Utrecht University Library
Partner in Science
Universiteit Utrecht

Over de ontbinding in priemfuncties van geheele transcendentale functies

https://hdl.handle.net/1874/226211

Fl 192.
1896.

Over de Ontbinding in Priemfuncties van gehoele Transcendentale Functies.

JOHANNES COENRAAD MARX.

qu.
2

A. qu.
192

OVER DE ONTBINDING

IN

PRIEMFUNCTIES VAN GEHEELE TRANSCENDENTALE FUNCTIES.

Typ. J. VAN BOEKHOVEN, Utrecht.

A 4 192 (1896)

OVER DE ONTBINDING

IN

Priemfuncties van geheele Transcendentale Functies.

PROEFSCHRIFT

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN

DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE

AAN DE RIJKS-UNIVERSITEIT TE UTRECHT,

NA MACHTIGING VAN DEN RECTOR-MAGNIFICUS

D^R. M. TH. HOUTSMA,

Hoogleeraar in de Faculteit der Letteren en Wijsbegeerte,

VOLGENS BESLUIT VAN DEN SENAAT DER UNIVERSITEIT

TEGEN DE BEDENKINGEN VAN

DE FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE

TE VERDEDIGEN

op Vrijdag 17 April 1896, des namiddags te 3 ure,

DOOR

JOHANNES COENRAAD MARX,

geboren te Amsterdam.

BIBLIOTHEEK DER
RIJKSUNIVERSITEIT
UTRECHT.

UTRECHT,
J. VAN BOEKHOVEN
1896.

Aan de Nagedachtenis mijner Ouders.

Aan het einde mijner academische studiën gekomen, gevoel ik mij gedrongen, openlijk mijnen dank te betuigen aan mijne leermeesters, de Hoogleeraren in de faculteit der Wis- en Natuurkunde, voor hun gewaardeerd onderwijs, dat ik in zoo ruime mate heb mogen genieten.

Inzonderheid U, Hooggeleerde KAPTEYN, *hooggeachte Promotor, breng ik mijnen dank voor Uw uitstekend onderricht, voor Uw steun, mij verleend bij het samenstellen van dit proefschrift, en voor Uwe werkdadige belangstelling in mijn maatschappelijk leven.*

Ook U, Hooggeleerde GRINWIS *en* JULIUS, *betuig ik mijne erkentelijkheid voor hetgeen ik van U heb mogen leeren, en voor hetgeen ook Gij gedaan hebt, om mij eene positie in de maatschappij te bezorgen.*

Uw onderricht in de mathematische theorie der levensverzekeringwetenschap, Zeergeleerde MOUNIER, *zal mij, naar ik vertrouw, bij de toepassing dier theorie, van veel nut zijn.*

Ten slotte een woord van dank aan het College van Curatoren en aan de Wis- en Natuurkundige Faculteit, voor hetgeen zij gedaan hebben om mij eene Rijks-studiebeurs te verschaffen, waardoor mij het voortzetten en voleinden mijner studiën werd mogelijk gemaakt.

INHOUD.

Bladz.

INLEIDING 1

HOOFDSTUK I. Methode van WEIERSTRASS 11

HOOFDSTUK II. Methode van MITTAG-LEFFLER 23

HOOFDSTUK III. Methode van FRENZEL 32

HOOFDSTUK IV. Over het geslacht van eene functie en over de bepaling van den uitwendigen exponentieelen factor 43

HOOFDSTUK V. Voorbeelden 56

I. Sinus-functie. Cosinus-functie 56

II. Sinussen van hoogere orde 68

III. De reciproke Γ-functie 79

IV. De σ-functie van WEIERSTRASS, de ϑ- en ϑ-functies van JACOBI 86

HOOFDSTUK VI. Over het geslacht van de afgeleide van eene functie van geslacht ω 97

HOOFDSTUK VII. Andere eigenschappen 116

STELLINGEN 131

INLEIDING.

1. Eene geheele transcendentale functie is eene functie, die holomorph is in het geheele eindige gebied en die het punt $z = \infty$ tot essentieel kritiek punt heeft. Zulk eene functie kan voorgesteld worden door eene oneindig voortloopende reeks, gerangschikt volgens de opklimmende machten van de variabele z,

$$A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots\ldots,$$

welke convergeert voor alle eindige waarden van z, en die we $G(z)$ zullen noemen.

Deze geheele transcendentale functies hebben met de geheele rationeele functies veel punten van overeenkomst, maar ook punten van verschil. Een van deze punten van verschil wordt ons geleverd door de ontbinding in factoren.

Zijn de nullen van eene geheele rationeele functie $f(z)$ van den m^{den} graad

$$a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_m,$$

waarbij we zullen onderstellen, dat geen dezer grootheden gelijk aan nul is, dan kan deze functie geschreven worden in den vorm:

$$f(z) = f(0) \prod_{\nu=1}^{m} \left(1 - \frac{z}{a_\nu}\right).$$

Hierdoor zou men geneigd zijn om, wanneer van eene

geheele transcendentale functie $G(z)$ de nullen gegeven zijn door de reeks

$$a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_\nu, \ldots\ldots$$

in eene zoodanige volgorde, dat

$$\lim_{\nu=\infty} |a_\nu| = \infty,$$

terwijl we wederom onderstellen, dat geen dezer grootheden nul is, deze functie te schrijven in den vorm

$$G(z) = G(0) \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_\nu}\right).$$

Dit is echter in het algemeen foutief, omdat het oneindige product in het tweede lid aan eene bepaalde voorwaarde moet voldoen, om eene functie te kunnen voorstellen, die holomorph is in het geheele eindige gebied.

2. Om deze voorwaarde op te sporen, merken we in de eerste plaats op, dat het oneindige product

$$\prod_{\nu=1}^{\infty} (1 + b_\nu)$$

waarin

$$b_1, b_2, b_3, \ldots\ldots, b_\nu, \ldots\ldots$$

complexe getallen voorstellen, stellig convergeert, wanneer de reeks

$$b_1 + b_2 + b_3 + \ldots\ldots + b_\nu + \ldots\ldots$$

absoluut convergeert, d. w. z. wanneer de reeks der moduli van de termen dezer reeks convergeert. Het oneindige product wordt in dit geval ook absoluut convergent genoemd.

Van zulk een absoluut convergeerend product kan bewezen worden, dat de waarde er van niet afhangt van de volgorde of van de groepeering der factoren, zoodat men met zulk een oneindig product mag handelen als met een product van een eindig aantal factoren. Dit geldt niet voor oneindige producten, waarvan de convergentie niet absoluut is, en daar we deze eigenschap toch gaarne wenschen te behouden,

stellen we als voorwaarde, dat de oneindige producten, die we behandelen, absoluut convergent zijn.

Ook kan nog bewezen worden, dat een absoluut convergeerend product alleen dan nul kan zijn, wanneer een der factoren nul is.

3. Beschouwen we thans het oneindige product

$$P = \prod_{\nu=1}^{\infty} (1 + u_\nu),$$

waarin

$$u_1, u_2, u_3, \ldots\ldots, u_\nu, \ldots\ldots$$

holomorphe functies van z zijn in een zeker gebied (E). Opdat dit oneindige product eene holomorphe functie van z in het gebied (E) voorstelle, moet in de eerste plaats het oneindige product absoluut convergent zijn in het gebied (E) en in de tweede plaats moet het in dit gebied uniform convergent zijn, d. w. z. met elk positief getal ε moet men een positief getal r kunnen doen overeenkomen zoodanig, dat, voor alle waarden van z in het gebied (E)

$$\left| P - P_n \right| < \varepsilon$$

wanneer $n > r$ en waarin P_n het product der eerste n factoren $1 + u_\nu$ voorstelt.

Het oneindige product zal uniform convergent zijn in een zeker gebied, wanneer dit het geval is in dat gebied met de reeks

$$| u_1 | + | u_2 | + | u_3 | + \ldots\ldots + | u_\nu | + \ldots\ldots$$

Het oneindige product

$$\prod_{\nu=1}^{\infty} (1 + u_\nu)$$

zal dus eene holomorphe functie van z voorstellen in het gebied (E), wanneer de reeks

$$| u_1 | + | u_2 | + | u_3 | + \ldots\ldots + | u_\nu | + \ldots\ldots$$

uniform convergeert in dat gebied.

Daar elke functie, die holomorph is in zeker gebied (E),

dat den oorsprong bevat, ontwikkeld kan worden in eene geheele reeks in z, waarvan de convergentiecirkel geheel en al in (E) ligt, kunnen we dus ook zeggen, dat, wanneer van de reeksen

$$u_\nu = b_{\nu,0} + b_{\nu,1} z + b_{\nu,2} z^2 + \ldots + b_{\nu,\mu} z^\mu + \ldots (\nu = 1, 2, \ldots)$$

de stralen der convergentiecirkels gelijk of grooter zijn dan een bepaald positief getal A, en wanneer de reeks

$$| u_1 | + | u_2 | + | u_3 | + \ldots\ldots + | u_\nu | + \ldots\ldots$$

uniform convergent is voor alle waarden van z, die voldoen aan de voorwaarde $| z | < A$, dat dan, voor die waarden van z, het oneindige product

$$\prod_{\nu=1}^{\infty} (1 + u_\nu)$$

eene holomorphe functie van z voorstelt, die dus ontwikkeld kan worden in eene geheele reeks in z, welke convergeert voor de waarden van z waarbij $| z | < A$.

4. Een bijzonder geval van het bovenstaande is voor hetgeen later zal behandeld worden van groot belang.

Stellen we dat de reeks met dubbelen ingang

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} \left| b_{\nu,\mu} A^\mu \right|$$

convergent is.

De voorwaarden, noodig en voldoende hiervoor, zijn:

1°. dat de reeksen

$$| b_{\nu,0} | + | b_{\nu,1} A | + | b_{\nu,2} A^2 | + \ldots\ldots$$

convergent zijn, voor alle waarden van ν. Noemen we de sommen hiervan A_ν;

2°. dat de reeks van positieve grootheden

$$A_1 + A_2 + A_3 + \ldots\ldots$$

convergent is.

Zijn deze voorwaarden vervuld, dan is, daar

$$u_\nu = b_{\nu,0} + b_{\nu,1} z + b_{\nu,2} z^2 + \ldots\ldots + b_{\nu,\mu} z^\mu + \ldots\ldots$$

dus

$$| u_\nu | \leqq | b_{\nu,0} | + | b_{\nu,1} z | + | b_{\nu,2} z^2 | + \ldots\ldots$$

voor alle waarden van z, waarbij $|z| \leqq A$,

$$|u_\nu| \leqq A_\nu.$$

De reeks

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \ldots\ldots + |u_\nu| + \ldots\ldots$$

is dus, zooals gemakkelijk in te zien is, uniform convergent voor alle waarden van z, die voldoen aan de voorwaarde $|z| \leqq A$, en dus zal het oneindige product

$$P = \prod_{\nu=1}^{\infty} (1 + u_\nu)$$

voor die waarden van z eene holomorphe functie van z zijn, die dus in eene geheele reeks in z ontwikkeld kan worden.

5. Merken we nog ten slotte op, dat wanneer eene functie, holomorph in zeker gebied (E), bepaald is door een in dat gebied absoluut en uniform convergeerend oneindig product, de logarithmische afgeleide van die functie gevonden kan worden door de som te nemen van de logarithmische afgeleiden der factoren van het product, wanneer ten minste z niet eene zoodanige waarde heeft, dat een der factoren nul is; waarin dus ligt opgesloten, dat de reeks, gevormd door de logarithmische afgeleiden der factoren van het oneindige product uniform convergeert in het gebied (E), wanneer we hiervan uitzonderen de punten gelegen in de onmiddelijke nabijheid van de in (E) gelegen nulpunten der functie.

Zijn we in het bijzonder geval, dat hierboven is aangehaald, dan is die reeks in het beschreven gebied ook absoluut convergent.

6 Keeren we nu terug tot ons punt van uitgang We kunnen thans dus zeggen, dat het oneindige product

$$\prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_\nu}\right)$$

eene holomorphe functie van z in het geheele eindige gebied zal voorstellen, wanneer de reeks

$$\left|\frac{z}{a_1}\right| + \left|\frac{z}{a_2}\right| + \ldots\ldots + \left|\frac{z}{a_\nu}\right| + \ldots\ldots$$

uniform convergeert voor alle eindige waarden van z. In dit eenvoudige geval verandert deze conditie dus in de voorwaarde, dat de reeks

$$\left|\frac{1}{a_1}\right| + \left|\frac{1}{a_2}\right| + \ldots\ldots + \left|\frac{1}{a_\nu}\right| + \ldots\ldots$$

convergent moet zijn.

Bij de gevallen dat de reeks $\sum_{\nu=1}^{\infty} \left|\frac{1}{a_\nu}\right|$ divergeert, kan het voorkomen, zooals we zien zullen, dat toch een oneindig product, samengesteld uit de factoren $\left(1 - \frac{z}{a_\nu}\right)$, eene holomorphe functie van z in het geheele eindige gebied voorstelt. Men mag dan echter de volgorde der factoren niet willekeurig veranderen, maar moet deze behouden zooals ze gegeven is geworden door de methode, waardoor de holomorphe functie gebracht is in den vorm van een oneindig product. In dit geval zal het dus wenschelijk zijn de productuitdrukking zoodanig te veranderen, dat op de volgorde der factoren niet meer gelet behoeft te worden.

In de meeste gevallen echter zal, als de reeks $\sum_{\nu=1}^{\infty} \left|\frac{1}{a_\nu}\right|$ divergeert, dit ook het geval zijn met het oneindige product

$$\prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_\nu}\right).$$

De in het geheele eindige gebied holomorphe functie $\frac{1}{\Gamma(z+1)}$ bijvoorbeeld heeft tot nullen de reeks

$$-1, -2, -3, \ldots\ldots$$

en nu is zoowel de reeks $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu}$, als het oneindige product

$$\prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{\nu}\right)$$

divergent. Hieruit blijkt dus, dat, wanneer het in die gevallen toch mogelijk is tot eene ontbinding in factoren te komen,

die factoren een ingewikkelder vorm zullen hebben, dan we tot dusver hebben ondersteld.

7. CAUCHY [1]) is de eerste geweest, die getracht heeft eene uitdrukking voor de ontbinding in factoren te vinden. Door toepassing van de rekening met résidu's komt hij tot het volgende resultaat:

Zijn de nullen van eene geheele transcendentale functie $f(z)$

$$a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_\nu, \ldots\ldots, |a_\nu| > 0$$

en hunne graden

$$n_1, n_2, n_3, \ldots\ldots, n_\nu, \ldots\ldots$$

dan kunnen we schrijven:

$$\frac{f(t)}{f(t_0)} = \Pi \left(\frac{a_\nu - t}{a_\nu - t_0}\right)^{n_\nu} e^{-\frac{1}{2\pi i}\int_C F(z)\,dz},$$

waarin C eene gesloten kromme is, die door geen enkele der punten a_ν heen gaat, en waarin het productteeken Π betrekking heeft op alle punten a_ν gelegen binnen C. Verder zijn t_0 en t twee gewone punten gelegen binnen C, en is

$$F(z) = log\,\frac{z-t}{z-t_0}\,\frac{f'(z)}{f(z)}.$$

Laat men nu de kromme C al grooter en grooter worden, zoodat ten slotte al haar punten in het oneindige komen te liggen, dan wordt dus $\frac{f(t)}{f(t_0)}$ uitgedrukt als een oneindig product van factoren $\left(\frac{a_\nu - t}{a_\nu - t_0}\right)^{n_\nu}$, vermenigvuldigd met een exponentieelen factor

$$e^{-\frac{1}{2\pi i}\int_C F(z)\,dz},$$

waarin de integraal te nemen is langs den omtrek van eene geheel in het oneindige liggende kromme.

Deze formule van CAUCHY kan niet beschouwd worden als

---

[1]) CAUCHY, Exercices de Mathématiques, t. III. Zie BRIOT et BOUQUET, Théorie des fonctions elliptiques, ed. II p. 305 e. v.

eene reeds geheel en al afgewerkte uitdrukking voor $f(t)$, omdat de daarin nog voorkomende integraal niet uitgewerkt is. Wel kan de formule gebruikt worden om haar toe te passen op bepaalde voorbeelden, vooral wanneer de gegeven functie zoodanig is, dat we eene reeks krommen C kunnen bedenken, waarvoor de integraal meer en meer tot nul nadert, bij het oneindig worden van de krommen C. We verkrijgen dan $f(t)$ uitgedrukt in den vorm van een oneindig product, welk oneindig product dus convergent moet zijn maar in de meeste gevallen niet absoluut convergent zal wezen. Daar echter de opeenvolging der krommen C bekend is, kennen we van dit oneindige product de opeenvolging der factoren.

Laten we echter in het algemeen de kromme C op eene willekeurige wijze oneindig worden, dan zal in den regel het oneindige product divergent zijn, en dan moet ook de integraal oneindig zijn, omdat, wanneer deze eindig is en dus de exponentieele factor eene steeds van nul verschillende functie bepaalt, de toevoeging van dien factor het divergeerende product niet tot eene eindige waarde kan terugbrengen. Hieruit kunnen we besluiten, dat het wellicht mogelijk moet zijn den exponentieelen factor te splitsen in een oneindig aantal factoren $e^{g_\nu(t)}$, zoodanig, dat het oneindige product van de factoren $(a_\nu - t)^{n_\nu} . e^{g_\nu(t)}$ wel absoluut en ook uniform convergeert.

8. Werkelijk is het WEIERSTRASS gelukt de ontbinding in factoren van eene geheele transcendentale functie op deze wijze tot stand te brengen [1]). De mogelijkheid daartoe heeft hij niet afgeleid uit eene beschouwing van de formule van CAUCHY, maar uit de formule van GAUSS voor de ontbinding in factoren van de reeds vroeger vermelde functie $\frac{1}{\Gamma(z+1)}$.

[1]) WEIERSTRASS. Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen. Abh. der Königl. Akad. der Wissenschaften zu Berlin 1876. Ook in de Abhandlungen aus der Functionenlehre.

GAUSS schrijft deze functie in den vorm van het volgende absoluut en uniform convergeerende oneindige product:

$$\prod_{\nu=1}^{\infty} \left\{ \left(1 + \frac{z}{\nu}\right) \left(\frac{\nu+1}{\nu}\right)^{-z} \right\}$$

of

$$\prod_{\nu=1}^{\infty} \left\{ \left(1 + \frac{z}{\nu}\right) e^{-z \log\left(\frac{\nu+1}{\nu}\right)} \right\}.$$

Hierdoor is WEIERSTRASS er toe gekomen om te trachten de vraag op te lossen, of niet elke geheele transcendentale functie voorgesteld zou kunnen worden als een oneindig product van factoren van den vorm

$$(k\,z + l)\, e^{\overline{G}(z)},$$

waarin $\overline{G}(z)$ eene geheele rationeele of transcendentale functie is en k en l constanten zijn. Zulk een factor noemt WEIERSTRASS eene priemfunctie.

Eene priemfunctie is dus geen lineaire functie van z, maar heeft, evenals deze, slechts een enkel nulpunt en een enkel kritiek punt. Duiden we het kritieke punt door c aan, dan is de meest algemeene vorm van zulk eene priemfunctie:

$$\left(\frac{k}{z-c} + l\right) e^{\overline{G}\left(\frac{1}{z-c}\right)}.$$

9. We zullen in het volgende beginnen met de behandeling van de methode van WEIERSTRASS, en deze doen volgen door twee andere methoden, die tot hetzelfde doel leiden, maar eerst opgesteld zijn, nadat de uitkomst van WEIERSTRASS bekend was, n. l. de methoden van MITTAG-LEFFLER en van FRENZEL.

Daarna stellen we ons voor, een hoofdstuk te wijden aan de bespreking van het geslacht van eene functie en aan de bepaling van den uitwendigen exponentieelen factor, om dan te komen tot de behandeling van eenige voorbeelden, waarbij we echter gelegenheid zullen hebben nog verscheidene zaken van meer algemeenen aard te bespreken, o. a. het bepalen

van den productvorm van eene functie, die door eene lineaire substitutie uit eene gegeven functie wordt afgeleid.

Vervolgens wenschen we over te gaan tot eene uitvoerige behandeling van de kwestie van het geslacht der afgeleide eener functie van gegeven geslacht, en dan te eindigen met het vermelden van eenige andere eigenschappen, die gevonden zijn door verschillende schrijvers, die zich onledig hebben gehouden met het door ons te behandelen onderwerp.

HOOFDSTUK I.

METHODE VAN WEIERSTRASS.

1. Is gegeven eene oneindige reeks van grootheden

$$a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_\nu, \ldots\ldots$$

die alle van nul verschillen en die voldoen aan de conditie

$$\lim_{\nu = \infty} | a_\nu | = \infty,$$

dan zal in enkele gevallen de reeks

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left| \frac{1}{a_\nu} \right|$$

convergent zijn. De reeks

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left| \frac{z}{a_\nu} \right|$$

zal dan dus voor alle eindige waarden van z uniform convergent zijn.

In vele gevallen is eerst de reeks

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left| \frac{1}{a_\nu} \right|^\mu$$

waarin μ een geheel positief getal > 1 is, convergent.

In die gevallen zal dus de reeks

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left| \frac{z}{a_\nu} \right|^\mu$$

uniform convergent zijn voor alle eindige waarden van z.

In het algemeen echter moeten we veronderstellen, dat we geen getal μ kunnen aangeven, waardoor de reeks

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left| \frac{1}{a_\nu} \right|^\mu$$

convergent wordt. Dit is bijv. het geval [1]), wanneer de grootheden a_ν zijn

$$log\ 2,\ log\ 3,\ log\ 4, \ldots\ldots$$

Stellen we toch

$$S_n = \sum_{\nu=2}^{n} \left(\frac{1}{log\ \nu} \right)^\mu,$$

dan is

$$S_n > \frac{n-1}{(log\ n)^\mu}.$$

Verder is

$$\frac{n-1}{(log\ n)^\mu} = \frac{n}{(log\ n)^\mu} - \frac{1}{(log\ n)^\mu}.$$

De tweede term van het tweede lid nadert tot nul, wanneer n oneindig groot wordt, maar de eerste term van het tweede lid neemt met n oneindig toe. Dus is de reeks

$$\sum_{\nu=2}^{\infty} \left(\frac{1}{log\ \nu} \right)^\mu$$

steeds divergent.

2. In die gevallen is het echter steeds mogelijk eene oneindige reeks geheele getallen

$$m_1,\ m_2,\ m_3, \ldots\ldots, m_\nu, \ldots\ldots$$

die ieder $\geqq 0$ zijn, te bepalen, zoodanig dat de reeks

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left| \frac{z}{a_\nu} \right|^{m_\nu + 1}$$

uniform convergent is voor alle eindige waarden van z.

We hebben hiertoe slechts een oneindig aantal positieve grootheden

$$\varepsilon,\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3, \ldots\ldots$$

---

[1]) Zie HERMITE, Cours à la faculté des Sciences 4me éd. p. 86.

aan te nemen, waarvan $\varepsilon < 1$ en die eene convergente reeks vormen, en dan getallen m_ν te bepalen, zoodanig dat

$$\varepsilon^{m_\nu + 1} \leqq \varepsilon_\nu.$$

Deze getallen m_ν zullen de reeks

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left| \frac{z}{a_\nu} \right|^{m_\nu + 1}$$

uniform convergent maken, voor alle eindige waarden van z.

Om dit te bewijzen, stellen we, dat $| z | < | a_n |$ en houden ons alleen bezig met de termen

$$\sum_{\nu=n}^{\infty} \left| \frac{z}{a_\nu} \right|^{m_\nu + 1}.$$

Nemen we ε zóó aan, dat $\left| \frac{z}{a_n} \right| \leqq \varepsilon$, dan is voor alle volgende termen $\left| \frac{z}{a_\nu} \right| \leqq \varepsilon$, en dus

$$\left| \frac{z}{a_\nu} \right|^{m_\nu + 1} \leqq \varepsilon^{m_\nu + 1} \leqq \varepsilon_\nu,$$

zoodat we verkrijgen

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=n}^{\infty} \left| \frac{z}{a_\nu} \right|^{m_\nu + 1} &\leqq \varepsilon_n + \varepsilon_{n+1} + \varepsilon_{n+2} + \ldots \\ &< \varepsilon + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots \end{aligned}$$

en daar het tweede lid eene eindige waarde heeft, is dit ook het geval met het eerste lid. Het eerste lid is dus eene uniform convergente reeks voor alle waarden van z, die voldoen aan de voorwaarde $| z | < | a_n |$, en hetzelfde zal dus het geval zijn met de reeks

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left| \frac{z}{a_\nu} \right|^{m_\nu + 1},$$

die er slechts door een eindig aantal termen van verschilt. Daar verder a_n willekeurig is aangenomen, kunnen we dus zeggen, dat bovenstaande reeks uniform convergent is voor alle eindige waarden van z.

Nemen we bijv. voor de oneindige reeks $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$ de

reeks $\varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \ldots\ldots$, dan is hier $\varepsilon^\nu = \varepsilon_\nu$ dus $m_\nu = \nu - 1$. Voor de getallen m_ν kunnen we dus kiezen de getallen

$$0, 1, 2, 3, \ldots\ldots$$

en we kunnen dus zeggen, dat steeds, voor alle eindige waarden van z, de reeks

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left| \frac{z}{a_\nu} \right|^\nu$$

uniform convergent zal zijn.

We kunnen nog opmerken, dat het geval, waarin

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left| \frac{z}{a_\nu} \right|^\mu$$

uniform convergeert, op te vatten is als een bijzonder geval van hetgeen hier het laatst is behandeld. We hebben dan slechts alle getallen m_ν gelijk aan $\mu - 1$ te nemen.

3. Weierstrass plaatst zich dan ook dadelijk op het meest algemeene standpunt, en onderstelt dus dat er eene oneindige reeks grootheden

$$a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_\nu, \ldots\ldots$$

gegeven is, die alle van nul verschillen, en die voldoen aan de voorwaarde

$$\lim_{\nu=\infty} | a_\nu | = \infty,$$

en verder, dat er aan deze grootheden toegevoegd is eene reeks positieve geheele getallen

$$m_1, m_2, m_3, \ldots\ldots, m_\nu, \ldots\ldots$$

zoodanig, dat

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left| \frac{z}{a_\nu} \right|^{m_\nu + 1}$$

eene uniform convergente reeks is voor alle eindige waarden van z.

Hij bewijst dan:

1°. dat er steeds eene geheele transcendentale functie $G_0(z)$ te construeeren is, die de gegeven reeks a_ν tot nulpunten heeft, en

2^0. dat elke andere geheele transcendentale functie, die dezelfde nulpunten heeft als $G_0(z)$, gebracht kan worden in den vorm:

$$e^{\overline{G}(z)} . \; G_0(z)$$

waarin $\overline{G}(z)$ eene geheele rationeele of transcendentale functie is.

4. WEIERSTRASS voert daarbij nog in de volgende hulpgrootheden:

$$\begin{aligned} E(x, 0) &= 1 - x \\ E(x, 1) &= (1 - x)\, e^x \\ E(x, 2) &= (1 - x)\, e^{x + \frac{1}{2} x^2} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ E(x, m) &= (1 - x)\, e^{\sum_{r=1}^{m} \frac{x^r}{r}} . \end{aligned}$$

Deze functies $E(x, m)$ kunnen geschreven worden in den vorm van eene reeks

$$1 + \alpha_1 x^{m+1} + \alpha_2 x^{m+2} + \ldots + \alpha_k x^{m+k} + \ldots$$

welke convergeert voor alle eindige waarden van x en waarin de coëfficienten

$$\alpha_1, \; \alpha_2, \ldots, \; \alpha_k, \ldots$$

reëel zijn en kleiner dan de eenheid in absolute waarde.

Dit berust op de volgende stelling:

Zijn $f(y) = a_0 + a_1 y + \ldots + a_n y^n + \ldots$

en $\varphi(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n + \ldots$

twee geheele reeksen, en is de 2de reeks absoluut convergent voor $|x| < A$ en alsdan $|\varphi(x)| \leqq B$, en is de 1ste reeks absoluut convergent voor $y = B$, terwijl A en B positieve getallen voorstellen, dan kan, wanneer we in de 1ste reeks stellen $y = \varphi(x)$, die reeks geschreven worden als geheele reeks in x, welke absoluut en uniform convergeert voor de waarden van x waarvoor $|x| < A$.

In het geval der functie

$$E(x, m) = (1 - x)\, e^{\sum_{r=1}^{m} \frac{x^r}{r}}$$

is

$$f(y) = e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \ldots\ldots$$

$$\varphi(x) = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \ldots\ldots + \frac{x^m}{m},$$

zoodat dus $f[\varphi(x)]$ en dus ook $(1-x)f[\varphi(x)]$ als geheele reeks in x geschreven kan worden, die voor alle eindige waarden van x convergeert.

Daar voor $|x| < 1$

$$log\ \frac{1}{1-x} = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \ldots\ldots + \frac{x^m}{m} + \frac{x^{m+1}}{m+1} + \ldots\ldots$$

is voor die waarden van x,

$$E(x, m) = (1-x)\, e^{log\ \frac{1}{1-x}}\, e^{-\frac{x^{m+1}}{m+1} - \frac{x^{m+2}}{m+2} - \ldots\ldots}$$

$$= e^{-\frac{x^{m+1}}{m+1} - \frac{x^{m+2}}{m+2} - \ldots\ldots}.$$

Vervangt men nu in

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \ldots\ldots$$

y door

$$-\frac{x^{m+1}}{m+1} - \frac{x^{m+2}}{m+2} - \ldots\ldots,$$

dan ziet men dat de ontwikkeling van $E(x, m)$ moet zijn

$$1 + \alpha_1 x^{m+1} + \alpha_2 x^{m+2} + \ldots\ldots + \alpha_k x^{m+k} + \ldots\ldots$$

Deze coëfficienten α_k moeten nu in absolute waarde kleiner dan de eenheid zijn. Door toch in

$$f(y) = e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \ldots\ldots$$

te stellen

$$y = \varphi(x) = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \ldots\ldots + \frac{x^m}{m},$$

ziet men, dat de coëfficienten β_m van de ontwikkeling

$$f[\varphi(x)] = 1 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \ldots\ldots + \beta_m x^m + \ldots\ldots$$

positief zijn; en stelt men in $f(y)$

$$y = \psi(x) = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \ldots\ldots + \frac{x^m}{m} + \ldots\ldots,$$

dan is het duidelijk, dat men eene dergelijke ontwikkeling verkrijgt, waarvan de coëfficienten echter deels grooter deels dezelfde zijn.

Nu is echter voor $| x | < 1$:

$$\psi(x) = log \frac{1}{1-x},$$

dus

$$f[\psi(x)] = e^{log \frac{1}{1-x}} = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots\ldots + x^m + \ldots\ldots,$$

waaruit dus volgt:

$$\beta_m \leqq 1. \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots\ldots)$$

Verder is dan:

$$\begin{aligned} E(x, m) &= (1-x)(1 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \ldots\ldots) \\ &= 1 + (\beta_1 - 1)x + (\beta_2 - \beta_1)x^2 + \ldots\ldots \\ &= 1 + \alpha_1 x^{m+1} + \alpha_2 x^{m+2} + \ldots\ldots + \alpha_k x^{m+k} + \ldots\ldots \end{aligned}$$

waaruit dus volgt:

$$| \alpha_k | \leqq 1.$$

Vervangt men dus in de reeks

$$\alpha_1 x^{m+1} + \alpha_2 x^{m+2} + \ldots\ldots$$

x door een positief getal ξ kleiner dan 1 en de coëfficienten α_k door hunne absolute waarden, dan is de som van die reeks kleiner dan

$$\frac{\xi^{m+1}}{1-\xi}.$$

5. Construeeren we nu met de gegeven reeks grootheden a_ν en de daarbij bepaalde getallen m_ν de functies

$$E\left(\frac{z}{a_\nu}, m_\nu\right) = \left(1 - \frac{z}{a_\nu}\right) e^{\sum_{r=1}^{m_\nu} \frac{1}{r}\left(\frac{z}{a_\nu}\right)^r}$$

en vormen we verder met deze functies het oneindige product

$$\prod_{\nu=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{a_\nu}, m_\nu\right),$$

dan kunnen we bewijzen, dat dit oneindige product absoluut en uniform convergeert voor elke eindige waarde van z en dus eene geheele transcendentale functie van z definieert.

Zij A een willekeurig positief getal en beschouwen we die waarden van z waarvoor $|z| \leqq A$. Daar de grootheden $|a_\nu|$ oneindig toenemen, is er een getal p aan te geven, zoodanig dat $|a_\nu| > A$, als $\nu \geqq p$. Beschouwen we dan het oneindig product

$$\prod_{\nu=p}^{\infty} E\left(\frac{z}{a_\nu}, m_\nu\right).$$

Elk der factoren E kan geschreven worden in den vorm:

$$1 + \alpha_1^{(\nu)}\left(\frac{z}{a_\nu}\right)^{m_\nu+1} + \ldots\ldots + \alpha_k^{(\nu)}\left(\frac{z}{a_\nu}\right)^{m_\nu+k} + \ldots\ldots = 1 + u_\nu(z)$$

terwijl we dan tevens weten, dat, wanneer we in $u_\nu(z)$, z vervangen door A, de grootheden a_ν en de coëfficienten $\alpha_k^{(\nu)}$ door hunne absolute waarden, de som van die reeks kleiner is dan

$$\left|\frac{A}{a_\nu}\right|^{m_\nu+1} \frac{1}{1-\left|\frac{A}{a_\nu}\right|} = \left|\frac{A}{a_\nu}\right|^{m_\nu+1} \frac{|a_\nu|}{|a_\nu| - A}.$$

We kunnen nu terstond zeggen, dat het oneindige product

$$\prod_{\nu=p}^{\infty} \{1 + u_\nu(z)\}$$

absoluut en uniform convergent is voor alle waarden van z, die voldoen aan de voorwaarde $|z| \leqq A$, daar we hier verkeeren in het bijzondere geval, dat we in de inleiding hebben behandeld (§ 4). De reeks met dubbelen ingang

$$\sum_{\nu=p}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left|\alpha_k^{(\nu)}\left(\frac{A}{a_\nu}\right)^{m_\nu+k}\right|$$

namelijk is convergent, want er wordt voldaan aan de hiertoe noodige voorwaarden:

1°. dat de reeksen

$$\left|\alpha_1^{(\nu)}\left(\frac{A}{a_\nu}\right)^{m_\nu+1}\right| + \left|\alpha_2^{(\nu)}\left(\frac{A}{a_\nu}\right)^{m_\nu+2}\right| + \ldots\ldots$$

convergent zijn, voor elke waarde van ν gelegen tusschen p en ∞. De sommen A_ν van deze reeksen toch zijn, zooals

we zooeven gezien hebben kleiner dan

$$\left|\frac{A}{a_\nu}\right|^{m_\nu+1} \frac{|a_\nu|}{|a_\nu| - A}.$$

2°. dat de reeks

$$A_p + A_{p+1} + \ldots\ldots + A_\nu + \ldots\ldots$$

convergent is. De som van deze reeks toch is kleiner dan die van

$$\sum_{\nu=p}^{\infty} \left|\frac{A}{a_\nu}\right|^{m_\nu+1} \frac{|a_\nu|}{|a_\nu| - A},$$

en deze reeks is convergent, omdat de verhouding van hare termen met de overeenkomstige van de convergente reeks

$$\sum_{\nu=p}^{\infty} \left|\frac{A}{a_\nu}\right|^{m_\nu+1}$$

de eenheid tot limiet heeft, als ν oneindig toeneemt.

Het oneindige product

$$\prod_{\nu=p}^{\infty} E\left(\frac{z}{a_\nu}, m_\nu\right)$$

is dus absoluut en uniform convergent voor alle waarden van z, waarbij $|z| \leqq A$, en daar de toevoeging van het eindige aantal factoren

$$\prod_{\nu=1}^{p-1} E\left(\frac{z}{a_\nu}, m_\nu\right)$$

niets aan de convergentie zal veranderen, is dus het oneindige product

$$\prod_{\nu=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{a_\nu}, m_\nu\right) = \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_\nu}\right) e^{\sum_{r=1}^{m_\nu} \frac{1}{r}\left(\frac{z}{a_\nu}\right)^r}$$

ook absoluut en uniform convergent voor de waarden van z, waarbij $|z| \leqq A$, en daar A willekeurig is aangenomen, is dit product zelfs voor alle eindige waarden van z absoluut en uniform convergent. Het kan dus ontwikkeld worden in eene geheele reeks in z, die voor alle eindige waarden van z convergeert.

Daar het oneindige product alleen nul kan worden als een der factoren nul wordt, en daar de factor

$$E\left(\frac{z}{a_\nu}, m_\nu\right) = \left(1 - \frac{z}{a_\nu}\right) e^{\sum_{r=1}^{m_\nu} \frac{1}{r}\left(\frac{z}{a_\nu}\right)^r}$$

slechts nul wordt voor $z = a_\nu$, hebben we dus eene geheele transcendentale functie van z, $G_0(z)$, in den vorm van een oneindig product, geconstrueerd, die de gegeven reeks

$$a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_\nu, \ldots\ldots$$

tot nulpunten heeft.

6. Deze functie $G_0(z)$ is echter niet de eenige, die aan de vraag voldoet. De functie $e^{z^2} . G_0(z)$ bijv. heeft natuurlijk dezelfde nullen als $G_0(z)$ en geen enkele andere, daar de factor e^{z^2} voor geen eindige waarde van z nul wordt.

Wanneer we dus onderstellen, dat de geheele transcendentale functie $G(z)$ dezelfde nullen heeft als $G_0(z)$, dan kunnen we vragen den meest algemeenen vorm van $G(z)$ te bepalen.

Het quotient $\frac{G(z)}{G_0(z)}$, dat we zullen aanduiden door $G_1(z)$, is eene functie, die voor elke eindige waarde van z eene eindige van nul verschillende waarde heeft. Daaruit volgt dat de functie

$$\frac{1}{G_1(z)} \frac{d\, G_1(z)}{d\, z}$$

voor elke eindige waarde van z eene eindige waarde heeft en dus ontwikkeld kan worden in eene reeks

$$C_1 + C_2\, z + C_3\, z^2 + \ldots\ldots$$

die in het geheele eindige gebied convergeert.

Integreeren we deze functie tusschen de grenzen 0 en z, dan verkrijgen we:

$$log\ G_1(z) = C' + C_1\, z + \frac{1}{2} C_2\, z^2 + \ldots\ldots = C' + \bar{G}(z)$$

$$G_1(z) = C\, e^{\bar{G}(z)}$$

en dus $$G(z) = C\, e^{\overline{G}(z)}.\ G_0(z),$$

waarin $\overline{G}(z)$ eene geheele rationeele of transcendentale functie is, die voor $z = 0$ verdwijnt, en waarin

$$C = \frac{G(0)}{G_0(0)},$$

of daar $G_0(0) = 1$,

$$C = G(0).$$

7. Is de oorsprong ook nog een nulpunt van de orde λ van de functie $G(z)$, dan moeten we den factor z^λ nog toevoegen en verkrijgen:

$$G(z) = C\, z^\lambda\, e^{\overline{G}(z)}\, G_0(z),$$

waarin nu

$$C = \left[\frac{G(z)}{z^\lambda}\right]_{z=0}.$$

De meest algemeene vorm dus voor eene geheele transcendentale functie, die de gegeven reeks a_ν tot nulpunten heeft en daarenboven nog in den oorsprong nul wordt als z^λ, is:

$$G(z) = C\, z^\lambda\, e^{\overline{G}(z)} \prod_{\nu=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{a_\nu},\ m_\nu\right) =$$

$$= C\, z^\lambda\, e^{\overline{G}(z)} \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_\nu}\right) e^{\sum_{r=1}^{m_\nu} \frac{1}{r}\left(\frac{z}{a_\nu}\right)^r}.$$

We hebben hierbij stilzwijgend aangenomen, dat de nullen a_ν alle enkelvoudige nullen waren.

Is de orde van de nul a_ν, p_ν, dan ondergaat de voorgaande redeneering geen verandering, en dan verkrijgen we voor $G(z)$:

$$G(z) = C\, z^\lambda\, e^{\overline{G}(z)} \prod_{\nu=1}^{\infty} \left\{\left(1 - \frac{z}{a_\nu}\right) e^{\sum_{r=1}^{m_\nu} \frac{1}{r}\left(\frac{z}{a_\nu}\right)^r}\right\}^{p_\nu}.$$

We kunnen echter ook eenvoudigheidshalve de voorgaande formule wel blijven behouden, wanneer we dan slechts onderstellen, dat de nul a_ν ook p_ν keer voorkomt in de reeks

$$a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots$$

De factoren $E\left(\frac{z}{a_\nu}, m_\nu\right)$ zijn alle priemfuncties, zooals we deze vroeger gedefinieerd hebben. Ook kunnen we den factor C, de λ factoren z en den factor $e^{G(z)}$ als zoodanig opvatten, waardoor dus bewezen is, dat elke geheele transcendentale functie voorgesteld kan worden als een product van priemfuncties.

Hebben we het bijzondere geval, dat de reeks

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left| \frac{1}{a_\nu} \right|^\mu$$

convergeert, dan wordt de algemeene vorm

$$G(z) = C z^\lambda e^{G(z)} \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_\nu}\right) e^{\sum_{r=1}^{\mu-1} \frac{1}{r} \left(\frac{z}{a_\nu}\right)^r},$$

en convergeert reeds de reeks

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left| \frac{1}{a_\nu} \right|,$$

dan heeft men

$$G(z) = C z^\lambda e^{G(z)} \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_\nu}\right).$$

Heeft de functie $G(z)$ geen nullen, dan is de algemeene vorm

$$G(z) = C e^{G(z)},$$

en heeft ze slechts een eindig aantal nullen $a_1, a_2, \ldots, a_n$, behalve $z = 0$, dan is

$$G(z) = C z^\lambda e^{G(z)} \prod_{\nu=1}^{n} \left(1 - \frac{z}{a_\nu}\right).$$

HOOFDSTUK II.

METHODE VAN MITTAG-LEFFLER.

1. Differentieeren we logarithmisch de door WEIERSTRASS gevonden formule:

$$G(z) = C\, z^{\lambda}\, e^{\overline{G}(z)} \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_\nu}\right) e^{\sum_{r=1}^{m_\nu} \frac{1}{r}\left(\frac{z}{a_\nu}\right)^r}$$

dan verkrijgen we:

$$\frac{G'(z)}{G(z)} = \frac{\lambda}{z} + \overline{G}'(z) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[\frac{-\frac{1}{a_\nu}}{1 - \frac{z}{a_\nu}} + \sum_{r=1}^{m_\nu} \frac{1}{a_\nu}\left(\frac{z}{a_\nu}\right)^{r-1} \right] =$$

$$= \frac{\lambda}{z} + \overline{G}'(z) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[\frac{1}{z - a_\nu} + \sum_{r=0}^{m_\nu - 1} \frac{1}{a_\nu}\left(\frac{z}{a_\nu}\right)^r \right]$$

hetgeen dus wordt voor het geval, dat er geen wortels nul zijn,

$$\frac{G'(z)}{G(z)} = \overline{G}'(z) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[\frac{1}{z - a_\nu} + \sum_{r=0}^{m_\nu - 1} \frac{1}{a_\nu}\left(\frac{z}{a_\nu}\right)^r \right],$$

en dit weer voor het geval, dat de reeks $\sum_{\nu=1}^{\infty} \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{\mu}$ convergeert,

$$\frac{G'(z)}{G(z)} = \overline{G}'(z) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[\frac{1}{z - a_\nu} + \sum_{r=0}^{\mu - 2} \frac{1}{a_\nu}\left(\frac{z}{a_\nu}\right)^r \right],$$

of, wanneer we $\mu = \omega + 1$ stellen,

$$\frac{G'(z)}{G(z)} = \overline{G}'(z) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[\frac{1}{z-a_\nu} + \sum_{r=0}^{\omega-1} \frac{1}{a_\nu^{r+1}} \left(\frac{z}{a_\nu} \right)^r \right],$$

en wanneer $\mu = 1$, dus $\omega = 0$ is,

$$\frac{G'(z)}{G(z)} = \overline{G}'(z) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[\frac{1}{z-a_\nu} \right].$$

Zooals we reeds in de inleiding hebben opgemerkt, moeten de tweede leden van deze vergelijkingen absoluut en uniform convergent zijn in het geheele eindige gebied, uitgezonderd de plaatsen in de onmiddelijke nabijheid der nulpunten a_ν, wanneer we eenmaal weten, dat het oneindige product van WEIERSTRASS absoluut en uniform convergent is in het geheele eindige gebied.

Omgekeerd zal men door uit te gaan van eene beschouwing dier tweede leden, dat is dus eigenlijk van

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{z-a_\nu},$$

door integratie kunnen komen tot de productuitdrukking van $G(z)$. Dit is het dan ook hetgeen MITTAG-LEFFLER doet in zijne methode, zooals deze ons wordt medegedeeld in den Cours van HERMITE [1]).

2. We zullen hierbij gebruik maken van de volgende stelling, die analoog is met die, welke we als bijzonder geval in de inleiding bij de oneindige producten hebben behandeld.

De reeks

$$u_1 + u_2 + \ldots\ldots + u_\nu + \ldots\ldots$$

waarin $u_1, u_2, \ldots\ldots, u_\nu, \ldots\ldots$ functies zijn van z, die ontwikkeld kunnen worden in reeksen als

$$u_\nu = b_{\nu,0} + b_{\nu,1} z + b_{\nu,2} z^2 + \ldots + b_{\nu,\mu} z^\mu + \ldots \; (\nu = 1, 2, \ldots)$$

waarvan de stralen der convergentiecirkels gelijk of grooter zijn dan een bepaald positief getal A, zal absoluut en uniform convergent zijn voor alle waarden van z, die voldoen

---

[1]) HERMITE, t. a. p. p. 84 e. v.

aan de voorwaarde $| z | \leqq A$ en zal voor die waarden van z in een geheele reeks in z ontwikkeld kunnen worden, als de reeks met dubbelen ingang

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} \left| b_{\nu,\mu} A^{\mu} \right|$$

convergeert. De condities hiertoe noodig hebben we reeds in de inleiding opgegeven (§ 4).

3. Zij dan wederom de reeks a_ν, waarbij

$$| a_\nu | > 0 \text{ en } \lim_{\nu=\infty} | a_\nu | = \infty ,$$

de reeks der enkelvoudige nullen van eene geheele transcendentale functie $G(z)$.

Beschouwen we nu eerst het eenvoudige geval, dat de reeks

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left| \frac{1}{a_\nu} \right| .$$

convergeert.

Zij voor $\nu \geqq p$, $| a_\nu | > A$, dan kan elke term van de reeks

$$\sum_{\nu=p}^{\infty} \frac{1}{z - a_\nu}$$

ontwikkeld worden in eene geheele reeks in z

$$\frac{1}{z-a_\nu} = -\frac{1}{a_\nu} \frac{1}{1-\frac{z}{a_\nu}} = -\frac{1}{a_\nu}\left(1 + \frac{z}{a_\nu} + \frac{z^2}{a_\nu^2} + \ldots\ldots\right) =$$

$$= b_{\nu,0} + b_{\nu,1} z + b_{\nu,2} z^2 + \ldots\ldots ,$$

welke reeksen alle convergeeren voor de waarden van z waarvoor $| z | \leqq A$.

Vervangen we dan in deze reeksen z door A en de grootheden a_ν door hunne moduli, dan zijn de sommen van deze reeksen

$$A_\nu = \frac{1}{A - | a_\nu |} = -\frac{1}{| a_\nu |} \frac{| a_\nu |}{| a_\nu | - A} .$$

Verder is de reeks

$$A_p + A_{p+1} + \ldots\ldots + A_\nu + \ldots\ldots = -\sum_{\nu=p}^{\infty} \frac{1}{| a_\nu |} \frac{| a_\nu |}{| a_\nu | - A}$$

convergent, omdat de verhouding der termen met de

overeenkomstige van de convergente reeks

$$\sum_{\nu=p}^{\infty} \left| \frac{1}{a_\nu} \right|$$

de eenheid tot limiet heeft, bij het grooter worden van ν. Hieruit volgt dus, dat de reeks met dubbelen ingang

$$\sum_{\nu=p}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} \left| b_{\nu,\mu} z^\mu \right|$$

convergent is, dus dat de reeks

$$\sum_{\nu=p}^{\infty} \frac{1}{z - a_\nu}$$

absoluut en uniform convergent is voor de waarden van z, waarvoor $| z | \leqq A$. Voegen we aan deze reeks toe het eindige aantal termen

$$\sum_{\nu=1}^{p-1} \frac{1}{z - a_\nu},$$

waarvan de som oneindig wordt in de punten

$$a_1, a_2, \ldots\ldots, a_{p-1},$$

dan zal dus de reeks

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{z - a_\nu}$$

absoluut en uniform convergent zijn voor alle waarden van z, waarvoor $| z | \leqq A$, uitgezonderd de plaatsen in de onmiddelijke nabijheid van de punten

$$a_1, a_2, \ldots\ldots, a_{p-1}.$$

Daar verder de grootheid A willekeurig is aangenomen, kunnen we dus ook zeggen, dat de reeks

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{z - a_\nu}$$

absoluut en uniform convergent is voor alle eindige waarden van z, uitgezonderd de plaatsen in de onmiddelijke nabijheid van de punten

$$a_1, a_2, \ldots\ldots, a_\nu, \ldots\ldots$$

De functie $\frac{G'(z)}{G(z)}$ heeft ook eene eindige waarde voor elke

eindige waarde van z, die niet samenvalt met een der punten a_ν, en nu is te bewijzen dat het verschil

$$\frac{G'(z)}{G(z)} - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{z - a_\nu}$$

zelfs in die punten eene eindige waarde heeft.

Daar $G(z)$ nul wordt in het punt $z = a_n$, kunnen we schrijven:

$$G(z) = (z - a_n)\, H(z),$$

waarin $H(z)$ eene geheele transcendentale functie is, die niet nul wordt in het punt $z = a_n$.

Hieruit leiden we dus af:

$$\frac{G'(z)}{G(z)} = \frac{1}{z - a_n} + \frac{H'(z)}{H(z)}$$

en dus

$$\frac{G'(z)}{G(z)} - \frac{1}{z - a_n} = \frac{H'(z)}{H(z)},$$

hetgeen eene eindige waarde oplevert voor $z = a_n$.

Daar de andere termen van de som

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{z - a_\nu}$$

eindig zijn voor $z = a_n$, heeft dus

$$\frac{G'(z)}{G(z)} - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{z - a_\nu}$$

in dit punt eene eindige waarde.

Dit zelfde kunnen we natuurlijk bewijzen voor alle andere punten in de reeks a_ν voorkomende.

De functie

$$\frac{G'(z)}{G(z)} - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{z - a_\nu}$$

zal dus absoluut en uniform convergent zijn in het geheele eindige gebied, en kan dus ontwikkeld worden in eene geheele reeks in z, die voor alle eindige waarden van z convergeert en die we gelijkstellen aan de afgeleide $\overline{G}'(z)$ van eene

holomorphe functie. We hebben dus

$$\frac{G'(z)}{G(z)} - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{z-a_\nu} = \overline{G}'(z).$$

Integreeren we deze vergelijking tusschen 0 en z, dan verkrijgen we

$$log\,\frac{G(z)}{C} - \sum_{\nu=1}^{\infty} \Big\{ log\,(z-a_\nu) - log\,(-a_\nu) \Big\} = \overline{G}(z),$$

wanneer $\overline{G}(z)$ die integraal is van $\overline{G}'(z)$, welke voor $z=0$ verdwijnt, en $C = G(0)$.

$$log\ G(z) = log\ C + \overline{G}(z) + \sum_{\nu=1}^{\infty} log\left(1 - \frac{z}{a_\nu}\right)$$

$$G(z) = C\, e^{\overline{G}(z)} \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_\nu}\right),$$

dezelfde uitdrukking, die ook WEIERSTRASS geeft.

4. Wanneer eerst de reeks

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left| \frac{1}{a_\nu} \right|^{\omega+1},$$

waarin $\omega > 0$, convergeert, dan zal de reeks

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{z-a_\nu}$$

niet absoluut en uniform convergent zijn, maar dan zal, wanneer we invoeren het polynomium

$$P_\omega\left(\frac{z}{a_\nu}\right) = \frac{1}{a_\nu} + \frac{z}{a_\nu^2} + \frac{z^2}{a_\nu^3} + \ldots + \frac{z^{\omega-1}}{a_\nu^{\omega}} = \sum_{r=0}^{\omega-1} \frac{1}{a_\nu}\left(\frac{z}{a_\nu}\right)^r,$$

de reeks

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left[\frac{1}{z-a_\nu} + P_\omega\left(\frac{z}{a_\nu}\right) \right] = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{z^\omega}{a_\nu^\omega\,(z-a_\nu)}$$

wel absoluut en uniform convergent zijn voor alle eindige waarden van z, uitgezonderd de plaatsen in de onmiddelijke nabijheid van de nulpunten a_ν.

Voor $\nu \geqq p$ en $|z| \leqq A$ kunnen we toch schrijven:

$$\frac{z^\omega}{a_\nu^\omega\,(z-a_\nu)} = -\frac{z^\omega}{a_\nu^{\omega+1}} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{a_\nu}} = -\frac{z^\omega}{a_\nu^{\omega+1}}\left(1 + \frac{z}{a_\nu} + \frac{z^2}{a_\nu^2} + \ldots\right)$$

$$= b_{\nu,\omega}\, z^\omega + b_{\nu,\omega+1}\, z^{\omega+1} + \ldots,$$

en vervangen we hierin z door A en a_ν door den modulus, dan is de som van die reeks

$$A_\nu = \frac{A^\omega}{|a_\nu|^\omega (A - |a_\nu|)} = -\frac{1}{A}\left|\frac{A}{a_\nu}\right|^{\omega+1}\frac{|a_\nu|}{|a_\nu| - A}.$$

Daar nu de reeks

$$\sum_{\nu=p}^{\infty}\left|\frac{A}{a_\nu}\right|^{\omega+1}$$

convergeert, is dit ook het geval met de reeks

$$\sum_{\nu=p}^{\infty} A_\nu,$$

dus met de reeks met dubbelen ingang

$$\sum_{\nu=p}^{\infty}\sum_{\mu=\omega}^{\infty}\left|b_{\nu,\mu}\, A^\mu\right|.$$

De reeks

$$\sum_{\nu=p}^{\infty}\frac{z^\omega}{a_\nu^\omega (z - a_\nu)}$$

is dus absoluut en uniform convergent voor alle waarden van z, waarvoor $|z| \leqq A$, waaruit dus weer volgt, dat de reeks

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{z^\omega}{a_\nu^\omega (z - a_\nu)}$$

absoluut en uniform convergent is voor alle eindige waarden van z, uitgezonderd de plaatsen in de onmiddelijke nabijheid van de nulpunten a_ν.

De functie

$$\frac{G'(z)}{G(z)} - \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{z^\omega}{a_\nu^\omega (z - a_\nu)} = \frac{G'(z)}{G(z)} - \sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{1}{z - a_\nu} + P_\omega\left(\frac{z}{a_\nu}\right)\right]$$

zal nu weer, ook in de punten a_ν, eene eindige waarde hebben. Immers

$$\frac{G'(z)}{G(z)} - \frac{z^\omega}{a_n^\omega (z - a_n)} = \frac{1}{z - a_n} + \frac{H'(z)}{H(z)} - \frac{z^\omega}{a_n^\omega (z - a_n)} =$$

$$= \frac{H'(z)}{H(z)} - \frac{z^\omega - a_n^\omega}{a_n^\omega (z - a_n)} = \frac{H'(z)}{H(z)} - \frac{1}{a_n^\omega}(z^{\omega-1} + z^{\omega-2} a_n + \ldots + a_n^{\omega-1}),$$

hetgeen eene eindige waarde oplevert voor $z = a_n$.

Bovenstaande functie kan dus weer ontwikkeld worden in eene geheele reeks in z, $\overline{G}'(z)$, die in het geheele eindige vlak convergeert. We kunnen dus weer schrijven:

$$\frac{G'(z)}{G(z)} - \sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{1}{z-a_\nu} + P_\omega\left(\frac{z}{a_\nu}\right)\right] = \overline{G}'(z),$$

en vinden hieruit

$$log\,\frac{G(z)}{C} - \sum_{\nu=1}^{\infty}\left\{ log\left(1-\frac{z}{a_\nu}\right) + Q_\omega\left(\frac{z}{a_\nu}\right)\right\} = \overline{G}(z),$$

waarin

$$Q_\omega\left(\frac{z}{a_\nu}\right) = \frac{z}{a_\nu} + \frac{1}{2}\frac{z^2}{a_\nu^2} + \ldots + \frac{1}{\omega}\frac{z^\omega}{a_\nu^\omega} = \sum_{r=1}^{\omega}\frac{1}{r}\left(\frac{z}{a_\nu}\right)^r,$$

dus

$$G(z) = C\,e^{\overline{G}(z)}\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_\nu}\right)e^{Q_\omega\left(\frac{z}{a_\nu}\right)},$$

hetgeen wederom de uitdrukking van WEIERSTRASS is.

5. Kunnen we ten slotte geen getal ω aangeven waardoor

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{\omega+1}$$

convergeert, maar hebben we de getallen m_ν bepaald, waardoor

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|\frac{z}{a_\nu}\right|^{m_\nu+1}$$

uniform convergeert voor alle eindige waarden van z, dan geven we de polynomia P een veranderlijk aantal termen, door te stellen

$$P_{m_\nu}\left(\frac{z}{a_\nu}\right) = \frac{1}{a_\nu} + \frac{z}{a_\nu^2} + \frac{z^2}{a_\nu^3} + \ldots + \frac{z^{m_\nu-1}}{a_\nu^{m_\nu}} = \sum_{r=0}^{m_\nu-1}\frac{1}{a_\nu}\left(\frac{z}{a_\nu}\right)^r$$

en kunnen dan evenzoo bewijzen, dat de reeks

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{1}{z-a_\nu} + P_{m_\nu}\left(\frac{z}{a_\nu}\right)\right] = \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{z^{m_\nu}}{a_\nu^{m_\nu}(z-a_\nu)}$$

absoluut en uniform convergeert in het geheele eindige gebied, uitgezonderd de plaatsen in de onmiddelijke nabijheid van de nulpunten a_ν.

Verder zal dan weer de functie

$$\frac{G'(z)}{G(z)} - \sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{1}{z-a_\nu} + P_{m_\nu}\left(\frac{z}{a_\nu}\right)\right]$$

geschreven kunnen worden als eene geheele functie in z, $\overline{G}'(z)$, die in het geheele eindige gebied convergeert, dus

$$\frac{G'(z)}{G(z)} - \sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{1}{z-a_\nu} + P_{m_\nu}\left(\frac{z}{a_\nu}\right)\right] = \overline{G}'(z),$$

waaruit weer volgt:

$$G(z) = C\, e^{\overline{G}(z)} \prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_\nu}\right) e^{Q_{m_\nu}\left(\frac{z}{a_\nu}\right)},$$

waarin

$$Q_{m_\nu}\left(\frac{z}{a_\nu}\right) = \frac{z}{a_\nu} + \frac{1}{2}\frac{z^2}{a_\nu^2} + \ldots + \frac{1}{m_\nu}\frac{z^{m_\nu}}{a_\nu^{m_\nu}} = \sum_{r=1}^{m_\nu}\frac{1}{r}\left(\frac{z}{a_\nu}\right)^r,$$

zoodat ook in dit geval de uitdrukking van WEIERSTRASS teruggevonden is.

HOOFDSTUK III.

METHODE VAN FRENZEL.

1. FRENZEL heeft laten zien [1]), dat men door toepassing van de methode van CAUCHY, dat is dus door gebruik te maken van de rekening met résidu's, ook kan komen tot de algemeen geldende uitdrukking voor eene geheele transcendentale functie, ontbonden in hare priemfuncties.

Daar de redeneering van FRENZEL niet exact is, zijn we genoodzaakt, ter vermijding van dit gebrek, zijne methode in een gewijzigden vorm hier voor te dragen.

2. De résidu van eene meromorphe functie $F(z)$ ten opzichte van eene pool α, waarvan de verkorte notatie is:

$$\mathop{\mathcal{E}}_{(\alpha)} F(z),$$

is de waarde van de integraal:

$$\frac{1}{2\pi i}\int F(z)\,dz,$$

genomen langs den omtrek van een klein cirkeltje, waarvan α het middelpunt is en waar binnen geen andere polen gelegen

---

[1]) FRENZEL. Die Darstellung der eindeutigen analytischen Functionen durch unendliche Producte und Partialbruchen. Zeitschr. f. Math. u. Phys. v. SCHLÖMILCH XXIV (1879) p. 316 e. v.

zijn. M. a. w. de résidu is gelijk aan den coëfficient van $\frac{1}{z-\alpha}$ in de ontwikkeling van $F(z)$ in de nabijheid van $z=\alpha$.

Is de pool enkelvoudig, zoodat

$$F(z)=\frac{f(z)}{z-\alpha},$$

waarin $f(z)$ niet oneindig wordt voor $z=\alpha$, dan is de ontwikkeling in de nabijheid van $z=\alpha$:

$$F(z)=\frac{f(\alpha)+(z-\alpha)f'(\alpha)+\ldots\ldots}{z-\alpha}$$

en dus

$$\mathop{\mathcal{L}}_{(\alpha)} F(z)=f(\alpha).$$

Is de pool p-voudig, zoodat

$$F(z)=\frac{f(z)}{(z-\alpha)^p},$$

dan is de ontwikkeling in de nabijheid van $z=\alpha$:

$$F(z)=\frac{f(\alpha)+(z-\alpha)f'(\alpha)+\ldots+\frac{(z-\alpha)^{p-1}}{(p-1)!}f^{(p-1)}(\alpha)+\ldots}{(z-\alpha)^p}$$

dus

$$\mathop{\mathcal{L}}_{(\alpha)} F(z)=\frac{f^{(p-1)}(\alpha)}{(p-1)!}.$$

3. Zij nu wederom gegeven eene geheele transcendentale functie $G(z)$, die in den oorsprong eene nul bezit van de orde λ, terwijl de andere nullen

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_\nu, \ldots$$

resp. de ordegetallen

$$p_1, p_2, p_3, \ldots, p_\nu, \ldots$$

bezitten, en voldoen aan de voorwaarde

$$\lim_{\nu=\infty} |a_\nu| = \infty.$$

We onderstellen verder, dat we verkeeren in het geval, dat de reeks

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{p_\nu}{|a_\nu|^{\omega+1}}$$

convergeert.

De functie

$$\frac{G'(z)}{G(z)}$$

heeft dan den oorsprong en de reeks a_ν tot enkelvoudige polen.

Beschouwen we nu de integraal:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_s \frac{G'(z)}{G(z)(z-t)}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_s F(z)\,dz$$

genomen langs den omtrek van eene willekeurige gesloten kromme s, die we kunnen aannemen dat den oorsprong omsluit en niet mag gaan door een der punten a_ν.

Liggen de punten $a_1, \ldots\ldots, a_n$ binnen deze kromme, hetgeen ook het geval moet zijn met het punt t, dan is volgens CAUCHY:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_s \frac{G'(z)}{G(z)(z-t)}\,dz = \sum_{(0)} F(z) + \sum_{(t)} F(z) + \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{(a_\nu)} F(z).$$

Nu kunnen we schrijven:

$$F(z) = \left\{\frac{\lambda}{z} + f(z)\right\}\frac{1}{z-t}$$

waarin $f(z)$ holomorph is in de nabijheid van $z=0$, en ook:

$$F(z) = \left\{\frac{p_\nu}{z-a_\nu} + f_\nu(z)\right\}\frac{1}{z-t},$$

waarin $f_\nu(z)$ holomorph is in de nabijheid van $z=a_\nu$. Dus is:

$$\sum_{(0)} F(z) = \frac{\lambda}{-t} \text{ en } \sum_{(a_\nu)} F(z) = \frac{p_\nu}{a_\nu - t}$$

en verder is:

$$\sum_{(t)} F(z) = \frac{G'(t)}{G(t)},$$

zoodat we verkrijgen:

$$\frac{G'(t)}{G(t)} = \frac{\lambda}{t} + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{p_\nu}{t-a_\nu} + \frac{1}{2\pi i}\int_s \frac{G'(z)}{G(z)(z-t)}\,dz.$$

Schrijven we nu:

$$\frac{1}{z-t} = \frac{1}{z} + \frac{t}{z^2} + \frac{t^2}{z^3} + \ldots\ldots + \frac{t^{w-1}}{z^w} + \frac{t^w}{z^w(z-t)},$$

dan kunnen we voor de laatste integraal schrijven:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_s \frac{G'(z)}{G(z)(z-t)}\,dz = \sum_{m=1}^{\omega} \frac{t^{m-1}}{2\pi i}\int_s \frac{G'(z)}{z^m\,G(z)}\,dz + \\ + \frac{t^\omega}{2\pi i}\int_s \frac{G'(z)}{z^\omega\,G(z)}\frac{1}{z-t}\,dz.$$

Nu is weer:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_s \frac{G'(z)}{z^m\,G(z)}\,dz = \mathcal{L}_{(0)}\frac{G'(z)}{z^m\,G(z)} + \sum_{\nu=1}^{n}\mathcal{L}_{(a_\nu)}\frac{G'(z)}{z^m\,G(z)}.$$

In de nabijheid van $z=0$ kunnen we schrijven:

$$\frac{G'(z)}{z^m\,G(z)} = \frac{1}{z^m}\left\{\frac{\lambda}{z} + f(0) + zf'(0) + \ldots + \frac{z^{m-1}}{(m-1)!}f^{(m-1)}(0) + \ldots\right\}$$

dus:

$$\mathcal{L}_{(0)}\frac{G'(z)}{z^m\,G(z)} = \frac{1}{(m-1)!}f^{(m-1)}(0),$$

en verder is:

$$\mathcal{L}_{(a_\nu)}\frac{G'(z)}{z^m\,G(z)} = \frac{p_\nu}{a_\nu{}^m},$$

dus:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_s \frac{G'(z)}{z^m\,G(z)}\,dz = \frac{1}{(m-1)!}f^{(m-1)}(0) + \sum_{\nu=1}^{n}\frac{p_\nu}{a_\nu{}^m},$$

waaruit volgt:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_s \frac{G'(z)}{G(z)(z-t)}\,dz = f(0) + tf'(0) + \ldots + \frac{t^{\omega-1}}{(\omega-1)!}f^{(\omega-1)}(0) + \\ + \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu\left(\frac{1}{a_\nu} + \frac{t}{a_\nu{}^2} + \ldots\ldots + \frac{t^{\omega-1}}{a_\nu{}^\omega}\right) \\ + \frac{t^\omega}{2\pi i}\int_s \frac{G'(z)}{z^\omega\,G(z)}\frac{1}{z-t}\,dz,$$

en eindelijk:

$$\frac{G'(t)}{G(t)} = \frac{\lambda}{t} + \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu\left(\frac{1}{t-a_\nu} + \frac{1}{a_\nu} + \frac{t}{a_\nu{}^2} + \ldots + \frac{t^{\omega-1}}{a_\nu{}^\omega}\right) \\ + f(0) + tf'(0) + \ldots\ldots + \frac{t^{\omega-1}}{(\omega-1)!}f^{(\omega-1)}(0) \\ + \frac{t^\omega}{2\pi i}\int_s \frac{G'(z)}{z^\omega\,G(z)}\frac{1}{z-t}\,dz =$$

$$= \frac{\lambda}{t} + \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu \left[\frac{1}{t - a_\nu} + P_\omega \left(\frac{t}{a_\nu} \right) \right]$$

$$+ f(0) + t f'(0) + \ldots + \frac{t^{\omega-1}}{(\omega-1)!} f^{(\omega-1)}(0)$$

$$+ \frac{t^\omega}{2\pi i} \int_s \frac{G'(z)}{z^\omega G(z)} \frac{1}{z-t} dz.$$

Integreeren we deze vergelijking tusschen 0 en t, dan wordt:

$$G(t) = C t^\lambda \prod_{\nu=1}^{n} \left[\left(1 - \frac{t}{a_\nu}\right) e^{Q_\omega \left(\frac{t}{a_\nu}\right)} \right]^{p_\nu} \times e^U,$$

waarin, evenals vroeger,

$$C = \left[\frac{G(t)}{t^\lambda} \right]_{t=0}$$

en

$$Q_\omega \left(\frac{t}{a_\nu} \right) = \frac{t}{a_\nu} + \frac{1}{2} \frac{t^2}{a_\nu^2} + \ldots + \frac{1}{\omega} \frac{t^\omega}{a_\nu^\omega},$$

en waarin

$$U = t f(0) + \frac{t^2}{2!} f'(0) + \ldots + \frac{t^\omega}{\omega!} f^{(\omega-1)}(0) -$$

$$- \frac{1}{2\pi i} \int_s \frac{G'(z)}{z^\omega G(z)} \left[\frac{t^\omega}{\omega} + \frac{t^{\omega-1} z}{\omega - 1} + \ldots + t z^{\omega-1} + z^\omega \log\left(1 - \frac{t}{z}\right) \right] dz.$$

Nemen we nu den omtrek s zoo groot aan, dat voor alle punten van den omtrek geldt $|z| > |t|$, dan kunnen we de in U voorkomende $\log\left(1 - \frac{t}{z}\right)$ ontwikkelen in eene reeks volgens opklimmende machten van $\frac{t}{z}$,

$$\log\left(1 - \frac{t}{z}\right) = - \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \frac{t^r}{z^r},$$

en verkrijgen dan voor de in U voorkomende integraal:

$$- \frac{1}{2\pi i} \sum_{r=\omega+1}^{\infty} \frac{t^r}{r} \int_s \frac{G'(z)}{z^r G(z)} dz.$$

Evenals hierboven, hebben we nu weer:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_s \frac{G'(z)}{z^r G(z)} dz = \frac{1}{(r-1)!} f^{(r-1)}(0) + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{p_\nu}{a_\nu^r},$$

dus wordt bovenstaande uitdrukking:

$$-\sum_{r=\omega+1}^{\infty}\frac{t^r}{r}\left\{\frac{1}{(r-1)!}f^{(r-1)}(0)+\sum_{\nu=1}^{n}\frac{p_\nu}{a_\nu{}^r}\right\}$$

en

$$U=tf(0)+\frac{t^2}{2!}f'(0)+\ldots.+\frac{t^\omega}{\omega!}f^{(\omega-1)}(0)+$$

$$+\sum_{r=\omega+1}^{\infty}\frac{t^r}{r}\left\{\frac{1}{(r-1)!}f^{(r-1)}(0)+\sum_{\nu=1}^{n}\frac{p_\nu}{a_\nu{}^r}\right\}.$$

4. Laten we nu den omtrek s al grooter en grooter worden, zoodanig dat ten slotte al zijne punten in het oneindige liggen, dan komen er ook hoe langer hoe meer punten a_ν binnen s te liggen, en ten slotte zal in de uitdrukking voor $G(t)$ het product een oneindig product worden en ook in U de som over ν eene oneindige som.

We kunnen nu bewijzen, dat de reeks, waaraan U gelijk is, absoluut en uniform convergent is. Hiertoe geven we eerst deze uitdrukking nog eene kleine transformatie.

We hebben gesteld:

$$\frac{G'(z)}{G(z)}=\frac{\lambda}{z}+f(z),$$

waaruit volgt, dat de functie $f(z)$ enkelvoudig oneindig wordt in de punten

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_\nu,\ \ldots$$

Nemen we nu aan een willekeurig positief getal A, en zij voor $\nu \geqq l$, $a_\nu > A$, dan bestaat er geen bezwaar, daar l eindig is, om te schrijven:

$$f(z)=\frac{p_1}{z-a_1}+\frac{p_2}{z-a_2}+\ldots+\frac{p_{l-1}}{z-a_{l-1}}+\varphi(z)$$

$$=\sum_{\nu=1}^{l-1}\frac{p_\nu}{z-a_\nu}+\varphi(z),$$

waarin $\varphi(z)$ holomorph is voor $|z| \leqq A$.

Hieruit volgt dan:

$$f^{(r-1)}(z)=\sum_{\nu=1}^{l-1}(-1)^{r-1}(r-1)!\frac{p_\nu}{(z-a_\nu)^r}+\varphi^{(r-1)}(z),$$

dus:

$$f^{(r-1)}(0) = \sum_{\nu=1}^{l-1} -(r-1)!\,\frac{p_\nu}{a_\nu^r} + \varphi^{(r-1)}(0),$$

zoodat de oneindige som van U:

$$\sum_{r=\omega+1}^{\infty} \frac{t^r}{r}\left\{\frac{1}{(r-1)!}\,f^{(r-1)}(0) + \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{p_\nu}{a_\nu^r}\right\}$$

zich herleidt tot:

$$\sum_{r=\omega+1}^{\infty} \frac{t^r}{r}\left\{\frac{1}{(r-1)!}\,\varphi^{(r-1)}(0) + \sum_{\nu=l}^{\infty}\frac{p_\nu}{a_\nu^r}\right\}.$$

Hiervan is nu in de eerste plaats absoluut en uniform convergent voor de waarden van t, die voldoen aan $|t| < A$, het gedeelte:

$$\sum_{r=\omega+1}^{\infty} \frac{t^r}{r}\,\frac{\varphi^{(r-1)}(0)}{(r-1)!}.$$

Immers voor die waarden van t is

$$\varphi(t) = \varphi(0) + t\,\varphi'(0) + \frac{t^2}{2!}\,\varphi''(0) + \ldots.$$

absoluut en uniform convergent, dus is dit ook het geval met

$$\frac{t^{\omega+1}}{(\omega+1).\,\omega!}\,\varphi^{(\omega)}(0) + \frac{t^{\omega+2}}{(\omega+2).\,(\omega+1)!}\,\varphi^{(\omega+1)}(0) + \ldots.$$

Verder is ook het gedeelte

$$\sum_{r=\omega+1}^{\infty}\sum_{\nu=l}^{\infty}\frac{t^r}{r}\,\frac{p_\nu}{a_\nu^r}$$

absoluut en uniform convergent voor diezelfde waarden van t. Vervangen we toch t door A en de grootheden a_ν door hunne moduli, en stellen we:

$$\sum_{\nu=l}^{\infty}\frac{A^{\omega+1}}{\omega+1}\,\frac{p_\nu}{|a_\nu|^{\omega+1}} = A_{\omega+1},$$

dan is voor eene andere waarde van r,

$$A_r = \sum_{\nu=l}^{\infty}\frac{A^r}{r}\,\frac{p_\nu}{|a_\nu|^r} < \sum_{\nu=l}^{\infty}\left|\frac{A}{a_l}\right|^{r-\omega-1}\frac{A^{\omega+1}}{\omega+1}\,\frac{p_\nu}{|a_\nu|^{\omega+1}}$$

$$< \left|\frac{A}{a_l}\right|^{r-\omega-1}.\,A_{\omega+1}.$$

De door partieele sommatie uit de reeks met dubbelen

ingang afgeleide reeksen A_r zijn dus convergent, en daar dit ook het geval is met de reeks:

$$A_{\omega+1}+A_{\omega+2}+\ldots+A_r+\ldots<A_{\omega+1}\left(1+\left|\frac{A}{a_l}\right|+\left|\frac{A}{a_l}\right|^2+\ldots\right),$$

volgt hieruit weer, evenals vroeger, dat de reeks:

$$\sum_{r=\omega+1}^{\infty}\sum_{\nu=l}^{\infty}\frac{t_r}{r}\frac{p_\nu}{a_\nu^r}$$

absoluut en uniform convergent is voor de waarden van t, die voldoen aan $|t|<A$.

U is dus geheel en al absoluut en uniform convergent voor $|t|<A$, en daar A willekeurig is aangenomen, is U absoluut en uniform convergent voor alle eindige waarden van de variabele. We kunnen dus voor U weer de gewone notatie $\overline{G}(t)$ aannemen, en vinden dan voor $G(t)$ de product-uitdrukking:

$$G(t)=C\,t^\lambda\,e^{\overline{G}(t)}\prod_{\nu=1}^{\infty}\left[\left(1-\frac{t}{a_\nu}\right)e^{Q_\omega\left(\frac{t}{a_\nu}\right)}\right]^{p_\nu}.$$

5. We hebben nu nog slechts te onderzoeken, of het hierin voorkomende oneindige product wel absoluut en uniform convergent is.

Uit de bovenstaande uitdrukking zien we, dat dit oneindige product gelijk is aan

$$\frac{G(t)}{C\,t^\lambda\,e^{\overline{G}(t)}}.$$

Van deze uitdrukking is de teller eene in het geheele eindige vlak holomorphe functie, en evenzoo is dit de noemer, terwijl daarenboven $e^{\overline{G}(t)}$ eene functie is, die nergens nul wordt. De geheele uitdrukking stelt dus voor eene eenwaardige functie, die nergens in het eindige vlak oneindig wordt, ook niet in het punt $t=0$, daar de uitdrukking zich in dit punt herleidt tot:

$$\left[\frac{G(t)}{t^\lambda}\cdot\frac{1}{C\,e^{\overline{G}(t)}}\right]_{t=0}=C\cdot\frac{1}{C\,e^{\overline{G}(0)}}=\frac{1}{e^{\overline{G}(0)}}=1.$$

Het oneindige product stelt dus voor eene holomorphe functie en is dus stellig uniform convergent. Het is nu ook gemakkelijk in te zien, dat deze convergentie absoluut moet zijn. We hebben toch geen beperkende bepaling gemaakt omtrent de wijze, waarop de kromme s al grooter en grooter moet worden, m. a. w. omtrent de volgorde der priemfuncties in het oneindige product. We mogen dus die volgorde kiezen zooals we willen, en steeds zal het oneindige product gelijk zijn aan de eenwaardige uitdrukking:

$$\frac{G(t)}{C\,t^{\lambda}\,e^{G(t)}}.$$

De waarde van het oneindige product hangt dus niet af van de volgorde der priemfuncties, m. a. w. de convergentie is absoluut.

6. We zullen nu nog dezelfde functie $G(t)$ op eene eenigzins andere wijze behandelen en daardoor komen tot een voor ons belangrijk theorema.

Op pag. 34 hebben we gevonden de formule:

$$\frac{G'(t)}{G(t)} = \frac{\lambda}{t} + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{p_\nu}{t-a_\nu} + \frac{1}{2\pi i}\int_s \frac{G'(z)}{G(z)\,(z-t)}\,dz.$$

Integreeren we nu dadelijk deze vergelijking tusschen 0 en t, dan vinden we:

$$G(t) = C\,t^{\lambda} \prod_{\nu=1}^{n} \left(1-\frac{t}{a_\nu}\right)^{p_\nu} \times e^{U_1},$$

waarin:

$$U_1 = -\frac{1}{2\pi i}\int_s \frac{G'(z)}{G(z)}\,log\left(1-\frac{t}{z}\right)dz.$$

Deze integraal kunnen we nu herleiden op eene analoge wijze als boven is geschied, en vinden er dan ten slotte voor:

$$U_1 = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{t^r}{r}\left\{\frac{f^{(r-1)}(0)}{(r-1)!} + \sum_{\nu=1}^{n}\frac{p_\nu}{a_\nu^{\,r}}\right\}.$$

Laten we nu weer de kromme s oneindig worden, dan wordt het product in $G(t)$ weer een oneindig product en de som over ν in U_1 eene oneindige som.

De reeks, waaraan U_1 gelijk is, is nu niet in haar geheel absoluut en uniform convergent, wel een gedeelte er van, n. l. het stuk:

$$t f(0) + \frac{t^2}{2!} f'(0) + \ldots + \frac{t^\omega}{\omega!} f^{(\omega-1)}(0)$$

$$+ \sum_{r=\omega+1}^{\infty} \frac{t^r}{r} \left\{ \frac{f^{(r-1)}(0)}{(r-1)!} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{p_\nu}{a_\nu^r} \right\},$$

dat is de functie $\bar{G}(t)$.

Er blijft dus van U_1 over:

$$t \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{p_\nu}{a_\nu} + \frac{t^2}{2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{p_\nu}{a_\nu^2} + \ldots + \frac{t^\omega}{\omega} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{p_\nu}{a_\nu^\omega}.$$

Stellen we dit voor door U_2, dan vinden we voor $G(t)$:

$$G(t) = C t^\lambda e^{\bar{G}(t)} \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{t}{a_\nu}\right)^{p_\nu} \times e^{U_2}.$$

Voor het geval, dat het product:

$$\prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{t}{a_\nu}\right)^{p_\nu}$$

divergent is, heeft deze schrijfwijze geen beteekenis. Wel echter voor het geval dat dit product beperkt convergent is, en dus ook de sommen:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{p_\nu}{a_\nu}, \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{p_\nu}{a_\nu^2}, \ldots\ldots, \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{p_\nu}{a_\nu^m}.$$

Er volgt dan uit, dat we in dit geval de functie $G(t)$ ook in bovenstaanden vorm mogen schrijven, waarbij we in de oneindige sommen de termen op dezelfde wijze op elkaar moeten laten volgen als dit geschiedt met de factoren van het oneindige product.

We zullen in het vervolg gelegenheid hebben, dit theorema herhaaldelijk toe te passen.

7. Merken we nog ten slotte op, dat we door de methode van FRENZEL eene uitdrukking gevonden hebben voor de functie $\bar{G}(t)$ of $\bar{G}(z)$, die bij de methoden van WEIERSTRASS en

MITTAG-LEFFLER onbepaald bleef. We hebben n. l. gevonden:

$$\overline{G}(z) = z f(0) + \frac{z^2}{2!} f'(0) + \ldots + \frac{z^\omega}{\omega!} f^{(\omega-1)}(0)$$

$$+ \sum_{r=\omega+1}^{\infty} \frac{z^r}{r} \left\{ \frac{f^{(r-1)}(0)}{(r-1)!} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{p_\nu}{a_\nu{}^r} \right\},$$

waarin:

$$f(z) = \frac{G'(z)}{G(z)} - \frac{\lambda}{z}.$$

Voor de berekening is echter deze uitdrukking niet zeer geschikt. We zullen daarom in het volgende hoofdstuk op de bepaling van de functie $\overline{G}(z)$ terugkomen.

HOOFDSTUK IV.

OVER HET GESLACHT VAN EENE FUNCTIE EN OVER DE BEPALING VAN DEN UITWENDIGEN EXPONENTIEELEN FACTOR.

1. Door LAGUERRE [1]) en VIVANTI [2]) zijn met betrekking tot het onderwerp, dat ons bezighoudt, eenige benamingen ingevoerd, die we hier zullen vermelden en in het vervolg ook steeds gebruiken zullen.

LAGUERRE noemt eene geheele transcendentale functie eene *functie van geslacht* ω (Fr. *genre*, Eng. *class*, D. *Rang*, It. *genere*) wanneer de nullen a_ν zoodanig zijn, dat

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left| \frac{1}{a_\nu} \right|^r$$

convergeert voor $r = \omega + 1, \omega + 2, \ldots$.
De kleinste waarde, die ω hebben kan, is dus 0.

VIVANTI vat al deze functies, die een geslacht hebben, samen onder den naam van *functies van de eerste klasse*, en noemt de andere *functies van de tweede klasse*. Bij deze functies moeten we dus de reeds meermalen vermelde

---

[1]) LAGUERRE. Sur quelques équations transcendantes. C. R. XCIV (1882) p. 160 e. v.

[2]) VIVANTI. Alcuni teoremi sulle funzioni intere. Giornale di Matematiche di BATTAGLINI. XXII (1884) p. 243 e. v.

getallen m_ν gaan bepalen. Deze getallen noemt VIVANTI de *convergentiegetallen*, en hij merkt daarbij op, dat deze naar omstandigheden gewijzigd kunnen worden, want, wanneer men in de reeks m_ν de eerste n getallen vervangt door willekeurige andere $p_1, p_2, \ldots, p_n$, dan zal daardoor de reeks

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{z}{a_\nu}\right)^{m_\nu+1},$$

die dan wordt:

$$\sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{z}{a_\nu}\right)^{p_\nu+1} + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \left(\frac{z}{a_\nu}\right)^{m_\nu+1}$$

niet ophouden absoluut en uniform convergent te zijn in het geheele eindige gebied.

Verder noemt VIVANTI de functie eene *eenvoudige functie*, wanneer de in de algemeene uitdrukking voor $G(z)$ voorkomende factor $e^{\overline{G}(z)}$, die de *uitwendige exponentieele factor* wordt genoemd, zich herleidt tot de eenheid, dus wanneer de functie $\overline{G}(z)$ de waarde nul heeft.

2. LAGUERRE heeft een kenmerk voor het geslacht van eene functie gegeven. Het is het volgende [1]):

Wanneer bij het oneindig toenemen van z, eene zeer groote waarde van $|z|$ gevonden kan worden, waarvoor

$$\frac{G'(z)}{z^\omega\, G(z)}$$

gelijkmatig tot nul nadert, dan is de functie $G(z)$ van geslacht ω.

Het bewijs van deze stelling heeft veel overeenkomst met de hiervoor behandelde methode van FRENZEL; we kunnen dit bewijs dan ook terstond uit een der formules van hoofdstuk III afleiden.

---

[1]) LAGUERRE. Sur la détermination du genre d'une fonction transcendante entière. C. R. XCIV (1882) p. 635 e. v. Beter in FORSYTH. Theory of functions of a complex variable, p. 91.

Op pag. 36 hebben we gevonden, dat we schrijven kunnen:

$$\frac{G'(t)}{G(t)} = \frac{\lambda}{t} + \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu \left[\frac{1}{t-a_\nu} + P_\omega\left(\frac{t}{a_\nu}\right)\right]$$
$$+ f(0) + t f'(0) + \ldots + \frac{t^{\omega-1}}{(\omega-1)!} f^{(\omega-1)}(0)$$
$$+ \frac{t^\omega}{2\pi i}\int_s \frac{G'(z)}{z^\omega\, G(z)} \frac{1}{z-t}\, dz.$$

Breiden we nu de kromme s op eene willekeurige wijze uit, zoodanig echter, dat die kromme nooit gaat door eenig nulpunt van de functie $G(z)$, dan wordt de som over ν eene oneindige som. Stellen we dan verder de maximum-modulus van $\frac{G'(z)}{z^\omega\, G(z)}$ langs den omtrek van de kromme s gelijk aan M, dan is:

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_s \frac{G'(z)}{z^\omega\, G(z)} \frac{1}{z-t}\, dz\right| < M\left|\frac{1}{2\pi i}\int_s \frac{dz}{z-t}\right|.$$

Daar nu

$$\frac{1}{2\pi i}\int_s \frac{dz}{z-t} = 1,$$

is bovenstaande uitdrukking kleiner dan M, en daar M tot nul nadert, nadert ook

$$\frac{1}{2\pi i}\int_s \frac{G'(z)}{z^\omega\, G(z)} \frac{1}{z-t}\, dz$$

tot nul.

We hebben dus:

$$\frac{G'(t)}{G(t)} = \frac{\lambda}{t} + \sum_{\nu=1}^{\infty} p_\nu \left[\frac{1}{t-a_\nu} + P_\omega\left(\frac{t}{a_\nu}\right)\right]$$
$$+ f(0) + t f'(0) + \ldots + \frac{t^{\omega-1}}{(\omega-1)!} f^{(\omega-1)}(0),$$

en hieruit door integratie:

$$G(t) = C\, t^\lambda\, e^{\varphi(t)} \prod_{\nu=1}^{\infty} \left[\left(1 - \frac{t}{a_\nu}\right) e^{Q_\omega\left(\frac{t}{a_\nu}\right)}\right]^{p_\nu},$$

waarin $\varphi(t)$ de voor $z = 0$ verdwijnende integraal is van

$$\varphi'(t) = f(0) + t f'(0) + \ldots + \frac{t^{\omega-1}}{(\omega-1)!} f^{(\omega-1)}(0),$$

zoodat dus $\varphi(t)$ ten hoogste een polynomium van graad ω is.

Evenals we dit in hoofdstuk III hebben gedaan, kunnen we aantoonen, dat het bovenstaande oneindige product absoluut en uniform convergent is, zoodat dus uit den vorm, die we voor $G(t)$ gevonden hebben, volgt, dat deze functie van geslacht ω is.

3. Het is duidelijk, dat dit kenmerk van LAGUERRE ons slechts van eene bepaalde soort van functies toelaat het geslacht te bepalen, en wel van die functies, waarvoor

$$\lim_{z=\infty} \frac{G'(z)}{z^{\omega}\, G(z)} = 0$$

voor eenige eindige waarde van ω.

Dit is bijv. het geval met de sinusfunctie.

We hebben hier:

$$\frac{G'(z)}{G(z)} = \frac{\cos z}{\sin z} = i\,\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}} = i\,\frac{e^{2iz} + 1}{e^{2iz} - 1} =$$

$$= i\,\frac{e^{-2r\sin\vartheta}\, e^{2ir\cos\vartheta} + 1}{e^{-2r\sin\vartheta}\, e^{2ir\cos\vartheta} - 1}.$$

Voor $r = \infty$ en $\sin\vartheta > 0$ wordt dus $\lim \frac{\cos z}{\sin z} = -i.$

Voor $r = \infty$ en $\sin\vartheta < 0$ wordt dus $\lim \frac{\cos z}{\sin z} = i,$

terwijl, wanneer $\sin\vartheta = 0$ en we aan r zulk eene waarde geven dat z niet samenvalt met een der oneindig ver gelegen punten a_{ν}, de waarde van $\frac{\cos z}{\sin z}$ aldaar eindig zal zijn.

We kunnen dus waarden van $|z|$ aangeven, waarvoor $\frac{\cos z}{z \sin z}$ tot nul zal naderen, waardoor dus aangetoond is, dat $\sin z$ van geslacht 1 is.

Toch moet men voorzichtig zijn in de gevallen dat het kenmerk van LAGUERRE van toepassing is. Stellen we dat de functie $G_0(z)$ van geslacht ω is en dat het kenmerk van LAGUERRE er op kan worden toegepast, dus dat

$$\lim_{z=\infty} \frac{G_0'(z)}{z^{\omega}\, G_0(z)} = 0.$$

Beschouwen we dan de functie:

$$G(z) = e^{\varphi(z)} G_0(z),$$

waarbij we stellen, dat $\varphi(z)$ een polynomium is van graad $\omega + p$, waarin p een geheel getal is.

We zullen dan niet vinden:

$$\lim_{z=\infty} \frac{G'(z)}{z^\omega G(z)} = 0,$$

maar wel:

$$\lim_{z=\infty} \frac{G'(z)}{z^{\omega+p} G(z)} = 0.$$

Immers:

$$\frac{G'(z)}{G(z)} = \varphi'(z) + \frac{G_0'(z)}{G_0(z)},$$

en daar $\varphi'(z)$ van graad $\omega + p - 1$, zal eerst

$$\frac{\varphi'(z)}{z^{\omega+p}}$$

voor $z = \infty$ verdwijnen.

We zouden dus, door toepassing van het kriterium van LAGUERRE, ten onrechte meenen, dat de functie $G(z)$ van geslacht $\omega + p$ was.

We zullen dus de voorwaarde:

$$\lim_{z=\infty} \frac{G'(z)}{z^\omega G(z)} = 0$$

aan een nader onderzoek moeten onderwerpen, of liever de integraal

$$\frac{1}{2\pi i} \int_s \frac{G'(z)}{z^\omega G(z)} \frac{1}{z-t} dz,$$

want bovenstaande voorwaarde is slechts gebruikt om aan te toonen, dat deze integraal tot nul nadert, wanneer de kromme s op eene willekeurige wijze tot het oneindige wordt uitgebreid.

4. We kunnen nu bewijzen, dat bij elke functie van geslacht ω deze integraal nadert tot eene geheele functie in t, wanneer de kromme s op eene willekeurige wijze tot het oneindige wordt uitgebreid.

Immers, uit de reeds in dit hoofdstuk gebruikte formule van pag. 36 volgt:

$$\frac{t^\omega}{2\pi i}\int_s \frac{G'(z)}{z^\omega G(z)}\frac{1}{z-t}\,dz = \frac{G'(t)}{G(t)} - \frac{\lambda}{t} - \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu\left[\frac{1}{t-a_\nu} + P_\omega\left(\frac{t}{a_\nu}\right)\right] - \varphi'(t),$$

dus

$$\lim_{z=\infty}\frac{t^\omega}{2\pi i}\int_s \frac{G'(z)}{z^\omega G(z)}\frac{1}{z-t}\,dz = \frac{G'(t)}{G(t)} - \frac{\lambda}{t} - \sum_{\nu=1}^{\infty} p_\nu\left[\frac{1}{t-a_\nu} + P_\omega\left(\frac{t}{a_\nu}\right)\right] - \varphi'(t).$$

We hebben nu bij de methode van MITTAG-LEFFLER gezien, dat

$$\frac{G'(t)}{G(t)} - \frac{\lambda}{t} - \sum_{\nu=1}^{\infty} p_\nu\left[\frac{1}{t-a_\nu} + P_\omega\left(\frac{t}{a_\nu}\right)\right]$$

gelijk is aan eene geheele functie $\overline{G}'(t)$, waaruit dus volgt dat de integraal

$$\frac{t^\omega}{2\pi i}\int_s \frac{G'(z)}{z^\omega G(z)}\frac{1}{z-t}\,dz$$

nadert tot eene geheele functie

$$\overline{G}'(t) - \varphi'(t).$$

Uit de formule op pag. 42 is nu nog af te leiden, dat

$\overline{G}'(t) = \varphi'(t) +$ eene geheele functie in t, die met den term t^ω begint,

zoodat dus de integraal

$$\frac{1}{2\pi i}\int_s \frac{G'(z)}{z^\omega G(z)}\frac{1}{z-t}\,dz$$

nadert tot eene geheele functie

$$\psi(t) = \frac{\overline{G}'(t) - \varphi'(t)}{t^\omega},$$

waarvan de graad dus ω lager is dan die van $\overline{G}'(t)$, dus $\omega + 1$ lager dan die van $\overline{G}(t)$.

5. Omgekeerd zal ook, wanneer we bewezen hebben, dat

de meergemelde integraal nadert tot eene geheele functie in t, en wel steeds tot dezelfde geheele functie, hoe we de kromme s ook tot het oneindige uitbreiden, daaruit volgen, dat de functie $G(t)$ van geslacht ω is.

Immers er volgt dan uit, dat de uitdrukking:

$$\frac{G'(t)}{G(t)} - \frac{\lambda}{t} - \sum_{\nu=1}^{\infty} p_\nu \left[\frac{1}{t-a_\nu} + P_\omega \left(\frac{t}{a_\nu} \right) \right]$$

absoluut en uniform convergent is, zoodat dan volgens hoofdstuk II de functie $G(t)$ van geslacht ω is.

De bijvoeging „en wel steeds tot dezelfde geheele functie, hoe we de kromme s ook tot het oneindige uitbreiden" is essentieel, want neemt men bijv. voor de kromme s cirkels c, die men hoe langer hoe grooter laat worden, en vindt men dan, dat de integraal nadert tot eene geheele functie in t, dan heeft men nog geen zekerheid, dat de integraal tot deze zelfde functie zal naderen, wanneer men andere krommen s kiest, m. a. w. men heeft dan geen zekerheid, dat de uitdrukking

$$\frac{G'(t)}{G(t)} - \frac{\lambda}{t} - \sum_{\nu=1}^{\infty} p_\nu \left[\frac{1}{t-a_\nu} + P_\omega \left(\frac{t}{a_\nu} \right) \right]$$

absoluut convergeert, wel, dat ze beperkt convergent is. Men weet dus wel, dat men de functie $G(z)$ schrijven mag in den vorm van eene functie van geslacht ω, maar men weet niet, of het hierin voorkomende oneindige product wel absoluut convergent zal zijn.

6. Het is misschien goed, de voorgaande beschouwingen ook nog op eene andere wijze aan te toonen.

Uitgaande van eene functie van geslacht ω:

$$G(z) = C z^\lambda e^{\bar{G}(z)} \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_\nu}\right) e^{Q_\omega \left(\frac{z}{a_\nu}\right)},$$

vinden we daaruit, door logarithmisch te differentieeren:

$$\frac{G'(z)}{G(z)} = \frac{\lambda}{z} + \bar{G}'(z) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{z^\omega}{a_\nu^\omega (z-a_\nu)}.$$

Voor waarden van z, waarvoor $|z| < |a_1|$, kan elk der breuken

$$\frac{z^\omega}{a_\nu^\omega (z - a_\nu)}$$

ontwikkeld worden in eene reeks volgens opklimmende machten van z:

$$\frac{z^\omega}{a_\nu^\omega (z - a_\nu)} = -\frac{z^\omega}{a_\nu^{\omega+1}}\left(1 + \frac{z}{a_\nu} + \frac{z^2}{a_\nu^2} + \ldots\right),$$

zoodat we voor die waarden van z, voor $\frac{G'(z)}{G(z)}$ de ontwikkeling krijgen:

$$\frac{G'(z)}{G(z)} = \frac{\lambda}{z} + \overline{G}'(z) + A_\omega^{(0)} z^\omega + A_{\omega+1}^{(0)} z^{\omega+1} + \ldots + A_p^{(0)} z^p + \ldots,$$

waarin:

$$A_p^{(0)} = -\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{a_\nu^{p+1}}.$$

Deze coëfficienten hebben dus alle eindige waarden, want er is gegeven dat

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left|\frac{1}{a_\nu^{p+1}}\right|$$

convergeert, van af $p = \omega$.

Voor waarden van z, waarvoor $|a_1| < |z| < |a_2|$, is deze ontwikkeling divergent, welke divergentie veroorzaakt wordt door de ontwikkeling van den term $\frac{z^\omega}{a_1^\omega (z - a_1)}$:

$$\frac{z^\omega}{a_1^\omega (z - a_1)} = -\frac{z^\omega}{a_1^{\omega+1}}\left(1 + \frac{z}{a_1} + \frac{z^2}{a_1^2} + \ldots\right).$$

Vervangt men echter deze ontwikkeling door:

$$\frac{z^\omega}{a_1^\omega (z - a_1)} = \frac{z^{\omega-1}}{a_1^\omega}\left(1 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_1^2}{z^2} + \ldots\right),$$

dan is de ontwikkeling van $\frac{G'(z)}{G(z)}$ geldig voor waarden van z, waarvoor $|a_1| < |z| < |a_2|$.

Voor die waarden van z geldt dus:

$$\frac{G'(z)}{G(z)} = \frac{\lambda}{z} + \overline{G}'(z) + A_\omega^{(1)} z^\omega + A_{\omega+1}^{(1)} z^{\omega+1} + \ldots + A_p^{(1)} z^p + \ldots$$
$$+ B_{\omega-1}^{(1)} z^{\omega-1} + B_{\omega-2}^{(1)} z^{\omega-2} + \ldots + B_q^{(1)} z^q + \ldots + B_0^{(1)} +$$
$$+ B_{-1}^{(1)} z^{-1} + B_{-2}^{(1)} z^{-2} + \ldots + B_{-r}^{(1)} z^{-r} + \ldots,$$

waarin:

$$A_p^{(1)} = A_p^{(0)} + \frac{1}{a_1^{p+1}},$$

$$B_q^{(1)} = \frac{1}{a_1^{q+1}} \text{ en } B_{-r}^{(1)} = a_1^{r-1}.$$

Om de ontwikkeling te verkrijgen, die geldig is voor waarden van z, waarvoor $|a_2| < |z| < |a_3|$, moeten we weer de ontwikkeling

$$\frac{z^\omega}{a_2^\omega (z - a_2)} = -\frac{z^\omega}{a_2^{\omega+1}} \left(1 + \frac{z}{a_2} + \frac{z^2}{a_2^2} + \ldots\right)$$

vervangen door de ontwikkeling

$$\frac{z^\omega}{a_2^\omega (z - a_2)} = \frac{z^{\omega-1}}{a_2^\omega} \left(1 + \frac{a_2}{z} + \frac{a_2^2}{z^2} + \ldots\right).$$

Zoo voortgaande verkrijgen we voor de ontwikkeling, die geldig is voor die waarden van z, waarvoor $|a_n| < |z| < |a_{n+1}|$:

$$\frac{G'(z)}{G(z)} = \frac{\lambda}{z} + \overline{G}'(z) + A_\omega^{(n)} z^\omega + A_{\omega+1}^{(n)} z^{\omega+1} + \ldots + A_p^{(n)} z^p + \ldots$$
$$+ B_{\omega-1}^{(n)} z^{\omega-1} + B_{\omega-2}^{(n)} z^{\omega-2} + \ldots + B_q^{(n)} z^q + \ldots + B_0^{(n)} +$$
$$+ B_{-1}^{(n)} z^{-1} + B_{-2}^{(n)} z^{-2} + \ldots + B_{-r}^{(n)} z^{-r} + \ldots,$$

waarin:

$$A_p^{(n)} = A_p^{(0)} + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{a_\nu^{p+1}} = -\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{1}{a_\nu^{p+1}},$$

$$B_q^{(n)} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{a_\nu^{q+1}} \text{ en } B_{-r}^{(n)} = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^{r-1}.$$

De coëfficienten A zijn dus grootheden, die bij het grooter worden van n, meer en meer tot nul zullen naderen.

Stellen we nu dat $\overline{G}'(z)$ den vorm heeft:

$$\overline{G}'(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots + b_s z^s,$$

waarin s ook oneindig groot mag zijn, in welk geval de functie $\overline{G}(z)$ eene geheele transcendentale functie is, en gaan we dan bepalen de waarde van de integraal

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{G'(z)}{z^\omega\, G(z)}\,\frac{1}{z-t}\,dz$$

genomen langs den omtrek van een cirkel, waarvan de oorsprong het middelpunt is, en waarvan de straal is eene waarde van $|z|$, waarvoor $|a_n| < |z| < |a_{n+1}|$, terwijl t een punt is binnen dien cirkel gelegen.

We moeten dan gaan opzoeken den coëfficient van $\frac{1}{z}$ in de ontwikkeling:

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{\lambda}{z} + b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots + b_s z^s + \\ &+ A^{(n)}_\omega z^\omega + A^{(n)}_{\omega+1} z^{\omega+1} + \ldots + A^{(n)}_p z^p + \ldots \\ &+ B^{(n)}_{\omega-1} z^{\omega-1} + B^{(n)}_{\omega-2} z^{\omega-2} + \ldots B^{(n)}_q z^q + \ldots + B^{(n)}_0 + \\ &+ B^{(n)}_{-1} z^{-1} + B^{(n)}_{-2} z^{-2} + \ldots + B^{(n)}_{-r} z^{-r} + \ldots\ldots\end{aligned}\right\} \times$$

$$\times \frac{1}{z^{\omega+1}}\left(1 + \frac{t}{z} + \frac{t^2}{z^2} + \ldots\ldots\right).$$

Deze coëfficient is:

$$b_\omega + b_{\omega+1} t + b_{\omega+2} t^2 + \ldots + b_s t^{s-\omega} +$$
$$+ A^{(n)}_\omega + A^{(n)}_{\omega+1} t + A^{(n)}_{\omega+2} t^2 + \ldots + A^{(n)}_p t^{p-\omega} + \ldots\ldots$$

Het eerste gedeelte hiervan is een geheel polynomium in t, waarvan de graad $\omega + 1$ lager is dan die van $\overline{G}(z)$, zoodat, wanneer $\overline{G}(z)$ een polynomium is ten hoogste van graad ω, dit gedeelte verdwijnt, terwijl, wanneer $\overline{G}(z)$ eene geheele transcendentale functie is, dit eerste gedeelte ook eene geheele transcendentale functie zal zijn, waarvan de coëfficienten uit die van $\overline{G}(z)$ zijn af te leiden.

Het tweede gedeelte is eene oneindig voortloopende reeks, die absoluut convergent is, want in de ontwikkeling voor $\frac{G'(z)}{G(z)}$ convergeert het stuk:

$$A^{(n)}_\omega z^\omega + A^{(n)}_{\omega+1} z^{\omega+1} + \ldots + A^{(n)}_p z^p + \ldots$$

absoluut voor elke waarde van z, waarvoor $|z| < |a_{n+1}|$, zoodat dus, daar $|t| < |a_{n+1}|$, ook de reeks:

$$A_{\omega}^{(n)} + A_{\omega+1}^{(n)} t + A_{\omega+2}^{(n)} t^2 + \ldots + A_{p}^{(n)} t^{p-\omega} + \ldots$$

absoluut convergent zal zijn.

Laten we nu n al grooter en grooter worden, zoodat we dus tevens de straal van den cirkel al grooter en grooter laten worden, dan naderen de grootheden A al meer en meer tot nul en dus zal ook de bovenstaande oneindig voortloopende reeks tot nul naderen, waardoor we dus hebben aangetoond, dat de coëfficient van $\frac{1}{z}$, dat is de waarde van de integraal

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{G'(z)}{z^{\omega} G(z)} \frac{1}{z-t} dz,$$

zal naderen tot eene geheele functie in t, waarvan de graad $\omega + 1$ lager is dan die van $G(z)$, wanneer we den straal van den cirkel, waarlangs de integraal te nemen is, oneindig doen toenemen, echter zoodanig, dat de omtrek van dien cirkel nooit gaat door een nulpunt a_{ν} van $G(z)$.

Het omgekeerde van deze stelling is nu in het algemeen niet waar, d. w. z. wanneer we weten, dat de bovenstaande integraal nadert tot eene geheele functie in t, dan hebben we geene zekerheid, dat $G(z)$ eene functie van geslacht ω is.

Beschouwen we toch de integraal

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{G'(z)}{z^{\omega-1} G(z)} \frac{1}{z-t} dz,$$

dan volgt uit de bovenstaande ontwikkeling, dat de waarde van die integraal is:

$$b_{\omega-1} + b_{\omega} t + b_{\omega+1} t^2 + \ldots + b_s t^{s-\omega+1} +$$
$$+ B_{\omega-1}^{(n)} + A_{\omega}^{(n)} t + A_{\omega+1}^{(n)} t^2 + \ldots + A_{p}^{(n)} t^{p-\omega+1} + \ldots$$

Hierin treedt dus op de coëfficient

$$B_{\omega-1}^{(n)} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{a_{\nu}^{\omega}}.$$

De waarde hiervan kan bij de limiet zijn oneindig groot,

en dan wordt dus ook de integraal oneindig groot; maar de coëfficient $B_{\omega-1}^{(n)}$ kan ook wel naderen tot eene eindige waarde (bijv. de waarde 0, zooals bij de sinusfunctie geschiedt). Dit zal het geval zijn, wanneer de reeks $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{a_\nu^\omega}$ beperkt convergent is. De waarde van die som hangt dan af van de opeenvolging der termen, die ons hier bekend is, daar we van den eenen cirkel op den anderen moeten overgaan.

Het kan dus voorkomen, dat, terwijl $G(z)$ eene functie is van geslacht ω, de integraal

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{G'(z)}{z^{\omega-1}\,G(z)}\,\frac{1}{z-t}\,dz$$

zal naderen tot eene geheele functie in t, en dit kan dan natuurlijk ook nog wel plaats vinden, wanneer we in de integraal $\omega-1$ vervangen door $\omega-2$, $\omega-3$, enz.

Omgekeerd dus kunnen we uit het feit, dat de integraal

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{G'(z)}{z^{\omega}\,G(z)}\,\frac{1}{z-t}\,dz$$

tot eene geheele functie in t nadert, niet besluiten, dat $G(z)$ van geslacht ω is. Hoogstens kunnen we zeggen, dat $G(z)$ alsdan geschreven kan worden in den vorm van eene functie van geslacht ω, wanneer we daarbij letten op de volgorde der priemfuncties. Die priemfuncties moeten dan namelijk in zulk eene volgorde genomen worden, dat de moduli der daarin voorkomende nulpunten steeds grooter worden.

7. Wanneer we nu echter weten, dat eene functie $G(z)$ van geslacht ω is, en we vinden dat de integraal

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{G'(z)}{z^{\omega}\,G(z)}\,\frac{1}{z-t}\,dz$$

nadert tot eene geheele functie $\psi(t)$, dan zijn we in staat den vorm van de functie $G(z)$ geheel en al te bepalen, dus met inbegrip van de functie $\overline{G}(z)$.

We hebben toch gevonden op pag. 48:

$$\psi(t) = \frac{\overline{G}'(t) - q'(t)}{t^\omega},$$

of

$$\psi(z) = \frac{\overline{G}'(z) - \varphi'(z)}{z^{\omega}},$$

dus

$$\overline{G}'(z) = \varphi'(z) + z^{\omega} \cdot \psi(z).$$

Stellen we nu, dat $\psi(z)$ den vorm heeft:

$$\psi(z) = d_0 + d_1 z + \ldots + d_m z^m,$$

dan vinden we dus:

$$\overline{G}(z) = \varphi(z) + \frac{d_0}{\omega+1} z^{\omega+1} + \frac{d_1}{\omega+2} z^{\omega+2} + \ldots + \frac{d_m}{\omega+m+1} z^{\omega+m+1},$$

waarin $\varphi(z)$ de voor $z = 0$ verdwijnende integraal is van

$$\varphi'(z) = f(0) + z f'(0) + \ldots + \frac{z^{\omega-1}}{(\omega-1)!} f^{(\omega-1)}(0),$$

en

$$f(z) = \frac{G'(z)}{G(z)} - \frac{\lambda}{z}.$$

$\overline{G}(z)$ is dus eene geheele functie, waarvan de graad $\omega + 1$ hooger is dan die van $\psi(z)$, en waarvan de coëfficienten uit die van $\psi(z)$ en van $\varphi'(z)$ kunnen worden afgeleid.

We zullen dus nu in staat zijn eenige voorbeelden te behandelen.

HOOFDSTUK V.

VOORBEELDEN.

I. Sinus-functie. Cosinus-functie.

1. De nullen van $sin\ z$ worden gegeven door de formule:

$$z = \nu\,\pi,\ (\nu = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots .)$$

terwijl al deze nullen enkelvoudig zijn.

Daar de reeks $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu\,\pi}$ beperkt convergent is, maar $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{(\nu\,\pi)^2}$ absoluut convergeert, is bij de sinus-functie $\omega = 1$, d. w. z. $sin\ z$ is eene functie van geslacht 1.

De vorm van de functie, ontbonden in de priemfuncties, is dus:

$$sin\ z = C\,z\,e^{\overline{G}(z)} \prod_{\nu=-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\nu\,\pi}\right) e^{\frac{z}{\nu\,\pi}},$$

waarbij in het oneindig product niet $\nu = 0$ moet genomen worden.

De waarde van C is:

$$C = \left[\frac{sin\ z}{z}\right]_{z=0} = \left[\frac{z - \frac{z^3}{3!} + \ldots}{z}\right]_{z=0} = 1,$$

terwijl $\overline{G}(z)$ bepaald wordt uit de reeds vermelde eigenschap, dat

$$\lim_{|z|=\infty} \frac{1}{2\,\pi\,i} \int_c \frac{cos\ z}{z\ sin\ z} \frac{1}{z-t}\,dz = 0.$$

Hieruit volgt, dat

$\overline{G}(z) = \varphi(z) =$ de voor $z = 0$ verdwijnende integraal van $\varphi'(z)$, waarin

$$\varphi'(z) = f(0) = \left[\frac{\cos z}{\sin z} - \frac{1}{z}\right]_{z=0} =$$

$$= \left[\frac{1 - \frac{z^2}{2!} + \cdots}{z - \frac{z^3}{3!} + \cdots} - \frac{1}{z}\right]_{z=0} = \left[\frac{z - \frac{z^3}{2!} + \ldots - z + \frac{z^3}{3!} - \ldots}{z^2 - \frac{z^4}{3!} + \ldots}\right]_{z=0} = 0,$$

dus is ook $\overline{G}(z) = 0$, [1]) zoodat de volledig bepaalde uitdrukking

---

[1]) De bovenstaande bepaling van de functie $G(z)$ schijnt ons de beste toe, daar ze berust op een algemeen theorema. Ze kan echter ook op andere wijzen geschieden.

HASTINGS MOORE [2]) doet het door in de eerste plaats te bewijzen, dat er slechts één functie $f(z)$, $f(z) = \frac{\sin \pi z}{\pi}$, is, die de volgende functionale eigenschappen bezit:

(A_1) $f(z)$ is eene (transcendentale) geheele functie van de complexe variabele z.

(A_2) Het complete systeem nullen van $f(z)$ is $z = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, welke nullen alle enkelvoudig zijn.

(A_3) $$\lim_{z=0} \frac{f(z)}{z} = 1 \text{ of } \left[\frac{d}{dz} f(z)\right]_{z=0} = 1.$$

(B) $$f(2z) f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 f(z) f\left(z + \frac{1}{2}\right).$$

(C) $$f(-z) = -f(z),$$

welke laatste eigenschap ook vervangen mag worden door

(C') $$\left[\frac{d}{dz} \log \frac{f(z)}{z}\right]_{z=0} = 0.$$

In de tweede plaats bewijst hij, dat ook het oneindige product

$$z \prod_{\nu=-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\nu}\right) e^{\frac{z}{\nu}} \text{ (except. } \nu = 0)$$

het systeem eigenschappen (A, B, C) bezit, zoodat dit oneindig product identisch is met de functie $\frac{\sin \pi z}{\pi}$, waaruit dus volgt dat de functie $\overline{G}(z)$ gelijk is aan nul.

---

[2]) HASTINGS MOORE. Concerning the definition by a system of functional properties of the function $f(z) = \frac{\sin \pi z}{\pi}$. Annals of Mathematics (University of Virginia) vol. 9 (1895) p. 43 e. v.

voor $sin\ z$ is:

$$sin\ z = z \prod_{\nu=-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\nu\pi}\right) e^{\frac{z}{\nu\pi}} \text{ (except. } \nu = 0).$$

2. In deze uitdrukking mag de volgorde der priemfuncties willekeurig genomen worden.

Laat men de priemfunctie met index $\nu = -p$ volgen op die met index $\nu = +p$, dan wordt

$$sin\ z = z \prod_{\nu=1}^{\infty} \left\{ \left(1 - \frac{z}{\nu\pi}\right) e^{\frac{z}{\nu\pi}} \left(1 + \frac{z}{\nu\pi}\right) e^{-\frac{z}{\nu\pi}} \right\} =$$

$$= z \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\nu^2\pi^2}\right),$$

waaruit volgt, dat de sinus-functie, beschouwd als functie van z^2, eene functie van geslacht 0 is.

Neemt men bij elkander de priemfuncties, waarvan de indices gelegen zijn tusschen $-m$ en $+m$, en laat men dan m oneindig worden, dan verkrijgt men de reeds door CAUCHY gevonden uitdrukking:

$$sin\ z = \lim_{m=\infty} z \prod_{\nu=-m}^{m} \left(1 - \frac{z}{\nu\pi}\right).$$

Het hierin voorkomende product is nu slechts beperkt convergent, we mogen het dus niet schrijven in den vorm van een gewoon oneindig product, dus we mogen niet schrijven:

$$sin\ z = z \prod_{\nu=-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\nu\pi}\right).$$

Wanneer dit zoo was, dan zou het er niet op aan komen, op welke wijze we naderden tot de beide oneindige grenzen en dan zouden we ook mogen schrijven:

$$sin\ z = \lim_{m=\infty} z \prod_{\nu=-m}^{mp} \left(1 - \frac{z}{\nu\pi}\right),$$

waarin p een geheel positief getal is.

We kunnen nu echter bewijzen, dat dit tweede lid niet gelijk is aan $sin\ z$, maar aan $\frac{1}{p\frac{z}{\pi}} sin\ z$.

Uit de algemeene uitdrukking voor $sin\, z$ volgt toch, in verband met het theorema van hoofdstuk III', § 6:

$$sin\, z = \lim_{m=\infty} z \prod_{\nu=-m}^{m\,p} \left(1 - \frac{z}{\nu\,\pi}\right) \times e^{\lim_{m=\infty} z \sum_{\nu=-m}^{m\,p} \frac{1}{\nu\,\pi}}.$$

Nu is:

$$\sum_{\nu=-m}^{m\,p} \frac{1}{\nu\,\pi} = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{-m} + \frac{1}{-m+1} + \ldots + \frac{1}{m-1} + \frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \ldots + \frac{1}{m\,p}\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \ldots + \frac{1}{m\,p}\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi} \sum_{\nu=1}^{(p-1)\,m} \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{1+\frac{\nu}{m}}.$$

Daar nu

$$\lim_{m=\infty} \sum_{\nu=1}^{(p-1)\,m} \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{1+\frac{\nu}{m}} = \int_1^p \frac{d\,x}{x} = log\, p,$$

waarin $log\, p$ de reëele waarde van de logarithme beteekent, wordt

$$sin\, z = e^{\frac{z}{\pi} log\, p} \cdot \lim_{m=\infty} z \prod_{\nu=-m}^{m\,p} \left(1 - \frac{z}{\nu\,\pi}\right),$$

en dus

$$\lim_{m=\infty} z \prod_{\nu=-m}^{m\,p} \left(1 - \frac{z}{\nu\,\pi}\right) = \frac{1}{p^{\frac{z}{\pi}}} sin\, z.$$

3. De periodiciteit van de sinus-functie blijkt ook zeer gemakkelijk uit den productvorm.

Voeren we in het polynomium:

$$F(z) = A\, z\,(z-\pi)\,(z-2\,\pi)\ldots.(z-n\,\pi)$$
$$(z+\pi)\,(z+2\,\pi)\ldots.(z+n\,\pi),$$

waarin A eene constante is, zoodanig dat

$$\lim_{n=\infty} F(z) = sin\, z,$$

en vervangen we in $F(z)$, z door $z+\pi$, dan wordt:

$$F(z+\pi) = A\,(z+\pi)\,z\,(z-\pi)\ldots.(z-(n-1)\,\pi)$$
$$(z+2\,\pi)\,(z+3\,\pi)\ldots.(z+(n+1)\,\pi),$$

zoodat dus

$$F(z+\pi) = F(z) \cdot \frac{z+(n+1)\pi}{z-n\pi},$$

en bij de limiet

$$\lim_{n=\infty} F(z+\pi) = -\lim_{n=\infty} F(z),$$

of

$$\sin(z+\pi) = -\sin z.$$
$$\sin(z+2\pi) = \sin z.$$

4. Merken we nog ten slotte op, dat FRENZEL [1]) bij de afleiding van den vorm der functie $\overline{G}(z)$ eene foutieve redeneering volgt, alhoewel hij tot de goede uitkomst geraakt.

Uit eigenschappen van de sinus-functie bewijst hij, dat $\overline{G}'(z)$ eene enkelperiodische functie moet zijn en zegt nu dat, daar $\overline{G}'(z)$ eene geheele functie is, die in het eindige nergens oneindig is, ze dit, wegens hare periodiciteit, ook in het oneindige niet zijn kan, d. i. $\overline{G}'(z)$ is eene constante. Hij past dus eene eigenschap, die voor de dubbelperiodische functies geldt, toe op eene enkelperiodische functie, terwijl hij in werkelijkheid slechts uit de periodiciteit had kunnen besluiten, dat $\overline{G}'(z)$ eene constante of eene geheele transcendentale functie is.

5. De cosinus-functie kan op dezelfde wijze behandeld worden als de sinus-functie, en de uitdrukking, die er dan voor gevonden wordt, is:

$$\cos z = \prod_{\nu=-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{2z}{(2\nu-1)\pi}\right) e^{\frac{2z}{(2\nu-1)\pi}}.$$

6. Men kan den productvorm voor $\cos z$ ook vinden door uit te gaan van de formule:

$$\cos z = \frac{\sin 2z}{2 \sin z}.$$

Nu is:

$$\sin 2z = 2z \prod_{\nu=-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{2z}{\nu\pi}\right) e^{\frac{2z}{\nu\pi}} \text{ (except. } \nu = 0).$$

---

[1]) FRENZEL, t. a. p. p. 325.

Splitst men hierin de even en de oneven waarden van ν, door te schrijven $\nu = 2\mu$ en $\nu = 2\varrho - 1$, dan wordt

$$\sin 2z = 2z \prod_{\mu=-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\mu\pi}\right) e^{\frac{z}{\mu\pi}} \times \prod_{\varrho=-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{2z}{(2\varrho-1)\pi}\right) e^{\frac{2z}{(2\varrho-1)\pi}}.$$

(except. $\mu = 0$)

Deelen we deze uitdrukking door den productvorm van $2 \sin z$, dan vinden we:

$$\cos z = \prod_{\varrho=-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{2z}{(2\varrho-1)\pi}\right) e^{\frac{2z}{(2\varrho-1)\pi}}.$$

7. Ook kan men gebruik maken van de formule:

$$\cos z = \sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right).$$

Uit den vorm voor $\sin z$ volgt:

$$\sin\left(z+\frac{\pi}{2}\right) = \left(z+\frac{\pi}{2}\right) \prod_{\nu=-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{z+\frac{\pi}{2}}{\nu\pi}\right) e^{\frac{z+\frac{\pi}{2}}{\nu\pi}} \text{ (except. } \nu = 0)$$

$$= \left(z+\frac{\pi}{2}\right) \prod_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{(2\nu-1)\pi - 2z}{2\nu\pi} e^{\frac{2z+\pi}{2\nu\pi}} \text{ (except. } \nu = 0).$$

Deelen we deze uitdrukking door

$$\sin\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \prod_{\nu=-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2\nu}\right) e^{\frac{1}{2\nu}} \text{ (except. } \nu = 0),$$

dan verkrijgen we:

$$\cos z = \left(1 + \frac{2z}{\pi}\right) \prod_{\nu=-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{2z}{(2\nu-1)\pi}\right) e^{\frac{z}{\nu\pi}} \text{ (except. } \nu = 0).$$

Deze uitdrukking moet dus identiek zijn met de vroeger gevondene. Dat dit werkelijk het geval is, is aangetoond door WEYR [1]).

Zonderen we in den 1sten vorm voor $\cos z$ ook den factor, die correspondeert met $\nu = 0$ af, dan wordt:

$$\cos z = \left(1 + \frac{2z}{\pi}\right) e^{-\frac{2z}{\pi}} \prod_{\nu=-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{2z}{(2\nu-1)\pi}\right) e^{\frac{2z}{(2\nu-1)\pi}}$$

(except. $\nu = 0$).

---

[1]) Extrait d'une lettre de M. ED. WEYR à M. HERMITE. Bulletin des Sciences Math. 2me Serie XII (1re partie) p. 25 e. v.

Deelen we nu de beide uitdrukkingen op elkander, dan vinden we voor het quotient:

$$e^{-\frac{2z}{\pi}} \prod_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{\frac{2z}{(2\nu-1)\pi}-\frac{z}{\nu\pi}} = e^{-\frac{2z}{\pi}} \cdot e^{\frac{2z}{\pi}\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2\nu-1}-\frac{1}{2\nu}\right)}$$

(except. $\nu = 0$).

Dit quotient moet gelijk 1 zijn, dus moeten we vinden, dat

$$S = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2\nu-1}-\frac{1}{2\nu}\right) \text{ (except. } \nu = 0)$$

gelijk aan 1 is.

Werkelijk is:

$$S = \sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2\nu-1}-\frac{1}{2\nu}-\frac{1}{2\nu+1}+\frac{1}{2\nu}\right) =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2\nu-1}-\frac{1}{2\nu+1}\right) = \frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\ldots = 1,$$

zoodat daarmede de identiteit der beide uitdrukkingen voor *cos z* bewezen is.

8. Men kan deze kwestie ook algemeen opstellen.

Zij gegeven eene functie $G(z)$, waarvan de productontwikkeling bekend is:

$$G(z) = C\, z^{\lambda}\, e^{G(z)} \prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_\nu}\right) e^{Q_\omega\left(\frac{z}{a_\nu}\right)},$$

en verder eene functie $H(z)$, die aan $G(z)$ gebonden is door de betrekking:

$$H(z) = G(z+\zeta),$$

waarin ζ eene constante is, die we zullen onderstellen dat niet samenvalt met een der punten a_ν, zoodat de nullen van $H(z)$, $z = a_\nu - \zeta$ alle van nul verschillend zijn.

Het is duidelijk dat $H(z)$ van hetzelfde geslacht is als $G(z)$, want wanneer

$$|a_n| < |\zeta| < |a_{n+1}|,$$

dan is

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\frac{1}{|a_\nu-\zeta|^{\omega+1}} = \sum_{\nu=n+1}^{\infty}\frac{1}{|a_\nu|^{\omega+1}} \cdot \frac{1}{\left|1-\frac{\zeta}{a_\nu}\right|^{\omega+1}} \cdot$$

Is m de kleinste waarde van $\left| 1 - \frac{\zeta}{a_\nu} \right|$, dan is:

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{1}{|\, a_\nu - \zeta \,|^{\omega+1}} < \frac{1}{m^{\omega+1}} \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{1}{|\, a_\nu \,|^{\omega+1}},$$

en zal dus convergent zijn, als $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{|\, a_\nu \,|^{\omega+1}}$ convergeert.

De vorm van de functie $H(z)$ zal dus zijn:

$$H(z) = H(0)\, e^{\overline{H}(z)} \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_\nu - \zeta}\right) e^{Q_\omega\left(\frac{z}{a_\nu - \zeta}\right)},$$

waarin het product te nemen is ook over de λ factoren, welke correspondeeren met $a_\nu = 0$, dus met $a_\nu - \zeta = -\zeta$, en het is nu de vraag om uit de bekende ontwikkeling voor $G(z)$, de functie $\overline{H}(z)$ te bepalen.

$H(0) = G(\zeta)$ is eene bekende constante.

Deelen we

$$G(z+\zeta) = C(z+\zeta)^\lambda\, e^{\overline{G}(z+\zeta)} \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z+\zeta}{a_\nu}\right) e^{Q_\omega\left(\frac{z+\zeta}{a_\nu}\right)}$$

door

$$G(\zeta) = C\,\zeta^\lambda\, e^{\overline{G}(\zeta)} \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\zeta}{a_\nu}\right) e^{Q_\omega\left(\frac{\zeta}{a_\nu}\right)},$$

dan verkrijgen we

$$H(z) = H(0) \left(1 + \frac{z}{\zeta}\right)^\lambda e^{\overline{G}(z+\zeta) - \overline{G}(\zeta)} \times$$
$$\times \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_\nu - \zeta}\right] e^{Q_\omega\left(\frac{z+\zeta}{a_\nu}\right) - Q_\omega\left(\frac{\zeta}{a_\nu}\right)}.$$

Zonderen we in de 1ste uitdrukking voor $H(z)$ de λ factoren, die correspondeeren met $a_\nu = 0$, af, dan wordt

$$H(z) = H(0) \left(1 + \frac{z}{\zeta}\right)^\lambda e^{\lambda\, Q_\omega\left(-\frac{z}{\zeta}\right)} e^{\overline{H}(z)} \times$$
$$\times \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_\nu - \zeta}\right) e^{Q_\omega\left(\frac{z}{a_\nu - \zeta}\right)},$$

waarin het product, evenals bij de 2de uitdrukking voor $H(z)$, nu slechts te nemen is over die factoren, welke correspondeeren met $a_\nu \gtrless 0$.

We zullen nu trachten van de polynomia

$$Q_\omega\left(\frac{z+\zeta}{a_\nu}\right) - Q_\omega\left(\frac{\zeta}{a_\nu}\right)$$

af te zonderen een stuk, dat gelijk is aan

$$Q_\omega\left(\frac{z}{a_\nu - \zeta}\right).$$

Dit is alleen dan geoorloofd, wanneer we tevens bewijzen dat het polynomium, dat er overblijft, zoodanig is, dat het, gesommeerd over alle waarden van ν, een polynomium oplevert, waarvan de termen absoluut convergeerende reeksen tot coëfficienten hebben, want alleen in dit geval mag dit gesommeerde gedeelte afzonderlijk voor het productteeken gezet worden.

Stellen we kortheidshalve $\frac{\zeta}{a_\nu} = t_\nu$, dan is:

$$Q_\omega\left(\frac{z}{a_\nu} + t_\nu\right) - Q_\omega(t_\nu) = \frac{z}{a_\nu} Q_\omega'(t_\nu) + \frac{1}{2}\frac{z^2}{a_\nu^2} Q_\omega''(t_\nu) + \ldots .$$

$$\ldots . + \frac{1}{\omega!}\frac{z^\omega}{a_\nu^\omega} Q_\omega^{(\omega)}(t_\nu) =$$

$$= \frac{z}{a_\nu}(1 + t_\nu + t_\nu^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + t_\nu^{\omega-1})$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{z^2}{a_\nu^2}(1 + 2t_\nu + 3t_\nu^2 + \ldots\ldots\ldots + (\omega-1)t_\nu^{\omega-2})$$

$$+ \frac{1}{3}\frac{z^3}{a_\nu^3}(1 + 3t_\nu + 6t_\nu^2 + \ldots\ldots + \frac{(\omega-1)(\omega-2)}{1.2}t_\nu^{\omega-3})$$

$$+ \frac{1}{4}\frac{z^4}{a_\nu^4}(1 + 4t_\nu + 10t_\nu^2 + \ldots . + \frac{(\omega-1)(\omega-2)(\omega-3)}{1.2.3}t_\nu^{\omega-4})$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{1}{\omega}\frac{z^\omega}{a_\nu^\omega}.$$

Verder is:

$$Q_\omega\left(\frac{z}{a_\nu - \zeta}\right) = \frac{z}{a_\nu - \zeta} + \frac{1}{2}\frac{z^2}{(a_\nu - \zeta)^2} + \ldots . + \frac{1}{\omega}\frac{z^\omega}{(a_\nu - \zeta)^\omega},$$

en

$$\frac{1}{p}\frac{z^p}{(a_\nu - \zeta)^p} = \frac{1}{p}\frac{z^p}{a_\nu^p}\frac{1}{(1 - t_\nu)^p}.$$

Nu is:

$$\frac{1}{1-t_\nu} = 1 + t_\nu + t_\nu^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + t_\nu^{\omega-1} + \frac{t_\nu^\omega}{1-t_\nu}$$

$$\frac{1}{(1-t_\nu)^2} = 1 + 2t_\nu + 3t_\nu^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + (\omega-1)\,t_\nu^{\omega-2} + \frac{d}{dt_\nu}\left(\frac{t_\nu^\omega}{1-t_\nu}\right)$$

$$\frac{1}{(1-t_\nu)^3} = 1 + 3t_\nu + 6t_\nu^2 + \ldots\ldots + \frac{(\omega-1)(\omega-2)}{1.2}\,t_\nu^{\omega-3} + \frac{1}{2!}\frac{d^2}{dt_\nu^2}\left(\frac{t_\nu^\omega}{1-t_\nu}\right)$$

$$\frac{1}{(1-t_\nu)^4} = 1 + 4t_\nu + 10t_\nu^2 + \ldots + \frac{(\omega-1)(\omega-2)(\omega-3)}{1.2.3}\,t_\nu^{\omega-4} + \frac{1}{3!}\frac{d^3}{dt_\nu^3}\left(\frac{t_\nu^\omega}{1-t_\nu}\right)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{(1-t_\nu)^\omega} = 1 + \frac{1}{(\omega-1)!}\frac{d^{\omega-1}}{dt_\nu^{\omega-1}}\left(\frac{t_\nu^\omega}{1-t_\nu}\right),$$

zoodat we vinden:

$$Q_\omega\left(\frac{z}{a_\nu} + t_\nu\right) - Q_\omega(t_\nu) - Q_\omega\left(\frac{z}{a_\nu - \zeta}\right) =$$

$$= -\left[\frac{z}{a_\nu}\frac{t_\nu^\omega}{1-t_\nu} + \frac{1}{2!}\left(\frac{z}{a_\nu}\right)^2\frac{d}{dt_\nu}\left(\frac{t_\nu^\omega}{1-t_\nu}\right) + \frac{1}{3!}\left(\frac{z}{a_\nu}\right)^3\frac{d^2}{dt_\nu^2}\left(\frac{t_\nu^\omega}{1-t_\nu}\right) + \ldots\right.$$

$$\left. \ldots\ldots + \frac{1}{\omega!}\left(\frac{z}{a_\nu}\right)^\omega\frac{d^{\omega-1}}{dt_\nu^{\omega-1}}\left(\frac{t_\nu^\omega}{1-t_\nu}\right)\right] = -F\left(\frac{z}{a_\nu}, t_\nu\right).$$

Werkelijk is deze uitdrukking, gesommeerd over de verschillende waarden van ν, een polynomium, met absoluut convergeerende reeksen tot coëfficienten. Beschouwen we toch den term

$$\frac{1}{(p+1)!}\left(\frac{z}{a_\nu}\right)^{p+1}\frac{d^p}{dt_\nu^p}\left(\frac{t_\nu^\omega}{1-t_\nu}\right).$$

Daar

$$\frac{d^p}{dt_\nu^p}\left(\frac{t_\nu^\omega}{1-t_\nu}\right) = \frac{A\,t_\nu^{\omega-p} + B\,t_\nu^{\omega-p+1} + \ldots + L\,t_\nu^\omega}{(1-t_\nu)^{p+1}},$$

is het eerste stuk van dezen term

$$\frac{A}{(p+1)!}\frac{z^{p+1}\,\zeta^{\omega-p}}{a_\nu^{\omega-p}\,(a_\nu-\zeta)^{p+1}}.$$

Daar nu

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{a_\nu^{\omega+1}}$$

absoluut convergeert, zal dit ook het geval zijn met

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{a_\nu^{\omega-p}\,(a_\nu-\zeta)^{p+1}}.$$

Sommeeren we dus het eerste stuk van den beschouwden term, dan verkrijgen we eenen term, waarvan de coëfficient is eene absoluut convergente reeks, en dan is dit in nog sterker mate het geval met de andere stukken van dien term. De geheele gesommeerde term heeft dus tot coëfficient eene absoluut convergente reeks en dus zijn de coëfficienten van

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} F\left(\frac{z}{a_\nu}, t_\nu\right)$$

absoluut convergente reeksen.

De 2de uitdrukking voor $H(z)$ wordt dus getransformeerd in:

$$H(z) = H(0)\left(1+\frac{z}{\zeta}\right)^{\lambda} e^{\overline{G}(z+\zeta)-\overline{G}(\zeta)-\sum_{\nu=1}^{\infty} F\left(\frac{z}{a_\nu},\frac{\zeta}{a_\nu}\right)} \times$$

$$\times \prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_\nu-\zeta}\right) e^{Q_\omega\left(\frac{z}{a_\nu-\zeta}\right)},$$

en door vergelijking met de 1ste uitdrukking voor $H(z)$ vinden we:

$$\overline{H}(z) = \overline{G}(z+\zeta) - \overline{G}(\zeta) - \sum_{\nu=1}^{\infty} F\left(\frac{z}{a_\nu}, \frac{\zeta}{a_\nu}\right) - \lambda\, Q_\omega\left(-\frac{z}{\zeta}\right).$$

Passen we deze algemeene formule toe op het geval dat

$$G(z) = \sin z,\ \zeta = \frac{\pi}{2},\ \text{dus}\ H(z) = \cos z,$$

dan is

$$\overline{G}(z) = 0,\ \lambda = 1,\ \omega = 1,\ Q_\omega\left(-\frac{z}{\zeta}\right) = -\frac{2z}{\pi} \quad \text{en}$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} F\left(\frac{z}{a_\nu}, \frac{\zeta}{a_\nu}\right) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{z}{a_\nu}\cdot\frac{t_\nu}{1-t_\nu} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{z\,\zeta}{a_\nu\,(a_\nu-\zeta)} =$$

$$= \frac{2z}{\pi} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\nu\,(2\nu-1)} = \frac{2z}{\pi} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2\nu-1} - \frac{1}{2\nu}\right) (\text{except. } \nu = 0).$$

Deze som hebben we hiervoor reeds bepaald en er voor gevonden de waarde 1, dus

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} F\left(\frac{z}{a_\nu}, \frac{\zeta}{a_\nu}\right) = \frac{2z}{\pi},$$

en bij gevolg

$$\bar{H}(z) = -\frac{2z}{\pi} + \frac{2z}{\pi} = 0,$$

zooals we ook vinden moesten.

9. HERMITE [1]) heeft nog laten zien, dat de twee uitdrukkingen, die we voor *cos z* gevonden hebben, beide bijzondere gevallen zijn van eene meer algemeene uitdrukking.

Door *sin z* logarithmisch te differentieeren, vinden we:

$$cotg\, z = \frac{1}{z} + \sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{z-\nu\pi} + \frac{1}{\nu\pi}\right) \text{ (except. } \nu = 0).$$

Vervangen we hierin z door $z+\zeta$, dan

$$cotg\,(z+\zeta) = \frac{1}{z+\zeta} + \sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{z+\zeta-\nu\pi} + \frac{1}{\nu\pi}\right) \text{(except. } \nu = 0),$$

en trekken we hiervan af de gelijkheid

$$cotg\, b = \frac{1}{b} + \sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{b-\nu\pi} + \frac{1}{\nu\pi}\right) \text{ (except. } \nu = 0),$$

dan verkrijgen we

$$cotg\,(z+\zeta) - cotg\, b = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{z+\zeta-\nu\pi} - \frac{1}{b-\nu\pi}\right).$$

Door te integreeren tusschen 0 en z vinden we dan

$$\frac{sin\,(z+\zeta)}{sin\,\zeta} = e^{z\, cotg\, b} \prod_{\nu=-\infty}^{\infty}\left(1 + \frac{z}{\zeta-\nu\pi}\right) e^{-\frac{z}{b-\nu\pi}},$$

en uit deze formule zijn de beide uitdrukkingen voor *cos z* af te leiden.

In de eerste plaats stellen we $b = 0$. Hiertoe zonderen we van het product af den factor, die correspondeert met $\nu = 0$, dus den factor

$$\left(1 + \frac{z}{\zeta}\right) e^{-\frac{z}{b}},$$

en verkrijgen dan, als we opmerken, dat $cotg\, b - \frac{1}{b}$ voor $b = 0$ nul is,

---

[1]) HERMITE, t. a. p. p. 105.

$$\frac{\sin(z+\zeta)}{\sin\zeta} = \left(1+\frac{z}{\zeta}\right) \prod_{\nu=-\infty}^{\infty} \left(1+\frac{z}{\zeta-\nu\pi}\right) e^{\frac{z}{\nu\pi}} \text{ (except. } \nu = 0),$$

en dus, wanneer we $\zeta = \frac{\pi}{2}$ stellen,

$$\cos z = \left(1+\frac{2z}{\pi}\right) \prod_{\nu=-\infty}^{\infty} \left(1-\frac{2z}{(2\nu-1)\pi}\right) e^{\frac{z}{\nu\pi}} \text{ (except. } \nu = 0).$$

In de tweede plaats vervangen we in de uitdrukking voor $\frac{\sin(z+\zeta)}{\sin\zeta}$, ζ door $\zeta+\frac{\pi}{2}$ en b door $b+\frac{\pi}{2}$ en verkrijgen dan

$$\frac{\cos(z+\zeta)}{\cos\zeta} = e^{-z\,tg\,b} \prod_{\nu=-\infty}^{\infty} \left(1+\frac{2z}{2\zeta-(2\nu-1)\pi}\right) e^{-\frac{2z}{2b-(2\nu-1)\pi}}.$$

Stellen we nu $\zeta = 0$ en $b = 0$, dan wordt

$$\cos z = \prod_{\nu=-\infty}^{\infty} \left(1-\frac{2z}{(2\nu-1)\pi}\right) e^{-\frac{2z}{(2\nu-1)\pi}}.$$

II. Sinussen van hoogere orde.

10. De sinussen van de vierde orde [1]) worden gedefinieerd, die van de hyperbolische soort, door de vergelijkingen:

$$A_1(z) = 1 + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^8}{8!} + \ldots\ldots$$

$$B_1(z) = z + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^9}{9!} + \ldots\ldots$$

$$C_1(z) = \frac{z^2}{2!} + \frac{z^6}{6!} + \frac{z^{10}}{10!} + \ldots\ldots$$

$$D_1(z) = \frac{z^3}{3!} + \frac{z^7}{7!} + \frac{z^{11}}{11!} + \ldots\ldots,$$

en die van de elliptische soort door de vergelijkingen:

$$A(z) = 1 - \frac{z^4}{4!} + \frac{z^8}{8!} - \ldots\ldots$$

$$B(z) = z - \frac{z^5}{5!} + \frac{z^9}{9!} - \ldots\ldots$$

---

[1]) J. C. en W. Kapteyn. Les Sinus de quatrième ordre. Natuurk. Verh. der Koninkl. Akademie. Deel XXIV.

$$C(z) = \frac{z^2}{2!} - \frac{z^6}{6!} + \frac{z^{10}}{10!} - \ldots\ldots$$

$$D(z) = \frac{z^3}{3!} - \frac{z^7}{7!} + \frac{z^{11}}{11!} - \ldots\ldots$$

Hieruit volgt terstond, wanneer we schrijven:

$$\eta = \sqrt[4]{-1} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,(1+i) = r\,(1+i),$$

dat we hebben de betrekkingen:

$A_1(z\,\eta) = A(z)$; $B_1(z\,\eta) = B(z)$; $C_1(z\,\eta) = C(z)$; $D_1(z\,\eta) = D(z)$;

en verder

$$\frac{d\,A_1}{dz} = D_1;\ \frac{d\,B_1}{dz} = A_1;\ \frac{d\,C_1}{dz} = B_1;\ \frac{d\,D_1}{dz} = C_1;$$

$$\frac{d\,A}{dz} = -D;\ \frac{d\,B}{dz} = A\ ;\ \frac{d\,C}{dz} = B\ ;\ \frac{d\,D}{dz} = C.$$

De oorsprong is voor de functies B en B_1 eene nul van de 1ste orde, voor de functies C en C_1 eene nul van de 2de orde en voor de functies D en D_1 eene nul van de 3de orde. De overige nullen worden gegeven door de volgende tabel:

nullen van	A	$z = \pm a_\nu$	en	$z = \pm i\,a_\nu$	
„ „	B	$z = \pm b_\nu$	„	$z = \pm i\,b_\nu$	
„ „	C	$z = \pm c_\nu$	„	$z = \pm i\,c_\nu$	
„ „	D	$z = \pm d_\nu$	„	$z = \pm i\,d_\nu$,	dus
„ „	A_1	$z = \pm \eta\,a_\nu$	„	$z = \pm i\,\eta\,a_\nu$	
„ „	B_1	$z = \pm \eta\,b_\nu$	„	$z = \pm i\,\eta\,b_\nu$	
„ „	C_1	$z = \pm \eta\,c_\nu$	„	$z = \pm i\,\eta\,c_\nu$	
„ „	D_1	$z = \pm \eta\,d_\nu$	„	$z = \pm i\,\eta\,d_\nu$,	

waarin a_ν, b_ν, c_ν en d_ν reëele grootheden zijn.

De nullen van de elliptische sinussen van de vierde orde liggen dus op de reeële as en op de imaginaire as en steeds vier aan vier op een cirkel, waarvan de oorsprong het middelpunt is; terwijl de nullen van de hyperbolische sinussen van de vierde orde liggen op de lijnen die de hoeken, gevormd door de coördinatenassen, middendoor deelen en ook

vier aan vier op dezelfde cirkels als de nullen van de elliptische sinussen van de vierde orde.

In bovenstaande tabel is:

$$a_1 = \frac{1}{2}\,\pi\,\sqrt{2} = r\,\pi \text{ en } c_1 = \pi\,\sqrt{2} = 2\,r\,\pi,$$

en verder is de afstand tusschen twee opvolgende a's constant, zoo ook die tusschen twee opvolgende c's en wel gelijk aan

$$\pi\,\sqrt{2} = c_1 = 2\,a_1.$$

We kunnen dus schrijven:

$$a_\nu = (2\,\nu + 1)\,a_1 = (2\,\nu + 1)\,r\,\pi,$$
$$c_\nu = \nu\,c_1 = 2\,\nu\,r\,\pi.$$

Hieruit volgt terstond dat de functies $A(z)$ en $C(z)$, en dus ook $A_1(z)$ en $C_1(z)$ van geslacht 1 zijn.

De waarden van b_ν en d_ν moeten benaderd worden en de opvolgende b's en d's liggen niet op gelijke afstanden van elkaar. Voor $\nu > 4$ kan men met zeer groote juistheid gebruik maken van de formules:

$$b_\nu = \frac{4\,\nu - 1}{2}\,a_1;\quad d_\nu = \frac{4\,\nu + 1}{2}\,a_1.$$

De grootheden a, b, c, d bezitten de eigenschap, dat

$$a_1 < b_1 < c_1 < d_1 < a_2 < b_2 < c_2 < d_2 < a_3 < \ldots.$$

zoodat ook de functies B, D, B_1 en D_1 van geslacht 1 zijn. Immers

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{b_\nu^2} < \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{a_\nu^2},$$

dus deze som is absoluut convergent, terwijl

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{b_\nu} > \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{c_\nu},$$

dus deze som is niet absoluut convergent.

Hetzelfde geldt natuurlijk ook voor de grootheden d.

11. De vorm der priemfuncties der sinussen van de vierde orde is ons dus bekend, en om de exponentieele factoren $e^{G(z)}$ te bepalen, moeten we van al deze functies gaan zoeken

de waarde van de integraal

$$\lim_{z=\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{G'(z)}{z\,G(z)} \frac{1}{z-t}\,dz.$$

We kunnen nu laten zien, dat we groote waarden van $|z|$ kunnen bepalen, waarvoor

$$\frac{G'(z)}{z\,G(z)}$$

tot nul nadert, zoodat dan ook, voor die waarden van $|z|$, bovenstaande integraal tot nul nadert.

Het gemakkelijkste kunnen we dit laten zien bij de hyperbolische sinussen van de vierde orde. We moeten hiertoe die sinussen uitdrukken in de exponentieele functie e^z. Hiervoor gelden de volgende formules:

$$A_1 = \frac{1}{4}(e^z + e^{-z} + e^{iz} + e^{-iz})$$

$$B_1 = \frac{1}{4}(e^z - e^{-z} - i\,e^{iz} + i\,e^{-iz})$$

$$C_1 = \frac{1}{4}(e^z + e^{-z} - e^{iz} - e^{-iz})$$

$$D_1 = \frac{1}{4}(e^z - e^{-z} + i\,e^{iz} - i\,e^{-iz}).$$

Het verdere onderzoek gaat nu bij deze vier functies op dezelfde wijze, we zullen ons daarom bepalen bij de functie A_1.

Daar $A_1' = D_1$, hebben we

$$\frac{A_1'}{A_1} = \frac{e^z - e^{-z} + i\,e^{iz} - i\,e^{-iz}}{e^z + e^{-z} + e^{iz} + e^{-iz}}.$$

Stellen we nu

$$z = \varrho\,(\cos\theta + i\,\sin\theta),$$

en laten we ϱ oneindig groot worden, echter zoo, dat ϱ nooit gelijk wordt aan den modulus van eene der nullen van A_1. Eenvoudigheidshalve kunnen we onderstellen dat de opvolgende waarden van ϱ gelijk zijn aan de waarden der moduli van de opvolgende nullen van $D_1 = A_1'$.

We hebben nu:

$$\begin{aligned} e^{z} &= e^{\varrho \cos\theta}\ \{\cos(\varrho \sin\theta) + i \sin(\varrho \sin\theta)\} \\ e^{-z} &= e^{-\varrho \cos\theta}\{\cos(\varrho \sin\theta) - i \sin(\varrho \sin\theta)\} \\ e^{iz} &= e^{-\varrho \sin\theta}\{\cos(\varrho \cos\theta) + i \sin(\varrho \cos\theta)\} \\ e^{-iz} &= e^{\varrho \sin\theta}\ \{\cos(\varrho \cos\theta) - i \sin(\varrho \cos\theta)\}, \end{aligned}$$

waaruit volgt, dat voor $\varrho = \infty$ en $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ de uitdrukking voor $\frac{A_1'}{A_1}$ vereenvoudigd kan worden tot

$$\lim_{\varrho=\infty} \frac{A_1'}{A_1} = \lim_{\varrho=\infty} \frac{e^{z} - i\,e^{-iz}}{e^{z} + e^{-iz}},$$

waarvoor we nog kunnen schrijven, als $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$,

$$\lim_{\varrho=\infty} \frac{A_1'}{A_1} = \lim_{\varrho=\infty} \frac{e^{\varrho(\cos\theta - \sin\theta)}\{\cos(\varrho\sin\theta + \varrho\cos\theta) + i\sin(\varrho\sin\theta + \varrho\cos\theta\} - i}{e^{\varrho(\cos\theta - \sin\theta)}\{\cos(\varrho\sin\theta + \varrho\cos\theta) + i\sin(\varrho\sin\theta + \varrho\cos\theta\} + 1} = 1,$$

en als $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$,

$$\lim_{\varrho=\infty} \frac{A_1'}{A_1} = \lim_{\varrho=\infty} \frac{1 - i\,e^{\varrho(\sin\theta - \cos\theta)}\{\cos(\varrho\cos\theta + \varrho\sin\theta) - i\sin(\varrho\cos\theta + \varrho\sin\theta)\}}{1 + e^{\varrho(\sin\theta - \cos\theta)}\{\cos(\varrho\cos\theta + \varrho\sin\theta) - i\sin(\varrho\cos\theta + \varrho\sin\theta)\}} = -i.$$

Behandelen we de andere kwadranten op dezelfde wijze, dan vinden we, dat

als $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{4}$, $\lim_{\varrho=\infty} \frac{A_1'}{A_1} = -i$

$\frac{3\pi}{4} < \theta < \pi$, „ $= -1$

$\pi < \theta < \frac{5\pi}{4}$, „ $= -1$

$\frac{5\pi}{4} < \theta < \frac{3\pi}{2}$, „ $= i$

$\frac{3\pi}{2} < \theta < \frac{7\pi}{4}$, „ $= i$

$\frac{7\pi}{4} < \theta < 2\pi$, „ $= 1$.

Heeft ϑ eene der waarden $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$ of $\frac{7\pi}{4}$ dan wordt, wegens de bijzondere aanname der opvolgende waarden van ϱ, A_1' nul en A_1 niet nul, zoodat voor die waarden van ϑ

$$\lim_{\varrho = \infty} \frac{A_1'}{A_1} = 0.$$

We hebben dus laten zien, dat we voor de functie $A_1(z)$ groote waarden van $|z|$ kunnen aangeven, waarvoor

$$\lim_{z = \infty} \frac{A_1'}{z\, A_1} = 0.$$

Bij gevolg hebben we hier:
$\overline{G}(z) = \varphi(z) =$ de voor $z = 0$ verdwijnende integraal van $\varphi'(z)$, waarin

$$\varphi'(z) = f(0) = \left[\frac{A_1'(z)}{A_1(z)}\right]_{z=0} =$$

$$= \left[\frac{\frac{z^3}{3!} + \frac{z^7}{7!} + \ldots .}{1 + \frac{z^4}{4!} + \ldots .}\right]_{z=0} = 0,$$

dus is ook $\overline{G}(z) = 0$ en we verkrijgen dus, wanneer we de nullen van $A_1(z)$ door α_ν aanduiden:

$$A_1(z) = \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\alpha_\nu}\right) e^{\frac{z}{\alpha_\nu}}.$$

Op dezelfde wijze vinden we, wanneer we de nullen van $B_1(z)$, $C_1(z)$ en $D_1(z)$ resp. aanduiden door β_ν, γ_ν en δ_ν,

$$B_1(z) = z \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\beta_\nu}\right) e^{\frac{z}{\beta_\nu}}$$

$$C_1(z) = \frac{z^2}{2!} \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\gamma_\nu}\right) e^{\frac{z}{\gamma_\nu}}$$

$$D_1(z) = \frac{z^3}{3!} \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\delta_\nu}\right) e^{\frac{z}{\delta_\nu}},$$

terwijl de overeenkomstige uitdrukkingen voor $A(z)$, $B(z)$, $C(z)$ en $D(z)$ hieruit af te leiden zijn door α_ν, β_ν, γ_ν en δ_ν te vervangen door $\frac{\alpha_\nu}{\eta}$, $\frac{\beta_\nu}{\eta}$, $\frac{\gamma_\nu}{\eta}$ en $\frac{\delta_\nu}{\eta}$.

12. Nemen we bij elkander die priemfuncties, waarvan de nullen dezelfde moduli hebben, nemen we dus de priemfuncties 4 aan 4 bij elkander, dan verkrijgen we

$$A_1(z) = \prod_{\nu=1}^{\infty} \left\{ \left(1 - \frac{z}{\eta\, a_\nu}\right)\left(1 - \frac{z}{\eta\, i\, a_\nu}\right)\left(1 + \frac{z}{\eta\, a_\nu}\right)\left(1 + \frac{z}{\eta\, i\, a_\nu}\right) e^{\frac{z}{\eta a_\nu} + \frac{z}{\eta i a_\nu} - \frac{z}{\eta a_\nu} - \frac{z}{\eta i a_\nu}} \right\} =$$

$$= \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^4}{a_\nu^4}\right) = \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^4}{(2\nu+1)^4 r^4 \pi^4}\right) =$$

$$= \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 + \frac{4\, z^4}{(2\nu+1)^4 \pi^4}\right),$$

en evenzoo is

$$B_1(z) = z \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^4}{b_\nu^4}\right)$$

$$C_1(z) = \frac{z^2}{2!} \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^4}{c_\nu^4}\right) = \frac{z^2}{2!} \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^4}{4\, r^4 \pi^4}\right)$$

$$D_1(z) = \frac{z^3}{3!} \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^4}{d_\nu^4}\right),$$

en bijgevolg ook

$$A(z) = \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^4}{a_\nu^4}\right) = \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{4\, z^4}{(2\nu+1)^4 \pi^4}\right)$$

$$B(z) = z \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^4}{b_\nu^4}\right)$$

$$C(z) = \frac{z^2}{2!} \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^4}{c_\nu^4}\right) = \frac{z^2}{2!} \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^4}{4\, r^4 \pi^4}\right)$$

$$D(z) = \frac{z^3}{3!} \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^4}{d_\nu^4}\right).$$

Beschouwen we dus de sinussen van de vierde orde als functies van z^4, dan zijn ze functies van geslacht 0.

13. Behandelen we nog met een enkel woord de hoogere sinussen in het algemeen [1]).

De groep van n functies, die de hyperbolische sinussen

---

[1]) J. C. en W. Kapteyn. Die höheren Sinus. Sitzb. der Kais. Akad. der Wissensch. II Abth. Bd. XCIII (1886).

van de n^e orde genoemd worden, wordt gegeven door de vergelijking:

$$\varphi_\mu(z) = \frac{z^\mu}{\mu!} + \frac{z^{\mu+n}}{(\mu+n)!} + \frac{z^{\mu+2n}}{(\mu+2n)!} + \ldots\ldots,$$

waarin voor μ achtereenvolgens de waarden $0, 1, 2, \ldots, (n-1)$ genomen moeten worden; terwijl de groep van de n elliptische sinussen van de n^e orde gegeven wordt door:

$$\psi_\mu(z) = \frac{z^\mu}{\mu!} - \frac{z^{\mu+n}}{(\mu+n)!} + \frac{z^{\mu+2n}}{(\mu+2n)!} - \ldots\ldots.$$

Zonderen we van deze functies af die, waarvoor $n = 1$ is en die dus gelijk zijn aan e^z en e^{-z} en dus geene nullen bezitten in het eindige deel van het vlak, dan is van de andere functies in de eerste plaats de oorsprong eene nul van orde μ.

Verder hebben de functies $\psi_\mu(z)$ steeds een oneindig aantal positieve reëele wortels.

Duiden we deze aan door

$$r_{\mu,\nu},\ (\nu = 1, 2, 3, \ldots.)$$

dan worden alle wortels van $\psi_\mu(z)$ gegeven door

$$r_{\mu,\nu}\left[\cos\frac{2h}{n}\pi + i\sin\frac{2h}{n}\pi\right] = r_{\mu,\nu}\cdot\varepsilon^h,$$

$$(h = 0, 1, 2, \ldots., n-1)$$

waarin $$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n} = \sqrt[n]{1},$$

zoodat er, wanneer n even is, ook een oneindig aantal negatieve reëele wortels is.

De wortels van $\varphi_\mu(z)$ worden gegeven door

$$r_{\mu,\nu}\left[\cos\frac{2h+1}{n}\pi + i\sin\frac{2h+1}{n}\pi\right] = r_{\mu,\nu}\cdot\eta\cdot\varepsilon^h,$$

$$(h = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

waarin $$\eta = \cos\frac{\pi}{n} + i\sin\frac{\pi}{n} = \sqrt[n]{-1},$$

zoodat, wanneer n oneven is, $\varphi_\mu(z)$ een oneindig aantal negatieve reëele wortels bezit.

De grootheden $r_{\mu,\nu}$ hebben de eigenschap, dat

$$r_{0,1} < r_{1,1} < r_{2,1} < \ldots < r_{n-1,1} < r_{0,2} < r_{1,2} < \ldots < r_{n-1,2} < r_{0,3} < \ldots$$

De nullen $r_{\mu,\nu}$ van eene zelfde functie $\psi_\mu(z)$ zijn in het algemeen niet equidistant, maar voor groote waarden van ν nadert hun afstand tot $\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{n}}$, waaruit we dus kunnen besluiten, dat alle hoogere sinussen functies van geslacht 1 zijn.

14. In de aangehaalde verhandeling wordt vervolgens in het algemeen bewezen, dat er groote waarden van $|z|$ zijn aan te geven, waarvoor

$$\frac{\varphi_\mu'(z)}{z\,\varphi_\mu(z)}$$

tot nul nadert, waaruit we dus de gevolgtrekking kunnen maken, dat voor alle functies $\varphi_\mu(z)$ de exponentieele factor $e^{G(z)}$ zich tot de eenheid herleidt.

Duiden we dus de wortels van $\varphi_\mu(z)$ aan door $\alpha_{\mu,\nu}$, dan kunnen we schrijven

$$\varphi_\mu(z) = \frac{z^\mu}{\mu!}\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\alpha_{\mu,\nu}}\right)e^{\frac{z}{\alpha_{\mu,\nu}}}$$

en dus ook

$$\psi_\mu(z) = \frac{z^\mu}{\mu!}\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{\eta z}{\alpha_{\mu,\nu}}\right)e^{\frac{\eta z}{\alpha_{\mu,\nu}}}.$$

15. Nemen we weer te zamen de priemfuncties waarvan de nullen dezelfde moduli hebben, dan wordt:

$$\varphi_\mu(z) = \frac{z^\mu}{\mu!}\prod_{\nu=1}^{\infty}\left\{\left(1-\frac{z}{r_{\mu,\nu}\eta}\right)\left(1-\frac{z}{r_{\mu,\nu}\eta\varepsilon}\right)\ldots\left(1-\frac{z}{r_{\mu,\nu}\eta\varepsilon^{n-1}}\right)\times\right.$$
$$\left.\times\, e^{\frac{z}{r_{\mu,\nu}\eta}+\frac{z}{r_{\mu,\nu}\eta\varepsilon}+\ldots+\frac{z}{r_{\mu,\nu}\eta\varepsilon^{n-1}}}\right\},$$

hetgeen zich, zooals gemakkelijk in te zien is, herleidt tot

$$\varphi_\mu(z) = \frac{z^\mu}{\mu!}\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1+\frac{z^n}{r_{\mu,\nu}^{\,n}}\right).$$

Evenzoo heeft men

$$\psi_\mu(z) = \frac{z^\mu}{\mu!} \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^n}{r_{\mu,\nu}^{\ n}}\right).$$

Wanneer men dus de sinussen van de n^e orde beschouwt als functies van z^n, dan zijn ze op te vatten als functies van geslacht 0.

16. We kunnen ook gemakkelijk in het algemeen nagaan, in hoeverre eene functie van geslacht ω,

$$G(z) = C z^\lambda e^{\overline{G}(z)} \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_\nu}\right) e^{Q_\omega\left(\frac{z}{a_\nu}\right)},$$

te herleiden is tot eene functie van lager geslacht, als de wortels van $G(z)$ gegeven worden door

$r_\nu \varepsilon^h$, $(\nu = 1, 2, 3, \ldots\ldots; h = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$

waarin $\varepsilon = \sqrt[n]{1}$.

Nemen we dan weer de priemfuncties, waarvan de nullen dezelfde moduli hebben bij elkander, dan verkrijgen we achter het productteeken in de eerste plaats een product

$$\left(1 - \frac{z}{r_\nu}\right)\left(1 - \frac{z}{r_\nu \varepsilon}\right) \ldots \left(1 - \frac{z}{r_\nu \varepsilon^{n-1}}\right) = \left(1 - \frac{z^n}{r_\nu^{\ n}}\right),$$

en in de tweede plaats een exponentieelen factor

$$e^{\sum_{h=0}^{n-1} Q_\omega\left(\frac{z}{r_\nu \varepsilon^h}\right)}.$$

Nu is

$$\begin{aligned}
\sum_{h=0}^{n-1} Q_\omega\left(\frac{z}{r_\nu \varepsilon^h}\right) = \quad & \frac{z}{r_\nu}\left(1 + \frac{1}{\varepsilon} + \ldots + \frac{1}{\varepsilon^{n-1}}\right) \\
& + \frac{1}{2}\frac{z^2}{r_\nu^{\ 2}}\left(1 + \frac{1}{\varepsilon^2} + \ldots + \frac{1}{\varepsilon^{2(n-1)}}\right) \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \frac{1}{\mu}\frac{z^\mu}{r_\nu^{\ \mu}}\left(1 + \frac{1}{\varepsilon^\mu} + \ldots + \frac{1}{\varepsilon^{\mu(n-1)}}\right) \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \frac{1}{\omega}\frac{z^\omega}{r_\nu^{\ \omega}}\left(1 + \frac{1}{\varepsilon^\omega} + \ldots + \frac{1}{\varepsilon^{\omega(n-1)}}\right).
\end{aligned}$$

Wanneer nu $n > \omega$, dan zijn al deze sommen nul, dus dan

herleidt de functie zich tot eene eenvoudige functie in z^n van geslacht 0, vermenigvuldigd met de functie

$$C\, z^\lambda\, e^{\overline{G}(z)}.$$

Is echter $\omega > n$, dan vallen de bovenstaande sommen niet alle weg, integendeel blijven die, waarbij de index μ gelijk is aan n, $2n, \ldots$ bestaan en die sommen worden dan gelijk aan n. Is dus $\omega = p\,n + q$, dan herleidt $\sum_{h=0}^{n-1} Q_\omega\left(\frac{z}{r_\nu\,\varepsilon^h}\right)$ zich tot

$$\sum_{h=0}^{n-1} Q_\omega\left(\frac{z}{r_\nu\,\varepsilon^h}\right) = \frac{z^n}{r_\nu^{\,n}} + \frac{1}{2}\,\frac{z^{2n}}{r_\nu^{\,2n}} + \ldots + \frac{1}{p}\,\frac{z^{pn}}{r_\nu^{\,pn}}$$
$$= Q_p\left(\frac{z^n}{r_\nu^{\,n}}\right),$$

zoodat dan $G(z)$ zich herleidt tot

$$G(z) = C\, z^\lambda\, e^{\overline{G}(z)} \prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^n}{r_\nu^{\,n}}\right) e^{Q_p\left(\frac{z^n}{r_\nu^{\,n}}\right)},$$

dus tot eene eenvoudige functie in z^n van geslacht p, vermenigvuldigd met de functie

$$C\, z^\lambda\, e^{\overline{G}(z)}.$$

17. Voegen we hier nog aan toe eene eigenschap, die algemeen geldt voor elke functie van geslacht ω en die wel eenige analogie vertoont met het bovenstaande, namelijk de volgende:

Elke functie $G(z)$ van geslacht ω kan beschouwd worden als een deeler van eene functie $H(z)$ van geslacht 0, wanneer men daarin z door $z^{\omega+1}$ vervangt.

Zijn weer $1, \varepsilon, \varepsilon^2, \ldots . \varepsilon^\omega$ de verschillende wortels van $x^{\omega+1} = 1$, dan volgt uit de reeksontwikkeling van de functie $G(z)$, dat het product

$$G(z)\; G(\varepsilon\, z)\; G(\varepsilon^2\, z) \ldots . G(\varepsilon^\omega\, z)$$

eene geheele functie in $z^{\omega+1}$ zal zijn. Noemen we deze functie $H(z^{\omega+1})$, dan zullen de wortels van $H(z)$ zijn de grootheden $a_\nu^{\omega+1}$, wanneer a_ν de wortels zijn van $G(z)$. Daar nu

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{a_\nu^{\omega+1}}$$

absoluut convergent is, is $H(z)$ eene functie van geslacht 0, en daar $G(z)$ een deeler is van $H(z^{\omega}+1)$, is hiermede het gestelde bewezen.

III. De reciproke Γ-functie.

18. De Γ-functie wordt gedefinieerd door de bepaalde integraal

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{z-1}\, dx.$$

Deze bepaalde integraal heeft slechts beteekenis, wanneer het reëele deel van z positief is. De Γ-functie is dus ook slechts voor die waarden van z bepaald door deze integraal. Willen we de Γ-functie ook voor de andere waarden van z bepalen, dan moeten we de functie z. g. uitbreiden, d. w. z. we moeten trachten de bepaalde integraal te transformeeren in eene andere uitdrukking, die ook beteekenis heeft voor waarden van z, waarvan het reëele deel negatief is. Deze transformatie kan op verschillende wijzen geschieden, maar, volgens een bekend theorema, is de daardoor gedefinieerde uitbreiding der functie steeds dezelfde. Volgens Riemann toch kan eene functie, die langs een eindig element gegeven is, slechts op ééne wijze worden voortgezet, als men de voorwaarde invoert, dat de functie eenwaardig moet blijven en slechts discontinuïteiten mag bezitten in enkele punten.

19. In de eerste plaats kunnen we de bepaalde integraal transformeeren tot

$$\Gamma(z) = P(z) + Q(z),$$

waarin

$$P(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} + \frac{1}{2!\,(z+2)} - \ldots\ldots$$

en

$$Q(z) = C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + \ldots\ldots,$$

waarin

$$C_n = \frac{1}{n!} \int_1^{\infty} \frac{lg^n x}{x} e^{-x}\, dx.$$

$Q(z)$ is steeds gelijk aan $\int_1^\infty x^{z-1} e^{-x}\, dx$ en $P(z)$ is alleen dan gelijk aan $\int_0^1 x^{z-1} e^{-x}\, dx$ wanneer het reëele deel van z positief is.

Aldus gedefinieerd, heeft de Γ-functie ook beteekenis voor waarden van z, waarvan het reëele deel negatief is.

Uit de definitie volgt terstond, dat de functie enkelvoudige polen heeft in de punten $z = 0, -1, -2, \ldots$ Verder wordt de functie in geen enkel punt van het eindige deel van het vlak nul. Dit is echter niet zoo gemakkelijk te zien uit de hierboven gegeven definitie, daarom zullen we liever van eene andere definitie uitgaan.

20. Gauss heeft de bepaalde integraal, die de Γ-functie definieert, wanneer het reëele deel van z positief is, getransformeerd in

$$\Gamma(z) = \lim_{\nu = \infty} \left[\frac{\nu^z}{z\left(1+\frac{z}{1}\right)\left(1+\frac{z}{2}\right)\ldots\left(1+\frac{z}{\nu}\right)} \right].$$

Het tweede lid van deze vergelijking heeft ook beteekenis, wanneer het reëele deel van z negatief is, en we zullen dus dit tweede lid kunnen gebruiken als definitie voor de uitbreiding van de Γ-functie. Doen we dit, dan kunnen we aantoonen, dat de aldus gedefinieerde functie is eene eenwaardige functie, die nergens nul wordt.

Uit het bovenstaande leiden we toch af:

$$\log \Gamma(z) = \lim_{\nu = \infty} \left[z \log \nu - \log z - \log\left(1+\frac{z}{1}\right) - \ldots - \log\left(1+\frac{z}{\nu}\right) \right],$$

waarin we die logarithmen genomen hebben, welke bepaald worden door

$$\log 1 = 0.$$

$$\log z\,\Gamma(z) = \lim_{\nu = \infty} \left[z \log \nu - \log\left(1+\frac{z}{1}\right) - \ldots - \log\left(1+\frac{z}{\nu}\right) \right].$$

Daar nu

$$\nu = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{\nu}{\nu - 1},$$

mogen we schrijven:

$$log\ \nu = log\ \frac{2}{1} + log\ \frac{3}{2} + \ldots + log\ \frac{\nu}{\nu - 1},$$

dus

$$log\ z\ \Gamma(z) = \lim_{\nu = \infty} \left[z\ log\ \frac{2}{1} - log\left(1 + \frac{z}{1}\right) + z\ log\left(1 + \frac{1}{2}\right) - log\left(1 + \frac{z}{2}\right) \ldots \right]$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[z\ log\left(1 + \frac{1}{\nu}\right) - log\left(1 + \frac{z}{\nu}\right) \right].$$

Deze reeks heeft voor elke eindige waarde van z, welke niet samenvalt met een der punten $-\nu$, eene eindige waarde. Onderstellen we toch dat $|z| < p$ en beschouwen we de termen

$$\sum_{\nu=p}^{\infty} \left[z\ log\left(1 + \frac{1}{\nu}\right) - log\left(1 + \frac{z}{\nu}\right) \right].$$

De algemeene term hiervan kunnen we schrijven:

$$z\left(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{2\,\nu^2} + \ldots\right) - \left(\frac{z}{\nu} - \frac{z^2}{2\,\nu^2} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{z\,(z-1)}{2\,\nu^2} + \ldots = \frac{z\,(z-1)}{2\,\nu^2}\,(1 + \varepsilon),$$

waarin ε tot nul nadert, wanneer ν oneindig toeneemt. Van af een term met een genoegzaam grooten index, nemen dus de termen van de reeks evenzoo af als de termen van de convergente reeks $\Sigma \frac{1}{\nu^2}$, waaruit dus volgt, dat de beschouwde reeks, dus ook $log\ z\ \Gamma(z)$, eene eindige waarde heeft voor elke eindige waarde van z, welke niet samenvalt met een der punten $-1, -2, -3, \ldots$. De functie $\Gamma(z)$ is dus eene eenwaardige functie, die nergens in het eindige vlak nul wordt. De functie $\frac{1}{\Gamma(z)}$ is dus eene holomorphe functie in het geheele eindige gebied, met de enkelvoudige nullen $0, -1, -2, -3, \ldots$. We kunnen dus deze functie schrijven in den vorm van een oneindig product, en kunnen, om hiertoe te geraken, verschillende wegen inslaan.

Uit de bekende nullenreeks, weten we reeds, dat de functie van geslacht 1 is.

21. Allereerst kunnen we uitgaan van de formule:

$$\log \Gamma(z) = \lim_{\nu=\infty} \left[z \log \nu - \log z - \log\left(1+\frac{z}{1}\right) - \ldots - \log\left(1+\frac{z}{\nu}\right)\right].$$

Door te differentieeren, leiden we hieruit af:

$$\frac{d}{dz}\log \Gamma(z) = \lim_{\nu=\infty}\left[\log \nu - \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} - \ldots - \frac{1}{z+\nu}\right],$$

en door nogmaals te differentieeren:

$$\frac{d^2}{dz^2}\log \Gamma(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{(z+1)^2} + \ldots + \frac{1}{(z+\nu)^2} + \ldots$$

Vermenigvuldigen we deze vergelijking met dz en integreeren we tusschen de grenzen 1 en z, dan vinden we:

$$\frac{d}{dz}\log \Gamma(z) - \frac{d}{dz}\log \Gamma(1) = \left(1-\frac{1}{z}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{z+1}\right) + \ldots$$
$$\ldots + \left(\frac{1}{\nu+1} - \frac{1}{z+\nu}\right) + \ldots$$

$-\frac{d}{dz}\log \Gamma(1)$ is de constante van Euler, gewoonlijk voorgesteld door γ, dus

$$\frac{d}{dz}\log \Gamma(z+1) = -\gamma + \left(1-\frac{1}{z+1}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{z+2}\right) + \ldots$$
$$\ldots + \left(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{z+\nu}\right) + \ldots$$

Vermenigvuldigen we weer met dz en integreeren we tusschen de grenzen 0 en z, dan verkrijgen we:

$$\log \Gamma(z+1) - \log \Gamma(1) = -\gamma z + (z - \log(1+z)) +$$
$$+\left(\frac{z}{2} - \log\left(1+\frac{z}{2}\right)\right) + \ldots + \left(\frac{z}{\nu} - \log\left(1+\frac{z}{\nu}\right)\right) + \ldots,$$

of

$$\log \frac{1}{\Gamma(z+1)} = \gamma z + (\log(1+z) - z) + \left(\log\left(1+\frac{z}{2}\right) - \frac{z}{2}\right) + \ldots$$
$$\ldots + \left(\log\left(1+\frac{z}{\nu}\right) - \frac{z}{\nu}\right) + \ldots,$$

dus

$$\frac{1}{\Gamma(z+1)} = e^{\gamma z} \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{\nu}\right) e^{-\frac{z}{\nu}},$$

en

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z\, e^{\gamma z} \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{\nu}\right) e^{-\frac{z}{\nu}}.$$

22. We kunnen ook uitgaan van de formule van GAUSS:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{\nu}\right) e^{-z \log \frac{\nu+1}{\nu}},$$

en dan trachten deze te brengen in den vorm

$$z\, e^{\overline{G}(z)} \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{\nu}\right) e^{-\frac{z}{\nu}}.$$

We hebben hiertoe slechts te bepalen de grootheid

$$\overline{G}(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(-z \log \frac{\nu+1}{\nu} + \frac{z}{\nu}\right) =$$

$$= z \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\nu} - \log \frac{\nu+1}{\nu}\right).$$

Nu is:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\nu} - \log \frac{\nu+1}{\nu}\right) =$$

$$= \lim_{\nu=\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{\nu} - \log \frac{2}{1} - \log \frac{3}{2} - \ldots - \log \frac{\nu+1}{\nu}\right)$$

$$= \lim_{\nu=\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{\nu} - \log(\nu+1)\right),$$

hetgeen eene andere uitdrukking is voor de constante van EULER γ. Dus

$$\overline{G}(z) = \gamma\, z,$$

en

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z\, e^{\gamma z} \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{\nu}\right) e^{-\frac{z}{\nu}}.$$

23. Ook kunnen we de methode volgen, zooals die in hoofdstuk IV is opgesteld, en dus $\overline{G}(z)$ bepalen, door eene

beschouwing van de integraal

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{G'(z)}{G(z)}\,\frac{1}{z(z-t)}\,dz,$$

wanneer we daarin stellen

$$G(z) = \frac{1}{z\,\Gamma(z)} = \frac{1}{\Gamma(z+1)}.$$

Gaan we uit van de definitie:

$$\Gamma(z) = P(z) + Q(z),$$

dan kunnen we bovenstaande integraal schrijven in den vorm

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c G'(z)\,[P(z+1) + Q(z+1)]\,\frac{dz}{z(z-t)} = \frac{1}{2\pi i}\int_c F(z)\,dz,$$

en de waarde van deze integraal zal dus gelijk zijn aan de som van de residu's t. o. z. van de polen gelegen binnen den cirkel, waarlangs de integraal genomen wordt.

We beginnen met te onderstellen, dat voor den straal ϱ van den cirkel geldt:

$$n < \varrho < n+1,$$

en kunnen dan de limietwaarde van de integraal vinden door ϱ, dat is dus door n, oneindig te doen toenemen.

We hebben nu:

$$\mathfrak{L}_{(0)} F(z) = -\frac{1}{t}\,G'(0)\,[P(1) + Q(1)] = -\frac{1}{t}\,\frac{G'(0)}{G(0)} =$$

$$= \frac{1}{t}\left[\frac{d}{dz}\,log\,\Gamma(z+1)\right]_{z=0} = -\frac{\gamma}{t}.$$

$$\mathfrak{L}_{(t)} F(z) = \frac{1}{t}\,G'(t)\,[P(t+1) + Q(t+1)] =$$

$$= -\frac{1}{t}\,\frac{d}{dt}\,log\,\Gamma(t+1).$$

$$\mathfrak{L}_{(-\nu)} F(z) = \frac{1}{\nu(\nu+t)}\,G'(-\nu)\,\frac{(-1)^{\nu-1}}{(\nu-1)!},$$

want

$$\mathfrak{L}_{(-\nu)} F(z) = \mathfrak{L}_{(-\nu)} G'(z)\,[P(z+1) + Q(z+1)]\,\frac{1}{z(z-t)} =$$

$$= \frac{1}{\nu\,(\nu+t)}\,G'(-\nu)\int_{(-\nu)} P(z+1) =$$

$$= \frac{1}{\nu\,(\nu+t)}\,G'(-\nu)\int_{(-\nu)}\left[\frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+2} + \frac{1}{2!\,(z+3)} - \right.$$

$$\left. - \ldots (-1)^{\nu-1}\,\frac{1}{(\nu-1)!\,(z+\nu)}\ldots\right] =$$

$$= \frac{1}{\nu\,(\nu+t)}\,G'(-\nu)\,\frac{(-1)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}.$$

Uit $$G(z+1) = \frac{1}{(z+1)\,\Gamma(z+1)}$$

volgt nu

$$(z+1)\,G(z+1) = \frac{1}{\Gamma(z+1)} = \frac{1}{z\,\Gamma(z)} = G(z),$$

en hieruit verder:

$$G'(z) = (z+1)\,G'(z+1) + G(z+1).$$

Dit geeft ons, wanneer we in aanmerking nemen, dat

$$G(-1) = G(-2) = \ldots = 0 \quad \text{en} \quad G(0) = 1:$$

$$G'(-1) = 1;\ G'(-2) = -1;\ G'(-3) = 1\,.\,2;\ \ldots.$$

$$G'(-\nu) = (-1)^{\nu-1}\,(\nu-1)!\,.$$

Hierdoor wordt:

$$\int_{(-\nu)} F(z) = \frac{1}{\nu\,(\nu+t)},$$

en de waarde van de integraal is dus

$$-\frac{\gamma}{t} - \frac{1}{t}\,\frac{d}{dt}\log\Gamma(t+1) + \sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\nu\,(\nu+t)}.$$

Gaan we tot de limiet over, dan wordt de waarde van de integraal:

$$-\frac{\gamma}{t} - \frac{1}{t}\,\frac{d}{dt}\log\Gamma(t+1) + \lim_{n=\infty}\left(\frac{1}{t+1} + \frac{1}{2\,(t+2)} + \ldots + \frac{1}{n\,(t+n)}\right).$$

Gebruiken we nu de formule van pag. 82:

$$\frac{d}{dt}\log\Gamma(t+1) = \lim_{n=\infty}\left[\log n - \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+2} - \ldots - \frac{1}{t+n}\right],$$

dan blijkt, dat de limietwaarde van de integraal is:

$$-\frac{\gamma}{t}-\lim_{n=\infty}\left[\frac{\log n}{t}-\left(\frac{1}{t(t+1)}+\frac{1}{t+1}\right)-\left(\frac{1}{t(t+2)}+\frac{1}{2(t+2)}\right)-\right.$$
$$\left.-\ldots.-\left(\frac{1}{t(t+n)}+\frac{1}{n(t+n)}\right)\right]=$$
$$=-\frac{\gamma}{t}-\lim_{n=\infty}\left[\frac{\log n}{t}-\frac{1}{t}-\frac{1}{2t}-\ldots.-\frac{1}{nt}\right]=$$
$$=-\frac{\gamma}{t}+\frac{1}{t}\lim_{n=\infty}\left[\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots.+\frac{1}{n}-\log n\right]=$$
$$=-\frac{\gamma}{t}+\frac{\gamma}{t}=0.$$

We hebben dus:
$\overline{G}(z)=\varphi(z)=$ de voor $z=0$ verdwijnende integraal van $\varphi'(z)$, waarin

$$\varphi'(z)=f(0)=\frac{G'(0)}{G(0)}=\gamma,$$

dus

$$\overline{G}(z)=\gamma z \text{ en } G(0)=1,$$

dus

$$G(z)=\frac{1}{z\,\Gamma(z)}=e^{\gamma z}\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{\nu}\right)e^{-\frac{z}{\nu}}.$$

IV. De σ-functie van Weierstrass, *de θ- en de ϑ-functies van* Jacobi.

24. De σ-functie van Weierstrass, die tot uitgangspunt dient voor de theorie der dubbelperiodische functies, wordt gedefinieerd door hare ontwikkeling in priemfuncties.

De nullen van de functie worden gegeven door de formule

$$a_{\mu,\nu}=\mu\,\omega+\nu\,\omega',$$

waarin zoowel μ als ν alle geheele waarden van $-\infty$ tot $+\infty$ kan doorloopen, en waarin ω en ω' twee zoodanige grootheden zijn, dat hunne verhouding complex is. Hierbij zullen we onderstellen, dat het reëele deel van $\frac{\omega' i}{\omega}$ negatief,

dus dat de modulus van

$$q = e^{\frac{\pi \omega' i}{\omega}},$$

evenals die van

$$p = e^{-\frac{\pi \omega i}{\omega'}}$$

kleiner dan 1 is.

Daar men kan bewijzen, dat de dubbel oneindige som

$$\sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{1}{a_{\mu,\nu}^{r}}$$

absoluut convergeert als $r \geqq 3$ [1]), is de functie eene functie van geslacht 2, en wordt nu verder geheel en al bepaald door de formule:

$$\sigma(z) = z \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_{\mu,\nu}}\right) e^{\frac{z}{a_{\mu,\nu}} + \frac{1}{2}\frac{z^2}{a_{\mu,\nu}^2}} \text{ (exc. } \mu = \nu = 0).$$

25. Met deze σ-functie staan in verband de θ- en de ϑ-functies van JACOBI.

De θ_1-functie heeft evenals de ϑ_1-functie dezelfde nullen als de σ-functie.

Gewoonlijk wordt de θ_1-functie gedefinieerd door de formule:

$$\theta_1(z) = \frac{1}{i} e^{\frac{\pi i}{\omega}\left(z + \frac{\omega'}{4}\right)} \theta_3\left(z + \frac{\omega + \omega'}{2}\right),$$

en

$$\theta_3(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{\frac{\pi i}{\omega}(2\nu z + \nu^2 \omega')}.$$

De ϑ_1-functie wordt gedefinieerd door de formule:

$$\vartheta_1(z) = \frac{1}{i} e^{-\frac{\pi i}{\omega'}\left(z + \frac{\omega}{4}\right)} \vartheta_3\left(z + \frac{\omega + \omega'}{2}\right),$$

en

$$\vartheta_3(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi i}{\omega'}(2\nu z + \nu^2 \omega)}.$$

We kunnen echter ook zoowel de θ_1- als de ϑ_1-functie

---

[1]) Zie bijv. TANNERY et MOLK. Éléments de la théorie des fonctions elliptiques. t. I. p. 24 e. v.

verkrijgen door de beschouwing van het niet absoluut convergeerend product [1]):

$$z \prod_{\mu=-\infty}^{\infty} \prod_{\nu=-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_{\mu,\nu}}\right) \text{ (exc. } \mu = \nu = 0).$$

Volvoert men de vermenigvuldiging, zooals dit aangegeven wordt door de volgende wijze van voorstelling:

$$z \lim_{m=\infty} \prod_{\mu=-m}^{m} \left(1 - \frac{z}{a_{\mu,0}}\right) \times \lim_{n=\infty} \prod_{\nu=-n}^{n} \left\{ \lim_{m=\infty} \prod_{\mu=-m}^{m} \left(1 - \frac{z}{a_{\mu,\nu}}\right) \right\},$$

(except. $\mu = 0$) (except. $\nu = 0$)

dan verkrijgt men tot uitkomst:

$$\frac{\theta_1(z)}{\theta_1'(0)}.$$

Volvoert men daarentegen de vermenigvuldiging aldus:

$$z \lim_{n=\infty} \prod_{\nu=-n}^{n} \left(1 - \frac{z}{a_{0,\nu}}\right) \times \lim_{m=\infty} \prod_{\mu=-m}^{m} \left\{ \lim_{n=\infty} \prod_{\nu=-n}^{n} \left(1 - \frac{z}{a_{\mu,\nu}}\right) \right\},$$

(except. $\nu = 0$) (except. $\mu = 0$)

dan verkrijgt men tot uitkomst:

$$\frac{\vartheta_1(z)}{\vartheta_1'(0)}.$$

26. Past men nu de eerste wijze van vermenigvuldiging toe op de functie $\sigma(z)$, dan verkrijgt men, in verband met het theorema van hoofdstuk III, § 6:

$$\sigma(z) = \frac{\theta_1(z)}{\theta_1'(0)} \cdot e^{Q(z)},$$

waarin

$$Q(z) = \lim_{m=\infty} \sum_{\mu=-m}^{m} \frac{z}{a_{\mu,0}} + \lim_{n=\infty} \sum_{\nu=-n}^{n} \left(\lim_{m=\infty} \sum_{\mu=-m}^{m} \frac{z}{a_{\mu,\nu}} \right)$$

(exc. $\mu = 0$) (exc. $\nu = 0$)

$$+ \lim_{m=\infty} \sum_{\mu=-m}^{m} \frac{1}{2} \frac{z^2}{a_{\mu,0}^2} + \lim_{n=\infty} \sum_{\nu=-n}^{n} \left(\lim_{m=\infty} \sum_{\mu=-m}^{m} \frac{1}{2} \frac{z^2}{a_{\mu,\nu}^2} \right).$$

(exc. $\mu = 0$) (exc. $\nu = 0$)

---

[1]) Zie BRIOT et BOUQUET. t. a. p. p. 323.

Nu is:

$$\lim_{m=\infty} \sum_{\mu=-m}^{m} \frac{1}{a_{\mu,0}} = \lim_{m=\infty} \sum_{\mu=-m}^{m} \frac{1}{\mu\,\omega} = 0,$$
(exc. $\mu = 0$) (exc. $\mu = 0$)

en

$$\lim_{n=\infty} \sum_{\nu=-n}^{n} \left(\lim_{m=\infty} \sum_{\mu=-m}^{m} \frac{1}{a_{\mu,\nu}} \right) =$$
(exc. $\nu = 0$)

$$= \lim_{n=\infty} \sum_{\nu=-n}^{n} \left(\frac{1}{\nu\,\omega'} + \lim_{m=\infty} \sum_{\mu=1}^{m} \frac{2\,\nu\,\omega'}{\nu^2\,\omega'^2 - \mu^2\,\omega^2} \right).$$
(exc. $\nu = 0$)

Uit

$$cotg\, z = \frac{1}{z} + \lim_{m=\infty} \sum_{\mu=1}^{m} \frac{2\,z}{z^2 - \mu^2\,\pi^2}$$

volgt nu

$$cotg\, \frac{\nu\,\omega'\,\pi}{\omega} = \frac{\omega}{\nu\,\omega'\,\pi} + \frac{\omega}{\pi} \lim_{m=\infty} \sum_{\mu=1}^{m} \frac{2\,\nu\,\omega'}{\nu^2\,\omega'^2 - \mu^2\,\omega^2},$$

dus

$$\lim_{n=\infty} \sum_{\nu=-n}^{n} \left(\lim_{m=\infty} \sum_{\mu=-m}^{m} \frac{1}{a_{\mu,\nu}} \right) =$$
(exc. $\nu = 0$)

$$= \lim_{n=\infty} \sum_{\nu=-n}^{n} \frac{\pi}{\omega}\, cotg\, \frac{\nu\,\omega'\,\pi}{\omega} = 0.$$
(exc. $\nu = 0$)

Verder hebben we:

$$\frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{a_{\mu,\nu}} + \frac{z}{a_{\mu,\nu}^2} + \frac{1}{z - a_{\mu,\nu}} \right)$$
(exc. $\mu = \nu = 0$),

dus

$$\frac{\sigma'\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\sigma\left(\frac{\omega}{2}\right)} = \frac{2}{\omega} + \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{a_{\mu,\nu}} + \frac{\omega}{2\,a_{\mu,\nu}^2} + \frac{1}{\frac{\omega}{2} - a_{\mu,\nu}} \right)$$
(exc. $\mu = \nu = 0$).

Volvoeren we de sommatie op de wijze, zooals we thans op het oog hebben, dan mogen we het element, dat tusschen haakjes staat, splitsen in de drie elementen:

$$\frac{1}{a_{\mu,\nu}},\ \frac{1}{\frac{\omega}{2}-a_{\mu,\nu}}\ \text{en}\ \frac{\omega}{2\,a_{\mu,\nu}^2},$$

want we zullen zien dat die sommaties van elk der 3 elementen eindige waarden opleveren.

We hebben toch:

$$\lim_{m=\infty}\sum_{\mu=-m}^{m}\frac{1}{a_{\mu,0}}+\lim_{n=\infty}\sum_{\nu=-n}^{n}\left(\lim_{m=\infty}\sum_{\mu=-m}^{m}\frac{1}{a_{\mu,\nu}}\right)=0$$

(exc. $\mu=0$) (exc. $\nu=0$)

en

$$\lim_{m=\infty}\sum_{\mu=-m}^{m}\frac{1}{\frac{\omega}{2}-a_{\mu,0}}=\lim_{m=\infty}\sum_{\mu=-m}^{m}\frac{1}{\frac{\omega}{2}-\mu\,\omega}=0,$$

dus

$$\lim_{m=\infty}\sum_{\mu=-m}^{m}\frac{1}{\frac{\omega}{2}-a_{\mu,0}}=-\frac{1}{\frac{\omega}{2}}=-\frac{2}{\omega}.$$

(exc. $\mu=0$)

Verder

$$\lim_{n=\infty}\sum_{\nu=-n}^{n}\left(\lim_{m=\infty}\sum_{\mu=-m}^{m}\frac{1}{\frac{\omega}{2}-a_{\mu,\nu}}\right)=$$

(exc. $\nu=0$)

$$=\lim_{n=\infty}\sum_{\nu=-n}^{n}\left(\lim_{m=\infty}\sum_{\mu=1}^{m}\frac{-2\,\nu\,\omega'}{\nu^2\,\omega'^2-\frac{(2\,\mu-1)^2}{4}\,\omega^2}\right).$$

(exc. $\nu=0$)

Uit

$$tg\,z=\lim_{m=\infty}\sum_{\mu=1}^{m}\frac{2\,z}{(2\,\mu-1)^2\frac{\pi^2}{4}-z^2}$$

volgt nu

$$tg\,\frac{\nu\,\omega'\,\pi}{\omega} = \lim_{m=\infty}\sum_{\mu=1}^{m} \frac{\dfrac{2\,\nu\,\omega'\,\pi}{\omega}}{(2\,\mu-1)^2\,\dfrac{\pi^2}{4} - \dfrac{\nu^2\,\omega'^2\,\pi^2}{\omega^2}} =$$

$$= \frac{\omega}{\pi} \lim_{m=\infty}\sum_{\mu=1}^{m} \frac{2\,\nu\,\omega'}{(2\,\mu-1)^2\,\dfrac{\omega^2}{4} - \nu^2\,\omega'^2},$$

dus

$$\lim_{n=\infty}\sum_{\nu=-n}^{n}\left(\lim_{m=\infty}\sum_{\mu=-m}^{m}\frac{1}{\dfrac{\omega}{2}-a_{\mu,\nu}}\right) =$$

(exc. $\nu = 0$)

$$= \lim_{n=\infty}\sum_{\nu=-n}^{n}\frac{\pi}{\omega}\,tg\,\frac{\nu\,\omega'\,\pi}{\omega} = 0.$$

(exc. $\nu = 0$)

We verkrijgen dus:

$$\lim_{m=\infty}\sum_{\mu=-m}^{m}\frac{1}{2}\frac{1}{a_{\mu,0}^2} + \lim_{n=\infty}\sum_{\nu=-n}^{n}\left(\lim_{m=\infty}\sum_{\mu=-m}^{m}\frac{1}{2}\frac{1}{a_{\mu,\nu}^2}\right) =$$

(exc. $\mu = 0$) (exc. $\nu = 0$)

$$= \frac{1}{\omega}\,\frac{\sigma'\left(\dfrac{\omega}{2}\right)}{\sigma\left(\dfrac{\omega}{2}\right)},$$

en bijgevolg:

$$Q\,(z) = \frac{z^2}{\omega}\,\frac{\sigma'\left(\dfrac{\omega}{2}\right)}{\sigma\left(\dfrac{\omega}{2}\right)} = \frac{z^2}{\omega}\cdot\,\eta\,,$$

dus

$$\vartheta_1\,(z) = \vartheta_1'\,(0)\,e^{-\frac{z^2}{\omega}\eta}\,\sigma\,(z).$$

Evenzoo vinden we:

$$\vartheta_1\,(z) = \vartheta_1'\,(0)\,e^{-\frac{z^2}{\omega'}\eta'}\,\sigma\,(z),$$

waarin

$$\eta' = \frac{\sigma'\left(\frac{\omega'}{2}\right)}{\sigma\left(\frac{\omega'}{2}\right)}.$$

27. Deze uitkomst kan gecontrôleerd worden, omdat er voldaan moet worden aan de volgende betrekking [1]):

$$\frac{\vartheta(z)}{\theta(z)} = \frac{\vartheta_1(z)}{i\,\theta_1(z)} = \frac{\vartheta_2(z)}{\theta_2(z)} = \frac{\vartheta_3(z)}{\theta_3(z)} = C\,e^{\frac{\pi z^2 i}{\omega\omega'}},$$

waarin

$$C = \sqrt{\frac{\omega'}{\omega i}}.$$

We vinden hier:

$$\frac{\vartheta_1(z)}{i\,\theta_1(z)} = \frac{\vartheta_1'(0)}{i\,\theta_1'(0)}\,e^{\frac{z^2}{\omega}\eta - \frac{z^2}{\omega'}\eta'}.$$

Nu is:

$$\frac{\vartheta_1'(0)}{i\,\theta_1'(0)} = \frac{\vartheta(0)}{\theta(0)} = C \quad [2])$$

en

$$\eta\,\omega' - \eta'\,\omega = \pi\,i, \quad [3])$$

dus

$$\frac{\vartheta_1(z)}{i\,\theta_1(z)} = C\,e^{\frac{z^2}{\omega\omega'}\cdot\pi i}.$$

28. Door middel van de formules:

$$\theta_2(z) = \theta_1\left(z + \frac{\omega}{2}\right),$$

$$\theta_3(z) = \sqrt[4]{q}\,e^{\frac{\pi z i}{\omega}}\,\theta_1\left(z + \frac{\omega + \omega'}{2}\right),$$

$$\theta(z) = \frac{1}{i}\sqrt[4]{q}\,e^{\frac{\pi z i}{\omega}}\,\theta_1\left(z + \frac{\omega'}{2}\right),$$

---

[1]) Zie Briot et Bouquet, t. a. p. p. 267.
[2]) Zie Briot et Bouquet, t. a. p. p. 319.
[3]) Zie Forsyth, t. a. p. p. 257.

en

$$\vartheta_2(z) = \frac{1}{i}\sqrt[4]{p}\, e^{-\frac{\pi z i}{\omega'}}\, \vartheta_1\left(z + \frac{\omega}{2}\right),$$

$$\vartheta_3(z) = -\sqrt[4]{p}\, e^{-\frac{\pi z i}{\omega'}}\, \vartheta_1\left(z + \frac{\omega + \omega'}{2}\right),$$

$$\vartheta(z) = -\vartheta_1\left(z + \frac{\omega'}{2}\right),$$

en met behulp van de formules voor eene lineaire substitutie, door ons op pag. 62 e. v. ontwikkeld, kunnen we nu ook de andere θ- en ϑ-functies in hunne priemfuncties ontwikkelen.

Voor de θ_2-functie bijv. vinden we

$$\theta_2(z) = \theta_1\left(\frac{\omega}{2}\right) e^{\overline{H}(z)} \prod_{\mu=-\infty}^{\infty} \prod_{\nu=-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_{\mu,\nu} - \frac{\omega}{2}}\right) e^{Q_2\left(\frac{z}{a_{\mu,\nu} - \frac{\omega}{2}}\right)},$$

waarin dan nog $\overline{H}(z)$ nader bepaald moet worden.

Volgens de formule op pag. 66 is

$$\overline{H}(z) = -\frac{\left(z + \frac{\omega}{2}\right)^2}{\omega}\eta + \frac{\frac{\omega^2}{4}}{\omega}\eta - \sum_{\mu=-\infty}^{\infty}\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} F\left(\frac{z}{a_{\mu,\nu}}, \frac{\frac{\omega}{2}}{a_{\mu,\nu}}\right) -$$

(exc. $\mu = \nu = 0$)

$$-\left(-\frac{z}{\frac{\omega}{2}} + \frac{1}{2}\frac{z^2}{\frac{\omega^2}{4}}\right) =$$

$$= -\frac{z^2}{\omega}\eta - z\eta + \frac{2z}{\omega} - \frac{2z^2}{\omega^2} - \sum_{\mu=-\infty}^{\infty}\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} F\left(\frac{z}{a_{\mu,\nu}}, \frac{\frac{\omega}{2}}{a_{\mu,\nu}}\right),$$

(exc. $\mu = \nu = 0$)

en

$$F\left(\frac{z}{a_{\mu,\nu}}, \frac{\frac{\omega}{2}}{a_{\mu,\nu}}\right) = \frac{z}{a_{\mu,\nu}^2}\frac{\left(\frac{\omega}{2}\right)^2}{a_{\mu,\nu} - \frac{\omega}{2}} + \frac{1}{2}\frac{z^2}{a_{\mu,\nu}^2}\frac{\omega \cdot a_{\mu,\nu} - \frac{\omega^2}{4}}{\left(a_{\mu,\nu} - \frac{\omega}{2}\right)^2}.$$

Nu is

$$\sum_{\mu=-\infty}^{\infty}\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{\left(\frac{\omega}{2}\right)^2}{a_{\mu,\nu}^2\left(a_{\mu,\nu} - \frac{\omega}{2}\right)} = -\frac{\sigma'\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\sigma\left(\frac{\omega}{2}\right)} + \frac{2}{\omega} = -\eta + \frac{2}{\omega},$$

(exc. $\mu = \nu = 0$)

en

$$\sum_{\mu=-\infty}^{\infty}\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\frac{\omega\,.\,a_{\mu,\nu}-\frac{\omega^2}{4}}{a_{\mu,\nu}^2\left(a_{\mu,\nu}-\frac{\omega}{2}\right)^2}=-\frac{d}{dz}\left[\frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)}\right]_{z=\frac{\omega}{2}}-\frac{4}{\omega^2}=e_1-\frac{4}{\omega^2},$$

(exc. $\mu=\nu=0$)

dus

$$\overline{H}(z)=-\frac{z^2}{\omega}\eta-z\eta+\frac{2z}{\omega}-\frac{2z^2}{\omega^2}+z\eta-\frac{2z}{\omega}-\frac{1}{2}e_1z^2+\frac{2z^2}{\omega^2}=$$

$$=-z^2\left(\frac{\eta}{\omega}+\frac{e_1}{2}\right).$$

We vinden dus:

$$\vartheta_2(z)=\vartheta_1\left(\frac{\omega}{2}\right)e^{-z^2\left(\frac{\eta}{\omega}+\frac{e_1}{2}\right)}\prod_{\mu=-\infty}^{\infty}\prod_{\nu=-\infty}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_{\mu,\nu}-\frac{\omega}{2}}\right)e^{Q_2\left(\frac{z}{a_{\mu,\nu}-\frac{\omega}{2}}\right)}$$

$$=\vartheta_2(0)\,e^{-z^2\left(\frac{\eta}{\omega}+\frac{e_1}{2}\right)}\prod_{\mu=-\infty}^{\infty}\prod_{\nu=-\infty}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_{\mu,\nu}-\frac{\omega}{2}}\right)e^{Q_2\left(\frac{z}{a_{\mu,\nu}-\frac{\omega}{2}}\right)}.$$

Op analoge wijze kan de productontwikkeling van de andere functies gevonden worden, en we verkrijgen dan, wanneer we de volgende verkortingen gebruiken:

$$-\frac{d}{dz}\left[\frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)}\right]_{z=\frac{\omega}{2}}=e_1,$$

$$-\frac{d}{dz}\left[\frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)}\right]_{z=\frac{\omega+\omega'}{2}}=e_2,$$

$$-\frac{d}{dz}\left[\frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)}\right]_{z=\frac{\omega'}{2}}=e_3,$$

ten slotte de volgende stellen vergelijkingen:

$$\vartheta_1(z)=\vartheta_1'(0)\,e^{-z^2\cdot\frac{\eta}{\omega}}z\prod_{\mu=-\infty}^{\infty}\prod_{\nu=-\infty}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_{\mu,\nu}}\right)e^{Q_1\left(\frac{z}{a_{\mu,\nu}}\right)}\quad(\text{exc. }\mu=\nu=0)$$

$$\vartheta_2(z)=\vartheta_2(0)\,e^{-z^2\left(\frac{\eta}{\omega}+\frac{e_1}{2}\right)}\prod_{\mu=-\infty}^{\infty}\prod_{\nu=-\infty}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_{\mu,\nu}-\frac{\omega}{2}}\right)e^{Q_2\left(\frac{z}{a_{\mu,\nu}-\frac{\omega}{2}}\right)}$$

$$\vartheta_3(z)=\vartheta_3(0)\,e^{-z^2\left(\frac{\eta}{\omega}+\frac{e_2}{2}\right)}\prod_{\mu=-\infty}^{\infty}\prod_{\nu=-\infty}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_{\mu,\nu}-\frac{\omega+\omega'}{2}}\right)e^{Q_2\left(\frac{z}{a_{\mu,\nu}-\frac{\omega+\omega'}{2}}\right)}$$

$$\theta(z) = \theta(0)\, e^{-z^2\left(\frac{\eta}{\omega} + \frac{e_3}{2}\right)} \prod_{\mu=-\infty}^{\infty} \prod_{\nu=-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_{\mu,\nu} - \frac{\omega'}{2}}\right) e^{Q_2\left(\frac{z}{a_{\mu,\nu} - \frac{\omega'}{2}}\right)},$$

en

$$\vartheta_1(z) = \vartheta_1'(0)\, e^{-z^2 \cdot \frac{\eta'}{\omega'}}\, z \prod_{\mu=-\infty}^{\infty} \prod_{\nu=-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_{\mu,\nu}}\right) e^{Q_2\left(\frac{z}{a_{\mu,\nu}}\right)} \text{ (exc. } \mu = \nu = 0)$$

$$\vartheta_2(z) = \vartheta_2(0)\, e^{-z^2\left(\frac{\eta'}{\omega'} + \frac{e_1}{2}\right)} \prod_{\mu=-\infty}^{\infty} \prod_{\nu=-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_{\mu,\nu} - \frac{\omega}{2}}\right) e^{Q_2\left(\frac{z}{a_{\mu,\nu} - \frac{\omega}{2}}\right)}$$

$$\vartheta_3(z) = \vartheta_3(0)\, e^{-z^2\left(\frac{\eta'}{\omega'} + \frac{e_2}{2}\right)} \prod_{\mu=-\infty}^{\infty} \prod_{\nu=-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_{\mu,\nu} - \frac{\omega + \omega'}{2}}\right) e^{Q_2\left(\frac{z}{a_{\mu,\nu} - \frac{\omega + \omega'}{2}}\right)}$$

$$\vartheta(z) = \vartheta(0)\, e^{-z^2\left(\frac{\eta'}{\omega'} + \frac{e_3}{2}\right)} \prod_{\mu=-\infty}^{\infty} \prod_{\nu=-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_{\mu,\nu} - \frac{\omega'}{2}}\right) e^{Q_2\left(\frac{z}{a_{\mu,\nu} - \frac{\omega'}{2}}\right)}.$$

29. Deze formules kunnen ook gevonden worden met behulp van de drie z. g. co-functies van WEIERSTRASS, σ_1, σ_2, σ_3, die gedefiniëerd worden door de vergelijkingen:

$$\sigma_1(z) = e^{-\eta z}\, \frac{\sigma\left(z + \frac{\omega}{2}\right)}{\sigma\left(\frac{\omega}{2}\right)},$$

$$\sigma_2(z) = e^{-(\eta + \eta')z}\, \frac{\sigma\left(z + \frac{\omega + \omega'}{2}\right)}{\sigma\left(\frac{\omega + \omega'}{2}\right)},$$

$$\sigma_3(z) = e^{-\eta' z}\, \frac{\sigma\left(z + \frac{\omega'}{2}\right)}{\sigma\left(\frac{\omega'}{2}\right)}.$$

Uit

$$\theta_1(z) = \theta_1'(0)\, e^{-z^2 \frac{\eta}{\omega}}\, \sigma(z)$$

volgt:

$$\theta_2(z) = \theta_1\left(z + \frac{\omega}{2}\right) = \theta_1'(0)\, e^{-z^2\frac{\eta}{\omega} - z\eta - \frac{\omega\eta}{4}}\, \sigma\left(z + \frac{\omega}{2}\right)$$

$$= \theta_1'(0)\, \sigma\left(\frac{\omega}{2}\right) e^{-z^2\frac{\eta}{\omega} - \frac{\omega\eta}{4}}\, \sigma_1(z)$$

$$= \theta_1\left(\frac{\omega}{2}\right) e^{-z^2\frac{\eta}{\omega}}\, \sigma_1(z) = \theta_2(0)\, e^{-z^2\frac{\eta}{\omega}}\, \sigma_1(z).$$

Aldus vindt men de volgende formules:

$$\theta_1(z) = \theta_1'(0)\, e^{-z^2\frac{\eta}{\omega}}\, \sigma(z); \quad \vartheta_1(z) = \vartheta_1'(0)\, e^{-z^2\frac{\eta'}{\omega'}}\, \sigma(z)$$

$$\theta_2(z) = \theta_2(0)\, e^{-z^2\frac{\eta}{\omega}}\, \sigma_1(z); \quad \vartheta_2(z) = \vartheta_2(0)\, e^{-z^2\frac{\eta'}{\omega'}}\, \sigma_1(z)$$

$$\theta_3(z) = \theta_3(0)\, e^{-z^2\frac{\eta}{\omega}}\, \sigma_2(z); \quad \vartheta_3(z) = \vartheta_3(0)\, e^{-z^2\frac{\eta'}{\omega'}}\, \sigma_2(z)$$

$$\theta(z) = \theta(0)\, e^{-z^2\frac{\eta}{\omega}}\, \sigma_3(z); \quad \vartheta(z) = \vartheta(0)\, e^{-z^2\frac{\eta'}{\omega'}}\, \sigma_3(z).$$

Door middel van de formules voor lineaire substitutie kan men nu weer gemakkelijk de productvormen der co-functies vinden.

Men vindt er voor:

$$\sigma_\alpha(z) = e^{-z^2\frac{e_\alpha}{2}} \prod_{\mu=-\infty}^{\infty} \prod_{\nu=-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_{\mu,\nu} - \omega_\alpha}\right) e^{Q_1\left(\frac{z}{a_{\mu,\nu} - \omega_\alpha}\right)},$$

$$\left(\alpha = 1, 2, 3;\ \omega_1 = \frac{\omega}{2},\ \omega_2 = \frac{\omega + \omega'}{2},\ \omega_3 = \frac{\omega'}{2}\right)$$

en substitueert men deze uitdrukkingen in de formules voor de θ- en de ϑ-functies, dan vindt men weer de bovenstaande productvormen voor deze functies terug.

HOOFDSTUK VI.

OVER HET GESLACHT VAN DE AFGELEIDE VAN EENE FUNCTIE VAN GESLACHT ω.

1. Het vinden van het geslacht van de afgeleide van eene functie van geslacht ω is een vraagstuk, dat vele onderzoekers heeft beziggehouden, zonder dat het hun gelukt is het geheel en al bevredigend op te lossen.

Nadat eenige bijzondere gevallen bekend geworden waren, waarin de afgeleide van hetzelfde geslacht is als de functie zelf, heeft men ondersteld, dat dit ook in het algemeen zoo zou zijn, en heeft men getracht, daarvan het bewijs te vinden. In hoeverre men daarin geslaagd is, zal uit het volgende blijken.

In de vroeger ontdekte gevallen, dat bovenstaand theorema doorgaat, is dit een gevolg hiervan, dat alsdan ook een ander theorema toegepast kan worden, het theorema van ROLLE namelijk.

In de C. R. van 1882 heeft LAGUERRE geannonceerd, dat, wanneer $F(z)$ eene eenvoudige functie van geslacht 0 of 1 is, die alleen reëele wortels heeft, de afgeleide functie $F'(z)$ ook alleen reëele wortels zal hebben, en wel zoo, dat tusschen twee wortels van $F(z)$ een enkele wortel van $F'(z)$ gelegen is.

VIVANTI en CESARO hebben dit theorema uitgebreid op

eenvoudige functies van willekeurig geslacht, die geen wortel nul, maar overigens ook alleen reëele wortels bezitten.

We zullen aan de hand van VIVANTI [1]) deze theorema's bewijzen.

2. Allereerst bewijst VIVANTI, dat de wortels van de geheele functie

$$\sum_{h=0}^{\infty} c'_h z^h$$

geconjugeerd zijn met die van de geheele functie

$$\sum_{h=0}^{\infty} c_h z^h,$$

wanneer c'_h de geconjugeerde waarde van c_h is.

Hieruit volgt terstond, dat eene geheele functie met reëele coefficienten reëele of 2 aan 2 geconjugeerde wortels heeft.

Verder wordt omgekeerd bewezen, dat, wanneer eene eenvoudige functie [2]), die VIVANTI steeds door $\varphi(z)$ aanduidt, reëele of 2 aan 2 geconjugeerde wortels heeft, ze reëele coefficienten zal bezitten, waaruit weer volgt, dat wanneer van

$$G(z) = e^{\overline{G}(z)} \varphi(z)$$

de coëfficienten reëel zijn, dit ook het geval zal zijn met de coëfficienten van $\overline{G}(z)$ en $\varphi(z)$.

3. Hierop volgt het bewijs van het theorema:

Indien eene geheele functie van geslacht ω met reëele coëfficienten meer dan een reëelen wortel heeft, dan ligt tusschen twee opeenvolgende reëele wortels een oneven getal wortels van de afgeleide functie.

We hebben toch:

$$\frac{G'(z)}{G(z)} = \frac{\lambda}{z} + \overline{G}'(z) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{z^{\omega}}{a_\nu^{\omega}(z - a_\nu)},$$

en uit de vorige theorema's is het duidelijk, dat het tweede

---

[1]) VIVANTI. Alcuni teoremi etc.

[2]) Wij bepalen ons hier, en in 't vervolg, tot functies van de 1e klasse. (Zie pag. 43).

lid reëele coëfficienten heeft, dus voor eene reëele waarde van z eene reëele waarde aanneemt. Zijn nu a_k en a_l twee opeenvolgende reëele wortels van $G(z)$, $(a_l > a_k)$, dan is het duidelijk, dat, wanneer men in bovenstaande vergelijking substitueert $z = a_k + \varepsilon$, waarin ε genoegzaam klein is, $\frac{G'(z)}{G(z)}$ eene zeer groote positieve waarde heeft, en wanneer men substitueert $z = a_l - \varepsilon$, eene zeer groote negatieve waarde.

Daar nu $G(z)$ bij het doorloopen van het reëele interval van a_k tot a_l niet nul wordt of van teeken verandert, moet $G'(z)$ dus voor $z = a_k + \varepsilon$ en voor $z = a_l - \varepsilon$ verschillende teekens hebben, zoodat er tusschen a_k en a_l een oneven aantal wortels van $G'(z)$ ligt.

4. Heeft eene eenvoudige functie alleen reëele wortels, dan ligt er tusschen twee opeenvolgende wortels slechts een enkele wortel van de afgeleide.

Men kan dit bewijzen, door aan te toonen, dat de onderstelling, dat het interval van a_k tot a_l meer dan één wortel van de afgeleide bevat, tot eene ongerijmdheid voert.

Eene enkele uitzondering op dit theorema van Rolle bestaat er voor de eenvoudige functies van geslacht hooger dan 1, die niet nul worden voor $z = 0$ [1]). Voor deze functies geldt:

$$\frac{G'(z)}{G(z)} = z^{\omega} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{a_\nu^{\omega}(z - a_\nu)},$$

waaruit dus volgt, dat de afgeleide ω wortels $z = 0$ heeft. Het interval tusschen den kleinsten negatieven wortel (in absolute waarde) en den kleinsten positieven wortel van de functie bevat dus ω wortels $z = 0$ van de afgeleide. Is ω oneven, dan zal dit interval geen enkelen anderen wortel bevatten; is ω even, dan bevat dit interval nog een anderen

[1]) Vivanti. Sulle funzioni intere trascendenti. Giorn. di Mat. XXIII (1885) p. 96 e. v. § 21.

wortel van de afgeleide. Het is hieruit tevens duidelijk, dat de eenvoudige functies van geslacht 0 en 1, die niet nul worden voor $z = 0$, geene uitzondering op den algemeenen regel maken.

5. VIVANTI heeft nog laten zien, dat dit theorema van ROLLE ook nog doorgaat voor eenige andere functies, die niet meer eenvoudig zijn [1]).

Past men op eene eenvoudige functie $\varphi(z)$ van geslacht ω, met reëele wortels, eene lineaire substitutie $z = u + c$ toe, waarin c reëel is, dan verkrijgt men eene functie $X(u)$, die VIVANTI in het algemeen als (ψ)-functie noteert, d. i. eene functie van geslacht ω, waarvan de exponent van den uitwendigen exponentieelen factor op zijn hoogst een polynomium van graad ω is, en die door eene lineaire substitutie $(u = z - c)$ overgevoerd kan worden in eene eenvoudige functie.

Zijn a_ν de wortels van $\varphi(z)$, dan zijn $a_\nu - c$ de wortels van $X(u)$. Daar verder

$$X'(u) = \varphi'(z),$$

zullen de wortels van $X'(u)$ zijn $b_\nu - c$, wanneer b_ν de wortels van $\varphi'(z)$ zijn. Met betrekking tot de plaats staan dus de wortels van $X'(u)$ met die van $X(u)$ in hetzelfde verband als die van $\varphi'(z)$ met die van $\varphi(z)$.

Daar nu voor $\varphi(z)$ het theorema van ROLLE doorgaat, moet dit ook voor $X(u)$ het geval zijn, dus voor de (ψ)-functies met reëele wortels, die, door eene lineaire substitutie, tot eene eenvoudige functie met reëele wortels terug te brengen zijn.

6. Vervolgens bewijst VIVANTI het reeds vermelde theorema van LAGUERRE, dat, wanneer eene eenvoudige functie van geslacht 0 of 1 alleen reëele wortels heeft, dit ook het geval is met hare afgeleide (die echter in het algemeen niet eene eenvoudige functie zal zijn).

---

[1]) VIVANTI. Sulle funz. int. trasc. § 22.

Het bewijs van dit theorema geschiedt volgens de methode van PLANA, of, zooals HERMITE heeft opgemerkt, volgens de methode, die aan FÉLIX CHIÒ moet worden toegeschreven.

De stelling van CHIÒ is:

De vergelijking

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{A_\nu}{z - a_\nu} = 0$$

heeft alleen reëele wortels, wanneer de grootheden a_ν reëel zijn en wanneer de tellers A_ν alle hetzelfde teeken hebben.

Substitueert men toch in deze vergelijking:

$$z = p + i\,q,$$

waarin p en q reëel zijn, dan verkrijgt men:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{A_\nu}{p + i\,q - a_\nu} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{A_\nu\,(p - a_\nu - i\,q)}{(p - a_\nu)^2 + q^2} = 0,$$

hetgeen zich splitst in de twee vergelijkingen:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{A_\nu\,(p - a_\nu)}{(p - a_\nu)^2 + q^2} = 0$$

en

$$q \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{A_\nu}{(p - a_\nu)^2 + q^2} = 0.$$

Uit deze tweede vergelijking blijkt nu dat, bij de gemaakte onderstellingen, $q = 0$ moet zijn.

Past men nu deze zelfde methode toe op de vergelijkingen

$$\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = \frac{\lambda}{z} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{z - a_\nu},$$

of

$$\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = \frac{\lambda}{z} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{z}{a_\nu\,(z - a_\nu)},$$

substitueert men dus ook daarin

$$z = p + i\,q,$$

dan blijkt evenzoo, dat ook hier $q = 0$ moet zijn.

7. Is de functie niet eenvoudig, dan kan de afgeleide zeer

goed complexe wortels hebben. VIVANTI laat dit zien aan het voorbeeld [1])

$$G(z) = e^{z^2} \sin z.$$

De afgeleide hiervan,

$$G'(z) = e^{z^2}(\cos z + 2z \sin z),$$

heeft, behalve eene reeks reëele wortels, ook nog de imaginaire wortels:

$$z = \pm 0{,}771 \ldots i.$$

Bij deze functie heeft de uitwendige exponentieele factor tot exponent z^2, waarvan de coëfficient positief is. Was deze coëfficient negatief, dan zou de afgeleide functie geen imaginaire wortels hebben.

DESAINT [2]) bewijst n. l. het volgende theorema.

Eene functie van geslacht 0 of 1, met reëele wortels, waarvan de uitwendige exponentieele factor den vorm $e^{\alpha z^2 + \beta z}$ heeft, waarin α en β reëel zijn, en α negatief, heeft eene afgeleide, die ook alleen reëele wortels heeft. α en β kunnen ook nul zijn [3]).

DESAINT zegt, dat dit theorema gemakkelijk bewezen kan worden, wanneer men beschouwt het evenwicht van een bewegelijk punt, dat door verschillende vaste centra wordt aangetrokken, omgekeerd evenredig met den afstand. Op de manier, zooals boven staat aangegeven, is de stelling echter ook gemakkelijk te bewijzen.

Tevens kunnen we van deze functies aantoonen, dat voor hen het theorema van ROLLE ook doorgaat.

Er volgt o. a. uit, dat de reciproke Γ-functie eene afgeleide heeft, die alleen reëele wortels bezit, waarvan er telkens

---

[1]) VIVANTI. Nuove Richerche sulle funzioni intere. Giorn. di Mat. XXVI (1888) p. 303 e. v. § 4.

[2]) DESAINT. Sur les fonctions entières. C. R. CXX (1895) p. 548 e. v.

[3]) DESAINT neemt ook de functies van geslacht 2 in zijn theorema op; ik geloof echter niet, dat hij hiertoe het recht heeft. Ook zegt hij: α positief; het is echter duidelijk, dat dit eene vergissing van hem is.

een ligt tusschen twee opeenvolgende wortels van de functie zelf.

8. We komen thans tot de uitbreiding van de stelling op pag. 100 (§ 6), en wel tot het theorema:

Indien eene eenvoudige functie alleen reëele wortels heeft en niet nul wordt voor $z = 0$, dan heeft hare afgeleide alleen reëele wortels.

Het bewijs dat CESARO hiervan geeft, schijnt ons het beste toe [1]).

We hebben hier:

$$\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = z^{\omega} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{a_\nu^{\omega}(z - a_\nu)},$$

zoodat de wortels van $\varphi'(z)$ gegeven worden door de vergelijking:

$$z^{\omega} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{a_\nu^{\omega}(z - a_\nu)} = 0.$$

Schrijven we elk der samenstellende breuken aldus:

$$\frac{1}{a_\nu^{\omega}(z - a_\nu)} = \frac{a_\nu}{a_\nu^{\omega+1}(z - a_\nu)} = \frac{z - (z - a_\nu)}{a_\nu^{\omega+1}(z - a_\nu)} =$$

$$= \frac{z}{a_\nu^{\omega+1}(z - a_\nu)} - \frac{1}{a_\nu^{\omega+1}},$$

dan kunnen we bovenstaande vergelijking ook schrijven in den vorm:

$$z^{\omega+1} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{a_\nu^{\omega+1}(z - a_\nu)} = z^{\omega} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{a_\nu^{\omega+1}},$$

hetgeen geoorloofd is, omdat

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{|a_\nu|^{\omega+1}}$$

convergeert.

Is ω oneven, dan gebruiken we de eerste vergelijking en is ω even, dan gebruiken we de tweede vergelijking, en

---

[1]) CESARO. Sur les fonctions holomorphes de genre quelconque. C. R. XCIX (1884) p. 26.

wanneer we dan $2\mu + 1$ noemen dat getal ω of $\omega + 1$, dat oneven is, en wanneer we afzien van de 2μ wortels nul, dan zien we, dat de beide vergelijkingen kunnen gebracht worden in den vorm:

$$c + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{z}{a_\nu^{2\mu+1}(z - a_\nu)} = 0,$$

waarin c eene reëele constante is, de waarde nul niet uitgesloten.

Substitueeren we nu in deze vergelijking:

$$z = p + i\,q,$$

dan zien we, dat ook hier $q = 0$ moet zijn.

9. HERMITE [1]) heeft opgemerkt, dat dit theorema ook bewezen kan worden met behulp van de stelling van CHIÒ, die echter eerst gecompleteerd moet worden.

De vergelijking:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{A_\nu}{z - a_\nu} = 0$$

kan, na met z te hebben vermenigvuldigd, ook geschreven worden in den vorm

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{A_\nu a_\nu}{z - a_\nu} = -\sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu,$$

en bepaalt men van deze vergelijking de voorwaarde, waaraan voldaan moet worden opdat de wortels reëel zijn, dan is die voorwaarde, dat de producten $A_\nu a_\nu$ alle hetzelfde teeken moeten hebben.

De vergelijking

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{A_\nu}{z - a_\nu} = 0,$$

waarin de grootheden a_ν reëel zijn, heeft dus alleen reëele wortels, wanneer òf al de grootheden A_ν, òf al de producten $A_\nu a_\nu$ hetzelfde teeken hebben.

---

[1]) Zie de opmerking van HERMITE achter de boven vermelde mededeeling van CESARO in de C. R.

Is nu ω even, dan stelt men $A_\nu = \frac{1}{a_\nu^{\omega}}$, en dan blijkt dus dat de vergelijking

$$z^{\omega} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{a_\nu^{\omega}(z-a_\nu)} = 0$$

alleen reëele wortels heeft; en is ω oneven dan stelt men

$$A_\nu a_\nu = \frac{1}{a_\nu^{\omega-1}}, \text{ dus } A_\nu = \frac{1}{a_\nu^{\omega}},$$

en dan blijkt dus ook, dat bovenstaande vergelijking alleen reëele wortels heeft.

10. Desaint heeft nog eene uitbreiding van het laatste theorema gegeven, en wel:

Eene functie van even geslacht ω, met reëele en van nul verschillende wortels, waarvan de uitwendige exponentieele factor den vorm heeft

$$e^{\alpha z^{\omega+2} + \beta z^{\omega+1}},$$

waarin α en β reëel zijn, en α negatief, heeft eene afgeleide functie, die alleen reëele wortels heeft. α en β kunnen ook nul zijn.

We hebben hier:

$$\frac{G'(z)}{G(z)} = z^{\omega}\left[\alpha(\omega+2)z + \beta(\omega+1) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{a_\nu^{\omega}(z-a_\nu)}\right],$$

zoodat de nullen van $G'(z)$ gevonden worden uit:

$$\alpha(\omega+2)z + \beta(\omega+1) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{a_\nu^{\omega}(z-a_\nu)} = 0,$$

en substitueert men hier weer in

$$z = p + i\,q,$$

dan blijkt gemakkelijk, dat $q = 0$ moet zijn.

Ook kan men bewijzen, dat deze functies aan het theorema van Rolle voldoen.

11. In eene latere verhandeling [1]) heeft Vivanti nog aangetoond, dat men voor de eenvoudige functies van

---

[1]) Vivanti. Nuove Richerche etc. § 4.

geslacht ω ($\omega > 1$), die nul worden voor $z = 0$, alleen het volgende theorema kan bewijzen.

Wanneer $\varphi(z)$ eene eenvoudige functie is van geslacht ω, die alleen reëele wortels heeft en nul wordt voor $z = 0$, en wanneer we p noemen dat getal ω of $\omega + 1$, hetgeen oneven is, dan zijn de argumenten van de complexe nulpunten van $\varphi'(z)$ begrepen tusschen

$$(2\lambda - 1)\frac{\pi}{p} \text{ en } 2\lambda\frac{\pi}{p}$$

en tusschen $-(2\lambda - 1)\frac{\pi}{p}$ en $-2\lambda\frac{\pi}{p}$,

waarbij λ de waarden $1, 2, \ldots\ldots \frac{p-1}{2}$ kan aannemen.

M. a. w. Wanneer men het vlak in $2p$ gelijke deelen verdeelt door p rechte lijnen die door den oorsprong gaan en waarvan er een de x-*as* is, en wanneer men aan elken hoek een opklimmend rangnummer toekent, uitgaande van den hoek, die boven het positieve deel van de x-*as* ligt, en in positieven zin rondgaande, dan bevinden de complexe nulpunten van $\varphi'(z)$ zich alle in die hoeken, welke positieve ordinaten en een even rangnummer hebben en in die hoeken, welke negatieve ordinaten en een oneven rangnummer hebben.

Voor het bewijs van dit theorema verwijzen we naar VIVANTI's verhandeling.

12. We hebben dus gezien, dat van de volgende functies:

1°. eenvoudige functies van geslacht 0 of 1, met reëele wortels;

2°. functies van geslacht 0 of 1, met reëele wortels en voorzien van een uitwendigen exponentiëelen factor $e^{\alpha z^2 + \beta z}$, waarin α en β reëel zijn, en α negatief;

3°. eenvoudige functies van geslacht ω, met reëele en van nul verschillende wortels;

4°. functies van even geslacht ω, met reëele en van nul verschillende wortels en voorzien van een uitwendigen

exponentiëelen factor $e^{\alpha z^{\omega+2}+\beta z^{\omega+1}}$, waarin α en β reëel zijn, en α negatief;

5°. functies, die door eene lineaire substitutie $z \mid z+c$, waarin c reëel is, tot eene der vorigen kunnen teruggebracht worden;

de afgeleiden alleen reëele wortels hebben, waarvan er telkens een ligt tusschen twee opeenvolgende wortels van de functies zelf, behoudens de uitzondering, vermeld op bladz. 99. Het is dan ook nu gemakkelijk aan te toonen, dat de afgeleiden van de genoemde functies van hetzelfde geslacht zijn als de functies zelf.

Zijn a_ν de wortels van $G(z)$, en wel a'_λ de positieve wortels en a''_μ de negatieve wortels, waarvan de absolute waarden zijn α''_μ, en zijn b_ν de wortels van $G'(z)$ en daarvan b'_λ de positieve en b''_μ de negatieve en de absolute waarden van deze laatsten β''_μ, dan is

$$a'_\lambda < b'_\lambda < a'_{\lambda+1} \text{ en } \alpha''_\mu < \beta''_\mu < \alpha''_{\mu+1},$$

waaruit volgt:

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{1}{a'^{\omega+1}_\lambda} > \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{1}{b'^{\omega+1}_\lambda}, \quad \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha''^{\omega+1}_\mu} > \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\beta''^{\omega+1}_\mu};$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{1}{a'^{\omega}_{\lambda+1}} < \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{1}{b'^{\omega}_\lambda}, \quad \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha''^{\omega}_{\mu+1}} < \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\beta''^{\omega}_\mu}.$$

Daar nu de reeks

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{|a_\nu|^{\omega+1}}$$

convergeert, en de reeks

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{|a_\nu|^{\omega}}$$

divergeert, zullen de reeksen

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{1}{a'^{\omega+1}_\lambda} \text{ en } \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha''^{\omega+1}_\mu}$$

convergeeren, en ten minste eene van de reeksen

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{1}{a'^{\omega}_{\lambda+1}} \text{ en } \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha''^{\omega}_{\mu+1}}$$

divergeeren.

Hieruit volgt dus, dat de reeksen:

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{1}{b_\lambda'^{\omega+1}} \text{ en } \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_\mu''^{\omega+1}}$$

convergent zijn, en ten minste eene van de reeksen

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{1}{b_\lambda'^{\omega}} \text{ en } \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_\mu''^{\omega}}$$

divergent, dus dat de reeks

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{|\, b_\nu \,|^{\omega+1}}$$

convergeert, en de reeks

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{|\, b_\nu \,|^{\omega}}$$

divergeert, waaruit dus volgt, dat $G'(z)$ van geslacht ω is.

13. Vivanti heeft ook getracht in het algemeen te bewijzen, dat de afgeleide van elke eenvoudige functie van geslacht ω, ook eene functie van geslacht ω is. Hij is echter later zelf op dit bewijs teruggekomen [1]). We zullen deze poging dus hier verder laten rusten.

14. Poincaré [2]) heeft opgemerkt, dat het bewijs van de algemeene stelling, die ons thans bezighoudt, niet zoo gemakkelijk zal zijn, en dat men daartoe noodig zal hebben te onderzoeken, hoe de functie van geslacht ω zich in het oneindige gedraagt. Hij zelf heeft hieromtrent het volgende resultaat gepubliceerd:

Stellen we dat z oneindig toeneemt, terwijl het een bepaald argument behoudt, en dat α eene grootheid is met een argument zoodanig, dat

$$\lim_{z=\infty} e^{\alpha z^{\omega+1}} = 0,$$

---

[1]) Vivanti. Rettifica alla Nota: Alcuni teoremi etc. Giorn. di Mat. XXII (1884) p. 378 e. v.

[2]) Poincaré. Sur les fonctions entières. Bulletin d. l. Soc. math. de France. XI (1883) p. 136 e. v. De resultaten ook in de C. R. XCV (1882) p. 23 e. v. (Sur les transcendantes entières).

dan zal ook

$$\lim_{z=\infty} e^{\alpha z^{\omega+1}} G(z) = 0.$$

Uit de definitie, die POINCARÉ geeft van het geslacht van eene functie, blijkt, dat hij hier eenvoudige functies op het oog heeft. Zijn bewijs gaat echter ook door voor functies, waarbij de exponent van den uitwendigen exponentieelen factor een polynomium ten hoogste van graad ω is, functies, die VIVANTI met de notatie $\psi(z)$ aanduidt.

Voor die functies hebben we dus

$$\lim_{z=\infty} e^{\alpha z^{\omega+1}} \psi(z) = 0,$$

wanneer

$$\lim_{z=\infty} e^{\alpha z^{\omega+1}} = 0.$$

POINCARÉ trekt hier nog de volgende gevolgtrekking uit: De bepaalde integraal

$$\int_0^\infty e^{(\alpha z)^{\omega+1}} \psi(z)\, dz,$$

genomen langs een rechten weg met een zoodanig argument, dat

$$\lim_{z=\infty} e^{(\alpha z)^{\omega+1}} = 0,$$

stelt eene geheele functie in $\frac{1}{x}$ voor.

Hieruit leidt hij dan nog verder af, dat wanneer we stellen:

$$\psi(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu z^\nu,$$

de volgende betrekking zal gelden:

$$\lim_{\nu=\infty} |A_\nu| \sqrt[\omega+1]{\nu!} = 0,$$

zoodat we hieruit kunnen besluiten, dat $|A|$ sterker afneemt, met het grooter worden van ν, dan

$$\frac{1}{(\nu!)^{\frac{1}{\omega+1}}}.$$

15. HADAMARD [1]) is nu voortgegaan op den weg door POINCARÉ ingeslagen, en heeft het omgekeerde van deze stelling trachten te bewijzen.

A priori is reeds in te zien, dat dit omgekeerde niet steeds door zal gaan. POINCARÉ toch geeft een voorbeeld van eene functie van geslacht 1, de functie

$$\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{\nu^2\,log^2\,\nu}\right),$$

die zich in bovenvermelde opzichten gedraagt als eene functie van geslacht 0. In 't algemeen behooren de functies van geslacht 1, die, opgevat als functies van z^2, van geslacht 0 zijn, tot deze categorie.

Het is dus te verwachten, dat, wanneer we vinden dat $|\,A_\nu\,|$ sneller afneemt dan

$$\frac{1}{(\nu!)^{\frac{1}{\omega+1}}},$$

we alleen zullen kunnen bewijzen, dat de functie is òf van geslacht ω, òf van geslacht $\omega+1$.

Tot dit resultaat komt dan ook HADAMARD.

16. De Taylorsche ontwikkeling eener geheele functie is daardoor gekarakteriseerd, dat de ν^e machtswortel van de coëfficient van z^ν tot nul nadert, wanneer ν oneindig toeneemt.

Is dus eene geheele functie $G(z)$ gegeven door hare ontwikkeling

$$G(z)=A_0+A_1\,z+A_2\,z^2+\ldots\ldots,$$

en is ζ de modulus van z, dus

$$|\,G(z)\,|\leqq|\,A_0\,|+|\,A_1\,|\,\zeta+|\,A_2\,|\,\zeta^2+\ldots\ldots,$$

dan kan men schrijven

$$|\,A_\nu\,|\leqq\frac{1}{[X(\nu)]^\nu},$$

waarin $X(\nu)$ eene functie voorstelt, die oneindig wordt

[1]) HADAMARD. Étude sur les propiétés des fonctions entières etc. Journal de Liouville, série 4, t. IX (1893) p. 171 e. v.

voor ν oneindig en die voor alle waarden van ν positief is. Dus is dan

$$|\, G(z)\,| \leqq \frac{1}{X(0)} + \frac{\zeta}{X(1)} + \left[\frac{\zeta}{X(2)}\right]^2 + \ldots\ldots + \left[\frac{\zeta}{X(\nu)}\right]^\nu + \ldots\ldots$$

Nu wordt door HADAMARD aangetoond, dat, zoo men uit de vergelijking:

$$X(\nu) = z \text{ afleidt } \nu = Y(z)\ ^1),$$

de functie $G(z)$ niet zoo snel aangroeit als

$$z^\varepsilon\, e^{\int \frac{Y(z)}{z}\, dz},$$

waarin ε positief is, zoo klein als men wil.

17. Passen we dit toe op eene functie waarbij $|\, A_\nu\,|$ sneller afneemt dan $\frac{1}{(\nu!)^\alpha}$, waarin α positief is, dan kan voor de X-functie genomen worden

$$X(\nu) = \left(\frac{\nu}{H}\right)^\alpha,$$

waarin H eene constante is.

Immers, wanneer we de X-functie zóó kiezen, dat

$$\frac{1}{[X(\nu)]^\nu} \geqq \frac{1}{(\nu!)^\alpha},$$

dan is ook, daar

$$\frac{1}{(\nu!)^\alpha} \geqq |\, A_\nu\,|,$$

$$\frac{1}{[X(\nu)]^\nu} \geqq |\, A_\nu\,|,$$

en aan deze voorwaarde moet de X-functie voldoen. Dus

$$[X(\nu)]^\nu \leqq (\nu!)^\alpha.$$

Vervangen we nu $(\nu!)^\alpha$ door

$$(\sqrt{2\pi\nu}\, e^{-\nu}\, \nu^\nu)^\alpha,$$

dat is, volgens de formule van STIRLING, door eene grootheid,

---

[1]) Om niet tot verwarring aanleiding te geven, hebben we hier andere notaties ingevoerd dan die, welke HADAMARD gebruikt. Wat wij $X(\nu)$ en $Y(z)$ noemen, heet bij HADAMARD resp. $\varphi(\nu)$ en $\psi(z)$.

die kleiner is, dan zal de X-functie, waarvoor geldt

$$[X(\nu)]^\nu \leqq (\sqrt{2\pi\nu}\, e^{-\nu}\, \nu^\nu)^\alpha,$$

ook stellig aan den eisch voldoen.

Dus

$$X(\nu) \leqq \left(\frac{\sqrt[2\nu]{2\pi\nu}\ \nu}{e}\right)^\alpha.$$

Voor groote waarden van ν, nadert $\sqrt[2\nu]{2\pi\nu}$ tot de eenheid, maar is steeds grooter dan de eenheid, zoodat, wanneer we $\sqrt[2\nu]{2\pi\nu}$ door de kleinere grootheid 1 vervangen, en de X-functie dus zoodanig bepalen, dat ze voldoet aan

$$X(\nu) \leqq \left(\frac{\nu}{e}\right)^\alpha,$$

ook stellig aan den eisch $\frac{1}{X(\nu)^\nu} \geqq |A_\nu|$ voldaan zal worden.

We mogen dus stellen

$$X(\nu) = \left(\frac{\nu}{H}\right)^\alpha.$$

De Y-functie is dan

$$Y(z) = H z^{\frac{1}{\alpha}},$$

en de functie $G(z)$ zal alsdan niet zoo snel aangroeien als

$$e^{H z^{\frac{1}{\alpha}}}.$$

18. In een volgend hoofdstuk van zijne verhandeling, waarbij hij echter ook nog terugwijst op eene vroeger door hem geschreven verhandeling [1]), bewijst HADAMARD dat, wanneer van eene geheele functie de coëfficient $|A_\nu|$ sneller afneemt dan $\frac{1}{X(\nu)^\nu}$, de p^{de} wortel (a_p) van deze geheele functie een modulus zal hebben die grooter is dan $(1-\varepsilon)\, X(p)$,

---

[1]) HADAMARD. Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor. Journal de Liouville, série 4, t. VIII (1892) p. 101 e. v.

waarin ε oneindig klein is voor p oneindig, zoodat dus de moduli dezer wortels sneller toenemen dan $X(p)$.

19. Passen we dit weer toe op het geval dat

$$X(\nu) = \left(\frac{\nu}{H}\right)^{\alpha},$$

of, als we stellen $\lambda = \frac{1}{\alpha}$,

$$X(\nu) = \left(\frac{\nu}{H}\right)^{\frac{1}{\lambda}},$$

dan zien we, dat de modulus van den p^{den} wortel sneller groeit dan $\left(\frac{p}{H}\right)^{\frac{1}{\lambda}}$.

Is λ nu geen geheel getal, en $\omega + 1$ het geheele getal, dat onmiddelijk grooter is dan λ, dan is dus de reeks

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{|a_p|^{\omega+1}}$$

convergent, en is de functie dus van geslacht ω.

Is echter λ wel een geheel getal, stel $\omega + 1$, dan is het niet zeker, dat bovenstaande reeks convergeert, maar dan zal wel zeker convergeeren de reeks

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{|a_p|^{\omega+2}}.$$

De functie is dus dan van geslacht $\omega + 1$, misschien van geslacht ω.

20. Ook kan nu nog bewezen worden, dat de functie is eene ψ-functie.

We hebben

$$G(z) = e^{\overline{G}(z)}\, \varphi(z).$$

Hadamard toont nu aan, dat we kunnen vinden eene oneindige reeks cirkels uit den oorsprong als middelpunt beschreven, met steeds grooter wordende stralen, waarop

$$|\varphi(z)| > e^{-z^{\lambda+\varepsilon}}.$$

Hierboven hebben we reeds gezien, dat we ook hebben

$$| G(z) | < e^{H\zeta^{\lambda}},$$

dus volgt hieruit, dat op die cirkels ook zal zijn:

$$\left| \frac{G(z)}{\varphi(z)} \right| = \left| e^{\overline{G}(z)} \right| < e^{\zeta^{\lambda+\varepsilon}}.$$

Nu is ook door HADAMARD aangetoond, dat wanneer we eene oneindige reeks cirkels kunnen aanwijzen met steeds grooter wordenden straal, waarop voor eene functie van den vorm

$$e^{\overline{G}(z)}$$

bovenstaande betrekking geldt, dat dan $\overline{G}(z)$ op zijn hoogst een polynomium van graad λ kan zijn.

Is dus λ niet geheel, maar $\omega + 1$ het eerste geheele getal, dat grooter is dan λ, dan is $\overline{G}(z)$ op zijn hoogst een polynomium van graad ω, en dus $G(z)$ eene ψ-functie van geslacht ω.

Is $\lambda = \omega + 1$, dan kan het polynomium $\overline{G}(z)$ ook van graad $\omega + 1$ zijn, en dan is dus $G(z)$ òf eene ψ-functie van geslacht ω, òf eene functie van geslacht ω met een uitwendigen exponentieelen factor $e^{\overline{G}(z)}$, waarin $\overline{G}(z)$ een polynomium van graad $\omega + 1$ is, òf eene ψ-functie van geslacht $\omega + 1$.

21. Wanneer we dus, om te concludeeren, gegeven hebben eene ψ-functie van geslacht ω, dan is volgens POINCARÉ

$$\lim_{z=\infty} | A_\nu | \sqrt[\omega+1]{\nu!} = 0,$$

dus $| A_\nu |$ neemt sneller af dan

$$\frac{1}{(\nu!)^{\frac{1}{\omega+1}}},$$

of m. a. w. $| A_\nu |$ neemt sneller af dan

$$\frac{1}{[X(\nu)]^{\nu}} = \left(\frac{H}{\nu}\right)^{\frac{\nu}{\omega+1}}.$$

De coëfficienten van de afgeleide functie volgen dezelfde wet van afname, volgens HADAMARD zal die afgeleide functie dus zijn van geslacht ω of $\omega + 1$, waarbij zich dan nog voor kunnen doen de 3 gevallen, hierboven vermeld (pag. 114) [1]).

---

[1]) Ik heb van de theorema's van POINCARÉ en HADAMARD de bewijzen achterwege gelaten, omdat die bewijzen eene te groote plaats zouden innemen, en omdat het mij niet doenlijk scheen ze te geven op eene meer beknopte wijze, dan in de aangehaalde verhandelingen geschiedt.

HOOFDSTUK VII.

ANDERE EIGENSCHAPPEN.

1. We willen dit proefschrift niet besluiten, zonder nog melding gemaakt te hebben van eenige onderzoekingen, die op ons onderwerp betrekking hebben.

In de verhandelingen van VIVANTI staat nog veel, dat we hier voorbijgaan. Zijne resultaten omtrent lineaire substitutie [1]) willen we hier vermelden, omdat die resultaten af te leiden zijn uit de formule op pag. 62 e. v. ontwikkeld.

We hebben daar gevonden, dat wanneer we in eene functie

$$G(z) = C z^{\lambda} e^{\overline{G}(z)} \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_\nu}\right) e^{Q_\omega\left(\frac{z}{a_\nu}\right)},$$

z vervangen door $z + \zeta$, we eene functie

$$H(z) = G(\zeta)\, e^{\overline{H}(z)} \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_\nu - \zeta}\right) e^{Q_\omega\left(\frac{z}{a_\nu - \zeta}\right)}$$

verkrijgen, waarin

$$\overline{H}(z) = \overline{G}(z+\zeta) - \overline{G}(\zeta) - \sum_{\nu=1}^{\infty} F\left(\frac{z}{a_\nu}, \frac{\zeta}{a_\nu}\right) - \lambda\, Q_\omega\left(-\frac{z}{\zeta}\right),$$

en

$$F\left(\frac{z}{a_\nu}, \frac{\zeta}{a_\nu}\right) = F\left(\frac{z}{a_\nu}, t_\nu\right) =$$

---

[1]) VIVANTI. Sulle funz. int. trasc.

$$= \frac{z}{a_\nu}\frac{t_\nu^m}{1-t_\nu} + \frac{1}{2!}\left(\frac{z}{a_\nu}\right)^2 \frac{d}{dt_\nu}\left(\frac{t_\nu^m}{1-t_\nu}\right) + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + \frac{1}{\omega!}\left(\frac{z}{a_\nu}\right)^\omega \frac{d^{\omega-1}}{dt_\nu^{\omega-1}}\left(\frac{t_\nu^\omega}{1-t_\nu}\right).$$

Is $G(z)$ eene eenvoudige functie, dan is dus

$$\overline{H}(z) = \overline{K}(z) = -\sum_{\nu=1}^{\infty} F\left(\frac{z}{a_\nu}, \frac{\zeta}{a_\nu}\right) - \lambda\, Q_\omega\left(-\frac{z}{\zeta}\right).$$

Is $\omega = 0$, dan vervallen de termen van het tweede lid. Eene eenvoudige functie van geslacht 0 wordt dus door eene lineaire substitutie in eene eenvoudige functie van geslacht 0 overgevoerd.

In het algemeen is $\overline{K}(z)$, zooals we gemakkelijk inzien, een polynomium ten hoogste van graad ω, zoodat dus $H(z)$ eene ψ-functie is, en wel eene (ψ)-functie, want we hebben (ψ)-functie genoemd eene ψ-functie, die door eene lineaire substitutie in eene eenvoudige functie kan worden overgevoerd.

Eene eenvoudige functie van geslacht ω wordt dus door eene lineaire substitutie in eene (ψ)-functie van geslacht ω overgevoerd.

Ook is het duidelijk, dat eene ψ-functie van geslacht ω door eene lineaire substitutie in eene ψ-functie van hetzelfde geslacht wordt overgevoerd.

De coëfficient van z in $\overline{K}(z)$ is:

$$-\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{a_\nu^\omega}\frac{\zeta^\omega}{a_\nu - \zeta} + \frac{\lambda}{\zeta} = \frac{G'(\zeta)}{G(\zeta)}.$$

Is dus ζ een wortel van $G'(z)$ dan zal $\overline{K}(z)$ geen term met z bevatten. Is $G(z)$ eene eenvoudige functie van geslacht 1, dan valt dus $\overline{K}(z)$ weg. Dus:

Eene eenvoudige functie van geslacht 1, $G(z)$, zal door eene lineaire substitutie $z \mid z + \zeta$ in eene eenvoudige functie van geslacht 1 worden overgevoerd, wanneer ζ een wortel is van $G'(z)$. Dit kan dus op oneindig veel manieren geschieden.

Is

$$G(z) = C\, z^\lambda\, e^{c_1 z} \prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{a_\nu}\right) e^{\frac{z}{a_\nu}},$$

dan is de coëfficient van z in $\bar{H}(z)$ gelijk aan:

$$c_1 + \frac{G'(\zeta)}{G(\zeta)}.$$

Deze coëfficient zal nul zijn, wanneer ζ een wortel is van de vergelijking:

$$\frac{G'(z)}{G(z)} + c_1 = 0.$$

Daar deze vergelijking een oneindig aantal wortels heeft, kan dus elke ψ-functie van geslacht 1 op oneindig veel manieren door eene lineaire substitutie in eene eenvoudige functie van geslacht 1 overgevoerd worden.

Omgekeerd kan ook elke eenvoudige functie van geslacht 1 op oneindig veel manieren door eene lineaire substitutie overgevoerd worden in eene functie van geslacht 1, waarvan de uitwendige exponentieele factor eene vooruit gegeven waarde $c_1 z$ tot exponent heeft. ζ moet dan een wortel zijn van:

$$\frac{G'(z)}{G(z)} = c_1.$$

We kunnen het bovenstaande ook uitdrukken door te zeggen:

Elke ψ-functie van geslacht 1 is eene (ψ)-functie van geslacht 1.

2. Voor de ψ-functies van hooger geslacht heeft VIVANTI nog het volgende bewezen:

Elke ψ-functie van geslacht ω kan op oneindig veel manieren geschreven worden als de ω^e machtswortel uit het product van ω (φ)-functies. die dezelfde wortels hebben als de gegeven functie.

Zij gegeven:

$$\psi(z) = C\, e^{\bar{\Psi}(z)}\, z^{\lambda} \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_\nu}\right) e^{Q_\omega\left(\frac{z}{a_\nu}\right)} =$$

$$= C\, e^{\bar{\Psi}(z)}\, \chi(z),$$

waarin

$$\bar{\psi}(z) = A' z + A'' z^2 + \ldots + A^{(\omega)} z^{\omega},$$

en laten $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_\omega$ ω te bepalen constanten zijn.

Construeeren we de eenvoudige functies:

$$\varphi_1(z) = \prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{a_\nu - \zeta_1}\right) e^{\varrho_\omega\left(\frac{z}{a_\nu - \zeta_1}\right)}$$

$$\varphi_2(z) = \prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{a_\nu - \zeta_2}\right) e^{\varrho_\omega\left(\frac{z}{a_\nu - \zeta_2}\right)}$$

. . . . . .

$$\varphi_\omega(z) = \prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{a_\nu - \zeta_\omega}\right) e^{\varrho_\omega\left(\frac{z}{a_\nu - \zeta_\omega}\right)},$$

dan gaan deze door de lineaire substituties

$$z \mid z - \zeta_1$$
$$z \mid z - \zeta_2$$
$$\ldots\ldots$$
$$z \mid z - \zeta_\omega$$

resp. over in de (ψ)-functies:

$$(\psi)_1(z) = C_1\, e^{\overline{\psi}_1(z)}\, z^\lambda \prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{a_\nu}\right) e^{\varrho_\omega\left(\frac{z}{a_\nu}\right)}$$

$$(\psi)_2(z) = C_2\, e^{\overline{\psi}_2(z)}\, z^\lambda \prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{a_\nu}\right) e^{\varrho_\omega\left(\frac{z}{a_\nu}\right)}$$

. . . . . .

$$(\psi)_\omega(z) = C_\omega\, e^{\overline{\psi}_\omega(z)}\, z^\lambda \prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{a_\nu}\right) e^{\varrho_\omega\left(\frac{z}{a_\nu}\right)},$$

waarin

$$\overline{\psi}_1(z) = A_1' z + A_1'' z^2 + \ldots + A_1^{(\omega)} z^\omega$$

$$\overline{\psi}_2(z) = A_2' z + A_2'' z^2 + \ldots + A_2^{(\omega)} z^\omega$$

. . . . . .

$$\overline{\psi}_\omega(z) = A_\omega' z + A_\omega'' z^2 + \ldots + A_\omega^{(\omega)} z^\omega.$$

De coëfficienten A hierin zijn transcendentale functies van

$$\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_\omega.$$

Bepalen we nu deze grootheden ζ zoodanig, dat

$$A_1' + A_2' + \ldots + A_\omega' = \omega A'$$
$$A_1'' + A_2'' + \ldots + A_\omega'' = \omega A''$$
$$\ldots\ldots$$
$$A_1^{(\omega)} + A_2^{(\omega)} + \ldots + A_\omega^{(\omega)} = \omega A^{(\omega)},$$

welke vergelijkingen een oneindig aantal oplossingen toelaten,

dan is

$$(\psi)_1(z) \cdot (\psi)_2(z) \cdot \ldots \cdot (\psi)_\omega(z) =$$

$$= C_1 C_2 \ldots C_\omega e^{\omega \overline{\Psi}(z)} \chi^\omega(z) = \frac{C_1 C_2 \ldots C_\omega}{C^\omega} \psi^\omega(z),$$

dus

$$\psi(z) = \frac{C}{\sqrt[\omega]{C_1 C_2 \ldots C_\omega}} \sqrt[\omega]{(\psi)_1(z) \cdot (\psi)_2(z) \cdot \ldots \cdot (\psi)_\omega(z)},$$

hetgeen bewezen moest worden.

3. De Sparre [1]) heeft de voorwaarde, waaraan de wortels van eene functie van geslacht ω moeten voldoen, nam. dat de reeks

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{a_\nu^{\omega+1}}$$

absoluut convergent is, in een anderen vorm gebracht.

Duiden we de moduli van de wortels a_ν aan door α_ν, en onderstellen we dat deze naar hunne grootte gerangschikt zijn, dan moet voor eene functie van geslacht ω,

$$\lim_{\nu=\infty} \alpha_\nu^{\omega-1} (\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu) = \lambda,$$

waarin λ een of ander eindig getal is, verschillend van nul.

Wanneer dit toch zoo is, dan zal steeds, van af een term van een genoegzaam hoogen rang,

$$\alpha_p^{\omega-1} (\alpha_{p+1} - \alpha_p) > A,$$

of

$$\alpha_{p+1} > \alpha_p + \frac{A}{\alpha_p^{\omega-1}},$$

waarin A een eindig getal, verschillend van nul is.

Verheffen we de beide leden van de laatste ongelijkheid tot de macht ω, dan leiden we er uit af:

$$\alpha_{p+1}^\omega > \alpha_p^\omega + \omega A$$
$$\alpha_{p+2}^\omega > \alpha_{p+1}^\omega + \omega A > \alpha_p^\omega + 2\omega A$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\alpha_{p+n}^\omega > \alpha_p^\omega + n\omega A > n\omega A$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

---

[1]) De Sparre. Sur la détermination du genre d'une fonction holomorphe dans quelques cas particuliers. C. R. CII (1886) p. 740 e. v.

We hebben dan:

$$\sum_{\nu=p+1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_\nu^{\omega+1}} = \sum_{\nu=p+1}^{\infty} \frac{1}{(\alpha_\nu^{\omega})^{\frac{\omega+1}{\omega}}} <$$

$$< \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n\,\omega\,A)^{\frac{\omega+1}{\omega}}} = \frac{1}{(\omega\,A)^{\frac{\omega+1}{\omega}}} \left[\frac{1}{1^{1+\frac{1}{\omega}}} + \frac{1}{2^{1+\frac{1}{\omega}}} + \ldots + \frac{1}{n^{1+\frac{1}{\omega}}} \ldots \right],$$

en daar deze reeks convergeert, convergeert ook de reeks

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_\nu^{\omega+1}},$$

zoodat dus de functie van geslacht ω is.

Nadert $\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu$ tot een eindigen limiet, zooals bij de hoogere sinussen geschiedt, of is dit verschil constant, zooals bij de sinus-, de cosinus- en de reciproke Γ-functie, dan is dus de functie van geslacht 1.

Voeren we nu nog in de volgende notaties:

$$\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = \varepsilon_\nu,$$
$$\alpha_{\nu+p} + \alpha_\nu = 2\,\alpha_\nu',$$
$$\alpha_{\nu+p} - \alpha_\nu = \varepsilon_\nu + \varepsilon_{\nu+1} + \ldots + \varepsilon_{\nu+p-1} = 2\,\delta_\nu,$$

waarbij we p zoo kiezen, dat

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{\delta_\nu}{\alpha_\nu'} = 0.$$

We kunnen nu allereerst de zoo even bewezen conditie schrijven:

$$\lim_{\nu=\infty} \alpha_\nu^{\omega-1}\,\varepsilon_\nu = \lambda,$$

en beschouwen we dan de uitdrukking

$$\frac{\alpha_\nu^{\omega-1}\,\varepsilon_\nu + \alpha_{\nu+1}^{\omega-1}\,\varepsilon_{\nu+1} + \ldots + \alpha_{\nu+p-1}^{\omega-1}\,\varepsilon_{\nu+p-1}}{p},$$

dan is het duidelijk, dat deze uitdrukking λ tot limiet heeft.

Schrijven we nu voor den teller:

$$\alpha_\nu^{\omega-1}\,\varepsilon_\nu + \alpha_{\nu+1}^{\omega-1}\,\varepsilon_{\nu+1} + \ldots + \alpha_{\nu+p-1}^{\omega-1}\,\varepsilon_{\nu+p-1} = 2\,\delta_\nu\,\alpha_\nu'^{\omega-1}(1+\eta),$$

dan is het gemakkelijk te bewijzen, dat η tot nul nadert, wanneer ν oneindig toeneemt.

η is toch in absolute waarde kleiner dan

$$\frac{\alpha_{\nu+p}^{\omega-1}}{\alpha_\nu'^{\omega-1}} - 1,$$

dus kleiner dan

$$\frac{\alpha_{\nu+p}^{\omega-1} - \alpha_\nu^{\omega-1}}{\alpha_\nu'^{\omega-1}} = \frac{(\alpha_\nu' + \delta_\nu)^{\omega-1} - (\alpha_\nu' - \delta_\nu)^{\omega-1}}{\alpha_\nu'^{\omega-1}} =$$

$$= 2(\omega-1)\frac{\delta_\nu}{\alpha_\nu'}\left[1 + \frac{(\omega-2)(\omega-3)}{1.2.3}\frac{\delta_\nu^2}{\alpha_\nu'^2} + \ldots\right],$$

en deze uitdrukking heeft nul tot limiet.

We kunnen dus ook schrijven:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{2\,\alpha_\nu'^{\omega-1}\,\delta_\nu}{p} = \lambda.$$

Noemen we nu σ_ν het oppervlak, dat begrepen is tusschen twee cirkels met stralen α_ν en $\alpha_{\nu+p}$, dan is

$$\sigma_\nu = \pi(\alpha_{\nu+p}^2 - \alpha_\nu^2) = 4\pi\,\alpha_\nu'\,\delta_\nu,$$

en dan kunnen we de voorwaarde schrijven in den vorm:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{\alpha_\nu'^{\omega-2}\,\sigma_\nu}{p} = 2\pi\lambda,$$

p is dan het aantal nullen begrepen tusschen de beide cirkels.

Stellen we nu dat men, door de naburige nulpunten met elkaar te verbinden, een net van driehoeken kan vormen, dat het geheele vlak bedekt, en dat, voor genoegzaam groote waarden van ν, de driehoeken die tusschen de cirkels met stralen α_ν en $\alpha_{\nu+p}$ inliggen, dezelfde oppervlakte hebben, dan geldt voor het oppervlak S_ν van een dezer driehoeken:

$$S_\nu = \mu\frac{\sigma_\nu}{p},$$

waarin μ een eindige, van nul verschillende factor is.

De voorwaarde kan dus ook gebracht worden in den vorm:

$$\lim_{\nu=\infty} \alpha_\nu'^{\omega-2}\,S_\nu = \lambda',$$

waarin men nog α_ν' door α_ν mag vervangen, omdat $\alpha_\nu = \alpha_\nu' - \delta_\nu$ en δ_ν t. o. z. van α_ν' oneindig klein is. Dus:

$$\lim_{\nu=\infty} \alpha_\nu^{\omega-2}\,S_\nu = \lambda'.$$

Wanneer S_ν tot een eindigen limiet nadert, of wanneer S_ν eene constante grootheid is, zooals dit bij de σ-functie van WEIERSTRASS het geval is, dan is de functie dus van geslacht 2.

4. Ten slotte willen we nog het een en ander vermelden uit de verhandeling van VON PUZYNA [1]).

Is $\varphi(z)$ eene eenvoudige functie van geslacht ω, die niet nul wordt voor $z = 0$, dan volgt, zooals we reeds hebben opgemerkt, uit de formule

$$\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{z^\omega}{a_\nu^\omega (z - a_\nu)},$$

dat $\varphi'(z)$ ω wortels $z = 0$ heeft. De ontwikkeling in eene reeks van de functie $\varphi(z)$ zal dus zijn van den vorm:

$$\varphi(z) = 1 + A_{\omega+1} z^{\omega+1} + A_{\omega+2} z^{\omega+2} + \ldots\ldots$$

Weten we dus eenmaal dat eene functie is eene eenvoudige functie, dan is uit hare ontwikkeling in eene reeks terstond haar geslacht te bepalen. Het geslacht van de functie zal dan zijn ω, wanneer $\omega + 1$ de exponent is van de laagste macht van z. Hierbij is echter nog eene opmerking te maken, waarop we zoo dadelijk terugkomen.

Uit de bovenstaande ontwikkeling volgt nu verder:

$$\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = \frac{(\omega+1) A_{\omega+1} z^\omega + (\omega+2) A_{\omega+2} z^{\omega+1} + \ldots.}{1 + A_{\omega+1} z^{\omega+1} + A_{\omega+2} z^{\omega+2} + \ldots.}.$$

We hebben nu reeds op pag. 50 gevonden, dat voor $|z| < |a_1|$ geldt:

$$\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = -S_{\omega+1} z^\omega - S_{\omega+2} z^{\omega+1} - \ldots.,$$

waarin

$$S_{\omega+k} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{a_\nu^{\omega+k}}.$$

---

[1]) v. PUZYNA. Ueber den Laguerre'schen Rang einer eindeutigen analytischen Function mit unendlich vielen Nullstellen. Monatshefte für Mathematik u. Physik. III. (1892) p. 1. e. v.

De schrijver behandelt hierin ook de transcendentale functies met eene eindige grensplaats der nullen. Om echter niet buiten ons vastgesteld kader te gaan, zullen we zijne onderzoekingen hieromtrent laten rusten.

Hieruit volgt dus de identiteit:

$$(\omega+1)\,A_{\omega+1}\,z^{\omega}+(\omega+2)\,A_{\omega+2}\,z^{\omega+1}+\ldots\ldots=$$
$$=-(S_{\omega+1}\,z^{\omega}+S_{\omega+2}\,z^{\omega+1}+\ldots.)\,(1+A_{\omega+1}\,z^{\omega+1}+A_{\omega+2}\,z^{\omega+2}+\ldots.),$$

en door gelijkstelling van de coëfficienten van de gelijknamige machten van z, vinden we hieruit gemakkelijk:

$$S_{\omega+1}=-(\omega+1)\,A_{\omega+1}$$
$$S_{\omega+2}=-(\omega+2)\,A_{\omega+2}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$S_{2\omega+1}=-(2\,\omega+1)\,A_{2\omega+1}$$
$$S_{2\omega+2}=-(2\,\omega+2)\,A_{2\omega+2}-S_{\omega+1}\,A_{\omega+1}$$
$$S_{2\omega+3}=-(2\,\omega+3)\,A_{2\omega+3}-S_{\omega+1}\,A_{\omega+2}-S_{\omega+2}\,A_{\omega+1}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$S_{2\omega+k+1}=-(2\,\omega+k+1)\,A_{2\omega+k+1}-S_{\omega+1}\,A_{\omega+k}-$$
$$-S_{\omega+2}\,A_{\omega+k-1}-\ldots-S_{\omega+k}\,A_{\omega+1},$$

en omgekeerd:

$$A_{\omega+1}=-\frac{1}{\omega+1}\,S_{\omega+1}$$
$$A_{\omega+2}=-\frac{1}{\omega+2}\,S_{\omega+2}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A_{2\omega+1}=-\frac{1}{2\,\omega+1}\,S_{2\omega+1}$$
$$A_{2\omega+2}=-\frac{1}{2\,\omega+2}\,(S_{2\omega+2}+A_{\omega+1}\,S_{\omega+1})$$
$$A_{2\omega+3}=-\frac{1}{2\,\omega+3}\,(S_{2\omega+3}+A_{\omega+1}\,S_{\omega+2}+A_{\omega+2}\,S_{\omega+1})$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A_{2\omega+k+1}=-\frac{1}{2\,\omega+k+1}\,(S_{2\omega+k+1}+A_{\omega+1}\,S_{\omega+k}+$$
$$+A_{\omega+2}\,S_{\omega+k-1}+\ldots+A_{\omega+k}\,S_{\omega+1}).$$

Het kan nu gebeuren, dat $S_{\omega+1}=0$. Dan is dus ook $A_{\omega+1}=0$, en de ontwikkeling in eene reeks heeft dan den vorm:

$$\varphi(z)=1+A_{\omega+2}\,z^{\omega+2}+\ldots.$$

Alhoewel de functie van geslacht ω is, zou hieruit volgen, dat ze was van geslacht $\omega + 1$.

v. PUZYNA zegt alsdan, dat de functie is van het oneigenlijke geslacht $\omega + 1$.

Zoo zal in het algemeen eene functie van geslacht ω zijn van het oneigenlijke geslacht $\omega + k$, wanneer

$$S_{\omega+1} = S_{\omega+2} = \ldots = S_{\omega+k} = 0.$$

5. v. PUZYNA brengt hier nog bij te pas de z. g. bijbehoorende functies.

Het is duidelijk, dat we elke functie van geslacht ω,

$$G(z) = C\, e^{\overline{G}(z)}\, z^{\lambda} \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_\nu}\right) e^{Q_\omega\left(\frac{z}{a_\nu}\right)},$$

kunnen schrijven in den vorm van eene functie van geslacht $\omega + k$. We hebben toch:

$$e^{\sum_{n=1}^{k} \frac{z^{\omega+n}}{\omega+n} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{a_\nu^{\omega+n}}} = \prod_{\nu=1}^{\infty} e^{\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{\omega+n}\left(\frac{z}{a_\nu}\right)^{\omega+n}},$$

en dus

$$G(z) = C\, e^{\overline{G}_1(z)}\, z^{\lambda} \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_\nu}\right) e^{Q_{\omega+k}\left(\frac{z}{a_\nu}\right)},$$

waarin

$$\overline{G}_1(z) = \overline{G}(z) - \sum_{n=1}^{k} \frac{z^{\omega+n}}{\omega+n} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{a_\nu^{\omega+n}}.$$

We kunnen hierbij opmerken, dat door deze verschillende wijzen van schrijven, eene ψ-functie toch steeds eene ψ-functie blijft.

Duiden we nu de eenvoudige functie

$$\prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_\nu}\right) e^{Q_\omega\left(\frac{z}{a_\nu}\right)}$$

aan door $\varphi_\omega(z)$, dan noemt v. PUZYNA de eenvoudige functie

$$\prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_\nu}\right) e^{Q_{\omega+k}\left(\frac{z}{a_\nu}\right)}$$

de k^{de} bijbehoorende functie van $\varphi_\omega(z)$, en duidt haar aan door $\varphi_{\omega+k}(z)$.

Tusschen die beide functies geldt dus de betrekking:

$$\varphi_{\omega+k}(z) = e^{\sum_{n=1}^{k} \frac{z^{\omega+n}}{\omega+n} S_{\omega+n}} \cdot \varphi_\omega(z).$$

Wanneer nu de functie van oneigenlijk geslacht $\omega + k$ is, zoodat

$$S_{\omega+1} = S_{\omega+2} = \ldots = S_{\omega+k} = 0,$$

dan volgt uit bovenstaande betrekking, dat we alsdan hebben:

$$\varphi_\omega(z) = \varphi_{\omega+1}(z) = \ldots = \varphi_{\omega+k}(z),$$

of in woorden:

Eene eenvoudige functie van geslacht ω en van oneigenlijk geslacht $\omega + k$ is identisch met hare eerste k bijbehoorende functies.

Een voorbeeld van eene dergelijke functie is de σ-functie van WEIERSTRASS ($\omega = 2$).

We hebben hier $S_3 = 0$, dus is de functie van het oneigenlijke geslacht 3, en is

$$\sigma_2(z) = \sigma_3(z)\ ^1).$$

Bij deze functie hebben we nog dit bijzondere, dat steeds $S_p = 0$, wanneer p oneven is. Hieruit volgt, dat we ook hebben

$$\sigma_4(z) = \sigma_5(z)$$
$$\sigma_6(z) = \sigma_7(z)$$
$$\ldots\ldots\ldots,$$

of in woorden:

Elke bijbehoorende functie van $\sigma(z)$ is identisch met de onmiddelijk daarop volgende bijbehoorende functie met oneven index.

Hetzelfde doet zich voor bij de sinusfunctie en de cosinusfunctie.

Bij de sinussen van de 4e orde ($\omega = 1$) heeft men:

$$S_2 = S_3 = 0,\ S_5 = S_6 = S_7 = 0, \ldots\ldots,$$

---

[1]) De notatie $\sigma_u(z)$ heeft hier natuurlijk eene andere beteekenis als in hoofdstuk V § 29.

zoodat ze van het oneigenlijke geslacht 3 zijn, terwijl er voor geldt:

$$\varphi_1(z) = \varphi_2(z) = \varphi_3(z)$$
$$\varphi_4(z) = \varphi_5(z) = \varphi_6(z) = \varphi_7(z)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

6. Merken we nog op, dat, in het geval dat $S_p = 0$ voor p oneven, uit de bovenstaande tabel voor de berekening der coëfficienten van de ontwikkeling in eene reeks volgt, dat al de coëfficienten met oneven indices verdwijnen, en dat de overige coëfficienten gevonden worden uit de volgende tabellen:

Voor ω oneven,

$$A_{\omega+1} = -\frac{1}{\omega+1} S_{\omega+1}$$
$$A_{\omega+3} = -\frac{1}{\omega+3} S_{\omega+3}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A_{2\omega} = -\frac{1}{2\omega} S_{2\omega}$$
$$A_{2\omega+2} = -\frac{1}{2\omega+2}(S_{2\omega+2} + A_{\omega+1} S_{\omega+1})$$
$$A_{2\omega+4} = -\frac{1}{2\omega+4}(S_{2\omega+4} + A_{\omega+1} S_{\omega+3} + A_{\omega+3} S_{\omega+1})$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A_{2\omega+k} = -\frac{1}{2\omega+k}(S_{2\omega+k} + A_{\omega+1} S_{\omega+k-1} + A_{\omega+3} S_{\omega+k-3} + \ldots$$
(k even) $$\ldots + A_{\omega+k-1} S_{\omega+1}).$$

Voor ω even,

$$A_{\omega+2} = -\frac{1}{\omega+2} S_{\omega+2}$$
$$A_{\omega+4} = -\frac{1}{\omega+4} S_{\omega+4}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A_{2\omega} = -\frac{1}{2\omega} S_{2\omega}$$

$$A_{2\omega+2} = -\frac{1}{2\omega+2} S_{2\omega+2}$$

$$A_{2\omega+4} = -\frac{1}{2\omega+4} (S_{2\omega+4} + A_{\omega+2} S_{\omega+2})$$

. . . . . .

$$A_{2\omega+k} = -\frac{1}{2\omega+k} (S_{2\omega+k} + A_{\omega+2} S_{\omega+k-2} + A_{\omega+4} S_{\omega+k-4} + \cdots$$

(k even) $\qquad \cdots + A_{\omega+k-2} S_{\omega+2})$.

Het is hieruit duidelijk, dat de functies die hieraan voldoen, zooals $\frac{\sin z}{z}$, $\cos z$, $\frac{\sigma(z)}{z}$, geen termen met z tot eene oneven macht bevatten.

Door eene dergelijke beschouwing is het even gemakkelijk aan te toonen, dat de exponenten der termen van de sinussen van de 4e orde met 4 moeten opklimmen.

STELLINGEN.

STELLINGEN.

I.

De manier, waarop HERMITE de waarde van $\overline{G}(z)$ afleidt voor de functie $\sin z$ [1]), is te beschouwen als te zijn analoog met de in dit proefschrift ontwikkelde algemeene methode.

II.

De definitie, die v. PUZYNA geeft van het geslacht eener functie:

Eene functie is van geslacht ω, wanneer ω het kleinste positieve geheele getal is, waarvoor

$$\left| \frac{G'(z)}{z^{\omega+1}\, G(z)} \right|_{z=0} = \infty,$$

is onjuist.

III.

Ten onrechte beweert BRIOT (théorie des fonctions abéliennes, 1879):

La méthode de RIEMANN présente de grandes difficultés, et

[1]) HERMITE, t. a. p. p. 102 e. v.

ne paraît pas susceptible d'acquérir le degré de clarté et de rigueur que l'on recherche dans les Sciences mathématiques.

IV.

Het begrip differentiaal wordt bij STURM niet op de juiste wijze afgeleid.

V.

De functie $\varphi(\Delta)$ uit de leer der kleinste kwadraten wordt door CHAUVENET en WATSON, in navolging van GAUSS, op twee verschillende wijzen gedefinieerd.

VI.

De theorie der espérance morale van DANIEL BERNOUILLI is niet goed gegrondvest.

VII.

Twee lijnen, in een plat vlak gelegen, snijden elkaar in twee punten; twee evenwijdige lijnen in het positieve en het negatieve oneindige punt, twee niet-evenwijdige lijnen in het eindige en het dubbel-oneindige punt.

VIII.

Het bewijs, dat STURM geeft van het beginsel der virtueele snelheden, is onvoldoende.

IX.

De logica, waarmede OSTWALD zijne energetiek [1]) verdedigt, is bedenkelijk.

X.

Bij een zeer elementair onderwijs in de Natuurkunde verdient het de voorkeur het begrip massa niet in te voeren, en dus te blijven spreken van het gewicht van een lichaam.

XI.

Tot op dit oogenblik kan er niet beslist worden tusschen de verschillende hypothesen omtrent het wezen der z. g. *X*-stralen.

XII.

Temperatuursbepalingen, met behulp van een kwikthermometer, tot op $\frac{1}{10000}^{\circ}$ nauwkeurig, hebben niet de minste wetenschappelijke waarde.

XIII.

Bij het onderwijs in de cosmografie moet het behandelen van de beweging der planeten om de zon voorafgaan aan het vermelden van hunne schijnbare beweging van uit de aarde gezien.

---

[1]) Zeitschr. für phys. Chemie XVIII. p. 305 e. v.

XIV.

H_2 O is eene onverzadigde verbinding.

XV.

Het gas, uit cleveït verkregen, bestaat uit twee elementen.

XVI.

Si l'on ne sait pas tout, si même l'on ne sait jamais tout, ce n'est pas un argument pour cesser d'apprendre. Il est mauvais que l'inconnu bénéfice de ce que nous ignorons. Au contraire, notre éternel espoir doit être d'expliquer un jour l'inexpliqué; et nous ne saurions avoir sainement un idéal, en dehors de cette marche à l'inconnu pour le connaître, de cette victoire lente de la raison, au travers des misères de notre corps et de notre intelligence.

Zola, Lourdes p. 201.