Vormleer, dienstig voor onderwijzers-kweekelingen strekkende tevens tot handleiding voor den onderwijzer bij het onderwijs van de vormleer in de scholen

https://hdl.handle.net/1874/235316

VORMLEER,

VOOR

Aankomende Onderwijzers;

STREKKENDE TEVENS TOT EENE

HANDLEIDING VOOR DEN ONDERWIJZER

BIJ HET

ONDERWIJS VAN DE VORMLEER IN DE SCHOLEN.

DOOR

J. D. R. MOLL,

Hoofdonderwijzer te Deventer.

TWEEDE DEEL:

over den Cirkel en de Lichamen.

DERDE DRUK.

SCHOONHOVEN,

S. E. VAN NOOTEN.

1872.

V O R M L E E R.

VORMLEER,

VOOR

Aankomende Onderwijzers;

STREKKENDE TEVENS TOT EEN

HANDLEIDING VOOR DEN ONDERWIJZER,

BIJ HET

ONDERWIJS VAN DE VORMLEER IN DE SCHOLEN.

DOOR

J. D. R. MOLL,
Hoofdonderwijzer te Deventer.

TWEEDE DEEL:

over den Cirkel en de Lichamen.

DERDE DRUK.

SCHOONHOVEN,
S. E. VAN NOOTEN.
1872.

VOORWOORD.

Het eerste Deel der Vormleer, bevattende beschouwingen over de rechte lijnen en de vlakken door rechte lijnen begrensd, is een ontvangst te beurt gevallen, die ik niet had durven hopen: de eerste druk toch was in korten tijd geheel uitverkocht. De bearbeiding van een tweede oplage veroorzaakte alzoo, dat ik mijn vrijen tijd niet geheel aan het beloofde tweede Deel kon besteden, 't welk daarom thans eerst het licht ziet.

Even als in het eerste Deel een geregelde opvolging heerscht, is ook bij de vervaardiging van het tweede verondersteld, dat de gebruiker geen andere mathematische kennis bezit, dan hij door 't eerste Deel heeft opgedaan; zoodat ook in deze bladen een geregelde opklimming plaats heeft.

Bijzonder is in 't oog gehouden, telkens het net van lichamen, die besproken werden, te teekenen, opdat de leerling zich zelven zoodanig lichaam van bordpapier kunne vervaardigen.

Ik wil hier tevens nog opmerken, dat dit werkje, zoo als het daar ligt, niet voor schoolgebruik is bestemd, maar wel voor jeugdige onderwijzers en kweekelingen, om zich in de Vormleer te bekwamen.

De onderwijzer zal voor de school uit iedere paragraaf datgene kunnen kiezen, wat hem het best bruikbaar schijnt.

Mocht ook deze arbeid, even als het eerste Deel, door den Nederlandschen Onderwijzer met welwillendheid ontvangen worden en aanleiding geven tot bevordering van het onderwijs in de Vormleer op de scholen, dan zou ik mij den tijd, aan de bewerking besteed, niet beklagen.

Deventer, J. D. R. MOLL.
Juni 1864.

Behoudens enkele verbeteringen is deze derde druk onveranderd gebleven.

Deventer, J. D. R. MOLL.
Juli 1872.

INHOUD.

III. BEREKENING VAN OPPERVLAKKEN DER LICHAMEN.

IV. DE INHOUDEN VAN LICHAMEN.

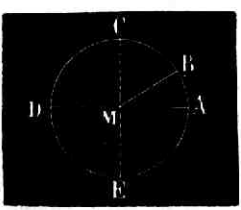
I. OVER DEN CIRKEL.

§ 1.

Over den cirkel, door één rechte lijn gesneden.

Fig. 1.

Fig. 2.



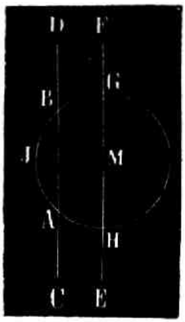
Volgens ons plan zetten wij onze beschouwingen over de *Vormleer* nu verder voort, en beginnen daartoe met den *cirkel*. De cirkel is een plat vlak, ingesloten door een kromme lijn, die in zich zelve terugkeert, en waarvan alle punten zich op gelijke afstanden van een punt M in den cirkel bevinden (zie fig. 1). Dit punt M wordt het *middelpunt* (centrum) genoemd. Men kan zich voorstellen, dat de cirkel ontstaan is uit de draaiing van het beweegbare been van een hoek AMB, wiens beenen even lang zijn (zie bladz. 39 van het I^e deel), begonnen bij een hoek van 0°, terwijl dat beweegbare been alle standen doorloopt, vooreerst tot 90°, dan tot 180°, dan tot 270° en dan weder tot 360°. Het punt B heeft nu een kromme lijn doen ontstaan, die de *cirkelomtrek* wordt genoemd en het vlak van den cirkel begrenst. Dit vlak wordt *cirkelvlak* genoemd of ook wel het *oppervlak* van den cirkel (zie fig. 2). — Elke cirkel heeft slechts één middelpunt; als men dit door een rechte lijn met eenig punt van den omtrek vereenigt, dan heet die lijn *straal* (radius). In een cirkel kan men ontelbaar veel stralen trekken, die alle even lang zijn (MA = MB = MC enz.). Elk paar stralen snijdt van den omtrek een gedeelte af; dit noemt men *boog*. Zoo zijn AB, BC, AC, enz. bogen van den cirkel.

Om een cirkel te beschrijven, gebruikt men een werktuig, dat onder den naam van *passer* genoegzaam bekend is. Om met een gegeven straal een cirkel te beschrijven, opent men den passer ter wijdte van den gegeven straal, zet het eene been van den passer vast op het papier, en laat het andere om dit vaste been ronddraaien, steeds zorgende, dat de opening van den passer onveranderd blijft.

De cirkel bezit onderscheiden fraaie eigenschappen, van welke wij eenige zullen mededeelen. Daartoe beschouwen wij in deze afdeeling

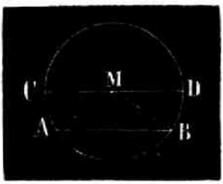
den cirkel door één rechte lijn gesneden.

Fig. 3.



Men zegt, dat de cirkel door een rechte lijn wordt *gesneden*, indien deze den omtrek tweemaal snijdt. De lijn CD wordt *snijlijn* (*secans*) genoemd, want zij snijdt den cirkel in de twee punten A en B (zie fig. 3). Wanneer de snijlijn door het middelpunt M van den cirkel gaat, dan is dat gedeelte van de snijlijn, dat tusschen de snijpunten H en G is gelegen, een *middellijn* (diameter). Het is duidelijk dat de lengte der middellijn gelijk is aan de lengte van den dubbelen straal. Stelt men zich de snijlijn EF beweegbaar voor om het vaste punt M, dan zal men zien, dat oneindig veel middellijnen in den cirkel getrokken kunnen worden. Snijdt men de figuur volgens de lijn EF door, dan verkrijgt men twee *halve cirkels*. Een halve cirkel wordt dus door den halven omtrek en een middellijn begrensd. De middellijn deelt dus zoowel het cirkelvlak als den cirkelomtrek midden door. Wanneer de snijlijn niet door het middelpunt gaat, zoo als de lijn CD (fig. 3), dan is het deel van de snijlijn, dat tusschen de punten A en B ligt, een *koorde*. Een koorde wordt langer, als zij dichter bij het middelpunt is gelegen; en korter, als haar afstand van het middelpunt toeneemt. De koorde, die de uiteinden van een boog AIB (fig. 3) vereenigt, heet bepaaldelijk *de koorde, welke dien boog onderspant*. Hoe langer een koorde is, des te grooter wordt de boog, dien zij onderspant. De langste koorde is dus de middellijn.

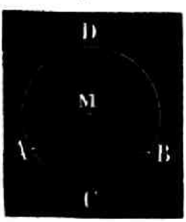
Fig. 4.



Elke andere koorde in den cirkel is korter dan de middellijn. Die koorde toch gaat niet door het middelpunt; men kan dit punt derhalve met de uiteinden der koorde door stralen vereenigen; hierdoor ontstaat een gelijkbeenige driehoek AMB (fig. 4). En in een driehoek is steeds de eene zijde of AB kleiner dan de som der beide andere zijden of AM + BM; maar daar de middellijn gelijk aan den dubbelen straal is, volgt ook dat AB steeds kleiner is dan de middellijn CD.

Naardien er door de vereeniging van de uiteinden der koorde met het middelpunt steeds een gelijkbeenige driehoek ontstaat, zal men ook gemakkelijk opmerken, dat *de hoek, gelegen tusschen de koorde en den straal, steeds scherp is*: de som der hoeken van een driehoek is toch nimmer grooter dan 180°. Hieruit volgt tevens, dat de koorde en de straal even lang zijn, ingeval de hoek, dien zij met den straal maakt, gelijk is aan 60°. Zij zal kleiner dan de straal zijn, zoo de hoek kleiner dan 60° is.

Fig. 5.



Indien men in den cirkel een koorde trekt, dan verdeelt zij den omtrek des cirkels zoowel als zijn oppervlak in twee ongelijke deelen (fig. 5). Immers is oppervlak ADB grooter dan oppervlak ACB. Ieder dezer deelen noemt men een *segment*. De grenzen van een segment zijn dus een boog en een koorde. Wanneer men nu de uiteinden der koorde AB met het middelpunt M door stralen vereenigt, dan is de cirkel door deze beide stralen wederom in twee ongelijke deelen verdeeld, die men *sectoren* noemt: MACBM en MADBM zijn dus sectoren van den cirkel. De grenzen van een sector zijn een boog en twee stralen. De sector bestaat uit een segment en een gelijkbeenigen driehoek, of uit een segment min een gelijkbeenigen driehoek. Zoo is in deze figuur

sector MACB = segment ACB + driehoek ABM
en » MADB = » ADB — » ABM.

Wanneer een koorde zich al verder en verder van het middelpunt des cirkels verwijdert, dan zal zij eens in zulk een stand komen, dat zij met den omtrek van den cirkel niet meer twee punten, maar slechts één punt gemeen heeft. Alle andere punten van de lijn AB liggen dan buiten den cirkel (zie fig. 6); alleen heeft de lijn AB het punt C met den cirkel gemeen, en dit punt wordt *raakpunt* genoemd, terwijl de lijn AB gezegd wordt den cirkel in C te raken, dat is: zij is *raaklijn* (tangens). Als men nu den straal MC trekt, dan zal het niet moeilijk vallen op te merken, dat AB loodrecht op MC staat. Het punt C toch is het eenige, dat de raaklijn met den cirkelomtrek gemeen heeft; ieder ander punt van AB zal buiten den cirkel vallen en dus zal de vereenigingslijn van dit punt met het punt M langer zijn dan de straal MC. Deze is alzoo de kortste afstand tusschen het punt M en de lijn AB, en zij is gevolgelijk een loodlijn op AB.

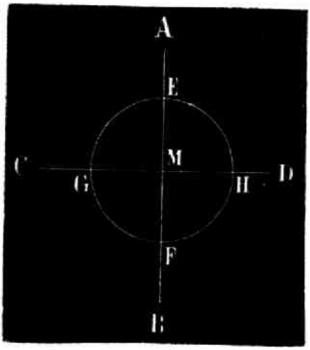
Fig. 6.

§ 2.

Over den cirkel, door twee rechte lijnen gesneden.

Thans willen wij den cirkel, door *twee* rechte lijnen gesneden, beschouwen; letten wij daartoe op eenige eigenschappen van den cirkel, ontstaande uit de volgende gevallen:

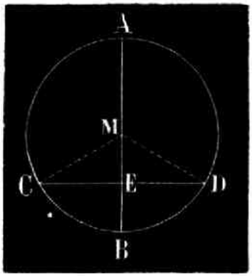
Fig. 7.



a. *Twee elkander rechthoekig snijdende middellijnen.* Fig. 7 doet ons dit geval zien. De geheele oppervlakte van den cirkel, zoowel als de cirkelomtrek wordt door deze lijnen in vier gelijke deelen verdeeld. Elk der deelen van het oppervlak des cirkels wordt een *kwadrant* genoemd. Een kwadrant wordt dus begrensd door twee stralen en een boog, die het vierde deel van den geheelen cirkelomtrek bevat. In genoemde fig. merkt men op: vier gelijke bogen FH, EH, EG, FG; — vier gelijke stralen ME, MF, MG en MH, en vier gelijke hoeken aan het middelpunt EMH, FMH, FMG en EMG. Elken gelijken boog vindt men juist tusschen de beenen van elken gelijken hoek aan het middelpunt. Werd een der hoeken aan het middelpunt grooter of kleiner, dan ook zou de boog tusschen de beenen van dien hoek grooter of kleiner worden, en omgekeerd. De grootte van zoodanigen hoek hangt dus van de lengte des boogs af. Hieruit heeft men een middel afgeleid om hoeken door cirkelbogen te meten; dat is: men heeft daartoe den geheelen cirkelomtrek even zoo verdeeld als 4 rechte hoeken, dus in $4 \times 90^0 = 360^0$. Zoo dikwijls nu de boog, waarop een hoek aan 't middelpunt staat, in den geheelen omtrek is bevat, even zoo veel malen is die hoek in vier rechte hoeken begrepen. Passen wij nu dit op de in fig. 7 voorkomende kwadranten toe, dan is de volgende schrijfwijze gewettigd: ∟ EMH = boog HE $= 90^0$; ∟ FMH = boog FH $= 90^0$, enz. en wil eenvoudig zeggen dat ∟ EMH recht is, of dat boog HE het $\frac{1}{4}$ van den geheelen cirkelomtrek is. Een hoek aan 't middelpunt wordt dus gemeten door den boog waarop hij staat. Is b. v. deze boog het $\frac{1}{8}$ van den geheelen omtrek des cirkels, dan bevat die hoek $\frac{360}{8}^0 = 45^0$, enz.

b. *Een middellijn en een koorde in den cirkel, die elkander rechthoekig snijden.* Laat in fig. 8 AB de middellijn en CD de

Fig. 8.



koorde zijn, die elkander in het punt E rechthoekig doorsnijden. Als men dan de stralen MC en MD trekt, dan ziet men in den gelijkbeenigen driehoek CDM, dat CE = DE is, en dat dus de koorde in het snijpunt E is midden door gedeeld. Uit de gelijkheid der hoeken CME en DME volgt tevens, dat boog BC = boog BD is. De geheele cirkelomtrek door de middellijn AB in twee gelijke deelen verdeeld zijnde, volgt ook dat boog ACB — boog BC = boog ADB — boog BD, of dat boog AC = boog AD is. De middellijn wordt blijkbaar door de koorde in twee ongelijke deelen verdeeld. Ook blijkt nog uit de figuur, dat de lijn, die rechthoekig door het midden der koorde gaat, door het middelpunt zal loopen. Het stuk BE der middellijn, dat van deze rechthoekig door een koorde wordt afgesneden, wordt de *pijl* genoemd.

c. ***Een middellijn en een koorde, die elkander aan den omtrek ontmoeten.*** Laat in fig. 9 AB de middellijn en AC de koorde

Fig. 9.

zijn. Deze maken met elkander een hoek, die gemeten wordt door den halven boog, tusschen zijn beenen begrepen. Trekt men — om deze waarheid aan te toonen — den straal MC, dan is $\triangle$ AMC gelijkbeenig, en dus $\llcorner$ BMC = $\llcorner$ CAM + $\llcorner$ ACM = 2 $\llcorner$ CAM. Maar $\llcorner$ BMC = boog BC, dus $\llcorner$ CAB = $\frac{1}{2}$ boog BC. Het is duidelijk, dat een middellijn en een koorde, die elkander aan den omtrek ontmoeten, steeds een hoek vormen kleiner dan 90°. Indien toch deze hoek gelijk ware aan 90°, dan zou AC geen koorde, maar raaklijn zijn. — Als men uit het uiteinde C der koorde AC een loodlijn CD op de middellijn laat vallen, dan heet het stuk AD der middellijn de *projectie* der koorde op de middellijn.

d. ***Twee aan den omtrek elkander ontmoetende koorden.*** Indien AB en BC in fig. 10 of 11 die koorden zijn, dan wordt in beide gevallen de hoek, dien de koorden vormen, gemeten door de helft van den boog, waarop de hoek staat. Trekt men in beide figuren de middellijn BD, dan is reeds aangetoond (uit fig. 9) dat $\angle$ ABD $= \frac{1}{2}$ boog AD en $\angle$ CBD $= \frac{1}{2}$ boog CD is, en derhalve is ook in fig. 10: $\angle$ ABD $+ \angle$ CBD $= \angle$ ABC $= \frac{1}{2}$ boog AD $+ \frac{1}{2}$ boog CD $= \frac{1}{2}$ boog (AD $+$ CD) $= \frac{1}{2}$ boog AC. In fig. 11 is $\angle$ CBD $= \frac{1}{2}$ boog CD en $\angle$ ABD $= \frac{1}{2}$ boog AD, en bijgevolg $\angle$ CBD $- \angle$ ABD $= \angle$ ABC $= \frac{1}{2}$ boog CD $- \frac{1}{2}$ boog AD $= \frac{1}{2}$ boog AC. — In fig. 10, waar aan elken kant der middellijn een koorde ligt, kan de hoek tusschen de koorden scherp, recht en stomp zijn, maar zijn grootte is steeds beneden 180 graden, en in fig. 11, waar beide koorden aan den zelfden kant der middellijn liggen, is de hoek tusschen die koorden steeds kleiner dan een rechte, d. i. steeds een scherpe hoek.

Fig. 10.

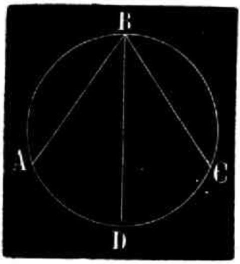
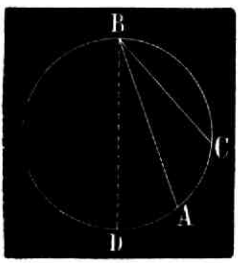
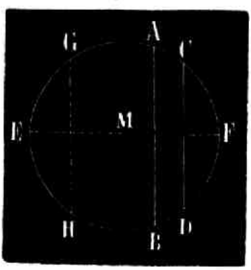


Fig. 11.



e. *Twee koorden, die evenwijdig loopen.* Laten AB en CD die koorden zijn; trekt men een middellijn EF (fig. 12), die deze koorden rechthoekig snijdt, dan is volgens het geleerde (onder *b*) boog CE $=$ boog DE en boog AE $=$ boog BE; derhalve is ook boog AC $=$ boog BD. De bogen tusschen de uiteinden van twee evenwijdige koorden zijn dus even lang. — Is nu ieder dezer evenwijdige koorden op gelijken afstand van 't middelpunt geplaatst, zoo als CD en GH in fig 12, dan zijn die koorden even lang, de bogen GEH en CFD buiten de evenwijdige lijnen zijn ook even groot en de segmenten CFD en GEH hebben tevens een

Fig. 12.



gelijk oppervlak. Deze waarheden zijn gemakkelijk aan te toonen.

Fig. 13.

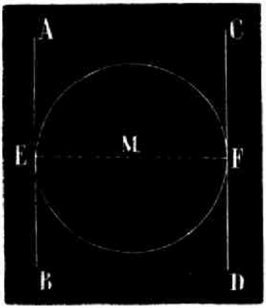


Fig. 14.

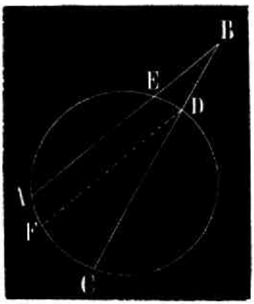


Fig. 15.

f. *Twee raaklijnen, die evenwijdig zijn.* Laten AB en CD (fig. 13) die raaklijnen zijn, en E en F de raakpunten. Nu ligt de cirkel geheel tusschen die evenwijdige lijnen in. De vereenigingslijn tusschen de punten E en F gaat door het middelpunt des cirkels en EF is juist de middellijn. De afstand tusschen de beide raaklijnen is dus gelijk aan den dubbelen straal.

g. *Twee snijlijnen, die elkander buiten den omtrek snijden.* Indien in fig. 14 AB en BC die snijlijnen zijn, dan kan de hoek, dien zij vormen, ook door de cirkelbogen gemeten worden, die zich tusschen zijn beenen bevinden. Trekt men daartoe uit een der snijpunten b. v. D de lijn DF evenwijdig aan het andere been AB, dan is $\angle$ ABC $=$ $\angle$ CDF $= \frac{1}{2}$ boog CF $= \frac{1}{2}$ (boog AC — boog AF) $= \frac{1}{2}$ (boog AC — boog DE). De hoek, gevormd door twee buiten den cirkel elkander snijdende snijlijnen, wordt dus gemeten door het halve verschil der bogen, tusschen zijn beenen begrepen.

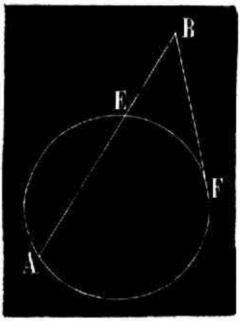
Trekt men nu (zie fig. 15) de koorden AD en CE, dan kan men gemakkelijk aantoonen, dat de $\triangle^n$ ABD en CBE gelijkvormig zijn. Daartoe is alleen noodig op te merken, dat $\angle$ A $=$ $\angle$ C $= \frac{1}{2}$ boog DE is. Beide driehoeken hebben daarenboven den hoek B gemeen, dus mag men tot hun gelijkvormigheid besluiten. Wegens die gelijkvormigheid dan heeft men

$$BE : BC = BD : AB.$$

d. i. als twee snijlijnen elkander buiten den omtrek des cirkels snijden, dan maken de eene en haar stuk buiten den cirkel de beide uiterste — en de andere met haar stuk buiten den cirkel de middelste termen eener meetkunstige evenredigheid uit.

Indien men een der lijnen b. v. BC om het punt B laat ronddraaien en naar den kant van F bewegen (zie fig. 16), dan komen de punten C en D steeds dichter bij elkander en vereenigen zich op den oogenblik, dat BC den cirkel in het punt F aanraakt. De genoemde evenredigheid heeft thans in zooverre een verandering ondergaan, dat nu $BC = BD = BF$ geworden is, zoodat men nu heeft:

Fig. 16.

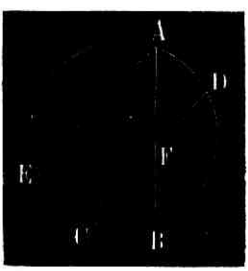


$$BE : BF = BF : AB.$$

Hieruit volgt dus, dat de raaklijn aan een cirkel middelevenredig is tusschen de geheele snijlijn en het stuk buiten den cirkel.

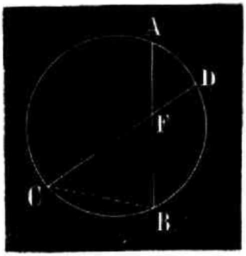
h. *Twee koorden, die elkander binnen den omtrek snijden.* Laten AB en CD die koorden zijn (fig. 17). Trekt men dan AE evenwijdig aan CD, dan is $\llcorner$ BFC $= \llcorner$ BAE $= \frac{1}{2}$ boog BE $= \frac{1}{2}$ boog BC $+ \frac{1}{2}$ boog CE; maar volgens het geleerde onder *d* is boog CE $=$ boog AD, dus is ook $\llcorner$ BFC $= \frac{1}{2}$ boog BC $+ \frac{1}{2}$ boog AD $= \frac{1}{2}$ (boog BC $+$ boog AD). Hieruit blijkt ons, dat de hoek tusschen twee elkander binnen den omtrek snijdende koorden gemeten wordt, door de halve som der bogen tusschen de beenen van den hoek begrepen.

Fig. 17.



Trekt men nu de vereenigingslijnen tusschen A en D, alsmede tusschen B en C (zie fig. 18), dan kan men ook gemak-

Fig. 18.



kelijk aantoonen, dat de △ᵉ ADF en BCF gelijkvormig zijn. Daartoe is alleen noodig op te merken, dat ∟ A = ∟ C = ½ boog BD is. Want beide driehoeken hebben een gelijken tophoek F, zoodat men thans tot hun gelijkvormigheid mag besluiten. Wegens deze gelijkvormigheid dan heeft men

AF : DF = CF : BF.

d. i. als twee koorden elkander snijden, dan maken de beide deelen der eene de uiterste, en de beide deelen der andere de middelste termen eener meetkunstige evenredigheid uit.

Zijn de koorden in zoodanigen stand, dat de eene de middellijn wordt, die de andere rechthoekig snijdt (fig. 19), dan is nog evenzoo (vergelijk fig. 8 en het daarbij besprokene)

Fig. 19.

CE : BE = AE : DE

maar nu is CE = DE; dus is ook

BE : CE = CE : AE,

of BE : DE = DE : AE,

of BE : ½ CD = ½ CD : AE;

d. i. de halve koorde is nu middelevenredig tusschen de beide deelen der door haar rechthoekig gesneden middellijn, een eigenschap, waarop wij hieronder zullen terugkomen.

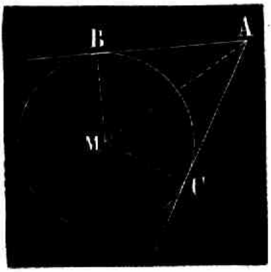
Fig. 20.

i. *Twee raaklijnen, die elkander snijden.* Laten AB en AC (zie fig. 20) die raaklijnen zijn, en B en C de raakpunten. Trekt men dan door het middelpunt de aan AB evenwijdige middellijn DE, en uit E de lijn EF evenwijdig aan AC, dan is boog BD = boog BE, boog CF = boog CE, dus boog DF = boog BDFC — boog BEC;

maar $\angle$ DEF $=$ $\angle$ BAC zijnde, volgt ook $\angle$ BAC $=$ $\angle$ DEF $=$ $\frac{1}{2}$ boog DF $=$ $\frac{1}{2}$ boog BDFC $-$ $\frac{1}{2}$ boog BEC, d. i. de hoek tusschen twee raaklijnen wordt gemeten door het halve verschil der bogen tusschen zijn beenen. — Is $\angle$ BAC recht, dan moet BMC juist een kwadrant of het vierde deel van den cirkel zijn.

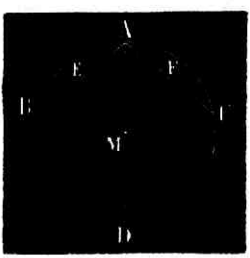
Beschouwen wij nogmaals het geval, dat uit zeker punt A (fig. 21) twee raaklijnen aan den cirkel zijn getrokken. Trekken wij dan de stralen MB en MC naar de raakpunten, alsmede de lijn MA, dan ontstaan twee rechthoekige driehoeken ABM en ACM, die gelijk en gelijkvormig zijn; de overeenkomstige zijden dus gelijk zijnde, is AB $=$ AC, waaruit dus blijkt, dat de twee raaklijnen, die uit één punt aan den cirkel getrokken worden, even lang moeten zijn. — Uit de gelijkvormigheid dier beide driehoeken volgt ook, dat $\angle$ BAM $=$ $\angle$ CAM is, waaruit dus blijkt, dat de lijn, die uit het snijpunt van twee raaklijnen naar het middelpunt wordt getrokken, den hoek tusschen de raaklijnen midden door deelt. — Uit deze laatste opmerking volgt ook gemakkelijk de hierboven bewezen regel om den hoek A te bepalen.

Fig. 21.



k. *Twee gelijke koorden uit één punt van den omtrek getrokken.* Laten AB en AC (fig. 22) die gelijke koorden zijn. Indien men dan de middellijn AD trekt, zal deze den hoek, waaronder de koorden elkander snijden, midden doordeelen. Immers zijn de driehoeken AMB en AMC gelijk en gelijkvormig, de hoeken tegenover de gelijkstandige zijden zijn dus gelijk, en derhalve is $\angle$ BAD $=$ $\angle$ CAD. De bogen BD en CD, alsmede AB en AC zullen tevens gelijk zijn. Laat men voorts uit M de loodlijnen MF en ME op de koorden neêr, dan zijn deze loodlijnen tevens gelijk, omdat de rechthoekige driehoeken AEM en AFM

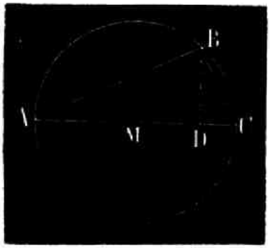
Fig. 22.



gelijk en gelijkvormig zijn. De afstanden van beide koorden tot het middelpunt zijn dus tevens even lang. — Het is voorts duidelijk, dat als deze afstanden grooter of kleiner worden, de koorden dan kleiner of grooter worden.

1. *Twee koorden, die te zamen den halven cirkel onderspannen.* Laten AB en BC die koorden zijn, die juist den halven omtrek van den cirkel onderspannen (fig. 23), dan zal de lijn AC, die de uiteinden dezer koorden verbindt, door het middelpunt moeten gaan. De hoek B staat dan op boog AC, die juist den halven cirkelomtrek bevat en dus $= 180^\circ$ is. Alzoo is $\llcorner B = \frac{1}{2}$ boog $AC = 90^\circ =$ recht. De driehoek ABC is dus in B rechthoekig. Laat men nu uit het hoekpunt van den rechten hoek een loodlijn BD op de hypotenusa van den driehoek of de middellijn AC van den cirkel neêr, dan heeft men (vergelijk met het onderstaande § 18 van het 1e Deel):

Fig. 23.



$$AC^2 = AB^2 + BC^2, \quad BD^2 = AD \times CD,$$
$$BC^2 = AC \times CD, \quad AB^2 = AC \times AD,$$

d. i. de som van de vierkanten der twee koorden, die den halven cirkel onderspannen; is gelijk aan het vierkant op de middellijn des cirkels; — twee dezer drie lijnen bekend zijnde, kan men dus de derde vinden. De loodlijn die uit een willekeurig punt van den omtrek des cirkels op de middellijn valt, is middelevenredig tusschen de deelen, waarin zij de middellijn verdeelt. En als men uit zeker punt van den omtrek een koorde en een middellijn trekt, dan is die koorde middelevenredig tusschen haar projectie op de middellijn (verg. fig. 9) en de geheele middellijn.

§ 3.

Twee cirkels ten opzichte van elkander.

Wij willen thans twee cirkels beschouwen, en wel zulke, die buiten elkander liggen. Vereenigt men hun middelpunten

Fig. 24.

Fig. 25.

Fig. 26.

M en N (zie fig. 24), dan is deze lijn MN gelijk aan de som der beide stralen opgeteld bij den afstand AB tusschen beider bolle omtrekken. — Als de cirkels gelijke stralen hebben, dan is die lijn MN gelijk aan tweemaal den straal van een der cirkels, opgeteld bij den afstand AB tusschen beider bolle omtrekken.

Behoudt de grootste cirkel zijn plaats en schuift men den kleinsten naar den grootsten, dan wordt de afstand AB tusschen hun omtrekken steeds kleiner. Eenmaal komen zij in zoodanigen toestand, dat genoemde afstand AB verdwenen is, dat dus de omtrekken elkander raken (zie fig. 25). Zij hebben nu één punt P gemeen, dat wederom het raakpunt genoemd wordt; daarom worden de cirkels gezegd elkander te raken; hier wordt die raking *uitwendig* genoemd, ter onderscheiding van een andere raking, die wij hieronder zullen leeren kennen. Vereenigt men nogmaals de middelpunten door een rechte lijn, dan loopt deze door het raakpunt P en is even lang als de som der beide stralen. Uit het raakpunt een loodlijn op MN oprichtende, zal deze een raaklijn aan beide cirkels zijn.

Stelt men zich nu voor, dat men den kleinsten cirkel verder naar het middelpunt van den grootsten voortbeweegt, dan zal de minste verschuiving een snijding van beide cirkels doen ontstaan (fig. 26). Deze snijding heeft in twee punten C en D plaats. Twee cirkels kunnen elkander in niet meer dan in twee punten snijden.

De lijn MN, die de middelpunten vereenigt, is nu weder kleiner geworden, en wel zooveel als de lijn AB bedraagt tusschen beide omtrekken. Zij is thans dus gelijk aan de som der beide stralen verminderd met de lijn AB. Vereenigt men de punten C en D door een rechte lijn, dan is deze een koorde van beide cirkels. Deze koorde en de lijn MN snijden elkander rechthoekig, dat ons duidelijk wordt, als wij de stralen MD, MC, ND en NC trekken, want dan is MDNC een gelijkbeenige vierhoek, wiens diagonalen elkander rechthoekig moeten snijden (vergelijk § 22 van het I[e] Deel). Verder is MDBC een sector van den grooten en NDAC een sector van den kleinen

Fig. 27.

cirkel. Beide sectoren hebben het cirkelvormig stuk ADBC met elkander gemeen. Dit stuk bestaat uit de som van twee segmenten, waarvan de boog DBC tot den grooten en DAC tot den kleinen cirkel behoort. — Laat men op zoodanige wijze twee *gelijke* cirkels elkander snijden (zie fig. 27) dan zal men even gemakkelijk kunnen aantoonen, dat AM = BN, AE = BE, boog AC = boog AD = boog BC = boog BD, △ CDM = △ CDN, vierhoek MCND = een ruit, sector MCBD = sector NCAD, segm. CDB = segm. CAD en CE = $\sqrt{(CN^2 - NE^2)} = \sqrt{(AN^2 - NE^2)} = \sqrt{(AN - NE)(AN + NE)}$ $= \sqrt{AE\,(2NE + AE)} = \sqrt{AE\,(MN + AE)}$.

De beweging met de cirkels uit fig. 26 nogmaals voortzettende, komen zij eens in den toestand van fig. 28. Beide omtrekken hebben nu weder een punt gemeen, en de cirkels worden gezegd elkander *inwendig* aan te raken. Merkte men bij de *uitwendige* aanraking op, dat de lijn MN, of de afstand tusschen de middelpunten, gelijk was aan de *som* der stralen, — nu is die afstand gelijk

Fig. 28.

aan het verschil der beide stralen. Het raakpunt P ligt in de verlengde lijn, die de beide middelpunten vereenigt, en de bolle zijde van den eenen cirkel is naar de holle zijde van den anderen gekeerd.

Waren thans de beide cirkels even groot, dan is het duidelijk, dat zij elkander geheel zouden kunnen bedekken en dat hun omtrekken dan juist over elkander zouden komen te liggen.

Nogmaals de beweging van den kleinsten cirkel voortzettende, zal hij eens in den toestand van fig. 29 komen, waar beider middelpunten op elkander vallen, zoodat thans de afstand der middelpunten verdwenen zal zijn. Elke middellijn AB in den grootsten cirkel zal den kleinsten in twee punten C en D snijden; de lijn CD is de middellijn van den kleinsten cirkel. Omdat nu straal MA = straal MB, en straal MC = straal MD is, zoo volgt ook dat de lijn AC = BD zal zijn. De cirkelomtrek van den kleinsten cirkel is dus overal op gelijken afstand van den grootsten, en het ringvormig stuk tusschen beide omtrekken gelegen, bedraagt zooveel als het verschil der oppervlakken van beide cirkels.

Fig. 29.

§ 4.

Over de veelhoeken, in *en* om *den cirkel beschreven.*

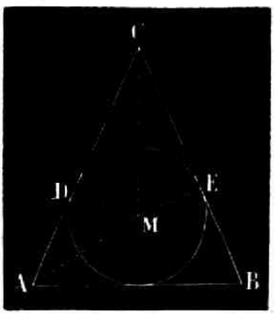
Wij merkten reeds op, dat een rechte lijn den cirkel slechts in twee punten kan snijden; in meer dan twee punten is niet mogelijk. Liggen dus drie punten in een rechte lijn, dan kan er geen cirkel gedacht worden, die de eigenschap heeft, dat in zijn omtrek deze drie punten liggen; maar heeft men drie punten, die niet in een rechte lijn liggen, dan kan men door die punten altijd een cirkel brengen. Laten A, B en C die

Fig. 30.

drie punten zijn (fig. 30). Vereenig dan A met B, en A met C, dan moeten AB en AC koorden van den te beschrijven cirkel zijn; plaatst men nu op het midden dier koorden loodlijnen DM en EM, dan moeten deze door het middelpunt gaan (zie bij fig. 8). Hij snijpunt dezer loodlijnen zal dus het middelpunt van den cirkel zijn; en AM, BM en CM zijn stralen. De cirkel, dien men alzoo met een dier stralen uit M beschrijft, zal door de punten A, B en C gaan, welke punten dus in den omtrek van den cirkel liggen. De driehoek ABC wordt gezegd *in* den cirkel te staan. Hieruit volgt alzoo, dat men *om* elken driehoek een cirkel kan beschrijven.

In figuur 20 en 21 merkten wij twee raaklijnen aan den cirkel op; zoo men zich nu nog een derde raaklijn voorstelt, die deze beide raaklijnen snijdt, dan wordt de tusschen deze raaklijnen beschreven cirkel gezegd *in* den driehoek te staan, door deze raaklijnen gevormd. Wij merkten in fig. 21 tevens op, dat de lijn, die het snijpunt der twee raaklijnen met het middelpunt vereenigt, den hoek tusschen de raaklijnen midden door deelt. Hieruit kunnen we nu gemakkelijk afleiden, hoe in elken driehoek een cirkel kan beschreven worden. Laat (fig. 31) ABC een willekeurige driehoek voorstellen. De drie zijden moeten raaklijnen aan den cirkel zijn. Deelt men dus den hoek A midden door, alsmede den hoek C, dan zal het snijpunt dezer deellijnen AM en CM de plaats van het middelpunt M des cirkels aanwijzen. Laat men voorts uit M een loodlijn MD of ME op de zijde AC of BC neer, dan zal deze loodlijn een straal van den cirkel zijn. De cirkel, met dezen straal uit M beschreven, raakt de drie zijden des driehoeks.

Fig. 31.



Beschouwen wij thans een regelmatigen driehoek, waarom

Fig. 32.

een cirkel is beschreven (fig. 32), dan blijkt ons dat de bogen AB, BC en AC even groot zijn, en dat de drie middellijnen uit de hoekpunten getrokken, de koorden rechthoekig snijden. Elke koorde, met de daardoor getrokken middellijn, verkeert dus in 't geval van fig. 8, en daarom is boog BD = boog AD = boog BE = boog CE = boog CF = boog AF; trekt men nu ook de koorden AD, BD, BE, CE, CF en AF, dan zijn deze koorden onderling gelijk. De nu gevormde zeshoek ADBECF staat in den cirkel, want zijn hoekpunten liggen in den omtrek. Van dezen zeshoek, waarvan de zijden gelijk zijn, is ∟ ADB = $\frac{1}{2}$ boog ACB = $\frac{1}{3} \times 360^\circ = 120^\circ$, ∟ DBE = $\frac{1}{2}$ boog DFE = $\frac{1}{3} \times 360^\circ = 120^\circ$, ∟ BEC = $\frac{1}{2}$ boog BAC = $\frac{1}{3} \times 360^\circ = 120^\circ$, enz. De hoeken van den gelijkzijdigen zeshoek onderling gelijk zijnde, mag men dus besluiten, dat hij *regelmatig* is. BDAFCE wordt alzoo een regelmatige ingeschreven zeshoek genoemd.

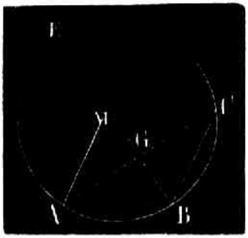
Den regelmatigen ingeschreven zeshoek nader beschouwende

Fig. 33.

(fig. 33), dan blijkt ons door het trekken der drie middellijnen, AD, BE en CF, dat de geheele zeshoek is verdeeld in zes onderling gelijke en gelijkvormige driehoeken. Ieder dezer driehoeken is gelijkbeenig, als hebbende voor opstaande beenen stralen van den cirkel, en de zes tophoeken, die in het middelpunt samenkomen, worden ieder onderspannen door een gelijken boog. Elke hoek aan het middelpunt bedraagt dus $\frac{1}{6} \times 360^\circ = 60^\circ$, zoodat de zes driehoeken gelijkzijdig zijn. Daarom is AM = AB = BC = enz.; d. i. de straal van den omgeschreven cirkel is gelijk aan de zijde van den regelmatigen zeshoek.

Trekt men nu de koorden AC, CE en AE, die telkens één hoekpunt overslaan, dan is gemakkelijk in te zien, dat △ AEC gelijkzijdig zal zijn. Wij merkten in fig. 32 reeds op, dat elke zijde van den regelmatigen driehoek door de middellijn uit het tegenoverstaande hoekpunt rechthoekig gesneden wordt; daarom zijn wij nu ook in staat de zijde van den ingeschreven regelmatigen driehoek te bepalen, indien de straal van den omgeschreven cirkel gegeven is. Immers:

Fig. 34.



In fig. 34 is: $\triangle$ AGM gelijk en gelijkvormig aan $\triangle$ AGB,

want $AM = AB$,

$AG = AG$,

en $\angle AGM = \angle AGB$:

dus is $BG = MG = \frac{1}{2} AM$.

Nu is in $\triangle$ AGB:

$AG^2 = AB^2 - BG^2$,

$= AM^2 - \frac{1}{4} AM^2 = \frac{3}{4} AM^2$,

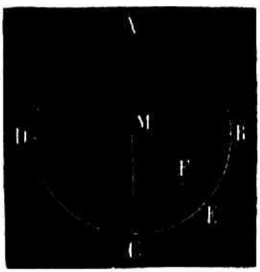
dus $4 AG^2 = 3 AM^2$,

en $2 AG = AC = AM \sqrt{3}$.

Indien dus de straal van den cirkel bekend is, kan men de zijde des ingeschreven driehoeks bepalen.

In fig. 7 merkten wij twee elkander rechthoekig snijdende middellijnen op. Indien wij de uiteinden dier middellijnen door koorden vereenigen, dan ontstaat een regelmatige vierhoek

Fig. 35.



ABCD (fig. 35), die in den cirkel is beschreven. De zijde van zulk een vierhoek is gemakkelijk te berekenen, indien de straal van den cirkel bekend is; want in ieder der vier rechthoekige driehoeken is

$AB^2 = AM^2 + BM^2 = 2 AM^2$;

dus $AB = AM \sqrt{2}$.

Indien men voorts een loodlijn uit het middelpunt op een der zijden laat vallen b. v. op BC, en deze loodlijn verlengt, tot zij den omtrek van den cirkel ontmoet in eenig punt E, dan is de boog BC in E in twee gelijke deelen verdeeld, zoodat de koorde CE de zijde van den regelmatigen achthoek in den cirkel zal zijn. Ook deze zijde kan men berekenen als de straal van den cirkel bekend is. Immers is $MF = \sqrt{(CM^2 - CF^2)} = \sqrt{(CM^2 - \frac{1}{4} BC^2)}$

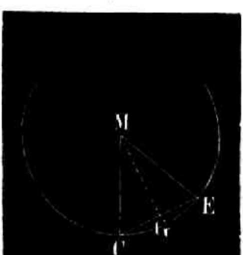
Fig. 36.

$=\surd(CM^2 - \frac{1}{2}CM^2) = \frac{1}{2}CM^2 = \surd\frac{1}{2} AM^2$; dus $EF = EM - MF = AM - \surd\frac{1}{2}AM^2 = AM - \frac{1}{2}AM\surd 2 = \frac{1}{2}AM\,(2 - \surd 2)$; alzoo $CE = \surd(CF^2 + EF^2) = \surd[\frac{1}{2}AM^2 + \frac{1}{4}AM^2\,(6 - 4\surd 2)] = AM\,\surd(2 - \surd 2)$. — Den geheelen op die wijze verkregen achthoek ziet men in fig. 36 voorgesteld.

De loodlijn, die uit het middelpunt van een cirkel op een der zijden van den ingeschreven veelhoek valt, wordt *apothema* genoemd (verg. § 23 van het Ie Deel). De apothema's van regelmatige veelhoeken in den zelfden cirkel beschreven, volgen elkander in rangorde aldus: de apothema van den gelijkzijdigen driehoek is het kleinst, daarna van den regelmatigen vierhoek, voorts van den regelmatigen vijfhoek, enz. Uit fig. 34 is ons gebleken, dat de pijl $BG = \frac{1}{2}$ straal is; dus is in den regelmatigen driehoek de apothema = straal — $BG = \frac{1}{2}$ straal. Uit fig. 35 bleek ons, dat de pijl $EF = \frac{1}{2}AM\,(2 - \surd 2)$ is; dus is in den regelmatigen vierhoek de apothema $MF = AM - \frac{1}{2}AM\,(2 - \surd 2) = \frac{1}{2}AM\,\surd 2$.

In fig. 33 is de apothema van den ingeschreven zeshoek $= MG$, dat is de loodlijn van den gelijkzijdigen driehoek ABM. Ter berekening van deze is: $MG = \surd(AM^2 - AG^2) = \surd(AM^2 - \frac{1}{4}AB^2) = \surd(AM^2 - \frac{1}{4}AM^2) = \surd\frac{3}{4}AM^2 = \frac{1}{2}AM\,\surd 3$.

Fig. 37.



Laat men (zie fig. 37) de loodlijn MG uit den tophoek van den middelpuntsdriehoek CME van fig. 35 op de basis CE neêr, dan is

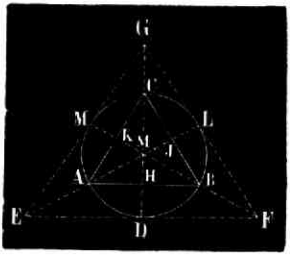
$MG^2 = CM^2 - CG^2 = CM^2 - \frac{1}{4}CE^2 = CM^2 - \frac{1}{4}CM^2\,(2 - \surd 2) = \frac{1}{2}CM^2 + \frac{1}{4}CM^2\,\surd 2$, dus $MG = \frac{1}{2}CM\,\surd(2 + \surd 2)$. Hierdoor is nu ook de apothema van den ingeschreven achthoek bekend.

Voorts willen wij hier opmerken, dat wanneer AB (fig. 38) de zijde van een regelmatigen ingeschreven veelhoek is, en MC de apothema, men, door verlenging

Fig. 38.

van de apothema tot aan den omtrek, het punt D zal vinden, dat met A of B vereenigd, de zijde zal vormen van den ingeschreven veelhoek van het dubbel aantal zijden. Is dus AB de zijde van den regelmatigen driehoek in den cirkel, dan zal AD die van den regelmatigen zeshoek zijn.

Fig. 39.



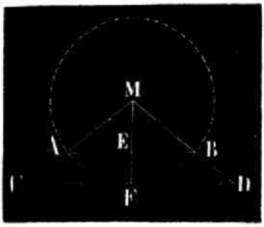
Indien men door dit punt D (zie fig. 39) een raaklijn EF trekt, die de verlengde stralen MA en MB in E en F snijdt, dan is EF een zijde van den omgeschreven veelhoek van het zelfde aantal zijden als die, waarvan AB de zijde is. — Zij ABC (fig. 39) een regelmatige ingeschreven driehoek; trekt men dan de apothema's MH, MJ en MK, verlengt men deze, tot zij den omtrek in de punten D, L en M ontmoeten, en trekt men dan door deze punten de drie raaklijnen EF, FG en EG, die verlengd elkander snijden, dan is $\triangle$ EFG de regelmatige omgeschrevene.

Op de zelfde wijze te werk gaande, zal men de omgeschreven regelmatige vierhoeken, vijfhoeken, zeshoeken, enz. kunnen bekomen, indien de ingeschrevene gegeven zijn. Fig. 40 geeft ons een voorbeeld van den aldus ontstanen regelmatigen omgeschreven vierhoek.

Fig. 40.

Het zal ons nu geen moeilijkheid meer opleveren, om ook de zijde van den omgeschreven veelhoek in den straal van den cirkel uit te drukken. Indien (fig. 41) AB de zijde van den in- en CD die van den omgeschreven veelhoek is, dan heeft men, wegens de gelijkvormigheid der driehoeken ABM en CDM:

Fig. 41.



$$CD : AB = MF : ME,$$
$$\text{of } ME : MF = AB : CD.$$

Is dus AB de zijde van den ingeschreven driehoek en ME de apothema, dan is $AB = AM \sqrt{3}$ en $ME = \frac{1}{2} AM$, dus wordt genoemde evenredigheid:

$$\tfrac{1}{2} AM : AM = AM \sqrt{3} : CD$$
$$\text{waarin } CD = 2AM \sqrt{3};$$

hieruit blijkt dus, dat $CD = 2AB$, of de zijde van den omgeschreven gelijk is aan de dubbele zijde van den ingeschreven driehoek.

Is AB de zijde van den ingeschreven vierhoek, dan is $AB = AM \sqrt{2}$, en de apothema $ME = \frac{1}{2} AM \sqrt{2}$; dus wordt de evenredigheid:

$$\tfrac{1}{2} AM \sqrt{2} : AM = AM \sqrt{2} : CD$$
$$\text{waarin } CD = 2AM;$$

hieruit blijkt dus, dat de zijde van den omgeschreven regelmatigen vierhoek gelijk is aan de middellijn van den cirkel, waarom hij staat.

Is AB de zijde van den regelmatigen ingeschreven zeshoek, dan is $AB = AM =$ straal, en $ME = \frac{1}{2} AM \sqrt{3}$, en meergenoemde evenredigheid wordt:

$$\tfrac{1}{2} AM \sqrt{3} : AM = AM : CD,$$
$$\text{waarin } CD = \frac{AM}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \tfrac{2}{3} AM \sqrt{3}.$$

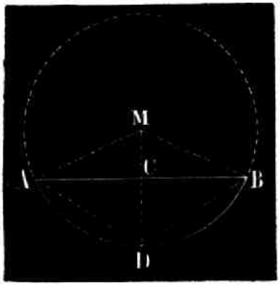
Is AB de zijde van den ingeschreven achthoek, dan is $AB = AM \sqrt{(2 - \sqrt{2})}$, en $ME =$ apothema $= \frac{1}{2} AM \sqrt{(2 + \sqrt{2})}$. De evenredigheid verandert dus in:

$$\tfrac{1}{2} AM \sqrt{(2 + \sqrt{2})} : AM = AM \sqrt{(2 - \sqrt{2})} : CD,$$
$$\text{waarin } CD = 2AM \sqrt{(3 - 2\sqrt{2})}.$$

De hier uitgewerkte voorbeelden geven ook het middel aan de hand, om den straal van den ingeschreven cirkel of de zijde van den ingeschreven drie-, vier-, zes- en achthoek te berekenen, indien de zijde van den omgeschreven veelhoek van dat zelfde aantal zijden gegeven is.

Wanneer in een cirkel een veelhoek is beschreven, dan kan men in den zelfden cirkel gemakkelijk een veelhoek van het dubbel aantal zijden beschrijven; uit fig. 38 hebben wij dit reeds geleerd. Indien (fig. 42) **AB** de zijde voorstelt van den ingeschreven regelmatigen veelhoek, dan zal men **AD** of de zijde van den ingeschreven veelhoek van het dubbel aantal zijden kunnen berekenen. Immers is $CD = MD - MC = AM - \sqrt{(AM^2 - AC^2)}$, dus $AD = \sqrt{(AC^2 + CD^2)} = \sqrt{\{AC^2 + [AM - \sqrt{(AM^2 - AC^2)}]^2\}} = \sqrt{[2AM^2 - 2\,AM\,\sqrt{(AM^2 - AC^2)}]} = \sqrt{2\,AM\,[AM - \sqrt{(AM^2 - AC^2)}]} = \sqrt{2\,AM\,[AM - \sqrt{(AM^2 - \frac{1}{4}AB^2)}]}$.

Fig. 42.



Indien dus de straal van den cirkel en de zijde van den ingeschreven regelmatigen veelhoek bekend zijn, kan men de zijde des veelhoeks van het dubbel aantal zijden berekenen.

Neemt men op den omtrek van een cirkel vier punten **A**, **B**, **C** en **D** (fig. 43) en vereenigt men **A** met **B**, **B** met **C**, **C** met **D**, en **D** met **A** door rechte lijnen, dan is **ABCD** een ingeschreven vierhoek. Merkt men nu op, dat $\angle$ **BAD** gemeten wordt door $\frac{1}{2}$ boog BCD, en $\angle$ BCD door $\frac{1}{2}$ boog BAD; dat dus $\angle BAD + \angle BCD = \frac{1}{2}$ (boog BCD + boog BAD) $= \frac{1}{2} \times 360^0 = 180^0$ is, — en dat eveneens $\angle ABC + \angle ADC = \frac{1}{2} \times 360^0 = 180^0$ is, dan mag men besluiten dat om elken vierhoek een cirkel kan beschreven worden, wanneer gebleken is, dat de som van elke twee overstaande hoeken een zelfde getal oplevert. Hieruit is het dus duidelijk, dat een cirkel kan beschreven worden:

Fig. 43.

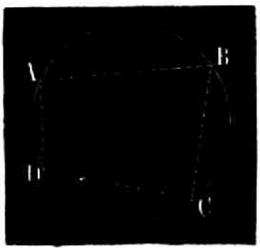


Fig. 44.

om elk vierkant (fig. 44),

om elken rechthoek (fig. 45),
niet » elk scheefhoekig parallelogram,
» » elke ruit,
» elk antiparallelogram (fig. 46),
» » elk trapezium,
» » elken gelijkbeenigen vierhoek,
» elken rechtgehoekten vierhoek (bladz. 69, I. Deel) (fig. 47).

Fig. 45.

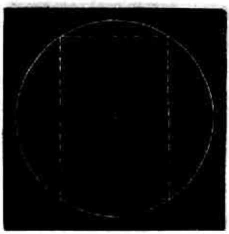


Fig. 46.

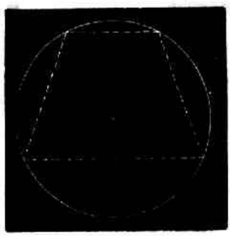
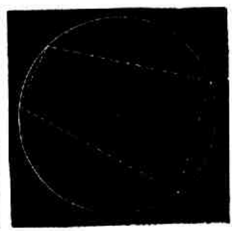


Fig. 47.



Trekt men voorts aan eenigen cirkel vier raaklijnen, die verlengd elkander in 4 punten snijden en dus een vierhoek ABCD vormen (zie fig. 48), dan weet men reeds uit fig. 20 en 21, dat

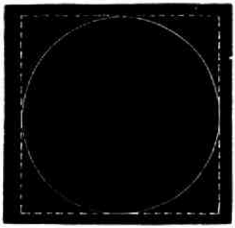
Fig. 48.

$$aB = Bb$$
$$Cc = Cb$$
$$Dc = Dd$$
en $Aa = Ad$ is, derhalve is:

$$aB + Cc + Dc + Aa = Bb + Cb + Dd + Ad$$
d. i. $AB + CD = BC + AD$.

De zijden van elken vierhoek om den cirkel beschreven, moeten blijkbaar vier raaklijnen zijn, en daarom zal steeds van elken vierhoek, waarin een cirkel kan beschreven worden, de som van elk paar overstaande zijden een zelfde uitkomst opleveren. Hierdoor is het ons nu duidelijk, dat men een cirkel kan beschrijven:

Fig. 49.



in elk vierkant (fig. 49)
niet » elken rechthoek,
» » elk scheefhoekig parallelogram,
» elke ruit (fig. 50),
» » elk antiparallelogram,
» » » trapezium,
in elken gelijkbeenigen vierhoek (fig. 51).

Fig. 50.

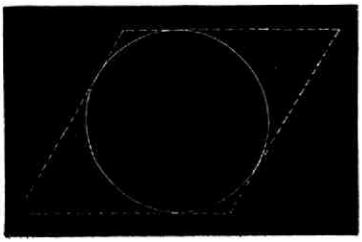
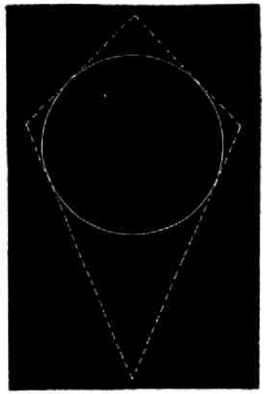
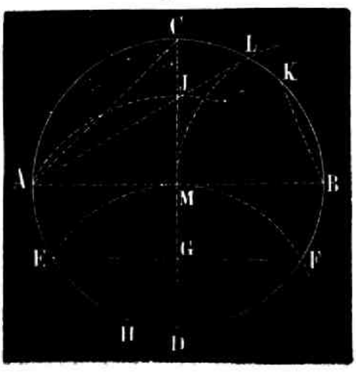


Fig. 51.



Ten slotte deelen wij een bekenden regel mede, volgens welken men in een cirkel den regelmatigen drie-, vier-, vijf-, enz. tot den twaalfhoek kan beschrijven; minder om zijn nauwkeurigheid, dan wel omdat hij gemakkelijk in het geheugen kan bewaard worden en om zijn eenvoudigheid van constructie.

Fig. 52.



Trek in den gegeven cirkel twee middellijnen, die elkander rechthoekig snijden, als AB en CD (zie fig. 52), dan is AC de zijde van het ingeschreven kwadraat.

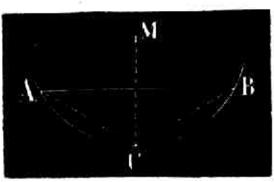
Beschrijf uit D met DM als straal een boog EMF, dan is EF de zijde van den ingeschreven gelijkzijdigen driehoek, DF van den regelmatigen zeshoek, en de helft van koorde EF, of EG is de zijde van den regelmatigen zevenhoek. De koorde EH, als onderspannende het derde deel van boog EDF, is de zijde van den regelmatigen negenhoek. Uit G met GA als straal een boog beschreven, die de middellijn CD ergens in J snijdt, zal MJ de zijde van den ingeschreven tienhoek, en de koorde AJ die van den regelmatigen vijfhoek zijn. Wordt voorts de boog van een der kwadranten, b. v. het kwadrant BCM, in K midden door gedeeld, dan is BK de zijde van den achthoek. Uit B met den straal BM een boog ML beschrijvende, dan is LC de zijde van den ingeschreven regelmatigen twaalfhoek, en JL die van den ingeschreven elfhoek.

§ 5.

Over het getal π.

In fig. 38 hebben wij een middel gevonden, om in een cirkel een veelhoek van een oneindig groot aantal zijden te beschrijven. Nu zal het wel geen opheldering behoeven, dat de omtrekken der achtereenvolgende veelhoeken, die men in den cirkel beschrijft, steeds grooter worden. Immers is (zie fig. 53, waar AB de zijde van den regelm. veelhoek in den cirkel, en AC of BC die van het dubbel aantal zijden voorstelt) in $\triangle$ ABC steeds $AC + BC > AB$, want de kortste afstand tusschen twee punten is de rechte lijn. Daarom is ook $2\,AC > AB$;

Fig. 53.



$$\text{of } 2n \times AC > n \times AB$$

d. i. de omtrek van een veelhoek in den cirkel is kleiner dan die van den veelhoek van het dubbel aantal zijden in den zelfden cirkel.

Men zal ook even gemakkelijk den veelhoek van het dubbel aantal zijden om den cirkel kunnen beschrijven, indien om dien cirkel reeds een veelhoek is beschreven. Laat daartoe ABCDEF (fig. 54) een omgeschreven regelmatige veelhoek zijn. Trek dan AM, BM, CM, DM, enz. en door de raakpunten *b*, *a*, *f*, enz. raaklijnen C′D′, A′B′, E′F′ enz., dan zal D′ C′ B′ A′ E′ enz. een nieuwe omgeschreven regelmatige veelhoek zijn, van dubbel zooveel zijden als de eerste. Hierdoor is de gelegenheid geopend, om *om* den cirkel ook een veelhoek van een oneindig groot aantal zijden te kunnen beschrijven. De omtrekken dezer achtereenvolgende veelhoeken zullen steeds kleiner worden. Immers is in fig. 54

Fig. 54.

$$A'B' < B'A + AA'$$

$$\text{tel bij } \underline{B'G + A'H = B'G + A'H}$$

$$\text{komt } A'B' + B'G + A'H < B'G + B'A + AA' + A'H$$

$$\text{of } \underline{2\,A'B' < AB}$$

$$\text{of } 2n \times A'B' < n \times AB$$

d. i. de omtrek van den omgeschreven veelhoek is grooter dan die van den omgeschreven veelhoek van het dubbel aantal zijden in den zelfden cirkel.

In fig. 53 is duidelijk, dat de omtrek van den ingeschreven veelhoek uit een zeker aantal gelijke koorden bestaat, en blijkbaar bestaat de omtrek van den cirkel uit het zelfde aantal onderling gelijke bogen; en daar iedere boog grooter is dan de koorde, zoo is de omtrek van een ingeschreven veelhoek steeds kleiner dan de omtrek van den cirkel.

De omtrekken van de omgeschreven veelhoeken sluiten blijkbaar al nauwer en nauwer om den cirkel; zij trachten dus meer en meer aan den omtrek des cirkels gelijk te worden, en daar dit met een voortdurend kleiner worden van den omtrek des veelhoeks gepaard gaat, moeten de omtrekken der omgeschreven veelhoeken steeds grooter dan de cirkelomtrek zijn.

Zet men dus gelijktijdig de verdubbeling van het aantal zijden der in- en omgeschreven veelhoeken voort, dan zullen de omtrekken van elk paar overeenkomstige veelhoeken elkander meer en meer naderen en dus steeds dichter bij den omtrek des cirkels komen; ja men zal het aantal zijden zoo groot kunnen nemen, dat het verschil der beide omtrekken minder dan de kleinst te geven grootheid is; even zoo weinig bedraagt dan dus ook het verschil tusschen den cirkelomtrek en de omtrekken van deze veelhoeken.

Om nu de betrekking te vinden, die er tusschen de middellijn van den cirkel en zijnen omtrek bestaat, berekene men eerst de zijde van den n-hoek in den cirkel; dan door fig. 41 de zijde van den n-hoek om den cirkel; daarna door fig. 42 de zijde van den $2n$-hoek in den cirkel, en dan weder die van den $2n$-hoek om den cirkel. De berekening zal men op deze wijze moeten voortzetten, tot dat het verschil tusschen den omtrek van den ingeschreven — en den daarmede overeenkomstig omgeschreven veelhoek minder is dan de graad van nauwkeurigheid, waartoe men den omtrek van den cirkel wil kennen. Verschillen b. v. deze omtrekken alleen in de vierde decimaal, dan is men zeker, dat elk van hen minder dan een duizendste deel des straals van den omtrek des cirkels verschilt.

Om dit op te helderen, beginnen wij b. v. met den zeshoek in een cirkel, waarvan de middellijn $= 2$ en dus de straal $= 1$ lengte-eenheid is, dan is de zijde van den ingeschreven zeshoek $= 1$ en die van den omgeschreven zeshoek (zie fig. 41)

$$\mathrm{ME} : \mathrm{MF} = \mathrm{AB} : \mathrm{CD}$$

$$\text{of } \sqrt{(\mathrm{AM}^2 - \tfrac{1}{4}\,\mathrm{AB}^2)} : \mathrm{MF} = \mathrm{AB} : \mathrm{CD}$$

$$\text{of } \mathrm{CD} = \frac{\mathrm{MF} \times \mathrm{AB}}{\sqrt{(\mathrm{AM}^2 - \tfrac{1}{4}\,\mathrm{AB}^2)}} = \frac{1}{\sqrt{(1-\tfrac{1}{4})}} = \frac{1}{\tfrac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \tfrac{2}{3}\sqrt{3}.$$

De omtrek van den ingeschreven zeshoek is dus $= 6 \times 1 = 6$, en die van den omgeschreven zeshoek is dus $6 \times \tfrac{2}{3}\sqrt{3} = 4\sqrt{3} = 6.928203202755$. Tusschen deze beide omtrekken is nu de omtrek van den cirkel gelegen; doch wij moeten nog nauwkeuriger grenzen hebben. Volgens fig. 42 vinden wij voor den ingeschreven 12-hoek

$$\sqrt{[2r^2 - 2r\sqrt{(r^2 - \tfrac{1}{4}AB^2)}]} = \sqrt{[2 - 2\sqrt{(1 - \tfrac{1}{4}AB^2)}]}$$
$$= 0.517638090205...$$

Nu tot den omgeschreven 12-hoek (volgens fig. 41) overgaande, en deze bewerking voortzettende, komen wij tot de ontdekking van het genoemde in het volgende tafeltje, dat ons doet kennen de omtrekken:

van	den	ingeschreven	6-hoek		=	6
»	»	»	12	»	=	6,2116571
»	»	»	24	»	=	6,2652572
»	»	»	48	»	=	6,2787004
»	»	»	96	»	=	6,2820639
»	»	»	192	»	=	6,2829049
»	»	»	384	»	=	6,2831152
van	den	omgeschreven	6-hoek		=	6,9282032
»	»	»	12	»	=	6,4307806
»	»	»	24	»	=	6,3193199
»	»	»	48	»	=	6,2921724
»	»	»	96	»	=	6,2854292
»	»	»	192	»	=	6,2837461
»	»	»	384	»	=	6,2833260

Hieruit blijkt, dat de omtrekken der in- en omgeschreven veelhoeken elkander meer en meer naderen. Die van den 48-hoeken verschillen niet meer in de tiende deelen; die van den 192 hoek niet meer in de honderdste deelen, en die van den 384 hoek zelfs niet meer in de duizendste deelen. Bij nog verdere bewerking, verkrijgt men nog grooter nauwkeurigheid.

Bij den 96-hoek staakte de beroemde Griek ARCHIMEDES (in het jaar 212 vóór Chr. gestorven) zijn bewerking, en vond dat de omtrek van den cirkel grooter dan $6\frac{20}{71}$ en kleiner dan $6\frac{20}{70}$ was; dit geeft de bekende verhouding van $2 : 6\frac{20}{70}$ of als $7 : 22$, d. i. als de middellijn in zeven gelijke deelen verdeeld is, zal de omtrek 22 zulke deelen bevatten, een verhouding die hoewel iets te groot, nogtans in de meeste gevallen voor de practijk voldoende is, waarom zij zeer veel gebezigd wordt. In lateren tijd heeft men de berekening veel verder voortgezet, en daardoor nog andere verhoudingen bekomen. Zoo vond onze landgenoot A. METIUS (in 1635 overleden) de verhouding 113 : 355 die om haar eenvoudige samenstelling, zoowel als om haar nauwkeurigheid beroemd is; want zij is tot in de zesde decimaal nauwkeurig. Een ander onzer landgenooten LUDOLF VAN KEULEN (die in 1620 overleed) vond een verhouding zelfs tot in de 30e decimaal nauwkeurig.

Wanneer nu de middellijn van een cirkel $= 1$ is, dan is zijn omtrek $= 3,141592.....$ Dit getal, het LUDOLPHIAANSCHE genoemd naar bovengenoemden VAN KEULEN, wordt gewoonlijk door de grieksche letter π voorgesteld. Volgens § 2 van het Ie Deel ontwikkeld, geeft het ons de volgende rij breuken, welke de verhouding zoo nauwkeurig mogelijk voorstellen.

$$\underset{-}{\tfrac{3}{1}},\ \underset{+}{\tfrac{22}{7}},\ \underset{-}{\tfrac{333}{106}},\ \underset{+}{\tfrac{355}{113}},\ \underset{-}{\tfrac{30153}{9598}},\ \underset{+}{\tfrac{191273}{57601}},\ \text{enz.}$$

Het zal wel geen bewijs behoeven, dat de inhoud van den veelhoek in den cirkel kleiner is dan de oppervlakte van den cirkel, en dat de inhoud van den omgeschreven veelhoek grooter is dan het cirkelvlak. Ook zal door verdubbeling van het aantal zijden de oppervlakte van den ingeschreven veelhoek grooter worden, terwijl die van den omgeschreven kleiner wordt; doch steeds zal de ingeschreven kleiner en de omgeschreven veelhoek grooter dan het cirkelvlak zijn. Nu heeft men hierboven gezien, dat door genoegzame verdubbeling van het aantal zijden des veelhoeks, de omtrek van den veelhoek in den omtrek van den cirkel overgaat, en dewijl de apothema's der ingeschreven veelhoeken steeds nader bij den straal van den cirkel komen, zoo gaat de formule voor het oppervlak van den veelhoek (zie Deel I, § 23)

over in: oppervl. veelh. $=$ omtrek $\times \frac{1}{2}$ apoth.,
» cirkel $=$ » $\times \frac{1}{2}$ straal.

Al het hier besprokene samenvattende, heeft men dus, als de straal van den cirkel $= r$ is:

voor de middellijn $2r$
» den omtrek $2\pi\, r$,
» » inhoud $\pi\, r^2 = \frac{1}{2}$ omtr. $\times$ straal.

Is daarentegen gegeven de middellijn $= d$, dan is:

de straal $= \frac{1}{2}$ middell. $= \frac{1}{2}\, d$,
» omtr. $= \pi\, d$,
» inhoud $= \frac{1}{4}\, \pi\, d^2$.

En is gegeven de inhoud des cirkels $= i$, dan is:

$$\text{de straal} = \sqrt{\frac{i}{\pi}}$$

$$\text{de middellijn} = 2\sqrt{\frac{i}{\pi}}$$

$$\text{de omtrek} = 2\pi \sqrt{\frac{i}{\pi}} = 2\sqrt{i\,\pi}.$$

Indien voorts g het aantal graden is, dat een boog van den cirkel bevat, dan is g ook het aantal 360° deelen van den geheelen omtrek, dien die boog bevat; de lengte van zoodanigen boog l noemende, is, als o de omtrek van den geheelen cirkel is:

$$g : 360 = l : o,$$

maar wij vonden $o = 2\,\pi r$; zoo is dus ook:

$$g : 360 = l : 2\,\pi\, r,$$

$$\text{of } g : \frac{180}{\pi} = l : r,$$

waardoor dus de lengte van een willekeurigen cirkelboog kan berekend worden, als de straal van den geheelen cirkel en het aantal graden, dat die boog bevat, bekend is. — Hierdoor kan men nu ook het oppervlak van den sector berekenen. Immers zal de sector MAB (fig. 55) zoo menigmaal op den inhoud van den geheelen cirkel begrepen zijn, als de boog AB op den geheelen omtrek is bevat. Men heeft dus:

$$\frac{i}{\text{sect. MAB}} = \frac{360}{g}.$$

$$\text{of sect. MAB} : \pi\, r^2 = g : 360,$$

$$\text{of sect. MAB} : \pi r^2 = \frac{180 \times l}{\pi r} : 360.$$

$$\text{» » MAB} = \frac{l r}{2} = l \times \tfrac{1}{2} r;$$

d. i. de inhoud van een sector is gelijk aan de lengte van den boog des sectors vermenigvuldigd met den halven straal.

Hierdoor is nu ook te berekenen:

$$\text{inh. segment AB} = \text{sect. MAB} - \triangle\,\text{MAB}.$$

Uit den hierboven genoemden regel: Inh. cirk. $= \frac{1}{4} \pi d^2$, waarin d de middellijn voorstelt, kan men nu ook de door velen gebezigde verhouding 11 : 14 afleiden, bij de berekening van het oppervlak eens cirkels gebruikelijk. Indien men n. l. de waarde van $\pi = \frac{22}{7}$, volgens de verhouding van ARCHIMEDES, in bovengenoemde formule overbrengt, dan is

$$\text{inh. cirk.} = \tfrac{1}{4} \times \tfrac{22}{7} \times d^2 = \tfrac{11}{14} d^2,$$

$$\text{d. i.} \quad 14 : 11 = d^2 : \text{inh. cirkel.}$$

De inhoud of het oppervlak van den cirkel wordt dus ook verkregen door het vierkant op de middellijn met $\frac{11}{14}$ te vermenigvuldigen, en hoewel de verhouding van 11 : 14, als voortspruitende uit die van ARCHIMEDES, niet geheel zuiver is wordt zij echter in de practijk gewoonlijk gebezigd.

II. OVER DE REGELMATIGE LICHAMEN.

§ 6.

Algemeene beschouwing der lichamen.

Wij gaan nu over tot de beschouwing van het *stel lichamen* bij de *Vormleer* gebruikelijk en wij zijn alzoo genaderd tot het meest vruchtbare deel der Vormleer. Het is ons plan, om achtereenvolgens deze lichamen te beschouwen:

1. het driezijdige prisma,
2. » vier » »
3. » vijf » »
4. » zes » »
5. de driezijdige piramide,
6. » vier » »
7. » vijf » »
8. » zes » »
9. het regelmatige viervlak,
10. » » zesvlak,
11. » » achtvlak,
12. » » twaalfvlak,
13. » » twintigvlak,
14. den cilinder,

15. » kegel,
16. » afgeknotten kegel,
17. de afgeknotte piramide, en
18. den bol *).

Wij wenschen vooreerst een algemeene beschouwing van ieder dezer lichamen te geven, dan de geheele of gedeeltelijke oppervlakken dier lichamen te doen kennen, en daarna de inhouden van deze lichamen te leeren vinden, om ten slotte bepaalde deelen van sommige dezer lichamen tot onderwerp onzer beschouwing te maken.

Alvorens echter hiertoe over te gaan, moeten wij ons eigen maken met eenige benamingen, die tot voorbereiding voor onze taak dienen.

Wij zagen reeds, dat een vlak alleen *lengte* en *breedte* heeft; het mist *diepte* of *hoogte.* Als wij alle dikte wegdenken, kan een blad papier ons een voorstelling van een vlak geven. Vouwen wij dit blad in tweeën, dan zal de vouw, die daardoor ontstaat, een rechte lijn zijn, en wij hebben, als het ware, van het blad papier twee vlakken gemaakt, die door de vouw of rechte lijn aan elkander zijn verbonden. Laten wij nu het eene vlak op de tafel rusten, en het andere een wentelende beweging om de vouw maken, dan heet de onbepaalde ruimte tusschen deze vlakken begrepen, een *tweevlakkige hoek.* De beide vlakken, waardoor een tweevlakkige hoek gevormd wordt, heeten de *zijden* of *zijvlakken.* De lijn (de vouw), volgens welke deze zijden elkander raken of aan elkander sluiten, heet *ribbe*, *kantlijn* of *doorsnede.* Uit de wentelende beweging, die het eene vlak maakte, zagen wij dat de tweevlakkige hoek grooter of kleiner kan worden; hoe nauwer de uiterste punten der beide vlakken bij elkander komen, des te geringer wordt de helling tusschen beide vlakken, en des te kleiner wordt dus ook de tweevlakkige hoek; en omgekeerd, hoe verder de uiterste punten zich van elkander verwijderen, des te grooter wordt de helling tusschen beide vlakken, en des te grooter wordt der-

---

*) Het genoemde stel lichamen is o. a. te bekomen bij A. Hoogenboom te Amsterdam, voor betrekkelijk geringe prijzen.

halve ook de tweevlakkige hoek. De grootte van den tweevlakkigen hoek hangt alzoo af van de helling tusschen beide vlakken: deze helling noemt men den *standhoek* van den tweevlakkigen hoek. Laat ons nu het blad papier, waarin zich de vouw bevindt, weder recht strijken, en door beide deelen van het blad een rechte lijn teekenen, die loodrecht door de vouw gaat. Bewegen wij dan het eene vlak nogmaals, terwijl het andere zijn vaste plaats behoudt, dan ziet men, dat de einden der nu gebroken loodlijn nader bij elkander komen of zich verder van elkander verwijderen, naar mate de uiterste punten der beide vlakken zich dichter bij elkander of verder van elkander bevinden. De gebroken loodlijn vormt dan door die bewegingen verschillende hoeken, die men de *standhoeken* noemt der tweevlakkige hoeken, die door de beweging kunnen ontstaan.

Door vergelijking van den gewonen uitspringenden hoek, of *vlakken* hoek, dien wij tot hiertoe beschouwden, met den tweevlakkigen, zal men zien, dat het hoekpunt van den vlakken hoek bij den tweevlakkigen een rechte lijn is geworden; dat de beenen in zijvlakken zijn overgegaan, en dat het onbegrensde vlak tusschen de beenen van den vlakken hoek bij den tweevlakkigen een onbegrensde lichamelijke ruimte is geworden.

Indien de standhoek van een tweevlakkigen hoek recht is, dan zegt men dat de beide vlakken loodrecht op elkander staan. Hebben de zijvlakken andere standen, dan is de standhoek scherp of stomp, naarmate de helling tusschen de vlakken kleiner of grooter is.

In de plaats van twee, kunnen wij ook drie bladen papier nemen, en die zoodanig doen samenkomen, dat zij elkander twee aan twee volgens rechte lijnen snijden en in één gemeenschappelijk punt aan elkander sluiten. Zie in den hoek van de kamer; de vloer en de beide muren komen in één punt samen. Het deel der onbegrensde ruimte, dat tusschen deze vlakken is gelegen, maar zich overigens grenzeloos uitbreidt (wanneer niet een nieuw vlak deze ruimte komt afsluiten) heet een *drievlakkige hoek*. De vlakken, die den drievlakkigen hoek begrenzen, heeten wederom de *zijden* of *zijvlakken*; de plaats, waar de drie vlakken samenkomen, heet de *uithoek* of het *toppunt*. Wij bemerken aan den drievlakkigen hoek drie *doorsneden* of *ribben*, die elkander in één punt, het toppunt, snijden en vandaar uitgaande zich al verder en verder van elkander verwijderen. Tegenover elke ribbe staat een zijvlak; en omgekeerd, tegenover elk zijvlak een ribbe. Zulk een ribbe kan met het zijvlak een scherpen, stompen of rechten hoek maken. De drievlakkige hoek kan zelfs zoodanig zijn, dat elke ribbe loodrecht op het tegenoverstaand zijvlak staat; denk slechts aan den hoek in een vierkante kamer.

Namen wij vier stukken papier, en deden wij die zoodanig samenkomen, dat zij allen twee aan twee om één gemeenschappelijk punt aan elkander sluiten, dan zou men een *viervlakkigen* hoek bekomen; zoo spreekt men ook van een vijf-, zes-, zeven-, enz. vlakkigen hoek. In het algemeen merkt men bij een *n*-vlakkigen hoek op, dien men, omdat het aantal zijvlakken meer dan twee bedraagt, ook wel een *lichamelijken* hoek heet:

één gemeenschappelijk snijpunt der vlakken,
n zijden of zijvlakken,
n ribben, kantlijnen of doorsneden,
één lichamelijken hoek.

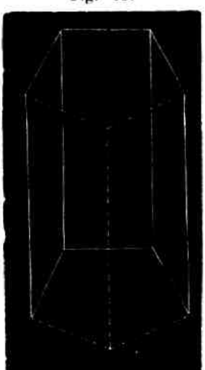
Wij merkten bij de beschouwing van den veelvlakkigen hoek op, dat hij geen bepaalde d. i. van alle zijden begrensde ruimte insluit, want aan den eenen kant is die ruimte onbegrensd. Stellen wij ons voor, dat men bij de drie bladen papier, die men tot de vorming van den drievlakkigen hoek gebruikte, nog een vierde blad voegt, en dat men dit beneden de drie gebezigde zijvlakken brengt, zoodanig, dat het, tegen deze drie vlakken sluitende, tegenover het toppunt van den drievlakkigen hoek staat, dan heeft men een van alle kanten ingesloten ruimte. De ruimte, die wij hier beschouwen, is het eenvoudigste lichaam, dat met platte vlakken is te maken, het draagt den naam van *piramide*. — Beneden den viervlakkigen hoek konden wij eveneens een vijfde vlak stellen, dat tegen de vier zijvlakken sluit: alsdan zouden wij eveneens een piramide verkrijgen, die echter één zijvlak meer heeft dan de vorige.

Het vlak, dat wij tegenover het toppunt van den veelvlakkigen hoek brengen, wordt het *grondvlak* der piramide genoemd; terwijl de zijvlakken van den veelvlakkigen hoek ook de *zijvlakken* van de piramide worden genoemd en allen driehoeken zijn. Een *piramide* is dus een lichaam, waarvan het grondvlak een drie- of veelhoek is, en waarvan de zijvlakken allen driehoeken zijn, die in één punt samenkomen. In de Vormleer spreekt men bepaaldelijk alleen van zulke piramiden, wier grondvlakken regelmatige drie- of veelhoeken, en wier zijvlakken allen gelijkbeenige driehoekige driehoeken zijn. Fig. 55 stelt een *zeszijdige* piramide voor.

Fig. 55.

Knip nu een blad papier in den vorm van een drie- of veelhoek, en leg het vóór u op de tafel. Neem het op en beweeg het naar boven, zoodat het steeds evenwijdig aan de tafel blijft, dan zal de ruimte door dat blad doorloopen, een *prisma* zijn. Was dat blad een vierhoek, dan zou die ruimte een *vierzijdig prisma* zijn; was het een vijfhoek, dan zou de ruimte een *vijfzijdig prisma* zijn; enz. — Het blad, bij het begin der beweging, heet het *grondvlak* en bij het einde het *bovenvlak* van het prisma. De zijvlakken van het prisma zijn blijkbaar allen *parallelogrammen*. In de Vormleer evenwel beschouwt men alleen die prisma's, waarvan het grondvlak een regelmatige drie- of veelhoek is, en waarvan de opstaande zijvlakken rechthoeken zijn. (Fig. 56 geeft ons een voorstelling van een *vijfzijdig* prisma).

Fig. 56.



Knip nu een blad papier in den vorm van een cirkel en leg het vóór u op de tafel. Neem het op en beweeg het naar boven, zoodanig dat het steeds evenwijdig aan de tafel blijft, dan zal de ruimte door dat cirkelvormig blad doorloopen, een *cilinder* zijn. Het blad bij het begin der beweging wordt het *grondvlak*, en bij het einde het *bovenvlak* van den cilinder genoemd. Behalve deze heeft de cilinder slechts één zijvlak, dat een gebogen vlak is. In de Vormleer beschouwt men alleen die cilinders, waarvan het bovenvlak loodrecht boven het grondvlak ligt, zoodat dus het gebogen opstaand zijvlak loodrecht op het grondvlak staat. Een rol, een bierglas, een kachelpijp zullen dus cilinders zijn, die men in de Vormleer leert kennen.

Fig. 57.

Nog op een andere wijze kan men zich de wording van een cilinder voorstellen. Men knipt een blad papier in den vorm van een zuiveren rechthoek, zet dezen loodrecht met de eene zijde op de tafel en laat hem om een der opstaande zijden wentelen, dan zal de ruimte door dit blad doorloopen, een *cilinder* zijn. (Fig. 57 stelt een zoodanigen cilinder voor).

Indien men het cirkelvormig blad papier van de tafel naar boven beweegt, zoodat het steeds evenwijdig aan de tafel blijft, dan zal men zich kunnen voorstellen, dat de cirkel onder die beweging al kleiner en kleiner van omtrek wordt en ten laatste in een enkel punt overgaat, als wanneer de beweging eindigt. De ruimte, die dan doorloopen is, heet men een *kegel*. Een kegel heeft dus geen bovenvlak; hij is alleen begrensd door een grondvlak en een gebogen zijvlak (zie fig. 58).

Fig. 58.

De wording van den kegel kan men zich ook voorstellen, door een blad papier in den vorm van een rechthoekigen driehoek te knippen, het met de eene rechthoekszijde loodrecht op de tafel vóór zich te zetten, en het om de andere rechthoekszijde te laten rondwentelen. Het lichaam, dat dan ontstaat, heet men *kegel*.

Neemt men den straks gebruikten cirkel nogmaals ter hand en knipt men hem volgens de middellijn in twee gelijke deelen, dan kan men den verkregen halven cirkel om zijn middellijn ook laten rondwentelen. De doorgeloopen ruimte heet men *bol*. Een bol is dus een lichaam, dat slechts door één vlak begrensd wordt. Dit vlak is van alle kanten even sterk gebogen en binnen zijn ruimte vindt men een punt, het *middelpunt van den bol*, dat van elk punt van het oppervlak even ver is verwijderd.

De kegel, cilinder en bol worden ook wel eens omwentelingslichamen genoemd, omdat zij ontstaan uit de wenteling van eenige figuur om zekere lijn, die men de *as* van 't lichaam heet.

§ 7.

Beschouwing van het driezijdige prisma.

Wij willen nu overgaan tot de beschouwing van de in de vorige § opgenoemde lichamen, en daarom eerstelijk de uitwendige bijzonderheden van het *driezijdige prisma* nagaan (zie fig. 59). Letten wij daartoe:

Fig. 59.

1°. *op de zijvlakken*. Wij zien spoedig, dat deze *vijf* in getal zijn; het zijn de vlakken ABC, DEF, ACFD, BCFE en ABED. Het vlak ABC is het grondvlak, DEF het bovenvlak. Omdat deze twee vlakken, gelijk men in de vorige § reeds zag, aan elkander gelijk zijn, noemt men ze ook wel *de beide grondvlakken* van het prisma. De drie overige worden de *opstaande* zijvlakken genoemd. Het grond- en bovenvlak loopen evenwijdig; het zijn gelijke gelijkzijdige driehoeken. De drie opstaande zijvlakken zijn gelijke en gelijkvormige rechthoeken; zij staan loodrecht op de beide grondvlakken. Tegenover elk opstaand zijvlak staat een ribbe; zoo staat ribbe AD tegenover het zijvlak BCFE; ribbe BE tegenover ACFD, en ribbe CF tegenover ABED.

De afstand tusschen de grondvlakken wordt door ieder der ribben AD, BE of CF aangewezen, en de afstand tusschen elk opstaand zijvlak en de tegenoverstaande ribbe wordt uitgedrukt door de loodlijn, die men in het grond- of bovenvlak uit eenig hoekpunt op de overstaande zijde nederlaat.

2°. *op de ribben.* Dat wij aan het driezijdige prisma 9 ribben tellen, is licht op te merken. Drie tellen wij er in het grondvlak, even zooveel in het bovenvlak, en drie vinden wij in de opstaande zijvlakken. Die in de opstaande zijvlakken hebben een vertikalen stand, en de zes anderen uit de grondvlakken liggen horizontaal. De vertikale zijn onderling even lang; zij wijzen den afstand tusschen de evenwijdige grondvlakken aan, d. i. zij stellen de *hoogte* van het lichaam voor. Ook de horizontale zijn allen van gelijke lengte, omdat de beide grondvlakken gelijke en gelijkzijdige driehoeken zijn. Deze horizontale ribben zijn twee aan twee evenwijdig; het zijn de ribben AB en DE, BC en EF, AC en DF. Aan elk hoekpunt komen drie ribben te zamen, en wel steeds twee horizontale en een vertikale ribbe. De drie ribben, die aan den eenen uithoek van het lichaam samenkomen, zijn gelijk aan drie andere ribben, die aan eenig ander hoekpunt te zamen vallen.

3°. *op de uithoeken en hoeken.* Wij merken aan het prisma *zes* uithoeken op, A, B, C, D, E en F. Zij liggen allen in het grond- en bovenvlak. Aan elken uithoek komen drie vlakken te zamen, en dus zijn er ook *zes* drievlakkige hoeken aan het prisma. Elke ribbe verbindt twee vlakken; daarom zijn er 9 tweevlakkige hoeken, omdat er 9 ribben zijn. Elke verbinding van twee vlakken levert één standhoek, daarom zijn er 9 standhoeken.

De *vlakke* (gewone) hoeken bevinden zich allen op het lichaam; in het grondvlak zijn er *drie*, in het bovenvlak zijn er ook 3, want beide vlakken zijn driehoeken; in de opstaande zijvlakken die rechthoeken zijn, zijn er 3×4; derhalve zijn er te zamen

$$2 \times 3 + 3 \times 4 = 6 \times 3 = 18$$

vlakke hoeken aan het geheele prisma.

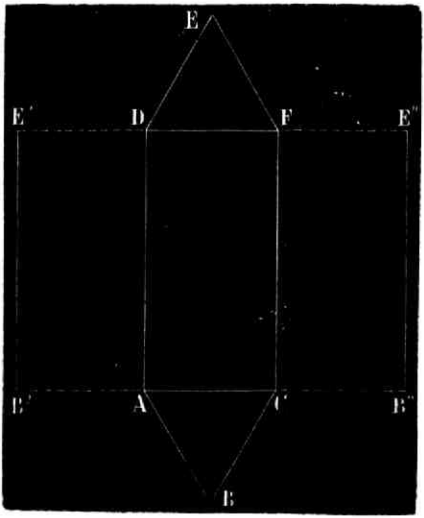
Wij zouden dit getal ook nog op een andere wijze kunnen gevonden hebben, door op te merken, dat er zes uithoeken aan 't lichaam zijn, dat aan elken uithoek drie vlakken en dus ook drie vlakke-hoeken samenkomen, en dat dus het aantal vlakke-hoeken aan 't lichaam $6 \times 3 = 18$ zijn moet. De hoeken, die men aan de opstaande zijvlakken vindt, zijn allen recht, en die in 't grond- en bovenvlak, (als gelijkzijdige driehoeken), zijn ieder groot $\frac{180}{3}^{0} = 60^{0}$. Daar de vertikale ribben loodrecht op de grondvlakken staan, zoo zullen de zijden van de grondvlakken, twee aan twee den *standhoek* der opstaande zijvlakken aanwijzen; deze zal dus 60^{0} zijn. De standhoek tusschen ieder der opstaande zijvlakken met het grond- en bovenvlak bedraagt blijkbaar 90^{0}.

4^{0}. *op de diagonalen.* De diagonalen, of lijnen die van uithoek tot uithoek getrokken worden, zijn bij een prisma tweeërlei. Zij kunnen *op* of *in* het lichaam vallen, d. i. zij kunnen buiten over het lichaam en dus in de zijvlakken getrokken worden, of zij gaan door het lichaam, en zijn derhalve onzichtbaar; de eerste soort noemt men *de diagonalen der vlakken*, en de tweede *lichaams-diagonalen.* In het grond- en bovenvlak kan men geen diagonalen trekken, omdat zij driehoeken zijn; maar in elk der opstaande zijvlakken van het prisma, die allen vierhoeken zijn, kunnen volgens den bekenden regel $\frac{4(4-3)}{2} = 2$ diagonalen getrokken worden. Op het lichaam kunnen dus $2 \times 0 + 3 \times 2 = 6$ diagonalen liggen. Trekt men deze in de zijvlakken, dan is het gemakkelijk op te merken, dat *in* het driezijdige prisma *geen* diagonalen kunnen liggen; immers is het punt A (zie fig. 59) nu met elk der overige punten B, C, D, E en F vereenigd; ook het punt B is met elk der overige punten vereenigd, enz. Er zijn dan geen vereenigingslijnen tusschen twee punten meer mogelijk.

Om zich van bordpapier een driezijdig prisma te kunnen samenstellen, dient men bekend te zijn met het teekenen van het *net* of *geraamte* van dat lichaam. Hoe dit kan geschieden, wenschen wij hier mede te deelen.

Teeken den gelijkzijdigen driehoek ABC (zie fig. 60, en vergelijk fig. 59); verleng een der zijden, b. v. AC, naar weêrskanten, zoodat AB′ = CB″ = AC zij. Beschrijf nu op B′B″ een rechthoek B′B″E″E′, waarvan de hoogte gelijk is aan de hoogte van 't prisma. Trek uit A en C de loodlijnen AD en CF, en

Fig. 60.



beschrijf op DF naar buiten den gelijkzijdigen driehoek DEF. Indien men dan de rechthoeken AB'E'D en CB"E"F volgens de lijnen AD en CF naar zich omvouwt tot zij aan elkander sluiten, en de driehoeken DEF en ABC volgens de lijnen DF en AC omvouwt, tot zij aan de genoemde omgevouwde zijvlakken sluiten, dan zal de komende figuur een driezijdig prisma voorstellen. — Uit de vervaardiging van het net van dit prisma is dus gebleken, dat het geheel bekend is, als alleen de zijde van den driehoek en de hoogte van het prisma bekend zijn.

Het zal geen moeite kosten, om bovengenoemde berekeningen van hoeken, ribben, uithoeken en diagonalen van elkander af te leiden. Indien n. l. gegeven is het aantal opstaande zijvlakken *drie*, dan zijn er *vijf* in 't geheel, want een prisma heeft steeds één grond- en één bovenvlak. Dewijl er slechts *drie* opstaande zijvlakken zijn, moeten grond- en bovenvlak driehoeken zijn, en naardien de opstaande zijvlakken steeds rechthoeken zijn, bedraagt het aantal lijnen:

$$3 \times 4 + 2 \times 3 = 3 \times 6 = 18;$$

maar daar twee lijnen één ribbe vormen, als bepalende de grens tusschen twee vlakken, zoo is het aantal ribben $= \frac{18}{2} = 9$. — In het grond- en bovenvlak zijn te zamen $2 \times 3 = 6$ vlakke hoeken, en in de opstaande zijvlakken $3 \times 4 = 12$, dus te zamen zijn er $6 + 12 = 18$ vlakke hoeken. Onder deze 18 hoeken zijn $3 \times 4 = 12$ rechte hoeken in de opstaande zijvlakken, die rechthoekig zijn; de overige $18-12=6$ zijn scherpe hoeken van 60°, omdat van de prisma's, die men in de Vormleer beschouwt, de grondvlakken steeds regelmatig zijn. — Iedere hoek aan het grond- en bovenvlak maakt mede de grens uit van een lichamelijken hoek, alzoo zijn er $2 \times 3=6$ lichamelijke hoeken, en dus ook 6 uithoeken.

Is gegeven het aantal uithoeken van het prisma *zes*, dan is het aantal vlakke hoeken ook bekend; dit aantal zal $6 \times 3 =18$ zijn, omdat aan elk hoekpunt 3 vlakken samenkomen. Het aantal ribben, van iederen uithoek uitgaande, zal 3 zijn, dus zouden er te zamen $6 \times 3=18$ ribben voorkomen, maar daar elke ribbe 2 uithoeken verbindt, is het aantal ribben dubbel geteld; het ware aantal bedraagt dus $\frac{18}{2}=9$. Omdat er 6 uithoeken in het geheel zijn, liggen er aan het grond- en bovenvlak ieder $\frac{6}{2}=3$; dit zijn dus driehoeken. Het aantal vlakke hoeken in het grond- en bovenvlak bedraagt dus te zamen 6, alzoo zijn er in de opstaande zijvlakken $18-6=12$. Ieder der opstaande zijvlakken is een rechthoek en bevat dus 4 vlakke hoeken, daarom zijn er $\frac{12}{4}=3$ opstaande zijvlakken, en in het geheel zijn er dus $3+2=5$ zijvlakken aan het prisma. — Diagonalen kunnen er alzoo in het grond- of bovenvlak niet liggen; in elk der opstaande zijvlakken zijn er $\frac{4}{2}(4-3)=2$ mogelijk; dus bedraagt het aantal diagonalen van dit prisma $3\times 2=6$.

Weet men alleen het aantal ribben, in dit geval 9, dan zijn er ook 9 tweevlakkige hoeken, omdat elke ribbe de doorsnede van twee vlakken is. Nu is in elk prisma het aantal ribben van het grondvlak gelijk aan dat van het bovenvlak en gelijk aan het aantal opstaande of vertikale ribben. Het aantal opstaande ribben is dus $\frac{9}{3}=3$, daarom zijn er ook 3 opstaande zijvlakken. Hierdoor is nu ook het aantal vlakke hoeken en het aantal diagonalen bekend. Het aantal uithoeken en lichamelijke hoeken zal nu, eveneens als hierboven, gemakkelijk te vinden zijn.

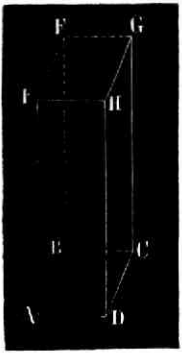
Aanmerking. Indien de opstaande zijvlakken allen vierkanten waren, dan zouden alle 9 ribben even groot zijn, en de diagonalen in elk zijvlak zouden elkander in hun midden rechthoekig snijden.

§ 8.

Beschouwing van het vierzijdige prisma.

Het *vierzijdige prisma* (fig. 61) zullen wij thans tot onderwerp onzer beschouwing nemen. Wij zullen daartoe letten:

Fig. 61.



1°. *op de zijvlakken.* Deze zijn één meer dan bij het driezijdige prisma, en dus 6 in getal. Het grond- en bovenvlak zijn twee gelijke vierkanten, en de opstaande zijvlakken, die 6—2=4 in getal zijn, zijn gelijke en gelijkvormige rechthoeken. Deze opstaande zijvlakken staan loodrecht op het grond- en bovenvlak. De zes zijvlakken zijn hier twee aan twee evenwijdig; men kent de twee evenwijdige daaraan, dat zij tegenover elkander staan. Het volgende tafeltje wijst ieder paar evenwijdige vlakken aan met met de benaming, die men gewoon is aan elk zijvlak te geven:

grondvlak ABCD	met	bovenvlak EFGH	evenwijdig;
voorvlak ADHE	»	achtervlak BCGF	»
linkerzijvl. ABFE	»	rechterzijvl. DCGH	»

De afstand tusschen beide eerstgenoemde vlakken wordt aangewezen door de lijn AE; die tusschen de twee volgende door de lijn AB, en die tusschen de twee laatstgenoemde door de lijn AD.

2°. *op de ribben.* Wij tellen aan het prisma 12 ribben; 4 daarvan liggen in het grondvlak, 4 in het bovenvlak en 4 in de opstaande zijvlakken. Onder genoemde 12 ribben zijn die, welke in 't grond- en bovenvlak liggen, en 8 in getal zijn, even lang. Ook de 4 overige zijn van gelijke lengte. De acht gelijke ribben liggen in een horizontale richting en de overige staan vertikaal. — Op elk der hoekpunten van ieder zijvlak staat een ribbe loodrecht op dat vlak; deze vier ribben zijn even lang. —

De uiteinden der ribben loopen 3 aan 3 in een zelfde hoekpunt samen; elke 3 aldus samenkomende ribben zijn even lang als 3 andere, die aan een ander hoekpunt samenkomen. Het is verder duidelijk, dat deze drie ribben de uitgebreidheid van het geheele lichaam bepalen; de uitgebreidheid of grootte van het vierzijdige prisma hangt dus van de lengte dezer ribben af. Men noemt ze de *lengte*, *breedte* en *hoogte* van 't lichaam.

Wegens de gelijkheid van sommige der ribben zal men de som van alle ribben kunnen voorstellen door:

$$8\,AD + 4\,AE = 8\,AB + 4\,BF = 8\,BC + 4\,CG = 8\,CD + 4\,DH.$$

8°. *op de uithoeken*, *hoeken*, enz. Wij merken aan het lichaam 8 uithoeken op; deze liggen voor de helft in het grondvlak en voor de andere helft in het bovenvlak. Er zijn dus 8 uithoeken en dus ook 8 drievlakkige of lichamelijke hoeken.— Omdat elke ribbe de doorsnede van twee vlakken is, bedraagt het aantal tweevlakkige hoeken ook 12. Er zijn dus tevens 12 standhoeken, die in het vierzijdige prisma allen *recht* zijn.— De zijvlakken zijn allen vierhoeken; het aantal vlakke hoeken bedraagt dus $6 \times 4 = 24$, die allen recht zijn. Ook blijkt het aantal vlakke hoeken uit de uithoeken. Deze toch zijn 8 in getal, en aan elken uithoek komen drie vlakken samen, dus zijn er $8 \times 3 = 24$ vlakke hoeken.

4°. *op de diagonalen*. Daar elk zijvlak een vierhoek is, zijn er in elk zijvlak $4(4-3):2 = 2$ diagonalen te trekken; dus in het geheel $6 \times 2 = 12$ diagonalen, die over het lichaam gaan. *Vier* van deze zijn even lang; het zijn die, welke in het grond- en bovenvlak gevonden worden. De overige 8 zijn mede even lang, want de opstaande zijvlakken zijn gelijke en gelijkvormige rechthoeken. Die in 't grond- en bovenvlak snijden elkander tevens rechthoekig.

Maar ook *door* het lichaam kunnen hier diagonalen getrokken worden. Deze kunnen niet aanschouwelijk gemaakt worden. Zij zijn 4 in getal, n. l. van A naar G, van D naar F, van C naar E, en van B naar H. De diagonalen door het lichaam gaande, zijn de langste; daarop volgen die in de opstaande zijvlakken; — die in het grond- en bovenvlak zijn de kortste.

Ook langs een anderen weg zou men het aantal diagonalen kunnen berekend hebben. Immers zijn er 8 uithoeken, en tusschen deze 8 punten kunnen $\frac{8(8-1)}{2} = 28$ verbindingslijnen getrokken worden. Hiervan 12 voor het aantal ribben afnemende, houdt men $28 - 12 = 16$ diagonalen over, waarvan, gelijk wij hierboven aanmerkten, 12 in de zijvlakken en alzoo 4 door het lichaam kunnen getrokken worden.

Om nu wederom de eene berekening uit de andere af te leiden, zullen wij eerst aannemen, dat alleen het aantal zijvlakken $= 6$ is gegeven; dan blijkt ons al dadelijk dat er 4 opstaande zijvlakken moeten zijn, want er is één grond- en één bovenvlak. Deze 4 opstaande zijvlakken geven in het grond- en bovenvlak 4 doorsneden, dus zijn deze vlakken vierhoeken. Neemt men nu in aanmerking, dat de opstaande zijvlakken van een prisma steeds vierhoeken zijn, dan zou men $6 \times 4 = 24$ ribben bekomen; maar daar elke ribbe dubbel is geteld, zijn er slechts $\frac{24}{2} = 12$ ribben aan het lichaam. Er zijn dus ook 12 tweevlakkige hoeken en 12 standhoeken. — Het aantal uithoeken bedraagt $2 \times 4 = 8$; want grond- en bovenvlak zijn vierhoeken; er zijn dus 8 drievlakkige of lichamelijke hoeken.

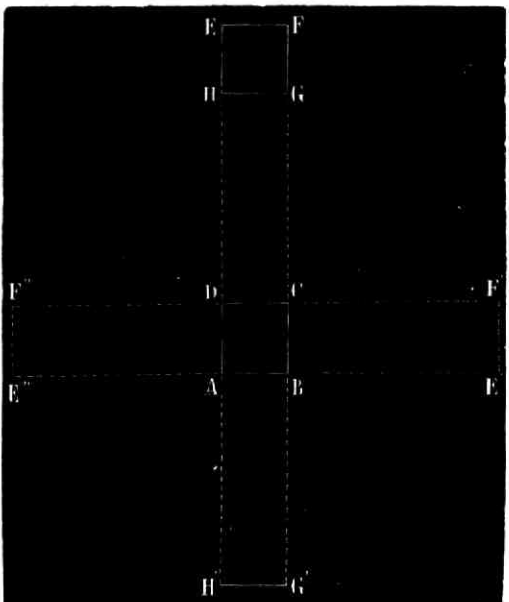
Was alleen het aantal ribben $= 12$ gegeven, dan kan men, door in aanmerking te nemen, dat het aantal ribben in het grondvlak even zoo veel bedraagt als dat in 't bovenvlak en ook even zooveel als dat der opstaande (vertikale) ribben, dadelijk zien, dat het aantal ribben in het grondvlak $\frac{12}{3} = 4$ bedraagt. Het grond- en bovenvlak zijn dus vierhoeken, en daarom zijn er 4 opstaande zijvlakken, dus in 't geheel $4 + 2 = 6$ zijvlakken. Deze 6 zijvlakken geven $6 \times 4 = 24$ vlakke hoeken, want ieder zijvlak is een vierhoek. Elke drie vlakke hoeken vormen een lichamelijken hoek, dus zijn er $\frac{24}{3} = 8$ lichamelijke hoeken en daarom ook 8 uithoeken. Het aantal tweevlakkige hoeken en standhoeken is gelijk aan dat der ribben.

Was van het prisma alleen gegeven het aantal vlakke hoeken 24, dan weet men dadelijk, dat het aantal uithoeken $\frac{24}{3} = 8$ is, dat er dus 8 drievlakkige hoeken zijn. Uit elken drievlakkigen hoek gaan 3 ribben; er zouden dus volgens deze opmerking $8 \times 3 = 24$ ribben zijn, maar elke ribbe verbindt 2 uithoeken en wordt dus tweemaal geteld, daarom zijn er slechts $\frac{24}{2} = 12$ ribben. Het aantal tweevlakkige hoeken en standhoeken bedraagt dus ook 12. Daar elke drievlakkige hoek door 3 zijvlakken wordt begrensd, zouden er, oppervlakkig beschouwd, $8 \times 3 = 24$ zijvlakken zijn; maar elk zijvlak komt bij 4 verschillende uithoeken in aanmerking en is dus viermaal geteld, daarom zijn er slechts $\frac{24}{4} = 6$ zijvlakken, waaronder één grond- en één bovenvlak, en dus $6 - 2 = 4$ opstaande zijvlakken.

Ten einde het *net* of *geraamte* van een vierzijdig prisma te kunnen vormen, diene het volgende:

Wanneer de zijde van het grondvlak = AB en de hoogte = AE (zie fig. 61) moet zijn, dan beschrijve men op AB het vierkant ABCD (zie fig. 62). Men verlenge de zijden van het

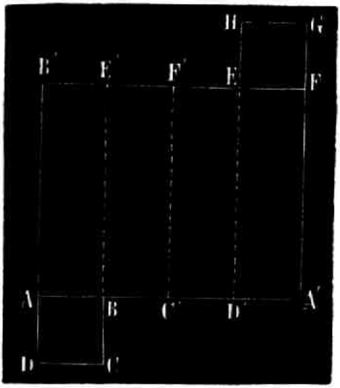
Fig. 62.



vierkant naar weêrszijden tot dat AE″ = BE′ = DH = CG = DF″ = CF′ = AH′ = BG′ worde, en trekke de lijnen E″F″, F′E′, HG, H′G′, en beschrijve op HG het vierkant EFGH. Alsnu stelt ABCD het grondvlak van 't vierzijdige prisma voor, ABG′H′ het voorvlak, BCF′E′ het rechter-zijvlak, ADF″E″ het linker-zijvlak, CDHG het achtervlak en EFGH het bovenvlak.

Door de van zelf duidelijke omvouwing zal men het prisma uit fig. 61 bekomen.

Fig. 63.



Gaan wij te werk even als bij het driezijdige prisma, en teekenen wij eerst een rechthoek, waarvan AA′ = 4 AB en AB′ = AE (uit fig. 61 = de hoogte) is, vervolgens den rechthoek door BE′, C′F′ en D′E in vier gelijke stukken deelende, en de vierkanten EFGH en ABCD beschrijvende, dan zal het geraamte voltooid zijn, en men zal door omvouwing wederom het prisma uit fig. 61 kunnen bekomen.

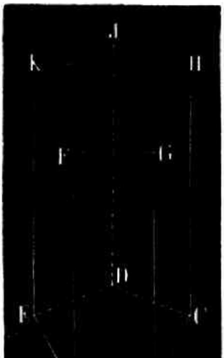
Aanmerking. Het lichaam, dat wij hier beschouwden, wordt *parallelopipedum* of *balk* genoemd. Wij kunnen het, zie fig. 61, in twee onderling gelijke driezijdige prisma's verdeelen; als wij n. l. in het grondvlak de lijn BD en in het bovenvlak FH trekken, en volgens deze lijnen het lichaam in twee stukken deelen, zoodat de doorsnede de vierhoek BDFH is, dan bekomt men twee gelijke prisma's. — Elk dezer prisma's verschilt daarin van het in § 7 door ons beschouwde, dat nu grond- en bovenvlak geen regelmatige, maar rechthoekige driehoeken zijn; voor het overige telt het evenveel vlakke hoeken, zijvlakken, ribben, diagonalen, enz., als het dáár door ons beschouwde. — Als men in 't grond- en bovenvlak de andere diagonalen AC en EG trekt, dan zal de verdeeling van het prisma volgens deze lijnen eveneens twee gelijke driezijdige prisma's voortbrengen, welke in alles aan de twee vorige gelijk zullen zijn.

§ 9.

Beschouwing van het vijf-, zes- en n-zijdige prisma.

Wij gaan nu over tot de beschouwing van het *vijfzijdige prisma*. Het wordt begrensd door 7 vlakken; twee daarvan maken het grond- en bovenvlak uit en zijn evenwijdig; beide zijn gelijke regelmatige vijfhoeken. De overige 5 vlakken zijn de opstaande zijvlakken, die, als bij ieder prisma, gelijke en gelijkvormige rechthoeken zijn. Deze staan wederom loodrecht op het grond- en bovenvlak. Tegenover elk opstaand zijvlak staat een ribbe; — zoo staat tegenover het zijvlak ABGF (zie fig. 64) de ribbe DJ, tegenover het zijvlak BGHC de ribbe EK; tegenover CDJH de ribbe AF; tegenover DEKJ de ribbe BG en tegenover AEKF de ribbe CH. — De afstand tusschen de beide evenwijdige vlakken wordt door elk der laatst genoemde ribben aangewezen, en de afstand tusschen elk opstaand zijvlak en zijn tegenoverstaande ribbe wordt aangewezen door de loodlijn, die uit eenig hoekpunt van het grond- of bovenvlak op de overstaande zijde valt.

Fig. 64.



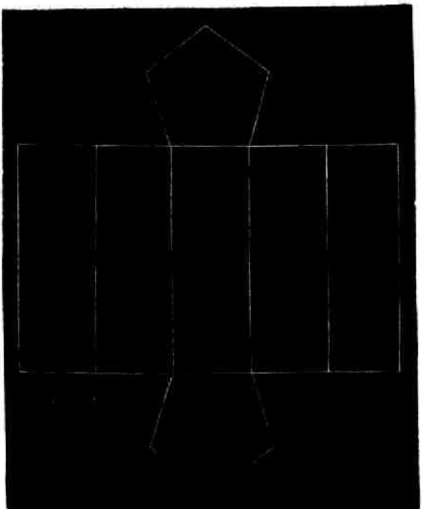
Het aantal ribben bedraagt kennelijk 15; vijf daarvan liggen in het grondvlak, 5 in het bovenvlak, en 5 in de opstaande zijvlakken; die in 't grond- en bovenvlak zijn allen even lang en liggen in een horizontale richting; ook die in de opstaande zijvlakken zijn even lang en zijn in een vertikale richting; zij zijn allen loodlijnen op het grond- of bovenvlak. — Aan het lichaam bevinden zich dus ook 15 tweevlakkige hoeken en 15 standhoeken; 10 van deze standhoeken, gevormd door elk der opstaande zijvlakken met het grond- en bovenvlak zijn *recht*, doch de vijf andere, gevormd door de opstaande zijvlakken onderling, zijn gelijk aan den hoek in het regelmatige grond- of bovenvlak, en daar deze regelmatige vijfhoeken zijn, bedraagt elk der standhoeken $\frac{(5-2)2}{5} \times 90^\circ = 108^\circ$. — Aan het lichaam bevinden zich 10 uithoeken; dus ook 10 drievlakkige hoeken. Het aantal vlakke hoeken bedraagt in het grond- en bovenvlak te zamen $2 \times 5 = 10$, ieder van 108°, en in de opstaande zijvlakken $5 \times 4 = 20$, ieder van 90°; het geheele aantal vlakke hoeken is dus $10 + 20 = 30$.

Het aantal diagonalen in het grondvlak bedraagt volgens een bekenden regel $\frac{5}{2}(5-3) = 5$, en in het bovenvlak eveneens; in elk der opstaande zijvlakken zijn er $\frac{4}{2}(4-3) = 2$, dus in al de zijvlakken te zamen

$$2 \times 5 + 5 \times 2 = 20 \text{ diagonalen.}$$

Om nu het aantal diagonalen te berekenen, die door het lichaam kunnen getrokken worden, merke men op, dat er zich 10 uithoeken aan het lichaam bevinden, waartusschen men $\frac{10(10-1)}{2} = 45$ vereenigingslijnen kan trekken. Het aantal reeds opgemerkte vereenigingslijnen bedraagt voor de ribben 15 en voor de diagonalen over het lichaam 20, dus te zamen 35; deze van de 45 vereenigingslijnen afgetrokken, geeft ons 10 diagonalen, die door het lichaam gaan. — Vergelijkt men met dit antwoord fig. 64, dan zullen wij zien, dat uit den uithoek A, de lichaamsdiagonalen AH en AJ kunnen getrokken worden: uit elken uithoek alzoo twee, d. i. voor de 10 uithoeken $10 \times 2 = 20$, maar daar nu elk dezer diagonalen dubbel is geteld, bedraagt het ware aantal $\frac{20}{2} = 10$, hetgeen met het hierboven berekende overeenstemt.

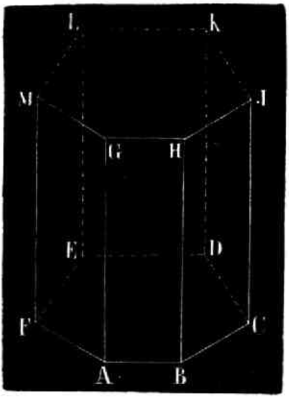
Fig. 65.



Om nu het *net* te teekenen van het vijfzijdige prisma, kan men, gelijk fig. 65 aanwijst, wederom vijf gelijke rechthoeken, wier afmetingen overeenkomen met het zijvlak ABFG uit fig. 64, naast elkander leggen, en vervolgens aan een dezer rechthoeken boven en beneden een regelmatigen vijfhoek verbinden, die tot zijden heeft de breedte AB van het genoemde zijvlak ABFG. Door de noodige omvouwing, die bij het driezijdige prisma is aangewezen, zal men het vijfzijdige prisma uit fig. 64 bekomen.

Zetten wij onze beschouwing voort met het *zeszijdige prisma* (zie fig. 66), dan zullen wij zien, dat dit lichaam begrensd wordt door 8 zijvlakken, waaronder 6 opstaande zijvlakken zijn, die loodrecht op de twee overige, het grond- en bovenvlak, staan. Deze 8 zijvlakken zijn twee aan twee evenwijdig. Zoo is BCJH evenwijdig met EFML, enz. De afstand tusschen het grond- en bovenvlak wordt door de vertikale ribben aangewezen, en die tusschen elk paar evenwijdige opstaande zijvlakken door den kleinen diagonaal b. v. BF uit het grond- of bovenvlak.

Fig. 66.



Wij tellen aan dit lichaam 18 ribben, 2×6 of 12 daarvan loopen horizontaal, ze liggen in het grond- en bovenvlak; de 6 anderen zijn vertikaal. Men vindt dus ook 18 tweevlakkige hoeken en 18 standhoeken, 6 dezer standhoeken vormen hoeken van $\frac{(6-2)2}{6} \times 90^0 = \frac{8}{6} \times 90^0 = 120^0$, en de overige zijn recht. — Aan het lichaam vinden wij voorts $2 \times 6 = 12$ uithoeken; alzoo zijn er ook 12 drievlakkige of lichamelijke hoeken, en dus $12 \times 3 = 36$ vlakke hoeken.

Het aantal diagonalen in het grondvlak bedraagt volgens een bekenden regel $\frac{6}{2}(6-3) = 9$, dus in het bovenvlak ook 9, terwijl er in de zijvlakken $6 \times 2 = 12$ gevonden worden. Deze 12 diagonalen zijn even lang; van de 18 andere zijn er 9 even lang, als vormende kleine diagonalen in den zeshoek; de andere 9 zijn wederom gelijk, als zijnde groote diagonalen in den zeshoek. Het geheele aantal verbindingslijnen tusschen de 12 uithoeken bedraagt $\frac{12(12-1)}{2} = 66$; hiervan af de $12 + 18$ diagonalen over 't lichaam en de 18 ribben, dan houdt men over $66 - 48 = 18$ diagonalen, die door 't lichaam gaan.

Het *net* van het zeszijdige prisma zal op de zelfde wijze kunnen gevonden worden als van 't vijfzijdige, door nu 6 gelijke rechthoeken van de zelfde afmetingen als een der opstaande zijvlakken, b. v. ABHG, naast elkander te leggen, en aan een dezer rechthoeken boven en beneden een regelmatigen zeshoek te bevestigen, wiens zijde gelijk is aan de breedte AB van 't genoemde zijvlak. — Door de noodige omvouwing bekomt men dan het prisma van fig. 66 terug.

Aanmerking. Als men in het vijfzijdige prisma uit twee overeenstemmende hoekpunten in het grond- en bovenvlak, b. v. uit de hoekpunten A en F van fig. 64, de diagonalen AC, die met FH, en AD, die met FJ overeenstemt, trekt, en het lichaam volgens het beloop dier overeenstemmende diagonalen doordeelt, dan bekomt men de drie volgende driezijdige prisma's, die te zamen gelijk zijn aan het geheele vijfzijdige prisma:

prisma ABCFGH, prisma ACDFHJ en prisma ADEFJK. Trekt men ook in het zeszijdige prisma, uit twee overeenkomstige hoekpunten van het grond- en bovenvlak, alle diagonalen, dan zal men het in 4 driezijdige prisma's kunnen verdeelen, — omdat het grond- en bovenvlak door het trekken dezer diagonalen in 4 driehoeken verdeeld worden.

Vóór wij de beschouwing der prisma's staken, willen wij hier doen opmerken, dat een n-zijdig prisma n opstaande zijvlakken heeft, en dus begrensd wordt door $n + 1$ vlakken. In zoodanig prisma heeft men in 't grondvlak n ribben, omdat het een n hoek is; in 't bovenvlak is het even zoo gesteld; het aantal vertikale ribben bedraagt ook n; derhalve zijn er aan een n zijdig prisma ook 3 n ribben, waaronder 2 n horizontale. Het aantal tweevlakkige hoeken bedraagt eveneens $3n$; er zijn dus ook 3 n standhoeken. Nu zijn er in 't grondvlak n vlakke hoeken, ook zoo veel in 't bovenvlak, en in de opstaande zijvlakken $4n$, dus zijn er te zamen $6n$ vlakke hoeken. Aan elken uithoek komen drie vlakke hoeken te zamen, dus zijn er $\frac{6}{3}n = 2n$ hoekpunten of uithoeken, en dus ook $2n$ drievlakkige hoeken en lichamelijke hoeken. — Het aantal diagonalen in het grondvlak bedraagt volgens een bekenden regel $\frac{n(n-3)}{2}$; dit aantal is ook in 't bovenvlak te vinden, en in de opstaande zijvlakken vindt men er $n \times \frac{4(4-3)}{2} = 2n$, d. i. te zamen $n(n-3) + 2n = n(n-1)$ diagonalen, die over het lichaam gaan.

Het n-zijdige prisma heeft $2n$ uithoeken, het aantal verbindingslijnen tusschen $2n$ punten bedraagt $\frac{2n(2n-1)}{2} = n(2n-1)$; neemt men nu hiervan de $3n$ ribben en de $n(n-1)$ genoemde diagonalen, dan houdt men $n^2 - 3n = n(n-3)$ diagonalen over, die door het lichaam gaan, d. i. juist zooveel als in de beide grondvlakken te zamen zijn.

Daar uit één uithoek van 't grond- of bovenvlak $n-3$ diagonalen in dat grondvlak kunnen getrokken worden, zal het n-zijdige grond- of bovenvlak in $n-2$ driehoeken verdeeld kunnen worden, en dus zal het n-zijdige prisma in $n-2$ driezijdige prisma's kunnen gesplitst worden.

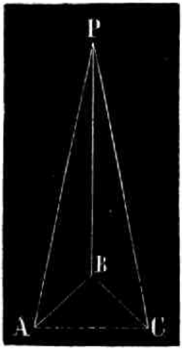
Men teekent het geraamte van het n-zijdige prisma, door n gelijke en gelijkvormige rechthoeken nevens elkander te plaatsen, en ze alzoo tot één geheelen rechthoek te vereenigen. Ieder der n rechthoeken moet de afmetingen van een opstaand zijvlak bezitten. Vervolgens teekent men boven en beneden een dezer rechthoeken een regelmatigen n-hoek, waarvan de zijde gelijk is aan de breedte van 't genoemde opstaande zijvlak. Door de noodige omvouwing bekomt men dan het n-zijdige prisma terug.

§ 10.

Beschouwing van de driezijdige piramide.

Tot de *piramiden* overgaande, willen wij beginnen met de *regelmatige driezijdige piramide.* Gelijk wij vroeger opmerkten,

Fig. 67.



noemen wij de piramide regelmatig, als het grondvlak een regelmatige veelhoek is, en de opstaande zijvlakken gelijkbeenige driehoeken zijn. De driezijdige piramide is dus een lichaam, dat door 3 opstaande zijvlakken en één grondvlak wordt ingesloten. Fig. 67 geeft ons een afbeelding van zoodanige piramide. Even als bij het prisma willen wij nu letten:

1°. *op de zijvlakken.* Deze zijn, gelijk gezegd is, 4 in getal; wij merkten reeds vroeger op, dat juist dit lichaam het eenvoudigst samengesteld is, als begrensd door slechts 4 platte vlakken. Zij zijn de opstaande zijvlakken ABP, BCP, en ACP, en het grondvlak ABC, dat een regelmatige driehoek is. De opstaande zijvlakken zijn gelijke en gelijkvormige gelijkbeenige driehoeken, die met hun toppen in één zelfde punt samenkomen. — Tegenover elk zijvlak staat een uithoek; zoo staat punt A tegenover het zijvlak BCP, het punt B tegenover zijvlak ACP, enz. en het punt P, dat het toppunt van de piramide wordt genoemd, staat tegenover het grondvlak ABC. Als men het middelpunt M van den cirkel, om het grondvlak beschreven, met het toppunt P vereenigt, dan bekomt men een lijn PM, die geheel binnen 't lichaam valt en dus voor ons onzichtbaar is, maar die loodrecht op het midden van het grondvlak staat. Deze lijn heet de *hoogte* der piramide, en elk punt dier lijn staat op gelijke afstanden van de opstaande zijvlakken. Hoe nader men eenig punt in die lijn bij het toppunt P der piramide neemt, des te kleiner zullen die afstanden worden. De straal van den cirkel om het grondvlak vormt met die *hoogte* en een opstaande ribbe een rechthoekigen driehoek, waarvan deze ribbe de hypotenusa of schuine zijde is.

2°. *op de ribben.* Wij tellen aan het lichaam 6 ribben, 't welk minder is dan bij het driezijdige prisma. Dit komt daarvan, dat de piramide geen bovenvlak heeft, gelijk het prisma. Drie van deze ribben liggen in 't grondvlak; de andere hellen hierop en loopen in het toppunt P der piramide tegenover dit vlak uit. Dit zelfde verschijnsel nemen wij bij ieder ander vlak der driezijdige piramide waar. Beschouwen wij het zijvlak BCP voor een oogenblik als grondvlak, dan bemerken wij ook hierin drie ribben BP, CP en BC, de drie andere ribben hellen hierop en loopen in een zelfde punt A, tegenover dit vlak, uit. Drie aan drie komen de zes ribben aan iederen uithoek te zamen. De drie opstaande ribben der regelmatige piramide zijn even lang; die van 't grondvlak hebben ook de zelfde lengte. Men kan zich dus gemakkelijk een lijn voorstellen, wier lengte gelijk is aan de som der ribben van de driezijdige piramide; de lengte van deze lijn zal gelijk zijn aan de som van 3 maal de lengte van een opstaande ribbe en 3 maal die eener horizontale; of wel zij is gelijk aan 3 maal de som van een opstaande en een horizontale ribbe.

3°. *op de uithoeken*, *hoeken*, enz. Het aantal ribben van de driezijdige piramide 6 zijnde, bedraagt ook dat der tweevlakkige hoeken zes, het aantal standhoeken zal mede zes bedragen; de standhoeken tusschen elke twee elkander snijdende opstaande zijvlakken zijn even groot, alsmede die tusschen ieder opstaand zijvlak en het grondvlak. Het lichaam telt 4 uithoeken; aan elken uithoek komen 3 vlakken te zamen, dus zijn er 4 drievlakkige hoeken en $4 \times 3 = 12$ vlakke hoeken aan het lichaam. De hoeken in het grondvlak zijn even groot, bevattende ieder $\frac{180}{3}^{\circ} = 60^{\circ}$; die om het punt P zijn mede even groot, en eindelijk zijn ook de $3 \times 2 = 6$ hoeken aan de basis der gelijkbeenige driehoeken onderling gelijk.

4°. *op de diagonalen.* De zijvlakken van de driezijdige piramide zijn allen driehoeken. In een driehoek kan men, gelijk bekend is, geen diagonalen trekken, zoodat op de oppervlakte van het lichaam geen diagonalen kunnen liggen. Als wij nu nagaan, dat iedere uithoek van het lichaam met elken anderen uithoek is verbonden door een ribbe, dan besluiten wij, dat ook *in* het lichaam geen diagonalen getrokken worden. Wij hadden ook kunnen *berekenen*, dat er geen diagonalen mogelijk zijn. Immers zijn er 4 uithoeken aan de piramide, en tusschen 4 punten, waarvan geen drie in een rechte lijn liggen, kan men $\frac{1}{2}n(n-1) = \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6$ rechte lijnen trekken. Hiervan afgetrokken de zes ribben, behoudt men $6 - 6 = 0$ voor het aantal diagonalen.

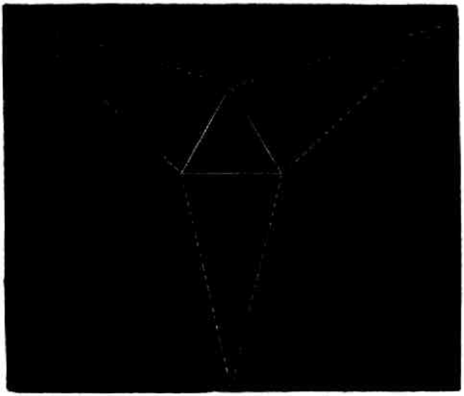
Ten einde uit één gegeven de andere verkregen waarheden af te leiden, even als wij deden bij het prisma, stellen wij ons voor, dat gevraagd wordt de piramide te bespreken, wanneer alleen gegeven is, dat zij 3 opstaande zijvlakken heeft.

De piramide heeft slechts één grondvlak, dus zijn er $3 + 1 = 4$ zijvlakken. Dit grondvlak is een driehoek, omdat er 3 opstaande vlakken zijn. In het grondvlak liggen alzoo 3 uithoeken, en hierbij nog 1 uithoek gevoegd, als plaats waar de opstaande zijvlakken samenkomen, zoo zijn er 4 uithoeken aan 't lichaam. Aan iederen uithoek komen drie vlakken samen, daarom zijn er 4 drievlakkige hoeken, en dus $4 \times 3 = 12$ vlakke hoeken, waarvan er 3 tot het grondvlak behooren. In iedere piramide is elk hoekpunt van het grondvlak met het toppunt vereenigd, derhalve zijn er steeds zooveel opstaande ribben als horizontale. In genoemd prisma is het grondvlak een driehoek; dus bevinden zich $2 \times 3 = 6$ ribben aan het lichaam. Daarom zijn er ook 6 tweevlakkige hoeken en 6 standhoeken.

Is voorts van een piramide alleen gegeven dat er 6 ribben aan zijn, dan weet men ook dadelijk, dat er $\frac{6}{2} = 3$ opstaande en dus ook 3 horizontale ribben zijn. Het grondvlak is dus een driehoek; en daarom moeten er 3 opstaande zijvlakken en één grondvlak, d. i. 4 grensvlakken aan het lichaam zijn. De opstaande zijvlakken der piramide zijn steeds driehoeken; de driezijdige piramide bevat dus enkel driehoeken tot zijvlakken; waarom het aantal vlakke hoeken $4 \times 3 = 12$ bedraagt. Het lichaam kan niet anders als drievlakkige hoeken bevatten, omdat er slechts 4 zijvlakken zijn; daarom zijn er $\frac{12}{3} = 4$ uithoeken en 4 drievlakkige hoeken. Het aantal tweevlakkige hoeken en standhoeken is gelijk aan dat der ribben.

Was alleen bekend het aantal uithoeken $= 4$, dan zou men kunnen opmerken, dat er een grondvlak aan de piramide moet zijn. Dit grondvlak moet een ingesloten ruimte vormen; in het grondvlak liggen dus 3 uithoeken; het aantal opstaande zijvlakken bedraagt alzoo 3 en het geheele aantal zijvlakken $3 + 1 = 4$. Aan elken uithoek heeft een samenkomst plaats van 3 vlakken; het lichaam bezit dus 4 drievlakkige hoeken en $4 \times 3 = 12$ vlakke hoeken. Aan elken uithoek komen 3 ribben te zamen, dus zouden er naar deze meening $4 \times 3 = 12$ ribben moeten zijn, maar daar elke ribbe twee uithoeken verbindt, is zij dubbel geteld; het ware aantal ribben bedraagt dan $\frac{12}{2} = 6$. Het aantal tweevlakkige hoeken en standhoeken is dus eveneens 6.

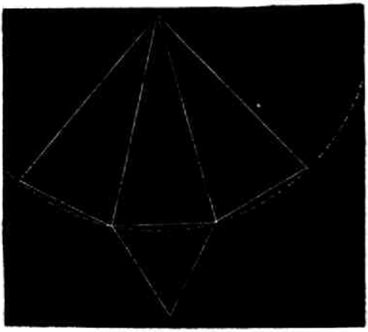
Fig. 68.



Om zich nu het net of geraamte der regelmatige driezijdige piramide voor te stellen, teekene men (zie fig. 68) een gelijkzijdigen drieh., wiens zijde gelijk is aan de ribbe van het grondvlak ABC uit fig. 67. Vervolgens plaatse men op elke zijde van dezen gelijkzijdigen driehoek een gelijkbeenigen driehoek, waarvan de beenen zoo lang zijn als de opstaande ribbe van de gegeven piramide. Laat men den gelijkzijdigen driehoek in zijn stand, en vouwt men de gelijkbeenige driehoeken binnenwaarts om, tot zij met de toppunten aan elkander komen, dan heeft men ingesloten de regelmatige driezijdige piramide uit fig. 67.

Men kan ook dezen weg inslaan. Teeken 3 gelijke gelijkbeenige driehoeken, zoodanig dat de basis van ieder zoo lang zij als de ribbe van het grondvlak der piramide, en ieder opstaand been gelijk worde aan de opstaande ribbe der piramide. Leg ze naast elkander zoodat hun toppunten op elkander vallen als in fig. 69, en teeken benedenwaarts op de basis van den middelsten driehoek een gelijkzijdigen, dan zal men door omvouwing, die van zelve duidelijk is, de regelmatige driezijdige

Fig. 69.

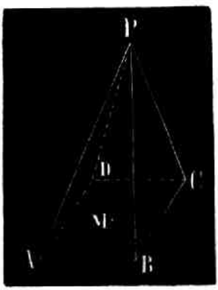


piramide van fig. 67, bekomen. Ten einde genoemde drie gelijkbeenige driehoeken gemakkelijk naast elkander te leggen, beschrijve men met een opstaande ribbe als straal een cirkelboog en zette hierop 3 aanliggende gelijke koorden uit, ieder gelijk aan de ribbe van het grondvlak, (zie fig. 69).

§ 11.

Beschouwing van de regelmatige vierzijdige piramide.

Fig. 70.



De regelmatige vierzijdige piramide nemen wij nu tot voorwerp van onze beschouwing. Wij zullen hierbij de zelfde volgorde behouden; alzoo letten wij:

1°. *op de zijvlakken.* Men vindt hier 5 zijvlakken; 4 opstaande zijvlakken en 1 grondvlak. Het grondvlak is een regelmatige vierhoek of een vierkant, en de opstaande zijvlakken zijn gelijke en gelijkvormige gelijkbeenige driehoeken. Tegenover elk opstaand zijvlak staat een ander opstaand zijvlak; deze zijn niet evenwijdig zoo als bij het vierzijdige prisma, maar zij ontmoeten elkander in het punt P, het toppunt der piramide, waar de opstaande zijvlakken te zamen komen. Beschrijft men om het grondvlak een cirkel, dan zal het middelpunt M met het toppunt P vereenigd, de lijn PM doen ontstaan, die geheel binnen het lichaam valt, loodrecht op het grondvlak staat, en de *hoogte* der piramide genoemd wordt. Ieder punt van deze lijn is op gelijke afstanden van de opstaande zijvlakken verwijderd.

2°. *op de ribben.* Wij zien aan het lichaam, dat de ribben 8 in getal zijn; vier daarvan liggen in 't grondvlak en zijn horizontale; de overige zijn opstaande, zij hellen op de andere en loopen in 't zelfde punt P in elkander. Die in 't grondvlak zijn even lang, zij zijn twee aan twee evenwijdig en snijden elkander rechthoekig. Ook de opstaande zijn even lang. Elke opstaande ribbe sluit met de *hoogte* der piramide en den straal van den cirkel om het grondvlak een rechthoekigen driehoek in, waarvan de ribbe de hypotenusa is.

3°. *op de uithoeken, hoeken, enz.* Het lichaam telt 5 uithoeken of hoekpunten, waarvan er 4 in 't grondvlak liggen. Aan elk dezer 4 uithoeken komen 3 ribben samen, daarom zijn deze 4 uithoeken de grenzen van 4 drievlakkige hoeken. Aan het vijfde hoekpunt komen 4 opstaande ribben samen, daarom ligt hier een viervlakkige hoek. Wij willen hier dus de opmerking maken, dat de uithoek tegenover eenig zijvlak van een piramide de grens is van een drie-, vier-, vijf-, enz. vlakkigen hoek, naarmate die uithoek tegenover een drie-, vier-, vijf-, enz. hoekig zijvlak staat. Zoo staat in onze fig.

zijvlak	ABCD	tegenover	uithoek	P;	hier	ligt	dus	een	4	vl.	hoek,
»	BCP	»	»	A;	»	»	»	»	3	»	»
»	ABP	»	»	D;	»	»	»	»	3	»	» enz.

De 4 drievlakkige hoeken geven $4 \times 3 = 12$ vlakke hoeken en de viervlakkige geeft er 4; dus te zamen $12 + 4 = 16$. Van deze 16 hoeken zijn de 4 in 't grondvlak allen recht, dus even groot; de 4 om het hoekpunt P zijn ook even groot, en de overige $16 - 2 \times 4 = 8$ zijn mede even groot. — Het aantal tweevlakkige hoeken en standhoeken bedraagt 8, even als dat der ribben.

4°. *op de diagonalen.* In de opstaande zijvlakken, die allen driehoeken zijn, kan men geen diagonalen trekken. Het grondvlak, dat een vierhoek is, levert er twee op; deze zijn even lang en snijden elkander in het middelpunt M rechthoekig. Voor het overige is ieder hoekpunt van het grondvlak reeds met het toppunt vereenigd, daarom zijn er geen diagonalen door het lichaam. Door berekening zou men ook tot het besluit komen, dat er geen diagonalen door 't lichaam mogelijk zijn. Immers geven de 5 uithoeken van het lichaam $\frac{1}{2} \times 5 \times 4 = 10$ vereenigingslijnen, hiervan afgenomen de 8 ribben en de 2 diagonalen in het grondvlak, dan behoudt men $10 - (8 + 2) = 0$ diagonalen, die door het lichaam loopen.

Om nu van dit lichaam het achtervolgens opgenoemde weder door berekening uit een der gegevens af te leiden, stellen wij ons eerst alleen als bekend voor, dat de piramide 5 zijvlakken telt. De piramide heeft één grond- en geen bovenvlak, dus zijn er 4 opstaande zijvlakken. Het aantal opstaande ribben is dus ook 4. Daar iedere opstaande ribbe het toppunt der piramide met een uithoek van het grondvlak verbindt, zijn er aan het grondvlak 4 uithoeken; dit is dus een vierhoek en telt bijgevolg 4 ribben, die blijkbaar allen horizontale zijn. Het geheele aantal ribben bedraagt dus $4 + 4 = 8$. De opstaande ribben komen in één gemeenschappelijk punt samen, daarom telt het lichaam 5 uithoeken. Die in 't grondvlak zijn de grens van drievlakkige hoeken, en de andere van een viervlakkigen hoek. Daarom moet het aantal vlakke hoeken $1 \times 4 + 4 \times 3 = 16$ bedragen.

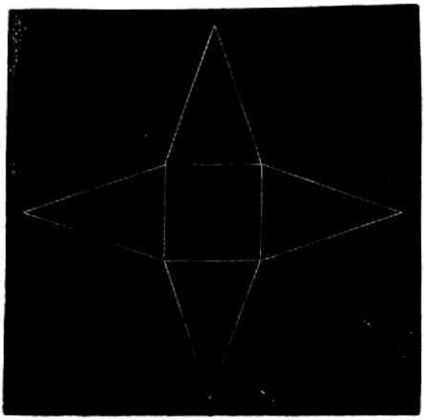
Was alleen gegeven, dat een piramide 5 uithoeken telt, dan moet één van deze het toppunt zijn en de overige moeten in het zelfde vlak liggen. Dit vlak, het grondvlak, is dus een vierhoek, daarom zijn er vier opstaande zijvlakken, en bijgevolg wordt het lichaam door $4 + 1 = 5$ zijvlakken begrensd. Het grondvlak alzoo een vierhoek zijnde, heeft men 4 horizontale ribben; — uit iederen uithoek van 't grondvlak loopt een opstaande ribbe naar het toppunt; dus zijn er $2 \times 4 = 8$ ribben aan het lichaam en dus ook 8 tweevlakkige hoeken en standhoeken. Aan iederen uithoek in 't grondvlak komen 3 ribben te zamen; er zijn dus 4 drievlakkige hoeken, — een aan het toppunt, waar 4 ribben samenkomen, hier ligt een viervlakkige hoek; het aantal vlakke hoeken bedraagt dus $1 \times 4 + 4 \times 3 = 16$.

Was gegeven, dat een piramide 8 ribben telt, dan kan men ook hieruit het onbekende vinden. Daar in de piramide zooveel opstaande ribben, als ribben in 't grondvlak zijn, volgt al dadelijk dat het grondvlak is een $\frac{8}{2} = 4$ hoek. Daarom zijn er

4 opstaande zijvlakken en in 't geheel $4+1=5$ zijvlakken aan 't lichaam. De opstaande zijvlakken zijn allen driehoeken, daarom telt het lichaam $4 \times 3+4=16$ vlakke hoeken. Het aantal tweevlakkige hoeken en standhoeken is gelijk aan dat der ribben, of 8. — In het grondvlak liggen 4 uithoeken; aan ieder komen 3 ribben samen, dus zijn er 4 drievlakkige hoeken; maar behalve deze uithoeken is er nog een, het toppunt, waar 4 opstaande zijvlakken samenkomen; hier bevindt zich dus een viervlakkige hoek. Het lichaam telt bijgevolg 5 uithoeken.

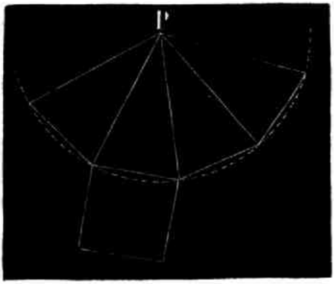
Om zich nu het *net* voor te stellen van de regelmatige vierzijdige piramide, teekene men eerst een vierkant (zie fig. 71), waarvan iedere zijde gelijk is aan de ribbe van het grondvlak der piramide uit fig. 70, en beschrijve voorts op elke zijde een gelijkbeenigen drieh., waarvan ieder been gelijk is aan de opstaande ribbe der piramide van fig. 70. Door de noodige omvouwing verkrijgen we dan de regelmatige piramide uit fig. 70.

Fig. 71.



Men kan ook dezen weg inslaan: Teeken vier gelijke en gelijkvormige gelijkbeenige driehoeken, wier basis even lang is als de ribbe van het grondvlak der gegeven piramide, en waarvan ieder been gelijk is aan de opstaande ribbe van de piramide. Plaats deze 4 driehoeken met de opstaande zijden aan en naast elkander, gelijk figuur 72 kan ophelderen, en beschrijf beneden een der driehoeken op zijn basis een vierkant. Vouwt men dan de gelijkbeenige driehoeken om dat vierkant zoodanig samen, dat de bazes der driehoeken aan de zijden van het vierkant sluiten, dan bekomt men de regelmatige vierzijdige piramide van fig. 70 terug.

Fig. 72.



Aanmerking. Om het laatstgenoemde netwerk gemakkelijk te construeëren, beschrijve men uit zeker punt P (zie fig. 72) met de opstaande ribbe als straal een cirkelboog, en zet op dezen boog 4 aan elkander liggende koorden uit, ieder ter lengte van de horizontale ribbe; trek uit de deelpunten de stralen, en beschrijf buitenwaart op een der koorden een vierkant.

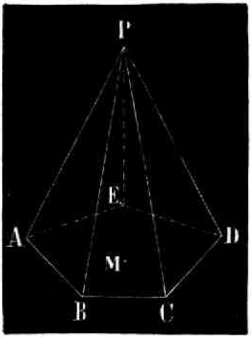
Als wij (zie fig. 70) uit een der uithoeken, b. v. A, van het grondvlak één diagonaal trekken, en het lichaam volgens dezen diagonaal en de twee opstaande ribben, die de uiteinden van dezen diagonaal en het toppunt vereenigen, door deelt, dan bekomt men twee driezijdige piramiden, n. l. PACD en PACB. Deze piramiden zijn even groot, want haar zijvlakken komen met elkander overeen, maar verschillen daarin van de in § 10 door ons beschouwde, dat nu het grondvlak ACD of ACB geen regelmatige driehoek, maar een rechthoekige is. Zulke piramiden noemt men *rechthoekige*, omdat minstens een der zijvlakken rechthoekig op het grondvlak staat. De rechthoekige driezijdige piramide heeft wel een zelfde aantal zijvlakken, ribben, uithoeken, drie- en tweevlakkige hoeken en vlakke hoeken als de regelmatige driezijdige piramide; maar opgenoemde gelijkheid en stand van sommige dezer zijvlakken, ribben, enz. is niet de zelfde als bij de rechthoekige piramide.

§ 12.

Beschouwing der regelmatige vijf- en n-zijdige piramide.

Wij gaan thans over tot de regelmatige vijfzijdige piramide, zie fig. 74; wij willen haar niet beschouwen op de zelfde wijze

Fig. 73.



als de drie- en vierzijdige piramide, maar wij willen uit een der bekende zaken andere eigenschappen afleiden.

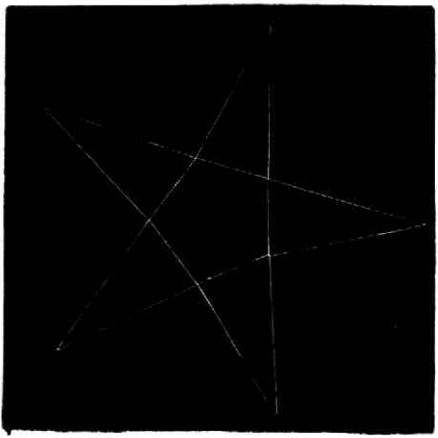
Indien dus alleen bekend ware dat de piramide vijfzijdig is, dan weet men al dadelijk, dat behalve deze 5 opstaande zijvlakken er nog een grondvlak moet zijn, dat dus het geheele aantal zijvlakken 6 bedraagt. Elk opstaand zijvlak snijdt het grondvlak volgens een rechte lijn, dus moet het grondvlak een vijfhoek zijn en 5 uithoeken tellen. Iedere uithoek van het grondvlak is door een opstaande ribbe met het toppunt vereenigd; er zijn dus 5 opstaande ribben en in 't grondvlak 5 horizontale, d. i. te zamen 10 ribben; dus zijn er ook 10 tweevlakkige hoeken en 10 standhoeken. De opstaande zijvlakken ontmoeten elkander in één punt, het toppunt genaamd; er zijn dus $5+1=6$ uithoeken. Aan den uithoek bij het toppunt komen 5 vlakken samen; daar bevindt zich dus een vijfvlakkige hoek. Aan al de andere uithoeken komen slechts drie vlakken samen; hier zijn dus allen drievlakkige hoeken. De opstaande zijvlakken zijn allen driehoeken en het grondvlak is een vijfhoek; er bevinden zich dus $5\times 3+1\times 5=4\times 5=20$ vlakke hoeken aan de vijfzijdige piramide. In de opstaande zijvlakken kan men geen diagonalen trekken, omdat het allen driehoeken zijn; in het grondvlak kunnen uit elk hoekpunt $5-3$, en dus kunnen in het geheel $\frac{5}{2}(5-3)=5$ diagonalen getrokken worden. Door het lichaam is geen diagonaal mogelijk, want elke uithoek aan 't grondvlak is reeds met het toppunt door een ribbe vereenigd.

Indien alleen bekend is, dat in een piramide 10 ribben gevonden worden, dan moeten er $\frac{10}{2}=5$ opstaande en 5 horizontale ribben zijn. Er zijn dus 5 opstaande zijvlakken en een grondvlak, dat een vijfhoek is, dus te zamen $5+1=6$ zijvlakken. De 5 opstaande ribben ontmoeten elkander in één punt, het toppunt van de piramide; hier ligt dus een vijfvlakkige hoek. Aan de 5 uithoeken van het grondvlak liggen dus drievlakkige hoeken. Hierdoor weet men nu reeds, dat het aantal uithoeken 6 is, dat het aantal tweevlakkige hoeken en standhoeken even als dat der ribben 10 bedraagt, en dat alzoo het aantal vlakke hoeken $5 + 5 \times 3 = 20$ bedraagt.

Is alleen bekend het aantal uithoeken $= 6$, dan moet een van deze de tophoek zijn, de overige uithoeken bevinden zich in 't grondvlak. Dit grondvlak is dus een vijfhoek; uit ieder hoekpunt van 't grondvlak loopt een ribbe naar den tophoek; hier komen dus 5 opstaande ribben samen, daarom zijn er 5 opstaande zijvlakken. Het aantal zijvlakken is dus $5 + 1 = 6$; het aantal ribben $5 + 5 = 10$, het aantal tweevlakkige hoeken en standhoeken eveneens 10; het aantal drievlakkige hoeken 5 en men heeft één vijfvlakkigen hoek. Hierdoor is het overige nu gemakkelijk te vinden. Om echter uit de uithoeken het aantal diagonalen te bepalen, merke men op, dat er tusschen deze 6 punten $\frac{1}{2} \times 6\,(6 - 1) = 15$ verbindingslijnen mogelijk zijn; hiervan de 10 ribben afgenomen, houdt men 5 diagonalen over, die, gelijk wij reeds opmerkten, allen in 't grondvlak moeten liggen.

Het *net* der vijfzijdige piramide zal men op gelijke wijze als dat der vierzijdige kunnen bekomen. Men teekene daartoe een regelmatigen vijfhoek (fig. 74), waarvan elke zijde gelijk is aan de ribbe van het grondvlak; voorts beschrijve men op elke zijde buitenwaarts een gelijkbeenigen driehoek, waarvan ieder opstaand been zoo lang is als de opstaande ribbe van de piramide. Door de noodige omvouwing bekomt men de regelmatige vijfzijdige piramide. Ook kan men op de zelfde wijze te werk

Fig. 74.

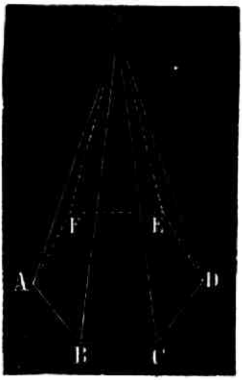


gaan, als in fig. 72 bij de vierzijdige piramide is vermeld.

Het is opmerkelijk na te gaan, welken vorm fig. 74 zal aannemen, in geval de som der vlakke hoeken om den vijfvlakkigen hoek gelijk is aan 180°.

Wij willen thans overgaan tot de *zeszijdige* piramide die wij in fig. 75 zien afgebeeld; maar in plaats van de gewone volgorde, willen wij in 't algemeen de *n*-zijdige piramide beschouwen, om daarmede van de piramiden af te stappen.

Fig. 75.



Is de regelmatige piramide *n*-zijdig, dan zijn er *n* opstaande zijvlakken en 1 grondvlak, dus wordt zij begrensd door $n+1$ zijvlakken. Elk der opstaande zijvlakken is een gelijkbeenige driehoek en het grondvlak is een regelmatige *n*-hoek. Er liggen alzoo in het grondvlak *n* ribben, die horizontaal zijn; en elk hoekpunt van het grondvlak door een ribbe met den tophoek verbonden zijnde, zijn er ook *n* opstaande ribben. Het aantal ribben der *n* zijdige piramide bedraagt alzoo $2 \times n = 2n$. Daarom zijn er ook $2n$ tweevlakkige hoeken en $2n$ standhoeken. In het grondvlak liggen *n* uithoeken, omdat dit een *n*-hoek is; daarenboven is er nog een toppunt, dus zijn er $n+1$ uithoeken. De uithoek aan den top is een *n*-vlakkige, omdat daar *n* vlakken samenkomen; aan de overige uithoeken komen drie vlakken samen, dus zijn er *n* drievlakkige hoeken.— Aan elken drievlakkigen hoek komen 3 vlakken samen, dus liggen er ook 3 vlakke hoeken, en de *n* vlakkige hoek wordt gevormd door *n* zijvlakken, waarom aan het toppunt *n* vlakke hoeken gevonden worden. Het aantal vlakke hoeken bedraagt dus

$$n \times 3 + n = 4n.$$

Omdat er $n+1$ uithoeken zijn, kunnen er $\frac{1}{2}n(n+1)$ verbindingslijnen tusschen deze punten bestaan. Trekt men hiervan de $4n$ ribben, dan behoudt men $\frac{1}{2}n(n-3)$ diagonalen. Neemt men nu in aanmerking, dat het grondvlak een n-hoek is, dat er dus uit elk hoekpunt $n-3$ diagonalen kunnen getrokken worden, en bijgevolg in den geheelen n-hoek $\frac{1}{2}n(n-3)$ diagonalen (vergelijk § 21 van het Ie Deel), dan komt men dadelijk tot besluit, dat er in een piramide, hoe groot het aantal zijden ook moge zijn, geen diagonalen door het lichaam kunnen getrokken worden. Ook bij een oppervlakkige beschouwing hebben wij deze opmerking reeds meermalen kunnen doen, dewijl elk hoekpunt van het grondvlak reeds met het toppunt vereenigd is.

Trekt men uit één hoekpunt van het grondvlak alle mogelijke diagonalen, dan wordt het grondvlak van de n-zijdige piramide in $n-2$ driehoeken verdeeld. Het lichaam, doorgesneden volgens het beloop dezer diagonalen en door het toppunt, zal dus in $n-2$ driezijdige piramiden verdeeld zijn.

Om in 't algemeen het *net* der n-zijdige piramide te teekenen, beschrijve men een cirkel met de opstaande ribbe als straal, en zet hierin achtereenvolgens n koorden uit, ieder gelijk aan de ribbe van het grondvlak; voorts vereenige men de uiteinden dier koorden met het middelpunt, en beschrijve op een dier koorden een regelmatigen n-hoek. Door omvouwing zal men dan de n-zijdige piramide verkrijgen.

§ 13.

Over de regelmatige lichamen in 't algemeen, en het zes- en achtvlak in 't bijzonder.

De regelmatige veelvlakkige lichamen zullen thans behandeld worden. Zelfs met uitsluiting der regelmatige prisma's en piramiden, die wij tot heden beschouwden, verstaan wij door regelmatige lichamen alleen zulke, wier oppervlakken uit gelijke en gelijkvormige regelmatige veelhoeken zijn samengesteld, terwijl deze grensvlakken onder gelijke tweevlakkige hoeken aan elkander sluiten, d. i. de standhoek op de ribbe tusschen elk paar aan elkander grenzende zijvlakken is steeds van de zelfde grootte. Men heeft de volgende regelmatige lichamen:

a. het regelm. viervl. of tetraëdrum, fig. 76
b. » » zesvl. » hexaëdrum, » 77
c. » » achtvl. » octaëdrum, » 78
d. » » twaalfvl. of dodecaëdrum, » 79
e. » » twintigvl. of icosaëdrum, » 80

Fig. 76.

Fig. 77.

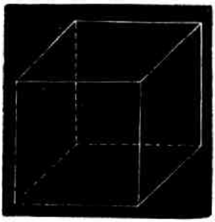
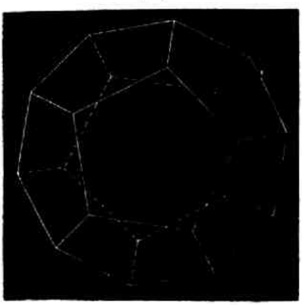


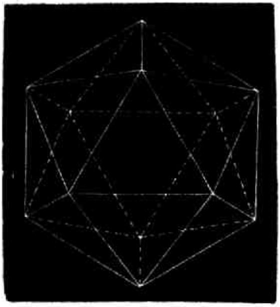
Fig. 78.

Fig. 79.



Door beschouwing der nevensgaande figuren ziet men, dat de regelmatige lichamen ingesloten zijn door drie-, vier- of vijfhoeken en wel regelmatige. Meer dan de 5 opgenoemde zijn er niet, hetwelk men gemakkelijk kan opmerken; immers, aan elken uithoek komen 's minstens 3 vlakken samen, en de som der vlakke hoeken om één uithoek kan nimmer gelijk aan 360° zijn, maar moet steeds minder dan dit getal wezen. Was die som 360°, dan zou er geen lichaamshoek ontstaan, maar eene vlakte uitgestrektheid, en was zij meer dan 360°, dan zou er een inspringende lichaamshoek ontstaan, dat bij een regelmatig lichaam onmogelijk is. Het aantal regelmatige driehoeken, die aan één uithoek samenkomen, kan dus 3, 4 en 5 zijn, en nimmer meer, omdat $6 \times 60^0 = 360^0$ is. — Het aantal regelmatige vierhoeken kan alleen 3 zijn, want 4 rechte hoeken vormen reeds $4 \times 90^0 = 360^0$. — Het aantal regelmatige vijfhoeken, die aan één uithoek samenkomen, kan alleen 3 zijn, want elke hoek van een regelmatigen vijfhoek bedraagt 108°, en $4 \times 108^0 = 432^0$, dat is meer dan

Fig. 80.



360^0. — Regelmatige lichamen, ingesloten door zijvlakken meer dan 5 hoeken tellende, kunnen niet in aanmerking komen, omdat het aantal graden, dat iedere vlakke hoek telt, minder dan $\frac{360^0}{3} = 120^0$ moet zijn. — De eenige mogelijke gevallen zijn alzoo: de samenkomst van 3, 4 of 5 gelijkzijdige driehoeken, van 3 vierkanten en 3 regelmatige vijfhoeken, en deze gevallen geven juist de hierboven genoemde lichamen.

Wij willen elk dezer vijf regelmatige lichamen wat nader beschouwen, en zullen dus aanvangen met *het regelmatige viervlak.* Dit lichaam komt in vorm overeen met de in § 10 omschreven regelmatige driezijdige piramide. Het zelfde aantal ribben, zijvlakken, uithoeken, drievlakkige en tweevlakkige hoeken, standhoeken en vlakke hoeken vindt men ook hier. Wij zullen dus alleen behoeven op te merken, waarin het viervlak van de beschouwde driezijdige piramide verschilt. — Alle vier zijvlakken zijn bij het viervlak even groot: het zijn allen gelijke gelijkzijdige driehoeken. De som der grensvlakken is dus gelijk aan 4 maal het oppervlak van één driehoek. De zes ribben zijn ook alle even lang. De som der ribben is dus gelijk aan 6 maal de lengte van een dezer. Het aantal vlakke hoeken bedraagt even als bij de driezijdige piramide 12, maar zij zijn nu allen even groot, tellende ieder 60^0.

Nog willen wij opmerken, dat het geen verschil oplevert, welk der zijvlakken men als grondvlak beschouwt; de standen der opstaande ribben zijn steeds de zelfde. Ook de hoogte zal steeds door de zelfde lengte worden voorgesteld.

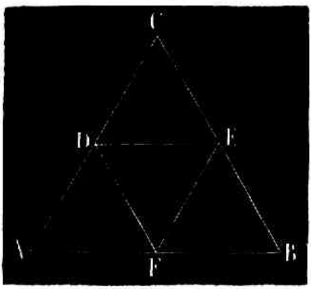
Beschouwen wij thans *het regelmatige zesvlak*, dan zullen wij zien, dat dit lichaam in vorm overeenkomt met het reeds omschreven regelmatige vierzijdige prisma. Het heeft een zelfde aantal zijvlakken, ribben, hoeken, uithoeken en diagonalen als dit, zoodat wij alleen hebben op te merken, waarin het van het beschouwde vierzijdige prisma verschilt. De zijvlakken van het zesvlak zijn allen even groot; het zijn allen gelijke vierkanten. De 12 ribben zijn allen even lang; daarom is de som der ribben gelijk aan 12 maal de lengte van een dezer, terwijl de som der grensvlakken 6 maal één der zijvlakken is. De 12 diagonalen die in de zijvlakken liggen, zijn allen van gelijke lengte, maar verschillen ook nog van die, welke door 't lichaam gaan. Indien men van het zesvlak een ribbe weet, dan kan men beide soorten van diagonalen berekenen. Die, welke in een der zijvlakken ligt, is, als diagonaal van een vierkant, gelijk aan den vierkantswortel uit het dubbel kwadraat van de ribbe. Is dus deze ribbe $= r$, dan is de kleine diagonaal $= \sqrt{2r^2} = r\sqrt{2}$. Nu vormt de diagonaal door 't lichaam met den diagonaal in het zijvlak en de opstaande ribbe een rechthoekigen driehoek, waarvan de genoemde groote diagonaal de hypotenusa is. Alzoo is deze $= \sqrt{[r^2 + (\sqrt{2r^2})^2]}$ $= \sqrt{3r^2} = r\sqrt{3}$. Daarom is nu ook:

gr. diag. : kl. diag. $= \sqrt{3r^2} : \sqrt{2r^2} = r\sqrt{3} : r\sqrt{2} = \sqrt{3} : \sqrt{2}$.

Het regelmatige zesvlak wordt ook genoemd *kubus* of *teerling*.

Het net van het regelmatige viervlak is gemakkelijk te maken; daartoe teekene men een gelijkzijdigen driehoek ABC (zie fig. 81) waarvan iedere zijde gelijk is aan de dubbele ribbe van het viervlak; men deele voorts iedere zijde in de punten D, E en F midden door, en trekke DE, DF en EF; vouwt men dan de driehoeken ADF, BEF en CDE om de lijnen DF, EF en DE naar elkander toe, tot dat de punten A, B en C in elkander vallen, dan bekomt men een regelmatig viervlak. Dat, omgekeerd, door het uitslaan van de opstaande zijvlakken van een regelmatig viervlak de gelijkzijdige driehoek ABC ontstaan zal, ziet men gemakkelijk in door op te merken, dat

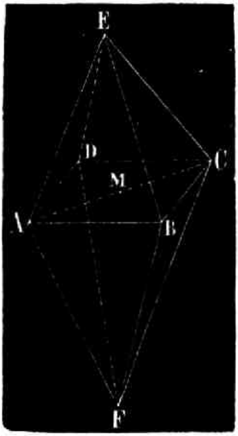
Fig. 81.



$$\angle CDE + \angle EDF + \angle ADF = \angle AFD + \angle DFE + BFE = \text{enz.} = 3 \times 60^0 = 180^0 \text{ is.}$$

Het net van het regelmatige zesvlak zal men uit de beschouwing der figuren 62 en 63 gemakkelijk kunnen afleiden, als men slechts in 't oog houdt, dat ieder vlak een vierkant moet zijn.

Fig. 82.



Beschouwen wij thans het regelmatige achtvlak (octaëdrum) fig. 82, dan zien wij dat dit lichaam eigenlijk bestaat uit 2 gelijke regelmatige vierzijdige piramiden EABCD en FABCD, die naar het beloop van hare gelijke grondvlakken met elkander vereenigd zijn.

De zijvlakken van het achtvlak, die 8 in getal zijn, zijn allen gelijke en gelijkzijdige driehoeken, die 4 aan 4 aan de uithoeken samenkomen. Ze staan twee aan twee evenwijdig, doch in omgekeerden stand, zoodat in ieder paar evenwijdige zijvlakken tegenover de basis van den eenen driehoek het toppunt van den anderen staat, zoo zijn in onze figuur evenwijdig de volgende zijvlakken:

△ BCF	met	△ ADE.
△ ABF	»	△ CDE.
△ ADF	»	△ BCE.
△ CDF	»	△ ABE.

Indien men de middelpunten van de om ieder paar evenwijdige zijvlakken beschreven cirkels door rechte lijnen vereenigt, dan zullen deze rechte lijnen loodrecht op de zijvlakken staan en door het midden (M) van het achtvlak gaan; omdat er 4 paar evenwijdige vlakken zijn, zijn er ook 4 zulke loodlijnen, die den afstand tusschen elk paar evenwijdige vlakken aanwijzen en dus even lang zijn.

Ieder zijvlak is een driehoek en heeft dus 3 zijden, maar elke zijde is de ribbe tusschen twee vlakken, alzoo zijn er in het achtvlak $\frac{8 \times 3}{2} = 12$ ribben, die allen even lang zijn. Indien het lichaam in rust voor ons ligt, dan ziet men steeds een grond- en bovenvlak en dus 6 ribben die horizontaal zijn; de overigen zijn dan hellend. Het zal niet behoeven opgemerkt te worden, dat men voor grond- en bovenvlak ieder paar evenwijdige zijvlakken kan aannemen. Uit ieder hoekpunt van het bovenvlak ziet men twee ribben naar 't grondvlak loopen; er zijn dus 6 ribben, die de uithoeken aan het grond- met die aan het bovenvlak vereenigen. Hierbij gevoegd de 3 ribben in het grond- en 3 in het bovenvlak geeft ons, op een andere wijze, 12 ribben in 't geheel. Deze 12 ribben zijn twee aan twee evenwijdig; het zijn in onze figuur de ribben:

CF en AE, BF en DE, AF en CE
DF en BE, AB en CD, BC en AD.

Als men het midden van ieder paar evenwijdige ribben door rechte lijnen verbindt, dan zal men 6 zulke lijnen vinden, die allen even lang zijn en door het midden van het lichaam loopen.

Aan iederen uithoek van het achtvlak loopen 4 ribben te zamen, van deze ribben aan eenigen uithoek is er steeds één die met twee dezer ribben hoeken van 60° vormt, doch met de vierde ribbe vormt zij een hoek van 90°. Hieruit volgt dus, dat ieder der 2 vierzijdige piramiden, waarin het lichaam kan verdeeld worden, steeds een vierkant tot grondvlak heeft.

Ieder zijvlak telt 3 vlakke hoeken, dus zijn er op de oppervlakte van het achtvlak $8 \times 3 = 24$ vlakke hoeken, die 4 aan 4 aan iederen uithoek samenkomen; alzoo zijn er $\frac{24}{4} = 6$ uithoeken aan het lichaam. Het aantal viervlakkige hoeken bedraagt dus 6, dat der tweevlakkige, hetwelk gelijk is aan het aantal ribben, bedraagt 12; daarom zijn er ook 12 standhoeken, die allen even groot zijn.

Onder de uithoeken van het achtvlak zijn er 3 paar aan te wijzen, die niet door rechte lijnen vereenigd zijn. De rechte lijn, die tusschen ieder paar kan getrokken worden, is een diagonaal door het lichaam, deze gaat door het midden (M) van het lichaam en is gelijk aan de dubbele hoogte van ieder der genoemde regelmatige vierzijdige piramiden, waarin het achtvlak kan verdeeld worden. — Op de zijvlakken, die allen driehoeken zijn, liggen geen diagonalen. — Meer dan 3 diagonalen kan het lichaam niet hebben. Immers bestaan er tusschen de 6 uithoeken van het lichaam $\frac{1}{2} \times 6 \times 5 = 15$ verbindingslijnen, en hiervan de 12 ribben afgenomen, behoudt men 3 diagonalen.

In onze figuur kunnen ze getrokken worden van A naar C, van D naar B, en van E naar F. — Verdeelt men nu het lichaam volgens den aangewezen weg in 2 vierzijdige piramiden, dan liggen steeds twee dezer diagonalen in het grondvlak der piramide; dit grondvlak, dat een kwadraat is, heeft tot zijden de ribbe van het achtvlak. Zoo dus iedere ribbe $= r$ is, dan is iedere diagonaal $= \sqrt{2r^2} = r\sqrt{2}$.

Om het *net* van het regelmatige achtvlak te teekenen, beschrijve men eerst het net der regelmatige vierzijdige piramide EABCD uit fig. 82, daarna beschrijve men nog eenmaal dit zelfde net, en legge de daaruit voortspruitende piramiden met haar grondvlakken op elkander, zoodat de hoekpunten van het eene op die van het andere grondvlak vallen (fig. 83).

Fig. 83.

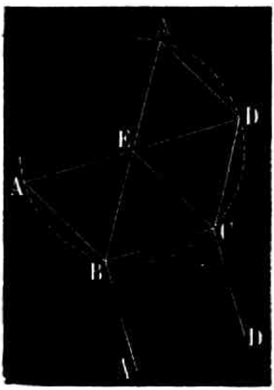
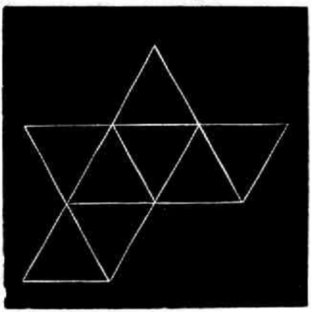


Fig. 84.



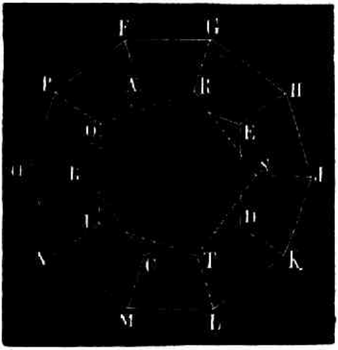
Men kan dit *net* ook verkrijgen, door 8 regelmatige gelijke driehoeken aan elkander te teekenen volgens fig. 84. Door omvouwing zal men dan gemakkelijk het regelmatige achtvlak bekomen.

§ 14.

Beschouwing van het regelmatige twaalf- en twintigvlak.

Wij willen thans tot het regelmatige twaalfvlak overgaan (fig. 85). Het heet twaalfvlak, omdat er 12 zijvlakken aan het lichaam zijn, die allen gelijke regelmatige vijfhoeken zijn. Als men het lichaam voor zich ziet liggen, bemerkt men dadelijk een grond- en een bovenvlak; deze zijn evenwijdig, maar staan in een omgekeerden stand, zoodanig, dat b. v. de tophoek van het grondvlak tegenover de grondlijn van het bovenvlak ligt, enz. Door het lichaam gedurig op een ander zijvlak te laten rusten, zal men ontwaren dat er dus 6 paar evenwijdige zijvlakken in het twaalfvlak zijn. In onze figuur zijn die evenwijdige zijvlakken:

Fig. 85.



vijfh. ABCDE en vijfh. QRSTU; vijfh. ABOPF en TSJKL;
» AEHGF » » TUNML; » EDKJH » UQPON;
» CDKLM » » QRGFP; » BCMNO » RSJHG.

Vereenigt men de middelpunten der om ieder paar evenwijdige zijvlakken beschreven cirkels door een rechte lijn, dan zal deze lijn loodrecht op dat paar zijvlakken staan en door 't midden van het twaalfvlak loopen. Omdat er 6 paar evenwijdige zijvlakken zijn, zullen er ook 6 zulke loodlijnen zijn, die allen gelijke lengte hebben. Deze loodlijnen worden ook wel *assen* genoemd.

Ieder van de twaalf zijvlakken is een vijfhoek, en elke vijfhoek telt 5 zijden; maar elke zijde is de ribbe tusschen twee vlakken, dus zijn er $\frac{12}{2} \times 5 = 30$ ribben, die allen even lang zijn. Ligt het lichaam voor ons, dan zijn er steeds $2 \times 5 = 10$ ribben, die horizontaal liggen, de overigen hellen op de horizontale. Ook op een andere wijze kan men het aantal ribben vinden, n. l. uit ieder hoekpunt van het grondvlak loopt een ribbe naar de richting van het bovenvlak, en evenzoo loopt uit ieder hoekpunt van 't bovenvlak een ribbe naar de richting van 't grondvlak; grond- en bovenvlak vijfhoeken zijnde, geeft dit reeds $4 \times 5 = 20$ ribben, en door vereeniging van de afloopende ribben van grond- en bovenvlak met elkander, ontstaan 2×5 andere, dus in 't geheel $6 \times 5 = 30$ ribben. Deze 30 ribben zijn twee aan twee evenwijdig; men vindt dit paar evenwijdige nimmer in twee aan elkander sluitende vlakken, maar steeds in twee tegenover elkander staande vlakken, of liever in de grond- en bovenvlakken. Zoo zijn in fig. 85 evenwijdig

CD en QR, BC en RS, AB en ST, enz.

Men vindt dus $\frac{30}{2} = 15$ paar evenwijdige ribben, en vereenigt men het midden van elk paar evenwijdige ribben door rechte lijnen, dan zullen deze door het midden van 't lichaam gaan. Er zijn alzoo 15 zulke lijnen te trekken, die allen even lang zijn.

Het aantal ribben is ook gemakkelijk in fig. 86 te tellen.

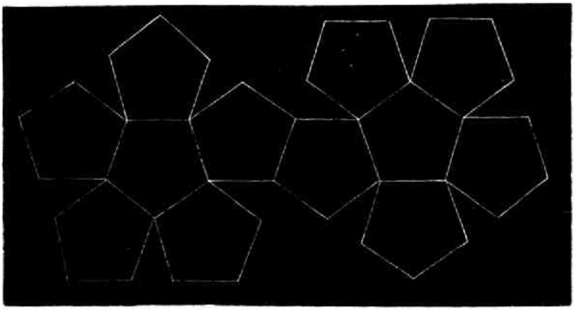
Elk der zijvlakken telt 5 vlakke hoeken; dus zijn er $12 \times 5 = 60$ vlakke hoeken aan 't lichaam, die ieder $1\frac{1}{5}\,R = 1\frac{1}{5} \times 90^0 = 108^0$ bevatten. Aan iederen uithoek komen 3 zulke hoeken samen, alzoo zijn er $\frac{60}{3} = 20$ uithoeken aan 't lichaam, die in de figuur gemakkelijk te tellen zijn. Er zijn dus ook 20 drievlakkige hoeken, en 30 tweevlakkige, welk getal steeds met dat der ribben overeenkomt. De 30 standhoeken dezer tweevlakkige hoeken zijn allen even groot.

Van de 20 uithoeken van het lichaam liggen geen drie in een rechte lijn; het aantal verbindingslijnen tusschen deze 20 punten bedraagt alzoo $\frac{1}{2} \times 20 \times 19 = 190$. Trekt men hiervan de 30 ribben af, dan houdt men $190 - 30 = 160$ lijnen over, die allen diagonalen moeten zijn. Ieder zijvlak is een vijfhoek, en telt alzoo $\frac{1}{2} \times 5 \times (5-3) = 5$ diagonalen, die in de vlakken of op het lichaam liggen; het geheele aantal diagonalen, die op het lichaam gevonden worden, bedraagt dus

$12 \times 5 = 60$, en daarom moeten er nog $160 - 60 = 100$ diagonalen zijn, die door het lichaam gaan.

Het *net* van het regelmatige twaalfvlak teekent men, door op elke zijde van een regelmatigen vijfhoek een gelijken regelmatigen vijfhoek te teekenen. Dit doet men nog eens met een anderen doch gelijken vijfhoek, die een omgekeerden stand heeft, en laat beide stellen aan elkander sluiten zoo als fig. 86 aanwijst.

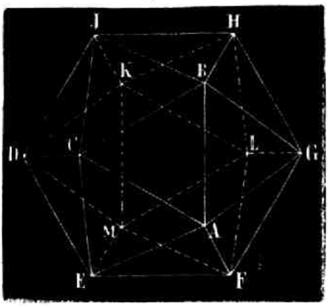
Fig. 86.



Door omvouwing bekomt men dan het regelmatige twaalfvlak.

Het regelmatige twintigvlak, dat we in fig. 87 zien afgebeeld, wordt aldus genoemd, omdat het begrensd wordt door 20 gelijke en gelijkvormige zijvlakken, die allen driehoeken zijn. — Het lichaam op een zijner uithoeken voor zich houdende, ziet men dat het bestaat uit twee gelijke regelmatige piramiden, waarvan de grondvlakken regelmatige vijfhoeken zijn; deze piramiden zijn ten opzichte van elkander zóó geplaatst, dat haar grondvlakken een tegengestelden stand hebben, doch de middelpunten der grondvlakken liggen met de toppunten in een rechte lijn; voor het overige staan de beide grondvlakken op zoodanigen afstand, dat ieder hoekpunt van een der beide grondvlakken met de twee hier het

Fig. 87.



dichtst bij liggende hoekpunten van het andere grondvlak door rechte lijnen vereenigd zijnde, deze vereenigingslijnen gelijke lengte hebben als iedere ribbe van een der genoemde piramiden. — Legt men het lichaam op een der zijvlakken vóór zich, dan ontwaart men, dat er een grond- en bovenvlak zijn, die evenwijdig loopen, maar in omgekeerden stand tot elkander staan, zoodanig, dat de tophoek van het grondvlak tegenover de basis van het bovenvlak ligt; zoo ligt tegenover den tophoek K van het grondvlak de basis BC van 't bovenvlak. Door het lichaam gedurig op een ander zijvlak te leggen, zal men zien, dat er steeds een grond- en bovenvlak in omgekeerden stand te voorschijn komen, zoodat er $\frac{20}{2} = 10$ paar zulke evenwijdige vlakken zijn.

Als men de middelpunten der om ieder paar zijvlakken beschreven cirkels met elkander vereenigt, dan zal deze lijn loodrecht op dat paar zijvlakken staan en door 't midden van het lichaam loopen. Omdat er 10 paar evenwijdige zijvlakken zijn, kan men 10 zulke loodlijnen of *assen* aanwijzen, die elkander en ook het lichaam in het midden snijden.

Het lichaam telt 20 zijvlakken, aan ieder zijvlak bevinden zich drie zijden, maar iedere zijde is de ribbe van twee elkander snijdende vlakken; daarom bevinden zich $20 \times \frac{3}{2} = 30$ ribben aan het twintigvlak, hetwelk de zelfde uitkomst oplevert als bij het regelmatige twaalfvlak. Deze 30 ribben zijn allen even lang, omdat de zijvlakken gelijke en gelijkzijdige driehoeken zijn. Ligt het twintigvlak op een der zijvlakken vóór ons, dan merken wij $2 \times 3 = 6$ ribben op, die horizontaal liggen; de overige $30 - 6 = 24$ zijn hellend. — Men kan het aantal ribben nog op een andere wijze tellen. Wij merkten reeds op, dat het lichaam gevormd was vooreerst door 2 regelmatige vijfzijdige piramiden. Ieder dezer piramiden levert $2 \times 5 = 10$ ribben op, en neemt men nu hierbij in aanmerking, dat uit ieder hoekpunt van het grondvlak der eene piramide twee ribben loopen naar de hoekpunten van 't grondvlak der andere piramide, dan vindt men voor het geheele aantal ribben:

$$2 \times 5 + 2 \times 5 + 2 + 5 = 6 \times 5 = 30.$$

Deze 30 ribben zijn twee aan twee evenwijdig; ieder paar evenwijdige ribben vindt men in het grond- en bovenvlak. Vereenigt men het midden van ieder paar evenwijdige ribben door een rechte lijn, dan zal deze door het midden van het lichaam gaan, en dus de reeds genoemde loodlijnen in het midden snijden. Er zijn dus $\frac{30}{2} = 15$ zulke lijnen in het lichaam te trekken, die allen de zelfde lengte hebben. — In fig. 87 is het aantal ribben ook gemakkelijk te tellen.

Ieder zijvlak is een driehoek en telt dus 3 vlakke hoeken; het geheele aantal vlakke hoeken aan het lichaam bedraagt dus $20 \times 3 = 60$, die 5 aan 5 aan iederen uithoek samenkomen; alzoo zijn er $\frac{60}{5} = 12$ uithoeken. Het regelmatige twaalf- en twintigvlak hebben dus eenige overeenkomst, welke hieruit blijkt:

het 12-vlak telt 12 zijvlakken, 20 uithoeken, 30 ribben,
» 20 » » 20 » 12 » 30 »

Er zijn derhalve in het twintigvlak 12 vijfvlakkige hoeken, 30 tweevlakkige hoeken en 30 standhoeken, die allen even groot zijn.

Van de 12 uithoeken liggen geen drie in een rechte lijn; alzoo zijn er $\frac{1}{2} \times 12 \times 11 = 66$ verbindingslijnen tusschen deze 12 punten mogelijk; — trekt men hiervan af de 30 ribben, dan houdt men $66 - 30 = 36$ lijnen over, die diagonalen moeten zijn, welke allen door 't lichaam gaan, omdat in de zijvlakken, die driehoeken zijn, geen diagonalen kunnen liggen. Opmerking verdient het, dat het getal diagonalen die door het lichaam van het regelmatige twaalf- en twintigvlak gaan, in beide gevallen een kwadraatgetal is.

Het *net* van het regelmatige twintigvlak teekent men door 10 gelijke regelmatige driehoeken zóó naast elkander te leggen, dat zij een parallelogram insluiten (ABCD van fig. 88), en door vervolgens op iedere zijde boven en beneden een gelijkzijdigen driehoek te stellen. Door omvouwing zal men dan het twintigvlak kunnen bekomen.

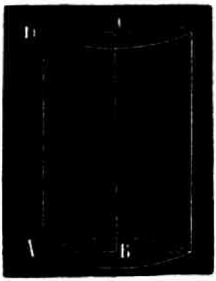
Fig. 88.

§ 15.

Over den cilinder, kegel, afgeknotten kegel en de afgeknotte piramide.

Wij zijn thans genaderd tot de beschouwing der zoogenaamde *omwentelings-lichamen.* Stelt men zich voor, dat een rechthoek ABCD om de rechthoekszijde BC wentelt, totdat hij zijn eersten stand weder bekomen heeft, dan noemt men de doorgeloopen ruimte een *cilinder*, (zie fig. 89). De lijn AD bepaalde in haar verschillende standen de gedeeltelijke grenzen der ruimte, en het gebogen vlak door haar doorloopen, heet het *cilindervlak.* De punten A en D hebben door de wenteling een cirkelomtrek gevormd, waarvan AB en DC de stralen zijn.

Fig. 89.

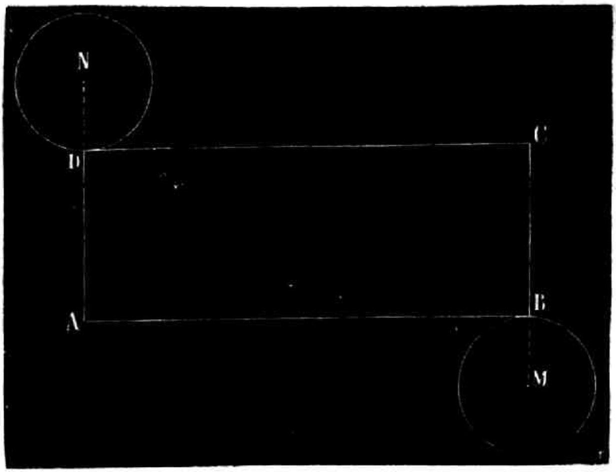


Het ontstaan van den cilinder kan men zich ook aldus voorstellen: in eenig punt A van den cirkelomtrek staat een lijn AD loodrecht op het cirkelvlak; deze lijn draait over den omtrek van den cirkel, doch blijft er steeds loodrecht op; is zij dan weder in haar eersten stand gekomen, d. i. heeft zij den geheelen omtrek van den cirkel afgelegd, dan heeft zij een cilindervlak doorloopen; het uiteinde D der bewegende lijn heeft een cirkelomtrek doorloopen waarvan CD de straal is, en de ruimte, ingesloten door het vlak van dezen cirkel, het cilindervlak en het gebruikte grondvlak, wordt een cilinder genoemd.

De cilinder telt 3 zijvlakken; twee platte en een gebogen. De platte grensvlakken zijn cirkels; men noemt ze het grond- en bovenvlak, of ook omdat zij even groot en beide cirkels zijn, de beide grondvlakken van den cilinder. Uit de wording van den cilinder is ons duidelijk gebleken, dat beide grondvlakken evenwijdig zijn, want de afstand tusschen beide wordt steeds gemeten door de lijn AD. Deze lijn AD staat loodrecht op beide grondvlakken. eveneens als de lijn BC, die de andere rechthoekszijde van het gebezigde rechthoekige parallelogram is; deze lijn BC verbindt de beide middelpunten B en C der grondvlakken, om haar is de beweging van den rechthoek geschied, en daarom heet zij de *as* van den cilinder. — Door de *hoogte* van den cilinder verstaat men den afstand tusschen beide evenwijdige vlakken: zij is dus AD of BC. — Het opstaand zijvlak is een gebogen vlak, dat loodrecht op beide grondvlakken staat. Lichamelijke hoeken vindt men bij den cilinder niet; ook vlakke hoeken mist hij. Ribben, gelijk men die als rechte lijnen bij de prisma's en piramiden heeft leeren kennen, heeft de cilinder niet, maar de grenzen tusschen het opstaand zijvlak en de beide grondvlakken worden aangewezen door *kromme* lijnen; het zijn twee cirkelomtrekken, die beide even groot zijn. Van diagonalen kan evenmin sprake zijn.

Om zich een cilinder te vervaardigen, teekent men een rechthoek ABCD (zie fig. 90), waarvan AD gelijk is aan de hoogte van

Fig. 90.

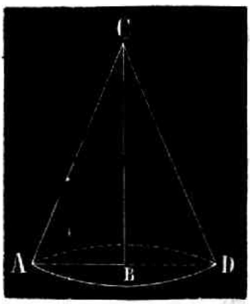


den cilinder, terwijl AB even lang is als de omtrek of $3\frac{1}{7}$ maal de middellijn van het grondvlak. Men verlenge CB door B, tot dat BM gelijk zij aan den straal van het grondvlak; evenzoo verlenge men AD door D, tot dat DN gelijk zij aan den straal van het bovenvlak. Voorts beschrijve men met BM en DN als stralen uit M en N cirkels. Alsnu is ABCD het ontrolde gebogen zijvlak, BM het cirkelvormige grond- en DN het cirkelvormige bovenvlak van den cilinder. Door de noodige en van zelve duidelijke omrolling bekomt men den cilinder uit fig. 89.

De cilinder heeft zeer veel overeenkomst met het prisma; men zegt wel eens, dat de cilinder een prisma is van een oneindig groot aantal zijvlakken. Dit zeggen ontleent zijn oorsprong uit hetgeen wij in § 5 van den cirkel mededeelden, dat n. l. zijn omtrek en inhoud gelijk zijn aan den omtrek en den inhoud van een regelmatigen veelhoek van een oneindig groot aantal zijden om dien cirkel beschreven. Daardoor zijn de omtrekken en inhouden van de grondvlakken der prisma's van oneindig veel zijden overgegaan in een cirkel, en de oppervlakken van de opstaande zijvlakken in het gebogen zijvlak van den cilinder. Op een en ander zullen wij in den loop van dit werkje wel weder terugkomen.

Nog zij opgemerkt, dat een cilinder *gelijkzijdig* genoemd wordt, indien de middellijn van 't grond- of bovenvlak gelijk is aan de hoogte van den cilinder.

Fig. 91.



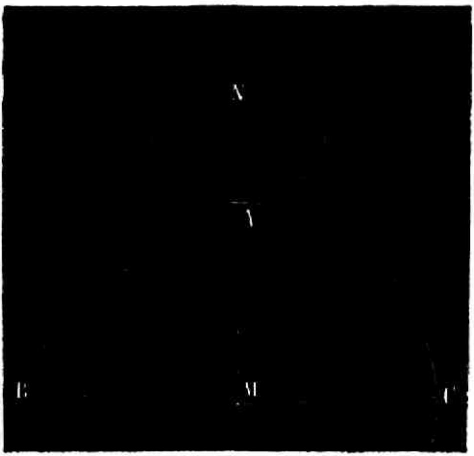
Gaan wij nu over tot den *kegel*. Hij ontstaat (zie fig. 91) door de omwenteling van een rechthoekigen driehoek ABC om een zijner rechthoekszijden (in onze figuur om BC). Gedurende deze wenteling heeft het punt C zijn plaats behouden; het punt A heeft een cirkelomtrek doorloopen, waarvan AB de straal of AD de middellijn is; en de lijn AC heeft een gebogen vlak doen ontstaan, dat het *kegelvlak* genoemd wordt. — Het ontstaan van den kegel kan men zich ook aldus voorstellen: zij AD een cirkel; op dezen is uit zijn middelpunt een loodlijn opgericht; uit eenig punt C dezer loodlijn is een lijn naar den omtrek van den cirkel getrokken; — stelt men zich deze lijn voor als aan het punt C vast, doch voor het overige beweegbaar over den omtrek van den cirkel, dan zal de ruimte, die door deze beweging afgesloten wordt, een rechte kegel genoemd worden.

De kegel wordt door slechts twee zijvlakken begrensd: een plat en een gebogen vlak. Het platte vlak wordt het grondvlak genoemd, en het gebogen vlak het zijvlak. Het punt C heet het toppunt van den kegel, en de lijn BC, die het toppunt met het middelpunt van het grondvlak verbindt, heet de *as* van den kegel, omdat om deze lijn de wenteling van den driehoek plaats had. De as stelt tevens de hoogte van den kegel voor; de hoogte wijst dus aan, hoe ver het toppunt boven 't grondvlak is gelegen. — De lijnen, die men uit het toppunt naar den omtrek van het grondvlak kan trekken, worden de *schuine zijden* van den kegel genoemd, die allen even lang zijn.

De kegel heeft evenmin als de cilinder lichamelijke hoeken; ook vlakke hoeken merkt men niet bij hem op. Hij heeft ook geen ribben, maar de grenslijn tusschen beide zijvlakken is een kromme lijn, het is de cirkelomtrek van het grondvlak.

De piramide komt het naast met den kegel in vorm overeen: met zegt wel eens, dat de kegel een piramide van een oneindig groot aantal zijden is, en dat wel om de zelfde reden als wij bij den cilinder aanmerkten.

Fig. 92.



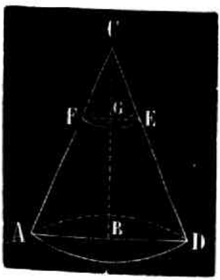
Om het net van den kegel te teekenen, beschrijve men met AC en AB (uit fig. 91) twee cirkels die elkander aanraken (de cirkels AM en AN uit fig. 92). Vervolgens ziet men, welk deel de straal AN van den straal AM is, en dit gedeelte zal men ook van den cirkelomtrek van

AM moeten nemen, om den boog BAC zoo lang te krijgen als de geheele cirkelomtrek van AN. Alsnu trekke men de stralen CM en BM. De sector MBAC wijst dan het ronde oppervlak en de cirkel NA wijst het grondvlak van den kegel aan. Vouwt men nu, van het punt A af te beginnen, den sector om den omtrek van den cirkel NA, dan zullen de stralen BM en CM in elkander vallen en het punt M zal loodrecht boven het middelpunt N van den kleinen cirkel komen te staan. Men verkrijgt dan weder den kegel van fig. 91.

Eindelijk merke men nog op, dat een *gelijkzijdige* kegel zal ontstaan, zoo de hypotenusa van den rechthoekigen driehoek ABC uit fig. 91 het dubbel der waterpasse rechthoekszijde is, of indien de schuine zijde AC even lang als de middellijn AD is, — en dat alsdan de sector MBAC uit fig. 92 juist een halve cirkel zal zijn.

Aanmerking. Als men den kegel door een vlak evenwijdig aan het grondvlak snijdt, dan is de doorsnede altijd een cirkel, die steeds kleiner dan het grondvlak van den kegel zal zijn. Hoe verder deze doorsnede van het grondvlak verwijderd is, des te kleiner is zij. Het bovenste stuk van den verdeelden kegel is wederom een kegel, die gezegd kan worden ontstaan te zijn uit de omwenteling van den rechthoekigen driehoek FGC om zijn rechthoekszijde CG. De straal van de doorsnede is dus FG en G is het middelpunt. Van alle doorsneden, evenwijdig aan het grondvlak, ligt het middelpunt in de *as* van den kegel. — Het benedenste stuk van den verdeelden kegel is een *afgeknotte kegel*. Deze wordt begrensd door drie vlakken: één opstaand gebogen zijvlak en twee platte vlakken, die hoewel evenwijdig en hun middelpunten in de zelfde as hebbende, nogtans ongelijk zijn. De cirkel AD heet het benedenvlak of grondvlak, en de cirkel EF het bovenvlak, terwijl het deel BG der as, of de vereenigingslijn der middelpunten van het grond- en bovenvlak, de *hoogte* van den afgeknotten kegel voorstelt, en

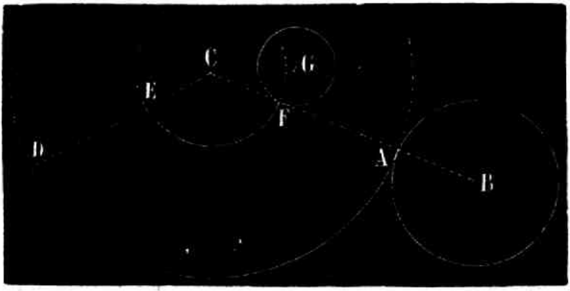
Fig. 93.



AF de schuine zijde heet. — Men kan zich ook voorstellen, dat de afgeknotte kegel ontstaan is uit de omwenteling van het rechthoekige trapezium ABGF om de niet evenwijdige rechthoekszijde BG.

Het *net* van den afgeknotten kegel kan men op de volgende wijze maken. Daartoe beschrijve men eerst het net van den geheelen kegel, waarvan de afgeknotte een deel is. Men vindt (zie fig. 94) voor het grondvlak den cirkel AB en voor het ge-

Fig. 94.



bogen zijvlak sector ADC. Nu beschrijve men uit C met CF (uit fig. 93) als straal een cirkelboog EF, die de stralen van den sector in E en F snijdt, dan is ADEF het gebogen zijvlak van den afgeknotten kegel; cirkel FG met een straal beschreven, die de vierde evenredige is tot AC, AB en CF, zal het bovenvlak, en cirkel AB het grondvlak zijn.

Fig. 95.

Indien men door een piramide een vlak brengt, evenwijdig aan het grondvlak, dan zal de geheele piramide in twee deelen verdeeld zijn (zie fig. 95). Het bovenste stuk blijft een piramide doch het onderste wordt nu een *afgeknotte piramide* genoemd. Het is duidelijk, dat een afgeknotte piramide door één vlak meer dan de geheele piramide van het zelfde aantal zijvlakken begrensd wordt; want nu is er ook een *bovenvlak*. Dit bovenvlak is evenwijdig met het grondvlak; het is dus een veelhoek van het zelfde aantal zijden als en gelijkvormig met het grondvlak. Vereenigt men de middelpunten der om het grond- en bovenvlak beschreven cirkels, dan kan deze lijn de *as* der piramide genoemd worden; zij staat loodrecht op beide genoemde vlakken en wijst de *hoogte* der afgeknotte piramide aan. De opstaande zijvlakken zijn nu alle gelijke en gelijkvormige trapeziums en wel antiparallelogrammen, omdat de opstaande ribben allen even lang zijn. Wij willen in het algemeen hier opmerken, dat de afgeknotte regelmatige n-zijdige piramide bezit n opstaande zijvlakken, dus in 't geheel $n+2$ zijvlakken; — dat zij bezit n ribben in het grondvlak, n ribben in 't bovenvlak, n opstaande ribben, dus te zamen $3n$ ribben; — dat zij dus ook $3n$ tweevlakkige hoeken en $3n$ standhoeken heeft; — dat zij $4 \times n + 2 \times n = 6n$ vlakke hoeken heeft; — dat zij $2n$ uithoeken telt; — dat deze $2n$ uithoeken ook de grenzen zijn van $2n$ drievlakkige hoeken. Tusschen deze $2n$ punten kunnen $\frac{1}{2} \times 2n \times (2n-1) = n\,(2n-1)$ vereenigingslijnen worden getrokken. Het grond- en bovenvlak geven te zamen $2 \times \frac{1}{2}n\,(n-3) = n\,(n-3)$ diagonalen, terwijl de opstaande zijvlakken er $2n$ hebben, d. i. te zamen $n\,(n-1)$. Alzoo schieten er $n\,(2n-1) - n\,(n-1) = n^2$ lijnen over voor de ribben en de diagonalen door 't lichaam. Het aantal dezer laatste bedraagt dus steeds $n^2 - 3n = n(n-3)$, dat is juist zooveel als er over het lichaam kunnen worden getrokken.

Fig. 96.

Om het net der afgeknotte piramide te vervaardigen, beschrijve men eerst het net der piramide alsof zij vol ware, waarvoor men vinden zal: P'ABCDEF voor het beloop der opstaande zijvlakken en

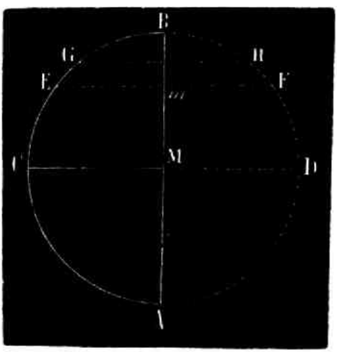
CDJHG voor het grondvlak. Vervolgens neme men van het toppunt P′ af, op de opstaande ribben gelijke stukken P′K = P′L = P′M = enz., ieder gelijk aan PF uit fig. 95, en trekke KL, LM, MN, NO en OP, en beschrijve op een dezer laatste lijnen den regelmatigen vijfhoek OPQRS, waarna het net voltooid is. Door omvouwing zal men dan de regelmatige afgeknotte piramide uit fig. 95 bekomen.

§ 16.

Beschouwing van den bol.

Thans moeten wij den *bol* bespreken. Het is een lichaam, dat slechts door één zijvlak begrensd wordt, 't welk in al zijn deelen even ver verwijderd is van zeker punt in den bol, dat men het *middelpunt* noemt. — Laat men uit een zeker punt M een onnoemelijk groot aantal gelijke rechte lijnen naar alle richtingen rondom dat punt uitgaan, en stelt men zich dan voor, dat door de uiteinden dezer lijnen een vlak gebracht wordt, dan zal het lichaam, door dit vlak ingesloten, een *bol* zijn. — Nog kan men zich voorstellen, dat de bol ontstaan is uit de omwenteling van den halven cirkel ACB (zie fig. 97) om zijn middellijn AB. De halve middellijn van den cirkel noemt men *straal*, en deze naam blijft bij den bol bestaan; alle lijnen, uit het middelpunt van den bol naar den omtrek getrokken, zijn dus *stralen* van den bol. — Elke lijn, die den omtrek van den bol in twee punten snijdt en door het middelpunt van den bol gaat, heet *middellijn*. Een middellijn is dus ook hier gelijk aan den dubbelen straal. Het aantal middellijnen en stralen van den bol is oneindig groot. Uit het

Fig. 97.



ontstaan van den bol blijkt ons duidelijk, dat de grootte van den bol van slechts één lijn, van den straal, afhangt.

Indien men door den bol een vlak laat gaan, dat door het middelpunt van den bol gaat, dan is het lichaam in twee gelijke deelen verdeeld. De doorsnede is een cirkelvlak, dat de dubbele grootte heeft van den in onze figuur gebezigden halven cirkel. Ieder deel van den bol heet nu een halve bol, en wordt begrensd door twee vlakken; een gebogen en een plat vlak. Laat men door den bol andermaal een vlak gaan door het middelpunt en loodrecht door het eerste vlak, dan is de bol in vier gelijke deelen verdeeld; ieder deel is een kwartbol en wordt begrensd door drie zijvlakken: een gebogen vlak en twee platte vlakken. Ieder plat vlak is nu een halve cirkel; deze halve cirkels zijn aan elkander gelijk en zijn ieder zoo groot als de in onze figuur gebezigde halve cirkel ACB. Het gebogen oppervlak van den kwartbol is gelijk aan het vierde deel van het oppervlak van den geheelen bol. — Laat men daarentegen door den bol een vlak gaan, dat niet door het middelpunt gaat, dan is de doorsnede wel een cirkel, maar zij is kleiner dan de cirkel, waarvan de door ons gebezigde halve cirkel ACB de helft is. Deze doorsnede wordt kleiner, naar mate zij verder van het middelpunt van den bol is verwijderd. Daardoor is de bol in twee ongelijke deelen verdeeld; beide deelen hebben wel het zelfde grondvlak, maar de gebogen oppervlakken zijn niet aan elkander gelijk. Men zou het eene deel het supplement van het andere kunnen noemen, omdat zij te zamen den geheelen bol vormen.

De lijn AB, waarom de wenteling van den halven cirkel is geschied, noemt men de *as* van den bol en de punten A en B, waar deze as den omtrek snijdt, worden de *polen* of *aspunten* van den bol genoemd. Alle doorsneden, die door de as gaan d. i. als deze as geheel in het vlak der doorsnede ligt, verdeelen den bol in twee gelijke deelen en snijden elkander steeds in de punten A en B. Deze doorsneden worden de *meridianen* van den bol genoemd, en daar deze doorsneden den bol steeds in twee gelijke deelen verdeelen, zoo zullen alle meridianen van den bol steeds even groot zijn. Er is een oneindig aantal meridianen op den bol mogelijk. Trekt men nu de lijn CD, die AB in het middelpunt M rechthoekig snijdt, en laat men daardoor een vlak gaan, dat rechthoekig op de as staat, dan noemt men deze doorsnede den *evenaar* of *equator* van den bol. Wel is waar kan men door CD ook een onnoemelijk aantal vlakken laten gaan, die allen wel den bol in twee gelijke deelen zullen verdeelen, maar onder al die doorsneden is er slechts één *evenaar*, omdat deze alleen rechthoekig op de as van den bol staat.

Wij merkten reeds op dat vlakken, die door het middelpunt van den bol gaan, grootere doorsneden geven dan vlakken, die niet door het middelpunt gaan. De eerste doorsneden noemt men *groote cirkels* van den bol. Groote cirkels hebben een gemeenschappelijk middelpunt, gelijke stralen en middellijnen, en zijn dus allen even groot. De laatst bedoelde doorsneden noemt men *kleine cirkels* van den bol. Omdat de doorsneden kleiner worden naar mate zij verder van het middelpunt verwijderd zijn, volgt daaruit, dat niet alle kleine cirkels van den bol even groot zijn. Trekt men in den bol koorden EF, GH enz. die met CD in 't zelfde vlak liggen en daaraan evenwijdig zijn, en laat men door die koorden vlakken gaan, welke rechthoekig op de as staan, dan zijn deze doorsneden steeds kleine cirkels. Deze doorsneden, allen evenwijdig aan den evenaar, verdeelen den bol in twee ongelijke deelen en worden *parallelen* of *breedte-cirkels* genoemd, in tegenoverstelling van de meridianen, die *lengte-cirkels* geheeten worden. De middelpunten der parallelen vallen niet samen, gelijk die der meridianen, maar zij liggen allen in de as van den bol. — Noemt men EM, of den straal van den bol, R, den straal van den parallel r, en mM of den afstand der middelpunten a, dan is in den rechthoekigen driehoek EMm

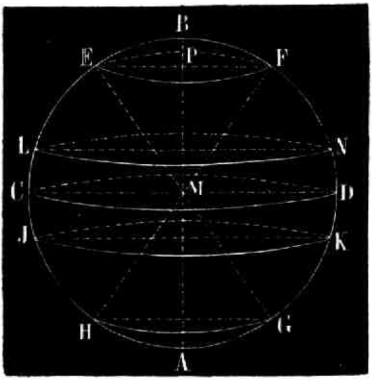
$$EM^2 = Em^2 + mM^2,$$

$$\text{of } R^2 = r^2 + a^2;$$

waardoor dus steeds een dezer lijnen kan bepaald worden, ingeval er twee bekend zijn. — Dewijl EM steeds de zelfde lengte in den bol behoudt, is het duidelijk, dat r gedurig kleiner wordt zoo men a laat aangroeien, en dit komt dus overeen met hetgeen wij aanmerkten, dat de doorsnede van een kleinen cirkel steeds in grootte afneemt, naar mate die cirkel verder van 't middelpunt van den bol is verwijderd. Indien $a = R$ wordt, is de doorsnede verdwenen.

Als men op $23\frac{1}{2}$ graad afstand van de pool een vlak door den bol brengt, dat loodrecht op de as staat, dan wordt de doorsnede een *poolcirkel* genoemd. Trekt men (zie fig. 98) door M, uit E en F, de middellijnen EG en FH, en laat men door de punten H en G van den omtrek van den bol een vlak gaan, loodrecht op de as, dan is ook GH een *poolcirkel*, die tevens $23\frac{1}{2}$ graad van de andere pool verwijderd is. —Brengt men nu ook een vlak op $23\frac{1}{2}$ graad afstand van en evenwijdig aan den evenaar, dan kan dit boven of beneden den evenaar geschieden; beide deze vlakken worden *keerkringen* genoemd; — het eene heet de *noorderkeerkring* en het andere de *zuiderkeerkring*. — De poolcirkels en keerkringen zijn dus parallelen. Het gedeelte van den bol, begrepen tusschen twee parallelen noemt men een *bolvormige schijf*, zoo is EFNL of LNDC een bolvormige schijf; de grenzen van zoodanig stuk zijn één gebogen en twee platte vlakken, ieder plat vlak is een cirkel. Het kan zijn, dat deze cirkels aan elkander gelijk zijn; zoo zijn de beide platte vlakken van de bolvormige schijf LNKJ even groot, doch in dit geval ligt juist op de helft der schijf een groote cirkel van den bol, die met genoemde platte vlakken evenwijdig loopt.

Fig. 98.



Wanneer een cirkelvlak den bol in twee deelen, hetzij gelijke of ongelijke, verdeelt, dan heet ieder deel een *bolvormig segment*. De grenzen van een zoodanig segment zijn: een gebogen en een plat vlak; dit platte vlak is een groote of kleine cirkel van den bol. CDB is een bolvormig segment, dat juist gelijk is aan den halven bol, maar LNB is een bolvormig segment, waarvan het platte grensvlak een kleine cirkel is.

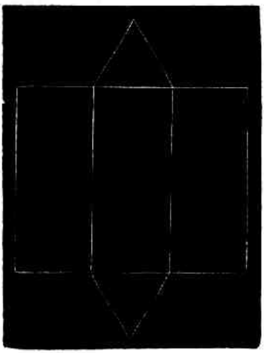
Wanneer men in een halven cirkel ACB alleen de middellijn AB, een straal ME en de loodlijn EP trekt, en dan den halven cirkel om zijn middellijn laat wentelen, dan beschrijft de rechthoekige driehoek EPM een kegel, gelijk uit de vorige § is gebleken. Maar de sector EMB heeft dan het lichaam EMFB beschreven, dat wij een *kogelvormigen bolvormigen sector* noemen, als bestaande uit een kegel MEF en een bolvormig segment EBF.

III. BEREKENING VAN OPPERVLAKKEN DER LICHAMEN.

§ 17.

Over de oppervlakken van prisma's.

Fig. 99.



Tot de berekening van de oppervlakken der regelmatige lichamen overgaande, beginnen wij onze beschouwing met het driezijdige prisma. Is dat prisma regelmatig, en vormt het grond- of bovenvlak dus een regelmatigen of gelijkzijdigen driehoek, dan kan men uit de teekening van het net het geheele oppervlak afleiden. — Zij ten voorbeelde gegeven de ribbe van het grondvlak 3 d. M. en de hoogte van 't prisma 6 d. M., dan is elk der opstaande zijvlakken een rechthoek, waarvan de hoogte 6 en de breedte 3 d. M. is, terwijl het grond- en bovenvlak regelmatige driehoeken zijn, waarvan elke zijde 3 d. M. bevat. — Nu hebben wij uit § 20 van het Ie Deel gezien, dat de inhoud of de oppervlakte van een gelijkzijdigen driehoek voorgesteld kan worden door $\frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$, indien a de zijde voorstelt. In ons geval heeft men dus voor de oppervlakte van het grond- of bovenvlak:

$$\tfrac{1}{4}a^2\sqrt{3} = \tfrac{1}{4} \times 3 \times 3 \times \sqrt{3} = 2\tfrac{1}{4}\sqrt{3} \text{ d.M}^2.$$

Elk opstaand zijvlak van 't prisma bevat $6 \times 3 = 18$ d.M², dus de drie zijvlakken te zamen $3 \times 18 = 54$ d.M², en alzoo het gansche oppervlak:

$$54 + 4\tfrac{1}{2}\sqrt{3} = \tfrac{9}{2}(12 + \sqrt{3}) \text{ d.M}^2.$$

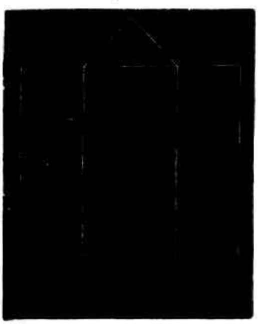
Men zal nu ook gemakkelijk de volgende algemeene behandeling van het regelmatige driezijdige prisma inzien. Zij van zoodanig prisma elke ribbe des grondvlaks $= r$ en elke opstaande ribbe $= h$; dan bevatten de drie opstaande zijvlakken $3\,hr$ □ eenheden, en de beide grondvlakken ieder $\frac{1}{4}r^2\sqrt{3}$ □ eenheden, dus wordt het geheele oppervlak van het regelmatige driezijdige prisma voorgesteld door:

$$3\,hr + \tfrac{1}{2}r^2\sqrt{3} = \frac{r}{2}(6h + r\sqrt{3}) \ \square \text{ eenheden.}$$

Indien derhalve het geheele oppervlak en een der ribben van het regelmatige driezijdige prisma is gegeven, dan zal men de andere ribbe kunnen vinden en dus het prisma kunnen bepalen. Zij daartoe het geheele oppervlak $= 109,8564.....$ □ eenheden en $r =$ ribbe grondvlak $= 4$ eenheden, dan is:

$$\text{opp. prisma} = 3hr + \tfrac{1}{2}r^2\sqrt{3} = 109{,}8564...$$
$$\underline{\text{maar } \tfrac{1}{2}r^2\sqrt{3} = \tfrac{1}{2} \times 4 \times 4 \times \sqrt{3} = 13{,}8564...}$$
$$\text{dus } 3\,hr = 96$$
$$\text{en } h = \frac{96}{3 \times 4} = 8 \text{ eenheden.}$$

Fig. 100.



Was in plaats van r, de waarde van h gegeven, dan zou men de waarde van r niet zonder behulp van een vierkantsvergelijking kunnen bepalen.

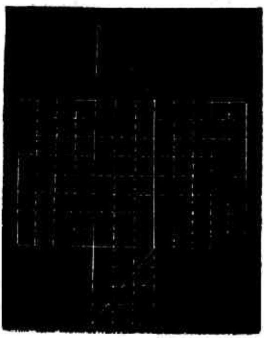
Indien het driezijdige prisma van zoodanigen aard ware, dat de grondvlakken gelijkbeenige in plaats van gelijkzijdige driehoeken vormden, dan zouden niet meer alle opstaande zijvlakken even groot zijn. In de figuur (fig. 100) zal het middelste vlak van de beide andere verschillen; wel hebben allen een zelfde hoogte, maar de breedten zijn niet allen de zelfde, omdat die van het middelste vlak de basis en die van de beide andere de opstaande zijden van den gelijkbeenigen driehoek zijn. Is nu gegeven de basis van het grondvlak $= 12$ en de beenen elk $= 10$, terwijl de hoogte van het prisma 14 eenheden is, dan zal men bevinden:

oppervl.	grondvl. $= \frac{1}{2} \times 12 \times \sqrt{(10^2 - 6^2)}$	$= 48$ □	eenheden.
»	bovenvl. $=$	48 □	»
»	2 gelijke zijvlakken $= 2 \times 14 \times 10$	$= 280$ □	»
»	middelste zijvl. $= 14 \times 12$	$= 168$ □	»

samen 544 □ eenheden geh. oppervl.

Was het grond- of bovenvlak een rechthoekige driehoek, dan zou men nog gemakkelijker het geheele oppervlak kunnen berekenen. — Wel is waar is nu geen der opstaande zijvlakken even groot, maar nu kan men de som van grondvlak en bovenvlak als één rechthoek beschouwen, waarvan de rechthoekszijden van den driehoek de zijden zijn. Het geheele oppervlak zal nu bestaan uit de som van vier rechthoeken, waarvan drie de zelfde lijn tot hoogte hebben, n. l. de hoogte van 't prisma, en tot bases de drie zijden van den driehoek. Indien dus de hoogte van 't prisma (fig. 101) 8 c. M. en de rechthoekszijden van den driehoek 3 en 4 c. M. zijn, dan heeft men de volgende berekeningen:

Fig. 101.

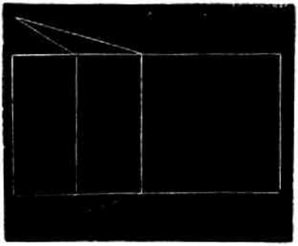


opp.	beide grondvlakken	$= 4 \times 3 = 12$	c. M^2
»	eerste opst. zijvlak	$= 4 \times 8 = 32$	»
»	tweede » »	$= 3 \times 8 = 24$	»
»	derde » »	$= 5 \times 8 = 40$	»

te zamen 108 c. M^2 geh. oppervl.

Men zal ook dit antwoord bekomen, door even als in de figuur de

Fig. 102.



gestippelde deellijnen te trekken.

Beschouwen wij eindelijk een driezijdig prisma met een willekeurig grondvlak, dan zijn alleen de beide grondvlakken gelijk (zie fig. 102). Indien ten voorbeelde gegeven was: de zijden van het grondvlak 13, 14 en 15 meter en de hoogte van het prisma 20 meter, dan zou men hebben:

oppervl.	grondvl.	$= \sqrt{21 \times 8 \times 7 \times 6}$	$= 84$	M²
»	1e zijvl.	$= 20 \times 13$	$= 260$	»
»	2e »	$= 20 \times 14$	$= 280$	»
»	3e »	$= 20 \times 15$	$= 300$	»

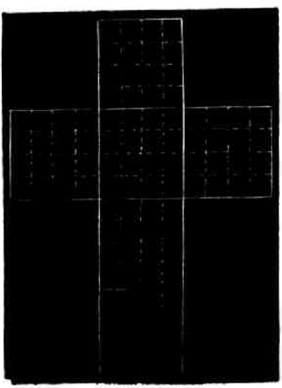
te zamen 924 M² geh. oppervl.

Indien in 't algemeen van een driezijdig prisma de zijden a, b en c zijn, en de hoogte d, dan zal men steeds hebben:

geh. opp. $= 2\,ds + 2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, waarin $s =$ de halve som der zijden.

Tot de berekening der oppervlakken van vierzijdige prisma's overgaande, vangen wij aan met den *kubus*. Stellen wij ons voor, dat men het gansche oppervlak van een kubus wilde kennen, waarvan elke ribbe 4 d. M bedraagt, dan is het duidelijk, dat de oppervlakte van ieder zijvlak, dat een kwadraat is, gevonden wordt door het vierkant der ribbe te nemen; hiervoor vinden wij dus $4 \times 4 = 16$ d. M²; — maar daar er 6 zulke zijvlakken zijn, zal het geheele oppervlak $6 \times 16 = 96$ d. M² bedragen. Door elke kantlijn van het net van den kubus in 4 gelijke deelen te verdeelen en de deellijnen door te trekken, gelijk fig. 103 aanwijst, kan men deze

Fig. 103.



waarheid nog zien opgehelderd. — Evenzoo is het duidelijk, dat het geheele oppervlak $5 \times 5 \times 6 = 150$ d. M^2 zal bevatten, indien de ribbe 5 d. M. lang is, en dat, wanneer de ribbe van een kubus a d. M. lang is, de geheele oppervlakte $6 \times a^2 = 6a^2$ d. M^2 zal bevatten. — Is nu, omgekeerd, bekend dat het geheele oppervlak van den kubus $=$ A d. M^2 is, dan is hieruit gemakkelijk de ribbe en dus ook de geheele kubus af te leiden. Immers heeft men dan:

$$6a^2 = A$$

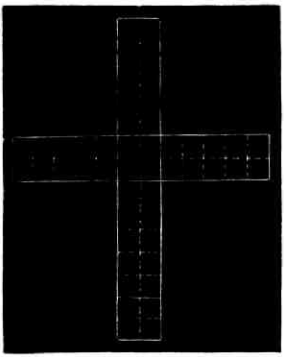
$$\text{of } a^2 = \frac{A}{6}$$

$$\text{dus } a = \sqrt{\frac{A}{6}} = \tfrac{1}{6}\sqrt{(A \times 6)} = \tfrac{1}{6}\sqrt{6A},$$

waardoor dus a of de lengte der ribbe bekend is.

Verandert het prisma alleen van hoogte, zoodat de kubus in een balk met een vierkant grondvlak overgaat, dan bestaat het oppervlak weder uit vier opstaande zijvlakken en twee grondvlakken. Deze grondvlakken zijn kwadraten, en de opstaande zijvlakken hebben allen wel een zelfde lengte en een zelfde breedte, maar de lengte verschilt nu van de breedte. Is in fig. 104 elke ribbe van het grondvlak 2 d. M. en de opstaande ribbe 5 d. M., dan is het duidelijk, dat het geheele oppervlak zal bestaan uit

Fig. 104.

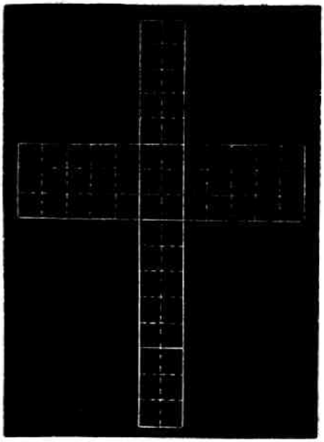


$$5 \times 2 + 5 \times 2 + 5 \times 2 + 5 \times 2 + 2 \times 2 + 2 \times 2$$
$$= 4 \times 5 \times 2 + 2 \times 2 \times 2 = 48 \text{ d. } M^2,$$

welk antwoord men ook zou bekomen hebben door het doortrekken der deellijnen, gelijk de figuur aanwijst.

In het algemeen vindt men, als de ribbe van het vierkante

Fig. 105.



grondvlak $= a$, en de hoogte van den balk $= b$ is, voor het geheele oppervlak:

$$4ab + 2a^2 = 2a\,(a + 2b)$$
□ eenheden.

Zijn nu ook lengte en breedte van het grondvlak verschillend, en heeft het prisma dus drie ongelijke ribben, gelijk fig. 105 doet zien, dan heeft men als de afmetingen van het grondvlak 2 en 3 d. M., en de hoogte van 't prisma 5 d. M. bedragen:

oppervl.	grondvl.	$= 3 \times 2 = 6$ d. M²
»	linker zijvl.	$= 5 \times 3 = 15$ »
»	rechter »	$= 5 \times 3 = 15$ »
»	voorvlak	$= 5 \times 2 = 10$ »
»	achtervl.	$= 5 \times 2 = 10$ »
»	bovenvl.	$= 3 \times 2 = 6$ »
	te zamen	62 d. M² het geh. oppervl.

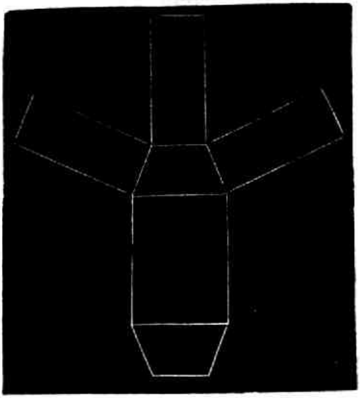
In de figuur zal men door het trekken der gestippelde lijnen mede de zelfde uitkomst verkrijgen.

Zijn van zoodanig rechthoekig vierzijdig prisma in 't algemeen de drie ribben, aan één hoekpunt samenkomende, a, b en c d. M., dan heeft men voor het geheele oppervak:

$$ab + ac + ac + bc + bc + ab = 2(ab + ac + bc) \text{ d. M}^2.$$

Zijn van een prisma de beide grondvlakken trapeziums, dan zal het net van zoodanig lichaam worden voorgesteld, gelijk fig. 106 ons doet zien. De berekening van het geheele oppervlak is nu meer moeilijk, omdat men thans behalve de 4 rechthoekige opstaande zijvlakken ook nog de oppervlakken van twee trapeziums moet weten. Door toepassing van het geleerde in § 20 van het 1e Deel vindt men, dat de oppervlakte van een trapezium

Fig. 106.



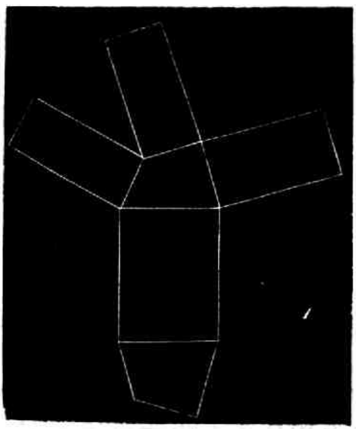
gevonden wordt door de halve som zijner evenwijdige zijden met de hoogte te vermenigvuldigen. Zijn dus in het algemeen de vier zijden van een trapezium, a, b, c en d, dan is het oppervlak te vinden; noemen wij het O, dan is het geheele oppervlak van 't prisma, als zijn hoogte $= h$ is:

$$h(a+b+c+d)+2\times O.$$

Nog moeilijker wordt de vraag, het geheele oppervlak van een vierzijdig prisma te berekenen, waarvan het grondvlak een willekeurige vierhoek is.

Indien men van zoodanig prisma de ribben van het grondvlak en de hoogte weet, dan kan men wel de oppervlakte der opstaande zijvlakken vinden; maar van beide grondvlakken kan men de oppervlakte nog niet bepalen, omdat de vier zijden alleen niet genoeg zijn om de grootte van een willekeurigen vierhoek te vinden.

Fig. 107.



Het is zelfs niet doenlijk het net van zoodanig prisma voor te stellen, indien men niet meer dan alleen de lengte der ribben kent; men dient daarenboven nog te weten op welke wijze deze ribben aan elkander sluiten.

De beschouwing van de drie- en vierzijdige prisma's zal nu wel voldoende zijn, om ook de oppervlakken der regelmatige 5, 6 en n zijdige prisma's te leeren kennen. Die van een regelmatig vijfzijdig prisma is gelijk aan den inhoud van vijf rechthoeken, die ieder een ribbe van het grondvlak en de hoogte van het prisma tot afmetingen hebben, opgeteld bij de som van twee regelmatige vijfhoeken, die ieder de ribbe van het grondvlak tot zijden hebben. De oppervlakte van het regelmatige zeszijdige prisma bevat 6 zulke gelijke rechthoeken, opgeteld bij tweemaal den inhoud van een regelmatigen zeshoek.

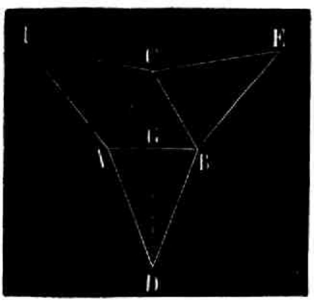
Wij maken hier nog de opmerking, dat de som der opstaande zijvlakken van een rechthoekig *n*-zijdig prisma gelijk is aan den omtrek van het grondvlak vermenigvuldigd met de hoogte van het prisma, hetgeen men gemakkelijk zal inzien.

§ 18.

Over de oppervlakken van piramiden.

Wij zetten onze beschouwingen en berekeningen voort, door over te gaan tot de piramiden, en beginnen daartoe met de regelmatige driezijdige. Het net van zoodanige piramide bestaat uit 4 driehoeken (zie fig. 108), waarvan de drie, welke de opstaande zijvlakken vormen, gelijke en gelijkbeenige driehoeken zijn; terwijl de overige driehoek ABC die het grondvlak vormt, gelijkzijdig is. Men onderscheidt dus tweeërlei ribben, n. l. 3 gelijke in het grondvlak en 3 gelijke opstaande ribben. Is nu elke ribbe in het grondvlak b. v. = 8 d. M. en elke opstaande = 5 d. M., dan zal men vinden voor het oppervlak van

Fig. 108.



het grondvlak ABC $= \frac{64}{4} \sqrt{3} = 16 \sqrt{3}$ d. M².
» eerste opst. zijvl. ABD $= \frac{8}{2} \times \sqrt{(5^2 - 4^2)} = 12$ »
» tweede » » BCE $= \frac{8}{2} \sqrt{(5^2 - 4^2)} = 12$ »
» derde » » ACF $= \frac{8}{2} \sqrt{(5^2 - 4^2)} = 12$ »

dus het gansche oppervl. $= 36 + 16 \sqrt{3} = 4(9 + 5\sqrt{6})$ d.M².

Is in het algemeen de ribbe van 't grondvlak $= a$ en de opstaande $= b$, dan zal men vinden, dat van elk opstaand zijvlak de loodrechte hoogte DG gelijk is aan $\sqrt{[b^2 - (\frac{1}{2}a)^2]}$, zoodat ieder opstaand zijvlak zal bevatten $\frac{a}{2}\sqrt{[b^2 - (\frac{1}{2}a)^2]} = \frac{a}{4}\sqrt{(4b^2 - a^2)}$ □ eenheden. Het grondvlak bevat echter $\frac{a^2}{4}\sqrt{3}$ □ eenheden, dus het geheele oppervlak

$$\frac{a^2}{4}\sqrt{3} + \tfrac{3}{4}a\sqrt{(4b^2 - a^2)} = \tfrac{1}{4}a[a\sqrt{3} + 3\sqrt{(4b^2 - a^2)}] \ \square \text{ eenh.}$$

Brengt men hierin $a = 8$ en $b = 5$ uit onze vorige berekening over, dan bekomt men voor het geheele oppervlak $\frac{8}{4}[8\sqrt{3} + 3\sqrt{(4 \times 25 - 64)}] = \frac{8}{4}(8\sqrt{3} + 18) = 2(8\sqrt{3} + 18) = 36 + 16\sqrt{3}$ □ eenheden, even als boven.

Fig. 109.

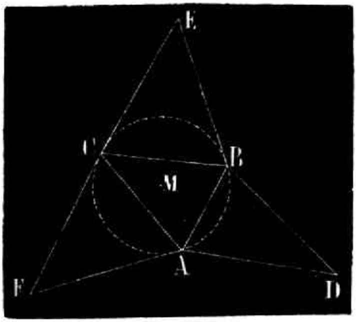
Was nu de opstaande ribbe gelijk aan die in het grondvlak, dan zou de piramide van fig. 108 een *tetraëdrum* worden, waarvan het net door fig. 109 wordt voorgesteld. Het geheele oppervlak, dat door den gelijkzijdigen driehoek DEF wordt voorgesteld, bevat blijkbaar 4 maal het oppervlak van △ ABC, waarvoor wij in ons voorbeeld vonden $16\sqrt{3}$ d. M²; het oppervlak der geheele piramide bevat alzoo $64\sqrt{3}$ d. M². In het algemeen is de oppervlakte van het grondvlak $\frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$, en dus het geheele oppervlak van het tetraëdrum $4 \times \frac{1}{4}a^2\sqrt{3} = a^2\sqrt{3}$ □ eenheden, als elke ribbe $= a$ is. Men zou ook tot de ontdekking dezer waarheid zijn gekomen, door op te merken, dat wanneer de ribbe van een tetraëdrum $= a$ is, de zijde van den gelijkzijdigen driehoek DEF (fig. 109) $= 2a$ is, en dat dus de inhoud van dien driehoek zal bedragen $\frac{1}{4}(2a)^2\sqrt{3} = a^2\sqrt{3}$.

Indien alzoo het geheele oppervlak van een tetraëdrum bekend is, dan zal men de ribbe kunnen bepalen, en dus het lichaam kunnen samenstellen. Immers indien het oppervlak $= A$ is, dan moet men hebben $a^2\sqrt{3} = A$ of $a^2 = \frac{A}{\sqrt{3}}$

$$\text{dus } a = \text{ribbe} = \sqrt{\frac{A}{\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{A\sqrt{3}}{3}} = \tfrac{1}{3}\sqrt[4]{27A^2}$$

Hoewel van een onregelmatige piramide het grondvlak een willekeurige driehoek is, kunnen de drie opstaande zijvlakken, ofschoon onderling ongelijk van oppervlak, toch alle gelijkbeenig zijn, en zoodanig, dat de opstaande beenen dezer zijvlakken allen even lang zijn. Wordt om den driehoek ABC (fig. 110) een cirkel beschreven, dan ligt het middelpnnt M even ver van de drie hoekpunten van den driehoek. Ieder punt der lijn, die in M loodrecht op het grondvlak ABC staat, zal even ver van de drie hoekpunten van den driehoek verwijderd zijn. Is deze afstand, b. v. gelijk AD, dan zal AD = BD = BE = CE = CF = AF zijn, en derhalve vormen de opstaande zijvlakken allen gelijkbeenige driehoeken. Zijn alzoo de zijden van het grondvlak en een der opstaande ribben gegeven, dan is men in staat het geheele oppervlak der piramide te bepalen. Zij daartoe AB $= a$, BC $= b$, AC $= c$ en AD $= d$, dan is:

Fig. 110.



$$\text{opp. grondvl. ABC} = \sqrt{\frac{a+b+c}{2} \times \frac{a+b-c}{2} \times \frac{a-b+c}{2} \times \frac{-a+b+c}{2}}$$

$$\text{opp. zijvl. ABD} = \frac{\text{AB}}{2}\sqrt{(\text{AD}^2 - \tfrac{1}{4}\text{AB}^2)} = \frac{a}{4}\sqrt{(4d^2 - a^2)},$$

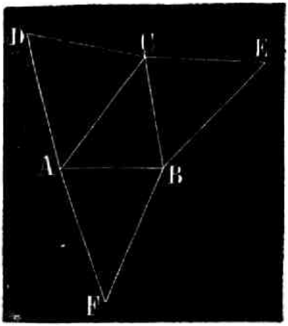
$$\text{opp. zijvl. BCE} = \frac{\text{BC}}{2}\sqrt{(\text{AD}^2 - \tfrac{1}{4}\text{BC}^2)} = \frac{b}{4}\sqrt{(4d^2 - b^2)},$$

$$\text{opp. zijvl. ACF} = \frac{\text{AC}}{2}\sqrt{(\text{AD}^2 - \tfrac{1}{4}\text{AC}^2)} = \frac{c}{4}\sqrt{(4d^2 - c^2)};$$

derhalve is door optelling het geheele oppervlak te vinden. Gemakkelijk is op te merken, dat, als de opstaande zijvlakken behalve gelijkbeenig ook gelijkvormig zijn, de piramide *regelmatig* moet wezen.

Is in het algemeen de piramide onregelmatig, zoodat het grondvlak ABC (zie fig. 111) een onregelmatige driehoek is, dan

Fig. 111.



kunnen van het eerste opstaand zijvlak ABF, de beide beenen AF en BF willekeurig zijn; van het tweede zijvlak ACD kan nu alleen CD willekeurig zijn, maar van het derde zijvlak BCE zijn de drie zijden bepaald. Hierom is het, dat er zes gegevens noodig zijn, om de driezijdige piramide te bepalen. Is gegeven $AB = a$, $BC = b$, $AC = c$, $AF = d$, $BF = e$ en $CD = f$, dan is

opp. zijvl. $ABC = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

» » $ABF = \sqrt{s'(s'-a)(s'-d)(s'-e)}$

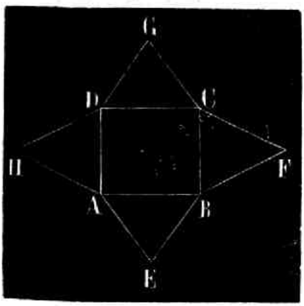
» » $ACD = \sqrt{s''(s''-b)(s''-d)(s''-f)}$

» » $BCE = \sqrt{s'''(s'''-c)(s'''-d)(s'''-f)}$.

waardoor dus in 't algemeen het oppervlak eener driezijdige piramide is te bepalen.

Gaan wij thans over tot de regelmatige vierzijdige piramide.

Fig. 112.



Uit de beschouwing dezer piramide (zie § 11) is ons gebleken, dat het aantal ribben 8 bedraagt. Deze *acht* ribben kunnen allen even lang zijn, zie fig. 112. Alsnu zijn alle opstaande zijvlakken gelijke en gelijkzijdige driehoeken en het grondvlak ABCD is een vierkant. Hierdoor is het geheele oppervlak gemakkelijk te berekenen; zij b. v. ieder der acht ribben $= 5$ d. M., dan is

oppervl. grondvl. $= 5 \times 5 = 25$ d. M^2

» eerste zijvl. $ABE = \frac{1}{4}(5)^2\sqrt{3} = 6\frac{1}{4}\sqrt{3}$ d. M^2.

» tweede » $BCF = \frac{1}{4}(5)^2\sqrt{3} = 6\frac{1}{4}\sqrt{3}$ »

» derde » $CDG = \frac{1}{4}(5)^2\sqrt{3} = 6\frac{1}{4}\sqrt{3}$ »

» vierde » $ADH = \frac{1}{4}(5)^2\sqrt{3} = 6\frac{1}{4}\sqrt{3}$ »

dus het geheele oppervl. $= 25\sqrt{3} + 25$ d. M^2.

Is in het algemeen ieder dezer acht ribben $= a$, dan is het grondvlak $= a \times a = a^2$, en ieder opstaand zijvlak $= \frac{1}{4} a^2 \sqrt{3}$; dus de som van alle zijvlakken $= a^2 + 4 \times \frac{1}{4} a^2 \sqrt{3} = a^2 + a^2\sqrt{3} = a^2(\sqrt{3}+1)$. Is dus het geheele oppervlak bekend, dan kan men daaruit gemakkelijk tot de lengte van ieder der acht gelijke ribben besluiten. Is n. l. het geheele oppervlak $= A$, dan is

$$a^2(\sqrt{3}+1) = A$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad} \sqrt{3}-1$$
$$\text{of } 2a^2 = A(\sqrt{3}-1)$$
$$\text{of } a^2 = \tfrac{1}{2} A(\sqrt{3}-1)$$
$$\sqrt{\quad}$$

$$\text{dus } a = \sqrt{\tfrac{1}{2}(A\sqrt{3}-1)} = \text{de ribbe.}$$

Wij beschouwden hier een bijzonder geval der vierzijdige piramide, omdat van alle dusdanige piramiden niet altijd de acht ribben allen gelijke lengte hebben. Uit de beschouwing der vierzijdige piramide (zie § 11) weten wij, dat er tweeërlei soort van ribben gevonden worden, n. l. 4 gelijke ribben in het grondvlak en 4 gelijke opstaande ribben. — Beschrijft men om het grondvlak een cirkel, wiens middelpunt M is, en stelt men in M een loodlijn MS op 't grondvlak, dan zal ieder punt dezer lijn met de vier hoekpunten van het grondvlak vereenigd, een vierzijdige regelmatige piramide vormen. Het deel MS dezer loodlijn, tusschen den top S der piramide en het middelpunt M van het grondvlak, wordt de hoogte der piramide genoemd. Deze hoogte vormt met den straal van het grondvlak en de opstaande ribbe een rechthoekigen driehoek. Uit de bekendheid van de twee genoemde ribben eener regelmatige vierzijdige piramide, kan men de hoogte afleiden. Laat n. l. gegeven zijn de ribbe in 't grondvlak $= a$ en de opstaande $= b$, dan is de straal van het grondvlak $= \sqrt{\frac{a^2}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2} = \frac{a}{2}\sqrt{2}$,

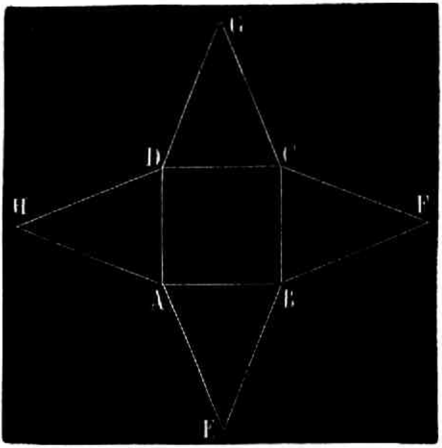
Fig. 113.

en dus de hoogte der piramide $= \sqrt{\left(b^2 - \frac{a^2}{2}\right)} = \frac{1}{2}\sqrt{(4b^2 - 2a^2)}$.

Waren alle ribben gelijk, zoo als in de vorige piramide, dan zou de hoogte zijn $\frac{1}{2}\sqrt{(4a^2 - 2a^2)} = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2} = \frac{a}{2}\sqrt{2} =$ den straal van het grondvlak.

Om nu het gansche oppervlak der regelmatige vierzijdige piramide te berekenen, willen wij de vorige figuur uitslaan, waarvoor wij fig. 114 bekomen. — Het net dezer piramide bestaat uit een vierkant grondvlak, en uit 4 gelijke gelijkbeenige driehoeken. De oppervlakte van het grondvlak is nu $= a^2$ en van ieder opstaand zijvl $\frac{a}{4}\sqrt{(4b^2 - a^2)}$, dus de geheele oppervlakte $= a^2 + a\sqrt{(4b^2 - a^2)} = a\left[a + \sqrt{(4b^2 - a^2)}\right]$. Stelt men hierin wederom $b = a$, dan bekomt men: oppervlak piramide $= a[a + \sqrt{3a^2}] = a^2(1 + \sqrt{3})$ zijnde de formule uit het vorige bijzondere geval.

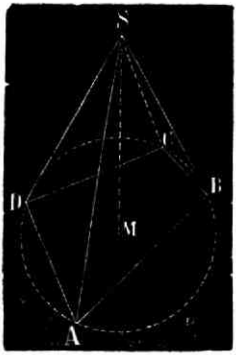
Fig. 114.



Bevindt zich het toppunt der piramide niet in de loodlijn MS of haar verlengde, dan zal, ofschoon het grondvlak regelmatig is, de piramide onregelmatig zijn; de vier opstaande zijvlakken zijn dan ongelijk, vormen onregelmatige driehoeken, en de berekening der oppervlakken is omslachtiger en minder gemakkelijk dan bij regelmatige piramiden.

De vier opstaande zijvlakken, ofschoon onderling ongelijk, kunnen gelijkbeenige driehoeken vormen, terwijl het grondvlak geen vierkant is. In dit geval, fig. 115, ligt het toppunt der piramide op gelijke afstanden der vier hoekpunten; het voetpunt der hoogte ligt dus ook op gelijke afstanden der vier hoekpunten, zoodat men om het grondvlak een cirkel kan

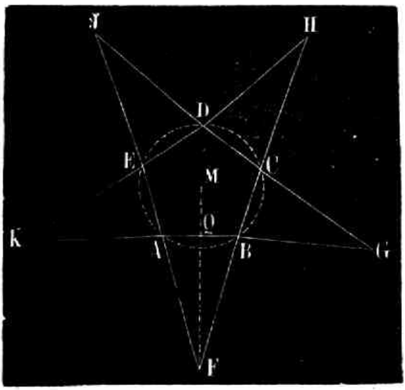
Fig. 115.



beschrijven. Kon om het grondvlak geen cirkel, dan zouden alle opstaande zijvlakken niet gelijkbeenig kunnen zijn.

Is het grondvlak een willekeurige vierhoek, waarom geen cirkel kan beschreven worden, dan zullen alle vier opstaande zijvlakken nimmer gelijkbeenige driehoeken kunnen zijn, ook zal men dan alleen uit de lengten der acht ribben niet tot de geheele oppervlakte der piramide kunnen besluiten. (Vergelijk hier onze laatste opmerking bij de vierzijdige prisma's). De wijze van berekenen van de regelmatige vijfzijdige piramide kan men uit de beschouwing van het net (fig. 116) gemakkelijk afleiden; men berekent de oppervlakte van het grondvlak, dat een regelmatige vijfhoek is, en telt hierbij de 5 gelijke gelijkbeenige opstaande driehoeken. Uit de beschouwing der regelmatige veelhoeken, is ons reeds gebleken, dat het grondvlak der piramide tot inhoud heeft: omtrek $\times \frac{1}{2}$ apothema $=$ omtrek vijfhoek $\times \frac{1}{2}$ MQ. — De inhoud der vijf opstaande zijvlakken is blijkbaar $= 5$ inh. $\triangle$ ABF $= 5 \times \frac{1}{2}$ AB $\times$ FQ $= 5$ AB $\times \frac{1}{2}$ FQ $=$ omtr. veelhoek $\times \frac{1}{2}$ FQ; — dus het geheele oppervlak $= \frac{1}{2}$ omtrek vijfhoek $\times$ (MQ $+$ FQ) $= \frac{1}{2}$ omtr. grondvl. $\times$ MF.

Fig. 116.



Wil men alleen de oppervlakte van de opstaande zijvlakken vinden, dan wordt dit oppervlak *het ronde oppervlak der piramide* genoemd. Uit onze berekening bleek reeds, dat het ronde oppervlak der vijfzijdige piramide gelijk was aan de halve loodlijn uit den top op een der ribben aan het grondvlak vallende, vermenigvuldigd met den omtrek van den vijfhoek.

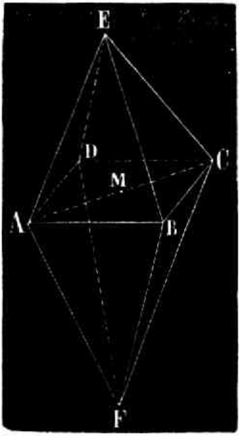
Eveneens zal men bevinden, dat van de regelmatige zeszijdige piramide het ronde oppervlak gelijk is aan de halve loodlijn uit den top op een der ribben in 't grondvlak vallende, vermenigvuldigd met den omtrek van het grondvlak; — en in 't algemeen is het ronde oppervlak eener *n*-zijdige regelmatige piramide gelijk aan de halve loodlijn, die uit den top op een der ribben in 't grondvlak valt, vermenigvuldigd met den omtrek van het regelmatige *n*-hoekige grondvlak.

§ 19.

Over de oppervlakken der onregelmatige lichamen,

Zetten wij onze beschouwing over de oppervlakken der lichamen voort, dan is nu de beurt aan de *regelmatige bij uitnemendheid.* Het *tetraëdrum* en den *kubus* of *teerling* hebben wij reeds bij de regelmatige driezijdige piramiden en de vierzijdige prisma's beschouwd; zoodat wij thans gevoegelijk bij het achtvlak of octaëdrum kunnen aanvangen (zie fig. 117).

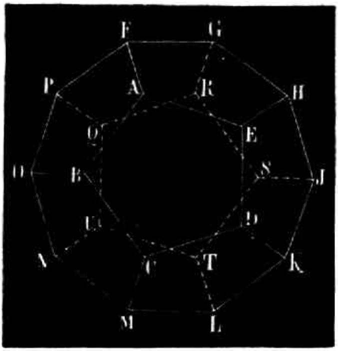
Fig. 117.



Indien men de lengte van elke ribbe $= r$ stelt, dan kan men de lengte der drie diagonalen van het lichaam berekenen. Immers is elke diagonaal van het lichaam b. v. AC de diagonaal van het vierkant ABCD, voor welker lengte men zal vinden $\sqrt{(r^2 + r^2)} = \sqrt{2r^2} = r\sqrt{2}$. — De afstand van een der hoekpunten A, E, C of F, zal dus blijkbaar de halve diagonaal AC bevatten, zoodat dus AM = CM = EM enz. zal zijn $\frac{1}{2} r \sqrt{2}$. Deze afstand, ook de *hoogte* der vierzijdige piramide EABCD zijnde, — zoo zal men, langs den weg in de vorige § ter berekening dier hoogte aangewezen, ook de zelfde uitkomst bekomen. — Naardien $\llcorner$ EAF $=$ $\llcorner$ AFC $=$ enz. 90° bevat, zal men nu ook gemakkelijk opmerken, dat de afstand tusschen ieder paar evenwijdige zijvlakken gelijk is aan de ribbe (verg. § 13), en dat dus de loodlijn uit het middelpunt M op een der zijvlakken vallende, gelijk is aan $\frac{1}{2}r$.

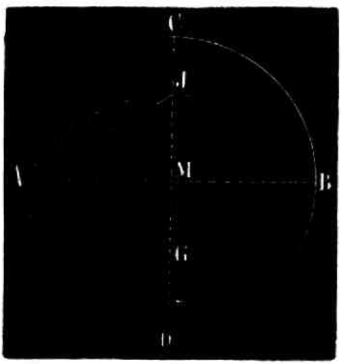
De berekening der geheele oppervlakte van 't achtvlak zal géen moeite baren; zoo toch is de oppervlakte van ieder zijvlak, dat een gelijkzijdigen driehoek vormt, $=\frac{1}{4}r^2\sqrt{3}$; derhalve de som der 8 zijvlakken $= 8\times\frac{1}{4}r^2\sqrt{3} = 2r^2\sqrt{3}$.

Fig. 118.



Wij nemen thans het regelmatige twaalfvlak of *dodecaëdrum* ter onzer beschouwing, fig. 118. Het geheele oppervlak bestaat uit 12 gelijke en gelijkvormige vijfhoeken, die alle regelmatig zijn. Om dus het gansche oppervlak te berekenen, dient men eerst dat van één der zijvlakken te bepalen, om vervolgens deze uitkomst twaalfmaal te nemen. Ten einde nu ieder zijvlak of den inhoud van een regelmatigen vijfhoek in zijne zijde uit te drukken, nemen wij fig. 52 uit § 4 nog eens ter hand.

Fig. 119.

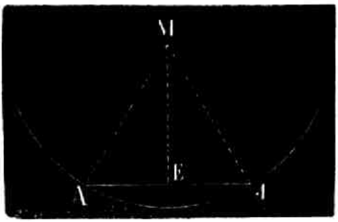


Hieruit is ons gebleken, dat zoo AB en CD (zie fig. 119) twee elkander rechthoekig snijdende middellijnen zijn, en men uit het midden G van den straal MD met AG als straal een boog beschrijft, die CD in J snijdt; dat dan de koorde AJ van dezen boog juist 5 maal in den geheelen cirkelomtrek kan worden uitgezet, dat is met andere woorden: AJ zal de zijde van den regelmatigen ingeschreven vijfhoek zijn. Hieruit kan men dus op een gemakkelijke wijze de betrekking tusschen den straal van den cirkel en de zijde van den ingeschreven vijfhoek vinden. Zij daartoe de straal van den cirkel $=a$, dan is $MG = \frac{1}{2}a$, dus volgt uit $\triangle$ AMG, dat $AG = \sqrt{[a^2 + (\frac{1}{2}a)^2]} = \frac{a}{2}\sqrt{5}$ is.

Nu is $AG = JG$, en $MJ = JG - MG$, dus ook $MJ = \frac{a}{2}\sqrt{5} - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}(-1 + \sqrt{5})$. In $\triangle$ AMJ zal men dus hebben $AJ^2 = AM^2 + MJ^2 = a^2 + \frac{a^2}{4}(-1 + \sqrt{5})^2 = a^2 + \frac{a^2}{4}(6 - 2\sqrt{5}) = \frac{1}{4}a^2 (10 - 2\sqrt{5})$. Zij dus $AJ = r$, dan is:

$$r^2 = \tfrac{1}{4}a^2(10 - 2\sqrt{5}),$$
$$\text{of } 4r^2 = a^2(10 - 2\sqrt{5}),$$
$$\text{of } 4r^2(10 + 2\sqrt{5}) = a^2 \times 80,$$
$$\text{of } a = r\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}.$$

Fig. 120.



Zetten wij dus (fig. 120) in den zelfden cirkel als boven de lijn AJ als koorde uit, dan zal deze vijfmaal in den omtrek bevat zijn en $\triangle$ AMJ is de middelpunts-driehoek van een regelmatigen vijfhoek. De oppervlakte van dezen driehoek zal nu worden uitgedrukt door basis maal $\frac{1}{2}$ apothema ME, en dus het oppervlak van den geheelen vijfhoek door den omtrek van den vijfhoek vermenigvuldigd met den halven apothema. — Wij hebben hierboven reeds den straal in de zijde uitgedrukt; dit kan men nu ook met den apothema doen. In $\triangle$ AEM zal men hebben:

$ME^2 = AM^2 - AE^2 = AM^2 - \frac{1}{4}AJ^2 = \frac{r^2(10+2\sqrt{5})}{20} - \frac{1}{4}r^2 = \frac{r^2(5+2\sqrt{5})}{20}$, dus $ME = \frac{r}{2}\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$.

Voor het oppervlak van den vijfhoek vindt men dus $\frac{5r^2}{4}\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$, indien de zijde $= r$ is. Het oppervlak van één zijvlak ABCDE (fig. 118) is dus bekend, als de ribbe $= r$ is, en daarom is het geheele oppervlak van 't dodecaëdrum $= 12 \times \frac{5r^2}{4}\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} = 15r^2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} = 3r^2\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}$.

Indien men de beschouwing van 't dodecaëdrum voortzet, zal men nog de volgende waarheden ontdekken, waarvan (althans van sommige) de uitwerking nog al lastig is, waarom wij hier alleen de uitkomsten opgeven:

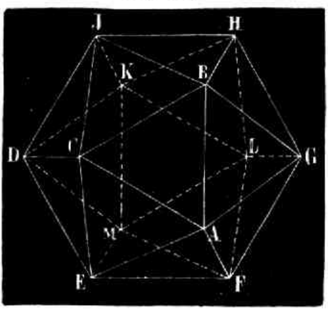
De *as* van 't dodecaëdrum, welke van het eene uiteinde eener ribbe door het middelpunt naar het uiteinde der tegenovergestelde ribbe gaat, wordt uitgedrukt door de formule $r\sqrt{\frac{9+3\sqrt{5}}{2}}$;

de *afstand* van het middelpunt tot een der hoeken wordt voorgesteld door $\frac{1}{2}r\sqrt{\frac{9+3\sqrt{5}}{2}}$;

de *loodlijn* uit het middelpunt op een der zijvlakken neergelaten, wordt uitgedrukt door $\frac{1}{2}r\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}$; — en

de *hoogte* van 't dodecaëdrum wordt voorgesteld door $r\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}$.

Fig. 121.



Over het oppervlak van het *regelmatige twintigvlak* of *icosaëdrum* kunnen wij korter zijn, omdat het bestaat uit de som van twintig gelijke gelijkzijdige driehoeken. Wanneer nu de ribbe van het twintigvlak r is, dan is de oppervlakte van één zijvlak $= \frac{1}{4}r^2\sqrt{3}$; dus het gansche oppervlak $= 20 \times \frac{1}{4}r^2\sqrt{3} = 5r^2\sqrt{3}$.

Ten opzichte van dit lichaam merken wij alleenlijk nog aan, dat we door het voortzetten onzer beschouwingen zullen ontdekken, dat de *as* van het icosaëdrum zal worden uitgedrukt door $r\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$;

de *afstand* van het middelpunt tot ieder der hoekpunten zal dus zijn $\frac{1}{2}r\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$;

de *loodlijn* uit het middelpunt op een der zijvlakken neêr gelaten, zal worden uitgedrukt door $\frac{1}{2}r\sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{6}}$, en

de *hoogte* of de afstand van twee evenwijdige zijvlakken door $r\sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{6}}$.

Vatten wij dus alles samen, wat van de oppervlakken der regelmatige lichamen is gezegd, dan heeft men, als de ribbe van ieder lichaam $= r$ is:

oppervl.	regelm.	viervl.	of	tetraëdram $r^2\sqrt{3}$,
»	»	zesvl.	»	kubus $6r^2$,
»	»	achtvl.	»	octaëdrum $2r^2\sqrt{3}$,
»	»	twaalfvl.	»	dodecaëdr. $3r^2\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}$,
»	»	twintigvl.	»	icosaëdrum $5r^2\sqrt{3}$.

Maakt men dus deze vijf regelmatige lichamen zoodanig, dat de ribbe van ieder dezer telkens 1 d. M. lengte heeft, dan vindt men voor de oppervlakken:

	oppervl. tetraëdr.	$= r^2\sqrt{3} = 1 \times 1.732$	$= 1.732$	d. M^2.
	» kubus	$= 6r^2 = 6 \times 1$	$= 6.$	»
	» octaëdrum	$= 2r^2\sqrt{3} = 2 \times 1 \times 1.732$	$= 3.464$	»
	» dodecaëdr.	$= 3r^2\sqrt{5(5+2\sqrt{5})} = 3 \times 1 \times 6.954$	$= 20.862$	»
en	» icosaëdr.	$= 5r^2\sqrt{3} = 5 \times 1 \times 1.732$	$= 8.660$	»

Hieruit blijkt dat bij gelijke ribben, het dodecaëdrum het grootste oppervlak heeft en het tetraëdrum het kleinste, en dat men zal hebben:

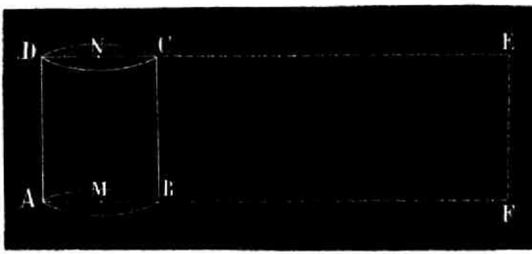
oppervl. viervl.: oppervl. achtvl.: oppervl. twintigvl. $= 1 : 2 : 5$.

§ 20.

Over de oppervlakken van den cilinder, kegel, afgeknotten kegel en den bol.

Overgaande tot de cilinders, willen wij beginnen om het ronde oppervlak uit fig. 122 geheel met papier te omwikkelen, zoodat

Fig. 122.



het er juist om sluit; vervolgens zullen wij dit omkleedsel naar het beloop van de hoogte of van den afstand BC der twee evenwijdige vlakken doorknippen en het uitslaan, waarna men den rechthoek BCEF zal bekomen. De afmetingen van dezen rechthoek zijn nu gemakkelijk te bepalen; de hoogte stemt overeen met die van den cilinder, en de breedte met den omtrek van het cirkelvormig grond- of bovenvlak. — Weet men dus van den cilinder de hoogte en den omtrek of den straal van het grond- en bovenvlak, dan kan men den rechthoek en vervolgens elk der eindvlakken bepalen, waarna door optelling het geheele oppervlak bekend zal zijn. Is b. v. gegeven: de straal van een der eindvlakken $= 7$ en de hoogte $= 16$ d. M., dan zal de breedte van rechthoek BCEF gelijk zijn aan den omtrek eens cirkels, welks straal 7 d. M. is. Men vindt hiervoor $7:22 = 14:x$ op 44 d. M. De hoogte van den rechthoek is 16 d. M, derhalve deszelfs oppervlak $44 \times 16 = 704$ d. M², dat ook het ronde oppervlak van den cilinder zal zijn. Voorts vindt men voor het oppervlak van ieder der beide eindvlakken $14:11 = (7 \times 2)^2 : x$ of 154 d. M². Het geheele oppervlak van den cilinder zal dus bevatten $2 \times 154 + 704 = 1012$ d. M².

Indien in het algemeen de straal van het grondvlak $= r$ en de hoogte van den cilinder $= h$ is, dan zal men vinden:

grootte van het ronde oppervl. $= 2\pi r \times h$ (vergel. § 5),
» » » grondvl. $= \pi r^2$,
» » » bovenvl. $= \pi r^2$,

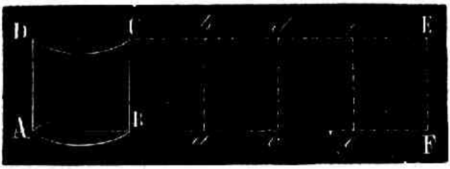
dus het geh. oppervl. $= 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r\,(r + h)$.

Uit deze formule blijkt dus ook, dat het geheele oppervlak van den cilinder zal gevonden worden, door den omtrek van het grondvlak te vermenigvuldigen met de som van de hoogte plus den straal van het grondvlak. Past men dit op bovengenoemd vraagstuk toe, dan bekomt men: omtrek grondvl. $= \frac{22 \times 14}{7}$ $= 44$ d. M., de som van straal plus hoogte $= 7 + 16 = 23$ d. M.; alzoo $44 \times 23 = 1012$ d. M² (even als boven) het geheele oppervlak.

Bij het vinden der oppervlakken van regelmatige prisma's hebben wij opgemerkt, dat het ronde oppervlak van zoodanige prisma's gelijk zal zijn aan de hoogte vermenigvuldigd met den omtrek van 't grondvlak.

Stelt men zich nu een prisma voor van een onnoemelijk groot aantal opstaande zijvlakken, dan nog zal steeds het ronde oppervlak gelijk zijn aan de hoogte van dat prisma vermenigvuldigd met den omtrek van 't grondvlak. Maar de omtrek van dit grondvlak zal nu gelijk zijn aan den omtrek van een cirkel; daarom zegt men, dat een cilinder een prisma is van een onnoemelijk groot aantal zijden.

Fig. 123.



Beschouwen wij thans den *gelijkzijdigen* cilinder (fig. 123), d. i. zulk een, waarvan de middellijn van het grondvlak gelijk is aan de hoogte. De omtrek van een der grondvlakken is nu $= \pi$ AB $= \pi$ AD; dus het ronde oppervlak van den gelijkzijdigen cilinder $= \pi\,AD \times AD = \pi\,AD^2$. Maar daar het grondvlak zelf $\frac{1}{4}\pi\,AB^2$ is, zoo is het geheele oppervlak $= 2 \times \frac{1}{4}\pi\,AB^2 + \pi\,AD^2 =$

$\frac{1}{2}\pi AD^2 + \pi AD^2 = 1\frac{1}{2}\pi AD^2$. — Uit onze algemeene oplossing blijkt dus, dat van een gelijkzijdigen cilinder steeds zal zijn

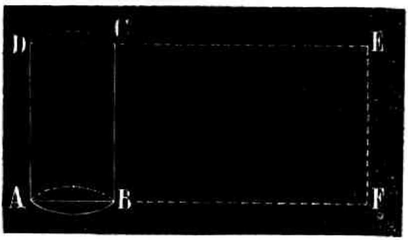
geh. oppervl. $= 6 \times$ grondvlak, en
ronde oppervl. $= 4 \times$ grondvlak.

Verdeelt men dus den rechthoek BCEF door deellijnen in 4 gelijke deelen, dan is rechth. BC*ba* = rechthoek *abde* = enz. = oppervl. cirkel AB.

Aangezien volgens de verordeningen de inhoudsmaten voor droge waren gelijkzijdige cilinders moeten zijn, zoo zullen, uit het hier aangevoerde, de ronde oppervlakken van het mud, schepel, den kop en het maatje gemakkelijk zijn af te leiden, zoo men slechts de hoogte of de middellijn van het grondvlak kent.

Volgens die zelfde verordeningen moeten de maten voor natte waren of de vochtmaten, cilinders zijn, waarvan de hoogte het dubbele van de middellijn van het grondvlak is. Zij ABCD (fig. 124) zoodanige cilinder; dan wordt de omtrek van ieder der eindvlakken voorgesteld door π AB, en het ronde oppervlak of het oppervl. van den rechthoek BCEF $= \pi AB \times AD = \pi AB \times 2 AB = 2\pi AB^2$. En daar nu de oppervlakte van het grondvlak $\frac{1}{4}\pi AB^2$ is, zoo is in ons geval de geheele oppervlakte van den cilinder $= 2 \times \frac{1}{4}\pi AB^2 + 2\pi AB^2 = 2\frac{1}{2}\pi AB^2$. Uit deze oplossing blijkt dan, dat men bij deze soort van cilinders steeds zal hebben:

Fig. 124.

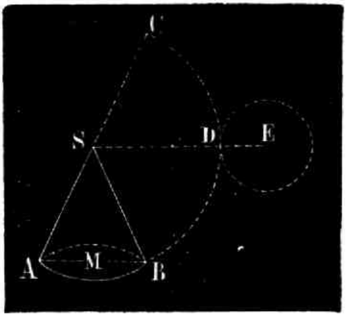


geheele oppervl. $= 10 \times$ grondvlak, en
ronde oppervl. $= 8 \times$ grondvlak.

Het ronde oppervlak van den kop dient dus viermaal zoo groot te zijn als het grondvlak, en dat van de *kan* moet achtmaal het grondvlak bevatten.

Beschouwen wij thans het oppervlak van den kegel SAB (zie fig. 125). Wij willen het ronde oppervlak weder geheel met papier omwikkelen, het vervolgens, naar het beloop van een

Fig. 125.



rechte lijn BS, van den top naar den omtrek der basis, doorknippen en het uitspreiden, waarna men voor het ronde oppervlak zal bekomen den cirkelsector BSC. Indien men dus uit S met BS als straal een cirkel beschreef, dan is BSC een sector van dezen cirkel.

Door het aangevoerde in het slot van § 5 van dit deel, kan men nu de oppervlakte van dezen sector vinden. Wij vonden daarvoor: oppervl. sect. $=$ lengte boog BC $\times \frac{1}{2}$ straal BS. En daar nu de lengte van boog BC blijkbaar gelijk is aan den omtrek van het cirkelvormige grondvlak, zoo is ook

ronde oppervl. kegel $=$ omtrek grondvl. $\times \frac{1}{2}$ straal BS,

of ronde oppervl. kegel SAB $= \pi$ AB $\times \frac{1}{2}$ BS.

Het ronde oppervlak van een kegel is dus gelijk aan den omtrek van het grondvlak vermenigvuldigd met de halve schuine zijde.

Door op te merken dat het ronde oppervlak van een piramide (gelijk ons gebleken is bij de beschouwing van de oppervlakken der piramiden) gelijk is aan den omtrek van het veelhoekige grondvlak vermenigvuldigd met de halve loodlijn, die men uit den top op een der ribben aan het grondvlak laat vallen, — zal men ook bovenstaande waarheid kunnen afleiden. Immers door het onophoudelijk vermeerderen van het aantal zijden in het grondvlak nadert dit al meer en meer den cirkelomtrek, terwijl de schuine loodlijn uit den top der piramide op een der ribben aan het grondvlak meer en meer de opstaande ribben der piramide nadert. Door nu in gedachte het aantal zijvlakken der piramide oneindig groot te nemen, gaat het grondvlak in een cirkel over, en de loodlijn uit den top op een ribbe aan 't grondvlak gaat over in de opstaande ribbe der piramide. De piramide zelf is in een kegel overgegaan, en men bekomt voor het ronde oppervlak bovengenoemden regel.

Het geheele oppervlak is gelijk aan het grondvlak plus het ronde oppervlak; men vindt dus hiervoor $\frac{1}{4}\pi AB^2 + \pi AB \times \frac{1}{2} BS = \frac{1}{4}\pi AB (AB + 2BS) = \pi AB \times \frac{AB + 2BS}{4} = \pi AB \times \frac{2DE + 2BS}{4} = \pi AB \times \frac{DE + BS}{2} = \pi AB \times \frac{SE}{2}$. Merkten wij bij den cilinder op, dat zijn geheele oppervlak gevonden werd, door het product van den omtrek van het grondvlak met de som van de hoogte en den straal van het grondvlak te nemen; thans merken wij op, dat het geheele oppervlak van den kegel gevonden wordt, door den omtrek van het grondvlak te vermenigvuldigen met de halve som van den straal van het grondvlak en de schuine zijde van den kegel. — Indien dus, fig. 126, AE den omtrek van cirkel AB voorstelt, en $AC = \frac{1}{2}(AS + AM)$ is, zoo zal ook oppervlak rechthoek AEDC gelijk zijn aan het geheele oppervlak van den kegel of aan sector BSC + cirkel DE (uit fig. 125).

Fig. 126.

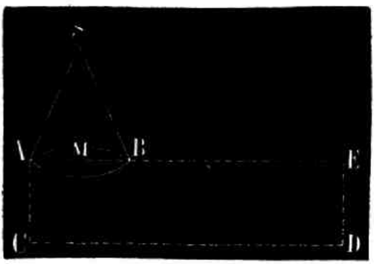
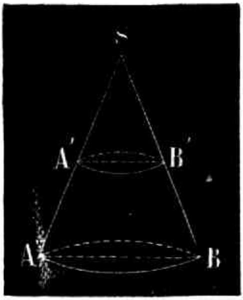


Fig. 127.

Is de kegel *gelijkzijdig*, d. i. is de schuine zijde AS gelijk aan de middellijn AB van het grondvlak (fig. 127), dan is het ronde oppervlak $= \pi AB \times \frac{1}{2} AS = \pi AB \times \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2}\pi AB^2$. Het oppervlak van 't grondvlak is $\frac{1}{4}\pi AB^2$, en dus het geheele oppervlak van den gelijkzijdigen kegel $= \frac{3}{4}\pi AB^2$. Door toepassing van den hierboven genoemden regel zou men vinden $\pi AB \times \frac{AS + AM}{2} = \pi AB \times \frac{AB + \frac{1}{2} AB}{2} = \pi AB \times \frac{3}{4} AB = \frac{3}{4}\pi AB^2$ voor 't geheele oppervlak, 't geen met onze berekening overeenkomt. — In den gelijkzijdigen kegel is dus steeds

geheele oppervl. $= 3 \times$ het grondvlak, en
ronde oppervl. $= 2 \times$ het grondvlak.

Fig. 128.



Beschouwen wij thans in fig. 128 den afgeknotten kegel ABB′A′, die een deel is van den geheelen kegel SAB; dan heeft men ter berekening van het ronde oppervlak in 't oog te houden, dat

ronde opp. kegel $SAB = \frac{1}{2}\pi AB \times SA$
en » » » $SA'B' = \frac{1}{2}\pi A'B' \times SA'$

en dus ronde opp. afg. kegel $ABB'A' =$
$\frac{1}{2}\pi(AB \times SA - A'B' \times SA')$.
Onderzoeken wij thans deze formule te vereenvoudigen.

Wegens de gelijkvormigheid der driehoeken SAB en SA′B′ heeft men:

$$AS : A'S = AB : A'B'$$

$$\text{of } AS - A'S : AB - A'B' = AS : AB = A'S : A'B'$$

$$\text{of } AA' : AB - A'B' = AS : AB = A'S : A'B'$$

$$\text{dus } AS = \frac{AA' \times AB}{AB - A'B'} \quad \text{en} \quad A'S = \frac{AA' \times A'B'}{AB - A'B'}$$

$$\text{daarom } \frac{1}{2}\pi AB \times AS = \frac{\pi AA' \times AB^2}{2(AB - A'B')}$$

$$\text{en } \frac{1}{2}\pi A'S \times A'B' = \frac{\pi AA' \times A'B'^2}{2(AB - A'B')}$$

en bijgev. $\frac{1}{2}\pi(AB \times AS - A'B' \times A'S) = \frac{\pi AA'(AB^2 - A'B'^2)}{2(AB - A'B')}$
$= \frac{1}{2}\pi AA'(AB + A'B')$. Hieruit blijkt dus, dat het ronde oppervlak van een afgeknotten kegel gelijk is aan het product van zijn schuine zijde, met de halve som der omtrekken van het grond- en bovenvlak. Uit onze formule volgt dus ook, dat men het ronde oppervlak van een afgeknotten kegel zal bekomen, door den inhoud van een trapezium te berekenen, waarvan de evenwijdige zijden de omtrekken van het grond- en bovenvlak van den afgeknotten kegel zijn, en de hoogte gelijk is aan de schuine zijde van den afgeknotten kegel.

Is de straal van 't grondvlak $= R$ en van 't bovenvlak $= r$, terwijl de schuine zijde $= s$ is, dan is het ronde oppervlak

$= \pi s (R + r)$, en dus het geheele oppervlak, met inbegrip der grond- en bovenvlakken:

$$\pi s (R + r) + \pi R^2 + \pi r^2 = \pi [R^2 + s (R + r) + r^2].$$

Alvorens tot den *bol* over te gaan, willen wij eerst op een eigenschap der regelmatige ingeschreven veelhoeken letten, door welker kennis wij, ofschoon niet op een heel eenvoudige wijze, tot het oppervlak van den bol zullen geraken. Als men in een cirkel (fig. 129) een regelmatigen veelhoek van een *even* aantal zijden beschrijft, een middellijn AE trekt, uit E een koorde BE naar het andere uiteinde B der aan die middellijn grenzende zijde, en de hoekpunten B, C, D enz. boven die middellijn met de hoekpunten H, G, F, enz. beneden de middellijn vereenigt; dan zal men hebben AE × BE = AB (BH + CG + DF + enz.).

Fig. 129.

Het bewijs dezer waarheid is gemakkelijk op te maken uit de gelijkvormigheid der driehoeken AKB, LKH, LMC, NMG, NOD en EOF; daardoor toch zal men hebben:

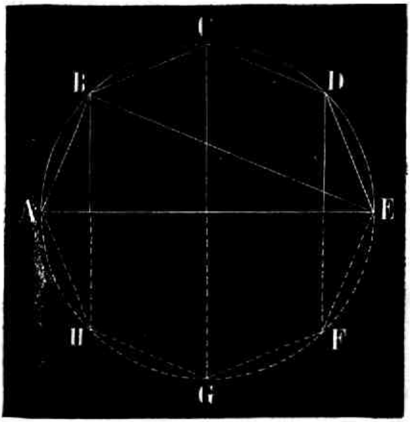
$$BK : AK = HK : KL = CM : LM = GM : MN = DO : ON = FO : EO \text{ of } BK + HK + CM + GM + DO + FO : AK + KL + LM + MN + ON + EO = BK : AK$$

$$\text{of } BH + CG + DF : AE = BK : AK = BE : AB$$

$$\text{of } AB\,(BH + CG + DF) = AE \times BE.$$

Door het aantal zijden van den veelhoek telkens te verdubbelen, zal deze waarheid blijven bestaan; maar daar dan elke zijde, en dus ook AB gedurig kleiner wordt, zal BE telkens vergrooten, daar AE niet verandert.

Fig. 130.



Stellen wij ons nu voor dat de veelhoek ABCDE, in den halven cirkel beschreven, om de middellijn AE wentelt (fig. 130), dan zal het ronde oppervlak van dezen veelhoek gelijk zijn aan het ronde oppervlak der kegels DFE en BHA, opgeteld bij het ronde oppervlak der afgeknotte kegels CGHB en CGFD. In ons geval heeft men nu:

ronde opp. kegel EDF $= \pi\, DF \times \frac{1}{2} DE$

» » » ABH $= \pi\, BH \times \frac{1}{2} AB$

» » afgekn. keg. GCBH $= (\pi\, CG + \pi\, BH) \times \frac{1}{2} BC$.

» » » » CGFD $= (\pi\, DF + \pi\, CG) \times \frac{1}{2} CD$.

Maar daar $DE = AB = BC = CD =$ zijde regelm. veelh. is, zoo volgt:

geh. ronde opp. veelh. ABCDE $= \frac{1}{2} \pi\, AB\, (2\,DF + 2\,BH + 2\,CG)$

» » » » » $= \pi\, AB\, (DF + BH + CG)$

» » » » » $= \pi\, BE \times AE$.

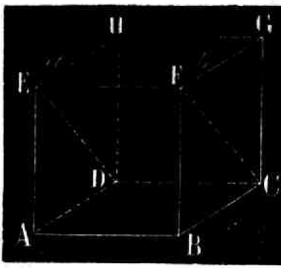
Door weder gedurig het aantal zijden te verdubbelen, zal AB telkens afnemen en BE telkens aangroeien, en de omtrek van den veelhoek zal gedurig den omtrek van den halven cirkel nader bij komen; en daar de ronde oppervlakte van den omgewentelden veelhoek steeds nog door $\pi\, AE \times BE$ wordt voorgesteld, zoo zal, wanneer het aantal zijden oneindig groot genomen is, de omtrek van den veelhoek in dien van den halven cirkel zijn overgegaan, terwijl nu BE is aangegroeid tot AE; derhalve zal de bol, door de omwenteling van den halven cirkel ontstaan, tot oppervlak hebben $\pi\, AE \times AE = \pi\, AE^2$.

Het oppervlak van den bol is dus gelijk aan het oppervlak van den cirkel, welks straal het tweevoud is van dien van den bol; of ook is dat oppervlak gelijk aan viermaal het oppervlak van den grooten cirkel van den bol; of eindelijk is het oppervlak van den bol ook gelijk aan den rechthoek, welks lengte de omtrek van den bol en welks breedte de dubbele straal van den bol is.

§ 21.

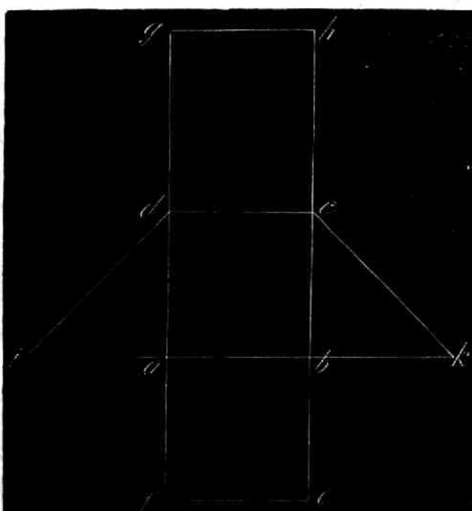
Over de oppervlakken van bepaalde deelen van sommige lichamen.

Fig. 131.



Alvorens van de oppervlakken van 't stel lichamen, bij de vormleer in gebruik, af te stappen, willen wij de oppervlakken van gedeelten van sommige lichamen beschouwen. Wij vangen met den kubus aan, fig. 131, en stellen ons voor, dat hij in twee gelijke deelen is verdeeld, door het vlak CDEF in de figuur aangewezen. Het net

Fig. 132.



van ieder deel van den kubus wordt aangewezen door fig. 132; hierin is *abcd* het grondvlak ABCD, *abef* het voorvl. ABEF, *adi* stelt het driehoekige zijvl. ADE voor, *bck* het zijvlak BCF, en *cdgh* de doorsnede CDEF.

Wanneer nu gegeven was, de ribbe van den kubus = 4 d.M., dan zou zijn

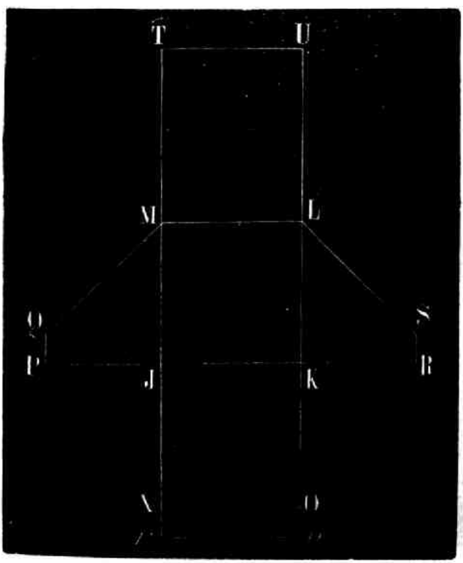
$$\text{oppervl. } abcd = ab \times bc = AB^2 = 4 \times 4 = 16 \text{ d. M}^2$$
$$\text{» } abef = ab \times be = AB^2 = 4 \times 4 = 16 \text{ »}$$
$$\text{» } adi = \tfrac{1}{2} ai \times ad = \tfrac{1}{2} AB^2 = \tfrac{1}{2} \times 4 + 4 = 8 \text{ »}$$
$$\text{» } bck = \tfrac{1}{2} bc \times bk = \tfrac{1}{2} AB^2 = \tfrac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8 \text{ »}$$
$$\text{» } cdgh = cd \times gd = cd \times di = cd \times \sqrt{(ad^2 \times ai^2)} =$$
$$= cd \times cd \sqrt{2} = AB \times AB \times \sqrt{2} = 16 \sqrt{2} \text{ d.M}^2$$
$$\text{dus geh. oppervl.} = 48 + 16 \sqrt{2} = 16 (3 + \sqrt{2}) \text{ d.M}^2.$$

Was in 't algemeen de ribbe van den kubus $= a$, dan zou men evenzoo hebben:

$$\text{opp. } abcd = ab \times bc = AB^2 = a^2$$
$$\text{» } abef = ab \times be = AB^2 = a^2$$
$$\text{» } adi = \tfrac{1}{2} ai \times ad = \tfrac{1}{2} AB^2 = \tfrac{1}{2} a^2$$
$$\text{» } bck = \tfrac{1}{2} ai \times ad = \tfrac{1}{2} AB^2 = \tfrac{1}{2} a^2$$
$$\text{» } cdgh = cd \times gd = ad \times di = ad \sqrt{(di^2 + ad^2)} = ad^2 \sqrt{2} = a^2 \sqrt{2}$$
$$\text{dus geh. oppervl.} = 3a^2 + a^2 \sqrt{2} = a^2 (3 + \sqrt{2}).$$

Brengt men hierin de waarde van $a = 4$ d. M. over, dan bekomt men even als boven $16 (3 + \sqrt{2})$. De som der oppervlakken van beide gelijke deelen van den kubus zou dus $32 (3 + \sqrt{2})$ bedragen; terwijl het oppervlak van den geheelen kubus $6 \times 4^2 = 96$ d.M² bedraagt. Hieruit volgt dus, dat men door de doorsnijding het oppervlak met $32 (3 + \sqrt{2}) - 96 = 32 \sqrt{2}$ d.M² heeft vergroot, dat juist tweemaal het vlak CDEF is.

Fig. 133.



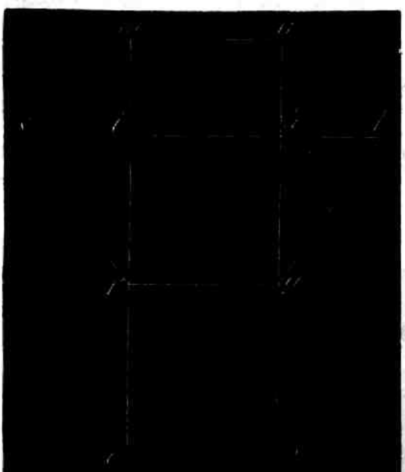
Indien het doorsnijdingsvlak wel door CD maar niet door EF loopt, zoodat het door de punten *a* en *b* (zie fig. 131) van 't bovenvlak gaat, dan zal het net van 't grootste deel van den kubus door fig. 133 worden voorgesteld, waarin JKLM het vlak ABCD is, JKON het vlak ABFE, JPQM het vlak AD*a*E, KRSL het vlak BC*b*F, MLUT de doorsnede CD*ab*, en NO*vn* het vlak EF*ba*.

Stelt men nu de ribbe van den kubus = 4 d. M., en de punten *a* en *b* (zie fig. 131) op 1 d. M. afstands van de hoekpunten E en F aangebracht, dan heeft men ter berekening van 't oppervlak:

$$\begin{array}{lll}
JKLM = AB^2 = 4 \times 4 & = 16 & \text{d. M}^2 \\
JKON = AB^2 = 4 \times 4 & = 16 & » \\
JPQM = (JM + QP)\tfrac{1}{2}JP = (4+1)\tfrac{4}{2} & = 10 & » \\
LKRS = (LK + RS)\tfrac{1}{2}KR = (4+1)\tfrac{4}{2} & = 10 & » \\
LMTU = ML \times QM = 4\sqrt{(4^2+3^2)} & = 20 & » \\
NOvn = vN \times MO = 1 \times 4 & = 4 & » \\
\hline
\text{dus het geh. oppervl.} & = 76 & \text{d. M}^2.
\end{array}$$

Beschouwen wij nu het overblijvende deel van den kubus, dan zal het net worden voorgesteld door fig. 134, waarin *fghi* het vlak CDHG voorstelt, *ikl* het vlak DH*a*, het vlak *ghl* stelt C*b*G voor, *fgpo* stelt de doorsnede CD*ab* voor, en *ihnm* het bovenvlak GH*ab*. — Alsnu zijn de lijnen *op*, *fg*, *ih*, *mn*, *fi* en *gh* allen gelijk aan de ribbe of 4 d. M. De lijnen *hn*, *im*, *ik* en *hl* zijn ieder gelijk aan 3 d. M., *gp*, *fo*, *gl* en *fk* zijn ieder gelijk aan $\sqrt{(ik^2 + fi^2)} = \sqrt{(3^2+4^2)} = 5$, en men heeft dus:

Fig. 134.



zijvlak $fghi = 4 \times 4 = 16$ d. M².
» $ikf = \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6$ »
» $ghl = \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6$ »
» $fgpo = 5 \times 4 = 20$ »
» $himn = 3 \times 4 = 12$ »

geh. oppervl. $= 60$ d. M².

Wij willen ons eindelijk den kubus fig. 135*a* nogmaals door een vlak gesneden, voorstellen. Wij nemen dan aan, dat van het deelvlak JKML de punten J en K op 1 d. M. afstands van E en F liggen, en de punten L en M op 1 d. M. van D en C, terwijl elke ribbe van den kubus 4 d. M. lengte heeft. In fig. 135*b* ziet men het grootste deel van den kubus voorgesteld; uit deze teekening van het *net* blijkt ons, dat *abcd*, het grondvlak, een vierkant is; dat *abih* het voorvlak met ABFE, het voorvlak van den kubus, overeenstemt, en een vierkant is; dat *agfed* en *bmnoc* met de vijfhoekige zijvlakken ADLJE en BCMKF overeenstemmen: terwijl eindelijk de rechthoeken *hikl* en *cdpq* met CDLM en EFKJ overeenstemmen, en *pqrs* de doorsnede LMKJ voorstelt.

Fig. 135*a*.

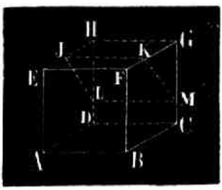
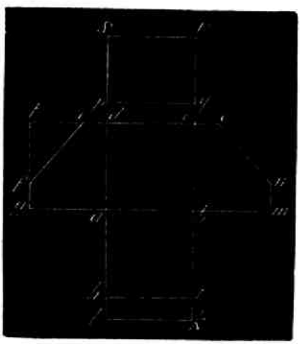


Fig. 135*b*.



Nu merken wij op, dat aan de vijfhoekige zijvlakken *agfed* en *bmnoc* de rechthoekige driehoek *eft* ontbreekt, om een vierkant te vormen, en daar $et = ft = 4 - 1 = 3$ d. M. is, zoo is inh. $\triangle eft = \frac{1}{2} \times 3 \times 3 = 4\frac{1}{2}$ d.M², en $ef \sqrt{(et^2 + tf^2)} = \sqrt{(3^2 + 3^2)} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ d.M. Van den rechthoek *pqrs* is dus $ps = ef = 3\sqrt{2}$ d. M. Men is nu genoegzaam voorbereid om het geheele oppervlak te berekenen. Immers zal men hebben:

oppervl. grondvl. $abcd = 4 \times 4 = 4^2 = 16$ d. M²
» zijvl. $abih = 4 \times 4 = 4^2 = 16$ »
» » $agfed = agdt - \triangle eft = 16 - 4\frac{1}{2} = 11\frac{1}{2}$ d. M²
» » $bmnoc = agdt - \triangle eft = 16 - 4\frac{1}{2} = 11\frac{1}{2}$ »
» » $hikl = 1 \times 4 = 4$ d. M²
» » $cdpq = 1 \times 4 = 4$ »
» » $pqrs = 4 \times 3\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$

dus geh. oppervl. $= 63 + 12\sqrt{2}$ d. M.

Neemt men hier de doorsnede af, dan behoudt men 63 d. M² voor de som der opgenoemde geheele en gedeeltelijke zijvlakken van den kubus. Neemt men dit nu af van 't geheele oppervlak van den kubus of van $6 \times 4^2 = 96$ d. M², dan behoudt men $96 - 63 = 33$ d. M² voor de oppervlakte van het kleine deel van den kubus verminderd met de doorsnede. Deze er dus weder bijgeteld, dan verkrijgt men $33 + 12\sqrt{2}$ d. M² voor het geheele oppervlak van dat stuk.

Om de waarheid van deze uitkomst te onderzoeken, merken wij op, dat het bedoelde kleine stuk, (zie fig. 135c) een driezijdig prisma is. Hoewel dit prisma niet regelmatig is, zoo weet men toch genoeg om deszelfs oppervlakte te kunnen vinden.

Fig. 135c.

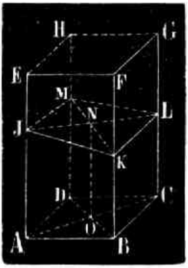
Immers zijn het grond- en bovenvlak rechthoekige driehoeken, waarvan de beide rechthoekszijden GK en GM, benevens HJ en HL ieder $4 - 1 = 3$ d.M. zijn; JL of KM is dus $\sqrt{(3^2 + 3^2)} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ d.M., en daar de lijnen LM, GH en KJ ieder 4 d. M. zijn, zoo is:

oppervl. grondvl. $= \frac{1}{2} \times 3 \times 3 = 4\frac{1}{2}$ d. M²
» bovenvl. $= \frac{1}{2} \times 3 \times 3 = 4\frac{1}{2}$ »
ronde opp. $= LM(GK + GM + KM) = 4(3 + 3 + 3\sqrt{2}) = 24 + 12\sqrt{2}$

dus geh. oppervl. $= 33 + 12\sqrt{2}$ d. M²

Beschouwen wij nu het rechthoekige vierzijdige prisma, fig. 136*a*, dat door de doorsnede JKLM in twee ongelijke deelen is verdeeld, en stellen wij ons ten taak, de oppervlakte van het benedenste stuk te berekenen. Het grondvlak ABCD, dat

Fig. 136a.



een rechthoek voorstelt, dient gegeven te zijn alsmede drie der opstaande ribben. De vierde ribbe is dan door deze drie bepaald. Immers, indien men de diagonalen in het grondvlak en in de doorsnede trekt, en de snijpunten N en O door een rechte lijn NO vereenigt, dan heeft men in de trapeziums ACLJ en BDMK:

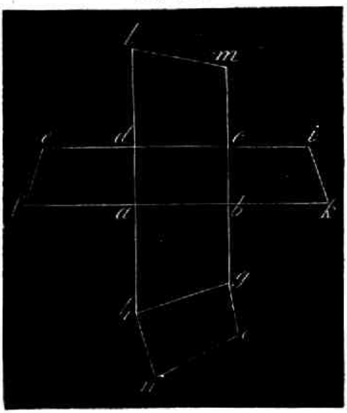
$NO = \frac{1}{2}(AJ + CL) = \frac{1}{2}(BK + DM)$, vergel. § 20 van het Ie Deel,

of $AJ + CL = BK + DM$ of $AJ = BK + DM - CL$

of $CL = BK + DM - AJ$, enz.

zoodat een der vier opstaande ribben van de drie andere opstaande afhangt en dus uit deze kan gevonden worden.

Fig. 136b.

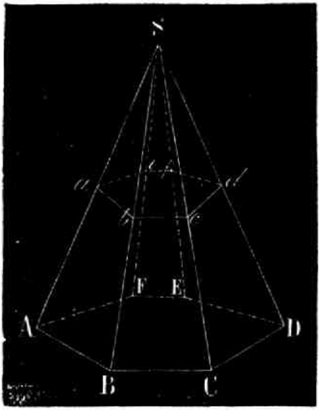


Uit het rechthoekige trapezium ABKJ, waarvan drie der zijden bekend zijn, kunnen wij nu ook de vierde zijde JK vinden; evenzoo vinden wij uit de drie andere opstaande zijvlakken, die ook rechthoekige trapeziums vormen, waarvan drie zijden bekend zijn, ook de vierde JL en MK. Vergelijken wij nu het afgesneden stuk van het prisma met deszelfs *net*, dat wij in fig. 136*b* voorstelden, dan kan men daaruit zien, dat

grondvl. ABCD = rechth. $abcd = ab \times ad = AB \times AD$,
voorvl. ABKJ = trapez. $abgh = \frac{1}{2}(ah + bg)\,ab = \frac{1}{2}AB(AJ + BK)$,
linkerzijvl. ADMJ = trapez. $adef = \frac{1}{2}(af + de)\,ad = \frac{1}{2}AD(AJ + BM)$,
rechterzijvl. BCLK = trapez. $bcik = \frac{1}{2}(bk + ci)\,bc = \frac{1}{2}AD(BK + CL)$,
achtervl. CDML = trapez. $cdlm = \frac{1}{2}(cm + dl)\,cd = \frac{1}{2}AB(CM + DM)$,
bovenvl. JKLM = vierh. $hgon = \triangle JMK + \triangle KLM$.

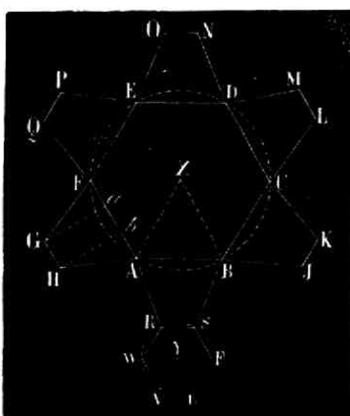
Door het gegevene en het hierboven berekende in deze vergelijkingen over te brengen, en daarvan de som te nemen, zal men het geheele oppervlak van het lichaam bekomen.

Fig. 137.



Indien men in een piramide SABCDEF (fig. 137) een vlak brengt *abcdfe* evenwijdig aan het grondvlak, dan is het bovenste stuk nog wel een piramide, maar het benedenste een afgeknotte piramide. Het grond- en bovenvlak dezer afgeknotte piramide zijn regelmatige zeshoeken, en de opstaande zijvlakken antiparallelogrammen. Stelt men zich nu voor, dat elke ribbe aan het grondvlak 12 centimeter, en iedere opstaande ribbe SA $= 7\frac{1}{2}$ centimeter is, terwijl de doorsnede op $\frac{2}{3}$ van de geheele hoogte van het grondvlak is verwijderd, dan kan men van de afgeknotte piramide het geheele oppervlak berekenen. — Men is al dadelijk in staat elke ribbe van het bovenvlak te bepalen, want doordien AB en *ab* evenwijdig zijn, is $AB : ab = SA : Sa.$ of $12 : ab = 7\frac{1}{2} : 2\frac{1}{2}$, waaruit $ab = 4$ centimeter.

Fig. 138.



Beschouwt men nu het *net* dezer afgeknotte piramide, zie fig. 138, dan zal men zien, dat het grondvlak een regelmatige zeshoek ABCDEF zal zijn, en het bovenvlak RSTUVW insgelijks een regelmatige zeshoek. Beschrijft men om beide vlakken cirkels, dan zijn hun middelpunten X en Y; de gelijkzijdige driehoeken XAB en YVU vormen de middelpuntsdriehoeken. De zijden dezer driehoeken 12 en 4 centimeter zijnde, is:

$$\text{inh. } \triangle\, ABX = \tfrac{1}{4} \times 12^2\sqrt{3} = 36\sqrt{3}$$

$$\text{dus opp. zesh. } ABCDEF = 216\sqrt{3} \text{ c.M}^2.$$

$$\text{en } \triangle\, YVU = \tfrac{1}{4} \times 4^2\sqrt{3}$$

$$\text{en opp. zesh. } VWRSTU = 24\sqrt{3} \text{ c.M}^2.$$

Laat men nu in een der antiparallelogrammen b. v. AFGH loodlijnen Ga en Hb neer, dan is $a\text{F} = b\text{A} = \frac{12-4}{2} = 4$ c.M., dus Ga $= \sqrt{(\text{GF}^2 - a\text{F}^2)} = \sqrt{(5^2 - 4^2)} = 3$ c.M., en opp. antiparall. $= (\text{AF} + \text{GH})\, \frac{1}{2}\, \text{G}a = (12 + 4)\, \frac{3}{2} = 24$ c.M^2. — De opstaande zijvlakken te zamen zijn alzoo $6 \times 24 = 144$ c.M^2, en derhalve het geheele oppervlak $= 144 + 216\sqrt{3} + 24\sqrt{3} = 144 + 240\sqrt{3}$ $= 48\,(3 + 5\sqrt{3})$ c.M^2.

In fig. 128 hebben wij het oppervlak van den afgeknotten kegel leeren vinden. Om nu zoodanig lichaam het gemakkelijkst in twee gelijke deelen te verdeelen, zouden wij er een vlak EFGH (zie fig. 139) doorbrengen, dat het grond- en bovenvl. midden doordeelt en waarin de as ligt. Om nu het opp. van ieder dezer deelen te vinden, zou men eerst het geheele oppervlak van den afgeknotten kegel kunnen berekenen, en hiervan de helft nemen; want het is duidelijk, dat het oppervlak van iedere helft gelijk is aan de som van het halve oppervlak van den geheelen afgeknotten kegel, en het oppervlak der doorsnede. Zij nu ten voorbeelde de middellijn van het grondvlak 16 c. M., die van het bovenvlak 6 c.M. en de schuine zijde AD = 13 c.M., dan vindt men

Fig 139.

opp. grondvl. $= \frac{1}{4}\pi\, \text{AB}^2 = \frac{1}{4}\pi \times 16^2 = 64\pi$ c.M^2.
» bovenvl. $= \frac{1}{4}\pi\, \text{CD}^2 = \frac{1}{4}\pi \times 6^2 = 9\pi$ c.M^2.
» ronde zijvl. $= \frac{1}{2}\pi\, \text{AD}(\text{AB} + \text{CD}) = \frac{1}{2}\pi \times 13 \times 22 = 143\pi$ c.M^2.

dus oppervl. van den geh. afg. kegel $= 216\pi$ c.M^2
en » » » halven » » $= 108\pi$ »

Hierbij moet nu nog gevoegd worden het oppervl k van de doorsnede EFGH. Deze vormt een antiparallelogram, waarvan de beide middellijnen van 't grond- en bovenvlak de evenwijdige zijden, en de schuine zijde van den kegel de opstaande zijden vormen. De hoogte van dit antiparallelogram of MN is dus $\sqrt{\left[AD^2 - \left(\frac{AB-CD}{2}\right)^2\right]} = \sqrt{\left[13^2 - \left(\frac{16-6}{2}\right)^2\right]} = \sqrt{(169-25)}$ $= 12$ c.M., en dus de oppervlakte $= \frac{12}{2}(16+6) = 132$ c.M².

De bedoelde oppervlakte is dus $132+108\pi = 12(11+9\pi)$c.M².

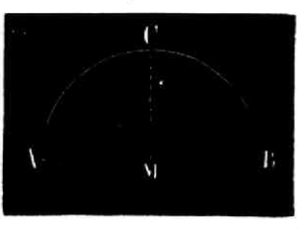
Wilde men dezen halven afgeknotten kegel nogmaals midden door deelen, dan zou men dit wederom kunnen doen, door het vlak **AMND** loodrecht op het midden van de platte zijvlakken AEF en DHG door het lichaam te brengen. Het stuk EMADHN zal dan het vierde deel van den geheelen afgeknotten kegel zijn. De zijvlakken van dit stuk zijn: het gebogen vlak AEHD, het rechthoekige trapezium AMND en de kwadranten AME en DNH. Gemakkelijk zal men ook van dit stuk de geheele oppervlakte kunnen vinden. Het gebogen zijvlak toch is de helft van 't vorige of het vierde deel van 't geheele gebogen zijvlak van den afgeknotten kegel; ieder der rechthoekige trapeziums is de helft van het antiparallelogram EFGH, en ieder kwadrant is het vierde deel van de geheele grond- en bovenvlakken. Alzoo

oppervl.	gebogen zijvl.	AEHD $= \frac{143}{4}\pi = 35\frac{3}{4}\pi$	c.M².
»	rechth. trapez.	EMNH $= \frac{132}{2} = 66$	»
»	» »	AMND $= \frac{132}{2} = 66$	»
»	kwadrant	AME $= \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}\pi \times 16^2 = 16\pi$	»
»	»	DNH $= \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}\pi \times 6^2 = 2\frac{1}{4}\pi$	»

dus geheele oppervlak $= 132 + 54\pi = 6(22 + 9\pi)$ c.M².

Met een korte beschouwing van den *bol* willen wij deze paragraaf sluiten. Stellen wij ons voor, dat de bol door een plat vlak AB in twee gelijke deelen is verdeeld, dan is deze doorsnede AB een cirkel, en wel een groote cirkel van den bol. Om nu het geheele oppervlak van dezen halven bol (zie fig. 140) te berekenen, merken wij op, dat dit bestaat uit een plat vlak AB en de

Fig. 140.



halve oppervlakte van den geheelen bol. Stellen wij nu den straal van den bol $= r$, dan is het oppervlak van den grooten cirkel $= \pi r^2$, en de oppervlakte van den geheelen bol $= 4 \pi r^2$, dus het ronde oppervlak van den halven bol $= \pi r^2$. Het geheele oppervlak van den halven bol bedraagt dus $2 \pi r^2 + \pi r^2 = 3 \pi r^2$. Hieruit blijkt dus, dat men zal hebben:

opp. geh. bol : geh. opp. halve bol $= 4 \pi r^2 : 3 \pi r^2 = 4 : 3$
» grooten cirkel : geh. opp. halve bol $= \pi r^2 : 3 \pi r^2 = 1 : 3$.

Denken wij ons nu door den halven bol, fig. 140, nog een vlak, rechthoekig op het midden van het vlak AB, zoodat men dus twee kwart-bollen zal hebben, dan is deze nieuwe doorsnede een halve cirkel, en de kwartbol wordt begrensd door twee even groote halve cirkels, die rechthoekig op elkander staan, en een rond oppervlak, dat juist het een vierde van het oppervlak van den geheelen bol is. Ter berekening van het geheele oppervlak van een kwartbol heeft men nu:

gebogen oppervl. $= \frac{1}{4} \times 4 \pi r^2 = \pi r^2$,
oppervl. zijvl. MC $= \frac{1}{2} \pi r^2$,
» » AM $= \frac{1}{2} \pi r^2$,

dus te zamen $2 \pi r^2$.

Hieruit blijkt dus, dat men zal hebben:

gebogen oppervl. kwartbol = oppervl. grooten cirkel van den bol,
geh. opp. kwartbol $= 2 \times$ opp. grooten cirkel $= \frac{1}{2}$ opp. geh. bol,
oppervl. kwartbol : oppervl. halve bol : oppervl. bol $= 2 : 3 : 4$.

IV. DE INHOUDEN VAN LICHAMEN.

§ 22.

Over de inhouden van prisma's.

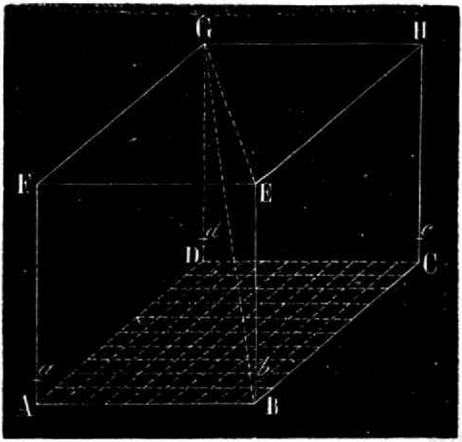
Thans wenschen wij kortelijk mede te deelen, hoe men den inhoud van ieder lichaam berekent, voorkomende in het *stel* figuren bij de vormleer in gebruik.

Door den *inhoud* van een lichaam verstaat men de ruimte tusschen zijn gebogen en platte vlakken begrepen. De maat, waarmede men deze ruimte meet, noemt men den Kubieken Meter. Dit is een lichaam, dat een kubus vormt; lang, breed en hoog 1 Ned. el of Meter. De onderdeelen van den kubieken Meter zijn kubieke decimeters, kubieke centimeters en kubieke millimeters. Een kubieke el bevat 1000 kubieke d. M^3, d. i. 1000 lichaampjes, waarvan ieder een kubiek is; zijnde 1 d.M. lang, breed en hoog. Zoo is ook 1 kubieke d. M. 1000 c. M^3, en 1 kubieke c. M. 1000 kubieke m. M. Wat men nu door een kub. D. M. en kub. H. M., enz. verstaat, zal wel duidelijk zijn.

Om de inhouden van schepen te bepalen, bezigt men de *scheepston*, die anderhalve kubieke M. inhoud heeft, maar waarvan de bevrachting slechts op één M^3 water berekend wordt, of op het gewicht, dat daarmede gelijk staat, d. i. 1000 K. G.

Om aan te toonen, dat een kubieke M. 1000 kubieke d.M. bevat, zal fig. 141 een kubieke M. voorstellen, waarvan ABCD het grondvl. Dit grondvlak is een vierkante M. Verdeelt men de zijden AB en BC in 10 gelijke deelen, dan is ieder deel een d.M.; en trekt men dan de deellijnen, gelijk de figuur aanwijst, dan is het duidelijk, dat het grondvlak 100 d.M² bevat. Indien men voorts in het voorvlak ABEF de deellijn *ab* trekt, evenwijdig aan AB, zoodat A*a* = B*b* = 1 d.M. is, en men den kubus volgens deze lijn, evenwijdig aan het grondvlak doorsnijdt, dan is het afgesneden stuk ABCD*adcb* een prisma, 't welk 100 d.M³ bevat. Nu kan men den geheelen kubus blijkbaar in 10 zulke stukken verdeelen, en daarom zijn er $10 \times 100 = 1000$ d.M³ in den kubieken Meter.

Fig. 141.



Op gelijke wijze zal ons nu blijken, dat wanneer van een kubus iedere ribbe 5 d.M. lengte heeft, het grondvlak $5 \times 5 = 25$ d.M² zal bevatten en dus zal dan de geheele kubus $5 \times 25 = 125$ d.M³ groot zijn. In het algemeen zal men alzoo tot de waarheid geraken, dat de inhoud van een kubus gelijk is aan de derde macht van zijn ribbe, d. i. het geheele aantal kubieke eenheden, dat een kubus groot is, wordt uitgedrukt door een getal, dat gelijk is aan de derde macht van het getal lengte-eenheden in zijn ribbe bevat.

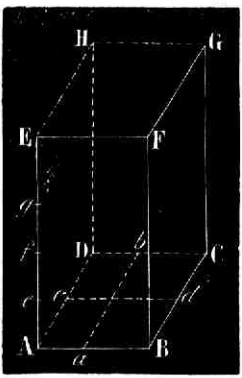
Was alzoo de ribbe van den kubus $= a$ d.M., dan zou de inhoud worden voorgesteld door $a \times a \times a = a^3$ kubieke eenheden; — te voren vonden wij de oppervlakte te zijn $6a^2$ □ eenheden: de getallen, die het oppervlak van den kubus en den inhoud voorstellen, verhouden zich dus als

$$6a^2 : a^3 = 6 : a.$$

Men onderscheidt in den kubus groote en kleine diagonalen (zie § 8). De lengte van den kleine heeft men te voren reeds leeren bepalen. Den grooten diagonaal b. v. BG (zie fig. 141), die met de ribbe DG en den kleinen diagonaal BD een rechthoekigen driehoek vormt, zal men nu eveneens gemakkelijk kunnen vinden. Is n. l. de ribbe $= a$ gegeven, dan is de kleine diagonaal $BD = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$, en dus de groote $BG = \sqrt{[(a\sqrt{2})^2 + a^2]} = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$. De volgende waarheden kan men hieruit afleiden:

$$\text{kl. diag.} : \text{gr. diag.} = a\sqrt{2} : a\sqrt{3} = \sqrt{2} : \sqrt{3}$$
$$\text{ribbe} : \text{kl. diag.} : \text{gr. diag.} = a : a\sqrt{2} : a\sqrt{3} = 1 : \sqrt{2} : \sqrt{3}.$$

Fig. 142.



Gaan wij nu tot het regelmatige vierzijdige prisma over. Het grondvl. ABCD (fig. 142) is een kwadraat. Laat iedere ribbe in het grondvlak 2 M. lang zijn, dan is het grondvlak groot 2×2 M², gelijk in de figuur is te zien. Indien nu de hoogte AE 4 M. bedraagt, dan deele men AE in de punten *e*, *f*, *g* in 4 gelijke deelen, en snijde van het prisma, evenwijdig aan het grondvlak, door het punt *e* een stuk af, dan zal dit afgesneden stuk blijkbaar 4 M³ groot zijn, en daar er 4 zulke strooken in het prisma zijn, bevat het $4 \times 2 \times 2 = 16$ M³. Hieruit blijkt dus al weder, dat de geheele inhoud van een regelmatig vierzijdig prisma gevonden wordt, door de hoogte met het grondvlak te vermenigvuldigen.

Heeft men nu een rechthoekig maar geen regelmatig prisma van vier zijden, dan nog zal men steeds dezen regel bevestigd vinden. Beschouwen wij daartoe het rechthoekige vierzijdige prisma (fig. 143), waarvan het grondvlak ABCD een rechthoek is. Laat de lengte van dien rechthoek 4 en de breedte 2 M. zijn, dan bevat hij 2×4 M², gelijk de figuur aanwijst. Indien

Fig. 143.

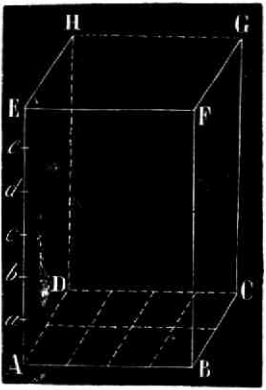
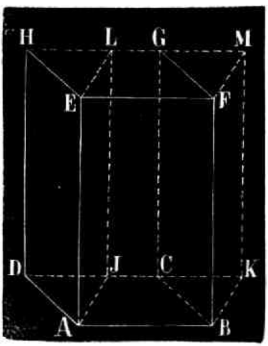


Fig. 144



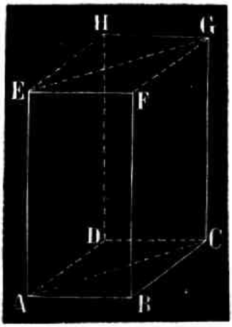
nu de hoogte AE 6 M. bevat, en men het prisma door de punten *a*, *b*, *c*, *d* en *e* op bovengenoemde wijze in 6 gelijke deelen verdeelt, dan bevat ieder stuk blijkbaar 2×4 M³, dus het geheele prisma $6 \times 2 \times 4 = 48$ M³.

Ook voor het rechthoekige vierzijdige prisma met scheefhoekig grondvlak, zal genoemde waarheid doorgaan. Zij (in figuur 144) ABCD het grondvlak, dat een scheefhoekig parallelogram vormt. Indien men dan van het grondvlak de zijde DC verlengt en uit A en B de loodlijnen AJ en BK daarop neêrlaat; en eveneens in het bovenvlak de met DC gelijkstandige zijde HG verlengt en daarop de loodlijnen EL en FM neêrlaat, dan zal door het trekken van JL en KM een rechthoekig vierzijdig prisma ABKJEFML ontstaan met rechthoekig grondvlak ABKJ. Van het eerste prisma is nu afgenomen het driezijdige prisma DAJLEH en bij het tweede is gevoegd het driezijdige prisma BKCGMF. Beide deze driezijdige prisma's hebben gelijke grond- en bovenvlakken en de zelfde grensvlakken voor opstaande zijden. Immers is

△	ADJ	gelijk	en	gelijkv.	met	△	BCK
△	EHL	»	»	»	»	△	FGM
par.	ADHE	»	»	»	»	par.	BCGF
»	AJLE	»	»	»	»	»	BKMF
en »	DJLH	»	»	»	»	»	CKMG

Daarom zal wel prisma DAJLEH gelijk zijn aan prisma BKCGMF; wat dus van het eerste prisma is afgenomen, is aan het tweede weder toegevoegd. Men besluit derhalve dat inhoud prisma ABCDEFGH = prisma ABKJEFML is; en naardien parall. ABCD = rechth. ABKJ is, moet noodwendig ook de inhoud van prisma ABCDEFGH gelijk zijn aan het grondvlak vermenigvuldigd met de hoogte.

Fig. 145.

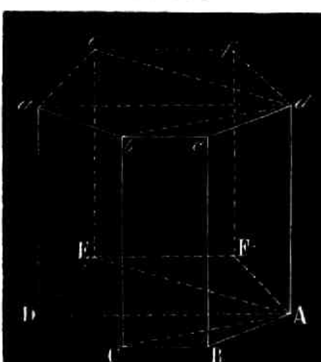


Indien men van een vierzijdig prisma, waarvan het grondvlak een parallelogram is, in het grond- en bovenvlak een gelijkstandigen diagonaal trekt, b. v. AC en EG (zie fig. 145), en het lichaam volgens deze diagonalen en de ribben AE en CG doordeelt, dan zijn beide stukken driezijdige prisma's van gelijke grootte, want het eene driezijdige prisma wordt door gelijke vlakken begrensd als het andere, terwijl beide ook dezelfde ribben hebben. De geheele inhoud is dus in twee gelijke deelen verdeeld. Men heeft alzoo:

inh. prisma ABCDEFGH	=	grondvl.	×	hoogte.
of ½ » » »	=	½ »	×	»
of ½ » » »	=	△ EFG	×	»
of inh. driez. prisma ABCEFG	=	△ EFG	×	»

De inhoud van een driezijdig prisma is dus gelijk aan het product van grondvlak en hoogte.

Fig. 146.



Hier heeft men nu den sleutel tot het vinden der inhouden van ieder ander regelmatig prisma met een veelhoekig grondvlak. Nemen wij ten voorbeelde het regelmatige zeshoekige prisma A*e* (zie fig. 146). Kiezen wij dan in het grond- en bovenvlak twee overeenkomstige hoekpunten A en *d*, door een gemeenschappelijke ribbe verbonden; trekken wij dan uit deze hoekpunten alle diagonalen in het grond- en en bovenvlak, dan wordt ieder dezer in $6-2=4$ driehoeken verdeeld, gelijk bekend is. Snijdt men nu het lichaam volgens elke twee evenwijdige diagonalen door, dan is het blijkbaar in 4 driezijdige prisma's verdeeld, die allen de zelfde hoogte hebben. Men heeft dus volgens bovenstaanden regel:

$$\begin{array}{llll} \text{inh. prisma} & ABC\mathit{dbc} = & \text{inh.} & \triangle ABC \times A\mathit{d} \\ \text{»} \quad \text{»} & ACD\mathit{dba} = & \text{»} & \triangle ACD \times A\mathit{d} \\ \text{»} \quad \text{»} & ADE\mathit{dae} = & \text{»} & \triangle ADE \times A\mathit{d} \\ \text{»} \quad \text{»} & AEF\mathit{def} = & \text{»} & \triangle AEF \times A\mathit{d} \end{array}$$

opg. ————————————————

$$\text{dus inh. pr. } A\mathit{e} = A\mathit{d} \times (\triangle ABC + \triangle ACD + \triangle ADE + \triangle AEF)$$

$$\text{of inh. zeszijdig prisma } A\mathit{e} = A\mathit{d} \times \text{inh. zeshoek } ABCDEF.$$

Ook hier geldt wederom de zelfde regel als boven. Men besluit dus, dat de inhoud van ieder prisma gevonden wordt, door den inhoud van 't grondvlak te vermenigvuldigen met de hoogte.

§ 23.

Over de inhouden van piramiden.

Indien men in een regelmatig driezijdig prisma (fig. 147) uit een hoekpunt B twee diagonalen BF en BD in de zijvlakken trekt, dan heeft men van het prisma de driezijdige piramide BDEF afgesneden en men houdt een vierzijd. piramide BACDF over (zie fig. 148). Het grondvl. ACDF dezer piramide is een rechthoek, terwijl ABC, ABF, BDF en BCD de opstaande driehoekige zijvlakk. vormen. Trekt men in het grondvlak den diagonaal AD, en stelt men zich voor, dat het lichaam volgens deze lijn en BD is doorgedeeld, dan bekomt men twee driezijdige piramiden, n. l. BADF en BACD, die beiden een gelijk grondvl.,

Fig. 147.

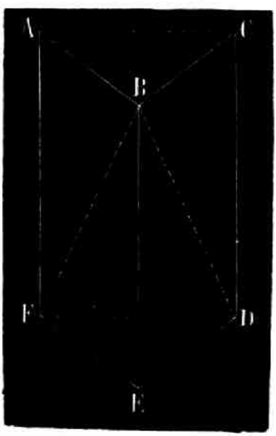
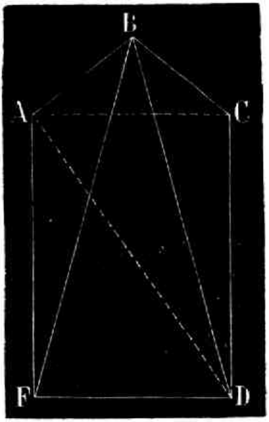


Fig. 148.



ADF en ACD, hebben en een zelfde toppunt B. Voor 's hands zij het voldoende aan te merken, dat juist daarom deze beide driehoekige piramiden van een zelfden inhoud zijn, omdat haar grondvl. en hoogte het zelfde is; het bewijs dezer waarheid kan men in de meetkunde vinden. Vergelijkt men nu piramide DBEF (fig. 147) met piramide BACD, dan vindt men:

grondvl. BEF = grondvl. BCD
zijvlak BED = zijvlak ACD
» EFD = » ABC
» BFD = » ABD

en daardoor mag men dan besluiten, dat de inhoud van piramide DBEF gelijk is aan den inhoud van BACD; maar piramide BACD gelijk zijnde aan piramide BADF, zoo besluit men, dat het prisma ABCDEF verdeeld is in 3 gelijke piramiden; en dat dus de inhoud van een driezijdige piramide gelijk is aan het derde deel van dien eens driezijdigen prisma's, dat op het zelfde grondvlak staat en de zelfde hoogte heeft als de piramide. Immers van pir. BDEF (fig. 147) is het grondvl. DEF en de hoogte, of de loodlijn, die uit den top op het grondvl. valt, BE. Dus is:

inh. prisma ABCDEF = grondvl. DEF $\times$ BE,
of $\frac{1}{3}$ » » » $= \frac{1}{3}$ » DEF $\times$ BE.
of » piramide BDEF = » DEF $\times$ $\frac{1}{3}$ BE.

Den inhoud van een driezijdige piramide vindt men dus, door het grondvlak met het derde deel der hoogte te vermenigvuldigen.

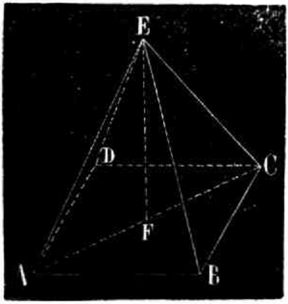
Nog op een andere meer bevattelijke wijze kan men deze waarheid aantoonen door uit het middelpunt van een kubus lijnen naar de acht hoekpunten te trekken; daardoor is dan de kubus in zes gelijke vierzijdige piramiden verdeeld. Is nu de ribbe van den kubus a, dan is:

$$\text{inh. kubus} = a \times a \times a = a^3$$
$$\text{en dus inh. vierz. pir.} = \tfrac{1}{6}\, a^3 = \tfrac{1}{6}\, a \times a^2 = \tfrac{1}{3} \times \tfrac{1}{2}\, a \times a^2.$$

Maar de hoogte van elk dezer piramiden is gelijk aan de halve ribbe of $= \frac{1}{2}a$, derhalve is ook

inh. piram. $= \frac{1}{3}$ hoogte $\times$ inh. grondvlak.

Fig. 149.



Heeft men nu een regelmatige vierzijdige piramide (fig. 149), waarvan het grondvl. een vierkant ABCD is, en waarvan de hoogte wordt voorgesteld door de lijn EF, dan zal men door het trekken van den diagonaal AC in het grondvl., en dan volgens deze lijn en AE het lichaam in tweeën te verdeelen, de twee driez. piramiden EABC en EACD bekomen, die beide de zelfde hoogte EF hebben; hierom zal men nu hebben:

inh. piram. EABC $=$ gronvl. ABC $\times \frac{1}{3}$ EF
» » EADC $=$ » ADC $\times \frac{1}{3}$ EF

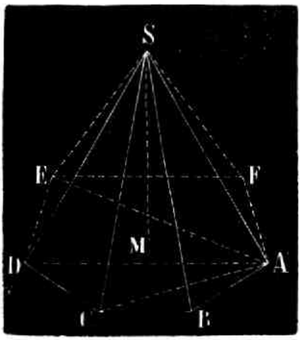
opg. ————————————————————

dus inh. vierz. piram. EABCD $= \frac{1}{3}$ EF (gr. ABC $+$ gr. ADC)
$= \frac{1}{3}$ EF $\times$ gr. ABCD.

De inhoud der regelmatige vierzijdige piramide wordt dus mede gevonden door het grondvlak met het derde der hoogte te vermenigvuldigen.

In het algemeen zal men zien, dat deze regel voor elke regelmatige piramide zal blijven bestaan, welk ook het grondvlak moge zijn. We nemen tot proef de regelmatige zeszijdige piramide SABCDEF, zie fig. 150. Het is bekend dat men het zeszijdige grondvlak, door het trekken van alle diagonalen uit één willekeurig hoekpunt A, in $6 - 2 = 4$ driehoeken kan verdeelen, en dat dan de geheele piramide in 4 driehoekige piramiden kan verdeeld worden, die allen de zelfde hoogte

Fig. 150.



SM als de zeszijdige piramide hebben. Men heeft dus:

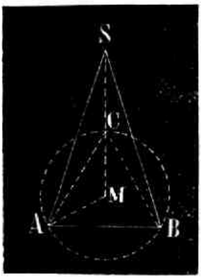
inh. driezijdige piramide	SABC	$= \triangle$ ABC $\times \frac{1}{3}$ SM
» » »	SACD	$= \triangle$ ACD $\times \frac{1}{3}$ SM
» » »	SADE	$= \triangle$ ADE $\times \frac{1}{3}$ SM
» » »	SAEF	$= \triangle$ AFE $\times \frac{1}{3}$ SM

opg.

dus inh. zesz. pir. SABCDEF $= \frac{1}{3}$ SM $\times$ oppervl. zesh. ABCDEF.

Beschouwen wij thans de berekening der inhouden van sommige piramiden nader, en letten wij eerst op het regelmatige viervlak (tetraëdrum), zie fig. 151. De oppervlakte van het grondvlak te bepalen, zal ons geen moeite kosten als de ribbe van 't tetraëdrum bekend is; maar om de hoogte SM te berekenen, merken wij op, dat het voetpunt van de lijn SM, die de hoogte voorstelt, in het middelpunt M van den driehoek ABC valt. Beschrijven wij dus om het grondvlak een cirkel (zie de figuur), dan zal de straal AM met de hoogte der piramide en de ribbe AS een rechthoekigen driehoek vormen. Uit fig. 34 is ons reeds gebleken $AC = AM\sqrt{3}$, dus $AM = \frac{AC}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3} AC\sqrt{3}$. Indien alzoo elke ribbe van het tetraëdrum $= r$ is, dan is $AM = \frac{r}{3}\sqrt{3}$, en $SM = \sqrt{(AS^2 - AM^2)} = \sqrt{\left(r^2 - \frac{r^2}{3}\right)} = \sqrt{\frac{2r^2}{3}} = r\sqrt{\frac{2}{3}}$. De inhoud van het grondvl. nu $\frac{1}{4} r^2 \sqrt{3}$ zijnde, volgens een bekenden regel, is dus inh. tetraëdr. $= \frac{1}{3} \times r\sqrt{\frac{2}{3}} \times \frac{1}{4} r^2 \sqrt{3} = \frac{1}{12} r^3 \sqrt{2}$ kub. eenheden.

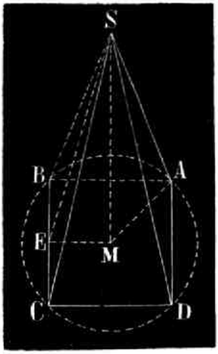
Fig. 151.



De regelmatige vierzijdige piramide heeft slechts tweeërlei ribben, n. l. 4 onderling gelijke aan het grondvl. en 4 gelijke opstaande ribben. Weet men nu de lengten van twee ongelijke ribben, dan zal men daaruit den inhoud der pir. kunnen bepalen.

Van de regelmatige vierhoekige piramide SABCD, fig. 152, zal het voetpunt M der lijn SM, die de hoogte voorstelt, in het middelpunt van 't grondvlak vallen. Beschrijft men dus om het grondvlak een cirkel, dan zal de straal AM met de hoogte

Fig. 152.

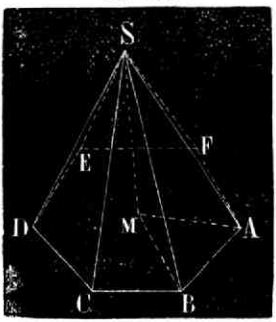


en de ribbe AS een rechthoekigen driehoek vormen. Is nu gegeven de ribbe AB in 't grondvlak $= a$, en de opstaande AS $= b$, dan is AM $= \frac{1}{2}$ middell. $= \frac{1}{2} \sqrt{2 \, AB^2} = \frac{a}{2}\sqrt{2}$, en dus SM of de hoogte $= \sqrt{(AS^2 - AM^2)} = \sqrt{\left(b - \frac{a^2}{2}\right)}$. De oppervlakte van het grondvl. is $AB^2 = a^2$, en bijgevolg de inhoud der piramide $= \frac{1}{3} \times a^2 \times \sqrt{\left(b^2 - \frac{a^2}{2}\right)} = \frac{a^2}{3}\sqrt{\left(b^2 - \frac{a^2}{2}\right)}$.

Was echter AS $=$ AB of $b = a$, dan zou de hoogte SM worden voorgesteld door $\sqrt{\left(a^2 - \frac{a^2}{2}\right)} = \sqrt{\frac{a^2}{2}} = \frac{a}{2}\sqrt{2}$, en dus de inhoud der piramide door $\frac{1}{3} \times a^2 \times \frac{a}{2}\sqrt{2} = \frac{a^3}{6}\sqrt{2}$ kubieke eenheden.

Indien van de vierz. piram. alleen bekend was de hoogte SE van een der opstaande zijvlakken en een der ribben van het grondvl., ook dan zou men gemakkelijk tot den inhoud kunnen besluiten. Door op te merken, dat deze lijn met EM, die gelijk aan de halve ribbe van het grondvl. is, en met de hoogte SM der piramide een rechthoekigen driehoek vormt, zal men hebben, zoo AB $= a$ en SE $= b$ bekend is: SM $= \sqrt{(ES^2 - EM^2)} = \sqrt{(b^2 - \frac{1}{4}a^2)}$,

Fig. 153.



en oppervl. grondvl. $= AB^2 = a^2$, dus inh piramide $= \frac{1}{3}$ SM $\times$ gr. $= \frac{1}{3} \times a^2 \times \sqrt{(b^2 - \frac{1}{4}a^2)} = \frac{1}{6}a^2\sqrt{(4b^2 - a^2)}$.

Nemen wij thans de regelmatige zeszijdige piram., fig. 153. waarvan het grondvl. een regelmatige zeshoek is, en waarvan de hoogte wordt voorgesteld door de lijn SM, wier voetpunt M in het middelpunt van het grondvl. ligt. Indien men dus om het grondvl. een cirkel beschreef, dan zou de straal AM gelijk zijn aan de ribbe van het grondvlak. Het geheele grondvl. bevat alzoo 6 gelijke gelijkzijdige driehoeken ABM. Was alsnu gegeven de lengte van iedere ribbe aan het grondvl. $= a$ en elke opstaande $= b$, dan heeft men, met het oog op het hierboven meermalen opgemerkte: $SM = \sqrt{(AS^2 - AM^2)} = \sqrt{(b^2 - a^2)}$. Daar voorts inh. $\triangle ABM = \frac{1}{4} AB^2 \sqrt{3} = \frac{1}{4} a^2 \sqrt{3}$ is, zoo is oppervl. grondvl. $= 6 \times$ inh. $\triangle ABM = 1\frac{1}{2} a^2 \sqrt{3}$, en dus inhoud zesz. pir. $= \frac{1}{3}$ grondvl. $\times$ hoogte $= \frac{1}{3} \times 1\frac{1}{2} a^2 \sqrt{3} \times \sqrt{(b^2 - a^2)} = \frac{1}{2} a^2 \sqrt{3(b^2 - a^2)}$.

Indien $SA = 2\,AB$ of $b = 2a$ ware, dan zou men voor den inhoud dezer piramide vinden $\frac{1}{2} a^2 \sqrt{3(4a^2 - a^2)} = 1\frac{1}{2} a^3$.

Was de hoogte SM der zesz. pir. gelijk aan de ribbe AB van het grondvlak, dan zou de inhoud der piramide zijn $\frac{1}{3} \times a \times 1\frac{1}{2} a^2 \sqrt{3} = \frac{1}{2} a^3 \sqrt{3}$.

Was de opstaande ribbe der piramide onbekend; terwijl de ribbe van het zeszijdige grondvl. $= a$ en de inhoud der piramide bekend waren, dan zou men vinden

$$\tfrac{1}{3}\text{ hoogte} = \frac{\text{inhoud}}{1\frac{1}{2} a^2 \sqrt{3}}$$

$$\text{of hoogte} = \frac{2 \times \text{inh.}}{a^2 \sqrt{3}}$$

dus is de opst. ribbe $AS = \sqrt{(SM^2 + AM^2)}$ ook te vinden. Indien van een tetraëdrum, zie fig. 151, de inhoud $= I$ gegegeven was, dan zou men moeten hebben:

$$I = \tfrac{1}{12} r^3 \sqrt{2}$$

$$\text{of } 12\,I = r^3 \sqrt{2}$$

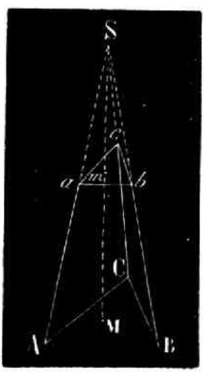
$$\text{of } 12\,I \sqrt{2} = 2r^3$$

$$\text{of } 6\,I \sqrt{2} = r^3$$

$$\text{dus } \sqrt[3]{(6\,I \sqrt{2})} = r;$$

hierdoor is dus de lengte der ribbe terug te vinden, en bij gevolg ook de hoogte en de oppervlakte van ieder zijvl. te bepalen.

Fig. 154.



Is van een regelmatige driezijdige piramide SABC, fig. 154, een regelmatige driezijdige piramide *Sabc* afgesneden, zoodat men een afgeknotte regelmatige driezijdige piramide

ABC*abc* overhoudt, dan zal men ook den inhoud van dit afgeknotte stuk kunnen vinden. Dewijl elke ribbe in het bovenvlak der afgeknotte piramide evenwijdig loopt aan de daarmede gelijkstandige ribbe in 't grondvlak, heeft men:

$$SA : Sa = AB : ab$$
$$\text{of } SA^2 : Sa^2 = AB^2 : ab^2$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad}\,\tfrac{1}{4}\sqrt{3}$$
$$\text{of } SA^2 : Sa^2 = \tfrac{1}{4}\,AB^2\sqrt{3} : \tfrac{1}{4}\,ab^2\sqrt{3}$$
$$\text{of } SA^2 : Sa^2 = \triangle\, ABC : \triangle\, abc.$$

Noemen wij de inhouden dezer beide driehoeken I en i, dan is ook, daar SM de geheele hoogte, S*m* die van 't afgesneden stuk en M*m* die der afgeknotte piramide is:

$$SA^2 : Sa^2 = I : i = SM^2 : Sm^2$$
$$\sqrt{\qquad\qquad\qquad}$$
$$\text{of } SM : Sm = \sqrt{I} : \sqrt{i};$$
$$\text{dus is } SM - Sm : \sqrt{I} - \sqrt{i} = SM : \sqrt{I} = Sm : \sqrt{i}$$
$$\text{of } Mm : \sqrt{I} - \sqrt{i} = SM : \sqrt{I} = Sm : \sqrt{i};$$
$$\text{bijgevolg } SM = \frac{Mm \times \sqrt{I}}{\sqrt{I} - \sqrt{i}} \text{ en } Sm = \frac{Mm \times \sqrt{i}}{\sqrt{I} - \sqrt{i}}.$$

Nu is volgens den bekenden regel:

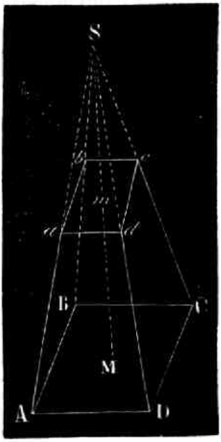
$$\text{inh. pir. } SABC = \triangle\, ABC \times \tfrac{1}{3}\, SM = \frac{I \times Mm \times \sqrt{I}}{3(\sqrt{I} - \sqrt{i})}$$
$$\text{en} \quad » \quad » \quad Sabc = \triangle\, abc \times \tfrac{1}{3}\, Sm = \frac{i \times Mm \times \sqrt{i}}{3(\sqrt{I} - \sqrt{i})}$$
$$\text{afgetr.}\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$
$$\text{rest inh. afgekn. pir. } ABCabc = \frac{Mm(\sqrt{I^3} - \sqrt{i^3})}{3(\sqrt{I} - \sqrt{i})} = \tfrac{1}{3}\, Mm(I + \sqrt{Ii} + i).$$

Den inhoud der afgeknotte piramide vindt men dus door de som van het grondvlak, bovenvlak en het hiertusschen middelevenredige vlak te vermenigvuldigen met het derde deel der hoogte.

Is de piramide afgeknot vierzijdig, fig. 155, dan zal men eveneens hebben:

$$SA : Aa = AB : ab$$
$$\text{of } SA^2 : Sa^2 = AB^2 : ab^2$$
$$\text{of } SA^2 : Sa^2 = I : i = SM^2 : Sm^2$$
$$\sqrt{\qquad\qquad\qquad}$$

Fig. 155.



$$\text{of } SM : Sm = \sqrt{I} : \sqrt{i}$$
$$\text{of } SM - Sm : \sqrt{I} - \sqrt{i} = SM : \sqrt{I}$$
$$= Sm : \sqrt{i}$$
$$\text{of } SM = \frac{Mm \times \sqrt{I}}{\sqrt{I} - \sqrt{i}}, \text{ en } Sm = \frac{Mm \times \sqrt{i}}{\sqrt{I} - \sqrt{i}}.$$

Wederom is nu:

$$\text{inh. pir. } SABCD = \text{vk. } ABCD \times \tfrac{1}{3} SM = \frac{I \times Mm \times \sqrt{I}}{3(\sqrt{I} - \sqrt{i})}$$

$$\text{inh. pir. } Sabcd = \text{vk. } abcd \times \tfrac{1}{3} Sm = \frac{i \times Mm \times \sqrt{i}}{3(\sqrt{I} - \sqrt{i})}$$

afgetr.

dus inh. afg. pir. $ABCDabcd =$

$$\frac{Mm(\sqrt{I^3} - \sqrt{i^3})}{3(\sqrt{I} - \sqrt{i})} = \tfrac{1}{3} Mm\,(I + \sqrt{Ii} + i).$$

Hier geldt alzoo weder de zelfde regel als boven, en bij verdere uitbreiding zal men dien steeds behouden, waarom wij alleen opmerken, dat deze regel voor elke afgeknotte piramide geldt.

Is ten voorbeelde van de regelmatige driezijdige piramide fig. 154, elke zijde van het regelmatige driehoekige grondvlak $= 6$ M., en stelt men zich voor, dat op de helft der geheele hoogte, die wij op 12 M. stellen, de piramide evenwijdig aan het grondvlak wordt doorgedeeld, dan zal de geheele inhoud der piramide SABC bedragen $\frac{1}{3}$ SM $\times$ inhoud $\triangle$ ABC $= \frac{12}{3} \times (\frac{1}{4} \times 6^2 \sqrt{3}) = 36 \sqrt{3}$ M^3. Daar nu de piramide op de helft der hoogte is doorgedeeld, zal *ab*, *bc* of *ac* ook de helft van AB, BC of AC zijn, en dus $\frac{6}{2} = 3$ M. bedragen Voor den inhoud van piramide S*abc* zal men nu bekomen $\frac{1}{3}$ S*m* $\times \triangle$ *abc* $= \frac{6}{3} \times (\frac{1}{4} \times 3^2 \sqrt{3}) = \frac{18}{4} \sqrt{3}$ M^3, — en dus zal de inhoud van de afgekn. pir. ABC*abc* bedragen $36 \sqrt{3} - \frac{18}{4} \sqrt{3} = \frac{126}{4} \sqrt{3}$ M^3.

Past men den regel toe, dien wij hierboven gaven, dan zou men vinden;

inh. grondvl. ABC $= \frac{1}{4} \times 6^2 \sqrt{3} = 9 \sqrt{3}$ M^2,
» bovenvl. *abc* $= \frac{1}{4} \times 3^2 \sqrt{3} = \frac{9}{4} \sqrt{3}$ M^2,
» middelevenr. vl. $= \sqrt{[(9 \sqrt{3}) \times (\frac{9}{4} \sqrt{3})]} = \frac{9}{2} \sqrt{3}$ M^2;

dus som dezer drie vlakken $= \frac{63}{4} \sqrt{3}$ M^2.

Dit vermenigvuldigd met $\frac{1}{3}$ der hoogte $= \frac{1}{3}$ M$m = \frac{6}{3} =$ 2M., komt inh. afg. pir. ABC$abc = 2 \times \frac{63}{4} \sqrt{3} = \frac{126}{4} \sqrt{3}$ M³, even als wij reeds boven gevonden hebben.

Zij, fig. 155, van de regelmatige vierzijdige piramide elke ribbe van het grondvlak 8 M. en de geheele hoogte 12 M., dan is de inhoud van de geheele piramide SABCD $= \frac{1}{3}$ SM $\times$ vk. ABCD $= \frac{12}{3} \times 8^2 = 256$ M³.

Stelt men nu, dat het doorsnijdingsvlak $abcd$ op $\frac{1}{3}$ der hoogte is aangebracht, zoodat S$m = \frac{1}{3}$ SM $= \frac{1}{3} \times 12 = 4$ M. bedraagt, dan zal elke zijde van het vierkant $abcd$ gevonden worden door de evenredigheid:

$$\text{SM} : \text{S}m = \text{SA} : \text{S}a = \text{SB} : \text{S}b = \text{AB} : ab,$$
$$\text{of SM} : \text{S}m = \text{AB} : ab,$$
$$\text{of } 12 : 4 = 8 : x$$
$$\text{waarin } x = 2\tfrac{2}{3} \text{ M.}$$

De inhoud van piramide S$abcd$ is dus $\frac{1}{3}$ S$m \times$ vk. $abcd = \frac{4}{3} \times (2\frac{2}{3})^2 = \frac{4}{3} \times \frac{64}{9} = \frac{256}{27} = 9\frac{13}{27}$ M³. De afgeknotte piramide ABCD$abcd$ bevat bijgevolg $256 - 9\frac{13}{27} = 246\frac{14}{27}$ M³.

Dit antwoord zou men ook bekomen hebben, door op te merken, dat elke ribbe van 't bovenvlak der afgeknotte piramide $\frac{1}{3}$ van de ribbe van 't grondvlak en dus $\frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$ M. is, en dat de hoogte der afgeknotte piramide $12 - 4 = 8$ M. bedraagt; alsdan zou men hebben:

$$\begin{array}{l} \text{inh. grondvl. ABCD} = 8^2 = 64 \text{ M}^2, \\ \text{» bovenvl. } abcd = (2\tfrac{2}{3})^2 = \tfrac{64}{9} \text{ M}^2, \\ \text{» middelevenr. vl.} = \sqrt{64 \times \tfrac{64}{9}} = \tfrac{64}{3} \text{ M}^2. \\ \hline \text{dus som dezer drie vlakken} = 92\tfrac{4}{9} \text{ M}^2, \\ \tfrac{1}{3} \text{ hoogte} = \tfrac{1}{3} \text{ M}m = \tfrac{8}{3} \text{ M.}, \\ \text{———— verm.} \\ \text{dus inh. afgekn. pir. ABCD}abcd = 92\tfrac{4}{9} \times \tfrac{8}{3} = 246\tfrac{14}{27} \text{ M}^3. \end{array}$$

't Zelfde wat wij hierboven hebben gevonden.

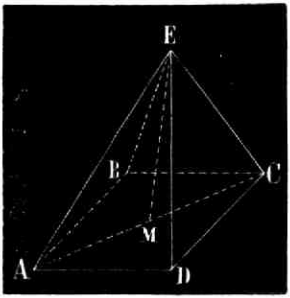
§ 24.

De inhouden der vijf regelmatige lichamen.

Tot de inhoudsvinding der *vijf* bij uitnemendheid regelmatige lichamen overgaande, merken wij op, dat het regelmatige viervlak of tetraëdrum reeds bij de piramiden, en het regelmatige zesvlak of de kubus reeds bij de prisma's zijn plaats heeft gevonden. Ons blijven dus alleen over ter behandeling het octaëdrum, dodecaëdrum en icosaëdrum, of het regelmatige acht-, twaalf- en twintigvlak.

Als wij, zie fig. 117 § 19, het octaëdrum door een vlak ABCD doordeelen, dan is het verdeeld in twee gelijke regelmatige vierz. piram. EABCD (fig. 156). Elk van deze regelmatige piram. heeft nu de eigenschap, dat haar acht ribben allen de zelfde lengte hebben. Het voetpunt der lijn EM, die de hoogte voorstelt, valt in het middelpunt van het grondvlak. Daarom zal deze lijn EM, met den straal AM van den omgeschreven cirkel en de ribbe AE een rechthoekigen driehoek vormen. Is nu iedere ribbe $= a$, dan is AC $= \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$, en dus AM $= \frac{1}{2}$ AC $= \frac{a}{2}\sqrt{2}$; alzoo is EM $= \sqrt{(AE^2 - AM^2)} = \sqrt{\left(a^2 - \frac{a^2}{2}\right)}$ $= \frac{a}{2}\sqrt{2} =$ de hoogte der piramide. Men heeft alzoo:

Fig. 156.



In fig. 156:

inh. pir. EABCD $= \frac{1}{3}$ EM $\times$ vk. ABCD $= \left(\frac{a}{6}\sqrt{2}\right) \times a^2 = \frac{1}{6} a^3 \sqrt{2}$,
en dus in fig. 117:

inh. octaëdr. EABCDF $= 2 \times$ pir. EABCD $= \frac{1}{3} a^3 \sqrt{2}$.

Men kan zich het dodecaëdrum, fig. 118 § 19, voorstellen als bestaande uit 12 gelijke regelmatige vijfzijdige piramiden, die haar toppen in het middelpunt van het lichaam vereenigen, en wier grondvlakken zich aan de oppervlakte van het lichaam bevinden. De hoogte van ieder dezer piramiden is gelijk aan de halve hoogte van 't dodecaedrum, en elke opstaande ribbe is gelijk aan de halve as. In § 19 zag men, dat het oppervlak van het grondvlak, indien de ribbe van het dodecaëdrum $= r$ was, uitgedrukt werd door $\frac{5r^2}{4}\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$ en tevens werd daar

gegeven de hoogte van 't dodecaëdrum $= r\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}$, waarom de hoogte van iedere piramide zal zijn $\frac{1}{2}r\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}$. Iedere piramide heeft alzoo tot inhoud $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}r\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}\times$
$\frac{5r^2}{4}\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} = \frac{5r^3}{24}\sqrt{\frac{47+21\sqrt{5}}{10}} = \frac{r^3}{24}\sqrt{\frac{(47+21\sqrt{5})5}{2}} =$
$\frac{r^3}{48}\sqrt{(470+210\sqrt{5})} = \frac{r^3}{48}(15+7\sqrt{5})$.

De inhoud van het dodecaëdrum is dus:

$$12\times\frac{r^3}{48}(15+7\sqrt{5}) = r^3\times\frac{15+7\sqrt{5}}{4}.$$

Eveneens kan men zich het icosaëdrum, zie fig. 121, voorstellen als bestaande uit 20 gelijke regelmatige driezijdige piramiden, wier toppunten allen in het middelpunt van 't lichaam samenkomen, en wier grondvlakken aan 't oppervlak van het lichaam zijn gelegen. De hoogte van iedere piramide is de halve hoogte van het icosaëdrum en iedere opstaande ribbe is de halve as. De ribbe van het icosaëdrum r noemende, zal volgens § 19 de hoogte van 't lichaam zijn $r\sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{6}}$ en de as $r\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$. Ieder der 20 piramiden heeft dus tot inhoud
$\frac{1}{3}\times\frac{r}{2}\sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{6}}\times\frac{1}{4}r^2\sqrt{3} = \frac{r^3}{24}\sqrt{\frac{3(7+3\sqrt{5})}{6}} = \frac{r^3}{24}\sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{2}} =$
$\frac{r^3}{48}\sqrt{(7+3\sqrt{5})2} = \frac{r^3}{48}\sqrt{(14+6\sqrt{5})} = \frac{r^3}{48}(3+\sqrt{5})$.

De geheele inhoud van het icosaëdrum is dus:

$$20\times\frac{r^3}{48}(3+\sqrt{5}) = \frac{5r^3}{12}(3+\sqrt{5}).$$

Vatten wij nu het besprokene over de regelmatige lichamen te zamen, en onderstellen wij, dat allen een zelfde ribbe hebben, die door r wordt voorgesteld, dan zal men hebben:

inhoud kubus $= r^3$

» tetraëdrum $= \frac{1}{12} r^3 \sqrt{2}$

» octaëdrum $= \frac{1}{3} r^3 \sqrt{2}$

» dodecaëdrum $= \frac{1}{4} r^3 (15 + 7\sqrt{5})$

» icosaëdrum $= \frac{5}{12} r^3 (3 + \sqrt{5})$.

Of, zoo men de wortels tot in duizendste deelen nauwkeurig berekent, is, wanneer men voor elke ribbe de eenheid neemt:

inhoud tetraëdrum $= 0{,}117....$

» octaëdrum $= 0{,}471....$

» kubus $= 1$,

» icosaëdrum $= 2{,}181....$

» dodecaëdr. $= 7{,}663....$

Ingeval de vijf regelmatige lichamen allen een zelfden inhoud hebben, dan is, dezen inhoud I noemende:

ribbe kubus $= \sqrt[3]{I}$

$$\text{» tetraëdrum} = \sqrt[3]{\frac{12\,I}{\sqrt{2}}}$$

$$\text{» octaëdrum} = \sqrt[3]{\frac{3\,I}{\sqrt{2}}}$$

$$\text{» dodecaëdr.} = \sqrt[3]{\frac{4\,I}{15 + 7\sqrt{5}}}$$

$$\text{» icosaëdrum} = \sqrt[3]{\frac{12\,I}{5(3 + \sqrt{5})}}.$$

Noemt men elken inhoud 1, dan vindt men door worteltrekking:

ribbe kubus $= 1$

» tetraëdrum $= 2{,}039...$

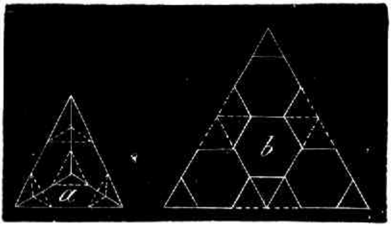
» octaëdrum $= 1{,}284...$

» dodecaëdr. $= 0{,}505...$

» icosaëdrum $= 0{,}771...$

Wanneer men van de regelmatige lichamen bepaalde deelen afsnijdt, dan houdt men somtijds lichamen over, die om hun vorm opmerking verdienen. Wij willen hiervan een paar voorbeelden geven, en ons eerst ter beschouwing voorstellen het lichaam dat ontstaat, als men van een tetaëdrum de lichamelijke hoeken tot op $\frac{1}{3}$ der ribben wegneemt.

Fig. 157.



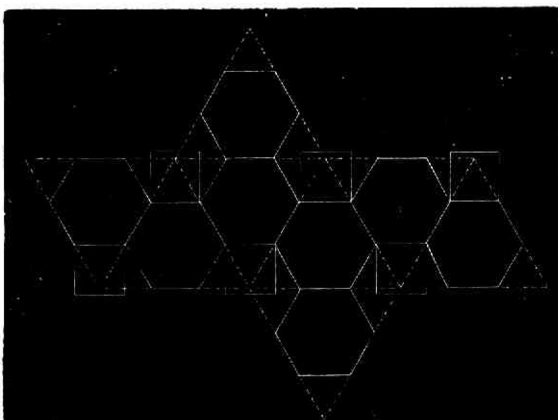
Ieder zijvlak van een tetraëdrum is een driehoek. Door het wegnemen der lichamelijke hoeken wordt elke hoek van dien drieh. afgesneden. Er komen dus in ieder zijvlak 3 nieuwe lijnen bij, waarom het een zeshoek is geworden en daar er 4 zijvlakken aan het tetraëdrum zijn, zal het nieuwe lichaam door vier zeshoeken begrensd worden. Door de afsnijding der genoemde lichamelijke hoeken, komen er bij deze 4 vlakken nog 4 nieuwe; dit zijn allen driehoeken en wel gelijkzijdige driehoeken omdat hun zijden evenwijdig loopen met die van het tegenoverstaande zijvlak van het tetraëdrum. En dewijl van ieder zijvlak van het tetraëdrum een gelijkzijdige driehoek wordt afgesneden, zoo zal het niet moeilijk op te merken zijn, dat het afgeknotte tetraëdrum begrensd wordt door vier regelmatige gelijke zeshoeken, en vier regelmatige gelijke driehoeken, zooals fig. 157 (*b*) duidelijk doet zien. Deze figuur stelt, na weglating van de gestippelde lijnen, het net voor van het afgeknotte lichaam. Indien we dit zevenvlakkig lichaam nu nader beschouwen, dan merken wij op dat het $3 \times 4 = 12$ uithoeken telt, want het snijdende vlak (een drieh.), 't welk diende om den lichamelijken hoek weg te nemen, heeft dus in plaats van één *drie* uithoeken doen ontstaan, en daar er aan het tetraëdrum 4 uithoeken waren, zijn er nu $4 \times 3 = 12$. Aan iederen uithoek zien wij 3 ribben samenkomen, dus zouden er $12 \times 3 = 36$ ribben zijn, maar daar één ribbe dient om twee punten te verbinden, zijn er slechts $\frac{36}{2} = 18$ ribben. Dit getal kon men ook langs een anderen weg vinden. Immers telt het tetraëdrum 6 ribben, en door het wegnemen van één lichamelijken hoek komen er 3 nieuwe ribben bij, dus te zamen $4 \times 3 = 12$ nieuwe ribben, die er bij komen. Er zijn dus $6 + 12 = 18$ ribben aan het lichaam. Al deze 18 ribben zijn even lang, bevattende ieder het derde deel der ribbe van 't tetraëdr.

Om het oppervlak van 't afgeknotte lichaam te berekenen, merke men op, dat zoo de ribbe van 't tetraëdrum $= r$ was, de oppervlakte van ieder zijvlak van 't tetraëdrum $\frac{1}{4} r^2 \sqrt{3}$ zou zijn. Deze oppervlakte, gelijk uit het net te zien is, telt $4 \times 9 = 36$ gelijke driehoekjes (verg. hier § 18, D. I) en het net van het afgeknotte lichaam slechts 28 zulke driehoekjes. Men heeft dus voor het oppervlak van dit laatste $\frac{28}{36} \times r^2 \sqrt{3} = \frac{7}{9} r^2 \sqrt{3}$. Is dus de ribbe van het tetraëdrum 1 d. M., dan is de oppervlakte van het aldus afgeknotte $\frac{7}{9} \sqrt{3} = 1{,}35...$ d. M².

Wil men den inhoud van 't afgeknotte lichaam weten, dan merke men op, dat ieder afgesneden stuk op zich zelf weder een tetraëdrum is. Is dus de ribbe van het geheele tetraëdrum $= r$, dan is de inhoud $\frac{1}{12} r^3 \sqrt{2}$ (zie hier boven). De inhoud van ieder afgesneden tetraëdrum zal dus zijn $\frac{1}{12} (\frac{1}{3} r)^3 \sqrt{2} = \frac{1}{324} r^3 \sqrt{2}$, dewijl de ribbe van het kleine tetraëdrum het derde deel bevat van die van het geheele. In het geheel is er dus afgesneden een inhoud van $4 \times \frac{1}{324} r^3 \sqrt{2} = \frac{1}{81} r^3 \sqrt{2}$, waarom er overblijft $\frac{1}{12} r^3 \sqrt{2} - \frac{1}{81} r^3 \sqrt{2} = \frac{23}{324} r^3 \sqrt{2}$ voor den verlangden inhoud van het afgeknotte lichaam.

Stelt men zich nu het lichaam ter beschouwing voor, dat ontstaan zal, als men van een octaëdrum eveneens de lichamelijke hoeken tot op $\frac{1}{3}$ der ribben wegneemt.

Fig. 158.



Om dit zoo eenvoudig mogelijk te doen, zullen wij ons eerst het net voorstellen van het overblijvende lichaam, om daarnaar gemakkelijker onze beschouwing te regelen. Nevensgaande fig. (158) geeft ons een voorstelling van dit net, als we namelijk alle gestippelde lijnen wegdenken. Gelijk ons uit de fig. blijkt, bestaat dit net uit 8 onderling volkomen gelijke regelmatige zeshoeken en 6 onderling gelijke vierkanten. De eerste zijn de overblijvende deelen van de zijvlakken van het octaëdrum, doch de laatste zijn nieuwe vlakken, welke ontstaan zijn door de afsnijding van de lichamelijke hoeken van 't oorspronkelijke lichaam, en dat zulks vierkanten moeten zijn, zal ons duidelijk worden als wij bedenken, dat het octaëdrum eigenlijk bestaat uit twee volkomen gelijke regelmatige vierhoekige piramiden met de grondvlakken tegen elkander geplaatst. Brengt men nu door een dezer piramiden een vlak, dat de opstaande ribben allen op gelijke hoogte doorsnijdt, dan zal de doorsnede een vierhoek moeten zijn (omdat er vier opstaande ribben waren) gelijkvormig aan het grondvlak (omdat zij daarmede evenwijdig staat); en dus zal zij een vierkant moeten zijn. En dewijl het octaëdrum zes uithoeken heeft, zoo zullen er ook *zes* zulke vierkanten moeten bijkomen, gelijk de fig. aanwijst. Denken wij nu voor een oogenblik de zes vierkanten uit de fig. weg, dan zal het niet behoeven gezegd te worden, dat het overblijvende in zijn geheel het net voorstelt van een octaëdrum, als bestaande uit 8 onderling gelijke gelijkzijdige driehoeken. Nu zijn, door de afsnijding van de lichamelijke hoeken van het octaëdrum, van elk driehoekig zijvlak de drie hoekpunten op een derde der zijden afgesneden. In ieder zijvlak of iederen driehoek komen dus drie nieuwe lijnen, zoodat er van iederen driehoek een zeshoek overblijft Het aantal zesh. zijvlakken is dus even als dat der oorspronkelijke zijden van 't octaëdrum, *acht*. Het overgebleven stuk heeft dus de schoone eigenschap dat het door 14 alle regelmatige zijvlakken begrensd wordt.

Het aantal uithoeken van het afgeknotte octaëdrum bedraagt $6 \times 4 = 24$, want door de afsnijding van iederen lichamelijken hoek is een vierhoek de grens geworden, en daar er zes uithoeken waren, zijn er nu $6 \times 4 = 24$ uithoeken. Aan iederen uithoek komen 3 ribben samen, dus zijn er aan het lichaam

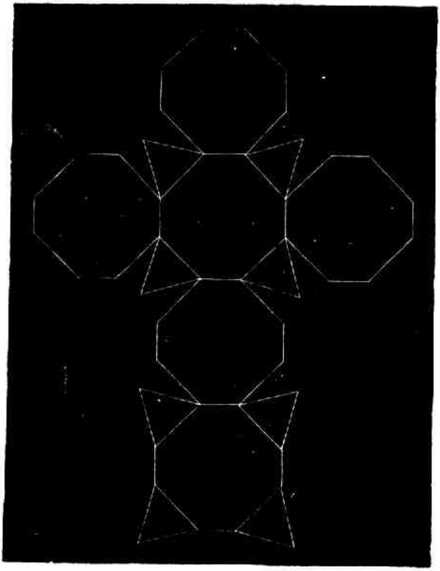
$\frac{1}{2} \times 24 \times 3 = 36$ ribben, die allen dezelfde lengte hebben. Deze 36 ribben hebben de eigenschap dat zij te zamen zoo lang zijn als de 12 ribben van 't oorspronkelijke octaëdrum. (Ook de vorige opgaaf heeft de zelfde eigenschap).

Wanneer nu bekend is de ribbe van het octaëdrum $= r$, dan is het oppervlak van ieder zijvlak van 't octaëdrum $= \frac{1}{4} r^2 \sqrt{3}$, en dus de zeshoek die in ieder zijvlak beschreven is en die 6 van de 9 driehoekjes, die het volle zijvlak bevat, telt, is dan groot $\frac{6}{9} \times \frac{1}{4} r^2 \sqrt{3} = \frac{1}{6} r^2 \sqrt{3}$. De acht zeshoeken van 't afgeknotte octaëdrum zijn dus te zamen groot $8 \times \frac{1}{6} r^2 \sqrt{3} = \frac{4}{3} r^2 \sqrt{3}$. Hierbij opgeteld de zes vierkanten, die ieder $\frac{1}{3} r$ tot ribbe hebben, en dus te samen $6 \times \frac{1}{9} r^2 = \frac{2}{3} r^2$ groot zijn, bekomt men $\frac{2}{3} r^2 (1 + 2 \sqrt{3})$ voor het geheele oppervlak van het aldus afgeknotte octaëdrum.

Aan iederen uithoek van 't octaëdrum is een regelmatige vierzijdige piramide afgesneden, waarvan de schuine ribbe gelijk is aan iedere ribbe in 't grondvlak; voor den inhoud van zoodanige piramide heeft men reeds gevonden $\frac{1}{6} a^3 \sqrt{2}$ (zie fig. 152), waarin a de ribbe. Brengt men hierin over $a = \frac{1}{3} r$, dan is de inhoud van ieder afgesneden stuk $\frac{1}{6} (\frac{1}{3} r)^3 \sqrt{2} = \frac{1}{162} r^3 \sqrt{2}$ en dus van de zes afgesneden stukken te zamen $\frac{1}{27} r^3 \sqrt{2}$. De geheele inhoud van het octaëdrum is $\frac{1}{3} r^3 \sqrt{2}$ (zie hier boven), dus rest er $\frac{1}{3} r^3 \sqrt{2} - \frac{1}{27} r^3 \sqrt{2} = \frac{8}{27} r^3 \sqrt{2}$ voor den inhoud van het afgeknotte lichaam.

Beschouwen wij eindelijk den kubus, na daarvan de lichamelijke hoeken ook op een derde van de lengte der ribben te hebben weggenomen. Om deze beschouwing met te meer vrucht te kunnen doen, letten wij op fig. 159 die ons het net van het aldus afgeknotte lichaam voorstelt. Om dit net naar eisch te teekenen, make men eerst het net van den kubus, bestaande uit zes gelijke vierkanten; vervolgens make men, naar aanleiding van 't gevraagde, van elk vierkant een achthoek en beschrijve op de vier langste zijden van grond- en bovenvlak gelijkzijdige driehoeken. Van de 14 zijvlakken, die het lichaam begrenzen, zijn dus alleen de 8 driehoeken regelmatig en gelijk: de andere zijvlakken, de zes achthoeken zijn echter onregelmatig, hoewel onderling gelijk.

Fig. 159.



Door het wegnemen van een lichamelijken hoek is een nieuw zijvl., en wel een driehoek ontstaan, en daar 8 lichamelijke hoeken zijn weggenomen, zoo telt het afgeknotte lichaam $8 \times 3 = 24$ uith. Aan iederen uithoek komen 3 ribben samen; er zijn dus $\frac{1}{2} \times 24 \times 3 = 36$ ribben aan het lichaam. Dit getal zou men ook bekomen, zoo men had opgemerkt, dat er 8 nieuwe vlakken, die driehoeken zijn, zijn bijgekomen, dus $8 \times 3 = 24$ nieuwe ribben. Geen der ribben van den kubus wordt geheel weggenomen, wel deelen daarvan, dus komen bij de 12 ribben, die een kubus heeft, nog 24 nieuwe, alzoo zijn er nu $12 + 24 = 36$ ribben.

Van ieder zijvlak van den kubus worden 4 gelijke en gelijkvormige rechthoekige driehoekjes afgesneden. Is nu de ribbe van den kubus $= r$, dan is ieder zijvlak groot r^2; hiervan af de inhoud der 4 driehoekjes $= 4 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} r \times \frac{1}{3} r = \frac{2}{9} r^2$, dan schiet er over $r^2 - \frac{2}{9} r^2 = \frac{7}{9} r^2$ voor den inhoud van ieder achthoekig zijvlak, d. i. de 6 zulke zijvlakken $6 \times \frac{7}{9} r^2 = 4\frac{2}{3} r^2$. De zijde van iederen gelijkzijdigen driehoek of van het nieuwe zijvlak $= \sqrt{[(\frac{1}{3} r)^2 + (\frac{1}{3} r)^2]} = \frac{r}{3}\sqrt{2}$; dus de grootte van iederen driehoek $= \frac{1}{4}\left(\frac{r}{3}\sqrt{2}\right)^2 \sqrt{3} = \frac{1}{18} r^2 \sqrt{3}$, d. i. van de 8 zulke driehoekjes $8 \times \frac{1}{18} r^2 \sqrt{3} = \frac{4}{9} r^2 \sqrt{3}$, bijgevolg $4\frac{2}{3} r^2 + \frac{4}{9} r^2 \sqrt{3} = \frac{2}{9} r^2 (21 + 2\sqrt{3})$ de oppervlakte van het bedoelde lichaam. Om ook den inhoud van het ontstane lichaam te vinden, merken we op, dat er 8 gelijke en gelijkvormige driehoekige piramiden zijn afgesneden. Elk dezer piramiden heeft tot grondvlak den in de figuur voorkomenden gelijkzijdigen driehoek, waarvan iedere zijde $\frac{1}{3} r\sqrt{2}$ is, en waarvan dus het oppervlak bedraagt, gelijk gezegd is, $\frac{1}{18} r^2 \sqrt{3}$.

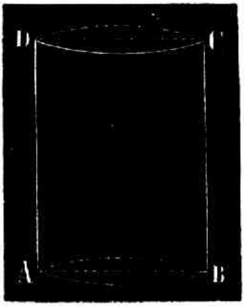
Elke opstaande ribbe heeft tot lengte $\frac{1}{3} r$ en daar de straal van den om 't grondvlak beschreven cirkel volgens de bekende formule $\frac{abc}{4 \text{Inh.}} = \frac{(\frac{1}{3} a\sqrt{2})^3}{\frac{2}{9} a^2 \sqrt{3}} = \frac{a}{9} \sqrt{6}$ is, zoo is nu de hoogte van iedere piramide $\sqrt{[(\frac{1}{3} a)^2 - \left(\frac{a}{9} \sqrt{6}\right)^2]} = \sqrt{\frac{1}{27} a^2} = \frac{a}{9} \sqrt{3}$. Volgens den bekenden regel zal alzoo de inhoud van iedere piramide gelijk zijn aan 't product van 't grondvlak met $\frac{1}{3}$ der hoogte $= \frac{1}{18} a^2 \sqrt{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{a}{9} \sqrt{3} = \frac{1}{162} a^3$. De acht afgesneden piramiden zijn dus $8 \times \frac{1}{162} a^3 = \frac{4}{81} a^3$ groot, zoodat er een lichamelijke inhoud overblijft van $a^3 - \frac{4}{81} a^3 = \frac{77}{81} a^3$ voor den afgeknotten kubus.

§ 25.

Over de inhouden van den cilinder, kegel en bol.

Bij de beschouwing van de inhouden der prisma's vonden wij dat de inhoud steeds werd gevonden door de oppervlakte van het grondvlak met de hoogte te vermenigvuldigen. Hoe groot het aantal zijvlakken van het prisma moge zijn, men heeft steeds den zelfden regel. Indien men zich nu een prisma voorstelt van een oneindig aantal zijvlakken, ook dan nog moet deze waarheid doorgaan. Heeft een regelmatig prisma een oneindig groot aantal zijvlakken, dan zal het grondvlak ook even zoo oneindig veel zijden tellen. De omtrek van zoodanigen regelmatigen veelhoek is gelijk aan den omtrek van den cirkel om den veelhoek beschreven, en de inhoud van dien veelhoek verschilt niet met dien van den cirkel. Bezit nu een prisma die eigenschap, dat werkelijk het veelzijdige grondvlak een cirkel is, dan noemt men zoodanig prisma een *cilinder*, en daar steeds de zelfde regel voor den inhoud moet gelden, besluit men, dat de inhoud van een cilinder gelijk is aan het grondvlak vermenigvuldigd met de hoogte.

Fig. 160.



Is de middellijn AB van den cilinder (fig. 160) $= m$ en de hoogte AD $= h$, dan is inh. cilinder ABCD $= \frac{1}{4}\pi \, AB^2 \times h = \frac{\pi h}{4} \times AB^2$. Is de cilinder *gelijkzijdig*, d. i. is AB $=$ AD, dan is inh. cil. ABCD $= \frac{\pi}{4} \times m^3$. Zij, ten voorbeelde, van een cilinder de middell. van het grondvl. $= 21$ d.M. en de hoogte $= 10$ d.M., dan zou men hebben:

$$\text{inh. cil.} = \frac{\pi}{4} \times h \times m^2 = \frac{22}{7 \times 4} \times 10 \times 21^2 = 3465 \text{ d.M}^3.$$

Was van een gelijkzijdigen cilinder de middellijn van het grondvlak $= 3\frac{1}{2}$ d. M., dan zou zijn:

$$\text{inh. cil.} = \frac{\pi}{4} \times m^3 = \frac{22}{7 \times 4} \times (3\tfrac{1}{2})^3 = 134{,}75 \text{ d.M}^3.$$

Weet men, omgekeerd, van een cilinder den inhoud en een der afmetingen, dan kan men de andere afmeting vinden. Weet men daarbij dat de cilinder gelijkzijdig is, dan kan men uit den gegeven inhoud de afmetingen bepalen. Om b. v. de wijdte van den *kop* te bepalen, zou men hebben:

$$\frac{\pi}{4} \times m^3 = 1000 \text{ c.M}^3,$$

$$\text{of } m^3 = \frac{4000}{\pi} = \frac{4000 \times 7}{22} = 1272{,}72$$

$$\sqrt[3]{}$$

dus $m = 10{,}8....$ c M. de middellijn.

Hebben cilinders den vorm der *Ned. kan*, d. i. als de hoogte het dubbele van de middell. van het grondvl. is, dan zal men hebben:

$$\text{inh. cil.} = \frac{\pi}{4} \times 2\,AB^3 = \frac{\pi}{2} \times AB^3.$$

Wanneer b. v. zoodanige cilinder een wijdte heeft van 2 d.M., dan is

$$\text{inh. cil.} = \frac{\pi}{2} \times AB^3 = \frac{22}{7 \times 2} \times 2^3 = \frac{22 \times 4}{7} = 12\tfrac{4}{7} \text{ d.M}^3.$$

Begeerde men een ruimte van 100 M^3 in te sluiten door een cilinder die den vorm eener kan heeft, dan zou men hebben:

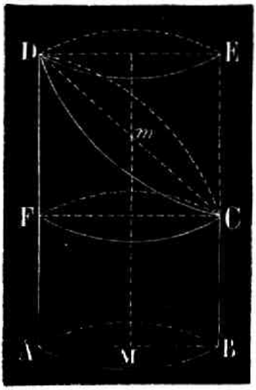
$$\frac{\pi}{2} \times AB^3 = 100\ M^3$$

$$\text{ot } AB^3 = \frac{200 \times 7}{22} = 63{,}63\,,$$

$$\text{waarin } AB = \text{middell. gr.} = 3{,}99\ldots\ M.$$

$$\text{dus de hoogte} = 7{,}98\ldots.\ M.$$

Fig. 161.



Een cilinder kan afgeknot zijn, b. v. cil. ABCD (fig. 161); ook van zoodanigen afgeknotten cilinder kan men den inhoud berekenen. Daartoe make men in gedachte den cilinder volkomen; cil. ABED zal dus de geheele zijn, waarvan de afgekn. een gedeelte uitmaakt. Laat men nu door C een vlak CF evenwijdig aan AB, dan is ook DECF een cilinder, die door het vlak CD in twee gelijke deelen wordt verdeeld. Men heeft nu:

$$\text{inh. cil. } ABCF = \tfrac{1}{4}\,\pi\,AB^2 \times AF$$

$$\text{» } \tfrac{1}{2} \text{ » } DECF = \tfrac{1}{8}\,\pi\,CF^2 \times DF = \tfrac{1}{8}\,\pi\,AB^2 \times DF$$

$$\text{dus inh. afgekn. cil. } ABCD = \tfrac{1}{8}\,\pi\,AB^2\,(2\,AF + DF).$$

$$= \tfrac{1}{8}\,\pi\,AB^2\,(AD + BC).$$

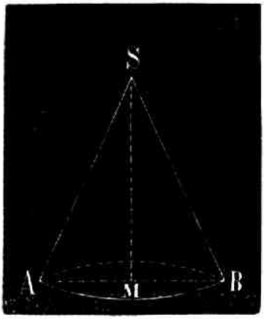
Omdat nu het vlak ABCD een trapezium is, zal de as Mm, die beide middelpunten vereenigt, worden voorgesteld door $\tfrac{1}{2}$ (AD + BC); dus is ook:

$$\text{inh. afgekn. cil. } ABCD = \tfrac{1}{8}\,\pi\,AB^2 \times 2Mm = \frac{\pi}{4} \times AB^2 \times Mm.$$

De inhoud van een afgeknotten cilinder is dus gelijk aan een geheelen cilinder, die hetzelfde grondvlak heeft als de afgeknotte, en tot hoogte de gedeeltelijke as tusschen beide vlakken van den afgeknotten cilinder begrepen.

De doorsnede CD vormt geen cirkel, maar een *ellips* of zoogenaamd *langrond.*

Fig. 162.



Hiermede meenen wij van den cilinder genoeg gezegd te hebben: wij gaan dus over tot den kegel, fig. 162. — Bij de beschouwing van de inhouden der piramiden vonden wij, dat de inhoud steeds werd uitgedrukt door het product van 't grondvlak met het derde deel der hoogte. Hoe groot het aantal zijvlakk. der piramide ook mocht zijn, men zag steeds den zelfden regel gelden; al bedroeg het aantal zijvlakken ook oneindig veel, dan nog zou deze waarheid doorgaan. Indien wij nu een regelmatige piramide hadden van een oneindig groot aantal zijvlakken, dan zou ook het grondvlak even zoo oneindig veel zijden hebben. De omtrek van zoodanigen veelhoek van een oneindig aantal zijden is gelijk aan den omtrek van den omgeschreven cirkel, en de inhoud van dien regelmatigen veelhoek verschilt niet van den inhoud van den cirkel, om dien veelhoek beschreven. Heeft nu een piramide de eigenschap, dat het aantal zijvlakken zoo groot is, dat het grondvlak een cirkel wordt, dan noemt men zoodanige piramide een *kegel*; en daar nog steeds voor den inhoud de zelfde regel moet gelden, zoo besluit men hieruit, dat de inhoud van den kegel gelijk moet zijn aan het oppervlak van 't grondvlak vermenigvuldigd met het derde der hoogte; dus op de zelfde wijze als bij de piramiden.

Is alzoo van een kegel de middellijn van het grondvl. $= m$ en de hoogte SM $= h$, dan is inhoud 'keg. SAB $= \frac{1}{4}\pi m^2 \times \frac{1}{3} h = \frac{1}{12}\pi h \times m^2$; — of zoo in plaats van de middellijn AB de straal AM $= r$ gegeven ware, zou men hebben:

$$\text{inh. kegel} = \pi r^2 \times \tfrac{1}{3} h = \tfrac{1}{3}\pi h \times r^2 = \frac{\pi}{3} \times h r^2.$$

Indien behalve de straal, niet de hoogte maar de schuine zijde SA van den kegel gegeven ware, dan zou men hebben: SM $= \sqrt{(SA^2 - AM^2)}$, en dus de inhoud van den kegel $= \pi AM^2 \times \frac{1}{3}\sqrt{(SA^2 - AM^2)}$.

Is de kegel gelijkzijdig, d. i. indien SA $=$ AB $= 2$AM is, dan is $SM = \sqrt{(4\,AM^2 - AM^2)} = \sqrt{3\,AM^2} = AM\sqrt{3}$ = hoogte van den kegel. Dus is dan de inhoud van den gelijkzijdigen kegel

$$\pi\,AM^2 \times \tfrac{1}{3}\,AM\sqrt{3} = \frac{\pi}{3} \times AM^3\sqrt{3}.$$

Wilde men dus een zekere ruimte, die wij R noemen, tusschen de oppervlakte van een kegel insluiten, die tot hoogte h moet hebben, dan kan men den straal van 't grondvlak bepalen. Immers heeft men dan

$$\tfrac{1}{3}\pi\,AM^2 \times h = R$$

$$\text{of } AM^2 = \frac{3R}{\pi h}$$

$$\text{dus } AM = \sqrt{\frac{3R}{\pi h}} = \text{straal grondvlak.}$$

Is echter de straal gegeven, dan kan men gemakkelijk uit deze vergelijking de waarde van h of de hoogte bepalen.

Moest die ruimte R in een gelijkzijdigen kegel besloten worden, dan zou men hebben:

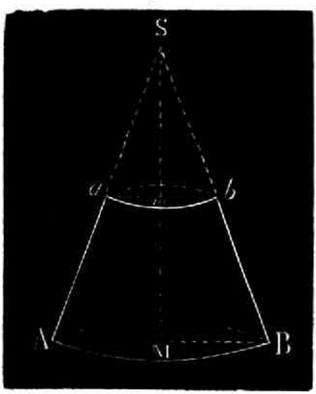
$$\frac{\pi}{3} \times AM^3\sqrt{3} = R$$

$$\text{of } AM^3 = \frac{3R}{\pi\sqrt{3}}$$

$$\text{dus } AM = \sqrt[3]{\frac{3R}{\pi\sqrt{3}}} = \sqrt[6]{\frac{3\,R^2}{\pi^2}}$$

$$\text{en bijgevolg } AB = 2\sqrt[6]{\frac{3\,R^2}{\pi^2}} = \text{middellijn grondvlak.}$$

Fig. 163.



Om den inhoud van een afgekn. kegel te vinden, (fig. 163) zij opgemerkt, dat hier dezelfde regel gelden moet als bij de afgekn. piramide, omdat kegel en piramide zoo nauw aan elkander verwant zijn. Even als bij de piramiden kan men bij den kegel ook weder den regel hiervoor afleiden. In fig. 163 toch is:

$$\mathrm{SM} : \mathrm{S}m = \mathrm{AM} : am$$

$$\rule{8em}{0.4pt}\,\surd$$

$$\text{of } \mathrm{SM}^2 : \mathrm{S}m^2 = \mathrm{AM}^2 : am^2$$

$$\rule{8em}{0.4pt}\,\pi$$

$$\text{of } \pi\,\mathrm{AM}^2 : \pi\,am^2$$

$$\text{dus } \mathrm{SM}^2 : \mathrm{S}m^2 = \text{cirk. AM} : \text{cirk. } am.$$

Noemen wij dan gemakshalve inh. cirk. $\mathrm{AM} = \mathrm{I}$, en inh. cirk. $am = i$, dan zal men vinden:

$$\mathrm{SM} : \mathrm{S}m = \sqrt{\mathrm{I}} : \sqrt{i}$$

$$\text{of } \mathrm{SM}-\mathrm{S}m : \sqrt{\mathrm{I}}-\sqrt{i} = \mathrm{SM} : \sqrt{\mathrm{I}} = \mathrm{S}m : \sqrt{i}$$

$$\text{of } \mathrm{M}m : \sqrt{\mathrm{I}}-\sqrt{i} = \mathrm{SM} : \sqrt{\mathrm{I}} = \mathrm{S}m : \sqrt{i}$$

$$\text{of } \mathrm{SM} = \frac{\mathrm{M}m \times \sqrt{\mathrm{I}}}{\sqrt{\mathrm{I}}-\sqrt{i}} \text{ en } \mathrm{S}m = \frac{\mathrm{M}m \times \sqrt{i}}{\sqrt{\mathrm{I}}-\sqrt{i}}$$

Voorts is nu

$$\text{inhoud kegel SAB} = \text{cirkel AB} \times \tfrac{1}{3}\,\mathrm{SM} = \frac{\mathrm{I} \times \mathrm{M}m \times \sqrt{\mathrm{I}}}{3(\sqrt{\mathrm{I}}-\sqrt{i})}$$

$$\text{» } \quad \text{» } \quad \mathrm{S}ab = \text{ » } \quad ab \times \tfrac{1}{3}\,\mathrm{S}m = \frac{i \times \mathrm{M}m \times \sqrt{i}}{3(\sqrt{\mathrm{I}}-\sqrt{i})}$$

$$\text{dus inh. afg. keg. AB}ba = \frac{\mathrm{M}m}{3} \times \frac{\sqrt{\mathrm{I}^3}-\sqrt{i^3}}{\sqrt{\mathrm{I}}-\sqrt{i}} = \tfrac{1}{3}\,\mathrm{M}m \times (\mathrm{I}+\sqrt{\mathrm{I}i}+i)$$

d. i. men vindt den inhoud van een afgeknotten kegel door de som van grondvlak, bovenvlak en het hiertusschen middelevenredige vlak, te vermenigvuldigen met het derde deel der hoogte van den afgeknotten kegel.

Om de waarheid van dezen regel door een proef op te helderen, onderstellen wij, dat van den kegel SAB (fig. 163) gegeven is de straal van het grondvlak $= 84$ d.M. en de hoogte $\mathrm{SM} = 3$ M., alsmede dat van den top afgerekend, de kegel op $\frac{1}{3}$ der hoogte door een vlak ab evenwijdig aan het grondvlak AB, is doorgedeeld. De afgeknotte kegel ABba zal dan tot inhoud hebben het verschil der kegels SAB en Sab. Dus:

inh. kegel SAB $=$ cirk. AB $\times \frac{1}{3}$ SM $=$

$\frac{22}{7} \times 84^2 \times \frac{30}{3} =$ 221760 d.M^3

inh. kegel Sab $=$ cirk. $ab \times \frac{1}{3}$ Sm $=$

$\frac{22}{7} \times 28^2 \times \frac{10}{3} =$ $8213\frac{1}{3}$ »

dus inh. afg. keg. ABba $= 221760 - 8213\frac{1}{3} = 213546\frac{2}{3}$ d.M^3.

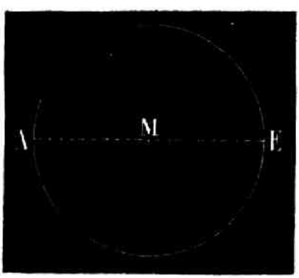
Past men den regel toe dien wij gaven, dan zou men hebben:

oppervl.	grondvl. $= \frac{22}{7} \times 84^2 =$	22176 d.M^2
»	bovenvl. $= \frac{22}{7} \times 28^2 =$	2464 »
»	midd. ev. vl. $= \sqrt{(22176 \times 2464)} =$	7392 »
	dus som dezer drie vlakken $=$	32032 d M^2
	$\frac{1}{3}$ hoogte $= \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}$ d.M.	
		verm.
	alzoo inh. afg. kegel $ABba = 213546\frac{2}{3}$ d.M.^{3}	

het zelfde, wat wij reeds gevonden hebben.

Om den inhoud van den bol te bepalen, stelle men zich voor, dat er een groot getal piram. om den bol zijn beschreven, die allen het oppervl. van den bol met haar grondvlakken raken, en die allen met haar toppen in het middelpunt van den bol liggen. Nu kan men het aantal dezer piram. naar welgevallen vermeerderen, en daardoor de grondvlakken zoo klein maken als men begeert; neemt men nu het getal piramiden oneindig groot, dan zal ieder grondvlak oneindig klein worden, en de som der grondvlakken zal minder dan de kleinst te geven hoeveelheid van het oppervlak van den bol verschillen, maar dan ook is de som van de inhouden van al deze piramiden gelijk aan den inhoud van den bol zelven. En dewijl de inhoud van iedere piramide gelijk is aan het grondvlak vermenigvuldigd met het derde deel der hoogte, zoo is de som aller piramiden of de inhoud van den bol gelijk aan de som aller grondvlakken vermenigvuldigd met het derde der hoogte, of gelijk aan het oppervlak van den bol vermenigvuldigd met het derde deel van den straal.

Fig. 164.



Daar nu het oppervlak van den bol AM (fig. 164) wordt voorgesteld door $\pi\, AE^2$, vergelijk fig. 132, zoo is dus:

inh. bol $= \pi\, AE^2 \times \frac{1}{3} AM = \frac{4}{3} \pi\, AM^3$,
of » » $= \pi\, AE^2 \times \frac{1}{6} AE = \frac{1}{6} \pi\, AE^3$,
of » » $= \pi\, AE \times \frac{2}{3} AM^2 \times \pi\, AE$.

De eerste formule zegt ons, dat de inhoud van den bol gelijk is aan zijn oppervlak, vermenigvuldigd met het derde van zijn straal; — de tweede zegt ons, dat de inhoud gelijk is aan het zesde deel van het getal π vermenigvuldigd met den kubus op zijn middellijn; — de derde zegt ons, dat de inhoud van den bol gelijk is aan twee derde deel van den cilinder, die een grooten cirkel van den bol tot grondvlak heeft en zijn middellijn tot hoogte, d. i. als men den bol in een gelijkzijdigen cilinder plaatst, die er juist om sluit, dan staat de inhoud van den bol tot dien van den omgeschreven cilinder als $2:3$.

Neemt men voor π de waarde van $22:7$, dan is $\frac{1}{6}\pi = \frac{22}{7} \times \frac{1}{6} = \frac{11}{21}$, en dan volgt uit de tweede formule de wel bekende regel, dat de inhoud van den bol verkregen wordt door de waarde van x in de evenredigheid:

$$21 : 11 = (\text{middell.})^3 : x.$$

Men stelt zich dan een kubus voor, wiens ribbe gelijk is aan de middellijn van den bol, en zegt dat deze kubus staat tot den inhoud van den bol als $21:11$.

Indien van een bol de straal 21 d.M. was, dan zou men hebben:

$$\begin{aligned}
&\text{middellijn bol} = 2 \times 21 = 42 \text{ d.M.},\\
&\text{omtrek bol} = \pi \times 42 = 132 \text{ d.M.},\\
&\text{oppervl. grooten cirkel} = \pi \times 21^2 = 1386 \text{ d.M}^2,\\
&\text{oppervl. bol} = \pi \times 42^2 = 5544 \text{ d.M}^2,\\
&\text{oppervl. bol} = 4 \times 1386 = 5544 \text{ d.M}^2,\\
&\text{inhoud bol} = \tfrac{4}{3}\pi \times 21^3 = 38808 \text{ d.M}^3,\\
&\quad » \quad » = \tfrac{1}{6}\pi \times 42^3 = 38808 \quad »\\
&\quad » \quad » = \tfrac{2}{3} \times 48 \times \pi \times 21^2 = 38808 \text{ d.M}^2.
\end{aligned}$$

Ten slotte willen wij een paar gevallen mededeelen, hoe het met de lichamen gesteld is, die *in* of *om* den bol zijn beschreven. Men zegt namelijk dat een lichaam om den bol is beschreven, als al de zijvlakken van dat lichaam het oppervlak van den bol raken; en dat een lichaam *in* den bol is beschreven als al de uithoeken van dat lichaam in het oppervlak van den bol zijn gelegen.

Stellen wij ons dan eerst voor *den kubus in den bol beschreven.* Indien MA den straal van den bol voorstelt, dan zal AB de middellijn van den bol, en AC en BC zullen ribben van den kubus voorstellen (fig. 165). Indien nu de straal van den bol

$= r$ gegeven is, dan is de ribbe van den ingeschreven kubus te vinden. Stelt men dat de kubus er in staat, en deelt men dan volgens den lichaamsdiagonaal van den kubus het geheele figuur door, dan is de doorsnede een cirkel, waarin een rechthoek staat. De diagonaal van dezen rechthoek is de middellijn van den cirkel of van den bol en dus $= 2r$; de langste rechthoekszijden zijn diagonalen over den kubus en de kortste zijn ribben van den kubus. — Stelt men nu de ribbe van den kubus $= x$, dan is de diagonaal over den kubus $= x\sqrt{2}$ volgens bekenden regel, en dus is dan in den rechthoek

$$x^2 + (x\sqrt{2})^2 = (2r)^2$$
$$\text{of } x^2 + 2x^2 = 4r^2$$
$$\text{of } 3x^2 = 4r^2$$
$$\text{dus } 3x = 2r\sqrt{3}$$
$$\text{en } x = \tfrac{2}{3} r\sqrt{3} \text{ de gezochte ribbe.}$$

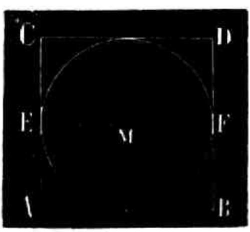
Derhalve:

$$\begin{array}{lll} \text{oppervlak} & \text{kubus} = 6(\tfrac{2}{3} r\sqrt{3}) = 8r^2 \\ \text{»} & \text{bol} \quad = 4 \times \pi r^2 = 4\pi r^2 \\ \text{inhoud} & \text{kubus} = (\tfrac{2}{3} r\sqrt{3})^3 = \tfrac{8}{9} r^3\sqrt{3} \\ \text{»} & \text{bol} \quad = \tfrac{4}{3}\pi r^3 \end{array}$$

Het verschil van beider inhouden is dus $\tfrac{4}{9} r^3 (3\pi - 2\sqrt{3})$.

Laten nu AB, BC, CD en AD de ribben van een kubus voorstellen, en ME den straal *van den bol, die just hierin kan beschreven worden;* dan is de middellijn EF van den bol (fig. 165) gelijk aan de ribbe van den kubus. Wordt dus de straal van den bol wederom door r voorgesteld, dan is de ribbe van den omgeschreven kubus $= 2r$, en men heeft weder:

Fig. 165.



$$\begin{array}{ll} \text{oppervl. kubus} = 6(2r)^2 = 24 r^2, \\ \text{»} \qquad \text{bol} = 4 \times \pi r^2 = 12\tfrac{4}{7} r^2, \\ \text{inhoud kubus} = (2r)^3 = 8 r^3, \\ \text{»} \qquad \text{bol} = 4\pi r^2 \times \tfrac{1}{3} r = \tfrac{88}{21} r^3. \end{array}$$

De inhouden van den kubus en den ingeschreven bol verhouden zich dus als $8 r^3 : \tfrac{88}{21} r^3$, of als $1 : \tfrac{11}{21}$ of als $21 : 11$ (zie boven). Het verschil der inhouden is $8r^3 - \tfrac{88}{21} r^3 = 8r^3(1 - \tfrac{11}{21}) = \tfrac{80}{21} r^3$.

Heeft men dus een kubieken bak, die juist met 1 d.M³ geheel te vullen is, en werpt men daarin een kogel, die er juist in sluit, dan zal men er nog $\frac{80}{21} \times (\frac{1}{2})^3 = \frac{10}{21}$ d.M³. water kunnen bijdoen, eer de bak geheel gevuld is.

Vergelijkt men nu den kubus *in* den bol met dien *om* den bol beschreven, dan volgt uit onze antwoorden:

opp. ing. kub. : opp. omg. kub. $= 8r^2 : 24r^2 = 1 : 3$,

inh. » » : inh. » » $= \frac{8}{9}r^3\sqrt{3} : 8r^3 = \frac{1}{9}\sqrt{3} : 1$.

Was echter gegeven de ribbe van den kubus a, dan zou de middellijn van den omgeschreven bol $a\sqrt{2}$ zijn en dus de straal $\frac{1}{2}a\sqrt{3}$, en men zou hebben:

opp. kubus $= 6a^2$,

» bol $= 4 \times \pi(\frac{1}{2}a\sqrt{3})^2 = 3a^2\pi = \frac{66}{7}a^2 = 9\frac{3}{7}a^2$,

inh. kubus $= a^3$,

» bol $= \frac{4}{3}\pi(\frac{1}{2}a\sqrt{3})^3 = \frac{1}{2}\pi a^3\sqrt{3}$.

De middellijn van den ingeschreven bol zou ook $= a$ zijn, dus de straal $\frac{1}{2}a$ en men zou dan hebben:

opp. kubus $= 6a^2$,

» bol $= 4 \times \pi(\frac{1}{2}a)^2 = a^2\pi = \frac{22}{7}a^2$,

inh. kubus $= a^3$,

» bol $= a^2\pi \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}a = \frac{1}{6}a^3\pi = \frac{11}{21}a^3$.

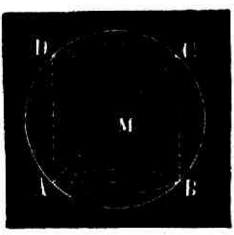
Vergelijkt men dus weder den bol *in* en *om* den kubus, dan ziet men:

opp. ing. bol : opp. omg. bol $= \frac{22}{7}a^2 : \frac{66}{7}a^2 = 1 : 3$.

inh. ing. bol : inh. omg. bol $= \frac{11}{21}a^3 : \frac{11}{21}a^3\sqrt{3} = 1 : \sqrt{3}$.

Even zoo duidelijk is het, dat men zich *in* en *om* den bol een gelijkzijdigen cilinder kan voorstellen. Zij b. v. AM de straal van den bol, dan zal ABCD de ingeschreven gelijkzijdige cilinder zijn, waarvan AB of CD de middellijnen van grond- en bovenvlak, en AD en BC de hoogte voorstellen, zoodat AB $=$ BC $=$ CD $=$ AD $=$ zijde ingeschr. vierk. is. Zij nu de straal van den bol $= r$, dan is AB $= \sqrt{2r^2} = r\sqrt{2} =$ midd. grondvl. cilinder. De omtrek van het grondvl. is alzoo $\pi \times r\sqrt{2}$, en dus het ronde oppervlak van den cilinder $=$ AD $\times$ omtrek grondvl.

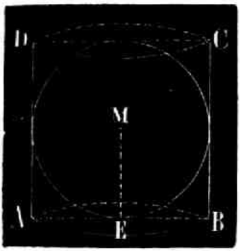
Fig. 166.



$= r\sqrt{2} \times \pi \times r\sqrt{2} = 2\pi r^2$, hierbij opgeteld de oppervlakken der beide grondvlakken, bekomt men:

opp. cil. $= 2\pi(\frac{1}{2}r\sqrt{2})^2 + 2\pi r^2 = 3\pi r^2 = \frac{66}{7} r^2 = 9\frac{3}{7} r^2$,
» bol $= 4\pi r^2 = 12\frac{4}{7} r^2$,
inh. cilind. $= \frac{1}{4}\pi AB^2 \times AD = \frac{1}{4}\pi AB^3 = \frac{1}{4}\pi(r\sqrt{2})^3 =$
$\frac{1}{2}\pi r^3\sqrt{2} = \frac{11}{7} r^3\sqrt{2}$,
inh. bol $= 4\pi r^2 \times \frac{1}{3} r = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{88}{21} r^3$.

Fig. 167.



Zij voorts ME de straal van een bol, en AB de zijde van het vierkant om den grooten cirkel van dien bol beschreven (fig. 167), dan is ABCD de gelijkzijdige cilinder *om* den bol beschreven. Is nu gegeven de straal van den bol $= r$, dan is $AB = 2r$, als zijde van 't omgeschreven vierkant. De omtrek van het grondvlak is dus $2\pi r$, en men heeft:

opp. cilind. $= 2r \times 2\pi r + 2\pi r^2 = 6\pi r^2 = \frac{132}{7} r^2$,
» bol $= 4\pi r^2 = 12\frac{4}{7} r^2$,
inh. cilind. $= \pi r^2 \times 2r = 2\pi r^3 = \frac{44}{7} r^3$,
» bol $= 4\pi r^2 \times \frac{1}{3} r = \frac{88}{21} r^3$.

Beschrijft men dus *in* en *om* den zelfden bol een cilinder, dan is:

opp. ing. cil. : opp. omg. cil. $= 3\pi r^2 : 6\pi r^2 = 1 : 2$,
inh. » » : inh. » » $= \frac{1}{2}\pi r^3\sqrt{2} : 2\pi r^3 = \sqrt{2} : 4$.

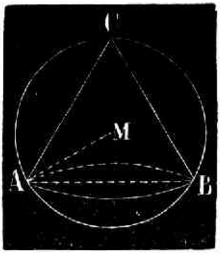
Vergelijkt men den omgeschreven kubus met den gelijkzijdigen cilinder om den zelfden bol beschreven, dan zal men zien, dat de omgeschreven cilinder ook juist in den kubus zal passen, en uit de verkregen antwoorden blijkt:

inh. omg. cil. : inh. omg. kub. $= \frac{44}{7} r^3 : 8r^3 = 44 : 56 = 11 : 14$.

Deze uitkomst had men ook te voren kunnen verwachten, want de cilinder en kubus hebben de zelfde hoogte; hunne inhouden hangen dus alleen af van de grondvlakken, en dewijl de cilinder juist in den kubus sluit, zoo zal het grondvlak van den cilinder, dat een cirkel is, juist in het grondvlak van den kubus, dat een vierkant is, kunnen geplaatst worden, en de verhouding van deze twee vlakken is, gelijk wij reeds bij de beschouwing van den cirkel zagen, als 11 : 14.

Stelt men nogmaals AM (fig. 168) den straal van den grooten cirkel van een bol, en AB = AC = BC = zijde ingeschr. regelmatigen driehoek, dan zal kegel ABC een gelijkzijdige zijn, in den bol beschreven. Indien nu AM = straal bol = r is, dan is (zie § 4, fig. 34) AB $= r\sqrt{3}$; de omtrek van het cirkelvormige grondvlak is dus $\pi \times r\sqrt{3}$, en bijgevolg het ronde oppervlak van den kegel $= \frac{1}{2}$ AC $\times$ omtrek grondvl. $= \frac{1}{2} r\sqrt{3} \times \pi r\sqrt{3} = \frac{3}{2}\pi r^2 = \frac{33}{7} r^2$. Hierbij geteld het oppervlak van 't grondvlak, heeft men dus:

Fig. 168.



opp. kegel ing. $= \frac{3}{2}\pi r^2 + \frac{3}{4}\pi r^2 = \frac{9}{4}\pi r^2 = \frac{99}{14} r^2$,

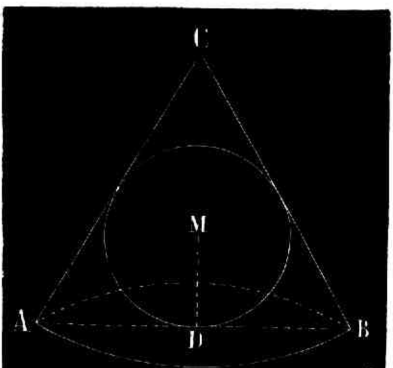
» bol $= 4\pi r^2 = 12\frac{4}{7} r^2$,

inh. kegel $= 3\,(\frac{1}{2} r\sqrt{3})^3\sqrt{3}$ (zie fig. 162) $= \frac{3}{8}\pi r^3 = \frac{33}{28} r^3$,

» bol $= 4\pi r^2 \times \frac{1}{3} r = \frac{88}{21} r^3$.

Is echter AB = AC = BC (fig. 170) = zijde omgeschr. regelm. drieh., dan is kegel ABC om den bol DM, of de bol in den kegel beschreven. Is dus wederom de straal van den bol $= r$, dan is (zie fig. 41, § 4) AB = zijde omg. driehoek $= 2r\sqrt{3}$. Men zal dus wederom na eenige berekening vinden:

Fig. 169.



opp. omg. kegel $= 6\pi r^2 + 3\pi r^2 = 9\pi r^2 = \frac{198}{7} r^2$,

inh. omg. keg. $= \dfrac{\pi}{3}(r\sqrt{3})^3\sqrt{3} = 3\pi r^3 = \frac{66}{7} r^3$.

Vergelijkt men dus den kegel die *in*, met dien, die *om* den zelfden bol is beschreven, dan zal men hebben:

opp. ing. kegel : opp. omg. kegel $= \frac{9}{4}\pi r^2 : 9\pi r^2 = 1 : 4$.

inhoud ing. kegel : inh. omg. kegel $= \frac{3}{8}\pi r^3 : 3\pi r^3 = 1 : 8$.

Uit de geleverde bewerkingen zal men nog kunnen opmaken, dat zoo men in een bol een kubus, cilinder en kegel plaatst, men hebben zal:

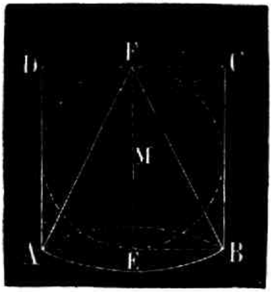
$$\text{inh. kub.} : \text{inh. cil.} : \text{inh. kegel} = \tfrac{8}{9} r^3\sqrt{3} : \tfrac{1}{2}\pi r^3\sqrt{2} : \tfrac{3}{8}\pi r^3 = 64\sqrt{3} : 36\pi\sqrt{2} : 27\pi.$$

En zoo men om den zelfden bol de drie genoemde lichamen beschrijft, dat men dan zal hebben:

$$\text{inh. kub.} : \text{inh. cil.} : \text{inh. keg.} = 8r^3 : 2\pi r^3 : 3\pi r^3 = 8 : 2\pi : 3\pi.$$

Beschouwen wij nogmaals fig. 167, voorstellende een cilinder om een bol beschreven. Indien men dan in dezen cilinder een kegel plaatst, zoodanig, dat hij het grondvlak van den cilinder tot zijn grondvlak heeft, en dat de top in het middelpunt F van 't bovenvlak valt, dan is de hoogte van dien kegel gelijk aan de hoogte van den cilinder (fig. 170). Is dus wederom de straal van den bol $= r$, dan is $AB = 2r$, dus $AE = r$, $EF = 2r$, en bijgevolg de schuine zijde AF van den kegel $= \sqrt{[(2r)^2 + r^2]} = \sqrt{5r^2} = r\sqrt{5}$. De ronde oppervlakte van den kegel zal dus $2\pi r \times \frac{1}{2} r\sqrt{5} = \pi r^2\sqrt{5}$ zijn, en men heeft dus:

Fig. 170.



opp. bol $= 4\pi r^2$,
» cil. $= (2\pi r \times 2r) + 2\pi r^2 = 6\pi r^2$,
» kegel $= \pi r^2\sqrt{5} + \pi r^2 = \pi r^2 (1 + \sqrt{5})$,
inh. bol $= 4\pi r^2 \times \frac{1}{3} r = \frac{4}{3}\pi r^3$,
» cilind. $= \pi r^2 \times 2r = 2\pi r^3$,
» kegel $= \pi r^2 \times \frac{2}{3} r = \frac{2}{3}\pi r^3$,

Hieruit blijkt dus de merkwaardige eigenschap, dat

$$\text{inh. keg.} : \text{inh. bol} : \text{inh. cil.} = \tfrac{2}{3}\pi r^3 : \tfrac{4}{3}\pi r^3 : \tfrac{6}{3}\pi r^3 = 1 : 2 : 3.$$