . \; . \; (8).$$

3°. P in de massa der schil.

Wij kunnen nu een bolvormig oppervlak denken, dat door P gaat en in M zijn middelpunt heeft; de schil wordt dan in twee schillen verdeeld waarvan de buitenste R en a, de binnenste a en R' tot grootste en kleinste straal heeft. Zij M^o en M' hunne respectieve massa's, zoo is het klaar dat daar P op het binnenoppervlak van M^o en op het buitenoppervlak van M' ligt, hierop het tweede en eerste geval van toepassing is en daar de potentiaal-functie eener massa noodwendig gelijk de som der potentiaal-functiën harer deelen is, hebben wij

$$V = \tfrac{3}{2} \left(\frac{R + a}{R^2 + aR + a^2} \right) M^o + \frac{M'}{a} \quad . \; . \; . \; (9).$$

of zoo wij de gevondene waarden van V uitgedrukt in R, R' en a bezigen,

$$V = 2\pi\varrho\,(R^2 - a^2) + \frac{4\pi\varrho}{3a}\,(a^3 - R'^3).$$

$$= \frac{2\pi\varrho}{3} \left(\frac{3R^2 a - 2R'^3 - a^3}{a} \right) \quad . \; . \; . \; . \; (10).$$

Voor de grenswaarden van a, dat is P op het buiten- en binnen-oppervlak der schil geeft deze formule zooals behoort door achtervolgers $a = R$ en $= R'$ te stellen,

$$V = \frac{4\pi\varrho}{3}(R^3 - R'^3) \text{ en } V = 2\pi\varrho\,(R^2 - R'^2).$$

a

Zoo wij in de formule (10) de massa M der schaal invoeren verkrijgen wij

$$V = \left(\frac{3R^2 a - 2R'^3 - a^3}{2(R^3 - R^3)\,a}\right) M \quad . \; . \; . \; . \; (11).$$

Voor den bol wordt $R' = 0$, de formule (5) of (6) geeft dan voor de potentiaal-functie van een uitwendig punt terstond

$$V = \frac{4\pi\varrho R^3}{3a} = \frac{M}{a} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (12).$$

terwijl (10) of (11) voor een punt der massa geeft,

$$V = \frac{2\pi\varrho}{3}(3R^2 - a^2) = \left(\frac{3R^2 - a^2}{2R^3}\right) M \; . \; . \; (13).$$

voor P op de oppervlakte des bols of $a = R$ geven (12) en (13) beide

$$V = \frac{M}{R}.$$

Gaan wij weder tot onze schil terug, en beschouwen wij nu het partiële differentiaal quotient van V ten opzigte van a.

Wij hebben dan zoo P buiten de schil ligt

$$V = \frac{M}{a}$$

$$\frac{dV}{da} = -\frac{M}{a^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (14).$$

Ligt P binnen de schil zoo is daar dan V onafhankelijk van a is

$$\frac{dV}{da} = 0.$$

Ligt P binnen beide oppervlakken zoo is volgens (11)

$$V = \left(\frac{3R^2 a - 2R'^3 - a^3}{2(R^3 - R'^3)a}\right) M$$

en dus

$$\frac{dV}{da} = -\left(\frac{a^3 - R'^3}{R^3 - R'^3}\right)\frac{M}{a^2} \quad \ldots\ldots (15).$$

voor $a = R'$ wordt volgens (15).

$$\frac{dV}{da} = 0$$

evenals in de geheele ruimte binnen de schil, terwijl voor $a = R$ de formules (14) en (15) beide geven

$$\frac{dV}{da} = -\frac{M}{R^2}.$$

Wij zien dus dat V en haar eerste differentiaal quotient verschillende vormen aannemen buiten, binnen en in de massa, doch desniettegenstaande stadige functiën blijven zooals wij reeds als hoofdeigenschap der potentiaal-functie hebben vermeld.

Wat het tweede differentiaal quotient van V betreft, binnen de schil is

$$\frac{d^2V}{da^2} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (16).$$

buiten

$$\frac{d^2 V}{da^2} = \frac{2\,M}{a^3} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (17).$$

in de schil zelve geeft (15).

$$\frac{dV}{da} = -\left(\frac{a^3 - R'^3}{R^3 - R'^3}\right)\frac{M}{a^2} = -\frac{4\pi\varrho}{3}\left(a - \frac{R'^3}{a^2}\right),$$

dus

$$\frac{d^2 V}{da^2} = -\frac{4\pi\varrho}{3}\left(\frac{a^3 - 2R'^3}{a^3}\right) \; . \; . \; . \; . \; (18).$$

terwijl volgens (16) en (17) aan het buiten- en binnen-oppervlak der schil

$$\frac{d^2 V}{da^2} = \frac{M}{a^3} \text{ en } \frac{d^2 V}{da^2} = 0.$$

geeft de formule (18) door $a = R$ en $= R'$ te stellen voor het buiten-oppervlak

$$\frac{d^2 V}{da^2} = -\frac{4\pi\varrho}{3}\left(\frac{R^3 - 2R'^3}{R^3}\right),$$

voor het binnen-oppervlak

$$\frac{d^2 V}{da^2} = \frac{4\pi\varrho}{3},$$

de functie $\frac{d^2 V}{da^2}$ maakt alzoo aan deze oppervlakken sprongen en houdt dus op stadig te zijn, waarop wij vroeger opmerkzaam maakten. Van het buitenste oppervlak naar het binnenste gaande, gaat zij bovendien van den negatieven toestand in den positieven over en verdwijnt voor

$$a = R' \sqrt[3]{2} = 1{,}25992\ldots R',$$

wat ook R' zij.

Nemen wij als tweede voorbeeld een bol-oppervlak waarover eene massa gelijkelijk verdeeld is met de digtheid ϱ. Zij de straal des bols R, zijn middelpunt in den oorsprong der coördinaten, en het punt P waarin men de potentiaal-functie neemt op eenen afstand a van dien oorsprong en op eenen afstand r van een willekeurig punt van het oppervlak verwijderd.

Nu is, door O het oppervlak voorstellende,

$$V = \iint \frac{\varrho dO}{r} = 2\pi\varrho \int \frac{R^2 \sin\vartheta d\vartheta}{r}$$

en daar verder

$$\sin\vartheta d\vartheta = \frac{rdr}{aR}$$

$$V = \frac{2\pi\varrho}{a} R \int dr.$$

Ligt P buiten het oppervlak zoo zijn de grenzen der integratie $a + R$ en $a - R$, dan is

$$V = \frac{4\pi\varrho R^2}{a}.$$

Ligt P binnen het oppervlak, zoo heeft men tusschen $R + a$ en $R - a$ te integreren en wij hebben dan

$$V = 4\pi\varrho R.$$

Beide waarden van V geven op het oppervlak waar $a = R$

$$V = 4\pi\varrho R.$$

Voor het eerste differentiaal quotient $\frac{dV}{da}$, hebben wij buiten het oppervlak

$$\frac{dV}{da} = -\frac{4\pi\varrho R^2}{a^2},$$

dit geeft op het oppervlak zelve,

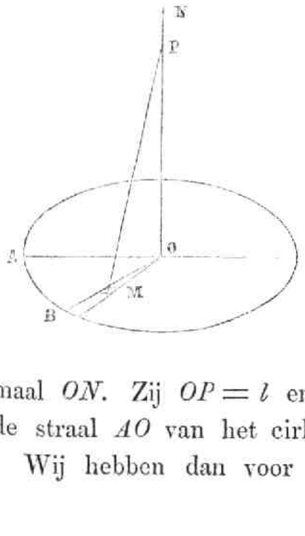
$$\frac{dV}{da} = -4\pi\varrho,$$

binnen het oppervlak hebben wij echter

$$\frac{dV}{da} = 0,$$

dit differentiaal quotient houdt dus aan de oppervlakte op stadig te zijn, waarvan wij mede vroeger reeds met een enkel woord gewaagd hebben.

Fig. 2.



Zij het derde voorbeeld een cirkelvlak waarover weder eene massa gelijkmatig verdeeld is, zoodat ϱ hare digtheid voorstelt. Bepalen wij zijne potentiaal-functie in eenig punt P de uit zijn middelpunt O opgerigte normaal ON. Zij $OP = l$ en $PM = z$, $\angle AOB = \varphi$ en de straal AO van het cirkelvlak $= R$.

Wij hebben dan voor de potentiaal-functie in P

$$V = \int_o^{2\pi}\int_o^R \frac{\varrho r dr d\varphi}{z}$$

$$= \int_o^{2\pi} d\varphi \int_o^R \frac{\varrho r dr}{\sqrt{r^2 + l^2}} = 2\pi\varrho \left\{ \sqrt{(R^2 + l^2)} \mp l \right\} \ldots (\alpha).$$

het teeken − of + in de laatste uitdrukking gebruikt moetende worden naarmate l positief of negatief is. Deze functie is nog stadig bij $l = o$ doch neemt dan eenen anderen vorm aan, daar in dit geval

$$V = 2\pi\varrho R.$$

Uit (α) vinden wij verder

$$\frac{dV}{dl} = 2\pi\varrho \left(\frac{l}{\sqrt{(R^2 + l^2)}} \mp 1 \right).$$

en derhalve voor $l = o$

$$\frac{dV}{dl} = \mp 2\pi\varrho.$$

Dus verandert $\frac{dV}{dl}$ sprongsgewijze wanneer men van eene oneindig kleine *positieve* waarde van l tot eene oneindig kleine *negatieve* waarde overgaat. Voor de toepassing dier stelling op een oneindig plat vlak hebben wij dan $R =$ oneindig groot ten opzigte van l. V wordt dan wel is waar oneindig groot, doch $\frac{dV}{dl}$ behoudt zijne waarde $\mp 2\pi\varrho$ voor positieve of negatieve willekeurige waarden van l daar dan $\frac{l}{\sqrt{R^2 + l^2}} =$

$\frac{1}{\sqrt{\frac{R^2}{l^2} + 1}} = 0$ wordt.

Het eerste differentiaal quotient houdt derhalve zoowel bij het cirkelvlak als bij het oneindig uitgestrekte platte vlak in het vlak zelve op eene stadige functie te zijn.

c) Wij vonden in (a) voor het partiële differentiaal quotient der uitdrukking

$$V = \iiint \frac{\varrho dv}{r},$$

waarin $r = \sqrt{\{(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2\}}$

$$\frac{dV}{dx} = \iiint \frac{\varrho (a-x) dv}{r^3}$$

en

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = \iiint \frac{\varrho (3(a-x)^2 - r^2)}{r^5} dv,$$

evenzoo zullen wij blijkbaar hebben,

$$\frac{dV}{dy} = \iiint \frac{\varrho (b-y)}{r^3} dv, \frac{dV}{dz} = \iiint \frac{\varrho (c-z}{r^3} dv$$

en

$$\frac{d^2 V}{dy^2} = \iiint \frac{\varrho (3(b-y)^2 - r^2)}{r^5} dv$$

$$\frac{d^2 V}{dz^2} = \iiint \frac{\varrho (3(b-z)^2 - r^2}{r^5} dv.$$

De tweede differentiaal quotienten zamenstellende, verkrijgen wij de belangrijke formule

$$\frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{d^2 V}{dy^2} + \frac{d^2 V}{dz^2} = 0,$$

welke formule wij in navolging van GREEN kortheidshalve door

$$\delta V = 0$$

zullen voorstellen.

Het is van het hoogste belang hier op te merken, dat dit bewijs ophoudt geldig te zijn, wanneer binnen de grenzen der bepaalde integraal r nul wordt, d. i. wanneer het punt, waarin men de potentiaal-functie neemt binnen de massa ligt; dan toch verliezen, zooals wij in (a) zagen $\frac{d^2 V}{dx^2}, \frac{d^2 V}{dy^2}, \frac{d^2 V}{dz^2}$ hunne beteekenis en wij moeten eenen anderen weg inslaan om de waarde van δV te bepalen.

Is nu het punt P binnen de massa gelegen, zoo kunnen wij eenen oneindig kleinen bol denken, die dit punt bevat; de digtheid der massa kan dan in dien bol als constant en gelijk aan die in het punt P beschouwd worden. Zij s de straal van dien bol, wiens middelpunt x', y', z' tot coördinaten heeft en laat t de afstand van P tot dat middelpunt zijn. V laat zich nu in twee gedeelten splitsen; het eerste betrekking hebbende op de geheele massa van het ligchaam, behalve die van den kleinen bol, het tweede op de massa des bols.

P ligt nu buiten de eerste massa en derhalve is voor dit gedeelte van V, $\delta V = 0$. Wat de tweede massa betreft, die des bols namelijk, (b) geeft ons in formule (13) voor de potentiaal van eenig inwendig punt

$$V = \frac{2\pi\varrho}{3}(3\,s^2 - t^2).$$

$$\text{Nu is } t^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2,$$

$$\text{dus } \delta\,(t^2) = 6\,,$$

en s constant zijnde, hebben wij derhalve

$$\delta V = -\,4\pi\varrho\,,$$

of

$$\frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{d^2 V}{dy^2} + \frac{d^2 V}{dz^2} = -\,4\pi\varrho\,,$$

binnen de massa des ligchaams.

Hoewel wij slechts van éénc massa spraken, is het echter duidelijk, dat ons gegeven bewijs voor een stelsel van een willekeurig aantal massa's door blijft gaan.

3. Gaan wij thans tot de algemeene toepassing dezer stellingen op de electriciteit over en beginnen wij met hare verbreiding in geleiders na te gaan. Zoo als wij reeds vermeldden, bieden zij geenen weêrstand aan de beweging dier vloeistof, terwijl de nietgeleiders dit wel doen. Hieruit volgt terstond, dat de electriciteit niet in rust kan zijn, ten zij voor elk electriciteits deeltje de kracht die er op werkt en die niets anders is dan de afstooting der overige electriciteit deeltjes nul is. In ieder punt x, y, z des geleiders moeten dus de composanten $-\frac{dV}{dx}$, $-\frac{dV}{dy}$, $-\frac{dV}{dz}$, ieder afzonderlijk nul zijn en daar

$$dV = \frac{dV}{dx}dx + \frac{dV}{dy}dy + \frac{dV}{dz}dz,$$

zien wij dat dus overal $dV = 0$ en dus V of de potentiaal-functie in de geheele uitgebreidheid des geleiders constant is. Daar nu binnen den geleider steeds

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = -\ 4\pi\varrho$$

is, zal P of de digtheid der electriciteit noodzakelijk nul moeten zijn. De vrije electriciteit kan dus niet binnen het ligchaam zijn en moet zich alleen op de oppervlakte bevinden. Aan de oppervlakte eens geleiders hebben wij dus eene laag electriciteit; welke de dikte dier laag is, is geheel onbekend, doch uit proeven is genoegzaam gebleken, dat zij steeds onmerkbaar klein is. Wij zullen haar daarom in de berekening als oneindig klein veronderstellen, hoewel dit natuurlijk in wezenlijkheid niet zijn kan. In plaats van een electrisch geleidend ligchaam kunnen wij dus alleen het meetkundig oppervlak van dit ligchaam beschouwen, waarover eene electrische massa verdeeld is. Door de digheid ϱ in eeñig punt van het oppervlak, verstaan wij dan het quotient van de electrische massa die het element des oppervlaks in dit punt bevat en van den inhoud van dit element.

Daar de vrije beweging der electriciteit in geleidende ligchamen noodzakelijk vordert, dat bij het evenwigt de composanten der krachten *langs* de oppervlakte eens geleiders steeds nul moeten zijn, volgt dat de rigting der kracht ontstaan door de werking van de langs de oppervlakte verdeelde electriciteit op eene eenheid zich in die oppervlakte bevindende electriciteit, normaal aan dit oppervlak zal wezen. Wij hebben in N°. 2 (a) reeds opgemerkt, dat in het algemeen het eerste particle differentiaal-quotient der potentiaal-functie van eenig oppervlak in een zijner punten geene stadige functie is, in N°. 2 (b) zagen wij er een voorbeeld van voor de normale kracht bij een cirkelvlak en een oneindig uitgestrekt plat vlak, laat ons thans nagaan wat er op een oppervlak van willekeurigen vorm gebeurt.

Denken wij daartoe in eenig punt P der oppervlakte eene normaal opgerigt en duiden wij de ligging van een punt op die normaal door den afstand aan die het van P heeft. Wij zullen dien afstand binnen het ligchaam n, buiten hetzelve n' noemen en de kracht nagaan waarmede eene op de normaal geplaatste eenheid electriciteit door de electrische massa van het ligchaam wordt afgestooten. Noemen wij verder met GREEN V' de potentiaal-functie in een punt *buiten* het ligchaam en $\overline{V}$ die in een punt der oppervlakte, terwijl V de potentiaal-functie in een punt *binnen* het ligchaam aanduidt. Verdeelen wij nu het oppervlak in twee ongelijke deelen: zij A een zeer klein gedeelte van het oppervlak dat P omringt en B het overige gedeelte van het oppervlak.

Zij p en p' twee eenheden electriciteit, die zich op de normaal op eenen oneindig kleinen afstand van P bevinden, doch p op het naar binnen gerigte p' op het naar buiten gekeerde deel der normaal gelegen. Zij a en b de krachten door de electriciteit van A en door die van B op p uitgeoefend in de rigting van n; a' en b' de krachten door dezelfde electriciteiten op p' uitgegeoefend in de rigting van n', zoo hebben wij blijkbaar

$$-\frac{d\overline{V}}{dn} = a + b,$$

$$-\frac{d\overline{V}'}{dn'} = a' + b'.$$

Nu kunnen dn en dn' als oneindig klein beschouwd worden ten opzigte der afmetingen van A, welke laatste men toch zoo klein nemen kan als men verkiest; de werking van A is dus te beschouwen als van een oneindig plat vlak op een punt daar buiten; die werking is, zoo als wij N°. 2 (b) zagen onafhankelijk van den afstand van het punt tot het vlak en steeds $= 2\pi\varrho$, ϱ de digtheid der over het vlak verdeelde massa in het punt P zijnde. Zij is voor de punten p en p' dezelfde, wel is waar tegengesteld, doch naar denzelfden kant ten opzigte der rigtingen n en n'; de werkingen b en b' van B op p en p' zijn gelijk (op oneindig kleinen na) in grootte en rigting, doch die rigting is ten opzigte der rigtingen n en n' tegengesteld.

Wij hebben derhalve

$$-\frac{d\overline{V}}{dn} = 2\pi\varrho - b$$

$$-\frac{d\overline{V}'}{dn'} = 2\pi\varrho + b,$$

maar binnen het oppervlak van een ligchaam is steeds $-\frac{d\overline{V}}{dn} = 0$, dus wordt $-\frac{d\overline{V}'}{dn'} = 4\pi\varrho$. Wij zien dus wederom dat de op de oppervlakte normale kracht geene stadige functie is; dan toch zouden noodzakelijk

$$-\frac{d\overline{V}}{dn}-\frac{d\overline{V'}}{dn'}=0$$

moeten zijn.

Deze belangrijke stelling is het eerst door LAPLACE bewezen in POISSONS beroemde Mémoire, *sur la distribution de l'électricité à la surface des corps conducteurs.* (Mémoires de l'académie de Paris 1811, pag. 30 etc.).

De stelling dat $\overline{V}$ constant is in en op de oppervlakte eens geleiders geldt natuurlijk ook voor een willekeurig aantal geleiders, die met elkander in aanraking zijn. Hieruit volgt, dat de potentiaal-functie van willekeurige hoeveelheden electriciteit in eenen met de aarde verbonden geleider nul is, daar men wegens de groote afmetingen der aarde de potentiaal-functie der over hare oppervlakte verbreide electriciteit gelijk nul stellen mag.

4. Alvorens dit hoofdstuk te besluiten, om in het volgende de verdeeling der electriciteit op het oppervlak eens geleiders meer bijzonder na te gaan, willen wij eene voor ons onderwerp in gevolg belangrijke stelling laten volgen.

Denken wij twee willekeurige hoeveelheden electriciteit ε en ε'; noemen wij ϱds een element der eerste, $\varrho' ds'$ een element der tweede hoeveelheid, zoodat ϱ en ϱ' de digtheden, ds en ds' de ruimte uitgebreidheden aanduiden; zij nog r de afstand van ds en ds' zoo is, wanneer wij de integratie over alle de elementen uitstrekken.

$$\int\!\!\int\frac{\varrho\varrho' ds ds'}{r}=\int\varrho ds\int\frac{\varrho' ds'}{r}=\int\varrho' ds'\int\frac{\varrho ds}{r}.$$

Zij nu de electriciteit ε' verdeeld over de oppervlakte van een bol van den straal R met eene constante digtheid $\varrho' = 1$, zoo is hare potentiaal-functie $\int \frac{\varrho' ds}{r}$ in ds gelijk $\frac{4\pi R^2}{r_0}$, waarin r_0 de afstand van ds tot het middelpunt des bols is. De vergelijking wordt hierdoor

$$4\pi R^2 \int \frac{\varrho ds}{r_0} = \int ds' \int \frac{\varrho ds}{r}.$$

Stellen wij nu de potentiaal-functie $\int \frac{\varrho ds}{r}$ van ε in $ds' = V$, de potentiaal $\int \frac{\varrho ds}{r_0}$ derzelfde electriciteit in het middelpunt des bols $= V_0$, zoo geeft de vorige vergelijking

$$\int V ds' = 4\pi R^2 V_0,$$

waarin de integratie moet uitgestrekt worden over het gansche oppervlak des bols.

Uit deze vergelijking volgt de belangrijke stelling, dat indien de potentiaal-functie V eener electrische massa in een gedeelte eener zamenhangende ruimte waar geene electriciteit aanwezig is, constant $= a$ is, zij overal in die ruimte diezelfde waarde a hebben moet. — Ware dit toch zoo niet, zoo zoude in dien in een naburig gedeelte de potentiaal functie grooter ware, men eenen bol van de draad R zoo geplaatst kunnen denken, dat het eene deel (hetwelk het middelpunt des bols bevat), in de ruimte zich bevindt, waar de potentiaal-functie $= a$ is, het andere daar waar de potentiaal-functie grooter is.

Nu is volgens het voorgaande

$$\int_0^{\bullet} V ds = 4\pi R^2 a,$$

of daar a constant is

$$\int_0^{\bullet} (V - a)\, ds = 0,$$

hetgeen onmogelijk is, daar voor het eene deel der oppervlakte $V - a = 0$ voor het overige $V - a$ niet nul maar grooter is. Was de potentiaal-functie in het andere gedeelte kleiner dan a, zoo zoude men tot dezelfde ongerijmdheid vervallen, waaruit dus volgt, dat de potentiaal-functie in de gansche zamenhangende ruimte dezelfde constante waarde a behoudt.

Hieruit volgt:

1e. Dat daar in een hol geëlectriseerd ligchaam de potentiaal-functie in de massa van het ligchaam constant is, zij ook in de ingeslotene ruimte constant zal zijn, mits in deze ruimte geene geëlectriseerde ligchamen geplaatst zijn. Onder deze laatste voorwaarde zal dus de verdeeling der electriciteit over eenen geleider op dezelfde wijze geschieden, hetzij die geleider vol (massief) of hol is.

2e. Dat zoo de potentiaal-functie van een ligchaam voor een deel der uitwendige ruimte constant is en zich daar geene hoeveelheden electriciteit bevinden, zij voor de gansche oneindige ruimte constant blijft.

In dit laatste geval zal daar de potentiaal-functie op eenen oneindigen afstand noodzakekelijk nul moet zijn, zij dit in de gansche uitwendige ruimte wezen.

Deze stelling is van GAUSS.

TWEEDE HOOFDSTUK.

DE VERDEELING DER ELECTRICITEIT OVER HET OPPERVLAK EENS GELEIDERS.

5. Wanneer aan eenen geleider electriciteit wordt medegedeeld, zal gelijk wij in het eerste hoofdstuk opmerkten, zich in den staat van evenwigt vrije electriciteit aan de oppervlakte van het ligchaam verbreiden in eene laag van onmerkbaar kleine dikte.

Bij het gebruik van geleiders van verschillenden vorm wordt het al spoedig duidelijk, dat die verbreiding der electriciteit geheel bijzondere wetten volgt, afhankelijk van den vorm der geleiders en zien wij bijvoorbeeld om alleen van geleiders te spreken door gebogene oppervlakten begrensd, dat de ophooping der electriciteit, wij drukken het een oogenblik zoo uit, zich het meest in die punten van het oppervlak vertoont, waarin de kromming het grootste is.

Men heeft tot nog toe die verdeeling der electriciteit voor geleiders van willekeurige gedaante niet kunnen bepalen. Voor enkelen is men er slechts in geslaagd.

Veel hebben wij dienaangaande aan POISSON te danken. Door zijne uitstekende toepassing der door LAPLACE gegevene ontwikkelingen voor de aantrekking van spheroides (ligchamen wier vorm weinig van een bol verschilt) bepaalde hij de verdeeling der electriciteit op ligchamen van deze gedaante, ofschoon in het algemeen niet in eindigen vorm. Onder de lateren munt vooral GREEN uit, die twee algemeene methoden aangaf, om omgekeerd oppervlakken te vinden, waarop de verdeeling der electriciteit kan bepaald worden. Wij komen op zijnen arbeid later terug.

Hoewel men nu, onbekend als wij met de natuur der electriciteit zijn, van het eigenlijke wezen der electrische verdeeling niets bepaalds zeggen kan, dienen wij er ons echter voor de analytische behandeling eene bepaalde voorstelling van te maken.

De natuurlijkste voorstelling zou zijn eene electrische laag onmiddellijk tegen het oppervlak des geleiders aan te nemen van eindige, schoon onmerkbare dikte. De digtheid der electriciteit zou er veranderlijk in zijn en toenemen hoe digter men bij de oppervlakte van het ligchaam komt, daar de electriciteitsdeeltjes door de meer binnen gelegene, als het ware naar het oppervlak gedreven worden en aan dit oppervlak dus de grootste ophooping plaats heeft.

Hoewel deze voorstelling de meest juiste zijn zou, heeft zij echter voor de theorie door die veranderlijke digtheid groote moeijelijkheden en maakt men daarom van twee andere voorstellingen gebruik:

1^e. kunnen wij, zooals wij in N^o. 3 reeds aanmerkten de electriciteit met ongelijke digtheid verspreid denken over het meetkundig oppervlak van het ligchaam; wij verwaarloozen dan in de analyse de dikte der laag geheel en beschouwen een meetkundig oppervlak, het oppervlak van den geleider, doch uit wier punten on. gelijke werkingen uitgaan en verstaan dan wanneer ϱdO de electrische massa is die in het element dO van het oppervlak ligt door ϱ de digtheid der electriciteit; zij is dus de verhouding der electrische massa in dit element aanwezig tot den inhoud dO van het element zelve. In dit geval beschouwt men derhalve de electriciteit, als ware zij in dit wiskundige oppervlak des ligchaams geconcentreerd.

2^e^. en dit is welligt duidelijker voor de voorstelling, kan men zich de electriciteit weder in eene laag denken van eindige doch zeer geringe dikte; wij nemen hierbij echter de electriciteit die haar zamenstelt van gelijke digtheid aan. De hoeveelheid electriciteit in elk punt p des geleiders wordt dus bepaald door de dikte der laag gemeten langs de normaal in het punt p, van dit punt af tot waar zij de binnen-oppervlakte snijdt. Wanneer dan weder ϱdO de electriciteit is, die tegen het element dO aanligt zal ϱ *evenredig* aan de dikte zijn, terwijl zij volgens onze eerste voorstelling de digtheid zelve voorstelde.

Wij nemen nu aan, dat het buiten oppervlak der laag volkomen met dat des geleiders zamenvalt en dit zal hoe de zamenstelling der laag ook zij hoogst waarschijnlijk met de werkelijkheid overeenkomen; door proeven toch ook in het luchtledige genomen, moet men wel tot het besluit komen, dat de gelijknamige vrije electriciteitsdeeltjes, zich zooveel mogelijk door onderlinge afstooting van elkander verwijderende, aan de oppervlakte eenen tegenstand ondervinden die hen verhindert verder uit elkander te gaan. Het binnen oppervlak onzer electriciteitslaag moet nu bepaald worden en zal ons de hoeveelheid electriciteit in elk punt van het oppervlak des geleiders doen kennen.

Wij zullen ons nu voorloopig van deze tweede voorstelling, die ook door POISSON gevolgd is, bedienen. Men houde echter in het oog dat die aangenomene voorstellingen, slechts *voorstellingen* zijn, noodzakelijke hulpmiddelen om een uitgangspunt voor de theorie te verkrijgen, die ons wel belangrijke eigenschappen omtrent de werking der electriciteit in verschillende punten van het oppervlak eens geleiders doet kennen, doch die ons aangaande hetgeen er werkelijk binnen het buitenoppervlak plaats heeft, zoo lang wij geen juist denkbeeld van de natuur der electriciteit hebben, in onzekerheid laat.

Zoo als wij dan aannamen, is het buiten oppervlak onzer laag vrije electriciteit het buiten oppervlak des ligchaams zelve, in den staat van evenwigt zal ook het binnen oppervlak eene van den vorm des geleiders afhankelijke gedaante verkrijgen. Welke is echter die gedaante? Wij weten dat, volgens de bekende wetten, in elk punt van het oppervlak de resultante van alle werkingen op dit punt normaal op het oppervlak zijn moet. Doch wij hebben op meer te letten. Het is toch niet genoeg, dat de laag vrije electriciteit in evenwigt zij, maar veeleer, en dit zal voor hare bepaling voldoende zijn, dat de werking der electriciteitslaag op elk punt binnen het ligchaam genomen, nul zij. Ware dit toch zoo niet, zoo zou de neutrale electriciteit binnen het ligchaam gescheiden worden en de electrische toestand zoude elk oogenblik eene andere zijn. Noemen wij weder V de potentiaal-functie van de electrische massa der laag in een willekeurig punt P, waarvan de coördinaten x, y en z zijn, zoodat V de som van de quotienten is der electrische massadeeltjes en hunne respectieve afstanden tot het punt P, zoo zullen de particele differentiaal quotienten $-\frac{dV}{dx}$, $-\frac{dV}{dy}$, $-\frac{dV}{dz}$, die de composanten der werking op het punt P volgens de rigtingen der coördinaten-assen uitdrukken, ieder afzonderlijk nul moeten zijn. Hieraan wordt blijkbaar voldaan, indien wij de aan de veranderlijke dikte der laag evenredige grootheid ϱ zoodanig kiezen, dat V voor elk punt P binnen het ligchaam onafhankelijk is van de coördinaten x, y, z van dat punt. Op deze wijze moeten wij eene algemeene uitdrukking voor ϱ vinden, die ons in staat stelt haar voor elk punt van het oppervlak des geleiders te bepalen.

6. Wij zullen thans in de eerste plaats de methode van POISSON mededeelen om de gedaante der electriciteitslaag te leeren kennen bij ligchamen wier vorm weinig van een bol verschilt en welke wij in navolging van LAPLACE en POISSON spheroïdes noemen. Plaatsen wij den oorsprong van coördinaten in het middelpunt van figuur van het ligchaam en nemen wij in plaats der regthoekige coördinaten x, y, z een polairstelsel r, ϑ en ω met denzelfden oorsprong, zoodat een willekeurig punt P bepaald wordt 1[e] door den voerstraal r uit den oorsprong naar het punt P getrokken; 2° door den hoek ϑ, die die voerstraal met eene willekeurige doch onveranderlijke lijn, door den oorsprong getrokken, maakt; nemen wij daartoe bijvoorbeeld de vroegere as der x, 3[e] door den hoek ω tusschen het vlak door die as en den voerstraal gaande

en een ander onderveranderlijk vlak door de as gebragt; kiezen wij hiertoe het vroegere vlak der xy, zoo is het klaar, dat voor een willekeurig punt r altijd positief zal gerekend worden, ω alle waarde van 0° tot 360° zal kunnen verkrijgen, terwijl ϑ steeds tusschen 0° en 180° zal begrepen zijn, en beide stelsels aan elkander verbonden zijn door de bekende vergelijkingen:

$$x = r\cos\vartheta \quad y = r\sin\vartheta\cos\omega \quad z = r\sin\vartheta\sin\omega. \quad (1).$$

Wij onderstellen thans, dat het oppervlak van het ligchaam door de vergelijking

$$F(r, \vartheta, \omega) = 0$$

bepaald is, en nemen op den voerstraal van een willekeurig punt r, ϑ, ω, van dit oppervlak een punt P binnen of buiten het ligchaam, op eenen afstand l van den oorsprong verwijderd; nemen wij op het oppervlak een tweede punt Q welks coördinaten door r', ϑ' en ω' worden uitgedrukt, zoo zal de afstand PQ, die, indien x, y, z en x', y', z' de coördinaten van P en Q in het regthoekige stelsel zijn, uitgedrukt wordt door

$$\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$$

thans ingevolge de vergelijking (1) overgaan in

$$\frac{1}{F} = L = \sqrt{\left\{ r^2 - 2rl(\cos\vartheta\cos\vartheta' + \sin\vartheta\sin\vartheta'(\cos\omega - \omega')) + l^2 \right\}}$$

Om nu den inhoud dO van een element van het oppervlak in polaire coördinaten uit te drukken, kunnen wij opmerken, dat, daar wij met ligchamen te doen hebben, wier oppervlak uiterst weinig van een bol verschilt, wij mogen aannemen, dat de normaal in eenig punt van het oppervlak eenen zeer kleinen hoek met den voerstraal maakt. Daar verder het element van ons oppervlak tot projectie heeft het element van eenen bol, die door dit punt gaat en den oorsprong tot middelpunt heeft, mogen wij uithoofde van de kleinheid van dezen straks genoemden hoek, met verwaarloozing van kleinen van hoogere orde, voor het element van het oppervlak hare projectie op den genoemden bol nemen en verkrijgen dan voor dit element, zoo als bekend is, eenen regthoek, waarvan de zijden $r'd\vartheta'$ en $r'\sin\vartheta'd\omega'$ zijn en dus voor den inhoud of dO, $r'^2\sin\vartheta'd\omega'd\vartheta'$.

Wij vinden dus voor V, ϱ in $Q\varrho'$ noemende

$$V=\iint\frac{\varrho' r'^2\sin\vartheta' d\vartheta' d\omega'}{\sqrt{\{r'^2-2r'l(\cos\vartheta\cos\vartheta'+\sin\vartheta\sin\vartheta'\cos(\omega-\omega'))+l^2\}}}.$$

Stellende hierin $\cos\vartheta=\mu$ en $\cos\vartheta'=\mu'$, zoo wordt

$$V=\iint\frac{\varrho' r'^2 d\mu' d\omega'}{\sqrt{\{r'^2-2r'l(\mu\mu'+\sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-\mu'^2}\cos(\omega-\omega')+l^2\}}}$$

$$=\iint F\varrho' r'^2 d\mu' d\omega',$$

Wanneer in de waarde van F, $\cos\vartheta$ en $\cos\vartheta'$ door μ en μ' vervangen zijn.

Deze integraal moet nu genomen worden van $\omega'=0$ tot $\omega'=360°$ en van $\mu=-1$ tot $\mu'=1$.

Wij moeten nog opmerken dat onze formule dan alleen de volkomen juiste waarde van V zal zijn, wanneer ϱ' oneindig klein is, daar men anders de lijn PQ niet als de juiste afstand van het element Q tot P beschouwen kan; zal de formule voor V waarde hebben, zoo moet ϱ' zoo klein zijn, dat men hare tweede en hoogere magten kan verwaarloozen en dit is toch wegens de onmerkbare dikte der laag wel het geval.

Substitueren wij de waarden van x, y, z, door de vergelijkingen (1) gegeven, in de vergelijking

$$\delta V = 0,$$

$$\text{of } \frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{a^2 V}{dy^2} + \frac{d^2 V}{dz^2} = 0.$$

Zoo hebben wij:

$$\frac{dV}{dx} = \cos\vartheta \frac{dV}{dr} - \frac{\sin\vartheta}{dr}\frac{dV}{d\vartheta}$$

$$\frac{dV}{dy} = \sin\vartheta\cos\omega \frac{dV}{dr} + \frac{\cos\vartheta\cos\omega}{r}\frac{dV}{d\vartheta} - \frac{\sin\omega}{r\sin\vartheta}\frac{dV}{d\omega},$$

$$\frac{dV}{dz} = \sin\vartheta\sin\omega \frac{dV}{dr} + \frac{\cos\vartheta\sin\omega}{r}\frac{dV}{d\vartheta} + \frac{\cos\omega}{r\sin\vartheta}\frac{dV}{d\omega}$$

welke vergelijkingen afgeleid zijn door in de vergelijking

$$dV = \frac{dV}{dx}dx + \frac{dV}{dy}dy + \frac{dV}{dz}dz = \frac{dV}{dr}dr + \frac{dV}{d\vartheta}d\vartheta + \frac{dV}{d\omega}d\omega$$

voor dr, $d\vartheta$ en $d\omega$ hunne waarde te schrijven afgeleid uit de vergelijkingen

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \cos\vartheta = \frac{x}{r} \quad tg\omega = \frac{z}{y} \quad . \; . \; (2)$$

welke laatste vergelijkingen uit de vergelijkingen (1) zelve voortvloeijen. Verder stelden wij de coefficienten van dx, dy, dz, in beide leden der vergelijking gelijk en bekwamen dan de waarden van $\frac{dV}{dx}$, $\frac{dV}{dy}$, $\frac{dV}{dz}$.

Uit deze waarden vinden wij, daar uit de vergelijkingen (2) van zelve volgt,

$$\frac{dr}{dx}=\frac{x}{r}=\cos\vartheta,\frac{dr}{dy}=\frac{y}{r}=\sin\vartheta\cos\omega,\frac{dr}{dz}=\frac{z}{r}=\sin\vartheta\sin\omega$$

$$\frac{d\vartheta}{dx}=-\frac{\sin\vartheta}{r},\frac{d\vartheta}{dy}=\frac{\cos\omega\cos\vartheta}{r},\frac{d\vartheta}{dz}=\frac{\sin\omega\cos\vartheta}{r}$$

$$\frac{d\omega}{dy}=-\frac{\sin\omega}{r\sin\vartheta},\frac{d\omega}{dz}=\frac{\cos\omega}{r\sin\vartheta},$$

$$\frac{d^2V}{dx^2}=\frac{\sin^2\vartheta}{r}\frac{dV}{dr}+\cos^2\vartheta\frac{d^2V}{dr^2}+\frac{\cos\vartheta\sin\vartheta}{r^2}\frac{dV}{d\vartheta}$$

$$+\frac{\sin\vartheta\cos\vartheta}{r^2}\frac{dV}{d\vartheta}+\frac{\sin^2\vartheta}{r^2}\frac{d^2V}{d\vartheta^2}$$

$$\frac{d^2V}{dy^2}=\frac{\cos^2\vartheta\cos^2\omega}{r}\frac{dV}{dr}+\frac{\sin^2\omega}{r}\frac{dV}{dr}+\sin^2\vartheta\cos^2\omega\frac{d^2V}{dr^2}$$

$$+\frac{\cos\vartheta\sin^2\omega}{r^2\sin\vartheta}\frac{dV}{d\vartheta}-\frac{\sin\vartheta\cos\vartheta\cos^2\omega}{r^2}\frac{dV}{d\vartheta}+\frac{\cos^2\vartheta\cos^2\omega}{r^2}\frac{d^2V}{d\vartheta^2}$$

$$+\frac{\cos\omega\sin\omega}{r^3\sin^2\vartheta}\frac{dV}{d\omega}+\frac{\sin\omega\cos\omega}{r^2}\frac{dV}{d\omega}+$$

$$\frac{\sin\omega\cos\omega\cos^2\vartheta}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{dV}{d\omega}+\frac{\sin^2\omega}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{d^2V}{d\omega^2}$$

$$\frac{d^2V}{dz^2}=\frac{\cos^2\vartheta\sin^2\omega}{r}\frac{dV}{dr}+\frac{\cos^2\omega}{r}\frac{dV}{dr}+\sin^2\vartheta\sin^2\omega\frac{d^2V}{dr^2}$$

$$-\frac{\sin^2\omega\sin\vartheta\cos\vartheta}{r^2}\frac{dV}{d\vartheta}+\frac{\cos\vartheta\cos^2\omega}{r^2\sin\vartheta}\frac{dV}{d\vartheta}$$

$$-\frac{\cos\vartheta\sin\vartheta\sin^2\omega}{r^2}\frac{dV}{d\vartheta}+\frac{\cos^2\vartheta\sin^2\omega}{r^2}\frac{d^2V}{d\vartheta^2}$$

$$-\frac{\sin\omega\cos\omega}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{dV}{d\omega}-\frac{\cos\omega\sin\omega}{r^2}\frac{dV}{d\omega}$$

$$-\frac{\cos\omega\sin\omega\cos^2\vartheta}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{dV}{d\omega}+\frac{\cos^2\omega}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{d^2V}{d\omega^2}$$

door optelling dezer drie vergelijkingen gaat de vergelijking

$$\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}=0$$

over in

$$\frac{1}{r^2}\frac{d^2V}{d\vartheta^2}+\frac{\cos\vartheta}{r^2\sin\vartheta}\frac{dV}{d\vartheta}+\frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{d^2V}{d\omega^2}+\frac{1}{r}\frac{d^2rV}{dr^2}=0$$

of na vermenigvuldiging met r^2

$$\frac{d^2V}{d\vartheta^2}+\frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\frac{dV}{d\vartheta}+\frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{d^2V}{d\omega^2}+r\frac{d^2rV}{dr^2}=0.$$

Vervangen wij r, ϑ en ω door r', ϑ' en ω' en stellen $\cos\vartheta'=\mu'$ zoo zal, daar dan $d\mu'=-\sin\vartheta' d\vartheta'$ en

$$\frac{dV}{d\vartheta'}=\frac{dV}{d\mu'},\ \frac{d\mu'}{d\vartheta}=-\sin\vartheta'\frac{dV}{d\mu'}$$

en

$$\frac{d^2V}{d\vartheta'^2}=-\cos\vartheta'\frac{d\vartheta'}{d\mu'}+\sin^2\vartheta'\frac{d^2V}{d\mu'^2}$$

$$\frac{d^2V}{d\vartheta^2}+\frac{\cos\vartheta'}{\sin\vartheta'}\frac{dV}{d\vartheta'}=-2\cos\vartheta'\frac{dV}{d\mu'}+\sin^2\vartheta'\frac{d^2V}{d\mu'^2}$$

$$= -2\mu' \frac{dV}{d\mu'} + (1-\mu'^2)\frac{d^2V}{d\mu'^2}$$

$$= \frac{d\left\{(1-\mu'^2)\frac{dV}{d\mu'}\right\}}{d\mu'}$$

zijn.

Waardoor dan onze vergelijking overgaat in

$$\frac{d\left\{(1-\mu'^2)\frac{dV}{d\mu'}\right\}}{d\mu'} + \frac{1}{1-\mu'^2}\frac{d^2V}{d\omega'^2} + r\frac{d^2r'V}{dr'^2} = 0. \quad .(3).$$

Om V nu te bepalen, zullen wij F volgens l in eene reeks moeten ontwikkelen, opdat echter die reeks convergent zij, zal zij gerangschikt dienen te zijn volgens de magten van $\frac{l}{r}$, wanneer het punt P binnen het ligchaam ligt, volgens de magten van $\frac{r}{l}$, wanneer dat punt er buiten is.

Zij dus

$$F = \frac{1}{r'}U_0' + \frac{l}{r'^2}U_1' + \frac{l^2}{r'^3}U_2' \ldots + \frac{l^n}{r'^{n+1}}U_n' + \text{ enz.}$$

zoo zullen U_0', U_1', U_2', ... U_n' enz. geheele rationele functien van μ', $\sqrt{(1-\mu'^2)} \cos \omega'$ en $\sqrt{(1-\mu'^2)}$ $\sin \omega'$ zijn, terwijl F aan de vergelijking (3) voldoen zal. Immers

$$\left\{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\right\}^{-\frac{1}{2}} = f$$

stellende, vonden wij in N°. (c),

$$\frac{d^2 f}{dx'^2} + \frac{d^2 f}{dy'^2} + \frac{d^2 f}{dz'^2} = 0. \; . \; . \; . \; . \; . \; (\alpha).$$

zooals gebleken is, verandert f in F, wanneer men x, y en z door r, ϑ, ω en x', y', z' door r', ϑ', ω' vervangt na substitutie voor cos ϑ en cos ϑ', μ en μ' schrijvende; te gelijk gaat echter (α) in vergelijking (3) over.

Wij hebben dus:

$$\frac{d\left\{(1-\mu'^2)\frac{dF}{d\mu'}\right\}}{d\mu} + \frac{\frac{a^2 F}{d\omega'^2}}{1-\mu'^2} + r'\frac{d^2 rF}{dr'^2} = 0$$

Indien wij F door hare waarde in de reeks U_o' U_1' enz. vervangen en de coëfficienten van gelijke magten van $n = 0$ stellen, hebben wij, wat ook U zij

$$\frac{d\left\{(1-\mu')\frac{dU_n')}{d\mu'}\right\}}{d\mu} + \frac{\frac{d^2 U_n'}{d\omega'^2}}{1-\mu'^2} + n\;(n+1)\;U_n = 0$$

(Zie LAPLACE, Mecanique celeste, Livre III N°. 9).

Het is overigens klaar, dat de functien U_n' symetrisch zijn ten opzigte van μ, ω en μ', ω'.

Dezelfde functien zullen in de ontwikkeling van F, volgens de magten $\frac{r'}{l}$ voorkomen, zoodat:

$$F = \frac{1}{l}U_o' + \frac{r'}{l^2}U'_1 + \frac{r'^2}{l^3}U_2' \ldots + \frac{r'^n}{\varrho^{n\;1}}U_n' + \text{enz.}$$

deze beide waarden van F in de vergelijking voor V substitieven, hebben wij in gevolge onze notatie voor een inwendig punt:

$$V = \iint \varrho' r' U_0' d\mu' d\omega' + l \iint \varrho' U_1' d\mu' d\omega' +$$

$$l^2 \iint \frac{\varrho'}{r'} U_2' d\mu' d\omega' + \ldots + l^n \iint \frac{\varrho'}{r'^{n-1}} U_n' d\mu' d\omega' + \text{enz.}$$

en voor een uitwendig punt:

$$V' = \frac{1}{l} \iint \varrho' r'^2 U_0' d\mu' d\omega' + \frac{1}{l^2} \iint \varrho' r'^3 U_1' a\omega' + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{\varrho^{n+1}} \iint \varrho' r'^{n+2} U_n' d\mu' d\omega' + \text{enz.}$$

deze beide waarden zullen op de oppervlakte van het ligchaam moeten overeenkomen, terwijl zij na integratie geheel verschillende functien van l, μ' en ω' zijn.

Is nu een oppervlak in functie van r', μ' en ω' gegeven, zoo zal in den evenwigtstoestand de werking op elk punt P, genomen *binnen* het ligchaam, nul moeten zijn. — Hieraan wordt blijkbaar voldaan, zoo de waarde van V onafhankelijk is van de coördinaten l, μ en ω van dit punt P.

Om haar onafhankelijk van l te maken, stelt men de coefficienten van de verschillende magten van l gelijk nul, waardoor men bekomt,

$$\iint \varrho' U_1' d\mu' d\omega' = 0, \iint \frac{\varrho'}{r'} U_2' d\mu' d\omega' = 0 \ldots$$

$$\ldots \iint \frac{\varrho'}{r'^{n-1}} U_n' d\mu' d\omega' = 0 \ldots \text{enz.}$$

denkt men zich thans de uitdrukking $\frac{\varrho'}{r'^{n-1}}$ ontwikkelde in de reeks,

$$\frac{\varrho'}{r'^{\,n-1}} = R_0' + R_1' + R_2' \ldots\ldots + R_n' + \text{enz.}$$

zoodat de algemeene term R_n' eene geheele rationele functie van den n^{en} graad van de grootheden μ', $\sqrt{1-\mu'^2}\cos\omega'$ en $\sqrt{1-\mu'^2}\sin\omega'$ is, die aan de vergelijking

$$\frac{d\left\{(1-\mu'^2)\frac{dR_n'}{d\mu'}\right\}}{d\mu'} + \frac{1}{1-\mu'^2}\frac{d^2 R_n'}{d\mu'} + n(n+1)R_n' = 0.$$

voldoet, zoo zal ingevolge de eigenschappen dezer functie (LAPLACE, Mécanique Celede, Livre III, N^r. 12 en 17), voor alle onderling verschillende waarden van m en n

$$\iint R_m' U_n' d\mu' d\omega' = 0$$

terwijl voor $m = n$

$$\iint R_n' U_n' d\mu' a\omega' = \frac{4\pi}{2n+1} R_n$$

waarin R_n de waarde R_n' aanduidt, wanneer men μ' en ω' in μ en ω verandert, zoodat R_n de algemeene term van de ontwikkeling der functie $\frac{\varrho}{r^{\,n-1}}$ aanduidt.

Dien ten gevolge gaat in het algemeen

$$\iint \frac{\varrho'}{r'^{\,n-1}} U_n' \, d\mu' d\omega'$$

over in den enkelen term

$$\frac{4\pi}{2n+1} R_n.$$

Opdat dus de integraal verdwijne, zal $R_n = 0$ moeten zijn; zoodat in het algemeen voldoende is, dat in de ontwikkeling der functie $\frac{\varrho}{r^{n-1}}$ de term van den aanwijzer n ontbreekt.

Alle termen in de ontwikkeling van V verdwijnen op deze wijze, behalve de eerste

$$\int\!\!\int \varrho' r' U_0' d\mu' d\omega'.$$

Uit de eerste ontwikkeling van F volgt echter terstond door $l = 0$ te stellen, $U_0' = 1$ zoodat onze uitdrukking wordt

$$\int\!\!\int \varrho' r' d\mu' d\omega';$$

daar nu de veranderlijken onder het dubbele integraalteeken wel functien van ϱ' μ' ω' zijn, doch onafhankelijk van μ en ω blijven, zoo zien wij, dat V thans van alle coördinaten van het punt P onafhankelijk is.

De grootheid ϱ' zal nu zoodanig in functie van r', ω' en μ' moeten bepaald worden, dat zij aan alle die voorwaardelijke vergelijkingen voldoet. Eene algemeene oplossing zou hier uiterst moeijelijk zijn; men kan er dus alleen in bijzondere gevallen gebruik van maken.

Voor het allereenvoudigste geval, een bolvormigen geleider is er volstrekt geene berekening noodig, daar uit de gelijke ligging van alle punten der oppervlakte ten opzigte van het middelpunt van zelve volgt, dat onze electrische laag in dit geval eene bolvormige schil zal zijn. Zij Q de gansche hoeveelheden electriciteit aan den bol medegedeeld, r de straal des bols, zoo zal de dikte der laag klaarblijkelijk gelijk $\frac{Q}{4\, r^2 \pi}$ zijn. Heeft de geleider den vorm eener ellipsoide, zoo kunnen wij weder berekening ontberen daar LAPLACE (Mec. Cel., Livre III, N°. 3) aangetoond heeft, dat wanneer de ruimte tusschen twee concentrische ellipsoiden gevuld is met eene homogene stof van gelijke digtheid, waarvan ieder deeltje op een willekeurig punt eene kracht uitoefent, omgekeerd evenredig aan het vierkant des afstands, de totale werking dezer laag op ieder punt binnen de ellipsoidische schijf nul is. Wij zullen dus door voor het binnenoppervlak onzer laag eene ellipsoide concentrisch met het oppervlak des geleiders te nemen, aan den eisch voor onzen evenwigtstoestand geheel voldoen.

7. Wij dienen thans de uitmuntende toepassing mede te deelen, die POISSON van de straks vermelde methode maakte, om de verdeeling bij ligchamen weinig van een bol verschillende, nader te bepalen en tevens eene uitdrukking voor de electrische afstooting op de punten van hun oppervlak te vinden. Wij zullen dan tevens het straks gezegde omtrent de ellipsoide bewaarheid zien, schoon niet zoo algemeen, daar wij hier alleen van ellipsoiden weinig van een bol verschillende spreken mogen.

Zij dan

$$r' = a(1 + \alpha t')$$

de vergelijking van het oppervlak der spheroide, waarin a eene constante straal en α eene constante zeer kleine coëfficient is, zoodat men hare tweede en hoogere magten verwaarloozen mag, terwijl t' eene bekende functie van μ' en ω' voorstelt. Daar nu voor $\alpha = 0$ de spheroide in een bol overgaat, en dus de dikte ρ der laag dan constant is, kunnen wij ϱ' algemeen uitdrukken door de vergelijking

$$\varrho' = b\,(1 + \alpha\, z')$$

waarin b constant, z' eene nog onbekende functie van μ' en ω' is.

Wij hebben nu ingevolge onze vroegere notatie, door z, t en ϱ de waarden van z', t' aanduidende, als r' in r overgaat

$$\frac{\varrho}{r^{n-1}} = \frac{b}{a^{n-1}}(1 + \alpha z)\,(1 + \alpha t)^{-(n-1)} = \frac{b}{a^{n-1}}\left\{1 + \alpha\,(z - (n-1)\,t)\right\}$$

en moeten thans de functie $z - (n - 1)\,t$ zoodanig in eene reeks ontwikkelen, dat de term met den aanwijzer n ontbreekt.

Wanneer wij nu t ontwikkeld denken in de reeks

$$t = R_1 + R_2 + R_3 + \ldots\ldots + R_n + \text{enz.}$$

waarin de algemeene term R_n eene geheele rationele functie van den n^{en} graad ten opzigte der grootheden μ $\sqrt{1-\mu^2}\cos\omega$ en $\sqrt{1-\mu^2}\sin\omega$ is, voldoende aan de vergelijking:

$$\frac{d\left\{(1-\mu_a)\dfrac{dR_n}{d\mu}\right\}}{d\mu} + \frac{d^2 R_n}{d\omega^2} + n\,(n+1)\,R_n = 0,$$

zoo moet z, zal in de ontwikkeling van $z - (n - 1)\,t$ de term van den aanwijzer n verdwijnen, noodzakelijk voorgesteld worden door de reeks

$$z = R_2 + 2R_3 + 3R_4 + \ldots\ldots + (n-1)\,R_n + \text{enz.}$$

De reeks van t eens gevormd zijnde, zal men derhalve ϱ, ofschoon niet in eindigen vorm leeren kennen.

Om b te bepalen, stelt POISSON, dat de gansche hoeveelheid vrije electriciteit op de spheroide bekend, gelijk E is. Dit geeft aanleiding tot de vergelijking

$$E = \int\int \varrho . d^2 0 = \int\int \varrho . r^2 d\mu . d\omega$$

welke dubbele integraal voor μ weder van $\mu = -1$ tot $\mu = 1$ voor ω, van $\omega = 0°$ tot $\omega = 360°$ moet genomen worden.

Schrijvende voor ϱ en r^2 hunne waarden, verwaarloozende de termen met α^2, α^3, enz. en opmerkende, dat algemeen, behalve voor $n = 0$, $\int\int R_n \, d\mu d\omega = 0$, (zie LAPLACE, Mec. Cel., Liv. III, N°. 12), vinden wij

$$E = \int\int a^2 b \, d\mu d\omega = 4 \pi a^2 b$$

$$\text{dus } b = \frac{E}{4 \pi a^2}.$$

Maken wij thans eene toepassing op de ellipsoide weinig van den bol verschillende; wij moeten daartoe in de vergelijking

$$r' = a \, (1 + \alpha \, t')$$

t' in functie van R_n' bepalen.

Stellen wij daartoe den inhoud der ellipsoide gelijk aan dien van een bol van den straal a en noemen hare halve assen $a\,(1 + \alpha\, p)$, $a\,(1 + \alpha\, q)$, $a\,(1 + \alpha\, s)$, zoo hebben wij

$$a^3 = a^3 \, (1 + \alpha\, p) \, (1 + \alpha\, q) \, (1 + \alpha\, s)$$

of na ontwikkeling en verwaarloozing der tweede en hoogere magten van α

$$p + q + s = o \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \;(\alpha').$$

De vergelijking der ellipsoide op regthoekige assen wordt dan

$$\frac{x^2}{a^2(1+\alpha p)^2} + \frac{y^2}{a^2(1+\alpha q)^2} + \frac{z^2}{a^2(1+\alpha r)^2} = 1.$$

of $x^2(1-2\alpha p) + y^2(1-2\alpha q) + z^2(1-2\alpha s) = a^2$;

nu de polaire coördinaten weder invoerende, is

$x = r'\mu'$, $y = r'\sqrt{(1-\mu'^2)}\cos\omega'$, $z = r'\sqrt{(1-\mu'^2)}\sin\omega'$

waardoor wij krijgen:

$r^2\{1-2\alpha(p\mu^2+q(1-\mu'^2)\cos\omega'+s(1-\mu'^2)\,\mathrm{tin}\,\omega')\}=a^2$;

of

$r' = a\{1+\alpha(p\mu'^2+q(1-\mu'^2)\cos\omega'+s(1-\mu'^2\sin\omega')\}$;

zal nu deze formule overeenstemmen met de onze

$$r' = a\,(1 + \alpha\, t')$$

zoo moet

$$t' = p\,\mu'^2 + q\,(1-\mu'^2)\cos\omega' + s\,(1-\mu'^2)\sin\omega'.$$

Stelt men nu in de vergelijking

$$\frac{d\left\{(1-\mu'^2)\dfrac{dR'_n}{d\mu'}\right\}}{d\mu'} + \frac{d^2R'_n}{d^2\pi'^2} + n\,(n+1)\,R'_n = 0. \;.\; (\beta').$$

$n = 2$, en neemt men achtervolgens voor R'_2 de functien

$$\mu'^2, \ (1 - \mu'^2) \cos \omega', \ (1 - \mu'^2) \sin \omega'$$

zoo wordt telkens het eerste lid der vergelijking $(\beta') = 2$.

Nemen wij dus $R'_2 = t'$, zoo wordt het eerste lid,

$$2 \ (p + q + s) = 0.$$

en voldoet derhalve aan de vergelijking (β'), uithoofde der vergelijking (α'); t' derhalve tot de functie R'_2 behoorende, is (LAPLACE, Mec. Cel., Livre III, N°. 12 en 13)

$$\int\int t' Q_n' d\omega' d\mu' = 0.$$

voor alle waarden van n die van **2** verschillen; voor alle die waarden is dan ook

$$R_n = \frac{2n+1}{4\pi} \int\int Q_n' t' d\mu' d\omega' = 0.$$

dus gaat de vergelijking

$$t' = R_0' + R_1' + R_2' \ldots\ldots + R_n' + \text{enz.}$$

waarin R_0 verdwijnt omdat de ellipsoide gelijk een bol van den straal a is, over in

$$t' = R_2'$$

zoodat de vergelijking der ellipsoide eenvoudig overgaat in

$$r' = a \ (1 + \alpha \ R_2').$$

Wij vinden dus van zelven voor ϱ', daar nu ook $z' = R'_2$,

$$\varrho' = b \ (1 + \alpha \ R'_2)$$

derhalve zullen de buiten en binnen oppervlakken der electrische laag door de vergelijkingen

$$r' = a\,(1 + \alpha\, R_2') \text{ en } r' - \varrho' = (a - b)\,(1 + \alpha\, R_2')$$

bepaald worden, zijnde twee gelijkvormige ellipsoiden.

Wij kunnen nog voor ϱ' schrijven

$$\varrho' = \frac{br'}{a},$$

zij is dus in elk punt evenredig aan den voerstraal r'.

8. Berekenen wij thans de waarde van V aan de oppervlakte eener spheroide en gebruiken wij daartoe de bovengenoemde (bladz. 40) gevonden reeks voor V',

$$V' = \frac{1}{l}\int\!\!\int \varrho' r'^2 U_0' d\mu' d\omega' + \frac{1}{l^2}\int\!\!\int \varrho' r'^3 U' d\mu' d\omega' +$$

$$\ldots\ldots + \frac{1}{l^{n+1}}\int\!\!\int \varrho' r'^{n+2} U_n' d\mu' d\omega' + \text{enz.}$$

Door de vergelijkingen

$$r' = a\,(1 + \alpha t') \quad \varrho' = b\; 1 + \alpha z')$$

vinden wij,

$$\varrho' r'^{n+2} = ba^{n+2} \left\{ 1 + \alpha\,(z' + (n+2)\,t') \right\}$$

en voor t' en z' hunne ontwikkelingen

$$t' = R_1' + R_2' + R_3' + \ldots\ldots\ldots\ldots + R_n' + \text{enz.}$$

$$z' = R_2' + 2R_3' + 3R_4' + \ldots\ldots + (n-1)\,R_n + \text{enz.}$$

schrijvende, wordt

$$\varrho' r'^{n+2} = ba^{n+2} \left\{ 1 + a\,((n+2)\,R_1' + (n+3)\,R_2' + \right.$$

$$\left. (n+4)\,R_3' + \ldots\ldots + (2n+1)\,R_n' + \text{enz.}) \right\};$$

weder opmerkende dat, wanneer m en n verschillen,

$$\iint R_m' U_n' d\mu' d\omega' = 0$$

en voor $m = n$

$$\iint R'_n U'_n d\mu' d\omega' = \frac{4\pi}{2u+1} R_n,$$

hebben wij

$$\iint \varrho' r'^{n+2} U_n' d\mu' d\omega' = 4\pi\alpha b a^{n+2} R_n.$$

Dit gaat behalve voor $n = 0$ door; dan is echter daar $U_{0'} = 1$, wanneer wij voor r' en ϱ' hunne waarden schrijven, als straks

$$\iint \varrho' r'^2 U_0' d\mu' d\omega' = 4\pi b a^2,$$

zoodat voor een uitwendig punt

$$V' = \frac{4\pi b a^2}{l} \left\{ 1 + \alpha \left(R_1 \frac{a}{l} + R_2 \frac{a^2}{l^2} + R_3 \frac{a^3}{l^3} + \ldots R_n \frac{a^n}{l^n} \right) \right\}$$

Het differentiaalquotient $-\frac{dV'}{dl}$ doet de composante der electrische afstooting in P volgens den voerstraal kennen; nemen wij na differentiatie $l = r' = a\,(1 + \alpha t')$ zoo krijgen wij de afstooting van een punt van haar oppervlak, ontbonden volgens den voerstraal.

Wij hebben dus voor de afstooting in een uitwendig punt P,

$$-\frac{dV'}{dl} = \frac{4\pi b a^2}{l^2} \left\{ 1 + \alpha \left(\frac{2a}{l} R + \frac{3a^2}{l^2} R_2 + \text{enz.} + \frac{(n+1)a^n}{l^n} R_n + \text{enz.} \right) \right\}$$

en voor een punt van de oppervlakte

$$-\frac{dV'}{dr}=\frac{4\pi b}{1+2\alpha t}\left\{1+\alpha(2R_1+3R_2+\ldots(n+1)R_n+\text{enz.})\right\}$$

doch,

$$2R_1+3R_2+\ldots\ldots+(n+1)R_n+\text{enz.}=2t+z$$

dus

$$-\frac{dV'}{dr}=\frac{4\pi b}{1+2\alpha t}(1+\alpha(2t+z))$$

$$=4\pi b(1+\alpha(2t+z))(1-2\alpha t)$$

$$-\frac{dV'}{dr}=4\pi b(1+\alpha z)=4\pi\varrho\ldots\ldots\ldots(\gamma')$$

deze afstooting is dus evenredig aan de dikte der laag. Bij de ellipsoide was ϱ echter evenredig aan den voerstraal, zoodat de afstootende kracht hier evenredig aan den voerstraal blijft.

Daar wij eindelijk ligchamen beschouwen weinig van eenen bol verschillende, zal de normaal aan eenig punt met den voerstraal eenen hoek van de orde α maken. Zoodat daar in het algemeen,

$$\cos\varphi=1-\frac{1}{2}\varphi^2+\frac{1}{2.3.4.}\varphi^4-\text{enz.}$$

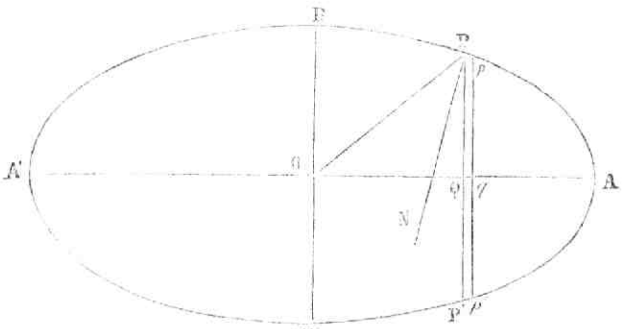
is, de werking volgens de normaal eene grootheid van de tweede orde ten opzigte van α van die langs de voerstraal verschilt; beide werkingen zijn dus als gelijk te beschouwen, zoodat de vergelijking (γ') de electrische afstooting volgens de normaal voorstelt; zij stemt dan ook geheel overeen met de algemeene waarde langs geheel anderen weg op bladz. 24 gevonden.

Wij gelooven thans de methode waarop POISSON de verdeeling der electriciteit theoretisch behandelde uitvoerig genoeg te hebben medegedeeld. Hij beschouwde verder de verdeeling bij twee bolvormige geleiders van ongelijke grootte voor de gevallen dat zij van elkander verwijderd en in aanraking zijn. Eindelijk gaf hij algemeene ontwikkelingen voor de digtheid ϱ in reeksen en bepaalde integralen. Wij stippen dit slechts aan zonder hem in zijne analyse verder te volgen.

9. Wij willen thans de vernuftige wijze mede deelen waarop CLAUSIUS in lateren tijd de verdeeling der electriciteit over eene vlakke plaat van elliptischen vorm en over een cirkelvlak bepaalde. CLAUSIUS gaat van de door LAPLACE bewezene en hier reeds meermalen gebruikte stelling uit, dat de aantrekking eener met homogene stof van gelijke digtheid gevulde laag, begrensd door twee gelijkvormige concentrische ellipsoiden op ieder punt binnen die laag noodzakelijk nul is.

Daar deze stelling doorgaat wat ook de verhouding der assen der ellipsoide is, kan men ook aannemen dat eene der assen voortdurend vermindert en eindelijk ver-

Fig. 3.



dwijnt; de ellipsoidische laag gaat dan in eene ellipsoidische schijf over.

Zij dan in nevensgaande figuur de ellips $ABA'B'$ de doorsnede der binnenste ellipsoide met een door de as BB' gebragt plat vlak. De vergelijking der ellipsoide voor regthoekige coördinaten wordt gegeven door

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

zoodat a, b, c de halve assen zijn. Zij dan OB de as der z, dus OA de doorsnede met het vlak der xy.

Nemen wij nu op de oppervlakte een willekeurig punt P, waarvan de coördinaten x, y, z, trekken den voerstraal $OP=r$ en de normaal NP aan de oppervlakte, die natuurlijk in het algemeen niet in het vlak der figuur ligt. Denken wij nu eene tweede uitwendige concentrische ellipsoide zoo, dat de verhouding der assen der inwendige tot deze is als $1:1+\delta$, dan volgt uit de polaire vergelijking der ellipsoide terstond dat de voerstraal OP tot aan dit tweede oppervlak verlengd de lengte $r(1+\delta)$ hebben moet. Is nu het uitwendig oppervlak dat eener geleider waarover electriciteit verdeeld is, zoo zal het binnenste waarvan hiernevens de doorsnede, dat der inwendige electrische laag van gelijke digtheid kunnen voorstellen. De hoeveelheid electriciteit in het punt corresponderende met het punt P zal dan gevonden worden door het gedeelte van den voerstraal OP, begrepen tusschen beide oppervlakken en hetwelk derhalve gelijk $r\delta$ is, te vermenigvuldigen met de cosinus van den hoek OPN die de normaal in het punt P met den voerstraal maakt. Noemen wij die hoek α zoo wordt de hoeveelheid electriciteit in P en derhalve hare digtheid in dit punt voorgesteld door

$$r \cos \alpha.$$

De gansche hoeveelheid R der electriciteit over het oppervlak verspreid, zal gelijk zijn aan den inhoud onzer concentrische elliptische laag. Wij hebben derhalve de vergelijking

$$R = \frac{4}{3} abc\pi \left\{ (1 + \delta)^3 - 1 \right\},$$

of na verwaarloozing der tweede en hoogere magten van δ, die zooals wij weten een zeer kleine grootheid voorstelt,

$$R = 4\, abcd\, \pi.$$

Zij nu de digtheid der electriciteit in Pp gelijk S zoodat ingevolge het voorgaande $S = r\ \delta \cos \alpha$, en projecteren wij de hoeveelheid in Pp op het vlak der xy, zoo vinden wij voor de digtheid s in Qq daar de inhoud van het element Pp tot Qq staat als $1 : \cos NPQ = 1 : \cos \beta$, wanneer wij hoek NPQ kortheidshalve β noemen en dezelfde hoeveelheid electriciteit over beide elementen verdeeld is

$$s = \frac{S}{\cos \beta}.$$

Ook de electriciteit in het symetrisch gelegen element Pp in Qq projeterende vinden wij aldaar voor de electriciteit eene dubbele digtheid

$$s = \frac{2S}{\cos \beta},$$

of na invoering der waarde van S en daarna van δ,

$$s = \frac{2r\delta \cos \alpha}{\cos \beta} = \frac{R}{2abc\pi} \cdot \frac{r \cos \alpha}{\cos \beta.}$$

Het komt er nu op aan de grootheid $\frac{r \cos \alpha}{\cos \beta}$ in functie der coördinaten x, y, z van het punt P uit te drukken. Wij hebben dan, daar α de hoek is, die de normaal met den voerstraal en β die, welke de normaal met de as der z maakt, zoo wij kortheidshalve

$$\sqrt{\left\{\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2\right\}} = L$$

stellen, voor de cosinus der hoeken die de normaal met de assen der x, y, z maakt,

$$\frac{1}{L}\,\frac{df}{dx}, \quad \frac{1}{L}\,\frac{df}{dy}, \quad \frac{1}{L}\,\frac{df}{dz},$$

welke ingevolge de vergelijking der ellipsoide overgaan in

$$\frac{1}{L}\,\frac{2x}{a^2}, \quad \frac{1}{L}\,\frac{2y}{b^2}, \quad \frac{1}{L}\,\frac{2z}{c^2},$$

zoodat $\cos \beta = \frac{1}{L}\,\frac{2z}{c^2}$.

De cosinussen der hoeken die de voerstraal OP met de assen der x, y en z maakt, respectievelijk

$$\frac{x}{r}, \quad \frac{y}{r}, \quad \frac{z}{r}$$

zijnde, vinden wij voor den hoek tusschen voerstraal en normaal

$$\cos \alpha = \frac{2}{rL}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) = \frac{2}{rL.}$$

derhalve

$$\frac{r \cos \alpha}{\cos \beta} = \frac{2}{L} : \frac{1}{L} \cdot \frac{2z}{c^2} = \frac{c^2}{z},$$

waardoor wij voor de digtheid in Q_l vinden

$$s = \frac{Rc}{2ab\pi z}.$$

Daar eindelijk ingevolge de vergelijking der ellipsoide

$$\frac{z}{c} = \sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)}$$

hebben wij ten laatste

$$s = \frac{R}{2ab\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)}}.$$

In deze uitdrukking komt onze derde as OB of c niet meer voor; zij zal dus doorgaan wat ook c zij en dus ook wanneer c verdwijnt, wanneer met andere woorden de ellipsoidische laag in eene elliptische schijf overgaat.

Nemen wij $a = b$, zoo gaat de ellips in eenen cirkel over; noemen wij de afstand van Q tot het middelpunt l, zoo vinden wij

$$s = \frac{R}{2a^2\pi} \cdot \frac{a}{\sqrt{(a^2 - l^2)}}.$$

CLAUSIUS toont verder aan dat hoewel uit deze formule blijkt dat de electriciteit naar den omtrek in digtheid toeneemt en zij aan den omtrek van het cirkelvlak zelfs oneindig is, de electriciteit daar evenwel niet in die mate opgehoopt is, dat de hoeveelheid der over het midden der plaat verspreide electriciteit ten opzigte van den omtrek te verwaarloozen is. Hij doet dit eenvoudig door integrerende, de hoeveelheid der electriciteit op den cirkel te bepalen, waarvan de straal $a' < a$ en op dezelfde wijze de hoeveelheid op den overblijvenden ring te vinden waarvan a en a' de stralen der grenzen zijn. Hij vindt aldus, genoemde hoeveelheid op het cirkelvlak M op den ring N noemende, wanneer weder R dezelfde beteekenis als boven heeft,

$$M = \frac{R}{a} \left\{ a - \sqrt{(a^2 - a'^2)} \right\}, \quad N = \frac{R}{a} \sqrt{(a^2 - a'^2)}.$$

zoodat bijv. voor

$$a' = \frac{3}{5} a, \quad M = \frac{1}{5} R, \quad N = \frac{4}{5} R$$
$$a' = \frac{4}{5} a, \quad M = \frac{2}{5} R, \quad N = \frac{3}{5} R$$
$$a' = \frac{40}{41} a, \quad M = \frac{32}{41} R, \quad N = \frac{9}{41} R$$
$$a' = \frac{220}{221} a, \quad M = \frac{200}{221} R, \quad N = \frac{21}{221} R,$$

enz.

Verder toont hij onafhankelijk der ellipsoide aan dat de voor de digtheid gevondene uitdrukking de juiste is, daar door deze digtheid s aan te nemen, de potentiaalfunctie over het vlak constant is. — Eindelijk merkt hij op, dat even als wij de digtheid op de elliptische plaat vonden door eene as der ellipsoide voortdurend te doen afnemen, men door eene as te doen verdwijnen de elliptische laag in eene wiskundige lijn doet overgaan, rondom welke electriciteit verbreid is, wier digtheid men dus bepalen kan. Hij komt dan, tegen de verwachting aan, tot het besluit, dat de electriciteit zich angs die lijn gelijkmatig verbreidt. Men houde echter in het oog, dat omtrent het meer of min juiste van dit resultaat niets te zeggen valt, daar men de verdeeling der electriciteit langs eene mathematische lijn, iets in de natuur werkelijk onbestaanbaars gezocht heeft.

Wij zullen ons hier met de beschouwingen van CLAUSIUS niet verder bezig houden en gaan thans de door ons reeds met een woord aangevoerde methode van GREEN mededeelen, betrekking hebbende op de verdeeling der electriciteit over eenen geleider.

10. Uit al het voorgaande blijkt genoegzaam, dat wij tot nog toe bij eenen geleider van willekeurigen vorm de verdeeling der electriciteit, d. i. de electrische digtheid in elk punt van haar oppervlak niet kunnen bepalen. Door de eigenschappen der potentiaalfunctie zijn wij echter in staat vormen van geleiders te bepalen, op welke men de verdeeling aan kan geven.

GREEN redeneert hierbij op de volgende wijze:

De potentiaalfunctie der over eenen geleider verbreide electriciteit in een uitwendig punt even als vroeger door V' aanduidende, weten wij, dat zij voldoen moet aan de voorwaarden:

1°. dat aan de oppervlakte V' constant is;

2°. dat voor eenig uitwendig punt P, $\delta V' = 0$;

3°. dat V' verdwijnt, indien P zich op eenen oneindigen afstand van het oppervlak bevindt.

Wij kunnen nu langs twee wegen waarden van V' aangeven, die aan die voorwaarden voldoen; men kan namelijk

1°. voor V' functien van x, y, en z nemen, waarvan wij weten, dat zij aan de gestelde voorwaarden voldoen; hiervan geeft ons de ontwikkeling van V', volgens LAPLACE in functien U een voorbeeld.

2°. kunnen wij voor V' de functie nemen, die men als potentiaalfunctie in een uitwendig punt P, (x, y, z), verkrijgt van eene over eene eindige ruimte willekeurig verbreide hoeveelheid electriciteit, daar deze dan natuurlijk altijd aan de drie gegevene voorwaarden voldoen zal.

De in beide gevallen gevondene waarden voor V' zijn functien voor de coördinaten van het punt P; wij zullen ons voor een oogenblik bij regthoekige coördinaten bepalen en dus stellen

$$V' = F(x, y, z).$$

Zij nu c eene willekeurige constante grootheid, zoo zal de vergelijking

$$V' = F(x, y, z) = c,$$

die eener oppervlakte zijn, voor welks punten V' constant is, en daar V' aan de gestelde voorwaarden voor uitwendige punten voldoet, zal men deze vergelijking als het oppervlak eens geleiders kunnen beschouwen, waarop de verdeeling der electriciteit thans bepaald kan worden.

Het is overigens klaar, dat door c verschillende waarden te geven, men een oneindig aantal oppervlakken verkrijgt, waarvan hetzelfde gezegd kan worden.

Wat de bepaling der digtheid op deze oppervlakken betreft, wij vonden, dezelfde notatie's van vroeger behoudende, in een willekeurig punt (bldz. 24)

$$\varrho = -\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{d\overline{V}'}{dn'}.$$

Daar echter in onze waarde van V' niets aangaande de over het oppervlak verbreide hoeveelheid electriciteit voorkomt, kunnen wij daar toch de digtheid ϱ hiervan afhankelijk is, de potentiaalfunctie door hV' voorstellen, waarin h eene van de gansche hoeveelheid electriciteit Q afhankelijke constante voorstelt, die later moet bepaald worden. Dat dit geoorloofd is, volgt uit de beteekenis der potentiaalfunctie zelve.

Wij hebben dientengevolge voor de digtheid ϱ in een willekeurig punt, onze vroegere notatie behoudende,

$$\varrho = -\frac{h}{4\pi} \cdot \frac{d\overline{V}'}{dn'}.$$

In verband met de latere bepaling van h kunnen wij voorloopig opmerken, dat wanneer het punt P zich op eenen zeer grooten afstand van het oppervlak bevindt, ten opzigte van de afmetingen van het oppervlak zelve, men die afmetingen mag verwaarloozen. Q weder de electrische massa zijnde en door R den afstand voorstellende van P tot een punt binnen den geleider, zal men indien R zeer groot is, mogen stellen

$$\frac{Q}{R} = hV',$$

of met andere woorden, de potentiaalfunctie der massa zal dezelfde zijn, alsof de geheele massa in eenig punt binnen de oppervlakte vereenigd ware. Indien de afstand R oneindig groot is, zal de uitdrukking volkomen juist zijn.

Uit deze vergelijking volgt, dat voor R oneindig groot

$$Q = hV'R,$$

welke uitdrukking ons eene tot nog toe niet voorgekomene eigenschap der potentiaalfunctie hV' van de over eene geslotene oppervlakte verdeelde electrische massa leert kennen. Daar toch bij geslotene oppervlakken Q eindig moet zijn, zien wij dat de limiet voor het product $hV'R$, d. i. van de potentiaalfunctie hV' in een punt P en van den afstand R van dit punt tot een zeker punt binnen den geleider bij het oneindig toenemen van R eindig moet zijn.

Gaan wij thans tot de eerste methode voor het kiezen van eene waarde van V' over.

Noemen wij den afstand van p tot den oorsprong van coördinaten r en nemen wij de bekende ontwikkeling van LAPLACE,

$$V' = \frac{U_0}{r} + \frac{U_1}{r^2} + \frac{U_2}{r^3} \ldots + \frac{U^2}{r^{n+1}} + \text{enz.}$$

waar in het algemeen U_n de door ons zoo dikwerf behandelde functie voorstelt.

Deze uitdrukking doorgaande wat ook U_n zij, zoo zal V' de potentiaalfunctie blijven voorstellen, indien enkele functien U_n verdwijnen. Stellen wij dat U_2, U_3 .... enz. allen verdwijnen en nemen wij dus voor V' de uitdrukking

$$V' = \frac{U_0}{r} + \frac{U_1}{r^2}.$$

Wij willen als vroeger de polaire coördinaten van P, aanduiden door r, ϑ en ω, die van een element ds op het oppervlak door r', ϑ' en ω' en voor den afstand van ds tot P, u schrijvende, hebben wij, ϱ de digtheid in ds zijnde

$$V' = \int \frac{\varrho ds}{u} \ldots\ldots (1)$$

waarin u bepaald is door de vergelijking:

$$u = \sqrt{r^2 - 2rr'(\cos\vartheta\cos\vartheta' + \sin\vartheta\sin\vartheta'\cos(\omega' - \omega)) + r'^2}$$

dus

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{2rr'}{r}(\cos\vartheta\cos\vartheta' + \sin\vartheta\sin\vartheta'\cos(\omega' - \omega)) + \frac{r'^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

De termen die r^3, r^4 enz. in den noemer hebben verwaarloozende, hebben wij

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{r'}{r}(\cos\vartheta\cos\vartheta' + \sin\vartheta\sin\vartheta'\cos(\omega' - \omega))\right)$$

$$= \frac{1}{r} + \frac{r'(\cos\vartheta\cos\vartheta' + \sin\vartheta\sin\vartheta'\cos(\omega' - \omega))}{r^2}.$$

Stelt men dit in (1) na ontwikkeling van $\cos(\omega' - \omega)$ en merkt men op dat r, ϑ, ω bij de integratie constant zijn, zoo wordt

$$V' = \frac{1}{r}\int \delta ds + \frac{1}{r^2}\left(\cos\vartheta \int \varrho\, as \cos\vartheta' r' + \sin\vartheta\cos\omega \int \varrho\, as\, r'\sin\vartheta'\cos\omega'\right.$$

$$\left. + \sin\vartheta\sin\omega \int \varrho\, as.\, r'\sin\vartheta'\sin\omega'\right) \ldots\ldots (2).$$

De eerste integraal $\int \varrho\, as$ is $= Q$, de geheele hoeveelheid electriciteit op de oppervlakte. Duiden wij de drie volgende integralen door m, n en p aan, zoo wordt

$$V' = \frac{Q}{r} + \frac{m \cos\vartheta + n \sin\vartheta \cos\omega + p \sin\vartheta \sin\omega}{r^2} \; . \; . \; (3).$$

Nu zijn $\cos\vartheta$, $\sin\vartheta \cos\omega$, $\sin\vartheta \sin\omega$ de cosinussen der hoeken, die de voerstraal AP, uit den oorsprong A naar P getrokken, met de drie assen der coördinaten maakt. Trekken wij dus door A eene vierde as, die met de drie eersten hoeken maakt, wier cosinussen tot elkander staan als $m : n : p$ en φ de hoek die AP met deze vierde as maakt, zoo heeft men

$$m \cos\vartheta + n \sin\vartheta \cos\omega + p \sin\vartheta \sin\omega = \sqrt{\omega^2 + n^2 + p^2} \cos\psi$$

en derhalve

$$V' = \frac{Q}{r} + \frac{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}, \cos\psi}{r^2}.$$

Men ziet ligt dat deze vierde as de lijn is, die door A en door het zwaartepunt der op de oppervlakte verbreide electrische massa gaat, want daar $r' \cos\vartheta'$, $r' \sin\vartheta' \cos\omega'$, $r' \sin\vartheta' \sin\omega'$ de coördinaten x, y, z van ds zijn, zijn de integralen m, n, p in (2) de producten van de electrische massa $\int \varrho ds$ of Q met de coördinaten x, y, z van het zwaartepunt dier massa, zoodat men de vergelijking (3) ook dus schrijven kan

$$V' = Q\left(\frac{1}{r} + \frac{x. \cos\vartheta + y. \sin\vartheta \cos\omega + z. \sin\vartheta \sin\omega}{r^2}\right).$$

Veronderstelt men dus dat de as der x door het zwaartepunt gaat zoo is $y. = 0$, $z. = 0$ en men heeft

$$V' = Q\left(\frac{1}{r} + \frac{x_1 \cos \vartheta}{r^2}\right) \ldots\ldots\ldots (4),$$

zoodat de ontwikkeling der twee eerste termen van V' zich altijd tot dezen vorm laat terug brengen, waarvoor wij met GREEN schrijven

$$V' = \frac{2a}{r} + \frac{k^2 \cos \vartheta}{r^2},$$

a en k positieve, constante grootheden voorstellende. Deze vergelijking is dan wanneer men daarin $V' = c$ stelt, het oppervlak eens geleiders voor de electriciteit. Beschouwen wij haar echter als de vergelijking der beschrijvende kromme dier oppervlakte. Zij neemt verder den vorm aan

$$r^2 = \frac{2a}{c} r + \frac{k^2 \cos \vartheta}{c} \ldots\ldots\ldots (5).$$

dus

$$r = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + ck^2 \cos \vartheta}}{c}$$

Voor elke waarde van ϑ zijn er dus twee waarden van r. De bovenste is altijd positief de onderste is negatief van $\vartheta = -\frac{1}{2}\pi$ tot $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$, positief van $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$ tot $\vartheta = \frac{3}{2}\pi$.

GREEN bepaalt zich tot den bovensten wortel

$$r = \frac{a + \sqrt{a^2 + ck^2 \cos \vartheta}}{c} \ldots\ldots (6).$$

en strekt ϑ slechts van $\vartheta = 0$ tot $\vartheta = \pi$ uit. Hierdoor verkrijgt hij eenen tak die in het algemeen aan beide zijden aan de as der x eindigt en welks omwenteling om die as hem het oppervlak geeft. Wij zullen hem hierin volgen hoewel het, om de vormveranderingen der kromme nategaan indien c verandert, noodzakelijk zou zijn, ook den ondersten wortel te beschouwen.

Is c zeer klein zoo zal de vergelijking (6) weinig van eenen bol van den straal $\frac{2a}{c}$ verschillen, neemt c toe, zoo zal dit verschil grooter worden tot $c = \frac{a^2}{k^2}$; wordt $c > \frac{a^2}{k^2}$ zoo wordt het verschil van den bolvorm grooter dan de volgens LAPLACE aangenomene waarde van V' toelaat en wordt de vergelijking dus voor ons doel onbruikbaar.

Zij dan $c = \frac{a^2}{k^2}$, zoo dat dus

$$V' = \frac{2a}{r} + \frac{k^2 \cos \vartheta}{r^2} = \frac{a^2}{k^2};$$

hieruit volgt, wanneer wij alleen den wortel met het positieve teeken nemen

$$r = \frac{k^2}{a}(1 + \sqrt{1 + \cos \vartheta}) = \frac{k^2}{a}(1 + \sqrt{2}.\cos \tfrac{1}{2}\vartheta).$$

Wij moeten thans $-\frac{d\overline{V'}}{dn'}$ bepalen. Zij φ de hoek tusschen de normaal en den voerstraal in een punt van het oppervlak, zoo zal blijkbaar

$$-\frac{d\overline{V'}}{dr} = \frac{d\overline{V'}}{dn'} \cos \varphi \,\ldots\ldots\ldots\, (6').$$

Nu is

$$\frac{dV'}{dr'} = \frac{2a}{r^2} + \frac{2k^2 \cos\vartheta}{r^3}$$

dus,

$$-\frac{dV'}{dr} = \frac{1}{\cos\varphi}\,\frac{dV'}{dr} = \frac{1}{\cos\varphi}\left(\frac{2a}{r^2} + 2k^2\cos\vartheta\right)\ldots (7).$$

daar

$$\cos\vartheta = 2\cos^2\frac{\vartheta}{2} - 1 = (\sqrt{2}.\cos\tfrac{1}{2}\vartheta + 1)(\sqrt{2}.\cos\tfrac{1}{2}\vartheta - 1)$$

en

$$r = \frac{k^2}{a}(1 + \sqrt{2}.\cos\tfrac{1}{2}\vartheta),$$

zal

$$\frac{\cos\vartheta}{r} = \frac{a}{k^2}(\sqrt{2}.\cos\tfrac{1}{2}\vartheta - 1).$$

Wij vinden dus

$$2a + \frac{2k^2\cos\vartheta}{r} = 2a + 2a\sqrt{2}.\cos\tfrac{1}{2}\vartheta - 2a = 2a\sqrt{2}.\cos\tfrac{1}{2}\vartheta;$$

de vergelijking (7) gaat dus over in

$$-\frac{dV'}{dn'} = \frac{2a\sqrt{2}.\cos\tfrac{1}{2}\vartheta}{r^2\cos\varphi}$$

derhalve

$$\varrho = -\frac{h}{4\pi}.\frac{dV'}{dn'} = \frac{ha\sqrt{2}.\cos\tfrac{1}{2}\vartheta}{2\pi r^2\cos\varphi}.$$

In de vroeger genoemde vergelijking

$$\frac{Q}{R} = h\, V'$$

die voor R oneindig alleen doorgaat, mogen wij R door r vervangen, daar r van P tot een punt binnen het oppervlak gemeten wordt; wij hebben alzoo

$$hV' = \frac{Q}{r} = h\left(\frac{2a}{r} + \frac{k^2 \cos \vartheta}{r^2}\right) = \frac{2ah}{r}$$

daar r oneindig groot is.

Wij vinden alzoo

$$h = \frac{Q}{2a}.$$

Wij hebben dus voor de digtheid in elk punt van het oppervlak waarvan de vergelijking der beschrijvende kromme

$$r = \frac{k^2}{a}(1 + \sqrt{2}. \cos \tfrac{1}{2}\, \vartheta),$$

$$\varrho = \frac{Qa. \sqrt{2}. \cos \frac{1}{2}\, \vartheta.}{4\pi k^4\, (1 + \sqrt{2}. \cos \frac{1}{2}\, \vartheta)^2 \cos \varphi.}$$

terwijl de potentiaal-functie in een uitwendig punt P, dat r, ϑ en ω tot coördinaten heeft, voorgesteld wordt door

$$hV' = \frac{Q}{2a}\left(\frac{2a}{r} + \frac{k^2 \cos \vartheta}{r^2}\right) = \frac{Q}{r} + \frac{Qk^2 \cos \vartheta}{2ar^2}$$

GREEN neemt in de tweede plaats voor V' de potentiaal-functie eener regte lijn die gelijkvormig met electriciteit bedekt is. Zij $2a$ hare lengte, y de afstand van een punt tot die lijn, x de afstand van den voet dezer loodlijn tot het midden onzer lijn, terwijl x' die van het element dx' der lijn tot dat midden is. Neemt men nu dit element dx' der lijn als maat voor de over haar verbreide electriciteit aan, zoo vinden wij na ligte herleiding

$$V' = \int_{-a}^{a} \frac{dx'}{\sqrt{(y^2+(x-x')^2)}} = \log \left\{ \frac{a-x+\sqrt{(y^2+(a-x)^2)}}{-a-x+\sqrt{(y^2+(a+x)^2)}} \right\}, \quad (8)$$

V' gelijk de constante grootheid $\log C$ stellende verkrijgen wij voor de vergelijking onzer beschrijvende kromme van het oppervlak van den geleider,

$$\frac{a-x+\sqrt{(y^2+(a-x)^2)}}{-a-x+\sqrt{(y^2+(a+x)^2)}} = c \ldots\ldots \cancel{(8)}$$

dat is na ontwikkeling,

$$y^2(1-c^2)^2 + x^2 . 4c(1-c)^2 = a^2 . 4c(1+c)^2 \ldots (9).$$

derhalve de middelpunts-vergelijking eener ellips waarvan de halve assen

$$a' = a\,\frac{1+c}{1-c}, \qquad b' = a\,\frac{2\sqrt{c}}{1-c}.$$

Nu geeft de vergelijking (8) door differentiatie na hierin vooraf voor y hare waarde uit (9) gesubstitueerd te hebben,

$$\frac{dV'}{dx} = \frac{-2x\,\dfrac{1-c}{1+c}}{\left(\dfrac{1+c}{1-c}\right)^2 a^2 - \left(\dfrac{1-c}{1+c}\right)^2 x^2} = -\frac{2a\,a'\,x}{a'^4 - a^2 x^2}$$

De hoek φ tusschen de as der x en de normaal wordt zooals bekend is gegeven door de vergelijking

$$\operatorname{tang}\varphi = -\frac{dx}{dy}, \text{ dus } \cos\varphi = -\frac{1}{\sqrt{(1+tg^2\varphi)}} = -\frac{dy}{ds}$$

$$\frac{1}{\cos\varphi} = -\frac{ds}{dy} = \frac{1-c}{2x\sqrt{c}}\sqrt{\left(\left(\frac{1+c}{1-c}\right)^2 a^2 - x^2\right)} = \frac{\sqrt{(a'^4 - a^2x^2)}}{b'x}.$$

Wij hebben derhalve daar

$$-\frac{d\overline{V}'}{dn'} = -\frac{1}{\cos\varphi}\frac{d\overline{V}'}{dx} = \frac{2aa'}{b'\sqrt{(a'^4 - a^2x^2)}}$$

$$\varrho = -\frac{h}{4\pi}.\frac{d\overline{V}'}{dn'} = \frac{ahb'}{2b'\pi\sqrt{(a'^4 - a^2x^2)}}$$

terwijl

$$hV' = \log\left\{\frac{a - x + \sqrt{(y^2 + (a-x)^2)}}{-a - x + \sqrt{(y^2 + (a+x)^2)}}\right\}.$$

Voor x en y beide oneindig zal daar wij dan de gansche massa der electriciteit $2a$ in het midden der lijn geconcentreerd mogen denken

$$V' = \frac{2a}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

In de vergelijking $\frac{Q}{R} = hV'$, zal dus R thans gelijk $\sqrt{x^2 + y^2}$, voor x en y oneindig groot zijn.

Wij hebben dus

$$\frac{Q}{\sqrt{x^2+y^2}} = hV_{\prime} = \frac{2ah}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

of

$$h = \frac{Q}{2a},$$

waardoor derhalve voor de digtheid in een punt van het oppervlak waarvan (9) de beschrijvende kromme

$$\varrho = \frac{Q\, a'}{4\, \pi\, b' \sqrt{(a'^4 - a^2 x^2)}},$$

terwijl wij voor de potentiaal-functie van een uitwendig punt waarvan de coördinaten x, y en z zijn, vinden

$$hV' = \frac{Q}{2a} \log \left\{ \frac{a - x + \sqrt{(y^2 + (a - x)^2)}}{- a - x + \sqrt{(y^2 + (a + x)^2)}} \right\},$$

waardoor wij dus de op dit punt werkende kracht kunnen bepalen.

THESES.

I.

Dans le choix d'un système, on ne doit avoir égard qu'à la simplicité des hypothèses; celle des calculs ne peut être d'aucun poids dans la balance des probabilités. La nature ne s'est pas embarrassée des difficultés d'analyse; elle n'a évité que la complication des moyens.

FRESNEL.

II.

Zeer teregt zegt POINSOT: »Ce n'est point dans le calcul que réside cet art qui nous fait découvrir. La vraie méthode n'est que cet heureux mélange de l'analyse et de la synthèse, où le calcul n'est employé que comme un instrument."

III.

Het opsporen van een onderling verband tusschen de zoogenaamde transcendenten der hoogere wiskunde is van het meeste belang voor de verdere ontwikkeling der analyse.

IV.

De getallen-leer (theorie des nombres) heeft meer nut dan men algemeen gelooft; het zoude zoowel voor de zuivere als toegepaste wiskunde wenschelijk zijn, dat zij meer algemeen beoefend werd.

V.

Juist is het gevoelen van PLANA: Het is niet genoeg faire de l'analyse pour faire l'analyse.

VI.

L'étude approfondie de la nature est la source la plus féconde des découvertes mathematiques. FOURIER.

VII.

Het voordeel onzer lengte-eenheid (de meter) van uit de natuur gekozen te zijn, is meer denkbeeldig dan wezenlijk.

VIII.

Bij de beoefening der natuurkundige wetenschappen behoort die harer geschiedenis gepaard te gaan; bij de wiskundige wetenschappen is dit een minder vereischte.

IX.

Sedert de uitvinding van den psychrometer van AUGUST heeft de hygrometer van DANIELL zijne waarde verloren.

X.

Eene electrische stroom kan door geenen electrolyt gaan zonder dezen te ontleden.

XI.

Het kunstmatige plantenstelsel van LINNAEUS is het beste voor het onderscheiden, een natuurlijk stelsel beter voor het leeren kennen der planten.

XII.

Het sextant heeft als astronomisch instrument alle waarde verloren.

XIII.

Eene juistere bepaling van den omwentelingstijd der zon, is eerder langs meteorologischen dan langs astronomischen weg te wachten.

XIV.

Teregt zegt BESSEL: »In die Astronomie is die Praxis eine Aufgabe der Wahrscheinlichkeits-Rechnung, die Theorie eine Aufgabe der höheren Mechanik."