Oplossingen der als prijsvragen voorgestelde vraagstukken, voor welker beantwoording ter Algemeene Vergadering van het jaar 1872 aanlagen zijn toegewezen aan den heer J. Versluys

OPLOSSINGEN

DER

ALS PRIJSVRAGEN VOORGESTELDE

VRAAGSTUKKEN,

voor welker beantwoording ter Algemeene Vergadering van het jaar 1872 *Aanlagen zijn toegewezen aan den Heer*

J. VERSLUYS.

VRAAGSTUK I.

ALS TWEE PLATTE GLAZEN SPIEGELS EVENWIJDIG EN MET DE SPIEGELENDE VLAKKEN NAAR ELKANDER GEKEERD ZIJN, DAN WEET MEN, DAT DE LICHTSTRALEN, DIE OP DEN EENEN SPIEGEL INVALLENDE NAAR DEN ANDEREN TERUGGEKAATST WORDEN, VAN DEZEN NOGMAALS WORDEN TERUGGEKAATST, ZOODAT DE LAATSTE RICHTING DER STRALEN EVENWIJDIG IS AAN HUNNE EERSTE RICHTING, VÓÓR DAT ZIJ DEN EERSTEN SPIEGEL BEREIKTEN. ONDERSTELT MEN NU DAT EEN DER SPIEGELS OM EENE ZEKERE LIJN, AL OF NIET IN DESZELFS VLAK GELEGEN, EEN HOEK α RONDGEDRAAID IS, DAN WORDT GEVRAAGD NAAR DE RICHTING DER UITTREDENDE STRALEN, DIE TWEEMAAL TERUGGEKAATST DEN TWEEDEN SPIEGEL VERLATEN.

DIT VOORSTEL OP TE LOSSEN IN DE ONDERSTELLING, DAT VAN GEEN DER BEIDE SPIEGELS DE VÓÓR- EN ACHTERVLAKKEN VOLKOMEN EVENWIJDIG ZIJN, MAAR DAT DEZE ZEER KLEINE HOEKEN VORMEN; VOORTS ALS BIJZONDER

GEVAL VAN TOEPASSING AAN TE NEMEN, DAT DE LIJN VAN DOORSNIJDING DER VERLENGDE SPIEGELENDE VLAKKEN *BIJNA* EVENWIJDIG IS MET DE LIJN, OM WELKE EEN DER SPIEGELS GEDRAAID WORDT, EN DAT TEVENS DE RICHTING DER STRALEN DEZE LIJNEN *BIJNA* RECHTHOEKIG KRUIST.

§ 1. Nemen wij een rechthoekig coördinaten-stelsel aan, waarin de richting van een rechte lijn bepaald wordt door de hoeken, die de lijn met de coördinaten-assen maakt; terwijl de stand van een vlak bepaald wordt door de hoeken, welke eene loodlijn op dat vlak met de coördinaten-assen maakt. In beide gevallen noemt men die hoeken de richtingshoeken, en wij zullen een rechte lijn of een plat vlak aanduiden door het opnoemen van de richtingshoeken.

Bij de oplossing van het opgegeven vraagstuk maken wij gebruik van de drie volgende problema's:

§ 2. *In de eerste plaats nemen wij aan, dat een plat vlak* (a, b, c) *een hoek* ϕ *gedraaid wordt om de Z-as, en wij zullen de richtingshoeken* a_1, b_1, c_1 *van het vlak na de draaiing bepalen.*

Merken wij op, dat elke loodlijn op het vlak om de *Z*-as een hoek ϕ omwentelt. Nemen wij nu die loodlijn op het gegeven vlak, welke tevens door den oorsprong gaat. Als dan een bol, die den oorsprong tot middelpunt heeft, de coördinaten-assen snijdt in X, Y en Z, de loodlijn op het gegeven vlak in A en diezelfde loodlijn na de omwenteling in B, dan is (zie Pl. VII, fig. 1):

$$XA = a,\quad YA = b,\quad ZA = c,\quad XB = a_1,\quad YB = b_1,\quad ZB = c_1,$$
$$\angle AZB = \phi,\quad XY = YZ = ZX = 90^\circ.$$

Daar de wenteling om de *Z*-as geschiedt, is $c_1 = c$. Bepalen wij nu verder a_1. Daartoe hebben wij in $\triangle$ AZX:

$$Cos\,AZX = \frac{Cos\,a - Cos\,c\,Cos\,90^\circ}{Sin\,c\,Sin\,90^\circ} = \frac{Cos\,a}{Sin\,c}.$$

In $\triangle$ BZX hebben wij verder:

$$Cos\,a_1 = Cos\,90^\circ\,Cos\,c_1 + Sin\,90^\circ\,Sin\,c_1\,Cos\,BZX$$
$$Cos\,a_1 = Sin\,c\,Cos\,(\phi + AZX)$$
$$Cos\,a_1 = Sin\,c\,Cos\,\phi\,Cos\,AZX - Sin\,c\,Sin\,\phi\,Sin\,AZX$$

$$Cos\, a_1 = Cos\, a\, Cos\, \phi - Cos\, b\, Sin\, \phi.$$

Evenzoo $$Cos\, b_1 = Cos\, a\, Sin\, \phi + Cos\, b\, Cos\, \phi.$$

Opmerkingen 1. Deze formules gaan door voor alle standen der loodlijn.

2. Wij hebben de wenteling van de X-as naar de Y-as genomen. Geschiedt de wenteling in tegengestelden zin, dan behoeft men slechts ϕ negatief te nemen.

3. Wij hebben de Z-as als omwentelings-as aangenomen, omdat voor een willekeurige omwentelings-as de formules omslachtig worden. Men vindt voor een omwentelings-as (p, q, r), als P de hoek is tusschen die as en de loodlijn op het gegeven vlak,

$$Cos\, a_1 = Cos\, a\, Cos\, \phi + 2\, Sin^2 \tfrac{1}{2}\phi\, Cos\, p\, Cos\, \mathrm{P}$$
$$\pm\, Sin\, \phi \sqrt{(2\, Cos\, a\, Cos\, p\, Cos\, \mathrm{P} - Cos^2 a + Sin^2 p - Cos^2 \mathrm{P})}.$$

4. Voor een omwentelings-as evenwijdig aan de Z-as heeft men dezelfde formules als hierboven.

§ 3. *Een straal (p, q, r) wordt gebroken door een plat vlak (a, b, c). Als gegeven is de brekings-coëfficient n, vraagt men de richting van den gebroken straal te bepalen.*

De gebroken straal zij (p_1, q_1, r_1). Om p_1, q_1 en r_1 te bepalen, merken wij vooreerst op, dat de invallende straal en de gebroken straal in één plat vlak liggen met de loodlijn in hun gemeenschappelijk punt opgericht op het brekende vlak. Er moet dus een vierde lijn (λ, μ, ν) zijn, die rechthoekig op die drie lijnen staat. Men moet dus waarden voor λ, μ en ν kunnen vinden, zóo dat

$$Cos\, \lambda\, Cos\, p_1 + Cos\, \mu\, Cos\, q_1 + Cos\, \nu\, Cos\, r_1 = 0,$$
$$Cos\, \lambda\, Cos\, a + Cos\, \mu\, Cos\, b + Cos\, \nu\, Cos\, c = 0,$$
$$Cos\, \lambda\, Cos\, p + Cos\, \mu\, Cos\, q + Cos\, \nu\, Cos\, r = 0.$$

En dat men zulke waarden kunne vinden, wordt uitgedrukt door de voorwaardes-vergelijking:

$$\begin{vmatrix} Cos\, p_1 & Cos\, q_1 & Cos\, r_1 \\ Cos\, a & Cos\, b & Cos\, c \\ Cos\, p & Cos\, q & Cos\, r \end{vmatrix} = 0.$$

Als wij den hoek, dien de gegeven straal maakt met de loodlijn uit den oorsprong op het gegeven vlak neergelaten, A noemen, is, $$Cos\, \mathrm{A} = Cos\, a\, Cos\, p + Cos\, b\, Cos\, q + Cos\, c\, Cos\, r.$$

De cosinus van den invalshoek is

$$\pm(\mathrm{Cos}\,a\,\mathrm{Cos}\,p + \mathrm{Cos}\,b\,\mathrm{Cos}\,q + \mathrm{Cos}\,c\,\mathrm{Cos}\,r).$$

De cosinus van den brekingshoek is

$$\pm(\mathrm{Cos}\,a\,\mathrm{Cos}\,p_1 + \mathrm{Cos}\,b\,\mathrm{Cos}\,q_1 + \mathrm{Cos}\,c\,\mathrm{Cos}\,r_1).$$

Daar n de brekings-coëfficient is, hebben wij

$$1 - (\mathrm{Cos}\,a\,\mathrm{Cos}\,p_1 + \mathrm{Cos}\,b\,\mathrm{Cos}\,q_1 + \mathrm{Cos}\,c\,\mathrm{Cos}\,r_1)^2 = \frac{1}{n^2}\,\mathrm{Sin}^2\,\mathrm{A},$$

of

$$\mathrm{Cos}\,a\,\mathrm{Cos}\,p_1 + \mathrm{Cos}\,b\,\mathrm{Cos}\,q_1 + \mathrm{Cos}\,c\,\mathrm{Cos}\,r_1 = \pm\frac{1}{n}\sqrt{(n^2 - \mathrm{Sin}^2\,\mathrm{A})},$$

of, bij bekorting voor het tweede lid B stellende;

$$\mathrm{Cos}\,a\,\mathrm{Cos}\,p_1 + \mathrm{Cos}\,b\,\mathrm{Cos}\,q_1 + \mathrm{Cos}\,c\,\mathrm{Cos}\,r_1 = \mathrm{B}.$$

Wat het teeken van B betreft, merken wij op, dat, als de loodlijn uit den oorsprong op het gegeven vlak neergelaten een scherpen hoek maakt met de invallende straal, diezelfde loodlijn een scherpen hoek zal maken met de gebroken straal. En als de eerste hoek stomp is, zal ook de tweede stomp zijn. Daaruit volgt, dat B hetzelfde teeken moet hebben als

$$\mathrm{Cos}\,a\,\mathrm{Cos}\,p + \mathrm{Cos}\,b\,\mathrm{Cos}\,q + \mathrm{Cos}\,c\,\mathrm{Cos}\,r.$$

Daar p_1, q_1 en r_1 de hoeken zijn, die een zelfde lijn met drie onderling rechthoekige lijnen maakt, heeft men

$$\mathrm{Cos}^2\,p_1 + \mathrm{Cos}^2\,q_1 + \mathrm{Cos}^2\,r_1 = 1,$$

Uit deze vergelijking en uit

$$\mathrm{Cos}\,a\,\mathrm{Cos}\,p_1 + \mathrm{Cos}\,b\,\mathrm{Cos}\,q_1 + \mathrm{Cos}\,c\,\mathrm{Cos}\,r_1 = \mathrm{B}$$

en

$$\begin{vmatrix} \mathrm{Cos}\,p_1 & \mathrm{Cos}\,q_1 & \mathrm{Cos}\,r_1 \\ \mathrm{Cos}\,a & \mathrm{Cos}\,b & \mathrm{Cos}\,c \\ \mathrm{Cos}\,p & \mathrm{Cos}\,q & \mathrm{Cos}\,r \end{vmatrix} = 0$$

moeten nu p_1, q_1 en r_1 bepaald worden.

Daartoe tellen wij bij *Cos a* maal de eerste kolom der determinante, *Cos b* maal de tweede kolom en *Cos c* maal de derde kolom op; dan komt er:

$$\begin{vmatrix} \mathrm{B} & \mathrm{Cos}\,q_1 & \mathrm{Cos}\,r_1 \\ 1 & \mathrm{Cos}\,b & \mathrm{Cos}\,c \\ \mathrm{Cos}\,\mathrm{A} & \mathrm{Cos}\,q & \mathrm{Cos}\,r \end{vmatrix} = 0, \quad \text{of}$$

$$\mathrm{Cos}\,q_1\,(\mathrm{Cos}\,c\,\mathrm{Cos}\,\mathrm{A} - \mathrm{Cos}\,r) + \mathrm{Cos}\,r_1\,(\mathrm{Cos}\,q - \mathrm{Cos}\,b\,\mathrm{Cos}\,\mathrm{A})$$
$$+ \mathrm{B}\,(\mathrm{Cos}\,b\,\mathrm{Cos}\,r - \mathrm{Cos}\,c\,\mathrm{Cos}\,q) = 0.$$

Telt men bij de tweede kolom, vermenigvuldigd met *Cos b*, de eerste kolom, vermenigvuldigd met *Cos a*, en de derde kolom vermenigvuldigd met $Cos\, c$, dan komt er:

$$\begin{vmatrix} Cos\, p_1 & B & Cos\, r_1 \\ Cos\, a & 1 & Cos\, c \\ Cos\, p & Cos\, A & Cos\, r \end{vmatrix} = 0, \text{ of}$$

$$Cos\, p_1 (Cos\, r - Cos\, c\, Cos\, A) + Cos\, r_1 (Cos\, a\, Cos\, A - Cos\, p) \\ + B (Cos\, c\, Cos\, p - Cos\, a\, Cos\, r) = 0.$$

Substitueert men nu de waarden voor p_1 en q_1 uit de twee voorgaande vergelijkingen in $Cos^2 p_1 + Cos^2 q_1 + Cos^2 r_1 = 1$, dan komt er:

$$Cos^2 r_1 \{(Cos\, a\, Cos\, A - Cos\, p)^2 + (Cos\, b\, Cos\, A - Cos\, q)^2 \\ + (Cos\, c\, Cos\, A - Cos\, r)^2\} \\ - 2\, Cos\, r_1\, B \{(Cos\, a\, Cos\, A - Cos\, p)(Cos\, a\, Cos\, r - Cos\, c\, Cos\, p) \\ + (Cos\, b\, Cos\, A - Cos\, q) \times (Cos\, b\, Cos\, r - Cos\, c\, Cos\, q)\} \\ + B^2 (Cos\, a\, Cos\, r - Cos\, c\, Cos\, p)^2 \\ + B^2 (Cos\, b\, Cos\, r - Cos\, c\, Cos\, q)^2 - (Cos\, c\, Cos\, A - Cos\, r)^2 = 0.$$

Deze vergelijking wordt na herleiding:

$$Cos^2 r_1\, Sin^2 A - 2\, Cos\, r_1\, B\, Sin^2 A\, Cos\, c \\ + Sin^2 A \left(Cos^2 c - \frac{Cos^2 c + Cos^2 r - 2 Cos\, c\, Cos\, r\, Cos A}{n^2}\right) = 0$$

of

$$Cos^2 r_1 - 2\, Cos\, r_1\, B\, Cos\, c + Cos^2 c \\ - \frac{Cos^2 c + Cos^2 r - 2\, Cos\, c\, Cos\, r\, Cos\, A}{n^2} = 0.$$

Dus is

$$Cos\, r_1 = B\, Cos\, c \\ \pm \frac{1}{n} \sqrt{\{(B^2 Cos^2 c - Cos^2 c) n^2 + Cos^2 c + Cos^2 r - 2 Cos c Cos r Cos A\}}$$

of, als wij voor B^2 schrijven $\dfrac{n^2 - Sin^2 A}{n^2}$,

$$Cos\, r_1 = B\, Cos\, c \pm \frac{1}{n}(Cos\, r - Cos\, c\, Cos\, A).$$

Om te zien, welk teeken wij hier moeten nemen in de waarde voor $Cos\, r_1$, merken wij op, dat voor $n = 1$ geen breking plaats heeft, en dat dan r_1 moet overgaan in r. Daar zulks voor het bovenste teeken geschiedt, is voor den gebroken straal:

$$Cos\, r_1 = B\, Cos\, c + \frac{1}{n}(Cos\, r - Cos\, c\, Cos\, A).$$

Evenzoo $\quad Cos\, p_1 = B\, Cos\, a + \dfrac{1}{n}(Cos\, p - Cos\, a\, Cos\, A),$

$$Cos\, q_1 = B\, Cos\, b + \frac{1}{n}\,(Cos\, q - Cos\, b\, Cos\, A).$$

§ 4. Als n de brekings-coëfficient van de lucht in glas is, dan geven de voorgaande formules de richting aan van een straal, die van de lucht in het glas gaat. Als (p, q, r) een straal is, die van het glas in de lucht gaat, moet men in die formules n vervangen door $\frac{1}{n}$, waardoor men krijgt:

$$Cos\, p_1 = B'\, Cos\, a + n\,(Cos\, p - Cos\, a\, Cos\, A)\text{, enz.}$$

waarin $B' = \pm\sqrt{1 - n^2\, Sin^2\, A}$, terwijl B' hetzelfde teeken heeft als $Cos . A$.

§ 5. *Door een plat vlak (α, β, γ) wordt een lichtstraal (p, q, r) teruggekaatst; de richtingshoeken p_1, q_1, r_1 van den teruggekaatsten straal te bepalen.*

Als de loodlijn, uit den oorsprong op het gegeven vlak neergelaten, een scherpen hoek maakt met den invallenden straal, dan maakt zij een stompen hoek met den teruggekaatsten straal; en omgekeerd. En daar die hoeken verder elkanders supplement zijn, heeft men:

$$Cos\, p_1\, Cos\, \alpha + Cos\, q_1\, Cos\, \beta + Cos\, r_1\, Cos\, \gamma$$
$$= -(Cos\, p\, Cos\, \alpha + Cos\, q\, Cos\, \beta + Cos\, r\, Cos\, \gamma) = -\, Cos\, A.$$

Daar de invallende straal en de teruggekaatste straal in één plat vlak liggen met de loodlijn, in het invalspunt op het gegeven vlak opgericht, zoo heeft men, even als in het vorige problema,

$$\begin{vmatrix} Cos\, p_1 & Cos\, q_1 & Cos\, r_1 \\ Cos\, \alpha & Cos\, \beta & Cos\, \gamma \\ Cos\, p & Cos\, q & Cos\, r \end{vmatrix} = 0.\quad \text{Ook is}$$

$$Cos^2\, p_1 + Cos^2\, q_1 + Cos^2\, r_1 = 1 \quad \text{en (zie hierboven)}$$
$$Cos\, p_1\, Cos\, \alpha + Cos\, q_1\, Cos\, \beta + Cos\, r_1\, Cos\, \gamma = -\, Cos\, A.$$

Uit deze drie vergelijkingen moeten p_1, q_1 en r_1 bepaald worden. p_1 elimineert men uit de twee vergelijkingen van den eersten graad, door in de bovenstaande determinant bij de eerste kolom, vermenigvuldigd met $Cos\, \alpha$, op te tellen de tweede kolom, maal $Cos\, \beta$, en de derde kolom, maal $Cos\, \gamma$.

Men vindt dan

$$\begin{vmatrix} -Cos\,A & Cos\,q_1 & Cos\,r_1 \\ 1 & Cos\,\beta & Cos\,\gamma \\ Cos\,A & Cos\,q & Cos\,r \end{vmatrix} = 0, \text{ of}$$

$$Cos\,q_1\,(Cos\,\gamma\,Cos\,A - Cos\,r) + Cos\,r_1\,(Cos\,q - Cos\,\beta\,Cos\,A)$$
$$= Cos\,A\,(Cos\,\beta\,Cos\,r - Cos\,\gamma\,Cos\,q).$$

Evenzoo verkrijgt men:

$$\begin{vmatrix} Cos\,p_1 & -Cos\,A & Cos\,r_1 \\ Cos\,\alpha & 1 & Cos\,\gamma \\ Cos\,p & Cos\,A & Cos\,r \end{vmatrix} = 0, \text{ of}$$

$$Cos\,p_1\,(Cos\,r - Cos\,\gamma\,Cos\,A) + Cos\,r_1\,(Cos\,\alpha\,Cos\,A - Cos\,p)$$
$$= Cos\,A\,(Cos\,\gamma\,Cos\,p - Cos\,\alpha\,Cos\,r).$$

Substitueert men de waarden voor $Cos\,p_1$ en $Cos\,q_1$ uit de twee laatste vergelijkingen in $Cos^2\,p_1 + Cos^2\,q_1 + Cos^2\,r_1 = 1$, dan verkrijgt men:

$$Cos^2\,r_1\,\{(Cos\,p - Cos\,\alpha\,Cos\,A)^2 + (Cos\,q - Cos\,\beta\,Cos\,A)^2$$
$$+ (Cos\,r - Cos\,\gamma\,Cos\,A)^2\} - 2\,Cos\,r_1\,Cos\,A \times$$
$$\times \{(Cos\,p - Cos\,\alpha\,Cos\,A)(Cos\,\alpha\,Cos\,r - Cos\,\gamma\,Cos\,p)$$
$$+ (Cos\,q - Cos\,\beta\,Cos\,A) \times (Cos\,\beta\,Cos\,r - Cos\,\gamma\,Cos\,q)\}$$
$$+ Cos^2\,A\,(Cos\,\gamma\,Cos\,p - Cos\,\alpha\,Cos\,r)^2 + Cos^2\,A \times$$
$$\times (Cos\,\beta\,Cos\,r - Cos\,\gamma\,Cos\,q)^2 - (Cos\,r - Cos\,\gamma\,Cos\,A)^2 = 0.$$

Na herleiding wordt deze vergelijking:

$$Cos^2\,r_1\,Sin^2\,A + 2\,Cos\,r_1\,Cos\,\gamma\,Cos\,A\,Sin^2\,A$$
$$+ Sin^2\,A\,(2\,Cos\,r\,Cos\,\gamma\,Cos\,A - Cos^2\,r) = 0,$$

of $Cos^2 r_1 + 2 Cos r_1 Cos\gamma Cos A + 2 Cos r Cos\gamma Cos A - Cos^2 r = 0,$

of $\quad Cos^2\,r_1 - Cos^2\,r + 2\,Cos\,\gamma\,Cos\,A\,(Cos\,r_1 + Cos\,r) = 0,$

of $\quad (Cos\,r_1 - Cos\,r + 2\,Cos\,\gamma\,Cos\,A)(Cos\,r_1 + Cos\,r) = 0.$

Neemt men hierin $Cos\,r_1 + Cos\,r = 0$, dan krijgt men $r_1 = -r$. Deze waarde komt overeen met de tegengestelde richting van den invallenden straal. Deze oplossing, die men vooruit verwachten kan, mag weggelaten worden, waardoor men verkrijgt:

$$Cos\,r_1 - Cos\,r + 2\,Cos\,\gamma\,Cos\,A = 0,$$

of $\quad Cos\,r_1 = Cos\,r - 2\,Cos\,\gamma\,Cos\,A.$

Evenzoo $\quad Cos\,p_1 = Cos\,p - 2\,Cos\,\alpha\,Cos\,A,$

$$Cos\,q_1 = Cos\,q - 2\,Cos\,\beta\,Cos\,A.$$

§ 6. *Nu willen wij de richting van een straal (p, q, r) bepalen, nadat die straal gebroken, teruggekaatst en nogmaals gebroken* *is door den spiegel, wiens voorvlak* (a, b, c) *en wiens achtervlak* (α, β, γ) *is.*

Zij (p_1, q_1, r_1) de straal, die eenmaal gebroken is;

(p_2, q_2, r_2) de straal, die eens gebroken en eens teruggekaatst is;

(p_3, q_3, r_3) de straal, die uit den spiegel komt.

Volgens § 3 hebben wij onmiddellijk:

$$Cos\, p_1 = B\, Cos\, a + \frac{1}{n}(Cos\, p - Cos\, a\, Cos\, A),$$

$$Cos\, q_1 = B\, Cos\, b + \frac{1}{n}(Cos\, q - Cos\, b\, Cos\, A),$$

$$Cos\, r_1 = B\, Cos\, c + \frac{1}{n}(Cos\, r - Cos\, c\, Cos\, A).$$

Hierin is

$$Cos\, A = Cos\, a\, Cos\, p + Cos\, b\, Cos\, q + Cos\, c\, Cos\, r$$

$$B = \pm\sqrt{\frac{n^2 - Sin^2 A}{n^2}},$$

waarin B hetzelfde teeken heeft als $Cos\, A$.

Volgens § 5 heeft men:

$$Cos\, p_2 = Cos\, p_1 - 2\, Cos\, \alpha\, Cos\, A_1,$$

waarin $Cos\, A_1 = Cos\, \alpha\, Cos\, p_1 + Cos\, \beta\, Cos\, q_1 + Cos\, \gamma\, Cos\, r_1$

$$= B\,(Cos\, a\, Cos\, \alpha + Cos\, b\, Cos\, \beta + Cos\, c\, Cos\, \gamma)$$

$$+ \frac{1}{n}(Cos\, \alpha\, Cos\, p + Cos\, \beta\, Cos\, q + Cos\, \gamma\, Cos\, r)$$

$$- \frac{1}{n} Cos\, A\,(Cos\, a\, Cos\, \alpha + Cos\, b\, Cos\, \beta + Cos\, c\, Cos\, \gamma).$$

Als de oorsprong der coördinaten niet tusschen voor- en achtervlak van den spiegel ligt, is $Cos\, a\, Cos\, \alpha + Cos\, b\, Cos\, \beta + Cos\, c\, Cos\, \gamma$ de cosinus van den hoek, die voor- en achtervlak van den spiegel met elkander maken. Die hoek is zeer klein, en als wij dien hoek δ noemen, is:

$$Cos\, \delta = 1 - \frac{\delta^2}{1.2} + \ldots.$$

en daar δ zeer klein is, kunnen wij voor $Cos\, \delta$ 1 stellen.

Stellen wij bovendien $Cos\, \alpha\, Cos\, p + Cos\, \beta\, Cos\, q + Cos\, \gamma\, Cos\, r = Cos\, C$, en vervangen wij in de waarde voor $Cos\, p_2$, de cosinus van p_1 door den vroeger gevonden vorm, dan komt er:

$$Cos\, p_2 = \frac{Cos\, p - Cos\, a\, Cos\, A}{n} - B\, Cos\, \alpha$$

$$+ B\,(Cos\, a - Cos\, \alpha) + \frac{2\, Cos\, \alpha}{n}\,(Cos\, A - Cos\, C).$$

Daar voor- en achtervlak van den spiegel een zeer kleinen hoek met elkander maken, is ook de hoek, gevormd door de loodlijnen, uit den oorsprong op die twee vlakken neergelaten, zeer klein. En hieruit volgt weder, dat $Cos\, a - Cos\, \alpha$ en $Cos\, A - Cos\, C$ zeer klein zijn. In de voorgaande waarde van $Cos\, p_2$ zijn dus de twee laatste termen zeer klein.

Men verkrijgt de waarde voor $Cos\, q_2$, als men in de waarde voor $Cos\, p_2$ p vervangt door q, a door b en α door β. Evenzoo voor $Cos\, r_2$.

Bij al het volgende zullen wij steeds het produkt van twee zeer kleine grootheden verwaarloozen.

Voor den straal, die uit den spiegel komt, heeft men volgens § 4

$$Cos\, p_3 = B_1\, Cos\, a + n\,(Cos\, p_2 - Cos\, A_2\, Cos\, a),$$

waarin $Cos\, A_2 = Cos\, a\, Cos\, p_2 + Cos\, b\, Cos\, q_2 + Cos\, c\, Cos\, r_2$

$$= - B + \frac{2}{n}(Cos\, A - Cos\, C).$$

Hierin is $Cos\, A - Cos\, C$ zeer klein, zoodat $Cos\, A_2$ het tegengestelde teeken heeft van B.

$$B_1 = \pm \sqrt{(1 - n^2\, Sin^2\, A_2)}$$
$$= \pm \sqrt{(1 + n^2\, Cos^2\, A_2 - n^2)}.$$

Stellen wij hierin

$$Cos^2\, A_2 = \left\{ - B + \frac{2}{n}(Cos\, A - Cos\, C)\right\}^2$$

$$= B^2 - \frac{4B}{n}(Cos\, A - Cos\, C)$$

of, daar $$B^2 = \frac{n^2 - Sin^2\, A}{n^2},$$

$$Cos^2\, A_2 = \frac{n^2 - Sin^2\, A}{n^2} - \frac{4B}{n}(Cos\, A - Cos\, C),$$

dan komt er:

$$B_1 = \pm \sqrt{\left\{Cos^2\, A - 4Bn\,(Cos\, A - Cos\, C)\right\}}$$

$$B_1 = Cos\, A \sqrt{\left\{1 - \frac{4Bn\,(Cos\, A - Cos\, C)}{Cos^2\, A}\right\}}.$$

Daar $Cos\,A - Cos\,C$ zeer klein is, kan men schrijven:

$$B_1 = \pm\, Cos\,A \left\{1 - \frac{2Bn\,(Cos\,A - Cos\,C)}{Cos^2\,A}\right\},$$

$$B_1 = \pm \left\{Cos\,A - \frac{2Bn\,(Cos\,A - Cos\,C)}{Cos\,A}\right\}.$$

De vorm tusschen accolades heeft hetzelfde teeken als $Cos\,A$. Maar B_1 moet hetzelfde teeken hebben als $Cos\,A_2$, en hierboven hebben wij gezien, dat $Cos\,A_2$ het tegengestelde teeken heeft van B. B_1 heeft dus het tegengestelde teeken van B en dus ook van $Cos\,A$, zoodat wij in de voorgaande waarde voor B_1 het onderste teeken moeten nemen.

Dus is $$B_1 = -\,Cos\,A + \frac{2Bn\,(Cos\,A - Cos\,C)}{Cos\,A}.$$

Door substitutie der waarden voor $Cos\,p_2$, $Cos\,A_2$ en B_1 in den vorm, die hierboven voor $Cos\,p_3$ gegeven is, vindt men:

$$Cos\,p_3 = -\,Cos\,a\,Cos\,A + \frac{2Bn\,Cos\,a\,(Cos\,A - Cos\,C)}{Cos\,A}$$

$$+\,Cos\,p - Cos\,a\,Cos\,A - nB\,Cos\,\alpha + nB\,(Cos\,a - Cos\,\alpha)$$

$$+2\,Cos\,\alpha\,(Cos\,A - Cos\,C) + nB\,Cos\,a - 2\,Cos\,a\,(Cos\,A - Cos\,C)$$

of $$Cos\,p_3 = Cos\,p - 2\,Cos\,a\,Cos\,A + \frac{2Bn\,Cos\,a\,(Cos\,A - Cos\,C)}{Cos\,A}$$

$$+\,2nB\,(Cos\,a - Cos\,\alpha) - 2\,(Cos\,a - Cos\,\alpha)\,(Cos\,A - Cos\,C).$$

Daar twee factoren van het laatste product zeer klein zijn, kan men het weglaten. Verder kan men de twee voorgaande termen samenvatten tot:

$$\frac{2Bn}{Cos\,A}(Cos\,a\,Cos\,A - Cos\,a\,Cos\,C + Cos\,a\,Cos\,A - Cos\,\alpha\,Cos\,A).$$

Voor $Cos\,a\,Cos\,A - Cos\,a\,Cos\,C$ kan men schrijven:

$$Cos\,\alpha\,Cos\,A - Cos\,\alpha\,Cos\,C,$$

daar het verschil van beide vormen een produkt

$$(Cos\,\alpha - Cos\,\alpha)(Cos\,A - Cos\,C)$$

is, waarvan beide factoren zeer klein zijn. Het voorgaande wordt dan:

$$\frac{2Bn}{Cos\,A}(Cos\,\alpha\,Cos\,A - Cos\,\alpha\,Cos\,C + Cos\,a\,Cos\,A - Cos\,\alpha\,Cos\,A)$$

of $$\frac{2Bn}{Cos\,A}(Cos\,a\,Cos\,A - Cos\,\alpha\,Cos\,C),$$

waarin de vorm tusschen haakjes zeer klein is.

Men heeft nu ten slotte:

$$Cos\,p_3 = Cos\,p - 2Cos\,a\,Cos\,A + \frac{2nB}{Cos\,A}(Cos\,a\,Cos\,A - Cos\,\alpha\,Cos\,C).$$

Evenzoo:

$$Cos\,q_3 = Cos\,q - 2Cos\,b\,Cos\,A + \frac{2nB}{Cos\,A}(Cos\,b\,Cos\,A - Cos\,\beta\,Cos\,C),$$

$$Cos\,r_3 = Cos\,r - 2\,Cos\,c\,Cos\,A + \frac{2nB}{Cos\,A}(Cos\,c\,Cos\,A - Cos\,\gamma\,Cos\,C).$$

Opmerking. Voor den hoek tusschen den straal (p, q, r) en dienzelfden straal, nadat hij uit den spiegel komt, vindt men:

$$Cos\,p\,Cos\,p_3 + Cos\,q\,Cos\,q_3 + Cos\,r\,Cos\,r_3 = 1 - 2\,Cos^2\,A + \frac{2nB}{Cos\,A}(Cos^2\,A - Cos^2\,C).$$

§ 7. *Bepalen wij nu de richting van den straal* (p, q, r), *nadat hij even als in de vorige § door den spiegel* (a, b, c), (α, β, γ) *tweemaal gebroken en eenmaal teruggekaatst is, en vervolgens door den spiegel, wiens voorvlak* (a_1, b_1, c_1) *en wiens achtervlak* $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ *is, tweemaal gebroken en eenmaal teruggekaatst wordt.*

Noemen wij den straal, die uit den tweeden spiegel komt, (p_6, q_6, r_6), dan worden p_6, q_6, r_6 uit p_3, q_3, r_3 bepaald, op dezelfde wijze, als p_3, q_3, r_3 uit p, q en r bepaald worden. Men heeft dus onmiddellijk:

$$Cos\,p_6 = Cos\,p_3 - 2\,Cos\,a_1\,Cos\,A_3 + \frac{2nB_3}{Cos\,A_3}(Cos\,a_1\,Cos\,A_3 - Cos\,\alpha_1\,Cos\,C_3),$$

waarin:

$$Cos\,A_3 = Cos\,a_1\,Cos\,p_3 + Cos\,b_1\,Cos\,q_3 + Cos\,c_1\,Cos\,r_3,$$
$$Cos\,C_3 = Cos\,\alpha_1\,Cos\,p_3 + Cos\,\beta_1\,Cos\,q_3 + Cos\,\gamma_1\,Cos\,r_3,$$
$$B_3 = \pm\frac{1}{n}\sqrt{(n^2 - Sin^2\,A_3)}.$$

B_3 moet hetzelfde teeken hebben als $Cos\,A_3$.

Stellen wij verder:

$$Cos\,a_1\,Cos\,p + Cos\,b_1\,Cos\,q + Cos\,c_1\,Cos\,r = Cos\,D,$$
$$Cos\,\alpha_1\,Cos\,p + Cos\,\beta_1\,Cos\,q + Cos\,\gamma_1\,Cos\,r = Cos\,E,$$
$$Cos\,a_1\,Cos\,\alpha_1 + Cos\,b_1\,Cos\,\beta_1 + Cos\,c_1\,Cos\,\gamma_1 = Cos\,\varepsilon,$$
$$Cos\,a\;\;Cos\,a_1 + Cos\,b\;\;Cos\,b_1 + Cos\,c\;\;Cos\,c_1 = Cos\,F,$$
$$Cos\,a\;\;Cos\,\alpha_1 + Cos\,b\;\;Cos\,\beta_1 + Cos\,c\;\;Cos\,\gamma_1 = Cos\,G,$$
$$Cos\,\alpha\;\;Cos\,a_1 + Cos\,\beta\;\;Cos\,b_1 + Cos\,\gamma\;\;Cos\,c_1 = Cos\,H,$$
$$Cos\,\alpha\;\;Cos\,\alpha_1 + Cos\,\beta\;\;Cos\,\beta_1 + Cos\,\gamma\;\;Cos\,\gamma_1 = Cos\,I.$$

D is dan de hoek, dien de gegeven straal maakt met de loodlijn, uit den oorsprong op het voorvlak van den tweeden spiegel neêrgelaten.

E is de hoek, dien de gegeven straal maakt met de loodlijn, uit den oorsprong op het achtervlak van den tweeden spiegel neêrgelaten.

ε is de zeer kleine hoek tusschen voor- en achtervlak van den tweeden spiegel, zoodat wij kunnen stellen $Cos\,\varepsilon = 1$.

F is de hoek tusschen de loodlijnen, uit den oorsprong op de voorvlakken der twee spiegels neêrgelaten.

Evenzoo hebben G, H en I eene meetkundige beteekenis, die onmiddellijk in het oog valt.

Daar voor- en achtervlak van den tweeden spiegel een zeer kleinen hoek vormen, verschillen ook a_1 en α_1, b_1 en β_1, c_1 en γ_1 zeer weinig. Evenzoo D en E, F en G, H en I.

Men heeft verder:

$$Cos\,A_3 = Cos\,D - 2 Cos A\,Cos F + \frac{2nB}{Cos A}(Cos A\,Cos F - Cos C\,Cos H),$$

$$Cos C_3 = Cos\,E - 2 Cos A\,Cos G + \frac{2nB}{Cos A}(Cos A\,Cos\,G - Cos C\,Cos I).$$

Deze waarden voor $Cos\,A_3$, $Cos\,C_3$ en de waarde voor $Cos\,p_3$ gesubstitueerd in de waarde voor $Cos\,p_6$, geven:

$$Cos\,p_6 = Cos\,p - 2\,Cos\,a\,Cos\,A - 2\,Cos\,a_1\,Cos\,D$$
$$+ 4\,Cos\,a_1\,Cos\,A\,Cos\,F + \frac{2nB}{Cos\,A}(Cos\,a\,Cos\,A - Cos\,\alpha\,Cos\,C)$$
$$- \frac{4nB\,Cos\,a_1}{Cos\,A}(Cos\,A\,Cos\,F - Cos\,C\,Cos\,H)$$
$$+ \frac{2nB_3}{Cos\,A_3}(Cos\,a_1\,Cos\,A_3 - Cos\,\alpha_1\,Cos\,C_3).$$

De drie laatste termen van deze waarde voor $Cos\, p_6$ zijn zeer klein. Op dezelfde wijze heeft men:

$$Cos\, q_6 = Cos\, q - 2\, Cos\, b\, Cos\, A - 2\, Cos\, b_1\, Cos\, D$$

$$+ 4\, Cos\, b_1\, Cos\, A\, Cos\, F + \frac{2nB}{Cos\, A}(Cos\, b\, Cos\, A - Cos\, \beta\, Cos\, C)$$

$$- \frac{4nB\, Cos\, b_1}{Cos\, A}(Cos\, A\, Cos\, F - Cos\, C\, Cos\, H)$$

$$+ \frac{2nB_3}{Cos\, A_3}(Cos\, b_1\, Cos\, A_3 - Cos\, \beta_1\, Cos\, C_3),$$

$$Cos_6\, r = Cos\, r - 2\, Cos\, c\, Cos\, A - 2\, Cos\, c_1\, Cos\, D$$

$$+ 4\, Cos\, c_1\, Cos\, A\, Cos\, F + \frac{2nB}{Cos\, A}(Cos\, c\, Cos\, A - Cos\, \gamma\, Cos\, C)$$

$$- \frac{4nB\, Cos\, c_1}{Cos\, A}(Cos\, A\, Cos\, F - Cos\, C\, Cos\, H)$$

$$+ \frac{2nB_3}{Cos\, A_3}(Cos\, c_1\, Cos\, A_3 - Cos\, \gamma_1\, Cos\, C_3).$$

Voor de afwijking van den straal, nadat hij uit den tweeden spiegel komt, vindt men:

$$Cos\, p\, Cos\, p_6 + Cos\, q\, Cos\, q_6 + Cos\, r\, Cos\, r_6$$

$$= 1 - 2Cos^2 A - 2Cos^2 D + 4 Cos A\, Cos D\, Cos F - \frac{2nB}{Cos A}(Cos^2 A - Cos^2 C)$$

$$- \frac{4nB\, Cos\, D}{Cos\, A}(Cos\, A\, Cos\, F - Cos\, C\, Cos\, H)$$

$$+ \frac{2nB_3}{Cos\, A_3}(Cos\, D\, Cos\, A_3 - Cos\, E\, Cos\, C_3).$$

§ 8. Veronderstellen wij nu, dat de tweede spiegel niet zooals hierboven geheel willekeurig geplaatst zij, maar dat zijn voorvlak eerst evenwijdig zij aan dat van den eersten spiegel, en dat men vervolgens het voorvlak van den tweeden spiegel een hoek ϕ late draaien om de *Z*-as. Men heeft dan volgens § 2:

$$Cos\, a_1 = Cos\, a\, Cos\, \phi - Cos\, b\, Sin\, \phi,$$
$$Cos\, b_1 = Cos\, a\, Sin\, \phi + Cos\, b\, Cos\, \phi,$$
$$Cos\, c_1 = Cos\, c.$$

Op dezelfde wijze heeft men, als het achtervlak van den tweeden spiegel vóór de omwenteling $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ is, voor dat vlak na de omwenteling

$$Cos\,\alpha_1 = Cos\,\alpha_2\; Cos\,\phi - Cos\,\beta_2\; Sin\,\phi,$$
$$Cos\,\beta_1 = Cos\,\alpha_2\; Sin\,\phi + Cos\,\beta_2\; Cos\,\phi,$$
$$Cos\,\gamma_1 = Cos\,\gamma_2\,,$$

waarin α_2, β_2, γ_2 respectievelijk zeer weinig verschillen van a, b, c en α, β, γ, terwijl α_1, β_1, γ_1 respectievelijk zeer weinig verschillen van a_1, b_1, c_1.

Substitueert men de voorgaande waarden voor a_1, b_1, c_1, α_1, β_1, γ_1 in de formules der vorige §, dan blijven daarbij Cos A, Cos C en $Cos\,\varepsilon$ onveranderd.

Cos D wordt $Cos\,a\; Cos\,p\; Cos\,\phi - Cos\,b\; Cos\,p\; Sin\,\phi$
$+ Cos\,a\; Cos\,q\; Sin\,\phi + Cos\,b\; Cos\,q\; Cos\,\phi + Cos\,c\; Cos\,r.$

Cos E wordt $Cos\,\alpha_2\; Cos\,p\; Cos\,\phi - Cos\,\beta_2\; Cos\,p\; Sin\,\phi$
$+ Cos\,\alpha_2\; Cos\,q\; Sin\,\phi + Cos\,\beta_2\; Cos\,q\; Cos\,\phi + Cos\,\gamma_2\; Cos\,r.$

CosF wordt $(Cos^2 a + Cos^2 b) Cos\,\phi + Cos^2 c = Cos\,\phi + Cos^2 c (1 - Cos\,\phi).$

Cos G wordt $Cos\,a\; Cos\,\alpha_2\; Cos\,\phi - Cos\,a\; Cos\,\beta_2\; Sin\,\phi$
$+ Cos\,b\; Cos\,\alpha_2\; Sin\,\phi + Cos\,b\; Cos\,\beta_2\; Cos\,\phi + Cos\,c\; Cos\,\gamma_2.$

Cos H wordt $Cos\,a\; Cos\,\alpha\; Cos\,\phi - Cos\,b\; Cos\,\alpha\; Sin\,\phi$
$+ Cos\,a\; Cos\,\beta\; Sin\,\phi + Cos\,b\; Cos\,\beta\; Cos\,\phi + Cos\,c\; Cos\,\gamma.$

Cos I wordt $Cos\,\alpha\; Cos\,\alpha_2\; Cos\,\phi - Cos\,\alpha\; Cos\,\beta_2\; Sin\,\phi$
$+ Cos\,\alpha_2\; Cos\,\beta\; Sin\,\phi + Cos\,\beta\; Cos\,\beta_2\; Cos\,\phi + Cos\,\gamma\; Cos\,\gamma_2.$

Door substitutie der bovenstaande waarden voor a_1 b_1, c_1, α_1, β_1, γ_1, in de formules der voorgaande §, vindt men voor den straal, die door de twee spiegels gebroken en terruggekaatst is,

$$\begin{aligned}
Cos\,\mathrm{P} = {} & Cos\,p - 2\, Cos\,a\; Cos\,\mathrm{A} \\
& - 2\,(Cos\,a\; Cos\,\phi - Cos\,b\; Sin\,\phi)(Cos\,\mathrm{D} - 2\, Cos\,\mathrm{A}\; Cos\,\mathrm{F}) \\
& + \frac{2n\mathrm{B}}{Cos\,\mathrm{A}}\,(Cos\,a\; Cos\,\mathrm{A} - Cos\,\alpha\; Cos\,\mathrm{C}) \\
& - \frac{4n\mathrm{B}\,(Cos\,a\; Cos\,\phi - Cos\,b\; Sin\,\phi)}{Cos\,\mathrm{A}}\,(Cos\,\mathrm{A}\; Cos\,\mathrm{F} - Cos\,\mathrm{C}\; Cos\,\mathrm{H}) \\
& + \frac{2n\mathrm{B}_3}{Cos\,\mathrm{A}_3}\,\{(Cos\,a\; Cos\,\phi - Cos\,b\; Sin\,\phi)\, Cos\,\mathrm{A}_3 \\
& - (Cos\,\alpha_2\; Cos\,\phi - Cos\,\beta_2\; Sin\,\phi)\, Cos\,\mathrm{C}_3\}\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Cos\,\mathrm{Q} = {} & Cos\,q - 2\, Cos\,b\; Cos\,\mathrm{A} \\
& - 2\,(Cos\,a\; Sin\,\phi + Cos\,b\; Cos\,\phi)(Cos\,\mathrm{D} - 2\, Cos\,\mathrm{A}\; Cos\,\mathrm{F}) \\
& + \frac{2n\mathrm{B}}{Cos\,\mathrm{A}}\,(Cos\,b\; Cos\,\mathrm{A} - Cos\,\beta\; Cos\,\mathrm{C})
\end{aligned}$$

$$-\frac{4nB(Cos\,a\,Sin\,\Phi + Cos\,b\,Cos\,\Phi)}{Cos\,A}(Cos A\,Cos F - Cos C\,Cos H)$$

$$+\frac{2nB_3}{Cos\,A_3}\{(Cos\,a\,Sin\,\Phi + Cos\,b\,Cos\,\Phi)\,Cos\,A_3$$

$$-(Cos\,\alpha_2\,Sin\,\Phi + Cos\,\beta_2\,Cos\,\Phi)\,Cos\,C_3\}.$$

$$Cos\,R = Cos\,r - 2\,Cos\,c\,Cos\,A - 2\,Cos\,c\,(Cos\,D - 2\,Cos\,A\,Cos\,F)$$

$$+\frac{2nB}{Cos\,A}(Cos\,c\,Cos\,A - Cos\,\gamma\,Cos\,C)$$

$$-\frac{4nB\,Cos\,c}{Cos\,A}(Cos\,A\,Cos\,F - Cos\,C\,Cos\,H)$$

$$+\frac{2nB_3}{Cos\,A_3}(Cos\,c_2\,Cos\,A_3 - Cos\,\gamma_2\,Cos\,C_3),$$

waarin $Cos\,D$, $Cos\,E$, $Cos\,G$, $Cos\,H$, $Cos\,I$ de hierboven aangegeven vormen voorstellen; terwijl $Cos\,A_3$ en B_3 dezelfde vormen voorstellen als in § 7.

Daar in de drie voorgaande formules uitgedrukt wordt, hoe de richting van een straal, die den tweeden spiegel verlaat, bepaald wordt uit de richting van den gegeven straal en den stand der beide spiegels; *zoo maken de drie voorgaande formules de algemeene oplossing van de voorgestelde vraag uit.*

---

§ 9. Gaan wij nu over tot *het bijzondere geval,* dat de spiegelvlakken bijna evenwijdig zijn met de lijn, waarom gewenteld wordt, dus bijna evenwijdig met de Z-as; en dat de gegeven straal die lijn, dus de Z-as, bijna rechthoekig kruist. Kiezen wij verder de Y-as evenwijdig aan het vlak (a, b, c), dan staat de X-as bijna rechthoekig op dat vlak. Nu zijn de hoeken

β, β_2, c, γ, γ_2 en r bijna recht;

dus $Cos\,\beta$, $Cos\,\beta_2$, $Cos\,c$, $Cos\,\gamma$, $Cos\,\gamma_2$ en $Cos\,r$ zeer klein.

Daar $b = 90°$ is, is $Cos\,b = 0$. Daar a, α en α_2 zeer klein zijn, kan men stellen:

$$Cos\,a = Cos\,\alpha = Cos\,\alpha_2 = 1.$$

Wij kunnen verder, omdat $Cos\,r$ zeer klein is, in plaats van:

$Cos^2\,p + Cos^2\,q + Cos^2\,r = 1$ schrijven,

$Cos^2\,p + Cos^2\,q = 1,$

of m. a. w., wij kunnen q als het complement van p beschouwen.

Volgens al het voorgaande wordt nu, als wij telkens het produkt van twee zeer kleine getallen weglaten, en q vervangen door $90^\circ - p$,

$Cos\,A = Cos\,p$,

$Cos\,C = Cos\,p + Cos\,\beta\,Cos\,q = Cos\,p + Cos\,\beta\,Sin\,p$,

$Cos\,D = Cos\,p\,Cos\,\phi + Cos\,q\,Sin\,\phi = Cos\,(p - \phi)$,

$Cos\,E = Cos\,(p - \phi) - Cos\,\beta_2\,(Cos\,p\,Sin\,\phi - Cos\,q\,Cos\,\phi)$
$\quad = Cos\,(p - \phi) + Cos\,\beta_2\,Sin\,(p - \phi)$,

$Cos\,F = Cos\,\phi$,

$Cos\,G = Cos\,\phi - Cos\,\beta_2\,Sin\,\phi$,

$Cos\,H = Cos\,\phi + Cos\,\beta\,Sin\,\phi$,

$Cos\,I = Cos\,\phi + (Cos\,\beta - Cos\,\beta_2)\,Sin\,\phi$,

$$Cos\,p_3 = -Cos\,p - \frac{2\sqrt{n^2 - Sin^2\,p}}{Cos\,p}\,Cos\,\beta\,Sin\,p,$$

$Cos\,q_3 = Sin\,p - 2\sqrt{n^2 - Sin^2\,p}\,Cos\,\beta$,

$Cos\,r_3 = Cos\,r - 2\,Cos\,c\,Cos\,p + 2\sqrt{n^2 - Sin^2\,p}\,(Cos\,c - Cos\,\gamma)$,

$Cos\,a_1 = Cos\,\phi$, $\quad Cos\,b_1 = Sin\,\phi$, $\quad Cos\,c_1 = Cos\,c$,

$Cos\,\alpha_1 = Cos\,\phi - Cos\,\beta_2\,Sin\,\phi$, $\quad Cos\,\beta_1 = Sin\,\phi + Cos\,\beta_2\,Cos\,\phi$,
$\quad Cos\,\gamma_1 = Cos\,\gamma_2$,

$$Cos\,A_3 = -\,Cos\,(p + \phi) - \frac{2\sqrt{n^2 - Sin^2\,p}}{Cos\,p}\,Cos\,\beta\,Sin\,(p + \phi),$$

$$Cos\,C_3 = -\,Cos\,(p + \phi) - \frac{2\sqrt{n^2 - Sin^2\,p}}{Cos\,p}\,Cos\,\beta\,Sin\,(p + \phi)$$
$$+ Cos\,\beta_2\,Sin\,(p + \phi).$$

Deze waarden moeten wij substitueeren in de formules van § 8. Daar B_3 moet vermenigvuldigd worden met een vorm, die zeer klein is, kunnen wij van B_3 een zeer klein gedeelte weglaten en dus voor $B_3 = \pm \frac{1}{n}\sqrt{n^2 - 1 + Cos^2\,A_3}$ schrijven:

$$-\frac{1}{n}\sqrt{n^2 - 1 + Cos^2\,(p + \phi)} = -\frac{1}{n}\sqrt{n^2 - Sin^2\,(p + \phi)}.$$

Door die substitutie gaan de formulen van § 8 over in:

$$Cos\,P = Cos\,(p + 2\phi) + \frac{2\sqrt{n^2 - Sin^2\,p}}{Cos\,p}\,Sin\,(p + 2\phi)\,Cos\,\beta$$
$$- \frac{2\sqrt{n^2 - Sin^2\,(p + \phi)}}{Cos\,(p + \phi)}\,Sin\,(p + 2\phi)\,Cos\,\beta_2.$$

$$Cos\,Q = Sin\,(p + 2\phi) - \frac{2\sqrt{n^2 - Sin^2 p}}{Cos\,p}\,Cos\,(p + 2\phi)\,Cos\,\beta$$

$$+ \frac{2\sqrt{n^2 - Sin^2(p + \phi)}}{Cos\,(p + \phi)}\,Cos\,(p + 2\phi)\,Cos\,\beta_2.$$

$$Cos\,R = Cos\,r - 2\,Cos\,c\,\{Cos\,p - Cos\,(p + \phi)\}$$

$$+ 2\sqrt{n^2 - Sin^2 p}\,(Cos\,c - Cos\,\gamma)$$

$$- 2\sqrt{n^2 - Sin^2(p + \phi)}\,(Cos\,c - Cos\,\gamma_2).$$

$$Cos\,p\,Cos\,P + Cos\,q\,Cos\,Q + Cos\,r\,Cos\,R = Cos\,2\phi$$

$$+ \frac{2\sqrt{n^2 - Sin^2 p)}}{Cos\,p}\,Sin\,2\phi\,Cos\,\beta$$

$$- \frac{2\sqrt{n^2 - Sin^2(p + \phi)}}{Cos\,(p + \phi)}\,Sin.\,2\phi\,Cos\,\beta_2.$$

In deze vormen heeft $\sqrt{n^2 - Sin^2 p}$ hetzelfde teeken als $Cos\,p$,

$\sqrt{n^2 - Sin^2(p+\phi)}$ » » » $Cos(p+\phi)$.

De bovenstaande waarde voor $Cos\,R$ bestaat uit termen, die alle zeer klein zijn. Van de waarde voor $Cos\,P$ zijn alle termen, behalve de eerste, zeer klein; evenzoo de waarde voor $Cos\,Q$.

§ 10. Voegen wij bij de onderstellingen van de vorige paragraaf nog de onderstelling, dat in elken spiegel de lijn van doorsnede van het verlengde voor- en achtervlak bijna evenwijdig is met de lijn, waarom gewenteld wordt, dus met de Z-as, dan kan men stellen:
$$c = \gamma = \gamma_2.$$

$Cos\,P$ en $Cos\,Q$ veranderen daardoor niet, maar voor $Cos\,R$ krijgt men veel eenvoudiger:

$$Cos\,R = Cos\,r - 2\,Cos\,c\,\{Cos\,p - Cos\,(p + \phi)\}.$$

In het voorgaande is β de hoek tusschen de Y-as en de loodlijn uit den oorsprong op het achtervlak van den eersten spiegel neergelaten. Maar van dien hoek kan men zeggen, dat hij 90° verschilt van den hoek, door dezelfde loodlijn met de X-as gevormd. En van den laatsten hoek kan men aannemen, dat hij gelijk is aan den hoek, dien voor- en achtervlak van den eersten spiegel met elkander vormen. En als die hoek δ is, kan men dus schrijven:

$$Cos\,\beta = \pm\,Sin\,\delta = \pm\,\delta.$$

Evenzoo heeft men: $Cos\,\beta_2 = \pm\,Sin\,\varepsilon = \pm\,\varepsilon.$

En als men aanneemt, dat de twee spiegels gesneden zijn uit dezelfde glasplaat, heeft men $\delta = \varepsilon$. Door de laatste onderstellingen worden intusschen de formules voor $Cos\,P$, $Cos\,Q$ en $Cos\,R$ niet eenvoudiger. Wij hebben dus ***als oplossing van het bijzondere geval:***

$$Cos\,P = Cos\,(p + 2\phi) + \frac{2\sqrt{n^2 - Sin^2\,p}}{Cos\,p}\,Sin\,(p + 2\phi)\,Cos\,\beta$$

$$-\frac{2\sqrt{n^2 - Sin^2\,(p + \phi)}}{Cos\,(p + \phi)}\,Sin\,(p + 2\phi)\,Cos\,\beta_2\,,$$

$$Cos\,Q = Sin\,(p + 2\phi) - \frac{2\sqrt{n^2 - Sin^2\,p}}{Cos\,p}\,Cos\,(p + 2\phi)\,Cos\,\beta$$

$$+\frac{2\sqrt{n^2 - Sin^2\,(p + \phi)}}{Cos\,(p + \phi)}\,Cos\,(p + 2\phi)\,Cos\,\beta_2\,,$$

$$Cos\,R = Cos\,r - 2\,Cos\,c\,\{Cos\,p - Cos\,(p + \phi)\}\,,$$

waarin $Cos\,\beta$ kan vervangen worden door $\pm\delta$ en $Cos\,\beta_2$ door $\pm\varepsilon$.

§ 11. Wil men $Cos\,P$ zoo weinig mogelijk doen verschillen van $Cos\,(p + 2\phi)$ en $Cos\,Q$ zoo weinig mogelijk van $Sin\,(p + 2\phi)$, dan moet men bewerken, dat de twee zeer kleine termen van $Cos\,P$ elkander gedeeltelijk opheffen. En dat zal gebeuren, als $Cos\,\beta$ en $Cos\,\beta_2$ hetzelfde teeken hebben; tegelijk zullen dan de twee zeer kleine termen van de waarde voor $Cos\,Q$ elkander gedeeltelijk opheffen.

Om verder na te gaan, hoe men de spiegels moet plaatsen, opdat $Cos\,\beta$ en $Cos\,\beta_2$ hetzelfde teeken krijgen, zij (zie figuur 2) het vlak der teekening het XY-vlak. Verder worde het voorvlak van den eersten spiegel door het XY-vlak gesneden volgens XA, het achtervlak volgens BC; het voorvlak van den tweeden spiegel in den evenwijdigen stand volgens DE, het achtervlak van den tweeden spiegel volgens FG. HI zij de projectie van de gegeven straal op het XY-vlak; dan is, als OK evenwijdig met de straal loopt, $\angle XOK = p$, en men kan dezen hoek beschouwen als den invalshoek van den gegeven straal op den eersten spiegel.

Als OB rechthoekig op BC staat, kan men YOB als β beschouwen. In plaats van $Cos\,\beta$ kan men dan nemen Sin BOX of $Sin\,\delta$, of δ, dus: $\qquad Cos\,\beta = \delta$.

Hierin is nu $Cos\,\beta$ positief; terwijl de doorsnede van voor- en achtervlak van den eersten spiegel aan den positieven kant der Y-as ligt. Opdat $Cos\,\beta_2$ eveneens positief zij, moet de loodlijn uit O op FG neergelaten, binnen den hoek XOY vallen, en daartoe is noodig, dat FG de lijn DE snijdt aan den negatieven kant der Y-as of, m. a. w., dat de doorsnede van het verlengde voor- en achtervlak van den tweeden spiegel aan den negatieven kant der Y-as valle. Indien de doorsnede van voor- en achtervlak van den eersten spiegel aan den negatieven kant der Y-as lag, zou die lijn bij den tweeden spiegel aan den positieven kant moeten liggen. Wij kunnen dus zeggen: *opdat $Cos\,\beta$ en $Cos\,\beta_2$ hetzelfde teeken hebben, moeten wij de twee spiegels zóo plaatsen, dat de snijlijnen der verlengde vlakken aan verschillenden kant liggen.* Wij hebben dan:

$$Cos\,P = Cos\,(p + 2\phi) \pm 2\,Sin\,(p + 2\phi) \times$$

$$\times \left\{ \frac{\sqrt{n^2 - Sin^2 p}}{Cos\,p}\,\delta - \frac{\sqrt{n^2 - Sin^2 (p + \phi)}}{Cos\,(p + \phi)}\,\varepsilon \right\},$$

$$Cos\,Q = Sin\,(p + 2\phi) \mp 2\,Cos\,(p + 2\phi) \times$$

$$\times \left\{ \frac{\sqrt{n^2 - Sin^2 p}}{Cos\,p}\,\delta - \frac{\sqrt{n^2 - Sin^2 (p + \phi)}}{Cos\,(p + \phi)}\,\varepsilon \right\},$$

$$Cos\,R = Cos\,r - 2\,Cos\,c\,\{Cos\,p - Cos\,(p + \phi)\},$$

$$Cos\,p\,Cos\,P + Cos\,q\,Cos\,Q + Cos\,r\,Cos\,R = Cos\,2\phi$$

$$\pm 2\,Sin\,2\phi \left\{ \frac{\sqrt{n^2 - Sin^2 p}}{Cos\,p}\,\delta - \frac{\sqrt{n^2 - Sin^2 (p + \phi)}}{Cos\,(p + \phi)}\,\varepsilon \right\},$$

waarbij van de dubbele teekens telkens het bovenste geldt voor figuur 2.

VRAAGSTUK II.

INDIEN IN DEN TWEE-VLAKKIGEN HOEK, DOOR DE ZOO EVEN GENOEMDE SPIEGELS GEVORMD, EEN DERDE GLAS, MAAR ONVERFOELIED, GEPLAATST WORDT, HETWELK DE LICHTSTRALEN VOOR EEN GEDEELTE DOORLAAT EN VOOR EEN GEDEELTE TERUGKAATST, VRAAGT MEN, HOEDANIG DE STELLING VAN DIT LAATSTE GLAS TEN OPZICHTE VAN DE BEIDE SPIEGELS ZIJN MOET, OPDAT HET *GEDEELTE* DER STRALEN, DAT *DOOR* HET GLAS GAAT, TWEEMALEN DOOR DE SPIEGELS TERUGGEKAATST WORDT EN NOGMAALS DOOR HET GLAS GAAT, EVENWIJDIG WORDE AAN HET *ANDERE GEDEELTE*, DAT ZONDER *DOOR* HET GLAS TE GAAN, TERSTOND DOOR HETZELVE TERUGGEKAATST WORDT. HIERBIJ WORDT AANGENOMEN, DAT OOK DIT GLAS DOOR GEEN VOLKOMEN EVENWIJDIGE VLAKKEN BEGRENSD IS.

TOT TOEPASSING ONDERSTELLE MEN, DAT DE BEIDE SPIEGELS EN HET GLAS HET AFGEKNOTTE DEEL EENER PYRAMIDE VAN *ZEER KLEINEN TOPHOEK* VORMEN, ZOODAT DE DRIE GLAZEN ZEER NABIJ EEN PRISMA VERWEZENLIJKEN, BEKEND ONDER DEN NAAM VAN *DIPLEIDOSCOOP*. ALSNU WORDT GEVRAAGD NAAR DE RICHTING DER INVALLENDE STRALEN, WAARBIJ DE UITTREDENDE, ZOOWEL DIE WELKE ÉÉNMAAL DOOR HET GLAS, ALS DIE WELKE TWEEMALEN DOOR DE SPIEGELS TERUGGEKAATST WORDEN, WEDER VOLKOMEN, OF ZOO NABIJ MOGELIJK, EVENWIJDIG ZIJN.

§ 1. Nemen wij, even als bij het eerste Vraagstuk, een rechthoekig coördinatenstelsel aan, en bepalen wij, even als in dat Vraagstuk, de richting van eene lijn en den stand van een plat vlak door drie hoeken (richtingshoeken).

In het volgende zullen wij gebruik maken van de formules, die bij de oplossing van het eerste Vraagstuk gevonden zijn.

§ 2. Bepalen wij in de eerste plaats de richting van een straal (p, q, r), nadat deze gebroken is door het voorvlak (a, b, c) en door het achtervlak (α, β, γ) van een glasplaat, terwijl wij onderstellen, dat die beide vlakken bijna evenwijdig zijn.

Als (p, q, r) gebroken wordt door het vlak (a, b, c), is volgens § 3 der oplossing van het vorige Vraagstuk:

$$Cos\, p_1 = B\, Cos\, a + \frac{1}{n}(Cos\, p - Cos\, a\, Cos\, A),$$

$$Cos\, q_1 = B\, Cos\, b + \frac{1}{n}(Cos\, q - Cos\, b\, Cos\, A),$$

$$Cos\, r_1 = B\, Cos\, c + \frac{1}{n}(Cos\, r - Cos\, c\, Cos\, A),$$

waarin $Cos\, A = Cos\, a\, Cos\, p + Cos\, b\, Cos\, q + Cos\, c\, Cos\, r$;

$$B = \frac{1}{n}\sqrt{(n^2 - Sin^2 A)},$$

terwijl B hetzelfde teeken heeft als $Cos\, A$.

Als vervolgens (p_1, q_1, r_1) gebroken wordt door het vlak (α, β, γ), heeft men volgens § 4 der vorige oplossing:

$$Cos\, p_2 = B_1\, Cos\, \alpha + n(Cos\, p_1 - Cos\, \alpha\, Cos\, A_1),$$
$$Cos\, q_2 = B_1\, Cos\, \beta + n(Cos\, q_1 - Cos\, \beta\, Cos\, A_1),$$
$$Cos\, r_2 = B_1\, Cos\, \gamma + n(Cos\, r_1 - Cos\, \gamma\, Cos\, A_1),$$

waarin $Cos\, A_1 = Cos\, \alpha\, Cos\, p_1 + Cos\, \beta\, Cos\, q_1 + Cos\, \gamma\, Cos\, r_1$.

Daar de beide vlakken der glasplaat bijna evenwijdig zijn, kan men stellen:

$$Cos\, a\, Cos\, \alpha + Cos\, b\, Cos\, \beta + Cos\, c\, Cos\, \gamma = 1.$$

Stellen wij verder:

$$Cos\, \alpha\, Cos\, p + Cos\, \beta\, Cos\, q + Cos\, \gamma\, Cos\, r = Cos\, C,$$

dan verschilt $Cos\, C$ zeer weinig van $Cos\, A$. Nu krijgt men

$$Cos\, A_1 = B + \frac{1}{n}(Cos\, C - Cos\, A).$$

In de voorgaande formules is $B_1 = \sqrt{(1 + n^2 Cos^2 A_1 - n^2)}$, terwijl B_1 hetzelfde teeken heeft als $Cos\, A_1$, of als B, of als $Cos\, A$. Nu is, daar $(Cos\, C - Cos\, A)$ zeer klein is,

$$n^2\, Cos^2 A_1 = n^2 B^2 + 2Bn(Cos\, C - Cos\, A),$$

of $n^2\, Cos^2 A_1 = n^2 - 1 + Cos^2 A + 2Bn(Cos\, C - Cos\, A)$.

Tel bij $1 - n^2 = -n^2 + 1$,

$$B_1 = \sqrt{\{Cos^2 A + 2Bn(Cos\, C - Cos\, A)\}},$$

of $$B_1 = Cos\,A + \frac{Bn}{Cos\,A}(Cos\,C - Cos\,A).$$

Door substitutie der waarden voor $Cos\,p_1$, $Cos\,q_1$, $Cos\,r_1$, $Cos\,A_1$ en B_1 in de formules voor $Cos\,p_2$, $Cos\,q_2$, $Cos\,r_2$, krijgt men:

$$Cos\,p_2 = Cos\,p$$
$$+ \frac{nB - Cos\,A}{Cos\,A}(Cos C Cos\alpha - Cos A Cos\alpha + Cos A Cos a - Cos A Cos\alpha),$$
$$Cos\,q_2 = Cos\,q$$
$$+ \frac{nB - Cos\,A}{Cos\,A}(Cos C Cos\beta - Cos A Cos\beta + Cos A Cos b - Cos A Cos\beta),$$
$$Cos\,r_2 = Cos\,r$$
$$+ \frac{nB - Cos\,A}{Cos\,A}(Cos C Cos\gamma - Cos A Cos\gamma + Cos A Cos c - Cos A Cos\gamma).$$

Merken wij nog op, dat men voor het verschil van $Cos\,A\,Cos\,a - Cos\,A\,Cos\,\alpha$ en $Cos\,C\,Cos\,a - Cos\,C\,Cos\,\alpha$ kan schrijven het product $(Cos\,A - Cos\,C)\,(Cos\,a - Cos\,\alpha)$, waarvan de twee factoren zeer klein zijn, dan blijkt, dat men in de formule voor $Cos\,p_2$ $Cos\,A\,Cos\,a - Cos\,A\,Cos\,\alpha$ kan vervangen door
$$Cos\,C\,Cos\,a - Cos\,C\,Cos\,\alpha.$$

Men krijgt daardoor:

$$Cos\,p_2 = Cos\,p + \frac{nB - Cos\,A}{Cos\,A}(Cos\,a\,Cos\,C - Cos\,\alpha\,Cos\,A).$$

Evenzoo:

$$Cos\,q_2 = Cos\,q + \frac{nB - Cos\,A}{Cos\,A}(Cos\,b\,Cos\,C - Cos\,\beta\,Cos\,A)$$

en $$Cos\,r_2 = Cos\,r + \frac{nB - Cos\,A}{Cos\,A}(Cos\,c\,Cos\,C - Cos\,\gamma\,Cos\,A).$$

§ 3. Nemen wij nu tot z-as aan een lijn, die evenwijdig loopt aan de doorsnede der voorvlakken van de twee spiegels en tot XZ-vlak een vlak, dat evenwijdig loopt met het vlak, dat den hoek tusschen de voorvlakken der twee spiegels middendoor deelt. Noemen wij dien hoek 2ϕ, dan is (zie Plaat VII, figuur 3) het voorvlak van den *eersten* spiegel
$$(90^0 - \phi,\ \phi,\ 90^0)$$
en het voorvlak van den tweeden spiegel
$$(90^0 - \phi,\ 180^0 - \phi,\ 90^0).$$

Daar vóór- en achtervlak van den eersten spiegel een zeer kleinen hoek met elkaâr maken, kan men voor de cosinussen der richtingshoeken van het achtervlak van den eersten spiegel nemen,

$$Sin\,(\phi + \delta), \quad Cos\,(\phi + \delta_1), \quad \varepsilon,$$

waarin δ, δ_1 en ε zeer klein zijn. Verder moet men hebben

$$Sin^2\,(\phi + \delta) + Cos^2\,(\phi + \delta_1) + \varepsilon^2 = 1$$

of, met weglating der tweedemachten van zeer kleine getallen, en $Sin\,\delta$ vervangende door δ en $Sin\,\delta_1$ door δ_1:

$$(Sin\,\phi + \delta\,Cos\,\phi)^2 + (Cos\,\phi - \delta_1\,Sin\,\phi)^2 = 1$$

of $$Sin^2\,\phi + Cos^2\,\phi + 2\delta\,Sin\,\phi\,Cos\,\phi - 2\delta_1\,Sin\,\phi\,Cos\,\phi = 1$$

$$2\,(\delta - \delta_1)\,Sin\,\phi\,Cos\,\phi = 0$$

$$\delta = \delta_1.$$

Men kan dus voor de richtingscosinussen van het achtervlak van den eersten spiegel stellen:

$$Sin\,(\phi + \delta), \quad Cos\,(\phi + \delta), \quad \varepsilon.$$

Evenzoo kan men voor de richtingscosinussen van het achtervlak van den tweeden spiegel stellen:

$$Sin\,(\phi - \delta_1), \quad -\,Cos\,(\phi - \delta_1), \quad \varepsilon_1.$$

§ 4. ***De richting te bepalen van den straal*** (p_2, q_2, r_2), ***zie*** § 2, ***nadat die straal door den eersten spiegel gebroken, teruggekaatst en nogmaals gebroken is.***

Volgens § 6 der oplossing van het eerste vraagstuk vindt men voor den straal (p_2, q_2, r_2), nadat deze gebroken, teruggekaatst en nogmaals gebroken is door den spiegel, wiens voorvlak (a, b, c) en wiens achtervlak (α, β, γ) is,

$$Cos p_3 = Cos p_2 - 2 Cos a Cos A_2 + \frac{2nB_2}{Cos A_2}(Cos a Cos A_2 - Cos \alpha Cos C_2),$$

$$Cos q_3 = Cos q_2 - 2 Cos b Cos A_2 + \frac{2nB_2}{Cos A_2}(Cos b Cos A_2 - Cos \beta Cos C_2),$$

$$Cos r_3 = Cos r_2 - 2 Cos c Cos A_2 + \frac{2nB_2}{Cos A_2}(Cos c Cos A_2 - Cos \gamma Cos C_2),$$

waarin:

$$Cos\,A_2 = Cos\,a\,Cos\,p_2 + Cos\,b\,Cos\,q_2 + Cos\,c\,Cos\,r_2,$$

$$Cos\,C_2 = Cos\,\alpha\,Cos\,p_2 + Cos\,\beta\,Cos\,q_2 + Cos\,\gamma\,Cos\,r_2,$$

$$B_2 = \frac{1}{n}\sqrt{(n^2 - Sin^2\,A_2)}.$$

Vervangen wij nu in de voorgaande waarden voor

p_3, q_3 en r_3, $Cos\, a$ door $Sin\, \phi$, $Cos\, b$ door $Cos\, \phi$, $Cos\, c$ door 0, $Cos\, \alpha$ door $Sin\, (\phi + \delta)$, $Cos\, \beta$ door $Cos\, (\phi + \delta)$, $Cos\, \gamma$ door ε, dan krijgt men :

$$Cos\, A_2 = Sin\, \phi\, Cos\, p_2 + Cos\, \phi\, Cos\, q_2,$$

$$Cos\, C_2 = Sin\, (\phi + \delta)\, Cos\, p_2 + Cos\, (\phi + \delta)\, Cos\, q_2 + \varepsilon\, Cos\, r_2,$$

$$B_2 = \frac{1}{n} \sqrt{\{n^2 - 1 + (Sin\, \phi\, Cos\, p_2 + Cos\, \phi\, Cos\, q_2)^2\}},$$

$$Cos\, p_3 = Cos\, 2\phi\, Cos\, p_2 - Sin\, 2\phi\, Cos\, q_2$$
$$- \frac{2nB_2}{Cos\, A_2} (\delta\, Sin\, 2\phi\, Cos\, p_2 + \delta\, Cos\, 2\phi\, Cos\, q_2 + \varepsilon\, Sin\, \phi\, Cos\, r_2),$$

$$Cos\, q_3 = - Sin\, 2\phi\, Cos\, p_2 - Cos\, 2\phi\, Cos\, q_2$$
$$- \frac{2nB_2}{Cos\, A_2} (+ \delta\, Cos\, 2\phi\, Cos\, p_2 - \delta\, Sin\, 2\phi\, Cos\, q_2 + \varepsilon\, Cos\, \phi\, Cos\, r_2),$$

$$Cos\, r_3 = Cos\, r_2 - 2nB_2 \times \varepsilon.$$

In deze waarden moet men p_2, q_2, r_2 vervangen door hunne waarden, die gevonden zijn aan het eind van § 2.

Daarbij merken wij op, dat in de drie voorgaande formules, in de vormen tusschen haakjes, bij elken term de zeer kleine factor δ of ε staat. Daar verder $Cos\, p_2$, $Cos\, q_2$ en $Cos\, r_2$ respectievelijk zeer weinig verschillen van $Cos\, p$, $Cos\, q$ en $Cos\, r$, zoo mogen wij in die vormen $Cos\, p_2$, $Cos\, q_2$ en $Cos\, r_2$ respectievelijk vervangen door $Cos\, p$, $Cos\, q$ en $Cos\, r$. Evenzoo mogen wij in B_2 en A_2 dezelfde vereenvoudiging aanbrengen. Men krijgt daardoor :

$$Cos\, p_3 = Cos\, 2\phi\, Cos\, p_2 - Sin\, 2\phi\, Cos\, q_2$$
$$- \frac{2\sqrt{\{n^2 - 1 + (Sin\, \phi\, Cos\, p + Cos\, \phi\, Cos\, q)^2\}}}{Sin\, \phi\, Cos\, p + Cos\, \phi\, Cos\, q} (\delta\, Sin\, 2\phi\, Cos\, p$$
$$+ \delta\, Cos\, 2\phi\, Cos\, q + \varepsilon\, Sin\, \phi\, Cos\, r),$$

$$Cos\, q_3 = - Sin\, 2\phi\, Cos\, p_2 - Cos\, 2\phi\, Cos\, q_2$$
$$- \frac{2\sqrt{\{n^2 - 1 + (Sin\, \phi\, Cos\, p + Cos\, \phi\, Cos\, q)^2\}}}{Sin\, \phi\, Cos\, p + Cos\, \phi\, Cos\, q} \times$$
$$(+ \delta\, Cos\, 2\phi\, Cos\, p - \delta\, Sin\, 2\phi\, Cos\, q + \varepsilon\, Cos\, \phi\, Cos\, r),$$

$$Cos\, r_3 = Cos\, r_2 - 2\varepsilon \sqrt{\{n^2 - 1 + (Sin\, \phi\, Cos\, p + Cos\, \phi\, Cos\, q)^2\}}.$$

Deze formules worden, als men voor $Cos\, p_2$, $Cos\, q_2$ en $Cos\, r_2$ hunne waarden uit § 2 stelt,

$$Cos\, p_3 = Cos\, 2\phi\, Cos\, p - Sin\, 2\phi\, Cos\, q$$
$$+ \frac{nB - Cos\, A}{Cos\, A}\{(Cos\, a\, Cos\, 2\phi - Cos\, b\, Sin\, 2\phi)\, Cos\, C$$
$$-(Cos\, \alpha\, Cos\, 2\phi - Cos\, \beta\, Sin\, 2\phi)\, Cos\, A\}$$
$$- \frac{2\sqrt{\{n^2 - 1 + (Sin\, \phi\, Cos\, p + Cos\, \phi\, Cos\, q)^2\}}}{Sin\, \phi\, Cos\, p + Cos\, \phi\, Cos\, q} \times$$
$$(\delta\, Sin\, 2\phi\, Cos\, p + \delta\, Cos\, 2\phi\, Cos\, q + \varepsilon\, Sin\, \phi\, Cos\, r),$$
$$Cos\, q_3 = -\, Sin\, 2\phi\, Cos\, p - Cos\, 2\phi\, Cos\, q$$
$$- \frac{nB - Cos\, A}{Cos\, A}\{(Cos\, a\, Sin\, 2\phi + Cos\, b\, Cos\, 2\phi)\, Cos\, C$$
$$-(Cos\, \alpha\, Sin\, 2\phi + Cos\, \beta\, Cos\, 2\phi)\, Cos\, A\}$$
$$- \frac{2\sqrt{\{n^2 - 1 + (Sin\, \phi\, Cos\, p + Cos\, \phi\, Cos\, q)^2\}}}{Sin\, \phi\, Cos\, p + Cos\, \phi\, Cos\, q} \times$$
$$(+\delta\, Cos\, 2\phi\, Cos\, p - \delta\, Sin\, 2\phi\, Cos\, q + \varepsilon\, Cos\, \phi\, Cos\, r),$$
$$Cos\, r_3 = Cos\, r + \frac{nB - Cos\, A}{Cos\, A}(Cos\, c\, Cos\, C - Cos\, \gamma\, Cos\, A)$$
$$- 2\varepsilon\sqrt{\{n^2 - 1 + (Sin\, \phi\, Cos\, p + Cos\, \phi\, Cos\, q)^2\}},$$

waarin
$$Cos\, A = Cos\, a\, Cos\, p + Cos\, b\, Cos\, q + Cos\, c\, Cos\, r,$$
$$Cos\, C = Cos\, \alpha\, Cos\, p + Cos\, \beta\, Cos\, q + Cos\, \gamma\, Cos\, r,$$
$$B = \frac{1}{n}\sqrt{(n^2 - Sin^2\, A)}.$$

§ 5. Als een lichtstraal (p, q, r) teruggekaatst wordt door het platte vlak (a, b, c), is na die terugkaatsing:

$$Cos\, P = Cos\, p - 2\, Cos\, a\, Cos\, A,$$
$$Cos\, Q = Cos\, q - 2\, Cos\, b\, Cos\, A,$$
$$Cos\, R = Cos\, r - 2\, Cos\, c\, Cos\, A.$$

Om aan de voorgestelde vraag te voldoen, moeten wij uitdrukken, dat de straal (p_3, q_3, r_3), nadat hij door den tweeden spiegel gebroken, teruggekaatst en nogmaals gebroken is en vervolgens door de glasplaat gegaan is, evenwijdig zij met (P, Q, R). Wij vervallen dan echter in zeer ingewikkelde formules. Om deze te vermijden, merken wij op, dat een straal van tegengestelde richting als (P, Q, R), nadat hij door de glasplaat gegaan is en door den tweeden spiegel gebroken, teruggekaatst en nogmaals gebroken is, in tegengestelde richting moet loopen als (p_3, q_3, r_3).

Voor den straal (P_1, Q_1, R_1), die van tegengestelde richting als

(P, Q, R) is, heeft men:

$$Cos\,P_1 = -Cos\,P = -Cos\,p + 2\,Cos\,a\,Cos\,A,$$
$$Cos\,Q_1 = -Cos\,Q = -Cos\,q + 2\,Cos\,b\,Cos\,A,$$
$$Cos\,R_1 = -Cos\,R = -Cos\,r + 2\,Cos\,c\,Cos\,A.$$

Noemen wij den straal (P_1, Q_1, P_1), nadat hij door de glasplaat gegaan is en uit den tweeden spiegel komt, (P_3, Q_3, R_3); *en stellen wij ons voor P_3, Q_3 en R_3 te bepalen.*

Wij zouden daartoe de redeneeringen van § 4 kunnen herhalen, maar wij bereiken korter ons doel, door P_3, Q_3 en R_3 af te leiden uit p_3; q_3 en r_3 op de volgende wijze:

Men heeft

$$Cos\,a\,Cos\,P_1 + Cos\,b\,Cos\,Q_1 + Cos\,c\,Cos\,R_1 = -Cos\,A + 2Cos\,A = Cos\,A$$
$$Cos\,\alpha\,Cos\,P_1 + Cos\,\beta\,Cos\,Q_1 + Cos\,\gamma\,Cos\,R_1 = -Cos\,C + 2\,Cos\,A.$$

Merken wij bovendien op, dat men de richtingscosinussen van den tweeden spiegel verkrijgt, door in de richtingscosinussen van den eersten spiegel ϕ te vervangen door $180^0 - \phi$, δ door δ_1, ε door ε_1.

Uit het voorgaande blijkt dus, dat men $Cos\,P_3$, $Cos\,Q_3$ en $Cos\,R_3$ respectievelijk uit $Cos\,p_3$, $Cos\,q_3$ en $Cos\,r_3$ verkrijgt, door:

$Cos\,p$	te vervangen door	$-Cos\,p + 2\,Cos\,a\,Cos\,A$,
$Cos\,q$	»	$-Cos\,q + 2\,Cos\,b\,Cos\,A$,
$Cos\,r$	»	$-Cos\,r + 2\,Cos\,c\,Cos\,A$;
ϕ	»	$180^\circ - \phi$,
$Cos\,C$	»	$2Cos\,A - Cos\,C$,
δ	»	δ_1,
ε	»	ε_1,

terwijl $Cos\,A$, B en de andere grootheden onveranderd blijven.

Men verkrijgt:

$$Cos\,P_3 = -Cos\,2\phi\,Cos\,p - Sin\,2\phi\,Cos\,q$$
$$+ 2\,Cos\,A\,(Cos\,a\,Cos\,2\phi + Cos\,b\,Sin\,2\phi) + \frac{nB - Cos\,A}{Cos\,A} \times$$
$$\{(Cos\,a\,Cos\,2\phi + Cos\,b\,Sin\,2\phi)\,Cos\,A - (Cos\,\alpha\,Cos\,2\phi + Cos\,\beta\,Sin\,2\phi)\,Cos\,C\}$$
$$-\frac{2\sqrt{\{n^2 - 1 + (-Sin\phi\,Cos\,p + Cos\phi\,Cos\,q + 2Cos\,a\,Sin\phi\,Cos\,A - 2Cos\,b\,Cos\phi\,Cos\,A)^2\}}}{-Sin\phi\,Cos\,p + Cos\phi\,Cos\,q + 2Cos\,a\,Sin\phi\,Cos\,A - 2Cos\,b\,Cos\phi\,Cos\,A} \times$$
$$\times\,\{\delta_1\,Sin\,2\phi\,Cos\,p - \delta_1\,Cos\,2\phi\,Cos\,q - \varepsilon_1\,Sin\,\phi\,Cos\,r + 2\,Cos\,A \times$$
$$(-\delta_1\,Cos\,a\,Sin\,2\phi + \delta_1\,Cos\,b\,Cos\,2\phi + \varepsilon_1\,Sin\,\phi\,Cos\,c)\},$$

$$\begin{aligned}
\mathit{Cos}\,Q_3 = &- \mathit{Sin}\,2\phi\,\mathit{Cos}\,p + \mathit{Cos}\,2\phi\,\mathit{Cos}\,q + 2\,\mathit{Cos}\,A \times \\
&\times(\mathit{Cos}\,a\,\mathit{Sin}\,2\phi - \mathit{Cos}\,b\,\mathit{Cos}\,2\phi) \\
&- \frac{nB - \mathit{Cos}\,A}{\mathit{Cos}\,A}\{(-\mathit{Cos}\,a\,\mathit{Sin}\,2\phi + \mathit{Cos}\,b\,\mathit{Cos}\,2\phi)\,\mathit{Cos}\,A \\
&\quad - (-\mathit{Cos}\,\alpha\,\mathit{Sin}\,2\phi + \mathit{Cos}\,\beta\,\mathit{Cos}\,2\phi)\,\mathit{Cos}\,C\} \\
&- \frac{2\sqrt{\{n^2-1+(-\mathit{Sin}\,\phi\,\mathit{Cos}\,p+\mathit{Cos}\,\phi\,\mathit{Cos}\,q+2\,\mathit{Cos}\,a\,\mathit{Sin}\,\phi\,\mathit{Cos}\,A-2\,\mathit{Cos}\,b\,\mathit{Cos}\,\phi\,\mathit{Cos}\,A)^2\}}}{-\mathit{Sin}\,\phi\,\mathit{Cos}\,p+\mathit{Cos}\,\phi\,\mathit{Cos}\,q+2\,\mathit{Cos}\,a\,\mathit{Sin}\,\phi\,\mathit{Cos}\,A-2\,\mathit{Cos}\,b\,\mathit{Cos}\,\phi\,\mathit{Cos}\,A} \times \\
&\times\{-\delta_1\,\mathit{Cos}\,2\phi\,\mathit{Cos}\,p - \delta_1\,\mathit{Sin}\,2\phi\,\mathit{Cos}\,q + \varepsilon_1\,\mathit{Cos}\,\phi\,\mathit{Cos}\,r \\
&+ 2\,\mathit{Cos}\,A\,(+\delta_1\,\mathit{Cos}\,a\,\mathit{Cos}\,2\phi + \delta_1\,\mathit{Cos}\,b\,\mathit{Sin}\,2\phi - \varepsilon_1\,\mathit{Cos}\,\phi\,\mathit{Cos}\,c)\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathit{Cos}\,R_3 = &- \mathit{Cos}\,r + 2\,\mathit{Cos}\,c\,\mathit{Cos}\,A + \frac{nB - \mathit{Cos}\,A}{\mathit{Cos}\,A}\{\mathit{Cos}\,c\,\mathit{Cos}\,A - \mathit{Cos}\,\gamma\,\mathit{Cos}\,c\} \\
&- 2\varepsilon_1\sqrt{\{n^2 - 1 + (-\mathit{Sin}\,\phi\,\mathit{Cos}\,p + \mathit{Cos}\,\phi\,\mathit{Cos}\,q} \\
&+ 2\,\mathit{Cos}\,a\,\mathit{Sin}\,\phi\,\mathit{Cos}\,A - 2\,\mathit{Cos}\,b\,\mathit{Cos}\,\phi\,\mathit{Cos}\,A)^2\}.
\end{aligned}$$

§ 6. Daar nu de stralen (p_3, q_3, r_3) en (P_3, Q_3, R_3) in tegengestelde richting moeten loopen, heeft men:

$\mathit{Cos}\,p_3 + \mathit{Cos}\,P_3 = 0$, $\mathit{Cos}\,q_3 + \mathit{Cos}\,Q_3 = 0$ en $\mathit{Cos}\,r_3 + \mathit{Cos}\,R_3 = 0$.

De laatste vergelijking levert ons op:

$$\begin{aligned}
0 = &\,2\,\mathit{Cos}\,c\,\mathit{Cos}\,A + 2\,(nB - \mathit{Cos}\,A)(\mathit{Cos}\,c - \mathit{Cos}\,\gamma) \\
&- 2\varepsilon\sqrt{\{n^2 - 1 + (\mathit{Sin}\,\phi\,\mathit{Cos}\,p + \mathit{Cos}\,\phi\,\mathit{Cos}\,q)^2\}} \\
&- 2\varepsilon_1\sqrt{\{n^2 - 1 + (-\mathit{Sin}\,\phi\,\mathit{Cos}\,p + \mathit{Cos}\,\phi\,\mathit{Cos}\,q} \\
&+ 2\,\mathit{Cos}\,a\,\mathit{Sin}\,\phi\,\mathit{Cos}\,A - 2\,\mathit{Cos}\,b\,\mathit{Cos}\,\phi\,\mathit{Cos}\,A)^2\}.
\end{aligned}$$

In deze vergelijking weet men van alle termen behalve $2\,\mathit{Cos}\,c\,\mathit{Cos}\,A$, dat zij zeer klein zijn. Daaruit volgt, dat ook $\mathit{Cos}\,c\,\mathit{Cos}\,A$ zeer klein is; en dat dus òf $\mathit{Cos}\,c$ of $\mathit{Cos}\,A$ zeer klein is.

Maar als $\mathit{Cos}\,A = \mathit{Cos}\,a\,\mathit{Cos}\,p + \mathit{Cos}\,b\,\mathit{Cos}\,q + \mathit{Cos}\,c\,\mathit{Cos}\,r$ zeer klein was, zou de straal (p, q, r) bijna evenwijdig loopen met de glasplaat, en dit is het geval niet. Wij hebben dus:

$\mathit{Cos}\,c$ *zeer klein* en dus ook $\mathit{Cos}\,\gamma$ *zeer klein.*

Hieruit volgt weer, dat men in plaats van $\mathit{Cos}\,b$ kan stellen $\mathit{Sin}\,a$, en $\mathit{Sin}\,\alpha$ in plaats van $\mathit{Cos}\,\beta$.

Ook heeft men $\mathit{Cos}\,c - \mathit{Cos}\,\gamma = 2\,\mathit{Sin}\,\frac{c+\gamma}{2}\,\mathit{Sin}\,\frac{\gamma - c}{2}$.

Daar c en γ weinig van elkaar en van 90° verschillen, zoo is $\frac{\gamma - c}{2}$ zeer klein, terwijl $\frac{c+\gamma}{2}$ zeer weinig van 90° verschilt.

Men kan dus stellen: $$Sin\,\frac{\gamma - c}{2} = \frac{\gamma - c}{2}$$

en $$Sin\,\frac{\gamma + c}{2} = 1.$$

Men heeft dus $$Cos\, c - Cos\,\gamma = \gamma - c.$$

De bovenstaande vergelijking wordt nu, als men door 2 deelt,

$$\begin{aligned}
&Cos\, c\,(Cos\, a\, Cos\, p + Sin\, a\, Cos\, q)\\
&- [\sqrt{\{n^2 - 1 + (Cos\, a\, Cos\, p + Sin\, a\, Cos\, q)^2\}}\\
&- (Cos\, a\, Cos\, p + Sin\, a\, Cos\, q)]\,(c - \gamma)\\
&- \varepsilon\sqrt{\{n^2 - 1 + (Sin\,\phi\, Cos\, p + Cos\,\phi\, Cos\, q)^2\}}\\
&- \varepsilon_1\sqrt{\{n^2 - 1 + (Sin\,\phi\, Cos\, p\, Cos\, 2a + Cos\,\phi\, Cos\, q\, Cos\, 2a}\\
&+ Sin\,\phi\, Cos\, q\, Sin\, 2a - Cos\,\phi\, Cos\, p\, Sin\, 2a)^2\} = 0.
\end{aligned}$$

§ 7. Bepalen wij de vergelijkingen, die opgeleverd worden door $$Cos\, p_3 + Cos\, P_3 = 0$$

en $$Cos\, q_3 + Cos\, Q_3 = 0.$$

Van $Cos\, p_3$ zijn alle termen zeer klein, behalve
$$Cos\, 2\phi\, Cos\, p - Sin\, 2\phi\, Cos\, q.$$

Van $Cos\, P_3$ zijn alle termen, behalve
$$- Cos\, 2\phi\, Cos\, p - Sin\, 2\phi\, Cos\, q$$
$$+ 2\,(Cos\, a\, Cos\, p + Sin\, a\, Cos\, q)\,(Cos\, a\, Cos\, 2\phi + Sin\, a\, Sin\, 2\phi),$$
zeer klein. De som van deze beide uitdrukkingen moet dus zeer klein zijn, zoodat die som, gelijk gesteld aan nul, een waarde van a oplevert, die zeer weinig van de ware verschilt.

Wij hebben dus voorloopig $- 2\, Sin\, 2\phi\, Cos\, q$
$$+ 2(Cos\, a\, Cos\, p + Sin\, a\, Cos\, q)\,(Cos\, a\, Cos\, 2\phi + Sin\, a\, Sin\, 2\phi) = 0$$
of $$- Sin\, 2\phi\, Cos\, q$$
$$+ (Cos\, a\, Cos p + Sin\, a\, Cos\, q)\,(Cos\, a\, Cos\, 2\phi + Sin\, a\, Sin\, 2\phi) = 0,$$
of $$Cos^2\, a\, Cos\, p\, Cos\, 2\phi + Sin\, a\, Cos\, a\, Cos\, q\, Cos\, 2\phi$$
$$+ Sin\, a\, Cos\, a\, Cos\, p\, Sin\, 2\phi - Cos^2\, a\, Cos\, q\, Sin\, 2\phi = 0$$
of, deelende door $Cos^2\, a$,
$$Cos\, p\, Cos\, 2\phi + tg\, a\, Cos q Cos 2\phi + tg a Cos p Sin 2\phi - Cos q Sin 2\phi = 0.$$

Dus $$tg\, a = \frac{Cos\, q\, Sin\, 2\phi - Cos\, p\, Cos\, 2\phi}{Cos\, q\, Cos\, 2\phi + Cos\, p\, Sin\, 2\phi},$$

$$Sin\, a = \frac{Cos\, q\, Sin\, 2\phi - Cos\, p\, Cos\, 2\phi}{Sin\, r},$$

$$Cos\, a = \frac{Cos\, q\, Cos\, 2\phi + Cos\, p\, Sin\, 2\phi}{Sin\, r}.$$

Nu hebben wij voor $Sin\, a$ en $Cos\, a$ waarden gevonden, die zeer weinig van de juiste waarden van die grootheden verschillen. ***Wij kunnen dus stellen:***

$$Sin\, a = \frac{Cos\, q\; Sin\,(2\Phi + x) - Cos\, p\; Cos\,(2\Phi + x)}{Sin\, r},$$

$$Cos\, a = \frac{Cos\, q\; Cos\,(2\Phi + x) + Cos\, p\; Sin\,(2\Phi + x)}{Sin\, r},$$

waarvan x voorloopig onbepaald en zeer klein is.

§ 8. Om x en $Cos\, c$ te bepalen, substitueeren wij deze waarden voor $Sin\, a$ en $Cos\, a$ in de vergelijkingen, die uitdrukken

$$Cos\, r_3 + Cos\, R_3 = 0,$$
$$Cos\, p_3 + Cos\, P_3 = 0,$$
$$Cos\, q_3 + Cos\, Q_3 = 0.$$

Bij die substitutie kunnen wij in de termen, die zeer klein zijn, voor $Cos\, a$ en $Sin\, a$ hunne eerstgevonden waarden stellen.

Men krijgt bij die substitutie achtereenvolgens:

$$Cos\, A = Sin\,(2\Phi + x)\; Sin\, r + Cos\, c\; Cos\, r,$$

$$\begin{aligned} Cos\, A - Cos\, C = &- Cos\, 2\Phi \times Sin\, r\,(x - a) - Cos\, r\,(c - \gamma) \\ &- Sin\,\Phi\; Cos\, p + Cos\,\Phi\; Cos\, q + 2\, Cos\, a\; Sin\,\Phi\; Cos\, A \\ &- 2\, Cos\, b\; Cos\,\Phi\; Cos\, A = Cos\, p\; Sin\, 3\Phi + Cos\, q\; Cos\, 3\Phi, \text{ enz.} \end{aligned}$$

De vergelijking, die uitdrukt $Cos\, r_3 + Cos\, R_3 = 0$, wordt nu

$$\left.\begin{aligned} &Sin\, 2\Phi\; Sin\, r\; Cos\, c \\ &- \left\{\sqrt{(n^2 - 1 + Sin^2 2\Phi\; Sin^2 r)} - Sin\, 2\Phi\; Sin\, r\right\}(c - \gamma) \\ &- \varepsilon\sqrt{\left\{n^2 - 1 + (Sin\,\Phi\; Cos\, p + Cos\,\Phi\; Cos\, q)^2\right\}} \\ &- \varepsilon_1\sqrt{\left\{(n^2 - 1 + (Cos\, p\; Sin\, 3\Phi + Cos\, q\; Cos\, 3\Phi)^2\right\}} = 0. \end{aligned}\right\}(1)$$

$Cos\, p_3 + Cos\, P_3 = 0$ wordt:

$$\left.\begin{aligned} &(Cos\, 2\Phi\; Cos\, q + Sin\, 2\Phi\; Cos\, p)\, x + Cos\, q\; Cos\, c\; Cot\, r \\ &+ \left\{\frac{\sqrt{(n^2 - 1 + Sin^2 2\Phi\; Sin^2 r)} - Sin\, 2\Phi\; Sin\, r}{Sin\, r}\right\} \times \\ &\quad Cot\, r\,(\gamma - c)\,(Sin\, 2\Phi\; Cos\, q - Cos\, 2\Phi\; Cos\, p) \\ &- \frac{\sqrt{\left\{n^2 - 1 + (Cos\, p\; Sin\,\Phi + Cos\, q\; Cos\,\Phi)^2\right\}}}{Cos\, p\; Sin\,\Phi + Cos\, q\; Cos\,\Phi} \times \\ &\quad (\delta\, Sin\, 2\Phi\; Cos\, p + \delta\, Cos\, 2\Phi\; Cos\, q + \varepsilon\, Sin\,\Phi\; Cos\, r) \\ &+ \frac{\sqrt{\left\{n^2 - 1 + (Cos\, p\; Sin\, 3\Phi + Cos\, q\; Cos\, 3\Phi)^2\right\}}}{Cos\, p\; Sin\, 3\Phi + Cos\, q\; Cos\, 3\Phi} \times \\ &\left\{\delta_1\, Cos\, p\; Sin\, 2\Phi + \delta_1\, Cos\, q\; Cos\, 2\Phi + \varepsilon_1\, Sin\,\Phi\; Cos\, r\right\} = 0. \end{aligned}\right\}(2)$$

$Cos\, q_3 + Cos\, Q_3 = 0$ wordt:

$$\left.\begin{array}{l}(Cos\, 2\Phi\, Cos\, p - Sin\, 2\Phi\, Cos\, q)\, x + Cos\, c\, Cot\, r\, Cos\, p \\ + \dfrac{\sqrt{(n^2 - 1 + Sin^2\, 2\Phi\, Sin^2\, r)} - Sin\, 2\Phi\, Sin\, r}{Sin\, r} \times \\ \times\, Cot\, r\, (\gamma - c)\, (Cos\, 2\Phi\, Cos\, q + Sin\, 2\Phi\, Cos\, p) \\ - \dfrac{\sqrt{\{n^2 - 1 + (Sin\, \Phi\, Cos\, p + Cos\, \Phi\, Cos\, q)^2\}}}{Sin\, \Phi\, Cos\, p + Cos\, \Phi\, Cos\, q} \times \\ (\delta\, Cos\, 2\Phi\, Cos\, p - \delta\, Sin\, 2\Phi\, Cos\, q + \varepsilon\, Cos\, \Phi\, Cos\, r) \\ + \dfrac{\sqrt{\{n^2 - 1 + (Cos\, p\, Sin\, 3\Phi + Cos\, q\, Cos\, 3\Phi)^2\}}}{Cos\, p\, Sin\, 3\Phi + Cos\, q\, Cos\, 3\Phi} \times \\ \{\delta_1\, Cos\, 2\Phi\, Cos\, p - \delta_1\, Sin\, 2\Phi\, Cos\, q - \varepsilon_1\, Cos\, \Phi\, Cos\, r\} = 0.\end{array}\right\} (3)$$

Uit de drie voorgaande vergelijkingen moeten x en $Cos\, c$ bepaald worden. Daar echter die drie vergelijkingen uitdrukken, dat de stralen (p_3, q_3, r_3) en (P_3, Q_3, R_3) in tegengestelde richting loopen; zoo zijn onder die drie vergelijkingen slechts twee onderling onafhankelijk.

§ 9. Uit de laatste twee vergelijkingen kan men een meer eenvoudige afleiden, door (2) met $Cos\, p$ en (3) met $Cos\, q$ te vermenigvuldigen, en vervolgens aftetrekken. Men krijgt daardoor:

$$\left.\begin{array}{l}x\, Sin\, 2\Phi - \dfrac{\sqrt{(n^2 - 1 + Sin^2\, 2\Phi\, Sin^2\, r)} - Sin\, 2\Phi\, Sin\, r}{Sin\, r} \times \\ Cos\, 2\Phi\, Cot\, r\, \{(a - \alpha)\, Cos\, 2\Phi\, Cot\, r + \gamma - c\} \\ + \dfrac{\sqrt{\{n^2 - 1 + (Sin\, \Phi\, Cos\, p + Cos\, \Phi\, Cos\, q)^2\}}}{Sin\, \Phi\, Cos\, p + Cos\, \Phi\, Cos\, q} \\ \{-\delta\, Sin\, 2\Phi + \varepsilon\, Cos\, r\, (Cos\, \Phi\, Cos\, q - Sin\, \Phi\, Cos\, p)\} \\ + \dfrac{\sqrt{\{n^2 - 1 + (Cos\, p\, Sin\, 3\Phi + Cos\, q\, Cos\, 3\Phi)^2\}}}{Cos\, p\, Sin\, 3\Phi + Cos\, q\, Cos\, 3\Phi} \\ \{\delta_1\, Sin 2\Phi + \varepsilon_1 Cos\, r (Cos\Phi\, Cos q + Sin\Phi\, Cos p)(1 - Sin\, 2\Phi\, Sin r)\} \\ = 0,\end{array}\right\} (4)$$

samen met de vroeger gevonden vergelijking:

$$\left.\begin{array}{l}Sin\, 2\Phi\, Sin\, r\, Cos\, c \\ + \{\sqrt{(n^2 - 1 + Sin^2\, 2\Phi\, Sin^2\, r)} - Sin\, 2\Phi\, Sin\, r\}\, (\gamma - c) \\ - \varepsilon \sqrt{\{n^2 - 1 + (Sin\, \Phi\, Cos\, p + Cos\, \Phi\, Cos\, q)^2\}} \\ - \varepsilon_1 \sqrt{\{n^2 - 1 + (Cos\, p\, Sin\, 3\Phi + Cos\, q\, Cos\, 3\Phi)^2\}} = 0.\end{array}\right\} (1)$$

Verder moeten wij opmerken, dat in deze twee vergelijkingen, waardoor x en $Cos\, c$ liniair bepaald worden, ook nog voorkomen

$a - \alpha$ en $\gamma - c$. Tusschen deze beide grootheden en den hoek p, dien vóór- en achtervlak der glasplaat met elkaar maken, bestaat een betrekking, die men op de volgende wijze kan vinden.

Stellen wij ons het oppervlak van een bol voor met den oorsprong der coördinaten tot middelpunt (zie fig. 4). Laat dat oppervlak door de X-as gesneden worden in X, door de Y-as in Y, door de Z-as in Z, door de loodlijn uit den oorsprong op het voorvlak van de glasplaat in D, door de loodlijn uit den oorsprong op het achtervlak der glasplaat in E. Nu weet men, dat ZD $= c$ en ZE $= \gamma$ bijna recht zijn. Daaruit volgt, dat $\angle$ XEZ en $\angle$ XDZ bijna recht zijn; en daar ook ZF bijna recht is, heeft men $\angle$ XFZ bijna recht. Daaruit volgt weer, dat men kan stellen XF $=$ XD of

$$XE - XD = XE - XF = EF$$

of

$$\alpha - a \quad = EF.$$

Evenzoo

$$c - \gamma \quad = DF.$$

Verder is DE $= p$; en daar DEF een driehoek is, wiens zijden zeer klein zijn, en waarin $\angle$ F bijna recht is, kan men stellen:

$$DF^2 + EF^2 = DE^2$$

of

$$(c - \gamma)^2 + (\alpha - a)^2 = p^2.$$

§ 10. *Veronderstellen wij nu, dat de glasplaat den vorm eens rechthoeks heeft,* of dat de stand van de glasplaat ten aanzien van de snijlijn der voorvlakken van de spiegels bijna bepaald is, zoodra men weet, dat de glasplaat bijna evenwijdig met die lijn moet zijn. Men heeft dan op een zijvlak der glasplaat rechte lijnen, waarvan men weet, dat zij de z-as bijna rechthoekig kruisen.

Verder kan men op dat zijvlak (langs optischen weg) een rechte lijn bepalen, die rechthoekig staat op de lijn van doorsnede der verlengde zijvlakken van de glasplaat. De hoek ψ, dien genoemde richtingen met elkaar maken, is gelijk aan DEF, dus:

$$\angle DEF = \psi.$$

In den $\triangle$ DEF heeft men verder:

$$EF = \alpha - a = p \; Cos \; \psi,$$
$$DF = c - \gamma = p \; Sin \; \psi.$$

Door substitutie van deze waarden voor $\alpha - a$ en $c - \gamma$ vindt men volgens vergelijking (1)

$$\left.\begin{aligned}
Cos\,c = {} & \frac{\sqrt{(n^2 - 1 + Sin^2 2\phi\, Sin^2 r)} - Sin\, 2\phi\, Sin\, r}{Sin\, 2\phi\, Sin\, r}\, p\, Sin\, \psi \\
& + \varepsilon \frac{\sqrt{\{n^2 - 1 + (Sin\,\phi\, Cos\, p + Cos\,\phi\, Cos\, q)^2\}}}{Sin\, 2\phi\, Sin\, r} \\
& + \varepsilon_1 \frac{\sqrt{\{n^2 - 1 + (Cos\, p\, Sin\, 3\phi + Cos\, q\, Cos\, 3\phi)^2\}}}{Sin\, 2\phi\, Sin\, r}.
\end{aligned}\right\} (5)$$

Volgens vergelijking (4) heeft men:

$$\left.\begin{aligned}
x = {} & -\frac{\sqrt{(n^2 - 1 + Sin^2 2\phi\, Sin^2 r)} - Sin\, 2\phi\, Sin\, r}{Sin\, 2\phi\, Sin\, r}\, Cos 2\phi Cot\, r \\
& \times p\, (Cos\,\psi\, Cos\, 2\phi\, Cot\, r + Sin\,\psi) \ldots \\
& + \frac{\sqrt{\{n^2 - 1 + (Cos\, p\, Sin\,\phi + Cos\, q\, Cos\,\phi)^2\}}}{Cos\, p\, Sin\,\phi + Cos\, q\, Cos\,\phi} \times \\
& \left\{\delta - \varepsilon \frac{Cos\, r}{Sin\, 2\phi}(Cos\, q\, Cos\,\phi - Cos\, p\, Sin\,\phi)\right\} \\
& - \frac{-\sqrt{\{n^2 - 1 + (Cos\, p\, Sin\, 3\phi + Cos\, q\, Cos\, 3\phi)^2\}}}{Cos\, p\, Sin\, 3\phi + Cos\, q\, Cos\, 3\phi} \\
& \left\{(\delta_1 + \varepsilon_1 \frac{Cos\, r}{Sin\, 2\phi}(Cos\, q\, Cos\phi - Cos p\, Sin\phi)(1 - Sin 2\phi Sin r)\right\}.
\end{aligned}\right\} (6)$$

Volgens § 7 is

$$Sin\, a = \frac{Cos\, q\, Sin\,(2\phi + x) - Cos\, p\, Cos\,(2\phi + x)}{Sin\, r}$$

of

$$Sin\, a = \frac{Cos\, q\, Sin\, 2\phi - Cos\, p\, Cos 2\phi}{Sin\, r} + x \frac{Cos q Cos 2\phi + Cos p Sin 2\phi}{Sin\, r}.$$

Daar x bepaald is, is volgens deze vergelijking ook a bepaald.

Opmerking 1. In plaats van de laatste vergelijking kan men ook nemen:

$$Cos\, a = \frac{Cos\, q\, Cos\, 2\phi + Cos\, p\, Sin\, 2\phi}{Sin\, r} - x \frac{Cos\, q\, Sin\, 2\phi - Cos\, p Cos 2\phi}{Sin\, r}.$$

2. Kiest men in een zijvlak der glasplaat de lijn, die de z-as bijna rechthoekig kruisen zal, rechthoekig op de doorsnede der verlengden van vóor- en achtervlak der glasplaat, dan is:

$$\psi = 0,\ Sin\,\psi = 0,\ Cos\,\psi = 1,$$
$$\alpha - a = p,$$
$$c - \gamma = 0.$$

Vergelijking (5) wordt dan:

$$\left.\begin{aligned} Cos\,c &= \varepsilon\,\frac{\surd\{n^2 - 1 + (Sin\,\phi\,Cos\,p + Cos\,\phi\,Cos\,q^2)\}}{Sin\,2\phi\,Sin\,r} \\ &+ \varepsilon_1\,\frac{\surd\{n^2 - 1 + (Cos\,p\,Sin\,3\phi + Cos\,q\,Cos\,3\phi)^2\}}{Sin\,2\phi\,Sin\,r}. \end{aligned}\right\}(7)$$

Vergelijking (6) wordt:

$$\left.\begin{aligned} x &= -\frac{\surd(n^2 - 1 + Sin^2 2\phi\,Sin^2 r) - Sin 2\phi\,Sin r}{Sin\,2\phi\,Sin\,r}\,p\,Cos^2 2\phi\,Cot^2 r \\ &+ \frac{\surd(n^2 - 1 + (Cos\,p\,Sin\,\phi + Cos\,q\,Cos\,\phi)^2\}}{Sin\,2\phi\,Sin\,r} \times \\ &\{\delta - \varepsilon\,\frac{Cos\,r}{Sin\,2\phi}\,\{Cos\,q\,Cos\,\phi - Cos\,p\,Sin\,\phi)\} \\ &- \frac{\surd\{n^2 - 1 + (Cos\,p\,Sin\,3\phi + Cos\,q\,Cos\,3\phi)^2\}}{Cos\,p\,Sin\,3\phi + Cos\,q\,Cos\,3\phi} \times \\ &\{\delta_1 + \varepsilon_1\,\frac{Cos\,r}{Sin\,2\phi}\,(Cos q\,Cos\phi - Cos p\,Sin\,\phi)(1 - Sin 2\phi\,Sin r)\}. \end{aligned}\right\}(8)$$

3. Als men in elk der twee spiegels onderstelt, dat de *snijlijn van vóór- en achtervlak bijna evenwijdig* is *met de snijlijn der voorvlakken van de twee spiegels*, dan heeft men:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 = 0.$$

Volgens vergelijking (5) heeft men dan:

$$Cos\,c = \frac{\surd(n^2 - 1 + Sin^2 2\phi\,Sin^2 r) - Sin\,2\phi\,Sin\,r}{Sin\,2\phi\,Sin\,r}\,p\,Sin\,\psi.(9)$$

Volgens vergelijking (6) heeft men:

$$\left.\begin{aligned} x &= -\frac{\surd(n^2 - 1 + Sin^2 2\phi\,Sin^2 r) - Sin\,2\phi\,Sin\,r}{Sin\,2\phi\,Sin\,r} \times \\ &p\,Cos\,2\phi\,Cot\,r\,(Cos\,\psi\,Cos\,2\phi\,Cot\,r + Sin\,\psi) \times \\ &+ \delta\,\frac{\surd\{n^2 - 1 + (Cos\,p\,Sin\,\phi + Cos\,q\,Cos\,\phi)^2\}}{Cos\,p\,Sin\,\phi + Cos\,q\,Cos\,\phi} \\ &- \delta_1\,\frac{\surd\{n^2 - 1 + (Cos\,p\,Sin\,3\phi + Cos\,q\,Cos\,3\phi)^2\}}{Cos\,p\,Sin\,3\phi + Cos\,q\,Cos\,3\phi}. \end{aligned}\right\}(10)$$

Maken wij bovendien ten aanzien van de glasplaat dezelfde onderstelling als ten aanzien der spiegels, dan heeft men:

$$Cos\,c = Cos\,\gamma = 0 \text{ of } c = \gamma = 90°, \ldots . (11)$$

of in woorden: *vóór- en achtervlak der glasplaat moeten evenwijdig zijn met de lijn van doorsnede der voorvlakken van de twee spiegels.*

Verder is dan

$$\left.\begin{array}{l} x=-\dfrac{\sqrt{(n^2-1+Sin^2 2\phi\, Sin^2 r)}-Sin 2\phi\, Sin r}{Sin\, 2\phi\, Sin\, r}\, p Cos^2 2\phi\, Cot^2 r \\ \quad +\delta\dfrac{\sqrt{\{n^2-1+(Cos\, p\, Sin\, \phi+Cos\, q\, Cos\, \phi)^2\}}}{Cos\, p\, Sin\, \phi+Cos\, q\, Cos\, \phi} \\ \quad -\delta_1\dfrac{\sqrt{\{n^2-1+(Cos\, p\, Sin\, 3\phi+Cos\, q\, Cos\, 3\phi)^2\}}}{Cos\, p\, Sin\, 3\phi+Cos\, q\, Cos\, 3\phi} \end{array}\right\} (12)$$

§ 11. Veronderstellen wij nu, even als in het eerste vraagstuk, dat *de stralen bijna rechthoekig gekruist worden door de snijlijn der voorvlakken van de twee spiegels.*

Men heeft dan $Cos\, r$ zeer klein; evenzoo $Cot\, r$. Voor $Sin\, r$ kan men 1 stellen, en voor $Cos\, q$ kan men $Sin\, p$ stellen. De formules (5) en (1) worden daardoor veel eenvoudiger. Men vindt achtereenvolgens:

$$Sin\, \phi\, Cos\, p+Cos\, \phi\, Cos\, q=Sin\,(\phi+p),$$

$$\sqrt{\{n^2-1+(Sin\phi\, Cosp+Cos\phi Cosq)^2\}}=\sqrt{\{n^2-Cos^2(\phi+p)\}},$$

$$Cos\, p\, Sin\, 3\phi+Cos\, q\, Cos\, 3\phi=Sin\,(p+3\phi),$$

$$\sqrt{\{n^2-1+(Cosp Sin3\phi+CosqCos3\phi)^2\}}=\sqrt{\{n^2-Cos^2(p+3\phi)\}}.$$

In plaats van formule (5) heeft men nu:

$$Cos\, c=\frac{\sqrt{(n^2-Cos^2\, 2\phi)}-Sin\, 2\phi}{Sin\, 2\phi}\, p\, Sin\, \psi$$

$$+\varepsilon\frac{\sqrt{\{n^2-Cos^2\,(\phi+p)\}}}{Sin\, 2\phi}+\varepsilon_1\frac{\sqrt{\{n^2-Cos^2(p+3\phi)\}}}{Sin\, 2\phi}.$$

In formule (6) komen in den eersten term van de waarde, die x voorstelt, twee zeer kleine factoren voor, p en $Cot\, r$. Die term kan dus weggelaten worden. In de twee andere termen van die waarde komt bij den zeer kleinen factor ε of ε_1 telkens de zeer kleine factor $Cos\, r$ voor. Men kan dus die gedeelten, die ε of ε_1 tot factor hebben, weglaten. In plaats van formule (6) heeft men dus:

$$x=\delta\frac{\sqrt{\{n^2-Cos^2\,(p+\phi)\}}}{Sin\,(p+\phi)}-\delta_1\frac{\sqrt{\{n^2-Cos^2\,(p+3\phi)\}}}{Sin\,(p+3\phi)}.$$

Ook is $\qquad c-\gamma=Cos\,\gamma-Cos\, c=p\, Sin\,\psi,$

en dus $\qquad Cos\,\gamma=Cos\, c+p\, Sin\,\psi$

of $\qquad Cos\,\gamma=p\, Sin\,\psi\dfrac{\sqrt{(n^2-Cos^2\, 2\phi)}}{Sin\, 2\phi}$

$$+\varepsilon\frac{\sqrt{\{n^2-Cos^2(p+\phi)\}}}{Sin\,2\phi}+\varepsilon_1\frac{\sqrt{\{n^2-Cos^2(p+3\phi)\}}}{Sin\,2\phi}.$$

De formule

$$Cos\,a=\frac{Cosq\,Cos2\phi+Cosp\,Sin2\phi}{Sin\,r}-x\frac{CosqSin2\phi-CospCos2\phi}{Sin\,r}$$

wordt nu

$$Cos\,a=Sin\,p\,Cos\,2\phi+Cosp\,Sin2\phi-x(Sinp\,Sin2\phi-CospCos2\phi),$$
$$Cos\,a=Sin\,(p+2\phi)+x\,Cos\,(p+2\phi),$$
$$Cos\,a=Sin\,(p+2\phi)\,Cos\,x+Sin\,x\,Cos\,(p+2\phi),$$
$$Cos\,a=Sin(p+2\phi+x),$$
$$Sin\,(a+90^\circ)=Sin\,(p+2\phi+x),$$
$$a+90^\circ=p+2\phi+x,$$
$$a=p+2\phi-90^\circ+x.$$

Men heeft dus als oplossing:

$$a=p+2\phi-90^\circ+\delta\frac{\sqrt{\{n^2-Cos^2(p+\phi)\}}}{Sin\,(p+\phi)}$$
$$-\delta_1\frac{\sqrt{\{n^2-Cos^2(p+3\phi)\}}}{Sin\,(p+3\phi)}$$
$$b=90^\circ-a,$$
$$\alpha=a+p\,Cos\,\psi,$$
$$\beta=90^\circ-\alpha=90^\circ-a-p\,Cos\,\psi,$$
$$Cos\,\gamma=p\,Sin\,\psi\,\frac{\sqrt{(n^2-Cos^2\,2\phi)}}{Sin\,2\phi}$$
$$+\varepsilon\frac{\sqrt{\{n^2-Cos^2(p+\phi)\}}}{Sin\,2\phi}+\varepsilon_1\frac{\sqrt{\{n^2-Cos^2(p+3\phi)\}}}{Sin\,2\phi}$$
$$Cos\,c=Cos\,\gamma-p\,Sin\,\psi.$$

In de onderstellingen, aan het einde van de vorige § gemaakt, heeft men in deze formulen wêer:

$$Sin\,\psi=\varepsilon=\varepsilon_1=0,$$
$$Cos\,\psi=1.$$

---

§ 12. Gaan wij nu over tot de toepassing, op den *Dipleidoscoop*. a, b en c, α, β en γ zijn dan bekend; terwijl p, q en r moeten bepaald worden uit de vergelijkingen, die uitdrukken:

$$Cos\, p_3 + Cos\, P_3 = 0,$$
$$Cos\, q_3 + Cos\, Q_3 = 0,$$
$$Cos\, r_3 + Cos\, R_3 = 0.$$

Daar in den dipleidoscoop de glasplaat bijna evenwijdig loopt met de snijlijn der voorvlakken van de twee spiegels, heeft men

$$Cos\, c \text{ en } Cos\, \gamma \text{ zeer klein}$$

en dus
$$Cos\, b = Sin\, a,$$
$$Cos\, \beta = Sin\, \alpha.$$

Door alle termen van $Cos\, p_3 + Cos\, P_3$, die zeer klein zijn, te verwaarloozen, vindt men, dat waarden, die zeer weinig van de wezenlijke waarden van $Cos\, p$ en $Cos\, q$ verschillen, moeten voldoen aan

$$- Sin\, 2\phi\, Cos\, p$$
$$+ (Cos\, a\, Cos\, p + Sin\, a\, Cos\, q)(Cos\, a\, Sin\, 2\phi - Sin\, a\, Cos\, 2\phi) = 0$$

of
$$Cos\,(a - 2\phi)\, Cos\, p + Sin\,(a - 2\phi)\, Cos\, q = 0.$$

Dezelfde voorwaarde vindt men, door met verwaarloozing van alle zeer kleine termen, uit te drukken:

$$Cos\, q_3 + Cos\, Q_3 = 0.$$

Voor $Cos\, r_3 + Cos\, R_3 = 0$ heeft men, even als vroeger,

$$Cos\, \gamma\, (Cos\, a\, Cos\, p + Sin\, a\, Cos\, q)$$
$$- (c - \gamma) \sqrt{\{n^2 - 1 + (Cos\, a\, Cos\, p + Sin\, a\, Cos\, q)^2\}}$$
$$- \varepsilon \sqrt{\{n^2 - 1 + (Sin\, \phi\, Cos\, p + Cos\, \phi\, Cos\, q)^2\}}$$
$$- \varepsilon_1 \sqrt{\{n^2 - 1 + (Sin\, \phi\, Cos\, p\, Cos\, 2a + Cos\, \phi\, Cos\, q\, Cos\, 2a}$$
$$\overline{+ Sin\, \phi\, Cos\, q\, Sin\, 2a - Cos\, \phi\, Cos\, p\, Sin\, 2a)^2\}} = 0.$$

Uit de beide voorgaande vergelijkingen en

$$Cos^2 p + Cos^2 q + Cos^2 r = 1$$

kunnen nu voor $Cos\, p$, $Cos\, q$ en $Cos\, r$ waarden bepaald worden, die zeer weinig van de wezenlijke waarden verschillen. Daartoe zou men dan uit de tweede van die drie vergelijkingen de wortelgrootheden moeten verdrijven, waardoor men een vergelijking zou verkrijgen, die ten aanzien van $Cos\, p$ en $Cos\, q$ van den achtsten graad is. Om die vergelijking te vermijden, veronderstellen wij, dat in de twee spiegels telkens de snijlijn van vóór- en achtervlak bijna evenwijdig loopt met de snijlijn der voorvlakken van beide spiegels.

Men heeft dan: $\varepsilon = \varepsilon_1 = 0.$

De tweede vergelijking wordt dan:

$$Cos\,\gamma\,(Cos\,a\,Cos\,p + Sin\,a\,\,Cos\,q)$$
$$= (c - \gamma)\sqrt{\{n^2 - 1 + (Cos\,a\,Cos\,p + Sin\,a\,Cos\,q)^2\}}\,,$$
en hieruit kan men $Cos\,a\,Cos\,p + Sin\,a\,Cos\,q$ bepalen. Men vindt: $(Cos\,a\,Cos\,p + Sin\,a\,Cos\,q)^2 = \dfrac{(c-\gamma)^2\,(n^2 - 1)}{Cos^2\gamma - (c-\gamma)^2}$

of: $(Cos\,a\,Cos\,p + Sin\,a\,Cos\,q)^2 = \dfrac{(c-\gamma)^2\,(n^2 - 1)}{2\,Cos\,c\,Cos\,\gamma - Cos^2\,c}$,

of, als wij voor het bekende tweede lid t^2 stellen,

$$Cos\,a\,Cos\,p + Sin\,a\,Cos\,q = t. \;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (a)$$

Ook is $Cos\,(a - 2\phi)\,Cos\,p + Sin\,(a - 2\phi)\,Cos\,q = 0.$ (b)

Uit deze twee vergelijkingen vindt men de waarden

$$Cos\,p = \frac{t\,Sin\,(2\phi - a)}{Sin\,2\phi} \quad \text{en} \quad Cos\,q = \frac{t\,Cos\,(2\phi - a)}{Sin\,2\phi},$$

en bijgevolg

$$Cos\,r = \sqrt{(1 - Cos^2 p - Cos^2 q)} = \sqrt{(1 - t^2\,Cosec^2\,2\phi)},$$

welke waarden zeer weinig van de wezenlijke waarden van $Cos\,p$, $Cos\,q$ en $Cos\,r$ verschillen. Wij kunnen dus stellen:

$$\left.\begin{aligned} Cos\,p &= \frac{t\,Sin\,(2\phi - a)}{Sin\,2\phi} + x, \\ Cos\,q &= \frac{t\,Cos\,(2\phi - a)}{Sin\,2\phi} + y, \\ Cos\,r &= \sqrt{(1 - t^2\,Cosec^2\,2\phi)} + z. \end{aligned}\right\} \;.\;.\;. \quad (13)$$

Uit de vergelijking $Cos^2\,p + Cos^2\,q + Cos^2\,r = 1$ volgt nu:

$$x\,\frac{t\,Sin\,(2\phi - a)}{Sin\,2\phi} + y\,\frac{t\,Cos\,(2\phi - a)}{Sin\,2\phi} + z\sqrt{(1 - t^2\,Cosec^2\,2\phi)} = 0$$

of

$$xt\,Sin(2\phi - a) + yt\,Cos(2\phi - a) + z\sqrt{(Sin^2\,2\phi - t^2)} = 0. \quad (14)$$

In plaats van de vergelijking (a) heeft men, met inachtneming van zeer kleine grootheden,

$$Cos\,a\,Cos\,p + Sin\,a\,Cos\,q + Cos\,c\,Cos\,r = t.$$

Hieruit volgt:

$$x\,Cos\,a + y\,Cos\,b + Cos\,c\sqrt{(1 - t^2\,Cosec^2\,2\phi)} = 0\,.\;.\;(15)$$

Eene derde vergelijking ter bepaling van x, y en z, krijgt men, door uit te drukken, dat men hebben moet:

$$Cos\,p_3 + Cos\,P_3 = 0.$$

Stellen wij nu de waarden van $Cos\,p$, $Cos\,q$ en $Cos\,r$, in (13) gegeven, in de vroeger gevonden waarden voor $Cos\,p_3$ en $Cos\,P_3$; laten wij daarbij als altijd het produkt van twee zeer kleine grootheden weg, en stellen wij $\varepsilon = \varepsilon_1 = 0$.

Men krijgt dan achtereenvolgens:

$$Cos\,2\phi Cos\,p - Sin\,2\phi\,Cos\,q = \frac{-t\,Sin\,a}{Sin\,2\phi} + x\,Cos\,2\phi - y\,Sin\,2\phi,$$

$$Cos\,A = t + x\,Cos\,a + y\,Sin\,a + Cos\,c\sqrt{1 - t^2\,Cosec^2\,2\phi},$$

$$Cos\,C - Cos\,A = (\alpha - a)\,t\,Cot\,2\phi + (c - \gamma)\,Cos\,r,$$

$$(Cos\,a\,Cos2\phi - Sin\,a Sin2\phi)Cos C - (Cos\alpha Cos2\phi - Sin\alpha Sin2\phi)Cos A$$
$$= Cos\,(2\phi + a)\,Cos\,C - Cos\,(2\phi + \alpha)\,Cos\,A$$
$$= Cos(2\phi+a)(Cos C - Cos A) + Cos A\,\{Cos(2\phi+a) - Cos(2\phi+\alpha)\}$$
$$= Cos\,(2\phi + a)\,(\alpha - a)\,t\,Cot\,2\phi + Cos\,(2\phi + a)\,(c - \gamma)\,Cos\,r$$
$$+ t(\alpha - a)\,Sin(2\phi + a) = \frac{t\,Cos\,a}{Sin\,2\phi}(\alpha - a) + Cos(2\phi+a)(c-\gamma)\,Cos r.$$

$$Sin\,\phi\,Cos\,p + Cos\,\phi\,Cos\,q = \frac{t\,Cos\,(\phi - a)}{Sin\,2\phi} + x\,Sin\,\phi + y\,Cos\,\phi,$$

$$\delta\,Sin\,2\phi\,Cos\,p + \delta\,Cos\,2\phi\,Cos\,q = \frac{\delta t\,Cos\,a}{Sin\,2\phi}.$$

En dus ook:

$$Cos\,p_3 = \frac{-t\,Sin\,a}{Sin\,2\phi} + x\,Cos\,2\phi - y\,Sin\,2\phi + \frac{\sqrt{(n^2 - 1 + t^2)} - t}{t} \times$$
$$\left\{\frac{t\,Cos\,a}{Sin\,2\phi}(\alpha - a) + Cos\,(2\phi + a)\,(c - \gamma)\sqrt{\left(1 - \frac{t^2}{Sin^2\,2\phi}\right)}\right\}$$
$$- \frac{2\sqrt{\left\{n^2 - 1 + \frac{t^2\,Cos^2\,(\phi - a)}{Sin^2\,2\phi}\right\}}}{\frac{t\,Cos\,(\phi - a)}{Sin\,2\phi}}\,\delta\,\frac{t\,Cos\,a}{Sin\,2\phi}.$$

Verder heeft men:

$$-Cos\,2\phi\,Cos\,p - Sin\,2\phi\,Cos\,q + 2\,Cos\,A\,Cos\,(2\phi - a)$$
$$= \frac{t\,Sin\,a}{Sin\,2\phi} + x\,Cos\,2\,(\phi - a)$$
$$- y\,Sin\,(2\phi - 2a) + 2\,Cos\,c\,Cos\,(2\phi - a)\sqrt{1 - t^2\,Cosec^2\,2\phi},$$

$$Cos\,(2\phi - a)\,Cos\,A - Cos\,(\alpha - 2\phi)\,Cos\,C$$
$$= Cos(2\phi - a)(Cos A - Cos C) + \{Cos(2\phi - a) - Cos(2\phi - \alpha)\}\,Cos C$$
$$= \frac{(a - \alpha)\,t\,Cos\,a}{Sin\,2\phi} + (\gamma - c)\,Cos\,(2\phi - a)\,Cos\,r,$$

$$-\,Sin\,\phi\,Cos\,p + Cos\,\phi\,Cos\,q + 2t\,(Sin\,\phi\,Cos\,a - Sin\,\alpha\,Cos\,\phi)$$

$$= \frac{t\,Cos\,(3\phi - a)}{Sin\,2\phi} + 2t\,Sin\,(\phi - a) - x\,Sin\,\phi + y\,Cos\,\phi$$

$$= \frac{t\,Cos\,(\phi + a)}{Sin\,2\phi} - x\,Sin\,\phi + y\,Cos\,\phi\,,$$

$$\delta_1\,(Sin\,2\phi\,Cos\,p - Cos\,2\phi\,Cos\,q - 2t\,Cos\,a\,Sin\,2\phi + 2t\,Sin\,a\,Cos\,2\phi)$$

$$= \delta_1 \left\{ - \frac{Cos\,(4\phi - a)}{Sin\,2\phi} - 2\,Sin\,(2\phi - a) \right\} t = \frac{-\delta_1 t}{Sin\,2\phi}\,Cos\,a.$$

En dus is ook:

$$Cos\,P_3 = \frac{t\,Sin\,a}{Sin\,2\phi} + x\,Cos\,(2\phi - 2a) - y\,Sin\,(2\phi - 2a)$$

$$+ 2\,Cos\,c\,Cos\,(2\phi - a)\,\sqrt{1 - t^2\,Cosec^2\,2\phi}$$

$$+ \frac{\sqrt{n^2 - 1 + t^2} - t}{t} \left\{ \frac{(a - \alpha)\,t\,Cos\,a}{Sin\,2\phi} + (\gamma - c)\,Cos(2\phi - a) \right\} \sqrt{1 - \frac{t^2}{Sin^2 2\phi}}$$

$$+ \frac{2\sqrt{\left\{ n^2 - 1 + \dfrac{t^2\,Cos^2\,(\phi + a)}{Sin^2\,2\phi} \right\}}}{\dfrac{t\,Cos\,(\phi + a)}{Sin\,2\phi}}\;\frac{\delta_1 t\,Cos\,a}{Sin\,2\phi}.$$

De voorwaarde $Cos\,p_3 + Cos\,P_3 = 0$ levert dus op, als men door 2 deelt,

$$\left.\begin{array}{l}
x\,Cos\,(2\phi - a)\,Cos\,a - y\,Sin\,(2\phi - a)\,Cos\,a \\[4pt]
\quad + Cos\,c\,Cos\,(2\phi - a)\sqrt{\left(1 - \dfrac{t^2}{Sin^2\,2\phi}\right)} \\[8pt]
+ \dfrac{\sqrt{n^2 - 1 + t^2} - t}{t}\,Sin\,2\phi\,Sin\,a\,(\gamma - c)\sqrt{\left(1 - \dfrac{t^2}{Sin^2 2\phi}\right)} \\[8pt]
- \dfrac{\sqrt{\left\{ n^2 - 1 + \dfrac{t^2\,Cos^2\,(\phi - a)}{Sin^2\,2\phi} \right\}}}{t\,Cos\,(\phi - a)} \times \delta t\,Cos\,a \\[8pt]
+ \dfrac{\sqrt{\left\{ n^2 - 1 + \dfrac{t^2\,Cos^2\,(\phi + a)}{Sin^2\,2\phi} \right\}}}{t\,Cos\,(\phi + a)} \times \delta_1 t\,Cos\,a = 0.
\end{array}\right\} \quad (16)$$

Uit de vergelijkingen (15) en (16), die ten aanzien van x en y van den eersten graad zijn, vindt men:

$$y = \frac{\sqrt{n^2 - 1 + t^2} - t}{} \,Sin\,a\,(\gamma - c)\sqrt{\left(1 - \frac{t^2}{Sin^2\,2\phi}\right)}$$

$$-\frac{V\left\{n^2-1+\frac{t^2\,Cos^2\,(\phi-a)}{Sin^2\,2\phi}\right\}}{Cos\,(\phi-a)}\times\delta\,\frac{Cos\,a}{Sin\,2\phi}$$

$$+\frac{V\left\{n^2-1+\frac{t^2\,Cos^2\,(\phi+a)}{Sin^2\,2\phi}\right\}}{Cos\,(\phi+a)}\times\delta_1\,\frac{Cos\,a}{Sin\,2\phi}.$$

$$x=\frac{\sqrt{n^2-1+t^2}-t}{t}\,Sin\,a\,tg\,a\,(c-\gamma)V\left(1-\frac{t^2}{Sin^2\,2\phi}\right)$$

$$-\frac{Cos\,c}{Cos\,a}V\left(1-\frac{t^2}{Sin^2\,2\phi}\right)$$

$$+\frac{V\left\{n^2-1+\frac{t^2\,Cos^2\,(\phi-a)}{Sin^2\,2\phi}\right\}}{Cos\,(\phi-a)}\,\delta\,\frac{Sin\,a}{Sin\,2\phi}$$

$$-\frac{V\left\{n^2-1+\frac{t^2\,Cos^2\,(\phi+a)}{Sin^2\,2\phi}\right\}}{Cos\,(\phi+a)}\times\delta_1\,\frac{Sin\,a}{Sin\,2\phi}.$$

Volgens vergelijking (14) heeft men nu verder:

$$z=(\sqrt{n^2-1+t^2}-t)\,(c-\gamma)tg\,a\,Cos 2\phi+\frac{t\,Cos c\,Sin(2\phi-a)}{Cos\,a}$$

$$+\frac{V\left\{n^2-1+\frac{t^2\,Cos^2\,(\phi-a)}{Sin^2\,2\phi}\right\}}{Cos\,(\phi-a)}\times\frac{\delta t\,Cos\,2\phi}{\sqrt{Sin^2\,2\phi-t^2}}$$

$$-\frac{V\left\{n^2-1+\frac{t^2\,Cos^2\,(\phi+a)}{Sin^2\,2\phi}\right\}}{Cos\,(\phi+a)}\times\frac{\delta_1 t\,Cos\,2\phi}{\sqrt{Sin^2\,2\phi-t^2}}.$$

Daar nu x, y, z bepaald zijn, zijn volgens de formules (13) ook p, q en r bepaald.

$$Cos\,p=\frac{t\,Sin\,(2\phi-a)}{Sin\,2\phi}+\frac{\sqrt{n^2-1+t^2}-t}{t}\times$$

$$\times\frac{Sin^2\,a}{Cos\,a}(c-\gamma)\,V\left(1-\frac{t^2}{Sin^2\,2\phi}\right)-\frac{Cos\,c}{Cos\,a}V\left(1-\frac{t^2}{Sin^2\,2\phi}\right)$$

$$+\frac{V\left\{n^2-1+\frac{t^2\,Cos^2\,(\phi-a)}{Sin^2\,2\phi}\right\}}{Cos\,(\phi-a)}\,\delta\,\frac{Sin\,a}{Sin\,2\phi}$$

$$-\frac{\sqrt{\left\{n^2-1+\frac{t^2 Cos^2(\phi+a)}{Sin^2 2\phi}\right\}}}{Cos(\phi+a)}\delta_1\frac{Sin\,a}{Sin 2\phi}.$$

$$Cos\,q=\frac{t\,Cos(2\phi-a)}{Sin\,2\phi}$$

$$+\frac{\sqrt{n^2-1+t^2}-t}{t}Sin\,a(\gamma-c)\sqrt{\left(1-\frac{t^2}{Sin^2 2\phi}\right)}$$

$$-\frac{\sqrt{\left\{n^2-1+\frac{t^2 Cos^2(\phi-a)}{Sin^2 2\phi}\right\}}}{Cos(\phi-a)}\delta\frac{Cos\,a}{Sin\,2\phi}$$

$$+\frac{\sqrt{\left\{n^2-1+\frac{t^2 Cos^2(\phi+a)}{Sin^2 2\phi}\right\}}}{Cos(\phi+a)}\delta_1\frac{Cos\,a}{Sin\,2\phi}.$$

$$Cos\,r=\sqrt{\left(1-\frac{t^2}{Sin^2 2\phi}\right)}+(\sqrt{n^2-1+t^2}-t)(c-\gamma)tg\,a\,Cos 2\phi$$

$$+\frac{t\,Cos\,c\,Cos(2\phi-a)}{Cos\,a}$$

$$+\frac{\sqrt{\left\{n^2-1+\frac{t^2 Cos^2(\phi-a)}{Sin^2 2\phi}\right\}}}{Cos(\phi-a)}\cdot\frac{\delta t\,Cos\,2\phi}{\sqrt{Sin^2 2\phi-t^2}}$$

$$-\frac{\sqrt{\left\{n^2-1+\frac{t^2 Cos^2(\phi+a)}{Sin^2 2\phi}\right\}}}{Cos(\phi+a)}\cdot\frac{\delta_1 t\,Cos\,2\phi}{\sqrt{Sin^2 2\phi-t^2}}.$$

§ 13. Veronderstelt men, *dat de snijlijn van vóór- en achtervlak der glasplaat bijna evenwijdig is met de snijlijn der voorvlakken van de twee spiegels,* dan kan men stellen:

$$Cos\,c=Cos\,\gamma \quad \text{of} \quad c=\gamma.$$

De vergelijking $Cos\,r_2+Cos\,R_2=0$

of
$$Cos\,\gamma\,(Cos\,a\,Cos\,p+Sin\,a\,Cos\,q)$$
$$=(c-\gamma)\sqrt{\{n^2-1+(Cos\,a\,Cos\,p+Sin\,a\,Cos\,q)^2\}}$$

wordt dan: $Cos\,\gamma\,(Cos\,a\,Cos\,p+Sin\,a\,Cos\,q)=0.$

En aan deze vergelijking kan alleen voldaan worden, als men heeft:
$$Cos\,\gamma=0$$
en dus ook:
$$Cos\,c=0.$$

Wij hebben dus: *Als zoowel in de glasplaat als in de twee spiegels de snijlijn van vóór- en achtervlak bijna evenwijdig is* *met de snijlijn der voorvlakken van de twee spiegels, dan kan aan het gestelde slechts ten naastenbij voldaan worden, als de vlakken der glasplaat* bijna *evenwijdig zijn met de snijlijn der voorvlakken van de twee spiegels. Als de vlakken der glasplaat* volkomen *evenwijdig zijn met de snijlijn der voorvlakken van de twee spiegels, dan heeft men ter bepaling van p, q en r eene vergelijking minder dan in de vorige §; zoodat dan de richting der stralen niet volkomen bepaald is.*

§ 14. Beschouwen wij nu nog het bijzondere geval, dat *de stralen bijna rechthoekig gekruist worden door de snijlijn der voorvlakken van de twee spiegels.*

Men heeft dan $Cos\, q = Sin\, p$. De vergelijking

$$Cos\, a\, Cos\, p + Sin\, a\, Cos\, q = t$$

wordt dan :

$$Cos\,(a - p) = t\,,$$

waardoor p bepaald is, met weglating van een zeer kleine grootheid.

De vergelijking, die uitdrukt $Cos\, p_3 + Cos\, P_3 = 0$, wordt dan, als men de zeer kleine grootheden weglaat,

$$Cos\,(a - 2\phi)\, Cos\, p + Sin\,(a - 2\phi)\, Sin\, p = 0$$

of

$$Cos\,(a - 2\phi - p) = 0\,,$$

en dus

$$a - 2\phi - p = 90^\circ$$

of

$$p = a - 2\phi + 90^\circ,$$

waardoor p eveneens bepaald is, met weglating van een zeer kleine grootheid.

In het algemeen zullen de twee waarden voor p, op die wijze gevonden, niet overeenstemmen. De eerste waarde komt dan niet in aanmerking, omdat, als $Cos\,(a - 2\phi - p)$ niet 0 is, of zeer klein, men hebben zou $Cos\, p_3 + Cos\, P_3 =$ een grootheid, die niet nul of zeer klein is.

Kiest men $p = a - 2\phi + 90^\circ$, dan wordt

$$Cos\, p_3 + Cos\, P_3 = \text{zeer klein},$$

en in ieder geval is $Cos\, r_3 + Cos\, R_3 =$ » »

zoodat dan een waarde gevonden is van p, *waardoor bijna aan het gestelde voldaan wordt,* of waardoor de richting der gebroken stralen bijna dezelfde is als de richting der stralen, die onmiddellijk door de glasplaat teruggekaatst worden.

Door voor p te stellen $a - 2\phi + 90^\circ - x$, waarin x zeer klein is, verkrijgt men nog steeds

$$Cos\, r_3 + Cos\, R_3 = \text{zeer klein}\,,$$

en door die waarde te substitueeren in

$$Cos\, p_3 + Cos\, P_3 = 0\,,$$

kan men x zoodanig bepalen, dat men voor

$$p = a - 2\phi + 90^\circ - x$$

heeft $Cos\, r_3 + Cos\, R_3 =$ *zeer klein*, en $Cos\, p_3 + Cos\, P_3 = 0$.

Door substitutie van genoemde waarde in $Cos\, p_3 + Cos\, P_3 = 0$, verkrijgt men

$$x\, Cos\, a - \frac{\sqrt{\{n^2 - Sin^2(a-\phi)\}}}{Cos(a-\phi)}\, \delta\, Cos\, a$$
$$+ \frac{\sqrt{\{n^2 - Sin^2(a+\phi)\}}}{Cos(a+\phi)}\, \delta_1\, Cos\, a = 0\,,$$

en dus

$$x = \frac{\sqrt{\{n^2 - Sin^2(a-\phi)\}}}{Cos\,(a-\phi)}\, \delta - \frac{\sqrt{\{n^2 - Sin^2(a+\phi)\}}}{Cos\,(a+\phi)}\, \delta_1,$$

$$p = a - 2\phi + 90^\circ - \frac{\sqrt{\{n^2 - Sin^2(a-\phi)\}}}{Cos\,(a-\phi)}\, \delta$$
$$+ \frac{\sqrt{\{n^2 - Sin^2(a+\phi)\}}}{Cos\,(a+\phi)}\, \delta_1,$$

$q = 90^\circ - p$, en

$r =$ een willekeurige zeer kleine waarde, geven nu

$$Cos\, r_3 + Cos\, R_3 = \text{zeer klein}\,,$$
$$Cos\, p_3 + Cos\, P_3 = 0\,,$$

en dus ook $\quad Cos\, q_3 + Cos\, Q_3 = 0$,

zoodat voor bovenstaande waarden *bijna* aan het gestelde voldaan wordt.

Heeft men echter $\quad \varepsilon = \varepsilon_1 = 0$

en te gelijk $\quad c = \gamma = 90^\circ$,

dan wordt aan de vergelijking, die uitdrukt

$$Cos\, r_3 + Cos\, R_3 = 0$$

voldaan, door alle waarden van p, q en r. Aan het gestelde is dan voldaan, en $Cos\, r$ blijft onbepaald, maar zeer klein.

Als in de glasplaat, en niet te gelijk in de spiegels, de snijlijn der twee vlakken bijna evenwijdig is met de snijlijn der voorvlakken van de twee spiegels, heeft men

ε en ε_1 niet nul

$$c = \gamma$$

en door $$p = a - 2\phi + 90^\circ$$

$$-\frac{\sqrt{\{n^2 - Sin^2(a-\phi)\}}}{Cos(a-\phi)}\,\delta + \frac{\sqrt{\{n^2 - Sin^2(a+\phi)\}}}{Cos(a+\phi)}\,\delta_1$$

wordt dan nauwkeurig aan het gevraagde voldaan, als de glasplaat zóo geplaatst is, dat men heeft

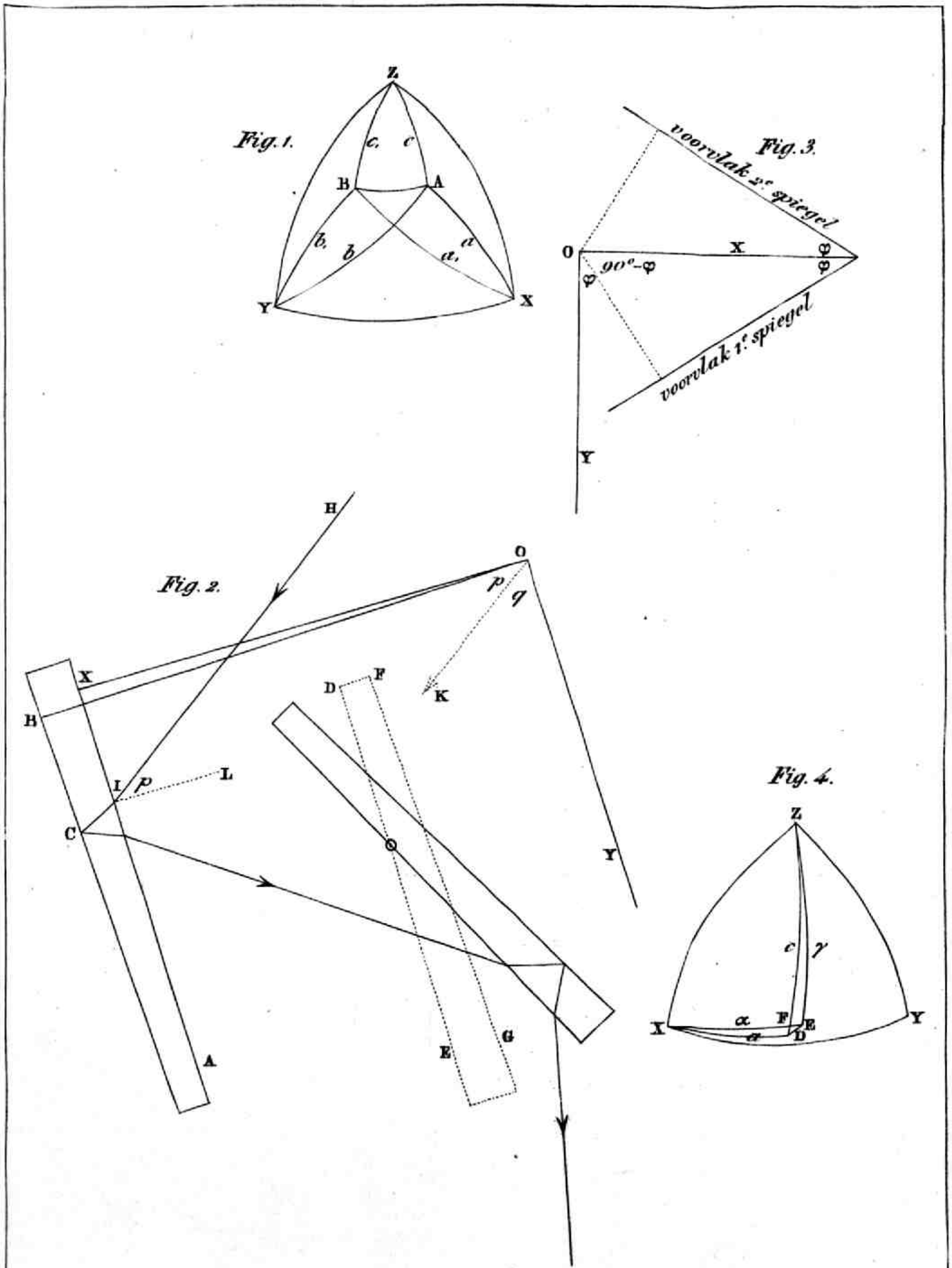
$$Cos c\, Cos(a-p) = \varepsilon\sqrt{\{n^2 - Cos^2(\phi+p)\}} + \varepsilon_1\sqrt{\{n^2 - Cos^2(3\phi+p)\}},$$

of

$$Cos c\, Sin\, 2\phi = \varepsilon\sqrt{\{n^2 - Sin^2(a-\phi)\}} + \varepsilon_1\sqrt{\{n^2 - Sin^2(a+\phi)\}},$$

of

$$Cos\,\gamma = Cos\,c = \frac{\varepsilon\sqrt{\{n^2 - Sin^2(a-\phi)\}} + \varepsilon_1\sqrt{\{n^2 - Sin^2(a+\phi)\}}}{Sin\, 2\phi}$$



J. C. Zürcher sc.