Utrecht University Library
Partner in Science
Universiteit Utrecht

Het maximum verzekerd bedrag

https://hdl.handle.net/1874/224170

A² 192
1896.

HET MAXIMUM

VAN VERZEKERD BEDRAG.

H. ONNEN.

A. qu.
192

HET MAXIMUM VAN VERZEKERD BEDRAG.

RIJKSUNIVERSITEIT UTRECHT
1403 1912

4° 192 (1896)

Het Maximum van Verzekerd Bedrag.

PROEFSCHRIFT

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN

Doctor in de Wis- en Natuurkunde

AAN DE RIJKS-UNIVERSITEIT TE UTRECHT,

NA MACHTIGING VAN DEN RECTOR-MAGNIFICUS

DR. M. TH. HOUTSMA,
Hoogleeraar in de Faculteit der Letteren en Wijsbegeerte,

VOLGENS BESLUIT VAN DEN SENAAT DER UNIVERSITEIT

TEGEN DE BEDENKINGEN VAN

DE FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE

TE VERDEDIGEN

op Vrijdag 19 Juni 1896,

des namiddags te **3** uur,

DOOR

HENDRIK ONNEN,
geboren te Sneek.

BIBLIOTHEEK DER
RIJKSUNIVERSITEIT
UTRECHT.

Gedrukt bij GEBR. BELINFANTE, voorh.: A. D. SCHINKEL.
1896.

Aan mijne Ouders.

Aan het einde mijner academische loopbaan gekomen is het mij een aangename plicht een woord van dank te richten tot U, Hoogleeraren in de faculteit der Wis- en Natuurkunde, voor Uw gewaardeerd onderwijs.

Inzonderheid U, Hooggeleerde KAPTEYN, *ben ik veel verschuldigd voor den steun, welken ik bij de vervaardiging van dit proefschrift mocht ondervinden.*

Steeds zal mij de heldere en strenge betoogtrant, die altijd Uw onderwijs kenmerkte, in herinnering blijven.

Ook aan U, Hooggeleerde GRINWIS *en* JULIUS, *gevoel ik mij verplicht, niet slechts voor hetgeen ik op Uwe colleges mocht leeren, maar ook voor de welwillendheid, waarmede Gij mij steeds ter zijde hebt gestaan zoo vaak ik Uwen raad kwam vragen in moeilijkheden.*

Uw onderricht in de mathematische theorie der levensverzekering, Zeergeleerde MOUNIER *blijkt, nu mijne bezigheden mij dagelijks met deze theorie in aanraking brengen, voor mij een groote steun te zijn.*

INHOUD.

Bladz.

INLEIDING 1

HOOFDSTUK I.

Berekening der waarschijnlijkheid, dat de contante waarde der toekomstige uitkeeringen van de reserve afwijkt een bedrag, dat tusschen bepaalde grenzen inligt 5

HOOFDSTUK II.

Gevolgen en toepassingen 39

HOOFDSTUK III.

De theorie van LAURENT 66

HOOFDSTUK IV.

Het risico van BREMIKER en WITTSTEIN. 73

HOOFDSTUK V.

De theorie van CORNEILLE L. LANDRÉ 86

HOOFDSTUK VI.

Vergelijking der theoriën 93

NASCHRIFT 99

TOELICHTING BIJ DE TABELLEN. 104

TABELLEN 106

STELLINGEN. 115

INLEIDING.

Het is bekend, dat geen solide maatschappij van verzekering, (1) elk bedrag, hoe hoog dit ook zijn moge, op één enkel risico verzekert. Wanneer het een zeker *maximum* overschrijdt, weigert zij het bedrag daar boven, of wel zij herverzekert dit bij eene zuster-maatschappij. Het hoogste bedrag, dat op deze wijze eene maatschappij voor eigen risico houdt, noemt men haar „*maximum van verzekerd bedrag*".

De wijze, waarop heden ten dage dit maximum wordt bepaald, mag inderdaad hoogst primitief worden genoemd. Men stelt, louter op grond van het *vermoeden*, dat men er mede aan den voorzichtigen kant is, eenvoudig een maximum van kapitaal- en rente-verzekering vast, en beschouwt hiermede de zaak als opgelost. Eenvoudiger kan het al niet. Ja zelfs dat vermoeden wordt ternauwernood gerechtvaardigd, door te zeggen, dat de praktijk heeft doen zien dat het vastgestelde maximum niet te hoog is. Vraagt men intusschen *hoe* voorzichtig men is, dan moet men het antwoord geheel en al schuldig blijven.

Nu zou men zich bij eene dergelijke ruwe wijze van den knoop door te hakken kunnen neerleggen, wanneer het een kwestie gold van ondergeschikt belang. Dit is hier echter niet het geval. In de eerste en voornaamste plaats is dat der verzekerden er rechtstreeks mede gemoeid. Is er op weten-

(1) Hoewel in het vervolg alleen sprake zal zijn van maatschappijen van levensverzekering, zal toch het grootste deel der te houden beschouwingen, mutatis mutandis, kunnen worden toegepast op andere soorten van maatschappijen van verzekering.

schappelijken grond een bedrag aan te wijzen, waar boven eene maatschappij niet mag gaan, zonder het nakomen van hare verplichtingen in de waagschaal te stellen, dan behoort dat bedrag berekend te worden, en is een vermoeden alleen, dat men, door er een slag in te slaan, er wel onderblijft geen voldoende waarborg.

Maar in de tweede plaats is het een kwestie, waarbij zij belang hebben, die eensdeels met hun kapitaal borg staan voor het nakomen dier verplichtingen, maar daarom anderdeels ook aanspraak hebben op de te maken winsten. En waar nu door de woorden van LAURENT, waar hij zegt: (1) *„qu'aucune compagnie à notre connaissance n'a jamais assuré une somme, atteignant la dixième partie de son plein"* het vermoeden ontstaat, dat geheel onnoodig, d. w. z. zonder dat de belangen der verzekerden er door geschaad zouden worden, men een zeer belangrijk deel der winst jaar in jaar uit prijs geeft, dan gaat het moeilijk meer om hier te spreken van een ondergeschikt belang, en moet er een andere reden bestaan, waarom men bij de bepaling van het *maximum van verzekerd bedrag* tot zoo'n huismiddeltje zijn toevlucht neemt.

Die reden is niet ver te zoeken. In de overigens vrij uitgebreide litteratuur der levensverzekering is zeker geen onderwerp op meer stiefmoederlijke wijze behandeld geworden, dan het *maximum van verzekerd bedrag*. Het is opvallend, hoe, het belang dezer kwestie in aanmerking genomen, zelfs uitgebreide werken over de mathematische theorie der levensverzekering haar òf in het geheel niet òf slechts zeer terloops en onvolledig behandelen. Zoo geeft DORMOY (2), wiens werk, bestaande uit twee dikke deelen, de wiskundige theorie der levensverzekering overigens tot in den grond toe behandelt, omtrent dit punt niet anders dan de belofte, om in het tweede deel de theorie der afwijkingen er op toetepassen, eene belofte, die overigens slecht wordt nagekomen, want daar ter plaatse ontslaat hij zich eenvoudig van de moeite door te verwijzen naar de theorie van LAURENT (1).

---

(1) H. LAURENT. Theorie et Pratique des Assurances sur la vie pag. 117.
(2) EMILE DORMOY. Théorie mathématique des assurances sur la vie.

Werkelijk schijnt deze theorie, tot voor korten tijd de eenige te zijn geweest, die het probleem van het *maximum van verzekerd bedrag* trachtte optelossen. Het schijnt echter dat zij weinig bekendheid heeft genoten, hetwelk waarschijnlijk een gevolg is van de ineengedrongen wijze waarop LAURENT haar ontwikkelt. Of zij ooit in de praktijk is toegepast, is aan rechtmatigen twijfel onderhevig.

Verleden jaar is deze theorie bestreden geworden door een der meest bekende Nederlandsche wiskundigen op het gebied van levensverzekering n.l. CORNEILLE L. LANDRÉ. (1)

De conclusie waartoe LANDRÉ komt, is dat de theorie van LAURENT *geheel* is te verwerpen. Ik kan hem echter de gronden die hij hiervoor aanvoert niet toegeven, en heb daarom LAURENT's theorie van nieuws aan ter hand genomen, en daarbij niet geschroomd de meest mogelijke uitgebreidheid in acht te nemen. Zij is vervat in de drie eerste hoofdstukken van dit proefschrift.

Naast de theorie van LAURENT hebben in den laatsten tijd twee nieuwe theoriën over dit onderwerp het licht gezien beide afkomstig van twee op het gebied der levensverzekering zeer bekende Nederlandsche wiskundigen, den reeds genoemden CORNEILLE L. LANDRÉ en Dr. G. J. D. MOUNIER.

De eerste heeft zijne theorie ontwikkeld in zijn niet minder bekend leerboek „Wiskundige Hoofdstukken voor Levensverzekering", de laatste in het Archief voor Verzekeringswetenschap, Dl. I Afl. 6. Aan beide theoriën is een hoofdstuk gewijd.

Doch hiermede schijnt de litteratuur over dit onderwerp dan ook te zijn uitgeput. Ik althans heb er niet meer van kunnen vinden. (2)

Mag intusschen uit een en ander worden opgemaakt dat het vraagstuk in den laatsten tijd meer en meer de aandacht

---

(1) Archief voor Verzekeringswetenschap Dl. I, Afl. 1.

(2) Voor korten tijd is in de „Publications of the Actuarial Society of America verschenen een stuk getiteld: A method of Measuriug the maximum amount which an Insurance Company may properley assume on a single risk. Tot mijn leedwezen heb ik dit stuk niet tijdig genoeg meer kunnen machtig worden om het hier eene plaats te kunnen geven.

der wiskundigen gaande maakt, aan den anderen kant kan het geen verwondering meer baren, als men in aanmerking neemt, dat de juistheid van LAURENT's theorie in twijfel wordt getrokken, de theorie van LANDRÉ leidt tot een maximum, dat niet grooter is dan het dubbel van het gemiddeld verzekerd bedrag per hoofd, een bedrag waar alle maatschappijen boven gaan, en ver boven gaan, terwijl eindelijk de theorie van Dr. MOUNIER tot de conclusie voert, dat er geen maximum van verzekerd bedrag is, maar dat men, zonder de belangen der verzekerden te schaden, mits met in acht nemen eener voldoende risico-reserve elk bedrag, hoe hoog dit ook zij, op één hoofd mag aannemen voor eigen risico, dat de maatschappijen aarzelen eene oplossing te aanvaarden wier juistheid niet boven allen twijfel verheven is, en in afwachting daarvan den weg blijven bewandelen, die, zoo zij al niet de voordeeligste, dan toch veilig gebleken is.

HOOFDSTUK I.

§ 1. Uit een wiskundig oogpunt beschouwd is elk contract van levensverzekering niets anders dan een kansspel, en kan elke maatschappij die zich hiermede bezig houdt vergeleken worden met een gewone speelbank, waarbij de verzekerden als spelers optreden. De premiën die zij betalen vormen den inzet, de uitkeeringen der maatschappij zijn de te winnen prijzen.

Hoewel deze vergelijking wellicht eenigszins vreemd mag klinken, zoo is zij niettemin juist, en we zullen ons meermalen genoopt zien er gebruik van te maken, wijl ze in vele gevallen de voorstelling zeer verduidelijkt.

Bij het bepalen van het bedrag dat elk der spelers moet inzetten, gaat de maatschappij uit van twee grondslagen.

Daar de uitkeeringen die zij zal hebben te doen, afhangen van het overlijden of in leven zijn van hare verzekerden op bepaalde tijdstippen, moet zij kennen de waarschijnlijkheden dezer evenementen. Deze vindt zij in de door haar gebezigde sterftetafels, die den eersten grondslag vormen voor de berekening van den inzet.

Met het gebruik dezer sterftetafels zij men intusschen zeer voorzichtig. Wanneer zoo'n tafel aangeeft, dat van de 100 veertig-jarigen er in den loop van het eerst volgende jaar 10 overlijden, dan wil dit zeggen dat de kans van iemand, waarvan men niets anders weet, dan dat hij veertig jaar is, om in den loop van het eerstvolgende jaar te sterven $^1/_{10}$ is. Die waarde is intusschen slechts een gemiddelde waarde Zoo zal de sterftekans van een veertigjarigen mijnwerker grooter zijn dan die van een rentenier van dien leeftijd. Geneigd als

men nu is, om elk vraagstuk van waarschijnlijkheidsrekening terug te brengen tot een bak met ballen van verschillende kleuren, al naar gelang van omstandigheden, zou men meenen in bovenstaand geval de levenden op 40-jarigen leeftijd te kunnen vervangen door een bak met witte en roode ballen, in verhouding van 10 : 1. Deed men dit, dan zou men echter juist de fout begaan, waarvoor door BERTRAND (1) zoo met nadruk wordt gewaarschuwd, maar waar niettegenstaande deze waarschuwing herhaaldelijk tegen wordt gezondigd, dat men n.l. de sterftekansen van alle veertig-jarigen, die nu gerepresenteerd worden door de roode ballen, identiek aan elkaar gelijk stelt. Veeleer doet het voorbeeld van den mijnwerker en den rentenier zien, dat men inplaats van 10 roode ballen er 10 van verschillende kleur moet nemen, en wel van de eene kleur meer dan van de andere, naar gelang de sterftekans van de eene categorie van veertig-jarigen grooter is dan die van de andere. De gemiddelde sterftekans wordt daardoor niet gewijzigd, maar wel die voor elk individu in het bijzonder. Waar het er nu op aankomt de premie te berekenen die een veertig-jarige zou moeten betalen, voor eene uitkeering bij overlijden binnen het jaar, zal het gebruik van de sterftetafel ook leiden tot eene gemiddelde waarde wat door elkaar genomen weinig hindert. Maar heel iets anders wordt de zaak, wanneer men op zoo'n groep van personen wil gaan toepassen de theorie der afwijkingen.

Bekend is de stelling uit de theorie der waarschijnlijkheidsrekening, dat wanneer w de waarschijnlijkheid is van een evenement E en $(1 - w)$ die van het tegengestelde, en men neemt s proeven, waarbij s groot wordt ondersteld, de waarschijnlijkheid dat op deze s proeven het evenement E een aantal malen voor zal komen inliggende tusschen $w\,s \pm l$, gelijk is aan:

$$P = \frac{2}{\sqrt{2\,\pi\,s\,w\,(1-w)}} \int_0^{l} e^{-\frac{u^2}{2\,s\,w\,(1-w)}}\, du \quad . \quad (1).$$

(1) Calcul der Probabilités par J. BERTRAND, Chap. XII.

De afleiding dezer wet, onderstelt nadrukkelijk, dat de waarschijnlijkheid w van het evenement bij elke proef dezelfde is. Wanneer men nu een groep van s personen heeft, die alle veertig jaar zijn, en men mocht veronderstellen, dat de kans van iemand van dien leeftijd om binnen het jaar te sterven louter en alleen afhing van zijn ouderdom, m. a. w. dat de waarschijnlijkheid voor elk dier s personen om binnen het jaar te overlijden volmaakt dezelfde was dan ware tegen het gebruik van formule (1) ter berekening van de waarschijnlijkheid eener afwijking der sterfgevallen, van het meest waarschijnlijke aantal binnen zekere grenzen niet het minste bezwaar.

Nu dat echter niet het geval is, is het toepassen van formule (1) op dit geval zonder nader bewijs ten eenen male ongeoorloofd.

Ter gelegener plaatse komen we hier nader op terug. Voorloopig zij dit voldoende om aan te toonen dat de sterftetafels die door de maatschappijen van levensverzekering voor de berekening der premiën worden gebezigd voor deze slechts kunnen geven eene gemiddelde waarde.

Bij het berekenen eener premie kent men nu aan elken te verzekeren persoon een sterfte- of levenskans toe, die volgens de sterftetafel overeenkomt met zijn leeftijd, en berekent nu de premie zoodanig, dat de mathematische hoop van den verzekerde gelijk is aan die der maatschappij, m. a. w., maatschappij en verzekerde worden geacht gelijk spel te spelen. Een eenvoudig voorbeeld moge dit duidelijk maken. Nemen we het geval, dat iemand oud a jaren, zich verzekert voor eene uitkeering bij overlijden tegen premie in eens. Zij l_a het aantal levenden op den leeftijd a, d_a het aantal, dat hiervan volgens de sterftetafel op dien ouderdom sterft (1), het verzekerd bedrag gelijk aan de eenheid, dan heeft de verzekerde achtereenvolgens de kansen:

$$p_1 = \frac{d_a}{l_a}, p_2 = \frac{d_{a+1}}{l_a}, p_3 = \frac{d_{a+2}}{l_a}. \ldots\ldots \text{enz.}$$

(1) Gemakshalve, is geen correctie aangebracht voor overlijden in den loop van het jaar, terwijl hier en ook in het vervolg alleen gerekend zal worden met netto premiën, in de onderstelling dat de opslag juist dient tot dekking der administratiekosten.

dit bedrag te winnen. Disconteeren we elk bedrag tot op het oogenblik, waarop de verzekering wordt gesloten, tegen een rente van i pCt., terwijl we $\frac{100}{100+i} = \frac{1}{r}$ stellen, dan wordt dus de contante waarde der mathematische hoop van den verzekerde:

$$\frac{d_a}{l_a} + \frac{1}{r}\frac{d_{a+1}}{l_a} + \frac{1}{r^2}\frac{d_{a+2}}{l_a} + \ldots \text{ enz.}$$

Zij x de premie, die hij zal betalen, dan is het bedrag hiervan tevens de mathematische hoop der maatschappij, aangezien zij de zekerheid heeft haar te ontvangen. Zullen beide partijen nu gelijk spel spelen, dan moet:

$$x = \frac{d_a}{l_a} + \frac{1}{r}\frac{d_{a+1}}{l_a} + \frac{1}{r^2}\frac{d_{a+2}}{l_a} + \ldots \text{ enz.}$$

of, noemen we λ_a het gedisconteerd aantal levenden, τ_a het gedisconteerd aantal dooden, $\Sigma\,\tau_a$ de som dezer laatsten van af den leeftijd a tot den hoogsten leeftijd van de stertetafel, dan is:

$$x = \frac{\Sigma\,\tau_a}{\lambda_a}.$$

Dit voorbeeld doet terstond zien, dat de waarde der premie, behalve van de sterftekansen, ook afhangt van den rentevoet. Dit is dan ook de tweede grondslag, waarop de berekening der premiën berust, en we zien gemakkelijk dat naarmate deze hooger is, de premie lager is, en omgekeerd.

Hoewel in den regel een contract van levensverzekering vele jaren kan duren, neemt men toch bij de berekening der premie, den rente-voet gedurende dien tijd constant aan. Ofschoon we den invloed van eene verandering hierin eerst later zullen nagaan, kan hier toch reeds worden opgemerkt, dat wanneer de rentestandaard gedurende het verloop der verzekering daalt, de premie te laag is, en dus de mathematische hoop van den verzekerde grooter wordt dan die der maatschappij en omgekeerd.

§ 2. Gaan we na, welke beteekenis de premie-reserve krijgt in onze vergelijking van eene contract van levensverzekering met een kansspel.

Kiezen we daartoe in de eerste plaats weder het voorbeeld der vorige §. We vonden daar voor den inzet van den speler $x = \frac{\Sigma \tau_a}{\lambda_a}$. Het is bekend, dat bij deze verzekering tegen premie in eens, deze terstond als reserve wordt belegd. Het spel is nu ten einde als de verzekerde overlijdt, hetgeen zeker eens zal gebeuren. Eerst dan kan worden uitgemaakt, hoeveel elk der partijen heeft gewonnen of verloren.

Nemen we in de tweede plaats iemand, die zich eveneens verzekert voor eene uitkeering bij overlijden, maar nu tegen eene gelijkblijvende jaarpremie. Het is bekend, dat deze jaarpremie in den beginne hooger is dan het bedrag dat de verzekerde zou betalen, indien hij zich elk jaar opnieuw telkens voor één jaar verzekerde, en later lager wordt. Het is daarom dat de maatschappij van die eerste premiën telkens iets reserveert, voor den tijd dat de premiën te laag worden. Verzekerde zoo iemand zich elk jaar opnieuw tegen een toenemende premie, dan zou deze steeds overeenkomen met het risico van dat jaar en was er dus geen reserve. De praktijk maakt dit intusschen onmogelijk, maar eischt dat beide partijen zich in eens verbinden voor het geheele leven. Men ziet nu gemakkelijk in, dat die reserve eigenlijk niets anders is dan den reeds betaalden inzet voor een gedeelte van het spel dat nog moet plaats hebben en waaromtrent nog niet beslist is wie van de beide partijen heeft gewonnen.

Welke verzekeringswijze men nu ook kiest, steeds zal men tot de conclusie komen, dat de reserve niets anders is dan de reeds betaalde inzet van spelen die aan den gang zijn.

Uit dit oogpunt beschouwd is het aanwezig zijn der gewone premie-reserve in de kas der maatschappij de meest natuurlijke zaak van de wereld. Eene maatschappij die hierin in gebreke bleef zou gelijk staan met b.v. den houder van een speelbank, die den inzet der spelers reeds als winst beschouwde voor dat de verschillende spelen waren afgeloopen.

Aan den anderen kant ziet men gemakkelijk in, dat die inzet *alleen*, nimmer een waarborg zijn kan voor het nakomen der verplichtingen, veel minder nog wanneer er gelijk spel wordt gespeeld.

Ja, wordt er gezegd, maar de reserve is ook alleen maar die waarborg als de sterfte, om van den interest maar niet eens te spreken, aan de daaromtrent gemaakte onderstelling beantwoordt. Dit is volkomen waar, maar is er eenige kans dat de sterfte aan die verwachting zal beantwoorden, en is die kans zoo groot, dat zij recht geeft, om de reserve als een waarborg te beschouwen, dat de maatschappij ten allen tijde hare verplichtingen zal kunnen nakomen? Het antwoord op deze vragen is kortweg „neen". De waarschijnlijkheid dat de sterfte plaats heeft volgens de sterftetafels, ook al koos men deze volmaakt in overeenstemming met de werkelijke sterftekansen der verzekerden, is nagenoeg „nul".

Een eenvoudig voorbeeld kan dit reeds doen zien.

Stellen we ons voor een groep van 24 personen met gelijke sterftekans $^1/_4$, allen verzekerd voor eene uitkeering bij overlijden binnen één jaar, en wel 16 voor een bedrag a en 8 voor een bedrag b.

De premiën voor elk dezer beide groepen, die we door I en II zullen aanduiden, worden terstond gevonden uit de vergelijkingen:

$$24\,x = 6\,a \quad \text{of} \quad x = \frac{1}{4}\,a \quad \text{en} \quad 24\,y = 6\,b \quad \text{of} \quad y = \frac{1}{4}\,b.$$

De som der betaalde premiën is dus:

$$16 \times \frac{1}{4}\,a + 8 \times \frac{1}{4}\,b = 4\,a + 2\,b.$$

Dit bedrag vormt nu voor de maatschappij de reserve.

Daartegenover staat dat zij de volgende kansen heeft om de daar achter vermelde uitkeeringen te doen:

Er sterven	Waarschijnlijkheid	Uitkeering.
1° 0 van groep I, 6 van groep II	$\frac{6!}{6!}\left(\frac{1}{3}\right)^6 = \frac{1}{729}$	$6\,b$

	Er sterven					Waarschijnlijkheid	Uitkeering.
2e	1 van groep I,	5 van groep II				$\frac{6!}{1!\,5!}\,\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{12}{729}$	$a + 5b$
3e	2 „	„ I,	4 „	„ II		$\frac{6!}{2!\,4!}\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{60}{729}$	$2a + 4b$
4e	3 „	„ I,	3 „	„ II		$\frac{6!}{3!\,3!}\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{160}{729}$	$3a + 3b$
5e	4 „	„ I,	2 „	„ II		$\frac{6!}{4!\,2!}\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{240}{729}$	$4a + 2b$
6e	5 „	„ I,	1 „	„ II		$\frac{6!}{5!\,1!}\left(\frac{2}{3}\right)^5\left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{192}{729}$	$5a + b$
7e	6 „	„ I,	0 „	„ II		$\frac{6!}{6!}\left(\frac{2}{3}\right)^6 = \frac{64}{729}$	$6a$

Vermenigvuldigt men elk dezer waarschijnlijkheden met het overeenkomstige bedrag, en telt men deze produkten bij elkaar op, dan verkrijgt men weder de mathematische hoop voor de geheele groep der verzekerden. Men vindt daarvoor zooals het behoort $4a + 2b$. Beide partijen spelen dus gelijk spel. Onderstellen we nu $b > a$, dan zijn de vier eerste bedragen grooter, de beide laatste kleiner dan $4a + 2b$. De kans, dat een der vier eerste bedragen zal moeten worden uitgekeerd, en dat dus de maatschappij verliest, is de som hunner waarschijnlijkheden of $\frac{233}{729}$; evenzoo is de kans, dat zij wint $\frac{256}{729}$, en eindelijk de kans dat zij quitte speelt $\frac{240}{729}$.

Wanneer er dus werkelijk van die 24 menschen, er zes overlijden, is de kans nog maar $\frac{240}{729}$, dat zij, die overlijden, zoodanig over de beide groepen verdeeld zijn, dat juist de reserve zal worden uitgekeerd. Daar staat eene nagenoeg even groote kans tegenover dat er meer en dat er minder zal moeten worden uitgekeerd. Wat beteekent nu in dit geval de reserve als waarborg dat de maatschappij hare verplichtingen zal kunnen nakomen? Immers nagenoeg niets. Maar nog meer. Er kunnen meer, en er kunnen ook minder dan 6 personen van de geheele groep overlijden. En nemen we nu maar gemakshalve aan, dat de sterftekansen van allen onder-

ling identiek aan elkaar gelijk zijn, dan is de waarschijnlijkheid, dat er van de 24 inderdaad slechts 6 zullen sterven:

$$\frac{24!}{6!\,18!}\left(\frac{1}{4}\right)^{6}\left(\frac{3}{4}\right)^{18}.$$

en dus de waarschijnlijkheid, dat van die 6 sterfgevallen er 4 behooren tot groep I en 2 tot groep II slechts:

$$\frac{24!}{6!\,18!}\left(\frac{1}{4}\right)^{6}\left(\frac{3}{4}\right)^{18}\times\frac{240}{729}=0{,}06.$$

Neemt men nu in aanmerking, dat hier eene kans van 0,94 tegenover staat, dat een ander bedrag zal worden uitgekeerd; dat wegens de gelijkheid van het spel de waarschijnlijkheid, dat dit grooter zal zijn dan de reserve nagenoeg gelijk moet zijn aan de waarschijnlijkheid, dat het kleiner zal zijn dan deze, dan zal men toch zeker niet meer kunnen beweren, dat het hier in dit geval der maatschappij geoorloofd is, alleen met hare reserve het einde van het jaar af te wachten, om te zien of zij dan al of niet hiermede uitkomt.

Men zou hiertegen kunnen aanvoeren, dat men bij de berekening der reserve onderstelt dat de groepen groot zijn.

In de eerste plaats zou hiertegen kunnen worden opgemerkt, dat dit den verzekerden weinig baat, als in de praktijk ook niet werkelijk aan die onderstelling is voldaan; maar in de tweede plaats gaat het argument niet op, omdat, naarmate de groep grooter is, de waarschijnlijkheid, dat het meest waarschijnlijke aantal zal overlijden kleiner wordt.

Om dit nader aan te toonen, nemen we eens een groep van s personen, waarbij s zoo groot wordt ondersteld, dat we de wet der groote getallen mogen toepassen. Zij de sterftekans van allen w, de verzekerde bedragen onderling gelijk a, uit te keeren bij overlijden binnen het jaar, dan is dus het bedrag dat de maatschappij voor deze groep als reserve bewaart $s\,w\,a$, zijnde tevens de som die door de gezamenlijke verzekerden is betaald.

Sterven er nu meer dan $s\,w$ dan verliest de maatschappij, terwijl zij wint, wanneer er minder dan $s\,w$ overlijden. Nu is de waarschijnlijkheid dat er een aantal zal overlijden inlig-

gende tusschen $s\,w \pm l$, volgens de wet der groote getallen:

$$P = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi\,s\,w\,(1-w)}} \int_{-l}^{+l} e^{-\frac{u^2}{2\,s\,w\,(1-w)}}\,d\,u$$

en dus de kans dat er meer dan $s\,w$ sterven even groot als die dat er minder overlijden, terwijl de waarschijnlijkheid dat er juist $s\,w$ overlijden een differentiaal, d. i. praktisch als „nul" kan beschouwd worden.

Eene maatschappij, die onder zulke omstandigheden alleen met hare reserve in kas, het einde van het jaar afwachtte zou dus een kans één tegen één hebben van hare verplichtingen niet of wel te kunnen nakomen, wat toch zeker door niemand als een bewijs van soliditeit zal worden aangemerkt.

Wat we hier voor een hoogst eenvoudig geval hebben aangetoond, zullen we straks voor de meest ingewikkelde combinatie van verzekeringen bewijzen. Dit bewijs is te danken aan LAURENT (1). De vraag die hij zich stelt is zoo algemeen mogelijk, en is deze: „*wat is, bij de bestaande verdeeling der verzekerde bedragen, bij mogelijke afwijkingen in de sterfte en interest, de waarschijnlijkheid, dat de maatschappij in de toekomst aan haar verzekerden een bedrag zal hebben uit te keeren, waarvan de contante waarde is A?*"

Alvorens tot het beantwoorden dezer vraag over te gaan, zullen we eenige stellingen bewijzen, die we bij het bepalen dezer waarschijnlijkheid zullen noodig hebben.

---

§ 3. Stelling I.

Zij O_i een der contracten eener maatschappij; zijn a_{i1}, a_{i2} enz. de contante waarden der bedragen, wier kansen om te moeten worden uitgekeerd krachtens deze verzekering zijn: p_{i1}, p_{i2} enz.; dan is, in de onderstelling dat enkele dier bedragen a ook negatief of nul kunnen zijn, steeds $\Sigma\, p_{ij} = 1$.

Alvorens tot het algemeen bewijs dezer stelling overtegaan, is het wellicht niet ondienstig haar door een paar voorbeelden optehelderen.

---

(1) H. LAURENT: Theorie et Pratique des Assurances sur la vie, pag. 116.

1ste voorbeeld.

Zij 0_i eene levenslange verzekering voor uitkeering bij overlijden, ten bedrage van de eenheid, gesloten door een thans a-jarige tegen premie in eens.

Is dan d_a het aantal a-jarigen dat op dien leeftijd sterft, l_a het aantal levenden volgens de sterftetafel op dien leeftijd, dan ziet men terstond in, dat de maatschappij achtereenvolgens de kansen $p_{i1} = \frac{d_a}{l_a}$, $p_{i2} = \frac{d_{a+1}}{l_a}$ enz. heeft om bedragen te moeten uitkeeren, waarvan de contante waarden zijn $a_{i1} = 1$, $a_{i2} = \frac{1}{r}$ enz. als $r = \frac{100 + i}{100}$ en i het pCt. voorstelt (1).

Nu is:

$$\Sigma\, p_{ij} = \frac{d_a}{l_a} + \frac{d_{a+1}}{l_a} + \ldots \text{ enz.} = 1.$$

2de voorbeeld.

Onderstellen we, dat dezelfde verzekering is gesloten tegen eene gelijkblijvende jaarpremie m.

Overlijdt dan de verzekerde in den loop van het eerstvolgende jaar (2), waarvan de kans weder is $p_{i1} = \frac{d_a}{l_a}$, dan is dus de contante waarde der uitkeering, het verzekerd bedrag, verminderd met één premie. Derhalve is $a_{i1} = (1 - m)$. Overlijdt hij in het 2de jaar, waarvan de kans is $p_{i2} = \frac{d_{a+1}}{l_a}$ dan is de contante waarde der uitkeering die van het verzekerd bedrag verminderd met die van twee premiën, dus:

$$a_{i2} = \frac{1}{r} - m\left(1 + \frac{1}{r}\right)$$

Evenzoo is:

$$p_{i3} = \frac{d_{a+2}}{l_a} \qquad a_{i3} = \frac{1}{r^2} - m\left(1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2}\right)$$

---

(1) De notatie d_a onderstelt weder dat het overlijden plaats heeft bij den aanvang van het jaar. De interest wordt gedurende den duur van het contract ondersteld constant te blijven.

(2) We stellen ons voor te staan aan het begin van dat jaar, zoodat ook nog de premie voor dat jaar moet worden betaald.

$$p_{i4} = \frac{d_{a+3}}{l_a} \qquad a_{i4} = \frac{1}{r^3} - m\left(1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3}\right)$$

enz.

Ook nu weder is:

$$\Sigma p_{ij} = \frac{d_a}{l_a} + \frac{d_{a+1}}{l_a} + \ldots \text{ enz.} = 1.$$

We willen hier van de gelegenheid gebruik maken, om de beteekenis na te gaan van de uitdrukking $x_i = \Sigma a_{ij} p_{ij}$, een grootheid, waarvan we in het vervolg een veelvuldig gebruik zullen maken.

$$x_i = \Sigma a_{ij}\, p_{ij} = (1-m)\frac{d_a}{l_a} + \left\{\frac{1}{r} - m\left(1 + \frac{1}{r}\right)\right\}\frac{d_{a+1}}{l_a} + \text{. enz.}$$

$$= \frac{d_a}{l_a} + \frac{1}{r}\frac{d_{a+1}}{l_a} + \frac{1}{r^2}\frac{d_{a+2}}{l_a} + \text{enz. } \ldots$$

$$-m\left\{\frac{d_a}{l_a} + \left(1 + \frac{1}{r}\right)\frac{d_{a+1}}{l_a} + \left(1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2}\right)\frac{d_{a+2}}{l_a} + \text{enz.}\right\}$$

Het stuk:

$$\frac{d_a}{l_a} + \frac{1}{r}\frac{d_{a+1}}{l_a} + \frac{1}{r^2}\frac{d_{a+1}}{l_a} + \ldots \text{ enz.}$$

is niets anders dan de koopsom op den tegenwoordigen leeftijd, d. i. als τ_a het gedisconteerd aantal dooden, λ_a het gedisconteerd aantal levenden voorstelt $\frac{\Sigma \tau_a}{\lambda_a}$.

Het tweede stuk kunnen we herleiden, door op te merken, dat:

$$d_a = l_a - l_{a+1};\ d_{a+1} = l_{a+1} - l_{a+2} \text{ enz.}$$

Dan wordt:

$$m\left\{\frac{d_a}{l_a} + \left(1 + \frac{1}{r}\right)\frac{d_{a+1}}{l_a} + \left(1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2}\right)\frac{d_{a+2}}{l_a} + \text{. . enz.}\right\}$$

$$= m \left\{ \frac{l_a - l_{a+1}}{l_a} + \left(1 + \frac{1}{r}\right) \frac{l_{a+1} - l_{a+2}}{l_a} + \right.$$

$$\left. + \left(1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2}\right) \frac{l_{a+2} - l_{a+3}}{l_a} + \text{. . enz.} \right\}$$

$$= m \left\{ \frac{l_a}{l_a} + \frac{1}{r} \frac{l_{a+1}}{l_a} + \frac{1}{r^2} \frac{l_{a+2}}{l_a} + \text{. . . . . .} \right\}$$

$$= m \frac{\Sigma \lambda_a}{\lambda_a}$$

Substitueerende wordt dientengevolge:

$$x_i = \frac{\Sigma v_a}{\lambda_a} - m \frac{\Sigma \lambda_a}{\lambda_a}$$

hetgeen blijkbaar niets anders is dan de reserve.

3de voorbeeld.

Zij O_i eene verzekering voor eene uitkeering gelijk aan de eenheid bij in leven zijn over n jaren, tegen eene gelijkblijvende jaarpremie ten bedrage van m.

Dan is:

$$p_{i1} = \frac{d_a}{l_a} \qquad a_{i1} = - m$$

$$p_{i1} = \frac{d_{a+1}}{l_a} \qquad a_{i2} = - m \left(1 + \frac{1}{r}\right)$$

. . . . . .

$$p_{in} = \frac{d_{a+n-1}}{l_a} \qquad a_{in} = - m \left(1 + \frac{1}{r} + \text{.....} \frac{1}{r^{n-1}}\right)$$

$$p_{in+1} = \frac{l_{a+n}}{l_a} \qquad a_{in+1} = \frac{1}{r^n}.$$

$$\Sigma p_{ij} = \frac{d_a}{l_a} + \frac{d_{a+1}}{l_a} + \text{.....} \frac{d_{a+n-1}}{l_a} + \frac{l_{a+n}}{l_a} = 1.$$

terwijl weder:

$$x_i = \Sigma a_{ij} p_{ij} = \frac{1}{r^n} \frac{l_{a+n}}{l_a} - m \left\{ \frac{d_a}{l_a} + \left(1 + \frac{1}{r}\right) \frac{d_{a+1}}{l_a} + \text{. . enz.} \right\}$$

$$= \frac{\lambda_{a+n}}{\lambda_a} - m\,\frac{\Sigma\lambda_a - \Sigma\lambda_{a+n}}{\lambda_a}$$

hetgeen weder niets anders is dan de reserve.

4de voorbeeld.

Als vierde voorbeeld willen we een geval behandelen waarbij één persoon twee verschillende contracten heeft gesloten op eigen hoofd.

Zij het eene contract eene tijdelijke verzekering voor uitkeering bij overlijden binnen n jaren tegen een jaarpremie m, het andere eene kapitaalsverzekering voor uitkeering bij in leven zijn over n' jaren, tegen eene jaarpremie m' en is $n' > n$, dan heeft men achtereenvolgens, als de verzekerde bedragen beide gelijk zijn aan de eenheid:

$$p_{i1} = \frac{d_a}{l_a} \qquad a_{i1} = 1 - (m + m')$$

$$p_{i2} = \frac{d_{a+1}}{l_a} \qquad a_{i2} = \frac{1}{r} - (m + m')\left(1 + \frac{1}{r}\right)$$

. . . . . .

$$p_{in} = \frac{d_{a+n-1}}{l_a} \qquad a_{in} = \frac{1}{r^{n-1}} - (m + m')\left(1 + \frac{1}{r} + \ldots + \frac{1}{r^{n-1}}\right)$$

$$p_{in+1} = \frac{d_{a+n}}{l_a} \qquad a_{in+1} = -m'\left(1 + \frac{1}{r} + \ldots\ldots + \frac{1}{r^n}\right)$$

. . . . . .

$$p_{in'} = \frac{l_{a+n'}}{l_a} \qquad a_{in'} = \frac{1}{r^{n'}}.$$

Wederom is:

$$\Sigma p = \frac{d_a}{l_a} + \frac{d_{a+1}}{l_a} + \ldots \frac{d_{a+n}}{l_a} + \ldots \frac{l_{a+n'}}{l_a} = 1.$$

en ziet men gemakkelijk in, dat weder $x_i = \Sigma\, a_{ij}\, p_{ij}$ de reserve is van beide contracten te zamen. We merken hierbij op, dat we ook voor het vervolg meerdere contracten op één hoofd gesloten, zullen beschouwen als één enkele verzekering, hetgeen altijd mogelijk is.

5de voorbeeld.

Zij 0_i een weduwe-pensioen, terwijl de man a de vrouw b jaren oud is, en de premie in eens is betaald.

Het volgende schema geeft dan de kansen die de maatschappij heeft de daarachter geplaatste contante bedragen te moeten uitkeeren:

$$p_{i1} = \frac{d_a}{l_a}\,\frac{d_b}{l_b} \qquad a_{i1} = 0$$

$$p_{i2} = \frac{d_a}{l_a}\,\frac{d_{b+1}}{l_b} \qquad a_{i2} = \frac{1}{r} \qquad p'_{i2} = \frac{d_{a+1}}{l_a}\,\frac{d_{b+1}}{l_b} \qquad a'_{i2} = 0$$

$$p_{i3} = \frac{d_a}{l_a}\,\frac{d_{b+2}}{l_b} \qquad a_{i3} = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{1}{r}\right) \qquad p'_{i3} = \frac{d_{a+1}}{l_a}\,\frac{d_{b+2}}{l_b} \qquad a'_{i3} = \frac{1}{r^2}$$

enz. enz. enz. enz.

Telt men de p's kolomsgewijze op, dan vindt men:

$$\Sigma\, p_{ij} = \frac{d_a}{l_a} + \frac{d_{a+1}}{l_a} + \ldots \text{ enz.} = 1.$$

terwijl elke kans, vermenigvuldigd met de overeenkomstige uitkeering, en deze producten gesommeerd, weder de koopsom op den tegenwoordigen leeftijd aangeeft.

Ofschoon zich uit deze voorbeelden al wel reeds het besluit laat trekken, dat de stelling doorgaat, voor elke wijze van verzekeren is echter het algemeen bewijs niet moeilijk te leveren.

Zijn toch a_{i1}, a_{i2} enz. de contante waarden van eventueele uitkeeringen met kansen p_{i1}, p_{i2} enz., dan kan men vragen, wat de waarschijnlijkheid is, dat de maatschappij één dier bedragen, onverschillig welk, zal uitkeeren. Volgens het beginsel der totale waarschijnlijkheid is die kans gelijk aan $\Sigma\, p_{ij}$.

Nu kan $\Sigma\, p_{ij}$ nooit grooter zijn dan de eenheid, want eene waarschijnlijkheid grooter dan één bestaat niet. Is dan $\Sigma\, p_{ij} < 1$ dan is $1 - \Sigma\, p_{ij}$ blijkbaar de kans, dat de maatschappij niets behoeft uit te keeren. Voegen we dus ook dit bedrag bij de overige dan is steeds $\Sigma\, p_{ij} = 1$.

Van deze stelling zal bij de verdere ontwikkeling van de theorie van Laurent een veelvuldig gebruik worden gemaakt.

§ 4. Het theorema van M. LAURENT (1).

Is eene functie van de veranderlijke $z = x + iy$ holomorph binnen een gebied, begrensd door twee concentrische cirkels met stralen r en r' terwijl $r > r'$, dan is zij ontwikkelbaar naar de geheele positieve en negatieve machten van de veranderlijke, en deze ontwikkeling is convergent binnen dat gebied.

Zij $f(z)$ de gegeven functie, leggen we den oorsprong in het gemeenschappelijk middelpunt der beide cirkels, dan kan volgens CAUCHY de waarde der functie $f(z)$ in eenig punt t binnen het ringvormig gebied, dat door de beide cirkels wordt begrensd, voorgesteld worden door de integraal:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(z)}{z-t} dz$$

in de onderstelling, dat deze integraal genomen wordt over de beide omtrekken der cirkels, en deze daarbij in zoodanige richting worden doorloopen, dat we steeds het ringvormig gebied aan onze linkerhand houden. Stellen we nu door $\int_\varrho$ de integraal voor langs eenen cirkelomtrek met straal ϱ dan is dus:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_r \frac{f(z)}{z-t} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{r'} \frac{f(z)}{z-t} dz$$

welke vergelijking overgaat in:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_r \frac{f(z)}{z-t} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{r'} \frac{f(z)}{z-t} dz$$

wanneer beide cirkels in positieven zin, d. i. tegengesteld aan dien van de wijzers van een uurwerk worden doorloopen.

Merken we nu op dat:

$$\frac{1}{z-t} = \frac{1}{z}\left\{1 + \frac{t}{z} + \frac{t^2}{z^2} + \ldots + \frac{t^n}{z^n} + \frac{\frac{t^{n+1}}{z^{n+1}}}{1-\frac{t}{z}}\right\}$$

(1) M. LAURENT was kapitein der genie, en moet niet verward worden met H. LAURENT, wiens theorie we thans bezig zijn te ontwikkelen.

$$= -\frac{1}{t}\left\{1 + \frac{z}{t} + \frac{z^2}{t^2} + \ldots + \frac{z^{n-1}}{t^{n-1}} + \frac{\frac{z^n}{t^n}}{1 - \frac{z}{t}}\right\}$$

dan wordt:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_r \frac{f(z)}{z}\,dz + \frac{t}{2\pi i}\int_r \frac{f(z)}{z^2}dz + \frac{t^2}{2\pi i}\int_r \frac{f(z)}{z^3}\,dz + \text{enz.}$$

$$+ \frac{t^n}{2\pi i}\int_r \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz + \frac{1}{2\pi i}\int_r \frac{\frac{t^{n+1}}{z^{n+1}}f(z)}{z-t}\,dz$$

$$+ \frac{t^{-1}}{2\pi i}\int_{r'} f(z)\,dz + \frac{t^{-2}}{2\pi i}\int_{r'} z f(z)\,dz + \ldots$$

$$+ \frac{t^{-n}}{2\pi i}\int_{r'} z^{n-1} f(z)\,dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{r'} \frac{\frac{z^n}{t^n} f(z)\,dz}{t-z}$$

Hiermede is het eerste deel van het theorema bewezen. Om aan te toonen, dat beide reeksen convergent zijn voor waarden van t binnen den ring, beschouwen we eerst de reeks van de positieve machten van t. Noemen we de reeks S, de som der $n+1$ eerste termen S_{n+1}, de rest R dan is:

$$R = \frac{1}{2\pi i}\int_r \frac{\frac{t^{n+1}}{z^{n+1}}f(z)}{z-t}\,dz.$$

Is nu M de maximum modulus van $f(z)$ op den cirkel met straal r, en r_1 de modulus van t, dan is

$$\text{mod.}\int_r \frac{\frac{t^{n+1}}{z^{n+1}}f(z)}{z-t}\,dz < \frac{\left(\frac{r_1}{r}\right)^{n+1} M}{r-r_1}\,2\pi r.$$

en wel:

1°. omdat de modulus van elk element van de integraal in de uitdrukking $\frac{\left(\frac{r_1}{r}\right)^{n+1} M}{r-r_1}\,2\pi r$ vervangen is door een grooteren modulus. In den teller toch is de modulus

van $f(z)$ vervangen door de maximum waarde M, terwijl in den noemer in plaats van mod. $(z-t)$ geschreven wordt $r—r_1$, d. i. dus in de plaats van den modulus van een verschil, het verschil der moduli.

2°. omdat we in de plaats van den modulus van de som der elementen van de integraal nemen de som hunner moduli.

Zoolang nu t zich beweegt binnen den ring is altijd $r_1 < r$ en dus:

$$\lim_{n=\infty} \frac{\left(\frac{r_1}{r}\right)^{n+1} M}{r - r_1} 2\pi r = 0.$$

A fortiori is dus ook lim. mod. $R = o$, waarmede is aangetoond, dat deze reeks convergeert. Op geheel analoge wijze bewijst men, dat ook de reeks der negatieve machten van t convergent is, mits men opmerkt, dat dan voor elke waarde van t binnen het ringvormig gebied mod. $z <$ mod. t.

We mogen dus de uitdrukking voor $f(t)$ schrijven in den vorm:

$$f(t) = u_0 + u_1 t + u_2 t^2 + \ldots u_n t^n + \ldots + u_{-1} t^{-1} + u_{-2} t^{-2} + \ldots u_{-n} t^{-n} + \ldots$$

zijnde:

$$u_n = \frac{1}{2\pi i} \int_r \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz \qquad u_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{r'} z^{n-1} f(z) dz.$$

---

§ 5. Bepaling der waarschijnlijkheid, dat eene maatschappij krachtens hare loopende contracten in de toekomst eene uitkeering zal hebben te doen of een bedrag zal hebben te ontvangen, waarvan de contante waarde is A.

a. Zijn 0_1 0_2 .... 0_i .... 0_n de loopende contracten eener maatschappij; zijn a_{i1}, a_{i2} .... a_{ij} .... de contante waarden der bedragen, wier kansen dat zij zullen moeten worden uitgekeerd resp. zijn p_{i1}, p_{i2} .... p_{ij} ....; dan kan men, wanneer men deze bedragen en waarschijnlijkheden evenzoo voor alle verzekeringen opmaakt, vragen naar de waarschijnlijkheid,

dat de maatschappij een bedrag zal hebben uittekeeren of te ontvangen, waarvan de contante waarde is A.

We maken daarbij gebruik van de volgende stelling uit de waarschijnlijkheids-rekening:

Wanneer een evenement E kan plaats hebben door verschillende oorzaken $C_1\ C_2\ \ldots\ C_i\ \ldots$ die elkaar wederkeerig uitsluiten, dan is zijn waarschijnlijkheid:

$$P = \lambda_1 \mu_i + \lambda_2 \mu_2 + \ldots \lambda_i \mu_i \ldots$$

als λ_i voorstelt de waarschijnlijkheid dat E zal plaats hebben als de oorzaak C_i in het spel is, en μ_i de waarschijnlijkheid, dat C_i in het spel is.

In ons geval is het evenement E het feit, dat de contante waarde der eventueele uitkeeringen gelijk is aan A. Elke wijze, waarop men de bedragen a kan combineeren, zoodanig, dat hun algebraische som gelijk is aan A (1), is een oorzaak, waardoor dit evenement kan plaats hebben, en de waarschijnlijkheid, van elk dier oorzaken, is gelijk aan het produkt van die grootheden p, die behooren bij de bedragen a wier combinatie de som A geeft. Is een dier oorzaken in het spel dan heeft E zeker plaats, m. a. w. de grootheden λ zijn in ons geval alle gelijk aan de eenheid.

Het komt er dus op aan het aantal combinatiën te vinden van de grootheden a, wier algebraische som gelijk is aan A, vervolgens de waarschijnlijkheid van elk dier combinatiën te berekenen en deze waarschijnlijkheden bij elkaar op te tellen. Hun som is dan de gevraagde waarschijnlijkheid.

Beschouwen we nu de functie:

$$\begin{aligned} f(z) = {} & (p_{11}\, z^{a_{11}} + p_{12}\, z^{a_{12}} + \ldots\ldots) \times \\ & (p_{21}\, z^{a_{21}} + p_{22}\, z^{a_{22}} + \ldots\ldots) \times \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & (p_{i1}\, z^{a_{i1}} + p_{i2}\, z^{a_{i2}} + \ldots\ldots) \times \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & (p_{n1}\, z^{a_{n1}} + p_{n2}\, z^{a_{n2}} + \ldots\ldots). \end{aligned}$$

(1) Hierbij moet worden opgemerkt dat in elke combinatie geen twee of meer bedragen a mogen voorkomen die op een verzekering betrekking hebben.

dan is blijkbaar de gevraagde waarschijnlijkheid niets anders dan de coefficient van z^A in de ontwikkeling van dit produkt.

Evenzoo is de kans, dat de contante waarde der uitkeeringen zal zijn $-A$, m. a. w. dat de maatschappij een bedrag zal *ontvangen*, waarvan de constante waarde is A, de coefficient van z^{-A} in deze ontwikkeling.

Onderstellen we nu de munteenheid zoo klein gekozen (bv. de cent), dat de grootheden a alle geheele getallen zijn en beschouwen we z als eene complexe veranderlijke, dan is de functie $f(z)$ holomorph binnen een ringvormig gebied, begrensd door twee cirkels met stralen R en r van eindige grootte om den oorsprong als middelpunt beschreven. Volgens het in § 4 bewezen theorema zijn dan de coefficienten van z^A en z^{-A} in de ontwikkeling van $f(z)$ volgens de geheele positieve en negatieve machten der veranderlijke:

$$P_A = \frac{1}{2\pi i}\int_R \frac{f(z)}{z^{A+1}}\,dz, \qquad P_{-A} = \frac{1}{2\pi i}\int_r z^{A-1} f(z)\,dz.$$

b. Bij de integraal welke dient ter bepaling van P_A beweegt z zich langs een cirkelomtrek met straal R en kan derhalve vervangen worden door $Re^{i\vartheta}$. Dientengevolge wordt $dz = iRe^{i\vartheta}\,d\vartheta$ en dus:

$$P_A = \frac{R^{-A}}{2\pi}\int_\alpha^{\alpha+2\pi} \frac{f(Re^{i\vartheta})}{e^{Ai\vartheta}}\,d\vartheta$$

waarin α een willekeurigen hoek voorstelt.

Vervangen we evenzoo in de uitdrukking voor P_{-A}, z door $re^{i\vartheta}$ dan wordt:

$$P_{-A} = \frac{r^A}{2\pi}\int_\alpha^{\alpha+2\pi} e^{Ai\vartheta}\, f(re^{i\vartheta})\,d\vartheta$$

terwijl

$$\begin{aligned} f(Re^{i\vartheta}) = {} & (p_{11} R^{a_{11}} e^{a_{11} i\vartheta} + p_{12} R^{a_{12}} e^{a_{12} i\vartheta} + \ldots) \times \\ & (p_{21} R^{a_{21}} e^{a_{21} i\vartheta} + p_{22} R^{a_{22}} e^{a_{22} i\vartheta} + \ldots) \times \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & (p_{i1} R^{a_{i1}} e^{a_{i1} i\vartheta} + p_{i2} R^{a_{i2}} e^{a_{i2} i\vartheta} + \ldots) \times \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & (p_{n1} R^{a_{n1}} e^{a_{n1} i\vartheta} + p_{n2} R^{a_{n2}} e^{a_{n2} i\vartheta} + \ldots). \end{aligned}$$

$$f(r\,e^{i\vartheta}) = (p_{11}\,r^{a_{11}}\,e^{a_{11}i\vartheta} + p_{12}\,r^{a_{12}}\,e^{a_{12}i\vartheta} + \ldots) \times$$
$$(p_{21}\,r^{a_{21}}\,e^{a_{21}i\vartheta} + p_{22}\,r^{a_{22}}\,e^{a_{22}i\vartheta} + \ldots) \times$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(p_{i1}\,r^{a_{i1}}\,e^{a_{i1}i\vartheta} + p_{i2}\,r^{a_{i2}}\,e^{a_{i2}i\vartheta} + \ldots) \times$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(p_{n1}\,r^{a_{n1}}\,e^{a_{n1}i\vartheta} + p_{n2}\,r^{a_{n2}}\,e^{a_{n2}i\vartheta} + \ldots).$$

Het is met behulp van deze vormen niet moeilijk inte-zien, dat inderdaad P_A en P_{-A} onafhankelijk zijn van de grootte van R en r. $f(R\,e^{i\vartheta})$ geeft toch in hare ontwikkeling alleen termen van den vorm $C\,R^{\pm m}\,e^{\pm m i\vartheta}$, zoodat P^A geschreven kan worden in den vorm:

$$P_A = \frac{R^{-A}}{2\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} \Sigma\,\{C\,R^{\pm m}\,e^{(\pm m - A)i\vartheta}\}\,d\vartheta$$

en evenzoo:

$$P_{-A} = \frac{r^A}{2\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} \Sigma\,\{C'\,r^{\pm m'}\,e^{(\pm m' + A)i\vartheta}\}\,d\vartheta$$

Hierin zijn nu m, m' en A geheele getallen, terwijl C en C' functiën zijn van de grootheden p. Nu is elke integraal waarvan de grenzen 2π uit elkaar liggen over eene geheele macht van $e^{i\vartheta}$ nul, zoodat in de uitdrukking voor P_A alleen die term overblijft, waarvoor $m = +A$, en in die voor P_{-A} de term waarvoor $m' = -A$. Dientengevolge wordt:

$$P_A = \frac{R^{-A}}{2\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} C\,R^A\,d\vartheta = C$$

en

$$P_{-A} = \frac{r^A}{2\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} C'\,r^{-A}\,d\vartheta = C'$$

We zullen hiervan gebruik maken door zoowel R als r gelijk te stellen aan de eenheid. Dan wordt:

$$f(R\,e^{i\vartheta}) = f(r\,e^{i\vartheta})$$

$$= (p_{11}\,e^{a_{11}\,i\,\vartheta} + p_{12}\,e^{a_{12}\,i\,\vartheta} + \ldots) \times$$

$$(p_{21}\,e^{a_{21}\,i\,\vartheta} + p_{22}\,e^{a_{22}\,i\,\vartheta} + \ldots) \times$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(p_{i1}\,e^{a_{i1}\,i\,\vartheta} + p_{i2}\,e^{a_{i2}\,i\,\vartheta} + \ldots) \times$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(p_{n1}\,e^{a_{n1}\,i\,\vartheta} + p_{n2}\,e^{a_{n2}\,i\,\vartheta} + \ldots).$$

Beschouwen we nu van dit produkt den factor:

$$p_{i1}\,e^{a_{i1}\,i\,\vartheta} + p_{i2}\,e^{a_{i2}\,i\,\vartheta} + \ldots$$

en ontwikkelen we hiervan elk der termen volgens de reeks van e^x, dan krijgen we:

$$p_{i1}\,(1 + \frac{a_{i1}\,i\,\vartheta}{1} + \frac{(a_{i1}\,i\,\vartheta)^2}{2!} + \ldots) +$$

$$p_{i2}\,(1 + \frac{a_{i2}\,i\,\vartheta}{1} + \frac{(a_{i2}\,i\,\vartheta)^2}{2!} + \ldots) +$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$p_{ij}\,(1 + \frac{a_{ij}\,i\,\vartheta}{1} + \frac{(a_{ij}\,i\,\vartheta)^2}{2!} + \ldots) +$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$p_{in}\,(1 + \frac{a_{in}\,i\,\vartheta}{1} + \frac{(a_{in}\,i\,\vartheta)^2}{2!} + \ldots).$$

Deze reeksen zijn alle absoluut convergent voor alle waarden van ϑ, en zijn het dus nog, als de termen van elk der reeksen met den overeenkomstigen factor p worden vermenigvuldigd. Bovendien is hun aantal eindig, zoodat het geoorloofd is de overeenkomstige termen bij elkaar optetellen, en de nieuwe reeks:

$$1 + \frac{i\,\vartheta}{1}\,\Sigma\,a_{ij}\,p_{ij} + \frac{(i\,\vartheta)^2}{2!}\,\Sigma\,a^2_{ij}\,p_{ij} + \ldots$$

is wederom absoluut convergent.

Stellen we nu:

$$1 + \frac{i\vartheta}{1} \Sigma\, a_{ij}\, p_{ij} + \frac{(i\vartheta)^2}{2!} \Sigma\, a^2_{ij}\, p_{ij} + \ldots\ldots = 1 + v_i$$

dan wordt dientengevolge:

$$f(e^{i\vartheta}) = (1 + v_1)\,(1 + v_2)\ldots\ldots$$

of

$$\log.\, f(e^{i\vartheta}) = \Sigma \log.\,(1 + v_i).$$

Beschouwen we van deze som den term $\log\,(1 + v_i)$. De uitdrukking, die we gelijk stelden aan $1 + v_i$, is oorspronkelijk ontstaan uit den factor:

$$p_{i1}\, e^{a_{i1} i\vartheta} + p_{i2}\, e^{a_{i2} i\vartheta} + \ldots\ldots$$

waarvoor we kunnen schrijven:

$$\Sigma\, p_{ij}\, cos\, a_{ij}\, \vartheta + i \Sigma\, p_{ij}\, sin\, a_{ij}\, \vartheta.$$

Hieruit volgt:

$$\text{mod. } v_i = \left\{(\Sigma\, p_{ij} cos\, a_{ij}\, \vartheta - 1)^2 + (\Sigma\, p_{ij} sin\, a_{ij}\, \vartheta)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

Het zal nu in het vervolg van dit Hoofdstuk blijken, dat $f(e^{i\vartheta})$ nog slechts merkbare waarden heeft voor waarden van ϑ, die zoo klein zijn, dat we $cos\, a_{ij}\, \vartheta = 1$ mogen stellen en $sin\, a_{ij}\, \vartheta = a_{ij}\, \vartheta$. Dit voorloopig aannemende, wordt

$$\text{mod. } v_i = \Sigma\, p_{ij}\, sin\, a_{ij}\, \vartheta = \vartheta\, \Sigma\, a_{ij}\, p_{ij}$$

welke uitdrukking kleiner is dan 1, zoodat we mogen schrijven:

$$\log.\,(1 + v_i) = v_i - \frac{v_i^2}{2} + \frac{v_i^3}{3} \ldots\ldots$$

We gaan nu gebruik maken van twee stellingen uit de theorie der reeksen, die luiden als volgt:

1°. Zij twee reeksen absoluut convergent, dan is de reeks welke men verkrijgt, door ze met elkaar te vermenigvuldigen, nog absoluut convergent.

2°. Zij: $f(z) = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots\ldots$

een dubbel-reeks, zoodanig dat $u_n = a_{n0} + a_{n1} z + a_{n2} z^2 +$ enz.,

waarvan bekend is, dat zoowel u_n als $\sum_{n=\infty} u_n$ absoluut convergent is voor de waarde der veranderlijke binnen een cirkel, dan is de reeks $f(z)$ dit ook binnen dien cirkel, en mag gerangschikt worden naar de opklimmende machten der veranderlijke z.

Met behulp van deze stellingen leidt men nu gemakkelijk af, dat, daar:

$$v_i = \frac{i\vartheta}{1} \Sigma\, a_{ij}\, p_{ij} + \frac{(i\vartheta)^2}{2!} \Sigma\, a^2_{ij}\, p_{ij} + \ldots \text{enz.}$$

een reeks is, die absoluut convergeert voor alle waarden van ϑ, ook de termen $\frac{v_i^2}{2}$, $\frac{v_i^3}{3}$ enz., zoodanige reeksen zijn, en ten slotte ook de reeks:

$$l\,(1 + v_i) = v_i - \frac{v_i^2}{2} + \frac{v_i^3}{3} \ldots \text{enz.}$$

Substitueeren we dus hierin de waarde van v_i, dan mogen we de nieuwe reeks rangschikken naar de opklimmende machten der veranderlijke ϑ. Doen we zulks, en stellen we: $\Sigma\, a_{ij}\, p_{ij} = x_i$; $\Sigma\, a^2_{ij}\, p_{ij} = z_i$ . . . . . dan vindt men:

$$l\,(1 + v_i) = \frac{i\vartheta}{1} x_i - \frac{\vartheta^2}{2!}(z_i - x_i^2) + \ldots \text{enz.}$$

Doen we evenzoo voor alle termen van $\Sigma \log (1 + v_i)$ dan wordt:

$$\Sigma \log.\,(1 + v_i) = \frac{i\vartheta}{1} \Sigma\, x - \frac{\vartheta^2}{2!} \Sigma\,(z - x^2) + \ldots \text{enz.}$$

Substitueeren we deze waarde in de uitdrukkingen voor P_A en P_{-A} dan wordt:

$$P_A = \frac{1}{2\pi} \int_a^{a+2\pi} d\vartheta\; e^{i\vartheta(\Sigma x - A) - \frac{\vartheta^2}{2}\Sigma(z - x^2) + \ldots \text{enz.}}$$

en

$$P_{-A} = \frac{1}{2\pi} \int_a^{a+2\pi} d\vartheta\; e^{i\vartheta(\Sigma x + A) - \frac{\vartheta^2}{2}\Sigma(z - x^2) + \ldots \text{enz.}}$$

d. De hier gevonden waarden van P_A en P_{-A} zijn nog geheel algemeen. We gaan nu echter over tot het invoeren van eenige bekortingen, waarvan we, om de redeneering niet te veel te behoeven aftebreken, het geoorloofde voorloopig zullen aannemen, om dan later hierop terug te komen

Ten einde het schijnbaar imaginaire deel uit de integralen, waarin P_A en P_{-A} zijn uitgedrukt te verdrijven stellen we $\alpha = -\pi$. Voorts verwaarloozen we in den exponent van e de derde en hoogere machten van ϑ en stellen kortheidshalve $\Sigma\, x = V$ en $\Sigma\,(z - x^2) = \frac{1}{2h^2}$.

Dan wordt:

$$P_A = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} e^{-\frac{\vartheta^2}{4h^2}} \cos(V - A)\,\vartheta\, d\,\vartheta;$$

$$P_{-A} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} e^{-\frac{\vartheta^2}{4h^2}} \cos(V + A)\,\vartheta\, d\,\vartheta.$$

Zooals we straks zullen zien hebben alleen die elementen dezer integralen nog eenige merkbare waarde, waarvoor ϑ weinig van nul verschilt. Daarom kunnen we evengoed de grenzen $+\pi$ en $-\pi$ vervangen door $+\infty$ en $-\infty$, en vinden dan:

$$P_A = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\vartheta^2}{4h^2}} \cos(V - A)\,\vartheta\, d\,\vartheta = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2(V-A)^2}.$$

en

$$P_{-A} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\vartheta^2}{4h^2}} \cos(V + A)\,\vartheta\, d\,\vartheta = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2(V+A)^2}.$$

Hiermede is de waarschijnlijkheid, dat de maatschappij een bedrag zal hebben uittekeeren, waarvan de contante waarde is A, zoomede die, dat zij een bedrag zal ontvangen, waarvan A de contante waarde is, gevonden. Alvorens echter het gebruik te laten zien, dat men van deze formulen maken kan, willen we even terugkomen op de verkortingen welke we ons hebben veroorloofd.

§ 6. *a.* Het verwaarloozen van de derde en hoogere machten van ϑ in den exponent van e.

Stellen we:

$$\begin{aligned} \Pi = {} & (p_{11}\, e^{a_{11} i \vartheta} + p_{12}\, e^{a_{12} i \vartheta} + \ldots\ldots) \times \\ & (p_{21}\, e^{a_{21} i \vartheta} + p_{22}\, e^{a_{22} i \vartheta} + \ldots\ldots) \times \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & (p_{i1}\, e^{a_{i1} i \vartheta} + p_{i2}\, e^{a_{i2} i \vartheta} + \ldots\ldots) \times \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & (p_{n1}\, e^{a_{n1} i \vartheta} + p_{n2}\, e^{a_{n2} i \vartheta} + \ldots\ldots). \end{aligned}$$

dan zien we, dat het produkt Π uit zooveel factoren bestaat, als de maatschappij verzekerden heeft.

Dit aantal is in den regel zeer groot, en kan gewoonlijk op eenige tienduizenden worden geschat (1).

Stellen we nu:

$$\Pi = R\, e^{i \varphi}$$

en

$$p_{i1}\, e^{a_{i1} i \vartheta} + p_{i2}\, e^{a_{i2} i \vartheta} + \ldots = \varrho_i\, e^{i \psi_i}$$

dan is dus:

$$R = \varrho_1\, \varrho_2 \ldots\ldots \varrho_n$$

en

$$\varphi = \psi_1 + \psi_2 + \ldots\ldots \psi_n.$$

Nu is elke modulus $\varrho < 1$ en alleen voor de waarde $\vartheta = 0$ gelijk aan de eenheid. Dit heeft tengevolge dat R dan alleen nog maar een merkbare waarde zal hebben voor zoodanige waarden van ϑ, waarvoor de moduli der factoren nagenoeg gelijk zijn aan de eenheid.

Nu is:

$$\varrho_i \cos \psi_i = \Sigma\, p_{ij} \cos a_{ij} \vartheta \quad \text{en} \quad \varrho_i \sin \psi_i = \Sigma\, p_{ij} \sin a_{ij} \vartheta$$

---

(1) Men vergelijke hiermede bv. de opgaven van het aantal polissen bij eenige Nederlandsche maatschappijen in het jaarboekje voor Levensverzekering 1896.

waaruit volgt:

$$\varrho_i^2 = (\Sigma p_{ij} \cos a_{ij}\ \vartheta)^2 + (\Sigma p_{ij} \sin a_{ij}\ \vartheta)^2$$

$$= \Sigma p_{ij}^2 \cos^2 a_{ij}\ \vartheta + \Sigma p_{ij}^2 \sin^2 a_{ij}\ \vartheta + 2 \Sigma\Sigma p_{ij}\ p_{ik} \cos (a_{ij} - a_{ik})\vartheta$$

$$= \Sigma p_{ij}^2 + 2 \Sigma p_{ij}\ p_{ik} - 4 \Sigma p_{ij}\ p_{ik} \sin^2 \frac{(a_{ij} - a_{ik})\ \vartheta}{2}$$

$$= 1 - 4 \Sigma p_{ij}\ p_{ik} \sin^2 \frac{(a_{ij} - a_{ik})\ \vartheta}{2}$$

of

$$\varrho_i = \left(1 - 4 \Sigma p_{ij}\ p_{ik} \sin^2 \frac{(a_{ij} - a_{ik})\ \vartheta}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Zal nu ϱ_i weinig van de eenheid verschillen dan moet de term:

$$4 \Sigma p_{ij}\ p_{ik} \sin^2 \frac{(a_{ij} - a_{ik})\ \vartheta}{2}$$

een zeer kleine grootheid zijn, zoodat we mogen schrijven:

$$\varrho_i = 1 - 2 \Sigma p_{ij}\ p_{ik} \sin^2 \frac{(a_{ij} - a_{ik})\ \vartheta}{2}$$

Stellen we b.v. het aantal factoren waaruit Π bestaat op 10.000, dan is:

$$\left(\frac{999}{1000}\right)^{10.000} = 0.00004$$

Nemen we dus als minimum waarde voor ϱ_i $\frac{999}{1000}$ dan mag

$$2 \Sigma p_{ij}\ p_{ik} \sin^2 \frac{(a_{ij} - a_{ik})\ \vartheta}{2}$$

hoogstens gelijk zijn aan 0,001. Zij hierin $\sin^2 \frac{(\alpha_{ij} - \alpha_{ik})\ \vartheta}{2}$ eene gemiddelde waarde van de factoren $\sin^2 \frac{(a_{ij} - a_{ik})\ \vartheta}{2}$ dan is:

$$2 \Sigma p_{ij}\ p_{ik} \sin^2 \frac{(a_{ij} - a_{ik})\ \vartheta}{2} = \sin^2 \frac{(\alpha_{ij} - \alpha_{ik})\ \vartheta}{2} \cdot 2 \Sigma p_{ij}\ p_{ik}$$

In de voorbeelden van § 3 hebben we gezien dat de p's

in het algemeen de gedaante hebben van $\frac{d_{a+n}}{l_a}$ en dus continu veranderen. Schrijven we nu:

$$2 \Sigma p_{ij} p_{ik} = 1 - \Sigma p^2_{ij}$$

en stellen we:

$$p = \frac{p_{i1} + p_{i2} + \ldots . p_{in}}{n} = \frac{1}{n}$$

dan is ten naastenbij:

$$n p^2 = \Sigma p^2_{ij} = \frac{1}{n}$$

en is dus $2 \Sigma p_{ij} p_{ik}$ van de orde $\frac{n-1}{n}$. De kleinste waarde die $\frac{n-1}{n}$ hebben kan is $\frac{1}{2}$, zoodat in bovenstaand geval de factoren $sin^2 \frac{(a_{ij} - a_{ik})\vartheta}{2}$ gemiddeld eene waarde hebben van 0,002 en de gemiddelde waarde van $sin \frac{(a_{ij} - a_{ik})\vartheta}{2}$ gelijk is aan 0.045. Bij een sinus van deze waarde mogen we veilig de sinus vervangen door den boog, zoodat:

$$2 \Sigma p_{ij} p_{ik} sin^2 \frac{(a_{ij} - a_{ik})\vartheta}{2} = \Sigma p_{ij} p_{ik} \frac{(a_{ij} - a_{ik})^2 \vartheta^2}{2}.$$

Nu is: $\log. R = \Sigma \log. \varrho_i$

$$= \Sigma \log. \left\{1 - \Sigma p_{ij} p_{ik} \frac{(a_{ij} - a_{ik})^2 \vartheta^2}{2}\right\}$$

Ontwikkelen we elk der termen van de som in het tweede lid volgens de reeks van $l (1 + z)$, terwijl we ons bij de eerste macht van z bepalen, dan wordt:

$$\log. R = - \frac{\vartheta^2}{2} \Sigma \left\{\Sigma p_{ij} p_{ik} (a_{ij} - a_{ik})^2\right\}$$

of

$$R = e^{- \frac{\vartheta^2}{2} \Sigma \left\{\Sigma p_{ij} p_{ik} (a_{ij} - a_{ik})^2\right\}}$$

Het laat zich nu gemakkelijk bewijzen, dat deze uitdrukking dezelfde is als:

$$R = e^{-\frac{\vartheta^2}{2} \Sigma (z - x^2)}$$

Immers is:

$$z - x^2 = \Sigma a^2_{ij} p_{ij} - (\Sigma a_{ij} p_{ij})^2 = (a^2_{i1} p_{i1} + a^2_{i2} p_{i2} + \ldots .) -$$
$$- (a_{i1} p_{i1} + a_{i2} p_{i2} + \ldots .)^2 =$$
$$= a^2_{i1} p_{i1} (1 - p_{i1}) + a^2_{i2} p_{i2} (1 - p_{i2}) + \ldots . - 2 \Sigma a_{ij} a_{ik} p_{ij} p_{ik}$$

of daar $\Sigma p_{ij} = 1$

$$= a^2_{i1} p_{i1} (p_{i2} + p_{i3} + \ldots) + a^2_{i2} p_{i2} (p_{i1} + p_{i3} + \ldots) + \ldots -$$
$$- 2 \Sigma \Sigma a_{ij} a_{ik} p_{ij} p_{ik} =$$
$$= p_{i1} p_{i2} (a^2_{i1} - 2 a_{i1} a_{i2} + a^2_{i2}) + p_{i1} p_{i3} (a^2_{i1} - 2 a_{i1} a_{i3} + a^2_{i3}) + . =$$
$$= \Sigma p_{ij} p_{ik} (a_{ij} - a_{ik})^2.$$

Hiermede is tevens aangetoond, dat de som $\Sigma (z - x^2)$ uitsluitend bestaat uit positieve termen, en dat het dus geoorloofd is haar gelijk te stellen aan $\frac{1}{2h^2}$.

Gaan we thans over tot de bepaling van het argument van Π, dan merken we in de eerste plaats op, dat:

$$\varphi = \Sigma \psi_i$$

terwijl

$$tg\ \psi_i = \frac{\Sigma p_{ij} \sin a_{ij} \vartheta}{\Sigma p_{ij} \cos a_{ij} \vartheta}$$

Daar a_{ij} van dezelfde orde is als $(a_{ij} - a_{ik})$ kunnen we dus ook hier de sinussen in den teller vervangen door de bogen en de cosinussen in den noemer gelijk stellen aan de eenheid.

Dit doende wordt:

$$tg\ \psi_i = \vartheta \Sigma a_{ij} p_{ij}$$

of

$$\psi_i = bg\ (tg\ \vartheta \Sigma a_{ij} p_{ij}) = \vartheta \Sigma a_{ij} p_{ij}$$

terwijl we weder de hoogere machten van ϑ in deze ontwik-

keling kunnen verwaarloozen. Stellen we $\Sigma a_{ij} p_{ij} = x_i$ dan is dus $\psi = \vartheta x_i$ en $\varphi = \vartheta \Sigma x$, en wordt nu:

$$\Pi = e^{i\vartheta \Sigma x - \frac{\vartheta^2}{2} \Sigma (z - x^2)}.$$

b. Uit het voorgaande blijkt, dat, wanneer het aantal verzekerden slechts groot genoeg is, de integralen:

$$P_A = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-\frac{\vartheta^2}{4h^2}} \cos (V - A)\, \vartheta\, d\vartheta,$$

$$\text{en } P_{-A} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-\frac{\vartheta^2}{4h^2}} \cos (V + A)\, \vartheta\, d\vartheta.$$

zeer nauwkeurig de gezochte waarschijnlijkheden voorstellen, en dat, waar slechts zoodanige elementen dezer integralen nog eenige merkbare waarde hebben, waarvoor ϑ slechts weinig van nul verschilt, aan deze nauwkeurigheid niet de minste afbreuk wordt gedaan door de grenzen $-\pi$ en $+\pi$ te vervangen door $-\infty$ en $+\infty$.

c. De beide uitdrukkingen die we op pag. 28 vonden voor P_A en P_{-A} krijgen nu een zeer eenvoudige beteekenis door interpretatie van den vorm $V = \Sigma x$. We zagen reeds bij enkele voorbeelden in § 3, dat $x_i = \Sigma a_{ij} p_{ij}$ niets anders is dan de reserve. Dit blijkt ook uit de volgende redeneering: $\Sigma a_{ij} p_{ij}$ verkrijgt men door elke uitkeering te vermenigvuldigen met haar kans en deze produkten bij elkaar te tellen. Die som stelt dus voor de mathematische hoop van den verzekerde, d. i. den inzet, dien hij, bij gelijk spel zou moeten betalen, wilde hij verzekerd worden op de voorwaarden waarop nu de verzekering loopt.

Het is, dit in aanmerking nemende, nu duidelijk, dat, wanneer met inachtneming van de ontvangsten, de maatschappij in de toekomst een bedrag zal hebben uittekeeren, waarvan de contante waarde grooter is dan V, zij zal verliezen, en daarentegen winnen, wanneer die contante waarde kleiner is dan V.

Vragen we nu:

1°. naar de waarschijnlijkheid, dat zij een bedrag u zal verliezen. Dan is dus $A = V + u$. Substitueeren we deze waarde in de formule voor P_A dan is:

$$P_{V+u} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 u^2}$$

2°. naar de waarschijnlijkheid, dat zij een bedrag u zal winnen. Dan is $A = V - u$ en wordt evenzoo:

$$P_{V-u} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 u^2}.$$

Combineeren we deze twee, door te vragen, wat of de waarschijnlijkheid is, dat zij een bedrag zal hebben uit te keeren, waarvan de contante waarde van hare tegenwoordige reserve een bedrag u afwijkt, en noemen we deze waarschijnlijkheid P_u, dan is:

$$P_u = P_{V+u} + P_{V-u} = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 u^2}.$$

De maatschappij verliest echter ook, wanneer, met het oog op de uitkeeringen die zij zal hebben te doen, de contante waarde van hare toekomstige baten negatief is en wel een bedrag dat in absolute waarde grooter is dan V. De contante waarde van dit verlies is weder u als die der ontvangsten gelijk is aan $-(V + u)$. Door substitutie van deze waarde voor A in de formule voor P_{-A} vinden we weder de waarschijnlijkheid van dit verlies, die dus wordt:

$$P_{(V+u)} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 u^2}.$$

Daarentegen wint zij weder een bedrag u wanneer de contante waarde der toekomstige baten gelijk is aan $-V + u$. Substitueeren we dit in de formule voor P_{-A}, dan wordt weder de waarschijnlijkheid dezer winst:

$$P_{V-u} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 u^2}.$$

Vatten we deze uitkomsten samen, dan leiden we deze gevolgtrekkingen daaruit af:

1°. de gevonden formulen voor P_A en P_{-A} zijn onderling identiek;

2°. is P_u de waarschijnlijkheid, dat de contante waarde der toekomstige uitkeeringen van de tegenwoordige waarde der premie-reserve zal afwijken een bedrag $\pm u$, d. w. z. is P_u de waarschijnlijkheid dat de maatschappij een som zal verliezen of winnen waarvan de contante waarde is u, dan is:

$$P_u = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 u^2}.$$

3°. de kans om te winnen is even groot als de kans om te verliezen;

4°. de meest waarschijnlijke contante waarde der toekomstige uitkeeringen in de reserve zelf.

§ 7. In de praktijk vraagt men naar de waarschijnlijkheid dat de winst of het verlies gelegen zal zijn tusschen bepaalde grenzen b.v. 0 en u. Stellen we deze waarschijnlijkheid voor door $\varphi(u)$, noemen we y de kans, dat dit bedrag inligt tusschen u en $u + du$, dan is volgens het beginsel der totale waarschijnlijkheid de kans dat het inligt tusschen 0 en $u + du$

$$\varphi(u + du) = \varphi(u) + y$$

waaruit volgt:

$$y = \varphi'(u)\, du.$$

Hierin is $\varphi'(u)$ de ordinaat, behoorende bij de abscis u van de waarschijnlijkheidskromme, d. i. P_u. Dientengevolge is:

$$\varphi'(u)\, du = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 u^2}\, du$$

en dus:

$$\varphi(u) = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-h^2 u^2}\, du.$$

Wil men de waarschijnlijkheid, dat er een bedrag waarvan de contante waarde inligt tusschen 0 en u gewonnen zal worden afzonderlijk bepalen, dan vindt men geheel op dezelfde wijze hiervoor $\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_0^u e^{-h^2 u^2} du$ en dezelfde waarde vindt men voor de waarschijnlijkheid, dat er een bedrag verloren zal worden, waarvan de contante waarde tusschen deze grenzen inligt.

§ 8. Alvorens te doen zien welke toepassingen men van deze formule maken kan, willen we nog even terugkeeren tot den vorm, waarvan we zijn uitgegaan, om duidelijk hare algemeenheid in het oog te doen springen.

In de eerste plaats zij dan opgemerkt, dat de bedragen a niets anders voorstelden dan de contante waarden der toekomstige uitkeeringen. Men kent de tijdstippen, waarop men kans heeft zoo'n uitkeering te moeten doen en heeft dus nog slechts de rente te kennen om hunne contante waarde te kunnen berekenen. In de praktijk neemt men nu aan, dat de rentevoet gedurende den loop van de eenmaal gesloten contracten constant blijft. De afleiding van onze formule laat dit geheel in het midden, en noemt a eenvoudig de contante waarden der eventueele uitkeeringen, daargelaten of men een dalende, stijgende dan wel een constante rente-voet aanneemt.

De grootheden p stelden voor de waarschijnlijkheden, dat die bedragen zouden worden uitgekeerd. Neemt men hiervoor de waarden die gegeven worden door de gebezigde sterftetafels, waar dus de p's uitsluitend verondersteld worden functiën te zijn van den leeftijd, dan zijn dat gemiddelde waarden. Had de statistiek intusschen gegevens genoeg, dan zou niets beletten om voor p meer nauwkeurige waarden te nemen.

De redeneering leidde er vervolgens toe om het aantal combinatiën te zoeken der grootheden a, wier algebraïsche som gelijk was aan A, onafhankelijk van de wijze van afsterven, zoodat ook die combinatiën genomen werden, waarbij de sterfte afwijkt van de meest waarschijnlijke, terwijl

als eenige voorwaarde voor het geoorloofd zijn van de gebezigde verwaarloozing, de veronderstelling werd ingevoerd, dat het aantal verzekerde personen groot was, eene voorwaarde, waaraan in de praktijk bijna altijd is voldaan

Eindelijk is stilzwijgend iets aangenomen, dat spoedig zal blijken van zeer veel belang te zijn, doch waarop ik hier reeds de aandacht wil vestigen. Onderstelt men nl. dat de opslag, die op de netto-premiën wordt gelegd, juist voldoende is tot dekking van de administratiekosten, dat voor de p's waarden worden genomen die volmaakt aan de werkelijkheid beantwoorden, dat de rente-voet noch te hoog noch te laag wordt gekozen, dan berekent men in de praktijk de netto-premiën zoodanig, dat verzekerden en maatschappij gelijk spel spelen, m. a. w. zoodanig, dat de inzet van elken verzekerde gelijk is aan zijn mathematische hoop, of nog anders gezegd, de mathematische hoop van den verzekerde gelijk is aan die der maatschappij. Zij nu v_i de reeds bestaande reserve van een contract O_i , dan is deze tevens de mathematische hoop der maatschappij, terwijl die van den verzekerde volgens dit contract is $\Sigma\, a_{ij} p_{ij}$.

Is nu aan bovenstaande voorwaarde voldaan, dan is dus:

$$v_i = x_i$$

en dus voor alle verzekerden:

$$V = \Sigma\, x.$$

Toen we dus $\Sigma\, x$ gelijk stelden aan de reserve, werd stilzwijgend ondersteld, dat tusschen maatschappij en verzekerden volmaakt gelijk spel werd gespeeld. Ook afgezien van den opslag, die dus door de verzekerden in elk geval te veel wordt betaald, kan men wel aannemen, dat de netto-premiën in het algemeen te hoog zijn, een gevolg van de keuze van sterftetafels, die eene voor de maatschappij ongunstige wijze van afsterven aangeven en het geneeskundig onderzoek. Dit heeft ten gevolge, dat de mathematische hoop der verzekerden feitelijk kleiner is dan die der maatschappij, en dus:

$$V > \Sigma\, x$$

als V de gewone premie-reserve is en de grootheden x berekend worden met waarden van p die aan de werkelijkheid zooveel mogelijk nabij komen. Welken invloed dit heeft op de kans op winst of verlies zullen we straks nader onderzoeken. In de eerste plaats willen we ons bezig houden met het geval, dat de maatschappij en verzekerden wel gelijk spel spelen en daarmede in het volgende hoofdstuk een aanvang maken.

HOOFDSTUK II.

§ 1. In het bekende werk „Calcul des Probabilités" van J. BERTRAND, draagt het zesde hoofdstuk den titel van: „La ruine des joueurs". Dit hoofdstuk begint met de woorden:

„Le jeu ruine ceux qui s'y livrent. Il n'y a exception que pour les joueurs, auxquels les conditions acceptées accordent un avantage".

. . . . . .

„Lorsque le jeu est équitable, la ruine tôt ou tard est certaine".

Uit een theoretisch oogpunt is hiermede het doodvonnis over elke maatschappij van levensverzekering geveld.

Het bewijs van bovengenoemde stelling mag ik als bekend veronderstellen. Zoo zij ergens mag worden toegepast, dan is het op die instellingen, wier eenig doel het sluiten van kansovereenkomsten is, en die zich voorstellen dit te doen op den voet van gelijk spel. Hiertoe behooren in de eerste plaats de maatschappijen van levensverzekering, die jaar in jaar uit, duizenden en tienduizenden spelen tegelijk doen. En wanneer de waarheid van bovengenoemde stelling zich bij deze instellingen niet meer openbaart, dan is de eenige reden hiervoor die, welke in het laatst van het vorige hoofdstuk werd genoemd, dat die spelen slechts theoretisch met voor beide partijen gelijke conditiën worden gespeeld, maar dat de maatschappijen inderdaad zorgen: „*que les conditions leurs accordent un avantage*".

„Le fermier des jeux à Monte-Carlo peut accroître sans crainte le nombre des coupes. La menace ne s'adresse qu'aux pontes", zegt BERTRAND. Evenzoo kan elke maatschappij van levensverzekering gerust het aantal van hare verzekerden

zien toenemen, mits zij slechts zorgt en blijft zorgen, dat ten allen tijde haar mathematische hoop grooter is dan die der verzekerden.

Beginnen we echter met het onderzoek, dat die hoop voor beide partijen dezelfde is.

§ 2. We keeren daartoe terug tot onze formule:

$$P = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_o^l e^{-h^2 u^2} du \quad \ldots\ldots (2)$$

die de waarschijnlijkheid voorstelt, dat krachtens den toestand der maatschappij op het oogenblik, de contante waarde der toekomstige uitkeeringen van de reserve zal afwijken een bedrag, dat inligt tusschen 0 en l. Hierin is:

$$h = \frac{1}{\sqrt{2\Sigma(z-x)^2}}.$$

We stellen ons dus voor, dat van af zeker oogenblik de maatschappij al hare contracten laat afloopen, zonder nieuwe meer te sluiten. Dan is P de waarschijnlijkheid op dat oogenblik, dat de contante waarde der toekomstige uitkeeringen van de reserve zal afwijken een bedrag inliggende tusschen 0 en l, m. a. w. de waarschijnlijkheid dat zulk een bedrag verloren of gewonnen zal worden.

De eerste gevolgtrekking, waartoe nu formule (2) terstond leidt is, dat de waarschijnlijkheid, dat de reserve zelf de contante waarde der toekomstige uitkeeringen voorstelt, praktisch als nul mag worden beschouwd, terwijl de kans dat die contante waarde grooter is dan de reserve, d. i. dat er verloren zal worden even groot is als die, dat zij kleiner zal zijn, d. i. dat er gewonnen zal worden.

Eene maatschappij, die het er derhalve op zou willen wagen met de premie-reserve alleen als waarborg op deze wijze de toekomst af te wachten, zou één tegen één de kans loopen van niet ten einde toe aan hare verplichtingen te zullen kunnen voldoen. Is dus het niet aanwezig zijn eener voldoende premie-reserve een bewijs van verregaande onverant-

woordelijkheid, het aanwezig zijn ervan, is evenmin eenigen waarborg, dat ten allen tijde de verplichtingen zullen worden nagekomen.

Substitueeren we in formule (2):

$$h u = t,$$

dan wordt:

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{(h\,l)} e - t^2 \, d\, t.$$

waarvoor men gewoonlijk schrijft:

$$P = \Theta \, (h.l.)$$

Deze uitdrukking voor P doet zien, dat als men l constant denkt, de waarde van P afhankelijk is van de waarde van h; dat naarmate h grooter is, ook de waarschijnlijkheid grooter is, dat de afwijking binnen dezelfde grenzen beperkt blijft.

De volmaakte analogie, die er nu in den vorm der formule voor P bestaat met de formule in de methode der kleinste kwadraten, die de waarschijnlijkheid aangeeft, dat de uitkomst eener waarneming van de meest waarschijnlijke waarde afwijkt een bedrag, inliggende tusschen 0 en l, leidt er nu als van zelf toe voor de maat dezer afwijking dezelfde grootheid in te voeren, die men daarvoor in de methode der kleinste kwadraten bezigt, nl. de middelbare fout.

Het is bekend, dat er tusschen de middelbare fout ε en de grootheid, die in de methode der kleinste kwadraten de modulus van precisie wordt genoemd en analoog is met onze grootheid h, een betrekking bestaat, die wordt uitgedrukt door de vergelijking:

$$\varepsilon = \frac{1}{h\sqrt{2}}.$$

Definieeren we nu evenzoo de middelbare fout eener maatschappij van levensverzekering, die we E zullen noemen door de vergelijking:

$$E = \frac{1}{h\sqrt{2}},$$

dan is:

$$E = \sqrt{\Sigma (z - x^2)}.$$

Doch we gaan nog een stap verder. Zijn x_1, $x_2 \ldots x_n$ eenige *onderling onafhankelijk* waargenomen grootheden; zijn de middelbare fouten dier waarnemingsreeksen ε_1, $\varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n$, dan leert de methode der kleinste kwadraten, dat de middelbare fout ε van hun som is:

$$\varepsilon = \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \ldots \varepsilon_n^2} \qquad = \sqrt{\Sigma \varepsilon^2}.$$

Beschouwt men nu analoog met de grootheden x_1, $x_2 \ldots x_n$ de verschillende verzekeringen O_1, $O_2 \ldots O_n$, en noemen we in verband daarmede:

$$\varepsilon_i^2 = (z_i - x_i^2)$$

de middelbare fout der verzekering O_i, dan is ook de middelbare fout der geheele maatschappij:

$$E = \sqrt{\Sigma \varepsilon^2}.$$

Men houde intusschen daarbij goed in het oog, dat dit niets anders is, dan eene analogie in schrijfwijzen, die de te houden beschouwingen min of meer vergemakkelijkt, maar niet veroorlooft zonder nader bewijs maar allerlei stellingen uit de methode der kleinste kwadraten te gaan toepassen op eene maatschappij van levensverzekering.

§ 3. We willen thans gaan zien welk praktisch nut men van deze middelbare fout E kan trekken voor een maatschappij van levensverzekering. Ik sluit me daarbij geheel aan bij de redeneering van Dr. G. J. D. Mounier in zijne bijdrage over „Risico-reserve" (1), waarbij hij echter gebruik maakt van een middelbare fout, die op eene geheel andere wijze is verkregen en waar we later op terugkomen.

Vragen we nl. naar de waarschijnlijkheid, dat de contante waarde der toekomstige uitkeeringen van de reserve zal afwijken een bedrag, dat inligt tusschen 0 en $5E$. We hebben dan slechts in de formule $P = \Theta\ (h.l.)$ of wat nu

(1) Archief voor de Verz.wetenschap en aanverwante vakken (Dl. I, Afl. 6.)

hetzelfde is $P = \Theta\left(\frac{l}{E\sqrt{2}}\right)$ voor l te substitieeren $5E$ en vervolgens voor het argument $\frac{5}{2}\sqrt{2}$ de waarde van Θ te zoeken in de daarvoor vervaardigde tafels. Men vindt hiervoor 0.999999, hetgeen dus zeggen wil, dat dit de waarschijnlijkheid is, dat de contante waarde der toekomstige uitkeeringen van de reserve zal afwijken een bedrag dat inligt tusschen 0 en $5E$. Praktisch kan deze waarschijnlijkheid gelijk gesteld worden aan de eenheid. De kans, dat deze afwijking positief is, is even groot als de kans dat zij negatief is, zoodat wil de maatschappij gewaarborgd zijn, zoo goed als zeker aan hare verplichtingen te kunnen voldoen, zij behalve hare gewone premie-reserve zal moeten ter zijde leggen eene risico-reserve ten bedrage van $5E$.

Nu kan men terecht vragen: waarom $5E$ en geen $4E$ of $6E$? Dit is intusschen een quaestie van appreciatie, die door geen formulen is uit te maken, en derhalve aan de willekeur van hen, die er over hebben te beslissen moet worden overgelaten

De absolute zekerheid van aan hare verplichtingen steeds te zullen kunnen voldoen zou eene maatschappij eerst hebben, wanneer zij de nominale waarde van alle verzekerde bedragen in kas had. Dit nu is praktisch onmogelijk, zoodat er niets anders overblijft, dan zoo goed mogelijk te zorgen, dat men nimmer in gebreke behoeft te blijven. De premie-reserve alleen is, zooals is aangetoond, daarvoor onvoldoende, zoodat men wel genoodzaakt is tot eene risico-reserve zijne toevlucht te nemen, doch het bedrag hiervan is en blijft afhankelijk van subjectieve opvatting.

Keeren we terug tot de vergelijking $E = \sqrt{\Sigma \varepsilon^2}$, dan zien we dat elk nieuw bijkomend contract de waarde van E vergroot, zoodat dientengevolge ook eene vergrooting der risicoreserve noodzakelijk wordt, wil de maatschappij dezelfde zekerheid houden, dat zij hare verplichtingen zal kunnen nakomen. Zij nu e^2 eene gemiddelde waarde der grootheden ε^2, hun aantal s, dan is dus

$$\Sigma \varepsilon^2 = s\, e^2$$

en dus:

$$E = e \sqrt{s}.$$

De middelbare fout is dus grosso modo evenredig met den vierkants-wortel uit het aantal verzekerden. Is dit laatste dus na eenige jaren b.v. 4maal grooter geworden, dan behoeft gemiddeld de risico-reserve slechts tweemaal grooter te zijn, een uitkomst, die geheel en al parallel loopt met de bekende regel uit de theorie van het spel, welke leert, dat bij gelijk spel en bij eene gelijke waarschijnlijkheid het aantal afwijkingen van het meest waarschijnlijke aantal evenredig is met den vierkantswortel uit het aantal spelen.

Vragen we naar de toename van E door het bijkomen eener enkele verzekering.

Zij de middelbare fout dezer nieuwe verzekering ε_0, dan wordt dientengevolge:

$$E' = \sqrt{\Sigma \varepsilon^2 + \varepsilon_0^2}.$$

Nemen we nu aan, dat ε_0^2 klein is ten opzichte van $\Sigma \varepsilon^2$, hetgeen, zooals we spoedig zien zullen, in het algemeen werkelijk het geval is, en noemen we de aangroeing van E, dE, dan is:

$$dE = \frac{\varepsilon_0^2}{2\sqrt{\Sigma \varepsilon^2}} = \frac{\varepsilon_0^2}{2E}.$$

Deze uitkomst leert, dat de toename voor eene zelfde verzekering omgekeerd evenredig is met E. Is dus bv. na verloop van eenige jaren het aantal verzekerden viermaal grooter geworden en dientengevolge E ongeveer tweemaal, dan is de toename van E en dus ook die van de risico-reserve, tengevolge van het bijkomen eener nieuwe verzekering, tweemaal kleiner dan zij zou geweest zijn indien diezelfde verzekering er nu bij komt. Hierin ligt dus opgesloten, dat naarmate eene maatschappij zich uitbreidt, zij des te gemakkelijker verzekeringen zal kunnen aannemen met een grootere middelbare fout, of anders gezegd met een grooter verzekerd bedrag.

De waarde van E is een minimum wanneer $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \ldots = \varepsilon_n$.

Want: $2\varepsilon_1\varepsilon_2 < \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2$, $2\varepsilon_1\varepsilon_3 < \varepsilon_1^2 + \varepsilon_3^2$ enz.

zoodat:

$$(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots \varepsilon_n)^2 < n\,(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \ldots \varepsilon_n^2)$$

of:

$$\frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots \varepsilon_n)^2}{n} < \Sigma\, \varepsilon^2.$$

Stellen we nu:

$$e = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots \varepsilon_n}{n}$$

dan is dus:

$$n\, e^2 < \Sigma\, \varepsilon^2.$$

Een bijzonder geval hiervan is dat alle verzekerden even oud zijn, gelijktijdig eenzelfde verzekering hebben gesloten, met een zelfde verzekerd bedrag. Men ziet intusschen dat de stelling zelf veel algemeener is.

§ 4. Het is na deze beschouwingen niet moeilijk in te zien, dat, indien werkelijk aan de onderstelling voldaan ware. dat er tusschen maatschappij en verzekerden gelijk spel werd gespeeld, de eerste zou eindigen, hetzij vroeg of laat, met hare betalingen te staken.

Om dit geheel duidelijk te maken zullen we echter in onze tot heden toe gehouden beschouwingen nog eene kleine wijziging brengen. We hebben ons n.l. tot nu toe geplaatst op het standpunt, dat we ons voorstelden, dat de maatschappij hare loopende contracten liet afloopen. Dit is ook het standpunt, dat men inneemt bij de berekening der gewone premiereserve, en we zagen, dat in dat geval de middelbare fout was E. Uit de waarde van E leidt men vervolgens het bedrag der risico-reserve af, die dus in zooverre met de gewone premie-reserve op een lijn staat, dat zij geldt voor den geheelen duur der bestaande contracten.

Men kan echter ook spreken van de reserve voor het eerst volgende jaar, d. i. van dat bedrag, hetwelk de maatschappij in kas moet hebben, om met inachtneming van de in den loop van dat jaar nog te ontvangen premiën de uitkeeringen die in dat jaar zullen moeten worden gedaan, te dekken. Men heeft daarbij intusschen er op te letten, dat men onder

te ontvangen premiën niet verstaat de netto-premiën, zooals zij door de verzekerden worden betaald, want hiervan is in den regel een gedeelte bestemd voor de reserve van volgende jaren, maar de premiën die betaald zouden worden, indien de verzekeringen voor een jaar waren gesloten.

Men kan dan echter ook de vraag stellen, wat de waarschijnlijkheid is, dat de maatschappij in den loop van dat jaar een bedrag zal hebben uit te keeren, waarvan de contante waarde is A, en deze waarschijnlijkheid zou op volmaakt dezelfde wijze kunnen worden gevonden als we deden toen we den geheelen duur der contracten beschouwden.

De zoo gevonden waarschijnlijkheid zou ons ook nu weder geven de kans, dat er gewonnen of verloren zou worden in dat jaar en die kansen zouden weder aan elkaar gelijk zijn. De geheele afleiding blijft geheel hetzelfde. Men heeft slechts voor de grootheden p en a de grootheden te nemen die op dat jaar betrekking hebben.

Zoodoende krijgt men de middelbare fout voor dat jaar en hieruit weder de risico-reserve, eveneens voor dat jaar.

Waar nu de kans om te winnen gelijk is aan die om te verliezen, en beide gelijk zijn aan $^1/_2$, leert de waarschijnlijksrekening, dat, wanneer een groot aantal $(2s)$ jaren gespeeld wordt, de waarschijnlijkheid, dat een der partijen daarvan zal winnen, een aantal jaren inliggend tusschen s en $s + h$, de andere zal verliezen, een aantal inliggend tusschen s en $s + h$ gelijk is aan:

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{h}{\sqrt{s}}} e^{-t^2} dt.$$

Hieruit volgt dat de waarschijnlijkheid, dat een der partijen meer dan $s + h$ jaren zal verliezen gelijk is aan:

$$P = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{h}{\sqrt{s}}} e^{-t^2} dt.$$

De volgende tabel geeft eenige waarden van P wanneer $2s = 1000$ (1).

h.	P.	h.	P.	h.	P.
1	0.475	8	0.307	15	0.172
2	0.450	9	0.285	16	0.156
3	0.425	10	0.264	17	0.142
4	0.400	11	0 244	18	0.129
5	0.377	12	0.225	19	0.115
6	0.353	13	0.206	20	0.103
7	0.330	14	0.188	21	0.093

$h = 37$ $P = 0.01.$

$h = 50$ $P = 0.001.$

Bij eene afwijking h van het meest waarschijnlijke aantal s verliest de eene partij $2h$ jaren meer dan de andere. Men kan nu vragen op hoeveel jaren de waarschijnlijkheid $^1/_2$ is, dat een der partijen minstens $2h$ jaren meer zal winnen dan de andere.

Dit aantal jaren wordt gegeven door de formule:

$$\frac{1}{2} = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{h}{\sqrt{s}}} e^{-t^2} dt.$$

Men vindt dan voor (2):

h =	25	aantal jaren	5493
„ =	50	„ „	21975
„ =	100	„ „	87900
„ =	200	„ „	251603
„ =	300	„ „	791108
„ =	500	„ „	2197522

Deze cijfers toonen aan, dat de maatschappij eindigen moet met geruineerd te worden, tenzij de bron waaruit de verliezen gedekt worden, d. i. de risico-reserve, oneindig groot is. Had men te doen met een jaarlijkschen vasten

---

(1) Deze cijfers zijn ontleend aan het reeds genoemde boek van J. BERTRAND, pag. 114 en 115.

(2) Zie noot boven.

inzet, die gewonnen of verloren kon worden, dan ware de berekening van het aantal jaren, waarna de maatschappij met eene waarschijnlijkheid, die men zoo nabij de eenheid kan doen naderen, als men wil, geruineerd zoude zijn, vrij eenvoudig. Waar intusschen winst en verlies telken jare verschillend kunnen zijn, en het zoo goed als onmogelijk is eene onderstelling te maken, die der waarheid ook maar eenigszins nabij komt, is die berekening ondoenlijk, en willen we liever trachten eene andere vraag te beantwoorden, nl. waar de risico-reserve van moet worden gevormd.

In onze onderstelling, dat maatschappij en verzekerden gelijk spel spelen en dus bij de berekening der netto-premiën hierin voor de risico-reserve geen opslag is gelegd, moet zij òf gevormd worden uit de winst van andere jaren òf door het kapitaal van hen die hun geld disponibel hebben gesteld om de kans te wagen dat zij zullen winnen.

Waar er nu echter nagenoeg evenveel jaren gewonnen als verloren wordt, en er zelfs tijdvakken zullen komen waarin meer jaren verloren dan gewonnen wordt, is de vorming eener risico-reserve uit behaalde winsten een illusie.

Iets anders is het, wanneer personen gezamenlijk een zeker kapitaal bijeenbrengen om dit eventueel te doen strekken om geleden verliezen weder aan te vullen. Hier zijn echter twee dingen tegen. Ten eerste zijn ze hun kapitaal vroeg of laat kwijt, en ten tweede is in de praktijk het bedrag van dit kapitaal steeds constant, terwijl we gezien hebben, dat de risico-reserve grooter wordt naarmate de maatschappij zich uitbreidt. Heeft de risico-reserve eenmaal het bedrag van dit kapitaal overschreden, dan zou men dit laatste òf uit moeten breiden òf van de verdere vorming van risico-reserve afzien.

Doch behalve dit, wie zal zoo dwaas zijn, zijn kapitaal te steken in een zaak, waarin hij het zoo goed als zeker kwijt is. Het bedrag der risico-reserve moet dus ergens anders van daan komen en wel van de verzekerden zelf. Men bereikt dit het eenvoudigst, door een opslag op de netto-premiën, wanneer n.l. onder deze laatste verstaan wordt de premiën die betaald zouden moeten worden om gelijk spel te spelen.

§ 5. Reeds is er met een enkel woord op gewezen, dat de maatschappijen op verschillende wijzen zorg dragen, dat de premiën, die door de verzekerden worden betaald te hoog zijn, in vergelijking met hun mathematische hoop. Dit is ook dan nog het geval, wanneer men afziet van den opslag, welke voor administratie-kosten bestemd is.

De voornaamste oorzaak is, dat men voor de berekening der netto-premiën sterftetafels bezigt, die eene voor de maatschappij ongunstige wijze van afsterven aangeven, terwijl men zich bij personen, waarbij de uitkeering van hun overlijden afhangt, in den regel nog overtuigt, dat zij eene goede gezondheid genieten.

Deze twee omstandigheden bij elkaar genomen zijn dan ook oorzaak, dat de premiën van de verzekeringen, krachtens welke eene uitkeering bij overlijden plaats heeft, veel te hoog zijn en dientengevolge deze contracten een buitengewoon rijke bron van winst opleveren.

Iets anders is het geval, met de verzekeringen, krachtens welke de uitkeering plaats heeft bij in leven zijn op een of ander tijdstip. Wel is waar worden ook hiervoor sterftetafels gekozen, die eene voor de maatschappij ongunstige wijze van afsterven aangeven, d. i. in dit geval eene langzame afsterving, maar de maatschappij kan nu hare candidaten niet uitzoeken, zooals bij de contracten met uitkeering bij overlijden. Integendeel, deze verzekerden zoeken zichzelf uit, en de ervaring schijnt te leeren, dat het eigen oordeel over zijne gezondheidstoestand in den regel niet het minst juiste is. Iemand die zich zwak voelt, koopt geen lijfrente. Dat doet alleen iemand die flink en gezond is, en denkt er lang van te zullen kunnen profiteeren. De verzekeringen voor uitkeering bij in leven zijn, zijn dan ook minder voordeelige contracten.

Om nu den invloed na te gaan, die een gevolg is van een premie, die te groot of te klein is in vergelijking met de mathematische hoop, kunnen we aldus redeneeren :

De maatschappij legt op al hare premiën een zekeren opslag, wiens verhouding tot de premie we door een breuk α zullen aanduiden. Deze opslag dient voor de vorming der risico-reserve, terwijl we zullen aannemen, dat de gekozen

sterftetafels en rente-voet geen voor- of nadeel aan een der partijen aanbieden. Noemen we nu de premiën zonder den opslag *netto-premiën*, en met den opslag α *bruto-premiën;* evenzoo de reserve berekend met netto-premiën V de *netto-reserve*, die berekend met bruto-premiën V' de *bruto-reserve*, dan is blijkbaar $V' = V + \alpha V$.

Hierin is V dus eenvoudig de contante waarde der toekomstige verplichtingen der maatschappij met inachtneming der ontvangsten en αV het bedrag bestemd voor risico-reserve.

Voor de waarschijnlijkheid, dat de maatschappij in de toekomst een bedrag zal uitkeeren, waarvan de contante waarde van V afwijkt een bedrag dat inligt tusschen 0 en l, vinden we nu weder:

$$P = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^l e - h^2 u^2 \, du$$

en

$$h = \frac{1}{\sqrt{2 \Sigma (z - x^2)}}.$$

De grootheden z en x moeten nu berekend worden met netto-premiën, omdat de opslag niet geacht wordt de uitkeeringen te verminderen, maar dient om ter zijde gelegd te worden.

Bovenstaande waarde voor P geeft nu echter niet meer de kans aan, dat er verloren of gewonnen zal worden. Immers er wordt nu eerst verloren, wanneer de contante waarde der toekomstige uitkeeringen grooter is dan $V + \alpha V$. De waarschijnlijkheid hiervan is:

$$P_1 = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{\alpha V}^{\infty} e - h^2 u^2 \, du = \frac{1}{2} \{1 - \Theta (\alpha h V)\}$$

Daarentegen wordt er gewonnen, als de contante waarde der toekomstige uitkeeringen kleiner is dan $V + \alpha V$. Die kans is:

$$P_2 = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{\alpha V}^{\infty} e - h^2 u^2 \, du = \frac{1}{2} \{1 + \Theta (\alpha h V)\}$$

Uit deze waarden voor P_1 en P_2 blijkt nu in de eerste plaats, dat de kans om te winnen grooter is dan die om te verliezen, maar in de tweede plaats stellen ze ons in de gelegenheid de waarde voor α zoodanig te bepalen, dat de maatschappij practisch gesproken de zekerheid heeft van niet te zullen verliezen. In § 3 toch hebben we gezien, dat, wilde eene maatschappij zoo goed als zeker zijn steeds aan hare verplichtingen te zullen kunnen voldoen, daarvoor eene risicoreserve noodig was ten bedrage van $5\,E$

Stellen we dus $\alpha\, V = 5\,E$, en merken we op, dat $h = \frac{1}{E\sqrt{2}}$ dan is dus:

$$\alpha\, h\, V = \frac{5}{2}\sqrt{2}.$$

Dientengevolge wordt:

$$P_1 = \frac{1}{2}\left\{1 - \Theta\left(\frac{5}{2}\sqrt{2}\right)\right\} = 0.0000005$$

en

$$P_2 = \frac{1}{2}\left\{1 + \Theta\left(\frac{5}{2}\sqrt{2}\right)\right\} = 0.9999995$$

waarschijnlijkheden, die men practisch resp. gelijk kan stellen aan nul en één.

Omtrent de waarde $\alpha = \frac{5\,E}{V}$, die hieruit voortvloeit, valt op te merken, dat zij afhankelijk is van de verhouding $\frac{E}{V}$ en dus kleiner wordt, naarmate de maatschappij zich uitbreidt. E toch is, zooals we gezien hebben, evenredig met $\sqrt{s}$ en V evenredig met s, als s het aantal verzekerden voorstelt. Hieruit volgt, dat α omgekeerd evenredig is met $\sqrt{s}$.

§ 6. We willen nu bij enkele verzekeringswijzen laten zien, hoe men de grootheden z en x kan berekenen; hoe men met behulp daarvan de waarde vindt van ε^2 voor elke verzekering afzonderlijk en ten slotte uit de verschillende ε's de middelbare fout E voor de geheele maatschappij.

1ste voorbeeld.

Zij O_i eene levenslange verzekering voor uitkeering bij overlijden:

Is de leeftijd van den verzekerde a, het verzekerd bedrag de eenheid en de verzekering gesloten tegen premie in eens dan is:

$$z = \Sigma\, a_{ij}{}^2\, p_{ij} = \frac{d_a}{l_a} + \left(\frac{1}{r}\right)^2 \frac{d_{a+1}}{l_a} + \left(\frac{1}{r^2}\right)^2 \frac{d_{a+2}}{l_a} + \ldots .$$

$$= \frac{r_a}{\lambda_a} + \frac{1}{r}\,\frac{r_{a+1}}{\lambda_a} + \frac{1}{r^2}\,\frac{r_{a+2}}{\lambda_a} + \ldots .$$

Stellen wij nu: $\frac{r_x}{r^x} = r_{2x}$ en $\frac{\lambda_x}{r^x} = \lambda_{2x}$

dan wordt $$z = \frac{\Sigma\, r_{2a}}{\lambda_{2a}}.$$

De waarde van $x = \Sigma\, a_{ij}\, p_{ij}$ is, zooals reeds is opgemerkt, niets anders dan de reserve op den tegenwoordigen leeftijd en dus gelijk aan $\frac{\Sigma r_a}{\lambda_a}$, zoodat voor deze wijze van verzekering de middelbare fout is:

$$\varepsilon^2 = \frac{\Sigma\, r_{2a}}{\lambda_{2a}} - \left(\frac{\Sigma\, r_a}{\lambda_a}\right)^2$$

een grootheid, die voor elken leeftijd van de sterftetafel gemakkelijk is te berekenen.

2de voorbeeld.

Zij O_i eene lijfrente tot den dood, praenumerando betaalbaar ten bedrage van de eenheid. Is a weder de leeftijd van den verzekerde, dan is:

$$z = \Sigma\, a_{ij}{}^2\, p_{ij} = \frac{d_a}{l_a} + \left(1 + \frac{1}{r}\right)^2 \frac{d_{a+1}}{l_a} + \left(1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2}\right)^2 \frac{d_{a+2}}{l_a} + \text{enz.}$$

Schrijven we:

$$d_a = l_a - l_{a+1};\ d_{a+1} = l_{a+1} - l_{a+2};\ \text{enz.}$$

dan is:

$$z = \frac{1}{l_a}\Big\{(l_a - l_{a+1}) + \Big(1+\frac{1}{r}\Big)^2 (l_{a+1} - l_{a+2}) +$$

$$+ \Big(1+\frac{1}{r}+\frac{1}{r^2}\Big)^2 (l_{a+2} - l_{a+3}) + \ldots \text{ enz.}\Big\}$$

$$= \frac{1}{l_a}\Big\{l_a + \frac{l_{a+1}}{r}\Big(2+\frac{1}{r}\Big) + \frac{l_{a+2}}{r^2}\Big(2+\frac{2}{r}+\frac{1}{r^2}\Big) + \ldots \text{enz.}\Big\}$$

$$= \frac{1}{\lambda_a}\Big[2\Big\{\lambda_a + \lambda_{a+1}\Big(1+\frac{1}{r}\Big) + \lambda_{a+2}\Big(1+\frac{1}{r}+\frac{1}{r^2}\Big) + \ldots.\Big\} -$$

$$- \Big\{\lambda_a + \frac{\lambda_{a+1}}{r} + \frac{\lambda_{a+2}}{r^2} + \ldots\ldots\Big\}\Big]$$

$$= \frac{1}{\lambda_a}\Big[2\Big\{\Sigma\lambda_a + \frac{\Sigma\lambda_{a+1}}{r} + \frac{\Sigma\lambda_{a+2}}{r^2} + \ldots\ldots\ldots\Big\} -$$

$$- \Big\{\lambda_a + \frac{\lambda_{a+1}}{r} + \frac{\lambda_{a+2}}{r^2} + \ldots\ldots\Big\}\Big]$$

Stellen we nu:

$$\frac{\Sigma\lambda_x}{r^x} = A_x$$

en

$$A_x + A_{x+1} + A_{x+2} + \ldots \text{ enz.} = \Sigma A_x$$

dan wordt:

$$z = \frac{2\Sigma A_a - \Sigma\lambda_{2a}}{\lambda_{2a}}$$

x is weder de reserve op den tegenwoordigen leeftijd, d. i. $\frac{\Sigma\lambda_a}{\lambda_a}$, zoodat:

$$z^2 = \frac{2\Sigma A_a - \Sigma\lambda_{2a}}{\lambda_{2a}} - \Big(\frac{\Sigma\lambda_a}{\lambda_a}\Big)^2.$$

3de Voorbeeld.

Zij O_i eene levenslange verzekering voor uitkeering bij overlijden tegen gelijkblijvende jaarpremie. Is het verzekerd bedrag de eenheid, m de premie en a de leeftijd van den verzekerde, dan is:

$$z = \Sigma\, a_{ij}{}^2 p_{ij} = (1-m)^2 \frac{d_a}{l_a} + \left\{\frac{1}{r} - m\left(1+\frac{1}{r}\right)\right\}^2 \frac{d_{a+1}}{l_a} +$$

$$+ \left\{\frac{1}{r^2} - m\left(1+\frac{1}{r}+\frac{1}{r^2}\right)\right\}^2 \frac{d_{a+2}}{l_a} + \text{enz.}$$

$$= \frac{d_a}{l_a} + \left(\frac{1}{r^2}\right)^2 \frac{d_{a+1}}{l_a} + \left(\frac{1}{r^2}\right)^2 \frac{d_{a+2}}{l_a} + \ldots \text{enz.}$$

$$+ m^2 \left\{\frac{d_a}{l_a} + \left(1+\frac{1}{r}\right)^2 \frac{d_{a+1}}{l_a} + \left(1+\frac{1}{r}+\frac{1}{r^2}\right)^2 \frac{d_{a+2}}{l_a} + \text{enz.}\right\}$$

$$- 2m \left\{\frac{d_a}{l_a} + \frac{1}{r}\left(1+\frac{1}{r}\right)\frac{d_{a+1}}{l_a} + \frac{1}{r^2}\left(1+\frac{1}{r}+\frac{1}{r^2}\right)\frac{d_{a+2}}{l_a} + . \text{enz.}\right\}$$

$$= \frac{\Sigma\, r_{2a}}{\lambda_{2a}} + m^2 \frac{2\,\Sigma A_a - \Sigma\, \lambda_{2a}}{\lambda_{2a}} - 2m \left\{\frac{d_a}{l_a} + \frac{1}{r}\left(1+\frac{1}{r}\right)\frac{d_{a+1}}{l_a} + \text{enz.}\right\}$$

Voor den laatsten term kunnen we schrijven:

$$2m \left\{\frac{r_a}{\lambda_a} + \left(1+\frac{1}{r}\right)\frac{r_{a+1}}{\lambda_a} + \left(1+\frac{1}{r}+\frac{1}{r^2}\right)\frac{r_{a+2}}{\lambda_a} + . . \text{enz.}\right\}$$

$$= 2m \left\{\frac{\Sigma\, r_a}{\lambda_a} + \frac{1}{r}\frac{\Sigma\, r_{a+1}}{\lambda_a} + \frac{1}{r^2}\frac{\Sigma\, r_{a+2}}{\lambda_a} + ... \text{enz.}\right\}$$

Stellen we weder:

$$\frac{\Sigma\, r_x}{r^x} = \delta_x$$

en:

$$\delta_x + \delta_{x+1} + \delta_{x+2} + \ldots \text{enz.} = \Sigma\, \delta_x$$

dan wordt deze uitdrukking:

$$= 2\, m\, \frac{\Sigma\, \delta_a}{\lambda_{2a}}.$$

Substitueerende wordt:

$$z = \frac{\Sigma\, r_{2a} - 2\, m\, \Sigma\, \delta_a + m^2\,(2\,\Sigma A_a - \Sigma\, \lambda_{2a})}{\lambda_{2a}}$$

De reserve is:

$$x = \frac{\Sigma\, r_a}{\lambda_a} - m\, \frac{\Sigma\, \lambda_a}{\lambda_a}$$

zoodat:

$$\varepsilon^2 = \frac{\Sigma r_{2a} - 2m\,\Sigma \delta_a + m^2\,(2\,\Sigma A_a - \Sigma \lambda_{2a})}{\lambda_{2a}} - \left(\frac{\Sigma r_a}{\lambda_a} - m\frac{\Sigma \lambda_a}{\lambda_a}\right)^2.$$

4de Voorbeeld.

Zij O_i eene gemengde verzekering voor den duur van n jaren gesloten tegen premiën in eens. Is het verzekerd bedrag weder de eenheid en a de leeftijd, dan is:

$$z = \Sigma\, a^2_{ij}\, p_{ij} = \frac{d_a}{l_a} + \left(\frac{1}{r}\right)^2 \frac{d_{a+1}}{l_a} + \left(\frac{1}{r^2}\right)\frac{d_{a+1}}{l_a} +$$

$$+ \left(\frac{1}{r^{n-1}}\right)^2 \frac{d_{a+n-1}}{l_a} + \left(\frac{1}{r^n}\right)^2 \frac{l_{a+n}}{l_a}$$

$$= \frac{d_a}{l_a} + \left(\frac{1}{r}\right)^2 \frac{d_{a+1}}{l_a} + \left(\frac{1}{r^2}\right)^2 \frac{d_{a+2}}{l_a} + \ldots\ldots \text{enz.}$$

$$- \left(\frac{1}{r^n}\right)^2 \frac{d_{a+n}}{l_a} + \left(\frac{1}{r^{n+1}}\right)^2 \frac{d_{a+n+1}}{l_a} + \ldots \text{enz.}$$

$$+ \left(\frac{1}{r^n}\right)^2 \frac{l_{a+n}}{l_a}$$

$$= \frac{\Sigma r_{2a} - \Sigma r_{2(a+n)} + \lambda_{2(a+n)}}{\lambda_{2a}}.$$

De reserve is:

$$x = \frac{\Sigma r_a - \Sigma r_{a+n} + \lambda_{a+n}}{\lambda_a}$$

zoodat:

$$\varepsilon^2 = \frac{\Sigma r_{2a} - \Sigma r_{2(a+n)} + \lambda_{2(a+n)}}{\lambda_{2a}} + \left(\frac{\Sigma r_a - \Sigma r_{a+n} + \lambda_{a+n}}{\lambda_a}\right)^2.$$

5de Voorbeeld.

Zij O_i eene tijdelijke verzekering voor uitkeering bij overlijden voor den duur van n jaren, gesloten tegen premie in eens, dan is:

$$z = \Sigma\, a_{ij}\, p_{ij} = \frac{d_a}{l_a} + \left(\frac{1}{r}\right)^2 \frac{d_{a+1}}{l_a} + \left(\frac{1}{r^2}\right)^2 \frac{d_{a+2}}{l_a} + \ldots + \left(\frac{1}{r^{n-1}}\right)^2 \frac{d_{a+n-1}}{l_a}$$

welke som zich terstond herleiden laat tot:

$$z = \frac{\Sigma r_{2a} - \Sigma r_{2(a+n)}}{\lambda_{2a}}$$

terwijl:

$$x = \frac{\Sigma\, r_a - \Sigma\, r_{a+n}}{\lambda_a}$$

en dientengevolge:

$$\varepsilon^2 = \frac{\Sigma\, r_{2a} - \Sigma\, r_{2(a+n)}}{\lambda_{2a}} - \left(\frac{\Sigma\, r_a - \Sigma\, r_{a+n}}{\lambda_a}\right)^2.$$

Deze voorbeelden doen zien, dat het berekenen der middelbare fout voor elke verzekering een quaestie is van het samenstellen van eenige tabellen. Heeft men deze eenmaal, dan is de berekening van de middelbare fout der geheele maatschappij en daarmede die van de risico-reserve een werk, dat, wil men het nauwkeurig doen, in omvang gelijk staat met de berekening der gewone premie-reserve.

Voor de praktijk heeft echter die nauwkeurigheid geen zin en zal men het werk belangrijk kunnen vereenvoudigen door op eene geschikte wijze de verzekerden in groepen te verdeelen.

Zijn b.v. O_1, $O_2 \ldots O_k$ alle verzekeringen voor uitkeering bij overlijden tegen premie in eens. Zijn de verzekerde bedragen resp. m_1, $m_2 \ldots m_k$, ε_1, de middelbare fout dezer groep, dan is:

$$\varepsilon_1^2 = m_1^2 (z_1 - x_1^2) + m_2^2 (z_2 - x_2^2) + \ldots m_k^2 (z_k - x_k^2)$$

Zijn de leeftijden der verzekerden resp. $a_1, a_2 \ldots a_k$, dan is:

$$(z_1 - x_1^2) = \frac{\Sigma\, r_{2a_1}}{\lambda_{2a_1}} - \left(\frac{\Sigma\, r_{a_1}}{\lambda_{a_1}}\right)^2$$

$$(z_2 - x_2^2) = \frac{\Sigma\, r_{2a_2}}{\lambda_{2a_2}} - \left(\frac{\Sigma\, r_{a_2}}{\lambda_{a_2}}\right)^2$$

. . . . . .

$$(z_k - x^{k2}) = \frac{\Sigma\, r_{2a_k}}{\lambda_{2a_k}} - \left(\frac{\Sigma\, r_{a_k}}{\lambda_{a_k}}\right)^2.$$

Gaat men nu de waarden van $\frac{\Sigma r_{2a}}{\lambda_{2a}} - \left(\frac{\Sigma r_a}{\lambda_a}\right)^2$ voor de verschillende leeftijden na (zie tabel III), dan ziet men, dat wanneer men geen uitersten neemt, die waarden niet veel

uiteenloopen, zoodat men veilig volstaan kan met een gemiddelde waarde te nemen, desverkiezende zoodanig, dat men zeker is eene te groote waarde voor ε_1 te vinden. Noemen we deze gemiddelde waarde $(z—x^2)$ dan is:

$$\varepsilon_1{}^2 = (z — x^2)\ \Sigma m^2 .$$

Vindt men evenzoo voor andere groepen $\varepsilon^2{}_2$, $\varepsilon_3{}^2$ enz., dan is:

$$E = \sqrt{\Sigma \varepsilon^2} .$$

§ 7. We willen nu een paar numerische voorbeelden behandelen, waarbij we ons echter zullen bepalen tot hoogst eenvoudige gevallen, die niettemin een denkbeeld kunnen geven van de grootte der middelbare fout in het algemeen in verband met den leeftijd en den aard der verzekering.

1ste Voorbeeld.

Eene maatschappij heeft 10.000 verzekerden, alle verzekerd voor eene uitkeering bij overlijden ten bedrage van 1000 tegen premie in eens. De verzekerden hebben alle den leeftijd van 40 jaar.

In de vorige § vonden we voor deze verzekeringswijze:

$$z — x^2 = \frac{\Sigma v_{2a}}{\lambda_{2a}} — \left(\frac{\Sigma v_a}{\lambda_a}\right)^2$$

Op den leeftijd van 40 jaar is de waarde hiervan 0.0459 (1), zoodat:

$$E = \sqrt{10.000\ (1000)^2\ 0.0459} = 21425.$$

Neemt men $5E$ als norm aan voor het bedrag der risico-reserve, dan wordt deze 107125 bij eene netto-premie-reserve van 4.270.000.

Om den opslag α te berekenen, die op de netto-premiën moet zijn gelegd voor de vorming dezer risico-reserve, merken we op dat:

$$\alpha = \frac{5E}{V} = 0.025.$$

(1) Voor de berekening van z en x zie men de tabellen achterin en de daarbij gevoegde verklaring.

We willen nu onderstellen, dat de maatschappij inderdaad dezen opslag aan hare verzekerden heeft in rekening gebracht en hiervan bovengenoemde risico-reserve heeft gevormd en vervolgens nagaan wat er gebeurt als er eene nieuwe verzekering bijkomt.

Zij dit eveneens eene levenslange verzekering voor uitkeering bij overlijden tegen premie in eens, de leeftijd van den verzekerde 40 jaar, doch het verzekerd bedrag niet 1000 maar 10.000, dan wordt nu:

$$E = \sqrt{\{10.000\ (1000)^2 + 10.000^2\}\ 0.0459} = 21532$$

zoodat de toename van E is 107, en dus die van de risico-reserve 535.

Berekent men de toename van E met de formule:

$$dE = \frac{\varepsilon_0^2}{2E}$$

dan vindt men eveneens:

$$dE = \frac{10.000^2\ 0.0459}{42850} = 107.$$

De netto-premie van de nieuw bijgekomen verzekering bedraagt 4270. De opslag voor de risico-reserve à $2^1/_2$ pct. is dus 107 en derhalve niet voldoende om de toename der risico-reserve te dekken. Wil men nu angstvallig vasthouden aan de risico-reserve $5E$, dan zou men nu kunnen vragen bij welk verzekerd bedrag, de opslag nog dekt de toename der risico-reserve. Is dan C de koopsom der nieuwe verzekering, dan wordt dit bedrag bepaald door de vergelijking:

$$\frac{5\ \varepsilon_0^2}{2E} = 0.025\ C.$$

Is x het gezochte verzekerd bedrag, dan is $\varepsilon_0^2 = 0.0459x^2$ en $C = 0.427\ x$, zoodat:

$$\frac{5 \times 0.0459\ x^2}{42850} = 0.025 \times 0.027\ x.$$

waaruit: $$x = 1990.$$

Men ziet hieruit, dat, houdt men zich strikt aan het bedrag van $5\,E$ voor de risico-reserve, men inderdaad zou kunnen spreken van een maximum van verzekerd bedrag. Voor de praktijk heeft dit intusschen geen waarde. Daar zal men verstandig doen, praktisch te redeneeren en praktisch te handelen en zich in geen geval krampachtig aan eene formule vastklemmen. Men neme den opslag wat ruim en bepale het bedrag der risico-reserve, evenals dat der gewone premiereserve op bepaalde tijdstippen en overeenkomstig den toestand der maatschappij op dat oogenblik. Maar dan schrome men ook niet, als beide deze bedragen zijn vastgesteld overeenkomstig de eischen van soliditeit alleen bij uitzondering over te gaan tot herverzekering.

2de Voorbeeld.

Om eenig denkbeeld te krijgen van den invloed van ongelijke verzekerde bedragen, zullen we onderstellen, dat deze als volgt verdeeld zijn:

5000 verzekerden met een verzekerd bedrag van 500.
3000 „ „ „ „ „ „ 1000.
1000 „ „ „ „ „ „ 2000.
1000 „ „ „ „ „ „ 2500.

Het aantal verzekerden en het totaal verzekerd bedrag zijn dus evengroot als in het 1ste voorbeeld. Is de leeftijd van alle verzekerden weder 40 jaar en de premie in eens betaald, dan wordt nu:

$$E = \sqrt{[1000\,\{5.500^2 + 3.1000^2 + 2000^2 + 2500^2\}\,0.0459]} = 25798.$$

Men ziet dat het verschil met de uitkomst in het eerste voorbeeld betrekkelijk gering is.

3de Voorbeeld.

Om den invloed van verschillende leeftijden na te gaan, nemen we weder het geval in voorbeeld 1, met dien verstande dat we ons voorstellen dat er zijn:

2000 verzekerden van 30 jaar.
2000 „ „ 35 „
2000 „ „ 40 „
2000 „ „ 45 „
2000 „ „ 50 „

en vinden dan:

$$E = \sqrt{}\,[\,2000\,\{\,47600 + 46800 + 45900 + 44100 + 41600\,\}\,] = 21260$$

en dus iets minder dan wanneer men voor allen den gemiddelden leeftijd van 40 jaar had gekozen.

4de Voorbeeld.

We nemen weder de maatschappij uit het 2de voorbeeld, doch onderstellen nu, dat alle verzekerden eene gemengde verzekering hebben gesloten tegen premie in eens.

Met behulp der achterin voorkomende tafels vindt men gemakkelijk:

$$\frac{\Sigma\, r_{2a} - \Sigma\, r_{2(a+n)} + \lambda_{2(a+n)}}{\lambda_{2a}} - \left(\frac{\Sigma\, r_a + \Sigma\, r_{a+n} + \lambda_{a+n}}{\lambda_a}\right)^2 = 0.00415$$

en wordt dientengevolge:

$$E = \sqrt{}\,[\,1000\,\{\,5.500^2 + 3.1000^2 + 2000^2 + 2500^2\,\}\,0.00415\,] = 7741.$$

Vergelijkt men deze waarde met die van het 2de voorbeeld, dan ziet men terstond, dat de gemengde verzekering een veel geringer risico oplevert dan de levenslange. Dit is trouwens een bekende zaak. Merkwaardig mag het intusschen genoemd worden, dat er maatschappijen zijn die voor beiden een zelfde maximum van verzekerd bedrag aannemen.

5de Voorbeeld.

We nemen weder dezelfde maatschappij als boven, doch onderstellen nu, dat alle verzekerden hebben gesloten eene verzekering voor uitkeering bij overlijden vóór hun 50ste jaar tegens premie in eens.

We vinden:

$$\frac{\Sigma\, r_{2a} - \Sigma\, r_{2(a+n)}}{\lambda_{2a}} - \left(\frac{\Sigma\, r_a - \Sigma\, r_{a+n}}{\lambda_a}\right)^2 = 0.08978.$$

zoodat:

$$E = \sqrt{}\,[\,1000\,\{\,5.500^2 + 3.1000^2 + 2000^2 + 2500^2\,\}\,0.08978\,] = 36081.$$

In tegenstelling met de gemengde verzekering levert dus deze verzekeringswijze een veel grooter risico op. Ook dit

weten de maatschappijen zeer goed. De opslag op dit tarief is zeer hoog, maar niettegenstaande dat sluiten de maatschappijen liever een gemengde verzekering, waarop de winst veel kleiner is, dan op de tijdelijke verzekering voor uitkeering bij overlijden.

§ 8. De behandelde voorbeelden mogen weinig met de werkelijkheid overeenkomen, zij doen niettemin zien, hoe men met behulp van eenmaal vervaardigde tabellen op betrekkelijk eenvoudige wijze de middelbare fout en daarmede de risicoreserve kan berekenen.

Ik acht hiermede dan ook de groote waarde van LAURENT's theorie uit een praktisch oogpunt genoegzaam aangetoond. Maar in de tweede plaats kan men er uit zien, hoe dringend noodig het is op de netto-premiën eenen opslag te leggen voor de vorming eener risico-reserve en dezen daarvoor dan ook inderdaad te gebruiken. Dit is iets dat niet wordt gedaan en dan ook de oorzaak is, dat er verzekeringen zijn, waarvoor de maatschappijen bang zijn. Nog sterker dan met de tijdelijke verzekering voor uitkeering bij overlijden is dit het geval met de overlevingsrente. Het is bekend, dat er Engelsche maatschappijen zijn, die deze contracten eenvoudig weigeren. Deze vrees zou niet behoeven te bestaan indien door een behoorlijken opslag voor eene voldoende risico-reserve werd gezorgd. Dat die opslag voor de eene verzekeringswijze veel grooter moet zijn dan voor de andere leert de vergelijking $\alpha = \frac{5\,E}{V}$. Voor verzekeringen met groot risico en weinig reserve als de tijdelijke verzekering voor uitkeering bij overlijden, het weduwe-pensioen e. a. is die opslag belangrijk grooter dan bij verzekeringen met groote reserve en weinig risico, als de gemengde verzekering en in mindere mate de levenslange verzekering voor uitkeering bij overlijden.

In de praktijk weet men dit ook wel, en doet dit dan ook, doch vrijwel zonder vasten basis die de verhouding van den opslag voor de verschillende verzekeringswijzen regelt, veel minder vormt men een risico-reserve, die in overeenstemming is met de behoefte. Wel hebben vele maatschappijen behalve

hun gewone premie-reserve nog in den regel een soort van extra-reserve, maar deze heeft dan meestal de strekking om in het geval van uitersten nood te worden aangetast.

De risico-reserve echter is een bedrag, dat op en neer gaat met den voor- of achteruitgang der maatschappij ; dat bij het overlijden van iemand, waardoor eens een bijzonder groote uitkeering noodzakelijk wordt, die uitkeering gedeeltelijk dekt, want door het verdwijnen dier verzekering wordt ook de risico-reserve belangrijk kleiner.

Het zou voorzeker de moeite loonen nog meerdere gevallen te onderzoeken, in verband met het risico van verschillende verzekeringen onder verschillende omstandigheden, als leeftijd, wijze van premie-betaling enz. De beschikbare ruimte laat zulks echter niet toe, waarom ik mij thans wil bepalen met nog een paar algemeene uitkomsten mede te deelen, waarvan men de juistheid gemakkelijk zelf kan controleeren.

De eerste is, dat de middelbare fout eener verzekering grooter is als er een jaarpremie betaald wordt dan wanneer zij gesloten wordt tegen premie in eens. Dit spreekt als van zelf. Toch is het verschil kleiner dan men oppervlakkig zou meenen. Nemen we b.v. de maatschappij in het 1ste voorbeeld van § 7 en onderstelt men dat alle verzekeringen gesloten zijn tegen jaarpremie en thans 10 jaren loopen, dan vindt men voor de waarde van $E \pm 27000$ tegen ruim 21000 bij premie in eens.

Een tweede punt waar ik de aandacht op wensch te vestigen is het volgende. De voorbeelden der vorige § toonen duidelijk genoeg aan, dat het niet aangaat om èn voor de levenslange èn voor de tijdelijke verzekering voor uitkeering bij overlijden en voor de gemengde éénzelfde maximum vast te stellen. Merkwaardig nu is intusschen de wijze waarop sommige maatschappijen hun maximum van rente-verzekering bepalen. Daartoe wordt de rente op, zooals sommige „verslagen" zeggen, *de gebruikelijke wijze* herleid tot kapitaal. Die *gebruikelijke wijze* bestaat hierin, dat men de rente met 10 vermenigvuldigt, onverschillig met welk soort van rente men heeft te doen, of dit is een dadelijk ingaande lijfrente, een uitgestelde, een weduwe-pensioen of wat ook. De inconsequenties, die

men intusschen door deze volmaakt willekeurige verhouding begaat bij herverzekering zijn van dien aard, dat het mij wenschelijk voorkomt die verhouding òf geheel en al te laten varen, aangezien zij toch op geen enkelen grond berust, òf althans rekening te houden met den aard der verzekering.

Om een enkel voorbeeld te geven, deel ik hier mede, dat als in het eerste voorbeeld van § 7 alle verzekeringen dadelijk ingaande lijfrenten waren op 40-jarigen leeftijd gesloten, men alle verzekerde bedragen 20maal kleiner zou moeten maken om ten naastenbij dezelfde middelbare fout voor de geheele maatschappij te vinden.

Voor weduwe- en weezenpensioen zou het getal 20 nog veel te klein zijn, maar 10 deugt in geen geval.

Behalve dus, dat men door het maximum van kapitaalsverzekering door 10 te deelen en dit als maximum van renteverzekering vast te stellen, dit laatste veel te hoog neemt in vergelijking met het eerste, doet zich hier nog de merkwaardige omstandigheid bij voor, dat men veel angstvalliger is met het herverzekeren van kapitaalsverzekering uit te keeren bij overlijden, waarbij men toch de verzekerden eerst na een streng geneeskundig onderzoek aanvaardt en zoodoende de kans op verliezen belangrijk vermindert, dan met het herverzekeren van lijfrenten, waarbij men in het algemeen wel zeggen kan ook met uitgezochte levens te doen te hebben, maar nu uitgezocht in het nadeel der maatschappij.

§ 9. We willen onze beschouwingen over LAURENT'S theorie besluiten met na te gaan welken invloed op de kans van winst of verlies eene verandering van den rente-voet gedurende den loop der contracten hebben kan.

Het spreekt van zelf, dat we ons hierbij ook zullen bepalen tot een zeer eenvoudige hypothese, echter voldoende om ook in dit opzicht de waarde van LAURENT'S theorie te leeren kennen.

Het is duidelijk, dat wanneer de rentevoet gedurende den loop der bestaande contracten stijgt, de contante waarde der bedragen a te groot zijn genomen en daarentegen te klein, wanneer de rente-voet in dien tijd daalt. Onderstellen we nu,

dat de contante waarde van eenig bedrag is $a_{\overline{i}|j}\,(1+\beta)$ zijnde β een kleine breuk positief of negatief, die we gemakshalve voor alle bedragen even groot nemen, dan is derhalve de middelbare fout:

$$E_1 = \sqrt{(1+\beta)^2\,\Sigma(z-x^2)} = (1+\beta)\,E$$

Is dus β positief, d. i. daalt de rentevoet, dan wordt de middelbare fout dientengevolge grooter en omgekeerd. Berekende men nu de reserve met inachtnemen van de verandering van den rente-standaard, dan zou deze moeten zijn:

$$V_1 = (1+\beta)\,V$$

of als $\alpha\,V$ weder is de risico-reserve:

$$V_1' = (1+\beta)\,V' = (1+\beta)\,(V+\alpha\,V)$$
$$= V + \beta\,V + \alpha\,(V+\beta\,V).$$

De waarschijnlijkheid, dat de maatschappij eene uitkeering zal moeten doen, waarvan de contante waarde van $V+\beta\,V$ afwijkt een bedrag dat inligt tusschen 0 en l is nu:

$$P_1 = \frac{2\,h}{\sqrt{\pi}} \int_0^l e^{-h^2\,u^2}\,d\,u$$

waarin nu:

$$h = \frac{1}{\sqrt{2\,(1+\beta)^2\;\Sigma\,(z-x^2)}}.$$

Heeft nu de maatschappij, zooals steeds geschiedt, hare reserve berekend in de onderstelling, dat de rente constant blijft, en dus daarvoor in kas een bedrag V en voor risico-reserve een bedrag αV, dan verliest zij dus als de contante waarde der toekomstige uitkeeringen grooter is dan $V+\alpha V$ Daar nu:

$$(V+\alpha\,V) - (V+\beta\,V) = (\alpha-\beta)\,V$$

zal zij dus verliezen, als de contante waarde der toekomstige uitkeering van $V+\beta\,V$ afwijkt een bedrag in positieven zin, dat grooter is dan $(\alpha-\beta)\,V$.

Die kans is:

$$P_1 = \frac{1}{2}\left\{1 - \Theta(\alpha - \beta)\, h\, V)\right\}$$

en evenzoo de kans dat zij zal winnen:

$$P_2 = \frac{1}{2}\left\{1 + \Theta(\alpha - \beta)\, h\, V)\right\}.$$

Is β positief, daalt dus de rente-standaard, dan ziet men uit deze formulen, dat hierdoor de kans op verlies vergroot wordt en dus die op winst verkleind; is daarentegen β negatief, stijgt dus de rente-standaard, dan heeft juist het omgekeerde plaats.

Stellen we nu het geval, dat men meent met de enkele premie-reserve te kunnen volstaan als waarborg voor het nakomen der verplichtingen, en dat de rentevoet dalende is.

Dan is $\alpha = o$ en β positief en wordt:

$$P_1 = \frac{1}{2}\left\{1 + \Theta(\beta\ h\ V)\right\}$$

en

$$P_2 = \frac{1}{2}\left\{1 - \Theta(\beta\ h\ V)\right\}$$

en dus de kans op verlies veel grooter dan die op winst.

Ik geloof dat hiermede de noodzakelijkheid van de vorming eener voldoende risico-reserve in een tijd als de tegenwoordige, waarin de rente-standaard continu daalt, is aangetoond.

HOOFDSTUK III.

§ 1. Wij gaan thans over tot de theorie van LAURENT over „*het maximum van verzekerd bedrag*", zooals die door hem zelf wordt ontwikkeld (1).

LAURENT begint met afzonderlijk te beschouwen de uitkeeringen die de maatschappij zal hebben te doen en de ontvangsten die zij heeft te verwachten. Zijn nu:

$$a_{i1},\ a_{i2} \ldots \text{ enz.}$$

de contante waarden der uitkeeringen waarvoor de maatschappij kansen:

$$p_{i1},\ p_{i2} \ldots \text{ enz.}$$

heeft, krachtens de verzekering O_i dan leidt hij op de wijze als in Hoofdst. I, § 5 de waarschijnlijkheid af, dat de maatschappij een bedrag zal hebben uit te keeren, waarvan de contante waarde afwijkt van Σx, een bedrag dat inligt tusschen $\pm l$.

Die waarschijnlijkheid is dan:

$$P_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\Sigma(z-x^2)}} \int_{-l}^{+l} e^{-\frac{u^2}{2\Sigma(z-x^2)}} du$$

waarin weder $x_i = \Sigma a_{ij}\, p_{ij}$ en $z = \Sigma a^2{}_{ij}\, p_{ij}$, terwijl nu voor de grootheden a alleen genomen worden de contante waarden der uitkeeringen.

(1) Traité du calcul des Probabilités par H. LAURENT, pag. 247 en Théorie et Pratique des Assurances sur la vie van denzelfden schrijver pag. 116. Dit laatste is blijkbaar van jongeren datum dan het eerste, en zal ik daarom als richtsnoer gebruiken. Op eene kleine wijziging na stemmen beide verhandelingen geheel met elkaar overeen.

Zijn evenzoo:

$$b_{i1},\ b_{i2} \ldots . \text{ enz.}$$

de contante waarden der ontvangsten, waarvoor de maatschappij kansen:

$$q_{i1},\ q_{i2} \ldots . \text{ enz.}$$

heeft, krachtens de verzekering O_i, dan vraagt hij in de tweede plaats, naar de waarschijnlijkheid, dat de maatschappij een bedrag zal ontvangen waarvan de contante waarde van Σy afwijkt een bedrag dat inligt tusschen $\pm\ l$, en vindt voor die waarschijnlijkheid op dezelfde wijze:

$$P_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\,\Sigma(v - y^2)}} \int_{-l}^{+l} e^{-\frac{u^2}{2\,\Sigma(v-y^2)}}\, du$$

waarin $y = \Sigma b_{ij}\, q_{ij}$ en $v = \Sigma b^2_{ij}\, q_{ij}$.

§ 2. De beteekenis dezer formulen zal na het voorafgaande duidelijk zijn. Σx is de som, die men verkrijgt, door de contante waarde van elke uitkeering te vermenigvuldigen met haar kans en deze produkten bij elkaar op te tellen. Zij is dus niets anders dan de mathematische hoop van de verzekerden.

Evenzoo is Σy de som, die men verkrijgt, door elke ontvangst te vermenigvuldigen met haar kans en deze produkten te sommeeren. Deze som is dus de contante waarde der toekomstige baten.

Hieruit volgt dat:

$$\Sigma x - \Sigma y = V$$

als V weder de reserve is.

§ 3 Laurent redeneert nu verder als volgt:

Stellen we:

$$\frac{u}{\sqrt{2\,\Sigma(z - x^2)}} = t$$

dan wordt:

$$P_1 = \Theta\left(\frac{l}{\sqrt{2\Sigma(z-x^2)}}\right)$$

Stellen we evenzoo:

$$\frac{u}{\sqrt{2\Sigma(v-y^2)}} = t$$

dan wordt:

$$P_2 = \Theta\left(\frac{l}{\sqrt{2\Sigma(v-y^2)}}\right).$$

Hij neemt nu aan, dat $P = \Theta(3)$ een waarschijnlijkheid is, die praktisch gelijk gesteld mag worden aan de eenheid. Aangenomen dat dit geoorloofd is, dan volgt daaruit, dat de maatschappij er op rekenen mag, dat de contante waarde van hare uitkeeringen niet grooter zal zijn dan:

$$\Sigma x + 3\sqrt{2\Sigma(z-x^2)}$$

en evenzoo, dat de contante waarde van hare ontvangsten niet kleiner zal zijn dan:

$$\Sigma y - 3\sqrt{2\Sigma(v-y^2)}.$$

Vermindert men nu de kleinste ontvangst met de grootste uitkeering, dan verkrijgt men:

$$\Sigma y - \Sigma x - 3\left\{\sqrt{2\Sigma(v-y^2)} + \sqrt{2\Sigma(z-x^2)}\right\}$$

en dit nu is, zegt LAURENT, de minimum winst, welke de maatschappij kan verwachten. Intusschen kunnen we, wanneer we opmerken dat $\Sigma y - \Sigma x = -V$ voor deze uitdrukking schrijven:

$$-\left\{V + 3\sqrt{2\Sigma(v-y^2)} + 3\sqrt{2\Sigma(z-x^2)}\right\}$$

eene uitdrukking, die altijd negatief is. Het ware daarom wellicht duidelijker geweest, indien LAURENT, in plaats van te spreken van minimum winst, deze uitdrukking had genoemd het maximum verlies. Neemt men in aanmerking, dat

een bedrag V van dit verlies gedekt wordt door de voorhanden zijnde reserve, dan kan dus de maatschappij er op rekenen voor het nakomen van hare verplichtingen een bedrag te kort te komen waarvan de contante waarde hoogstens gelijk is aan:

$$3 \left\{ \sqrt{2\Sigma(v-y^2)} + \sqrt{2\Sigma(z-x^2)} \right\}.$$

Ziedaar een resultaat, dat au fond volmaakt hetzelfde is als waartoe we kwamen in het vorige hoofdstuk, met dit onderscheid alleen, dat bovenstaande uitdrukking ons geeft een maximum waarde voor het bedrag der risico-reserve, die de maatschappij in kas moet hebben, wil zij ten allen tijde gewaarborgd zijn hare verplichtingen ten einde toe te kunnen nakomen. (1)

Tevens moet hier nog bij worden opgemerkt dat LAURENT als norm heeft gekozen de waarde $P = \Theta$ (3), terwijl door mij gekozen is $P = \Theta \left(\frac{5}{2}\sqrt{2}\right)$. Beide waarschijnlijkheden kunnen echter uit een practisch oogpunt van gelijke waarde beschouwd worden.

Voor de numerische berekening der risico-reserve in essentieele gevallen komt mij de formule:

$$3 \left\{ \sqrt{2\Sigma(z-x^2)} + \sqrt{2\Sigma(v-y^2)} \right\}$$

van zeer veel waarde voor, aangezien men hier de ontvangsten en uitgaven gescheiden heeft, waardoor de berekening der grootheden onder het wortelteeken belangrijk vereenvoudigd wordt, terwijl men aan den anderen kant zeker is, dat de op deze wijze gevonden risico-reserve in geen geval te klein is. LAURENT spreekt hier echter over geen risico-reserve, en gaat, in de onderstelling dat:

$$W = \Sigma y - \Sigma x - 3 \left\{ \sqrt{2\Sigma(v-y^2)} + \sqrt{2\Sigma(z-x^2)} \right\}$$

---

(1) Het gelijktijdig doen samenvallen van de minimum ontvangst en de maximum uitkeering is in zooverre onjuist, omdat deze bedragen niet onderling onafhankelijk zijn. LAURENT zegt dit trouwens zelf. Maar het valt niet te ontkennen, dat de op deze wijze verkregen uitkomst een uiterste grens van het verlies aangeeft, terwijl zij het voordeel heeft, dat de berekening er van veel eenvoudiger is, dan wanneer uitkeeringen en ontvangsten worden gecombineerd.

de minimum winst is, hetgeen desnoods kan als men dan deze winst als negatief opvat, aldus voort: Opdat eene nieuwe verzekering O_k niet onvoordeelig zij, mag zij deze winst niet verkleinen en mag dus de aangroeiing van W door het bijkomen dier nieuwe verzekering niet negatief zijn.

Noemen we x_k, y_k, z_k en v_k de grootheden die op deze nieuwe verzekering betrekking hebben, dan is:

$$d\,w = y_k - x_k - 3\left\{\frac{v_k - y_k^2}{\sqrt{2\,\Sigma(v-y^2)}} + \frac{z_k - x_k^2}{\sqrt{2\,\Sigma(z-x^2)}}\right\}$$

als we nl. $v_k - y_k^2$ en $z_k - x_k^2$ als klein beschouwen ten opzichte van $\Sigma(v-y^2)$ en $\Sigma(z-x^2)$.

Deze uitdrukking moet nu grooter of gelijk zijn aan nul of

$$y_k - x_k \geqq 3\left\{\frac{v_k - y_k^2}{\sqrt{2\,\Sigma(v-y^2)}} + \frac{z_k - x_k^2}{\sqrt{2\,\Sigma(z-x^2)}}\right\}$$

Deze uitkomst is weer geheel in overeenstemming met onze beschouwingen in het vorige Hoofdstuk. Het tweede lid dezer vergelijking toch is zooals we weten altijd positief.

Zal derhalve de nieuwe verzekering niet nadeelig zijn, dan moet $y_k - x_k$ positief zijn.

Neemt men nu aan, dat op de premiën geen andere opslag ligt, dan voor dekking van administratiekosten en deze juist daarvoor voldoende is, zoodat y_k en x_k berekend worden met netto-premiën, dan is $y_k - x_k = o$, en is dus de verzekering per se nadeelig.

Ziedaar eene bevestiging van onze uitkomst in het vorige hoofdstuk, dat elke nieuw bijkomende verzekering de middelbare fout der maatschappij vergroot en dus bij eene zelfde waarschijnlijkheid een grooter verlies mogelijk maakt, tenzij in de premiën een opslag is berekend voor de vorming van risico-reserve. Doen we dat hier ook, dan ziet men gemakkelijk in dat $y_k - x_k$ juist is de contante waarde van dien opslag.

Maar ook is:

$$3\left\{\frac{v_k - y_k^2}{\sqrt{2\,\Sigma(v-y^2)}} + \frac{z_k - x_k^2}{\sqrt{2\,\Sigma(z-x^2)}}\right\}$$

niets anders dan de toename der risico-reserve tengevolge van

het bijkomen der nieuwe verzekering, en we zien dus dat deze kan worden aanvaard, als de contante waarde van den opslag voor de risico-reserve bestemd gelijk is aan de toename van deze reserve tengevolge van het bijkomen dier verzekering.

Deze voorwaarde stemt geheel en al overeen met de uitkomsten van het vorige hoofdstuk. Het eenige verschil is, dat men, door de vereenvoudigde wijze van LAURENT zich tevreden stelt met een grens.

Theoretisch gesproken, zou men dus bij elke nieuwe verzekering na moeten gaan, of aan deze voorwaarde is voldaan. Staat dan de opslag voor elk tarief vast, zoodat men daar niet van afwijkt, dan, we zagen het in het vorige Hoofdstuk, zal men inderdaad een grens kunnen aangeven voor het verzekerd bedrag, waarboven men niet mag gaan. Maar men zou, altijd uit een theoretisch oogpunt, ook in elk bijzonder geval den opslag zoo kunnen regelen, dat steeds aan die voorwaarde is voldaan, en dan is er geen maximum van verzekerd bedrag.

De groote vraag is daarom, dunkt mij, ook nu weer: Hoe handelt men in de praktijk? Wanneer men er daar ooit toe zal overgaan op theoretischen grondslag de risico-reserve te berekenen, dan zal men haar evenals de premie-reserve berekenen op bepaalde tijdstippen en haar dan in overeenstemming brengen met den bestaanden toestand op dat oogenblik.

De opslag zal in het algemeen bepaald zijn. Het gevolg hiervan zal zijn, dat bij het toetreden van een nieuwen verzekerde nu eens de contante waarde van den opslag grooter zal zijn dan de toename der risico-reserve, dan eens wat kleiner.

Ik herhaal daarom wat ik in het vorige Hoofdstuk zeide: men neme dien opslag wat ruim, zoodat men er zeker van is dat de noodige risico-reserve er uit kan worden gevormd.

§ 4. Ik wil dit hoofdstuk besluiten met in het kort de bezwaren te bespreken die door CORNEILLE L. LANDRÉ tegen de theorie van LAURENT zijn aangevoerd (1). Zij zijn drie in getal:

1°. de fouten in het samenstellen der formule;

(1) Archief voor Verz.wetenschap. Dl. I, Afl. 1.

2°. het willekeurig aannemen van $P = \Theta(3)$;

3°. staat of valt de theorie van LAURENT volgens LANDRÉ met den opslag.

Wat de fouten betreft in het samenstellen der formule geloof ik in § 3 van Hoofdstuk I voldoende te hebben aangetoond, dat werkelijk Σp_{ij} en Σq_{ij} voor elke verzekeringswijze gelijk zijn aan de eenheid, terwijl m. i. uit de vorige § blijkt, dat LAURENT wel degelijk rekening houdt met de reeds voorhanden zijnde reserve, al moet ik erkennen, dat hij dit niet zeer duidelijk doet uitkomen.

Het aannemen van $P = \Theta(3)$ is inderdaad geheel willekenrig. Maar is de keuze van sterfte-tafels, van rente-voet, opslag en zoovele andere grootheden, waar het welzijn eener maatschappij van afhangt, ook niet altijd aan een zekere willekeur onderworpen; en wordt men bij de keuze daarvan, behalve door overwegingen van theoretischen aard, ook niet geleid door omstandigheden, die dwingen met de praktijk rekening te houden?

Hier althans kan ik het bezwaar niet van inzien. Ik hoop trouwens bij de behandeling van LANDRÉ's eigen theorie aan te toonen, dat hij zelf, hoewel vermomd, zich aan dezelfde willekeur schuldig maakt.

Wat het derde argument betreft, geloof ik thans duidelijk te hebben gemaakt, dat het niet de theorie is, die staat of valt met den opslag, maar de maatschappij, wanneer nl. de waarden van p_{ij} en q_{ij} werkelijk de sterfte- of levenskansen voorstellen en niet zoodanig gekozen worden, dat hunne waarden te hooge netto-premiën geven, waardoor als het ware al een opslag wordt gevormd.

En nu onderstelt LAURENT's theorie, dat de waarschijnlijkheden p en q werkelijk de kansen voorstellen, dat de overeenkomstige bedragen zullen worden uitgekeerd of ontvangen. En is dit het geval, dan is de uitkomst, dat elke verzekering tegen netto-premiën verboden is, volkomen correct.

Het spreekt echter wel van zelf, dat als men voor p en q waarden in gaat voeren, die merkbaar van de werkelijke afwijken, de daardoor verkregen uitkomst niet meer kan worden toegepast, zonder dat hiermede rekening wordt gehouden.

HOOFDSTUK IV.

§ 1. In het „Archief voor de Verzekerings-wetenschap en aanverwante vakken, Dl I, Afl. VI" komt van de hand van Dr. G. J. D. Mounier eene bijdrage voor, getiteld: *„Iets over Risico-reserve"*. De schrijver behandelt daarin twee theoriën over dit hoofdstuk, de eene afkomstig van Dr. C. Bremiker, de andere van Prof Th. Wittstein, beide op het gebied der verzekeringswetenschap welbekende deskundigen.

Na in korte, maar duidelijke trekken de grondslagen van beide theoriën te hebben uiteengezet, gaat Dr. Mounier er toe over om op hunne uitkomsten te baseeren eene theorie over het *„maximum van verzekerd bedrag"*.

Zooals ik reeds in § 3 van Hoofdstuk II heb gezegd, ga ik in de wijze waarop Dr. Mounier met behulp der middelbare fout eener maatschappij tot de conclusie komt, dat er ten slotte geen *maximum van verzekerd bedrag* is, maar, dat eene maatschappij, mits met inachtneming eener behoorlijke risico-reserve, elk bedrag voor eigen rekening mag nemen, geheel mede.

Waar hij echter meent gebruik te mogen maken van de middelbare fouten, verkregen met de theoriën van Wittstein of Bremiker, moet ik met hem van gevoelen verschillen, daar m. i. in de afleiding dier middelbare fouten eenige onjuistheden zijn begaan, die ik in het vervolg van dit hoofdstuk nader hoop aan te toonen.

§ 2. Beginnen we met de theorie van Bremiker. (1)
Bremiker begint met te berekenen hoe oud een verzekerde

(1) Dr. C. Bremiker. Das Risico der Lebensversicherungen.

moet worden, opdat *zijn* uitkeering juist door *zijn* premiën gedekt worden.

Overlijdt de verzekerde dan op een ander tijdstip, dan heeft dit winst of verlies ten gevolge.

Het bedrag dier winst of van dat verlies beschouwt nu BREMIKER als een afwijking of fout.

Een enkel voorbeeld moge dit duidelijk maken.

Stel iemand, oud a jaren, sluit eene dadelijk ingaande, levenslange, praenumerando betaalbare lijfrente, ten bedrage van de eenheid.

Zooals bekend, is de koopsom dier rente $\frac{\Sigma \lambda_a}{\lambda_a}$.

Sterft nu de persoon in het n^{de} jaar na het sluiten dezer verzekering, dan is de contante waarde der uitkeeringen:

$$1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \ldots \frac{1}{r^{n-1}} = \frac{1 - \frac{1}{r^n}}{1 - \frac{1}{r}}$$

Is nu:

$$\frac{\Sigma \lambda_a}{\lambda_a} = \frac{1 - \frac{1}{r^n}}{1 - \frac{1}{r}}$$

dan wordt er dus noch gewonnen, noch verloren, terwijl, wanneer de verzekerde vroeger overlijdt de maatschappij wint, daarentegen verliest, wanneer hij later overlijdt.

„*Nach der Mortalitäts-Tabelle*, zegt nu BREMIKER, *lassen sich nun aber im voraus alle Abweichungen, oder die Gewinne und Verluste berechnen, welche durch das frühere oder spätere Absterben enstehen. Sämmtliche Abweichungen quadrirt, die Summe derselben durch ihre Anzahl dividirt, und die Quadratwurzel davon genommen, ergeben den werth für die mittlere Gefahr oder das Risico für die einzelne Versicherung.*"

Passen we dezen regel op bovenstaand voorbeeld toe, in de onderstelling, dat dezelfde verzekering gesloten wordt door l_a personen, waarvan er achtereenvolgens d_a, d_{a+1} ... enz.

sterven, dan vinden we dus voor de middelbare fout voor eene zoodanige verzekering:

$$E = V\left[\frac{d_a}{l_a}\left(\frac{\Sigma\lambda_a}{\lambda_a} - \frac{1-\frac{1}{r}}{1-\frac{1}{r}}\right)^2 + \frac{d_{a+1}}{l_a}\left(\frac{\Sigma\lambda_a}{\lambda_a} - \frac{1-\frac{1}{r^2}}{1-\frac{1}{r}}\right)^2 + \text{enz.}\right]$$

of:

$$E = \sqrt{\sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{d_{a+i}}{l_a}\left(\frac{\Sigma\lambda_a}{\lambda_a} - \frac{1-\frac{1}{r^{a+i+1}}}{1-\frac{1}{r}}\right)^2}$$

Ziedaar dus zelfs een middelbare fout, in de onderstelling dat sterfte en intrest volmaakt aan de verwachtingen beantwoorden.

Terecht is reeds door Dr. Mounier er op gewezen, dat de theorie van Bremiker fout is. Ik wil echter de gronden, die hij hiervoor aanvoert, nog met enkele vermeerderen, al was het slechts om te doen zien hoe soms de methode der kleinste kwadraten wordt toegepast in gevallen waarin in de verste verte niet is voldaan aan de grondstellingen waarop die methode is gebaseerd.

Die basis is in de eerste plaats de foutenwet:

$$P = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^l e^{-h^2 u^2} du$$

aangevende de waarschijnlijkheid, dat de uitkomst eener waarneming van de meest waarschijnlijke waarde zal afwijken, een bedrag, inliggende tusschen 0 en l.

Zoodra men met afwijkingen te doen heeft, hetgeen zeer goed denkbaar is, wier waarschijnlijkheid niet meer aan deze wet voldoet, mag daarop, althans niet zonder nader bewijs, de methode der kleinste kwadraten worden toegepast. Die wet is gegrondvest op de drie volgende hypothesen:

1°. de waarschijnlijkheid van een fout is kleiner, naarmate de fout zelf grooter is;

2°. de waarschijnlijkheid van een positieve fout is dezelfde als van een even groote negatieve fout;

3°. de meest waarschijnlijke waarde van de uitkomsten eener waarnemingsreeks is het arithmetisch midden der waarnemingen.

Behalve dat nu onder *„fout"* moet verstaan worden eene toevallige afwijking van de meest waarschijnlijke waarde, terwijl daarvoor door BREMIKER vooraf berekende bedragen, met bepaalde gegeven waarschijnlijkheden genomen worden, voldoen zijne afwijkingen letterlijk aan geen enkele dezer drie hypothesen.

Bepalen we ons b.v. bij het voorbeeld van zooeven, dan is de waarschijnlijkheid eener afwijking:

$$\frac{\Sigma \lambda_a}{\lambda_a} - \frac{1 - \frac{1}{r}}{1 - \frac{1}{r}} \text{ gelijk aan } \frac{d_a}{l_a}$$

$$\frac{\Sigma \lambda_a}{\lambda_a} - \frac{1 - \frac{1}{r^2}}{1 - \frac{1}{r}} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \frac{d_{a+1}}{l_a}$$

enz.

en nu is het zeer goed mogelijk dat $\frac{d_{a+1}}{l_a} < \frac{d_a}{l_a}$ en dus de waarschijnlijkheid van een kleinere afwijking kleiner is dan die van een grootere. Aan de eerste hypothese is dus al niet voldaan.

Is:

$$\frac{\Sigma \lambda_a}{\lambda_a} - \frac{1 - \frac{1}{r^{n+m}}}{1 - \frac{1}{r}} = \frac{1 - \frac{1}{r^{n+m'}}}{1 - \frac{1}{r}} - \frac{\Sigma \lambda_a}{\lambda_a}$$

dan zijn de waarschijnlijkheden van deze even groote positieve als negatieve afwijking resp. $\frac{d_{a+n-m-1}}{l_a}$ en $\frac{d_{a+n+m'-1}}{l_a}$, twee verhoudingen, die zeker wel niet aan elkaar gelijk zullen zijn. Ook aan de tweede hypothese is dus niet voldaan.

Evenmin is het arithmetisch midden de meest waarschijnlijke uitkeering.

Wel is $\frac{\Sigma \lambda_a}{\lambda_a}$ de som der contante waarde der uitkeeringen, gedeeld door hun aantal, en dus het arithmetisch midden, maar de waarschijnlijkheid, dat dit inderdaad de contante waarde der uitkeering is, is $\frac{d_{a+n-1}}{l_a}$, als:

$$\frac{\Sigma \lambda_a}{\lambda_a} = \frac{1 - \frac{1}{r^n}}{1 - \frac{1}{r}}.$$

Dat nu $\frac{d_{a+n-1}}{l_a}$ grooter zou zijn dan $\frac{d_a}{l_a}$, $\frac{d_{a+1}}{l_a}$ enz. kan misschien voor een zeer bijzonderen leeftijd wel eens het geval zijn, maar is het in het algemeen zeker niet.

Waar nu aan geen der drie hypothesen, waarop de fouten wel berust is voldaan, is het toch zeer zeker niet geoorloofd deze en hare gevolgen, d. i. de methode der kleinste quadraten, toe te passen alsof dit wel het geval ware.

Maar bovendien ontstaat het „risico" tengevolge van afwijkingen van de sterfte of interest. Indien beide volmaakt aan de onderstelling beantwoorden, en Bremiker neemt aan, dat dit het geval is, dan is er voor de maatschappij geen risico. Desniettegenstaande vindt hij er toch een.

Het zou niet moeielijk zijn tegen deze theorie nog tal van bezwaren te berde te brengen. Het komt me echter voor, dat bovengenoemde reeds zoo overwegend zijn, dat het onnoodig is haar verder te behandelen. Bremiker ontkent in zijne geheele ontwikkeling eenvoudig het bestaan van vaste regels, die elk hunne beteekenis hebben, volgens welke een middelbare fout moet worden berekend.

Hetgeen hij daarvoor vindt is ten slotte niets anders dan de uitkomst van een aantal willekeurig gekozen getallen, die hij quadrateert, vervolgens bij elkaar optelt en hun som door hun aantal deelt. Aan zijne theorie kan niet de minste waarde worden toegekend.

§ 3. *a.* Wittstein (1) gaat bij de berekening van het risico

(1) Das mathematische Risico der Versicherungs-Gesellschaften sowie aller auf dem Spiele des Zufalls beruhenden Institute.

van een geheel ander beginsel uit. Hij maakt gebruik van de stelling, die reeds werd genoemd op pag. 6, dat de waarschijnlijkheid van eene afwijking van het meest waarschijnlijke aantal inliggende tusschen 0 en l is:

$$P = \frac{2}{\sqrt{2\pi s w (1-w)}} \int_0^l e^{-\frac{u^2}{2 s w (1-w)}} du$$

Deze stelling neemt hij de vrijheid toetepassen op een groep van s personen wier gemiddelde sterftekans is w. Deze toepassing is minstens genomen gewaagd, en zooals reeds in Hoofdstuk I, § 1, werd gezegd, wordt er door BERTRAND met nadruk voor gewaarschuwd (1).

Dat die waarschuwing van BERTRAND zeer terecht is, moge uit het volgende blijken.

Wanneer men zegt dat w de kans is voor een a-jarige om in den loop van het eerstvolgende jaar te overlijden, dan is reeds vroeger opgemerkt, dat dit een gemiddelde waarschijnlijkheid is.

De eene categorie van a-jarigen heeft, hetzij door betere of minder gunstige oeconomische omstandigheden een kleinere of grootere sterftekans dan de andere. De som der waarschijnlijkheden voor elk der categoriën gedeeld door hun aantal, is de waarschijnlijkheid, die gegeven wordt door de sterftetafels. Wil men het vergelijken met het trekken van ballen uit een bak, dan zou men b.v. voor de a-jarigen zooveel bakken moeten nemen als er categoriën van menschen zijn, wier sterftekansen onderling gelijk zijn. Elke bak zou dan ballen van tweeëerlei kleur bevatten, maar de verhoudingen dier twee kleuren zouden voor de verschillende bakken verschillen.

Stel nu er zijn n bakken, waarvan de verhoudingen der ballen die de dooden voorstellen tot de totale aantallen resp. zijn: w_1, w_2 en w_n. Denkt men zich nu den inhoud dier n bakken vereenigt in één, dan ziet men terstond in, dat de kans om dan een bal te trekken, die voorstelt een persoon

(1) J. BERTRAND, Calcul des probabilités, Chap. XII.

die binnen het jaar zal overlijden is $w = \frac{\Sigma w}{n}$. Stellen we ons nu voor een groep van $n\,s$ personen van den leeftijd a, gelijkelijk verdeeld over de n categoriën, die boven werden voorgesteld door n bakken met ballen, dan is het meest waarschijnlijk aantal sterfgevallen:

$$s\ (w_1 + w_2 + \ldots - w_n) = n\,s\,w.$$

Hetzelfde aantal verkrijgt men, wanneer men het meest waarschijnlijk aantal der sterfgevallen in eens van de geheele groep berekent, tengevolge van de gelijkheid $w = \frac{\Sigma w}{n}$.

Dit is echter niet meer het geval met de afwijkingen. Zooals bekend, is het vierkant der middelbare afwijking op μ proeven, als p de waarschijnlijkheid van het evenement, en $(1 - p)$ die van het tegengestelde is:

$$\mu\,p\,(1 - p)$$

Noemen we dus de middelbare afwijkingen der verschillende groepen ε_1, ε_2 enz. dan is dus:

$$\varepsilon_1^2 = s\,w_1\,(1 - w_1);\ \varepsilon_2^2 = s\,w_2\,(1 - w_2);\ \text{enz.}$$

Daar de groepen onderling onafhankelijk zijn is het vierkant der middelbare afwijking van het geheel:

$$E_1^2 = s\,[w_1\,(1 - w_1) + w_2\,(1 - w_2) + \ldots w_n\,(1 - w_n)].$$

Daarentegen is het vierkant der middelbare afwijking, als men de groep $n\,s$ als één beschouwt:

$$E_2^2 = n\,s\,w\,(1 - w)$$

Voor het verschil van deze twee uitdrukkingen vindt men gemakkelijk:

$$E_2^2 - E_1^2 = \frac{s}{n}\ \Sigma\ (w_i - w_k)^2$$

Deze uitdrukking is, zooals men ziet, altijd positief en zie hier dus een voorbeeld dat de middelbare afwijking, die men

vindt, door gebruik te maken van de gemiddelde sterftekans grooter is, dan die men verkrijgt bij toepassing van de ware sterftekansen.

Hiermede wordt intusschen door WITTSTEIN geen rekening gehouden en onderstelt hij stilzwijgend, dat het toepassen van de theorie der afwijkingen ook met gebruik maken eener gemiddelde waarschijnlijkheid geoorloofd is. Dientengevolge is volgens hem de middelbare afwijking der sterfgevallen op s personen, met eene gemiddelde kans w om in den loop van het eerst volgende jaar te overlijden: $\sqrt{s\,w\,(1-w)}$.

Moet nu aan elk dier personen bij overlijden een bedrag A worden uitgekeerd, onder welk bedrag verstaan wordt de verzekerde som, verminderd met de reeds voorhanden zijnde reserve en hetgeen nog aan premie ontvangen wordt, dan is dus de middelbare afwijking der uitkeeringen: $A\sqrt{s\,w\,(1-w)}$.

Om over te gaan tot het geval dat de bedragen A verschillend zijn, onderstelt hij dat aan s_1 personen moet worden uitgekeerd een bedrag A_1, aan s_2 een bedrag A_2 enz. Daar deze groepen onderling onafhankelijk zijn, wordt dientengevolge de middelbare afwijking van de geheele groep:

$$\varepsilon_1 = \sqrt{w\,(1-w)}\,\sqrt{A_1^2\,s_1 + A_2^2\,s_2 + \ldots} \text{ enz.}$$

De groepen s_1, s_2, enz. moeten elk op zich zelf nog zoo groot zijn, dat de wet der groote getallen mag worden toe gepast. Maar nu vraag ik bij welke maatschappij is dat het geval? Want het is niet alleen voldoende, dat de verzekerde sommen even groot zijn, maar zooals boven werd gezegd, verstaat WITTSTEIN onder de bedragen A, de uitkeeringen verminderd met den reeds betaalden inzet. Daarvoor is het dus noodig dat de groep s_1 b. v. gelijktijdig dezelfde verzekering heeft gesloten, voor een zelfde bedrag. En wanneer gebeurt het nu, dat zich op een zelfde oogenblik een zoo groote groep van personen, van denzelfden leeftijd, voor een zelfde verzekering en voor een zelfde bedrag aanmeldt, dat men daarop zou mogen toepassen de wet der groote getallen. Men kan gerust zeggen, dat dit nooit gebeurt. En als dit zoo is, dan vervalt hiermede alle praktische waarde van WITTSTEIN'S theorie.

Maar er is meer.

Uit de bekende betrekking, die er bestaat tusschen de middelbare afwijking $\varepsilon = \sqrt{s\,w\,(1-w)}$ en de gemiddelde waarde der positieve afwijkingen $k = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\sqrt{s\,w\,(1-w)}$ eene betrekking, die derhalve wordt uitgedrukt door de vergelijking:

$$k = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}} = 0.39894\ \varepsilon.$$

leidt nu WITTSTEIN uit de middelbare afwijking ε de gemiddelde waarde k der positieve afwijkingen af. Deze gemiddelde waarde der positieve afwijkingen, noemt hij het „*Risico*".

Dit wordt dus in ons voorbeeld van zooeven:

$$R = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{w\,(1-w)}\ \sqrt{A_1^{\,2}\,s_1 + A_2^{\,2}\,s_2 + \ldots \text{enz.}}$$

en dit is volgens WITTSTEIN het bedrag, dat de maatschappij als risico-reserve in kas moet hebben.

Het is niet moeilijk na te gaan, binnen welke grenzen der soliditeit eene maatschappij zich zou bewegen, die zich tevreden stelde met deze risico-reserve.

Stellen we daartoe eenvoudigheidshalve, dat we te doen hebben met één groep van s personen met sterftekans w en aan wie bij overlijden moet worden uitgekeerd een bedrag A. De risico-reserve volgens WITTSTEIN zou dan voor deze groep bedragen:

$$\frac{A}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{s\,w\,(1-w)}.$$

De waarschijnlijkheid dat van de s personen een aantal zal sterven inliggende tusschen $s\,w \pm l$ is:

$$P = \frac{2}{\sqrt{2\,\pi\,s\,w\,(1-w)}}\int_0^l e^{-\frac{u^2}{2\,s\,w\,(1-w)}}\,d\,u$$

$$= \Theta\left(\frac{l}{\sqrt{s\,w\,(1-w)}}\right)$$

Stellen we nu: $l = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\sqrt{s\,w\,(1-w)}$ dan krijgen we de

waarschijnlijkheid, dat het aantal sterfgevallen van het meest waarschijnlijke aantal $s\ w$ zal afwijken een bedrag, dat inligt tusschen 0 en de gemiddelde waarde van de positieve afwijkingen, m. a. w. de waarschijnlijkheid, dat de maatschappij, dank zij bovengenoemde risico-reserve, hare verplichtingen zal kunnen nakomen.

Voeren we de substitutie uit, dan vinden we:

$$P = \Theta\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) = 0.43.$$

waar dus tegenover staat eene waarschijnlijkheid $P = 0.57$ dat de afwijking van het aantal sterfgevallen grooter is dan $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{s\,w\,(1-w)}$.

Deze cijfers zijn voldoende om te doen zien, dat de gelijkstelling van het „*Risico*" van WITTSTEIN aan het bedrag der risico-reserve niet geoorloofd is.

Dr. MOUNIER heeft dan ook in zijne in § 1 van dit Hoofdstuk genoemde verhandeling voor de bepaling der risico-reserve een anderen weg is ingeslagen. Heeft men eenmaal aangetoond, dat de waarschijnlijkheid der afwijkingen welke men beschouwt, de wet:

$$P = \frac{2\,h}{\sqrt{\pi}}\int_0^l e^{-h^2 u^2}\,du$$

volgt en kent men van deze afwijkingen de middelbare afwijking, dan kan men een grens aangeven, die zoo goed als zeker niet zal worden overschreden. Of die grens nu aangegeven wordt door de waarde $P = \Theta(3)$, welke LAURENT kiest, of wel $P = \Theta\left(\frac{5}{2}\sqrt{2}\right)$ welke door mij gebezigd is iets wat voor de praktijk absoluut geen waarde heeft, maar dat zij bepaald zou worden door de waarde $P = \Theta\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)$ is iets, waar zeker wel geen verschil van gevoelen over zal bestaan. (1)

(1) Dr. MOUNIER kiest $P = \Theta\,(5\ M)$ als M de waarschijnlijke afwijking is. $P = \Theta\,(5\ M) = 0.999$.

Hoe dit zij, de conclusie, waar WITTSTEIN in elk geval toe komt is, dat de premie-reserve alleen niet voldoende is, om het nakomen der verplichtingen te waarborgen, maar dat er ook behoort te zijn een risico-reserve en dat die risico-reserve gevormd moet worden uit een opslag op de netto-premiën.

b. We hebben, den gedachtengang van WITTSTEIN volgende, ons tot nu toe bepaald tot het risico voor één jaar. In § 39 van zijne verhandeling gaat hij er nu vervolgens toe over om het risico voor den geheelen duur van de verzekering te berekenen voor een groep van s personen.

De wijze, waarop hij dit doet, willen we duidelijkheidshalve met hetzelfde voorbeeld ophelderen, hetwelk ook door hem wordt uitgewerkt.

Dit voorbeeld is eene postnumerando betaalbare lijfrente ten bedrage van de eenheid, gesloten door een groot aantal s personen.

De contante waarden der achtereenvolgende uitkeeringen zijn als $\frac{1}{r} = \frac{100}{100 + i}$ en i den interest voorstelt:

$$a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{1}{r}, \quad a_3 = \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2}, \text{ enz.}$$

de overeenkomstige waarschijnlijkheden zijn:

$$w_1 = \frac{d_a}{l_a}, \quad w_2 = \frac{d_{a+1}}{l_a}, \quad w_3 = \frac{d_{a+2}}{l_a}.$$

Noemen we de koopsom C, dan is het vierkant der middelbare afwijking der uitkeeringen voor de verschillende jaren afzonderlijk:

voor het 1ste jaar: $\varepsilon_1^2 = C^2 \, s \, w_1 \, (1 - w_1)$

„ „ 2de „ $\varepsilon_2^2 = \left(C - \frac{1}{r}\right)^2 s \, w_2 \, (1 - w_2)$

„ „ 3de „ $\varepsilon_3^2 = \left(C - \frac{1}{r} - \frac{1}{r^2}\right)^2 s \, w_3 \, (1 - w_3)$

enz.

Volgens WITTSTEIN is nu de middelbare afwijking voor den geheelen duur der verzekering:

$$\varepsilon^2 = \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \ldots \text{ enz.}}$$

Dit is intusschen in het geheel niet juist. (1) De stelling $\varepsilon = \sqrt{\Sigma\ \varepsilon^2}$ mag alleen dan worden toegepast, als de afwijkingen, waarvan $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots$. enz. de middelbare waarden zijn, onderling onafhankelijk zijn. Meet men b v. n onderling onafhankelijke hoeken en zijn de middelbare fouten dier afzonderlijke waarnemingsreeksen ε_1, $\varepsilon_2 \ldots$. enz., dan is de middelbare fout van hun som $\varepsilon = \sqrt{\Sigma\ \varepsilon^2}$

Maar in bovenstaand voorbeeld zij die afwijkingen volstrekt niet onderling onafhankelijk, want hun algebraïsche som moet nul zijn.

Dit blijkt terstond als men onderstelt dat het aantal sterfgevallen in de achtereenvolgende jaren bedraagt:

in het 1ste jaar $s\ w_1 + h_1$
„ „ 2de „ $s\ w_2 + h_2$
enz.

Gaat men zoo door tot aan het einde der sterftetafel, dan is het totaal aantal sterfgevallen $s\ \Sigma\ w + \Sigma\ h$.

Maar daar $\Sigma\ w = 1$ is dit aantal $s + \Sigma\ h$, waaruit volgt dat $\Sigma\ h = o$, want meer dan s personen kunnen er natuurlijk niet overlijden.

Dit ziet Wittstein geheel over het hoofd. In zijn wijze van doen ligt de onderstelling opgesloten, dat het mogelijk is dat er elk jaar eene positieve afwijking van het meest waarschijnlijk aantal sterfgevallen kan plaats hebben. Zijne uitkomst wordt dientengevolge, hetgeen uit den aard der zaak volgt, te groot.

Ten gevolge van deze fout, vervalt de toepassing van deze theorie op de berekening van het risico niet alleen voor den geheelen duur der contracten, maar evenzeer voor den duur van twee, drie of meer jaren, want ook dan is de som der afwijkingen steeds gelijk nul en zijn zij dus niet meer onderling onafhankelijk.

§ 4. De vraag blijft over, nu de voornaamste toepassing

(1) Ik werd het eerst op deze fout attent gemaakt door den heer J. H. Peek, Phil. docts. en wiskundige aan het pensioenfonds te 's Gravenhage.

van deze theorie, n.l. de berekening van het risico voor den geheelen duur der loopende contracten, als vervallen kan worden beschouwd, welke waarde zij ten slotte nog heeft.

Mijns inziens vervalt met die toepassing de geheele theorie, voor zoover zij betrekking heeft op maatschappijen van levensverzekering. Het risico voor een enkel jaar toch, is iets, wat voor de praktijk weinig of geen beteekenis heeft, evenmin als de reserve voor één jaar.

Maar behalve dat, berust de berekening van dat risico:

1e op de onderstelling dat het geoorloofd is de theorie der afwijkingen te mogen toepassen in het geval de waarschijnlijkheid slechts eene gemiddelde is.

2e op de in de praktijk nooit vervulde voorwaarde, dat men steeds met groepen te doen heeft, groot genoeg voor de toepassing der formule: $P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_o^l e^{-h^2 u^2} du$

Het eerste is een theoretisch, het tweede een praktisch bezwaar, die geen van beiden gering geschat mogen worden.

De eenige verdienste, die dan ook m. i. van Wittstein's theorie overblijft, is, dat er uit blijkt, dat de maatschappijen verplicht zijn, om, behalve de gewone premie-reserve, te zorgen voor eene risico-reserve. Voor de berekening dezer risico reserve geeft de methode van Wittsein echter geen betrouwbare uitkomsten.

HOOFDSTUK V.

§ 1. In zijn bekend leerboek „*Wiskundige Hoofdstukken voor Levensverzekering*" geeft CORNEILL L. LANDRÉ een derde theorie over het „*Maximum van Verzekerd bedrag*". Na het voorgaande hoofdstuk kan ik volstaan met de quitessence dezer theorie in korte trekken uiteen te zetten.

LANDRÉ begint met op dezelfde wijze als WITTSTEIN, te berekenen de gemiddelde waarde der positieve afwijkingen van de uitkeeringen voor het eerstvolgende jaar.

Hij noemt deze waarde het jaarlijksch mathematisch risico der uitkeeringen.

Het quotient dat hij vervolgens krijgt, door dit jaarlijksch mathematisch risico te deelen door de meest waarschijnlijke uitkeering noemt hij het „relatief-risico".

Een eenvoudig voorbeeld moge dit ophelderen.

Is s een groep personen met sterftekans w, allen verzekerd voor eene uitkeering bij overlijden ten bedrage van A, dan is de meest waarschijnlijke uitkeering:

$$A\,s\,w.$$

De gemiddelde waarde der positieve afwijkingen van het meest waarschijnlijke aantal sterfgevallen $s\,w$ is:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{s\,w\,(1-w)}$$

zoodat het risico der uitkeeringen is:

$$\frac{A}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{s\,w\,(1-w)}$$

Het quotient:

$$\frac{\frac{A}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{s\,w\,(1-w)}}{A\,s\,w}$$

is nu wat LANDRÉ noemt het relarief-risico.

Men ziet gemakkelijk in, dat men, evenals WITTSTEIN dit doet, de berekening uit kan breiden voor meerdere groepen en op deze wijze kan berekenen het jaarlijksch mathematisch-risico der geheele maatschappij, mits men zich bepaalt hetgeen LANDRÉ dan ook doet, tot het risico voor één enkel jaar.

„*Dit mathematisch-risico,* zegt LANDRÉ, *geeft het hoogste bedrag aan, dat de maatschappij gedurende een jaar te hopen heeft als winst, of te vreezen als verlies, door de wijze van afsterven. Er is een zeer groote graad van waarschijnlijkheid, die de zekerheid sterk nadert, dat het winst- of verlies-cijfer kleiner zal zijn.*

Wanneer dus de sterfte op den duur overeenkomt met die volgens de sterftetafel, dan geeft het mathematisch risico aan, het bedrag, dat telken jare uit de premie-ontvangst zou moeten worden afgezonderd, om er de mogelijke verliezen mee te dekken; maar deze risico-reserve zou met elk jaar veranderen, ook in percenten van de premie-ontvangst. Daarom is het onmogelijk, vooruit vast te zetten, hoeveel percenten er op de premiën van een tarief moeten worden gelegd om te voorzien in de afwijkingen der sterfte." (1)

Heeft men voor de geheele maatschappij het mathematisch risico berekend en deelt men dit met in achtneming der reeds bestaande reserve door de meest waarschijnlijke uitkeering, dan verkrijgt men het relatief-risico der maatschappij voor dat jaar.

„*Zal nu,* zegt LANDRÉ, *de toestand eener maatschappij door eene nieuwe verzekering verbeterd worden, dan moet het relatief-risico niet vermeerderen. Ik meende mij bij het relatief-risico voor één jaar te moeten bepalen en dat niet enkel om den eenvoud, maar ook, omdat, al sluit de maatschappij geene enkele*

(1) Wisk. Hoofdstukken voor Levensverzekering, blz. 301.

nieuwe verzekering, het risico en het relatief-risico telken jare veranderen. (1)

Als toepassing geeft hij ten slotte in zijn leerboek het volgende voorbeeld, dat ik de vrijheid neem woordelijk over te nemen.

„Wij willen echter de methode toepassen op verzekering bij overlijden, waarbij elke verzekerde jaarlijks een premie zou betalen overeenkomende met zijn toenemenden leeftijd, en waarbij dus geen reserve zou gevormd worden.

Wij weten wel, dat deze wijze van verzekering zelden voorkomt, maar de onderstelling geeft toch eenig licht.

Het relatief-risico voor de reeds loopende verzekering is nu volgens blz. 87 :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{\Sigma \{ A^2 w (1-w) \}}}{\Sigma A w}$$

Laat nu voor eene nieuwe verzekering ten bedrage van x, de sterftekans gedurende een jaar w' zijn, dan is door dat nieuwe toetreden, het relatief-risico voor dat jaar :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{\Sigma \{ A^2 w (1-w \} + x^2 w' (1-w')}}{\Sigma A w + x w'}$$

Zal nu door de nieuwe verzekering het relatief-risico kleiner worden, dan moet

$$\frac{\sqrt{\Sigma \{ A^2 w (1-w) \} + x^2 w' (1-w')}}{\Sigma A w + x w'} < \frac{\sqrt{\Sigma \{ A^2 w (1-w) \}}}{\Sigma A w}$$

Hieruit volgt:

$$x < \frac{2 \Sigma A w \; \Sigma \{ A^2 w (1-w) \}}{(1-w')) \{ \Sigma A w \}^2 - w \Sigma \{ A^2 w (1-w) \}}$$

Nemen we het zeer eenvoudige geval, dat wij alleen te doen hebben met personen van dezelfde sterftekans, die allen verzekerd zijn voor hetzelfde bedrag.

---

(1) Archief voor Verz. Wetenschap. Dl. I, Afl. 1, blz. 15.

Zij s dat aantal personen en α het bedrag per hoofd, dan gaat bovenstaande formule over in:

$$x < \frac{2\,\alpha\,s\,w \times \alpha^2\,s\,w\,(1-w)}{(1-w)\,\alpha^2\,s^2\,w^2 - w\,\alpha^2\,s\,w\,(1-w)}$$

of $x < \frac{2\,\alpha\,s}{s-1}$ of ook $x < \frac{2\,\alpha}{1-\frac{1}{s}}$

Het aantal verzekerden s is hierbij zeer groot ondersteld, anders heeft de geheele berekening trouwens geen zin. Stellen wij daarom $\frac{1}{s} = o$, *zoo heeft men* $x < 2\,\alpha$. *Bij gelijke sterftekans en hetzelfde bedrag per hoofd, kan men zonder het relatief-risico te verhoogen, een verzekering sluiten met dezelfde sterftekans en het dubbel bedrag.*

Wil men een zeer uitvoerig gecijfer vermijden bij de practische verzekeringswijzen, zoo is uit het vorige wel aan te nemen, dat, zelfs als er dooreen genomen geen winst te wachten is door de wijze van afsterven, het dubbel van het gemiddeld verzekerd bedrag per hoofd, een zeer veilig maximum is."

§ 2. Er bestaan m. i. tegen deze theorie ernstige bezwaren, welke ik hier puntsgewijze wil trachten uiteen te zetten.

1°. Het toepassen van de theorie der afwijkingen, ingeval men slechts te doen heeft met eene gemiddelde sterftekans; het feit, dat men in de praktijk nooit te doen heeft met groepen groot genoeg om deze theorie te kunnen gebruiken, besprak ik reeds in het vorige Hoofdstuk, en kan ik derhalve nu met stilzwijgen voorbijgaan.

2°. Ook heb ik, bij de behandeling van Wittstein's theorie doen zien, dat het beweren van Landré als zou het jaarlijksch mathematisch-risico het hoogste bedrag aangeven, dat de maatschappij gedurende een jaar te hopen heeft als winst of te vreezen als verlies door de wijze van afsterven, minder juist is, en dat er evenmin een zeer groote graad van waarschijnlijkheid is, die de zekerheid sterk nadert, dat het winst-

of verliescijfer kleiner zal zijn. Integendeel, er is meer waarschijnlijkheid, dat het grooter zal zijn.

En waar nu dit jaarlijksch mathematisch-risico als risico-reserve te klein moet worden geacht, rijst als van zelf de vraag hoe groot deze dan zal moeten worden genomen.

Nog eens, de absolute zekerheid van hare verplichtingen te kunnen nakomen heeft eene maatschappij eerst wanneer zij de nominale waarde der verzekerde bedragen in kas heeft, en daar dit praktisch onmogelijk is, blijft er niets anders over dan er zoo goed mogelijk voor te zorgen. Maar dat geschiedt niet door het jaarlijksch mathematisch-risico als risico-reserve ter zijde te leggen, maar eenige malen het bedrag daarvan. Hoevele malen, ik ben het met LANDRÉ geheel eens, is een kwestie van willekeur, maar het antwoord op deze vraag ligt in zijn eigene redeneering opgesloten. Men zorge een groote graad van waarschijnlijkheid te krijgen, die de zekerheid zeer nabij komt, dat het winst- of verliescijfer kleiner zal zijn.

3°. Als maat voor den meer of min gunstigen toestand der maatschappij neemt LANDRÉ nu aan het relatief-risico voor één jaar. Au fond kan tegen deze definitie geen bezwaar bestaan, mits men in het oog houde, dat het niets bewijst voor het nakomen der verplichtingen.

Die waarborg wordt alleen gegeven door het bedrag der risico-reserve.

Is van eene maatschappij A het relatief-risico kleiner dan dat van eene maatschappij B, dan wil dit alleen zeggen, dat, als van beiden de meest waarschijnlijke uirkeering b.v. V is, A volstaan kan met eene kleinere risico-reserve dan B.

Maar heeft B wel een behoorlijke risico-reserve en A niet, dan is, met het oog op het nakomen der verplichtingen, de toestand van B veel gunstiger te noemen dan die van A, al is het relatief-risico van B grooter dan dat van A.

Intusschen kan men terecht vragen, waarom het relatief risico voor één jaar, en waarom niet dat voor twee jaren, of wat toch zeer zeker veel meer voor de hand zou liggen, dat voor den geheelen duur der contracten?

Hier blijkt eenvoudig weer uit, dat het vraagstuk van het

maximum van verzekerd bedrag is een onbepaald vraagstuk, en dat, wil men er absoluut een hebben, er nog een voorwaarde moet worden ingevoerd.

Welnu, LANDRÉ kiest als voorwaarde het kleiner worden van het relatief-risico, en hij heeft daar volkomen het recht toe, maar hetzelfde recht heeft LAURENT in het kiezen van $\nu = 3$. De eene voorwaarde is even willekeurig als de andere, en het is een kwestie van persoonlijk opvatting welke beter is.

4°. Met opzet heb ik het voorbeeld, waarop LANDRÉ zijne theorie toepast in zijn geheel weergegeven, om te doen zien, dat de keuze der voorwaarde, waarvan hij zijne maximum wil laten afhangen, de toepassing eenvoudig onmogelijk maakt.

Na de nieuwe verzekering in het relatief-risico te hebben ingevoerd, zegt LANDRÉ, wordt dit:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{\Sigma\{A^2 w(1-w)\} + x^2 w'(1-w')}}{\Sigma A w + x w'}$$

Dit is echter niet juist, want die enkele nieuwe verzekering is toch zeker geen groep, groot genoeg om daarop de wet der groote getallen toe te passen.

En in deze fout moet men noodwendig vervallen, wil men op deze wijze het maximum bepalen.

Trouwens LANDRÉ zegt zelf, dat de berekening alleen zin heeft wanneer s groot is. Maar dat zelfde geldt evenzoo voor de bijkomende groep.

5°. Ten slotte is het niet duidelijk, hoe men uit dit voorbeeld de gevoltrekking kan maken, dat het dubbel van het gemiddeld verzekerd bedrag per hoofd *een zeer veilig* maximum is. Men is integendeel tot de conclusie geneigd, dat het een *zeer onveilig* maximum is.

Een voor de maatschappij meest gunstig geval wordt gekozen. Alle verzekerden hebben dezelfde sterfte-kans en zijn verzekerd voor een zelfde bedrag, en niettegenstaande dat is het verzekerd bedrag nog maar het dubbel van het gemiddeld bedrag per hoofd.

Het is waar, de juiste uitkomst is eigenlijk :

$$x < \frac{2\alpha}{1 - \frac{1}{s}}$$

en het tweede lid dezer ongelijkheid is dus iets grooter dan 2α. Maar naarmate s grooter is, wordt dit verschil kleiner, hetgeen echter tot de eenigszins vreemde gevolgtrekking leidt, dat het maximum feitelijk kleiner is, naarmate het aantal verzekerden grooter is.

Maar nu ligt het toch voor de hand, om te onderstellen, dat als in zoo'n uiterst gunstig geval dit dubbel van het gemiddeld verzekerd bedrag per hoofd het maximum is, in het algemeen, waar de toestand der maatschappijen in dit opzicht veel ongunstiger is, een kleiner maximum zal moeten worden aangenomen.

HOOFDSTUK VI.

§ 1. Wanneer men de in de vorige hoofdstukken behandelde theoriën over *het maximum van verzekerd bedrag* met elkaar vergelijkt, dan ziet men dat ze alle uitgaan van de veronderstelling, dat de maatschappij, behalve hare gewone premie-reserve, gevaar loopt nog een of ander bedrag te zullen moeten uitkeeren.

De maat, die de grootte van dit gevaar bepaalt noemt men gewoonlijk het „*risico*".

Daar nu de een een andere maat aanneemt dan de ander heeft men verschillende *risico's*. Zoo kan men spreken van het risico van WITTSTEIN, van BREMIKER, enz.

Het moge nu wenschelijk zijn hierin meer eenheid te brengen, hinderen doet het intusschen niet, zoolang men scherp de beteekenis van elk *risico* in het oog blijft houden, opdat men desnoods van het eene op het andere kan overgaan als vergelijking noodig is. Ik wil daarom de beteekenis der verschillende risico's nog eens in het kort nagaan.

LAURENT noemt het woord niet, alhoewel, zooals we gezien hebben, zijne analyse rechtstreeks op het doel afgaat, nl. de berekening van de waarschijnlijkheid eener afwijking van de premie-reserve. Als maat voor die afwijking heb ik ingevoerd de grootheid $E = \sqrt{\Sigma(z-x^2)}$, geheel in analogie met de maat die men in de methode der kleinste kwadraten bezigt voor de afwijking van de meest waarschijnlijke waarde van de uitkomst eener waarnemingsreeks.

Niets zou intusschen beletten voor die maat te nemen de waarschijnlijke afwijking, d. i. het bedrag waarvoor de kans

$\frac{1}{2}$ is, dat de afwijking er binnen en $\frac{1}{2}$ dat zij er buiten valt of wel $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\Sigma(z-x^2)}$, dat is de gemiddelde waarde der positieve afwijkingen, wanneer men een zeer groot aantal maatschappijen had onder dezelfde omstandigheden. Zoowel het een als het ander is geheel willekeurig en zegt dan ook op zichzelf niets.

Het is dan ook in geen geval geoorloofd, zooals WITTSTEIN en LANDRÉ doen, het „*risico*", d. i. die betrekkelijk willekeurig gekozen maat, identiek gelijk te stellen aan de „*risico-reserve*". Deze laatste is wel een functie van het „*risico*", maar welke functie hangt, zooals gebleken is, naast geheel persoonlijke opvattingen omtrent soliditeit, af van de keuze van het *risico* en het is er verre van af dat de keuze van WITTSTEIN of LANDRÉ veroorloven *risico* en *risico-reserve* te identificeeren.

Ik noemde zooeven die keuze betrekkelijk willekeurig, en dat wel daarom, omdat WITTSTEIN een reden heeft, waarom of hij juist de gemiddelde waarde der positieve afwijkingen neemt.

WITTSTEIN'S *risico* toch is niets anders dan een premie, en wel een (netto)-premie die de maatschappij van levensverzekering zou moeten betalen aan eene andere maatschappij, die op zich nam mogelijke verliezen van de eerste te dekken. Het bedrag dezer premie toch verkrijgt men door het bedrag van elk verlies te vermenigvuldigen met zijn waarschijnlijkheid en deze produkten te sommeeren.

Een eenvoudig voorbeeld moge dit ophelderen.

Nemen we een groep van s personen, die alle een kans w hebben om in den loop van het eerstvolgende jaar te overlijden, in welk geval aan elk hunner een bedrag moet worden uitgekeerd waarvan de netto waarde de eenheid is, dan is de kans van een verlies u volgens WITTSTEIN:

$$P = \frac{1}{\sqrt{2\pi s w (1-w)}} e^{-\frac{u^2}{2 s w (1-w)}}.$$

Deze waarschijnlijkheid, vermenigvuldigd met de waarde

van het verlies en vervolgens gesommeerd, geeft voor het bedrag der premie, die de maatschappij die deze groep als verzekerden had, zou moeten betalen aan een genootschap als boven werd bedoeld:

$$C = \frac{1}{\sqrt{2\pi s w (1-w)}} \int_0^\infty e^{-\frac{u^2}{2 s w (1-w)}} u \, d u$$

of:

$$C = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{s w (1-w)}$$

hetgeen juist is, wat WITTSTEIN noemt het „*risico*".

Maar door nu dit *risico* gelijk te stellen aan de *risico-reserve* neemt hij stilzwijgend aan dat het der maatschappij geoorloofd zou zijn zich tegen het gevaar van verlies bij zich zelf te verzekeren. Dit toch zou gelijk staan met iemand die zich b.v. verzekerde voor eene uitkeering bij overlijden en zelf elk jaar de premie belegde.

Wat betreft het „*risico*" van BREMIKER, ik voor mij heb daarin geen rationeele beteekenis in kunnen ontdekken en geloof ook niet dat die er in gelegen is. En zoolang men die niet kent, kan men er niet mede werken omdat men niet meer weet wat of men eigenlijk doet.

Eindelijk het „*relatief-risico*" van LANDRÉ.

Het is niet te ontkennen, dat met een klein relatief-risico gepaard gaat een betrekkelijk kleine risico-reserve en dat dit in een zeker opzicht een voordeel is, aangezien daardoor de zuivere winst grooter is; maar aan den anderen kant legt men zich, door de voorwaarde, dat het relatief-risico kleiner moet worden, aan banden, die m. i. volstrekt niet noodig zijn en waardoor men het voordeel van een kleine risico-reserve weer geheel te niet doet, door zich te dwingen tot herverzekeren van bedragen die men voor eigen risico kon houden, zonder eenig nadeel, mits slechts gezorgd is voor een behoorlijken opslag voor vorming van risico-reserve.

Bovendien zal de toepassing van LANDRÉ's theorie nog belangrijk gewijzigd moeten worden, wil zij juist zijn.

Dit bewijst de uitkomst van zijn voorbeeld, die, behalve dat zij een bedrag geeft, dat voor de praktijk geen waarde heeft, bovendien nog onafhankelijk is van den leeftijd, den aard der verzekering en andere factoren, waarmede men toch eischen mag dat eene volledige theorie rekening houdt.

§ 2. De vraag rijst nu welke methode om tot het „*risico*" te komen de voorkeur verdient.

M. i. kan hieromtrent geen twijfel bestaan en behoort de ontwikkeling van LAURENT als verreweg de beste, zoo niet als de eenig juiste te worden beschouwd.

Een meer algemeene opzet van het vraagstuk dan de zijne is bijna niet denkbaar.

Zijn sierlijke en fraaie uitkomst mag voor de theorie der levensverzekering als een van de meest belangrijke formulen geacht worden die daarin voorkomen.

Zij leert het bedrijf der levensverzekering in zijn ware gedaante kennen, en doet zien dat het direct onderworpen is aan de gewone regels van het spel. Zij toont aan, dat verzekering tegen netto-premiën, wanneer nl. daaronder verstaan wordt de premie die betaald zou moeten worden, opdat maatschappij en verzekerden gelijk spel spelen, onherroepelijk leidt tot den ondergang der maatschappij, maar aan den anderen kant leert zij ook het bedrag kennen, dat de verzekerden meer dan de waarde hunner mathematische hoop moeten betalen opdat de maatschappij in stand blijve en ten allen tijde haar verplichtingen zal kunnen nakomen, m. a. w. zij vormt de basis voor een rationeelen opslag op de verschillende tarieven, ja zelfs op verschillende leeftijden zoo men wil.

Zij steunt direct op den werkelijk bestaanden toestand der maatschappij, gaat niet uit van onderstellingen, die in de praktijk nimmer vervuld zijn en geeft ten slotte een resultaat, dat, het ingewikkelde van het vraagstuk in aanmerking genomen, voor practische toepassing uiterst eenvoudig mag worden genoemd.

Maar niet alleen tot maatschappijen van levensverzekering blijft deze toepassing beperkt.

Volmaakt dezelfde ontwikkeling kan worden aangewend op

alle instellingen, die zich bezig houden met het sluiten van kans-overeenkomsten.

Als men met LAURENT's theorie vergelijkt die van WITTSTEIN of BREMIKER, dan zal men moeten erkennen, dat geen van beiden ook maar in de schaduw kunnen staan van de eerste, en dit niet alleen omdat zij mathematisch fout zijn, maar ook om de veel engere opvatting van het vraagstuk, om de, voor zoover het die van WITTSTEIN betreft, in de praktijk nooit vervulde veronderstelling, dat men steeds te doen heeft met groepen, groot genoeg voor de toepassing van de wet der groote getallen en eindelijk om de onuitvoerbare berekeningen waartoe zij leiden.

§ 3. Staat het risico eenmaal vast, dan komt de kwestie hoe daaruit af te leiden het maximum van verzekerd bedrag.

Bedenkt men nu, dat als de risico-reserve gevormd wordt uit den opslag, die daarvoor op de premiën wordt gelegd, zoodat dus deze geheel door de verzekerden wordt betaald, dat men deze steeds zoo kan kiezen, dat men de praktische zekerheid heeft, dat het verlies niet het bedrag der risico-reserve zal te boven gaan, m. a. w. dat er niet verloren zal worden, dan zal men moeten erkennen, dat de maatschappijen hierin eene angstvalligheid betoonen, die geheel ongemotiveerd is, en dat LAURENT volkomen gelijk heeft als hij zegt: „*qu'aucune compagnie à notre connaisse n'a jamais assurée une somme atteignant la dixième partie de son plein*".

Ware er slechts sprake van enkele contracten, wier verzekerde bedragen zeer sterk van de andere afweken, dan zou het nog reden hebben tot herverzekering over te gaan, ofschoon men niet vergeten moet, dat als er al eens ongelukkigerwijze door onverwachte sterfte hierop verlies geleden werd, een groot deel daarvan gedekt zou worden door de risico-reserve. Maar is eenmaal eene maatschappij tot zoodanigen bloei gekomen, dat zij verwachten kan, dat binnen betrekkelijk korten tijd het aantal groote verzekerde bedragen merkbaar zal zijn toegenomen, dan komt het mij voor, dat het eenvoudig vaststellen van een maximum van kapitaal- en rente-verzekering, zonder aanzien van verzekeringswijze

of leeftijd of wat ook, een van de meest nadeelige stelsels is, die men bedenken kan.

Men verlieze daarbij niet uit het oog, dat juist die soort van contracten gesloten worden door een klasse uit de maatschappij, die in de meest gunstige levensomstandigheden verkeeren en bovendien aan een zeer streng geneeskundig onderzoek worden onderworpen.

Naar aanleiding van deze opmerkingen is ongetwijfeld de meest voordeelige wijze van handelen die, welke Dr. MOUNIER voorstelt in zijne bijdrage over „Risico-reserve", n.l te zorgen dat deze steeds zoo groot is, dat men de practische zekerheid heeft steeds aan de verplichtingen te kunnen voldoen, natuurlijk onder voorbehoud dat het bedrag dier risico-reserve door de verzekerden wordt bijeen gebracht.

Theoretisch ligt hierin opgesloten dat feitelijk elk bedrag voor eigen risico mag worden genomen.

En dit is ook de uitkomst van LAURENT zelve. Zooals we gezien hebben is de beteekenis van zijn voorwaarde, dat de contante waarde van den opslag gelijk is aan of grooter is dan de toename der risico-reserve door het bijkomen der nieuwe verzekering.

Tenzij men vast wil houden aan een vooraf vastgestelden opslag, waarvan in geen geval mag worden afgeweken, volgt uit deze voorwaarde geen maximum, aangezien niets belet om in bijzondere gevallen een bijzonderen opslag te bezigen en dan kan steeds aan de voorwaarde van LAURENT worden voldaan.

In de praktijk echter zal men rekening hebben te houden met factoren waarmede eene theoretische behandeling zich niet kan inlaten, als: beroep, verblijfplaats e. a.

Dit neemt echter niet weg, dat het mij wenschelijk voorkomt het tot heden gevolgde stelsel zoo spoedig mogelijk vaarwel te zeggen.

NASCHRIFT.

Bezig zijnde met afdrukken, ontvang ik over het behandelde onderwerp nog twee bijdragen, welke ik mij verplicht acht hier alsnog te vermelden.

De eerste is reeds genoemd in den noot op blz. 3 en kan men vinden in de „Papers of Transactions of the Actuarial Society of America, 1891—1892, Vol. II." De schrijver is CLAYTON C. HALL. Den inhoud er van geef ik hier in hoofdzaak vertaald weer.

„Is w de waarschijnlijkheid van een evenement, s het aantal proeven dat men neemt, dan toont WITTSTEIN aan, dat de middelbare afwijking van het meest waarschijnlijke aantal in het algemeen den vormt heeft:

$$\sqrt{s\,w\,(1-w)}$$

en uit de bekende betrekking tusschen middelbare en waarschijnlijke afwijking volgt dat de waarde van deze laatste is:

$$0{,}6745\ \sqrt{s\,w\,(1-w)}.$$

Past men dit toe op een groep van s personen, welke alle een sterftekans w hebben, dan mag men, daar w in de meeste gevallen klein is ten opzichte van de eenheid, wel aannemen, dat de middelbare afwijking van het meest waarschijnlijke aantal sterfgevallen evenredig is met den vierkants-wortel uit dit aantal.

Na nu berekend te hebben de waarschijnlijkheden van verschillende afwijkingen, kan men vragen hoeveel malen deze of gene afwijking op een zeker aantal jaren zal voorkomen.

Is $\sqrt{n}$ dan de middelbare afwijking, dan vindt men op bv. 1000 jaren, dat een afwijking:

kleiner dan	$^2/_3 \sqrt{n}$	500	maal voorkomt.
tusschen	$^2/_3 \sqrt{n}$ en $\sqrt{n}$	188	„ „
„	$\sqrt{n}$ en $2\sqrt{n}$	269	„ „
„	$2\sqrt{n}$ en $3\sqrt{n}$	41	„ „
grooter dan	$3\sqrt{n}$	2	„ „

Alzoo is zuiver wiskundig aangetoond, dat van het geheel aantal afwijkingen, zoowel gunstige als ongunstige, meer dan $^2/_3$ kleiner is dan $\sqrt{n}$ en meer dan 95 % kleiner dan $2\sqrt{n}$. Slechts tweemaal in de duizend jaar zal eene afwijking voorkomen die grooter is dan $3\sqrt{n}$.

We mogen hieruit besluiten, dat het nemen van voorzorgsmaatregelen tegen eene afwijking in de sterfte groot $\sqrt{n}$ beschouwd mag worden als getuigende van groote voorzichtigheid.

Indien hieruit derhalve mag worden afgeleid, dat de grens van het maximum van verzekerd bedrag bepaald behoort te worden met betrekking tot de waarschijnlijke afwijkingen van de normale sterfte en dientengevolge evenredig is met $\sqrt{n}$, dan volgt hieruit, dat wanneer het aantal verzekeringen onder dezelfde omstandigheden verkeerende viermaal grooter wordt, het „*maximum*" slechts tweemaal grooter wordt.

Of, in het algemeen, indien het „maximum" is y en x het meest waarschijnlijke aantal sterfgevallen, zal er dus tusschen y en $\sqrt{x}$ een constante verhouding bestaan, zoodat:

$$y = a\sqrt{x}.$$

Laat ons eenige gevallen beschouwen, in elk waarvan het totaal bedrag der uitkeeringen tengevolge van de meest waarschijnlijke sterfte in een gegeven jaar 1.000.000 bedraagt. Eenvoudigheidshalve onderstellen we dat alle verzekerden dezelfde sterftekans hebben en verzekerd zijn voor eenzelfde bedrag.

1ste voorbeeld.

Zij het meest waarschijnlijke aantal sterfgevallen 100, het verzekerd bedrag per hoofd 10.000, dan moet dus gerekend worden op eene afwijking van de meest waarschijnlijke uitkeering die gelijk is aan $10.000\sqrt{100} = 100.000$.

2de voorbeeld.

Is het meest waarschijnlijke aantal sterfgevallen 200, met een verzekerd bedrag van 5.000 per hoofd, dan moet gerekend worden op eene afwijking die gelijk is aan $5.000 \sqrt{200} = 70.0000$.

3de voorbeeld.

Is het meest waarschijnlijke aantal sterfgevallen 400 met een verzekerd bedrag per hoofd van 2500, dan wordt de afwijking $2500 \sqrt{400} = 50.000$.

4de voorbeeld.

Is het meest waarschijnlijke aantal sterfgevallen 1000, het verzekerd bedrag 1000 per hoofd, dan is de afwijking $1000 \sqrt{1000} = 32000$.

Indien we nu dus het maximum van verzekerd bedrag beschouwen als evenredig met de verschillende afwijkingen die we in deze vier voorbeelden vonden, en we noemen deze maxima y_1, y_2, y_3 en y_4, dan zullen deze zoodanig moeten worden gekozen dat:

$$\frac{y_1}{100.000} = \frac{y_2}{70.000} = \frac{y_3}{50.000} = \frac{y_4}{32.000}.$$

Hieraan wordt ten naastenbij voldaan door de waarden: $y_1 = 30.000a$, $y_2 = 20.000a$, $y_3 = 15.000a$ en $y_4 = 10.000a$.

De waarde, die in deze uitkomsten aan a zou moeten worden toegekend, hangt, blijkens de eindconclusie, welke aldus is geformuleerd:

„*The maximum risk which may be safely assumed by an insurance company upon a single hazard should, I conceive, stand in a similar relation to the strain resulting from probable deviations in mortality, which are reasonably to be anticipated and for which provision in property made*",

af, van de draagkracht der maatschappij ten opzichte van groote lasten.

Evenals, om dezelfde vergelijking van den schrijver te bezigen, de werkelijke draagkracht van een brug steeds veel grooter wordt berekend dan het gewicht, dat zij ooit zal hebben te torsen, zoo zal men de waarde van a ook steeds

zoodanig moeten kiezen, dat het risico der nieuwe bijkomende verzekering steeds klein is ten opzichte van het risico, dat de maatschappij loopen kan, maar de verhouding dezer risico's moet een constante zijn.

Dat deze theorie verre van bevredigend is, is o. a. gebleken in de vergadering van de Actuarial Society, waarin over deze verhandeling critiek is uitgeoefend.

Met uitzondering van een enkele, als Mr. HOMANS, die haar noemt „the most scholarly paper that me have had presented" is het oordeel, waaronder m. i. vooral dat van Mr. MACAULAY genoemd moet worden, ongunstig.

Terecht is er door dezen criticus op gewezen, dat deze theorie tot de bedenkelijke gevolgtrekking leidt, dat eene maatschappij, die reeds een groot risico loopt eerder een nieuw risico van een belangrijk bedrag op zich kan nemen, dan eene maatschappij, die door haar kleiner risico feitelijk nog veel meer draagkracht over heeft. Men vergelijke b.v. het eerste en het vierde voorbeeld. Maar behalve dat wordt hoegenaamd geen rekening gehouden met verzekeringswijze, wijze van premie-betaling, ontvangsten, reeds voorhanden zijnde reserve, interest enz., factoren welke eene volledige theorie toch in zich moet bevatten.

De tweede bijdrage, welke ik nog ontving is van de hand van CORNEILLE L. LANDRÉ en vindt men in de „Oesterreichische Verzicherungs-Zeitung" van 4 en 11 April 1896.

Ik kan hierover kort zijn.

LANDRÉ behandelt hierin opnieuw de theorie van LAURENT. De inhoud dezer verhandeling is op een paar kleine wijzigingen na dezelfde als die welke voorkomt in het Archief voor Verzekeringswetenschap Dl. I Afl 1.

De voornaamste dezer veranderingen is, dat LANDRÉ het bezwaar als zouden Σp en Σq niet altijd gelijk zijn aan de eenheid heeft laten wegvallen.

De opmerking, dat LAURENT de kleinste premie-ontvangst van de kleinste uitkeering aftrekt, terwijl het blijkbaar zijne bedoeling is haar van de grootste uitkeering aftetrekken is in zooverre juist, dat deze vergissing voorkomt in zijn leer-

boek: Traité du Calcul des Probabilités, doch hij herstelt dit in zijn „Théorie et Pratique des Assurances sur la Vie", en daar dit laatste van jongeren datum is, meen ik, dat men LAURENT recht doet wedervaren dit als uitgangspunt te kiezen.

De overige bezwaren, vnl. het willekeurig aannemen van de waarschijnlijkheid $P = \Theta$ (3) en vooral de conclusie, waartoe LAURENT's theorie voert, dat elke verzekering tegen nettopremie verboden zou zijn, blijven deze theorie voor LANDRÉ onaanneembaar maken.

Het eerste is onvermijdelijk, omdat het vraagstuk van het *maximum van verzekerd bedrag* een onbepaald vraagstuk is, zoodat, wanneer men zich werkelijk een grens wil stellen, de invoering van de een of andere voorwaarde, waar die limiet van af zal hangen, noodzakelijk is.

De keus dezer voorwaarde is willekeurig. De eenige beperking is, dat men eischen mag dat zij een rationeelen grond heeft.

Het tweede bezwaar kan geen bezwaar zijn, want het wordt eenvoudig bewezen, dat verzekering tegen netto-premie per se nadeelig is, mits voor de waarschijnlijkheden p en q waarden worden gekozen die niet of slechts zeer weinig van de werkelijke afwijken.

Maar waar nu sterftetafels worden gekozen, waar die afwijking zoo groot is als LANDRÉ onderstelt in zijn voorbeeld van eene maatschappij, die er op rekent alleen door de werkelijke afsterving zooveel voordeel te hebben dat zij geen opslag behoeft, daar geven de grootheden p en q, aan zoo'n sterftetafel ontleend, niet meer de kansen aan, dat de maatschappij de overeenkomstige bedragen zal uitkeeren of ontvangen. Trouwens LANDRÉ zal moeten toestemmen dat, als men met de aan die sterftetafel ontleende sterftekansen het risico van WITTSTEIN ging berekenen, ook deze uitkomst geen vertrouwen meer zou verdienen.

Toelichting bij de tabellen.

De tabellen zijn vervaardigd met de mannen-tafel der 20 grootste steden van ons land, tijdvak 1870/79 van Prof. Dr. A. J. v. PESCH. Voor overlijden in den loop van het jaar is eene correctie aangebracht, door aan te nemen dat dit geschiedt op de helft van het jaar.

Tabel I bevat:

l_a het aantal levenden op den leeftijd a.

log. l_a.

a log. r, zijnde $r = 1.04$.

log. λ_a.

λ_a het gedisconteerd aantal levenden op den leeftijd a.

$\Sigma\lambda_a$ de som van het gedisconteerd aantal levenden.

log. $\Sigma\lambda_a$.

log. $\frac{\Sigma\lambda_a}{\lambda_a}$.

$R_a = \frac{\Sigma\lambda_a}{\lambda_a}$ de waarde van de praenumerando lijfrente ten bedrage van de eenheid op den leeftijd a.

Tabel II bevat:

d_a het aantal dat op den leeftijd a overlijdt.

log. d_a.

$\left(a + \frac{1}{2}\right)$ log. r zijnde $r = 1.04$.

log. $\frac{\tau_a}{r^{\frac{1}{2}}}$.

$\frac{\tau_a}{r^{\frac{1}{2}}}$ het gedisconteerd aantal dooden op den leeltijd a.

$\frac{\Sigma\tau_a}{r^{\frac{1}{2}}}$ de som van het gedisconteerd aantal dooden.

Tabel III bevat:

$\tau_{2a} = \frac{\tau_a}{\gamma^a + \frac{1}{2}}$ . . . . . (zie blz. 52).

$\Sigma\tau_{2a}$ . . . . . („ „ „).

λ_{2a} . . . . . („ „ „).

$\Sigma\lambda_{2a}$ . . . . . („ „ „).

Λ_a . . . . . („ „ 53).

$2\Sigma\Lambda_a$ . . . . . („ „ „).

$\psi_a = \frac{2\Sigma\Lambda_a - \Sigma\lambda_{2a}}{\lambda_{2a}} - \left(\frac{\Sigma\lambda_a}{\lambda_a}\right)^2$ . . („ „ „).

$q_a = \frac{\Sigma\tau_{2a}}{\lambda_{2a}} - \left(\frac{\Sigma\tau_a}{\lambda_a}\right)^2$ . . . . . („ „ 52).

Tabel I.

a	l_a	log. l_a	a log. r	log λ_a	λ_a	$\Sigma\lambda_a$	log. $\Sigma\lambda_a$	log R_a	R_a
99	0								
98	1	0.00000	1.66927	8.33073	0.0214	0.0214	8.33073	0.00000	1.
97	4	60206	65223	94983	0.0891	0.1105	9.04336	09353	1.2403
96	13	1.11394	63520	9.47874	0.3011	0.4116	61448	13574	1.3669
95	31	49136	61817	87319	0.7468	1.1584	0.06386	19067	1.5512
94	66	81954	60113	0.21841	1.6535	2.8119	44900	23059	1.7006
93	124	2.09342	58410	50932	3.2309	6.0428	78124	27192	1.8703
92	211	32428	56707	75721	5.7176	11.7604	1.07042	31321	2.0569
91	330	51851	55003	96848	9.2999	21.0603	32346	35498	2.2645
90	486	68664	53300	1.15364	14.244	35.3043	54783	39419	2.4785
89	685	83569	51597	31972	20.879	56.1833	74961	42989	2.6909
88	919	96332	49893	46439	29.133	85.3163	93103	46664	2.9285
87	1193	3.07664	48190	59474	39.331	124.647	2.09568	50094	3.1691
86	1522	18241	46487	71754	52.184	176.831	24756	53002	3.3886
85	1945	28892	44783	84109	69.357	246.188	39127	55018	3.5496
84	2476	39375	43080	96295	91.823	338.011	52893	56598	3.6811
83	3094	49052	41377	2.07675	119.33	457.341	66024	58349	3.8326
82	3787	57830	39673	18157	151.90	609.241	78479	60322	4.0107
81	4545	65753	37970	27783	189.60	798.841	90246	62463	4.2134
80	5359	72908	36267	36641	232.49	1031.33	3.01340	64699	4.4360
79	6261	79664	34563	45101	282.49	1313.82	11854	66753	4.6508
78	7275	86183	32860	53323	341.37	1655.19	21885	68562	4.8486
77	8360	92221	31157	61064	407.98	2063.17	31453	70389	5.0570
76	9479	97676	29453	68223	481.09	2544.26	40556	72333	5.2885
75	10628	4.02645	27750	74895	560.98	3105.24	49210	74315	5.5354
74	11829	07221	26047	81174	648.25	3753.49	57444	76270	5.7903
73	13026	11481	24343	87138	743.67	4497.16	65294	78156	6.0473
72	14273	15452	22640	92812	847.46	5344.62	72792	79980	6.3067
71	15542	19151	20937	98214	959.71	6304.33	79964	81750	6.5690
70	16831	22611	19233	3.03378	1080.9	7385.23	86836	83458	6.8325
69	18103	25775	17530	08245	1209.1	8594.33	93421	85176	7.1082
68	19350	28668	15827	12841	1344.0	9938.33	99731	86890	7.3944
67	20587	31359	14123	17236	1487.2	11425.5	4.05788	88552	7.6828
66	21817	33880	12420	21460	1639.1	13064.6	11610	90150	7.9708
65	23030	36229	10717	25512	1799.4	14864.0	17214	91702	8.2608
64	24208	38396	09013	29383	1967.1	16831.1	22611	93228	8.5562
63	25356	40408	07310	33098	2142.8	18973.9	27816	94718	8.8549

Vervolg Tabel I.

a	l_a	log. l_a	a. log. r	log. λ_a	λ_a	$\Sigma\lambda_a$	log. $\Sigma\lambda_a$	log. R_a	R_a
62	26489	4.42307	1.05607	3.36700	2328.1	21302.0	4.32842	0.96142	9.1500
61	27602	44094	03903	40191	2523.0	23825.0	37703	97512	9.4432
60	28679	45756	02200	43556	2726.2	26551.2	42408	98852	9.7391
59	29720	47305	00497	46808	2938.2	29489.4	46967	1.00159	10.0367
58	30729	48755	0.98793	49962	3159.5	32648.9	51387	01425	10.3336
57	31700	50106	97090	53016	3389.7	36038.6	55677	02661	10.6319
56	32637	51371	95387	55984	3629.4	39668.0	59844	03860	10.929
55	33550	52569	93683	58886	3880.3	43548.3	63897	05011	11.223
54	34463	53735	91980	61755	4145.2	47693.5	67846	06091	11.506
53	35356	54846	90277	64569	4422.7	52116.2	71697	07128	11.784
52	36214	55888	88573	67315	4711.4	56827.6	75456	08141	12.062
51	37044	56872	86870	70002	5012.1	61839.7	79127	09125	12.338
50	37844	57800	85167	72633	5325.1	67164.8	82714	10081	12.613
49	38619	58680	83463	75217	5651.6	72816.4	86223	11006	12.884
48	39371	59518	81760	77758	5992.1	78808.5	89657	11899	13.152
47	40107	60322	80057	80265	6348.2	85156.7	93022	12757	13.414
46	40825	61093	78353	82740	6720.5	91877 2	96321	13581	13.671
45	41522	61828	76650	85178	7108.5	98985.7	99557	14379	13.925
44	42208	62539	74947	87592	7514.8	106500	5.02735	15143	14.172
43	42884	63230	73243	89987	7940.9	114441	05858	15871	14.412
42	43537	63886	71540	92346	8384.2	122826	08929	16583	14.650
41	44175	64518	69837	94681	8847.3	131673	11950	17269	14.883
40	44804	65132	68133	96999	9332.3	141005	14923	17924	15.109
39	45429	65733	66430	99303	9840.8	150846	17853	18550	15.329
38	46043	66316	64727	4.01589	10373	161219	20742	19153	15.543
37	46621	66858	63023	03835	10923	172142	23589	19754	15.759
36	47168	67365	61320	06045	11493	183635	26396	20351	15.978
35	47710	67861	59617	08244	12090	195725	29165	20921	16.189
34	48249	68349	57913	10436	12716	208441	31899	21463	16.392
33	48782	68826	56210	12616	13371	221812	34599	21983	16.589
32	49308	69292	54507	14785	14056	235868	37267	22482	16.781
31	49836	69754	52803	16951	14774	250642	39905	22954	16.964
30	50370	70217	51100	19117	15530	266172	42516	23399	17.139
29	50910	70680	49397	21283	16324	282496	45101	23818	17.305
28	51455	71143	47693	23450	17159	299655	47662	24212	17.463
27	52006	71605	45990	25615	18036	317691	50200	24585	17.614
26	52563	72068	44287	27781	18959	336650	52718	24937	17.757
25	53126	72531	42583	29948	19929	356579	55216	25268	17.893

Tabel II.

a	d_a	log. d_a	$(a+\frac{1}{2})\log. r$	log. $\frac{\tau_a}{r^{\frac{1}{2}}}$	$\frac{\tau_a}{r^{\frac{1}{2}}}$	$\frac{\Sigma\tau_a}{r^{\frac{1}{2}}}$
99	0					
98	1	0.00000	1.67778	8.32222	0.0210	0.0210
97	3	47712	66075	81637	0.0655	0.0865
96	9	95424	64372	9.31052	0.2044	0.2909
95	18	1.25527	62668	62859	0.4252	0.7161
94	35	54407	60965	93442	0.8598	1.5759
93	58	76343	59262	0.17081	1.4819	3.0578
92	87	93952	57558	36394	2.3117	5.3695
91	119	2.07555	55855	51700	3.2885	8.6580
90	156	19312	54152	65160	4.4833	13.1413
89	199	29885	52448	77437	5.9480	19.0893
88	234	36922	50745	86177	7.2739	26.3632
87	274	43775	49042	94733	8.8579	35.2211
86	329	51720	47338	1.04382	11.062	46.283
85	423	62634	45635	16999	14.791	61.074
84	531	72509	43932	28577	19.309	80.383
83	618	79099	42228	36871	23.373	103.756
82	693	84073	40525	43548	27.257	131.013
81	758	87967	38822	49145	31.006	162.019
80	814	91062	37118	53944	34.629	196.648
79	902	95521	35415	60106	39.908	236.556
78	1014	3.00604	33712	66892	46.657	283.213
77	1085	03543	32008	71535	51.922	335.135
76	1119	04883	30305	74578	55.690	390.825
75	1149	06032	28602	77430	59.470	450.295
74	1181	07225	26898	80327	63.573	513.868
73	1217	08529	25195	83334	68.130	581.998
72	1247	09587	23492	86095	72.602	654.600
71	1269	10346	21788	88558	76.839	731.439
70	1289	11025	20085	90940	81.171	812.610
69	1272	10449	18382	92067	83.305	895.915
68	1247	09587	16678	92909	84.936	980.851
67	1237	09237	14975	94262	87.623	1008.47
66	1230	08991	13272	95719	90.613	1159.09
65	1213	08386	11568	96818	92.935	1252.02
64	1178	07115	09865	97250	93.864	1345.89
63	1148	05994	08162	97832	95.131	1441.02

Vervolg Tabel II.

a	d_a	log. d_a	$(a+\frac{1}{2})\log.r$	log. $\frac{\tau_a}{r^{\frac{1}{2}}}$	$\frac{\tau_a}{r^{\frac{1}{2}}}$	$\frac{\Sigma\tau_a}{r^{\frac{1}{2}}}$
62	1133	3.05423	1.06458	1.98965	97.645	1538.66
61	1113	04650	04755	99895	99.759	1638.42
60	1077	03222	03052	2.00170	100.39	1738.81
59	1041	01745	01348	00397	100.92	1839.73
58	1009	00389	0.99645	00744	101.73	1941.46
57	971	2.98722	97942	00780	101.81	2043.27
56	937	97174	96238	00936	102.18	2145.45
55	913	96047	94535	01512	103.54	2248.99
54	913	96047	92832	03215	107.68	2356.67
53	893	95085	91128	03957	109.54	2466.21
52	858	93349	89425	03924	109.46	2575.67
51	830	91908	87722	04186	110.12	2685.79
50	800	90309	86018	04291	110.38	2796.17
49	775	88930	84315	04615	111.21	2907.38
48	752	87622	82612	05010	112.23	3019.61
47	736	86688	80908	05780	114.24	3133.85
46	718	85612	79205	06407	115.90	3249.75
45	697	84323	77502	06821	117.01	3366.76
44	686	83632	75798	07834	119.77	3486.53
43	676	82995	74095	08900	122.74	3609.27
42	653	81491	72392	09099	123.31	3732.58
41	638	80482	70688	09794	125.30	3857.88
40	629	79865	68985	10880	128.47	3968.35
39	625	79588	67282	12306	132.76	4119.11
38	614	78817	65578	13239	135.64	4254.75
37	578	76193	63875	12318	132.79	4387.54
36	547	73799	62172	11627	130.70	4518.24
35	542	73400	60468	12932	134.69	4652.93
34	539	73159	58765	14394	139.30	4792.33
33	533	72673	57062	15611	143.26	4935.49
32	526	72099	55358	16741	147.03	5082.52
31	528	72263	53655	18608	153.49	5236.01
30	534	72754	51952	20802	161.44	5397.45
29	540	73239	50248	22991	169.79	5567.24
28	545	73640	48545	25095	178.22	5745.46
27	551	74115	46842	27273	187.38	5932.84
26	557	74586	45138	29448	197.01	6129.85
25	563	75051	43435	31616	207.09	6336.94

Tabel III.

a	$\tau_{2a} = \frac{\tau_a}{\gamma^a + \frac{1}{2}}$	$\Sigma\tau_{2a}$	λ_{2a}	$\Sigma\lambda_{2a}$	$\frac{\Sigma\lambda_a}{\gamma^a} = A_a$	$2\Sigma A_a$	ψ_a	φ_a
99								
98	0.0004	0.0004	0.0005	0.0005	0.00046	0.00092	0.000	0.0000
97	0.0014	0.0018	0.0020	0.0025	0.00246	0.00584	0.145	0 0002
96	0.0046	0.0064	0.0070	0.0095	0.00953	0.02490	0.340	0.0003
95	0.0100	0.0164	0.0180	0.0275	0.02791	0.08072	0.532	0.0007
94	0.0211	0.0375	0.0414	0.0689	0.06885	0.21842	0.717	0.0012
93	0.0379	0.0754	0.0842	0.1531	0.15745	0.53332	1.019	0.0016
92	0.0614	0.1368	0.1549	0.3080	0.31868	1.17068	1.337	0.0020
91	0.0909	0.2277	0.2621	0.5701	0.59353	2.3576	1.692	0.0024
90	0.1288	0.3565	0.4175	0.9876	1.0348	4.4272	2.096	0.0031
89	0.1778	0.5343	0.6364	1 6240	1.7126	7.8524	2.546	0.0039
88	0.2261	0.7604	0.9235	2.5475	2.6984	13.2492	3.012	0.0047
87	0.2864	1.0468	1.2967	3.8442	4.1094	21.468	3.547	0.0058
86	0.3719	1.4187	1.7893	5.6335	6.0631	33.494	4.144	0.0066
85	0.5172	1.9359	2.4732	8.1067	8.7789	51.152	4.805	0.0077
84	0.7022	2.6381	3.4053	11.512	12.535	76.222	5.452	0.0086
83	0.8840	3.5221	4.6024	16.114	17.639	111.50	6.036	0.0096
82	1.0721	4.5942	6.0932	22.207	24.438	160.38	6.590	0.0104
81	1.2683	5.8625	7.9092	30.116	33.324	227.02	7.144	0.0112
80	1.4732	7.3357	10.087	40.203	44.744	316.51	7.716	0.0121
79	1.7657	9.1014	12.746	52.950	59.281	435.07	8.349	0.0132
78	2.1469	11.248	16.019	68.969	77.670	590.41	9.042	0.0143
77	2.4847	13.733	19.910	88.879	100.68	791.77	9.731	0.0153
76	2.7716	16.505	24.418	113.30	129.13	1050.0	10.39	0.0163
75	3.0781	19 583	29.611	142.91	163.91	1377.8	11.06	0.0172
74	3.4221	23.005	35.586	178.49	206.05	1789 9	11.76	0.0183
73	3.8141	26.819	42.460	220.95	256.75	2303.4	12.48	0.0194
72	4.2270	31.046	50.318	271.27	317.34	2938.2	13.23	0.0206
71	4.6527	35.699	59 262	330.53	389.29	3716.8	13.99	0.0217
70	5.1116	40.810	69.415	399.95	474.28	4665.2	14.76	0.0229
69	5.4557	46.266	80.752	480.70	574.00	5813.2	15.51	0.0241
68	5.7852	52.051	93 356	574.06	690.31	7193.8	16.23	0.0252
67	6.2069	58.258	107.43	681.48	825.38	8844.6	16.96	0.0261
66	6.6754	64.933	123.14	804.62	981.53	10808	17.70	0.0274
65	7.1204	72.054	140.59	945.21	1161.4	13130	18.43	0.0286
64	7.4792	79.533	159.85	1105.1	1367.7	15866	19.14	0.0296
63	7.8833	87.416	181.08	1286.1	1603.5	19073	19.82	0.0306

Vervolg Tabel III.

a	$\tau_{2a} = \frac{\tau_a}{\gamma a + \frac{1}{2}}$	$\Sigma\ \tau_{2i}$	λ_{2a}	$\Sigma\ \lambda_{2i}$	$\frac{\Sigma\ \lambda_i}{\gamma a} = A_a$	$2\Sigma A_a$	ψ_a	$\dot{\varphi}_a$
62	8.4154	95.832	204.61	1490.8	1872.2	22817	20 51	0.0318
61	8.9414	104.77	230.62	1721.4	2177.8	27173	21.70	0.0327
60	9.3581	114.13	259.16	1980.5	2524.0	32221	21.84	0.0337
59	9.7836	123.91	290.48	2271.0	2915.4	38052	22.34	0.0347
58	10.257	134.17	324.86	2595.8	3356.9	44765	23.52	0.0356
57	10.676	144.84	362.46	2958.3	3853.7	52473	23.58	0.0364
56	11.142	155.99	403.62	3361.9	4411.4	61296	24.09	0.0372
55	11.743	167.73	448.78	3810.7	5036.6	71369	24.58	0.0380
54	12.701	180.43	498.60	4309.3	5736.7	82842	25.13	0.0388
53	13.437	193.87	553.26	4862.6	6519.3	95881	25.66	0.0396
52	13.964	207.83	612.95	5475.5	7393.2	110667	26.12	0.0403
51	14.610	222.44	678.15	6153.7	8367.1	127401	26.57	0.0410
50	15 231	237.67	749.31	6903.0	9450.9	146303	26.85	0.0416
49	15.959	253.63	827.08	7730.1	10656	167614	27.30	0.0421
48	16.749	270.38	911.98	8642.0	11994	191602	27.65	0.0426
47	17.731	288.11	1004.8	9646.8	13482	218566	27.97	0.0431
46	18.708	306 82	1106.3	10753	15125	248816	28.29	0.0436
45	19.643	326.46	1217.0	11970	16946	282708	28.57	0.0441
44	20.910	347.37	1338.0	13308	18962	320632	28.85	0.0444
43	22.287	369.66	1470.4	14479	21191	363014	29.04	0.0449
42	23.285	392 94	1614.6	16393	23653	410320	29.36	0.0453
41	24.608	417.55	1771.9	18165	26371	463062	29.59	0.0456
40	26.240	443.79	1943.9	20109	29370	521802	29.80	0.0459
39	28.200	471.99	2131.8	22241	32676	587154	30.03	0.0463
38	29.965	501.96	2336.8	24578	36320	659794	30 25	0.0466
37	30.510	532.47	2559.3	27137	40333	740460	30.36	0.0468
36	31.229	563.69	2800.6	29937	44747	829954	30.38	0.0468
35	33.469	597.16	3063.9	33001	49600	929154	30.42	0.0468
34	35.999	633.16	3351.5	36353	54937	1039028	30.49	0.0469
33	38.503	671.67	3664.9	40018	60798	1160624	30.56	0.0471
32	41.099	712.76	4006.7	44024	67236	1295096	30.65	0.0472
31	44.621	757.39	4380.1	48405	74306	1443708	30.77	0.0473
30	48.810	806.20	4788 2	53193	82066	1607840	30.93	0.0476
29	53.387	859.58	5234.4	58427	90582	1789004	31.15	0.0476
28	58.278	917.86	5722.4	64149	99929	1988862	31.22	0.0483
27	63.726	981.59	6255.4	70405	110180	2209222	31.68	0.0487
26	69.680	1051.3	6838.3	77243	121426	2452074	31.98	0.0492
25	76.476	1127.4	7475.8	84719	133761	2719596	32.30	0.0497

STELLINGEN.

STELLINGEN.

I.

Het is wenschelijk de uitdrukking „*Maximum van verzekerd bedrag*" uit de mathematische theorie der levensverzekering te verbannen, en alleen te spreken van het „*Risico*".

II.

WITTSTEIN's theorie over het „*Risico*" (1) heeft, voor zoover zij betrekking heeft op maatschappijen van levensverzekering geen waarde.

III.

WITTSTEIN's toepassing der waarschijnlijkheidsrekening op de berekening van het „*Risico*" eener postnumerando betaalbare lijfrente is onjuist (2)

IV.

Aan het „*Risico*" van BREMIKER (3) kan geen wetenschappelijke waarde worden toegekend.

V.

Het „*relatief-risico*", als maat voor den min of meer gun-

(1) Das mathematische Risico der Versicherungs-Gesellschaften.
(2) Als boven blz. 70.
(3) Das Risico der Lebensversicherungen.

stigen toestand eener maatschappij van levensverzekering, verdient geen aanbeveling.

VI

Een cursus over Waarschijnlijkheids-rekening behoort de theorie der „fonctions generatrices" in zich te bevatten.

VII.

Bij het toepassen van de theorie der afwijkingen behoort men zich eerst te overtuigen, of de elementen van het vraagstuk deze toepassing veroorloven.

VIII.

De grondslagen van de Dynamica volgens KIRCHHOFF hebben alleen waarde voor de systematiek der Mechanica.

IX.

De analogie tusschen de beweging van een punt en het evenwicht van koordfiguren geeft geen aanleiding tot eenvoudige analytische oplossing van daarop betrekking hebbende vraagstukken.

X.

De wijze waarop LOBATTO in zijn „Lessen over Hoogere Algebra" betrekkingen afleidt door vervanging van reëele door imaginaire exponenten is onvolledig.

XI.

DIRICHLET'S bewijs van het naar hem genoemde Principe is niet mathematisch streng.

XII.

De kinetische energie der progressieve beweging als maat voor de temperatuur is niet overeen te brengen met het beginsel van CLAUSIUS.

XIII.

De tweede onderstelling welke BOUTY (1) invoert voor de verklaring van de door hem waargenomen gevoelige vlammen, als zou eene ontploffing bevorderd worden, wanneer het geluid van deze ten naastenbij overeenkomt met de periode van den voortgebrachten toon, is voor de verklaring van dit verschijnsel niet noodig.

XIV.

Bij het onderwijs in de elementaire natuurkunde beperke men zich bij de behandeling van de tweede wet der mechanische warmte-theorie tot eene meer eenvoudige behandeling dan in vele leerboeken gevolgd wordt.

XV.

De kennis van de verhouding der soortelijke warmten bij constanten druk en constant volumen heeft voor de bepaling van het aantal atomen in het molecul weinig waarde.

XVI.

Te recht zegt BERTRAND:
L'intervention du hasard dans la formation de l'univers est inacceptable.

XVII.

De bepaling van afstanden van vaste sterren ligt op den weg der photographie.

XVIII.

Het is niet aan te nemen, dat er voor de ontleding eener stof een bepaalde temperatuur zou zijn aan te wijzen.

---

(1) C. R. 120 blz., 1260 en 122, blz. 372.

XIX.

Bij het onderwijs in de scheikunde is het wenschelijk het begrip moleculen en atomen eerst later te ontwikkelen dan in vele leerboeken geschiedt.

XX.

On peut dire, à parler en rigueur, que presque toutes nos connaissances ne sont que probables; et dans le petit nombre des choses que nous pouvons savoir avec certitude, dans les sciences mathématiques elles mêmes, les principaux moyens de parvenir à la vérité, l'induction et l'analogie se fondent sur les probabilités, en sorte que le système entier des connaissances humaines s'y rattache.

LAPLACE.