Oplossing der vraagstukken, voorkomende in de oefeningen ter toepassing van de beginselen der meetkunst, ... van G.J. Kapteijn

W. Kapteyn.

OPLOSSING DER VRAAGSTUKKEN,

VOORKOMENDE IN DE:

OEFENINGEN

TER TOEPASSING VAN DE BEGINSELEN

DER

MEETKUNST,

ten dienste van hen die de Militaire Akademie te Breda, de Hoogere Burgerscholen, de Industrie-scholen of de Hoogescholen zullen bezoeken, alsmede van hen, die tot Onderwijzers worden opgeleid,

VAN DEN HEER

G. J. KAPTEIJN.

Instituteur te Barneveld.

DOOR WIJLEN

Dr. P. H. KAPTEIJN,

Præceptor aan het Gymnasium Willem III te Batavia.

Tweede vermeerderde druk.

BARNEVELD.

P. ANDREÆ MENGER.

1874.

Dr. P. H. KAPTEIJN,

OPLOSSING VAN VRAAGSTUKKEN.

Oplossing der Vraagstukken,

VOORKOMENDE IN DE:

OEFENINGEN

TER TOEPASSING VAN DE BEGINSELEN

DER

MEETKUNST,

ten dienste van hen die de Militaire Akademie te Breda, de Hoogere Burgerscholen, de Industrie-scholen of de Hoogescholen zullen bezoeken, alsmede van hen, die tot Onderwijzers worden opgeleid,

VAN DEN HEER

G. J. KAPTEIJN,
Instituteur te Barneveld,

DOOR WIJLEN

Dr. P. H. KAPTEIJN,
Praeceptor aan het Gymnasium Willem III te Batavia.

Tweede vermeerderde druk.

BARNEVELD,
P. ANDREÆ MENGER.
1874.

VOORREDE.

De ondergeteekende biedt hier de aangekondigde beantwoording der vragen en oplossing der vraagstukken aan, welke zijn zoon, Dr. P. H. Kapteijn, had op zich genomen, en welke hij als een blijvend aandenken bij zijn voorgenomen vertrek naar Indië had willen achterlaten. Door eene hevige ziekte aangetast, bezweek hij op denzelfden dag, die voor zijne afreize daarheen was bestemd.

Het behaagde den Algoede zijne jonge gade en ons in den diepsten rouw te dompelen, op het oogenblik, dat hij het zoo eervol hem opgedragen ambt ging aanvaarden, en, terwijl hij zijne talenten ten nutte der belangrijke inrichting in Indië wilde aanwenden, de vruchten zou beginnen te plukken van zijne veeljarige inspanning en onverdroten ijver.

De aan mijne school verkregen vruchten gedurende de achttien maanden die hij als deelgenoot daaraan werkzaam was, waren mij een waarborg, dat hij de op hem uitgebrachte benoeming als Præceptor aan 't Gymnasium Willem III te Batavia eer zou aangedaan hebben, en het vertrouwen volkomen zou hebben gerechtvaardigd, waarmede het Ministerie van Koloniën hem vereerde. En zulks niet alleen in het vak van Letteren. Reeds in zijne eerste studiejaren te Utrecht onderscheidde hij zich zeer gunstig in de wiskunde. Met voorliefde werkte hij aan de exacte wetenschappen, en zag den tijd met verlangen tegen, dat hij zich geheel aan die lievelingsstudie zou kunnen wijden. Daarvan moge het werk getuigen dat hij na zijne promotie, — en dus sedert Februari dezes jaars, — op aanzoek van den Uitgever, had ondernomen.

Eigen oefening lokte hem aan; maar tevens bezielde hem de wensch, om hulp te bieden aan menig jong beoefenaar der wiskunde, die vaak van hulp geheel verstoken is. En dit laatste woog bij hem zwaarder, dan het nadeel dat er uit zou kunnen voortvloeien, wanneer leerlingen er misbruik van maken, en verzuimen hunne eigene krachten te oefenen.

Immers, — gesteld al, dat de laatsten, uit gemakzucht, zich een exemplaar van deze oplossingen aanschaffen, — welk ervaren onderwijzer zal zich geene volledige rekenschap laten geven der geleverde oplossing, en zich vergenoegen met den ingeslagen weg, wanneer meerdere wegen daartoe leiden?

Daarom vooral besloot hij, van elk vraagstuk slechts ééne oplossing te geven. De beoogde hulp ware dan toch verleend, en het werkje wierd niet al te uitgebreid.

Zijne oplossingen zullen wel juist zijn: de nauwkeurigheid, waarmede hij al zijn werk verrichtte, staat mij borg daarvoor. De tijd ontbreekt mij om ze aan een nauwkeurig onderzoek te onderwerpen, en de taak wierd mij te zwaar bij het aanhoudend herdenken. Ook laat ik bij de revisie der proeven zijn werk liefst onveranderd. Hetgeen echter aan de voltooiing ontbrak, heb ik, in weerwil mijner vele bezigheden, afgewerkt. En zoo moge dan het oogmerk mijns geliefden overledene bereikt worden: aankweeking van den lust voor de Wiskunde, dat eerste vereischte bij alle wetenschappelijke opvoeding.

Gaarne zal ik bij mijn onderwijs, telkens zijne oplossingen vergelijken met de door mij gevolgde wegen, en aanteekening houden van hetgeen mij voorkomt verandering te behoeven ter bevordering van verscheidenheid: — ook

—

houd ik mij aanbevolen tot het ontvangen van bijdragen die hetzelfde beoogen; om daarvan in het belang der zaak gebruik te kunnen maken, wanneer een herdruk noodzakelijk bevonden wierd.

G. J. KAPTEIJN.

Barneveld, 15 October, 1864.

VOORBERICHT VOOR DEN TWEEDEN DRUK.

De noodzakelijkheid van den herdruk heeft het gevoelen mijns Zoons bevestigd. Zeer weinig vond ik in zijne oplossingen, dat wijziging behoefde. Waar ik die noodig achtte, heb ik ze aangebracht. Van de nieuwe vraagstukken heb ik de oplossingen ingelascht, overeenkomstig met de nummers van het textboekje.

Van harte wensch ik, dat het werk voortdurend aan het doel beantwoorde!

G. J. KAPTEIJN.

Barneveld, Jan. 1874.

VERBETERINGEN.

bl. 11, reg. 3 van onder: *zoolang*, lees: *dat*.
„ 31, „ 6 „ „ : $1.\sqrt{2}$, „ $1:\sqrt{2}$.
„ 41, „ 18 „ „ : HFG, „ HTG.
„ 48, „ 21 „ „ : 12, 14 *en* 16, „ 13, 14, 15 *en* 16.
„ „ , „ 19 „ „ : 13, „ 12.
„ „ , „ 16 „ „ : N⁰. 16 *kan*, „ N⁰. 14 *en* 16 *kunnen*.
„ 55, „ 11 „ „ : F′C, „ FC.
„ 56, „ 3 „ „ : *aan*, „ *aan den*.
„ 64, „ 15 van boven: BC—BD, „ DC—BD.
„ „ , „ 19 „ „ : DC—BD). „ (DC—BD).
„ 65, „ 6 „ „ is het nummer van het Vraagstuk, 39, vergeten.
„ 67, „ 11 „ „ *zij* AB, lees: *zij* AB *de*.
„ 70, „ 19 „ „ $\frac{1}{2}$ BG.DE, „ $\frac{1}{2}$ bg.DE.
„ 84, „ 20 „ „ vr. 52, „ vr. 53.
„ 87. In de figuur van Vr. 107 staat slechts eene letter, de letter D, bij twee punten. Zij behoort alleen te staan aan den voet der loodlijn uit G op AB nedergelaten. Aan het snijpunt van den boog, uit B met den straal BH beschreven, en de lijn AB had eene andere letter behooren geplaatst te worden.
„ 103. In de figuur van Vr. 19 is de letter O aan het verlengde van AC vergeten.
„ 106, reg. 4 van boven: DC′, lees: DC.
„ 107, „ 3 van onder: $c^2—2cx+c^2+b^2$, lees: $c^2—2cx+x^2+b^2$.
„ 110, „ 17 van boven: *vraagst.* 48, lees: *vraagstuk* 41.
„ „ In de figuur van Vr. 39 is de lijn PD vergeten.
„ 117, N⁰. 56 is de oplossing van het 57e, en N⁰. 57 die van het 56e Vraagstuk.
„ 123. In de figuur van Vr. 75 is de lijn BC vergeten.
„ 148, reg. 15 en 16 moesten de woorden: *'t bewijs van het gevraagde* niet cursijf zijn.
„ 156, reg. 3 van boven: *drie*, *vijf*, *zes*, *zeven*, lees: *twee*, *vier*, *vijf*, *zes*.
„ 178, „ 4 „ „ : *licht*, lees: *ligt*.
„ 179, „ 8 „ „ : $16k^4$, lees: $16k^4)$.
„ 183, „ 7 van onder: *koorden*, lees: *koorde*.
„ 190, „ 18 „ „ : $(30=x)$, lees: $(30+x)$.
„ 200, „ 11 „ „ : NG, lees: NO.
„ 204, „ 10 „ „ : *ot*, lees: *tot*.
„ 206, „ 11 „ „ : $\frac{(t-1)(t-2)}{1.2.3}$, lees: $\frac{t(t-1)(t-2)}{1.2.3}$.

Nieuwe Opgaven

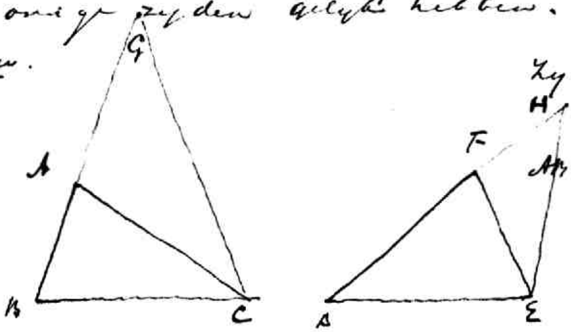
1. Wanneer men uit een punt van den omtrek eens cirkels lijnen trekt naar de hoekpunten van den ingeschreven regelmatigen driehoek is de grootste dezer lijnen = de som der beide anderen.

Oplossing Mathem. Genootschap.

2. In een regthoekigen driehoek zijn twee vierkanten beschreven, een liggende op een regthoekszyde, een op de hypothenusa. Welk is 't grootste.—

3. Twee △△ zijn = en ∼ wanneer zy eene zijde, den hoek daartegenover en de som der overige zijden gelijk hebben.

Bew.



Zy $BC = DE$
$\angle A = \angle F$
$AB + AC = DF + DE$

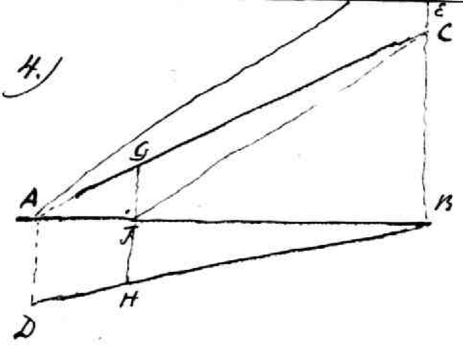
Neem $AG = AC$ en $FH = FE$
dan hebben $\triangle BCG$ en $\triangle DHE$
1° $BC = DE$
2° $BG = DH$
3° $\angle G = \angle H = \frac{1}{2}\angle A = \frac{1}{2}\angle F$

Hieruit volgt.
a. $\angle BCG = \angle DEH$ of $\angle ACB = \angle FED$.
b. $\angle BCG = 180° - DEH$. of $\angle ACB = 180 - DEH - FEH$
$= \angle D$

EERSTE AFDEELING.

§ 24 — § 66.

1. Dan vormen de deellijnen eenen rechten hoek.
2. De vier scherpe hoeken in de voorschreven figuur zullen alle gelijk 52° 17′ 24″, de vier stompe alle gelijk 127° 42′ 36″ zijn.
3. Een hoek van 52° 17′ 24″ O. V., bevat 58° 10′ 00″ N. V. Een hoek van 127° 42′ 36″ O. V., 141° 90′ 00″ N. V.
4. Leg eerst *twee* der gegevene hoeken zóó *nevens* elkander, dat zij een gemeenschappelijk hoekpunt en een gemeenschappelijk been hebben. Handel met de aldus verkregen som van twee der hoeken en den derden hoek, als met de twee eerst verbonden hoeken.
5. Leg de twee gegeven hoeken zóó *op* elkander, dat zij een gemeenschappelijk hoekpunt en een gemeenschappelijk been hebben. Het stuk van den grootsten hoek dat dan niet door den kleinsten hoek bedekt wordt zal 't gevraagde verschil zijn.
6. Dit is: neem de som van drie hoeken ieder gelijk aan den gegevenen. Men doet dat volgens Vr. 4 van dit hoofdstuk.
7. Deel eenen rechten hoek midden door. Deze helft zal gelijk 50° N. V. zijn.
8. Zoek de som van den hoek in Vr. 7 van dit hoofdstuk gevonden en eenen rechten hoek.
9. Deel den hoek in Vr. 7 van dit hoofdstuk gevonden midden door; de helft van dezen laatst gevonden hoek zal gelijk 12° 50′ N. V. zijn.
10. De hoek gevonden in 't vorig vraagstuk is ook gelijk 11° 15′ O. V.
11. Voeg de helft van eenen halven rechten hoek bij eenen geheelen rechten.
12. Voeg bij de som van drie rechte hoeken de helft van eenen halven rechten.
13. Daar 100° + 140° + 170° gelijk is aan 410°, is de gevraagde hoek 50° grooter dan 4 R., dan de zoogenaamde onbepaalde vlakteruimte en kan niet anders aanschouwelijk worden gemaakt dan door de figuur die eenen hoek van 50° voorstelt.
14. Het supplement is 183° 70′ 22″ N. V.,
het complement is 83° 70′ 22″ N. V.



4.) Gegⁿ: den figuur
gevr. Een lijn te vinden die $\perp$ AB staat zoodat de afstanden gemeten langs deze lijn van af AB tot waar zij de lijnen BC en BD snijdt gelijk zijn.

Opl. Verleng CB tot in E zoodat EC = AD trek EA en uit C eene lijn // EA dan is FGH de gevraagde lijn.

Immers $\cancel{BE : BC = AB : BF}$

$$FG : BC = AB : AF$$
$$AD : FH = BF : AB$$
$$BC : AD = AF : BF \quad \text{verm.}$$
$$\overline{FG : FH = 1 : 1.}$$

5./ Gevraagd een Δ te verdeelen in 3 deelen die zich verhouden als p, q, r, door middel van lijnen // aan de zijden.

6./ ~~Den~~ Een driehoek zoodanig in een anderen te beschrijven, dat de omtrek van deze laatste minimum zij (Frenet 210)

De voetpunten der loodlijnen uit de hoekp. des eersten driehoeks neergelaten verbinden.

7.) Te bewijzen dat de stralen van den om deze driehoeken (bedoeld in 6.) beschreven cirkels zich verhouden als 2 : 1.
(Zie Oplossing. Wiegand Trigon.
n°. 137.

15. Het supplement zal 174° 45′ 18″,
het complement 84° 45′ 18″ zijn O. V.
16. Het verschil tusschen supplement en complement van denzelfden hoek is altijd gelijk 1 R.
17. Van hoeken grooter dan 135°.
18. Van hoeken grooter dan 90°.
19. Van hoeken grooter dan 180°.
20. Stompe hoeken.
21. Van inspringende hoeken.
22. 33° 45′ O. V. 37° 50′ N. V.
23. 257° 8′ 34″, 28 etc. O. V.
285° 71′ 42″, 85 N. V.
24. 36° O. V., 40° N. V. Men noemt dezen hoek een scherpen hoek.
25. Drie is het maximum, twee het minimum.
26. Wanneer 't supplement van den stompen hoek kleiner is dan de scherpe hoek.
27. Wanneer 't supplement van den inspringenden hoek kleiner is dan de scherpe hoek.
28. Men kan uit den stand van twee hoeken oordeelen of zij gelijk zijn, ja dan neen, in twee gevallen:

1°. Zoo de beenen van den eenen hoek evenwijdig loopen aan de beenen des anderen.

2°. Zoo de beenen des eenen hoeks loodrecht staan op de beenen des anderen.

('t geval dat de beenen van den eenen die des anderen onder gelijke hoeken snijden zullen wij hier niet behandelen.)

In 't eerste geval zijn de hoeken gelijk, zoo de beenen des eenen hoeks richtingen hebben beide gelijk, of beide tegenovergesteld aan die der daaraan evenwijdig loopende beenen des anderen.

In 't tweede geval zijn de hoeken gelijk, zoo de beide hoekpunten aan dezelfde zijde liggen van de lijn die de punten verbindt, waar de beenen van den eersten hoek die des tweeden snijden.

29. In 't eerste geval, in 't vorig vraagstuk aangenomen, zijn de beide hoeken elkanders supplementen, zoo 't eerste been des eenen hoeks gelijke richting heeft met het daaraan evenwijdige been des anderen, terwijl het tweede been des eenen en het daaraan evenwijdige been des tweeden hoeks, juist tegenovergestelde richtingen hebben.

In het tweede in 't vorig vraagstuk aangenomen geval, zoo de hoekpunten ter wederzijde liggen van de lijn die de punten verbindt, waar de beenen des eenen hoeks die des anderen snijden.

30. Die hoeken zijn respectivelijk 18° 45′, 41° 15′, 48° 45, 63° 45′, 78° 45′, 108° 45′.
31. Eenen hoek van 45°.

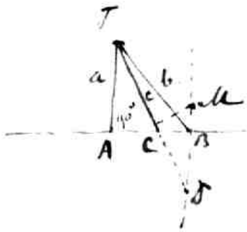
18. Wanneer men de niet op elkaâr volgende stukken van de zyden eens driehoeks waarin een cirkel beschreven is gebruikt tot het maken van een' nieuwen driehoek dan is 't ~~vierkant~~ dubbele product van de stralen der in en om dezen laatsten driehoek beschreven cirkels gelyk het vierkant van de straal des ingeschreven cirkels v/d eersten Δ.

Bewys Zie Oplosf. Wiegand. N° ~~44~~ 109

19. De inhoud eens driehoeks is gelyk den rechthoek beschreven met de halven straal des omgeschreven ~~deir~~ Cirkels bij des omtrek des driehoeks door de voetpunten v/d loodlynen bepaald

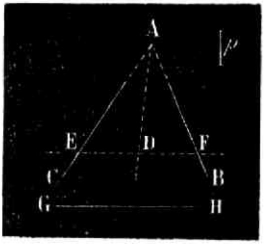
Bewys Zie oplosf. Wiegand N° ~~126~~ 104

20. Een driehoek te construeeren wanneer gegeven zyn de hoogte (a), de lyn die 't midden van de basis met den top verbindt (b) en de lyn die de tophoek midden door deelt (c)



Verleng TC tot zy de loodlyn in B op de basis opgericht snijdt: dit punt zal dan op de omtrek van de omg. cirkel moet liggen. Rigt dus op 't midden van TD een loodlyn op dan zal 't snijpunt M 't middelpunt van den omg. cirkel des driehoeks zyn: donc etc.

32. 150°, 130°, 80°.
33. 105°, 40°, 215°.
34. 103° 30′, 31° 30′, 45°.
35. Neem eenen willekeurigen hoek aan. Verleng diens eene been door 't hoekpunt heen, en deel den aangenomen hoek zoowel als zijn supplement midden door. Deze deellijnen zullen eenen rechten hoek vormen.
36. Elk punt der lijn die den gegeven hoek middendoor deelt zal aan 't gevraagde voldoen.
37. Wanneer men beide gegevene punten door eene lijn vereenigt, en op het midden dier lijn eene loodlijn opricht, zoo zal het snijpunt der loodlijn en der gegeven lijn 't gevraagde wezen.
38. Als wij het in 't vorig vraagstuk gevonden punt vereenigen, met een der gegeven punten, blijkt dadelijk, dat een cirkel, met die lijn als straal uit 't laatst gevonden punt als middelpunt beschreven, aan de vereischten voldoet.
39. Verleng de gegeven lijnen tot zij elkander snijden. Deel den hoek waaronder dat geschiedt middendoor. Elk punt dier deellijn zal aan het gevraagde voldoen.
40. Laat gevraagd zijn een punt te vinden dat op den gegeven afstand p van de lijn GH ligt, terwijl het tevens even ver van AB als van AC moet liggen.



Verleng, zoo noodig, AB en AC tot zij elkander snijden: deel den hoek BAC middendoor door eene lijn AD. Trek dan nog EF evenwijdig aan GH en op den afstand p daarvan verwijderd, dan zal het punt D op den afstand p van de lijn GH liggen; en daar het tevens een punt is der lijn die $\angle$ BAC middendoor deelt, op gelijke afstanden liggen van AB en AC.
41. Neem een willekeurig punt in elk der beide lijnen aan. Richt uit beide die punten, aan die zijde der gegeven lijnen waar de nieuwe deellijn verwacht wordt, loodlijnen op, die men beide even lang moet maken. Trek door hare toppen lijnen evenwijdig aan die, waarop de loodlijnen zelve staan, en deel den dus gevormden hoek midden door. De zoo gevonden deellijn zal de gevraagde zijn.
42. Zij BAC onze gegeven hoek. DE evenwijdig aan AC. FH evenwijdig aan GJ.

Als wij de strook ADEC uit het vlak van hoek BAC weg nemen, verkleint daardoor de hoek niet, want daar DE evenwijdig loopt aan AC, is hoek BDE gelijk hoek BAC.

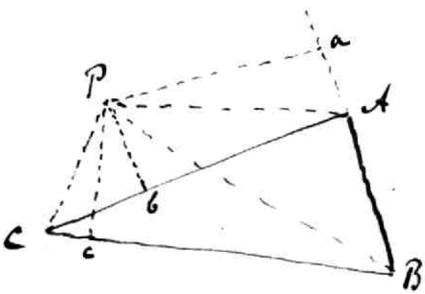
Ook wanneer men de evenwijdige strook FHJG uit den hoek BAC wegneemt, is wat er van den hoek overblijft nog even groot als hoek

11. Bewijs dat de rekenkundig middenevenredige grooter is dan de meetkundig middenevenredige.

Meetk = CD

Rekenk = MD.

12. Om een △ is een cirkel beschreven, uit een willekeurig punt van de omtrek heeft men loodlijnen op de zijden neergelaten; men vraagt te bewijzen dat de voetpunten dier loodlijnen in eene rechte lijn liggen.



Th: $Aa.Bc.Cb = Ba.Cc.Ab$.

Trek AP, BP en CP

$\therefore \triangle AaP \sim \triangle CcP$

$\therefore \triangle BcP \sim \triangle AbP$

$\therefore \triangle CbP \sim \triangle BaP$.

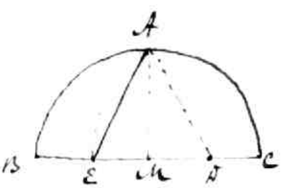
$Aa : Cc = Pa : Pc$

$Bc : Ab = Pc : Pb$

$Cb : Ba = Pb : Pa$

$Aa \times Bc \times Cb = Cc . Ab . Ba$. q.e.d.

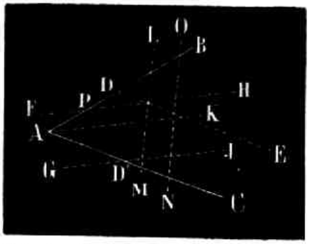
13.



Zij $MC = r \therefore MD = \frac{1}{2} r$, $AD = \frac{1}{2} r\sqrt{5}$

$EM = ED - MD = AD - MD = \frac{1}{2} r(\sqrt{5} - 1)$

$AE = \sqrt{r^2 + \frac{1}{4} r^2 (6 - 2\sqrt{5})} = \frac{1}{2} r \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$.

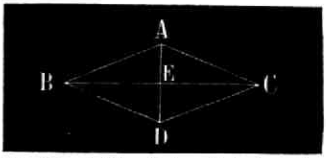


BAC. Want trekken wij AK evenwijdig aan FH, dan is hoek BPH = hoek BAK en hoek JD'C = hoek KAC.

Wanneer wij dit optellen verkrijgen wij hoek BPH + hoek JD'C = $\angle$ CAB.

Het heeft denkelijk niet in de bedoeling des schrijvers gelegen om strooken als LMNO uit het vlak van den hoek weg te nemen.

43. Laat ABDC eene ruit zijn. Daar AB = AC is, ligt A op de lijn die BC in haar midden rechthoekig snijdt. Evenzoo is D, wijl BD = DC is, een punt van diezelfde lijn. AD is dus die lijn, hoek E is recht en BE = EC. Geheel op diezelfde wijze vindt men dat ook AD in E middendoor gedeeld wordt door BC.



44. Beschrijf uit de uiteinden der gegeven lijn met stralen die *en* grooter dan de helft dier lijn, *en* onderling gelijk zijn, cirkelbogen die elkaar ter weerszijden der gegeven lijn zullen snijden. De rechte lijn die deze twee snijpunten vereenigt zal de gevraagde zijn.

45. Neem op elk der beenen des gegeven hoeks één punt aan, zóó, dat zij beide even ver van 't hoekpunt verwijderd zijn. Beschrijf uit deze punten met willekeurige, doch gelijke stralen cirkelbogen die elkaar ergens snijden. Dit snijpunt vereenige men met het hoekpunt van den gegeven hoek, zoo zal die lijn den gegeven hoek in twee gelijke hoeken verdeeld hebben. Men kan in dit en in 't vorige vraagstuk, door herhaling der bewerking, lijnen en hoeken vinden die gelijk $^1/_4$, $^1/_8$, $^1/_{16}$, $^1/_{32}$, van gegeven lijnen en hoeken zijn.

Aanmerking. Vraagstuk 45 had wel No. 1 dezes hoofdstuks mogen zijn.

Het verdeelen van een hoek in twee gelijke deelen wordt al dadelijk in vraagstuk 1 vereischt.

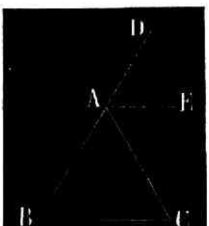
§ 67 — § 77.

1. 36°, 60°, 84°.
2. 45°, 60°, 75°.
3. 45°, 30°, 105°.
4. 80°, 55°, 45°.
5. Het complement van één', het supplement van geen' der hoeken eens driehoeks kan negatief zijn.
6. 1 R.
7. 4 R.

8. 10 R.
9. $69^\circ\ 17'$.
10. — $16^\circ\ 48'$.
11. In vraagstuk 9, $79^\circ\ 38'\ 30''$.
    In vraagstuk 10, $36^\circ\ 36'$.
12. $17^\circ\ 48'$.
13. $60^\circ\ 18'$.
14. $45^\circ\ 39'$.
15. $46^\circ\ 8'$.
16. $42^\circ\ 39'$, 60°, $77^\circ\ 21'$.
17. $25^\circ\ 42'\ 51\frac{3}{7}''$.
    $51^\circ\ 25'\ 42\frac{6}{7}''$.
    $102^\circ\ 51'\ 25\frac{5}{7}''$.
18. 135°, $22^\circ\ 30'$, $22^\circ\ 30'$.
19. Dat kan nimmer. Het supplement van een' der hoeken eens driehoeks is altijd *gelijk* aan de som der beide overige hoeken.
20. In eenen rechthoekigen driehoek.
21. Elke hoek met zijn complement is gelijk 1 R.

    Twee hoeken eens driehoeks met hunne complementen zijn derhalve gelijk 2 R.

    Maar diezelfde twee hoeken met den derden hoek des driehoeks zijn ook gelijk 2 R. Derhalve is die derde hoek alleen gelijk aan de som der complementen der beide overige hoeken.
22. Dit is eene strikvraag. Het supplement van elken hoek eens driehoeks is altijd gelijk de som der beide overige hoeken.
23. In eenen rechthoekigen driehoek.
24. $72^\circ\ 14'$, $72^\circ\ 14'$, $35^\circ\ 32'$.
25. $72^\circ\ 14'$, $53^\circ\ 53'$, $53^\circ\ 53'$.
26. 90°, 45°, 45°.
27. Zij driehoek ABC gelijkbeenig, d. i. AB = AC gegeven. Verleng AB door A en deel hoek DAC midden door, zoo is hoek DAC = hoek ABC + hoek ACB. Deelen wij dit door twee, zoo is de hoek DAE (DAC is door AE midden door gedeeld) gelijk hoek ABC, derhalve AE evenwijdig aan BC.



28. Wanneer de tophoek stomp is.
29. Laat eene loodlijn vallen uit den top des driehoeks op de basis en zie verder vraagstuk 28 op blz. 2, het tweede geval.

30. *a.* Deel het supplement des gegeven tophoeks middendoor, dan zal elk dezer helften een der hoeken zijn aan de basis van gevraagden driehoek. De gegevens zijn dan eene zijde met twee aanliggende hoeken en dus de constructie te gemakkelijk om er ons bij op te houden.

b. Beschrijf aan dezelfde zijde der basis uit hare beide uiteinden cirkelbogen wier stralen gelijk aan de gegeven opstaande zijde zijn. Het snijpunt dezer bogen moet met de uiteinden der basis vereenigd worden.

c. Zet, van het hoekpunt des tophoeks af, op beide zijne beenen de gegeven opstaande zijde uit en vereenig de uiteinden dezer zijden.

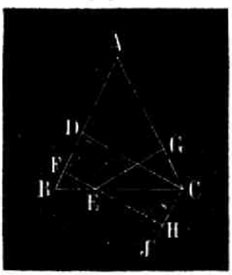
d. Daar beide hoeken aan de basis gelijk zijn, zijn hier eigenlijk gegeven de basis en de twee aanliggende hoeken.

De constructie is derhalve zeer gemakkelijk.

e. Richt op het midden der basis eene loodlijn op en maak die zoo lang als de gegeven loodlijn. Vereenig het toppunt dezer loodlijn met de uiteinden der basis.

f. Neem eene willekeurige lijn. Richt in een willekeurig punt dier lijn eene loodlijn op die lijn op en maak die zoolang als de gegeven loodlijn. Beschrijf uit het toppunt dier loodlijn met de opstaande zijde als straal een' cirkelboog, en vereenig de snijpunten van dezen boog en de eerst aangenomen lijn met het middelpunt van den beschreven boog.

31. Zij gegeven dat AB gelijk BC zij: CD loodrecht op AB, EF loodrecht op AB, EG loodrecht op AC sta; dan is, zoo wij EF door E verlengen en CJ evenwijdig aan AB trekken,



$$\triangle EGC \cong \triangle CEH.$$

Want hoek ECH = hoek ABC = hoek BCA.

hoek EHC = 1 R = hoek EGC.

EC = EC.

Derhalve is ook EH = EG.

FE + EG is dus = FE + EH.

maar nu is FE + EH = DC;

(omdat AB evenwijdig aan CJ en $\angle$ D = $\angle$ F gelijk 1 R en derhalve FDCH een rechthoek is;) derhalve is ook FE + EG = DC.

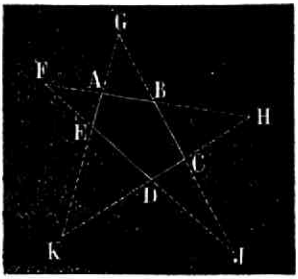
32. De loodlijn uit het hoekpunt des stompen hoeks op de overstaande zijde neergelaten valt binnen den driehoek en *kan* nergens anders vallen. Want gesteld dat *die* loodlijn buiten den driehoek viel, zoo zouden wij eenen driehoek verkrijgen gevormd door eene zijde des driehoeks, de tweede zijde en haar verlengde, en de loodlijn; deze driehoek zou één' R, een' stompen en eenen scherpen hoek bevatten.

33. Zij ABCD de gegeven vierhoek.

Trek BD en verleng die door B, dan is hoek ABE = hoek A + hoek ADB.

en hoek CBE = hoek C + hoek CDB: 't welk opgeteld geeft, hoek ABC = hoek A + hoek C + hoek ADC.

34. Zij ABCDE de gegeven vijfhoek. Verleng diens zijden zoo als dat voorgeschreven is: dan is hoek FEK + hoek KED = 2 R.



maar hoek FEK = hoek EFA + hoek FAE.

en hoek KED = hoek EGJ + hoek EJG, dus ook hoek EFA + hoek FAE + hoek EGJ + hoek EJG = 2 R.

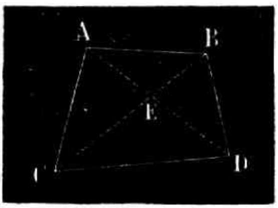
maar hoek FAE = hoek AHK + hoek AKH, dus hoek EFA + hoek AHK + hoek AKH + hoek EGJ + hoek EJG = 2 R.

35. Neem eene lijn van 13 meters lengte als basis aan. Beschrijf uit haar eene uiteinde met eene lijn van 7 meters lengte, en uit haar andere met eene lijn van 11 meters lengte als stralen, cirkelbogen aan denzelfden kant der basis; vereenig hun snijpunt met de uiteinden der basis.

36. Dit is onmogelijk. Zullen drie lijnen geschikt zijn om er eenen driehoek van samen te stellen, dan moeten zij aan twee voorwaarden voldoen. De som van twee dier lijnen, hoe ook gekozen, moet grooter zijn dan de overblijvende lijn. Het verschil van twee dier lijnen, hoe ook gekozen, moet kleiner dan de overblijvende lijn wezen.

37. Ook deze constructie is onmogelijk. De reden hiervan is opgesloten in de beantwoording van vraagstuk 36.

38. Zij ABCD een gegeven vierhoek dan is



AD $<$ AB + BD.
AD $<$ AC + CD.
BC $<$ AC + AB.
BC $<$ CD + BD.
——————— opt.

De dubbele som der diagonalen $<$ de dubbele som der zijden.

of ook, de som der diagonalen $<$ de som der zijden.

Ook is

$$AB < AE + EB$$
$$BD < BE + ED$$
$$CD < DE + EC$$
$$AC < AE + CE$$

Telt men deze vormen bij elkaar en deelt de som door twee zoo verkrijgt men

de halve som der zijden $<$ de som der diagonalen.

39. In dit vraagstuk is de grootste zijde gelijk de som der beide overigen: de constructie is derhalve onmogelijk. Zie vraagstuk 36.

40. Zes zijn gelijk en gelijkvormig.

De overige zes bij tegenoverstand aan de eerste zes gelijk en gelijkvormig.

41. Construeer eenen driehoek onder drie zijden die respectivelijk 26, 18,2, 13 meters lang zijn.

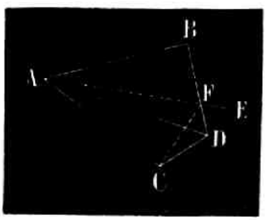
42. Men zal uit vraagstuk 36 gemakkelijk begrijpen, dat ook de verhoudingsgetallen der zijden aan dezelfde voorwaarden moeten voldoen als de zijden zelve. De voorliggende constructie is derhalve onmogelijk.

43. Beschrijf eenen gelijkzijdigen driehoek en deel een van diens hoeken middendoor. Zoo eene helft zal gelijk 30° of een derde rechte hoek zijn.

44. Verdeel een derde van eenen rechten hoek (zie 't vorig vraagstuk) in vier gelijke deelen.

45. Van de grootte van den hoek B. (Zie de figuur door Badon Ghyben bij de stelling in § 77 gebruikt.)

46. Laat gegeven zijn dat AB = AC is; dat de twee gegeven driehoeken ABD en ADC ook eene zijde AD gelijk hebben en dus zoo tegen elkander kunnen geplaatst worden, als dat in de figuur geschied is.



Tevens zij gegeven dat hoek DAC $<$ hoek DAB is.

Nadat wij onze gegeven driehoeken zoo hebben nevens elkander gelegd als dat in de figuur is geschied, trekken wij AE zoodanig dat hoek BAE = hoek CAF zij en trekken daarna FC. Daar nu de driehoeken AFC en ABF gelijk en gelijkvormig zijn (AB = AC, AF = AF, hoek BAF = hoek CAF) is FC = BF.

Natuurlijk is $DC < FD + FC$ of

$$DC < FD + BF$$

daar FC = BF is, of $DC < BD$.

47. *a.* Zij eene lijn AB gegeven als hypotenusa en eene kortere CD als rechthoekszijde.

Richt uit D op CD eene loodlijn op en beschrijf aan dezelfde zijde van CD uit C met AB als straal eenen cirkelboog die de opgerichte loodlijn natuurlijk ergens in E zal snijden.

Vereenig E met C dan is driehoek CED de gevraagde.

b. Zij eene lijn AB de gegeven hypotenusa en een scherpe hoek *p* de gegeven aanliggende hoek.

Trek uit A eene lijn die met AB een' hoek maakt gelijk hoek p en laat op deze lijn uit B eene loodlijn neder. Zij het voetpunt dezer loodlijn C geheeten dan is $\triangle$ ABC de gevraagde.

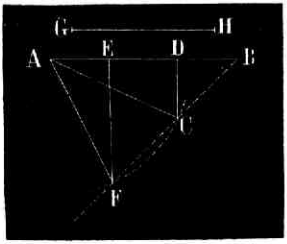
c. Zij eene lijn AB de gegevene rechthoekszijde en een hoek p de gegeven scherpe hoek.

Trek uit B eene lijn met AB een' hoek makende gelijk hoek p, en richt aan dezelfde zijde van de lijn AB, uit A op AB eene loodlijn op. Zij het snijpunt dezer lijnen C, dan is driehoek ABC de gevraagde.

d. Stel dat de lijnen DE en BC ons als rechthoekszijden gegeven zijn.

Richt uit B op BC eene loodlijn AB op, die gelijk aan de gegeven lijn DE moet zijn. Vereenig A en C dan is driehoek ABC de gevraagde.

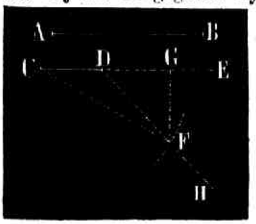
48. Zij GH als hypotenusa, AB als som der rechthoekszijden gegeven. Trek BF zóó, dat hoek ABF $= 45^0$ is. Beschrijf uit A met GH als straal eenen cirkelboog: laat uit de punten C en F waar deze boog de lijn BF snijdt, CD en FE loodrecht neer op AB en trek AF en AC. De driehoeken AEF en ADC zullen beide aan de vereischten voldoen. Men bewijst dit zeer gemakkelijk uit de gelijkbeenigheid der driehoeken BEF en BCD op deze wijze.



In driehoek BCD is hoek D recht geconstrueerd.

hoek B $= 45^0$ geconstrueerd; hoek C is derhalve ook $= 45^0$ en dus DC = BD. Tel hierbij AD = AD dan is DC + AD = AB = de gegeven som der rechthoekszijden. AC is gelijk aan de gegeven hypotenusa geconstrueerd.

49. Zij AB de gegeven hypotenusa CD het gegeven verschil der rechthoekszijden.



Verleng CD door D. Maak hoek EDH $= 45^0$. Beschrijf uit C met AB als straal eenen cirkelboog die DH ergens in F snijdt. Laat FG loodrecht op CE neer dan is driehoek CFG de gevraagde.

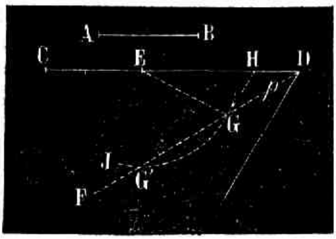
't Bewijs is gelijkvormig met dat van vraagstuk 48.

50. Laat twee lijnen AB en BC gegeven zijn als de som en het verschil der rechthoekszijden. Deel de som en het verschil der lijnen AB en BC middendoor en construeer onder deze beide helften als rechthoekszijden eenen rechthoekigen driehoek volgens vraagstuk 47, *d*.

51. Laat twee lijnen AB en CD gegeven zijn als de som der rechthoekszijden en der hypotenusa en 't verschil der rechthoekszijden en der hypotenusa.

Deel de som en 't verschil der beide gegeven lijnen midden door, dan vindt gij de som der rechthoekszijden en de hypotenusa. Construeer onder deze gegevens eenen rechthoekigen driehoek volgens vraagstuk 48.

52. Zij gegeven de lijn AB als basis, CD als omtrek, de hoek *p* als tophoek des gevraagden driehoeks.

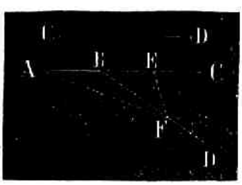


Zet AB op CD af, dan is ED de som der opstaande zijden des gevraagden driehoeks. Neem ED en trek uit D eene lijn DF een' hoek makende met ED = $\frac{1}{2}$ hoek p. Beschrijf uit E met AB als straal eenen cirkelboog en laat deze de lijn DF ergens in G snijden: maak hoek DGH = hoek HDG, dan zal driehoek GEH de gevraagde zijn.

't Bewijs hiervoor is gelijkvormig aan dat van vraagstuk 48 en wordt aangevangen met de gelijkbeenigheid van den driehoek HGD.

Aanmerking. Boog GJ zal nog in een ander punt G′ de lijn DF snijden en zoo zoude nog een andere driehoek G′EH′ kunnen geconstruecrd worden. Wij hebben dit kortheidshalve achterwege gelaten en zullen ook in 't vervolg van meer dan een antwoorden er slechts een geven, telkens echter opgeven, waar zulk een tweede antwoord kan gevonden worden.

53. Zij gegeven AB als 't verschil der opstaande zijden, CD als basis en een hoek *p* als tophoek des gevraagden driehoeks.



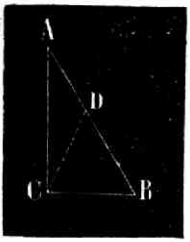
Trek BD zóó, dat hoek CBD gelijk het halve supplement van hoek *p* is. Beschrijf uit A met CD als straal eenen cirkelboog, die BD ergens in F zal snijden: trek AF: trek EF zóó, dat hoek EBF = hoek BFE zij, dan zal driehoek AFE de gevraagde zijn. 't Bewijs hiervoor is geheel gelijkvormig met dat van vraagstuk 52.

54. Zij hoek ABC de gegeven hoek,
AB de gegeven zijde en
BC de gegeven som der beide andere zijden. Trek AC en maak hoek CAD = hoek DCA, dan zal driehoek ABD de gevraagde zijn.

55. Dan zou men 't gegeven verschil der beide zijden op BC (zie de figuur van 't vorig vraagstuk) van B af uitzetten. Stel BC′ ware dat stuk. Men zoude dan AC′ trekken en $\angle$ C′AC gelijk maken aan hoek AC′C.

Het snijpunt der lijnen AC en CC′ zou dan het derde hoekpunt zijn van den gevraagden driehoek ABC.

56. Zij gegeven hoek ABC = R.
hoek DAC = 30°.



Trek uit C eene lijn die met BC eenen hoek maakt gelijk hoek B, dan is hoek BDC = hoek DCB = hoek DBC = 60°.
en BD = DC = BC.
Ook is dan hoek ADC = 120°, hoek ACD = hoek CAD = 30°. Derhalve is driehoek ACD gelijkbeenig. Is nu AD = BD en BD = BC = DC dan is ook AB = 2 BC.

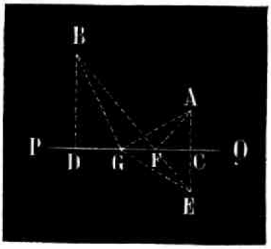
57. Zij gegeven dat in driehoek ABC, EB = DC = AF zij; AB = BC = AC zij; BF derhalve = EC = AD zij; wanneer dan DE, EF en FD getrokken zijn zoo is

drieh. DEC $\cong$ drieh. BFE $\cong$ drieh. ADF;
want hoek C = hoek B = hoek A,
CD = BE = AF,
CE = BF = AD.
Derhalve is ook DE = EF = FD of driehoek DEF gelijkzijdig.

58. Zij gegeven de lijn PQ en laat A en B de punten zijn aan ééne zijde dier lijn.

Laat uit A en B loodlijnen op PQ neder. Verleng AC door C, tot zoolang CE = AC zij.

Trek BE en AF dan zal F 't gevraagde punt zijn: want hoek BFD = hoek CFE, maar hoek CFE = hoek AFC.



(daar driehoek AFC en CFE gelijk en gelijkvormig zijn). Derhalve is ook hoek BFD = hoek AFC.

Het bewijs, waarom driehoek AFC gelijk en gelijkvormig met driehoek CFE is, zij den lezer overgelaten.

59. Onder dezelfde gegevens als in vraagstuk 58 zal het punt F dat wij daar vonden, ook in dit vraagstuk het gevraagde zijn.

Want stel eens dat het niet zoo en een punt G 't gevraagde ware dan zoude, zoo men GB, GA, GE trok, driehoek GAC $\cong$ driehoek GEC zijn en dus GA = GE wezen.

Verder zoude $BG + GA < BF + FA$

of $BG + GE < BF + EF$

moeten zijn, d. i. in driehoek BGE zou

$BG + GE < BE$ moeten wezen,

't geen blijkbaar onzin is.

60. Wanneer men de toppen der beide gegeven loodlijnen door eene lijn verbindt, en op het midden dezer lijn eene loodlijn opricht, zal het snijpunt dezer loodlijn en der gegeven lijn 't gevraagde wezen.

§ 78 — § 93.

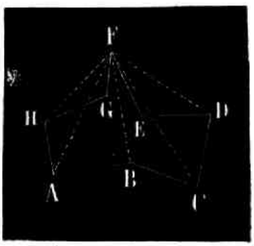
1. In eenen vierhoek één.
   » » vijfhoek twee.
   » » zeshoek drie.
   » » n-hoek, n-3, omdat men uit een hoekpunt eens willekeurigen veelhoeks diagonalen kan trekken naar alle hoekpunten uitgezonderd drie, het hoekpunt zelf waaruit men diagonalen trekt, en de beide aanliggende, waarmede 't eerstgenoemde punt door zijden vereenigd is.
2. In eenen vierhoek twee.
   » » vijfhoek vijf.
   » » zeshoek negen.
   » » n-hoek $\frac{1}{2}\, n\, (n-3)$; wijl men uit elk hoekpunt van een' n-hoek $n-3$ diagonalen kan trekken zou men verwachten dat de gevraagde formule zou zijn $n\, (n-3)$. Telkens vallen er echter twee der diagonalen op elkander, want een diagonaal van A naar B is dezelfde als van B naar A; en derhalve verandert de formule in degene die wij gegeven hebben.
3. Omdat in de zoo even genoemde formule $\frac{1}{2}\, n\, (n-3)$ een der factoren gelijk 0 wordt.

4. 20 R.
5. 6 R.
6. Niets.
7. 55° 18′ 34″.
8. 0.
9. — 1 R.
10. In een' achthoek. Immers in een n hoek is de som der hoeken $=$ $(n-2) \times 2$ R, hier $=$ 12 R. Deelt men deze vergelijking door 2 R, zoo verkrijgt men $n-2 = 6$, of $n = 8$.
11. In geenen veelhoek. De som der supplementen is altijd $=$ 4 R.
12. In eenen zevenendertighoek. (Zie vr. 10).
13. In een n hoek is de som der hoeken $+$ de som der compl. hoeken $=$ n R. Trek hiervan af de som der hoeken $= (n-2)$ 2 R $= (2n-4)$ R, zoo blijft er voor de som der compl. hoeken $(-n+4)$ R $= -9$ R, waaruit volgt $n = 13$.
14. Respectivelijk 54°, 72°, 90°, 126°, 162°, 180°, 216°.

    Aanmerking. Een zevenhoek met deze hoeken is een zeshoek met eenen inspringenden hoek.
15. Die supplementen zijn dus respectivelijk 24°, 48°, 72°, 96°, 120°, en de daarbij behoorende hoeken respectivelijk:

    156°, 132°, 108°, 84°, 60°.
16. In dit vraagstuk zijn de supplementshoeken resp. — 20°, 160°, — 40°, 140°, 120°: de hoeken zelve respectivelijk 200°, 20°, 220°, 40°, 60°.
17. Die complementshoeken bevatten dus respectivelijk — 15°, — 20°, — 25°, — 30°, — 35°, — 55°.

    De daarbij behoorende hoeken zijn respectivelijk 105°, 110°, 115°, 120°, 125°, 145°.
18. Nu zijn die complementshoeken respectivelijk — 24°, — 36°; + 60°, — 48°, — 60° — 72°, waarbij hoeken behooren die respectivelijk 114°, 126°, 30°, 138°, 150°, 162° groot zijn.
19. In een' vierhoek één. In eenen vijfhoek twee. In eenen zeshoek drie. In eenen n-hoek $n-3$. Want een n hoek bevat $(n-2)$ 2 rechte hoeken; men kan daarvan $n-2$ gestrekte hoeken maken en dus op zijn hoogst slechts $n-3$ inspringende hoeken.
20. De achthoek ABCDEFGH bestaat uit



drieh. AFH + drieh. ABF + drieh. BFC + drieh. FCD — drieh. HGF — drieh. FED.

21. In eenen vierhoek met eenen inspringenden hoek en in veelhoeken, wier inspringende hoeken op elkander volgen.

22. Neem eene lijn AB van 60 meters lengte: trek uit B eene lijn BC zóó, dat hoek ABC gelijk 110° zij, maak BC 50 meters lang: trek uit C eene lijn CD zóó, dat hoek BCD gelijk 105° zij: maak CD 40 meters lang: trek uit D eene lijn DE zóó, dat hoek CDE gelijk 140° zij: maak DE 30 meters lang: trek ten slotte nog EA, zoo zal veelhoek ABCDE de gevraagde zijn.

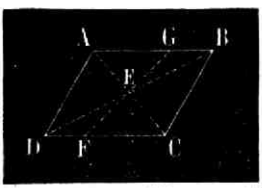
23. Neem als basis eene lijn AB van 60 meters lengte. Beschrijf op AB eenen driehoek ABC onder de opstaande zijden BC gelijk 50 meters AC = 84 meters. Beschrijf even zoo op AC eenen driehoek ACD onder de opstaande zijden AD = 79 m. en CD = 40 m.; eindelijk eenen driehoek ADE op AD onder de opstaande zijden AE = 63 m. DE = 30 m. De figuur ABCDE zal dan de gevraagde vijfhoek zijn.

24. Neem eene lijn AB van 60 m. lengte en beschrijf daarop drie driehoeken: den eersten onder de opstaande zijden BC = 50 m. en AC = 84 m. den tweeden onder de opstaande zijden AD = 79 m. BD = 78 m: den derden onder de opstaande zijden AE = 63 m. BE = 92 m. Vereenig D met E en C zoo zal ABCDE gevraagde vijfhoek zijn.

25. Indien een hoek gegeven is gelijk 31° 20′ 45″, zoo is de daartegen overstaande hoek ook 31° 20′ 45″. De beide overige hoeken zullen ieder 148° 39′ 15″ groot zijn.

26. In dit parallelogram zullen de twee stompe hoeken, ieder 108° 30′, de twee overige ieder 71° 30′ zijn.

27. Elke lijn getrokken door het snijpunt der diagonalen van een parallelogram, verdeelt het op de gevraagde wijze.



Laat bijv. in het parallelogram ABCD door het snijpunt der diagonalen E getrokken zijn de willekeurige lijn FG dan is gemakkelijk te bewijzen dat driehoeken AGE en EFC, driehoeken DEF en EBG gelijk en gelijkvormig zijn.

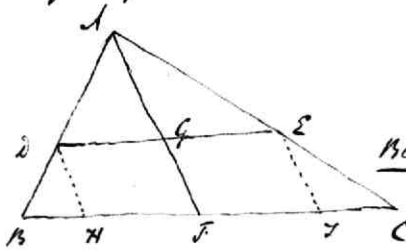
Wij weten dan van de twee vierhoeken AGDF en BGFC.

AD = BC.
DF = BG.
AG = FC.

hoek BAD = hoek BCD en hoek ADC = hoek ABC.
deze vierhoeken zijn derhalve gelijk en gelijkvormig.

28. Om n punten in onderlinge ligging te bepalen zijn $2n-3$ gegevens noodig Ter bepaling van de onderlinge ligging van 10 punten moeten wij derhalve 17 gegevens hebben.

Nieuw bewijs voor de stelling:
Wanneer in een driehoek eene lyn getrokken wordt zoodanig dat zy twee der zyden in evenredige stukken verdeelt, zal deze lyn parallel aan de 3e wezen.



Geg: $AD : DB = AE : EC$

Th: $DE \parallel BC$

Bew. Trek een will. lyn AF en uit D en E lijnen DH en $EI \parallel AF$

$\therefore$ $AB : BD = AF : DH$ en
$AC : CE = AF : EI$

waaruit $DH = EI$. dus is $DHEI$ een parall. en derhalve $DE \parallel HI$ of BC.

§ 94 — § 120.

1. Die grootste gemeene maat is eene lijn van 39 m. lengte.
2. Men zal in dit vraagstuk tot grootste gemeene maat verkrijgen 0,017 meters.
3. Zoek eerst de grootste gemeene maat tusschen 5,2 m. en 6,24 m. Deze is 1,04 m.

Zoek dan de grootste gemeene maat tusschen 1,04 m. en 2,21. Deze is 0,13 m.

Dus is ook de grootste gemeene maat der drie gegeven lijnen 0,13 m.

4. 5,72 en 44,85 meters.
5. 1202,9 en 1363,9 meters.
6. Die betrekkingswijzer zal zijn 3. 7. 15. 1. 288. enz.
7. Hoe men uit de betrekkingswijzers de verhoudingen opmaakt, leert ons Badon Ghyben § 94. Gebruiken wij de twee eerste wijzergetallen in ons vraagstuk, zoo vinden wij de verhouding 22 : 7. Gebruiken wij de drie eerste, zoo vinden wij de verhouding 333 : 106. Zoo wij de vier eerste gebruiken, vinden wij de verhouding 355 : 113.
8. Wanneer een gewone breuk die tot noemer n heeft, herleid zijnde, eene repeteerende tiendeelige breuk oplevert, waarvan de repeteerende groep uit $n-1$ cijfers bestaat, zal dit altijd 't geval zijn, omdat bij het deelen zich alle mogelijke resten voordoen van $n-1$ af tot 1 toe.
9. Elke breuk die tot noemer n heeft, en, herleid zijnde, eene tiendeelige repeteerende breuk oplevert, waarvan de repeteerende groep uit $n-1$ cijfers bestaat, zal 't zelfde verschijnsel opleveren. Bij voorbeeld alle breuken die 19 tot noemer hebben. De rep. groep geeft dan zulk een getal.
10. Alleen tusschen gelijksIachtige grootheden die onderling meetbaar zijn.
11. Zet op een been van den willekeurigen hoek A van A af, Am uit gelijk aan de gegeven lijn m, en An gelijk aan de gegeven lijn n. Zet daarna op het andere been van denzelfden hoek van A af, Ap uit gelijk aan de gegeven lijn p. Trek mp en hieraan door n de lijn nq evenwijdig, zoo zal Aq de gevraagde vierde evenredige tot m, n en p zijn. Het punt q is natuurlijk het snijpunt van nq en Ap.

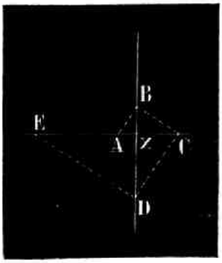
De vijf volgende constructies zijn aan deze volkomen gelijkvormig.

Van de zes vierde evenredigen in dit vraagstuk gezocht zal de eerste aan de tweede, de derde aan de vierde, de vijfde aan de zesde gelijk zijn.

12. Zet in de figuur die in vraagstuk 11 is voorgeschreven van A af op An uit, Am gelijk de gegeven lijn m, en An gelijk de gegeven lijn n. Van A af op Ap moet gij uitzetten An' gelijk de gegeven lijn n. Trek mn' en door n eene aan mn' evenwijdige lijn np, zoo zal Ap de gevraagde derde evenredige zijn.

De tweede constructie is volkomen aan deze eerste gelijkvormig. Gesteld dat m en n lijnen zijn van verschillende lengte, zoo kunnen deze derde evenredigen niet even groot zijn.

13. Laat twee lijnen elkander rechthoekig in X snijden. Zij AX de gegeven lijn *m*, BX de gegeven lijn *n*. Trek AB en maak hoek ABC recht; maak daarna hoek BCD recht en ga zoo voort dan zal



AX : BX = BX : CX.

BX : CX = CX : DX zijn.

en dus ook AX : BX = BX : CX = CX : DX.

14. De zijden om den verdeelden hoek moeten in dezelfde reden tot elkander staan als de stukken waarin de over den hoek staande zijde verdeeld is. De som der zijden om den verdeelden hoek is 18 m., dus zijn zij respectivelijk 7,5 en 10,5 m. lang.

15. Gebruik makende van Badon Ghyben § 98 vinden wij, de opstaande zijden des gegeven driehoeks zijn respectivelijk 10 en 6 m.

16. Beschrijf op eene basis AB die 84 m. lang is, eenen driehoek ABC wiens opstaande zijden tot elkander in reden zijn moeten als 11 : 3. Verdeel den hoek C in twee gelijke deelen dan zal deze deellijn de lijn AB in de gewenschte reden verdeelen.

17. Beschrijf op dezelfde lijn AB als in vorig vraagstuk bedoeld is een' driehoek ABC waarvan AC : BC = 11 : 4 staat. Verleng AC door C en verdeel het dus gevormde supplement van hoek BCA in twee gelijke deelen. Waar deze deellijn de door B verlengde lijn AB ontmoet vinden wij een punt D zóó, dat

DA : DB = 11 : 4 staat en volgens eene bekende eigenschap der evenredigheden is dus ook

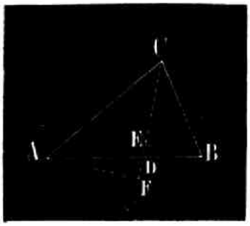
DA — DB : DA = 11 — 4 : 11.

of AB : AD = 7 : 11.

DA is dus de gevraagde lijn.

18. Op 1320 meters afstand van de minst verwijderde torenspits.

19. Laat ABC de gegeven driehoek zijn en hoek C door CF middendoorgedeeld worden. Laat hoek BED gelijk hoek AFD gelijk recht zijn.



dan is drieh. ECB ∾ △ AFC want

hoek ACD = hoek DCB

hoek AFC = hoek CEB.

dus is BE : AF = BC : AC. Maar ook is

drieh. ADF ∾ △ EDB.

want hoek ADF = hoek EDB.

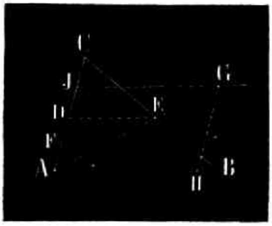
hoek AFD = hoek DEB.

dus is BE : AF = DB : AD.

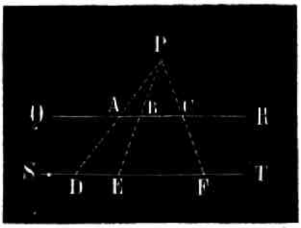
en ook DB : AD = BC : AC.

20. Deel hoek A middendoor door eene lijn die BC ergens in E snijdt. Trek DE evenwijdig aan AB, dan zal deze DE de gevraagde lijn zijn.

21. Laat ABC de gegeven driehoek zijn. Neem van A af op AC een willekeurig liefst klein stuk AF aan. Maak AJ = 3 AF, AH = 5 AF. Trek JG evenwijdig aan AB, GH evenwijdig aan AC. Trek nog AG, en DE evenwijdig aan AB dan zal deze DE de gevraagde lijn zijn.



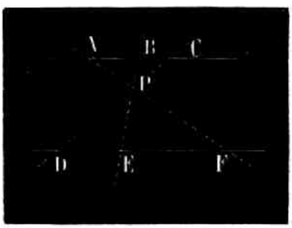
22. Stel: dat QR evenwijdig zij aan ST, dan is



driehoek PAB ∾ driehoek PDE
want hoek PAB = hoek PDE en
hoek APB = hoek DPE: dus is
AB : DE = PB : PE. — Ook is
driehoek PBC ∾ driehoek PEF
want hoek BPC = hoek EPF.
hoek PCB = hoek PFE.
dus is BC : EF = PB : PE.

en ook AB : DE = BC : EF.

23. Laat de figuur aan het voorgeschrevene voldoen, dan is drieh. ABP ∾ drieh. FEP.

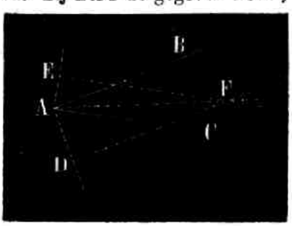


dus AB : EF = BP : PE. Maar ook is driehoek BCP ∾ drieh. EDP
dus BC : ED = BP : PE.

dus ook AB : EF = BC : ED of
AB : BC = EF : ED.

't bewijs voor de gelijkvormigheid der genoemde driehoeken kunnen wij met eene verwijzing naar Vr. 22 afdoen.

24. Zij BAC de gegeven hoek; richt uit A op CA en AB loodlijnen op aan die zijde dier lijnen waar het gevraagde punt wordt verwacht. Zet op AD uit A een willekeurig stuk uit, en uit A op AE een stuk dat tot het vorige in reden is als 4 : 7. Trek EF evenwijdig aan AC, DF evenwijdig aan AB, en trek dan nog AF. Ieder punt der lijn AF zal aan 't vereischte voldoen.



25. Het moet, na de oplossing van vraagstuk 24, zeer gemakkelijk vallen

den hoek CAB door eene lijn AD zoo in twee stukken te deelen, dat de afstanden van elk punt der lijn AD tot AB en AC tot elkander in reden zijn als 2 : 5. Evenzoo kunnen wij eene lijn CE vinden zoodanig dat de afstanden van elk punt dier lijn tot AC en BC in reden zijn als 5 : 7. Het snijpunt van AD en CE zal 't gevraagde punt P zijn.

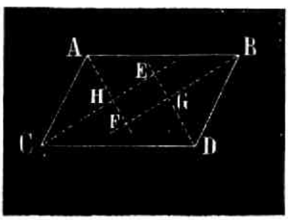
26. Trek eene diagonaal in een willekeurig quadraat, en zoek dan 't verschil tusschen die diagonaal en de zijde van 't aangenomen vierkant. Een vierde evenredige gezocht tot dit gevonden verschil, 't gegeven verschil en de zijde van 't aangenomen vierkant zal de zijde van het gevraagde quadraat zijn.

27. Trek in eenen rechthoek waarvan de basis tot de hoogte staat als 5 : 3 een' diagonaal, en zoek 't verschil van deze diagonaal en de langste zijde des aangenomen rechthoeks.

Zoek dan eene vierde evenredige tot dit gevonden verschil, 't gegeven verschil en de langste zijde des aangenomen rechthoeks.

Een rechthoek geconstrueerd onder deze vierde evenredige als basis en $\frac{3}{5}$ dezer lijn als hoogte zal de gevraagde zijn.

28. Laat gegeven zijn dat fig. ABCD een parallelogram is en dat verder



hoek CAH = hoek HAB
„ ABF = „ FBD
„ BDE = „ EDC
„ DCE = „ ECA is.

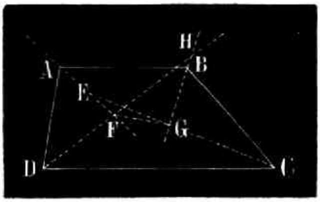
Daar hoek CAB + hoek ABD = 2 R is,
is ook hoek FAB + hoek FBA = R.
ergo ook hoek AFB = R.
Ook is hoek ACD + hoek CDB = 2 R, of
hoek ECD + hoek CDE = R.
en hoek CED derhalve R.

Evenzoo kunnen wij vinden
hoek AHC = hoek BGD = R.
dus ook hunne overstaande
hoek EHF = hoek EGF = R.

Wij weten derhalve dat van den vierhoek EHFG elke hoek recht is; q. e. d.

29. Men neme eerst een parallelogram dat den gegeven hoek en de gegeven verhouding van zijden om dien hoek heeft, en zoeke in die figuur 't verschil tusschen de langste hoekpuntslijn en langste zijde. Zoek dan een vierde evenredige tot dit gevonden verschil, 't gegeven verschil en de langste zijde van 't aangenomen parallelogram. Construeer op deze vierde evenredige als langste zijde een parallelogram gelijkvormig aan 't gegeven parallelogram.

30. Laat de figuur aan de vereischten voldoen, dan is onze thesis
hoek FEG = hoek FHG.



Daar hoek BAD + hoek ADC = 2 R is weten wij, even als in vraagstuk 28, dat hoek EFD = R is; evenzoo, daar hoek ABC + hoek BCD = 2 R is, dat hoek BGC recht is.

Beschouwen wij nu de hoeken waarvan in de thesis gesproken wordt, dan zien wij, dat zulks twee hoeken zijn wier beenen loodrecht op elkander staan. Zulke hoeken zijn, zooals wij vroeger gezien hebben, gelijk, zoo de hoekpunten aan dezelfde zijde der lijn gelegen zijn, die de snijpunten der beenen verbindt; en dit is hier het geval, want E en H liggen aan eene zijde der lijn FG.

31. Telt men bijeen $\alpha = \alpha'$

$$\beta = \beta'$$

$\gamma = \gamma'$ zoo verkrijgt men de identieke vergelijking $\alpha + \beta + \gamma = \alpha' + \beta' + \gamma'$: d. i. welke waarde men ook geve aan α, β, γ, deze vergelijking zal steeds waar blijven.

Telt men bijeen $\alpha = 180^\circ - \alpha'$

$$\beta = \beta'$$

$\gamma = \gamma'$ zoo verkrijgt men de niet identieke vergelijking $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ - \alpha' + \beta' + \gamma'$: d. i. alléén zoo $\alpha = 180 - \alpha'$ is (of $\alpha = 90^\circ$ is) is deze vergelijking waar.

Telt men bijeen $\alpha = 180^\circ - \alpha'$

$$\beta = 180^\circ - \beta'$$

$\gamma = \gamma'$ zoo verkrijgt men de valsche vergelijking $\alpha + \beta + \gamma = 360^\circ - \alpha' - \beta' + \gamma'$. Want wij zouden dit ook zoo kunnen schrijven:

$$\alpha + \beta + \gamma - \gamma' + \alpha' + \beta' = 360^\circ.$$

Wij weten echter: $\alpha + \beta + \gamma + \gamma' + \alpha' + \beta' = 360^\circ$. Dus is de gevonden vergelijking valsch.

Telt men bijeen $\alpha = 180^\circ - \alpha'$

$$\beta = 180^\circ - \beta$$

$\gamma = 180^\circ - \gamma'$ zoo verkrijgt men de valsche vergelijking $\alpha + \beta + \gamma = 540^\circ - \alpha' - \beta' - \gamma'$. Want wij zouden dit ook zoo kunnen schrijven:

$\alpha + \beta + \gamma + \alpha' + \beta' + \gamma' = 540^\circ$. Wij weten echter dat $\alpha + \beta + \gamma + \alpha' + \beta' + \gamma' = 360^\circ$ is. Dus is de gevonden vergelijking valsch.

32. Laat gegeven zijn

hoek ADG = hoek BEJ = hoek CFJ = R.

De som der hoeken van vierh.

BEHD = 4 R.

hoek BDH + hoek BEH = 2 R geg.

aft.

hoek B + hoek DHE = 2 R.

maar hoek GHJ + hoek DHE = 2 R.

dus ook hoek B = hoek GHJ.

In drieh. ADK en drieh. KFG is

hoek ADK = hoek KFG = R. geg.

hoek AKD = hoek FKG.

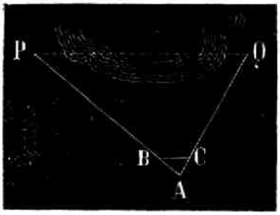
dus ook hoek DAK = hoek KGF.

maar hoek KGF = hoek HGJ: dus is ook

hoek DAK = hoek HGJ.

Wij weten derhalve van de driehoeken ABC en GHJ dat zij twee hoeken ieder in 't bijzonder gelijk hebben, en dus gelijkvormig zijn.

33. *Aanmerking.* In de figuur heb ik wel de verhouding van PA : QA. kunnen op papier brengen, maar, zoo als men lichtelijk begrijpt, niet die van AB : PA zonder in onduidelijkheden te vervallen.



Zij gegeven AP = 1720 m. AQ = 1290 m. AB = 68 m. AC = 51 m. BC = 89 m.

Daar wij nu bevinden dat AP : AQ = AB : AC staat, loopt BC evenwijdig aan PQ en is dus

drieh. APQ ∾ drieh. ABC, dus is

AB : BC = AP : PQ.

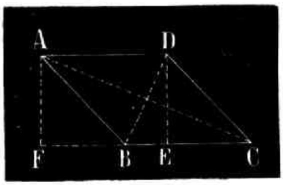
$68^m : 89^m = 1720^m : PQ.$

$PQ = 2251^m, 17647$ etc.

34. Deze driehoeken zijn gelijkvormig. Zij hebben éénen hoek gelijk, en de zijden om dien hoek zijn evenredig.

35. 84 meters.

36. Zij gegeven dat ABCD eene ruit zij en dat AF en DE beide loodrecht op BC staan en diens verlengde, dan is zeer zeker EC = BF en verder



$AC^2 = BC^2 + AB^2 + 2\ BC \times BF$

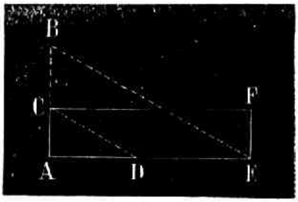
$BD^2 = DC^2 + BC^2 - 2\ BC \times EC$; $EC = BF$; $BC^2 = AD^2$. Substitueeren wij dit in de laatste vergelijking en tellen wij haar dan bij de vorige op zoo hebben wij

$AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2.$

37. 82. 72 meters.

38. Laat AC en AE de gegeven lijnen zijn.

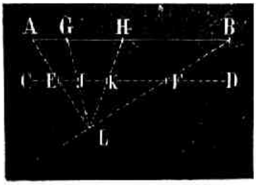
Construeer onder deze twee den rechthoek AEFC. Verleng AC en



geef AB eene willekeurige lengte. Trek BE, en door C eene lijn evenwijdig aan de pas getrokkene. Wegens de gelijkvormigheid van driehoek ABE en driehoek ACD zal

AC : AB = AD : AE staan.

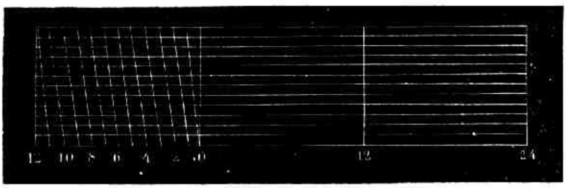
39. Laat AB de in G en H op gegeven wijze verdeelde gegeven lijn zijn.



Trek CD op willekeurigen afstand van AB aan AB evenwijdig. Zet op CD van uit een willekeurig punt E de gegevene te verdeelen lijn uit (EF). Trek AE en BF en verleng ze, tot zij elkander in L snijden. Trek LG en LH zoo zal in K en J de gegeven lijn EF op gevraagde wijze verdeeld zijn.

40. Trek uit een der uiteinden der gegeven lijn eene lijn die met haar eenen willekeurigen hoek maakt. Z t van het hoekpunt van dien hoek af op het laatst getrokken been 27 willekeurige doch onderling gelijke stukken af. Vereenig het punt waar wij ons dan bevinden met het nog vrije eindpunt der gegeven lijn. Het behoeft stellig wel geene aanduiding, door welke der 27 punten op de eerste constructielijn men de vier lijnen evenwijdig aan de laatst getrokkene moet trekken, ten einde de gegeven lijn in de gevraagde verhouding te verdeelen.

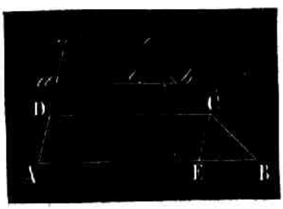
41.



42. Indien BF : *bf* = AF : *af* en CG : *cg* = GD : *gd* staat is FG gelijkstandig met *fg*.

43. Gelijkstandige lijnen zijn lijnen die in gelijkvormige figuren eveneens geplaatste punten vereenigen.

44. Zij gegeven AB : *ab* = BC : *bc* = CD : *cd* = AD : *ad* in de trapezia ABCD en *abcd*.



Trek in beide CE en *ce* evenwijdig aan AD en *ad*,

dan hebben wij dat AB : DC = *ab* : *dc* staat, of

AB—DC : *ab*—*dc* = DC : *dc*

en DC : *dc* = BC : *bc*.

dus is EB : *eb* = BC : *bc*.

ook BC : *bc* = CE : *ce* want CE = AD en *ce*=*ad* dus hebben wij EB : *eb* = BC : *bc* = CE : *ce*.

Derhalve zijn drieh. BEC en drieh. *bec* gelijkvormig en is hoek B = hoek *b*.

Ook is hoek BEC = hoek *bec* of wat 't zelfde is, daar AD en CE, *ad* en *ce* evenwijdig loopen,

hoek EAD = hoek *ead*.

Daar de gegeven figuren trapezia zijn, zijn dus ook de hoeken ADC en DCB respectivelijk gelijk de hoeken *adc* en *dcb*.

Nu zijn dus ook onze trapezia gelijkvormig, want al hunne hoeken zijn gelijk en hunne gelijkstandige zijden evenredig.

45. Neem de figuur van 't vorig vraagstuk en laat gegeven zijn de gelijkheid der hoeken en de evenredigheid der evenwijdige zijden.

Laat dan ook nu de lijnen CE en *ce* getrokken zijn evenwijdig aan AD en *ad*.

Bewijs nu de gelijkvormigheid der driehoeken CEB en *ceb* uit de gelijkheid der hoeken CEB en *ceb*, EBC en *ebc*. Uit die gelijkvormigheid besluiten wij dan tot de evenredigheid BC : *bc* = EB : *eb* of

BC : *bc* = AB—DC : *ab*—*dc*. Wij weten bovendien AB : *ab* = DC : *dc* = AB—DC : *ab*—*dc* en vinden uit de vereeniging dezer twee evenredigheden

BC : *bc* = AB : *ab* = DC : *dc*.

Evenzoo zouden wij kunnen vinden

AB : *ab* = DC : *dc* = AD : *ad*.

Dus zijn ook in deze trapezia de zijden evenredig en de hoeken gelijk; zij zijn derhalve gelijkvormig.

46. Als men geeft, dat van twee parallelogrammen één hoek gelijk is, zijn de overige hoeken ook gelijk.

En wanneer de aan de gelijk gegeven hoeken liggende zijden evenredig zijn, bestaat tusschen de twee overige zijden dezelfde reden.

47. De reden hiervan ligt even als in 't vorig vraagstuk in de gelijkheid van alle hoeken en de evenredigheid van alle gelijkstandige zijden.

48. Neem van P af, op elk der uit P naar de hoekpunten des gegevenen veelhoeks getrokken lijnen, stukken, die tot de lijnen, waarop zij worden afgezet, in verhouding zijn als 2 tot 7. Vereenig de uiteinden van al deze stukken op rij af.

49. Zoo zet men de stukken waarvan in 't vorig vraagstuk gesproken is van P af uit op elke der diagonalen die uit P naar de overige hoekpunten wordt getrokken, en op de twee aan den hoek P liggende zijden, terwijl men dan verder handelt als in vr. 48.

50. Trek uit het punt P lijnen naar al die hoekpunten des veelhoeks, waarmede het niet door een gedeelte eener zijde is vereenigd. Zet vervolgens de stukken, waarvan in vr. 48 is sprake geweest, af op alle lijnen die aan het punt P te zamen komen, en handel verder als in vr 48.

51. Zet de meermalen genoemde stukken van P af uit op alle lijnen, die men eerst uit P naar alle hoekpunten des veelhoeks getrokken heeft. Handel verder als in vr. 48.

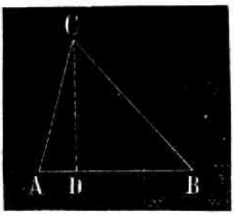
52. Trek uit een der uiteinden des gegeven omtreks eene willekeurige lijn waarop gij van het hoekpunt des pasgevormden hoeks af achter elkander de zijden des gegeven driehoeks moet uitzetten. Vereenig daarop het punt waar wij ons dan bevinden met het nog vrije uiteinde des gegeven omtreks, en verdeel door middel van evenwijdige lijnen den geg. omtrek in dezelfde reden, als het gebruikte stuk der willekeurige lijn.

Wij hebben dan den gegeven omtrek in de zijden verdeeld, onder welke wij den gevraagden driehoek moeten construeeren.

53. Van den driehoek gevormd door den beganen grond, den ladder en den muur weten wij dat één hoek recht, de hypotenusa 17 voet, ééne der rechthoekszijden 15 voet lang is.

De andere rechthoekszijde is derhalve 8 voet lang.

54. In driehoek ABC zij AC = 13, BC = 15 AB = 14 meters.



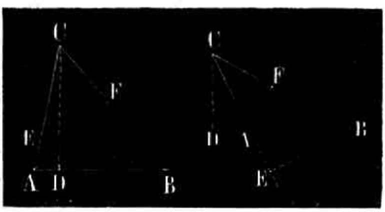
Zij tevens hoek CDB = R dan is

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\ AB \times BD.$$
$$169 = 196 + 225 - 28\ BD.$$
$$28\ BD = 252.$$
$$BD = 9\ \text{m}.$$

Na weinig berekening volgt dat AD = 5, CD = 12 meters is.

55. In dezen stomphoekigen driehoek valt de loodlijn uit C op 't verlengde van AB, 0,5 m. van A af. De loodlijn zelve is dus 1,93649m etc.

56. Zij gegeven in figuur 1, AC = 13, BC = 15, AB = 14 meters,



dan hebben wij in vr. 54 gevonden, is CD = 12 meters; ook zullen wij na berekening vinden dat BE = 12,92307 etc. AF = 11,2 meter is.

In figuur 2 zij gegeven AC = 2, BC = 4, AB = 3 meters, dan hebben wij gevonden in vr. 55 CD = 1,93649 etc. meters; ook zullen wij na berekening vinden BE = 2,90473 etc. AF = 1,45236 etc. meters.

57. Zij de gebroken lijn ABCD de koers van het schip. Zij AB 400, BC 220, CD 150 mijlen lang.

Verleng BC aan beide zijden en trek DG evenwijdig aan EF. Laat uit A op DG, en uit D op EF eene loodlijn neer, dan is driehoek BFA ∽ driehoek DEC; beide zijn gelijkbeenige rechthoekige driehoeken,

daar hoek FBA = hoek DCE = 45°, hoek F = hoek G = hoek E = R geconstrueerd is. Nu is dus $AB^2 = 2\ BF^2 = 2\ FA^2$ & $DC^2 = 2\ ED^2 = 2\ EC^2 = 2\ GF^2$.
$80000 = BF^2 = FA^2$ $11250 = ED^2 = EC^2 = GF^2$
282,84271 etc. = BF = FA.
106,06601 etc. = ED = EC = GF.

Nu is $AD^2 = AG^2 + DG^2$.
„ $= (AF + FG)^2 + (EC + CB + BF)^2$
„ $=$ 388,90872 etc. $^2 +$ 508,90872 etc. ^{2}.
„ $=$ 522019,8217840768 etc.
derhalve AD = 722,50939 etc. mijlen.

58. Dit vraagstuk wordt natuurlijk op bijna dezelfde wijze berekend als het vorige.

Het antwoord zal zijn 424,00489 etc. mijlen.

59. Met behulp der formule

$$y = \frac{2}{c} \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$$ vinden wij

voor de loodlijnen vallende op de zijden, die respectivelijk 84, 91, 105 meters lang zijn, 87,30533 etc., 80,58954 etc., en 69,84427 etc. meters.

60. Op dezelfde wijze vinden wij dat de loodlijnen vallende op de zijden, die respectivelijk 32, 41, 49 meters lang zijn, 40,72391 etc., 31,78452 etc., 26,59521 etc. meters lang zijn.

§ 121 — § 141.

1. Neen. De lengtegraden worden over den geheelen bol, behalve alleen aan de linie gemeten op kleine cirkels: de breedtegraden altijd op groote cirkels. Alleen dan derhalve, wanneer Amsterdam op den evenaar lag, zouden 10 breedtegraden van daar uitgemeten even lang als 10 lengtegraden van daar uitgemeten kunnen zijn.

In elk ander geval zullen de lengtegraden graden eens kleinen cirkels, de breedtegraden graden eens grooten cirkels zijn, en dus onmogelijk gelijk kunnen zijn.

2. Het antwoord ligt opgesloten in 't antwoord op 't vorig vraagstuk. Alleen dan wanneer de lengtegraden op den evenaar worden gemeten.

3. Dat Amsterdam even ver van Moscou als van Constantinopel ligt. Men kan zich gemakkelijk voorstellen dat door Amsterdam en Constantinopel en ook door Amsterdam en Moscou een groote cirkel gebracht wordt.

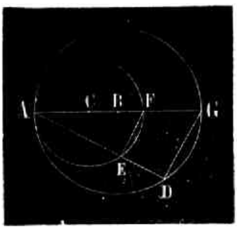
Daar nu de lijnen waarvan gesproken is, elkander in 't middelpunt der aarde, en dus ook in 't middelpunt der twee groote cirkels die beschreven zijn, ontmoeten, en, zooals de opgave luidt, daar gelijke hoeken vormen, behoeven wij slechts te verwijzen naar de stelling: In denzelfden cirkel, of in cirkels met gelijke stralen beschreven, worden gelijke hoeken aan 't middelpunt door gelijke bogen onderspannen.

4. Laat de twee cirkels der figuur de gegevene zijn, en NR de lijn wezen van welke wij bewijzen moeten NO = QR. Laat daartoe MP loodrecht op NR neer, dan is

OP = PQ en tevens NP = PR.

Trekken wij de eerste vergelijking van de laatste af zoo verkrijgen wij q. e. d.

5. Laat de figuur geconstrueerd zijn zoo als dat is voorgeschreven, zoo zal AE de vierde evenredige tot AB, AC en AD zijn.



Want trekken wij EF en DG, zoo is

hoek D = hoek E = R.

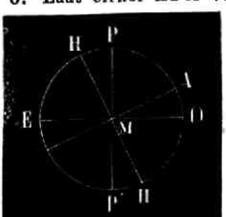
hoek A = hoek A.

en dus driehoek ADG ∞ driehoek AEF.

en dus staat AG : AF = AD : AE, of, indien wij de termen der eerste reden door twee deelen

AB : AC = AD : AE: q. e. d.

6. Laat cirkel APH verbeelden eene meridiaan gebracht door eene gegevene plaats A. Laat de lijn EQ den evenaar, PP′ den as der aarde, de lijn HH′ den horizon der plaats A verbeelden. PH is dan de poolshoogte AQ de breedte der plaats A. Daar nu zoowel hoek HMA als hoek PMQ recht is, blijft, zoo wij van beide den hoek PMA aftrekken, hoek HMP = hoek AMQ of boog HP = boog AQ. (Zie vr. 3 dezer paragraaf.)



7. Richt midden op eene lijn van 5 meters lengte eene loodlijn lang 0,5 meters op. Vereenig het toppunt dezer loodlijn met de uiteinden der eerstgenoemde lijn. Het snijpunt der loodlijnen die ik op 't midden der beide pas getrokken lijnen opricht zal 't middelpunt des gevraagden cirkels zijn.

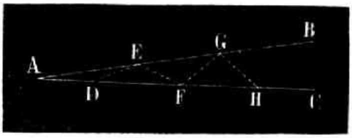
8. Richt midden op eene lijn van 7 meters lengte eene loodlijn lang 17,5 meters op. Het toppunt dezer loodlijn en de beide uiteinden der eerst aangenomen lijn zullen nu de drie punten zijn waardoor een

cirkel zal moeten gebracht worden. Hoe dit geschiedt, mogen wij na 't vorige vraagstuk bekend veronderstellen.

9. Ja; de drie punten waardoor men in dit geval eenen cirkel zal moeten brengen, zullen niet in eene rechte lijn liggen, en derhalve de constructie mogelijk zijn.

10. 0,14614 etc., 9,85386 etc. meters.

11. De oplossing die ik ga geven is geene wiskunstige. Zij komt daarin overeen met de oplossingen die voor dergelijke vraagstukken worden gegeven.



Neem op een been van eenen kleinen scherpen hoek BAC, wiens been AB om het punt A zich moeten kunnen bewegen, eene willekeurige lijn AD. Beschrijf uit D met deze AD als straal eenen boog, die AB ergens in E zal snijden; trek DE. Beschrijf nu weder uit E met ED als straal eenen cirkelboog die AC ergens in F zal snijden; trek EF.

Laat ook FG en GH op dezelfde wijze geconstrueerd = AD zijn. Nu moet de hoek BAC zoo ver geopend of gesloten worden dat hoek HGB = den genoemden te verdeelen hoek zij. (Wij vooronderstellen daarbij, dat de punten E, F, G, H langs AB en AC kunnen verschuiven.) Zoodra hoek HGB = den gegeven hoek is, is hoek BAC = $1/_5$ des gegeven hoeks. Het waarom hiervan zal men zeer gemakkelijk uit de aangehaalde paragrafen kunnen vinden.

12. Laat uit het middelpunt des gegeven cirkels eene loodlijn neer op de gegevene lijn of haar verlengde. Daar waar deze loodlijn of haar verlengde den cirkelomtrek snijdt, zal 't raakpunt der gevraagde raaklijn zijn; en men zal die lijn zelve vinden door uit genoemd snijpunt eene lijn te trekken evenwijdig aan de gegevene lijn.

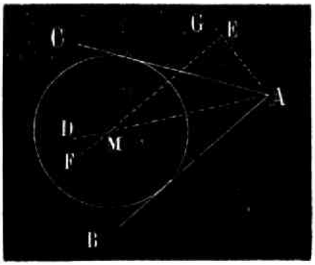
13. De halve cirkel.

14. Segmenten grooter dan de halve cirkel zijn grooter, segmenten kleiner dan de halve cirkel zijn kleiner dan de sectoren, die respectivelijk bij de bogen der segmenten behooren. 't Verschil is in beide gevallen een gelijkbeenige driehoek, gevormd door de koorde van het segment en twee stralen getrokken naar de uiteinden dezer koorde.

15. Is die overstaande hoek scherp, recht of stomp, zoo zal zijn hoekpunt respectivelijk buiten, op, binnen den cirkelomtrek vallen.

16. Elk punt der lijn die den gegevenen hoek middendoor deelt zal men als middelpunt kunnen aannemen van eenen cirkel die aan 't gevraagde voldoen zal. De straal zal altijd de loodlijn zijn, uit het gekozen punt op een der beenen, natuurlijk onverschillig welk, des gegeven hoeks neergelaten.

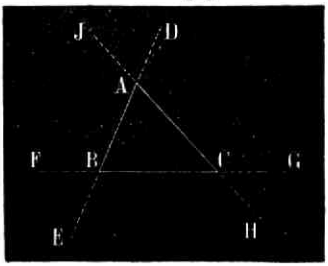
17. Laat AC en AB de in stelling gegeven lijnen zijn: verleng ze zoo noodig tot zij elkander in A snijden; deel den hoek A door de lijn



AD middendoor. Richt aan die zijde van AB, waar het middelpunt des nieuwen cirkels verwacht wordt, eene loodlijn op AB uit A op, en maak daarvan het stuk AE = den gegeven straal. Trek EF evenwijdig aan AB, dan zal M 't middelpunt des gevraagden cirkels zijn.

18. De lijnen die de drie hoeken eens driehoeks middendoor deelen snijden elkander in een punt. Dat punt is in elken driehoek het middelpunt van den zoogenaamden ingeschreven cirkel.

19. Laat ABC de gegeven driehoek zijn.



Verleng elke zijde naar twee kanten en deel de hoeken DAC, ACG, HCB, CBE, ABF, BAJ middendoor; van de dus verkregen deellijnen zullen de twee eerste in hun snijpunt ons het middelpunt verschaffen voor eenen cirkel die DA, AC, CG zal raken; zoo men tot straal den afstand van dat punt tot een dier drie lijnen neemt. Het snijpunt der volgende deellijnen zal 't middelpunt van eenen cirkel zijn die op dezelfde wijze als bovenstaande beschreven HC, BC, BE raken zal. Het snijpunt der 2 laatste is het middelpunt van eenen dergelijken cirkel die FB, BA, AJ raken zal.

20. 12 meters. De oplossing is zeer gemakkelijk. Wanneer men uit beide middelpunten der gegeven cirkels stralen trekt naar de raakpunten der gegeven raaklijn en uit het middelpunt des kleinsten cirkels eene lijn evenwijdig aan de gegevene raaklijn, zoo is deze laatste lijn gelijk aan de gegeven raaklijn (voor zoo ver die tusschen de twee omtrekken begrepen is) en zal gemakkelijk kunnen berekend worden daar zij eerste rechthoekszijde is van den rechthoekigen driehoek, wiens hypotenusa en tweede rechthoekszijde ('t verschil der stralen) ons bekend zijn.

21. Vereenig de middelpunten der gegeven cirkels met elkander en vereenig elk dier zelfde punten met een der raakpunten door middel eens straals: uit de dus ontstane gelijkvormige driehoeken vinden wij uiterst gemakkelijk, dat de gegeven raaklijn 9,38082^{m} etc. is.

22. Verleng die lijnen tot zij elkander snijden en eenen driehoek vormen. Beschrijf dan in dien driehoek eenen cirkel volgens vr. 18 dezer paragraaf, en daarna drie cirkels, waarvan elke ééne zijde des driehoeks

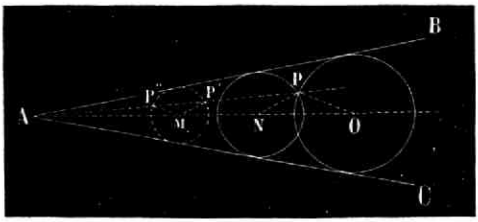
en de verlengden der twee overige raakt, volgens vr. 19 dezer paragraaf.

23. Beschrijf om den gegeven driehoek eenen cirkel en maak dien met den gegeven cirkel concentriek. Vereenig de hoekpunten des gegeven driehoeks met het middelpunt der concentrieke cirkels. Vereenig eindelijk de punten waar of de pas getrokken lijnen, of hunne verlengden den gegeven cirkel snijden.

24. Beschrijf in den gegeven driehoek eenen cirkel; maak deze met den gegevenen cirkel concentriek. Trek dan aan den gegeven cirkel raaklijnen evenwijdig aan de zijden van den gegeven driehoek.

25. Beschrijf in den gegeven driehoek den ingeschreven cirkel. Beschrijf daarna uit elk der hoekpunten des driehoeks een' cirkel die tot straal den afstand van dat hoekpunt tot de twee naastbijgelegen raakpunten heeft.

26. Verleng de twee eerstgegeven lijnen zoo noodig tot zij elkander snijden. Deel den aldus ontstanen hoek middendoor. Waar de pas geconstrueerde deellijn de derde gegevene lijn snijdt zal 't middelpunt des gevraagden cirkels zijn. Het zal wel niet behoeven te worden voorgeschreven, welken straal die cirkel zal moeten hebben.



27. Laat AB en AC in stelling gegeven zijn, en zoo noodig verlengd elkander in A snijden; laat ook het punt P gegeven zijn.

Deel hoek ABC door eene lijn AD middendoor, en beschrijf uit een willekeurig punt M dier lijn een' cirkel die AB en AC raakt. Trek AP, en verleng deze lijn zoo zij den pas beschreven cirkel niet snijdt. Trek MP′ en MP″ en door P, PO evenwijdig aan MP″ en PN evenwijdig aan MP′, zoo zullen de uit O en N met de respective stralen OP en PN beschreven cirkels aan het vereischte voldoen.

28. Wanneer de afstand hunner middelpunten gelijk is aan de som hunner stralen.

29. Wanneer de afstand hunner middelpunten gelijk is aan 't verschil hunner stralen.

30. Wanneer de afstand hunner middelpunten kleiner dan de som, maar grooter dan 't verschil hunner stralen is.

31. Wanneer de afstand hunner middelpunten kleiner dan het verschil, of grooter dan de som hunner stralen is.

32. De middellijn.
33. Die koorde, die de middellijn in 't vorig vraagstuk gevonden in het gegeven punt loodrecht snijdt.
34. De lijn die door het middelpunt des cirkels tot aan den omtrek gaat.
35. Die welke, verlengd zijnde, door 't middelpunt des gegeven cirkels zou gaan.
36. Die welke men van uit 't gegeven punt naar 't middelpunt trekt en zoover verlengt door 't middelpunt heen, tot zij den omtrek snijdt.
37. Die welke, verlengd zijnde, door 't middelpunt des cirkels zou gaan.

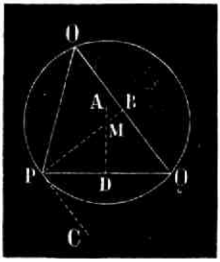
§ 142 — § 150.

1. 11° 14′ 17″.
2. Beschrijf uit de hoekpunten der gegevene hoeken met willekeurige doch gelijke stralen cirkelbogen, die de beenen der hoeken snijden. Zoek van de cirkelbogen, tusschen de beenen der gegeven hoeken begrepen, de grootste gemeene maat. Deze (23° 15′ 45″) zal ook de grootste gemeene maat der gegevene hoeken zijn.
3. 14° 36′ 42″,93, en
   68° 28′ 31″,77.
4. 63° 59′ 8″,3, en
   11° 0′ 7″,4.
5. Als 3 : 1.
6. Twee en dertig maal.
7. Dit beteekent dat hoek P gemeten wordt door boog AB. Hierbij valt op te merken dat men, om hoeken te meten, zich bedient van grootheden die met hoeken ongelijkslachtig zijn.

   Dat men dergelijke ongelijkslachtige grootheden ook in het dagelijksch leven met elkander in verband brengt, zal wel geene aanduiding behoeven. Hoe men bijv. *afstanden* meet met uren, met *tijd*, is algemeen bekend.
8. 114° 24′.
9. Die hoeken staan tot elkander als de bogen waarop zij staan.
10. 150°.
11. 25° 42′ 51″,42 etc.
12. 77° 8′ 34″,30 etc.
13. 114° 24′ 43″,4.
14. Deze zijn alle gelijk. Want zij worden alle gemeten door de helft van denzelfden cirkelboog.
15. Onder een hoek van 114° 42′ 20″.
16. Onder een hoek van 90° 1′ 35″.
17. Zoo vormen de twee getrokken lijnen eenen rechten hoek.
18. De bogen waardoor de hoeken der segmenten gemeten worden, groeien aan naarmate de segmenten zelve kleiner worden.
19. Gesteld dat bij het aangeven van de verhoudingen der afgesneden bogen men bij den boog begonnen is die tusschen de beenen des hoeks ligt, zoo zal die hoek 60° bevatten.

   Gesteld dat ons de verhoudingen der bogen opgenoemd zijn in goede volgorde, maar men bij eenen willekeurigen boog begonnen is,. zoo kan de gegeven hoek zoowel 60° als 120° zijn.

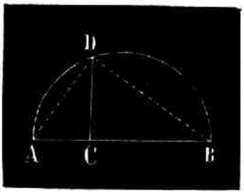
20. Geredeneerd hebbende als in 't vorig vraagstuk, zal men bevinden dat de gegeven hoek
71° 41′ of 108° 19′ is.
21. Immer 15°.
22. Immer 36°.
23. 30°.
24. 127° 5′ en 232° 55′.
25. 146° 24′.
26. 83° 14′ 25″.
27. Laat gegeven zijn PQ = 17 meters. Trek PC zóó, dat hoek QPC = 50° is; richt uit P op PC eene loodlijn PB op, en evenzoo uit het midden D van PQ eene loodlijn DA op PQ. Beschrijf uit M met MP als straal eenen cirkel. Als nu nog een willekeurig punt van den boog POQ met P en Q vereenigd is, zal driehoek POQ de gevraagde zijn.



28. Beschrijf eenen cirkel met 5 meters straal. Zet van uit een willekeurig punt van den omtrek A eene koorde AB uit = 5 meters. Richt uit B eene loodlijn BE op AB op, en maak 't stuk BF zeven meters lang. Trek DC door F evenwijdig aan AB, en trek nog DA, DB, CA en CB.
Zoowel driehoek ABD als ABC zal dan aan de vereischten voldoen.

§ 151 — § 163.

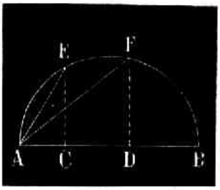
1. Wanneer de lijn die geprojecteerd moet worden evenwijdig loopt aan de lijn waarop de projectie moet plaats hebben.
2. Wanneer het verlengde van de lijn die geprojecteerd moet worden loodrecht staat op de lijn waarop de projectie moet plaats hebben.
3. Van den hoek waaronder die twee lijnen elkander snijden.
Hoe kleiner of hoe grooter de scherpe hoek is, waaronder genoemde lijnen elkander snijden, hoe grooter of hoe kleiner de projectie zijn zal.
4. Laat AC en BC de twee gegeven lijnen zijn. Beschrijf op hunne som



AB een' halven cirkel en richt uit C op AB eene loodlijn op.

Het vierkant van 't aantal lengteheden der lijn DC zal dan gelijk zijn aan 't product der getallen die het aantal eenheden van AC en BC aanduiden.

5. Zij ADB (zie de figuur van vraagstuk 4) het gewelf der kerk. Zij AC = 8, BC = 18 meters. De stang DC zal dan 12 meters lang zijn.
6. (Zie dezelfde figuur). 14,42220 &c, en 21,63330 &c. meters.
7. Beschrijf op eene willekeurige lijn AB eenen halven cirkel. Neem



eene willekeurige liefst niet te groote lijn als lengte-eenheid aan en zet van A af op AB, AC = 3 eenh. AD = 7 eenh. uit. Richt uit C en D op AB loodlijnen op, die den cirkelomtrek ergens in E en F snijden. Trek AE, AF zoo zal

$$AE : AF = \sqrt{3} : \sqrt{7} \text{ staan;}$$

Want $AE^2 = AC \times AB,\ AF^2 = AD \times AB$; dus

$$AE^2 : AF^2 = AC \times AB : AD \times AB.$$

$$\text{of } AE^2 : AF^2 = AC : AD = 3 : 7.$$

$$\text{of } AE : AF = \sqrt{3} : \sqrt{7}.$$

8. Beschouw dit vraagstuk alsof er gevraagd was: Construeer 2 lijnen die tot elkander in reden zijn als $\sqrt{9} : \sqrt{7}$ en handel vervolgens overeenkomstig vraagstuk 7.
9. Beschrijf op de som der lijnen AB en BC, respectivelijk gelijk aan P en Q, eenen halven cirkel. Richt uit B op AC eene loodlijn op en vereenig het punt D, waar deze lijn den cirkelomtrek snijdt, met A en C. Zet de lijn die ons nevens P en Q gegeven is van A af op AD uit. Laat AE gelijk die gegevene lijn zijn. Trek dan door E eene lijn evenwijdig aan AC, zoo zal, wanneer wij het snijpunt van deze lijn en DC, F noemen, FC de gevraagde lijn zijn.

   Gesteld dat AE langer ware dan AC, dan ondergaat daardoor de constructie weinig verandering. Men zet dan AE af op AD en diens verlengde. Het punt F zal dan vallen op het verlengde der lijn DC en even als vroeger CF de gevraagde lijn zijn.
10. Als $1 . \sqrt{2} : \sqrt{3} : 2 : \sqrt{5}$: enz.
11. Neem eene willekeurige liefst kleine lijn als eenheid aan.

   Zet van het uiteinde A van de middellijn AB eens willekeurigen halven cirkels AC, AD, AE, AF op AB uit, respectivelijk gelijk 1. 2. 3. 4 eenheden. Richt uit C, D, E, F loodlijnen op AB op, die den cirkelomtrek ergens in G, H, J, K zullen snijden. Trek AG, AH, AJ, AK. Deze laatste lijnen zullen tot elkander in de gevraagde verhouding staan.

12. Men construeere eenen rechthoekigen driehoek, welks schuine zijde = 4, en welks eene rechthoekszijde = 3 eenheden is, zoo zal de andere rechthoekszijde = $\sqrt{7}$ zijn.

13. Elk oneven getal is begrepen in de formule $2a + 1$ en kan verdeeld worden in twee deelen waarvan het eene ééne eenheid grooter is dan het andere, a en $a + 1$. Het verschil der vierkanten dezer twee deelen zal altijd $2a + 1$ zijn.

Hierop bouwen wij voor ons vraagstuk deze constructie.

Verdeel het getal $2a + 1$ in 2 deelen waarvan het eene ééne eenheid grooter is dan het andere. Deze deelen zullen $a + 1$ en a zijn. Construeer eenen rechthoekigen driehoek wiens eene rechthoekszijde a lengte-eenheden en wiens hypotenusa $a + 1$ dierzelfde eenheden lang is. De tweede rechthoekszijde zal dan tot de eenheid staan als $\sqrt{(2a + 1)} : 1$.

14. Snijden twee koorden elkander, zoo is het product der stukken der eene koorde gelijk aan 't product der stukken der andere.

Het onbekende stuk is derhalve hier 9,375 meters.

15. 0,7 meters.

16. Daar in dit geval de beide stukken waarin de koorde verdeeld wordt even lang zijn, is het product der stukken der middellijn gelijk het quadraat der halve koorde. Wij kunnen dus in ons bijzonder geval de eigenschap, in oplossing 14 dezer paragraaf genoemd, aldus schrijven:

De halve koorde is middenevenredig tusschen de stukken waarin de middellijn is verdeeld.

17. PD = 5,04 meters.

18. Breng door A en B eenen willekeurigen cirkel. Trek daaraan uit P eene raaklijn. Deze zal de gevraagde middenevenredige zijn. Hare lengte zal 3 meters wezen.

19. Bij al deze cirkels is de raaklijn daaraan uit C getrokken = $\sqrt{(AC \times BC}$. Een cirkel uit C met eene dier raaklijnen als straal beschreven, zal ook door de uiteinden der andere gaan, daar ze alle even lang zijn.

20. 6,75 meters.

21. 35632,6288 etc. meters.

22. Van eene in de uiterste en middelste reden verdeelde lijn is het grootste stuk, gesteld dat de lijn zelve a lengte-eenheden lang zij, $-\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a\sqrt{5}$ en het kleinste $1\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}a\sqrt{5}$ dier eenheden lang. Als wij nu den wortel uit 5 = 2,23606 en a = 7,42 nemen, is het grootste stuk der in dit vraagstuk gegeven lijn 4,5857826 en het kleinste 2,8342174 meters.

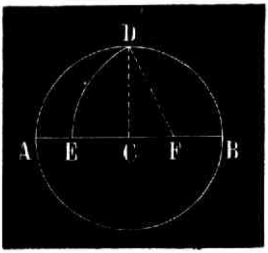
23. Deel eerst eene lijn van 7,42 meters lengte in de uiterste en middelste reden. De som van het gevonden grootste stuk en de lijn zelve zal de gevraagde lijn zijn.

24. Het in vraagstuk 22 dezer paragraaf gevonden grootste stuk der lijn van 7,42 meters zal zelve, in de uiterste en middelste reden verdeeld, tot grootste stuk hebben het kleinste stuk der lijn van 7,42 meters, welk kleinste stuk wij ook in genoemd vraagstuk hebben berekend.

25. 1,9406142 meters, gesteld dat de $\sqrt{5}$ met juistheid werd uitgedrukt door 2,23606.

26. 3,67290 enz.

27. Laat AB eene middellijn des cirkels BC en hoek ACD recht zijn. Laat

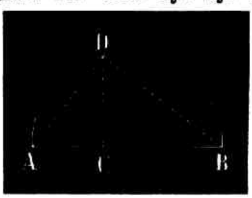


verder CF = BF zijn, en uit F met FD de cirkelboog DE beschreven zijn. Stellen wij nu, dat de straal van onzen cirkel r eenheden lang is dan is CF = $\frac{1}{2}$ r. CD = r en dus $FD^2 = \frac{5}{4} r^2$, FD = $\frac{1}{2}$ $r \sqrt{5}$. EF is dus ook = $\frac{1}{2}$ $r \sqrt{5}$ en daar CF = $\frac{1}{2}$ r is, is EC = $- \frac{1}{2} r + \frac{1}{2} r \sqrt{5}$; en trekken wij dit van AC = r af zoo blijft voor AE $1\frac{1}{2} r - \frac{1}{2} r \sqrt{5}$.

Verheffen wij de waarde voor EC gevonden in het quadraat zoo vinden wij $1\frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{2} r^2 \sqrt{5}$, 't geen wij ook vinden zullen zoo wij de voor AE gevonden waarde met r vermenigvuldigen.

Derhalve is de lijn AC in de uiterste en middelste reden verdeeld.

28. Laat AB eene lijn zijn die door het punt C in de uiterste en mid-



delste reden gedeeld wordt. Beschrijf op AB eenen halven cirkel, en zet van A uit het grootste stuk van AB, BC, als koorde uit. Zij AD = BC. Trek dan nog DC en BD en driehoek ADB is de gevraagde. Want daar wij weten dat

$BC^2 = AB \times AC$ is, weten wij ook dat $AD^2 = AB \times AC$ is en derhalve AC de projectie van AD is, DC loodrecht op AB staat.

Nu is dan ook driehoek BDC gelijkvormig met driehoek ABD en derhalve is

$$AB : BD = BD : BC.$$

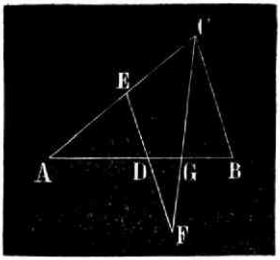
of daar BC = AD is.

$$AB : BD = BD : AD;$$ q. e. d.

29. 69. 3 meters.

30. 8 meters.

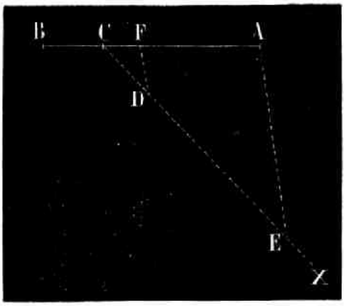
31. Laat de figuur aan het voorschrevene voldoen, zoo is



driehoek AED ∾ driehoek ABC; want
hoek A = hoek A.
hoek AED = hoek ACB, want
DE is evenwijdig aan BC.
Wij hebben derhalve
AD : AB = DE : BC.
of AD : AB = DF : BC. (1)
Verder is driehoek BCG ∾ driehoek GDF;

want hoek DGF = hoek CGB.
en hoek DFG = hoek GCB,
wijl EF evenwijdig aan BC is, dus
DG : BG = DF : BC. (2)
Uit de vereeniging van 1 en 2 hebben wij
AD : AB = DG : BG.
of AD $\times$ BG = AB $\times$ DG.

32. Zij de lijn AB de gegevene en laat CX getrokken zijn zoo als in de opgave voorgeschreven is. Zij verder BC = CD, DE = AB, FD evenwijdig aan AE, dan is wegens de evenwijdigheid van FD en AE, driehoek CFD ∾ driehoek CAE en dus



CF : FA = CD : DE. Maar CD is gelijk BC en DE = AB: dus kunnen wij hiervoor schrijven
CF : FA = BC : AB of
CF $\times$ AB = AF $\times$ BC; q. e. d.

33. De evenredigheid AB : BC = AF : CF (zie het vorige vraagstuk) kan ook geschreven worden AB : BC = AB—BF : BF—BC; waaruit volgt, dat AB, BF en BC harmonisch evenredig zijn.

34. Wanneer de lijn door A en B gebracht de lijn CD loodrecht snijdt; want de lijn die de middelpunten vereenigt, loopt dan evenwijdig aan de lijn CD, en de stralen der bedoelde cirkels zijn dus even groot.

35. Als de lijn door A en B gelegd evenwijdig is aan de lijn CD.
De constructie van dezen eenen cirkel is natuurlijk veel eenvoudiger dan die der in § 163 bedoelde.

§ 164 — § 182.

1. Vereenig, indien A, B en C de gegeven punten zijn, B met A en C. Richt loodlijnen op op het midden van AB en BC. Het punt waar deze loodlijnen (zoo noodig verlengd) elkander zullen snijden, zal 't gevraagde punt zijn.

Dit vraagstuk is onoplosbaar, zoodra de drie gegeven punten in eene rechte lijn liggen.

2. Men verlenge de lijnen tot zij elkander snijden, en deele de hoeken waaronder dat geschiedt, middendoor. Het snijpunt dezer deellijnen zal het gevraagde punt zijn.

Bij evenwijdigheid der drie lijnen wordt het vraagstuk onoplosbaar.

Bij evenwijdigheid van twee der lijnen blijft eene constructie mogelijk.

3. Wanneer men zulks doet bij gelijkzijdige driehoeken.

4. Bij eenen scherphoekigen *binnen*, bij eenen stomphoekigen *buiten* den driehoek.

5. Bij eenen rechthoekigen driehoek. Want zoo men op de hypotenusa eenen halven cirkel beschrijft aan die zijde waar de driehoek zelf zich bevindt, dan moet het hoekpunt van den rechten hoek in den omtrek des cirkels vallen. Het middelpunt diens halven cirkels deelt natuurlijk deze hypotenusa in twee stukken, die elk even lang zijn als de lijn, die het hoekpunt des rechten hoeks verbindt met het middelpunt, aangezien elk dezer drie lijnen een straal van den cirkel is, waarin de rechthoekige driehoek staat.

6. Het bewijs hiervoor ligt opgesloten in de beantwoording van het vorige vraagstuk.

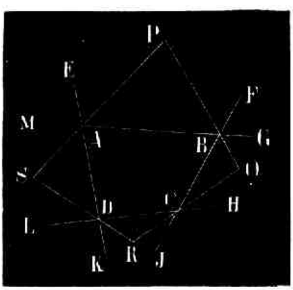
7. Om alle vierhoeken wier tegenover elkander staande hoeken elkanders supplementen zijn.

8. In alle vierhoeken waarvan de sommen der tegenover elkander staande zijden gelijk zijn.

9. Laat ABCD de gegeven vierhoek zijn en de supplementen zijner hoeken de hoeken EAB, MAD, EDL, KDC, DCJ, BCH, CBG, ABF middendoorgedeeld worden, de twee eerste door de lijn PS, de twee volgende door de lijn SR, de vijfde en zesde door de lijn RQ, de twee laatste door de lijn PQ zoo zal

$$\text{hoek } CQB = 180^\circ - (\text{hoek } QBC + \text{hoek } BCQ)$$
$$\text{hoek } ASD = 180^\circ - (\text{hoek } SAD + \text{hoek } SDA) \text{ zijn.}$$

$$\text{hoek } CQB + \text{hoek } ASD = 360^\circ - (\text{hoek } QBC + \text{hoek } BCQ + \text{hoek } SAD + \text{hoek } SDA).$$



De vier laatstgenoemde hoeken echter zijn ieder gelijk de helft van twee der acht in 't begin opgenoemde supplementshoeken en wel hoek QBC = ½ supplement van hoek B, hoek BCQ = ½ supplement van hoek C, hoek SAD = ½ supplement van hoek A en hoek SDA = ½ supplement van hoek D des vierhoeks.

Volgens eene bekende eigenschap is de som dezer halve supplementen

$= 180^\circ$; 't welk in onze vergelijking gesubstitueerd, geeft

hoek CQB + hoek ASD = $360^\circ - 180^\circ = 180^\circ$.

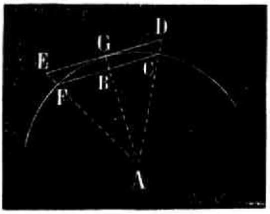
Wijl nu PQRS een vierhoek is (niemand toch zal het bewijs willen vorderen dat PQ, QR, RS, PS rechte lijnen zijn) is hoek P + hoek Q + hoek R + hoek S = 360°: dus is ook hoek P + hoek R = 180°, en kan om vierhoek PQRS een cirkel worden beschreven, volgens vraagstuk 7 dezer paragraaf.

10. 144°, 150°, 162°, 168°, 178°, 179°, 179° 54'.

11. 24°.

12. 36°, 30°, 18°, 12°, 4°, 0° 24'.

13. Zij gegeven AG = 3,15 meters, FC = 2,12 meters zoo is (indien onze figuur aan het voorgeschrevene voldoet)



AB, die wij loodrecht op FC hebben laten vallen en verlengd hebben, $= \sqrt{(AF^2 - FB^2)} = 2,966$ enz. meters.

Verder is driehoek AFB ∞ driehoek AEG en dus

AB : AG = FB : EG.

EG derhalve is 1,12564 etc. meters,

ED 2,25129 „ „ lang.

14. Substitueert men A = 2^m, 3 en $r = 3^m$, 15 in de formule $a = \frac{2\,Ar}{\sqrt{(4r^2 + A^2)}}$, zoo verkrijgt men voor a, 2^m,16 ongeveer.

15. 9,7805776 etc. meters.

16. 2,51383 etc. meters.

17. 2,60190 etc. meters.

18. 6 meters.

19. Zij gegeven dat de zijde des regelmatigen tienhoeks in een' cirkel beschreven = 7 meters is, dan is het zeer gemakkelijk te vinden dat de straal des omgeschreven cirkels = 11,32631 etc. meters is en zullen wij met behulp hiervan vinden voor den straal des ingeschreven cirkels 10,77196 etc. meters.

20. 8,9378072 etc. meters.
7,4296024 „ „
6,3200000 „ „
4,8370752 „ „
3,9059496 „ „
3,2714216 „ „
1,9772752 „ „

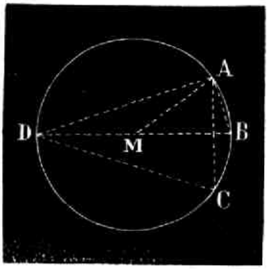
21. 11,313787 etc. meters.

22. 10,20781 etc. meters.

23. 35,54662 etc. meters.

24. 1,41421 etc. meters.
    1, meter.
    0,76536 etc. meters.
    0,61803 „ „
    0,51736 „ „
    0,39018 „ „
    0,31286 „ „

25. Laat gegeven zijn dat boog AB = 30° is, dan is boog AD = 150°.



Maak boog BC = boog AB en trek AC. Daar hoek AMB = 30°, en dus AB zijde van den regelmatigen ingeschreven twaalfhoek is, zal AC zijde van den regelmatigen ingeschreven zeshoek zijn, en dus gelijk aan den straal wezen. Trek nu nog DC dan is driehoek DAC ∾ driehoek MAB en dus

DA : MA = AC : AB
of DA : MA = MA : AB; q. e. d.

26. $\frac{1}{2}\sqrt{(10 + 2\sqrt{5})}$ of 1^m,90211.

27. De kortste diagonaal van den regelm. zeshoek, is de zijde van den regelmatigen driehoek en dus = $\sqrt{3}$, of 1^m,7320508.

28. Als $\frac{1}{2}\sqrt{3} : 1$; zoo wij de $\sqrt{3}$ rekenen op 1,73205, verandert deze verhouding in 0,866025 : 1.

29. Als 1 : 0,92386 etc.

30. Wanneer wij den straal des omgeschreven cirkels gelijk 1 stellen, is de zijde des regelmatigen ingeschreven zeshoeks = 1, die van den regelmatigen ingeschreven driehoek = 1,7320508 etc.; en dus verhoudt zich

Omtr. Ing. Reg. zesh. : omtr. Ing. Reg. drieh.
$= 6 \times 1 : 3 \times 1{,}7320508$ etc.
$= 6 : 5{,}1961524$ etc.

31. Dan is de straal in de uiterste en middelste reden verdeeld. De zijde van den tienhoek is dan het grootste stuk.

Verlengt men den straal met de zijde van den tienhoek, dan is de som dezer lijnen eene in de uiterste en middelste reden verdeelde lijn, waarvan de zijde des tienhoeks het kleinste stuk is.

32. De zijde van eenen ingeschreven regelmatigen vijfhoek is 1,17557 etc. meters lang wanneer de straal des omg. cirkels 1 meter lang is.

Met behulp der formule $A = \frac{2a}{\sqrt{(4-a^2)}}$ (Badon Ghyb. § 173) vinden wij hieruit:

Zijde omgeschreven regelmatige vijfhoek = 1,45031 etc. meters.

33. Als de straal des omgeschreven cirkels 1 meter lang is, is de zijde

des ingeschr.	regelm.	drich.	1,73205	etc.	meters.
„	„	„	vierh.	1,41421	„	„
„	„	„	zesh.	1,	„	meter.
„	„	„	achth.	0,76536	„	meters.
„	„	„	tienh.	0,61803	„	„
„	„	„	twaalfh.	0,51763	„	„

Wij vinden daaruit door de formule $A = \frac{2a}{\sqrt{(4-a^2)}}$

Zijde omgeschr.	regelm.	drich.	= 3,46410	etc.	meters.
„	„	„	vierh.	= 2,	„	„
„	„	„	zesh.	= 1,15470	„	„
„	„	„	achth.	= 0,82842	„	„
„	„	„	tienh.	= 0,649839	„	„
„	„	„	twaalfh.	= 0,53589	„	„

34. Als 1 : 2 gelijk uit 't vorig vraagstuk blijkt.

35. Daar wij in de vorige vraagstukken zoowel de zijden der ingeschrevene als der omgeschrevene regelmatige veelhoeken hebben berekend, vinden wij nu zeer gemakkelijk

Omtr. Ing. Reg. Vierh. : Omt. Omg. Reg. Vierh. = 1,41421 etc. : 2.
„ „ „ Zesh. : „ „ „ Zesh. = 1 : 1,15470 etc.
„ „ „ Achth. : „ „ „ Achth. = 0,76536 etc. : 0,82842 etc.
„ „ „ Tienh. : „ „ „ Tienh. = 0,61803 etc. : 0,649839 etc.

36. Een hoek van 3° is de middelpuntshoek van eenen regelmatigen 120 hoek. Wij weten uit Badon Ghyben, hoe het verschil der bogen onderspannen door de zijde eens ingeschreven regelmatigen zeshoeks en de zijde eens ingeschreven regelmatigen tienhoeks een boog is van 24 graden, en dat de koorde die zoodanigen boog onderspant de zijde is van den regelmatigen vijftienhoek. Als deze bekend is, valt het zeer gemakkelijk, ook den regelmatigen ingeschreven dertig-, zestig-, honderd-twintighoek te beschrijven.

§ 183 — § 186.

1. De zijden van den ingeschreven en omgeschreven regelmatigen vierhoek zijn ons uit de vorige vraagstukken bekend. Wij weten met behulp daarvan dat, zoo men den straal des cirkels gelijk 1 m. stelt, de omtrekken dier veelhoeken 5,65685 etc. en 8 meters zijn.

Tusschen deze beide omtrekken ligt de omtrek des cirkels, grooter dan de omtrek des ingeschrevenen, kleiner dan die des omgeschreven veelhoeks. Beschouwen wij nu de omtrekken der om- en ingeschrevene achthoeken, zoo leert ons reeds een oppervlakkige blik dat de grenzen, waartusschen de cirkelomtrek ligt, nauwer bijeengekomen zijn, en uit de berekening vinden wij, dat die omtrek zich tusschen 6,12293 etc. en 6,62741 etc. m. bevindt.

De beschouwing der om- en ingeschreven zestien en twee en dertig hoeken bepaalt deze grenzen tot 6,24288 etc. en 6,36519 etc.

6,27309 etc. en 6,30344 etc. meters.

Zoo voortgaande, ook om- en ingeschreven 64, 128, enz. hoeken te beschouwen, zullen wij spoedig tot in verscheidene decimalen nauwkeurig de verhouding van omtrek en straal vinden. Hoe wij uit de verhouding van cirkelomtrek en straal, het Ludolphiaansche getal vinden, zal wel geene aanduiding behoeven.

2. Wanneer men de grootste gemeene maat zoekt tusschen de eenheid en 't Ludolphiaansche getal, zijn de wijzergetallen zoo als bekend is 3, 7, 15, 1, 292, 1, 1 enz. Hieruit vindt men volgens Badon Ghyb. § 94, de verhoudingen van middellijn tot omtrek
7 : 22, 106 : 333, 113 : 355, 33102 : 103993, 33215 : 104348 enz.
3. Zie het vorige vraagstuk.
4. Door eenen regel van drieën vinden wij 5,86239 etc. meters.
5. De omtrek van dien cirkel zal 57,491145495 etc. meters zijn. Wij vinden dus al weder door eenen regel van drieën, dat de gevraagde hoek, die gelijk is aan den halven boog waarop hij staat, $= 51^\circ\ 28'\ 20'',21$ etc. is.
6. De boog tusschen de beenen van dien hoek zal derhalve $94^\circ\ 45'$ zijn. Volgens eene gemakkelijke berekening kunnen wij voor de lengte van dien boog vinden
683, 97669 etc. meters.
7. Gebruik makende van het getal π tot in 8 decimalen, vinden wij voor den gevraagden boog $92^\circ\ 15'\ 8'',66$.
8. 120°. Zie Badon § 179.
9. Als wij den straal gelijk 1 stellen is het vijfde gedeelte van den cirkelomtrek = 1,25663706 etc. De geheele omtrek van den sector is derhalve 3,25663706 etc. stralen des cirkels. De omtrek is echter gegeven = 300 meters; dus vinden wij voor den straal 92,11956 etc. m.
10. De straal gelijkgesteld zijnde aan 1, is de boog van het quadrant = 1,57079632 etc., en derhalve de omtrek van het quadrant = 3,57079632 etc. stralen. Wij vinden dus voor den straal in ons vraagstuk 28,00496 etc. meters.
11. De zijde des ingeschreven regelmatigen achthoeks is, als de straal de omgeschreven cirkels = 1 is, 0,76536686 etc., en een achtste cirkelomtrek is dan 0,78539816 etc. De omtrek van 't segment is dan 1,55076502 etc. Maar die omtrek is gegeven = 20 meters; derhalve moet ook de straal = 12,89686 etc. meters zijn.
12. Hiervoor vinden wij $114^\circ\ 35'\ 29'',61$.

§ 187 — § 205.

1. 17,589 □ meters.
2. Als 183 : 185.
3. 10,4 meters.
4. 2,1 meters.
5. Die driehoeken zijn even groot: zij hebben gelijke bases en gelijke hoogten.
6. De diagonalen eener ruit snijden elkander rechthoekig. Eene dier diagonalen (onverschillig welke) deelt de ruit in 2 driehoeken. Van elk dier driehoeken is de inhoud = 't product van basis en halve hoogte. De basis is in beide driehoeken eene der diagonalen, de halve hoogte in beide $\frac{1}{4}$ van de andere diagonaal.

   Telt men de beide gevonden inhouden bijeen, dan heeft men: de inhoud der ruit gelijk aan 't halve product der diagonalen.
7. 84 □ meters. De loodlijn op de zijde van 14 meters lengte nedergelaten, is gelijk 12 meters. Zie vraagst. 54 op bladz. 11.
8. De lengte der loodlijn op de basis uit den top neergelaten is 14,89563 etc. meters en derhalve de inhoud des driehoeks

   128,10241 etc. □ meters.
9. 52,70 □ meters.
10. De basis diens driehoeks zal zijn 16,46328 etc. meters; de inhoud diens driehoeks derhalve 117,71245 etc. □ meters.
11. Deel de zijde tegenover dat hoekpunt waaruit men de deellijnen trekken wil, in even zooveel gelijke deelen, als waarin men den driehoek verdeeld wil hebben. Vereenig het hoekpunt waarvan gesproken is, met alle deelpunten der verdeelde zijde.
12. De loodlijn uit den top op de basis van dien driehoek neergelaten zal 6 meters lang, de inhoud van den driehoek derhalve 27 □ meters zijn.
13. De inhoud van zulk een vierhoek (parallelogram) is gelijk aan het product van basis en hoogte. (Wat de gebruikte zegswijze „product van 2 lijnen" beduidt, zie men bij Badon Ghyben.)

    Beschouwen wij de gegeven zijde als basis, den gegeven afstand dier zijde van de tegenoverstaande als hoogte van ons parallelogram zoo vinden wij dat de gevraagde inhoud = 28,80 □ meters is.
14. De inhoud van een trapezium is gelijk aan het product van de halve som zijner evenwijdige zijden met zijne hoogte. In ons geval derhalve is deze inhoud = 56,88 □ meters.
15. In elken vierhoek waarin men eenen cirkel beschrijven kan is de som van 't eene paar tegenover elkander staande zijden gelijk aan de som van het andere paar. De som der evenwijdige zijden in ons trapezium is derhalve gelijk 18,26 meters. De hoogte is gelijk aan de middellijn

des ingeschreven cirkels dus 8 meters. Zoo zal dan de inhoud van ons trapezium gelijk zijn aan 73,04 □ meters.

16. Gesteld dat a, b, c de zijden eens driehoeks, s hare halve som in lengteëenheden uitdrukken, zoo is de formule voor den straal des ingeschreven cirkels: $r = \sqrt{\frac{(s-a)\ s-b)\ s-c)}{s}}$.

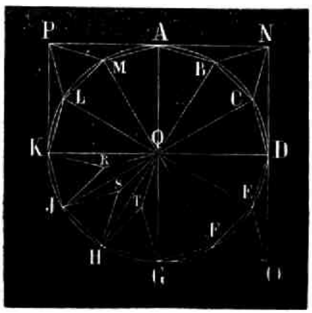
In ons vraagstuk zal derhalve de straal des ingeschreven cirkels $\doteq$ 1,2 meters zijn.

17. Beschrijf in eenen cirkel, beginnende van een zelfde punt, eenen regelmatigen achthoek en eenen regelmatigen zestienhoek. Trek dan stralen naar elk der hoekpunten des zestienhoeks; zoo zult gij bevinden dat elke middelpuntsdriehoek des zestienhoeks beschouwd kan worden als hebbende eenen straal des cirkels tot basis, en eene halve zijde des achthoeks tot hoogte. Noemen wij den straal van onzen cirkel *r*, zoo is de inhoud van elken der genoemde driehoeken natuurlijk

$\frac{1}{2}\ r \times \frac{1}{2}$ zijde achthoek. Dit met 16 vermenigvuldigd geeft

Inhoud zestienhoek $= \frac{1}{2}\ r \times$ omtrek achthoek.

18. Laat gegeven zijn dat de twaalfhoek ABGDEFGHIKLM een regelmatige zij, beschreven in den cirkel QA; dat uit het middelpunt Q stralen getrokken zijn naar alle hoekpunten des twaalfhoeks: dat fig. AD, AK, en DG vierkanten zijn op de stralen KQ, QD, QG onzes cirkels beschreven: dat P met M en L, N met B en C, O met F en E vereenigd zijn: dat KRJ, JSH, HFG gelijkzijdige driehoeken zijn op KJ, JH, HG beschreven: dat R, S, T met Q vereenigd zijn.



Elk der driehoeken KJQ, JQH, HQG is dan in drie stukken verdeeld, respectivelijk gelijk aan de drie stukken die men bij een quadrant van den twaalfhoek moet voegen om er een vierkant van den straal van te maken.

19. Zet op eene willekeurige lijn naast elkander uit AC = de basis en CB = de halve hoogte des gegeven driehoeks, en beschrijf op AB eenen halven cirkel.

Richt uit C op AB eene loodlijn op en noem het punt waar deze den cirkelomtrek snijdt D. CD zal de zijde zijn eens vierkants van denzelfden inhoud als de gegeven driehoek.

20. De middenevenredige tusschen de basis en de hoogte des gegeven rechthoeks zal de zijde zijn van een vierkant van denzelfden inhoud als de gegeven rechthoek.

21. Een middenevenredige tusschen de basis en de hoogte van het gegeven

parallelogram zal de zijde zijn van een vierkant van denzelfden inhoud als het gegeven parallelogram.

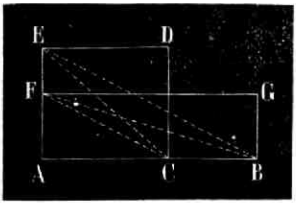
22. De zijde van 't gevraagde vierkant zal gelijk zijn aan de middenevenredige tusschen de som der evenwijdige zijden en de halve hoogte van het gegeven trapezium.

23. Verander dien vierhoek in eenen driehoek van de zelfde grootte, volgens Badon Ghyben § 198, en dezen driehoek in een vierkant van denzelfden inhoud, volgens vraagstuk 19 dezer paragraaf.

24. Vervorm dezen vijfhoek in eenen vierhoek van denzelfden inhoud, en handel verder als in 't vorig vraagstuk.

25. Zij AD de gegeven rechthoek.

Verleng AC door C en maak AB = aan de gegeven basis des gevraagden rechthoeks. Trek BE, en uit C eene lijn aan BE evenwijdig. Trek nog FG evenwijdig aan AB en BG evenwijdig aan AF, zoo is AG de gevraagde rechthoek. Want zoo wij nog BF en EC trekken, is, wegens de evenwijdigheid der lijnen FC en BE,



drieh. BFC = drieh FEC. Tel hierbij
drieh. AFC = drieh. AFC, zoo is
drieh. ABF = drieh. AEC; 't welk met 2 vermenigvuldigd geeft

Rechth. AD = rechth. AG.

Ware AC grooter dan AB geweest zoo zoude de constructie 't zelfde gebleven zijn; alleen zou CF het verlengde van AE gesneden hebben.

26. Laat de zijde des eenen driehoeks = m, die des tweeden = n gegeven zijn. Beschrijven wij dan eenen rechthoekigen driehoek onder de rechthoekszijden m en n, zoo zal de hypotenusa van dezen driehoek de zijde des gevraagden driehoeks wezen.

Op geheel dezelfde wijze zoekt men de som van twee willekeurige gelijkvormige figuren.

27. Laat de straal des grootsten der gegeven cirkels gelijk eene lijn m zijn en die des kleinsten gelijk eene lijn n. Beschrijf eenen rechthoekigen driehoek onder m als hypotenusa en n als eerste rechthoekszijde. Een cirkel beschreven met de tweede rechthoekszijde als straal zal de gevraagde zijn.

28. Trek aan den binnensten cirkel eene raaklijn. Het stuk dezer raaklijn begrepen tusschen den omtrek des grootsten cirkels zal de middellijn van den gevraagden cirkel zijn. Om dit te bewijzen trekke men twee lijnen; eene van 't middelpunt der gegeven cirkels naar eene der uiteinden der middellijn des geconstrueerden cirkels,

en eene andere uit datzelfde middelpunt naar het middelpunt des nieuwen cirkels.

Van den dus geformeerden rechthoekigen driehoek zal de hypot. de straal des grootsten der gegevene cirkels, en de twee rechthoekszijden de stralen der beide overige cirkels zijn. De grootste der geg. cirkels is dus gelijk aan de som der twee andere, 't welk ook kan geschreven worden: het verschil der beide gegeven cirkels is gelijk aan den geconstrueerden.

29. Volgens vraagstuk 26 kunnen wij de som van twee cirkels vinden. De som van drie cirkels te vinden is slechts eene herhaling dezer bewerking met den eerstgevonden cirkel en den overschietende der gegevene.

30. Wij kunnen de beantwoording van dit vraagstuk met eene verwijzing naar vraagstuk 26 en 29 dezer paragraaf afdoen.

31. De bewerking in vraagstuk 26 dezer paragraaf aangegeven, driemaal herhaald, zal ons het gevraagde vierkant doen vinden.

32. Laten de lijnen m en n twee gelijkstandige zijden in de twee gegeven veelhoeken zijn. Beschrijf onder m en n als rechthoekszijden eenen rechthoekigen driehoek, en op de hypotenusa van dezen driehoek eenen veelhoek gelijkvormig aan de gegevene.

Het zal hier wel niet bijgevoegd behoeven te worden dat de hypotenusa waarvan gesproken is, en de lijnen m en n, gelijkstandige zijden in den nieuwen veelhoek en de beide gegevene veelhoeken moeten zijn.

33. Beschrijf eenen cirkel met het verschil der stralen der gegeven cirkels tot straal. Want de omtrekken van cirkels staan tot elkander als hunne stralen. Is derhalve 't verschil van de stralen van twee cirkels gelijk aan den straal van eenen derden cirkel, zoo is ook de omtrek van den derden cirkel gelijk aan 't verschil der omtrekken der beide eerstgenoemde cirkels.

34. Een cirkel met de som der stralen der gegeven cirkels als straal beschreven, zal de gevraagde zijn.

35. Indien de lijnen m en n gelijk zijn aan de zijden der gegeven driehoeken, zal een middenevenredige tusschen m en n de zijde des gevraagden driehoeks zijn.

36. Elk der nieuwgevormde driehoekjes zal tot den oorspronkelijken driehoek in reden staan als de quadraten hunner gelijkstandige zijden. Dat deze driehoekjes met den oorspronkelijken gelijkvormig zijn, volgt uit de evenredigheid hunner zijden met die des grooten driehoeks. Is nu elk der zijden des oorspronkelijken driehoeks in n gelijke deelen verdeeld, zoo staat de inhoud van elk der nieuwe driehoekjes tot dien van den ouden, als $1 : n^2$; en daar de geheele driehoek in even groote driehoekjes verdeeld is, zal hun getal n^2 zijn.

37. Stel dat gevraagd wordt den driehoek ABC te verdeelen in drie gelijke

deelen door lijnen evenwijdig aan AB.

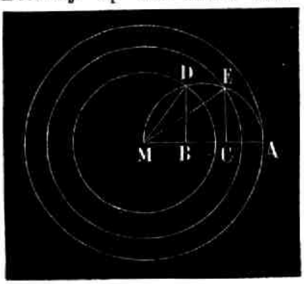
Verdeel de zijde AC in evenveel gelijke deelen als men den driehoek verdeelen wil; in ons vraagstuk derhalve in drie, AD, DE, EC. Beschrijf op AC eenen halven cirkel, en richt uit D en E loodlijnen op AC op. Trek CG en CF, en beschrijf uit C met CF en CG als stralen cirkelbogen. Laat deze de lijn AC in J en H snijden; zoo trekken wij nog JK en HL evenwijdig aan AB, en de driehoek ABC is op de gevraagde wijze gedeeld.

Want drieh. ABC : drieh. JKC : drieh. HLC $= AC^2 : JC^2 : HC^2$.
of ook $= AC^2 : CG^2 : CF^2$.
$= AC \times AC : AC \times DC : AC \times EC$.
$= AC : DC : EC$.
$= 3 : 2 : 1$.

Door toepassing van eene bekende eigenschap der evenredigheden volgt hieruit bijkans onmiddellijk

drieh. HLC = drieh. KJC — drieh. HLC = drieh. ABC — drieh. KJC.
of drieh. HLC = vierh. KH = vierh. BJ.

38. Beschrijf op den straal MA van den gegeven cirkel eenen halven cirkel, verdeel MA in evenveel gelijke deelen als men den gegeven cirkel verdeeld wil hebben. Laat ons gevraagd zijn, den cirkel in drie gelijke deelen te verdeelen. Stel dat MB = BC = AC zij. Richt uit B en C op MA loodlijnen op; trek MD en ME; de cirkels met deze lijnen als stralen uit M als middelpunt beschreven zullen de gevraagde wezen.



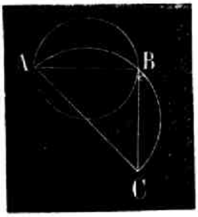
Het bewijs hiervoor is geheel met het bewijs van voorgaand vraagstuk gelijkvormig.

39. Neem een willekeurig punt binnen eenen gegevenen veelhoek ABCDE aan, en vereenig dit met de hoekpunten des veelhoeks. Gesteld nu dat wij den veelhoek in drie gelijke deelen wilden verdeelen door 2 gebroken lijnen, evenwijdig aan den omtrek des gegeven veelhoeks, zoo verdeelen wij, met behulp der oplossingen der opgaven 10 en 11 op bladz. 16 eene der getrokken lijnen, PA bijv., zóó, dat $PA^2 : PA'^2 : PA''^2$ staat als $3 : 2 : 1$. Trek dan uit A′ en A″ lijnen evenwijdig aan AB en AE. Noem de punten waar deze laatstgetrokken lijnen PB en PE snijden B′, B″; E′ en E″. Trek dan B′D′ en B″D″ even-

wijdig aan BD, en vereenig de snijpunten dezer lijnen en PD (D′ en D″) met E′ en E″.

39. Wij zijn in dit vraagstuk wel een weinig kort in onze omschrijvingen geweest, maar dit zal toch geene onduidelijkheid kunnen veroorzaken, wanneer men juist alle bewerkingen in de volgorde verricht, die voorgeschreven is.

40. Zij AB de gegeven cirkel. Richt, na de middellijn AB getrokken te hebben, uit B op AB de loodlijn BC op; maak BC = AB en trek AC. Een halve cirkel op AC als middellijn beschreven, zal de gevraagde zijn.



41. Een quadrant van den cirkel beschreven met de middellijn des gegevenen als straal zal aan het vereischte voldoen.

42. Zoek eene lijn wier quadraat staat tot het quadraat van de basis des gegeven veelhoeks als 2 : 7. Beschrijf op de gevonden lijn als basis eenen veelhoek gelijkvormig aan den gegevenen. Zie nog de opmerking bij vraagstuk 32 dezer paragraaf.

43. Dit vraagstuk is volkomen gelijkvormig aan het vorige.

44. De zijde des ingeschreven regelmatigen driehoeks is, wanneer 1 meter als straal des omgeschr. cirkels wordt aangenomen, 1,73205 etc. meters. De loodlijn uit den top diens driehoeks op de basis neergelaten, is 1,5 meters. (Hiertoe besluit men met behulp van de oplossing van vr. 8 op blz. 20). De inhoud dezes driehoeks is derhalve 1,29903 etc. □ meters.

De ingeschreven regelmatige vierhoek, in denzelfden cirkel beschreven, waarvan wij gesproken hebben, is gelijk het halve product zijner diagonalen die elk 2 meters lang zijn. Hij heeft derhalve eenen inhoud van 2 □ meters.

Het apothema eens regelmatigen vijfhoeks wiens omgeschreven cirkel 1 meter straal heeft, is 0,80901 etc. meters. De omtrek van dienzelfden vijfhoek is 5,87785 etc. meters. Zijn inhoud is derhalve 2,37764 etc. □ meters.

Den inhoud des regelmatigen zeshoeks, achthoeks, tienhoeks vinden wij volgens de oplossing van opgave 17 dezer paragraaf, die, men begrijpt zulks gemakkelijk, van toepassing is voor de berekening der inhouden van alle $2n$ hoeken uit de omtrekken hunner n hoeken.

Wij vinden dus voor den inhoud des regelmatigen zeshoeks, beschreven in eenen cirkel van 1 meter straal, 2,59807 etc. □ meters; voor dien des regelmatigen achthoeks, in denzelfden cirkel beschreven, 2,82842 etc. □ meters; voor dien des regelmatigen tienhoeks, in denzelfden cirkel beschreven, 2,93892 etc. □ meters.

45. 2,41839 etc. □ meters.

46. De inhoud des regelmatigen ingeschreven achthoeks, wanneer de straal zijns ingeschreven cirkels 1 meter is, is 2,82842 □ meters. Het quadraat beschreven op den straal des cirkels, die om den gegevenen regelmatigen achthoek beschreven is, is derhalve 35,35542 etc. □ meters, en die straal zelf 5,94605 etc. meters.

47. Gesteld de inhoud des eersten sectors worde voorgesteld door de letter S, de lengte van zijnen boog door l, de grootte van zijnen hoek door g, de straal zijns cirkels door r, terwijl wij dit alles in den tweeden sector respectivelijk S', l', g', r' noemen, zoo is, daar $S = \frac{1}{2}\, lr$, $S' = \frac{1}{2}\, l'r'$ is,

$lr = l'r'$ of

$l : l' = r' : r$. Wij weten bovendien dat

$l : 2\pi r = g : 360$, en dus

$$l = \frac{\pi g r}{180} \text{ en evenzoo}$$

$$l' = \frac{\pi\ g'r'}{180} \text{ is.}$$

Wij kunnen dus onze evenredigheid ook aldus schrijven

$\frac{\pi\ gr}{180} : \frac{\pi\ g'r'}{180} = r' : r$ en na eene kleine herleiding

$g : g' = r'^2 : r^2$. Nu weten wij dat $g = 40$ $g' = 70$ is en substitueeren dit, zoo is

$40^0 : 70^0 = r'^2 : r^2$.

of $r' = \frac{2}{7} r\sqrt{7}$.

Het komt er dus slechts op aan, te weten, hoe groot r is, om r' onmiddellijk te kunnen berekenen.

In elken sector van 40^0 bestaat de omtrek uit 2 stralen en een' boog die zich tot den straal verhoudt als 1 : 0,6981317 etc.

De straal $= r$ aangenomen zijnde hebben wij dus voor onzen sector van 40^0.

2,6981317 etc. $r = 10$ meters; waaruit volgt

$r = 3{,}706268$ etc. meters.

Dit in de reeds verkregen formule gesubstitueerd, geeft ons voor r', 2,8016751 etc. meters.

§ 207 — § 220.

Aanmerking. Bij alle volgende vraagstukken dezer paragraaf zal de beteekenis der letters I, s, r, h, l, b, de benaming der zijden eens driehoeks a, b, c, en dergelijke zaken bekend worden verondersteld, ten einde niet in hoogst onaangename herhalingen te vervallen. Hij die de bovenopgenoemde paragrafen van het leerboek van Badon Ghyben heeft bestudeerd, zal in het gebruik der letters geene moeielijkheid vinden.

1. $I = \frac{1}{2}bh.$
2. $I = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$
3. $I = \frac{1}{2}r(a+b+c)$ of $I = rs.$
4. $r = \sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$
5. $h = \dfrac{2}{c}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$

Aanmerking. c duidt in dit geval de zijde aan, waarop de loodlijn valt. De breuk der formule kan dus ook $\dfrac{2}{a}$ of $\dfrac{2}{b}$ zijn, indien de loodlijn of op a of op b is neergelaten.

6. $h = \dfrac{2\,I}{b}.$
7. Gesteld de zijden des rechthoeks die aan een hoekpunt samenkomen zijn a en b zoo is de gevraagde inhoud $= ab.$
8. $h = \dfrac{I}{b}$
9. Noemen wij de evenwijdige respectivelijk a en b, zoo is $I = \frac{1}{2}h(a+b).$
10. Laat s de halve som der zijden des vierhoeks zijn, r de straal des ing. cirkels, zoo is
   $I = rs.$
11. Zij I de inhoud, a, b, c en d de zijden en s de halve som der zijden van den vierhoek, dan is $I = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}.$
12. Noem de zijden diens vierhoeks a, b, c, d en de diagonaal e zoo is $I = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-e)} + \sqrt{s'(s'-c)(s'-d)(s'-e)}.$
13. Indien a de zijde diens gelijkzijdigen driehoeks is, is $I = \frac{1}{4}a^2\sqrt{3}.$
14. De loodlijn, op de zijde a eens driehoeks neergelaten, die a, b, c, tot zijden heeft, verdeelt de zijde a in twee stukken, die men in eene functie der zijden aldus kan uitdrukken:
   $$\frac{b^2+a^2-c^2}{2a} \text{ en } \frac{c^2+a^2-b^2}{2a}$$
15. $0 = 2\pi r.$
16. $r = \dfrac{0}{2\pi}.$
17. $0 = \pi d.$
18. $d = \dfrac{0}{\pi}$
19. $I = \pi r^2.$
20. $r = \sqrt{\dfrac{I}{\pi}}.$

21. $I = \frac{1}{4}\pi d^2$.

22. $d = 2\sqrt{\frac{I}{\pi}}$.

23. $I = \frac{O^2}{4\pi}$, $O = 2\sqrt{\pi I}$.

24. Uit vraagstuk 47 der vorige paragraaf zagen wij, dat $s = \frac{1}{2}\, lr$; l echter kan gesubstitueerd worden in eene functie van r en g. Want l is $=\frac{\pi r g}{180}$. Dit gesubstitueerd in de eerste formule, geeft

$$S = \tfrac{1}{2}\, r \times \frac{\pi r g}{180} = \frac{\pi r^2 g}{360}.$$

25. Indien men uit de formule in vorig vraagstuk gevonden:

$S = \frac{\pi r^2 g}{360}$, g oplost, vinden wij

$$g = 360 \times \frac{S}{\pi r^2}.$$

26. Stelkunstige vormen van den eersten graad.
27. Door stelkunstige vormen van den tweeden graad.
28. In stelkunstige vormen van den derden graad.
29. In No. 1. 2. 5. 6. 8. 10. 11. 12. 14 en 16 der gegevene voorbeelden eene lijn, volgens vraagstuk 26 dezer paragraaf.

In No. 3. 4. 7. 13 een vlak, volgens vraagstuk 27 dezer paragraaf. In No. 9 een lichaam, volgens vraagstuk 28 dezer paragraaf.

No. 16 kan niet meetkunstig worden geconstrueerd, tenzij men onmiddellijk achter 't wortelteeken des tellers den factor l invoere. (Zie Badon Ghyben § 212.)

30. Wanneer men in den gegeven vorm l invoert, verandert hij in $x = \frac{3a^2\sqrt{l\,(b + c)} - 4\,al\sqrt{l\,(2b + c)};}{\sqrt{l\,(5a + 3l)}}$.

x is dan te construeeren, en zal een vlak zijn.

31. *a.* De gevraagde zal gelijk zijn aan de vierde evenredige tot d, $5a$ en c.

b. In de vergelijking $x = \frac{2a^2cd}{5b^2f}$ voeren wij eerst eene vierde evenredige t in tot $5b$, $2a$ en a; door deze invoering verkrijgen wij de vergelijking $x = \frac{tcd}{bf}$. Door invoering van eene vierde evenredige u tot b, t en c, verandert onze vergelijking in $x = \frac{ud}{f}$. Eindelijk zoeken wij eene vierde evenredige tot f, u, d die gelijk onze gevraagde x zal zijn.

c. Nadat wij door invoering van l deze vergelijking voor constructie hebben geschikt gemaakt onder dezen vorm:

$$x = \frac{3a^3-2a^2b+b^2l}{a^2-5bl},$$

handelen wij als volgt:

Wij schrijven de vergelijking eerst aldus

$$x = \frac{a\left(3a^2-2ab+\frac{b^2l}{a}\right)}{a\left(a-5\frac{bl}{a}\right)}.$$

Zoek nu eene middenevenredige m
tusschen $3a$ en a; dan is $m^2 = 3a^2$;
eene middenevenredige n
tusschen $2a$ en b; dan is $n^2 = 2ab$;
eene derde evenredige o
tot a en b; dan is $o = \frac{b^2}{a}$;
eene middenevenredige p
tusschen o en l; dan is $p^2 = ol = \frac{b^2l}{a}$;
eene vierde evenredige q
tot a, $5b$, l; dan is $q = \frac{5bl}{a}$;

De invoering van al deze gevondenen doet onze vergelijking veranderen in

$$x = \frac{a\,(m^2-n^2+p^2)}{a\,(a-q)}, \text{ of}$$

$$x = \frac{m^2-n^2+p^2}{a-q}$$

Het verdere der bewerking is dan het volgende:

Construeer eenen rechthoekigen driehoek met m als hypotenusa en n als de eerste der rechthoekszijden. De tweede dier rechthoekszijden in 't quadraat zal $= m^2-n^2$ zijn.

Noemen wij deze gevondene r, en construeeren wij eenen rechthoekigen driehoek onder de rechthoekszijden p en r zoo is de hypotenusa dezes rechth. driehoeks $= \sqrt{(r^2+p^2)} = \sqrt{(m^2+p^2-n^2)}$.

Noemen wij de pas gevonden hypotenusa s; dan rest ons alleen, het vierkant op de lijn s beschreven, te vervormen in eenen rechthoek, die $a-q$ tot basis heeft. De hoogte van dezen rechthoek zal onze gevraagde, zal $= x$ zijn.

d. Zoek eene middenevenredige r tusschen $2a$ en b, dan is $r^2 = 2ab$; zoek verder eene middenevenredige s tusschen $3c$ en d,
zoo is $s^2 = 3cd$.

Construeer eenen rechthoekigen driehoek onder de rechthoekszijden r en s. De hypotenusa van dezen driehoek zal gelijk aan onze x zijn.

e. Nadat wij een quadraat gezocht hebben, dat gelijk is aan de som van a^2, $2b^2$ en $3c^2$, (de wijze waarop zulks geschiedt, is uit de vorige vraagstukken bekend genoeg), zoeken wij een vierkant, dat gelijk is aan het verschil van ons gevonden vierkant en $4d^2$. De zijde van dit laatste vierkant zal onze gevraagde zijn.

f. Maak eerst den vorm homogeen door de invoering van l. In de dus verkregen vergelijking $x = \sqrt{(c^2 + mdl - d^2 - nfl)}$, voeren wij de middenevenredigen t en u in, die wij respectivelijk hebben gevonden tusschen d, l en f, l. Daardoor verandert onze vergelijking in

$$x = \sqrt{(c^2 + mt^2 - d^2 + nu^2)}$$

en wordt geheel behandeld als *e* van dit vraagstuk.

g. Daar a en b lijnen zijn kunnen wij voor a-$2b$ ook eene lijn e, voor $4b$-a eene lijn f schrijven. Brengen wij tevens c achter 't wortelteeken, zoo verandert onze vergelijking in

$$x = 2\sqrt{\frac{c^2e}{f}}.$$

De invoering van eene derde evenredige g, gevonden tot f en c doet onze vergelijking veranderen in $x = 2\sqrt{ge}$.

De invoering van eene middenevenredige h, gevonden tusschen g en e, doet ze veranderen in $x = 2\sqrt{h^2}$.

Dus is x natuurlijk $= 2h$.

h. Deze vergelijking is voor meetkundige constructie niet anders vatbaar, dan met invoering van l. In onze dus verkregen vergelijking

$$x = l\sqrt{\frac{a^2 + 2b^2}{3a^2 - b^2}}$$ vinden wij gemakkelijk eene lijn c zóó,

dat $c^2 = a^2 + 2b^2$ en eene lijn d zóó, dat $d^2 = 3a^2 - b^2$ is.

Wordt dit ingevoerd in onze vergelijking, dan wordt deze

$$x = l\sqrt{\frac{c^2}{d^2}} = \frac{lc}{d}.$$

Handel hiermede als met *a* van dit vraagstuk.

i. Deze vergelijking kan door de tot hier bekende middelen niet geconstrueerd worden.

k. Eerst zoeken wij volgens de bekende wijze $4a^2 - b^2 = r^2$, en vereenvoudigen daarmede onze vergelijking in $x = \sqrt{(2a^2 - ar)}$.

x is dan de middenevenredige tusschen a en $2a - r$.

l. Na deze vergelijking aldus te hebben geschreven:

$$x = \frac{a\,(3bc)}{\sqrt{a^2\left(a^2 - \frac{b^2 \times b^2}{a\;a}\right)}}$$

zoeken wij eene derde evenredige p tot a en b. Daardoor kunnen wij onze vergelijking aldus schrijven

$$x = \frac{3bc}{\sqrt{(a^2 - p^2)}}$$

De invoering van eene middenevenredige q tusschen $3b$ en c, en van een quadraat r^2 dat gelijk a^2-p^2 is verandert onze vergel. in

$$x = \frac{q^2}{r}$$

Eene derde evenredige tot r en q zal onze onbekende wezen.

m. Zoek eerst een quadraat $p^2 = 2a^2-b^2 + c^2$, zoo vereenvoudigen wij onze vergelijking in

$$x = \sqrt{\frac{3a^3 + 2b^3-c^3}{p}}$$

Als wij dit nu nog geschreven hebben:

$$x = \sqrt{\frac{a\ (3a^2 + \frac{2b^3}{a} - \frac{c^3}{a})}{p}},$$

zoeken wij eene vierde evenredige

q tot a, $2b$ en b, dan is $q = \frac{2b^2}{a}$

r „ a, c en c „ „ $r = \frac{c^2}{a}$ en wij vereenvoudigen onze vergelijking in

$$x = \sqrt{\frac{a\ (3a^2 + bq-cr)}{p}}$$

De invoering der middenevenredigen s tusschen b en q, t tusschen c en r doet ons voor x verkrijgen $\sqrt{\frac{a\ (3a^2 + s^2-t^2)}{p}}$;

Gemakkelijk vinden wij een quadraat $u^2 = 3a^2 + s^2-t^2$, en schrijven dan

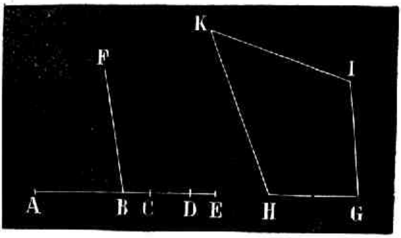
$$x = \sqrt{\frac{au^2}{p}}$$

De invoering van eene vierde evenredige v tot p, a en u, geeft $x = \sqrt{vu}$.

Zoo vinden wij eindelijk, dat x gelijk is aan de middenevenredige tusschen v en u.

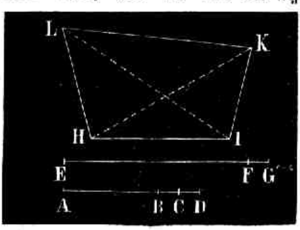
TWEEDE AFDEELING.

1. Laat AB, AC, AD, AE de gegeven zijden des gevraagden vierhoeks zijn en hoek ABF de gegeven hoek.



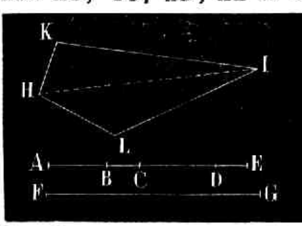
Constructie. Neem HG = AB; trek uit G eene lijn zoodanig dat hoek HGI gelijk is aan den gegeven hoek ABF; maak IG = AC; beschrijf uit I met AD, en uit H met AE als straal cirkelbogen, die elkaar ergens in K snijden. Vereenig eindelijk dit punt K met H en I, zoo zal HGIK de gevraagde vierhoek wezen.

2. Laat AB, AC en AD als zijden, EF en EG als diagonalen des gevraagden vierhoeks gegeven zijn.



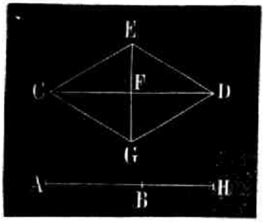
Constructie. Neem HI = AD; beschrijf uit I met de zijde AB, en uit H met de diagonaal EF als straal, cirkelbogen, die elkaar ergens in K snijden; beschrijf daarna uit I met de diagonaal EG en uit H met de zijde AC als straal cirkelbogen die elkaar ergens in L snijden; trek nog IK, KL en HL, zoo zal vierhoek HIKL de gevraagde zijn.

3. Laat AB, AC, AD, AE als zijden, FG als diagonaal des gevraagden vierhoeks gegeven zijn.



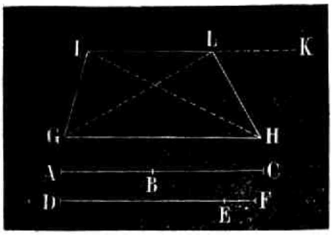
Constructie. Neem HI = den gegevenen diagonaal FG; beschrijf uit H met AB, en uit I met AE als straal cirkelbogen, die elkaar ergens in K snijden; beschrijf verder uit H met AC, en uit I met AD als straal cirkelbogen, die elkaar ergens in L snijden. Trek HK, KI, HL, IL, zoo zal vierhoek HKIL de gevraagde zijn.

4. Laat AB en AH de diagonalen zijn, die gegeven worden.



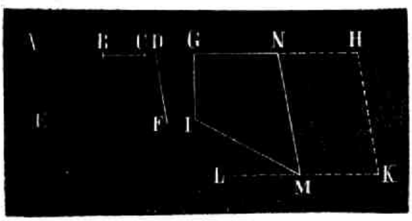
Constructie. Deel den diagonaal CD = AH middendoor in F; laat EG, CD in F loodrecht doorsnijden; maak EF = FG = $\frac{1}{2}$ AB, en trek CE, ED, CG, GD, zoo zal CEDG de gevraagde ruit zijn.

5. Laat gegeven zijn AC als eene der evenwijdige zijden, AB als eene der opstaande zijden, DE en DF als diagonalen.



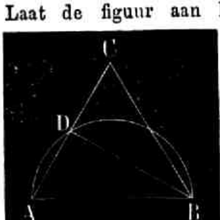
Constructie. Neem GH = de gegevene zijde AC. Beschrijf uit G met AB, en uit H met DF als stralen cirkelbogen, die elkander in I snijden. Trek IK evenwijdig aan GH. Beschrijf met de nog overige diagonaal DE uit G eenen cirkelboog, die de lijn IK in L snijdt. Trek IG en LH, zoo zal vierhoek ILHG het gevraagde trapezium zijn.

6. Laat gegeven zijn AB, AC, AD als zijden des gevraagden vierhoeks, hoek BAE en hoek BDF als hoeken aan de vierde zijde.



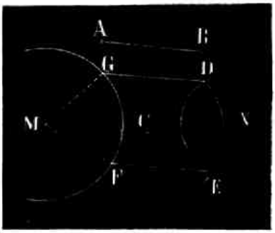
Constructie. Trek uit de uiteinden G en H eener willekeurige lijn GH twee lijnen GI en HK zoodanig, dat hoek HGI = hoek BAE, en hoek GHK = hoek BDF is. Maak GI = AB, HK = AD. Trek KL evenwijdig aan GH, en beschrijf uit I met AC als straal een cirkelboog, die de lijn KL ergens in M snijdt. Trek dan IM, en MN die evenwijdig aan de lijn HK moet zijn, zoo zal GIMN de gevraagde vierhoek wezen.

7. Laat de figuur aan het voorgeschrevene in de opgave voldoen, dan



moet bewezen worden AD = DC. Als wij nog BD trekken is hoek BDA recht. De lijn nu, die uit den top eens gelijkzijdigen driehoeks op de basis loodrecht wordt neergelaten, deelt die basis middendoor.

8. Laat de cirkels M en N gegeven zijn, laat ook de lijn AB in stelling gegeven, en gevraagd zijn, dat de lijn, die tusschen de beide cirkelomtrekken komen moet, gelijk worde aan het stuk dat wij op AB hebben afgezet.



Constructie. Trek uit M eene lijn evenwijdig aan AB, en maak MC gelijk aan het op AB uitgezette stuk; beschrijf uit C, met den straal des cirkels M als straal, eenen cirkelboog, die den gegeven cirkel N of in het geheel niet raakt, of in een punt raakt, of in twee punten snijdt.

In het eerste geval is de constructie onmogelijk.

In het derde geval trekke men uit de snijpunten des gegevenen cirkels N en den geconstrueerden boog, uit D en E, lijnen evenwijdig aan AB, zoo zullen deze beide de gevraagde zijn.

Het tweede geval kan dan alleen plaats hebben, wanneer de afstand van C tot het middelpunt des cirkels N gelijk is aan de som der stralen der beide gegeven cirkels. Een antwoord zal er in dat geval slechts kunnen gevonden worden.

9. Beschrijf met de gegevene lijn als straal uit een willekeurig punt A van eene der beide evenwijdigen eenen cirkelboog, die de andere evenwijdige in B en B′ snijdt. Trek AB en AB′, en door het punt P, hoe het ook gegeven zij, lijnen aan de twee laatstgetrokkene evenwijdig.

Het geval dat de cirkelboog uit A beschreven of de andere evenwijdige in het geheel niet, of slechts in een punt raakt, kunnen wij gerust den lezer overlaten.

10. Laat hoek ABC = 30° en hoek BAC = 90° zijn.

Verbind A met het midden D van BC, zoo is, wanneer men zich een' halven cirkel op BC als middellijn beschreven voorstelt, BD = DC = AD. Derhalve is driehoek BAD gelijkbeenig, en hoek BAD = 30°. Dan is natuurlijk hoek DAC = 60°.; hoek DCA echter is ook = 60°; dus is driehoek DAC gelijkzijdig en derhalve AC = DC = $\frac{1}{2}$ BC.

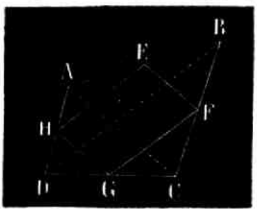
11. Neem twee geheel willekeurige punten A en B aan. Beschrijf daarna met een' straal, die grooter is dan de halve afstand van A en B, zoowel uit A als uit B cirkelbogen, dan zullen deze elkander in 2 punten snijden.

Beschrijf daarna uit dezelfde punten A en B met eenen nieuwen straal, mits ook deze grooter zij dan de halve afstand van A tot B, nieuwe cirkelbogen. De punten waar deze elkander snijden, zullen in eene rechte lijn met de twee pasgevondene liggen.

Deze bewerking kan men met nieuwe stralen herhalen, zoo dikwijls men wil. Bij elke bewerking zal men twee nieuwe punten vinden, die met alle vroeger gevondene in eene rechte lijn liggen.

12. Neem op den omtrek der gegeven kromlijnige figuur eenige willekeurige punten aan. Trek uit een dezer punten eene willekeurige rechte lijn, en geef die eene willekeurige lengte. Trek daarna uit alle overige punten op den omtrek der gegeven figuur lijnen aan de pasgetrokkene evenwijdig en gelijk van richting; maak deze lijnen zoo lang als wij de eerstgetrokkene gemaakt hebben. Langs de vrije eindpunten van al deze lijnen trekken wij de nieuwe kromlijnige figuur, die volmaakter zal zijn, naarmate het aantal punten op den omtrek der gegeven figuur aangenomen, grooter is.

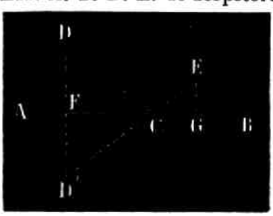
13. Laat ABCD onze gegeven vierhoek zijn. Laat de zijden AB, BC, CD, AD respectivelijk in de punten E, F, G, H middendoorgedeeld, en HE, EF, FG, GH getrokken zijn.



Bewijs. Wijl AD : AH = AB : AE = 2 : 1 is, is de lijn HE evenwijdig aan BD. Om eene soortgelijke reden is ook
GF evenwijdig aan BD.
HG evenwijdig aan AC.
EF evenwijdig aan AC.

Dus is ook HE evenwijdig aan GF, en HG evenwijdig aan EF, en derhalve vierhoek EFGH een parallelogram.

14. Laat A. B. D. E. de dorpstorens zijn, waarvan in de opgave gesproken is.



Constructie. Laat uit D en E loodlijnen neer op de lijn AB (DF en EG.) Verleng DF door F heen tot dat DF = D′F is; trek daarna D′E, en uit het snijpunt C dezer lijn en de lijn AB eene lijn naar D. Na deze constructie zal hoek ACD = hoek BCE zijn.

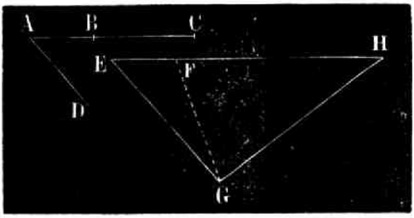
Bewijs. Driehoek D′FC is gelijk en gelijkvormig met driehoek DFC; want F′C = FC, D′F = DF en hoek D′FC = hoek DFC = R. Derhalve is hoek D′CF = hoek DCF.

Maar ook hoek ECG is gelijk hoek D′CF, dus is ook hoek ECG = hoek DCF.

15. Deel eene der zijden des vierkants middendoor, en beschrijf uit het gevonden deelpunt. met de zijde des vierkants als straal, een' cirkelboog. Verbind de 2 punten waar deze boog twee zijden des vierkants snijden zal, met elkander en met het eerstgevonden punt. De dus gevormde driehoek zal de gevraagde zijn.

16. Laat gegeven zijn AC als basis, AB als verschil der opstaande zijden

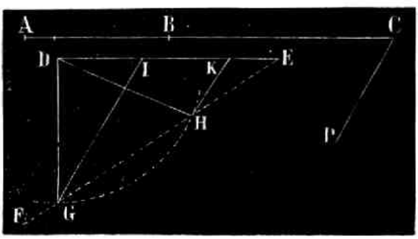
des gevraagden driehoeks, hoek CAD als de hoek aan de basis van denzelfden driehoek.



Constructie. Neem EF gelijk aan AB; trek uit E eene lijn EG zóó, dat hoek FEG = gegeven hoek CAD is. Maak EG = AC; trek FG; verleng EF door F, en maak hoek FGH = hoek GFH, dan zal driehoek EGH de gevraagde wezen.

Bewijs. EG is gelijk aan de gegeven basis geconstrueerd; hoek FEG hebben wij aan den gegeven hoek gelijk gemaakt. Wij moeten dus alleen aantoonen dat EH—HG = EF = AB is. Dit is uiterst gemakkelijk, want daar hoek HFG = hoek FGH is, is ook FH = GH, of wat hetzelfde is, EH—HG = EF = AB.

17. Wanneer ons basis en omtrek eens driehoeks gegeven zijn, is ons natuurlijker wijze ook het verschil dier twee gegevens, of de som der opstaande zijden gegeven. Laat derhalve ons gegeven zijn dat AC de som der zijden, AB de basis, hoek ACP de tophoek van gevraagden driehoek zijn.



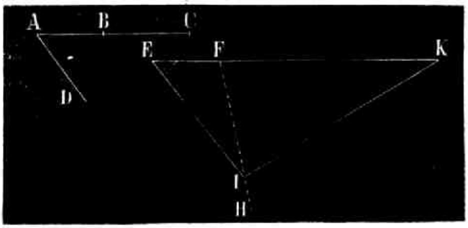
Constructie. Neem DE = BC, en trek uit E eene lijn EF zoodanig dat hoek DEF = $\frac{1}{2}$ hoek ACP zij.

Beschrijf uit D met AB als straal een cirkelboog, die de lijn EF meestal in twee punten (hier in G en H) zal snijden; trek dan DG en DH, en daarna nog GI en HK zóó, dat hoek IGE en hoek KHE beide gelijk aan hoek DEF zijn. De beide driehoeken DIG en DKH zullen dan aan de vereischten voldoen.

Bewijs. In drieh. DIG is DG = de gegeven basis, DI + IG gelijk de gegeven som der opstaande zijden. Want daar driehoek GIE gelijkbeenig is, wegens de gelijkheid der hoeken IGE en GEI, is het hetzelfde of wij schrijven DI + IG of DI + IE. DI + IE echter is gelijk de gegeven som der opstaande zijden; dus is ook DI + IG daaraan gelijk.

Gemakkelijk bewijzen wij nu nog dat hoek DIG gelijk is aan gegeven tophoek. Hoek DIG toch is gelijk hoek EGI + hoek IEG, dus gelijk aan het dubbel van een' hoek die gelijk geconstrueerd is aan de helft des gegevenen tophoeks, of, wat hetzelfde is, gelijk aan den gegeven tophoek.

Aanmerking. Wij meenden de twee gevallen dat de boog uit D beschreven EF of in het geheel niet, of slechts in een punt raakte, gerust aan den lezer te kunnen overlaten, en zullen ook hierna, zonder eenige aanduiding daarvan, zulke gevallen met stilzwijgen voorbijgaan.



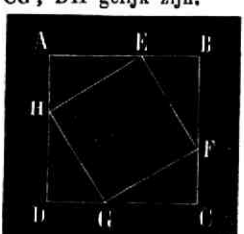
18. Laat gegeven zijn AB als verschil der opstaande zijden, AC als basis, hoek BAD als tophoek des gevraagden driehoeks.

Constructie. Neem EF = AB en verleng haar door F; trek FH zoodanig dat hoek KFH gelijk zij aan het halve supplement van den gegeven tophoek; beschrijf uit E met AC als straal eenen cirkelboog die FH ergens in I zal snijden; trek EI. Eindelijk trekken wij nog de lijn IK zóó, dat hoek FIK ook gelijk het halve supplement van den gegeven tophoek zij. Driehoek EIK is dan de gevraagde.

Bewijs. Daar driehoek FKI wegens de gelijkheid der hoeken aan de zijde FI gelijkbeenig, d. i. FK = IK is, is ook EK—IK = EF = het gegeven verschil der opstaande zijden. Wijl hoek KFH = hoek FIK = het halve supplement van den gegeven tophoek is, is hoek FKI = den gegeven tophoek.

EI is geconstrueerd gelijk aan de gegeven basis AC.

19. Laat gegeven zijn, dat vierhoek ABCD een vierkant zij, en AE, BF, CG, DH gelijk zijn.



Wijl ook AB = BC = CD = AD is, is BE = CF = DG = AH.

Wij weten dus van de driehoeken BEF, CFG, DGH en AEH,

BE = CF = DG = AH
BF = CG = DH = AE.

hoek B = hoek C = hoek D = hoek A = R.

Deze driehoeken zijn derhalve gelijk en gelijkvormig, en dus is ook

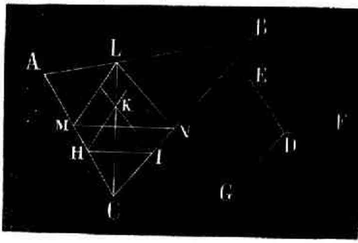
EF = FG = GH = EH.

Ook is hoek HGD = hoek GFC; tellen wij hierbij
hoek FGC = hoek FGC, zoo krijgen wij
hoek HGD + hoek FGC = R.

Trekken wij dit af van hoek HGD + hoek HGF + hoek FGC = 2R. Zoo houden wij over hoek HGF = R.

Wij weten dus van vierhoek EFGH dat het eene ruit is met eenen rechten hoek: d. i. dat het een vierkant is.

20. Laat ABC de gegeven driehoek en DE, DF, DG de drie in stelling gegeven lijnen zijn.



Constructie. Trek uit een willekeurig punt H op AC eene lijn HI evenwijdig aan DF, en laat deze de lijn BC bijv. in I snijden; trek IK evenwijdig aan DE, en HK evenwijdig aan GD; laat deze lijnen elkaar in K snijden. Trek nu CK, en verleng die zoo noodig. Laat CK of zijn verlengde AB in L snijden; wanneer men dan nog LM evenwijdig aan HK, en LN evenwijdig aan KI trekt, en M en N vereenigt, is LMN de gevraagde driehoek.

Bewijs. Of LM en LN evenwijdig aan DG en ED loopen, kan moeielijk betwijfeld worden. Men kan alleen betwijfelen of MN aan HI en DF evenwijdig loopt, en wij hebben, wanneer wij dit bewezen hebben, tevens bewezen, dat onze driehoek LMN de gevraagde is.

Drieh. CHK is gelijkv. met drieh. CML;

want hoek C = hoek C, en wegens de evenwijdigheid van HK en LM is CH : CM = CK : CL.

Drieh. CKI is gelijkv. met drieh. CLN.

want hoek C = hoek C, en wegens de evenwijdigheid van KI en LN is CI : CN = CK : CL.

Hieruit weten wij natuurlijk dat CH : CM = CI : CN staat, of, wat 't zelfde is, dat HI evenwijdig aan MN en dus ook MN evenwijdig aan DF loopt.

21. Laat gegeven zijn dat driehoek HIK de gegeven driehoek is en dat de lijnen AB, AC, AD de drie in stelling gegeven lijnen zijn; laat verder de getallen a, b, c = 2. 3 en 4 zijn.

Constructie. Neem eene willekeurige lijn als eenheid aan;

zet op AC, AF af gelijk aan twee dezer eenheden,

„ AB, AE „ „ vier „ „

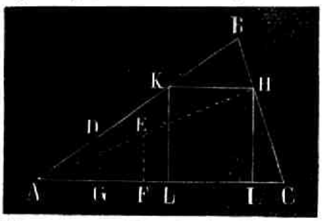
„ AD, AG „ „ drie „ „

Trek door G, LM evenwijdig aan IK, door F, MN evenwijdig aan HK, door E, LN evenwijdig aan HI. Trek verder NA en MA. Trek eindelijk nog HQ evenwijdig aan NA, en KO evenwijdig aan MA. Het snijpunt der beide laastgetrokken lijnen zal het gevraagde punt P zijn.

Het bewijs hiervoor, uit de gelijkvormigheid van driehoeken ontleend, is en langwijlig en gemakkelijk, en zal daarom door ons hier achterwege gelaten worden.

22. Beschrijf eenen gelijkzijdigen driehoek op de diagonaal, waaraan eene der zijden des gevraagden driehoeks moet evenwijdig loopen. Trek door dat hoekpunt van het gegeven vierkant, dat binnen den geconstrueerden driehoek ligt, lijnen evenwijdig aan de beide laatstgeconstrueerde zijden van den pasgenoemden driehoek. Vereenig de twee punten waar deze lijnen de zijden des gegeven vierkants snijden.

23. Zij de gegeven driehoek, drieh. ABC.

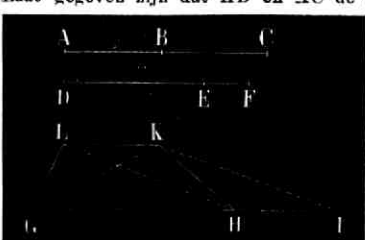


Constructie. Laat uit een willeurig punt D der zijde AB eene loodlijn vallen op AC. Maak GF = DG, en trek DE evenwijdig aan GF, en FE evenwijdig aan DG. DEFG is dan een vierkant, want alle zijden zijn gelijk, en hoek DGF is recht. Trek nu AE en verleng die, zoo noodig, tot in BC, trek HK evenwijdig aan DE, HI evenwijdig aan EF, KL evenwijdig aan DG, zoo zal KHLI het gevraagde vierkant zijn.

Bewijs. Driehoek ADE ∞ drieh. AKH, dus DE : KH = AE : AH.
driehoek AEF ∞ drieh. AHI, „ EF : HI = AE : AH.
dus ook DE : KH = EF : HI.

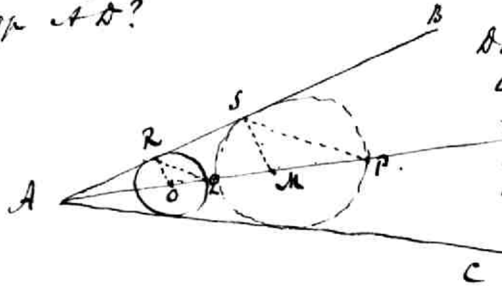
en daar DE = EF is, is dus ook KH = HI. Verder valt het zeer gemakkelijk te bewijzen, dat alle hoeken van fig. KHIL recht zijn, en zij dus een vierkant is.

24. Laat gegeven zijn dat AB en AC de evenwijdige zijden van gevraagd trapezium zijn, waarin DE en DF diagonalen zullen moeten wezen.



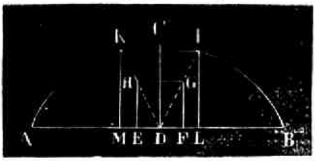
Constructie. Zet op eene lijn naast elkander uit GH = AC en HI = AB; beschrijf op GI als basis eenen drieh. GKI onder de opstaande zijden GK = DE en KI = DF. Trek LK evenwijdig aan GI, HL evenwijdig aan KI, en vereenig K met H, L met G, dan zal LGHK het gevraagde trapezium zijn.

26 Hoe geschiedt dit wanneer P ligt op AD?

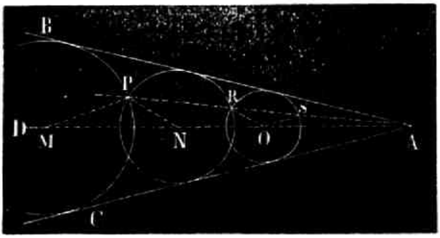


Dan heeft men deze constructie Construeer eerst een cirkel OR die de beenen van hoek BAC aanraakt trek RQ en verder PS // RQ en eindelijk S en R lijnen SM en RO die // zijn

25. Zij ABC 't gegeven segment. Deel de koorde AB midden door in D en laat CD loodrecht zijn op AB. Neem nu ter wederzijde van D gelijke stukken DE en DF op AB, en beschrijf op EF als zijde het vierkant EFGH. Trek vervolgens DG en DH en verleng ze, zoo noodig tot aan den omtrek des cirkels in I en K. Laat uit deze punten loodlijnen IL en KM neder op de koorde, en trek KI, dan zal KILM 't verlangde vierkant zijn.

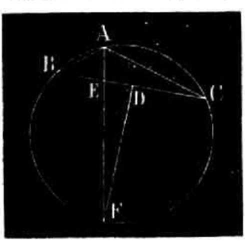


26. Laat AB en AC de twee gegeven lijnen zijn, en P 't gegeven punt.
Constructie. Verleng de gegeven lijnen, zoo noodig, tot zij elkander snijden. Vereenig hun snijpunt A met P, en deel door eene lijn AD den hoek BAC midden door. Beschrijf uit een willekeurig punt O der lijn AD eenen cirkel, die AB en AC raakt. Vereenig het punt O met de twee punten R en S waar de lijn AP den geconstrueerden cirkel snijdt. Trek uit P eene lijn evenwijdig aan OR (PN) en eene andere (PM) evenwijdig aan OS. Beschrijf uit M en N, met MP en PN als respective stralen, twee cirkels, die beide aan de vereischten zullen voldoen.



'**t Bewijs hiervoor is gelijkvormig met dat van vraagstuk 23 dezer afdeeling.**

27. Gegeven koorde zij BC. Ook sta BE : EC = P : Q.



Constructie. Deel BC middendoor; richt DF loodrecht op BC. Trek FE en verleng die tot in het punt A des cirkelomtreks; trek nog AB en AC dan zijn deze de gevraagde koorden.

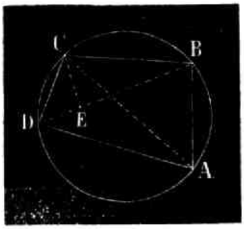
Bewijs. In △ ABC is ∠ BAC door de lijn AF middendoor gedeeld; want omdat DF loodrecht staat op het midden van BC, is boog BF gelijk boog FC, of hoek BAF = hoek FAC.

Derhalve is in dien zelfden driehoek

BE : EC = BA : AC.

maar BE : EC = P : Q.
dus is ook BA : AC = P : Q.

28. Zij ABCD een willekeurige vierhoek beschreven in eenen cirkel.

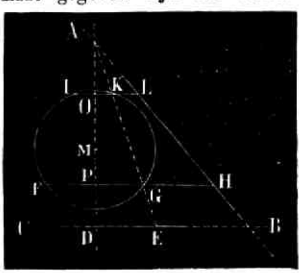


Trek om het gevraagde te bewijzen, behalve de diagonalen, nog de lijn CE zóó, dat hoek DEC gelijk zij aan hoek CBA des vierhoeks.

Bewijs. Driehoek ABC gelijkvormig met drieh. CED.

want hoek ABC = hoek DEC.
en hoek BAC = hoek CDE.
dus is AB : DE = AC : CD.
of AB × CD = DE × AC.
ook is drieh. BEC gelijkv. met drieh. ADC.
want hoek CEB = hoek ADC
(suppl. v. gelijke hoeken)
en hoek EBC = hoek CAD.
dus is AD : EB = AC : BC.
of AD × BC = EB × AC. Voeg hierbij wat wij reeds vonden AB × CD = DE × AC,
zoo hebben wij AD × BC + AB × CD = (EB + DE) AC.
of AD × BC + AB × CD = BD × AC.

29. Laat gegeven zijn dat cirkel M in grootte en stelling, AB aan de eerste gegeven lijn, BC aan de tweede gegeven lijn beantwoordende, in stelling gegeven zijn, zoo als dat in onze figuur is geschied.



Constructie. Laat uit M eene loodlijn MD op BC of haar verlengde neer en verleng die lijn MD totdat zij ook AB snijdt; verleng nu nog zoo noodig BC en AB tot zij elkander snijden. Verdeel DB door een punt E zoo in twee deelen dat

DE : EB = $\frac{1}{2}$ m. : n.

Trek AE en trek IL en FH, door K en G, de snijpunten van AE en den geg. cirkel, evenwijdig aan BC. De lijnen IL en FH zullen dan de gevraagde zijn.

Bewijs. Het valt zeer licht te bewijzen dat

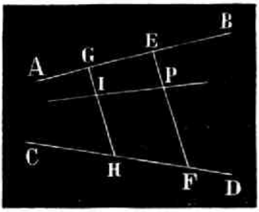
OK : KL = PG : GH = DE . EB = $\frac{1}{2}$ m : n.

Vermenigvuldig alle voorgaande termen met 2, zoo hebben wij

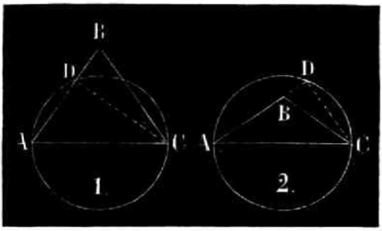
IK : KL = FG : GH = m. : n.

Want dat IK = 2 OK FG = 2 PG is, zal wel niemand betwijfelen, wanneer hij er op let dat de hoeken O en P recht zijn.

30. Laat AB en CD de gegeven lijnen, en P het gegeven punt zijn. Trek dan door P eene willekeurige lijn, die AB en CD beide snijdt, de eerste in E, en de tweede in F. Trek verder eene andere lijn GH evenwijdig aan EF, en verdeel die in het punt I in dezelfde reden, als waarin EF door het punt P verdeeld is. Zoo men dan PI trekt, zal deze gaan door het snijpunt van AB en CD.



31. Twee gevallen kunnen zich bij dit vraagstuk voordoen. Het toppunt des gelijkbeenigen driehoeks kan binnen of buiten den cirkelomtrek vallen. (Het geval dat B juist op den cirkelomtrek valt, zou de gegeven formule terugbrengen tot de allereenvoudigste toepassing van Pythagoras theorema).



Trek in fig. 1 en 2 beide de hulplijnen DC dan is in fig. 1.

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \times BD.$$

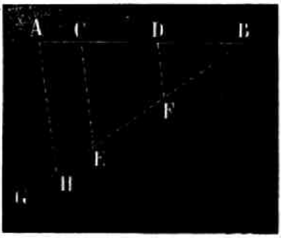
$$2.\quad \begin{array}{l} \underline{AC^2 = 2AB^2 - 2AB \times BD} \\ 2r^2 = AB \times AB - BD \times AB. \\ \quad\; = (AB - BD)\, AB = AD \times AB. \end{array}$$

en in fig. 2

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2AB \times BD.$$

$$2.\quad \begin{array}{l} \underline{AC^2 = 2AB^2 + 2AB \times BD.} \\ 2r^2 = AB \times AB + BD \times AB. \\ \quad\; = (AB + BD)\, AB = AD \times AB. \end{array}$$

32. Laat AB de gegevene lijn zijn.



Trek uit B eene lijn, die met AB een willekeurigen hoek maakt. Zet op deze lijn uit BF = de gegeven lijn P, FE = de gegeven lijn Q, EH = de geg. lijn R; trek AH, en door E en F lijnen aan deze AH evenwijdig, zoo zal AB in C en D op gevraagde wijze verdeeld zijn.

33. Dit vraagstuk is bijkans hetzelfde als het vorige. Neem eene willekeurige lengte-eenheid aan. Zet (zie fig. vorig vr.) van B af op BG uit BF = 3 dier lengte-eenheden, EF = 7, EH = 11 dierzelfde eenheden, enz.

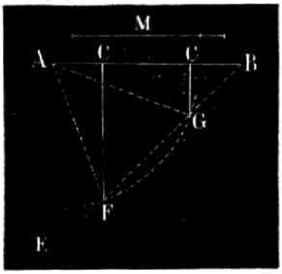
34. Neem op den omtrek dier fig. een willekeurig punt aan. Vereenig dat met een zoo groot mogelijk aantal andere punten op den omtrek dier figuur. Ga verder te werk zoo als volgt.

35. Door berekening kan men ook de plaats van het punt C vinden: De mogelijkheid eener oplossing leidt men uit deze berekening zeer geschikt af.

Maak eene dier lijnen grooter of kleiner naarmate de nieuwe figuur grooter of kleiner moet zijn dan de oorspronkelijke. Maak dan ook alle andere der getrokken lijnen in dezelfde reden grooter of kleiner als de eerste, en vereenig alle zoo gevonden punten op dezelfde wijze als de daarmede gelijkstandige punten in de oorspronkelijke figuur vereenigd waren.

Dat deze oplossing slechts approximatief is, en in nauwkeurigheid wint, naarmate het aantal punten, op den omtrek der oorspr. figuur aangenomen, grooter is, behoeft wel geene opmerking.

35. Zij gegeven dat de lijn AB door een punt C moet verdeeld worden, en dat M de zijde van het gegeven vierkant zij.



Constructie. Trek uit B de lijn BE zóó, dat hoek ABE $= 45^0$ zij. Beschrijf uit A met M als straal eenen cirkelboog. Laat deze in F en G de lijn BE snijden. Laat FC en GC′ loodrecht op AB neer, dan voldoen de beide punten C en C′ aan 't gevraagde.

Bewijs. Drieh. BC′G is gelijkbeenig.

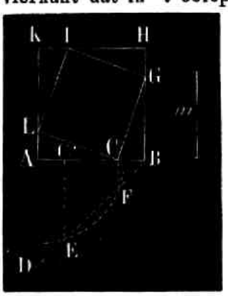
Want hoek BC′G is recht, hoek C′BG $= 45^0$: dus is ook $\angle$ C′GB $= 45^0$.

BC′ derhalve is gelijk C′G en $BC' + AC' = C'G + AC' = AB$.

tevens is $AC'^2 + C'G^2 = AC'^2 + BC'^2 = AG^2 = M^2$.

Op geheel dezelfde wijze wordt ook bewezen, dat het andere punt C aan 't vereischte voldoet.

36. Zij ABHK het gegeven vierkant, en de lijn m de zijde van het nieuwe vierkant dat in 't oorspronkelijke moet beschreven worden.



Constructie. Zij hoek ABD $= 45^0$; beschrijf uit A met de lijn m als straal eenen cirkelboog. Laat die de lijn BD in E en F snijden. Laat verder FC en EC′ loodrecht op AB neer.

Zet nu op AK, KH, HB, respectivelijk van uit de punten A. K. H. de stukken AL, KI en HG uit, ieder gelijk aan het gevonden stuk CB en vereenig L en G beide met C en I. De vierhoek LCGI zal het gevraagde vierkant zijn.

Bewijs. Trekken wij van $AB = BH = HK = AK$ af

$BC = HG = KI = AL$, dan vinden wij

$AC = BG = IH = KL$.

$m^2 = AF^2 = BC^2 + AC^2$ (zie vorig vraagst.) is dus ook gelijk

$$AC^2 + AL^2 = BG^2 + BC^2 = HG^2 + IH^2 = KI^2 + KL^2.$$
$$= \quad LC^2 \quad = \quad GC^2 \quad = \quad IG^2 \quad = \quad IL^2.$$

Dus is $LC = GC = IG = IL = m$.

Uit de gelijkvormigheid van drieh. ALC met drieh. CBG

volgt hoek ALC = hoek GCB.

tel hierbij „ LCA = „ LCA, zoo is

1 rechte = hoek GCB + hoek LCA.

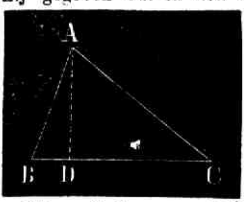
Trekken wij dit af van

hoek GCB + hoek GCL + hoek LCA = 2 R,

zoo vinden wij hoek GCL = R.

Daar derhalve vierhoek LCGI heeft vier zijden ieder gelijk m, en éénen rechten hoek, is die vierhoek 't gevraagde vierkant.

37. Zij gegeven dat in den driehoek ABC, AD loodrecht op BC sta en dus te bewijzen zij



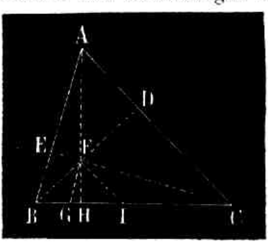
$$BC - BD \,.\, AC - AB = AC + AB : BC.$$

Bewijs. $AC^2 = AD^2 + DC^2$
$AB^2 = AD^2 + BD^2.$
———————————— aft.
$$AC^2 - AB^2 = DC^2 - BD^2 \text{ of}$$
$$(AC - AB)(AC + AB) = DC - BD)(DC + BD)$$

Dit geeft de evenredigheid die wij zochten

$$DC - BD : AC - AB = AC + BA : BC.$$

38. Laat in den willekeurigen driehoek ABC, AH loodrecht op BC, EC loodrecht op AB staan. Trek BF en verleng die tot in D, dan hebben wij te bewijzen dat hoek ADB recht is.



Trek om dit te *bewijzen* FG evenwijdig aan AB, FI evenwijdig aan AC, dan is

uit de gelijkvormigheid van drieh. ABH en drieh. FGH

$$BH : GH = AH : FH. \quad (1)$$

„ „ „ „ „ AHC met drieh. FHI

$$AH : FH = HC : HI. \quad (2)$$

Uit (1) en (2) volgt $BH : GH = HC : HI$ en

$$BH \times HI = GH \times HC.$$

Maar daar hoek BEC recht is, en evenzoo hoek GFC, omdat AB evenwijdig is aan GF, is

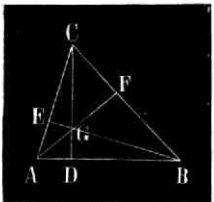
$$GH \times HC = FH^2.$$

Nu is dus ook $BH \times HI = FH^2$ of

$BH : FH = FH : HI$. Voeg hierbij dat hoek BHF = hoek FHI = recht is dan is

drieh. BHF gelijkvormig met drieh. HFI en dus
hoek FBH = hoek HFI. Tel hierbij
hoek BFH = hoek BFH, dan hebben wij
1 R = hoek BFI, of wegens de evenwijdigheid van FI met AC, hoek CDB = R. q. e. d.

39.

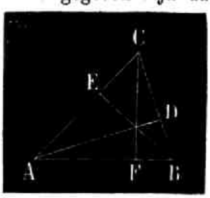


Volgens § 120 van Badon's leerboek berekent men gemakkelijk de drie loodlijnen en de zes stukken, waarin deze de zijden verdeelen, wanneer de zijden des driehoeks gegeven zijn. Wij mogen dus deze negen lijnen als bekend aannemen. Neemt men nu verder in aanmerking, dat

	hoek DBG	= hoek ACD,	beide als compl. van hoek	BAC,
	hoek FBG	= hoek FAC,	„ „ „ „ „	ACB,
	hoek FCG	= hoek FAB,	„ „ „ „ „	ABC,
	hoek ECG	= hoek ABE,	„ „ „ „ „	BAC,
	hoek EAG	= hoek CBE,	„ „ „ „ „	ACB,
en	hoek DAG	= hoek BCD,	„ „ „ „ „	ABC

is, zoo volgt daaruit dat:
driehoek DBG ∾ ACD, driehoek FBG ∾ driehoek FAC, driehoek FCG ∾ driehoek FAB, driehoek ECG ∾ driehoek ABE, driehoek EAG ∾ driehoek CBE, en driehoek DAG ∾ driehoek BCD is. Zoo zal dan ook CD : BD = AC : BG zijn, waaruit BG bekend wordt, enz.

40. Laat gegeven zijn dat in driehoek ABC de loodlijnen CF, BE, AD



respectivelijk $= c.\ b.\ a.$ zijn, en de inhoud van drieh. ABC gesteld worden $= \frac{1}{2}\,x$, zoo is $BC = \frac{x}{a}$, $AC = \frac{x}{b}$, $AB = \frac{x}{c}$. Zeer gemakkelijk vinden wij nu $BD = \frac{1}{c}\sqrt{(x^2-a^2c^2)}$, $CD = \frac{1}{b}\sqrt{(x^2-a^2b^2)}$. Dit opgeteld geeft $\frac{x}{a} = \frac{1}{b}\sqrt{(x^2-a^2b^2)} + \frac{1}{c}\sqrt{(x^2-a^2c^2)}$ of $\frac{x}{a} - \frac{1}{b}\sqrt{(x^2-a^2b^2)} = \frac{1}{c}\sqrt{(x^2-a^2c^2)}$. Dit in 't quadraat is $\frac{x^2}{a^2} - \frac{2x}{ab}\sqrt{(x^2-a^2b^2)} + \frac{x^2}{b^2} - a^2 = \frac{x^2}{c^2} - a^2$, of $\frac{x^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} - \frac{x^2}{c^2} = \frac{2x}{ab}\sqrt{(x^2-a^2b^2)}$. Dit in 't quadr.; (gesteld dat $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2} = \frac{1}{d^2}$ is.)

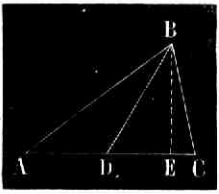
$$\frac{x^4}{d^4} = \frac{4x^2}{a^2b^2}(x^2-a^2b^2) \text{ of } \frac{x^4}{d^4} = \frac{4x^4}{a^2b^2} - 4x^2 \text{ of } \frac{x^2}{d^4} = \frac{4x^2}{a^2b^2} - 4.$$

Dit vermenigv. met $a^2b^2d^4$ geeft

$$a^2b^2x^2 - 4d^4x^2 = -4a^2b^2d^4 \text{ of } x^2 = \frac{4a^2b^2d^4}{4d^2 - a^2b^2} \text{ of}$$

$$x = \frac{2abd^2}{\sqrt{(4d^2 - a^2b^2)}}$$

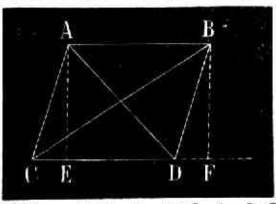
41. Laat in den willekeurig aangenomen driehoek ABC, $AD = DC$ gegeven zijn. Wanneer wij dan BE loodrecht op AC neerlaten, is



$AB^2 = AD^2 + BD^2 + 2AD \times DE$ (1)
$BC^2 = DC^2 + BD^2 - 2DC \times DE$ of daar $AD = DC$ is, $= AD^2 + BD^2 - 2AD \times DE$ (2).

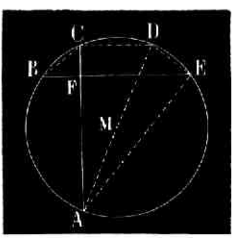
Verg. (1) geteld bij verg. (2) geeft
$AB^2 + BC^2 = 2\,(AD^2 + BD^2.)$ q. e. d.

42. Laat ABCD een parallelogram, en AE en BF loodlijnen zijn op CF, dan is natuurlijk drieh. ACE = en ∞ drieh. BDF, en dus $CE = DF$ en



$$BC^2 = CD^2 + BD^2 + 2\,CD \times DF = CD^2 + BD^2 + 2\,CD \times CE$$
$$AD^2 = CD^2 + AC^2 - 2\,CD \times EC = AB^2 + AC^2 - 2\,CD \times CE.$$
$$\overline{BC^2 + AD^2} = \overline{CD^2 + BD^2 + AB^2 + AC^2}.$$

43. Laat BE en CA twee koorden van den cirkel M zijn, die zich onder een rechten hoek snijden, AD eene middellijn des cirkels zijn.



Wanneer wij dan de hulplijnen BC, CD, DE, AE trekken, is
$BC^2 = CF^2 + BF^2.$
$AE^2 = AF^2 + EF^2.$
$\overline{BC^2 + AE^2 = CF^2 + BF^2 + AF^2 + EF^2.}$

Nu loopt CD evenwijdig aan BE: want hoek DCF is gelijk hoek $AFE = R$. Hierdoor is boog DE = boog BC, en weder hierdoor koorde DE = koorde BC.

Substitueeren wij dit in 't geen wij reeds hadden verkregen, zoo hebben wij

$$DE^2 + AE^2 = AF^2 + BF^2 + CF^2 + EF^2$$

Maar daar AD eene middellijn, bijgevolg drieh. ADE rechthoekig is, is ook

$$AD^2 = DE^2 + AE^2$$

en dus $AD^2 = AF^2 + BF^2 + CF^2 + EF^2.$

46/ Trek AE $\therefore$ $AE > DE$ of $AE > CD$

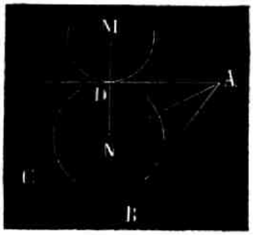
Dus volgt uit $\triangle\, AEM$ en CDM terstond

$\angle CMA < \angle AME$ of

$\frown CA < \frown AB$.

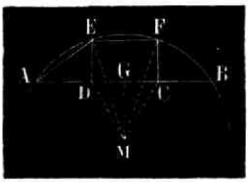
46./ Was bij $AC = AB$ dan was $\angle CMA = \angle AMB$ en dus $CM : ME = CD : DE$ hetgeen onwaar is.

44. Laat cirkel M gegeven zijn, en gevraagd worden dat de nieuwe cirkel dezen cirkel in D, en de lijn AB rake.



Constructie. Trek MD en verleng die, richt uit D op MN eene loodlijn AD op. Verdeel den hoek waaronder deze de gegegeven lijn AB snijdt in twee gelijke deelen door de lijn AC. Het snijpunt van MN en AC zal 't middelpunt des gevraagden cirkels zijn, dien wij met den straal DN zullen beschrijven.

45. Zij AB gegeven koorde en AD = DC = CB. Trek de hulplijnen DM, CM, EM, FM, en de loodlijn GM naar 't midden van AB, dan is



Drieh. DGM = en ∞ drieh. CGM. Want DG = GC, MG = MG, hoek DGM = hoek CGM = R.

Dus is hoek GDM = hoek GCM en DM = MC.

tel hierbij hoek GDE = hoek GCF = R, dan hebben wij

hoek MDE = hoek MCF.

Drieh. DME = en ∞ drieh. CMF; want DM = MC (zie boven)

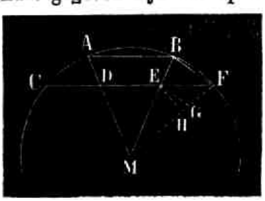
ME = MF

hoek MDE = hoek MCF.

Dus is ED = FC, DEFC bijgevolg een rechthoek en EF = DC = AD.

In den rechthoekigen driehoek ADE is nu natuurlijk de hypotenusa AE langer dan de rechthoekszijde AD, dus ook langer dan EF, bijgevolg boog AE ook grooter dan boog EF.

46. Laat gegeven zijn dat op koorde CF, de drie stukken CD, DE, EF gelijk zijn, dan moet bewezen worden dat boog AB niet gelijk boog BF en koorde AB „ „ koorde BF zijn kan.



Wanneer wij nu als hulplijnen trekken EG evenwijdig aan BF, EH loodrecht op MF, zoo is op bijna gelijke wijze als in 't vorig vraagstuk te bewijzen dat AB evenwijdig loopt met CF en derhalve driehoek DEM en driehoek ABM gelijkvormig zijn. Daaruit leiden wij af

DE : AB = ME : MB

Maar ook drieh. MEG en drieh. MBF

zijn gelijkvormig dus is ook EG : BF = ME : MB en

dus ook DE : EG = AB : BF

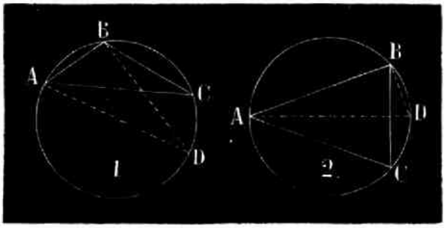
In den gelijkbeenigen driehoek MEG is nu hoek MGE immer kleiner dan een rechte hoek, en valt dus de loodlijn uit E op MG niet op diens verlengde. Nu is dus EG kleiner dan EF, wijl EF zich verder dan EG van 't voetpunt der loodlijn EH verwijdert. EG is dus ook kleiner dan DE die gelijk EF is, en derhalve ook BF kleiner dan AB of, wat hieruit van zelve volgt boog AB grooter dan boog BF.

47. Gesteld de kortste diagonaal eener ruit zij a en hare zijde b. Zoo is de langste diagonaal $2\sqrt{(b^2 - \frac{1}{4}a^2)}$.

48. Bij eenen stomphoekigen driehoek ABC (fig. 1) is de stompe hoek ABC = 1 R + hoek DBC. De hoek gevormd door de basis en de middellijn des omgeschreven cirkels is hoek CAD.

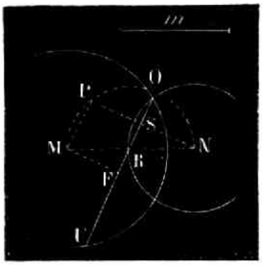
Beide worden gemeten door ½ boog CD en zijn dus gelijk.

Bij eenen scherphoekigen driehoek ABC (fig. 2) is de scherpe hoek ABC = 1 R—hoek CBD. De hoek gevormd door de basis en de middellijn des omgeschreven cirkels is hoek DAC.



Beide worden gemeten door ½ boog CD en zijn dus gelijk.

49. Laat de cirkels M en N in grootte en stelling gegeven zijn en het stuk tusschen de twee omtrekken de lengte moeten hebben van de lijn m.



Constructie. Vereenig de middelpunten der gegeven cirkels M en N, en beschrijf op MN eenen halven cirkel. Beschrijf uit M met eene straal = ½ m eenen cirkelboog die den beschreven halven cirkel in P snijdt. Trek MP, en door Q eene lijn aan MP evenwijdig, dan zal deze de begeerde lijn zijn.

Bewijs. Als wij tot hulplijnen nu nog trekken PN, MF loodrecht op QU, is

QU = 2 QF, en wijl NP loodrecht op MP, en dus ook op QU staat,

QR = 2 QS

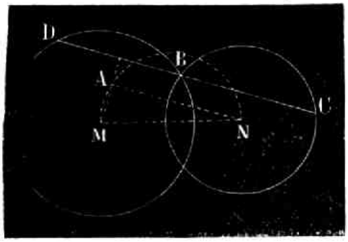
aft.————

RU = 2 SF.

Maar MPSF is een rechthoek (hoek MFQ is recht, hoek MPN is recht, en QU is evenwijdig aan MP.)

Dus is ook RU = 2 MP = 2 × ½ m = m.

50. Laat M en N de cirkels zijn in stelling gegeven, en laat het stuk tusschen de beide omtrekken gelijk de lijn *m* moeten zijn.



Constructie. Geheel dezelfd als in 't vorig vraagstuk.

Bewijs. Geheel hetzelfde als in 't vorig vraagstuk.

51. Laat M de gegeven cirkel, P het gegeven punt, en AB de lengte zijn die de koorde door P getrokken moet hebben.

Constructie. Laat MC loodrecht op AB neêr; trek MP en maak die tot middellijn van eenen cirkel. Beschrijf uit M met MC als straal eenen cirkel die den laatst genoemden in 2 punten snijdt (D en E). Trek PD en verleng die aan weerszijden dan is GF de gevraagde koorde.

Bewijs. Als wij nog MD trekken is hoek MDF recht, als staande in eenen halven cirkel, en trekken wij dan nog MG en MA, dan is

drieh. GDM $\cong$ drieh. ACM; want

hoek GDM = hoek ACM = R.

GM = AM.

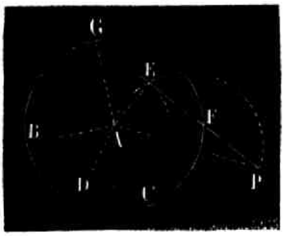
MD = MC.

Derhalve is GD = AC.

———— 2.

GF = AB. 2 GD is gelijk GF, wijl MD loodrecht op GF staat. De tweede koorde die aan de vraag voldoet, gaat door de punten P en E.

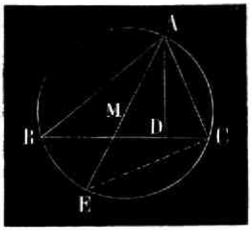
52. Laat cirkel A gegeven zijn en het punt P het buiten dien cirkel gegeven punt wezen, waardoor men eene lijn trekken moet, zoodanig dat het gedeelte dier lijn binnen den cirkel gelijk zij aan de gegeven lijn BC.



Constructie. Laat AD loodrecht neer op BC, dan is BD = DC. Vereenig A met P en beschrijf op AP eenen halven cirkel. Beschrijf uit A met AD als straal eenen cirkelboog, die ergens in E den beschreven halven cirkel zal snijden. Trek PE en verleng die, dan is PG de gevraagde lijn. Ook hier kan eene tweede snijlijn gevonden worden, die aan het gevraagde beantwoordt.

't Bewijs wordt juist zoo gevoerd als in 't vorig vraagstuk uit de gelijk en gelijkvormigheid der driehoeken ABD en AEG.

53. Stel ABC zij een willekeurige driehoek beschreven in den cirkel M. Zij AD loodrecht op BC neergelaten, en AE eene middellijn des cirkels M.



Trekken wij dan de lijn EC, dan is drieh. ABD $\backsim$ drieh. AEC, want

hoek ABC = hoek AEC = $\frac{1}{2}$ *bg* AC.

hoek ADB = hoek ACE = R.

Derhalve is AB : AE = AD : AC.

of AB $\times$ AC = AE $\times$ AD q. e. d.

54. Zij gegeven, dat ABEDC een regelmatige vijfhoek zij beschreven in den cirkel M, dan is *bg*. AB = *bg*. BE = *bg*. ED = *bg*. DC = *bg*. AC = 72°.

Bewijs van 't gevraagde.

hoek FEB = $\frac{1}{2}$ *bg*. BC = 72°.

hoek EBF = $\frac{1}{2}$ BG. DE = 36°. Derh. is

hoek BFE = 72°.

Driehoek BFE is dus gelijkbeenig, of BF = BE. q. e. d.

Nu is verder drieh. DFE $\backsim$ drieh. DBE, want

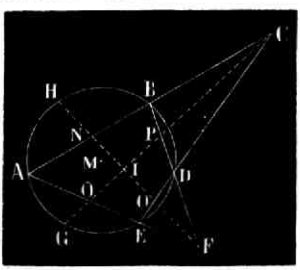
hoek FDE = hoek BDE.

$\frac{1}{2}$ (*bg*. DE + BC) = 108° = hoek DFE = hoek DEB = $\frac{1}{2}$ *bg*. BAD = 108°.

dus is DF : DE = DE : BD of

DF : BF = BF : BD. q. e. d.

55. Zij ABDE een willekeurige vierhoek in eenen cirkel M beschreven, en laat de lijnen GC en FH de hoeken ACE en AFB respectivelijk midden door deelen.



Bewijs van 't gevraagde.

Hoek BAE + hoek BDE = 2 R.

Hoek BDC + hoek BDE = 2 R.

Dus hoek BAE = hoek BDC. Tel hierbij hoek ICB = hoek ICE.

Zoo hebben wij hoek BAE + hoek ICB = hoek BDC + hoek ICE.

Maar voor hoek BAE + hoek ICB kunnen wij schrijven hoek COF.

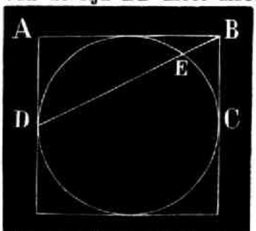
en voor hoek BDC + hoek ICE kunnen wij schrijven hoek BPC. Dus is hoek COF = hoek BPC en derhalve driehoek OPF gelijkbeenig.

In dezen gelijkbeenigen driehoek deelt FI den tophoek middendoor, en snijdt derhalve de basis OP *rechthoekig* middendoor.

56. Het bewijs voor deze stelling berust op dezelfde beginselen, als de stelling dat de overstaande hoeken van den in den cirkel beschreven vierhoek elkanders supplementen zijn. Men zal bevinden, dat de n niet naast elkander liggende hoeken van den 2n-hoek, beschreven in den cirkel, te zamen gemeten worden door $\frac{1}{2}$ (n—1) omtrekken van dien cirkel.

57. Deze stelling wordt bewezen uit de gelijkheid van de raaklijnen, die uit hetzelfde punt aan den cirkel getrokken zijn. Men zorge slechts, de vergelijkingen, welke men verkrijgt, zoodanig onder elkander te schrijven, dat de stukken, die tot dezelfde zijde behooren, overeenkomstige leden dier vergelijkingen zijn.

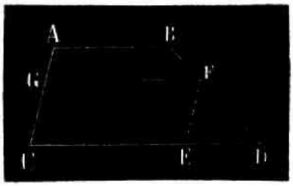
58. Van de lijn BD moet alzoo bewezen worden, dat het stuk BE buiten den cirkel gelijk is aan het vierde deel van de koorde DE.



Het is eene bekende waarheid dat $BC^2 = BD \times BE$ is; stelt men nu den straal des cirkels = 1, dan is de zijde des vierkants = 2, en de lijn $BD = \sqrt{5}$.

Onze vergelijking verandert alsdan in $1 = BE\sqrt{5}$, waaruit volgt $BE = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{5}\sqrt{5}$. Deze waarde van BE, afgetrokken van die van BD, blijft $DE = \frac{4}{5}\sqrt{5}$; waaruit dus BE : DE = 1 : 4.

59. Zij ABCD een willekeurig trapezium.



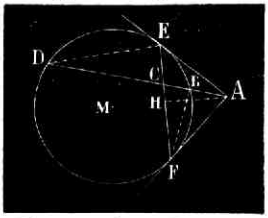
Constructie. Zet eene middenevenredige tusschen CD en AB, van C af op CD uit. Laat CE die middenevenredige zijn. Trek EF evenwijdig aan AC, FG evenwijdig aan CD, zoo zal deze lijn FG ons trapezium op gevraagde wijze verdeelen.

Want uit de evenwijdigheid van GF met CD en AB, volgt de gelijkhoekigheid van de twee trapezia AF en GD.

Tot hunne gelijkvormigheid is buitendien nog noodig de evenredigheid der evenwijdige zijden. Deze kennen wij, want wij weten dat

CD : GF = GF : AB.

60. Laat gegeven zijn dat AE en AF den willekeurig aangenomen cirkel in E en F raken, dan moet bewezen worden dat



$$BC \times AD = DC \times AB \text{ is.}$$

Bewijs. Trek tot hulplijnen DE, BF en HA zóó dat EH = FH is. Uit de gelijkvormigheid der driehoeken DEC en BCF volgt $DC : CF = EC : BC$.

$$DC \times BC = CF \times EC \quad (1)$$

$$AE^2 = AB \times AD$$

$$AE^2 = AC^2 + CF^2 - 2\,CH \times CF.$$

Dus is $AB \times AD = AC \times AC + CF \times CF - 2\,CH \times CF.$

$$AB \times AD = AC \times AC + (CF - 2CH) \times CF.$$

$$AB \times AD = AC \times AC + EC \times CF.$$

Substitueeren wij, wat wij in (1) vinden, zoo hebben wij

$$AB \times AD = AC \times AC + DC \times BC. \quad (2)$$

$$AD = DC + AC \text{ en } AC = BC + AB.$$

dus schrijven wij voor (2)

$$DC \times AB + AC \times AB = AC \times BC + AC \times AB + DC \times BC$$

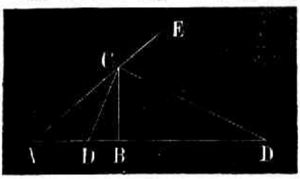
$$DC \times AB + AC \times AB = AD \times BC + AC \times AB.$$

(want $AC + DC) = AD.$

Trekken wij hier af $AC \times AB = AC \times AB,$

zoo hebben wij $DC \times AB = AD \times BC.$ q. e. d.

61.



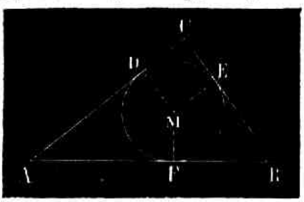
$$AD : DB = AC : BC.$$

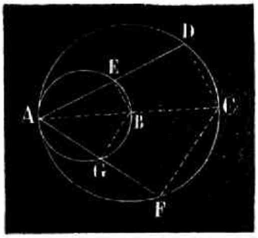
$$AD' : D'B = AC : BC.$$

Dus ook $AD : BD = AD' : BD'$

$$AD \times BD' = BD \times AD'.$$

62. Zij het vraagstuk opgelost, en de driehoek ABC beantwoordende aan de vraag. Trek uit M stralen naar de raakpunten D, E en F, zoo bewijst men gemakkelijk dat CDME een quadraat is. Vermits nu AD = AF en BE = BF is, zal de som der rechthoekszijden gelijk zijn aan de hypothenuse, vermeerderd met tweemaal den straal des ingeschreven cirkels, en wordt dus dit vraagstuk teruggebracht tot No. 48, bl. 6 van het tekstboekje.



63. 

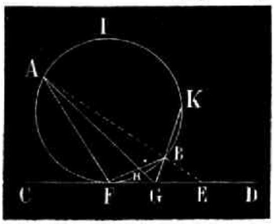
Zij gegeven, dat de cirkels AB en AC elkander in A raken, en dat hunne middellijnen AB en AC zijn.

Laat verder AD en AF twee willekeurige koorden zijn, getrokken uit het genoemde raakpunt A, dan moet bewezen worden dat AE : AD = AG : AF.

Bewijs. Als wij de hulplijnen BE, DC, BG, FC trekken, is

rechthoekige drieh. AEB gelijkv. met drieh. ADC.
en „ „ ABG „ „ „ ACF.
Uit het eerste paar drieh. is AE : AD = AB : AC.
„ „ tweede „ „ „ AG : AF = AB : AC.
derhalve AE : AD = AG : AF. q. e. d.

64. Laat AB de twee gegeven punten zijn en CD de gegeven lijn.



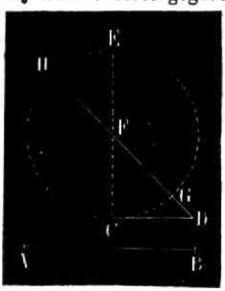
Constructie. Trek AB en verleng die tot zij in E de lijn CD snijdt. Zoek eene middenevenredige tusschen AE en BE en zet die van E af op CD uit. Een cirkel door A, F en B gebracht, zal volgens de aangehaalde paragraaph van Badon de lijn CD in F raken. Wanneer wij AF en BF trekken, zal hoek AFB de gevraagde zijn.

Bewijs. Neem op de lijn CD een willekeurig punt G aan, en vereenig dat met A en B, wanneer wij dan hebben bewezen, dat hoek AGB kleiner is dan hoek AFB, zijn wij, waar wij wezen moeten, want het punt G kunnen wij nemen waar wij willen.

hoek AFB = $\frac{1}{2}$ boog AIB.
hoek AGB = $\frac{1}{2}$ (boog AIK—boog HB).

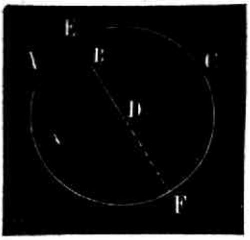
Derhalve hoek AGB kleiner dan hoek AFB. q. e. d.

65. Zij AB de eerst gegeven lijn, CD de andere.



Constructie. Richt op het uiteinde C van CD eene loodlijn CE op en maak CE = AB. Beschrijf uit het midden F van CE een' cirkel met FC als straal; trek vervolgens DF, en verleng die tot in H, dan zal men op het verlengde van AB, van B uit, DG moeten uitzetten, om het gevraagde punt te verkrijgen.

Bewijs. Daar CE loodrecht staat op CD, raakt de cirkel F, CD in C, en is dus:

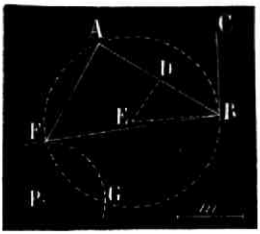


$$AB \times BC = EB \times BF$$
$$= EB \times BD + EB.\ DF$$
$$= EB \times BD + EB.\ ED.$$

tel hierbij $BD^2 = BD \times BD$.

Zoo hebben wij $AB \times BC + BD^2 = ED \times BD + ED \times EB = ED^2$.

69. Laat A en B de twee eerste gegeven punten zijn, en P het derde, en laat hoek ABC de hoek zijn, waaronder men A en B zien moet. Zij verder gegeven, dat het nu te vinden punt den afstand *m* van P hebben moet.

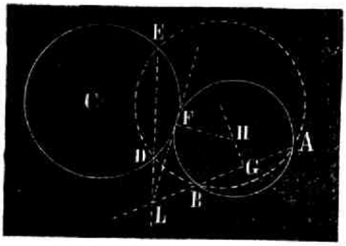


Constructie. Richt uit B eene loodlijn op BC op en uit het midden D van AB eene op AB. Beschrijf uit het snijpunt E dezer lijnen eenen cirkel met EB tot straal. Beschrijf ook met den straal *m* uit P eenen cirkel die, zoo de constructie mogelijk is, den eerstbeschreven cirkel in een punt raken of in twee punten snijden zal. Vereenig dit raakpunt of deze snijpunten met A en B, dan zullen of dit raakpunt of deze snijpunten het gevraagde punt zijn.

Bewijs. Het punt F ligt op den gevraagden afstand *m* van P, want cirkelb. FG is met *m* als straal beschreven. Daar hoek EBC recht is, is BC eene raaklijn en dus hoek ABC $= \frac{1}{2}$ bg. AB; maar ook hoek AFB $= \frac{1}{2}$ bg. AB, dus is hoek AFB = hoek ABC en worden dus uit F, A en B onder den gevraagden hoek gezien.

70. De constructie van dit vraagstuk is vrij gelijkvormig met die van het vorige. Denken wij ons in de figuur van dat vraagstuk in plaats van het punt P eene lijn en eene andere lijn evenwijdig daaraan getrokben op den gegeven afstand, waarvan in 't vraagstuk sprake is. De snijpunten dezer lijn en den cirkel E, zullen in dit geval de gevraagde wezen.

71. Van de twee gevallen die in dit vraagstuk mogelijk zijn, dat namelijk de twee gegeven punten *binnen* of *buiten* den gegeven cirkel liggen zullen wij alleen het tweede behandelen. In de constructie is in beide gevallen weinig verschil. Stel dat de beide gegeven punten A en B zijn en de gegeven cirkel, cirkel C.



Constructie. Laat een' cirkel door A en B gaan, die cirkel C in twee punten snijdt. Trek AB, en verleng die aan die zijde, waar zij het verlengde der lijn DE zal kunnen ontmoeten. Trek DE en verleng die zóó, dat zij 't verlengde van AB in L snijdt. Trek uit L eene raaklijn aan cirkel C, dan zal een cirkel gebracht door dit raakpunt F en A en B de gevraagde zijn.

Bewijs. In den eerst geconstrueerden cirkel is

$$LD \times LE = LB \times LA.$$

In den gegeven cirkel C is $LD \times LE = LF^2$.

$$LF^2 \text{ is dus ook } = LB \times LA.$$

Dus is ook LF eene raaklijn aan cirkel H en daar zij tevens van cirkel C eene raaklijn is, raken cirkels H en C elkander in het punt F. Uit L had men nog eene raaklijn aan cirkel C kunnen trekken: er is dus nog een tweede cirkel, die aan de vraag voldoet.

72. Zij gegeven, dat cirkel D beschreven is in drieh. ABC.

Constructie. Beschrijf ook om den driehoek ABC eenen cirkel. Laat dat cirkel E zijn. Trek EA, EB, EC en uit D lijnen HD, FD, GD respectivelijk evenwijdig aan BE, CE, AE. Vereenig H met F en G en F met G zoo is GHF gevraagde drieh.

Bewijs. Drieh. AEC $\backsim$ drieh. GDF, want

$$GD : DF = AE : EC, \text{ en}$$
$$\text{hoek } GDF = \text{hoek } AEC.$$

Dus is hoek DGF = hoek EAC en hoek DFG = hoek ECA.

Evenzoo kunnen wij ook vinden

hoek DGH = hoek EAB. hoek DFH = hoek ECB.

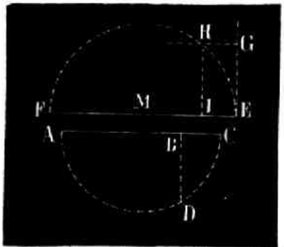
——————————————————— opt.

hoek HGF = hoek BAC. hoek GFH = hoek ACB.

Derhalve is drieh. HGF $\backsim$ driehoek ABC.

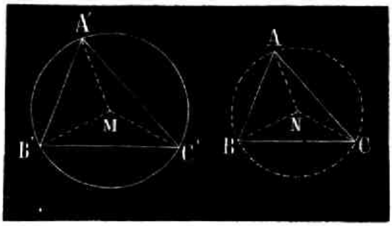
73. Laat AB en BC de gegeven lijnen zijn, wier product gelijk het product der deelen van M moet wezen. Zij M de lijn die verdeeld moet worden.

Constructie. Beschrijf op de som der gegeven lijnen AB en BC eenen halven cirkel, en zoek eene middenevenredige BD tusschen die beide. Richt uit het uiteinde E der lijn M eene loodlijn op, en maak die zoolang als de gevonden middenevenredige. Trek GH evenwijdig aan EF, en laat uit H op M eene loodlijn neer, zoo is de lijn M in het punt I op gevraagde wijze verdeeld.



Bewijs. $AB \times BC = BD^2 = EG^2 = HI^2 = FI \times IE$.

74. Zij gegeven: driech. ABC en cirkel M.



Constructie. Beschrijf om den driehoek ABC eenen cirkel, en vereenig al zijne hoekpunten met het middelpunt diens cirkels. Na nu uit M eene willekeurige lijn MC′ getrokken te hebben, maken wij

hoek C′MA′ = hoek CNA en
hoek C′MB′ = hoek CNB.

Vereenig nu B′ met C′ en A′, en A′ met C′, dan is driehoek A′B′C′ de gevraagde.

’t Bewijs wordt uit de gelijkvormigheid der samenstellende driehoeken gevonden.

75. Beschrijf in den gegeven driehoek eenen cirkel, en vereenig de drie raakpunten met het middelpunt van dien cirkel; na nu uit het middelpunt des gegeven cirkels eene willekeurige lijn getrokken te hebben, zet men op deze lijn aan gezegd middelpunt dezelfde hoeken uit, als die de stralen in den geconstrueerden cirkel maken. De raaklijnen, die men door de laatstgevonden punten aan den gegeven cirkel trekt, zullen den gevraagden driehoek insluiten.

76. Zij boog AC = $\frac{1}{4}$ omtrek, en boog AD = $\frac{1}{6}$ omtr. Deel dan boog AC in E middendoor, dan zal hoek EBD = $\frac{1}{6}$ R = $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$ R zijn.

77. Stellen wij de gegeven koorde = a', den straal des gegeven cirkels = r, de gevraagde koorde = a, zoo is, volgens Badon § 175,

$$a = \frac{a'\sqrt{(4r^2 - a'^2)}}{r}$$

Substitueeren wij hierin de waarden voor a' en r gegeven, zoo is

$$a = \frac{4\sqrt{(100-16)}}{5} = 7.33212 \text{ meters.}$$

78. Wij dienen eerst te bepalen, hoelang de straal is eens cirkels waarin de ingeschreven regelmatige vijfhoek 10 meters zijde heeft. Met behulp van Badon § 180 vinden wij hiervoor $\frac{20}{\sqrt{(10-2\sqrt{5})}}$,

Beschouwen wij dan den diagonaal des vijfhoeks als de zijde eens veelhoeks, die half zooveel zijden heeft als de vijfhoek, en noemen wij hem a, terwijl wij de zijde des vijfhoeks a', en den straal des cirkels r noemen, zoo is

$$a = \frac{a'\sqrt{(4r^2 - a'^2)}}{r}$$

Substitueeren wij dan voor a', 10 meters, en voor r, $\frac{20}{\sqrt{(10-2\sqrt{5})}}$

dan wordt $a = \dfrac{10\sqrt{(200 + 40\sqrt{5} - 100)}}{\dfrac{20}{\sqrt{(10-2\sqrt{5})}}}$.

$= 16.18034$ meters.

Ieder begrijpt echter ligt, dat wij met behulp van vraagst. 54 dezer Afdeeling dit antwoord veel lichter zouden gevonden hebben.

79. Eene aandachtige beschouwing van eenen in eenen cirkel beschrevenen zeshoek met alle daarin getrokken diagonalen zal ons leeren, dat de diagonalen van zulk eenen zeshoek of gelijk zijn aan de middellijn zijns omg. cirkels, of aan de zijde des regelmatigen driehoeks beschreven in denzelfden cirkel. De eerste soort van diagonalen heeft eene lengte van 20, de tweede van 17,320508 meters.

80. Laat ABCDEF een regelmatige zeshoek, en ACE een regelm. driehoek zijn in denzelfden cirkel M beschreven.

Trekken wij AM, EM en CM, zoo is ABMC een parallelogram.

Want AB = MC
AM = BC.

Dus is drieh. AMC = drieh. ABC = $\frac{1}{2}$ parall. ABCM.

Evenzoo vinden wij

drieh. AME = drieh. AFE = $\frac{1}{2}$ „ AMEF.
en „ MEC = „ DEC = $\frac{1}{2}$ „ MEDC.

opt.

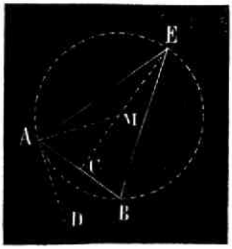
Drieh. AEC = $\frac{1}{2}$ zesh. ABCDEF.

81. Zie Afdeeling 1. Bladz. 13. Opgave 25, van het tekstboekje.

82. Het verschil van den middelpuntshoek eens regelm. vijfhoeks en eenen rechten hoek is $= 18^\circ = \frac{1}{5}$ R.

83. De middelpuntshoek van eenen regelm. zestighoek bevat 6° en is dus $= \frac{1}{15}$ R.

84. Zij AB de gegeven lijn.



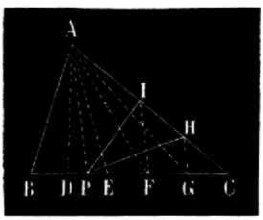
Constructie. Trek de lijn AD zoodanig dat hoek CAD $= 36^\circ$ is; (wat wij met behulp van § 130 van Badon zeer gemakkelijk kunnen doen.) Richt op AD uit A eene loodlijn op, en uit het midden C van AB eene andere op AB. Beschrijf uit het snijpunt M dezer lijnen eenen cirkel met MA als straal. Verlengen wij dan CM door M tot in E, en trekken wij nog AE en BE, dan is drieh. ABE de verlangde.

Bewijs. Hoek BAD = hoek AEB $= 36^\circ$; hoek EAB + hoek ABE $= 144^\circ$.

Wijl verder CE loodrecht staat op 't midden van AB, is driehoek AEB gelijkbeenig, en derhalve

hoek EAB = hoek ABE $= 72^\circ$.

85. Zij gegeven drieh. ABC en het punt P waardoor men verlangt dat de deellijnen zullen getrokken worden.



Constructie. Verdeel die zijde van drieh. ABC, waarin het punt P gelegen is (BC), in vijf gelijke deelen (BD, DE, EF, FG, GC) en vereenig de deelpunten (D, E, F, G) met het tegenoverliggend hoekpunt (A.) Vereenig het punt P met datzelfde hoekpunt, en trek door alle eerst genoemde deelpunten lijnen evenwijdig met de laatstgetrokken lijn; vereenig eindelijk nog de punten, waar de laatst beschreven lijnen de nog niet gebruikte zijden des driehoeks snijden, met het punt P, zoo zullen de dus ontstane stukken ieder $= \frac{1}{5}$ drieh. ABC zijn.

Bewijs. Wij willen slechts bewijzen dat drieh. PHC en drieh. IPH elk gelijk $\frac{1}{5}$ drieh. ABC zijn. De overige deelen worden evenzoo geconstrueerd, en men gaat juist op dezelfde wijze te werk als bij de twee genoemde drieh., om te bewijzen dat zij $= \frac{1}{5}$ drieh. ABC zijn.

Drieh. HGC = drieh. HGC.

drieh. HGA = drieh. HGP (want zij hebben dezelfde basis en dezelfde hoogte, de afstand namelijk der evenw. lijnen AP en HG).

Telt men deze twee vergelijkingen bijeen, zoo heeft men

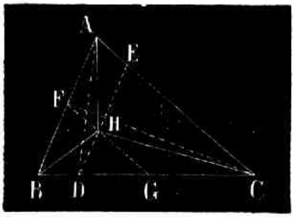
drieh. AGC = drieh. PHC.

Nu is drieh. AGC = $\frac{1}{5}$ drieh. ABC, want beide driehoeken hebben dezelfde hoogte, en de basis van den eersten is vijfmaal op die van den tweeden begrepen. Derhalve is ook drieh. PHC = $\frac{1}{5}$ drieh. ABC.

Geheel op dezelfde wijze vinden wij

drieh. AFC = drieh. PIC = $\frac{2}{5}$ drieh. ABC.
wij weten drieh. AGC = drieh. PHC = $\frac{1}{5}$ drieh. ABC.
dus is ook drieh. IPH = $\frac{1}{5}$ drieh. ABC enz.

86. Van de twee in de opgave gevraagde verdeelingen zullen wij alleen de laatste construeeren. De eerste kan dan als een gunstig geval van de laatste constructie beschouwd worden.



Zij gesteld dat wij uit een punt H binnen den drieh. ABC lijnen AH, BH en CH moeten trekken zóó, dat de dus gevormde drieh. ABH, BHC, AHC tot elkander staan als 1 : 2 : 3, zoo wordt dat punt H gevonden door de volgende

Constructie. Verdeel de zijden AB en BC ieder in zes (de som der gegeven verhoudingsgetallen) gelijke deelen, en laat dientengevolge BD = $\frac{1}{6}$ BC, AF = $\frac{3}{6}$ AB zijn. Trek AD en uit D eene lijn DE evenwijdig aan AB. Trek ook CF, en door F eene lijn FG evenwijdig aan AC, dan is het snijpunt van GF en ED het gevraagde punt H.

Bewijs. Is BD = $\frac{1}{6}$ BC dan is natuurlijk drieh. ABD = $\frac{1}{6}$ drieh. ABC, en elke driehoek wiens basis AB is en wiens top ligt in DE is even groot, wijl hij dezelfde basis en dezelfde hoogte als ABD heeft. Drieh. AHB is dus = $\frac{1}{6}$ drieh. ABC.

Op geheel dezelfde wijze vinden wij dat drieh. AFC = drieh. AHC = $\frac{3}{6}$ drieh. ABC is, en dus is

drieh. BHC = drieh. ABC—$\frac{4}{6}$ drieh. ABC = $\frac{2}{6}$ drieh. ABC.

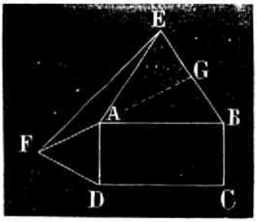
Derhalve staat drieh. AHB : drieh. BHC : drieh. AHC = 1 : 2 : 3.

87. Laat gevraagd zijn den driehoek ABC te vervormen in eenen gelijkbeenigen driehoek van dezelfde grootte.

Constructie. Richt uit het midden van de basis BC, uit D eene loodlijn op BC op. Breng door A eene lijn AE evenwijdig aan BC. Het punt F waar deze lijn de geconstrueerde loodlijn snijdt, vereenige men nog met B en met C, dan zal drieh. FBC de gevraagde zijn.

88. Dat driehoek BDG gelijk en gelijkvormig is met drieh. ABC, springt terstond in het oog: zij hebben twee zijden en den ingesloten hoek

ieder in 't bijzonder aan elkander gelijk. De driehoeken HCF en EAI zijn alleen gelijk, en niet gelijkvormig aan den driehoek ABC; omdat zij wel twee zijden ieder in 't bijzonder gelijk hebben aan twee zijden van den driehoek ABC, maar de ingesloten hoek EAI het supplement is van den ingesloten hoek BAC, en de ingesloten hoek HCF het supplement is van den ingesloten hoek ACB.

89. 

Het eerste gedeelte der stelling wordt bewezen, doordien al de driehoeken, welke op dezelfde wijze gevormd zijn, als de driehoek FAE twee zijden ieder in 't bijzonder aan elkander gelijk hebben, terwijl de door die zijden ingesloten hoek bij allen even groot is. Immers is die hoek overal $= 4\ R - (1 + \frac{2}{3} + \frac{2}{3})\ R = 1\frac{2}{3}\ R$.

Verleng, om het tweede gedeelte der stelling te bewijzen, FA tot in G. Wij zagen reeds, dat hoek EAF $= 1\frac{2}{3}$ R is: zijn supplement EAG is dus $= \frac{1}{3}$ R, en de hoek EAB door AG middendoor gedeeld. Daarom staat ook AG loodrecht op BE, en deelt BE middendoor. Dus is de inhoud van driehoek EAF $= AF \times \frac{1}{2}\ EG = AD \times \frac{1}{4}\ AB$, en dus gelijk aan een vierde deel van den inhoud des rechthoeks.

90. De vierde evenredige tot de gegeven lijn, de basis van den gegeven driehoek en zijne halve hoogte zal de hoogte van den gevraagden rechthoek zijn.

91. Gesteld dat ABCD een parallelogram is dat men door eene lijn, door

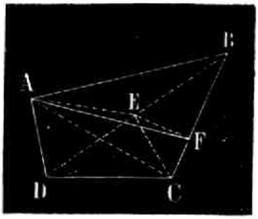
het punt P gebracht, wenscht te verdeelen, op de wijze, zoo als in de opgave wordt aangeduid.

Constructie. Deel de zijde AB door een punt F zoodanig in 2 deelen, dat AF : FB = 5 : 7. Deel EF door een punt H middendoor. Trek PH en verleng die tot in G. Door de lijn PG zal dan het parallelogram op gevraagde wijze verdeeld zijn.

Bewijs. Driehoek GEH $\cong$ drieh. PFH, want hoek GHE = hoek FHP, hoek GEH = hoek HFP en EH = FH. Tel nu bij deze vergelijking fig. AFHGD = fig. AFHGD, zoo verkrijgen wij de nieuwe vergelijking parall. AFED = fig. APGD.

parall. AFED is $\frac{5}{12}$ parall. ABCD, wijl de hoogten gelijk zijn, de basis van 't eerste $\frac{5}{12}$ is van die van het laatste; dus is ook APGD $= \frac{5}{12}$ ABCD.

92. Laat ABCD de gegeven vierhoek zijn.

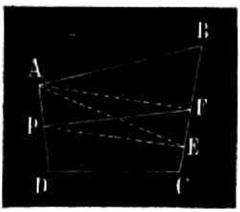


Constructie. Trek de diagonaal BD en deel die middendoor. Zij DE = EB. Trek AE en EC: trek nog AC, door E eene lijn EF evenwijdig aan AC, en AF, dan zal deze laatste lijn den vierhoek op gevraagde wijze verdeelen.

Bewijs. Drieh. AED = $\frac{1}{2}$ drieh. ABD.
Drieh. DEC = $\frac{1}{2}$ drieh. DBC.
———————————— opt.
Vierh. AEDC = $\frac{1}{2}$ vierh. ABCD. (1)

Nu is drieh. ADC = drieh. ADC.
drieh. AEC = drieh. AFC.
———————————— opt.
Vierh. AEDC = vierh. AFDC. Maar volgens (1) is
Vierh. AEDC = $\frac{1}{2}$ vierh. ABCD.
dus is ook Vierh. AFDC = $\frac{1}{2}$ vierh. ABCD.

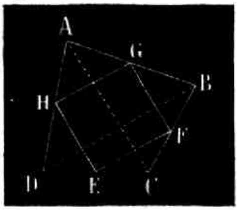
93. Laat ABCD de gegeven vierhoek zijn.



Constructie. Construeeren wij eerst eene lijn AE (gaande door een der hoekpunten) volgens het vorige vraagstuk, die onzen vierhoek middendoor deelt. Trek vervolgens PE, door A eene lijn AF evenwijdig aan PE, en PF, dan zal deze laatste lijn den vierhoek op gevraagde wijze verdeelen.

Bewijs. Vierh. PDCE = vierh. PDCE.
Drieh. PFE = drieh. PAE.
———————————— opt.
Vierh. PFDC = vierh. AEDC = $\frac{1}{2}$ vierh. ABDC.

94. Zij ABCD de vierhoek, EFGH het parallelogram, waarvan in de opgave wordt gewag gemaakt.



Bewijs van 't gevraagde.

In voorstel 13 dezer Afdeeling is aangetoond, dat
drieh. DHE gelijkv. is met drieh. DAC.
drieh. AHG „ „ „ drieh. ABD enz.

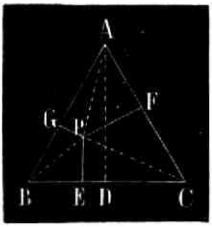
Hieruit leiden wij af

drieh. DHE : drieh. DAC = $DH^2 : AD^2 = 1 : 4$.
drieh. AHG : drieh. ABD = $AG^2 : AB^2 = 1 : 4$.

drieh. BGF : drieh. BAC = $BF^2 : BC^2 = 1 : 4$.
drieh. CFE : drieh. CBD = $CE^2 : CD^2 = 1 : 4$.
——————————————————— opt.
drieh. DHE + drieh. AHG + drieh. BGF + drieh. CFE : 2 vierh. ABCD = 1 : 4.

Hieruit volgt na eene kleine herleiding

parall. EFGH = ½ vierh. ABCD.

95. 

Zij ABC een gelijkzijdige driehoek, AD loodrecht op BC, en laat verder PG, PE, PF loodlijnen zijn, uit P respectivelijk op AB, BC, AC neergelaten, dan moet bewezen worden AD = PG + PE + PF.

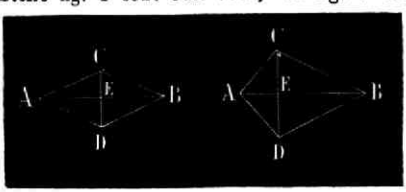
Bewijs. Als wij nog PA, PB, PC trekken, en AB = AC = BC Z noemen, is

drieh. PAB = ½ Z × PG.
drieh. PBC = ½ Z × PE.
drieh. PAC = ½ Z × PF.
——————————— opt.
drieh. ABC = ½ Z (PG + PE + PF) Maar ook is
drieh. ABC = ½ Z × AD.
dus is PG + PE + PF = AD.

96. In vierh. ABCD is

drieh. ABE : drieh. BEC = AE : EC.
drieh. ADE : drieh. DEC = AE : EC;
dus ook drieh. ABE : drieh. BEC = drieh. ADE : drieh. DEC; q. e. d.

97. Stelle fig. 1 eene ruit voor, en fig. 2 een vierhoek wiens diagonalen elkander rechthoekig snijden.



Bewijs van 't gevraagde.

In beide figuren is

Drieh. ABC = ½ AB × CE
drieh. ABD = ½ AB × DE
——————————— opt.
ABCD = ½ AB × (ED + CE) = ½ AB × CD.

98. Zij MAB een middelpuntsdriehoek van den omgeschreven' r. n hoek,

CDM van den ingeschreven r. n hoek, CEM van den ingeschreven' r. 2n hoek.

AEM en CFM zijn dan natuurlijk halve middelpuntsdriehoeken.

Bewijs van 't gevraagde.

Drieh. AEM : drieh. CEM = AM : CM; (1)
drieh. CFM ∞ drieh. AEM en dus

AM : CM = EM : FM.

Substitueeren wij dit in (1) zoo wordt onze evenredigheid

drieh. AEM : drieh. CEM = EM : FM. Maar ook staat

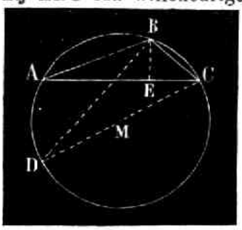
drieh. CEM : drieh. CFM = EM : FM.

derhalve is drieh. AEM : drieh. CEM = drieh. CEM : drieh. CFM.

Vermenigvuldigen wij deze evenredigheid met 2n zoo is

I. r. o. n hoek : I. r. i. 2n hoek = I. r. i. 2n hoek : r. i. n hoek.

99. Zij ABC een willekeurige driehoek, om welken de cirkel M uit het



middelpunt M beschreven is. Zij BE eene loodlijn op AC neergelaten.

Bewijs van 't gevraagde.

Vroeger reeds (vr. 52 dezer Afd.) vonden wij uit de gelijkvormigheid der driehoeken ABE en BDC

$$AB \times BC = DC \times BE.$$
$$AC = AC.$$

——————————— verm.

$$AB \times BC \times AC = DC \times 2 \text{ drieh. } ABC.$$

Noemen wij, zoo als dat gewoonlijk geschiedt, $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, $DC = d$ of $2r$, drieh. ABC = I, en zonderen wij uit onze vergelijking drieh. ABC af zoo is

$$I = \frac{abc}{2d} = \frac{abc}{4r}.$$

100. Noemen wij, even als in 't vorig vraagstuk, de zijden des driehoeks respectivelijk a, b, c, den straal zijns omgeschreven cirkels r, zijnen inhoud I, terwijl wij de halve som zijner zijden s, den straal zijns ingeschreven cirkels r' noemen zullen.

Bewijs van 't gevraagde.

De toepassing van § 102 en 192 van Badon heeft ons in vr. 99 dezer Afd. geleerd

$$I = abc : 4r.$$

Hetzelfde leerboek § 194 leert ons. $I = r's = \frac{1}{2} r' (a + b + c)$

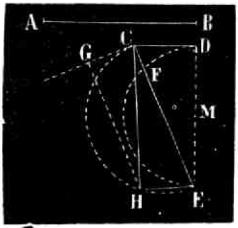
Hieruit komt de vergelijking voort $abc : 4r = \frac{1}{2} r' (a + b + c)$

——————————— $4r$

$a + b + c$ $\quad abc = 2rr' (a + b + c)$

$$\frac{abc}{a + b + c} = 2rr'.$$

101. Zij gevraagd een' rechthoekigen driehoek te beschrijven, waarvan de hyp. = AB, de inhoud = CD^2 moet zijn.



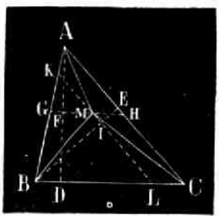
Constructie. Beschrijf eenen rechthoekigen driehoek CDE onder de hypotenusa AB en de rechthoekszijde CD. Deel de andere rechthoekszijde in M middendoor, en beschrijf uit M met MD als straal eenen cirkel, die de hypotenusa CE ergens in F snijden zal; beschrijf op CE eenen halven cirkel, richt uit C op CE eene loodlijn CG op, en maak CG = 2 CF, trek GH evenwijdig aan CE en vereenig het snijpunt dezer lijn en den pas beschreven halven cirkel, het punt H met C en met E. Driehoek CHE zal dan de gevraagde zijn.

Bewijs. CE = AB zoo als verlangd was.

Wijl bg. CHE een halve cirkel is, is ook hoek CHE = R, drieh. CHE is dus een rechthoekige driehoek zoo als verlangd werd.

Eindelijk is drieh. CHE = CE × $\frac{1}{2}$ GC = CE × CF = CD^2, wat als derde vereischte in den gevraagden driehoek werd gesteld.

102. Zij gevraagd den driehoek ABC in drie stukken te verdeelen, die tot elkander staan als de getallen 1 2. 3.



Constructie. Laat uit A op de lijn BC eene loodlijn AD neer, en zij FD = $\frac{3}{6}$ dier loodlijn. Trek dan eene lijn GH door F evenwijdig aan BC. Laat evenzoo op AC eene loodlijn BE uit B neer, en zij IE = $\frac{1}{6}$ BE, trek dan eene lijn KL door I evenwijdig aan AC, dan zal het snijpunt M der lijnen KL en GH het gevraagde punt zijn, en indien wij nog MA, MB en MC trekken,

Drieh. MAC : drieh. MAB : drieh. MBC = 1 : 2 : 3.

Bewijs. Drieh. AMC = $\frac{1}{6}$ drieh. ABC; want de bases der 2 driehoeken zijn gelijk, en de hoogte des eersten is 6 maal op die des tweeden begrepen.

Drieh. BMC = $\frac{3}{6}$ drieh. ABC, wijl beider driehoeken bases gelijk zijn, doch de hoogte des eersten = $\frac{3}{6}$ de hoogte des anderen is.

Natuurlijk is dus drieh. AMB = $\frac{2}{6}$ drieh. ABC, en staat dus drieh. AMC : drieh. AMB : drieh. BMC = 1 : 2 : 3.

103. Verander volgens § 198 den gegeven veelhoek in eenen driehoek. Zoek vervolgens eene vierde evenredige tot de gegeven basis des rechthoeks, de basis des driehoeks die wij gevonden hebben en zijne halve hoogte. Een rechthoek geconstrueerd onder de gegeven basis en de gevonden vierde evenredige als zijden, zal de gevraagde zijn.

104. Zij gegeven dat DFE een gelijkzijdige driehoek is en de figuren DEHG FEIK, MDLF vierkanten zijn op de zijden diens driehoeks beschreven. Zoo moet bewezen worden,

1^0. Drieh. MDG = drieh. HEI = drieh. LFK = drieh. DFE.

2^0. Drieh. ABC is gelijkzijdig.

Bewijs van het eerste. Laat uit G eene loodlijn GN neder op het verlengde van MD, op FE eene loodlijn DO uit D dan is drieh. DGN ≌ drieh. DOE want

DG = DE, hoek N = hoek O = R

en hoek GDN = 360°—hoek MDG—hoek MDF—hoek FDN = 60° = hoek OED.

Hieruit is natuurlijk GN = DO.

Ook is $\frac{1}{2}$ MD = $\frac{1}{2}$ FE.

——————— verm.

dus ook drieh. MDG = drieh. DFE.

Geheel op dezelfde wijze wordt ook bewezen dat en drieh. LFK en drieh. EHI = drieh. DEF zijn.

Bewijs van het tweede.

Hoek MDG = 360°—hoek FDE—hoek FDM—hoek EDG = 120°.

Drieh. MDG is gelijkbeenig. Dus is hoek DMG = hoek DGM = 30°.

Trekken wij deze vergelijking af van

hoek DMA = hoek DGA = 90°. Zoo hebben wij

hoek GMA = hoek MGA = 60° en dus ook

hoek MAG = 60°.

Geheel op dezelfde wijze wordt ook bewezen dat en hoek ACB en hoek CBA = 60° is. Derhalve is drieh. ABC gelijkzijdig.

105. In drieh. AMF is de hoek M door de lijn BM midden door gedeeld.

Daarom is BF : AB = FM : AM; of BF : AB = FM : CM. Nu is

BF : AB = drieh. BCF : dr. ABC,

en FM : CM = drieh. FAM : drieh. ACM,

dus dr. BCF : dr. ABC = dr. FAM : dr. ACM,

maar dr. BCF = dr. FAM—vierh. ABCM,

en dr. ABC = vierh. ABCM—dr. ACM,

dus dr. FAM—vierh. ABCM : vierh. ABCM—dr. ACM = dr. FAM : dr. ACM.

Vermenigvuldigt men nu al de termen dezer evenredigheid met $2n$, zoo is de stelling bewezen.

106. Zij gevraagd den gelijkbeenigen driehoek ABC in eenen gelijkzijdigen van denzelfden inhoud te veranderen.

Constructie. Zet op de basis des gegeven driehoeks ABC eenen gelijkzijdigen driehoek ABF. Laat uit C eene loodlijn op AB neder, dan zal de voet H dier loodlijn AB middendoor deelen, de loodlijn zelve door F gaan. Beschrijf op CH eenen halven cirkel; richt uit F op HC eene loodlijn op, verleng deze tot in G. Trek HG, en beschrijf daarmede als straal uit H eenen cirkelboog, die CH ergens in I zal snijden. Trek ID en IE respectivelijk evenwijdig aan AF en BF, dan zal, wanneer wij nog AB naar beide zijden verlengen, IDE de gevraagde gelijkzijdige drieh. zijn.

Bewijs. Daar het uit de evenwijdigheid van DI met AF, en van EI met BF wel van zelve blijkt, dat drieh. DIE gelijkzijdig is, kunnen wij dadelijk beginnen aan het berekenen der verhouding van drieh. DIE en ABC.

Drieh. ABC : drieh. ABF $= HC : HF$. (1)

Drieh. DIE : drieh. ABF $= IH^2 : HF^2$.

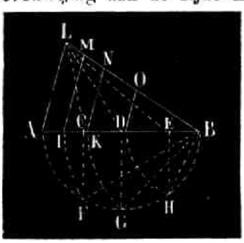
$= HG^2 : HF^2$

$= HF \times HC : HF \times HF$

$= HC : HF$. (2).

Uit de verbinding der evenredigheden (1) en (2) blijkt als van zelve, drieh. ABC = drieh. DIE.

107. Zij gevraagd drieh. ABL in 4 gelijke deelen te verdeelen door lijnen evenwijdig aan de zijde AL.



Constructie. Verdeel AB in vier gelijke deelen AC, CD, DE, EB en trek LC, LD, LE. Beschrijf op AB eenen halven cirkel en richt op AB uit C, D en E loodlijnen CF, DG, EH op. Trek BF, BG, BH, en beschrijf met deze lijnen respectivelijk als stralen cirkelbogen FI, GK, HD van uit het punt B; als wij dan nog IM, KN, DO evenwijdig aan AL trekken, dan wordt de drieh. ABL door deze laatstgetrokken lijnen op gewenschte wijze verdeeld.

Bewijs. Drieh. ABL : drieh. BIM : drieh. BKN : drieh. ODB

$= AB^2 : BI^2 : BK^2 : BD^2$.

$= AB^2 : BF^2 : BG^2 : BH^2$.

$= AB \times AB : AB \times BC : AB \times BD : AB \times BE$.

$= AB : BC : BD : BE$.

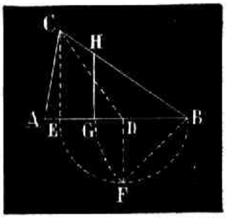
$= 4 : 3 : 2 : 1$.

Door toepassing eener zeer bekende eigenschap der evenredigheden vinden wij hieruit fig. ALMI : fig. IMNK : fig. KNOD : drieh. DOB $= 1 : 1 : 1 : 1$.

Zij zijn dus elk gelijk $\frac{1}{4}$ drieh. ABL.

108. Dit vraagstuk is met het vorige geheel gelijkvormig. Wij verdeelen eerst door lijnen evenwijdig aan eene der zijden den geheelen driehoek in 22 gelijke stukken; het zal wel geene aanwijzing vorderen, welke dezer stukken men tot een geheel vereenigen moet om den driehoek op gevraagde wijze verdeeld te hebben.

109. *Constructie.* Laat uit C eene loodlijn CE neder op AB. Verdeel AB in 2 gelijke deelen AD en BD, en trek CD. Beschrijf op BE eenen halven cirkel; richt uit D op EB eene loodlijn DF op; trek BF en beschrijf daarmede als straal uit het middelpunt B eenen cirkelboog FG. Richt daarna uit G eene loodlijn GH op, dan zal GH de begeerde lijn zijn.



Bewijs. Drieh. EBC : drieh. BCD $=$ EB : BD. (1)

drieh. EBC : drieh. BGH $= BE^2 : BG^2$.

$= BE^2 : BF^2$.

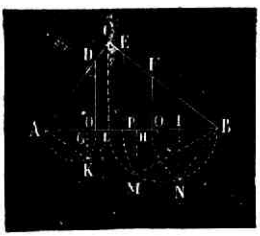
$= BE \times BE : BD \times BE$.

drieh. BEC : dr. BGH $=$ BE : BD. Maar wij weten uit (1

drieh. BEC : dr. BDC $=$ BE : BD

dus is drieh. BGH $=$ drieh. BDC $= \frac{1}{2}$ drieh. ABC.

110. *Constructie.* Deel de basis van onzen driehoek ABC in vier gelijke stukken AG, GH, HI, IB. Laat uit C op AB eene loodlijn neder. Beschrijf op de twee stukken AL en BL waarin deze loodlijn AB verdeelt, halve cirkels. Richt uit G, H en I loodlijnen op AB op (GK, HM, IN) trek MB en NB, en beschrijf daarmede uit B respectivelijk de cirkelbogen MP en NQ. Trek ook AK, en beschrijf daarmede uit A eenen cirkelboog OK. Richt eindelijk uit O, P en Q loodlijnen OD, PE, QF op, dan zullen deze op gevraagde wijze den driehoek ABC verdeelen.



Bewijs. In het bewijs is de eenige moeielijkheid de verhouding te vinden van fig. CDOPE tot den drieh. ABC. Wij gaan daarmede dus te werk.

Wanneer wij nog CI trekken, vinden wij geheel op de wijze als wij dat in 't bewijs van 't vorig vraagstuk deden, drieh. BQF $= \frac{1}{4}$ drieh. ABC. (1)

Wanneer wij nog CH trekken, vinden wij geheel op dezelfde wijze drieh. PEB $= \frac{2}{4}$ drieh. ABC (2) en hiervan afgetrokken vergelijking (1)

drieh. PEB—drieh. BQF = fig. EPQF $= \frac{1}{4}$ dr. ABC.

Wanneer wij nog CG trekken, vinden wij, na al het voorgaande zeer gemakkelijk

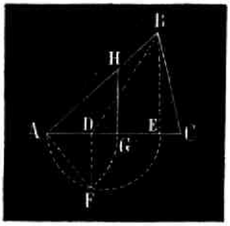
drieh. ADO $= \frac{1}{4}$ drieh. ABC. (3)

Trekken wij de som der vergelijkingen (1) (2) en (3) af van drieh. ABC = drieh. ABC zoo rest ons

fig. CDOPE $= \frac{1}{4}$ drieh. ABC.

111. *Constructie.* Verdeel AC in twee stukken AD en DC zóó, dat

AD : DC = 2 : 5.



Trek BD, en laat uit B eene loodlijn BE op AC neer. Beschrijf eenen halven cirkel op AE; richt uit D eene loodlijn DF op AC op. Trek AF, en beschrijf daarmede uit A eenen cirkelboog FG. De loodlijn GH op AB opgericht, zal den driehoek op gevraagde wijze verdeelen.

Bewijs. Drieh. ADB : drieh. AEB = AD : DE. (1)

drieh. AGH : drieh. AEB $= AG^2 : AE^2$.

$= AF^2 : AE^2$.

$= AD \times AE : AE \times AE$.

drieh. AGH : drieh. AEB = AD : AE.

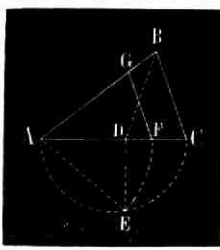
maar volgens (1) „ ABD : „ „ = „ : „

dus is drieh. AGH = drieh. ADB $= \frac{2}{7}$ dr. ABC.

en dus fig. HBCG = $\frac{5}{7}$ „ „

derhalve drieh. AGH : fig. HBCG = 2 : 5.

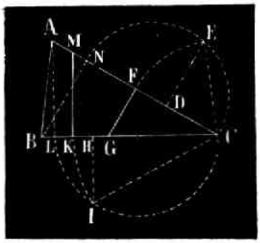
112. Het is in drieh. ABC de eenvoudigste weg om den driehoek in de uiterste en middelste reden te verdeelen, zoo wij zijne basis in die reden verdeelen door een punt D, volgens Badon § 161, en daarna B met D vereenigen.



Hoe wij daarna drieh. ABD veranderen in drieh. AFG, wiens zijde FG met BC evenwijdig loopt, zal na al 't voorgaande wel geene explicatie meer behoeven.

113. Verdeel (in de figuur van vraagst. 111 dezer Afd.) de lijn AC door het punt D in de uiterste en middelste reden dan is wanneer men nog BD trekt, ABD het kleinste stuk van den in de uiterste en middelste reden gedeelden driehoek ABC. Vervorm dit stuk ABD in AGH (waarvan de zijde GH loodrecht op AC staat) op de bekende wijze.

114. *Constructie.* Deze constructie is slechts de herhaling eener bewer-



king, die wij reeds meermalen verrichtten. Het zal dus geregeld zijn aan te duiden wat wij deden, zonder in alle bijzonderheden te treden.

Na uit B op AC eene loodlijn te hebben neergelaten, en DC $= \frac{1}{3}$ AC te hebben genomen, hebben wij geconstrueerd drieh. FGC wiens hoek F recht is $= \frac{1}{3}$ driehoek ABC.

Na uit A op BC eene loodlijn te hebben neergelaten, en CH $= \frac{2}{3}$ BC genomen te hebben, hebben wij drieh. MKC, wiens hoek MKC recht is, geconstrueerd $= \frac{2}{3}$ drieh. ABC.

Drieh. ABC is derhalve in gelijke stukken verdeeld door FG die loodrecht op AC, en door KM die loodrecht op BC staat.

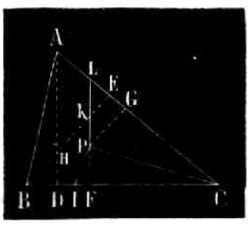
115. Wanneer wij in 't vorig vraagstuk CD genomen hadden $= \frac{1}{6}$ AC, en verder geconstrueerd hadden zoo als daar is geschied, zou drieh. CFG $= \frac{1}{6}$ drieh. ABC geworden zijn.

Hadden wij dan verder HC genomen gelijk $\frac{1}{2}$ BC, en verder geconstrueerd zoo als daar is geschied, zou drieh. MKC $= \frac{1}{2}$ drieh. ABC, en derhalve fig. MFGK $= \frac{2}{6}$ drieh. ABC geworden zijn.

Natuurlijk zou dan fig. AMKB $= \frac{3}{6}$ drieh. ABC geworden zijn en de verhouding van

fig. AMKB : fig. MFGK : drieh. CFG = 3 : 2 : 1 zijn.

116. Zij gevraagd uit het punt P lijnen te trekken die den driehoek verdeelen in reden als 1 : 2 : 3.



Constructie. Laat uit A eene loodlijn AD op BC neer en verdeel die in zes gelijke stukken. Zij DH $= \frac{1}{6}$ AD.

Zoek eene vierde evenredige tot de loodlijn PF die wij uit P op BC neerlaten, DH en BC, en zet deze vierde evenredige CI op BC van C af uit; trekken wij dan PI en PC dan is $\frac{1}{2}$ IC $\times$ PF $= \frac{1}{2}$ BC $\times$ DH $= \frac{1}{6}$ drieh. ABC

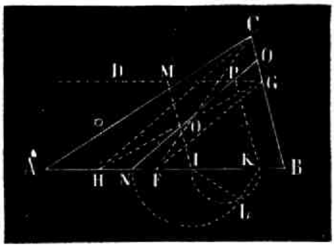
Zij evenzoo EK $= \frac{2}{6}$ BE. PG loodrecht op AC. Zet eene vierde evenredige CL tot PG. EK. AC uit op AC van C af, dan is, wanneer wij nog PL trekken,

drieh. CPL $= \frac{1}{2}$ CL $\times$ PG $= \frac{1}{2}$ EK $\times$ AC $= \frac{2}{6}$ drieh. ABC.

Aanmerking. Het kan bij deze constructie gebeuren, dat een gevonden vierde evenredige grooter is dan de zijde waarop zij moet worden uitgezet. Men begrijpt lichtelijk, dat men in dit geval loodlijnen neerlaat op de twee overige zijden en dan evenzoo construeert als hierboven is geschied. Zoo zou bijv. in ons geval eene vierde evenredige gezocht tot de loodlijn uit P op AB, $^5/_6$ van de loodlijn uit C op AB en AB zelve grooter geweest zijn dan de lijn AB, en wij hebben derhalve slechts loodlijnen doen vallen op AC en BC.

117. Zij gevraagd den driehoek ABC middendoor te deelen door eene lijn gaande door het punt P.

Constructie. Trek door het punt P, DG evenwijdig aan AB en PK evenwijdig aan BC; trek eene lijn CF uit C naar het midden van AB; trek verder FG en CH evenwijdig aan FG. Trek HG, deel HB in I middendoor; beschrijf op IK eenen halven cirkel; uit K met BK als straal eenen boog, die den pasbeschreven halven cirkel in L snijdt. Trek KL en IL; en beschrijf uit I met IL als straal eenen cirkelboog LN. Trek PN, en verleng die tot in Q, dan is NQ de gevraagde deellijn.



Bewijs. Trek IM evenwijdig aan BC, en noem het punt waar deze lijn NQ snijdt O, dan is

Drieh. MPO gelijkv. met drieh. NOI en drieh. PQG.

Dit kan natuurlijk uit de evenwijdigheid van BC met IM, en van GD met AB zeer gemakkelijk bewezen worden.

Gelijkstandige zijden in die driehoeken zijn NI, MP, PG. NI is gelijk IL, MP = IK, PG = BK = KL, en wij zouden dus met MP, NI en PG eenen rechthoekigen driehoek kunnen beschrijven gelijk en gelijkv. met drieh. IKL. In dezen driehoek zoude MP hypotenusa zijn.

Volgens Badon § 199 vijfde gevolg is dus

de drieh. op MP beschreven gelijk aan de som der daarmede gelijkvormige driehoeken beschreven op NI en PG of

drieh. MPO = drieh. NIO + drieh. PQG.

Tel hierbij fig. OPGBI = fig. OPGBI, zoo is

parall. MGIB = drieh. NQB.

maar ook is „ „ = drieh. HGB; want de hoogten dezer beide fig. zijn gelijk en de basis des driehoeks is gelijk twee maal de basis des parall.

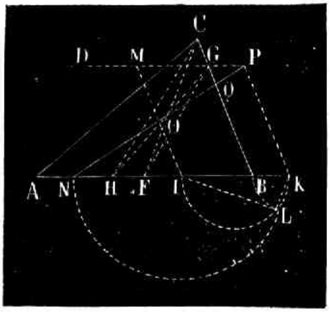
Derhalve is ook drieh. NQB = drieh. HGB.

Merken wij nu nog op, dat drieh. FGB = drieh. FGB en dat uit de evenw. van HC en FG drieh. HGF = „ FGC is.

Zoo weten wij dat drieh. HGB = drieh. BFC is.

Dus is ook drieh. NQB = drieh. BFC = $^1/_2$ drieh. ABC.

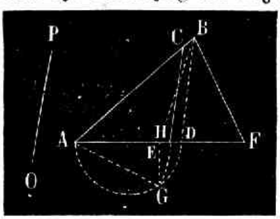
118. Dit vraagstuk is bijkans geheel met het vorige gelijkvormig. Ik heb



derhalve alleen eene figuur gegeven, zonder opgave van constructie en zooveel mogelijk dezelfde letters gezet bij gelijksoortige punten in deze figuur en in de fig. van 't vorig vraagstuk. Het bewijs heb ik ook zooveel doenlijk ingekort.

Bewijs. drieh. MPO = $\triangle$ GPQ + $\triangle$ NIO.
of drieh. MPO—drieh. GPQ = drieh. NIO.
of vierh. MGQO = drieh. NIO.
vierh. OQBI = vierh. OQBI.
——————————————— opt.
parall. MGBI = drieh. NBQ.
maar „ MGBI = drieh. HGB.
dus ook drieh. NBQ = drieh. HGB.
maar ook is „ BCF = drieh. HGB = $\frac{1}{2}$ dr. ABC.
dus ook drieh. NBQ = $\frac{1}{2}$ drieh. ABC.

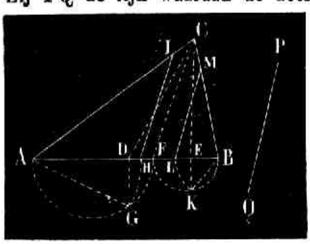
119. Zij gevraagd drieh. ABF te verdeelen in twee gelijke stukken door eene lijn evenwijdig aan PQ.



Constructie. Trek eene lijn BD door het toppunt B des gegeven driehoeks, evenwijdig aan de in stelling gegeven lijn PQ. Trek de lijn BE naar 't midden E van AF. Beschrijf op AD eenen halven cirkel; richt EG loodrecht op AF op, trek AG en beschrijf daarmede uit A eenen cirkelboog GH: trek HC evenwijdig aan BD of PQ, dan is drieh. AHC = $\frac{1}{2}$ drieh. ABF.

't Bewijs is gelijkvormig met dat van vraagst. 109 dezer Afd.

120. Zij PQ de lijn waaraan de deellijnen evenwijdig moeten zijn.

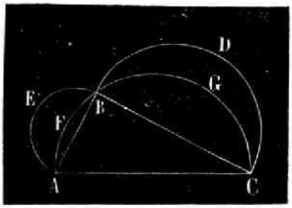


Constructie. Verdeel AB in zoo veel deelen als men den driehoek wil verdeeld hebben, terwijl men zorgt dat deze deelen tot elkaar in reden staan als de gegeven verhoudingsgetallen.

Moest bijv. drieh. ABC in drie stukken worden verdeeld die tot elkaar in reden staan als 3 : 2 : 1, zoo verdeelt men AB zóó, dat AD : DE : BE staat als 3 : 2 : 1. Trek eene lijn CF evenwijdig aan de in stelling geg. lijn PQ; beschrijf op AF en BF halve cirkels. Richt DG en EK loodrecht op AB op: trek AG en BK; beschrijf met AG uit A eenen cirkelboog GH, en met BK uit B eenen cirkelboog KL. Trek eindelijk nog HI en LM evenwijdig aan CF. De beide laatstgenoemde lijnen zullen drieh. ABC op gevraagde wijze verdeelen.

't Bewijs is gelijkvormig met dat van vraagst. 110 dezer Afdeeling.

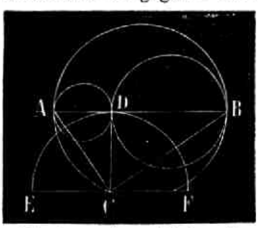
121. Gesteld dat de figuur aan de voorwaarden in de opgave gesteld voldoe, zoo is



't bewijs van 't gevraagde:

Fig. AEBDC = fig. AEBDC.
volgens Badon § 199 is halve cirk. ABC = halve cirk. ABE + halve cirk. BDC.
——————————————— aft.
halve maan AEBF + halve maan BDCG = drieh. ABC.

122. Laat ABC de gegeven rechth. driehoek zijn en de figuur voldoen aan de vereischten in de opgave gesteld.



Bewijs van 't gevraagde.

Noemen wij alle cirkels bij hunne middellijnen zoo is
cirk. AB = cirk. AC + cirk. BC.
cirk. AD + cirk. BD = cirk. AD + cirk BD.
——————————————— aft.

De twee kromlijnige fig. waarvan in de opgave spraak is =
= cirk. AC — cirk. AD + cirk. BC — cirk. BD.
= cirk. DC + cirk. DC.
= 2 cirk. DC.

Daar nu een cirkel EF = 4 cirk. DC is, zal natuurlijk halve cirkel EF = 2 cirk. DC en dus ook de 2 kroml. fig. = halve cirk. EF wezen.

123. Zie de eerste afdeeling, blz. 22, opgave 27 van het tekstboekje.

124. Construeer eene willekeurige ruit wier scherpe hoek 30° is. Vervorm en deze ruit en den gegeven driehoek in vierkanten.. Zoek eene vierde evenredige tot de zijde van het vierkant dat wij van de ruit maakten, de zijde van het andere vierkant, en de zijde der ruit. Beschrijf daarna eene ruit met eenen scherpen hoek van 30° en de gevonden vierde evenredige tot zijde.

125. De hoeken van den verlangden driehoek zullen respectivelijk 45°,

60°, 75° groot zijn. Vervorm en dezen driehoek en den gegeven driehoek tot vierkanten. Zoek eene vierde evenredige tot de zijde van het vierkant, dat wij van onzen geconstrueerden driehoek maakten, de zijde van het andere vierkant, en de basis van onzen geconstrueerden driehoek. Beschrijf op deze vierde evenredige als basis eenen driehoek gelijkvormig aan den geconstrueerden.

Dat de bases van de beide geconstrueerde driehoeken gelijkstandige zijden worden moeten zal wel niet behoeven aangemerkt te worden.

126. Maak den gegeven veelhoek tot een vierkant. Zoek een vierkant dat tot dit gevonden vierkant in reden staat als n : m. Zoek eene vierde evenredige tot de zijde van het eerstgeconstrueerde, de zijde van het daarna geconstrueerde vierkant en eene willekeurige zijde des gegeven veelhoeks. Beschrijf op de gevonden vierde evenredige eenen veelhoek gelijkvormig met den gegevenen. Dat de genomen willekeurige zijde des gegeven veelhoeks, en de gevonden vierde evenredige gelijkstandige zijden in de beide gelijkvormige veelhoeken moeten worden, spreekt wel van zelve.

127. *Constructie.* Trek in den gegeven cirkel de middellijn AB. Verdeel

die in drie gelijke deelen AC, CD en BD. Richt uit C en D loodlijnen CF en DE op AB op. Trek AF en AE, en beschrijf uit A met deze beide lijnen respectivelijk als stralen, de cirkelbogen FG en EH. Cirkels op de middellijnen AG en AH beschreven, voldoen aan de vraag.

Bewijs. Cirk. AB : cirk. AH : cirk. AG $= AB^2 : AH^2 : AG^2$.

$= AB^2 : AE^2 : AF^2$.

$= AB \times AB : AD \times AB : AC \times AB$.

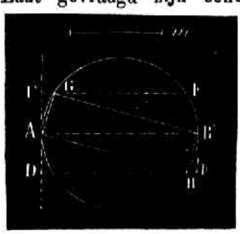
$= AB : AD : AC$.

cirk. AB : cirk. AH : cirk. AG $= 3 : 2 : 1$.

Derhalve is cirk. AG = cirk. AH — cirk. AG = cirk. AB — cirk. AH.

Zoo men wil, rest ons nog te bewijzen, dat de cirkels die wij geconstrueerd hebben elkander raken. Daar echter de middelpunten der drie cirkels AB, AG en AH liggen op ééne rechte lijn, meenen wij het gerust den lezer te kunnen overlaten, dit te bewijzen met behulp van opgave 29, bladz. 13, Afd. 1.

128. Laat gevraagd zijn eenen rechthoek te beschrijven in cirk. AB die



denzelfden inhoud heeft als een geg. veelhoek. Zij verder m^2 de inhoud diens veelhoeks.

Constructie. Zoek eene derde evenredige tot AB en *m*. Richt uit A, loodrecht op AB, op AC en AD; maak AC en AD ieder gelijk de gevonden derde evenredige. Trek CF en DE evenwijdig aan AD, en vereenig zoowel G als H met A en B. De rechthoek AGBH zal dan de gevraagde zijn.

Bewijs. Wij moeten 1⁰ bewijzen dat AGHB een rechthoek is, 2⁰ dat die rechthoek den gevraagden inhoud heeft.

Bewijs van het eerste. Laat uit B op DH eene loodlijn BE neer, dan is

drieh. AGB ∞ drieh. AHB want

AB = AB, hoek AHB = hoek AGB = R

en hoek BAH = hoek ABG; (want uit de gelijk en gelijkvormigheid van drieh. CGA en drieh. BHE kan men bewijzen dat AG = BH dus ook *bg* AG = *bg* BH is.)

Wij weten derhalve dat AG = BH, BG = AH is, dat derhalve AGBH een parallelogram is; bovendien weten wij van twee der hoeken dat zij recht zijn; *ergo* is AGBH een rechthoek.

Bewijs van het tweede.

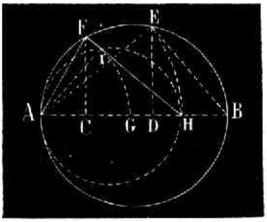
Inh. drieh. ABG = AB $\times$ $\frac{1}{2}$ AC = AB $\times$ $\frac{1}{2}$ der gevonden derde evenredige.

„ „ ABH = AB $\times$ $\frac{1}{2}$ AD = „ $\times$ $\frac{1}{2}$ „ „ „ „

——————————————————————————— opt.

Rechth. AGBH = AB $\times$ de gevonden derde evenredige = m^2.

129. Zij AB de gegeven cirkel.



Constructie. Trek de middellijn AB en verdeel die zoo dat AC : CD : DB = 3 : 4 : 5. Richt uit C en D loodlijnen op AB op, en verbind de snijpunten dezer loodlijnen en den omtrek van cirkel AB, de punten E en F met A. Beschrijf uit A met AF en AE respectivelijk als stralen de cirkelbogen FG en EH. Beschrijf op AH eenen cirkel. Trek AI en IH. Trek verder nog BE, dan zijn de drie cirkels beschreven op AG of AF, IH en BE als middellijnen, de gevraagde.

Bewijs. Cirk. AF (d. i. de cirkel op AF als middellijn)

$$\text{cirk. AF : cirk. AH : cirk. AB} = AG^2 : AH^2 : AB^2$$
$$= AF^2 : AE^2 : AB^2$$
$$= AC \times AB : AD \times AB : AB \times AB$$
$$= AC : AD : AB.$$

of daar AC, AD respectivelijk $\frac{3}{12}$, $\frac{7}{12}$ AB zijn,

cirk. AF : cirk. AH : cirk. AB = 3 : 7 : 12.

cirkel AF is dus = $\frac{3}{12}$ cirk. AB, cirk. AH = $\frac{7}{12}$ cirk. AB.

In den rechthoekigen drieh. AIH is nu volgens Badon § 199

Cirk. AH = cirk. AI + cirk. IH.

= cirk. AF + cirk. IH.

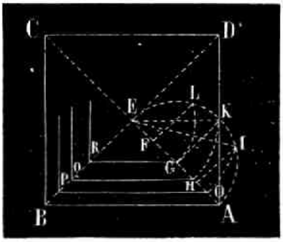
cirk. IH dus = $\frac{4}{12}$ cirk. AB.

In den rechthoekigen driehoek AEB is eveneens

Cirk. AB = cirk. AE + cirk. BE.
= cirk. AH + cirk. BE.
Cirk. AE dus = $^5/_{12}$ cirk. AB.
Wij hebben dus dat cirk. AG = $^3/_{12}$ cirk. AB.
„ IH = $^4/_{12}$ „ „
„ BE = $^5/_{12}$ „ „ is.

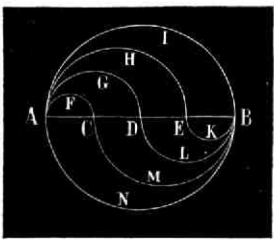
De drie geconstrueerde cirkels staan dus tot elkander als 3 : 4 : 5 en zijn te samen = cirk. AB; q. e. d.

130. *Constructie.* Trek in het vierk. ABCD de twee diagonalen AC en BD. Beschrijf op AE eenen halven cirkel. Maak EF = FG = GH = HA. Richt op AE de loodlijnen FL, GK, HI op; trek EL, EK, EI en beschrijf met deze respectivelijk als stralen uit E de bogen LG, KN, IO. Trek OP, QN, RG evenwijdig aan AB enz.



Het *bewijs* is zeer gelijkvormig aan vorige bewijzen.

131. Zij AC = CD = DE = EB en hebbe de figuur een samenstel zoo als dat in de opgave is voorgeschreven.



Bewijs van 't gevraagde.

h. c. AC : *h. c.* AD : *h. c.* AE : *h. c.* AB = 1 : 4 : 9 : 16.

dus ook

fig. BIAHE : fig. AHEDG : fig. AGDCF : *h.c.* AC = 7 : 5 : 3 : 1.
evenzoo vinden wij *h.c.* BE : fig. BKEDL : fig. BLDCM : fig. BMCAN = 1 : 3 : 5 : 7
———————————————————————————— opt.
fig. BKEHAI : fig. BKEHAGDL : fig. BLGDAFCM : fig. BMCFAN = 8 : 8 : 8 : 8.

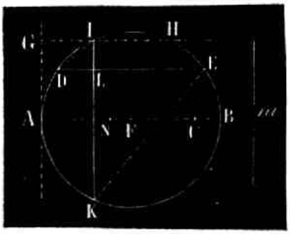
Deze fig. zijn derhalve gelijk.

Aanmerking. Wij hebben slechts een bewijs geleverd voor 't geval dat n vier was. Het algemeene bewijs zou luiden

fig. BIAHE : fig. AHEDG : enz. = $n^2-(n-1)^2 : (n-1)^2-(n-2)^2$: enz.
h. c. BE : fig. BKEDL : enz. = 1 : 3 enz.
———————————————————————————— opt.
fig. BKEHAI : fig. BKEHBGDL : enz. = $2n$: $2n$: enz.

Deze fig. zijn derhalve gelijk.

132. Zij gevraagd vier cirkels te construeeren wier inhouden te samen



gelijk aan cirk. AB, wier stralen te samen gelijk aan de lijn m zijn terwijl tevens hunne inhouden eene meetkunstige evenredigheid moeten uitmaken.

Constructie. Zet de lijn m op den diameter des cirkels, op AB uit. Zij $AC = m$.

Trek uit een willekeurig punt D des omtreks eene koorde DE evenwijdig aan AB; verdeel ze in twee gelijke stukken en zet op AB van A af de lijn AF uit gelijk aan $\frac{1}{2}$ DE. Richt uit A op AB eene loodlijn AG op; maak $AG = CF$ en trek GH evenwijdig aan AB; trek daarop IK evenwijdig aan AG.

De vier cirkels die DL, IL, LE, LK tot middellijnen hebben, zullen aan de drie gestelde vereischten voldoen.

Bewijs. Wijl de som der stralen $= AC$ moet zijn, moet natuurlijk de som der middellijnen $= 2\ AC$ wezen.

Nu is $FC = AG = AC - AF = AC - \frac{1}{2}\ DE$.

IN is dus ook gelijk $AC - \frac{1}{2}\ DE$.

$$\begin{aligned} NK = IN &= AC - \tfrac{1}{2}\ DE. \\ &\overline{\qquad\qquad\qquad} \text{ opt.} \\ IK &= 2\ AC - DE. \\ DE &= DE \\ \hline IK + DE &= 2\ AC = \text{som der geconstrueerde middellijnen.} \end{aligned}$$

Deze vergelijking door 2 gedeeld geeft

$m = AC =$ de som der geconstrueerde stralen (1).

Cirk. AB:cirk. KL:cirk. LE:cirk. DL:cirk. $IL = AB^2 : KL^2 : LE^2 : DL^2 : IL^2$.

Maar vroeger zagen wij reeds, dat in een geval als het onze $AB^2 = KL^2 + LE^2 + DL^2 + IL^2$ is (en wij bewezen dit met behulp der lijnen DI, KE, HE: zie vraagst. 43 dezer Afdeeling).

derh. is ook cirk. AC=cirk. KL+cirk. LE+cirk. DL+cirk. IL (2).

Ten derde is volgens eene bekende stelling

$DL : IL = LK : LE$. Verheffen wij deze evenredigheid in de tweede macht zoo hebben wij

$DL^2 : IL^2 = LK^2 : LE^2$ en daar

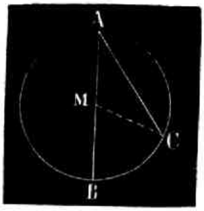
cirk. DL : cirk. IL : cirk. LK^2 : cirk. $LE^2 = DL^2 : IL^2 : LK^2 : LE^2$ is

cirk. DL : cirk. IL = cirk. LK : cirk. LE. (3)

In de resultaten (1), (2) en (3) is dus bewezen, dat de geconstrueerde cirkels aan de drie gestelde vereischten voldoen.

DERDE AFDEELING.

1. Die stelling is: een hoek wiens hoekpunt op den omtrek eens cirkels ligt, en wiens beide beenen den cirkel doorsnijden, wordt gemeten door de halve boog tusschen zijne beenen.



Het eerste geval dezer stelling is, dat een der beenen door 't middelpunt des cirkels gaat.

Bewijs van 't gevraagde. Zij AB eene middellijn. Trek uit het middelpunt M eene lijn naar C, dan is:

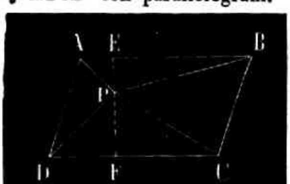
hoek BMC = hoek BAC + hoek ACM, of daar drieh. MAC gelijkbeenig is, en dus hoek BAC = hoek ACM is,

hoek BMC = 2 hoeken BAC.

Hoek BMC = bg. BC; derhalve is hoek BAC = $\frac{1}{2}$ bg. BC.

2. De afgesneden stukken staan tot elkander in reden, als de opstaande zijden. Verdeelt men dus de lijn, die gelijk is aan de som dier stukken, in reden van de opstaande zijden, zoo worden die stukken bekend.

3. Zij ABCD een parallelogram.



Trek als hulplijnen eene lijn EF, gaande door P, loodrecht staande op DC en dus ook op AB.

Bewijs van 't gevraagde.

Inh. drieh. APB = $\frac{1}{2}$ AB $\times$ PE = $\frac{1}{2}$ DC $\times$ PE

Inh. drieh. DPC = $\frac{1}{2}$ DC $\times$ PF

Inh. drieh. APB + Inh. drieh. DPC = $\frac{1}{2}$ DC $\times$ EF.

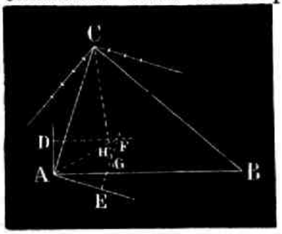
Inh. parallelogram ABCD = DC $\times$ EF.

Dus is Inh. drieh. APB + Inh. drieh. DPC = $\frac{1}{2}$ parall. ABCD.

4. De inhoud eener ruit is gelijk aan hare zijde vermenigvuldigd met de middellijn des ingeschreven cirkels. Men vindt hier alzoo de zijde, door den inhoud der ruit, of dien van het gegeven vierkant door die middellijn te deelen. Trekt men nu twee evenwijdige lijnen, wier afstand gelijk is aan de middellijn des gegeven cirkels, en neemt men op eene derzelve een willekeurig punt P aan, en beschrijft uit dat punt als middelpunt met de gevonden zijde der ruit als straal een cirkelboog, welke

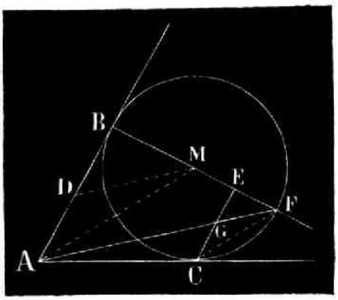
die lijnen in H en I snijdt, zoo wordt de hoek HPI bekend, onder welken de ruit nu gemakkelijk om den cirkel geconstrueerd wordt.

5. *Constructie.* Richt uit het punt A de lijn AD loodrecht op AB, en



de lijn AE loodr. op AC op; maak AD = m en AE = n gelijke deelen (hier 2 en 3). Trek DF evenw. aan AB en EF evenwijdig aan AC; dan zullen de afstanden van elk punt der lijn AF tot de zijden AB en AC in reden zijn als m : n (als 2 : 3). Richt evenzoo in C loodlijnen op, op de zijden AC en BC, die n en p van die gelijke deelen lang zijn (hier 3 en 4), dan zal men door het trekken van lijnen, evenwijdig aan AC en BC eene lijn CG vinden, waarvan uit elk punt de nedergelaten loodlijnen op AC en BC in reden zijn als n en p (hier 3 en 4). Het snijpunt nu der lijnen AF en CG, het punt H zal het gevraagde punt zijn.

6. Trek DM evenwijdig aan AF, dan is AD = BD, omdat FM = BM is.



Als men nu nog AM trekt, zal hoek AMB gemeten worden door den halven boog BC, en dus gelijk zijn aan hoek CFE. Dewijl nu de hoeken ABM en CEF beide recht zijn, zijn de driehoeken ABM en CEF gelijkvormig. Daar nu wegens de evenredigheid der lijnen DM en AF, de hoeken BMD en EFG gelijk zijn, zijn ook de drieh. BMD en EFG gelijkvormig.

Wegens de gelijkvormigheid der driehoeken ABM en CEF hebben wij

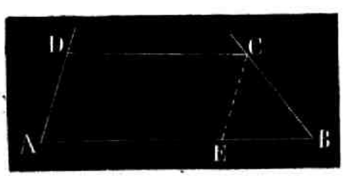
$$AB : CE = BM : EF$$

en wegens de gelijkvormigheid der drieh. BDM en EFG hebben wij

$$\underline{BD : EG = BM : EF}$$

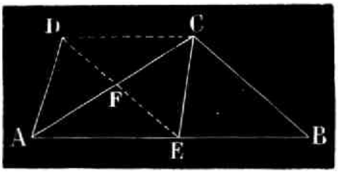
$$\begin{array}{ll} \text{dus} & AB : CE = BD : EG \\ \text{maar} & AB : \quad\;\; = 2\ BD \\ \text{dus} & \quad\;\; CE = 2\ EG. \end{array}$$

7. Zij AB gegeven als eene der evenwijdige zijden; maak hoek BAD en hoek ABC gelijk aan de gegeven aanliggende hoeken. Neem vervolgens AE gelijk aan de lijn, die de andere evenwijdige zijde voorstelt. Trek EC evenwijdig met AD, en uit het punt C waar de lijn BC door EC gesneden

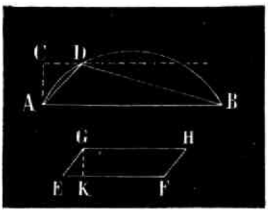


wordt, de lijn CD evenwijdig met AB; dan zal ABCD het gevraagde trapezium zijn.

8. Maak een hoek ACB gelijk aan den hoek waaronder de diagonalen elkander moeten snijden, en welks beenen AC en BC gelijk zijn aan de gegeven diagonalen. Trek AB en zet daarop het stuk BE uit, gelijk aan de gegeven evenwijdige zijde. Trek DE evenwijdig aan BC, en CD evenwijdig aan AB, dan is AECD het gevraagde trapezium; want DE = BC en hoek AFE = hoek ACB.



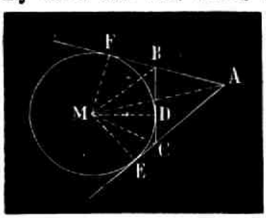
9. *Constructie.* Zij AB het gegeven cirkelsegment, EFGH het gegeven parallelogram.



Laat GK loodrecht op EF neer. Richt uit A eene loodlijn op AB op, en maak het stuk AC dezer loodlijn gelijk aan het dubbele eener vierde evenredige gezocht tot AB, EF, GK. Trek CD evenwijdig aan AB en daarna nog de lijnen AD en BD, dan is drieh. ABD de gevraagde driehoek.

Bewijs. Inh. drieh. ABD = AB $\times$ $\frac{1}{2}$ AC.
Daar echter AB : EF = GK : $\frac{1}{2}$ AC staat,
en dus AB $\times$ $\frac{1}{2}$ AC = EF $\times$ GK is, is ook
Inh. drieh. ABD = EF $\times$ GK = parall. EFHG.

10. Zij ABC een will. drieh. wiens zijden BC, AB, AC op de gewone wijze respectivelijk a, c, b geheeten worden. Zij cirkel M een cirkel die AB's verlengde in F, BC in D, AC's verlengde in E raakt: trekken wij dan MA, ME, MC, MD, MB, MF zoo is MF = MD = ME; DC = EC en BD = BF, aangezien de raaklijnen uit een punt aan een cirkel getr. gelijk zijn.



Hieruit volgt dat drieh. FBM $\cong$ drieh. MBD
drieh. MDC $\cong$ drieh. MEC is.
en dat EC + BF = BC = a is.

Bewijs van 't gevraagde.

Drieh. AMF = (AB + BF) $\frac{1}{2}$ MF
Drieh. AME = (AC + CE) $\frac{1}{2}$ ME of MF.
——————————————————— opt.
AFME = (AB + AC + BC) $\frac{1}{2}$ MF.
= (a + b + c) $\frac{1}{2}$ MF (1)

Fig. MECBF $= 2$ drieh. MCD $+ 2$ drieh. MBD.
$= BD \times MD + CD \times MD.$
$= (BD + CD)\ MD$ of MF $= 2a \times \frac{1}{2}$ MF. (2)

Wanneer wij (2) van (1) aftrekken is dus
drieh.) ABC $= (-a + b + c)\ \frac{1}{2}$ MF of zoo als men dat gewoonlijk schrijft $= (s-a)$ MF. Verder leert ons Badon § 192, gev. 3, dat drieh. ABC ook $= \sqrt{s\ (s-a)\ (s-b)\ (s-c)}$ is;
dus is $(s-a)\ MF = \sqrt{s\ (s-a)\ (s-b)\ (s-c)}$.

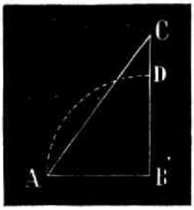
$$(s-a)^2\ MF^2 = s\ (s-a)\ (s-b)\ (s-c).$$

$(s-a)^2$

$$MF^2 = \frac{s\ (s-b)\ (s-c)}{s-a}$$

$\sqrt{}$

$$MF = \sqrt{\frac{s\ (s-b)\ (s-c)}{s-a}}$$

11. 

Zij ABC een rechthoekige driehoek. Indien wij dan uit B met AB als straal den cirkelboog AD beschrijven, vinden wij als volgt

't bewijs van het gevraagde.

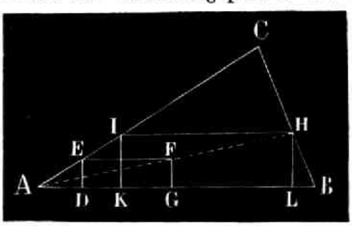
$CD^2 = (BC - AB)^2$ of $\quad CD^2 = BC^2 + AB^2 - 2BC \times AB.$
drieh. $ABC = \frac{1}{2}\ BC \times AB.$

$\times 4$

$$4 \text{ drieh. } ABC = 2BC \times AB.$$

$$CD^2 + 4 \text{ drieh. } ABC = AB^2 + BC^2.$$
$$CD^2 + 4 \text{ drieh. } ABC = AC^2. \text{ q. e. d.}$$

12. Neem een willekeurig punt D aan op de basis des driehoeks, en richt



DE loodrecht op AB. Neem vervolgens DG zoodanig dat deze tot DE in verhouding staat, als lengte tot breedte moet staan; dan voldoet rechth. DEFG reeds aan de vraag, wanneer niet ook het hoekpunt F in de zijde BC moest liggen. Trek dus AF, en verleng die tot in H. Nadat men dan nog HI evenwijdig aan AB getrokken, en uit H en I de loodlijn HL en IK op AB zal nedergelaten hebben, is de rechth. IKHL de begeerde. Het bewijs daarvoor is licht te vinden.

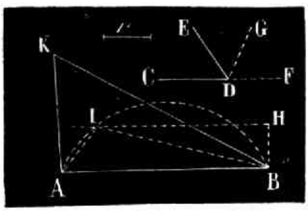
Aanm. Nog een andere rechthoek voldoet aan de vraag. Men zal dien vinden, als men de breedte op de basis, en de hoogte loodrecht daarop neemt.

13. Zie tweede afdeeling, bladz. 35, vr. 128.

14. Uit de wijze waarop wij in vraagst. 128 der tweede afdeeling den inhoud eens rechthoeks in eenen cirkel berekenden, blijkt bij eenig nadenken gemakkelijk, dat de grootste rechthoek die in den cirkel beschreven kan worden, gelijk is aan het vierkant in dien cirkel. Is derhalve de gegeven figuur, na tot een vierkant herleid te zijn, grooter dan het vierkant dat in den gegeven cirkel beschreven kan worden, zoo is de constructie onmogelijk.

15. Neem een' willekeurigen rechthoek aan, welks lengte en breedte de gegevene verhouding hebben. Verander dien rechthoek in een quadraat; zoek eene vierde evenredige tot de zijde van het gevonden quadraat, de zijde van het gegeven quadraat en de lengte van den reeds geconstrueerden rechthoek, zoo zal men de lengte van den gevraagden rechthoek vinden, waaruit dan ligtelijk de breedte te bepalen is.

16. Zij de gegeven basis AB, de gegeven tophoek de hoek CDE, de gegeven straal des ingeschreven cirkels de lijn r.



Constructie. Deel het supplement EDF des gegeven tophoeks middendoor door eene lijn DG. Breng door A en B eenen cirkelboog zóó, dat de hoek van het segment AB = hoek CDG zij. Richt uit B op AB eene loodlijn BH op: maak BH = r; trek HI evenwijdig aan AB; trek AI en BI; maak hoek BAK = 2 hoeken BAI, hoek ABK = 2 hoeken ABI dan is drieh. ABK de gevraagde.

En de constructie en het bewijs van dit vraagstuk zijn gelijkvormig met die van vr. 62, afd. 2. Wij kunnen dus volstaan met aan te wijzen dat hoek AKB = hoek CDE is.

Hoek AIB = hoek CDG.

derhalve ook hoek IAB + hoek IBA = hoek GDF.

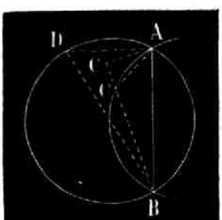
——————————————————— 2

hoek KAB + hoek KBA = hoek EDF.

Deze vergelijking afgetrokken van 2R = 2R geeft

hoek AKB = hoek CDE.

17.



Gesteld dat de hoek in segm. ACB = 2 maal de hoek in s. ADB is.

Bewijs van 't gevraagde.

Stel dat eenig punt C′ 't middelpunt ware van cirkel ABD. Trek dan BC′ en verleng die zoo noodig tot zij den omtrek ACB in C snijdt.

Volgens onze gegevens moest dan hoek ADB = $\frac{1}{2}$ hoek ACB, N°. 19. 1°. nieuw bewijs. laat $CE \perp AB$ neer

$\therefore AC^2 = CD^2 + AD^2 + 2AD.DE$

$BC^2 = CD^2 + BD^2 - 2BD.DE$

$BC.AC^2 = BC.CD^2 + BC.AD^2 + 2BC.AD.DE$

$AC.BC^2 = AC.CD^2 + AC.BD^2 - 2BD.AC.DE$ opt.

$BC.AC(AC+BC) = (AC+BC)CD^2 + (BC+AC)AD.BD$

of $BC.AC = CD^2 + AD.BD$.

't tweede d° d°.

n° 19.

+ Bewijs van het laatste. Trek door D eene lijn // CD' dan zijn de stukken van D tot de ontmoetingspunten dezer lijn met AC en BC, gelijk omdat A, D, B en D' harmonische punten zijn (volgens 2° dezer stelling)

Zijn deze stukken gelijk en houdt men in 't oog dat $\angle DCD'$ 90° is dan is uit de gelijkheid gelijkvormigheid van twee driehoekjes te bewijzen $\angle ACD = \angle DCB$ waaruit volgt

$AC^x : BC = AD : BD$.

maar ook bekend $AD : BD = AC' : BC'$

dus $AC : BC = AC' : BC'$.

volgens onze constructie moest dan hoek ADB = $\frac{1}{2}$ hoek AC′B zijn.

Maar nu is hoek ACB nooit gelijk aan AC′B tenzij C′ in den omtrek ACB ligge; want in onze figuur is

hoek AC′B + hoek C′AC = hoek ACB; en had C′ binnen omtrek ACB gelegen, zoo zoude

hoek AC′B—hoek C′AC = hoek ACB geweest zijn. C′ moet derhalve op den omtrek ACB liggen.

18. Zij ABC een gelijkzijdige driehoek en BC = a. Zij verder BD = DC enz. = $\frac{1}{2}$ a en laat de cirkelbogen DE, EF, DF uit C, A en B met $\frac{1}{2}$ a als straal beschreven zijn, zoo is

Inh. drieh. ABC $= \frac{1}{2}\, a \times AD.$

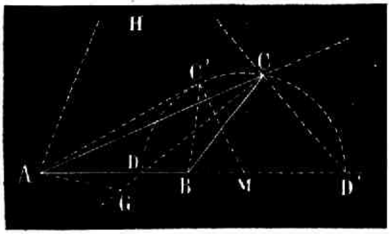
$= \frac{1}{2}\, a \times \frac{1}{2}\, a \sqrt{3}$

$= \frac{1}{4}\, a^2 \sqrt{3}.$

Wijl nu hoek FBD, hoek DCE en hoek FAE ieder gelijk 60° zijn, vormen de drie sectoren FBD, DCE, EAF behoorlijk naast elkander gelegd juist eenen halven cirkel met $\frac{1}{2}$ a als straal beschreven. De inhoud van dezen halven cirkel is volgens de bekende formule $\frac{1}{2}\, \pi \times \frac{1}{4}\, a^2$.

Dit afgetrokken van wat wij voor den inhoud van driehoek ABC verkregen, geeft voor den inhoud der kromlijnige figuur FED,
$\{\sqrt{3} - \frac{1}{2}\, \pi\}\, \frac{1}{4}\, a^2$.

19. Zij ABC onze gegeven driehoek, CD deele hoek ACB, CD′ hoek BCO middendoor, zoo moet bewezen worden



1°. $CD^2 = AC \times BC - AD \times BD$ en
$CD'^2 = AD' \times BD' - AC \times BC$.

2°. $AD \times BD' = AD' \times BD$.

3°. De halve cirkel op DD′ moet door C gaan.

4°. AC′ (C′ is een willekeurig punt van halven cirkelomtrek DD′)
AC′ : BC′ = AC : BC.

Bewijs van het eerste. Verleng CD door D en maak
hoek CAG = hoek CDB, dan is, wijl ook
hoek ACG = hoek DCB is, drieh. ACG ∾ drieh. DCB
en dus AC : CG = CD : BC. (1).

Ook is wegens de gelijkheid der hoeken AGC en DBC, ADG en CDB, drieh. ADG ∾ drieh. CDB, en dus
AD : DG = CD : BD (2)

Uit (1) leiden wij af $AC \times BC = CG \times CD$; uit (2)

$$AD \times BD = DG \times CD$$
$$\underline{\hspace{6cm}}\text{aft.}$$
$$AC \times BC - AD \times BD = CD^2$$

Als wij evenzoo $D'C$ door C verlengen en hoek $BD'C$ gelijk hoek CAH maken, is drieh. ACH $\backsimeq$ drieh. BCD' (want hoek CAH = hoek $BD'C$ en hoek ACH = hoek BCD') en tevens drieh. $AHD' \backsim$ drieh. $BD'C$; (want uit de gelijkvormigheid der vorige twee weten wij dat hoek AHC = hoek CBD' is, en buitendien is de hoek $AD'H$ beiden gemeen).

Uit de gelijkvormigheid van het tweede paar driehoeken weten wij $AD' : D'H = CD' : BD'$ of $AD' \times BD' = D'H \times CD'$ uit die van het tweede paar $AC : CH = CD' : BC$ of $AC \times BC = BC \times CD'$

$$\underline{\hspace{6cm}}\text{aft.}$$
$$AD' \times BD' - AC \times BC = CD'^2.$$

Bewijs van het tweede.

Uit het vorige bewijs ontleenen wij

$AC : BC = AD : BD$. Ook

$AC : BC = AD' : BD'$.

Uit de vereeniging dezer 2 evenredigheden weten wij

$AD ; BD = AD' : BD'$ of

$AD \times BD' = BD \times AD'$.

Bewijs van het derde.

Wijl hoek ACB + hoek BCO = 2R is, is

hoek DCB + hoek BCD' = hoek DCD' = 1 R.

Derhalve gaat een halve cirkel op DD' ook door het punt C.

Bewijs van het vierde: Zij C' een willekeurig punt aangenomen in cirk. omtrek DD'; indien wij dan nog $C'M$ trekken is $C'M = DM = MD'$.

Nu is $AD' : BD' = AD : BD$ of

$AM + DM : DM + BM = AM - DM : DM - BM$: hieruit volgt door ontwikkeling

$AM : DM = DM : BM$ of

$AM : MC' = MC' : BM$. Voegen wij hierbij dat hoek AMC' = hoek AMC' is, zoo zijn

de drieh. AMC' en BMC' gelijkvormig en dus

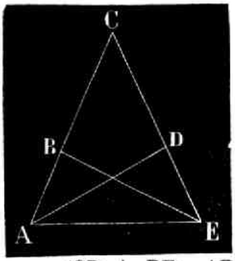
$AC' : BC' = AM : DM$. (1)

Maar uit de evenredigheid $AM : DM = DM : BM$ volgt

$AM - DM : DM - BM = AM : DM$.

of $AM : DM = AD : BD$. Dit gesubstitueerd in (1) geeft

$AC' : BC' = AD : BD$. q. e. d.

20. 

$$\left.\begin{array}{l} AD^2 = AC \times AE - CD \times DE \\ BE^2 = AE \times CE - AB \times BC \end{array}\right\} \text{zie vorig vraagst.}$$

daar nu $AD = BE$ en dus $AD^2 = BE^2$ gegeven is, zal ook

$AC \times AE - CD \times DE = AE \times CE - AB \times BC$ zijn;

maar $AC = AB + BC$ en $CE = CD + DE$, dus

$(AB + BC) \times AE - CD \times DE = AE \times (CD + DE) - AB \times BC$, of

$AB \times AE + BC \times AE - CD \times DE = AE \times CD + AE \times DE - AB \times BC$. (1)

Nu is $AB : BC = AE : CE$, of $AB \times CE = BC \times AE$, of $BC \times AE = (CD + DE)\, AB$,

en $CD : DE = AC : AE$, of $CD \times AE = AC \times DE$, of $CD \times AE = (AB + BC)\, DE$, deze

twee laatsten gesubstitueerd in verg. (1), zoo wordt zij:

$AB \times AE + CD \times AB + DE \times AB - CD \times DE = AB \times DE + BC \times DE + AE \times DE - AB \times BC$,

welke, vereenvoudigd zijnde, geeft:

$$AB \times \{ AE + CD + BC \} = DE \times \{ AE + CD + BC \}$$

waaruit $AB = DE$.

verder weet men dat $AE = AE$.

en $BE = AD$ is,

derhalve drieh. $ABE \backsimeq$ drieh. ADE.,

en hoek $AEB =$ hoek DAE.

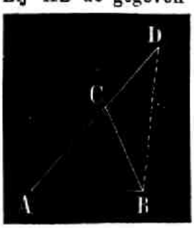
2

zoodat hoek $AEC =$ hoek CAE,

en driehoek ACE gelijkbeenig is.

21. Beschrijf eenen cirkel met den gegeven straal in den gegeven hoek. Trek de som der beide raaklijnen aan dien cirkel af van de som der zijden om den gegeven hoek. Het zal wel niet noodig zijn te bewijzen, dat wij dan de basis des verlangden driehoeks overhouden, en derhalve het vraagstuk tot vraagst. 16 dezer afdeeling hebben teruggebracht.

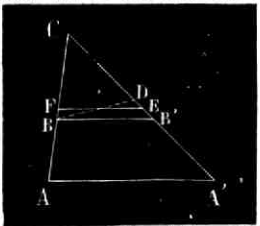
22. Zij AB de gegeven zijde, hoek CAB de hoek aan die zijde gegeven, AD de som der beide andere zijden.



Constructie. Trek BD en maak hoek $CBD =$ hoek CDB dan is ABC de gevraagde driehoek.

Bewijs. In drieh. BCD is wegens de gelijkheid der hoeken CBD en CDB, $BC = CD$, derhalve is $BC + AC = CD + AC =$ geg. som der opstaande zijden.

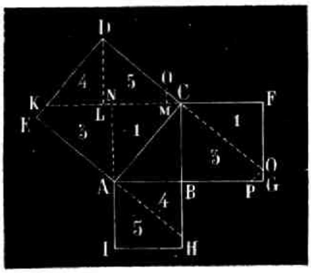
23. Stel dat in den driehoek AA′C waarin AB en BC onderling onmeetbaar zijn niet de lijn BB′ maar BD de lijn A′C zoo verdeelde, dat BC : AB = DC′ : A′D.



Immer is het dan mogelijk tusschen B′ en D een punt E te vinden zoodanig dat CE en A′E onderling meetbaar zijn en derhalve eene lijn FE evenwijdig aan BB′ en AA′ ons de evenredigheid geven zou: CF : AF = CE : A′E. Vergelijken wij hiermede onze gestelde evenredigheid, zoo zien wij, dat daarin eene grootere tot eene kleinere = eene kleinere : eene grootere staan zou: 't geen blijkbaar onmogelijk is. Na dus zoo bewezen te hebben, dat D niet aan de zijde van C op B′C liggen kan, bewijzen wij eveneens dat D niet aan de andere zijde van B′ op B′A′ kan liggen, en bewijzen dus dat de lijn BB′, AC en A′C in dezelfde verhouding verdeelt.

24. Stel dat tusschen twee zijden in den eenen driehoek een hoek lag kleiner of grooter dan de hoek tusschen de evenlange zijden in den tweeden driehoek, dan zoude een der drie gevallen van paragraaf 77 plaats hebben; echter zou de derde zijde in den eenen driehoek nooit gelijk aan de derde zijde in den anderen driehoek kunnen zijn, wat blijkbaar tegen onze vooronderstelling strijdt.

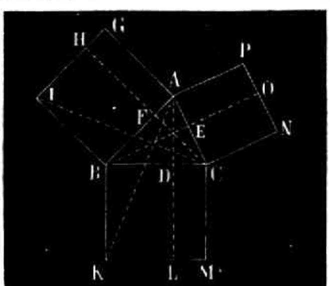
25. Van de letterlijk tallooze wijzen waarop men dit vraagstuk kan oplossen, kies ik er eene van de Gelder.



Verleng DC door C, CF door C, EA door A. Trek DL en AN evenwijdig aan BC, en OP evenwijdig aan AC. Maak drieh. MCQ gelijk en gelijkvormig met PGO.

Wij zullen ons er, na de bron aangewezen te hebben, waaraan wij deze oplossing ontleenden, toe bepalen met cijfers de gelijke stukken aan te wijzen.

26.



Zij ABC een willekeurige driehoek, laat ABIG, BCKM, APNC vierkanten respectivelijk op AB, BC, AC beschreven, CF; BE, AD loodlijnen zijn, respectivelijk uit C, B, A op de tegenoverstaande zijde neergelaten.

Bewijs van 't gevraagde.

Trekken wij dan IC en AK zoo is drieh. ABK ≌ drieh. IBC; want

BK = BC, AB = BI.

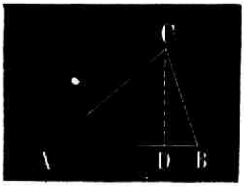
hoek ABK = hoek CBI.
= 1 R + hoek ABC.

———————————— 2

Rechth. BDKL = rechth. BFIH. (1)
Evenzoo bewijzen wij rechth. AEOP = rechth. AGHF. (2)
en rechth. EONC = rechth. DCLM. (3)

Tellen wij (1) bij (2) zoo hebben wij
rechth. BDKL + rechth. AEOP = AB^2 of
AC^2—rechth. EOCN + BC^2—rechth. DCLM = AB^2 en
substitueeren wij hierin rechth. DCLM uit (3)

$AC^2 + BC^2 - 2\ EOCN = AB^2$.

27. 

Zij CD loodrecht op AB neergelaten.

Bewijs van het gevraagde.

$AC^2 = AD^2 + DC^2$.
$BC^2 = BD^2 + DC^2$.

———————————— aft.

$AC^2 - BC^2 = AD^2 - BD^2$.

28. Het is bekend, dat het verschil van de quadraten der opstaande zijden eens driehoeks gelijk is aan het verschil van de quadraten der deelen, waarin de bedoelde loodlijn de basis verdeelt. Dit laatste verschil is splitsbaar in twee factoren, waarvan de eerste gelijk is aan de som, en de tweede gelijk aan het verschil dier deelen. Het komt er dus nu maar op aan, om vooreerst een vierkant te vinden gelijk aan het verschil van de vierkanten der opstaande zijden; en verder om dat vierkant te veranderen in een rechthoek, die het verschil van de deelen der basis tot breedte heeft. De lengte van dien rechthoek zal gelijk zijn aan de basis zelve. En alsdan zal men, daar de drie zijden nu bekend zijn, den driehoek gemakkelijk kunnen construeeren.

29. 

Laat in cirkel CD gegeven zijn $AF = a$, $BE = b$, $AB = c$. Wanneer wij dan AM $= x$ stellen is $MB = c - x$ en verder

$$AF^2 + AM^2 = FM^2 = ME^2 = MB^2 + BE^2.$$
$$a^2 + x^2 = FM^2 = ME^2 = c^2 - 2cx + c^2 + b^2.$$

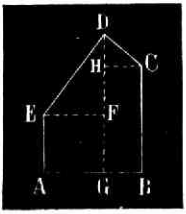
Hieruit volgt na eene kleine herleiding

$$x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}$$

Met behulp van deze waarde van x spreekt het wel van zelve, dat men MF, en dus ook CD = 2 MF zeer gemakkelijk vindt.

30. Zie tweede afdeeling, vraagst. 55.

31. Zij van vijfhoek ABCDE gegeven $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DE = d$, $AE = e$. hoek EAB = hoek DGB = hoek CBG = R.



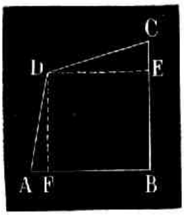
Wanneer wij dan $AG = x$, $DG = y$ stellen, zijn $GF = e$, $HG = b$, $FD = y-e$, $HD = y-b$, $GB = a-x$, vooronderstelد dat EF en HC evenwijdig aan AB zijn. Ook is dan

$$d^2 = (y-e)^2 + x^2 \text{ en } c^2 = (y-b)^2 + (a-x)^2.$$

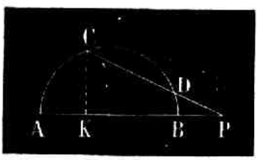
Uit deze beide vergelijkingen wordt gemakkelijk de waarde van y uitgedrukt in de bekende elementen.

32. Zij van vierhoek ABCD gegeven, dat hoek B recht is, en verder $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $AD = d$ zij. Laat uit D DF loodrecht op AB, en DE loodrecht op BC neer, en noemen wij DF y en DE x, dan is $AF = a-x$, $CE = b-y$ en ook

$$c^2 = (b-y)^2 + x^2 \qquad \text{en } d^2 = y^2 + (a-x)^2.$$



Uit deze beide vergelijkingen zullen wij gemakkelijk y in de bekende elementen kunnen uitdrukken.

33. 

Zij bekend dat $AB = a$, $BP = b$, CK loodrecht op AP staande en $= c$ zij. Stellen wij nu $AK = z$ zoo is

$$(a-z)\, z = c^2$$

$$z = \tfrac{1}{2} a \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4} a^2 - c^2)}$$

$$BK = \tfrac{1}{2} a \mp \sqrt{(\tfrac{1}{4} a^2 - c^2)}$$

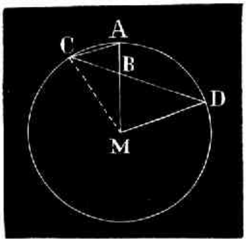
Verder is $PC^2 = (BK + BP)^2 + CK^2$

$$PC = \sqrt{\{(BK + BP)^2 + CK^2\}}.$$

PD vindt men eindelijk uit de evenredigheid

$PB : PD = PC : PA$, waarvan ons na de berekening van PC, drie termen bekend zijn. Zie bij dit en de twee vorige vraagstukken de aanmerking, gemaakt bij vraagst. 39 der tweede afdeeling.

34. Laat de koorde CD, die den straal AM in B snijdt, aan 't gevraagde beantwoorden; dan zijn drieh. ABC en drieh. BDM gelijkbeenig en tevens gelijkvormig. Daaruit volgt, dat AC en DM evenwijdig zijn, en omdat hoek ACB aan den omtrek, en hoek BMD aan het middelpunt, overigens op denzelfden boog AD staan, zoo is hoek ACB = de helft van hoek BMD. Nog is drieh. CDM gelijkbeenig, en dus hoek BCM = hoek BDM.

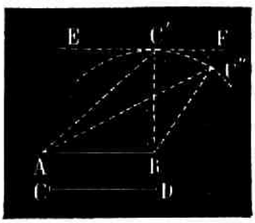


Wij hebben dus: 2 hoeken AMC = hoek ACM,
2 hoeken AMC = hoek CAM,
hierbij hoek AMC = hoek AMC
zoo zullen 5 hoeken AMC = 2 R
en 10 hoeken AMC = 4 R zijn.

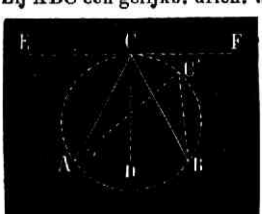
AC is dus de zijde van den regelmatigen tienhoek in den cirkel.

Constructie. Trek de koorde AC, die gelijk moet zijn aan de zijde van den regelm. tienhoek in dien cirkel; en breng door het middelpunt M eene straal MD evenw. aan AC; dan zal de koorde, die de punten C en D vereenigt, den straal AM in B op de verlangde wijze snijden.

35. Zij gegeven dat alle driehoeken, waarvan in de opgave sprake is, de zijden AB en CD gelijk moeten hebben. Nemen wij dan eene dezer zijden tot basis, en beschrijven wij met de andere uit eene der uiteinden der eerste eenen cirkelboog, zoo wijst die de meetkundige plaats aan, waarin zich het derde hoekpunt van alle die driehoeken zal moeten bevinden. Richten wij nu nog uit B eene loodlijn BC′ op AB op, en trekken wij door C′ eene lijn evenwijdig aan AB, zoo zien wij dat alle punten van boog C′C″ vallen binnen de evenwijdige lijnen AB en EF behalve alleen het punt C′, dat derhalve drieh. AC′B eene grootere hoogte heeft, dan een willekeurige driehoek AC″B, wiens top in den beschreven cirkelomtrek ligt. Derhalve zal drieh. AC′B van alle genoemde driehoeken de grootste zijn.



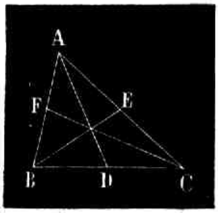
36. Zij ABC een gelijkb. drieh. waarvan basis en tophoek geg. zijn; beschrijven wij dan om ABC eenen cirkel, zoo liggen de toppen van alle driehoeken, op AB beschr. onder den tophoek ACB, in den omtrek van boog ACB. Richten wij nu eene loodlijn uit het midden van AB op AB op. Deze loodlijn zal door het punt C gaan. Trek door C de lijn EF evenw. aan AB en redeneer verder als in het vorig vraagstuk.



37. Nemen wij aan dat ABCDEF een zeshoek zij, die bij gelijken omtrek den grootst mogelijken inhoud heeft. Is dan bekend, dat de zijden CD en DE ongelijk zijn, zoo is het mogelijk op CE als basis eenen gelijkbeenigen driehoek te bouwen zoodanig dat $CD' + D'E = CD + DE$ is. Daar nu bij gelijke basis van alle isoperimetrische driehoeken de gelijkbeenige het grootste is, is ook drieh. $CD'E >$ drieh. CDE. Dit strijdt natuurlijk met de onderstelling dat ABCDEF de grootste der isoperimetrische zeshoeken zou zijn.

Evenzoo zal $BC = CD$, $AB = BC$, $AF = AB$, $FE = AB$ moeten zijn, opdat ABCDEF de grootste der isoperimetrische zeshoeken moge zijn.

38. Laat BC, AC, AB respectivelijk middendoorgedeeld zijn in D, E en F, dan is volgens vraagst. 40, afd. 2.



$$AB^2 + AC^2 = 2\,AD^2 + 2\,BD^2 \text{ dus ook } = 2\,AD^2 + \tfrac{1}{2}\,BC^2.$$
$$AB^2 + BC^2 = 2\,BE^2 + 2\,AE^2 \quad „ \quad „ \quad = 2\,BE^2 + \tfrac{1}{2}\,AC^2.$$
$$AC^2 + BC^2 = 2\,CF^2 + 2\,AF^2 \quad „ \quad „ \quad = 2\,CF^2 + \tfrac{1}{2}\,AB^2.$$

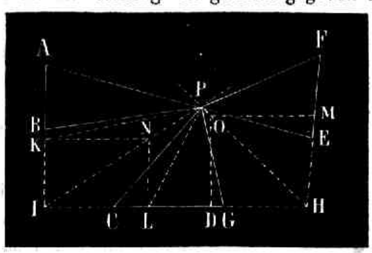
opt.

$$2(AB^2+AC^2+BC^2) = \quad = 2(AD^2+BE^2+CF^2)+\tfrac{1}{2}(AB^2+AC^2+BC^2).$$

2

$$4\,(AB^2 + AC^2 + BC^2) = 4\,(AD^2 + BE^2 + CF^2) + AB^2 + AC^2 + BC^2.$$
$$3\,(AB^2 + AC^2 + BC^2) = 4\,(AD^2 + BE^2 + CF^2).$$

39. Laat in stelling en grootte gegeven zijn de drie lijnen AB, CG en FE, verleng AB door B en FE door E tot dat zij de twee verlengden van CG in I en H snijden. Maak $IK = AB$, $MH = FE$, IL en $DH = CG$. Trek KN en OM evenwijdig aan IH, LN evenwijdig aan AI, DO evenwijdig aan FH. Trek IN en OH en verleng die tot zij elkander snijden. Dat snijpunt zal het verlangde punt P zijn.



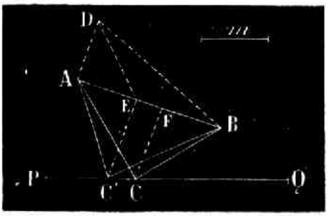
Bewijs. Trek PK, PL, PD, PM en PA, PB, PC, PG, PE, PF dan is in het parall. KILN drieh. KNI = drieh. LNI en beschouwen wij NI als hun beider basis, dan zijn natuurlijk hunne hoogten gelijk. Zijn deze gelijk dan is tevens drieh. PKI = drieh. PLI, hebbende dezelfde basis PI en dezelfde hoogte. Maar drieh. PKI = drieh. PBA en

drieh. PLI = drieh. PCG. dus is

drieh. PBA = drieh. PCG. Bewijs evenzoo

dat ook drieh. PEF = drieh. PCG is, dan is bewezen dat het punt P het gevraagde is.

40. Zij gegeven dat $m^2 = AC^2 - BC^2$ moet zijn.



Constructie. Richt uit A op AB eene loodlijn AD op. Maak AD $= m$. Trek BD, en maak hoek BDE = hoek EBD. Zet van A af op AB, AF uit gelijk DE. Richt uit F eene loodlijn FC op AB op, en trek dan AC en BC, zoo is

$$AC^2 = AF^2 + FC^2.$$
$$BC^2 = BF^2 + FC^2.$$
$$\overline{AC^2 - BC^2 = AF^2 - BF^2} = DE^2 - BF^2.$$

Daar nu uit onze constructie gemakkelijk blijkt

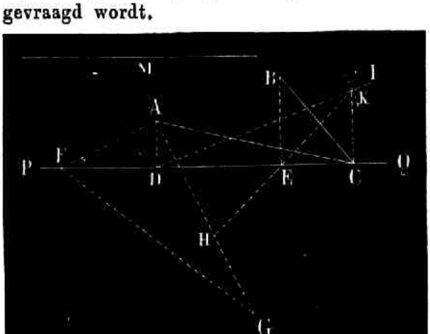
$AB = AE + DE$ of $= AE + AF$, en wanneer wij hiervan aftrekken

$$\underline{AF \qquad\qquad = \qquad AF}$$
$$BF \quad \text{is} \quad = AE$$

Zoo is ook $AC^2 - BC^2 = DE^2 - AE^2 = m^2$. q. e. d.

Ware er gevraagd $BC^2 - AC^2$ te construeeren gelijk m^2 zoo zouden wij uit E op AB eene loodlijn EC' hebben opgericht en AC' en BC' hebben getrokken.

41. Zij M^2 gegeven gelijk het quadraat AC^2 + het quadraat BC^2 dat gevraagd wordt.



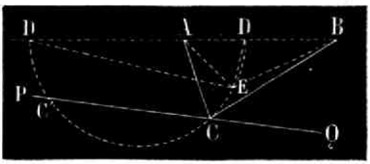
Constructie. Laat uit A en uit B loodlijnen AD en BE op PQ vallen. Maak FD = BE en trek AF. Maak hoek FAG recht en beschrijf met M als straal eenen cirkelboog uit F die AG in G snijden zal. Deel den hoek BEQ door eene lijn HI middendoor en beschr. uit D met AG als straal eenen cirkelboog, die HI ergens in K zal snijden.

Laat uit K eene loodlijn KC neer, dan zullen AC en BC de gevraagde lijnen zijn; want

$AC^2 = AD^2 + DC^2.$
$BC^2 = BE^2 + EC^2.$
——————— opt.
$AC^2 + BC^2 = AD^2 + DC^2 + BE^2 + EC^2$. Voor BE kunnen wij schrijven FD, voor EC, wijl hoek KEC $= 45^0$, hoek ECK $= 90$ en dus hoek EKC $= 45^0$ is, KC. Hierdoor verandert onze vergelijking in

$$AC^2 + BC^2 = AD^2 + FD^2 + DC^2 + KC^2.$$
$$= AF^2 + DK^2.$$
$$= AF^2 + AG^2.$$
$$= FG^2 = M^2. \quad \text{q. e. d.}$$

42. *Constructie.* Verdeel AB door een punt D zoodanig dat

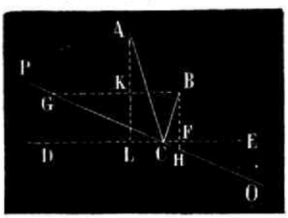


AD : BD = M : N.

Beschrijf op AB als basis een' driehoek AEB waarvan AE = M, BE = N is. Trek DE; richt uit E, ED′ loodrecht op ED op en verleng AB door A tot zoolang zij de lijn ED′ snijdt. Beschrijf op DD′ een halven cirkel en trek CA en CB, dan zal zoo als gevraagd is AC : BC = M : N zijn.

't Bewijs vindt men zeer gemakkelijk met behulp van de oplossing van vraagstuk 19 dezer Afd. (bewijs van het vierde).

43. Zij PQ de gegeven lijn, en A en B de gegeven punten. Laat het vraagstuk opgelost wezen, en C het gevraagde punt zijn. Als men dan de lijn DE zoodanig door het punt C trekt, dat zij met de lijn PQ een' hoek maakt gelijk aan 't halve verschil der hoeken BCQ en ACP, zal natuurlijk hoek ACD = hoek BCE zijn. Trek BG evenw. aan DE, en AL en BF loodrecht op DE; dan is drieh. ACL gelijkvormig met drieh. BCF, en drieh. BGH gelijkvormig met drieh. CFH. Stelt men nu BK $= a$, BG $= b$, BH $= c$, AK $= d$, CF $= x$ en BF $= z$, zoo zal



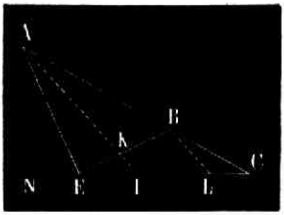
$x : a - x = z : z + d$. en $b : c = x : c - z$ zijn, waaruit volgt

$$x = \frac{az}{2z + d} \qquad \text{en} \qquad x = \frac{b\,(c - z)}{c}$$

Uit de eindvergelijking $\dfrac{az}{2z + d} = \dfrac{b\,(c - z)}{c}$, volgt

$$z^2 + \frac{ac - 2\,bc + bd}{2\,b}\,z - \frac{cd}{2} = 0;$$ waarin de coëfficiënt van den

tweeden term ligt als eene lijn f, en de derde term als een vierkant h^2 te construeeren is, zoodat zij verandert in $z^2 + fz - h^2 = o$, waaruit $z = \frac{1}{2}(-f \pm \sqrt{(f^2 + 4h^2)})$. De loodlijn BF is dus bekend, en daarmede is DE, en het snijpunt C bepaald. Immers men trekke MN op de wijze als dat voor DE is bepaald; late uit B eene loodlijn daarop neder en neme daarop van A af een stuk gelijk aan de gevondene uitkomst.



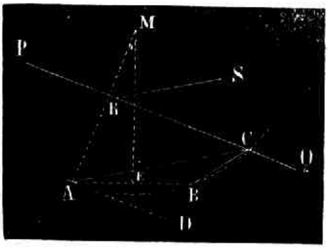
Tweede oplossing. Stel dat E het gevraagde punt zij. Trek BL en AI zoodanig dat hoek BLI = hoek AIE = het gegeven verschil zij, dan zijn de driehoeken EIK, BEL en AEI gelijkvormig, want hoek AIE = hoek EIK = hoek BLE en hoek AEI = hoek EKI = hoek EBL als supplementen van den grootsten der hoeken AEN, en AKE die aan hoek AEN gelijk is. Immers hoek AKE = hoek KEI + hoek EIK = het verschil der hoeken + den kleinsten hoek.

Wij hebben dus

$$AI : EI = EL : BL.$$
$$\text{of } BL \times AI = EL \times EI = (EI + IL)\, EI$$
$$\text{of } BL \times AI = EI^2 + EI \times IL.$$
$$\text{waaruit } EI = -\tfrac{1}{2} IL \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(4\, BL \times AI + IL^2)}$$

welke waarde lichtelijk wordt geconstrueerd.

44. Zij gevraagd dat hoek ACP + hoek BCQ gelijk hoek PRS zij.

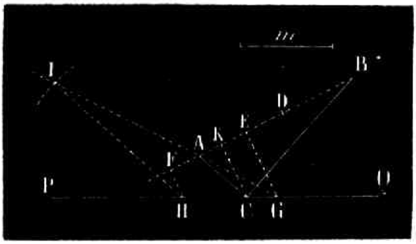


Constructie. Maak hoek BAD gelijk aan het supplement van den gegeven hoek PRS. Richt AM in A loodrecht op AD op. Maak AE = EB, en richt uit E eene loodlijn ME op AB op. Beschrijf met MA uit M eenen cirkelboog die de lijn PQ ergens in C zal snijden. Dit punt C zal het gevraagde zijn.

Bewijs. Volgens de bekende constructie hebben wij hoek ACB gelijk hoek BAD, gelijk het supplement van hoek PRS gemaakt. Derhalve is hoek ACP + hoek BCQ gelijk hoek PRS.

45. Zij m de gegeven lijn.

Constructie. Verdeel AB in twee gelijke deelen AD en DB. Zij ED eene derde evenredige tot 2AB en m, EF = m. Richt uit E en F loodlijnen EG en FH op AB op. Trek AG en verleng die z. n. Beschrijf uit H met AB als straal een' cirkelboog die de lijn AG of



haar verlengde in I snijdt. Trek HI en hieraan AC evenwijdig. Het punt C is dan het gevraagde.

Bewijs. Trek nog CK loodrecht op AB. Nu is wijl IH en AC evenwijdig zijn

IH : AC = HG : CG, en wijl HF evenwijdig is aan EG

HG : CG = FE : KE.

Dus ook IH : AC = FE : KE. Maar IH = AB en FE = m; dus

ook AB : AC = m : KE.

AB $\times$ KE = AC $\times$ m. Uit onze constructie is

2 AB : m = m : ED, dus ook

AB $\times$ ED = $\frac{1}{2}$ m^2.

———————— opt. en met 2 vermenigv.

$2\,AB \times KD = 2\,AC \times m + m^2$.

Voorstel 37, afd. 2 leert ons

$(BC - AC)(BC + AC) = AB(KB - AK)$

$= AB(AB - 2AK)$

$= AB.\ 2\,KD.$

dus is ook $2\,AB \times KD = BC^2 - AC^2$.

derhalve ook $2\,AC \times m + m^2 = BC^2 - AC^2$ of

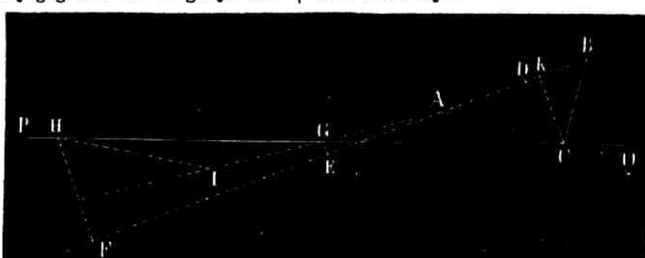
$$AC^2 + 2\,AC \times m + m^2 = BC^2$$

$\sqrt{}$

$$AC + m \quad = BC.$$

$$m \quad = BC - AC. \quad \text{q. e. d.}$$

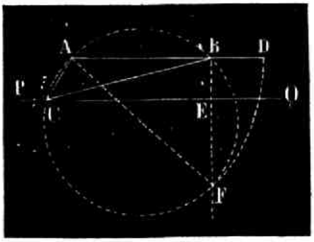
46. Zij gegeven dat m gelijk AC + BC moet zijn.



De constructie is bijkans geheel gelijkvormig met die van 't vorig vraagstuk. AD is gelijk DB, DE eene derde evenredige tot 2 AB en m, EF gelijk m. HF, EG loodlijnen op AB's verlengde, AI eene lijn die door G gaat, HI gelijk AB, AC evenwijdig aan HI. CK loodrecht op AB.

In 't bewijs dat met 't bewijs van 't vorig vraagstuk bijkans geheel overeenstemt heeft eene aftrekking plaats waar wij in 't vorig vraagstuk hebben opgeteld. Voor 't overige is het zóó gelijkvormig met het vorige, dat het onnoodig is het hier mede te deelen.

47. Maak den gegeven rechthoek, volgens een zeer bekende wijze, tot eenen rechthoek die den afstand der gegeven evenwijdige lijnen tot hoogte heeft. Zij dus bijv. AD de lengte, BE de hoogte van onzen gegeven rechthoek, na de voorgeschreven transformatie.



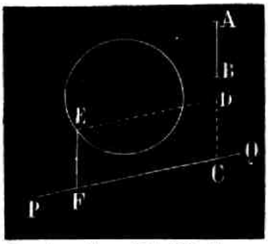
Constructie. Richt uit B eene loodlijn BF op AB op. Beschrijf met AD als straal eenen cirkelboog uit A. Deze zal de opgerichte loodlijn ergens in F snijden. Beschrijf eenen cirkel door A, F en B. Trekken wij vervolgens AC en BC, dan zal AC $\times$ BC gelijk aan onzen gegeven rechthoek zijn.

Bewijs. Wijl hoek ABF recht is, hebben wij in onzen cirkel AF tot middellijn, en derhalve is, volgens voorstel 53, afdeeling 2,

AC $\times$ BC $=$ de afstand van CE tot AB $\times$ de middellijn des om drieh. ABC beschreven' cirkels.

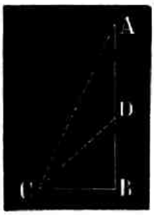
AC $\times$ BC $=$ BE $\times$ AF $=$ BE $\times$ AD $=$ geg. rechthoek.

48. *Constructie.* Verleng AB tot zij PQ ergens in C snijdt. Maak CD $=$ AB; trek DE evenwijdig aan PQ, EF evenwijdig aan AB. De lijn EF zal dan de gevraagde zijn.



Bewijs. Uit de evenwijdigheid van CD met EF, en van ED met PQ, volgt EF $=$ DC. DC echter is gelijk AB geconstrueerd.

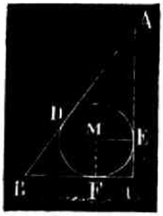
49. *Constructie.* Zij CB de gegeven lijn m. AB de gegeven lijn. Maak hoek CBA recht: trek AC en maak hoek ACD gelijk hoek CAD. Het punt D in de lijn AB is dan het gevraagde; want daar driehoek ACD gelijkbeenig is, is CD $=$ AD; CD $+$ BD $=$ AB.



Verder is $CD^2 - BD^2 = m^2$, dus ook $AD^2 - BD^2 = m^2$.

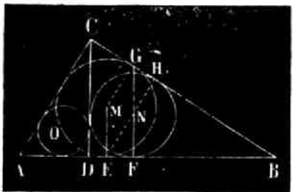
50. Zij ABC een rechthoekige driehoek waarin een cirkel ME beschreven is, zoo is

AE $=$ AD, BD $=$ BF, CE $=$ CF. Laten wij uit M loodlijnen



neer op AC en BC, zoo zijn deze loodlijnen ME en MF beide gelijk EC en CF. Wij zullen deze vier laatste lijnen r noemen. Nu is $AB - AC = AB - (AE + r) = BD - r = BC - 2r$.

51. Straal cirk. M : str. cirk. N : str. cirk. O = AB : BC : AC.



Want de drie driehoeken zijn gelijkvormig, waarvan AB, BC, AC respectivelijk de hypotenusa's zijn. Verheffen wij dit in het quadraat zoo is

Str. ^{2} cirk. M : str. ^{2} cirk. N : str. ^{2} cirk. O = $AB^2 : BC^2 : AC^2$.

$\times \pi$

cirk. M : cirk. N : cirk. O = $AB^2 : BC^2 : AC^2$.

Daar nu $AB^2 = BC^2 + AC^2$ is, is ook cirk. M = cirk. N + cirk. O. q. e. d.

52. Wanneer wij (zie de figuur van het vorig vraagstuk) uit N eene loodlijn op BD neerlaten dan is het punt F natuurlijk het raakpunt van cirkel N met BD. Omdat tevens, wanneer wij FN door N verlengen drieh. BDC ∾ drieh. BFG is, zal

BD : BF = BC : BG zijn. Daar nu echter ook drieh. ABC gelijkvormig is met drieh. BDC en wij bovendien weten BD : BF = BC : BG, zijn F en G in drieh. BDC en drieh. ABC gelijkstandige punten, en is dus ons geconstrueerde punt G ook het raakpunt van BC met den cirkel die in drieh. ABC beschreven is. Evenzoo bewijzen wij dat wanneer wij uit N eene loodlijn op BC neerlaten en deze loodlijn NH door N heen verlengen, het dus geconstrueerde punt E het raakpunt is van AB en den cirkel in drieh. ABC beschreven. Trekken wij nu nog MG en ME, zoo is van vierh. MGNE bekend

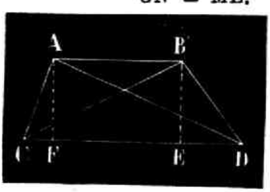
ME evenwijdig aan NG; beide loodrecht op AB.

MG evenwijdig aan EN; „ „ „ BC.

vierh. MGNE is derhalve een parallelogram en dus is

GN = ME. q. e. d.

53.



Zij ABDC een trapezium. Laat uit de uiteinden van de kleinste der evenwijdige zijden, AB, loodlijnen AF en BE neer op de grootste evenwijdige zijde CD. EF wordt dan natuurlijk gelijk AB.

Bewijs van het gevraagde.

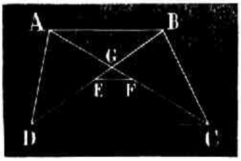
$$BD^2 + CD^2 - 2\ CD \times DE = BC^2.$$
$$CD^2 + AC^2 - 2\ CD \times CF = AD^2.$$

opt.

$$BD^2 + AC^2 + 2\ CD \times CD - 2\ CD\ (DE + CF) = BC^2 + AD^2.$$
$$BD^2 + AC^2 + 2\ CD\ (CD - DE - CF) \quad = BC^2 + AD^2.$$
$$BD^2 + AC^2 + 2\ CD.\ AB = BC^2 + AD^2.$$
$$2\ CD.\ AB = BC^2 + AD^2 - (BD^2 + AC^2).\ \text{q. e. d.}$$

54. Laat de gegevene lijnen a en b meters lang zijn. Stel dat wij van elke lijn een stuk van x meters afsnijden, dan zijn de overblijvende stukken $a-x$ en $b-x$ meters lang. Deze stukken nu moeten zich verhouden als twee gegeven lijnen m en n. Men heeft dus $a-x : b-x = m-n$, welke vergelijking herleid wordt tot $(m-n)\ x = bm-an$. Het laatste lid bestaat uit het verschil van twee rechthoeken, wier lengten en breedten bekend zijn. De rechthoek, dien men dan vindt, ontvange tot breedte het verschil der lijnen m en n, dan zal deszelfs lengte x bekend worden.

55. Zij ABCD een trapezium, BE = DE, AF = CF.



Bewijs van het gevraagde.

Wegens de gelijkvormigheid der driehoeken ABG en CGD is

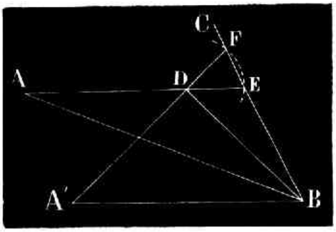
$$BG : DG = AG : CG.$$
$$BG + DG : DG = CG + AG : CG.\ \text{dus ook}$$
$$DE : DG = CF : CG.$$

Derhalve is EF evenwijdig aan AB en CD en daar uit deze evenwijdigheid de gelijkvormigheid volgt van drieh. ABG en CGD met EGF hebben wij ook

$$DG : BG : EG = CD : AB : EF \ \text{en}$$
$$DG - BG : EG = CD - AB : EF$$
$$2\ EG : EG = CD - AB : EF$$

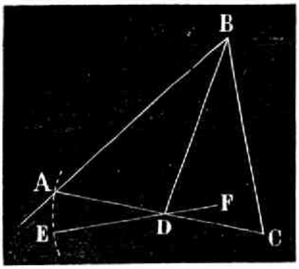
Derhalve is $CD - AB = 2\ EF$. q. e. d.

56. Trek uit het punt B van de lijn BD, die gelijk genomen is aan de kleinste van de twee gegeven zijden, de lijn BC zoodanig, dat hoek CBD gelijk wordt aan 't gegeven verschil der hoeken aan de derde zijde; en beschrijf uit D met CD, die gelijk moet zijn aan 't verschil der gegeven zijden, als straal, een cirkelboog die BC in E en F snijdt. Trek DE en DF en verleng beide door het uiteinde D heen met een stuk AD en A'D gelijk aan BD,



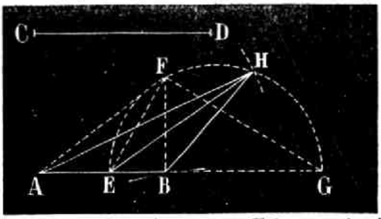
dan zullen, na AB en A'B getrokken te hebben, driehoek ABE en driehoek A'BF aan de vraag voldoen. Het bewijs achten wij overbodig.

57. Zij ABC de gegeven tophoek, en BD de gegeven lijn, welke dien tophoek middendoordeelt. Trek door D de willekeurige lijn EF, waarvan het deel ED gelijk is aan het gegeven grootste stuk van de basis. Beschrijf uit D als middelpunt met DE als straal een cirkelboog, die AB in A snijdt, en trek de lijn ADC; dan zal ACB de verlangde driehoek zijn.



Aanm. Was in deze opgave ook iets te veel gegeven?

58. Laat gegeven zijn AE en BE als de beide stukken der basis waarvan in de opgave spraak is, CD als de lijn die den tophoek moet middendoordeelen.



Constructie. Construeer op AB eenen willekeurigen drieh. ABF, onder deze voorwaarde slechts dat AF : BF sta als AE : EB. Trek FE en richt uit F op FE eene loodlijn FG op. Beschrijf op EG eenen halven cirkel, uit E eenen cirkelboog met CD als straal. Laat deze laatste cirkelboog den eersten in H snijden, en AH en BH getrokken zijn zoo is ABH de gevraagde driehoek.

't Bewijs hiervoor ligt opgesloten in vraagst. 19 dezer afdeeling (zie in de oplossing het bewijs van 't vierde).

59. Beschrijf eenen cirkel met den gegeven straal in den gegeven hoek BAC. Zet op AC een stuk AD uit, gelijk aan de gegeven zijde. Trek uit D eene raaklijn aan den beschreven cirkel, en stellen wij dat deze raaklijn AB ergens in E snijdt. ADE is dan onze gevraagde drieh.

60. De middelpunten dezer cirkels zijn de snijpunten der lijnen die de supplementshoeken middendoordeelen.

In de oplossing van vraagst. 9, Afd. 1, bl. 18 is bewezen, dat deze deellijnen eenen nieuwen vierhoek insluiten, om welken een cirkel kan beschreven worden.

61. Laat ADC, BCE, ABF gelijkzijdige driehoeken zijn, en de lijnen FC en AE getrokken wezen, zoo moet bewezen worden

1°. FC = AE.

2°. Zoo wij B en D met G vereenigen, is BD eene rechte lijn, en even lang als FC of AE.

Bewijs van het eerste.

Drieh. FBC = en ∞ drieh. ABE. Want FB = AB, BC = BE, hoek FBC = hoek ABE = hoek ABC + 60°.

Derhalve is ook FC = AE.

Bewijs van het tweede.

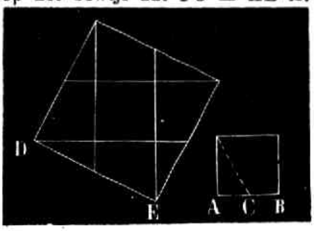
Drieh. GHC ∽ drieh. BHE. Want wij weten reeds dat hoek BEH = hoek HCG is, en buitendien zijn de hoeken BHE en GHC als overstaande gelijk.

Derhalve is hoek HBE = hoek HGC = 60° = hoek FGA. Dus is hoek AGC = 120°. Om vierhoek ADCG kan dus een cirkel beschreven worden, en wijl, wanneer wij dat doen, boog AD = boog DC wordt is hoek AGD = hoek CGD = 60°.

Eindelijk zijn nog drieh. BGH en EHC gelijkvormig. Want uit de gelijkvormigheid van BHE en GHC weten wij, dat BH : HG = HE : HC en bovendien is hoek BHG = hoek CHE. Derhalve is ook hoek BGH = 60°.

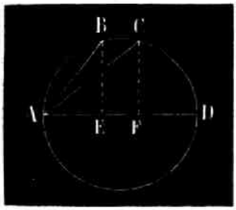
Wij weten dus, dat alle hoeken rondom het punt G = 60° zijn. Uit de gelijkheid van ∠ BGE met ∠ AGD, of van hoek BGF met hoek DGC, volgt natuurlijk dat DB recht is.

Het bewijs voor de stelling BD = FC of AE wordt geheel geregeld op het bewijs dat FC = AE is.

62. 

Verdeel elk vierkant dat verdeeld moet worden zoo als dat in vierkant AB is gedaan (AC = BC) en voeg de zoo verkregen achtstukken rondom het vijfde vierkant aan elkander, zooals in vierkant DE is getoond.

63. Beschrijf in eenen rechten hoek eenen cirkel met den gegeven straal des ingeschreven cirkels als straal. Beschrijf in denzelfden rechten hoek tevens een vierkant met de gegeven zijde zóó, dat de aangenomen hoek tevens een hoek van dit vierkant is. Trek uit het vrije hoekpunt van dit geconstrueerde vierkant eene raaklijn aan den geconstrueerden cirkel. Deze raaklijn, genoegzaam verlengd, zal met de beenen van den aangenomen rechten hoek den gevraagden driehoek vormen.

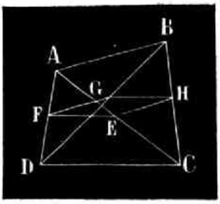
64. 

Laat de middellijn des cirkels, de lijn AD in de punten E en F harmonisch verdeeld zijn. Wanneer wij dan uit E en F loodlijnen oprichten, en de uiteinden B en C dezer lijnen met A vereenigen zijn AB, AC, AD de drie gevraagde koorden.

Bewijs. $AB^2 : AC^2 : AD^2 = AE \times AD : AF \times AD : AD \times AD$
$= AE : AF : AD.$

Nu vormen AE, AF en AD eene harmonische reeks; derhalve ook AB^2, AC^2, AD^2.

65. Zij AF = FD, AE = EC, DG = BG, BH = BC.



Bewijs van het gevraagde.

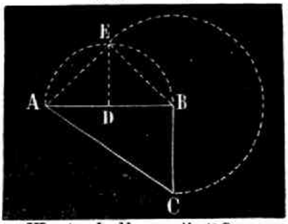
In drieh. ADC is AF : AD = AE : AC = 1 : 2; derhalve FE evenwijdig aan DC.

Om geheel gelijksoortige reden is in drieh. BDC, GH evenwijdig aan DC. Dus is ook FE evenwijdig aan GH.

Evenzoo bewijst men dat GF evenwijdig aan HE is.

Derhalve is figuur EFGH een parallelogram.

66. Laat AB gegeven zijn.



Constructie. Beschrijf op AB eenen halven cirkel, en richt uit het midden D van AB eene loodlijn op AB op. Vereenig het einde E dezer lijn met B en beschrijf met BE als straal uit B eenen cirkelboog EC. Richt uit B op AB eene loodlijn BC op en trek AC zoo is drieh. ABC de gevraagde.

Want Indien wij BC a noemen, is

$BE^2 = BC^2 = a^2$. Trekken wij nog AE zoo is AE = BE en dus ook $BE^2 = AE^2 = a^2$.

———————— opt.

$AB^2 = 2a^2$

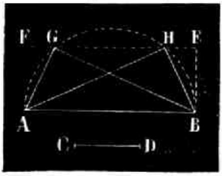
$BC^2 = a^2$.

———————— opt.

$AC^2 = 3a^2 = 3BC^2$. q. e. d.

67. Laat AB de gegeven schuine zijde, CD de hoogte zijn.

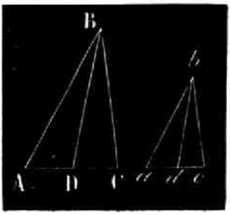
Als wij nu op AB eenen halven cirkel beschrijven, uit B op AB eene loodlijn BE oprichten en BE = CD maken, EF trekken evenwijdig aan AB, zoo zijn de twee driehoeken ABG en AHB de eenige denkbare, die onder onze gegevens kunnen geconstrueerd worden.



Dat deze gelijk en gelijkvormig zijn, zal wel niet behoeven bewezen te worden.

68. Zij van de twee driehoeken ABC en abc gegeven, dat

AD : ad = BD : bd = CD : cd staat, en verder dat hoek BAC = hoek bac is.



Zij eindelijk gegeven, dat BD en bd in de beide driehoeken respectivelijk de hoeken ABC en abc midden doordeelen.

Bewijs van het gevraagde.

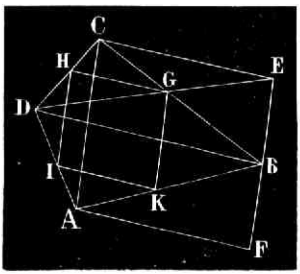
Driehoek ABD is ∾ drieh. abd volgens Badon Ghyben § 103, 2°. Want dat hoek

ABD en hoek *abd* van dezelfde soort, beide scherp zijn, volgt daaruit, dat zij ieder gelijk zijn aan eenen halven hoek eens driehoeks, en de helft van den hoek eens driehoeks nooit anders dan scherp kan zijn.

Zoo is dan nu hoek ABD = hoek *abd*.
of ook „ ABC = „ *abc*.
tevens is gegeven „ BAC = „ *bac*.
Derhalve is drieh. ABC ∾ drieh. *abc*.

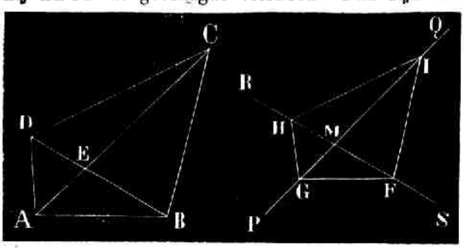
69\. Trek uit een willekeurig punt van het eene been des hoeks, die gelijk is aan een der gegeven hoeken, eene lijn die met dat been een hoek maakt, gelijk aan den tweeden gegeven hoek. De driehoek, dien men dan verkrijgt, zou reeds voldoen aan de vraag, als zijn omtrek gelijk was aan den gegeven omtrek. De gevraagde driehoek moet met den nu gevonden driehoek gelijkvormig zijn, want beide moeten gelijkhoekig wezen. Daar nu de gelijkstandige zijden van gelijkvormige driehoeken evenredig zijn met hunne omtrekken, zullen de zijden van den gezochten driehoek gevonden worden door het zoeken van vierde evenredigen.

70\. Beschrijf op de diagonaal AC eene ruit, zoodanig dat de zijden CE en AF evenwijdig zijn aan de diagonaal BD.



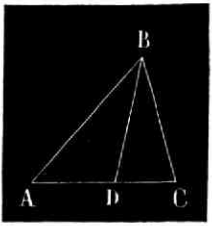
Trek DE, en uit G, waar deze de zijde BC des vierhoeks snijdt, de lijn GH evenwijdig aan BD, en GK evenwijdig aan AC; verder uit K de lijn IK evenwijdig aan BD, en uit H de lijn HI evenwijdig aan AC, dan zal de figuur GHIK eene ruit, en wel de begeerde ruit zijn. 't Bewijs ligt voor de hand.

71\. Zij ABCD de gevraagde vierhoek. Dan zijn de zijde CD en de hoeken BAD, BAE, ABC en ABE gegeven. Uit de bekendheid der hoeken BAE en ABE volgt, dat de hoek E, waaronder de diagonalen elkander snijden, ook bekend is.



Trek dus twee lijnen PQ en RS, die elkander snijden onder hoek PMS = hoek AEB. Neem op MS een willekeurig punt F aan, en trek FG zoo, dat hoek MFG = hoek ABE wordt; verder uit G de lijn GH zoo, dat hoek MGH = hoek EAD wordt, en uit F de lijn FI zoo, dat de hoeken MFI en EBC gelijk zijn. Als men dan nog de punten H en I door eene rechte lijn vereenigt, zal men een vierhoek verkregen hebben, die aan de vraag voldoet, — ingeval namelijk HI gelijk bevonden wordt aan de gegeven zijde CD. Is dit niet het geval, zoo make men een veelhoek, gelijkvormig aan den gevonden veelhoek FGHI, welks gelijkstandige zijde gelijk zij aan CD.

72. Zij gegeven dat in drieh. ABC, BD den hoek ABC midden doordeelt.



Noemen wij BC, AC, AB respectivelijk a, b en c.

't Bewijs van Badon § 98 heeft ons geleerd

$$BC : AB = DC : AD\text{: hieruit volgt}$$
$$BC+AB:BC : AB = DC + AD : DC : AD.$$
$$a + c : a : c = b : DC : AD.$$
$$DC \text{ is dus } = \frac{ab}{a+c},\quad AD = \frac{bc}{a+c}.$$

Volgens afd. 2 vraagst. 63 is nu

$$AB \times BC - AD \times DC = BD^2.$$
$$ac - \frac{ab^2c}{(a+c)^2} = BD^2.$$
$$\frac{ac\,(a^2 + 2ac + c^2 - b^2)}{(a + c)^2} = BD^2.$$
$$\frac{ac}{(a + c)^2} \times (a + c + b)\,(a + c - b) = BD^2.$$

en stellen wij $a + b + c = 2s$.

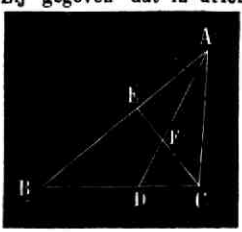
$$\frac{4\,ac}{(a + c)^2} \times s\,(s - b) = BD^2.$$
$$\frac{2}{a + c} \sqrt{ac \times s\,(s - b)} = BD.$$

73. Beschrijf eenen cirkel met de middenevenredige der beide stralen der gegeven cirkels tot straal, zoo zal deze de gevraagde zijn.

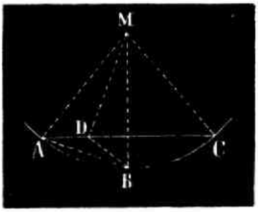
Bewijs. Noemen wij de stralen der gegeven cirkels a en c en zij daartusschen eene middenevenredige b gezocht, zoo is

$$a : b = b : c;\ \text{maar ook}$$
$$a^2 : b^2 = b^2 : c^2.$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad} \ \pi$$
$$\text{cirk. } a : \text{cirk. } b = \text{cirk. } b : \text{cirk. } c.$$

74. Zij gegeven dat in drieh. ABC, AD den hoek BAC, CE den hoek ACB middendoordeele. Elk punt der lijn CE ligt dan even ver van AC als van BC; evenzoo ligt elk punt der lijn AD even ver van AB als van AC. Het snijpunt dezer beide lijnen ligt derhalve even ver van AB als van AC, maar ook even ver van AC als van BC, derhalve even ver van AB als van BC. Het is dus een punt der lijn die



den hoek ABC middendoordeelt. Want elk punt buiten die lijn ligt op ongelijke afstanden van AB en BC. Badon § 46.

75. 

Laat gegeven zijn dat in den cirkel MA, AC de zijde is des regelmatigen ingeschreven vijfhoeks, terwijl AB de zijde des ingeschrevenen regelmatigen tienhoeks is.

Trek tot hulplijnen MD zoo dat zij den hoek AMB middendoordeelt, en BD.

Bewijs van het gevraagde.

Drieh. CMD is gelijkvormig met drieh. AMC.

Want hoek MAC = hoek ACM = 54^0,

hoek ACM = 54^0 = hoek CMD = $\frac{3}{4} \times 72^0$.

Daarom is AC : MC = MC : CD.

$MC^2 = AC \times CD$. (1)

Op geheel dezelfde wijze toonen wij aan, dat driehoek ABC en ABD gelijkvormig zijn, en dus

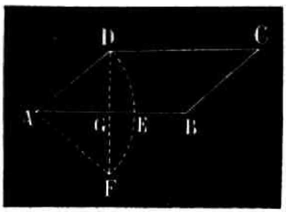
AC : AB = AB : AD is, of

$AB^2 = AC \times AD$. (2)

(1) bij (2) geteld geeft $AC^2 = MC^2 + AB^2$.

76. Zij gegeven dat ABCD een parallelogram is waarvan hoek DAB = 36^0 is. Zij verder AD = 4*m*. AB = 7 meters.

Beschrijf met AD als straal uit A eenen cirkelboog DE, en verleng dien, tot dat EF = DE zij. Trek DF. Wijl nu boog DE = EF is, snijdt AE, DF loodrecht middendoor, en is dus DG = GF. Trekken



wij nu nog AF, zoo is in cirk. AE DF de zijde des regelm. ingeschr. vijfhoeks want hoek DAF = 72^0.

DF is dus, daar de straal des beschreven cirkels 4*m* is, 4.702282 m., DG derhalve 2.351141 enz. m. Doch nu is DG tevens de hoogte van 't parallelogram ABCD, en dus is de inhoud van dat parallelogram 16.457987 etc. □ meters.

77. Zij ABCD een gelijkbeenig trapezium hoek ADC = 72^0. AB = 4, DE = 7 meters.

Beschrijf uit A met AD als straal eenen cirkelboog DE dan wordt in driehoek DAE, hoek DEA = 72^0 en is dus AE evenwijdig aan BC, terwijl hoek DAE 36^0 groot wordt. In den cirkel DE is derhalve de koorde DE de zijde des ingeschr. regelm. tienhoeks. Daar nu deze 3 meters lang is, is de straal des cirkels AD = 4.854102

80.) beter aldus:

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 - 2\,BD.DF$$
$$BC^2 = CD^2 + BD^2 - 2\,BD.DE$$

$$AB^2 - BC^2 = AD^2 - CD^2 - 2\,BD\,(DF - DE)$$

[illegible] $AB^2 - BC^2 = AD^2 - CD^2$

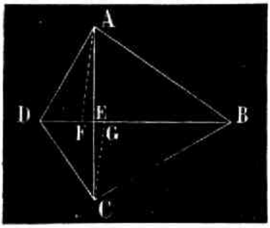
dus $DF = DE$. q. e. d.

enz. meters lang. Men berekent nu zeer gemakkelijk de loodlijn uit A op 't midden van DE neergelaten, en met behulp van deze den inhoud van ons trapezium.

78. Wanneer het aantal graden van den boog zoodanig een evenmatig deel is van den cirkelomtrek dat hij kan onderspannen worden door de zijde van eenen regelmatigen veelhoek in dien cirkel beschreven waarvan het aantal zijden een term is der in Badon Ghijben gegeven reeksen.

79. Beschrijf uit het middelpunt des gegeven cirkels eenen cirkel met de middellijn des gegeven cirkels als straal. Beschrijf daarin eenen regelmatigen zeshoek. Beschrijf uit de hoekpunten van dezen zes nieuwe cirkels, elk met den straal des oorspronkelijken cirkels als straal. De zes laatst beschreven cirkels zullen de gevraagde zijn.

80. Gegeven $AD^2 + BC^2 = AB^2 + CD^2$.



Bewijs van 't gevraagde.

Stel dat AC, BD niet loodrecht sneed; maar dat de lijnen AF en CG loodrecht op BD staan.

Dan is

$AD^2 = AE^2 + DE^2 - 2\,DE.\,EF.$

$BC^2 = BE^2 + CE^2 - 2\,BE.\,EG.$

opt.

$AD^2 + BC^2 = AE^2 + DE^2 + BE^2 + CE^2 - 2\,DE.\,EF - 2\,BE.\,EG.$ (1)

Verder is

$CD^2 = DE^2 + CE^2 + 2\,DE \times EG.$

$AB^2 = AE^2 + BE^2 + 2\,BE \times EF.$

opt.

$AB^2 + CD^2 = AE^2 + DE^2 + BE^2 + CE^2 + 2\,BE \times EF + 2\,DE \times EG$ (2)

Daar nu $AD^2 + BC^2 = AB^2 + CD^2$ gegeven is, wanneer wij (1) van (2) aftrekken

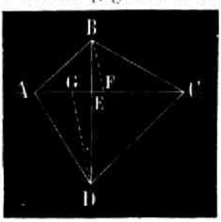
$$2\,EF\,(BE + DE) + 2\,EG\,(BE + DE) = 0$$

$$\text{of} \quad 2\,FG \times BD = 0$$

$$\text{dus } FG = 0$$

Daarom AC en BC moeten elkander rechthoekig snijden.

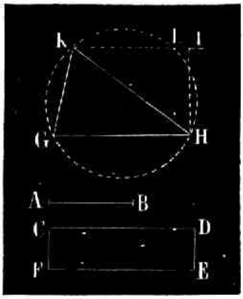
81. Wanneer gegeven is dat



$BC^2 - AB^2 = CD^2 - AD^2$ is, moet BD, AD loodrecht snijden.

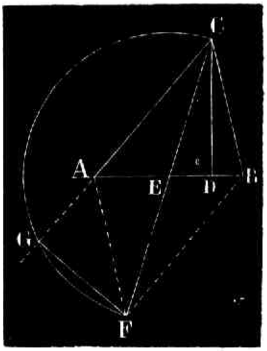
Want deze vergelijking kan ook geschreven worden $BC^2 + AD^2 = AB^2 + CD^2$, en dan verkeeren wij in het geval van 't vorig vraagstuk.

82. Laat AB de gegeven straal zijn, CD de gegeven zijde, CDEF de gegeven inhoud des driehoeks, voorgesteld als een rechthoek die CD tot lengte heeft.

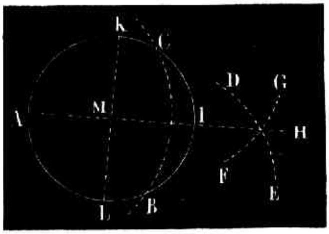


Constructie. Beschrijf eenen cirkel M met AB als straal, zet daarin eene koorde GH uit = CD. Richt uit H eene loodlijn HI op, op de lijn GH; maak HI = 2 DE; trek KL evenwijdig aan GH, en trek eindelijk nog KG en KH. Drieh. GHK zal dan de gevraagde wezen.

83. CD zij loodrecht op de lijn AB. Beschrijf uit C met de gegevene CE (die de basis middendoordeelt) een cirkelboog die AB in E snijdt, en maak zijn verlengde EF = CE. Beschrijf uit E als middelpunt met CE als straal een halven cirkel, en neem koorde FG zoodanig, dat hij gelijk zij aan de lijn uit het andere hoekpunt die loodr. op de overst. zijde staat. Trek GC, die AB in A snijdt, en maak BE = AE, dan is ABC de verlangde driehoek. Want, omdat AE = BE en CE = EF is, zal AFBC een parallelogr. zijn, en FG alzoo gelijk zijn aan de lijn, die uit B loodrecht op AC wordt nedergelaten.



84. *Constructie.*



Neem op den omtrek des gegeven cirkels een willekeurig punt A aan. Beschrijf daaruit met een' willekeurigen straal eenen cirkelboog BC. Beschrijf met willekeurige doch gelijke stralen uit C en B cirkelboogjes DE en FG. Vereenig hun snijpunt H met A. Verleng HA, zoo noodig tot dat zij in I den omtrek snijdt. Zoek eindelijk nog volgens de bekende constructie de lijn KL die AI loodrecht midden doordeelt. De gegeven cirkel is dan door A, L, I en K op de gevraagde wijze verdeeld.

85. Laat ABC een rechthoekige drieh. zijn, en GL en EK de cirkels, die

85.) Beter aldus:

$$BH + AB = AE + CE + CF \quad (1)$$
$$\underline{AJ + AB = BG + GC + CD} \text{ af}$$
$$BH - AJ = AE - BG$$
of $$BH - AJ = AJ - BH$$
waaruit $BH = AJ$.

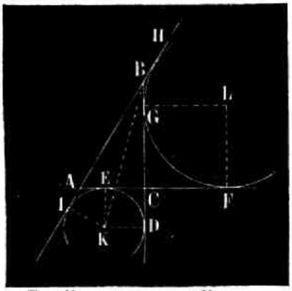
dus uit (1) terstond

$$AB = CE + CF \quad (2)$$

Uit (2) is voorts

(3) $$AB^2 = BC^2 + AC^2 = CE^2 + 2CE.CF + CF^2$$
terwijl $$BC - AC = CF - CE.$$
(4) zoodat $$BC^2 - 2BC.AC + AC^2 = CF^2 - 2CE.CF + CF$$

(3) − (4) $$2BC.AC = 4CE.CF$$
of $$\tfrac{1}{2}BC.AC = CE.CF.$$



de zijden diens driehoeks respectivelijk in H, G, F en in D, E en I raken. Wanneer wij nu GL, LF, KD, EK trekken, is GC en CF = den straal GL, EC en CD = den straal EK. Verder is natuurlijk BH = BG, AE = AI enz.

Bewijs van 't gevraagde.

Wij moeten eerst bewijzen AB = GL + EK of AB = EC + GC.

Bewijs. AH = AF.

BI = BD.

——————opt.

AH + BI = AF + BD of

2 AB + AI + BH = AE + EC + CF + BG + GC + CD.

AI + BH = AE + BG.

——————————————————————aft.

2 AB = EC + CF + GC + CD.

2 AB = 2 EC + 2 CG.

AB = EC + CG = EK + GL.

Bewijs van het tweede.

Trek nog de lijnen IK en BK, zoo is

Inh. fig. BIKD = 2 Inh. drieh. BIK = BI × KI. (1)

Trekken wij dan nog de lijnen KA, KE, KC zoo is bovendien Inh. fig. KIAECD = 2. Inh. (drieh. AEK + drieh. CEK) = 2 Inh. drieh. ACK = AC × KE of AC × KI. (2).

Trekken wij nu (2) van (1) af zoo rest

Inh. drieh. ABC = (BI—AC) KI.

= (AB + AI—CE—AE) KI.

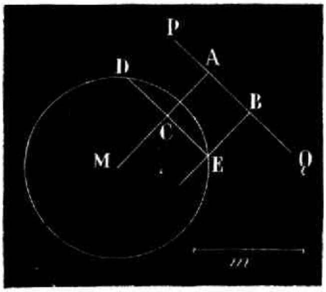
= (AB—CE) KI.

= (AB—CE) CE.

Maar nu is AB = CE + CG; dus is ook

Inh. drieh. ABC = CG. CE = EK × GL. q. e. d.

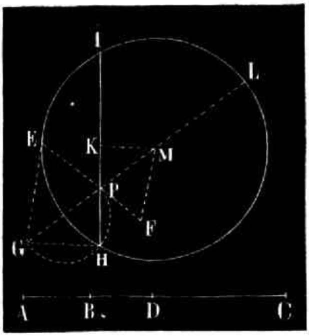
86.



De grootte der koorde zij = *m*, en zij loope evenwijdig aan de lijn PQ. Laat MA loodrecht neder op PQ; neem AB = $\frac{1}{2}$ *m*, trek BE evenwijdig aan AM, en uit E, waar deze den cirkelomtrek snijdt, de lijn DE evenwijdig aan PQ. Deze zal de verlangde koorde zijn. Immers CD = CE = $\frac{1}{2}$ *m*. Dus is DE = *m*.

87. Laat de cirkel ML ons gegeven zijn. Laat AB en BC de gegeven lijnen zijn, P het punt in den gegeven cirkel gegeven.

Constructie. Verdeel AC in D in twee gelijke stukken. Trek eene middellijn door P heen en verleng die. Beschrijf uit P met AB als straal eenen cirkelboog die onzen gegeven cirkel ergens in E snijdt. Trek EP en verleng die: maak dit verlengde zóó lang dat EF = AD = $\frac{1}{2}$ (AB + BC) worde. Trek MF en EG evenwijdig aan MF. Beschrijf op GP eenen halven cirkel: trek HP, en verleng die tot in I. HI zal dan de gevraagde lijn zijn.



Bewijs. Wijl wij EG evenwijdig aan MF hebben getrokken, is

drieh. EPG ∞ driehoek MPF, en dus

$$MP : GP = FP : EP.$$

$$FP : EP = AB : BD.$$

of $$FP : EP = AB : \tfrac{1}{2}\,(BC - AB)$$

dus hebben wij $MP : GP = AB : \frac{1}{2}\,(BC - AB)$.

Nu is ook driehoek PGH ∞ drieh. MKP, en dus

$$HP : KP = MP : GP.$$

maar $$MP : GP = AB : \tfrac{1}{2}\,(BC - AB).$$

dus is ook $HP : KP = AB : \frac{1}{2}\,(BC - AB)$.

$$HP + KP : HP = AB + \tfrac{1}{2}\,(BC - AB) : AB.$$

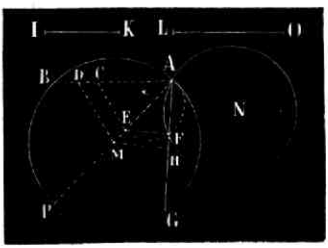
$$HK : HP = AB : \tfrac{1}{2}\,(AB + BC) : AB.$$

of, indien wij de voorgaande termen met twee vermenigvuldigen

$$HI : HP = AB + BC : AB.$$

en dus ook $IP : HP = BC : AB$. q. e. d.

88. Laat gegeven zijn de cirkels M en N en hun snijpunt A datgene zijn waardoor men de gevraagde lijn wenscht getrokken te zien. Laat verder IK en LO de twee gegeven lijnen zijn.



Constructie. Trek uit A eene willekeurige lijn AB en eene middellijn AP. Zet op AB af van uit A, AC = IK en AD = $\frac{1}{2}$ (IK + LO). Trek DM en CE evenwijdig aan DM. Beschrijf op AE eenen halven cirkel. Laat deze den cirkel N in F snijden. Trek dan AF, en verleng die tot in G, zoo zal AG de verlangde lijn zijn.

Bewijs. Drieh. MDA $\backsim$ driehoek CEA dus

$$MA : EA = DA : CA = \tfrac{1}{2}(IK + LO) : IK.$$

Drieh. MHA $\backsim$ drieh. EFA (gesteld dat wij MH loodr. op AG doen vallen).

dus $$AH : FA = AM : EA = \tfrac{1}{2}(IK + LO) : IK$$

en vermenigvuldigen wij de beide voorgaande termen onzer evenredigheid met 2,

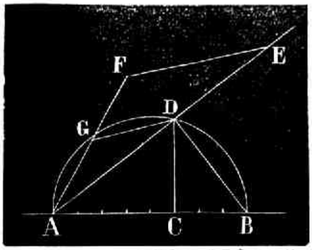
$$AG : AF = IK + LO : IK.$$

Wij kunnen dit ook schrijven

$$AG - AF : AF = IK + LO - IK : IK.$$

of $$FG : AF = LO : IK. \quad \text{q. e. d.}$$

89. Om twee vierkanten te construeeren, die eene gegevene verhouding, b. v. van 5 tot 3 hebben, deelt men de middellijn eens cirkels in zoo vele gelijke deelen als de verhoudingsgetallen te samen bedragen, hier in 8. Neem nu AC = 5 van die deelen en trek CD loodrecht op AB; dan zal, wanneer men de koorden AD en BD trekt,



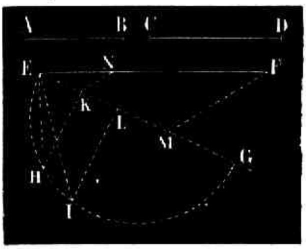
$$AD^2 : BD^2 = 5 : 3 \text{ zijn}$$

en dus $$AD : BD = \sqrt{5} : \sqrt{3}.$$

Verleng nu AD, en neem op dat verlengde DE = BD. Trek vervolgens uit A eene willekeurige rechte lijn, die de lengte der gegevene heeft, vereenig E met haar uiteinde F, en trek door D de lijn DG evenwijdig met EF, dan zal de lijn AF in G zoo gedeeld zijn, dat $AG^2 : FG^2 = 5 : 3$ is.

90. Laat gegeven zijn dat AB^2 en CD^2 de inhouden zijn der gegeven veelhoeken en dat de lijn EF moet verdeeld worden.

Constructie. Trek uit E eene willekeurige lijn EG en beschrijf daarop eenen halven cirkel; zet uit de koorden EH en EI respectivelijk gelijk aan AB en CD. Laat HK en IL loodrecht neer op EG. Maak KM = EL; trek FM, en hieraan KN evenwijdig. De lijn EF wordt dan in het punt N op de gevraagde wijze verdeeld.



Bewijs. Wij hebben vroeger menigmaal bewezen, dat na eene constructie als de onze, van EK en EL

$$EH^2 : EI^2 = EK : EL, \text{ of}$$
$$AB^2 : CD^2 = EK : KM \text{ staat. } (1)$$

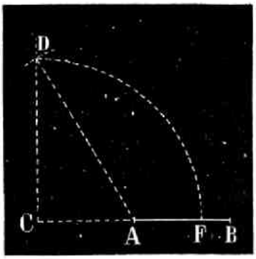
Nu is echter KN evenwijdig aan MF; en dus staat ook

$$EN : NF = EK : KM. \ (2)$$

Uit de verbinding van (1) en (2) volgt nu van zelve

$$EN : NF = AB^2 : CD^2 \text{: q. e. d.}$$

91. Zij gevraagd de lijn AB te verdeelen.



Constructie. Zij AC = AB. Richt uit C op BC eene loodlijn CD op en beschrijf uit A met BC als straal eenen cirkelboog die de lijn CD ergens in D snijdt. Beschrijf daarna uit C met CD als straal eenen cirkelboog DF. De lijn AB is dan in F op gevraagde wijze verdeeld.

Bewijs. $AD^2 = BC^2 = (2\ AB)^2 = 4\ AB^2.$
$AC^2 = \qquad AB^2.$

$$CD^2 = 3\ AB^2.$$
$$CD = CF = AB\sqrt{3}.$$

$BF = BC - CF$ is dus $2\ AB - AB\sqrt{3}$ en
$AF = AB - BF = -AB + AB\sqrt{3}.$
$BF \times AB$ moet dus de helft zijn van AF^2; want
$BF \times AB = 2\ AB^2 - AB^2\sqrt{3}$, terwijl
$AF^2 = 4\ AB^2 - 2\ AB^2\sqrt{3}.$ q. e. d.

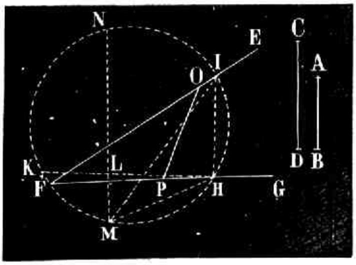
92. Zij ABCD ons gegeven vierkant.

Constructie. Verdeel de lijn AB door een punt F, de lijn AD door een punt E zóó, dat $AF^2 = 2\ BF \times AB$ dat $AE^2 = 2\ DE \times AD$ zij, zoo als wij dat in 't vorig vraagstuk geleerd hebben. Vereenig E en F, en trek nog CE en CF. De driehoek CEF is dan gevraagde gelijkzijdige driehoek.

Bewijs. Stellen wij de zijde van ons vierkant $= a$, zoo vinden wij met behulp van 't geen wij in 't vorig vraagstuk vonden dat AF en AE ieder in 't bijzonder $= -a + a\sqrt{3}$ zijn, terwijl DE en BF ieder in 't bijzonder gelijk zijn aan $2a - a\sqrt{3}$.

Derhalve is $EF^2 = AF^2 + AE^2 = 8a^2 - 4a^2\sqrt{3}$.
maar ook is $FC^2 = BF^2 + BC^2 = 8a^2 - 4a^2\sqrt{3}$,
en evenzoo $CE^2 = 8a^2 - 4a^2\sqrt{3}$.
Derhalve is $EF = FC = CE$. q. e. d.

93. Laat gegeven zijn dat AB^2 het gegeven vierkant zij terwijl CD de gegeven lijn is.



Constructie. Neem op het been FG van den gegeven hoek GFE een willekeurig punt H aan, en beschrijf daaruit met CD als straal eenen cirkelboog die het andere been van onzen hoek ergens in I snijdt. Trek HI. Zet HK loodrecht op HI, en maak HL gelijk aan eene vierde evenredige tot CD, AB en 2 AB. Trek door L, MN evenwijdig aan HI, en trek MI en MH. Maak $FO = MI$, $FP = MH$ en trek OP, zoo is drieh. FPO een driehoek gelijk aan het gegeven vierkant, van onzen hoek afgesneden door eene lijn $PO = CD$.

Bewijs. Wij moeten vooreerst bewijzen dat $PO = CD$ is, daarna dat drieh. $FPO = AB^2$ is.

Bewijs van het eerste.

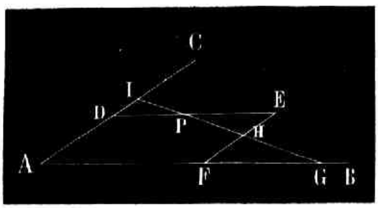
Drieh. FPO is = en ∞ drieh. IMH. Want hoek OFP = hoek IMH (staande in hetzelfde segment) $OF = IM$, $FP = MH$. Derhalve is ook $OP = IH$ en IH is geconstrueerd $= CD$. Dus is ook $PO = CD$.

Bewijs van het tweede.

Uit de gelijk- en gelijkvormigheid van drieh. FPO en IHM volgt dat ook drieh. $FPO = \frac{1}{2} HL \times IH$ is.

Nu hebben wij HL als vierde evenredige gezocht tot CD of IH, AB en 2 AB. Derhalve is $\frac{1}{2} HL \times IH = AB^2$ en dus ook drieh. $FPO = AB^2$. q. e. d.

94. Zij CAB onze gegeven hoek, ADEF onze gegeven driehoek voorgesteld als een parallelogram dat den gegeven hoek heeft en tot hoogte den afstand van P tot de lijn AB.



Constructie. Construeer eenen rechthoekigen driehoek onder PE als hyp. en DP als eene der rechthoekszijden. Zet de dus geconstrueerde andere rechthoekszijde (FG) van F af op AB uit: trek GP en verleng die. De lijn GI is dan de gevraagde.

Bewijs. Daar driehoek PHE ∾ driehoek HFG en drieh. DIP, en tevens van de quadraten der gelijkstandige zijden, PE, FG en DP bekend is, dat

$$PE^2 = FG^2 + DP^2 \text{ is, is ook}$$

Drieh. PHE = drieh. FGH + drieh. DIP. Tel hierbij
fig. ADPHF = fig. ADPHF, zoo is

---

parall. ADEF = drieh. AIG.

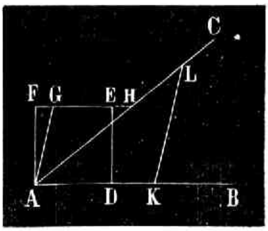
Maar parall. ADEF is gelijk onze gegeven rechthoek; dus is ook drieh. AIG daaraan gelijk. q. e. d.

95. Het is zeer gemakkelijk dit vraagstuk op te lossen met behulp van een ander vraagstuk. Ik zal de oplossing daarvan laten voorafgaan.

Dit vraagstuk luidt aldus.

Hoe kan men eene lijn trekken evenwijdig aan eene gegeven lijn, en de beenen van eenen gegeven hoek doorsnijdende, zoodanig dat de afgesneden driehoek gelijk zij aan een gegeven vierkant.

Dit vraagstuk wordt aldus opgelost.



Laat CAB onze gegeven hoek zijn, ADEF ons gegeven vierkant en AG onze in stelling gegeven lijn, dan wordt onze gevraagde lijn aldus

Geconstrueerd. Verleng EF, zoo noodig, totdat zij AG in G, AC in H snijdt. — Zet van A af op AB uit AK gelijk eene middenevenredige tusschen GH en 2 EF. — Trek eindelijk nog KL evenwijdig aan AG. De laatstgetrokken lijn zal dan de gevraagde zijn.

Bewijs. Drieh. AKL ∾ drieh. HGA en dus is

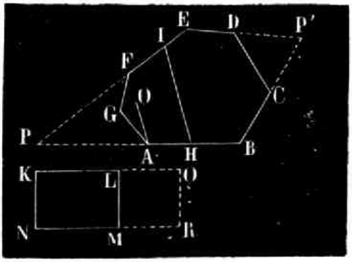
$$\begin{aligned} \text{drieh. AKL} : \text{drieh. HGA} &= GH \times 2\,EF : GH^2. \\ &= EF : \tfrac{1}{2}\,GH. \\ &= EF \times AF : \tfrac{1}{2}\,GH \times AF. \\ &= ADEF : \text{drieh. HGA.} \end{aligned}$$

Daar in deze laatste evenredigheid de volgende termen gelijk zijn, zijn ook de voorgaande gelijk en is dus drieh. AKL = ADEF. q. e. d.

Met behulp dezer oplossing lossen wij ons vraagstuk nu op de volgende wijze op.

Laat gegeven zijn veelh. ABCDEFG en verlangd worden dat men daarvan door eene lijn HI een stuk afsnijde gelijk aan rechth. KLMN, terwijl tevens deze lijn HI evenwijdig aan eene in stelling gegeven lijn AO moet zijn.

Constructie. Verleng EF door F en AB door A tot zij elkander snijden. Construeer op de bekende wijzen eenen rechthoek LMRQ waarvan de hoogte = KN, de inhoud = figuur FPAG is. Snijd



dan volgens het vorige vraagstuk, door middel eener lijn IH evenwijdig aan de gegeven lijn AO, een' driehoek af, zóó, dat die drieh. PIH = rechth. KQNR zij: de lijn HI is dan de gevraagde.

Bewijs. Drieh. PIH = rechth. KQNR.
fig. FPAG = rechth. LMRQ.
———————————— aft.
fig. IFGAH = rechth. KNML. q. e. d.

Aanmerking. Wanneer men zich EB getrokken denkt zoo zou het kunnen gebeuren dat het stuk dat men van den veelhoek wenschte af te snijden grooter ware dan EFGAB. Het zal wel niet behoeven gezegd te worden dat men in dat geval den veelhoek tot een' rechthoek herleidt, daarvan den gegeven rechthoek aftrekt en aldus bepaalt, wat er van dien veelhoek na aftrek van den gegeven' rechthoek moet overblijven; dat men dan verder ED en BC verlengt, en van den dus ontstanen hoek EP'B een stuk afsnijdt.

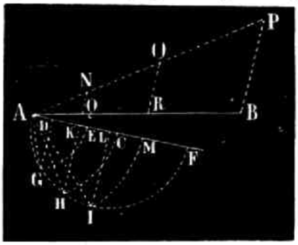
96. Laat er gevraagd zijn, van den veelhoek ABCDEFG (zie de figuur van 't vorig vraagstuk) een stuk af te snijden, door eene lijn, die door een punt P″ gaat, binnen het vlak des geg. veelhoeks gegeven.

Constructie. Verleng EF door F, en AB door A, tot zij elkander snijden; en snijd volgens vraagstuk 93 van hoek EPA een stuk af door middel eener lijn IH, gaande door het punt P″, zóódanig dat drieh. PIH gelijk is aan de som van het gegeven quadraat en een ander quadraat, dat men construeert gelijk aan de figuur FPAG.

De dus verkregen lijn IH zal in dit geval de gevraagde zijn.

't Bewijs behoeft natuurlijk niet te worden geleverd. De geheele constructie is gelijkvormig met die van 't vorig vraagstuk.

97. Zij van onze gegeven lijn AB gevraagd, ze te verdeelen in 3 stukken,



zoodat de gelijkvormige veelhoeken, op de stukken respectivelijk beschreven, tot elkander in reden mogen staan als AD : AE : AC.

Constructie.

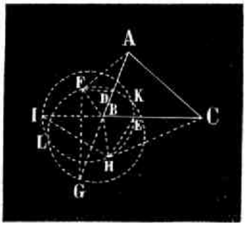
Zet op een willekeurig stuk AF der lijn, mits het grooter zij dan de grootste der gegeven lijnen AD, AE, AC, eenen halven cirkel. Richt uit D, E, C loodlijnen DG, EH, CI op AF op, en trek AG, AH, AI. Trek verder uit A eene willekeurige lijn AP; maak daarop AN = AG, NO = AH, OP = AI. Trek PB, en door O en N lijnen aan PB evenwijdig. Deze lijnen zullen in Q en R de lijn AB op de gewenschte wijze verdeelen.

Bewijs. De gelijkvormige veelhoeken op AQ, QR, RB beschreven zullen natuurlijk tot elkander staan als $AQ^2 : QR^2 : RB^2$.

Maar uit de gelijkvormigheid van drieh. ANQ, ARO, APB volgt

$$\begin{aligned} AQ^2 : QR^2 : RB^2 &= AN^2 : NO^2 : OP^2. \\ &= AG^2 : AH^2 : AI^2. \\ &= AD \times AF : AE \times AF : AC \times AF. \\ &= AD : AE : AC. \quad \text{q. e. d.} \end{aligned}$$

98. Zij gevraagd een punt K te vinden binnen den driehoek ABC, zoodat KB : KA : KC sta = 1 : 2 : 3.



Constructie. Beschrijf op AB welke wij in D zoodanig hebben doorgedeeld dat AB = 3 BD of AD = 2 BD is, eenen drieh. AFB, zoodanig dat AF : BF = AD : BD is. Verleng AB door B, trek FD en richt uit F op FD eene loodlijn FG op. Beschrijf dan op DG als middellijn eenen cirkel.

Verdeel BC en E zoodanig dat BE : EC = 1 : 3 is. Beschrijf op BC eenen drieh. BHC zoodanig dat BH : HC = BE : EC. Trek EH en zet op EH in H eene loodlijn HI. Verleng BC door B en beschrijf op EI als middellijn eenen cirkel.

Het snijpunt K der beide geconstrueerde cirkels zal dan het gevraagde punt K zijn.

Bewijs. Volgens vraagst. 19 (bewijs van het vierde) dezer afdeeling zijn de afstanden van elk punt van den cirkelomtrek DG tot A en B in reden als AD : BD of als 2 : 1.

Om dezelfde reden zijn ook de afstanden van elk punt van den cirkelomtrek EI tot B en C in reden als BE : EC of als 1 : 3.

De afstanden van het punt K dat beiden cirkelomtrekken gemeen is, tot A, B en C zijn derhalve in reden als 2 : 1 : 3;

Trekken wij dus KB, KA, KC, zoo is

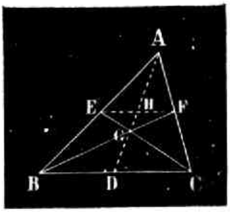
$$KB : KA : KC = 1 : 2 : 3; \text{ q. e. d.}$$

99. In de vorige figuur hadden de cirkels die wij daar beschreven hebben ook een snijpunt L, buiten het vlak van den driehoek ABC.

Wij zullen wel niet behoeven aan te toonen, dat, indien wij LB, LA, LC trekken

$$LB : LA : LC \text{ in reden is als } 1 : 2 : 3.$$

100. Zij van driehoek ABC gegeven dat CE getrokken is naar het midden E van AB, en BF naar het midden F van AC. Trekken wij nu AG, en verlengen die tot in D, zoo moeten wij bewijzen



vooreerst dat $BD = DC$ is
ten tweede dat $BG = 2\,GF$, $GC = 2\,GE$, $AG = 2\,GD$ is.

Bewijs van het eerste.

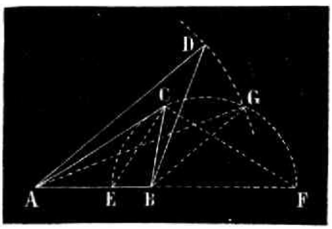
Als wij EF trekken is deze lijn evenwijdig aan BC, want $AE : AB = AF : AC = 1 : 2$.

Uit deze evenwijdigheid volgt de gelijkvormigheid van drieh. AEH met drieh. ABD, en van drieh. AHF met drieh. ADC. Uit de gelijkvormigheid van 't eerste paar volgt
$EH : BD = AE : AB = 1 : 2$; Uit die van het tweede paar
$HF : DC = AF : AC = 1 : 2$, en uit deze twee evenredigheden
$EH : BD = HF : DC$. (1).
Uit de evenwijdigheid van EF en BC volgt echter ook de gelijkvormigheid van
Drieh. EHG met drieh. GDC, en van drieh. HFG met drieh. BGD.
Uit de gelijkvormigheid van 't eerste paar volgt
$EH : DC = HG : GD$; uit die van het tweede paar
$HF : BD = HG : GD$; en uit deze beide evenredigheden
$EH : DC = HF : BD$; brengen wij hiermede in verband (1)
$EH : BD = HF : DC$. Zoo vinden wij
$DC : BD = BD : DC$.
$DC^2 = BD^2$.
$DC = BD$.

Bewijs van het tweede.

Uit de evenwijdigheid van EF en BC volgt de gelijkvormigheid van drieh. AEF en drieh. ABC, en hieruit weten wij
$AE : AB = EF : BC = 1 . 2$. (1)
Uit diezelfde evenwijdigheid volgt de gelijkvormigheid van driehoek EGF met BGC, en hieruit weten wij $EF : BC = FG : BG = EG : CG$.
Hiermede in verband gebracht wat wij in (1) vonden, zoo vinden wij
$FG : BG = EG : CG = 1 : 2$.
Op geheel gelijksoortige wijze vinden wij ook $AG : DG = 2 : 1$.

101. Dit vraagstuk is slechts eene uitbreiding van vraagstuk 19 dezer afdeeling. Wanneer wij van drieh. ABC aannemen, dat de hoek C door CE, en zijn supplement door CF middendoor gedeeld is, zoo leert ons vraagst. 19 (bewijs van het vierde) dat elk punt van den cirkelomtrek EF op afstanden verwijderd is van A en B, die tot elkander in reden zijn als $AC : BC$. Wij hebben nu te bewijzen, dat de afstanden



van elk punt buiten dien omtrek tot A en B niet in reden staan als AC : BC.

Bewijs van het gevraagde.

Neem een willekeurig punt D buiten cirkelomtr. EF aan, trek DA en DB dan moet

AD niet tot BD kunnen staan als AC : BC.

Beschrijf uit A met AD als straal eenen cirkelboog DG en trek AG en BG.

Uit hetgeen in vr. 19 bewezen is weten wij dat

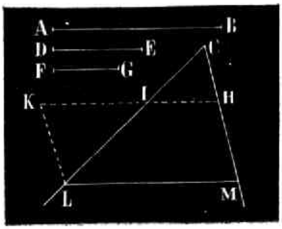
AG : BG = AE : EB = AC : BC.

Wilde men nu beweren dat ook

AD : BD = AC : BC kon staan, zoo zoude ook BG en BD gelijk moeten zijn. Dit is echter onmogelijk want ADB en AGB zijn twee driehoeken, wier zijden AD en AB gelijk zijn aan AG en AB, maar waarin hoek DAB > hoek GAB, en derhalve ook BD > BG is.

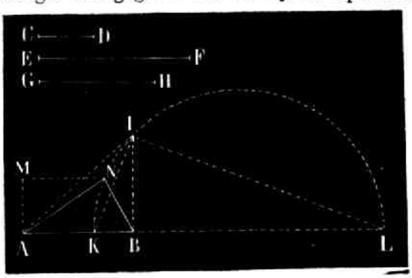
Het zou geen merkbaar verschil in 't bewijs te weeg brengen, indien wij 't punt D binnen den cirkelomtrek EF hadden aangenomen.

102. Laat gegeven zijn dat de lijn AB de gegeven basis, hoek C de gegeven tophoek zij, terwijl de opstaande zijden van onzen driehoek dezelfde verhouding zullen moeten hebben als de gegeven lijnen DE en FG.



Constructie. Zet op het eene been van hoek C een stuk CH uit = DE en op het andere een stuk CI = FG. Trek HI en verleng die totdat HK gelijk AB zij; trek KL evenwijdig aan CM, en LM evenwijdig aan HK, zoo is driehoek CML de gevraagde.

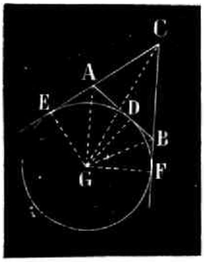
103. Zij gevraagd eenen driehoek te beschrijven, als voor basis AB, voor hoogte CD gegeven is, terwijl de opstaande zijden diens driehoeks de verhouding zullen moeten hebben, die er tusschen de twee gegeven lijnen EF en GH bestaat.



Constructie. Beschrijf op AB onder de opstaande zijden AI en BI, respectivelijk gelijk aan EF en GH eenen driehoek. Deel hoek AIB door eene lijn IK middendoor. Verleng AB door B, en richt uit I op IK eene loodlijn IL op. Beschrijf op KL als middellijn eenen cirkel; richt uit A op AB eene loodlijn AM op; maak AM = CD; trek MN evenwijdig aan AB, en trek eindelijk nog AN en BN. De driehoek ANB is dan de gevraagde.

Dit te bewijzen is onnoodig. Wij hebben reeds menigmalen soortgelijke constructiën gemaakt.

104. Zij gegeven, dat de cirkel EG de zijde AB in D rake, terwijl ook de verlengden der zijden AC en BC door dienzelfden cirkel in E en F geraakt worden.



Noemen wij daarna zoo als dat gewoonlijk geschiedt AB, c, AC, b, BC, a. De halve som der zijden zullen wij s, den straal des cirkels r' noemen.

Wij vinden dan gemakkelijk

Inh. fig. CEGF = Inh. drieh. CEG + dr. CGF = (CE + CF) $\frac{1}{2}$ r.

en schrijven wij voor EA, AD, en voor BF, BD, zoo verandert wat wij vonden in

Inh. fig. CEGF = (AB + BC + AC) $\frac{1}{2}$ r'

$= sr'$ (1).

Even gemakkelijk vinden wij

Inh. fig. EABFG = drieh. EAG + drieh. ADG + drieh. GDB + drieh. BGF.

= 2 drieh. ADG + 2 drieh. GDB

= 2 drieh. ABG.

$= cr'$. (2).

Trekken wij (2) van (1) af, zoo verkrijgen wij

Inh. drieh. ABC = $(s-c)\ r'$.

Maar wij mogen bekend veronderstellen dat

Inh. drieh. ABC ook = $\sqrt{s\ (s-a)\ (s-b)\ (s-c)}$ is,

derhalve is:

$(s-c)\ r' = \sqrt{s\ (s-a)\ (s-b)\ (s-c)}$ of

$$r' = \frac{\sqrt{s\ (s-a)\ (s-b)\ (s-c)}}{\sqrt{(s-c)^2}} = \sqrt{\frac{s\ (s-a)\ s-b)}{s-c}}.$$

Op geheel dezelfde wijze vinden wij voor den straal des cirkels die BC en de verlengden van AB en AC raakt,

$r'' = \sqrt{\frac{s\ (s-b)\ (s-c)}{s-a}}$, en voor dien des cirkels die AC en de verlengden van AB en BC aanraakt,

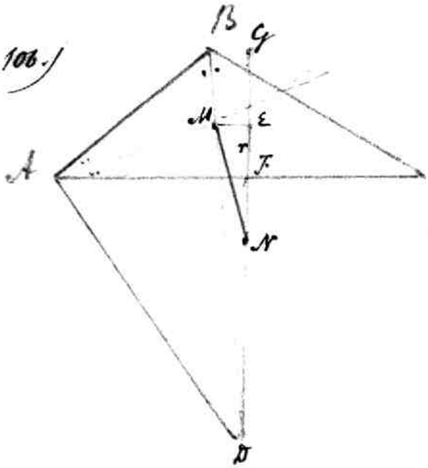
$$r''' = \sqrt{\frac{s\ (s-a)\ (s-c)}{s-b}}$$

Wij mogen tevens bekend vooronderstellen dat de straal des cirkels in drieh. ABC beschreven,

$r = \sqrt{\frac{(s-a)\ (s-b)\ (s-c)}{s}}$ is.

Het product van r, r', r'', r''' is derhalve:

106.)



Beter aldus

$$MN^2 = R^2 + MD^2 - 2R \cdot DE$$
$$= R^2 + MD^2 - 2R(r + FD)$$
$$= R^2 - 2Rr + MD^2 - 2R \cdot FD$$
$$= R^2 - 2Rr + MD^2 - AD^2$$

en nu bewijzen dat

$MD = AD$.

$$rr'r''r''' = \sqrt{\frac{s^3\ (s-a)^3\ (s-b)^3\ (s-c)^3}{s\ (s-a)\ (s-b)\ (s-c)}}$$

$$rr'r''r''' = s\ (s-a)\ (s-b)\ (s-c)$$

$$\sqrt{}$$

$$\sqrt{rr'r''r'''} = \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)} = \text{Inh. drieh. ABC. q. e. d.}$$

105. Gebruik makende van de terminologie, in 't vorig vraagstuk gebruikt, en van hetgeen wij daar hebben gevonden, vinden wij

$$\frac{1}{r'} = \sqrt{\frac{s-c}{s\ (s-a)\ (s-b)}} = \sqrt{\frac{(s-c)^2}{s\ (s-a)\ (s-b)\ (s-c)}} = \frac{s-c}{\mathrm{I}}$$

Geheel op dezelfde wijze vinden wij:

$$\frac{1}{r''} = \frac{s-a}{\mathrm{I}}$$

$$\frac{1}{r'''} = \frac{s-b}{\mathrm{I}}$$

$$\text{Derhalve is } \frac{1}{r} + \frac{1}{r''} + \frac{1}{r'''} = \frac{(s-a) + (s-b) + (s-c)}{\mathrm{I}}$$

$$\text{of } \frac{1}{r'} + \frac{1}{r''} + \frac{1}{r'''} = \frac{3\,s-(a+b+c)}{\mathrm{I}}$$

$$= \frac{3\,s-2\,s}{\mathrm{I}}$$

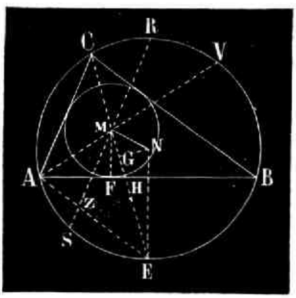
$$= \frac{s}{\mathrm{I}} \quad (1)$$

Nu is echter ook

$$\frac{1}{r} = \sqrt{\frac{s}{(s-a)\ (s-b)\ s-c)}} = \sqrt{\frac{s^2}{s\ (s-a)\ s-b)\ s-c)}} = \frac{s}{\mathrm{I}}. \quad (2)$$

$$\text{Derhalve is } \frac{1}{r} = \frac{1}{r'} + \frac{1}{r''} + \frac{1}{r'''};\ \text{q. e. d.}$$

106. Laat *om* den driehoek ABC uit N met NE als straal, en *in* dienzelfden driehoek met MF als straal uit M een cirkel beschreven zijn. Laat CM en AM getrokken en respectivelijk tot in E en V verlengd zijn. Laat verder NE getrokken zijn, RS evenwijdig aan AC loopen, MF loodrecht op AB, NG loodrecht op ME staan. Wij achten het overbodig te bewijzen, dat dan bg. AS = bg. CR, bg. CV = bg. BV, bg. AE = bg. BE is, NE, AB loodrecht snijdt.



Nu is hoek EAM = ½ bg. EV.

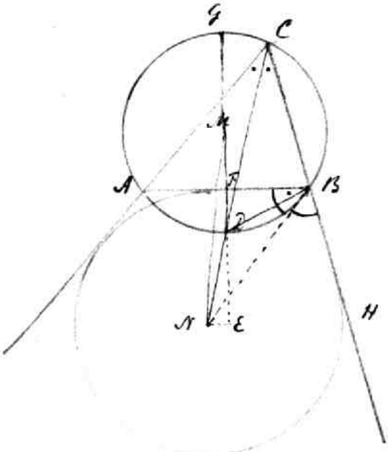
hoek AME = ½ (bg. CV + bg. AE) = ½ (bg. BV + bg. BE).

= ½ bg. EV.

Dus hoek EAM = hoek AME.

107. Beter aldus:

$$\cancel{MN^2 = MG^2 + NG^2}$$



$$MN^2 = R^2 + ND^2 + 2\,MD \cdot DE$$
$$= R^2 + ND^2 + 2\,MD\,\{FE - FD\}$$
$$= R^2 + 2\,Rr' + ND^2 - 2\,MD \cdot FD$$
$$= R^2 + 2\,Rr' + ND^2 - BD^2.$$

Verder is $\triangle\, BDN$ gelijkbeenig

want $\angle NBH = \angle ABN$

& $\angle NBH = \angle BND + \tfrac{1}{2}C$

$$\angle ABN = \angle BND + \tfrac{1}{2}C$$
$$\angle FBD = \qquad\qquad \tfrac{1}{2}C$$
$$\overline{\angle DBN = \angle BND.}$$

dus $MN^2 = R^2 + 2Rr\,!$

Verder is hoek AMZ $= \frac{1}{2}$ (bg. AS + bg. RV) $= \frac{1}{2}$ (bg. CR + bg RV)
$= \frac{1}{2}$ bg. CV $= \frac{1}{2}$ bg. BV.
maar ook hoek MAH $= \frac{1}{2}$ bg. BV.

Dus is hoek AMZ = hoek MAH. Wij hadden reeds
hoek EAM = hoek AMH, tevens is
AM = AM.

Dus is drieh. AZM $\cong$ drieh. AMH
en derhalve ZM = AH.

Nu weten wij uit vraagstuk 68, afd. 2

$$NE^2 = MN^2 + ME \times CM \text{ of}$$
$$MN^2 = NE^2 - ME \times CM. \quad (1)$$

Verder weten wij, daar AV den hoek CAB middendoordeelt,

$$CM : MH = AC : AH.$$
$$= AC : ZM, \text{ en tevens}$$
$$AC : ZM = CE : ME; \text{ dus is ook}$$
$$CM : MH = CE : ME$$

en $ME \times CM = CE \times MH$. Dit gesubstitueerd in (1) geeft $MN^2 = NE^2 - CE \times MH$. (2).

Nu volgt eindelijk nog uit de gelijkvormigheid van drieh. MFH en GEN

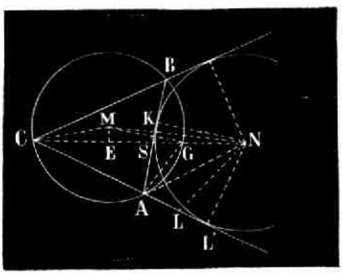
$$MF : GE = MH : NE \text{ of}$$
$$GE \times MH = MF \times NE.$$
$$\overline{}\,2$$
$$CE \times MH = 2\, NE \times MF.$$

Dit nu nog in (2) gesubstitueerd, geeft

$MN^2 = NE^2 - 2\, NE \times MF$ of, indien R en r de stralen zijn der cirkels om en in onzen driehoek beschreven, $MN^2 = R^2 - 2\, Rr$

$$MN = \sqrt{(R^2 - 2\, Rr)} \quad \text{q. e. d.}$$

107. Laat de cirkel met MG als straal uit M beschreven door de drie hoekpunten van onzen gegeven driehoek gaan, en de cirkel uit N met NK als straal beschreven, de zijde AB van onzen driehoek en de verlengden van BC en AC raken.



Laat CN getrokken wezen en MG en AG de punten M en A met het snijpunt van CN en den cirkel MG vereenigen, ME valle uit M loodrecht op CN, NK uit N loodrecht op AB, NL loope evenwijdig met AG. Wij achten het overbodig te bewijzen dat dan MG, AB loodrecht snijdt, bg. AG = bg. BG is.

Nu is hoek ASN $= \frac{1}{2}$ (bg. AG + bg. BC) $= \frac{1}{2}$ (bg. BG + bg. BC)
$= \frac{1}{2}$ bg. CBG.

Ook is hoek ALN = hoek CAG = $\frac{1}{2}$ bg. CBG.
dus hoek ALN = hoek ASN.

Verder is hoek LAN = hoek NAS en
AN = AN

Dus is drieh. ALN $\cong$ drieh. NAS, en dus
AL = AS.

Nu is $MN^2 = MC^2 + CN^2 - 2\ CE \times CN.$

$= MC^2 + CN^2 - CG \times CN.$

$= MC^2 + CN\ (CN - CG)$

$= MC^2 + CN \times NG. \qquad (1)$

Nu weten wij CN : NS = AC : AS
= AC : AL en tevens
AC : AL = CG : NG.

dus ook CN : NS = CG : NG en
$CN \times NG = CG \times NS.$

Dit gesubstitueerd in (1) geeft

$MN^2 = MC^2 + CG \times NS. \quad (2)$

Maar nu zijn de driehoeken EMG en SKN gelijkvormig en dus is
EG : KN = MG : NS en
$GE \times NS = KN \times MG$

———————————— 2

$CG \times NS = 2\ KN \times MG$ en dit eindelijk gesubstitueerd in (2) geeft

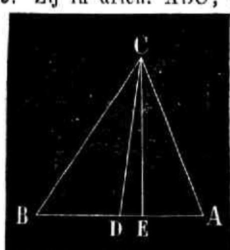
$MN^2 = MC^2 + 2\ KN \times MG$ of indien wij de stralen der cirkels respectivelijk R en r' noemen

$MN^2 = R^2 + 2\ Rr'$

$MN = \sqrt{(R^2 + 2\ Rr')}$; q. e. d.

108. Beschrijf in en om den gegeven driehoek een' cirkel, en bepaal den afstand van derzelver middelpunten; zoek eene vierde evenredige tot dien gevonden afstand, den gegeven afstand der middelpunten en eene zijde van den gegeven driehoek, zoo zal men de gelijkstandige zijde van den gevraagden driehoek vinden, enz.

109. Zij in drieh. ABC, AD = BD, CE loodrecht op AB, zoo is



$BC^2 = DC^2 + BD^2 + 2\ BD \times DE$

$BC^2 = DC^2 + AD^2 + 2\ AD \times DE$

$AC^2 = DC^2 + AD^2 - 2\ AD \times DE$

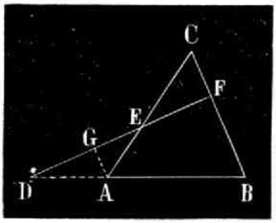
———————————————— aft.

$BC^2 - AC^2 = 4\ AD \times DE.$

$(BC + AC)\ (BC - AC) = 2\ AB \times DE$; q. e. d.

110. Het is noodig, dat wij, om het gevraagde te bewijzen, eerst eene andere stelling bewijzen, die luidt als volgt:

Wanneer drie zijden van eenen driehoek of hare verlengden door eene rechte lijn gesneden worden, ontstaan er op elke zijde des driehoeks twee lijnen begrepen tusschen de uiteinden van die zijde en het snijpunt. Het product van drie dezer lijnen, die geen gemeenschappelijk hoekpunt hebben, is gelijk aan het product der drie overigen.



Bewijs. Wanneer ABC onze driehoek is, en de zijden AC en BC en 't verlengde van AB door DF worden gesneden, moeten wij dus bewijzen

$AD \times BF \times CE = AE \times BD \times CF.$

Trek daartoe AG evenwijdig aan BC. De driehoeken DAG en DBF zijn dan gelijkvormig, en geven de evenredigheid

$AD : DB = AG : BF$ of

$AD \times BF = DB \times AG$ (1)

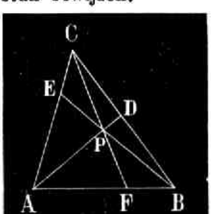
De eveneens gelijkvormige driehoeken AGE en CFE geven

$AG : AE = CF : CE$ of

$AG \times CE = AE \times CF.$ (2)

Vermenigvuldigt men nu de leden der vergelijkingen (1) en (2) met elkander, en deelt de gelijke producten door den gemeenen factor AG, zoo heeft men $AD \times BF \times CE = AE \times BD \times CF.$

Met behulp van deze stelling gaan wij nu het gestelde in ons vraagstuk bewijzen.



Zij ABC onze gegeven driehoek, P het gegeven punt.

Men beschouwe de driehoeken ACF en BCF en neme als hunne snijlijnen BE en AD aan, zoo is volgens onze hulpstelling

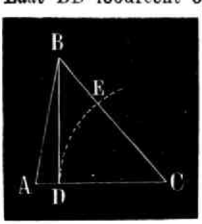
$FP \times CE \times AB = BF \times CP \times AE$

$AF \times BD \times CP = FP \times CD \times AB.$

Het product dezer vergelijkingen geeft na alles door $FP \times CP \times AB$ gedeeld te hebben

$AF \times BD \times CE = AE \times BF \times CD.$

111. Laat BD loodrecht op AC staan.

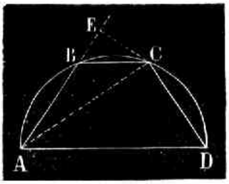


Bereken dan eerst volgens § 120 van Badon Ghyben DC.

Als wij dan uit C met CD als straal eenen cirkel beschrijven zoo is BD eene raaklijn aan dien cirkel wijl hoek CDB recht is.

Derhalve is $BD^2 = (BC - CE)(BC + CE)$
$= (BC - CD)(BC + CD).$

112. Laat van den vierhoek in den halven cirkel AD gegeven zijn AD,



CD en BC en gevraagd worden de zijde AB.

Daar nu, zoo wij AC hebben getrokken drieh. ADC rechthoekig is, kunnen wij AC in eene functie van AD en DC, dus van bekende uitdrukken.

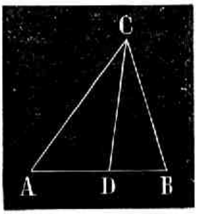
Verlengen wij nu AB door B, en laten eene loodlijn CE uit C daarop neer, zoo is, volgens vraagstuk 53 der tweede afdeeling

$$BC \times AC = CE \times AD.$$

BC, AC en AD zijn bekend, dus wordt ook CE bekend.

Natuurlijkerwijze is dus nu in de rechthoekige driehoeken CBE en CAE, BE en AE bekend; dus ook hun verschil AB, wat wij zochten te berekenen.

113. Laat de lijn CD in den driehoek ABC den tophoek middendoordeelen.



Laat nu AC, BC en CD gegeven zijn. Wanneer wij dan nog AD en BD kennen, kunnen wij onzen driehoek construeeren. Voor deze twee onbekenden moeten wij dus twee vergelijkingen vinden.

Vraagst. 67 der tweede afdeeling levert ons de eene

$$AC \times BC - CD^2 = AD \times BD.$$

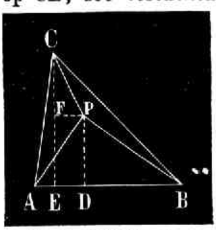
Uit de evenredigheid AC : AD = BD : BD vinden wij de andere

$$AC \times BD = AD \times BC.$$

Het is zeer gemakkelijk uit deze twee vergelijkingen onze onbekenden op te lossen.

114. Laat in drieh. ABC bekend zijn AC, BC, AB, AP en BP en gevraagd worden naar CP.

Laten wij dan CE en PD loodrecht neer op AB, en PF loodrecht op CE, zoo berekenen wij CP als volgt.



Door middel der formules voorkomende in Badon § 120 is uit de bekendheid van AB, AP en BP, AD en PD bekend; op geheel dezelfde wijze kennen wij ook AE en CE uit de bekendheid van AB, AC en BC.

Dus kennen wij ook

$$CF = CE - EF = CE - PD$$
$$\text{en } FP = \quad ED \quad = AD - AE.$$

Nu is blijkbaar

$PC = \sqrt{(CF^2 + FP^2)}$ en dus uitgedrukt in eene functie van bekenden.

115. Zie tweede afdeeling, vraagstuk 40.

116. Laat de lijn BD den hoek ABC van drieh. ABC middendoordeelen. Laat gegeven zijn AB, BC en AC.

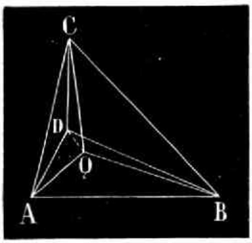
Daar wij nu weten dat

$$AB : BC = AD : DC. \text{ weten wij ook dat}$$
$$AB + BC : AB = AD + DC : AD$$
$$= AC : AD.$$

Derhalve is ons AD en natuurlijk ook CD bekend. Nu is volgens de tweede afdeeling vraagstuk 67:

$BD^2 = AB \times BC - AD \times DC$ en derhalve uitgedrukt in eene functie van bekenden.

117. Wij zullen dit vraagstuk hier slechts gedeeltelijk beantwoorden. Tot de geheele beantwoording zullen wij de oplossing van vraagstuk 151 noodig hebben, en wat daar bewezen moet worden, hier onbewezen laten.



Wanneer men veronderstelde dat de lijnen uit Q naar A, B en C getrokken te zamen kleiner zouden zijn dan de som der lijnen uit een punt P naar A, B en C getrokken (zie de opgave) terwijl men tevens aannam 1°, dat hoek AQC niet gelijk hoek AQB was, of 2° dat alle hoeken rondom Q ongelijk waren, zoo zoude men, om het eerstgestelde geval te behandelen, met AQ als straal uit A eenen cirkelboog QD kunnen beschrijven en die zoover verlengen totdat, wanneer men DA, DB, DC trok, hoek ADC en hoek ADB gelijk waren. Nu zal in vraagstuk 151 dezer afdeeling worden aangetoond, dat, wanneer men buiten eenen cirkel twee punten heeft, en men wenscht zoodanig punt op den omtrek des cirkels te vinden, dat de som der lijnen, die dit punt met de gegeven punten vereenigen, zoo klein mogelijk zij, men zorgen moet, dat de twee geconstrueerde lijnen gelijke hoeken maken met dien straal des cirkels, die naar hun ontmoetingspunt getrokken is.

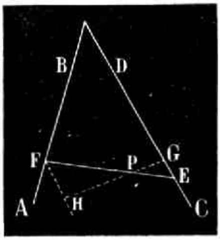
In onze figuur is dus nu

$$CD + BD < CQ + BQ: \text{ tellen wij nu hierbij}$$
$$\underline{AD \quad = \quad AQ} \quad \text{zoo is ook}$$
$$AD + BD + CD < AQ + BQ + CQ. \text{ 't geen ongerijmd is, daar onze onderstelling zegt, dat}$$
$$AQ + BQ + CQ < AD + BD + CD.$$

Derhalve moet hoek AQC = hoek AQB zijn.

Het tweede geval, dat namelijk $AQ + BQ + CQ$ kleiner zou kunnen zijn dan elke andere som van drie lijnen uit een punt binnen het vlak des driehoeks naar zijne hoekpunten getrokken, zelfs dan wanneer hoek AQB noch aan hoek AQC noch aan hoek BQC gelijk ware, is even onwaar als het eerst gestelde. Wij bewijzen dit evenzoo; men herhaalt echter het boven gegeven bewijs, en toont dus eerst aan, dat twee der gegeven hoeken gelijk moeten zijn; daarop beschrijft men eenen cirkelboog op dezelfde wijze als de eerste maal, doch uit een ander hoekpunt des driehoeks, en toont dus aan dat ook de derde der genoemde hoeken aan de beide vorige gelijk moet zijn.

118. Laat AB en CD de in stelling gegeven lijnen zijn en P het gegeven punt.



Constructie. Beschrijf uit P met n als straal eenen cirkel die CD ergens in G snijdt. Trek PG en verleng die door P tot dat PH $= m$ zij. Trek HF evenwijdig aan CD en trek FP; deze lijn verlengd tot in E zal de gevraagde zijn.

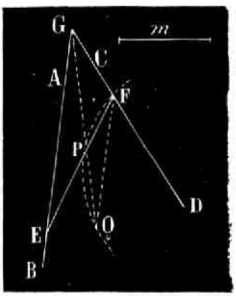
Bewijs. Drieh. FHP zal gelijkvormig met drieh. PGE zijn wegens de evenwijdigheid van HF met CD, en dus staat

$$FP : PE = HP : PG;$$

maar $HP : PG = m : n.$

dus ook $FP : PE = m : n.$

119. Laat AB en CD de gegeven lijnen; G hun snijpunt zijn, terwijl m de gegeven lijn, P 't gegeven punt is.



Constructie. Zoek eene derde evenredige tot GP en m. Laat dit PQ zijn. Zet die uit op 't verlengde der lijn GP. Beschrijf op PQ een cirkelsegment waarin de hoek PGB kan staan. Laat den boog van dit segment CD ergens in F snijden, zoo zal de lijn PF, tot in E verlengd, de gevraagde zijn.

Bewijs. Als wij nog QF trekken zoo zijn drieh. EGP en drieh. PQF gelijkvormig; want

hoek EGP = hoek PFQ geconstrueerd
hoek GPE = hoek FPQ.

Uit deze gelijkvormigheid volgt

$$GP : EP = FP : PQ \text{ of}$$
$$GP \times PQ = EP \times FP.$$

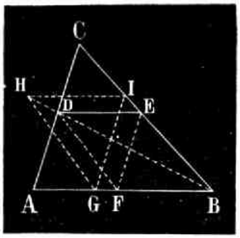
maar wij hebben geconstrueerd

$$GP \times PQ = m^2.$$

Derhalve is ook $FP \times EP = m^2$; q. e. d.

120. *Constructie.* Trek uit een willekeurig punt G van de zijde AB eene lijn GI evenwijdig aan AC; maak hoek IGH = hoek ABC, en trek HI evenwijdig aan AB. Trek nu nog BH en DE evenwijdig aan AB en HI. Deze DE zal de gevraagde zijn.

Bewijs. Het valt uit de gelijkvormigheid der driehoeken HIB en



DEB zeer gemakkelijk te bewijzen, dat

HI : DE = HB : DB. (1)

Wanneer wij nu nog DF evenwijdig trekken aan HG, bewijzen wij even gemakkelijk uit de gelijkvormigheid van de driehoeken HGB en DFB

HG : DF = HB : DB.

Deze evenredigheid geeft in verband gebracht met die wij onder (1) vonden,

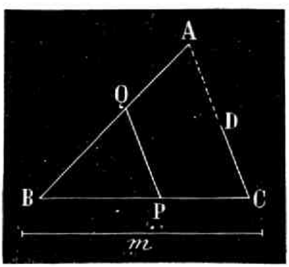
HG : DF = HI : DE. (2)

Trekken wij nu nog FE, zoo zijn de twee driehoeken HIG en DEF gelijkvormig, aangezien hoek H = hoek D is, en de zijden om dien hoek evenredig zijn (zie 2). Derhalve is ook hoek DFE = hoek HGI en dus EF evenwijdig aan AC.

Bijkans even gemakkelijk valt het nu ten slotte te bewijzen, dat driehoek CDE en drieh. DEF gelijkvormig zijn, als men slechts in het oog houdt dat hoek HGI of DFE = hoek ABC of DEC geconstrueerd is. Uit deze gelijkvormigheid volgt

CD : DE = DE : EF of, daar EF evenwijdig aan AC, DE evenwijdig aan AB is

CD : DE = DE : AD: q. e. d.

121. 

Laat ABC de eerste gegeven hoek zijn, terwijl hoek DCP = de hoek K is.

Constructie. Verleng CD tot dat zij AB in A snijdt. Zoek eene vierde evenredige BP tot AB + AC, BC en *m*. Zet die van B af op BC uit; trek PQ evenwijdig aan AC, dan zal die de gevraagde lijn PQ wezen.

Bewijs. Drieh. BPQ is gelijkv. met drieh. ABC en dus staat BP : PQ : BQ = BC : AC : AB of

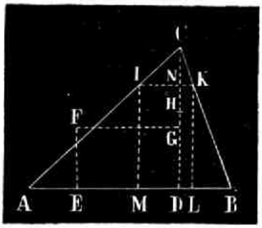
BP : PQ + BQ = BC : AC + AB.

maar volgens onze constructie staat

BP : *m* = BC : AC + AB.

Derhalve is BQ + PQ = *m*.

122. *Constructie.* Laat op AB uit C de loodlijn CD vallen. Maak ED = $\frac{1}{2}$ AB en beschrijf daarop als basis eenen rechthoek EDGF = den gegeven rechthoek. Deel daarna CD in H middendoor en maak HN = de middenevenredige tusschen DH en GH, trek IK evenwijdig aan AB door het punt N en laat uit I en K loodlijnen IM en KL op AB neer. De zoo gevonden rechthoek IMLK zal de gevraagde zijn.



Bewijs. Wij hebben geconstrueerd
$HN^2 = DH \times HG$; derhalve is ook
$DH^2 - HN^2 = DH^2 - DH \times HG$.
$(DH + HN)(DH - HN) = DH \times DG$.
$DN \times CN = DH \times DG$ of
$DN : DG = DH : CN$. (1)

Nu volgt uit de gelijkvormigheid van de driehoeken ABC en IKC

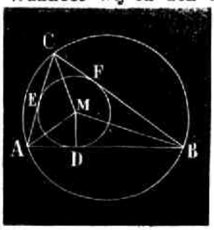
$CD : CN = AB : IK$ of, indien wij de beide voorgaande door twee deelen,

$DH : CN = ED : IK$; wij hadden reeds in (1)
$DN : DG = DH : CN$; dus is ook
$DN : DG = ED : IK$ en dus
$DN \times IK = DG \times ED$.

$DG \times ED$ echter hebben wij geconstrueerd gelijk aan den gegeven rechthoek, derhalve is ook

$DN \times IK$ of IMLK gelijk aan den gegeven rechthoek.

123. Wanneer wij in den driehoek ABC eenen cirkel beschrijven, en naar



het gebruik AB, BC, AC respectivelijk c, a, b noemen, terwijl wij de halve som der zijden door s, den straal des cirkels M door r, den straal des omgeschreven cirkels door R uitdrukken, mogen wij vooreerst wel als bekend vooronderstellen dat $AD = AE = s - a$ is, $BD = BF = s - b$, $CE = CF = s - c$.

Vervolgens is

$$MD = r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}},$$

$$MD^2 = r^2 = \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}, \text{ tellen wij hierbij}$$

$$AD^2 = (s-a)^2 = \frac{s(s-a)^2}{s} \text{ zoo vinden wij}$$

$$AM^2 = \frac{(s-a)\{s(s-a) + (s-b)(s-c)\}}{s} = \frac{(s-a)\,bc}{s}$$

evenzoo kunnen wij vinden

$$BM^2 = \frac{(s-b)\{s(s-b) + (s-a)(s-c)\}}{s} = \frac{(s-b)\,ac}{s} \text{ en}$$

$$CM^2 = \frac{(s-c)\{s(s-c) + (s-a)(s-b)\}}{s} = \frac{(s-c)\,ab}{s}$$

$$\text{dus is } AM^2 \times BM^2 \times CM^2 = \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s} \times \frac{a^2 b^2 c^2}{s^2}$$

$\sqrt{}$

$$AM \times BM \times CM = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} \times \frac{abc}{s}$$

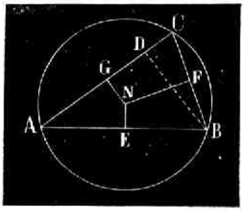
$$= \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} \times \frac{2abc}{a+b+c}$$

De eerste dezer factoren is $= r$. Met behulp van vraagstuk 100 der tweede afdeeling vinden wij voor $\frac{2abc}{a+b+c}$, $4\,Rr$.

Derhalve is $AM \times BM \times CM = 4Rr^2$ en dus ook

$4r^2 : AM \times BM = CM : R$.

124. Laat NE, NF en NG de bedoelde loodlijnen, en $AB = c$, $BC = a$ en $AC = b$ meters, $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ en BD loodrecht op AC zijn; dan vinden wij vooreerst de driehoeken ANE en BCD gelijkvormig, omdat zij behalve eenen rechten hoek, ook de hoeken ANE en BCD gelijk hebben, als beide gemeten wordende door $\frac{1}{2}$ boog AB.



Dus is $BC : AN = CD : NE$ of $a : R = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b} : NE$, dus

$$NE = R \times \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Wij vinden op gelijke wijze dat de loodlijn $NF = R \times \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

en dat de loodlijn $NG = R \times \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$ is,

alsmede dat $NE + NF + NG = \frac{R}{2abc}(a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2 - a^3 - b^3 - c^3)$

$= \frac{1}{8\,I}(a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2 - a^3 - b^3 - c^3)$ zal zijn.

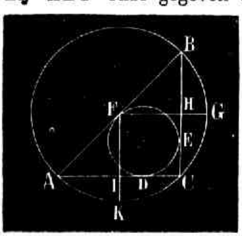
Maar de tweede factor dezer uitkomst is $= 8\,(s-a)(s-b)(s-c) + 2abc$,

zoodat $NE + NF + NG = \frac{8\,(s-a)(s-b)(s-c) + 2abc}{8\,I} =$

$\frac{4\,(s-a)(s-b)(s-c) + abc}{4\,I} = \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{I} + \frac{abc}{4\,I} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} + \frac{abc}{4\,I}$ wordt.

De eerste term van dezen tweeledigen vorm is $= r$, en de tweede $= R$; derhalve $NE + NF + NG = r + R$.

125. Zij ABC onze gegeven driehoek, D en E de raakpunten des ingeschreven cirkels en der zijden BC en AC, F het middelpunt des omgeschreven cirkels. Noemen wij verder de stralen der om en ingeschreven cirkels respectivelijk R en r, en houden wij in het oog dat $DC = EC = r$ is, en $AC + BC = AB + 2r$ is.



Bewijs van het gevraagde.

$HG = R - FH = R - \frac{1}{2} AC$ (Want $FH : AC = BF : AB$)
$IK = R - FI = R - \frac{1}{2} BC$ („ $FI : BC = AF : AB$)

verm.

$HG \times IK = R^2 - \frac{1}{2} R (AC + BC) + \frac{1}{4} AC \times BC.$

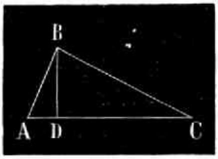
Nu is $AC + BC = AB + 2r = 2 (R + r)$ en dus

$$2\, HG \times IK = 2\, R^2 - 2\, R^2 - 2\, Rr + \text{drieh. } ABC$$
$$= -2\, Rr + (AB + BC + AC) \tfrac{1}{2} r$$
$$= -2\, Rr + (4R + 2r) \tfrac{1}{2} r.$$

$2\, HG \times IK = r^2$. Derhalve is ook

$$2\, HG : r = r : IK.$$

126. Wij hebben vroeger reeds gezien, dat in elken rechthoekigen driehoek



de hypotenusa gelijk is aan de som der rechthoekszijden verminderd met twee maal den straal des ingeschreven cirkels, en leiden hier zeer gemakkelijk uit af, dat in elken rechthoekigen driehoek de straal des ingeschreven cirkels gelijk is aan het halve verschil tusschen de som der rechthoekszijden en de hypotenusa.

Noemen wij nu den straal des cirkels beschreven in drieh. ABC, r
„ „ „ „ „ „ „ ADB, r'
„ „ „ „ „ „ „ BDC, r''

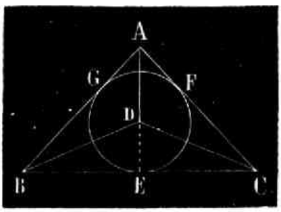
Zoo is

$$r = \tfrac{1}{2} (AB + BC - AC)$$
$$r' = \tfrac{1}{2} (AD + BD - AB)$$
$$r'' = \tfrac{1}{2} (BD + DC - BC)$$

opt.

$$r + r' + r'' = \tfrac{1}{2} (AB + BC + AD + DC + 2\, BD - AB - BC - AC)$$
$$r + r' + r'' = \tfrac{1}{2} (2BD) = BD.$$

127. Volgens vraagstuk 123 dezer afdeeling is ook in onzen driehoek



$$BD \times AD \times DC = 4\, Rr^2.$$

of wanneer wij dit in het quadraat verheffen

$$BD^2 \times AD^2 \times DC^2 = 16\, R^2\, r^4.$$

Nu is $AD^2 = 2r^2$, $BC^2 = 4\, R^2$ en dus

$$16\, R^2\, r4 = AD^2 \times AD^2 \times BC^2.$$

Derhalve is ook

$$BD^2 \times AD^2 \times DC^2 = AD^2 \times AD^2 \times BC^2.$$

of $BD^2 \times DC^2 = AD^2 \times BC^2.$

of $BD \times DC = AD \times BC.$

Een meetkunstig bewijs voor ditzelfde is het volgende.

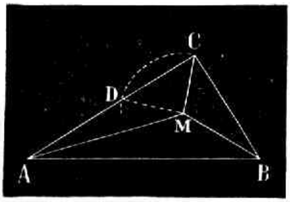
Zij M het middelpunt des cirkels in driehoek ABC beschreven. Beschrijf met MC als straal uit M eenen cirkelboog DC, en trek DM.

10*

De driehoeken ABM en ADM zijn dan gelijkvormig, want

hoek BAM = hoek CAM = $\frac{1}{2}$ hoek BAC·

hoek BMA = hoek MDA. De reden hiervan is niet zoo duidelijk, en moet derhalve eenigzins omslachtiger worden opgegeven.



Wijl hoek CAB + hoek CBA = 90° is en hoek MAB = $\frac{1}{2}$ hoek CAB, hoek MBA = $\frac{1}{2}$ hoek CBA is, is hoek MAB + hoek MBA = 45°; en dus hoek AMB = 135°. Hoek ACM = 45°; driehoek CDM is gelijkbeenig, derhalve is ook hoek CDM = 45° en dus hoek ADM = 135°.

Derhalve is hoek ADM = hoek AMB.

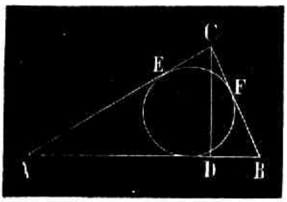
Na het bewijs voor de gelijkvormigheid dezer driehoeken is *'t bewijs van het gevraagde* kort. Want uit die gelijkvormigheid volgt

$$AB : MB = AM : DM.$$

Daar driehoek MDC gelijkbeenig is, is DM = CM.
en dus staat ook

$$AB : MB = AM : CM \text{ of}$$
$$AB \times CM = BM \times AM. \text{ q. e. d.}$$

128.



Wij stellen wederom voorop wat wij in vraagstuk 126 dezer afdeeling bovenaan stelden.

Bewijs van het gevraagde.

Inh. drieh. ABC = $\frac{1}{2}$ CD × AB of (AB + BC + AC) $\frac{1}{2}$ *r*.

Derhalve is ook

$$AB \times \tfrac{1}{2}\, CD = (AB + BC + AC)\, \tfrac{1}{2}\, r.$$

4

$$2\, AB \times CD = (AB + BC + AC)\, 2r.$$

tel hierbij $2r \times CD = \qquad CD \times 2r.$

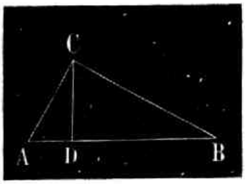
$$(2\, AB + 2r)\, CD = (AB + BC + AC + CD)\, 2r.$$

Uit hetgeen wij aan het hoofd der oplossing van vraagstuk 126 dezer afdeeling schreven, leiden wij gemakkelijk af 2 AB + 2*r* = AB + BC + AC en dus verandert onze vergelijking in

$$(AB + BC + AC)\, CD = (AB + BC + AC + CD)\, 2r.$$

Hieruit volgt de evenredigheid

$$AB + BC + AC + CD : AB + BC + AC = CD : 2r; \text{ q. e. d.}$$

129. 

Laat in den rechthoekigen driehoek ACB CD loodrecht op AB staan.

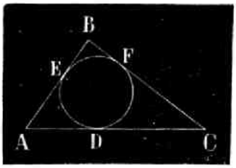
Bewijs van het gevraagde.

$$(AB + BC + AC)^2 = AB^2 + BC^2 + AC^2 + 2AB.\ AC + 2AB.\ BC + 2AC.\ BC.$$
$$= 2\,AB^2 + 2\,AB.\ AC + 2AB.\ BC + 4 \text{ drieh. } ABC.$$
$$= 2\,AB^2 + 2\,AB.\ AC + 2AB.\ BC + 2\ AB.\ CD.$$
$$\frac{(AB + BC + AC)^2 = 2\ AB\ (AB + AC + BC + CD)}{4}$$
$$\{ \tfrac{1}{2}\ (AB + BC + AC) \}^2 = \tfrac{1}{2}\ AB\ (AB + AC + BC + CD)$$

Hieruit volgt de evenredigheid

$$\tfrac{1}{2}\,AB : \tfrac{1}{2}\,(AB + BC + AC) = \tfrac{1}{2}\,(AB + BC + AC) : AB + AC + BC + CD$$

130. Het is in den rechthoekigen driehoek ABC blijkbaar, dat



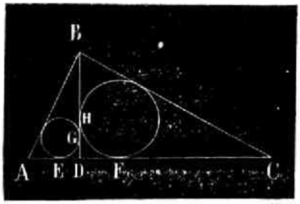
$AD = AB - BE$ is en
$DC = BC - BF.$

Noemen wij als naar gewoonte BE en BF r, zoo is

$$AD = AB - r$$
$$\underline{DC = BC - r} \quad \text{verm.}$$
$$AD \times DC = AB.\ BC - (AB + BC)\,r + r^2$$

en gebruik makende van 't geen in de oplossing van vraagstuk 126 dezer afdeeling is vooropgesteld

$$AD \times DC = AB.\ BC - (AC + 2r)\ r + r^2$$
$$= AB.\ BC - (AC + r)\ r$$
$$= AB.\ BC - \tfrac{1}{2}\ (AB + BC + AC)r$$
$$= 2 \text{ drieh. } ABC - \text{drieh. } ABC.$$
$$AD \times DC = \text{drieh. } ABC; \text{ q. e. d.}$$

131. 

Laat de figuur voldoen aan de vereischten in de opgave gesteld.

Bewijs van het gevraagde.

Daar de beide driehoeken ABD en BDC gelijkvormig zijn, is daarin

$$AD : ED : BD : GD = BD : HD : CD : DF \text{ of}$$
$$AD - ED : BD - GD = BD - HD : CD - DF.$$
$$AE : BG = BH : CF. \text{ of}$$
$$AE \times CF = BG \times BH.$$

Noemen wij nu de lijn BD, l en de stralen der cirkels beschreven in de driehoeken ABC, ADB, BDC respectivelijk r, r' en r'', zoo is volgens vraagstuk 126 dezer afdeeling $r + r' + r'' = l$ en verder

$$2\ \mathrm{AE} \times \mathrm{FC} = 2\,(r + r'')\,(r + r')$$

$$\text{en } 2\ \mathrm{AE} \times \mathrm{FC} = 2\,r^2 + 2rr' + 2rr'' + 2r'r''.$$

Uit vraagst. 51 dezer afdeeling leiden wij gemakkelijk af

$r^2 = r'^2 + r''^2$; derhalve is ook

$$2\ \mathrm{AE} \times \mathrm{FC} = r^2 + r'^2 + r''^2 + 2rr' + 2rr'' + 2r'r''$$

$$= (r + r' + r'')^2 = l^2; \text{ q. e. d.}$$

132. Als wij alle diagonalen beschouwen die in eenen regelm. tienh. kunnen getrokken worden, zoo kunnen wij die in 4 soorten onderscheiden.

Vooreerst zijn er diagonalen die hoekpunten verbinden, waartusschen 2 zijden liggen. Verder diag. die hoekp. verbinden, waartusschen 3 zijden liggen, diag. d. h. v. w. 4 zijden liggen, en middellijnen.

Noemen wij alle diagonalen der eerste soort a, der 2e soort b, der derde soort c, der vierde d en merken wij op, dat wanneer wij alle diagonalen uit alle de hoekpunten trekken, hun getal slechts $\frac{1}{2}\,n\,(n-3)$ bedraagt, daar de diagonaal, die het hoekpunt A met B verbindt, dezelfde is, als die B met A verbindt, terwijl wij tevens opmerken, dat uit een hoekpunt 2 a's, 2 b's, 2 c's, en slechts eene d kan getrokken worden.

Elke diagonaal a snijdt *een* hoekpunt van den tienhoek af, en wordt derhalve gesneden door alle diagonalen uit dat hoekpunt. Wij vinden dus op elke diagonaal a zeven snijpunten.

Elke diagonaal b snijdt *twee* hoekpunten van den tienhoek af, en wordt gesneden door alle diagonalen uit die twee hoekpunten, behalve die twee, die naar de uiteinden der diagonaal getrokken zijn. Wij vinden dus op elke diagonaal b, twaalf snijpunten.

Geheel op dezelfde wijze voortgaande,
vinden wij op elke diagonaal c vijftien snijpunten;
op elke diagonaal d zestien snijpunten.

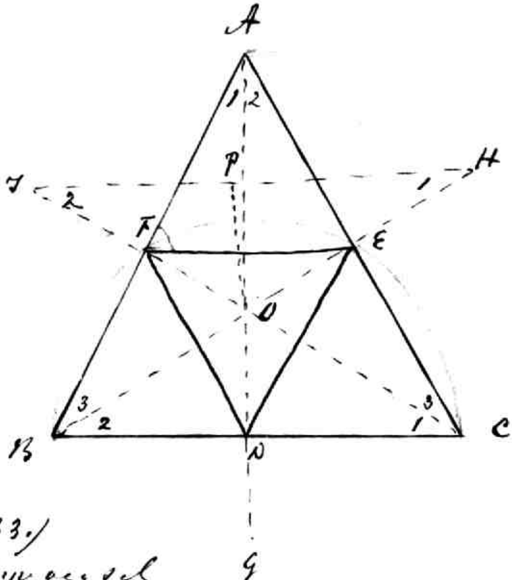
Daar wij nu 10 diagonalen a
10 „ b
10 „ c
en 5 „ d hebben, zouden wij in het geheel hebben

$10 \times 7 + 10 \times 12 + 10 \times 15 + 5 \times 16$ of 420 snijpunten.

Er vallen echter ook vele dier snijpunten ineen, en het is niet moeielijk ook daarin eenige regelmaat te zien.

Op geene der diagonalen a vallen snijpunten ineen.

Op elke diagonaal b snijden zich eene diagonaal d uit het eene, en eene diagonaal b uit het andere der afgesneden hoekpunten. Op elke diagonaal b moeten dus twee snijpunten minder gerekend worden. Geheel op dezelfde wijze voortgaande vinden wij, dat ook op elke diagonaal c twee snijpunten, en op elke diagonaal d 7 snijpunten



133.)

Bijvoegsel

Th. $EF \parallel IH$.

$\triangle AFO \sim ABD \qquad \triangle AOE \sim ADC$

dus $FO : BD = AO : AB$, $OE : CD = AO : AC$ (1)

Laat nu $OP \perp HI$ neer

dan is $\triangle OPI \sim ADC$, $\triangle OPH \sim ABD$

dus $OI : AC = OP : CD$, $OH : AB = OP : BD$ (2)

Uit (1) volgt $\frac{FO}{OE} : \frac{BD}{CD} = 1 : \frac{AB}{AC}$

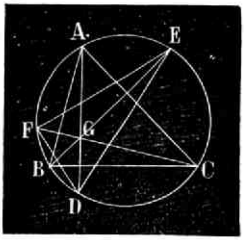
uit (2) " $\frac{OI}{OH} : \frac{AC}{AB} = 1 : \frac{CD}{BD}$

uit deze: $FO : OI = OE : OH$

dus $FE \parallel HI$ en $\angle FEO = 1$.)

minder moeten gerekend worden. Dit geeft een verschil van 75 snijpunten en geeft dus voor het getal snijpunten in eenen regelmatigen tienhoek 345.

Het valt gemakkelijk te zien, dat wanneer het opeenvallen der snijpunten niet wordt in rekening gebracht, men eene formule zou kunnen vinden voor dat aantal snijpunten voor alle regelmatige $2n$ hoeken, terwijl men eene dito formule zou kunnen vinden voor alle $2n + 1$ hoeken. Wordt echter het opeenvallen der snijpunten in rekening gebracht, zoo zal het hoogst moeielijk, zoo niet onmogelijk zijn, zoodanige formule te vinden.

133. 

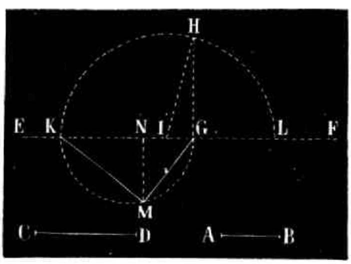
Laat gegeven zijn dat de lijnen AD, BE, CF respectivelijk de zijden BC, AC, AB des driehoeks ABC loodrecht snijden, zoo moet bewezen worden, dat G het middelpunt is van den cirkel die in DEF kan beschreven worden.

Bewijs van het gevraagde.

hoek BAD = hoek BED (beide gelijk $\frac{1}{2}$ bg. BD)
maar hoek BAD ook = hoek BCF want
AD staat loodrecht op BC.
AB „ „ „ CF.
dus is hoek BCF ook gelijk $\frac{1}{2}$ bg. BD.
maar hij is tevens gelijk $\frac{1}{2}$ bg. BF.
dus is bg. BF = bg. BD.
Zoo is ook bg. DC = bg. CE.
bg. AF = bg. AE.

en de lijnen AD, BE, CF deelen dus respectivelijk de hoeken EDF, DEF, DFE van den driehoek DEF middendoor. Het snijpunt dezer lijnen is dus het middelpunt van den cirkel die in DEF kan beschreven worden. Dit is natuurlijk hetzelfde als: de afstand van G tot DE, DF en EF is gelijk.

134. Zij AB het gegeven stuk der schuine zijde en CD de gegeven rechthoekszijde.



Constructie. Neem eene willekeurige lijn EF aan en richt op die lijn uit een willekeurig punt G eene loodlijn GH op. Maak GH = CD. Maak verder GI = $\frac{1}{2}$ AB. Trek HI en beschrijf daarmede uit I eenen cirkelboog KHL. Beschrijf dan op KG eenen halven cirkel, en

Bekomnog is dit;

Beschrijf halve cirkels op AB, BC en AC; dan is

$\angle AFE = \angle ACB$

$\angle BFD = \angle ACB.$

dus $\angle AFE = \angle BFD$

dit afgetrokken van $\angle CFB = \angle CFA$

geeft: $\angle DFC = \angle EFC.$ q.e.d.

uit K met CD als straal eenen cirkelboog, die den laatstbeschreven cirkelboog ergens in M snijdt. Trek KM en MG, zoo is KMG de begeerde driehoek.

Bewijs. Laat MN loodrecht op KG neer zoo is

$CD^2 = KM^2 = KG \times KN$ en tevens weten wij dat

$CD^2 = HG^2 = KG \times GL$ is.

Derhalve is $KN = GL$.

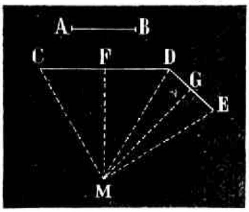
Nu blijkt het uit de wijze waarop wij KG en GL construeerden zeer gemakkelijk dat

$KG - GL = AB$ is.

Derhalve is ook $KG - KN = AB$.

$NG = AB$, en onze driehoek KGM voldoet derhalve aan de gestelde voorwaarden.

135. Laat AB en CD de gegeven koorden zijn.



Constructie. Trek uit D eene lijn zoodanig dat zij met CD eenen hoek maakt van 135°. Maak $DE = AB$, en richt uit het midden F van CD. en G van DE loodlijnen op CD en DE op. Deze loodlijnen zullen elkander in het middelpunt van het gevraagd cirkelquadrant ontmoeten.

Bewijs. Indien wij MD, MC en ME trekken, en met MC uit M eenen cirkel beschrijven zal die natuurlijk door D en E gaan, en verder zal

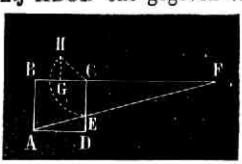
hoek $FMG = 180°$—hoek FDG, of 45° zijn.

Daar nu hoek FMG gelijk hoek FMD + hoek DMG

of gelijk $\frac{1}{2}$ hoek CMD + $\frac{1}{2}$ hoek DME is

is dus ook hoek CMD + hoek DME = 90°.

136. Zij ABCD ons gegeven vierkant.



Constructie. Richt uit het midden G van BC eene loodlijn GH op BC op, en maak $GH = BG$. Trek CH, en beschrijf met CH uit C eenen cirkelboog HE. Trek AE en verleng die tot in F, waar hij het verlengde van BC snijdt; dan zal driehoek CEF even groot als het trapezium ABCE zijn.

Bewijs. Drieh. FAB : drieh. FEC $= AB^2 : CE^2$

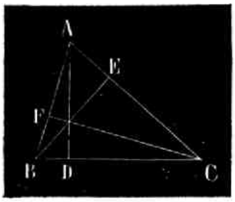
$= BC^2 : HC^2$.

Wij zullen wel niet behoeven te bewijzen dat $BC^2 = 2\,HC^2$ is en dat dus

Drieh. FAB : drieh. FEC = 2 : 1 staat, of wat hetzelfde is trap. ABCE = drieh. CEF is.

137. De eigenschap des driehoeks is reeds vroeger bewezen in vraagst. 53 der tweede afdeeling. Daar toch werd bewezen dat het pro-

duct van twee zijden eens driehoeks gelijk was aan het product der loodlijn, neergelaten uit het tegenoverliggend hoekpunt op de derde zijde, met de middellijn des omgeschreven cirkels. Uit de gelijkheid dezer twee producten volgt natuurlijk de evenredigheid die wij zoeken.

138. 

Laat AD, BE, CF respectivelijk loodrecht staan op BC, AC en AB, zoo is, wanneer wij den inhoud des driehoeks door I voorstellen,

$$2\,I = BC \times AD$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad} \; BE \times CF.$$

$$2\,I \times BE \times CF = BC \times AD \times BE.\ CF.$$

Evenzoo is ook $2\,I \times AD \times CF = AC \times AD \times BE.\ CF.$

en $2\,I \times BE \times AD = AB.\ AD \times BE.\ CF.$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \text{ opt.}$$

$$2\,I\,(BE.\ CF + AD.\ CF + BE.\ AD) = (AB + AC + BC)\,AD.\ BE.\ CF.$$

dus ook, na eene kleine herleiding

$$\frac{2\,I}{AB + BC + AC} = \frac{AD.\ BE.\ CF.}{BE.\ CF + AD.\ CF + BE.\ AD.}$$

Noemen wij nu als naar gewoonte AB + BC + AC $2s$ en merken wij op dat daar $I = rs$ is, $\frac{I}{s} = r$ is, zoo vinden wij

$$\frac{2\,I}{2s} = \frac{I}{s} = r = \frac{AD.\ BE.\ CF.}{BE.\ CF + AD.\ CF + BE.\ AD.}$$

139. Noemen wij den straal des cirkels in een' driehoek beschreven r, en de stralen der cirkels die de verlengden van twee zijden en de derde zijde raken, respectivelijk r', r'', r''' zoo weten wij uit vraagstuk 105 dezer afdeeling dat

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r'} + \frac{1}{r''} + \frac{1}{r'''} \quad .$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad} \; rr'r''r'''$$

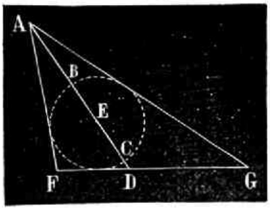
$$r'r''r''' = rr''r''' + rr'r''' + rr'r''$$

$$r'r''r''' = r\,(r''r''' + r'r''' + r'r'')$$

$$r''r''' + r'r''' + r'r'' \; \overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$\frac{r'r''r'''}{r''r''' + r'r''' + r'r''} = r; \quad \text{q. e. d.}$$

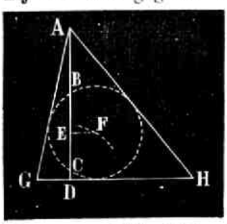
140. Laat AD de gegeven lijn zijn en door den ingeschreven cirkel verdeeld worden in AB, BC en CD.



Constructie. Deel het middelste stuk BC der gegeven lijn AD in E middendoor. Beschrijf uit E met $\frac{1}{2}$ BC als straal eenen cirkel. Trek uit D aan dien cirkel ééne raaklijn, en uit het punt A twee raaklijnen aan dienzelfden cirkel. Zijn deze lijnen genoegzaam verlengd dan is drieh. AFG de gevraagde.

Want het middelpunt van den cirkel in AFG moet liggen op de lijn AD, daar die den hoek FAG middendoordeelt. BC moet eene middellijn van dien cirkel zijn, daar het eene lijn is waarop het middelpunt ligt. Dus voldoet driehoek AFG aan de gestelde vereischten.

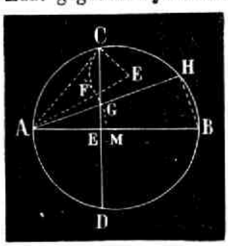
141. Zij AD onze gegeven loodlijn, door den ingeschreven cirkel te verdeelen in de drie stukken AB, BC en CD.



Constructie. Richt uit D op AD eene loodlijn GH op. Deel BC middendoor in E en richt EF loodrecht op BC op. Beschrijf uit C met ED als straal eenen cirkel, die EF ergens in F zal snijden. Beschrijf dan uit F met FC als straal eenen cirkel en trek daaraan uit A raaklijnen AG en AH, en uit D eene raaklijn GH. Driehoek AGH is dan de gevraagde.

Hiervoor zal wel geen bewijs noodig zijn.

142. Laat gegeven zijn dat AB eene middellijn des gegeven cirkels is, en dat CE eene op deze middellijn loodrecht opgerichte lijn is.



Constructie. Trek AC en richt uit C eene loodlijn CE $= \frac{1}{2}\,r$ op. Trek AE, en beschrijf uit E met CE als straal eenen cirkelboog CF. Beschrijf uit A met AF als straal eenen cirkelboog FG, zoo is, wanneer wij AG trekken, en die tot in H verlengen, AH de begeerde lijn.

Bewijs.

$$
\begin{aligned}
AC^2 &= AE^2 - CE^2 \\
&= (AF + \tfrac{1}{2}\,r)^2 - \tfrac{1}{4}\,r^2 \\
&= AF^2 + 2\,AF \times \tfrac{1}{2}\,r + \tfrac{1}{4}\,r^2 - \tfrac{1}{4}\,r^2 \\
&= AF^2 + AF \times r \\
&= AF\,(AF + r) \\
AC^2 &= AG\,(AG + r) \quad (1)
\end{aligned}
$$

Als wij nu in onze figuur HB trekken, is

drieh. AGE en drieh. AHB gelijkvormig en dus staat

$$AG : AE = AB : AH;$$

dus is ook $AG \times AH = AE \times AB.$

maar $AE \times AB = AC^2.$

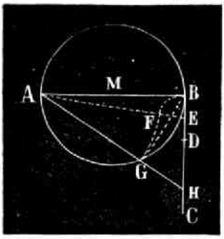
dus is ook $AG \times AH = AC^2.$

Wij hadden reeds $AG \times (AG + r) = AC^2.$ (Zie (1)).

derhalve is $AH = AG + r.$

$$GH = r.$$

143. Zij AB de middellijn des gegeven cirkels, en BC de lijn, die dien cirkel in B raakt. Zij BD de gegeven lijn m.



Constructie. Maak $BE = \frac{1}{2} BD$, en trek AE. Beschrijf uit E met BE als straal eenen cirkelboog BF, en uit A met AF als straal den cirkelboog AG. Trek AG, en verleng die tot in H, zoo is AH de begeerde lijn.

Bewijs. $AG = -\frac{1}{2} BD + \frac{1}{2} \sqrt{(4 AB^2 + BD^2)}$

$AG + BD = \frac{1}{2} BD + \frac{1}{2} \sqrt{(4 AB^2 + BD^2)}$

verm.

$AG (AG + BD) = -\frac{1}{4} BD^2 + AB^2 + \frac{1}{4} BD^2.$

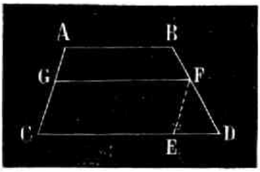
$AG (AG + BD) = AB^2.$

Maar wanneer wij in onze figuur BG trekken, is in driehoek ABG die in B rechthoekig is, de lijn BG loodrecht op AH en derhalve

$AG (AG + GH) = AB^2$. en dus is, daar wij reeds vonden $AG (AG + BD) = AB^2.$

$GH = BD$; q. e. d.

144. Wij kunnen dit vraagstuk slechts dan zuiver wiskunstig oplossen, indien het aantal stukken, waarin het trapezium moet verdeeld worden, een term der meetkunstige reeks 2. 4. 8. 16 enz. is. De oplossing is dan de volgende.



Zij ABCD ons trapezium.

Constructie. Zoek eene middenevenredige tusschen AB en CD. Zet die middenevenredige CE van C af op CD uit. Trek EF evenwijdig aan AC, en FG evenwijdig aan CD; het trapezium ABGF is dan gelijkvormig met het trap. GFCD.

Bewijs. De beide genoemde trapezia zijn gelijkhoekig en hunne evenwijdige zijden zijn evenredig. Zij zijn derhalve gelijkvormig.

De gevonden trapezia kunnen wij nu elk weder op dezelfde wijze in 2 trapezia verdeelen, en zoo voortgaande dus het trapezium ABCD naar believen in 2, 4, 8 enz. trapezia verdeelen die gelijkvormig zijn.

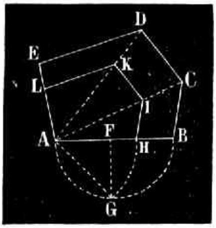
Om echter het trapezium te verdeelen in drie, vijf, zes, zeven, negen enz. gelijkvormige trapezia zouden wij tusschen AB en CD, drie, vijf, zes, zeven enz. middenevenredigen moeten zoeken.

De bezwaren waaraan dit onderhevig is zie men bij Badon § 218.

145. Zij ABCDE onze gegeven veelhoek.

Constructie. Zij AF = $^3/_7$ AB.

Beschrijf op AB eenen halven cirkel; richt uit F eene loodlijn FG op AB op. Trek AG, en beschrijf daarmede uit A eenen cirkelboog GH. Beschrijf op AH op de bekende wijze eenen veelhoek, gelijkvormig met den veelhoek ABCDE, zoo zal deze nieuwe veelhoek AHIKL de gevraagde zijn.

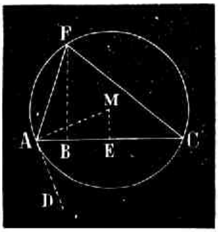


Deze constructie is zoo gelijkvormig met andere, die wij reeds in afdeeling 2 maakten, dat wij het niet noodig oordeelen het bewijs hier bij te voegen voor de evenredigheid:

Veelh. ABCDE : veelh. AHIKL = 7 : 3.

146. Zij hoek CAD de gegeven tophoek, AB en BC de gegeven stukken.

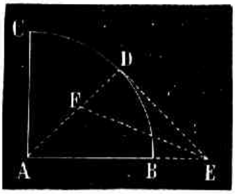
Constructie. Beschrijf op de bekende wijze op de som der stukken AB en BC een segment dat den hoek CAD bevat. Richt uit B eene loodlijn BF op AC op. Trek AF en CF, zoo zal driehoek AFC de gewenschte driehoek zijn.



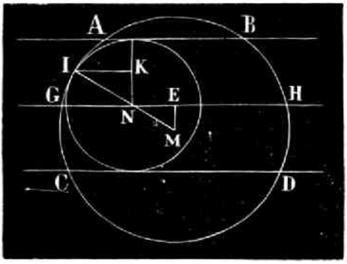
Bewijs. Hoek AFC = hoek CAD = geg. tophoek, en de loodlijn FB uit F op AC neergelaten, verdeelt de zijde AC in de gegeven stukken AB en BC.

147. Zij BAC het gegeven quadrant.

Constructie. Deel hoek CAB middendoor, door eene lijn AD. Trek eene raaklijn aan cirkelb. CB in het punt D. Laat DE deze raaklijn zijn. Deel hoek AED door eene lijn EF middendoor, zoo is F het middelpunt van den gevraagden cirkel, FD zijn straal. *'t Bewijs* kan wegens de eenvoudigheid worden weggelaten.



148. Neem aan, dat het vraagstuk opgelost zij. Het raakpunt ligt met de beide middelpunten in eene rechte lijn IM. Het gedeelte IN is gelijk aan den straal des rakenden cirkels, en MN, de afstand der middelpunten, is gelijk aan het verschil der stralen. Beide stralen zijn bekend, maar ook ME is bekend, de afstand van het middelpunt



des gegeven cirkels tot aan de lijn GH, waarop het middelpunt des kleinen cirkels liggen moet; want de evenwijdige lijnen zijn in stelling gegeven. Laat nu uit het raakpunt I de lijn IK loodrecht neder op NK, dan volgt uit de gelijkvormigheid der driehoeken INK en NEM:

$$MN : NI = EM : KN,$$

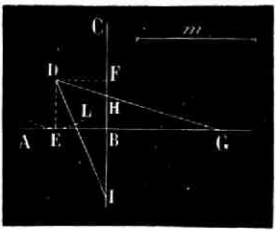
waaruit KN wordt gevonden. En hieruit volgt dus deze constructie:

Trek de lijn GH evenwijdig aan en op gelijken afstand van de gegeven evenwijdige lijnen, en laat uit het punt M de loodlijn ME daarop neder. Zoek nu eene vierde evenredige tot het verschil der stralen, den straal des rakenden cirkels en de loodlijn ME. Richt in het punt N eene loodlijn NK op de lijn GH op, en neem daarop het stuk NK gelijk aan de gevonden vierde evenredige. Als men dan nog IK loodrecht stelt op NK, zal I het raakpunt zijn.

149. Richt in eenig punt E van de raaklijn AB eene loodlijn ED op,

en maak die gelijk aan de middellijn des cirkels. Beschrijf aan elke zijde der loodlijn, met een der gegeven schuine zijden als straal, cirkelbogen, die de lijn AB in A en F snijden; trek AD en FD. Raakt AD den cirkel niet, zoo trekke men eene raaklijn evenwijdig aan AD. Verder worde DC evenwijdig aan AB getrokken, en de raaklijn BC evenwijdig aan DF, dan zal ABCD het verlangde trapezium zijn.

150 Zij ABC de gegeven rechte hoek, D het gegeven punt, en m de gegeven lijn.



Laat DG aan de vraag beantwoorden, zoodat $GH = m$ zij. Stel $HB = x$ en $BG = y$; dan is $FH = a - x$ en $EG = a + y$. Wegens de gelijkvormigheid der driehoeken DFH en BHG is $FH : DE = DF : EG$, of $a - x : a = a : a + y$; waaruit volgt $xy = -a\,(x - y)$, en

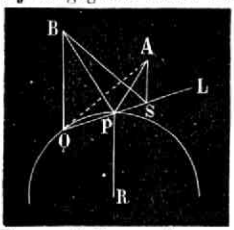
$BH^2 + BG^2 = GH^2$, of $x^2 + y^2 = m^2$.

Hieraf het dubbel der vorige vergelijking $\underline{2xy = -2a\,(x-y)}$

blijft $(x-y)^2 - 2a\,(x-y) = m^2$.

waaruit wordt afgeleid $x - y = a \pm \sqrt{(a^2 + m^2)}$; of $y - x = -a \mp \sqrt{(a^2 + m^2)}$; doch aangezien y altijd grooter dan x zal zijn, omdat hoek G altijd kleiner dan hoek GHB zal wezen, zal $y-x = -a + \sqrt{(a^2 + m^2)}$ moeten aangenomen worden. Wij hebben dus nu van den rechthoekigen driehoek BGH bekend de schuine zijde $GH = m$, en het verschil der rechthoekszijden $= -a + \sqrt{(a^2 + m^2)}$ en verwijzen daarmede naar de oplossing van Vraagst. 49, bladz. 6 der eerste Afdeeling. Overigens wordt $-a + \sqrt{(a^2 + m^2)}$ gemakkelijk geconstrueerd, door op FB of haar verlengde, $FI = m$ te nemen, DI te trekken, en uit D met DE als straal een' cirkelboog te beschrijven, welke DI in L snijdt. LI is dan $= -a + \sqrt{(a^2 + m^2)}$.

151. Zij de gegeven cirkel met PR als straal beschreven, en laat A en B de gegeven punten zijn. Neemt men dan het punt P in den omtrek zoo, dat AP, BP en PR getrokken zijnde, hoek APR = hoek BPR is, zoo zal



$$AP + BP < AQ + BQ \text{ zijn.}$$

Bewijs. hoek APR = hoek BPR volg. onderst.
hieraf hoek LPR > hoek QPR.
blijft hoek APL < hoek BPQ.

P en Q liggen alzoo aan dezelfde zijde van het punt S, (dat punt van de rechte lijn QL, van waar lijnen naar A en B getrokken zijnde, derzelver som zoo klein mogelijk is). SP < SQ zijnde, zal nu ook AP + BP < AQ + BQ zijn. Zie Vraagst. 59, bl. 6 der eerste Afdeeling.)

152. Laat gegeven zijn dat de lijnen AD, AE, AF, AG, AH door de punten I, K, L, M, N zóó verdeeld worden dat

$$AI : AD = AK : AE = AL : AF = AM : AG = = AN : AH.$$

Zoo is de meetkunstige plaats der punten I, K, L, M, N eene rechte lijn, die evenwijdig aan BC loopt.

Bewijs. Stel dat $AK' : AE = AI : AD$ staat en dat dus K' niet in de lijn ligt die door de punten I, L, M en N evenwijdig aan BC is getrokken, dan leert ons onze figuur dat $AD : AI = AE : AK$ staat; tevens zouden wij hebben

$AD : AI = AE : AK'$; of ook

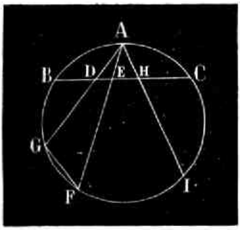
$AE : AK = AE : AK'$, 't geen blijkbaar tegenstrijdig is.

153. De meetkunstige plaats van het deelpunt zal een cirkelomtrek zijn. Dit is gemakkelijk af te leiden uit de oplossing van het 48e, 49e, 50e en 51e Vraagstuk, bl. 11 der eerste Afdeeling.

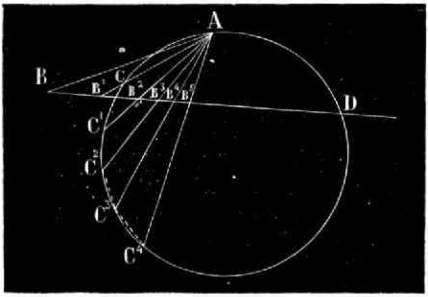
154. De meetkunstige plaats ook van dit uiteinde zal een cirkelomtrek zijn. Immers, men neme de evenredige deelen eerst op de lijnen zelven, zoo bekomt men, volgens het vorige Vraagstuk, eenen cir-

kelomtrek. Neemt men daarna die deelen op de verlengden der lijnen, zoo zal men eene figuur verkrijgen, welke aan de eerste gelijk en gelijkvormig, en daarom ook een cirkelomtrek is.

155. De meetkunstige plaats van het uiteinde dier lijnen zal al wederom een cirkelomtrek zijn, waarvan de gegeven lijn koorde is terwijl het gegeven punt A den boog, dien die koorde onderspant, middendoor deelt. Immers wanneer AD × AG = AE × AF moet zijn, zal AD : AF = AE : AG moeten wezen; en omdat de hoek DAE aan de driehoeken DAE en AFG gemeen is, zullen zij gelijkvormig zijn; daarom hoek ADE = hoek AFG, en hoek AED = hoek AGF. Deze hoeken worden ook gelijk bevonden omdat de beide eersten door de gelijke bogen $\frac{1}{2}$ (AC + BG) en $\frac{1}{2}$ AG, en de beide laatsten door de gelijke bogen $\frac{1}{2}$ (AB + CF) en $\frac{1}{2}$ ACF gemeten worden. Men kan nu lichtelijk bewijzen, dat van elke andere lijn AHI het uiteinde I in den omtrek van denzelfden cirkelomtrek moet liggen, wanneer AH × AI = AD × AG gegeven is.



156. De meetkunstige plaats van het punt C zal mede een cirkelomtrek

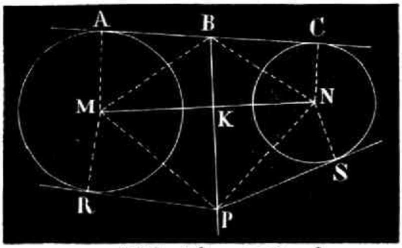


zijn, die tevens door het punt A gaat, doch zoo, dat het punt A den boog, die door de koorde BBB wordt onderspannen, in twee ongelijke deelen verdeelt, die den boog verschillen, waarvan de helft den gegeven hoek meet. Immers, na de koorden C^2 C^3 en C^3 C^4 getrokken te hebben, zal men hebben:

$AB^2 \times AC^2 = AB^3 \times AC^3 = m^2$ dus $AB^3 : AB^2 = AC^2 : AC^3$.
bovendien hoek $B^2 AB^3 = C^2AC^3$.
dus drieh. AB^2 B^3 gelijkvormig met drieh. AC^2 C^3,
daarom hoek AB^2 B^3 = hoek AC^3 C^2. Nu wordt hoek AB^2 B^3 gemeten door $\frac{1}{2}$ boog (AD + CE) en hoek AC^3 C^2 door $\frac{1}{2}$ boog AC^2; vermits nu boog AD = boog AE + bg. C^1 C^2 is, zijn genoemde bogen $\frac{1}{2}$ AC^2 en $\frac{1}{2}$ (AD + CE) gelijk.

Onderzoekt men op dezelfde wijze de gelijkvormige driehoeken AB^3B^4 en AC^3C^4, zoo zal men het gezegde bevestigd vinden.

157. Trek de lijn ABC, die de beide cirkels raakt, en deel die in B middendoor; dan is B reeds een punt van de gevraagde lijn. Verbind verder de middelpunten M en N door eene rechte lijn, en laat BK loodrecht daarop neder. Verleng BK, zoo zal BP de gevraagde lijn zijn; want



$$MB^2-R^2 = NB^2-r^2$$
$$\text{of } MB^2-NB^2 = R^2-r^2.$$
$$\text{Verder is } MB^2-MK^2 = NB^2-NK^2$$
$$\text{of } MB^2-NB^2 = MK^2-NK^2 = R^2-r^2;$$

en voor een willekeurig punt P van die lijn,

$$PM^2-MK^2 = PN^2-NK^2$$
$$\text{of } PM^2-PN^2 = MK^2-NK^2 = R^2-r^2,$$
$$\text{zoodat } PM^2-R^2 = PN^2-r^2,$$
$$\text{of } PR^2 = PS^2,$$
$$\text{en } PR = PS \text{ is.}$$

VIERDE AFDEELING.

1. De inhoud diens rechthoeks is = AB × BC = 187,53 □ m.
2. De inhoud van dat parallelogram is = 111978,8572 □ m.
3. De inhoud diens driehoeks is = 23,0834 □ m.
4. De inhoud dier ruit is = 4413,56565 □ m.
5. De loodlijn AE = $17^m,24$; de loodlijn BD = $14^m,35$; de loodlijn CF = $20^m,92$; het stuk AD = $9^m,87$; het stuk CD = $15^m,53$; het stuk BE = $2^m,49$; het stuk CE = $18^m,65$; het stuk BF = $3^m,025$; het stuk AF = $14^m,395$.
6. De loodlijn AE = $11^m,701$; de loodlijn BD = $14^m,208$; de loodlijn CF = $6^m,92$; het stuk AD = $31^m,438$; het stuk CD = $14^m,638$; het stuk BE = $32^m,455$; het stuk CE = $12^m,055$; het stuk BF = $19^m,19$; het stuk AF = $15^m,31$.
7. De derde zijde = $1^m,5$; de gevraagde loodlijn = $0^m,706$; en de stukken der schuine zijde resp. = $0^m,3765$ en $1^m,3235$.
8. Dit vraagstuk bevat gegevens, die onbestaanbaar zijn met elkander. Immers, wanneer de stukken der schuine zijde gegeven zijn resp. = $5^m,5$ en $17^m,6$, is het onmogelijk, dat de loodlijn = $13^m,2$ zij; zij zou = $9^m,84$ ongeveer wezen.
9. Die loodlijn is = $8^m,4$.
10. Die lijn is = $4^m,628$.
11. De inhoud diens driehoeks is = 0,00083681 □ m.
12. De inhoud van dat parallelogram is = 40,854 □ m.
13. De inhoud dier ruit is = 0,19468672 Bunders.
14. De inhoud van dat trapezium is = 2964,48901 □ m.
15. Gij zult daartoe noodig hebben eene der diagonalen, en de loodlijnen die uit de twee overige hoekpunten op die diagonaal zijn nedergelaten. Immers de inhoud des onregelmatigen vierhoeks wordt gevonden, wanneer men die diagonaal met de halve som dier loodlijnen vermenigvuldigt.
16. Meet elke zijde des zevenhoeks, en den straal des ingeschreven cirkels door middel uwer schaal; en vermenigvuldig daarna den omtrek des veelhoeks met den halven straal.

17. $I = \pi r^2 = 153{,}938037 \square$ m.

18. $r = \dfrac{O}{2\pi} = 24^m{,}436$.

19. $I = \dfrac{O^2}{4\pi} = 0{,}26359 \square$ m.

20. $d = 2\sqrt{\dfrac{I}{\pi}} = 112^m{,}838$; $O = \pi d = 0{,}35449$ kilometer.

21. In de vooronderstelling dat de aarde een volkomen bol zij, is $d = \dfrac{O}{2\pi} = 12732395$ m.; en $I = \frac{1}{4} \pi d^2 = 509295826581715 27 \square$ m.

22. $S = \dfrac{\pi g r^2}{360}$. Door Logarithmen vindt men $S = 185{,}45872 \square$ m.

23. $g = \dfrac{360\,S}{\pi r^2}$. Door Log. wordt gevonden $g = 114^\circ\ 35'\ 29''{,}59$.

24. $r = \sqrt{\dfrac{360\,S}{\pi g}}$. Men vindt door Log. $r = 1591^m{,}354$.

25. $l = \dfrac{\pi g r}{180}$. Door Log. vindt men $l = 7^m{,}45721$.

26. $g = \dfrac{180\,l}{\pi r}$. Men vindt $g = 0^\circ\ 34'\ 22''{,}648$.

27. $r = \dfrac{180\,l}{\pi g}$; waaruit $r = 72^m{,}7565$.

28. $I = \frac{1}{4} r^2 (\pi - 2)$. Men vindt (zonder Log. gemakkelijker dan met Log.) $I = 114{,}15926 \square$ m.

29. $I = \frac{1}{12} r^2 (2\pi - 3\sqrt{3})$. Door Log. vindt men $I = 1{,}753746 \square$ m.

30. $x = \frac{1}{12} r^2 (\pi - 6 + 3\sqrt{3})$. Men vindt $x = 41{,}52616 \square$ m.

31. $I = 4r^2$. Men vindt $I = 163{,}84 \square$ m.

32. $I = 2r^2$; waaruit $I = 2 \square$ Roeden.

33. Inh. ing. 6h. $= 1\frac{1}{2}\, r^2\sqrt{3}$, waaruit voor dien Inh. gevonden wordt $64{,}9519 \square$ m.
Inh. omg. 6h. $= 2r^2\sqrt{3}$; waaruit Inh. $= 86{,}60254 \square$ m.

34. Inh. ing. 8h. $= 2r^2\sqrt{2}$; zoodat die Inh. $= 0{,}02828427124 \square$ m., Inh. omg. 8h. $= 8(-1+\sqrt{2})r^2$; zoodat die Inh. $= 0{,}03313708496 \square$ m. is.

35. Inh. ing. 12h. $= 3r^2$; waaruit die Inh. $= 0{,}03 \square$ m.
Inh. omg. 12h. $= (2-\sqrt{3})\ 12r^2$; waaruit Inh. $= 0{,}0321539 \square$ m.

36. Men vindt het apothema, door eerst het apothema te zoeken, wanneer de straal des omg. cirk. $= 1$, en dus de zijde des 10hoeks $= \frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})$ is. Dat apothema $= \frac{1}{4}\sqrt{(10 + 2\sqrt{5})}$ gevonden zijnde, vindt men het eerstgenoemde apothema door de evenredigheid:

$$\tfrac{1}{2}(-1+\sqrt{5}) : 1 = \tfrac{1}{4}\sqrt{(10 + 2\sqrt{5})} : x.$$

waaruit $x = \frac{1}{2}\sqrt{(5 + 2\sqrt{5})}$.

De middelpuntsdriehoek is dus $= \frac{1}{4} \sqrt{(5 + 2\sqrt{5})}$, en de tienhoek $= 2\frac{1}{2} \sqrt{(5 + 2\sqrt{5})} = 7{,}69425$ □ m.

37. Als een straal des omg. cirkels $= 1$ is, vindt men voor den inhoud
des driehoeks $\frac{3}{4}\sqrt{3}$;
des vierhoeks 2;
des zeshoeks $1\frac{1}{2}\sqrt{3}$;
des achthoeks $2\sqrt{2}$;
des twaalfhoeks 3.

De verhouding in geheele vormen zal dus zijn:
$(3h : 4h : 6h : 8h : 12h) = (3\sqrt{3} : 8 : 6\sqrt{3} : 8\sqrt{2} : 12)$.

38. Men vindt voor den straal des ing. cirk. $27^m{,}738$; en voor den straal des omg. cirk. natuurlijk het dubbel, of $55^m{,}476$.

39. Men vindt voor den straal des ing. cirk 500 m; en voor dien des omg. cirkels $500\sqrt{2}$ of $707^m{,}106781$.

40. Men vindt voor den straal des ing. cirk. $5^m{,}38$ bijna; en voor dien des omg. cirkels $6^m{,}204$.

41. Inh. 12h $= 3r^2$. De omgeschreven cirkel heeft dus eenen straal van een' hectometer lengte.

42. Inh. drieh. ABC $= \frac{1}{2} ab$ □ m.

43. Inh. drieh. ABC $= \frac{1}{2} \sqrt{(a^4 - b^4)}$ □ m.

44. Inh. rechthoek $= pq$ □ m.

45. Basis parall. $= \frac{a^2}{b}$ m.

46. Inh. ruit $= \frac{1}{2} ab$ □ m. Zijde $= \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 + b^2)}$ meters.

47. Inh. driehoek $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ □ m; zijnde $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$

$$\left.\begin{array}{l}
\text{de loodlijn op de zijde } a \text{ vallende} = \frac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\[2mm]
\text{de loodlijn op de zijde } b \text{ vallende} = \frac{2}{b}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\[2mm]
\text{de loodlijn op de zijde } c \text{ vallende} = \frac{2}{c}\sqrt{s(s-a)\,s-b)(s-c)} \\[2mm]
\text{de beide stukken der zijde } a \text{ resp.} = \frac{a^2+b^2-c^2}{2a} \text{ en } \frac{a^2-b^2+c^2}{2a} \\[2mm]
\text{de beide stukken der zijde } b \text{ resp.} = \frac{-a^2+b^2+c^2}{2b} \text{ en } \frac{a^2+b^2-c^2}{2b} \\[2mm]
\text{de beide stukken der zijde } c \text{ resp.} = \frac{-a^2+b^2+c^2}{2c} \text{ en } \frac{a^2-b^2+c^2}{2c}
\end{array}\right\} \text{meters.}$$

48.
$$\left.\begin{array}{ll}
\text{De andere rechthoekszijde} & = \sqrt{(b^2 - c^2)} \\[2mm]
\text{de loodlijn} & = \frac{c}{b}\sqrt{(b^2 - c^2)} \\[2mm]
\text{het eene st. der sch. zijde} & = \frac{c^2}{b} \\[2mm]
\text{het andere stuk} & = \frac{b^2 - c^2}{b}
\end{array}\right\} \text{meters;}$$

de inhoud des geheelen driehoeks $= \frac{1}{2}\, c \sqrt{(b^2-c^2)}$

de inhouden der beide andere driehoeken resp. $= \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{c\,(b^2-c^2)}{2\,b^2} \sqrt{(b^2-c^2)} \\ \dfrac{c^3}{2\,b^2} \sqrt{(b^2-c^2)} \end{array} \right\}$ $\square$ meters.

49. Het andere deel der schuine zijde $= a-b$
de eene rechthoekszijde $= \sqrt{a\,(a-b)}$
de andere rechthoekszijde $= \sqrt{ab}$
de loodl. die op de sch. zijde valt $= \sqrt{b(a-b)}$ meters.

de inhoud des geheelen driehoeks $= \frac{1}{2}\, a \sqrt{b\,(a-b)}$
die der beide andere driehoeken
resp. $= \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}\, b \sqrt{b\,(a-b)} \\ \frac{1}{2}(a-b)\sqrt{b(a-b)} \end{array} \right.$ $\square$ meters.

50. Die afstand is $= \dfrac{2}{b-a}\sqrt{s\,(s-c)\,(s-d)\,(s+a-b)}$,
zijnde $s = \frac{1}{2}\,(-a+b+c+d)$
of $= \dfrac{2}{a-b}\sqrt{s\,(s-c)\,(s-d)\,(s-a+b)}$,
zijnde $s = \frac{1}{2}\,(a-b+c+d)$ meters.

51. Die inhoud is $= \dfrac{a+b}{a-b}\sqrt{s\,(s-a+b)\,(s-c)\,(s-d)}$ $\square$ m., zijnde $s = \frac{1}{2}\,(a-b+c+d)$ m.

of $= \dfrac{a+b}{b-a}\sqrt{s\,(s+a-b)\,(s-c)\,(s-d)}$ $\square$ m., zijnde $s = \frac{1}{2}\,(-a+b+c+d)$ m.

52. De inhoud van dat parallelogram is $= 4\sqrt{s(s-a)(s-\frac{1}{2}b)(s-\frac{1}{2}c)}$ $\square$ m.; zijnde $s = \frac{1}{2}\,(a+\frac{1}{2}\,b+\frac{1}{2}\,c)$.

53. De inhoud van die ruit is $= b\sqrt{(a^2-\frac{1}{4}\,b^2)}$ $\square$ m.

54. De inhoud van dien cirkel is $= \pi\, c^2$ $\square$ m.

55. Uit de vergelijking $\pi\, r^2 = d^2$, vindt men $r = \dfrac{d}{\pi}\sqrt{\pi}$.

56. De omtrek diens cirkels is $= 2\,\pi\, a$ m.

57. Eerst vindt men den straal $r = \dfrac{a}{\pi}\sqrt{\pi}$ (zie vraagst. 55); vermenigvuldigt men de beide leden dier vergelijking met 2π, zoo bekomt men $O = 2a\sqrt{\pi}$.

58. Men substitueere in de vergelijking $S = \dfrac{\pi g r^2}{360}$, $g = a$ en $r = b$; zoo verkrijgt men $S = \dfrac{\pi a b^2}{360}$ $\square$ meters.

59. $r = \dfrac{180a}{\pi b}$ m, $S = \dfrac{90a^2}{\pi b}$ $\square$ m.

60. Uit de vergelijking $S = \frac{\pi g r^2}{360}$, welke voor dit vraagstuk wordt $S = \frac{\pi b r^2}{360} = a^2$, vindt men $r = \frac{6a}{\pi b} \sqrt{10 \pi b}$.

61. De vergelijking $l = \frac{\pi g r}{180}$ (zie vr. 25) wordt hier $l = \frac{\pi a b}{180}$.

62. De vergelijking $g = \frac{180\, l}{\pi\, r}$ (zie vr. 26) verandert in $g = \frac{180\, a}{\pi b}$.

63. Uit de vergelijking $r = \frac{180\, l}{\pi g}$ (zie vr. 27) verkrijgt men door substitutie $r = \frac{180\, a}{\pi b}$.

64. De uitkomsten, in vraagstuk 37 verkregen, behoeven slechts met a^2 vermenigvuldigd te worden, omdat de inhouden van gelijkvormige veelhoeken tot elkander in reden zijn, als de tweede machten der gelijkstandige lijnen; dus hier, als $1^2 : a^2$. Men vindt alzoo:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Inhoud des driehoeks} & = & \tfrac{3}{4}\, a^2 \sqrt{3}. \\ \quad ,, \quad ,, \ \text{vierhoeks} & = & 2\, a^2. \\ \quad ,, \quad ,, \ \text{zeshoeks} & = & 1\tfrac{1}{2}\, a^2 \sqrt{3}. \\ \quad ,, \quad ,, \ \text{achthoeks} & = & 2\, a^2 \sqrt{2}. \\ \quad ,, \quad ,, \ \text{twaalfhoeks} & = & 3\, a^2. \end{array}\right\} \square \text{ meters.}$$

65. De inhoud des omgeschreven driehoeks is $= 4$ maal den inhoud des ingeschreven driehoeks; de omgeschreven vierhoek is $= 4$ maal het vierkant op den straal des ingeschreven cirkels. Beide is licht te bewijzen. Raadpleegt men verder Vraagst. 33, 34 en 35; zoo vindt men

$$\begin{array}{lll} \text{Inh. des omg. driehoeks} & = & 3\, a^2 \sqrt{3}. \\ \quad ,, \quad ,, \quad ,, \ \text{vierhoeks} & = & 4\, a^2. \\ \quad ,, \quad ,, \quad ,, \ \text{zeshoeks} & = & 2\, a^2 \sqrt{3}. \\ \quad ,, \quad ,, \quad ,, \ \text{achthoeks} & = & 8\, (-1 + \sqrt{2})\, a^2. \\ \quad ,, \quad ,, \quad ,, \ \text{twaalfhoeks} & = & (2 - \sqrt{3})\, 12\, a^2. \end{array}$$

66. Het is eene bekende zaak, dat de zijde des tienhoeks $\tfrac{1}{2}(-1 + \sqrt{5})$ is, wanneer de straal des omgeschr. cirkel $= 1$ is aangenomen; verder, door toepassing der bekende formule $A = \frac{2a}{\sqrt{(4 - a^2)}}$, bevindt men dat de zijde des omgeschr. tienhoeks $= \frac{-1 + \sqrt{5}}{\tfrac{1}{2}\sqrt{(10 + 2\sqrt{5})}}$, zijn omtrek $= \frac{-20 + 20\sqrt{5}}{\sqrt{(10 + 2\sqrt{5})}}$ en zijn inhoud $= \frac{-10 + 10\sqrt{5}}{\sqrt{(10 + 2\sqrt{5})}}$ is.

Wederom zijn gelijkv. veelhoeken tot elkander in reden als de tweede machten van de stralen der ingeschreven cirkels; dus:

$$1^2 : a^2 = \frac{-10 + 10\sqrt{5}}{\sqrt{(10 + 2\sqrt{5})}} : x;$$

waaruit dan eindelijk de inhoud des gevraagden tienhoeks wordt gevonden.

67. Handelende als in het vorige vraagstuk vindt men, $r = 1$ gesteld zijnde, voor de zijde des omgeschr. vijfhoeks $\dfrac{\sqrt{(10-2\sqrt{5})}}{\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})}$; voor zijnen omtrek $\dfrac{10\sqrt{(10-2\sqrt{5})}}{1+\sqrt{5}}$; en voor zijnen inh. $\dfrac{5\sqrt{(10-2\sqrt{5})}}{\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})}$; waarna men wederom toepast de evenredigheid

$$1^2 : a^2 = \frac{5\sqrt{(10-2\sqrt{5})}}{1+\sqrt{5}} : x.$$

68. Als de straal des cirkels $= r$ is, zal de inhoud des bedoelden vierkants $= 2r^2$ zijn. Maar dit moet gelijk a^2 □ m. wezen. Men heeft alzoo de vergelijking:

$$2r^2 = a^2,$$

waaruit gemakkelijk gevonden wordt $r = \frac{1}{2}\, a \sqrt{2}$.

69. Volgens vraagstuk 64 is de inhoud des ing. zesh. $= 1\frac{1}{2}\, r^2 \sqrt{3}$, wanneer de straal des omg. cirkels $= r$ is aangenomen. Maar zijn inhoud moet $= a^2$ □ meters zijn. Men heeft dus wederom de vergelijking:

$$1\tfrac{1}{2}\, r^2 \sqrt{3} = a^2,$$

waaruit men verkrijgt $r = \frac{1}{3}\, a \sqrt[4]{12}$.

70. Raadpleeg wederom vraagst. 64, en handel op dezelfde wijze, zoo vindt gij

$$r = \tfrac{1}{2}\, a \sqrt[4]{2}.$$

71. De som der rechthoekszijden is = de schuine zijde vermeerderd met tweemaal den straal des ingeschr. cirkels, omdat de raaklijnen, uit eenig punt buiten den cirkel aan dien cirkel getrokken, gelijk zijn. In ons geval is dus de som der rechthoekszijden $= 12^m{,}5 + 2 \times 1^m{,}7 = 15^m{,}9$. Hierbij gevoegd de schuine zijde $= 12^m{,}5$, verkrijgt men voor den omtrek des driehoeks $28^m{,}4$, en vermenigvuldigt men dien met den halven straal $= 0^m{,}85$, zoo vindt men voor den inhoud 24,14 □ m.

72. Men vindt $b\,(a + b)$ □ m.

73. De loodlijn, uit het hoekpunt van den rechten hoek op de schuine zijde nedergelaten, is middenevenredig tusschen de gegeven stukken der sch. zijde, en dus $= \sqrt{20 \times 11{,}25} = 15$ meters. De inhoud des driehoeks is dus $= \dfrac{31{,}25 \times 15}{2} = 243{,}375$ □ m.

74. Men vindt even zoo $\frac{1}{2}\,(a + b) \sqrt{ab}$ □ meters.

75. De kortste rechthoekszijde is in dit vraagstuk gelijk aan de helft der sch. zijde, of $36^m{,}2$. Men zal nu voor de andere rechthoekszijde $62^m{,}7$, en voor den inhoud des driehoeks 1134,87 □ m. vinden.

76. Men vindt even zoo $\frac{1}{8}\, a^2 \sqrt{3}$ □ m.

77. De langste rechthoekszijde is in dit geval $= 4^m{,}72 \times \sqrt{3} = 8^m{,}175$; en de inhoud = 19,293 □ m.

78. Men vindt lichtelijk voor den inhoud $\frac{1}{2} a^2 \sqrt{3}$ □ m.

79. De twee aan elkander sluitende koorden vormen met de middellijn eenen rechthoekigen driehoek, waarvan de schuine zijde $= 2c$ meters, en de verhouding der rechtshoekszijden gegeven is. Stelt men dus de eene rechthoekszijde $= mx$ meters, dan is de andere gelijk nx meters, en

$$m^2x^2 + n^2x^2 = 4c^2,$$

waaruit $x = \sqrt{\frac{4c^2}{m^2 + n^2}} = 2c\sqrt{\frac{1}{m^2 + n^2}}$; $mx = 2\,cm\sqrt{\frac{1}{m^2 + n^2}}$;

$nx = 2\,cn\sqrt{\frac{1}{m^2 + n^2}}$.

80. Indien de schuine zijde werkelijk 17, en de eene rechthoekszijde 15 meters lang ware, zou de andere rechthoekszijde $= 8$ meters zijn. Daar deze laatste echter slechts 4 meters bedraagt, zoo vindt men voor de beide anderen resp. $8^m,5$ en $7^m,5$.

81. Deze bewerking is juist. De reden daarvan is reeds in de beantwoording van vraagst. 71 opgegeven.

82. Hier is de schuine zijde $= \sqrt{(a^2 + b^2)}$ en $r = \frac{1}{2} \left\{ a + b - \sqrt{(a^2 + b^2)} \right\}$ meters.

83. De stukken AE en CE, waarin de lijn BE, die den hoek B middendoordeelt, de zijde AC verdeelt, worden gevonden resp. $= 12^m,8$ en $9^m,7$; en $BC^2 = AB \times BC - AE \times CE = 105,52$ waaruit $BC = 10^m,27$. Evenzoo vindt men voor AD $18^m,67$; en voor CF $15^m,3$ ongeveer.

84. Voor het geval dat de zijde, welke c meters lang is, wordt gesneden vindt men, — de snijlijn $= x$ gesteld zijnde, $x^2 = ab - \frac{abc^2}{(a + b)^2}$; welke vergelijking ook onder deze gedaante gebracht kan worden:

$$x^2 = ab \left\{ 1 - \frac{c^2}{(a + b)^2} \right\} \text{ of } x^2 = ab \times \frac{(a + b)^2 - c^2}{(a + b)^2} = ab\,\frac{(a + b + c)\,(a + b - c)}{(a + b)^2}.$$

Stelt men nu $\frac{1}{2}(a + b + c) = s$, zoo wordt:

$$x^2 = \frac{4\,ab}{(a+b)^2} \times s\,(s-c);\text{ en dus } x = \frac{2}{a + b}\sqrt{abs\,(s-c)}.$$

Stelt men de snijlijnen die de andere hoeken middendoordeelen, resp. $= x'$ en x'', zoo vindt men:

$$x' = \frac{2}{a + c}\sqrt{acs\,(s-b)}$$

$$\text{en } x'' = \frac{2}{b + c}\sqrt{bcs\,(s-a)}.$$

85. Naar aanleiding van de tweede stelling in vr. 19, Afd. III, vindt men:

$CD' = 47^m,235$; $AE' = 27^m,25$; $BF' = 79^m,76$; en

$CD' = \frac{2}{a-b} \sqrt{ab\,(s-a)\,(s-b)}$; $AE' = \frac{2'}{a-c} \sqrt{ac\,(s-a)(s-c)}$;

$BF' = \frac{2}{b-c} \sqrt{bc\,(s-b)\,(s-c)}$.

86. Men vindt voor het grootste stuk der sch. zijde $24^m,745$ en voor het kleinste $10^m,605$; voor de grootste rechthsz. $29^m,576$; voor de kleinste rechthsz. $19^m,362$; en voor de hypotenuse $35^m,35$.

87. Stelt men voor de stukken der schuine zijde $7x$ en $3x$, zoo is de loodlijn uit den rechten hoek daarop nedergelaten $= x\sqrt{21}$; en de beide rechthsz. resp. $= x\sqrt{70}$ en $x\sqrt{30}$. Men heeft dus $x(\sqrt{70} - \sqrt{30}) = 16.2$; waaruit $x = 0.405\,(\sqrt{70} + \sqrt{30}) = 5^m,606739$, enz.

88. Stel de eene rechthsz. $= x$, dan is de andere $= x-a$, en de hypotenuse $= \sqrt{(a^2 - 2ax + 2x^2)}$ meters. Men heeft dus de vergelijking:

$$\sqrt{(a^2 - 2ax + 2x^2)} = b + x.$$

waaruit men vindt $x = a + b \pm \sqrt{2b\,(a+b)}$ meters; enz.

89. $AD + BD = a$, en $AD - BD = b$ zijnde, is $AD = \frac{1}{2}(a+b)$ en $BD = \frac{1}{2}(a-b)$.

Nu is $AC - BC = AD : BD$; en $AC - BC : AD - BD = AC : AD = BC : BD$;

of $c : b = AC : \frac{1}{2}(a+b) = BC : \frac{1}{2}(a-b)$

hieruit verkrijgt men licht: $AC = \frac{(a+b)\,c}{2b}$ en $BC = \frac{(a-b)\,c}{2b}$ meters.

90. De drie gegeven sommen samentellende, verkrijgt men $a + b + c$ meters voor de dubbele som der zijden; vervolgens voor elke zijde afzonderlijk:

$\frac{1}{2}(-a + b + c)$, $\frac{1}{2}(a - b + c)$ en $\frac{1}{2}(a + b - c)$ meters, of wanneer men $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ stelt, zullen de zijden resp. $= s-a$, $s-b$, $s-c$ meters zijn. Voor de gevraagde loodlijnen zal men lichtelijk vinden: $x = \frac{2}{s-a}\sqrt{abcs}$; $x' = \frac{2}{s-b}\sqrt{abcs}$, en $x'' = \frac{2}{s-c}\sqrt{abcs}$.

91. De drie gegeven producten te zamen vermenigvuldigende, en den vierkantswortel uit de uitkomst trekkende, verkrijgt men voor het gedurig product der zijden, abc, en voor elke zijde afzonderlijk $\frac{bc}{a}$, $\frac{ac}{b}$ en $\frac{ab}{c}$ meters. Stel deze uitkomsten gemakshalve $= d$, e en f, en $s = \frac{1}{2}(d + e + f)$ meters, zoo vindt men voor de gevraagde loodlijnen:

$x = \frac{2}{d}\sqrt{s\,(s-d)\,(s-e)\,(s-f)}$; $x' = \frac{2}{e}\sqrt{s\,(s-d)\,(s-e)\,(s-f)}$;

$x'' = \frac{2}{f}\sqrt{s\,(s-d)\,(s-e)\,(s-f)}$.

92. Trek de diagonaal BD, die tevens schuine zijde zal zijn van den rechth. driehoek BCD, en $= 25^m,44$ gevonden wordt; en bereken vervolgens de inhouden der beide driehoeken BCD en ABD. Men vindt voor drieh. BCD 156,06, voor drieh. ABD 98,48; en voor derzelver som, of voor den inhoud des vierhoeks 254,54 □ meters.

93. Stel AD $= x$, dan is BD $= x-10$, AC $= \sqrt{(x^2+256)}$ en BC $= \sqrt{(x^2-20x+356)}$ meters; en

$$\sqrt{(x^2+256)}-8 = \sqrt{(x^2-20x+356)}$$

eene vierkantsvergelijking, waaruit men vindt $x = 25^m,652$ (de andere waarde van x is negatief, en kan dus hier niet in aanmerking komen). $x-10 = 15^m,652$; de basis AB $= 41^m,304$; AC $= 30^m,233$, BC $= 22^m,233$.

94. Men verkrijgt nagenoeg op dezelfde wijze voor de beide stukken der basis $3^2/_3$ en $1^2/_3$ meter. Doch men ziet terstond in, dat de loodlijn grooter dan 1 meter moet gegeven zijn, om opstaande zijden te verkrijgen, welker som $= 8$ meters zij. Dit zij aan het onderzoek des leerlings overgelaten.

95. NB. Deze opgave is geheel foutief. Men leze, in plaats van AG, het aan de schuine zijde grenzende deel van de zijde AB, AE het aan AB grenzende deel der schuine zijde. En dan berekene men het stuk CG op deze wijze:

AC : BC = CE : CG, waaruit CG $= 10^2/_7$ meter. Verder vindt men EG $= 10^m,918$ en AB $= 25^m,475$.

96. Door de eene opstaande zijde $= x$ meters te stellen, vindt men voor de eene $15\frac{70}{433}$, en voor de andere $7\frac{340}{433}$ meter.

97. Trek AD loodrecht op BC, dan is, AC $= x$ meters gesteld zijnde, AD $= \frac{1}{2}x$, en CD $= \frac{1}{2}x\sqrt{3}$; verder BD $= \sqrt{(36-\frac{1}{4}x^2)}$, zoodat daaruit volgt, dat:

$$x+\tfrac{1}{2}x\sqrt{3}+\sqrt{(36-\tfrac{1}{4}x^2)} = 18 \text{ is; waaruit men lichtelijk vindt:}$$

$$x = 9 \pm \sqrt{(-495+288\sqrt{3})} = 11 \text{ of } 7 \text{ ongeveer.}$$

98. Zij de loodlijn $= a$, en de omtrek des driehoeks $= b$.

Stel de schuine zijde $= x$, dan is de dubbele inhoud des driehoeks $= ax$. Wanneer men dus de eene rechthoekszijde $= y$ stelt, zal de andere $= \frac{ax}{y}$ zijn; en wij hebben

$$\frac{a^2x^2}{y^2}+y^2 = x^2 \qquad \text{en} \qquad \frac{ax}{y}+x+y = b$$

$$\text{waaruit } x^2 = \frac{y^4}{y^2-a^2} \qquad \text{en } x = \frac{b\,y-y^2}{a+y}$$

$$\text{dus zal } \frac{y^4}{y^2-a^2} = \frac{(by-y^2)^2}{(y+a)^2} \text{ zijn.}$$

Vermenigvuldigt men beide leden dezer vergelijking met $\frac{y+a}{y^2}$, zoo

bekomt men $\frac{y^2}{y-a} = \frac{(b-y)^2}{y+a}$

welke herleid zijnde, geeft: $y^2 - \frac{2\,ab + b^2}{2\,a + 2\,b}\,y = -\frac{ab^2}{2\,a+2\,b}$.

Men vindt alzoo $y = \frac{b\,(2\,a + b) \pm b\sqrt{(b^2 - 4\,a\,b - 4\,a^2)}}{4\,(a + b).}$

Aanmerking. De lengte der loodlijn is abusivelijk opgegeven $4^m{,}75$. Lees $4^m{,}8$.

Substitueert men dus in de gevondene uitkomst $a = 4{,}8$ en $b = 24$, zoo vindt men $y = 6$ of $= 8$, waaruit verder volgt $x = 10$ meters.

99. Zij de schuine zijde $= a$, en de som der rechthoekszijden en der loodlijn $= b$. Stel verder de eene rechthoekszijde $= x$, en de andere $= y$, dan is, zie boven, de loodlijn $= \frac{x\,y}{a}$, en wij hebben

$$x + y + \frac{x\,y}{a} = b \qquad \text{en } x^2 + y^2 = a^2$$

waaruit $x + y = b - \frac{x\,y}{a}$ $\qquad\qquad 2\,x\,y = 2\,x\,y$

opt.

$\surd$ $\qquad (x+y)^2 = a^2 + 2\,xy$

$$(x + y)^2 = b^2 - \frac{2\,b}{a}\,xy + \frac{x^2\,y^2}{a^2}$$

De tweede leden dezer vergelijkingen vormen de vergelijking

$$b^2 - \frac{2\,b}{a}\,x\,y + \frac{x^2\,y^2}{a^2} = a^2 + 2\,x\,y$$

$$\text{of } x^2\,y^2 - 2\,a\,(a + b)\,x\,y = a^2\,(a^2 - b^2)$$

waaruit $x\,y = a\,\{a + b \pm \sqrt{2\,a\,(a + b)}\,\}$

waarin alleen het onderste teeken kan gelden.

Hieruit is dus $x\,y$ bekend, stel $= d^2$.

daar men nu nog weet $x^2 + y^2 = a$, worden verder x en y, ieder afzonderlijk, lichtelijk berekend.

Aanmerking. Het opgegeven getal $18^m{,}75$ moet hier $18^m{,}8$ zijn.

Substitueert men alsdan $a = 10$ en $b = 18{,}8$, zoo vindt men $x\,y = 48$; $x = 6$ of $= 8$, $y = 8$ of $= 6$.

100. Zij de som der rechthoekszijden $= b$, en de loodlijn $= a$. Stel verder de eene rechthoekszijde $= x$, en de andere rechthoekszijde $= y$, dan is, zie boven, de schuine zijde $= \frac{x\,y}{a}$ en wij hebben

$$x + y = b \quad \text{en} \quad x^2 + y^2 = \frac{x^2 y^2}{a^2}$$

$$\text{hierbij} \quad 2\,xy = 2\,xy$$

$$\text{komt } (x + y)^2 = \frac{x^2 y^2}{a^2} + 2\,xy^2 = b^2$$

$$\text{of } x^2 y^2 + 2\,a^2\,xy = a^2\,b^2$$

$$\text{waaruit } xy = -\,a^2 \pm a \sqrt{(a^2 + b^2)}$$

waarbij alleen het bovenste teeken gelden kan.

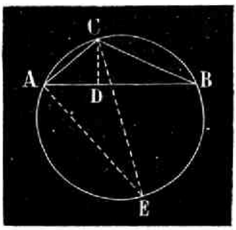
Aanmerking. Ook hier is de loodlijn abusivelijk op $4^m,75$ gesteld; lees $4^m,8$.

Substitueert men $b = 14$ en $a = 4,8$, zoo vindt men $xy = 48$; waaruit verder $x = 6$ of $= 8$, en $y = 8$ of $= 6$ gevonden wordt, terwijl men voor de schuine zijde in elk geval 10 vindt.

101. Trekt men eene straal naar het punt, waar de opst. zijde den cirkelomtrek snijdt, zoo verkrijgt men een' gelijkb. driehoek, die aan den gegeven gelijkb. driehoek gelijkvormig is, omdat beide den hoek aan de basis gemeen hebben. Men vindt dan door eene eenvoudige evenredigheid, dat het stuk der opstaande zijde binnen den cirkel $6\frac{1}{8}$ meter lang is.

102. Op dezelfde wijze te werk gaande, als in het vorige vraagst., vindt men voor de lengte der gevraagde koorde $10\frac{8}{9}$ meter.

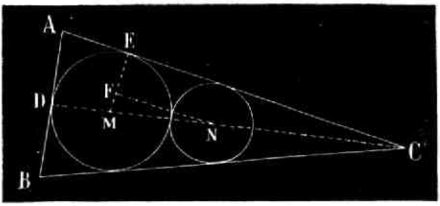
103. Trek de middellijn CE en de koorde AE. Laat verder CD loodrecht neder op AB, dan is driehoek BCD ∞ drieh. ACE. Immers hebben zij, behalve eenen rechten hoek, de hoeken B en E gelijk. Men vindt terstond $AE = \sqrt{(CE^2 - AC^2)} = 76^m,13$. Stel nu $BD = x$, dan is $AE : BD = AC : CD$; of $76_m,13 : x = 40_m : CD$, waaruit $CD = \frac{40\,x}{76,13}$ en $AD = \sqrt{(AC^2 - AD^2)} = \sqrt{\left(1600 - \frac{1600x^2}{5796}\right)}$ hierbij $BD = x$, zoo verkrijgt men



$AB = x + \sqrt{\left(1600 - \frac{1600\,x^2}{5796}\right)} = 75$; waaruit gevonden wordt $x = 41\frac{853}{1840}$, of circa $41\frac{1}{2}$, zoodat de loodlijn $CD = 21^m,9$ wordt. Eindelijk $AC : CD = CE : BC$, of $40 : 21,9 = 86 : BC$, waaruit men vindt $BC = 47^m,085$.

104. Deelt men de beide gegevene waarden door 10, zoo verkrijgt men 1 en $\frac{2}{3}\sqrt{3}$, voor de verhouding der zijden van den in- en omgeschreven n-hoek. Wij weten, dat n in dit geval $= 6$ is.

105. Trek de straal ME naar het raakpunt, en NF evenwijdig met AC.



Dan is MF = het verschil der stralen = 25 meters. MN = de som der stralen = 65 meters, en NF = $\sqrt{}$ (MN^2 — MF^2) = 60 meters. Nu is MF : ME = MN : MC, waaruit volgt, dat MC = 117, en dus CD = 162 meters is. Nog is NF : CD = MF : AD. Men vindt AD = $67\frac{1}{2}$, en AB = 135 meters. Eindelijk MF : MN = AD : AC, waaruit volgt AC = $175\frac{1}{2}$ meter.

106. Gij hebt goed gewerkt. Tot grondslag hiervan ligt de waarheid, dat de raaklijnen, uit een punt buiten den cirkel aan dien cirkel getrokken, even lang zijn.

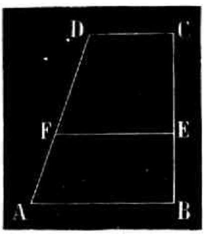
107. Als men AD trekt, zal zij loodrecht op BC staan. Nu is

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2\ BC \times CD.$$

Hieruit vindt men CD = $7\frac{1}{2}$ meter.

108. De straal des cirkels = 1 gesteld zijnde, zagen wij in vraagst. 37, dat de inhoud des ing. zeshoeks = $1\frac{1}{2} \sqrt{3}$ is. De inhoud des cirkels is = π vierk. eenheden. Daar nu de inhoud des cirkels tot dien des sectors staat, als de geheele omtrek tot den boog des sectors, heeft men: $\pi : 1\frac{1}{2} \sqrt{3} = 360 : x$, waaruit $x = 297^\circ\ 42'$ ongeveer.

109. Zij AB = 64,2; CD = 31,4; AD = 102,5 en BC = 91,4. Zij verder EF evenw. aan AB, en deele zij het rechth. trap. midden door. Stel EF = x, BE = y, dan is CE = 91,4 — y. En $(x + 64{,}2)\ \frac{1}{2}\ y = 2184{,}46$; $(x + 31{,}4)\ (45{,}7 - \frac{1}{2}\ y) = 2184{,}46$, dus $x\,y + 64{,}2\ y = 4368{,}92$ en $-\ x\,y - 31{,}4\ y + 91{,}4\ x = 1498{,}96$.



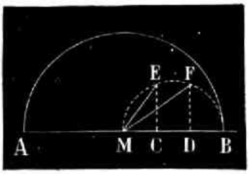
De som dezer vergelijkingen is

$$32{,}8\ y + 91{,}4\ x = 5867{,}88$$

$$\text{en } y = \frac{5867{,}88 - 91{,}4\ x}{32{,}8}$$

Uit de eerste vergel. verkrijgen wij ook nog $y = \dfrac{4368{,}92}{x + 64{,}2}$; deze beide waarden van y vormen de eindvergelijking: $\dfrac{4368{,}92}{x + 64{,}2} = \dfrac{5867{,}88 - 91{,}4\ x}{32{,}8}$, eene zuivere vierkantsvergelijking, waaruit $x = 50^m{,}535$.

110. Deel MB in drie gelijke deelen; trek CE en DF loodrecht op MB;



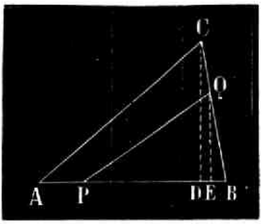
dan zullen ME en MF de verlangde stralen zijn.

$ME = \sqrt{MC \times MB}$ en $MF = \sqrt{MD \times MB}$. Hieruit vindt men lichtelijk $ME = 2\sqrt{3} = 3^m,464$ en $MF = 2\sqrt{6} = 4^m,9$.

111. Men vindt op dezelfde wijze, als in vraagst. 109, de lijn $EF = x$ gesteld zijnde, $x = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + b^2)}$.

112. Daar CE en CG koorden zijn, welker projectiën op de middellijn $BC = 10$ en 5 meters zijn, vindt men licht $CE = 5\sqrt{6} = 12,25$, en $CG = 5\sqrt{3} = 8,66$ ongeveer. Verder uit de evenredigheid $(BC : CE : CG) = (AB : DE : FG)$ volgt: $DE = 29^m,4$ en $FG = 20^m,784$.

113. $CD = \frac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ stel gemakshalve $= h$. Inh.



drieh. $ABC = \frac{1}{2}ah$; dus Inh. drieh. $PQB = \frac{1}{4}ah$. Nu is de basis PB van dien laatsten driehoek $= a-d$, dus de hoogte $QE = \frac{ah}{2(a-d)}$. Maar $CD : QE = CB : QB$. Hieruit volgt: $QB = \frac{ac}{2(a-d)}$.

114. Men vindt, nagenoeg op dezelfde wijze als in vraagst. 110, voor de stukken der zijde BC resp. $10^m,147$ en $3^m,053$.

115. Men ontdekt, langs den weg, in vraagst. 109 aangewezen, dat de deellijn $348^m,5$ lang moet zijn, die nu gemakkelijk kan geconstrueerd worden.

116. De basis des driehoeks zal nu $= 432-71 = 361$ meters, en deszelfs inhoud $= \frac{4}{13}$ van den inhoud des geheelen trapeziums, of $= 15467\frac{1}{13}$ □ meters zijn. Hieruit wordt de hoogte des driehoeks $= 85^m,69$ bekend, en het deelpunt der zijde BC laat zich, even als in vraagst. 113, bepalen.

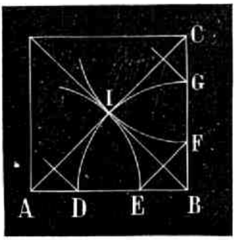
117. In dit vraagstuk is eene duisterheid ingeslopen, welke verdwijnt als men voor *de overstaande zijde*, *de zijde* BC leest.

DE deelt den hoek $ADB = R$ midden door, daarom is hoek $ADE = 45^\circ$, en als men uit E de loodlijn EG op AD laat vallen, ook hoek $DEG = 45^\circ$. Hieruit volgt, daar $DE = \sqrt{2}$ gegeven is, $DG = EG = 1$ meter. Stel nu $AG = x$, dan is $AD = x + 1$, en $BD : EG = AD : AG$, of $7 : 1 = 1 + x : x$, waaruit $x = \frac{1}{6}$, en dus $AD = 1\frac{1}{6}$ meter. Verder zal, omdat $AD^2 + BD^2 = AB^2$

is, $AB = \frac{1}{6}\sqrt{1813}$ gevonden worden. Om de tweede zijde BC te vinden, redeneere men als volgt: Driehoek BDC is rechthoekig in D. Er kan dus op BC als middellijn een halve cirkel beschreven worden, die door D gaat. Doch dan wordt DF straal, zoowel als BF en CF; BC dus $= 2\ DF = 8$ meters. En $CD = \sqrt{(BC^2 - BD^2)} = \sqrt{15}$. Hierbij $AD = 1\frac{1}{6}$, zoo zal $AC = (1\frac{1}{6} + \sqrt{15})$ meters zijn.

118. $\pi r^2 = 0{,}36$; daaruit volgt: $r = 0^m{,}338$.

119. $AB = BC$; $AE = CF$; de opstaande zijden AB en BC des driehoeks ABC zijn dus in de punten E en F in dezelfde reden verdeeld, daarom is EF evenw. aan AC, en hoek BEF = hoek $EFB = \frac{1}{2} R$, terwijl hunne supplementen AEF en CFE ook gelijk, en tevens $= 1\frac{1}{2} R$ zijn. De hoeken des achthoeks zijn alzoo even groot. $AB = a$ gegeven; dus $AI = \frac{1}{2} a \sqrt{2} = AE$; derhalve $BE = a\,(1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}) = BF$, en $EF^2 = 2\ BE^2 = a^2\,(3 - 2\sqrt{2})$, zoodat $EF = a\,(-1 + \sqrt{2})$. Maar $BE + AD = 2\ BE = a\,(2 - \sqrt{2})$ afgetrokken van $AB = a$, rest $DE = a\,(-1 + \sqrt{2})$. DE en EF zijn aldus even lang; en de zijden des achthoeks gelijk.



120. Stel de gegevene cirkels P, Q, R, S en T; en hunne stralen $= a$, b, c, d, e. Noemen wij den cirkel, welks inhoud aan de som dier cirkels gelijk is Z, en zijn' straal m; dan hebben wij de aaneengeschakelde evenredigheid $(P : Q : R : S : T : Z) = (a^2 : b^2 : c^2 : d^2 : e^2 : m^2)$, waaruit volgt $P + Q + R + S + T : Z = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 : m^2$, maar aangezien nu $P + Q + R + S + T = Z$ is, zal $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = m^2$ zijn. De zaak komt dus hierop neder: Een vierkant te zoeken, gelijk aan de som van vijf gegevene vierkanten. De zijde van dat vierkant zal de straal des gevraagden cirkels zijn. Men vindt $m = 24^m{,}3$ ruim.

121. $12^m{,}775$.

122. Op dezelfde wijze werkende als in vraagst. 120, vindt men $6^m{,}584$.

123. Men vindt, alweder op dezelfde wijze werkende, voor de middellijn van het grootste deel $13^m{,}6764$, en voor die van het kleinste deel $10^m{,}75494$.

124. De gevraagde cirkel = P, en de gegeven cirkel = Q gesteld zijnde, moet $P : Q = 53 : 31$ zijn. Stelt men hunne stralen resp. $= R$ en r, zoo zal, omdat $P : Q = R^2 : r^2$ is, ook $R^2 : r^2 = 53 : 31$ zijn. Nu is $r = 216^m{,}08$ gegeven. Men berekent hieruit $R = 282^m{,}535$.

125. De stralen der gegeven cirkels worden gemakkelijk berekend, $26^m{,}184$

en $5^m,6$ groot te zijn. De straal des gevraagden cirkels zal dus $26^m,776$ wezen.

126. Van een' cirkel welks straal $= r$ is, is de inhoud $= \pi\, r^2$; en van een' gelijkzijdigen driehoek, welks zijde $= x$ is, is de inhoud $= \frac{1}{4}$ $x^2 \sqrt{3}$; dus moet $\frac{1}{4}\, x^2 \sqrt{3} = \pi\, r^2$ zijn, en dus $x^2 = \frac{4\, \pi\, r^2}{\sqrt{3}}$; daar r nu bekend en $= 16^m,1$ is, vindt men voor x, $43^m,366$.

127. Hier is $\pi\, r^2 = 25$; waaruit $r = 2^m,8209$.

128. Stelt men den straal des gegeven cirkels $= r$, dan is zijn inhoud $= \pi\, r^2$, en de inhoud der ing. zeshoeks $= 1\frac{1}{2}\, r^2 \sqrt{3}$ (zie vraagst. 37). Stelt men nu den straal des cirkels, welks inhoud aan den ing. zeshoek gelijk is, $= r'$, dan is die inhoud $= \pi\, r_{\prime}^2$; en $r^2 : r_{\prime}^2 = \pi : 1\frac{1}{2} \sqrt{3}$; waaruit wordt afgeleid dat $r : r' = \sqrt{\pi} : \sqrt[4]{6\frac{3}{4}}$; of $r : r' = \sqrt{\pi} : \frac{1}{2} \sqrt[4]{108}$.

129. Men vindt evenzoo $r : r' = \sqrt{\pi} : \sqrt[4]{12}$.

130. Hier zijn de stralen omgekeerd evenredig met de hoeken. Wij hebben dus $53^\circ\, 14'\, 30'' : 14^\circ\, 53'\, 30'' = x : 8^m,4$; waaruit $x = 30^m,0322$.

131. Uit de formule $g = \frac{360\ S}{\pi\, r^2}$, volgt $g = 143^\circ\, 14'\, 21''$, 97.

132. In dezelfde formule $g = \frac{360\ S}{\pi\, r^2}$ is nu $S = r^2$; zij verandert dus in

$g = \frac{360}{\pi}$; men vindt $g = 111^\circ\, 46'\, 28''$, 45.

133. Uit de formule $r = \sqrt{\frac{360\ S}{\pi\, g}}$, leidt men af $O = 2 \sqrt{\frac{360\ \pi\ S}{g}}$. Hieruit berekent men $O = 184^m,34$. NB. In de opgave staat de inhoud des sectors $= 524^m,17$. Dit moet zijn 524,17 □ meters.

134. Door de formule $S = \frac{90\ l^2}{\pi\ g}$ ontdekt men den inhoud van den sector $= 3294,78$ □ meters. De driehoek, welks zijden $= 7$, 11 en 13 meters zijn, is $= 38,5$ □ meters; en derhalve 85,58 maal daarin begrepen. Men moet dus de zijden des driehoeks $\sqrt{85,58}$, of ongeveer 9,25 maal grooter nemen, zoodat zij dan worden $64^m,75$, $101^m,75$ en $120^m,25$.

135. De gezichtslijn naar den top des booms is de schuine zijde van eenen rechthoekigen driehoek, welks eene rechthoekszijde de boom zelf is. Is nu de hoek aan het oog $= 30^\circ$, zoo is die schuine zijde tweemaal zoo lang als de boom, en dus $= 2\ b$ meters, en men is van den voet des booms $b \sqrt{3}$ meters verwijderd. Daar dit nu het geval is met elk der hoekpunten des vijfhoeks, is hier sprake van eenen vijfhoek, die in een' cirkel staat, welks straal $= b \sqrt{3}$ meters lang is. Neemt men nu zijne toevlucht niet tot de driehoeksmeting, zoo laat zich, door middel eener schaal van gelijke deelen graphisch aantoo-

nen, hoe lang de onbekende zijde wezen moet, daar de vier andere zijden gegeven zijn. Nog valt hier op te merken, dat de gegevene grootte des vijfhoeks overbodig is, als afhankelijk van de overige gegevens.

136. Hier is de straal des omgeschreven cirkels gelijk aan de hoogte des booms, en dus $= b$ meters. Overigens is de opgave geheel gelijk aan de vorige.

137. Men vindt voor den straal des omgeschreven cirkels $\frac{1}{3} b \sqrt{3}$. Voor het overige is ook deze opgave dezelfde als in Vr. 135.

138. Stel de onbekende rechthoekszijde $= x$ meters, dan is de schuine zijde $= 4{,}8 - x$, en $(4{,}8 - x)^2 = (2{,}4)^2 + x^2$; waaruit men berekent $x = 1^m{,}8$; terwijl men voor den inhoud des driehoeks vindt $2{,}16 \square$ m.

139. Stel de eene rechthoekszijde $= x$ meters, dan is de andere $= 0^m{,}35 - x$, en $(0{,}25)^2 = (0{,}35 - x)^2 + x^2$, waaruit men vindt $x = 0^m{,}2$ of $= 0^m{,}15$, zoodat dan de andere rechthoekszijde $= 0^m{,}15$ of $0^m{,}2$ wordt. In elk geval is de inhoud $= 0{,}015 \square$ meters.

140. Stelt men x, y en z voor de schuine zijde en de beide rechthoekszijden, zoo zal $x + y = 0{,}4 \quad y + z = 0{,}35$ en $x^2 = y^2 + z^2$ zijn. Dit stelsel van vergelijkingen leidt tot eene vierkantsvergelijking, waaruit men voor x, $0^m{,}65$ of $0^m{,}25$ vindt. De eerste dezer waarden vervalt, omdat dan eene der rechthoekszijden negatief zou moeten worden.

141. Stelt men de eene rechthoekszijde $= x$ meters, dan is de andere $= x + 3^m{,}1$ en $x^2 + (x + 3.1)^2 = (4.1)^2$; waaruit men vindt $x = 0^m{,}9$ of $= -4$ m. De tweede rechthoekszijde wordt dus $= 4$ meters of $= -0^m{,}9$. Ofschoon de negatieve waarden even goed aan de vraag voldoen, kan men ze weglaten.

142. Stelt men voor de eene rechthoeksz. x, en voor de andere y meters, zoo zal $\frac{1}{2} xy = 2{,}1$ en $x^2 + y^2 = 13.69$ zijn. Telt men 4 maal de eerste vergel. bij de tweede op, of trekt men dat daarvan af, zoo verkrijgt men $(x + y)^2 = 22.09$ en $(x - y)^2 = 5.29$. De wortels dezer vergelijkingen zijn $x + y = 4.7$ en $x - y = 2.3$. De halve som, en het halve verschil dezer laatste vergelijkingen geven $x = 3^m{,}5$ en $y = 1^m{,}2$.

143. Stel x voor de schuine zijde, en y en z voor de rechthoekszijden, dan is $x + y + z = 56$, $\frac{1}{2} yz = 84$ en $y^2 + z^2 = x^2$.

Telt men 4 maal de tweede vergel. bij de derde, en trekt men den vierkantswortel uit de uitkomst, zoo verkrijgt men $y + z = \sqrt{(x^2 + 336)}$, waardoor de eerste vergel. verandert in $x + \sqrt{(x^2 + 336)} = 56$. Dit is eene eerstemachts vergel., waaruit $x = 25$. Door eene lichte kunstgreep vindt men verder $y = 24$, en $z = 7$ meters.

144. Stel voor de rechthoekszijden $3x$ en $4x$, dan is de schuine zijde $= 5x$, en de inhoud $= 6x^2 = 1176$. Hieruit volgt $x = 14$, en $5x = 70$ meters.

145. Het eene stuk, dat door de loodlijn van de schuine zijde wordt afgesneden, zij $= x$ meters, dan is het andere $= 2{,}5 - x$, en $x(2.5 - x) = 1.44$; waaruit $x = 1^m{,}6$ of $0^m{,}9$; het andere stuk dus $0^m{,}9$ of $1^m{,}6$. Men vindt in elk geval voor de rechthoekszijden 2^m en $1^m{,}5$.

146. Stelt men de onbekende rechthoekszijden $= x$ en y meters, zoo zijn de stukken, waarin de loodlijn de schuine zijde verdeelt, $= \sqrt{(x^2 - 12{,}96)}$ en $\sqrt{(y^2 - 12{,}96)}$, en tusschen deze stukken is wederom de loodlijn middenevenredig. Men heeft dus $x + y = 10.5$ en $\sqrt{(x^2-12.96)} : 3.6 = 3.6 : \sqrt{(y^2-12.96)}$. Uit de laatste vergel. vindt men, door substitutie der eerste, $xy = 27$; en vervolgens uit deze en de eerste $x = 6$ en $y = 4{,}5$.

147. Als men voor de grootste rechthoekszijde $60-x$ stelt, zal de kleinste $= 60 - 2x$ zijn, en $60^2 = (60 - x)^2 + (60 - 2x)^2$, waaruit men vindt, met verwaarloozing van eene der waarden des wortels, $x = 12$, zoodat de rechthoekszijden dan 48 en 36 meters lang zijn.

148. Stelt men de grootste rechthoekszijde $= \frac{60}{x}$, zoo zal de kleinste $= \frac{60}{x^2}$ zijn, en $60^2 = \left(\frac{60}{x}\right)^2 + \left(\frac{60}{x^2}\right)^2$; waaruit eerst volgt $x^2 = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$. Daar echter de rechthoekszijden ieder in het bizonder kleiner dan de schuine zijde moeten zijn, en niet negatief bedoeld worden, vervalt het onderste teeken. Uit $x^2 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ vindt men $x = \frac{1}{2}\sqrt{(2 + 2\sqrt{5})}$; waardoor eindelijk de rechthoekszijden berekend worden $= 47^m{,}17$ bijna, en $37^m{,}08$ ruim.

149. Stelt men voor de basis $2x$, dan is de opst. zijde $= 10x$, en de loodlijn, op de basis nedergelaten $= 3x\sqrt{11}$. De inhoud des driehoeks zal dus $3x^2\sqrt{11} = 300\sqrt{11}$ zijn, waaruit $x = 10$, $2x = 20$ en $10x = 100$ meters bekend worden.

150. Ja. Immers, wanneer de straal des omgeschreven cirkels $= 1$ gesteld wordt, zal de zijde des regelm. driehoeks $= \sqrt{3}$ zijn. Wij hebben dus $2 : 5\frac{1}{3}\sqrt{3} = \sqrt{3} : 8$, hetwelk eene goede evenr. is.

151. De zijde des vierkants gelijk x meters gesteld zijnde, is zijn inhoud $= x^2 \square$ meters. Uit de vergelijking $x^2 + x = 210$, vindt men $x = 14$, of -15 meters. Men gebruike het eerste antwoord.

152. Men stelle de beide opst. zijden resp. $= x$ en y meters, en neme aan dat de basis $= 21$ meters zij, dan zal de hoogte des driehoeks $= 12$ meters wezen. Uit de beide vergelijkingen

$$x + y = 33 \text{ en } \sqrt{(x^2 - 144)} + \sqrt{(y^2 - 144)} = 21$$

vindt men eerst $xy = 260$, daarna $x = 20$ en $y = 13$.

153. Door de formule $r = \frac{I}{s}$ vindt men terstond voor den straal des ingeschreven cirkels $4\frac{2}{3}$ meter. De inhoud des cirkels $= \pi r^2$ zou

dus $= 68\frac{4}{9}\ \square$ meters moeten zijn. Deelt men nu deze vergelijking door $r^2 = 21\frac{7}{9}$, zoo verkrijgt men $\pi = 3\frac{1}{7} = \frac{22}{7}$. Er is dus geene fout begaan, wanneer men de verhouding van Archimedes gebruikt.

154. Zoo als de opgave daar licht, is zij onoplosbaar, omdat men tot onbestaanbare waarden geraakt. Immers stel voor de opst. zijden des driehoeks x en y, voor de basis z, dan is de inhoud des driehoeks $= \frac{3}{4}\, z\ \square$ meters, en de straal des omg. cirkels $=$ R gesteld zijnde, $R = \frac{xyz}{3z} = 14\frac{1}{6}$, waaruit volgt $2\,xy = 85$. Nu was $x + y$, $= 4{,}2$ gegeven. Verheft men deze laatste vergelijking tot de tweede macht, en trekt men het dubbel der vorige vergelijking daarvan af, zoo blijft er $(x-y)^2 = -\,152{,}36$. Men kan echter geene evene machtswortel trekken uit een negatief getal.

155. Stel de loodlijn $= x$ meters, dan is de eene opstaande zijde $= x + 2$, en de andere $= 25 - x$. Uit de vergelijking

$$\sqrt{\{(25-x)^2 - x^2\}} + \sqrt{\{(x+2)^2 - x^2\}} = 21, \text{ of korter}$$

$$\sqrt{(625 - 50\,x)} + \sqrt{(4\,x + 4)} = 21.$$

volgt $x = 8$ of $x = 1\frac{7}{31}$, waaruit dan het overige wordt afgeleid.

156. Stel de opst. zijden resp. $= 5\,x$ en $6x$, zoo vindt men uit de vergelijking $\sqrt{(25\,x^2 - 576)} + \sqrt{(36\,x^2 - 576)} = 25$

$x = 5$, als de eenige bruikbare waarde; zoodat alsdan de opst. zijden $= 25$ en 30 meters zullen zijn.

157. In n°. 138 de sch. zijde $= x$, de eene rechthsz. $= a$, en de som der beide andere zijden $= b$ gesteld zijnde, vindt men $x = \frac{a^2 + b^2}{2\,b}$, de onbekende rechthoekszijde $= \frac{b^2 - a^2}{2\,b}$, en den inhoud des driehoeks $= \frac{a\,(b^2 - a^2)}{4\,b}\ \square$ m.

In n°. 139 de sch. zijde $= a$, de eene rechthsz. $= x$, en de andere $= b - x$ gesteld zijnde, vindt men $x = \frac{1}{2}\,b \pm \frac{1}{2}\sqrt{(2\,a^2 - b^2)}$, voor de andere rechthsz. $b - x = \frac{1}{2}\,b \mp \frac{1}{2}\sqrt{(2\,a^2 - b^2)}$, en voor den inhoud des driehoeks $\frac{1}{4}\,(b^2 - a^2)$.

In n°. 140 de sch. zijde $= a - x$, de eene rechthsz. $= x$, en de andere $= b - x$ gesteld zijnde, vindt men $x = b - a \pm \sqrt{2\,a\,(a-b)}$, dus $b - x = a \mp \sqrt{2\,a\,(a-b)}$, en $a - x = 2\,a - b \mp \sqrt{2\,a\,(a-b)}$.

In n°. 141 de sch. zijde $= a$, de eene rechthsz. $= x$, en de andere $= x + b$ gesteld zijnde, vindt men $x = -\,\frac{1}{2}\,b \pm \frac{1}{2}\sqrt{(2\,a^2 - b^2)}$; dus $x + b = \frac{1}{2}\,b \pm \frac{1}{2}\sqrt{(2a^2 - b^2)}$.

In n°. 142 de sch. zijde $= a$, de rechthoekszijden $= x$ en y, en de inhoud $= k^2$ gesteld zijnde, verkrijgt men $x = \frac{1}{2}\,[\sqrt{(a^2 + 4\,k^2)} + \sqrt{(a^2 - 4\,k^2)}]$ en voor y, $\frac{1}{2}\,[\sqrt{a^2 + 4\,k^2)} - \sqrt{(a^2 - 4\,k^2)}]$.

In n^0. 143 de sch. zijde $= x$, de rechthoekszijden $= y$ en z, de omtrek $= a$, en de inhoud $= k^2$ gesteld zijnde, is $x = \frac{a^2 - 4\,k^2}{2\,a}$, verder $y = \frac{1}{4\,a}\left\{a^2 + 4\,k^2 + \sqrt{(a^4 - 24\,a^2\,k^2 + 16\,k^4}\right\}$ en

$$z = \frac{1}{4\,a}\left\{a^2 + 4\,k^2 - \sqrt{(a^4 - 24\,a^2\,k^2 + 16\,k^4)}\right\}$$

In n^0. 144 de beide rechthoekszijden $= mx$ en nx, en de inhoud $= k^2$ gesteld zijnde, vindt men $x = \sqrt{\frac{2\,k^2}{mn}}$; en voor de schuine zijde $\sqrt{\frac{2\,k^2}{mn}(m^2 + n^2)}$.

In n^0. 145 de schuine zijde $= a$, het eene stuk daarvan $= x$, het andere dus $a - x$, en de loodlijn $= b$ gesteld zijnde, is $x = \frac{1}{2}\,a \pm \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 - 4\,b^2)}$, $a - x = \frac{1}{2}\,a \mp \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 - 4\,b^2)}$, de eene rechthsz. $= \frac{1}{2}\sqrt{\{2\,a^2 \pm 2\,a\sqrt{(a^2 - 4\,b^2)}\}}$, de andere $= \frac{1}{2}\sqrt{\{2\,a^2 \mp 2\,a\sqrt{(a^2 - 4\,b^2)}\}}$.

In n^0. 146 de loodlijn $= a$, de rechthoekszijden $= x$ en y en derzelver som $= b$ gesteld zijnde, vindt men eerst $x\,y = -a^2 \pm a\sqrt{(a^2 + b^2)}$, daarna $x = \frac{1}{2}\,[b + \sqrt{\{4\,a^2 + b^2 \mp 4\,a\sqrt{(a^2 + b^2)}\}}]$, en $y = \frac{1}{2}\,[b - \sqrt{\{4\,a^2 + b^2 \mp 4\,a\sqrt{(a^2 + b^2)}\}}]$.

In n^0. 147 de schuine zijde $= a$, en de rechthoekszijden $= a - x$ en $a - 2\,x$ gesteld zijnde, wordt $x = a$ of $= \frac{1}{5}\,a$ gevonden; waaruit verder volgt, dat (met verwerping van de eerste waarde van x, welke eene der rechthoekszijden $= 0$ zou maken) $a - x = \frac{4}{5}\,a$, en $a - 2\,x = \frac{3}{5}\,a$ zal zijn.

In n^0. 148 de sch. zijde $= a$, en de rechthoekszijden $= \frac{a}{x}$ en $\frac{a}{x^2}$ gesteld zijnde, zal $x = \frac{1}{2}\sqrt{(2 + 2\sqrt{5})}$ zijn; de eene rechthoekszijde $= \frac{2\,a}{\sqrt{(2 + 2\sqrt{5})}}$, de andere $= \frac{2\,a}{1 + \sqrt{5}}$.

In n^0. 149 de basis $= n\,x$, de opst. zijde $= m\,x$, en de inhoud $= k^2$ gesteld zijnde, vindt men $x^2 = \frac{4\,k^2}{n\sqrt{(4\,m^2 - n^2)}}$.

N^0. 150 is niet vatbaar voor algemeene beschouwing.

In n^0. 151 het getal a^2 in plaats van 210 gesteld zijnde, vindt men $x = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(4\,a^2 + 1)}$.

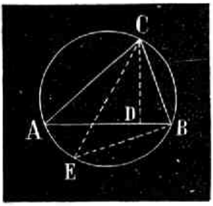
In n^0. 152 de beide opst. zijden $= x$ en y, de loodlijn $= z$, de basis $= a$, en de inhoud $= k^2$ gesteld zijnde, vindt men

$$x\,y = \frac{a^8 - 2\,a^6\,b^2 + a^4\,b^4 + 8\,a^2\,k^2\,(a^2 + b^2) - 48\,k^8}{4\,a^4\,(b^2 - a^2)},$$

en daar $x + y = b$ gegeven is, lost men x en y door de gewone kunstgreep op.

N⁰. 153 is niet vatbaar voor algemeene beschouwing.

In n⁰. 154 zij $CD = b$, $AC = x$, dan is, omdat $AC + BC = a$ wordt gesteld, $BC = a - x$. Nu trekke men de middellijn CE, welke wij $= c$ stellen, en de koorde BE, dan zijn de driehoeken ACD en BCE gelijkvormig, omdat hoek ADC = hoek CBE = R, en bovendien hoek BAC = hoek BEC is. Wij hebben dus de evenredigheid $AC : CE = CD : BC$, of $x : c = b : a - x$, waaruit wij vinden $x = \frac{1}{2} a \pm \frac{1}{2} \sqrt{(a^2 - 4bc)}$; en $a - x = \frac{1}{2} a \mp \frac{1}{2} \sqrt{(a^2 - 4bc)}$.



In n⁰. 155 stelle men de basis $= a$, de loodlijn, daarop vallende, $= x$, en de beide andere zijden resp. $= x + b$ en $c - x - b$, dan verkrijgt men uit de vergel. $\sqrt{\{(c - x - b)^2 - x^2\}} + \sqrt{\{(x + b)^2 - x^2\}} = a$, of eenvoudiger $\sqrt{(c^2 - 2cx - 2bc + 2bx + b^2)} + \sqrt{(2bx + b^2)} = a$, deze tweede machtsvergelijking $x^2 + \frac{a^2 c + 2bc^2 - c^3 - 2a^2 b}{c^2} x = -\frac{(a^2 + 2bc - c^2)^2}{4c^2}$; welker oplossing wel eenigzins omslachtig, doch niet moeielijk is.

In n⁰. 156 zij de basis $= a$, de daarop vallende loodlijn $= b$, en de opstaande zijden $= mx$ en nx, zoo trekt men uit de vergelijking:

$$\sqrt{(m^2 x^2 - b^2)} + \sqrt{(n^2 x^2 - b^2)} = a$$

de vierkantsvergelijking:

$$x^4 - \frac{2a^2 (m^2 + n^2)}{m^2 n^2} x^2 = \frac{a^2 (4b^2 - a^2)}{m^2 - n^2};$$ waaruit dan verder x enz. berekend wordt.

158. Stel de zijden des rechthoekigen driehoeks $= x$, y en $x + \frac{p}{q} y$; deze laatste waarde voor de schuine zijde, zoo zal $(x + \frac{p}{q} y)^2 = x^2 + y^2$ moeten zijn. Men vindt daaruit $y = \frac{2pq}{q^2 - p^2} x$, en dus $x + \frac{p}{q} y = \frac{q^2 + p^2}{q^2 - p^2} x$. Wenscht men nu geheele getallen, dan neme men $x = q^2 - p^2$; men zal dan voor de eene rechthoekszijde hebben $q^2 - p^2$, voor de tweede y, $2pq$ en voor de schuine zijde $q^2 + p^2$. Men neme nu willekeurige geheele getallen voor p en q, mits altijd $p < q$; zoo verkrijgt men het gevraagde. Stel b. v.

$q = 2$ en $p = 1$, zoo is $q^2 - p^2 = 3$; $2pq = 4$; $q^2 + p^2 = 5$.
$q = 3$ en $p = 1$, zoo is $q^2 - p^2 = 8$; $2pq = 6$; $q^2 + p^2 = 10$.
$q = 3$ en $p = 2$, zoo is $q^2 - p^2 = 5$; $2pq = 12$; $q^2 + p^2 = 13$.
$q = 5$ en $p = 2$, zoo is $q^2 - p^2 = 21$; $2pq = 20$; $q^2 + p^2 = 29$.
en zoo voorts.

159. In dit bijzondere geval doe men best met de rechthoekszijde te kiezen, welker getallenwaarde door $2pq$ wordt uitgedrukt, en die, gevoegd bij de schuine zijde, welke wij $= q^2 + p^2$ gevonden hebben, te zamen opleveren $q^2 + p^2 + 2pq = 81$. Uit de beide leden den vierkantswortel trekkende, vinden wij $q + p = 9$. Ons vraagstuk laat alzoo vier antwoorden toe, omdat q altijd grooter dan p moet gesteld worden, namelijk:

$q = 8$, dan is $p = 1$, men vindt $q^2 + p^2 = 65$; $2pq = 16$; $q^2 - p^2 = 63$.
$q = 7$, „ $p = 2$, „ $q^2 + p^2 = 53$; $2pq = 28$; $q^2 - p^2 = 45$.
$q = 6$, „ $p = 3$, „ $q^2 + p^2 = 45$; $2pq = 36$; $q^2 - p^2 = 27$.
en $q = 5$, „ $p = 4$, „ $q^2 + p^2 = 41$; $2pq = 40$; $q^2 - p^2 = 9$.

160. Men kieze de zijde, welker waarde door $q^2 - p^2$ is uitgedrukt, en stelle die gelijk 7. De stelkunstige vorm is splitsbaar in twee factoren $q + p$ en $q - p$. De getallenwaarde is mede splitsbaar, doch in geene andere geheele of ronde factoren, dan 7 en 1. Men heeft dus $q + p = 7$ en $q - p = 1$. Beide deze vergelijkingen tot de tweede macht verheven, van elkander afgetrokken, en door 2 gedeeld, verkrijgt men $2pq = 24$. De tweede macht der eerste vergelijking, verminderd met deze laatste vergelijking, laat over: $q^2 + p^2 = 25$. En zoo zijn dan de zijden in ronde getallen bekend.

161. Men stelle de zijden resp. $= x$, $x + 19.2$ en $28,8 - 2x$, zoo zal uit de vergelijking $x^2 + (x + 19,2)^2 = (28,8 - 2x)^2$ volgen $x = 38,4 \pm 14,4 \sqrt{6}$; $x + 19,2 = 57,6 \pm 14,4 \sqrt{6}$ en $28,8 - 2x = -48 \mp 28,8 \sqrt{6}$. Men gebruike alleen de onderste teekens.

162. Stel de derde zijde $= x$, en de daarop vallende loodlijn $= y$, dan is $\frac{1}{2} xy = 84$ en $\sqrt{(13^2 - y^2)} = x - \sqrt{(14^2 - y^2)}$, welke laatste vergelijking door transformatie wordt $4x^2 (14^2 - y^2) = x^4 + 54 x^2 + 729$.

Maar $4x^2 y^2 = 112869$ kan hierin worden gesubstitueerd, en dan herleidt zich de verg. tot den vorm $x^4 - 730 x^2 = -113625$, waaruit x berekend wordt $= \pm 15$ of $\pm \sqrt{505}$. Van deze waarden is $x = 15$ de meest geschikte.

163. Stelt men de zijden des driehoeks resp. $= a - x$, a en $a + x$, dan is de halve som der zijden $= 1\frac{1}{2} a$; en de inhoud des driehoeks $= \sqrt{1\frac{1}{2} a \times \frac{1}{2} a \times (\frac{1}{2} a - x) \times (\frac{1}{2} a + x)} = \sqrt{\frac{3}{4} a^2 (\frac{1}{4} a^2 - x^2)}$.

Maar a is bekend, want $3a$, de som der zijden is gelijk aan 1260 meters; $a = 420$. En de inhoud bedraagt 75600 □ meters.

Wij hebben dus $132300\ (44100 - x^2) = 5715360000$

of $44100 - x^2 = 43200.$

dus $x^2 = 900$ en $x = 30$ meters;

Zoodat de zijden des driehoeks zijn 390, 420 en 450 meters.

164. Stel het grootste stuk der schuine zijde $= x$, dan is de loodlijn, die uit den rechten hoek daarop is nedergelaten $= \sqrt{a\,x}$, en de inhoud van den grootsten der beide driehoeken $= \frac{1}{2}x\sqrt{a\,x} = b^2$. Hieruit volgt $x = \frac{b}{a}\sqrt[3]{4\,a^2\,b}$, waaruit dan al het overige wordt berekend.

165. Men substitueere in de formule $r = \frac{\mathrm{I}}{s}$, $\mathrm{I} = b^2$ en $s = \frac{1}{2}\,a$, zoo verkrijgt men $r = \frac{2\,b^2}{a}$ en $2\,r = \frac{4\,b^2}{a}$ = de gevraagde middellijn.

166. Stel de zijden des driehoeks $= x$, y en z; $\frac{1}{2}(x + y + z) = s$, en den inhoud des driehoeks $= \mathrm{I}$, dan is $ax = 2\,\mathrm{I}$, dus $x = \frac{2\,\mathrm{I}}{a}$

$by = 2\,\mathrm{I}$, „ $y = \frac{2\,\mathrm{I}}{b}$

$cz = 2\,\mathrm{I}$, „ $z = \frac{2\,\mathrm{I}}{c}$

en $x + y + z = 2\,s = \frac{2\,a\,b + 2\,a\,c + 2\,b\,c}{a\,b\,c} \times \mathrm{I}$; dus

$$s = \frac{a\,b + a\,c + b\,c}{a\,b\,c} \times \mathrm{I}.$$

$$s - x = \frac{a\,b + a\,c - b\,c}{a\,b\,c} \times \mathrm{I}.$$

$$s - y = \frac{a\,b - a\,c + b\,c}{a\,b\,c} \times \mathrm{I}.$$

en $s - z = \frac{-\,a\,b + a\,c + b\,c}{a\,b\,c} \times \mathrm{I}.$

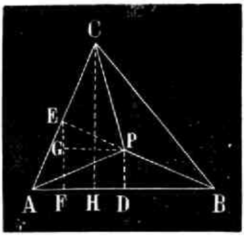
Vermenigvuldigt men de overeenkomstige leden dezer vergelijkingen met elkander, zoo verkrijgt men:

$$\mathrm{I}^2 = \frac{(ab + ac + bc)\ (ab + ac - bc)\ (ab - ac + bc)\ (-ab + ac + bc)}{a^4\ b^4\ c^4} \times \mathrm{I}^4.$$

waaruit volgt:

$$\mathrm{I} = \frac{a^2\ b^2\ c^2}{\sqrt{(ab + ac + bc)\ (ab + ac - bc)\ ab - ac + bc)\ (-ab + ac + bc)}}.$$

167. De drie zijden van den driehoek ABP zijn gegeven $\mathrm{AB} = a$, $\mathrm{AP} = c$, $\mathrm{BP} = d$; ook de drie zijden van den driehoek APC; $\mathrm{AP} = c$, $\mathrm{CP} = e$, $\mathrm{AC} = b$; derhalve zijn ook de loodlijnen PD en PE bekend, benevens de stukken waarin zij de zijden AB en AC verdeelen. Men stelle gemakshalve $\mathrm{AD} = f$, $\mathrm{AE} = g$, $\mathrm{PD} = h$, $\mathrm{PE} = i$. Laat EF loodrecht op AB neder, en PG loodrecht op EF. Stel nu



$GP = x$ en $EG = y$. Dan heeft men wegens de gelijkvormigheid der driehoeken EGP en AEF, $PE : AE = PG : EF$ en $PE^2 = PG^2 + EG^2$, of, zoo men er de waarden voor stelt $i : g = x : h + y$ en $i^2 = x^2 + y^2$.

Uit deze twee vergelijkingen wordt x of GP bekend. Maar driehoek EGP is ook gelijkvormig met driehoek AHC. Wij hebben daarom $EP : AC = GP : CH$; waarvan nu alleen de laatste term onbekend was, en gevonden wordt. Ook vindt men AH en dus BH. En door de vergelijking $CH^2 + BH^2 = BC^2$ berekent men eindelijk de derde zijde des driehoeks.

168. Stel de rechthoekszijden $= x$ en y meters, dan is

$$\tfrac{1}{2}\, x y = a^2 \quad \text{en} \quad x^2 + y^2 = b^2.$$

Men vindt $x = \tfrac{1}{2} \left\{ \sqrt{(b^2 + 4\,a^2)} + \sqrt{(b^2 - 4\,a^2)} \right\}$ en $y = \tfrac{1}{2} \left\{ \sqrt{(b^2 + 4\,a^2)} - \sqrt{(b^2 - 4\,a^2)} \right\}$.

169. Het product der beide pijlen is gelijk aan de tweede macht van de halve koorde, waartoe zij behooren. Men vindt alzoo de tweede pijl $= \frac{a^2}{4\,b}$. Hierbij de eerste pijl opgeteld, verkrijgt men voor de middellijn $\frac{4\,b^2 + a^2}{4\,b}$. Deze waarde met π vermenigvuldigd, geeft den omtrek.

170. Trek nog de koorde welke de beide cirkels gemeen hebben. Laat verder den omtrek des grootsten cirkels in reden als p en q, en die des kleinsten cirkels in reden als m en n verdeeld zijn, zoo zijn de beide bogen, die door de gemeenschappelijke koorde onderspannen worden resp. $= \frac{q}{p+q} \times 360^\circ$ en $\frac{n}{m+n} \times 360^\circ$. Derzelver supplementen zijn resp. $= \frac{p-q}{p+q} \times 180^\circ$ en $\frac{m-n}{m+n} \times 180^\circ$. En dit zijn de bogen, door welker helften de hoeken gemeten worden, welke de middellijnen met de gemeenschappelijke koorden maken. De geheele hoek zal dus gelijk zijn aan $\left(\frac{p-q}{p+q} + \frac{m-n}{m+n}\right) \times 90^\circ$.

171. Trek in den kleinen cirkel eene straal naar het raakpunt, en vereenig het uiteinde der koorde met dat van de middellijn des grooten cirkels, zoo bekomt men twee gelijkvormige rechthoekige driehoeken. Laatstgenoemde koorde wordt, als men de straal des kleinen cirkels $= r$ stelt, bevonden $= \frac{a+b}{a} \times r$; stel gemakshalve $= c\,r$. Noemt

men nu R de straal des grooten cirkels, zoo heeft men de vergelijkingen: $a^2 + r^2 = (2R-r)^2$ en $c^2 r^2 + a^2 c^2 = 4R^2$.

Deze vergelijkingen ten opzichte van R opgelost zijnde, geven eene eindvergelijking $r + \sqrt{(a^2 + r^2)} = \sqrt{(c^2 r^2 + a^2 c^2)}$, waaruit r bekend wordt. Men vindt R door substitutie.

172. Trekt men van het punt, waar de opstaande zijde den cirkelomtrek snijdt, eene koorde naar het overstaande hoekpunt des driehoeks, zoo hebben wij de stelling op den scherphoekigen driehoek slechts te gebruiken, om de stukken te berekenen, waarin de loodlijn de zijde verdeelt, waarop zij is nedergelaten.

173. Als de zijde des gelijkzijdigen driehoeks $= m$ is, is zijn inhoud gelijk $\frac{1}{4} m^2 \sqrt{3}$. Nu zijn gelijkzijdige driehoeken gelijkvormige figuren; dus staan hunne inhouden tot elkander als de vierkanten der gelijkstandige zijden. Men heeft dus

$$\tfrac{1}{4} m^2 \sqrt{3} : a^2 = m^2 : x^2$$

waaruit gevonden wordt $x = \frac{2}{3} a \sqrt[4]{27}$,

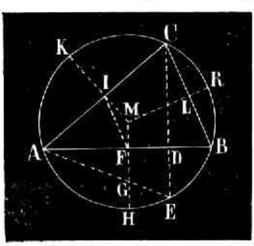
174. Stel van beide figuren den omtrek $= 12\,a$, dan is de zijde des gelijkz. driehoeks $= 4\,a$, en die des vierkants $= 3\,a$. Men vindt voor hunne inhouden $4a^2 \sqrt{3}$ en $9a^2$, en voor de verhouding hunner inhouden $4 \sqrt{3}$ en 9.

175. In vraagst. 173 zagen wij, dat de zijde eens gelijkzijdigen driehoeks, welks inhoud $= a^2$ is, gelijk $\frac{2}{3} a \sqrt[4]{27}$ bevonden wordt. Zijn omtrek bedraagt alzoo $2a \sqrt[4]{27}$. Is de inhoud van het vierkant $= a^2$, zoo is zijn omtrek $= 4\,a$; de omtrekken der figuren staan dus tot elkander in reden als $2 \sqrt[4]{27} : 4$, of als $\sqrt[4]{27} : 2$.

176. Verleng de pijlen, tot waar ze elkander in het middelpunt des cirkels ontmoeten; dan zullen die verlengden tevens de helften bedragen der rechthoekszijden. Stelt men dus den straal $= r$, zoo worden de rechthoekszijden uitgedrukt door $2\,(r-a)$ en $2\,(r-b)$, terwijl de schuine zijde, middellijn zijnde, $= 2\,r$ is. Uit de vergelijking

$2^2\,(r-a)^2 + 2^2\,(r-b)^2 = 4\,r^2$, of eenvoudiger $(r-a)^2 + (r-b)^2 = r^2$, vindt men $r = a + b \pm \sqrt{2ab}$, waaruit voor de rechthoekszijden volgt $2\,(b \pm \sqrt{2ab})$ en $2\,(a \pm \sqrt{2ab})$ en voor de schuine zijde $2\,(a + b \pm \sqrt{2ab})$.

177. Laat FH $= a$, LR $= b$, IK $= c$ gegeven zijn. Stel AB $= p$, BC $= q$, AC $= t$, en AM $= r$; dan is MF $= r-a$ en MI $= r-c$. Laat CD loodrecht op AB neder, en verleng haar tot in E; trek AE, die MH in G snijdt, dan is drieh. AMG gelijkvormig met den geheelen driehoek ABC; want hoek ACB $= \frac{1}{2}$ boog AB $=$ hoek AMG; hoek AGM $=$ hoek AEC $=$ hoek ABC; dus AM : MG $=$ AC : BC. Maar ook de driehoeken



AMI en AFG zijn gelijkvormig; want hoek AIM = hoek AFG = R; en hoek AGF = hoek AED = $\frac{1}{2}$ boog AC = hoek AMI. Derhalve AI : AF = MI : FG of $\frac{1}{2}\,t : \frac{1}{2}\,p = r-c$: FG, waaruit FG = $\frac{p}{t}(r-c)$; hierbij MF = $r-a$, komt MG = $r-a+\frac{p}{t}(r-c)$. Deze waarde gesubstitueerd in de eerste evenredigheid, verkrijgen wij $r : r-a+\frac{p}{t}(r-c) = t : q$; waaruit $r = \frac{at+cp}{p-q+t}$.

Men komt nog gemakkelijker tot deze vergelijking door IF te trekken, welke = $\frac{1}{2}$ BC zal zijn. Uit vraagst. 28 der 2e Afd. weten wij, dat AM $\times$ IF = AI $\times$ MF + AF $\times$ MI is, of $\frac{1}{2}\,q\,r = \frac{1}{2}\,t\,(r-a) + \frac{1}{2}\,p\,(r-c)$, waaruit $r = \frac{at+cp}{p-q+t}$.

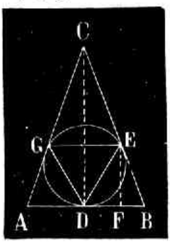
Nu weet men dat $p = 2\sqrt{a\,(2r-a)}$; $q = 2\sqrt{b\,(2r-b)}$ en $t = 2\sqrt{c\,(2r-c)}$ is. Als men r hierin substitueert verkrijgt men drie vergelijkingen, welke de wijze aangeven, waarop de zijden des driehoeks van de pijlen afhangen. Men geraakt evenwel tot hoogere machtsvergelijkingen.

178. Daar de tophoek des gelijkbeenigen driehoeks 36° is, stelt de figuur voor den middelpuntsdriehoek eens regelmatigen tienhoeks. Wij kennen de verhouding tusschen de opst. zijde en de basis, en berekenen alzoo lichtelijk het apothema, dat met de halve basis vermenigvuldigd, den inhoud des driehoeks geeft. Men vindt voor den inhoud $\frac{1}{4}\,a^2\sqrt{(5+2\sqrt{5})}\ \square$ meters.

179. Noem AB de basis; CD de hoogte des driehoeks, dan heeft men $(AD+CD)^2 = AD^2 + CD^2 + 2\,AD \times CD$. Maar $AD^2 + CD^2 = AC^2$, en $2\,AD = AB$; derhalve $(AD+CD)^2 = AC^2 + AB \times CD$. Men ziet hieruit, dat er in de opgave eene fout is ingeslopen. Men leze *vermeerderd* in plaats van *verminderd*.

180. Handelt men even als in vraagst. 105, zoo vindt men voor de basis AB, $\frac{2a}{b}\sqrt{ab}$; en voor de opst. zijde AC, $\frac{a\,(a+b)}{b\,(a-b)}\sqrt{ab}$.

181. Zij gegeven AB = a en CD = b; dan is BC = $\frac{1}{2}\sqrt{(4b^2+a^2)}$,



en CE = BC — BE = BC — BD = $-\frac{1}{2}\,a + \frac{1}{2}\sqrt{(4b^2+a^2)}$. Trek nu EF loodr. op AB; dan is CB : EB = CD : EF; hieruit vindt men na substitutie EF = $\frac{ab}{\sqrt{(4b^2+a^2)}}$. Ook is CB : CE = AB : EG; waaruit men vindt EG = $\frac{a\,(-a+\sqrt{(4b^2+a^2)})}{\sqrt{(4b^2+a^2)}}$. Het halve product der gevonden waarden geeft Inh. drieh. DEG = $\frac{a^2\,b\,(-a+\sqrt{(4b^2+a^2)})}{2\,(4b^2+a^2)}$.

182. Men vindt lichtelijk voor de hoogte des driehoeks $b + \frac{1}{2}\sqrt{(4b^2 - a^2)}$, en voor zijn' inhoud $\frac{1}{4} a (2b + \sqrt{(4b^2 - a^2)})$. Daar nu de inhoud des cirkels $= \pi b^2$ is, zal hunne verhouding zijn $a (2b + \sqrt{(4b^2 - a^2)}) : 4 \pi b^2$.

183. De drie loodlijnen uit het middelpunt des omgeschreven cirkels op de zijden nedergelaten, zijn resp. gelijk aan $\frac{1}{2}\sqrt{(4r^2 - a^2)}$, $\frac{1}{2}\sqrt{(4r^2 - b^2)}$ en $\frac{1}{2}\sqrt{(4r^2 - c^2)}$. Hierin substitueere men $r = \frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$. De drie andere lijnen, welke gevraagd zijn, worden respectivelijk bevonden gelijk te zijn aan $\sqrt{\left\{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s} + (s-c)^2\right\}}$, $\sqrt{\left\{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s} + (s-b)^2\right\}}$ en $\sqrt{\left\{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s} + (s-a)^2\right\}}$. — (Zie vraagst. 106),

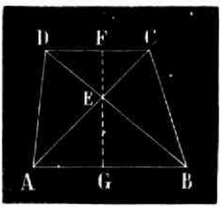
Beproef, of de gevonden waarden nog te vereenvoudigen zijn.

184. Volgens vraagst. 177 leidt deze opgave tot eene hoogere machtsvergelijking.

185. De vereenvoudigde vormen der drie laatste waarden in vraagst. 183 zijn $\frac{1}{2}\sqrt{ab} \times \frac{s-c}{s}$, $\frac{1}{2}\sqrt{ac} \times \frac{s-b}{s}$; en $\frac{1}{2}\sqrt{bc} \times \frac{s-a}{s}$,

Uit deze waarden voor de lijnen, uit het middelpunt des ingeschr. cirkels naar de hoekpunten getrokken, lost men de zijden op. Doch men komt alweder tot eene hoogere machtsvergelijking.

186. Zij $CD = a$, $AB = b$, $AC = c$, $BD = d$. Uit de gelijkvormigheid der driehoeken CDE en ABE vindt men

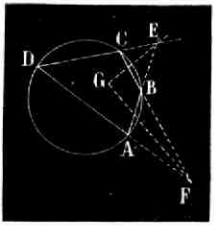


$CE = \frac{ac}{a+b}$, $AE = \frac{bc}{a+b}$, $DE = \frac{ad}{a+b}$, $BE = \frac{bd}{a+b}$.

Stel deze vier breuken gemakshalve $= e, f, g, h$. Men vindt voor de hoogte EF, $\frac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-e)(s-g)}$, zijnde $s = \frac{1}{2}(a + e + g)$ en voor de hoogte EG, $\frac{2}{b}\sqrt{s'(s'-b)(s'-f)(s'-h)}$, zijnde $s' = \frac{1}{2}(b + f + h)$.

Verder is de inhoud van het trap. = de som der evenwijdige zijden vermenigvuldigd met de halve hoogte FG.

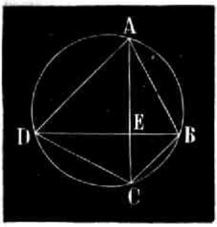
187. Deel de hoeken E en F middendoor, zoo weet men uit Vr. 55 van de 2e Afdeeling, dat de deellijnen GE en GF elkander in G rechthoekig snijden. Verder is het uit Vraagst. 33, bladz. 5, bekend,



dat hoek EBF, of wat hetzelfde is, hoek ABC gelijk is aan de som der hoeken BEG, EGF en BFG. Men kent dus een der hoeken des vierhoeks. Het supplement van dien hoek, gevoegd bij den hoek F, geeft den hoek BAD. De twee overige hoeken des vierhoeks zijn respectivelijk de supplementen der reeds gevondene hoeken.

188. Volgens § 210 van den wiskundigen leercursus van Badon Ghyben is de diagonaal AC van den bedoelden vierh. $= \sqrt{\dfrac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}}$.
Men kent alzoo de drie zijden van beide de driehoeken, waarin deze diagonaal den vierhoek verdeelt; en berekent nu den straal des omgeschreven cirkels uit de zijden.

189. Volgens Vraagst. 43 der 2e Afd. is



$$AE^2 + BE^2 + CE^2 + DE^2 = 4r^2, \text{ of}$$
$$2\,AE^2 + 2\,BE^2 = 4r^2,$$
zoodat $AE^2 + BE^2 = 2r^2$ is.
Stel nu $AE = \frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})\,x$, dan is
$AE^2 = \frac{1}{4}(6-2\sqrt{5}\,x^2$
dan is $BE = \frac{1}{2}(3-\sqrt{5})\,x$ en $BE^2 = \frac{1}{4}(14-6\sqrt{5})\,x^2$.
derhalve hun som $\frac{1}{4}(20-8\sqrt{5})\,x^2 = 2r^2$.
men vindt $x^2 = \dfrac{2r^2(5+2\sqrt{5})}{5}$

dus $AE^2 = \dfrac{r^2(5+\sqrt{5})}{5}$, $AD^2 = 2\,AE^2 = \dfrac{10\,r^2(5+\sqrt{5})}{25}$ en
$AD = \frac{1}{5}r\sqrt{10(5+\sqrt{5})}$, $BE^2 = \dfrac{r^2(5-\sqrt{5})}{5}$, $BC^2 = 2\,BE =$
$\dfrac{10\,r^2(5-\sqrt{5})}{25}$ en $BD = \frac{1}{5}r\sqrt{10(5-\sqrt{5})}$ en $AB^2 = AE^2 + BE^2 = 2r^2$,
waaruit $AB = CD = r\sqrt{2}$.

190. Als de zijde des vijfhoeks $= a$ gegeven is, vindt men voor den straal des omgeschr. cirkels $\frac{1}{10}a\sqrt{10(5+\sqrt{5})}$,
voor het apothema $\frac{1}{10}a\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}$,
voor de diagonaal $\frac{1}{2}a(1+\sqrt{5})$.
Stelt men den straal $= a$, zoo is

$$\text{de zijde} = \frac{10\,a}{\sqrt{10(5+\sqrt{5})}}$$

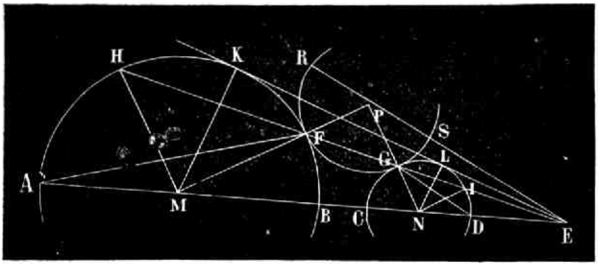
$$\text{het apothema} = \frac{a\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}}{\sqrt{10(5+\sqrt{5})}}$$

$$\text{en de diagonaal} = \frac{5\,a(1+\sqrt{5})}{\sqrt{10(5+\sqrt{5})}}, \text{ enz.}$$

191. Stel de zijde $= a$, dan is (zie het vorige vraagstuk) het apothema $= \frac{1}{10} a \sqrt{5 (5 + 2\sqrt{5})}$; de inhoud van den middelpuntsdriehoek $= \frac{1}{20} a^2 \sqrt{5 (5 + 2\sqrt{5})}$, en de inhoud des vijfhoeks $= \frac{1}{4} a^2 \sqrt{5 (5 + 2\sqrt{5})}$.

192. Stelt men den straal $= r$, zoo bevat de omtrek $2 \pi r$ meters, en de inhoud πr^2 □ meters. Nu moet $2 \pi r = \pi r^2$ zijn. Hieruit volgt $r = 2$ meters.

193. Dit vraagstuk kan herleid worden tot het volgende:



„Een cirkel te beschrijven, die twee in grootte en stelling gegeven cirkels raakt, en bovendien door een gegeven punt gaat."

Stel dat M en N de middelpunten, MA en CN de stralen der gegeven cirkels, en R het gegeven punt zij. Nemen wij aan, dat het vraagstuk opgelost zij, en de cirkel uit het punt P met de straal PF beschreven, aan het gevraagde beantwoorde. Trek dan door de raakpunten F en G de lijn HE, die de lijn AE, welke de middelpunten der gegeven cirkels vereenigt, in E snijdt. Trek verder MH, MP, PN en NI, dan zijn de hoeken H, F, G en I gelijk, dus MH evenwijdig aan GN en MF evenwijdig aan NI; daarom hoek BMF = hoek DNI; en boog BF = boog DI. Trekt men nu nog AF en DG, zoo is hoek FAB = hoek DGE. Bovendien hoek E = hoek E, dus drieh. AFE ∾ drieh. DGE, en AE : GE = FE : DE, of AE × DE = FE × GE = ER × ES.

Het punt S is dus bepaald, zoodra het punt E bepaald is.

Trek uit E de raaklijn EL, en verleng die; trek verder NL en MK evenwijdig met NL, dan is ME : NE = MK : NL; maar omdat NI evenwijdig met MF is, zal ME : NE = MF : NI zijn; waaruit volgt: MK : NL = MF : NI. Daar in deze evenredigheid de volgende termen gelijk zijn, zullen ook de voorgaanden gelijk wezen; dus MK = MF. Dewijl nu bovendien hoek MKL = R is, zal het verlengde der raaklijn EL ook door het raakpunt K gaan, en wederkeerig zal de raaklijn der beide cirkels de lijn MN in E snijden; waardoor dit punt nu bepaald is.

Er blijft ons dus slechts over een' cirkel te beschrijven, die door de punten R en S gaande, een' der gegeven cirkels raakt. (Zie Vraagst. 71, Afd. II.)

Terugkomende op het vraagstuk, zoo als het daar voor ons ligt, kan men alzoo een' cirkel beschrijven, welke de twee cirkels raakt, die uit de middelpunten der grootste cirkels zijn beschreven met stralen, die gelijk zijn aan de verschillen, welke men verkrijgt, wanneer men hunne stralen met dien des kleinsten cirkels vermindert, en door het middelpunt des kleinsten gaat. De gevraagde cirkel zal concentriek zijn met den beschrevenen, doch zijn straal zal zooveel langer moeten genomen worden, als de lengte van den straal des kleinsten cirkels bedraagt.

194. Zij ABC de geg. rechth. driehoek; D, E en F de middelpunten der bedoelde vijfhoeken, DK, EL en FG de apothemata, die de zijden des driehoeks rechthoekig middendoor deelen, en waarvan de beide eersten, verlengd zijnde zich in het midden G der hypothenusa ontmoeten; DG en EG zijn dus beide bekend, gelijk ook DE als schuine zijde van den rechth. drieh. DEG. Nu verlenge men DG en EG en late uit F de loodlijnen FH en FI daarop neder. De daardoor ontstane rechth. driehoeken FGH en FGI zijn beide gelijkvormig met driehoek ABC, daar hunne zijden loodr. op elkander staan. Dewijl nu FG bekend is, berekent men lichtelijk GH en GI; waardoor wederom DF als zijde van den stomphoekigen driehoek DFG, en EF als zijde van drieh. EFG berekend worden. Zoo kent men dan de zijden des driehoeks DEF, en bepaalt nu de middellijn des omgeschreven cirkels.

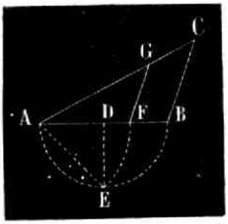
195. Trek een' straal naar het hoekpunt van het vierkant; men verkrijgt dan een' rechthoekigen driehoek, welks rechthoekszijden $= x$ en $\frac{1}{2}x$ gesteld worden. Uit de vergelijking $x^2 + \frac{1}{4}x^2 = 100$ bekomt men $x^2 = 80 \square$ meters.

196. Uit de evenredigheid (zie 't vorige vraagstuk) $80 : 10000 = 20^2 : d^2$, vindt men $d = 100\sqrt{5}$.

197. Wordt de straal $= 1$ gesteld, zoo is de zijde des omgeschreven vierkants $= 2$, en die des ingeschreven vierkants $= \sqrt{2}$; derzelver verschil alzoo $= 2 - \sqrt{2}$. Men heeft dus $2 - \sqrt{2} : 16(-1 + \sqrt{2}) = 1 : r$; waaruit $r = 8\sqrt{2}$.

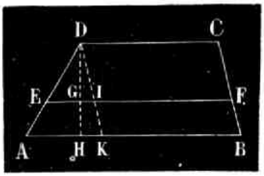
198. Zie Vraagstuk 104 dezer Afdeeling.

199. Zal de afgesneden driehoek juist $\frac{1}{4}$ van den geheelen driehoek bevatten, en kan hij daaraan gelijkvormig zijn, zoo zullen zijne zijden ieder in 't bijzonder de helft zijn van de zijden des gegeven driehoeks. En die gelijkvormigheid is hier mogelijk.

200. 

Stel $AB = 30$; zoo zal, nadat die zijde in D in de gegeven reden verdeeld zal zijn, $AD = 17\frac{1}{2}$, en $BD = 12\frac{1}{2}$ wezen.
Nu is $AE^2 = AF^2 = \sqrt{AB \times AD} = 5\sqrt{21}$, dus $BF = 30 - 5\sqrt{21}$.
Ook is $AB : AC = AF : AG$, of $30 : 40 = 5\sqrt{21} : AG$, waaruit $AG = 6\frac{2}{3}\sqrt{21}$ en $CG = 40 - 6\frac{2}{3}\sqrt{21}$.

201. Stel $GH = x$, dan is $DG = 23 - x$ en $DH : DG = AK : EI$; of

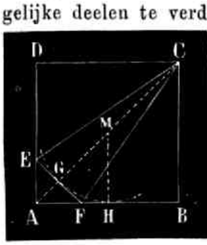


$23 : 23 - x = 34 : EI$; waaruit $EI = \frac{(23-x)34}{23}$; hierbij $IF = 36$, komt voor EF, $36 + \frac{(23-x)34}{34}$. De som van AB en EF is dus $= 106 + \frac{(23-x)34}{23}$; dit verm. met de halve hoogte $GH = \frac{1}{2}x$, geeft $53x + \frac{(23-x)17x}{23} = 560$. Hieruit vindt men $x = 8\frac{11}{51}$ en $EF = 57\frac{59}{69}$.

202. Bereken eerst de hoogte des trapeziums. Men vindt $38^m,89$. Voor zijn' inhoud zal men dan 3733,44 □ m. vinden, waarvan het derde deel 1244,48 □ m. bedraagt. Op de gegeven basis van 30 m. laat zich geen driehoek van dien inhoud construeeren, tenzij zijne hoogte veel grooter zij, dan die des trapeziums. De deellijn moet dus de bovenzijde snijden. Men stelle dat stuk $= x$; dan is $1244,48 = (30 = x)\ 19,445$, waaruit $x = 34$ m.

203. Den reeds gevonden inhoud van het trapezium in de gegeven reden verdeelende, vindt men voor het kleinste stuk 1493,376 □ m. Uit de vergel. $(11 + x)\ 19,445 = 1493,376$ vindt men de bovenzijde $x = 65^m,8$.

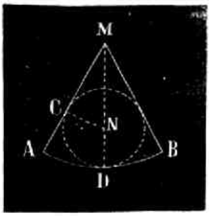
204. Men weet, dat, wanneer de straal des cirkels $= 1$ gesteld wordt, de zijde van den omg. regelm. driehoek $= 2\sqrt{3}$ is; en berekent lichtelijk, dat de loodlijn uit den top op de basis nedergelaten $= 3$ zal zijn. Men construeert dus dien cirkel, door die loodlijn in drie gelijke deelen te verdeelen, en een dier deelen tot straal te nemen.

205. 

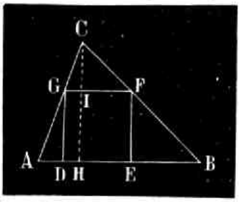
Laat CEF de verlangde driehoek zijn; men bewijst licht, dat zijne basis EF de diagonaal AC rechthoekig snijdt. Zij gegeven de zijde des vierkants $= a$, dan is $AC = a\sqrt{2}$. Stel $AG = x$, dan is $EF = 2x$ en $CG = -x + a\sqrt{2}$, en de inh. des drieh. $= x(-x + a\sqrt{2})$. Nu is $x(-x + a\sqrt{2}) = \frac{1}{4}a^2$, waaruit $x = -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a\sqrt{2}$.

Hieruit volgt deze constructie. Laat uit het middelpunt M des vierkants de loodlijn MH op AB neder, en beschrijf uit M met MH als straal een' cirkelboog, die de diagonaal AC in G snijdt. Trek door G, EF loodrecht op AC, en vereenig E en F met C.

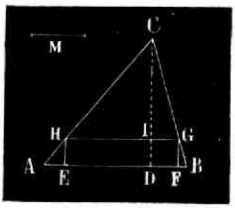
206. Zij MAB de gegeven sector. Deel hoek AMB middendoor, zoo zal zich het middelpunt des gevraagden cirkels in de lijn MD bevinden. Zij N het middelpunt; laat NC loodrecht op AM neder, en stel NC = ND = x. Omdat nu hoek CMN = 30° is, zal MN = 2 CN = $2x$, en MD = $3x$ zijn. Is MD dus = a, zoo zal ND = $\frac{1}{3}a$ zijn. Waarom is deze uitkomst dezelfde als in Vraagst. 204?



207. Zij DEFG het gevraagde vierkant. De driehoeken CGF en CAB zijn gelijkvormig; dus FG : AB = CI : CH, maar CI = CH—FG; onze evenredigheid verandert dus in FG : AB = CH—FG : CH. Men lost hieruit op $FG = \frac{AB \times CH}{AB + CH}$. FG is dus de vierde evenredige tot AB + CH, AB en CH.



208. Zij ABC de geg. driehoek, en M de zijde van het geg. vierkant. Laat rechth. EFGH aan de vraag voldoen, dan is

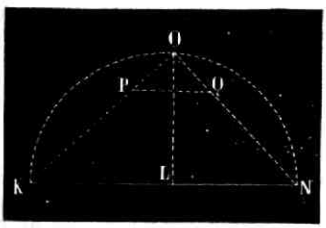


$$\begin{array}{r} EF : M = M : DI \\ \text{en } AB : EF = CD : CI \\ \hline \end{array} \text{ verm.}$$

$$\text{dus } AB \times EF : M \times EF = M \times CD : DI \times CI.$$

$$\text{of } AB : M = M \times CD : DI \times CI.$$

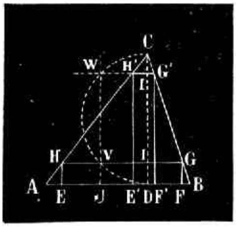
$$\text{en } DI \times CI = \frac{M^2 \times CD}{AB}.$$



Constructie. Beschrijf op KN = AB + CD als middellijn der halven cirkel KON; neem op KO van O af PO = M en trek PQ evenwijdig aan KN, dan is $OQ^2 = \frac{M^2 \times CD}{AB}$; want $OP^2 : OQ^2 = OK^2 : ON^2 = KL : LN = AB : CD$

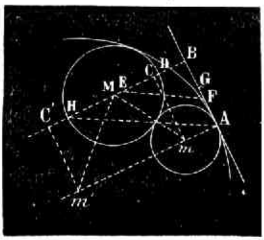
$$\text{dus } OQ^2 = OP^2 \times \frac{CD}{AB} = \frac{M^2 \times CD}{AB}.$$

Het komt er dus nu alleen op aan om de loodlijn CD zoodanig in I te deelen, dat $CI \times DI = OQ^2$ zij.



Beschrijf tot dat einde een' halven cirkel op CD; maak $DU = OQ$, en trek UW loodrecht op AB; de cirkelomtrek wordt dan in V en W gesneden. Laat VI en WI' loodrecht op CD neder, dan is $VI^2 = I'W^2 = DU^2 = OQ^2 = DI \times CI = DI' \times CI'$. De rechthoeken EFGH en $E'F'G'H'$ beantwoorden alzoo aan de vraag.

209. Zij M het middelpunt van den gegeven cirkel; AB de gegeven lijn, en A het raakpunt. Stel dat m het middelpunt zij van den begeerden cirkel. Laat MB loodrecht neder op AB, en verleng haar tot H. Trek Am, mC evenwijdig aan AB, en mM; dan is $BC = BD + CD$ en $DM = CM + CD$; dus $BC + DM = mM = BM + CD$ en $mM^2 = BM^2 + 2\,BM \times CD + CD^2$; maar $mM^2 = Cm^2 + CM^2 = AB^2 + (DM - CD)^2$; daarom



$BM^2 + 2\,BM \times CD + CD^2 = AB^2 + DM^2 - 2\,DM \times CD + CD^2$, of
$2\,CD\;(BM + DM) = AB^2 + DH^2 - BM^2 = AB^2 - (BM^2 - DM^2)$,

en korter $2\,CD \times BH = AB^2 - BH \times BD$; waaruit $2\,CD = \dfrac{AB^2}{BH} - BD$.

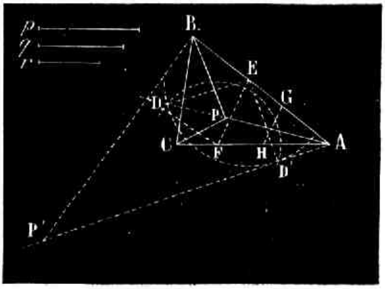
Constructie. Trek AH, en maak $BE = AB$; trek EF evenwijdig aan AH, dan is $BH : BE = AB : BF$ of $BH : AB = AB : BF$ en $BF = \dfrac{AB^2}{BH}$. Maakt men nu nog $BG = BD$; zoo zal $FG = \dfrac{AB^2}{BH} - BD = 2\,CD$ zijn. Het punt C, en daardoor het punt m is alzoo bepaald. Door eene dergelijke constructie, waarvan in de figuur eenige aanduiding is geschied, vindt men het middelpunt m' van den tweeden cirkel, die aan het gevraagde voldoet. En op eene andere wijze aldus: Stel dat m' het gezochte middelpunt zij.

Laat $m'C'$ loodrecht op BH neder, dan is $BC' = BD + C'D$ en $DM = -\,C'M + C'D$. Het verschil dezer vergelijkingen geeft $Mm' = BD + C'M$, zoodat
$m'M^2 = BD^2 + 2\,BD \times C'M + C'M^2 = C'M^2 + C'm'^2$ is. Hieruit vindt men $C'M = \dfrac{(AB + BD)\;(AB - BD)}{2\,BD}$. $C'M$ is dus de vierde evenredige tot $2\,BD$, $AB + BD$ en $AB - BD$.

210. Zij ABCD het geg. vierkant, en laat den gelijkz. driehoek CEF op de verlangde wijze daarin beschreven zijn.

Stel DE $= x$, dan zal AE $= a - x$ zijn, wanneer de zijde des vierkants $= a$ wordt aangenomen, en $CE^2 = a^2 + x^2$ zijn, terwijl $EF^2 = 2\ (a-x)^2$ zal wezen. Vermits nu CE en EF gelijk zijn, is $a^2 + x^2 = 2\ (a-x)^2$; waaruit men vindt $a - x = \frac{1}{2} a \sqrt{2}$. Deze laatste vorm is juist de waarde van de halve diagonaal des vierkants. Men deele dus AC in M middendoor, en beschrijve uit A als middelpunt met AM als straal een' cirkelboog, die AD en AB in E en F snijdt, zoo zal drieh. CEF de begeerde zijn.

211. Zij ABC de geg. driehoek, en p, q, r, de lijnen die de verhouding der gevraagde afstanden aanduiden.



Stel dat P het begeerde punt zij. Neem op AP het punt D naar willekeur; maak hoek ADE = hoek ABP en hoek ADF = hoek ACP, dan zijn gelijkvormig 1°. driehoek ADE en driehoek ABP; 2°. drieh. ADF en drieh. ACP.

en dan is AE : DE = AP : BP $= p : q$. (1)

AF : DF = AP : CP $= p : r$. (2)

Uit dezelfde driehoeken volgt nog: AB : AD = AP : AE

AC : AD = AP : AF

derh. AB : AC = AF : AE

hoek BAC = hoek EAF

dus drieh. ABC gelijkv. drieh. AEF.

en hoek AEF = hoek ACB; en hoek AFE = hoek ABC.

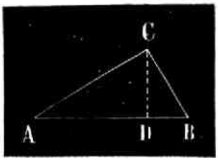
Stel nu, dat het punt D zoodanig aangenomen zij, dat AE $= p$ zij, dan wordt evenr. (1) p : DE $= p : q$; derhalve DE $= q$. Uit evenr. (2) $p : r$ = AF : DF volgt DF $= r \times$ AF : q. Neem dus AG $= r$, en trek GH evenwijdig aan EF, dan volgt uit de gelijkvormigheid der driehoeken AGH en AEF, AE : AG = AF : AH of $p : r$ = AF : AH en AH $= r \times$ AF : q = DF. Hieruit volgt nu deze constructie:

Maak AE $= p$, AG $= r$, hoek AEF = hoek ACB; trek GH evenw. aan EF. Beschrijf uit E met q, en uit F met AH als straal twee cirkels, die elkander in D en D′ snijden.

1°. voor het punt D. Trek de onbepaalde lijn AD, en maak hoek ABP = hoek ADE, dan zal P het eerste punt zijn;

2°. voor het punt D′. Trek de onbepaalde lijn AD′, en maak hoek ABP′ = hoek AD′E, dan zal P′ het tweede punt zijn, dat aan de vraag voldoet.

212. Zij ABC de gevraagde driehoek, en de loodlijn CD = a.



Stel dan AD = $\frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})\,x$, dan is BD = $\frac{1}{2}(3-\sqrt{5})\,x$.
en $\frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})\,x : a = a : \frac{1}{2}(3-\sqrt{5})\,x$.
Men vindt $x = a\sqrt{(2+\sqrt{5})}$; zoodat $\frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})\,x = \frac{1}{2}a\sqrt{(2+2\sqrt{5})}$, en $\frac{1}{2}(3-\sqrt{5})\,x = \frac{1}{2}a\sqrt{(-2+2\sqrt{5})}$ wordt.
Eene constructie op deze uitkomst te bouwen, zou eene zware zaak zijn. Men doet beter, eene willekeurige schuine zijde aan te nemen, deze in de uiterste en middelste reden te verdeelen, en de loodlijn uit het deelpunt op te richten, die door den op de hyp. beschr. halven cirkel bepaald wordt. Vervolgens construeere men eene figuur aan de verkregene gelijkvormig, die de verlangde loodlijn heeft.

213. Laat de eene rechthoekszijde = a, de andere = b, en de schuine zijde = c meters gegeven, en de straal des cirkels die de eerste rechthsz. raakt = r, en die des cirkels welke de tweede rechthsz. raakt = r' gesteld zijn, dan weet men dat $r = \sqrt{\dfrac{s\,(s-b)\,(s-s)}{s-a}}$, en $r' = \sqrt{\dfrac{s\,(s-a)\,(s-c)}{s-b}}$ is. $r^2 = \dfrac{s\,(s-b)\,(s-c)}{s-a}$; $2rr' = 2s\,(s-c)$ en $r'^2 = \dfrac{s\,(s-a)\,(s-c)}{s-b}$. Deze drie laatste vergelijkingen samengeteld, geven

$$(r+r')^2 = \frac{s\,(s-c)}{(s-a)\,(s-b)} \times \left\{(s-a)^2 + 2\,(s-a)\,(s-b) + (s-b)^2\right\}$$

Maar in een' rechth. driehoek is $s\,(s-c) = (s-a)\,(s-b) = \frac{1}{2}\,ab$; zoo is dan $r + r' = (s-a) + (s-b) = c$. En het prod. der twee eerste vergel. geeft: $rr' = \sqrt{\dfrac{s^2\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)^2}{(s-a)\,(s-b)}} = s\,(s-c) = \frac{1}{2}\,ab = \mathrm{I}$.

214. Zullen de veelhoeken aan elkander kunnen sluiten, zoo moeten hunne polygoonshoeken evenmatige deelen zijn van 360°.

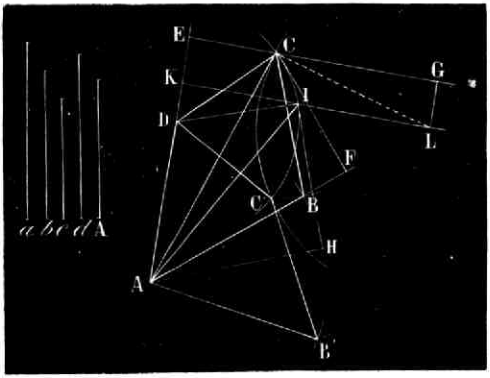
Men stelle dus $\dfrac{360}{\dfrac{n-2}{n} \times 180} = t$ (zijnde t een geheel getal)

of $\dfrac{2n}{n-2} = t$, waaruit $2n = tn - 2t$, en $n = 2 + \dfrac{4}{t-2}$. Daar nu n een geheel getal moet zijn, zal men $\dfrac{4}{t-2} = u$, een ander geheel getal mogen stellen. Men vindt $t = 2 + \frac{4}{u}$. Dus moet $\frac{4}{u}$ mede een geheel getal zijn. Dit kan, onder deze omstandigheden, niet zijn, tenzij u een deeler is van 4. Nu is vier niet anders deelbaar dan door 1, 2 en 4. Men stelle dus

$u = 1$, dan zal $t = 6$, en $n = 3$ zijn.
$u = 2$, „ $t = 4$, „ $n = 4$ „
$u = 4$, „ $t = 3$, „ $n = 6$ „

Geene andere dus, dan de regelm. driehoeken, vierhoeken en zeshoeken hebben deze eigenschap.

215. Laat a, b, c, d de zijden van den gevraagden vierhoek, en A de zijde van 't gegeven vierkant voorstellen.



Stel dat de vierhoek ABCD de gevraagde zij. Laat uit C de lijn CE loodr. op het verlengde van AD, en CF loodr. op het verlengde van AB neder, dan is 2 drieh. ACD $=$ AD $\times$ CE, en
2 drieh. ABC $=$ AB $\times$ CF. De som dezer vergelijkingen geeft 2 vierh. ABCD $=$ AD $\times$ CE $+$ AB $\times$ CF $=$ $2\,A^2$. Zoek nu eene vierde evenredige tot AD, AB en CF. Men vindt CG; dan is AD : AB $=$ CF : CG en AD $\times$ CG $=$ AB $\times$ CF, waardoor de vorige vergel. wordt 2 vierh. ABCD $=$ AD (CE $+$ CG) $=$ AD $\times$ EG $= 2\,A^2$; waaruit de evenredigheid AD : 2 A $=$ A : EG, of d : 2 A $=$ A : EG, zoodat men EG kan construeeren.

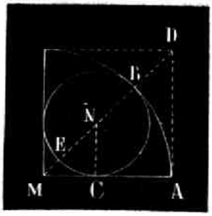
Stel nu, dat onder dezelfde gegevens een andere vierhoek ware geconstrueerd, rechthoekig in H. Trek dan AI en door I de lijn KL evenwijdig aan EG, en GL evenw. aan EK, dan is KL $=$ EG; en daar DI $=$ DC $= c$ is, zal ook de ligging van het punt L bekend wezen. Nu is

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 + 2\,AD \times DE = AB^2 + BC^2 + 2\,AB \times BF$$
$$AI^2 = AD^2 + DI^2 + 2\,AD \times DK = AH^2 + HI^2.$$

Trek de laatste verg. van de eerste af, zoo zal, daar CD = DI, AB = AH en BC = HI is, $AC^2 - AI^2 = 2\,AD \times EK = 2\,AD \times GL = 2\,AB \times BF$ en $AD \times GL = AB \times BF$ zijn. Hieruit volgt GL : BF = AB : AD = (zie boven) CG : CF. Nu zijn de hoeken G en F beide rechte hoeken, dus driehoek CBF gelijkvormig met drieh. CGL. Daarom BF : GL = BC : CL = AD : AB, of b : CL $= d : a$, zoodat CL mede door constructie bekend wordt. Men kan alzoo van de volgende constructie gebruik maken:

Stel twee lijnen AH $= a$ en HI $= b$ loodr. op elkander; beschrijf uit A met d en uit I met c als straal twee cirkelbogen, die elkander in D snijden, dan is vierh. AHID onder de gegeven zijden samengesteld, en rechthoekig in H. Trek door het punt I de onbep. lijn KIL rechth. op AD. Constr. de lijn KL als vierde evenredige tot d, 2 A en A; verder nog CL als vierde evenredige tot d, a en b. Beschrijf uit D met DC, en uit L met LC als straal cirkels die elkander in de punten C en C′ (immers zoo 't vraagstuk mogelijk is) snijden. Beschrijf uit C met b, en uit A met a als straal, cirkels die elkander in B snijden, dan is ABCD de gevraagde vierhoek. Ook de vierhoek AB′C′D beantwoordt aan de vraag. Men verkrijgt hem, door uit C′ met b, en uit A met a als straal cirkels te beschrijven, die elkander in B′ snijden.

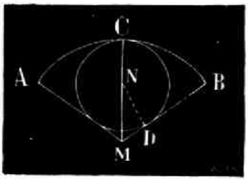
216. Stel AM $= a$, CN = BN $= r$, dan is MN $= r\sqrt{2}$ en $r + r\sqrt{2} = a$, waaruit $r = a\,(-1 + \sqrt{2})$. Om die uitkomst te construeeren, beschrijve men op AM een vierkant, trekke de diagonaal MD, en make NB = BD, zoo zal N het middelpunt van den gevraagden cirkel zijn; want MD $= a\sqrt{2}$; hieraf MB $= a$, blijft BD = NB $= a\,(-1 + \sqrt{2})$.

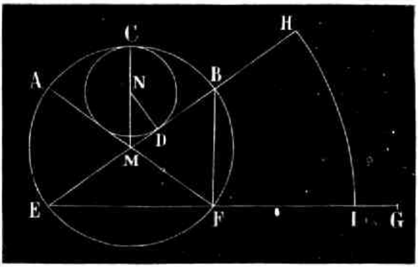


217. Dit vraagstuk is volkomen gelijk aan het vorige. Is dus de straal des gegeven cirkels $= a$, zoo zal de straal des gezochten cirkels $= a\,(-1 + \sqrt{2})$ zijn.

218. De straal van den gevraagden cirkel zal gelijk de straal des eerstgegeven cirkels wezen, verminderd met de middellijn der gevonden cirkels. Men vindt daarvoor dus $a\,(3 - 2\sqrt{2})$.

219. Zij MA $= a$, hoek AMB $= 120^\circ$, en N het middelpunt des gevraagden cirkels, stel CN = ND $= r$ en MD $= x$, dan is, omdat hoek D = recht, en hoek MND $= 30^\circ$ is, MN $= 2x$ dus $2x + r = a$ en $r = x\sqrt{3}$. Men vindt hieruit $r = a\,(-3 + 2\sqrt{3})$. Om deze waarde te construeeren verlenge men





AM en BM; trekke EF en BF, dan is EBF een rechth. driehoek, welks kleinste rechthoekszijde $= a$ is; EF zal dus $= a\sqrt{3}$ zijn. Neem op het verlengde van EF, FG = EF dan is EG $= 2a\sqrt{3}$. Verleng EB met de helft dan is EH = EI $= 3a$; dus zal IG $= a(-3 + 2\sqrt{3})$ zijn. Maak eindelijk CN = IG.

220. Dit vraagstuk is volkomen hetzelfde als het vorige.

221. De straal des gevraagden cirkels wordt gevonden, als men den straal des eerstgegeven cirkels (a) met de middellijn der daarin reeds beschreven cirkels ($a\,(-6 + 4\sqrt{3})$) vermindert. Men vindt $a = (7-4\sqrt{3})$.

222. Dit vraagstuk is gelijkluidend met n°. 206. Is de straal des gegeven cirkels $= a$, zoo zal de straal van elken der daarin beschreven cirkels $= \frac{1}{3}a$ wezen. En de cirkel, die uit het middelpunt des eerstgegeven cirkels beschreven, de zes geconstrueerde cirkels raakt, zal mede $\frac{1}{3}a$ tot straal hebben.

223. Men teekene drie sectoren, op de wijze als in vraagstuk 206; doch waarvan de hoeken 72, 45, 36 graden bedragen. Men late overigens de benaming der punten dezelfde.

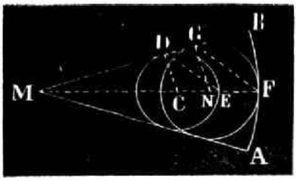
Moet er een cirkel beschreven worden in den sector, wiens hoek 72° bedraagt, zoo zal men erkennen, dat CN de halve zijde is van den vijfhoek, ingeschreven in een' cirkel, welke MN tot straal heeft. Stelt men dus CN $= x$, zoo vindt men voor MN $\frac{1}{5}x\sqrt{(50 + 10\sqrt{5})} = a-x$. Men lost hieruit op $x = \frac{a}{5 + 2\sqrt{5}}(-5 \pm \sqrt{(50 + 10\sqrt{5})})$.

Wordt een cirkel beschreven in den sector, welks hoek = 45° is, zoo is wederom CN de halve zijde van den achthoek, die in den cirkel staat, met MN beschreven. Stelt men CN $= x$, zoo zal MN $= x\sqrt{(4 + 2\sqrt{2})} = a-x$ zijn. Men vindt $x = \frac{a}{3 + 2\sqrt{2}}(-1 \pm \sqrt{(4 + 2\sqrt{2})})$.

Zal men een' cirkel beschrijven in den sector, die een hoek van 36° heeft, zoo is CN de halve zijde van den tienhoek beschreven in den cirkel, die MN tot straal heeft. Is CN $= x$, zoo zal MN $= x(1 + \sqrt{5}) = a-x$ zijn, waaruit volgt dat $x = a(-2 + \sqrt{5})$ zal wezen.

In de twee eerste gevallen moeten natuurlijk de bovenste teekens gelden.

De straal des cirkels, uit het middelpunt des eerstgegeven cirkels beschreven, en die al de geconstrueerde cirkels raakt, is altijd gelijk aan den straal des eersten, verminderd met de middellijn van een' der anderen. Wij zullen ons niet ophouden met de soms zeer bezwaarlijke constructiën gebouwd op deze uitkomsten, vermits er eene zeer eenvoudige constructie bestaat voor het beschrijven van een' cirkel in een' willekeurigen sector, die dus alle mogelijke gevallen insluit.



Zij MAB de gegeven sector. Laat uit eenig willekeurig punt C der lijn MF die den hoek midden door deelt, eene loodlijn CD op MB neder, en beschrijf uit C met CD als straal een' cirkel. Deze zal de beenen des hoeks raken, en MF in E snijden. Trek DE, en evenwijdig daaraan FG, dan is, na nog GN evenw. aan CD getrokken te hebben, N het middelpunt des gevraagden cirkels.

224. Uit vraagst. 216 blijkt, dat ME = MD − 3 NB = $a\,(3-2\sqrt{2})$ is. Is nu ME = a, zoo zal men door de evenr. $a\,(3-2\sqrt{2}) : a = a\,(-1+\sqrt{2}) : r$ vinden dat r, of NB = $a\,(1+\sqrt{2})$ is. Behalve dat deze waarde gemakkelijk geconstrueerd kan worden, kan men ook eenen gelijkbeenigen rechth. driehoek construeeren, waarvan het verschil tusschen de schuine zijde en de rechthoeksz. gegeven is.

225. Uit de, in vraagst. 219, 206 en 223 gevonden waarden voor EM, vindt men dat als EM = a genomen wordt, de straal der gelijke cirkels, welke den cirkel insluiten, die met EM beschreven is, voor 't getal van

3 cirkels, gelijk zal zijn aan $a\,(3+2\sqrt{3})$

5 „ „ „ „ „ $a \times \dfrac{-5+\sqrt{(50+10\sqrt{5})}}{15+2\sqrt{5}-2\sqrt{(50+10\sqrt{5}.)}}$

6 „ „ „ „ „ a.

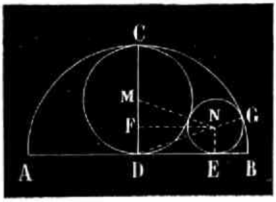
8 „ „ „ „ „ $a \times \dfrac{1+2\sqrt{2}-\sqrt{(4+2\sqrt{2})}.}{-1+\sqrt{(4+2\sqrt{2})}.}$

10 „ „ „ „ „ $a\sqrt{5}$.

Ook hier moge eene algemeene constructie de plaats vervangen van de vaak zeer moeielijke, ja soms ondoenlijke constructiën, op

de verkregene uitkomsten gebouwd. Zij de cirkel met MD als straal beschreven, de gegevene. Men wenscht n gelijke cirkels te beschrijven, die dien cirkel insluiten (n altijd een evenmatig deel zijnde van 360). Maak hoek AMB $= \frac{360}{n}$ graden. Deel dien hoek midden door, en neem op de deellijn het punt P willekeurig aan. Laat PB loodrecht neder op MB, en beschrijf met PB als straal eenen cirkel, die de beenen van hoek AMB zal raken, en de deellijn in C zal snijden. Trek BC, en evenwijdig daaraan DE. Als men nu nog EN evenwijdig aan BP trekt, zal N het middelpunt des gevraagden cirkels wezen.

226. Zij ABC de geg. halve cirkel, en M het middelpunt des daarin beschreven cirkels. Laat in het overschietende deel aan de rechterhand de cirkel NEG beschreven zijn, en stel deszelfs straal NE $= x$. Trek MN, laat uit N, de lijn NF loodr. neder op MD, en trek DNG; dan is $MN^2 - MF^2 = FN^2 = DE^2$, of $(\frac{1}{2}r + x)^2 - (\frac{1}{2}r - x)^2 = 2rx = DE^2$, dus $DE = \sqrt{2rx}$. Maar $DN^2 = DE^2 + NE^2$, of $DN^2 = 2rx + x^2$; dus $DN = \sqrt{(2rx + x^2)} = r - x$; hieruit vindt men $x = \frac{1}{4}r$. —

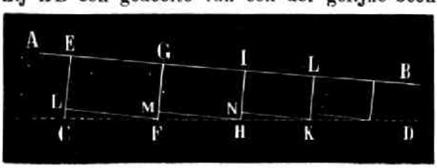


227. Dit blijkt genoegzaam uit vraagst. 204 dezer Afdeeling.

228. De helft der diagonaal van het vierkant is $= \frac{1}{2}a\sqrt{2}$; deze, verminderd met de middellijn van een' der daarin beschreven cirkels, laat $\frac{1}{2}a(-1 + \sqrt{2})$ tot rest, welke nu nog door 2 gedeeld moet worden, om den straal des verlangden cirkels te vinden. Die straal is dus $= \frac{1}{4}a(-1 + \sqrt{2})$.

229. De straal des in het vierkant beschr. cirkels is natuurlijk $= \frac{1}{2}a$. Stel dien des gevraagden cirkels $= x$, dan vindt men voor de halve diagonaal $\frac{1}{2}a + x(1 + \sqrt{2}) = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$. Hieruit lost men op $x = \frac{1}{2}a(3 - 2\sqrt{2})$. Men behoeft alzoo de zijde des vierkants slechts met de helft te verlengen, en er de diagonaal af te trekken, om den straal des gevraagden cirkels te vinden.

230. Zij AB een gedeelte van een der gelijke beenen, en CD een gedeelte van de loodlijn, welke uit den top des driehoeks is nedergelaten op de basis; dan liggen de middelpunten der bedoelde cirkels op CD; en derzelver stralen zijn CE, FG, HI, KL welke loodrecht op AB getrokken zijn; CF, FH, HK enz., de afstanden hunner middelpunten. Stel nu dat de zaak mogelijk ware, en dat CE $= p$ gesteld zijnde, FG $= p - q$, HI $= p - 2q$, KL $= p - 3q$ zij; dan zal, nadat men LF, MN, NK enz. evenw. aan CD getrokken heeft, CL = FM = HN $= q$ moeten zijn. Nu is CF = CE + FG

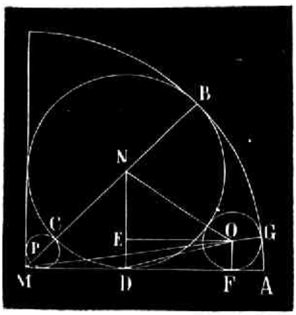


$= 2p - q$; $FH = FG + HI = 2p - 3q$; $HK = HI + KL = 2p - 5q$; maar de driehoeken CFL, FHM, HKN zijn gelijkvormig, dus zijn de gelijkstandige zijden evenredig: (CL : FM : HN enz.) = (CF : FH : HK enz.) Alzoo zouden dan gelijke lijnen evenredig zijn met ongelijke, hetgeen blijkbaar niet mogelijk is. Het gestelde is derhalve ongerijmd.

231. Ook dit is niet mogelijk. De reden daarvan is in de vorige oplossing gegeven.

232. Men verdeele den zeshoek in zes gelijkzijdige driehoeken. De hoogte van elk' dier driehoeken is $= \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Daarvan neme men (zie vraagst. 204) het derde gedeelte, en bekomt daardoor $\frac{1}{6}\sqrt{3}$ zoowel voor den straal van den binnensten cirkel, als voor dien der zes cirkels welke hem insluiten.

233. Het is duidelijk, dat, indien de straal NB van den in 't quadrant beschreven cirkel $= a$ is, de straal, waarmede dat quadrant beschreven is, MB namelijk $= NB + MN = NB + DN\sqrt{2} = a(1 + \sqrt{2})$ zal zijn. Is dus de straal des quadrants $= 1 + \sqrt{2}$ gegeven, zoo zal de straal des daarin beschr. cirkels $= 1$ zijn, en MC zal $= -1 + \sqrt{2}$ wezen. Men vindt nu licht, dat de straal $PC = \dfrac{-1 + \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} = 3 - 2\sqrt{2}$ is.



Deze waarde wordt geconstrueerd, door 3 BN met 2 MN te verminderen, en het verschil van C af op CM uit te zetten, waardoor het middelpunt P bekend wordt.

Om den straal OF van den cirkel te vinden, die in een der beide andere overblijvende deelen is beschreven, trekke men door O de lijn MG, late uit O loodlijnen OE en OF neder op DN en AM; en trekke DO en NO. Stelt men nu $OF = x$, dan is $NG = 1 + x$, $NE = 1 - x$, waaruit $EO = DF = 2\sqrt{x}$ wordt gevonden. Uit $DF = 2\sqrt{x}$, en $OF = x$ vindt men $DO = \sqrt{(x^2 + 4x)}$; zoodat nu de drie zijden van driehoek MOD aldus uitgedrukt worden: $MD = 1$, $MO = MG - GO = 1 + \sqrt{2} - x$, en $DO = \sqrt{(x^2 + 4x)}$. Bovendien is $DF = 2\sqrt{x}$. Nu is, volgens eene bekende stelling:

$$MO^2 = MD^2 + DO^2 + 2\,MD \times DF$$

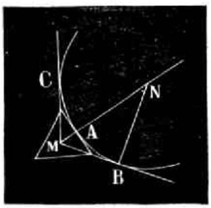
of $(1 + \sqrt{2} - x)^2 \quad 1 + x^2 + 4x + 4\sqrt{x}$, eene vergelijking, welke herleid wordt tot $x^2 - \dfrac{14 + 8\sqrt{2}}{11 + 6\sqrt{2}}\,x = -\dfrac{3 + 2\sqrt{2}}{11 + 6\sqrt{2}}$.

Hieruit vindt men $x - \dfrac{7 + 4\sqrt{2}}{11 + 6\sqrt{2}} = \pm\dfrac{4 + 2\sqrt{2}}{11 + 6\sqrt{2}}$, waarin wij alleen het onderste teeken kunnen gebruiken, zoodat

$$x = \frac{3 + 2\sqrt{2}}{11 + 6\sqrt{2}} = {}^1/_{49}\,(9 + 4\sqrt{2}) \text{ wordt.}$$

Uit deze waarde van x wordt gemakkelijk afgeleid EO = DF = $2\sqrt{x} = {}^2/_7\,(2 + \sqrt{5})$, en NE $= 1 - x = {}^4/_{49}\,(10 - \sqrt{2})$. Om NE te construeeren, vermindere men 10 BN met MN, en neme ${}^4/_{49}$ van het verschil; terwijl EO of DF gevonden wordt door de schuine zijde eens rechthoekigen driehoeks, welke BC en BN tot rechthoekszijden heeft, met BC te verlengen, en van de som ${}^2/_7$ te nemen. Daarna zette men DF van D af op DA, en NE van N af op ND uit, richte uit F en E loodlijnen op AD en DN op; de plaats, waar deze loodlijnen elkander snijden, is het middelpunt O des gevraagden cirkels.

234. *a.* Voor den regelmatigen driehoek:



Zij M het middelpunt des ingeschreven cirkels, trek MB en MC door de hoekpunten des driehoeks, zoo zal hoek BMC $= 120^0$, en hoek BMN $= 60^0$ zijn, gesteld dat de lijn MN dien hoek midden door deelt. Hoek MNB is dus $= 30^0$; want hoek B is recht, omdat NB een straal is, naar het raakpunt getrokken. Is nu de zijde des driehoeks $= a$, zoo zal MA $= {}^1/_6\,a\sqrt{3}$ zijn, en stelt men AN = BN $= x$, zoo is MN $= {}^1/_6\,a\sqrt{3} + x$, en MB $= {}^1/_2$ MN $= {}^1/_{12}\,a\sqrt{3} + {}^1/_2\,x$. Maar $MB^2 = MA\,(MA + 2\,AN)$ of $({}^1/_{12}\,a\sqrt{3} + {}^1/_2\,x)^2 = {}^1/_6\,a\sqrt{3}\,({}^1/_6\,a\sqrt{3} + 2x)$. Men vindt $x = a\,(1 + {}^1/_2\sqrt{3})$, dat is: de straal des gezochten cirkels is gelijk aan de som der zijde en loodlijn des gegeven driehoeks. Door eene eenvoudige evenredigheid ontdekt men, dat, indien die straal $= a$ gegeven ware, de zijde des driehoeks $= a\,(4 - 2\sqrt{3})$ zou zijn.

b. Voor den regelmatigen vierhoek:

Men vindt nagenoeg op dezelfde wijze voor den straal des bedoelden cirkels ${}^1/_2\,a\,(1 + \sqrt{2})$; dat is: hij is gelijk aan de halve som van de zijde en de diagonaal des vierkants. Wordt de straal echter $= a$ gesteld, zoo vindt men voor de zijde des vierkants $2a\,(-1 + \sqrt{2})$.

c. Voor den regelmatigen vijfhoek:

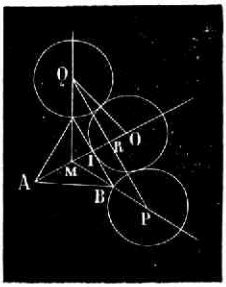
Legt men den driehoek tot grondslag, die gevormd wordt door de halve zijde des vijfhoeks, den straal des omgeschreven cirkels (dien men = 1 stelt) en het apothema, en zoekt men eenen driehoek aan dezen gelijkvormig, zoo vindt men uit de evenredigheid der gelijkstandige zijden $r = \dfrac{(1 + \sqrt{5})\sqrt{(10 - 2\sqrt{5})}}{16 - 4\sqrt{(10 - 2\sqrt{5})}} = \dfrac{{}^1/_4\,(1 + 5)\sqrt{(10 - 2\sqrt{5})}}{4 - \sqrt{(10 - 2\sqrt{5})}}$

De teller dezer breuk bestaat uit het product van de zijde met het apothema; terwijl de noemer gelijk is aan het dubbele verschil tusschen de zijde des vijfhoeks en de middellijn des omgeschr. cirkels: r kan alzoo, als vierde evenredige tot deze drie, geconstrueerd worden. Neemt men nu a aan als zijde, en niet $\frac{1}{2}\sqrt{(10-2\sqrt{5})}$, zoo vindt men door eene evenredigheid lichtelijk de waarde van den gezochten straal. En omgekeerd, die straal $= a$ gesteld zijnde, lichtelijk de zijde.

d. Voor den regelmatigen zeshoek:

Men verkrijgt in deze figuur een' rechth. driehoek, welks kortste rechthoekszijde de gezochte straal is, terwijl zijne schuine zijde bestaat uit de som van dien straal en het apothema. Vermits nu, omdat de tophoek $= 30^\circ$ is, de laatste het dubbel is der eerste, is de gezochte straal = het apothema.

235. *a.* Voor den regelmatigen driehoek:



Laat O, P, Q de middelpunten zijn van drie der gelijke cirkels, welke op de verlangde wijze beschreven zijn. Daar van driehoek MPQ, de hoek $M = 120^\circ$, en $MP = MQ$ is, zal hoek $MQR = 30^\circ$, en daarom $MR = \frac{1}{2} MQ$ zijn. Is $AB = a$, zoo is (de straal der cirkels $= r$ gesteld zijnde) $MQ = \frac{1}{3} a\sqrt{3} + r$, en dus $MR = \frac{1}{6} a\sqrt{3} + \frac{1}{2} r$; terwijl $OQ = 2r$ is. In den scherphoekigen driehoek MOQ zal $MO^2 + MQ^2 - 2\,OM \times RM = OQ^2$ of $(r + \frac{1}{6} a\sqrt{3})^2 + (r + \frac{1}{3} a\sqrt{3})^2 - 2\,(r + \frac{1}{6} a\sqrt{3})\,(\frac{1}{2} r + \frac{1}{6} a\sqrt{3}) = 4r^2$ zijn. Men lost hieruit op $r = \frac{1}{10} a\,(\sqrt{3} + \sqrt{13})$.

Aanmerking. Ozanam heeft aldus ongelijk wanneer hij eene constructie voorslaat, die voor r eene waarde vooronderstelt van $\frac{1}{12} a\,(\sqrt{3} + \sqrt{15})$. Ook is dus zijne beweering valsch, dat $OR = RI$ en dus drieh. IOQ gelijkbeenig zou zijn.

De gevondene waarde van r wordt op deze wijze geconstrueerd. Maak eenen rechthoekigen driehoek, welks rechthoekszijden resp. $= 2a$ en $3a$ genomen worden. De schuine zijde diens driehoeks zal $= a\sqrt{13}$ zijn. Voeg daarbij de dubbele hoogte des driehoeks, of $a\sqrt{3}$, en neem $\frac{1}{10}$ van de som dier lijnen.

b. Voor den regelmatigen vierhoek:

Men vindt nagenoeg op dezelfde wijze $r = a \times \dfrac{1 + \sqrt{(5 + 2\sqrt{2})}}{4 + 4\sqrt{2}}$; eene waarde welke zich moeielijk laat construeeren.

c. Voor den regelmatigen vijfhoek:

Stelt men den straal des omgeschr. cirkels $= 1$, zoodat het apothema $= \frac{1}{4}\sqrt{(6 + 2\sqrt{5})}$ wordt, hetgeen men gemakshalve $= m$ stelt, en neemt men r voor den straal des gevraagden cirkels, zoo komt men tot de vergelijking: $r^2 - \frac{16-m^2}{16+4m} r = - \frac{16-m^2}{32+8m}$, of

$\frac{16-m^2}{32+8m} = n$ stellende, $r^2 - 2nr = -n$.

waaruit dan verder r wordt berekend.

Met deze waarde van r stemt overeen de zijde des vijfhoeks $= \frac{1}{2}\sqrt{(10-2\sqrt{5})}$; daar blijft dan nog over te bepalen, hoe groot r zal zijn, wanneer de zijde $= a$ wordt genomen.

d. Voor den regelmatigen zeshoek:

Men vindt op gelijke wijze $r = \frac{4-\sqrt{3}+\sqrt{(27-4\sqrt{3})}}{8+4\sqrt{3}}\,a$.

236. Dit vraagstuk is gelijkluidend met vraagst. 193 dezer Afdeeling; in de opgave is blijkbaar vergeten, den straal des derden cirkels $= c$ meters te geven.

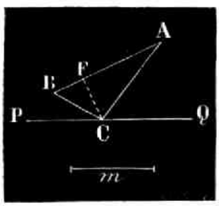
237. De constructiën zijn zooveel mogelijk bij de oplossingen der twintig laatste vraagstukken gevoegd, om de herhaling der figuren te vermijden.

NASCHRIFT.

Na het afdrukken van dit werk had ik eene bizondere aanleiding tot de herziening van een drietal oplossingen, waarvan de twee eersten, No. 40 en 41, Afd. III, door hare omslachtigheid, en de laatste, No. 132, Afd. III, door hare onvolledigheid en mindere nauwkeurigheid mij mishaagden: een mijner zonen kwam tot resultaten, die verre te verkiezen zijn boven de vroeger verkregene. De algemeene belangstelling, waarmede dit werk ontvangen is, maakt het mij ten aangenamen plicht, den beoefenaars der Wiskunde deze nieuwe oplossingen aan te bieden.

No. 40, Afd. III.

Waar ligt het punt C in de lijn PQ zoodat, wanneer men uit twee gegevene punten A en B de lijnen AC en BC trekt, $AC^2—BC^2$ gelijk zij aan het vierkant op eene gegevene lijn m beschreven?



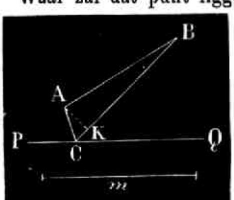
Zij het vraagstuk opgelost, en C het gezochte punt; dan is $AC^2-BC^2=m^2$. Laat CF op AB loodrecht neder, dan is:

$$AC^2 = BC^2 + AB^2 - 2\ AB \times BF\text{, of}$$
$$AC^2 - BC^2 = AB^2 - 2\ AB \times BF = m^2$$
$$\text{waaruit } BF = \frac{AB^2 - m^2}{2\ AB};$$

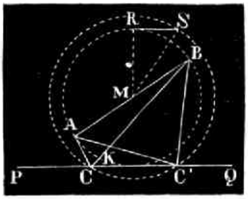
zoodat men slechts, na een vierkant q^2 geconstrueerd te hebben, gelijk aan 't verschil van AB^2 en m^2, eene derde evenredige behoeft te zoeken ot 2 AB en q. —

No. 41, Afd. III.

Waar zal dat punt liggen, opdat $AC^2 + BC^2 = m^2$ zij?



Zij het vraagstuk opgelost, en C het gezochte punt; dan is $AC^2 + BC^2 = m^2$. Laat AK loodrecht neder op BC, zoo heeft men $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2\ BC \times CK = m^2 - 2\ BC \times CK$, en dus $BC \times CK = \frac{1}{2}(m^2 - AB^2)$. Construeer nu eene lijn p, welker vierkant $= \frac{1}{2}(m^2 - AB^2)$ zij; zoo volgt daaruit deze constructie:



Beschrijf op AB als middellijn een cirkel; trek daaraan eene raaklijn $RS = p$; en beschrijf met MS als straal, uit M als middelpunt een cirkel, die de gegeven lijn PQ in twee punten snijdt, C en C′, welke de gevraagde zijn. Want nu is $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2\,BC \times CK = AC^2 + BC^2 - (m^2 - AB^2)$,

$$\text{waaruit } AC^2 + BC^2 = m^2.$$

No. 132, Afd. III.

Hoe groot is het aantal snijpunten welke door het trekken van al de diagonalen in een regelmatigen 10-hoek ontstaan?

Laat ons het vraagstuk eerst in algemeenen zin oplossen: spreken wij dus eerst van een n hoek, met weglating van het woord regelmatig.

Zij dus ABCD..... een willekeurige n-hoek, liefst met alleen uitspringende hoeken. De diagonalen, uit A getrokken, leveren natuurlijk geen snijpunten op.

van de diagonalen uit B:
- snijdt de 1e al de diag. uit A: dus snijp. $n-3$.
- „ „ 2e „ „ „ „ A, min 1: „ „ $n-4$.
- „ „ 3e „ „ „ „ A, min 2: „ „ $n-5$.
- enz. enz. enz.
- „ „ laatste „ „ „ A, min $(n-4)$ „ 1.

Deze reeks gesommeerd, geeft in 't geheel $\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$ snijp.

van de diagonalen uit C:
- is de eerste reeds gerekend.
- snijdt de 2e al de diag. uit A op 1 na / en „ „ „ „ B „ 1 „ } dus snijp. $2(n-4)$
- „ „ 3e „ „ „ „ A „ 2 „ / en „ „ „ „ B „ 2 „ } „ „ $2(n-5)$
- enz. enz. enz.
- „ laatste „ „ „ A op $(n-4)$ na / en „ „ „ B „ $(n-4)$ „ } dus snijp. 2 . 1

Deze reeks gesommeerd, geeft in 't geheel $2 \times \frac{1}{2}(n-3)(n-4)$ snijp.

van de diagonalen uit D:
- zijn de twee eersten (DA en DB) reeds gerekend:
- snijdt de 3e al de diag. uit A op 2 na / „ „ „ „ B „ 2 „ / „ „ „ „ C „ 2 „ } dus snijp. $3(n-5)$
- „ „ 4e „ „ „ „ A „ 3 „ / „ „ „ „ B „ 3 „ / „ „ „ „ C „ 3 „ } „ „ $3(n-6)$
- enz. enz. enz.
- „ laatste „ „ „ A op $(n-4)$ na / „ „ „ B „ $(n-4)$ „ / „ „ „ C „ $(n-4)$ „ } dus snijp. 3 . 1

Deze reeks gesommeerd, geeft in 't geheel $3\times\frac{1}{2}(n-4)(n-5)$ snijp.

enz. enz. enz.

Zoo geven de diagonalen uit het p^e hoekpunt $(p-1)\times\frac{1}{2}(n-p)(n-p-1)$ snijp.; en, S stellende voor het geheele aantal snijpunten, is:

$$S = \tfrac{1}{2}(n-2)(n-3) + 2\times\tfrac{1}{2}(n-3)(n-4) + \ldots\ldots + (p-1)$$
$$\times\tfrac{1}{2}(n-p)(n-p-1) + \ldots\ldots \text{ tot } n \text{ termen } (\alpha).$$

Nu vindt men door successive substitutie van n, $n-1$, $n-2$, enz. voor

2 maal den n^{en} term	0.
2 „ „ $(n-1)^{en}$ term	0.
2 „ „ $(n-2)^{en}$ „	$1.2\,(n-3)$
2 „ „ $(n-3)^{en}$ „	$2.3\,(n-4)$
enz.	enz.

Zoo wordt dan bovenstaande vergelijking (α):

$$2S=(n^2-5n+6)+(2n^2-14n+24)+(3n^2-27n+60)+\ldots+(6n-24)+(2n-6)$$
$$\text{of } 2S=(2n-6)+(6n-24)+(12n-60)+\ldots+(2n^2-14n+24)+(n^2-5n+6)$$
$$\text{en } 4S=(n^2-3n)+(2n^2-8n)+(3n^2-15n)+\ldots+(2n^2-8n)+(n^2-3n) \quad \text{opt.}$$
$$\text{en } \frac{4S}{n}=(n-3)+(2n-8)+(3n-15)+\ldots+(2n-8)+(n-3).$$

of, door transformatie van de twee laatste termen:

$$\frac{4S}{n}=(n-3)+(2n-8)+(3n-15)+\ldots+(n-4)n-(n-4)(n-2)+(n-3)n-(n-3)(n-1)$$
$$= n\left\{1+2+3+\ldots+(n-3)\right\} - \left\{1.3+2.4+3.5+\ldots+(n-3)(n-1)\right\}$$

De eerste term van het tweede lid is eene rekenkunstige reeks, welker som gemakkelijk bevonden wordt gelijk te zijn aan $\frac{1}{2}n(n-2)(n-3)$. De tweede term van dat lid is eene rekenkunstige reeks van de tweede orde, welke, gesommeerd volgens de formule $S = ta + \frac{t(t-1)}{1\,.\,2}A + \frac{(t-1)(t-2)}{1\,.\,2\,.\,3}B$ (waarin $a =$ de eerste term, $A =$ het eerste verschil tusschen de twee eerste termen, $B =$ het tweede verschil tusschen de eerste verschillen, $t =$ het aantal termen, en $S =$ de som der reeks is), geeft $\frac{n-3}{6}(n-2)(2n+1)$; zoodat nu

$$\frac{4S}{n} = \tfrac{1}{2}n(n-2)(n-3) - \frac{n-3}{6}(n-2)(2n+1), \text{ of}$$

$$S = \frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(n-3) = \frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}\times\frac{n-2}{3}\times\frac{n-3}{4} \text{ is } \ldots(\beta)$$

NB. De tweede term van het tweede lid had ook nog op deze wijze gesommeerd kunnen worden:

Stel $3 + 8 + 15 + 24 + \ldots + n^2 - 4n + 3 = T$

hiervan $2 + 4 + 6 + 8 + \ldots + 2n-6 = (n-2)(n-3)$ afgetr.

rest $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + (n-3)^2 = T - (n-2)(n-3)$

Het eerste lid volgens de formule voor de vierhoekige pyramidale kogelstapels: $S = \frac{1}{6}\, n\, (n + 1)\, (2\, n + 1)$ gesommeerd zijnde, waarin n het aantal termen, en S de som voorstelt, verkrijgt men

$$\tfrac{1}{6}\, (n-3)\, (n-2)\, (2n-5) = T - (n-2)\, (n-3)$$

of $$\frac{n-3}{6}\, (n-2)\, (2n+1) = T, \text{ als boven.}$$

Hiermede konde de zaak als afgedaan beschouwd worden. Maar men kan de vraag stellen: *Hoeveel snijpunten vormen de verlengden der diagonalen?*

Nu redeneere men aldus:

1 lijn kan 1 lijn snijden in . . . . 1 punt

de snijding dezer 2 lijnen door eene 3e voegt daarbij 2 punten

" " " 3 " " " 4e " " 3 "

enz. enz. enz.

" " " $p-1$ " " " pe " " $(p-1)$ "

p lijnen hebben dus hoogstens $1+2+3+\ldots\ldots+(p-1) = \frac{1}{2}p(p-1)$ snijpunten (γ)

Nu heeft een n—hoek $\frac{1}{2}\, n(n-3)$ diagonalen.

Het grootst mogelijk getal snijpunten dier diagonalen bedraagt dus, volg. form. γ

$$\tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{2}\, n\, (n-3)\, [\tfrac{1}{2}\, n\, (n-3)-1] = \tfrac{1}{8}n\, (n-3)\, (n^2-3n-2);$$

maar de diagonalen eens veelhoeks zijn gebonden aan de voorwaarde, dat aan elk hoekpunt (wanneer het aantal zijden $= n$ is) er $n-3$ elkander moeten ontmoeten, terwijl ook dit ontmoetingspunt qua snijpunt niet mede telt. Aan elk hoekpunt zouden deze $n-3$ lijnen, volgens form. γ, hebben kunnen geven $\frac{1}{2}\, (n-3)\, (n-4)$ snijpunten, d. i. voor de n hoekpunten samen $\frac{1}{2}\, n\, (n-3)\, (n-4)$, die als verloren moeten beschouwd worden. Het geheele aantal snijpunten bedraagt alzoo

$$\tfrac{1}{8}\, n\, (n-3)\, (n^2-3n-2) - \tfrac{1}{2}\, n\, (n-3)\, (n-4) = \tfrac{1}{8}\, n\, (n-3)\, \{n^2-7n+14\};$$

daarvan vallen binnen de figuur $\frac{1}{24}\, n\, (n-1)\, (n-2)\, (n-3)$

buiten de figuur alzoo $\frac{1}{12}\, n\, (n-3)\, (n-4)\, (n-5)$ aft.

Nog kan men zich de vraag stellen: *Hoe groot wordt het aantal snijpunten, als men ook de zijden in rekening brengt?*

Nu zijn er aan zijden en diagonalen $\frac{1}{2}n\, (n-3) + n = \frac{1}{2}\, n\, (n-1)$ lijnen, welke elkander, volg. form. γ kunnen snijden in $\frac{1}{8}\, n\, (n-1)\, (n^2-n-2)$ punten. Maar in elk hoekpunt moeten zich ontmoeten $(n-1)$ lijnen, waardoor in de n hoekpunten verloren gaan $\frac{1}{2}\, n\, (n-1)\, (n-2)$ snijpunten. Er blijven dus over aan snijpunten, zoo binnen als buiten, $\frac{1}{8}\, n\, (n-1)\, (n-2)\, (n-3)$. Het aantal snijpunten van n zijden bedraagt $\frac{1}{2}\, n\, (n-1)$; daarvan worden n hoekpunten niet gerekend; dus is het aantal snijpunten van zijden alleen $\frac{1}{2}\, n\, (n-3)$, welke allen buiten de figuur liggen. Voor het geheele aantal snijpunten der diagonalen alleen, vonden wij $\frac{1}{8}\, n\, (n-3)\, \{n^2-7n+14\}$; terwijl het geheele aantal snijpunten $\frac{1}{8}\, n\, (n-1)\, (n-2)\, (n-3)$ beloopt. Bijgevolg is het aantal snijpunten van diagonalen en zijden onderling

$\frac{1}{8}\, n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3) - \frac{1}{2} n\,(n-3) - \frac{1}{8} n\,(n-3)\,\{n^2-7n+14\}$ $= \frac{1}{2}\, n\,(n-3)\,(n-4)$, welke blijkbaar allen buiten den veelhoek liggen.

Wanneer wij al de gevonden resultaten samenvatten, verkrijgen wij dit overzicht:

Aantal snijp. van zijden en diagonalen zoo binnen als buiten $\frac{1}{8}\, n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3) = S.$

$$\text{daaronder zijn} \left\{ \begin{array}{ll} \text{Snijpunten van diagonalen alleen} \left\{ \begin{array}{l} \text{binnen} \quad \frac{1}{24}\, n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3) = \frac{1}{3}\, S. \\ \text{buiten} \quad \frac{1}{12}\, n\,(n-3)\,(n-4)\,(n-5) = \frac{2}{3}\, S\, \dfrac{(n-4)\,(n-5)}{(n-1)\,(n-2)} \end{array} \right. \\ \text{Snijpunten van zijden alleen, allen buiten} & \frac{1}{2}\, n\,(n-3) = 4\, S\, \dfrac{1}{(n-1)\,(n-2)} \\ \text{Snijp. van zijden en diag. onderl., allen buiten} & \frac{1}{2}\, n\,(n-3)\,(n-4) = 4\, S\, \dfrac{n-4}{(n-1)\,(n-2)} \end{array} \right.$$

Het aantal snijpunten van een *regelmatigen* n-hoek is eene zeer gecompliceerde functie van n. Het zij genoeg, hier op te merken, dat men bij den regelmatigen 10-hoek zeer gemakkelijk twee concentrieke kringen van driedubbele snijpunten vindt, terwijl in het middelpunt vijf middellijnen elkander snijden.

Daar nu drie lijnen elkander in $\frac{1}{2} \times 3 \times 2 = 3$, en vijf lijnen elkander in $\frac{1}{2} \times 5 \times 4 = 10$ punten kunnen snijden, zoo gaan in die concentrieke kringen $20 \times 2 = 40$, en in middelpunt $10-1 = 9$, dus te zamen 49 snijpunten verloren.

Het maximum der snijpunten in een tienhoek bedroeg $\dfrac{10\,.\,9\,.\,8\,.\,7}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}$ $= 210$ snijpunten; hiervan de 49 verloren gegane snijpunten afgetrokken, vindt men voor 't aantal snijpunten in een regelmatigen tienhoek 161.