Het vraagstuk der rechtlijnige centraalbeweging, als bijdrage voor de kritiek onzer hedendaagsche beoefening der wiskunde : opmerkingen en nadere toelichting

BoekNummer	**12173**
zendingnummer	24
Titel	Het vraagstuk der rechtlijnige centraalbeweging, als bijdrage voor de kritiek onzer hedendaagsche beoefening der wiskunde : opmerkingen en nadere toelichting
Auteur	Schuringa, Pieter
Plaats	Zierikzee
Uitgever	
Jaar	1873
Druk	
Deel	
Signatuur	MAG: Q oct 2583
Verblijfplaats	Utrecht
Paginas	titel1-titel6, 5-66, [i]
FileNames	12173titel1.tif - 12173titel6.tif, 121730005.tif - 121730066.tif, 12173n001.tif
FoutievePaginas	
Bijzonderheden	

N: 8, 1873.

HET VRAAGSTUK

DER

Rechtlijnige Centraalbeweging,

ALS

BIJDRAGE VOOR DE KRITIEK

ONZER

HEDENDAAGSCHE BEOEFENING DER WISKUNDE.

OPMERKINGEN EN NADERE TOELICHTING,

DOOR

DR. P. SCHURINGA.

Stulta est clementia, cum tot ubique
..... occurras periturae parcere chartae.
JUV. *Sat.* I.

ZIERIKZEE,
H. LAKENMAN.
1873.

2 ~~Fl~~ 90.

HET VRAAGSTUK

DER

RECHTLIJNIGE CENTRAALBEWEGING.

HET VRAAGSTUK

DER

Rechtlijnige Centraalbeweging,

ALS

BIJDRAGE VOOR DE KRITIEK

ONZER

HEDENDAAGSCHE BEOEFENING DER WISKUNDE.

Opmerkingen en nadere toelichting,

DOOR

Dr. P. SCHURINGA.

> Stulta est clementia, cum tot ubique
> ..... occurras periturae parcere chartae.
> Juv. *Sat.* I.

ZIERIKZEE,
H. LAKENMAN.
1873.

nadere bespreking licht zou ontaarden in datgene, wat de heer Korteweg (bl. 2) terecht aanduidt als woordenzifterij.

Eene hoofdzwarigheid van Dr. Schouten *ontmoeten* wij in eene vraag, die zich vertoont op bl. 6 van »*Welke waarde*" enz., de vraag namelijk, *in welke richting* (in het krachtcentrum) *de versnelling wordt aangenomen te werken.*

Helaas, onnoodig bezwaart deze vraag den schrijver. Er ontstaat geheel geene vraag; de vraag is eens voor al gedaan: een punt beweegt zich rechtlijnig naar een aantrekkend centrum heen, onder eene gegevene wet der versnelling: $\frac{d^2 x}{dt^2} = f(x)$; men *vraagt: wat zal in dat centrum van die beweging worden?*

Wij hebben hier te doen met eene *algemeene* versnellings-wet, die ook in 't krachtcentrum wordt ondersteld dezelfde te blijven, zoodat ook dáár (»*Welke waarde*" bl. 5) »de versnelling gericht is volgens de lijn, welke het bewegende punt met het centrum verbindt." Wil men de »bovenstaande vraag" doen, dan is zij onbepaald, en de vele willekeurige hypothesen, waarmede men haar kan beantwoorden, doen even zoo vele afzonderlijke vraagstukken ontstaan, gelijk bijv. dat in »*Welke waarde*," bl. 9. Op die wijs krijgt men wel *een* bepaald vraagstuk, doch niet *het* moeilijke vraagstuk, dat in deze en de vorige eeuw zoo dikwijls hoofdbreken heeft gekost, en als »bijzondere omstandigheid" zich voordoet bij het algemeen geformuleerde probleem der centraalbeweging, *zonder bij-onderstellingen.* Dit *historische* vraagstuk is het, dat blijkens 't eerste hoofdstuk van het »*Onderzoek*" etc. bedoeld is door Prof. v. G.; en bij eene opmerkzame lezing van het geschiedkundig overzicht in dat hoofdstuk, zou het Dr. Schouten gebleken zijn, dat hier voor »vragen" noch »onderstellingen" ruimte was. Ter toelichting hiervan is het voldoende, enkele gedeelten in herinnering te brengen uit de reeds door Prof. v. G. geleverde aanhalingen, bij diens oplettende studie van de litteratuur dezer zaak.

Op bl. 6 van het »*Onderzoek*" blijkt uit *Newton's* woorden, dat deze telkens de wet der versnelling (kracht) opgeeft, bijv.: »ubi vis .... decrescit in maiore quam triplicata ratione altitudinis," en »at si vis vel decrescat in minore quam triplicata

Stulta est clementia, cum tot ubique
..... occurras periturae parcere chartae.
Juv. *Sat.* I.

1. De in Juni des vorigen jaars verschenene brochure: »Onderzoek eener bijzondere omstandigheid der centrale beweging," door Dr. P. van Geer, gaf den schrijver dezes aanleiding tot de uitgaaf van een opstel, getiteld: »De vrije centraalbeweging in de rechtlijnige baan" etc. In verband met de te voren in mijn academisch proefschrift uitgesprokene meening, heb ik getracht in dat opstel de gronden te ontwikkelen eener opinie, lijnrecht tegenovergesteld aan de conclusie, door den genoemden hoogleeraar getrokken in het ter spraak gebrachte vraagstuk. Met het doel om op te bouwen meer dan af te breken, heb ik mij tot zelfs in den vorm aangesloten aan de beschouwingen van Prof. v. G., tot zoover, als die mij juist voorkwamen, om vervolgens des te beter de afwijking te doen uitkomen dáár, waar naar mijn inzien de onjuistheid gelegen was, en een ander gezichtspunt moest worden gekozen. Met voorbijgang der meer ondergeschikte bloote ophelderingen, strekten mijne beschouwingen tevens tot weêrlegging van de toelichtingen des hoogleeraars, in zoover als die eene wetenschappelijke redeneering inhielden, en bestemd waren om door klemmend verband met bekende zaken de voorgestane meening te steunen.

Sedert de uitgaaf mijner brochure zijn intusschen nog eenige geschriften uitgekomen, die betrekking hebben op hetzelfde onderwerp. Van den heer D. J. Korteweg verscheen in November d. v. j. eene brochure, getiteld: »Nasporingen omtrent de bijzondere omstandigheid der centrale beweging, onlangs door Dr. P. van Geer onderzocht," — waarop spoedig, in

December, volgde: »Welke waarde hebben de resultaten van den hoogleeraar Dr. P. van Geer en die van Dr. P. Schuringa, gevonden bij het onderzoek eener bijzondere omstandigheid der centrale beweging? Beantwoord door Dr. G. Schouten." Eindelijk, in de vorige maand, verscheen [1]) van mijn bovengenoemd opstel eene beoordeeling van den heer J. Versluys, tevens auteur eener bijna gelijktijdig verschenen brochure: »De Fouten, die voorkomen in een gedeelte van Prof. van Geer's Geschrift over centrale beweging."

De strekking der drie laatstgenoemde brochures is zeer uiteenloopend. De verhandeling des heeren Korteweg heeft slechts het onderzoek der onderhavige quaestie ten doel, en onthoudt zich bijna geheel van opzettelijke bestrijding der verschillende meeningen in dit vraagstuk. De conclusien in dit geschrift stellen de oplossing der quaestie voor als onbepaald, òf althans onbeslist. Het opstel van Dr. Schouten daarentegen beoogt voornamelijk de kritiek, beschouwt het vraagstuk als onbepaald en onoplosbaar, en concludeert tot staking van het onderzoek. Het stukje: »*De Fouten*" eindelijk, bevat de opsomming van vijftien of zestien uit ruim tien bladzijden bijeenverzamelde »fouten" van Prof. van Geer. Het dertiental bladzijden, waarin nu die fouten zijn aangewezen, is dus te beschouwen als eene proeve van zuivere kritiek.

Dit laatste geldt natuurlijk ook van de bovengenoemde *kritiek* mijner brochure; ééne slot-opmerking daarin betreft echter een ernstig punt: het is die, waarin de beoordeelaar het verband beseft der aanhangige quaestie met de geschiedenis van de beoefening der wiskunde, en op grond daarvan aan mijn opstel zekere belangrijkheid toekent, met het oog op de »*beoefening*

---

[1]) In no. 4 van het »Schoolblad," Courant voor L., M. en Gymn. Onderwijs, onder redactie van J. Versluys en C. A. van Riet. Deze beoordeeling wordt in het volgende bedoeld, indien van de »*kritiek*" mijner brochure wordt gesproken. De gemelde courant bevatte reeds in Juni 1872 deze belofte van den heer V.: »Wij zullen afwachten of anderen de jongste pennevrucht van Prof. v. G. de plaats aanwijzen, die haar toekomt. Wij hopen dat het geschieden zal door iemand, die bepaald mechanica en verwante vakken tot zijne studievakken gekozen heeft; zoo niet, dan zal ik, ofschoon mijne studie eene andere richting genomen heeft (*sic*), die taak op mij nemen in een afzonderlijk geschrift."

der wiskunde in ons vaderland." Deze laatste vaderlandsche snaar vond ook bij mij weêrklank: de kennis onzer vaderlandsche beoefening der wiskunde is van hoog gewicht, en juist deze quaestie der rechtlijnige centraalbeweging heeft enkele bijdragen opgeleverd, die inderdaad voor die kennis belangrijk zijn. In 't bijzonder wil ook ik daarom in de volgende bladen eens een' kritischen blik trachten te werpen, en wel vooral op den inhoud der drie bovengenoemde laatst uitgekomene brochures. Voor zoover zij het werkje van den heer Korteweg betreft, kan deze kritiek zich bepalen tot enkele opmerkingen, nevens aanwijzing en motiveering der onjuistheid van sommige gezichtspunten.

Anders is het echter met de twee overigen. Dr. Schouten meent dat het bekende vraagstuk eigenlijk geen vraagstuk, en dus voor de beoordeeling der *resultaten* het onderzoek der *beschouwingen* overtollig is. Iets minder ver gaat de heer Versluys: deze gelooft in zijne *kritiek*, dat de zwaarste der »fouten" bestaat in verkeerde toepassing der methode van Cauchy. Deze beide excepties nu moeten onverbiddelijk worden afgewezen. Dit aan te toonen, en daardoor het argelooze der naïviteit in het licht te stellen, die stoutweg dergelijke excepties opwerpt, is eene meer verdrietige dan moeilijke taak, waarvan echter de vervulling misschien niet overtollig is voor de al of niet deskundige lezers der bedoelde brochures en der bewuste kritiek.

Die taak is mij bovendien een zekere *plicht*. Immers de misvatting van Dr. Schouten ontstaat ten deele uit miskenning der, vroeger door mij opzettelijk voorbijgegane, *geschiedenis* van ons vraagstuk, — terwijl de hoofdgrief van den schrijver der »*Fouten*" te wijten is aan den beknopten *vorm* der formules, waardoor die criticus blijkbaar in de war is gebracht, en die in mijn vorig opstel (zie ald. bl. 11) om bovengenoemde reden *opzettelijk* in *aansluiting* aan Prof. v. G. was gekozen. Daarom bespreek ik ook de »*Fouten*," ofschoon tevens als toelichting tot de bovengenoemde kritiek. Voor het overige zal de hoogleeraar v. G. zelf ongetwijfeld niet het antwoord schuldig blijven op elke betamelijke en wetenschappelijke bestrijding *zijner* meeningen in de eens ter sprake gebrachte quaestie.

Deze *nadere toelichtingen*, alsnog verschuldigd, blijkens de mogelijkheid der brochure van Dr. Schouten, en der kritiek van den schrijver der »*Fouten*," wensch ik aan te brengen in geregelde aansluiting aan den logischen gedachtengang dezer zaak, en voorts aan de orde in mijn vroeger opstel gevolgd. Intusschen beantwoordt deze volgorde ook ten deele aan de chronologische opvolging, zoodat ik de kritiek van den heer V. grootendeels eerst behoef te bespreken ná de denkbeelden van Dr. Schouten.

2. Ons probleem is niet een dynamisch, maar een *cinematisch* vraagstuk. Men heeft te doen met eene gegevene versnellingswet, waaraan de beweging van één enkel punt is onderworpen, van welke beweging diensvolgens de zuiver geometrische theorie moet gevonden worden, onafhankelijk van den aard der de versnelling veroorzakende *krachten*, en van den invloed der *massa's* op deze beweging. De begrippen van *arbeid* en *levende kracht* zijn dus aan dit vraagstuk vreemd, hetwelk dan ook vroeger steeds in het oog is gehouden.

Daarom is eene algemeene bedenking, die ik in de eerste plaats tegen de brochure van den heer Korteweg wil maken, deze, dat zij op verschillende plaatsen (bl. 14, 24, 41, 63) spreekt van levende kracht, arbeidsvermogen, te verrichten arbeid en moleculen. Evenwel is hier van belang het algemeene dynamische principe: dat bij eene bestaande *krachtfunctie* (»ergal"), — waaraan dit geval eener *centraalkracht* beantwoordt, — gedurende de geheele beweging de aangroeiing der levende krachten slechts van de aanvangs- en eindpositiën afhangt, — of, dat bij een »conservatief systeem" de som der »potentieele" en »cinetische energie" standvastig is. Dit principe nu grondt zich ter laatster instantie toch op de overeenkomstige cinematische wet, die geldt voor één enkel punt, en gevonden wordt door de eerste *integratie* der bewegings-vergelijking. Vandaar dat men de genoemde wet evenzeer kan toepassen bij onze cinematische beschouwing van één bewegend punt, mits men in plaats van *levende kracht* en aangroeiing van den *arbeid,* spreke van het vierkant der *snelheid,* en van 't product van *versnelling* en *afstand* tot het centrum.

Uit de mogelijkheid, om de versnelling uit te drukken in functie van den afstand, vloeit dan ook in ons vraagstuk voort, dat het vierkant der snelheid, dus ook deze zelf, slechts van den *afstand* afhangt, en in het algemeen voor denzelfden afstand steeds *dezelfde waarde* zal verkrijgen. Of echter dit laatste ook het geval zal zijn, indien het bewegende punt inmiddels dóór het krachtcentrum, en de bovenbedoelde integraal dóór oneindig groot passeert, dit wordt aan rechtmatigen twijfel onderhevig. Niet eerder zal men deze gevolgtrekking uit het principe der levende kracht hier mogen toepassen, dan nadat aangetoond is, dat bij dien doorgang de plotselinge vergrooting der integraal nul moet zijn.

De in »*Nasporingen*" op bl. 26 gevoerde algemeene redeneering nu, over die soort van »limiet-overgangen," welke de heer K. in zijne § 3 bedoelt, zou — daar er geen bepaalde limiet-overgang werkelijk wordt uitgevoerd, — slechts dàn eenige waarde hebben, indien men a priori daarbij voor alle gevallen mocht aannemen het bestaan eener algemeene wet. Zoodanige wet, staande *boven* de verschillende bijzondere versnellingswetten, zou slechts kunnen worden geleverd door een (dynamisch) *principe,* zooals de bovenbedoelde gevolgtrekking der gelijke snelheden bij gelijken afstand. Die waarde der genoemde redeneering is thans echter afwezig, want de algemeene geldigheid van dit principe vereischt juist *hier* bevestiging.

Iets dergelijks geldt van de algemeene redeneering aan het slot der vorige § 2 op bl. 24 der »*Nasporingen.*" Terecht gevoelt aldaar de heer K. dat tusschen *geene* en eene *oneindig kleine* verplaatsing geen onderscheid mag gemaakt worden (verg. hierachter § 5), en vindt daarom het verlies van snelheid in het krachtcentrum onverklaarbaar en onwaarschijnlijk. Doch de volstrekt algemeene geldigheid van 't principe van *behoud* der (levende kracht en) snelheid is, wegens analogie met alle overige gevallen, bloot *waarschijnlijk* voor dit geval, waar het *strenge* aantoonen juist nog afhangt van de waarde der singuliere integraal.

Die waarschijnlijkheid, (de oorzaak der vaste *meeningen* van Robins, d'Alembert, Laplace [1]) e. a.), te verheffen tot zekerheid, dit is het doel der quaestie, wier belang geenszins uitsluitend indirect en analytisch, maar ook direct voor de Physica wellicht grooter is, dan wij vermoeden. Niettegenstaande de gevestigde dynamische principes, zoude echter de cinematica in dezen het antwoord moeten schuldig blijven, indien dat antwoord van de eigenlijke Analyse afhing. De taak der *analyse* is hier echter ten einde, juist omdat het niet aankomt op 'tvinden der eigenschappen van het *geheel*, maar alleen op de *elementen* zelf. Daarom kunnen wij, ofschoon hier schijnbaar eene ontdekking wordt vereischt, ook geen baat vinden bij de zoo bij uitstek analytische nieuwere methoden, te meer omdat de toepassingen daarvan op de eigenlijke *cinematica* uit den aard der zaak schaarsch zijn. (Zie intusschen nog hierachter, § 13). Daarom eindelijk, wordt dat antwoord alleen, maar ook volkomen, geleverd door kritisch onderzoek der begrippen van oneindig klein en groot; der continuïteit van tijd en ruimte, en der beteekenis van functien en onafhankelijke veranderlijkheid. (Verg. »*De vrije C.*," §§ 5 en 12, en hierachter § 5 vgg.)

3. Gaan wij over tot den *analytischen* aard van het vraagstuk, en tot de brochure van Dr. Schouten. Daar ik ook ditmaal bij ondergeschikte zaken mag noch wil verwijlen, ga ik met stilzwijgen enkele opmerkingen voorbij van bl. 5, wier

---

1) Zie Dr. P. v. G. »*Onderzoek*" enz. bl. 15, 24, 27 en 28. In de *Nachr. der Kön. Ges. der Wiss.*, Dec. 1872 heeft Clausius eene verhandeling gegeven over nieuwe door hem afgeleide betrekkingen bij stationaire centraalbewegingen. Ofschoon in dit stuk, zoowel als in een vorig daarbij behoorend (*Nachr.* 1871, S. 245), het *rechtlijnige* als bijzonder geval optreedt, als n.l. p of $q = 0$ wordt (*N.* 1872, S. 625 en 630), zegt C. slechts, dat dan 't punt zich »geradlinig dem Centrum zu *und* vom Centrum fortbewegt," doch roert niet aan de quaestie, wat er bij de passage dóór 't centrum wordt van het principe van 't *behoud* van arbeidsvermogen, door hem steeds ondersteld (vg. S. 623 ben.) als algemeen voortvloeiende uit zijne algemeene hypothese: $E =$ constant.

ratione altitudinis, vel crescat in altitudinis ratione quacunque," — doch nimmer spreekt van de geringste bij-hypothese voor 't centrum zelf. [1])

Evenmin doet *Euler* zulks, zie »*Onderzoek*," bl. 8: »hoc quidem veritati minus videtur consentaneum; vix enim apparet ratio, cur corpus celeritate sua infinite magna, quam in centro acquisivit, in aliam potius plagam, quam in CB, sit progressurum; praesertim cum huius celeritatis infinitae directio sit secundum hanc plagam." Ook de conclusie in het volgende voorbeeld: »Eo autem . . . . . suspendendum," wordt alleen uit de algemeene wet mathematisch afgeleid, aan eene nieuwe hypothese voor 't krachtcentrum wordt niet gedacht. Evenmin in het aangehaalde t. a. p. bl. 9: de verschillend uitvallende resultaten blijken eenvoudig te worden veroorzaakt door de verschillend aangenomene *algemeene versnellings-wetten*.

Ook in *d'Alembert's* redeneering, bovenaan bl. 23 van het »*Onderzoek*," is geen spoor van eene speciale hypothese voor het centrum. Wèl is er eene zoodanige op bl. 23 beneden, doch dit is iets geheel anders, eene op zichzelf staande zaak: »un paradoxe géométrique." Ons voornaam problema beschouwt *d'Alembert* even als Robins en Laplace, hij meent n.l. ook, dat het punt moet dóórgaan: »passer outre, comme il y passe évidemment;" — en beseft dat men *niet*, als Newton, de recht-

---

[1]) De tegenstelling door Prof. v. G. bedoeld, ligt in het vroegere »vel — vel," en onderscheidt dan slechts het positieve òf negatieve van 't eerste deel der beweging, — of wel zij ligt in het »at si," en wijst dan blijkbaar op het al of niet *arriveeren* in 't centrum. Doch aangaande het verdere der beweging schort Newton eenvoudig zijn oordeel geheel op.

Intusschen is dit eene werkelijke tegenstelling, zij 't dan ook met andere bedoeling dan Prof. v. G. het wil, terwijl op bl. 31 ben. van het »*Onderzoek*" geene tegenstelling, maar eer eene gelijkstelling voorkomt, waarbij echter tusschen »maar" en »zoodanig" blijkbaar 't woordje *toch* wordt bedoeld. Deze redactie-»fout" wordt echter door den schrijver der »*Fouten*" (bl. 14) niet versmaad, om daarin eene onzinnige begrips-»fout" te vinden. De zoodoende gemaakte vergelijking is òf geen *fair play,* òf een gevolg er van, dat die schrijver het geciteerde hollandsch of het daartegenover gestelde latijn niet nauwkeurig heeft gelezen. Van gelijken aard is wat bovenaan bl. 11 der »*Fouten*" wordt »aangewezen." Wij hebben hier klaarblijkelijk slechts te doen met eene schrijf-»fout" van Prof. v. G.: $\frac{a_1}{l\,(x)}$ voor $a_1 l\left(\frac{1}{x}\right)$.

lijnige mag beschouwen als bijzonder geval der kromlijnige baan.

Ook *Legendre* gebruikt eene bij-onderstelling, doch van anderen aard: op het ongeoorloofde daarvan is gewezen door Prof. v. G. op bl. 59, en door mij op bl. 52.

Laplace daarentegen doet zulks niet: niettegenstaande de conjectuur van Prof. v. G. op bl. 27, komt het mij voor, dat gene, waar hij zijne juiste meening uitspreekt, slechts het algemeene *cinematische* vraagstuk op het oog heeft.

Het op deze wijs historisch bekende en eenvoudig genoeg geformuleerde probleem weet van verdere vragen noch hypothesen, en de vraag op bl. 9 van »*Welke waarde*" is even vreemd daaraan, als aan de »quaestie door Dr. v. G. gesteld en door mij behandeld." Want ten onrechte beweert Dr. Schouten op bl. 7, dat ook Prof. v. G. een ander probleem dan het historische (en het *mijne*) had gesteld, door willekeurige onderstellingen voor het krachtcentrum te maken. De »zelfde richting" in »*Onderzoek*" bl. 58 beteekent blijkbaar niet »zelfde zin" of »zelfde teeken," maar »zelfde *rechte lijn*," zie ook 't slot van dien volzin; terwijl daarentegen het »tegenovergesteld gerichte" van bl. 33 niets anders kan bedoelen dan: »in tegenovergestelden *zin* werkende." Ofschoon 't meer correct ware geweest, hier met »*richting*" steeds *rechte lijn* te bedoelen, en het *teeken* door »*zin*" aan te duiden, is toch de bedoeling voor wie met oordeel lezen wil duidelijk genoeg. Men vindt dan overal bij Prof. v. G. de meening, dat de versnelling in 't centrum alleen werkt in de richting van, en in een' zin tegenovergesteld aan de beweging op dat oogenblik; eene meening, die geene »*aangenomene* onderstelling," maar eene stilzwijgende gevolgtrekking is, wier onjuistheid mij voldoende het geheele verschil verklaart tusschen 's hoogleeraars meening en de mijne.

Want mij komt het juist voor, dat in 't centrum de versnelling werkt in *elke* richting, dus ook in den *tweeërlei* zin, die in aanmerking komt op de richting, welke de (naar slechts ééne zijde) oneindig groote snelheid op dat oogenblik heeft. Deze omstandigheid, dat in het krachtcentrum de versnelling *alle* richtingen, en in die allen (»naar alle zijden") even groote intensiteit heeft, is geene »onderstelling," doch wel *noodzakelijk*.

De versnelling heeft steeds de richting der verbindingslijn van bewegend en centraal-punt; die lijn (richting), anders steeds bepaald, wordt in 't krachtcentrum *onbepaald;* deze onbepaaldheid moeten wij *erkennen,* zonder willekeurig nieuwe »voorwaarden te kiezen." Bij de samenvalling toch van bewegend punt en centrum, wordt door 't enkele punt, waarin nu de lijn overgaat, eene lijn vertegenwoordigd met de lengte *nul* (oneindig klein), en van *alle mogelijke richtingen* (verg. »*Naspor.*," bl. 8); [1]) en volgens die lijn werkt eene versnelling, wier grootte wordt uitgedrukt door termen van den vorm $\lim \frac{a}{\delta^n}$, d. i. voor alle richtingen oneindig groot, maar *gelijk. Noodzakelijk* is deze gelijkheid, omdat er geene verscheidenheid is, omdat er niets blijkt van noodzakelijkheid der òngelijkheid: omdat δ of Δx de aangroeiing der *onafhankelijke veranderlijke* is.

Uit het slot zijner bl. 7, zoowel als uit al het vorige, blijkt dat ook Dr. Schouten wèl denkt aan eene oneindig groote versnelling op het in 't centrum gekomen punt, welke, 't zij positief of negatief, slechts éène bepaalde richting heeft, doch volstrekt niet aan eene dáár in *alle* richtingen oneindig groote versnelling, zooals toch blijkens 't boven aangetoonde onvermijdelijk volgt uit de algemeenheid der wiskundige begrippen en der gegevene versnellingswet.

Wat de oneindig groote *snelheid* in 't centrum aangaat, op bl. 8 noemt Dr. Schouten haar »zeer" groot, doch »niet oneindig groot." Dit laatste is blijkbaar zoo niet gemeend: zie den aanhef van bl. 10, en de uitkomsten op bl. 19 en 20, waarin $\lim \varepsilon = \lim \vartheta = 0$ moet worden gesteld. Dat verder (bl. 8) *in* het centrum 't punt aan geene versnelling onderworpen is, moet zeker bedoeld zijn van den totaal-invloed der versnelling op de snelheid, en stemt dan volkomen overeen met »*De vrije Centraalbew.*," bl. 6 en 36 boven.

---

[1]) Ook: evenals de hoek α, dien een vector x maakt met eene vaste as, tengevolge der continuïteit van de *ruimte* moet aangroeien door *alle* waarden tusschen α en $\alpha \pm \pi$, indien die vector x over zal gaan in den vector $-x$, evenzoo blijft dit ook waar voor een' nulvector, en heeft in het punt $x = 0$, α *tegelijk alle waarden* tusschen α en $\alpha \pm \pi$.

Hier is ook de plaats tot bespreking van het door Dr. Schouten op zijne bl. 31 aangevoerde. De dáár bedoelde plaats uit mijne brochure is volgens mijne uitdrukkelijke vermelding slechts bestemd om te dienen: als eene »poging tot verklaring eener zaak, wier heldere voorstelling ons onmogelijk is." Het geldt daar 't momentaan oneindig groot worden der snelheid. Deze *overgang* heeft werkelijk plaats: de snelheid, eerst eindig, wordt ∞, en kan dit alleen worden door de positief oneindig groote versnelling. Op deze volgt de negatief oneindig groote versnelling, in eene successie, die van gelijktijdigheid niet is te onderscheiden, en nu is de snelheid weêr eindig. Dit nu trachtte ik op bl. 49 te verklaren op grond der limiet-formule: $\frac{dx}{dt} = \infty$, waaruit volgt: $dt = \frac{dx}{\infty}$, zoodat $dt = 0$ moest zijn, zelfs al ware dx niet $= 0$. Mijne redeneering geldt slechts voor punten, die onmiddellijk *aan*, d. i. *in* 't krachtcentrum liggen, en men kan door deze redeneering *niet* »bewijzen" de gelijktijdige aanwezigheid in *alle* punten der baan, maar slechts in de zoodanige, die een *eindig* getal punten van 't centrum verwijderd zijn, d. i. *op een afstand nul.*

De hier besprokene misvatting ontstaat door 't voorbijzien dezer laatste waarheid, en bewijst weder, hoe noodzakelijk het is, acht te geven op de ware beteekenis van 't *oneindig kleine.* Dr. Schouten echter »beweert" op zijne bl. 8 beneden, »dat de redeneering over de singuliere integraal en de oneindig kleinen, voorkomende in mijne verhandeling van bl. 11—27," met onze quaestie »niets te maken heeft." Deze ontmoedigende uitspraak zou plotseling een geheel vel treffen. Echter blijft mijne bescheidene meening, dat vooral in deze quaestie, wier oplossing geheel van de waarde der singuliere integraal afhangt, zorgvuldig dient gelet te worden op den aard der begrippen van oneindig klein en groot, die wij hier telkens ontmoeten. Ja juist dat onderzoek, in verband met het wezen der onafhankelijke veranderlijkheid, levert hier de eenige, maar ook de volkomene oplossing.

4. In zijne tweede afdeeling, bl. 10—21 licht Dr. Schouten zijne *hoofd-bedenking* tegen het bewuste vraagstuk toe. De schrijver wil aldaar betoogen, dat, s de weg en t de tijd zijnde, de 1e en 2e afgeleiden $\frac{ds}{dt}$ en $\frac{d^2s}{dt^2}$ niet meer mogen beschouwd worden als resp. de snelheid en versnelling voor te stellen voor zulke punten, waar deze en de volgende afgeleiden oneindig groot worden. Wat daarbij 't gebruik der Taylor'sche reeks betreft, daargelaten hare meerdere of mindere doelmatigheid tot het *vinden* van afgeleiden (Lagrange), vereischt het geene moeite om aan te toonen, dat die reeks Dr. Schouten hier *niet* gediend heeft, *om zelfs 't geringste te vinden of te bewijzen.*

Want vooreerst zou de geheele redeneering slechts toepasselijk kunnen zijn op den bewegings-toestand in *één enkel punt*: het krachtcentrum. Vóór 't bereiken van dat punt, en nà de passage er dóór, gelden in allen gevalle de gegevene bewegingswetten; dezen zijn toepasselijk zoolang het punt zich aan ééne der zijden van 't centrum bevindt, waarbij ter weêrszijde de afstand zoo gering kan gedacht worden als men verkiest: *onbepaald tot nul kan naderen.* De discontinuïteit bestaat slechts in één *ondeelbaar* punt van *overgang.* Daarom kan er ook (zie de eindconclusie van Dr. Schouten op bl. 17) geene spraak zijn van eene afzonderlijke »*wet*" der versnelling voor eene beweging *in* dat punt, zooals voor eene *reeks* van punten (vg. bl. 11). Dit punt, gelijk elk ander, kan niet nader bediscussieerd worden: het is onbestemd, enkelvoudig, gelijk *nul*; men kan het alleen beschouwen als aanwijzing eener *limiet*, waartoe van weêrszijden de (*overigens* eindige en gestadige) waarde der versnelling noodzakelijk nadert bij afnemenden afstand; en die limiet-waarde is, volgens de éénige gegevene versnellingswet: $f(x) = \Sigma \left(\frac{a_n}{x^n}\right)$, onmiskenbaar $= \mp \infty$. (Van waar ter wereld weet ook anders reeds in den aanhef op bl. 10 de schrijver, dat in 't centrum de snelheid en versnelling oneindig groot worden, als »de algemeene formules dáár niet geldig zijn." ?)

Maar verder: Uit de bekende voorwaarden voor de geldigheid der Taylor'sche reeks besluit Dr. Schouten, dat de differentiaal-verhoudingen of afgeleiden: $\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt} s$ en $\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} v$ (s is eene functie *alleen van* t), niet meer de snelheid en versnelling voorstellen in dat enkele punt, alwaar die afgeleiden ∞ worden. Mij komt het voor, dat hier eigenlijk geene conclusie te pas komt. Al wat men in dezen kan zeggen, ligt in hetgeen men reeds a priori weet, en dat is, dat juist voor het punt der discontinuïteit, het krachtcentrum, *de reeks van Taylor in 't geheel niet mag worden toegepast.* Wij leeren *niet* door 't gebruik der Taylor'sche reeks, dat in het »point critique" de achtereenvolgende afgeleiden niet de snelheid en versnelling voorstellen (?), omdat zij ∞ worden, maar wij *weten*, dat zij ∞ worden, en *zien* daaruit, volgens de bekende voorwaarden der reeks van Taylor, dat deze (en die van Maclaurin) hier *in 't geheel niet van dienst kan zijn.*

Dr. Schouten heldert zijne bovenbedoelde redeneering (?) door eenige voorbeelden op, zie bl. 14, 18 en 20. Overeenkomstig de meening, dat in de discontinuïteits-punten $\frac{ds}{dt}$ en $\frac{d^2s}{dt^2}$ *niet* de snelheid en versnelling voorstellen, tracht hij nu in die voorbeelden de juiste waarde van snelheid en versnelling voor zoodanig punt te vinden, en gaat daartoe uit van de definities: snelheid = grenswaarde van $\frac{\text{aangroeiing van den weg}}{\text{aangroeiing van den tijd}}$, en versnelling = grenswaarde van $\frac{\text{aangroeiing der snelheid}}{\text{aangroeiing van den tijd}}$. Deze definities zijn zeer juist, maar dan ook — volkomen rechtzinnig. Immers wat beteekent het eerste anders dan wat wij gewoonlijk uitdrukken door $\frac{ds}{dt}$, en wat het tweede, dan $\frac{dv}{dt}$ of $\frac{d^2s}{dt^2}$? (Zie ook bl. 14, reg. 5).

Doch nu moeten die grenswaarden der twee bedoelde verhoudingen werkelijk *gevonden* worden. De schrijver heeft die in zijne voorbeelden zonder moeite in zoover gevonden, dat er nog aan ontbreekt het leggen der laatste hand. In de ten slotte opgegevene uitkomsten komen n. l. nog voor de grootheden ε en ϑ, zijnde de onbepaald (tot *nul* zie bl. 12) afnemende,

d. i. *oneindige kleine* deelen (*elementen*) van den tijd t. Deze tijd is bij Dr. Schouten, die uitgaat van de eindige bewegingsvergelijking $s = f(t)$, de *onafhankelijk* veranderlijke, overeenstemmende met bl. 11 beneden. Er ontbreekt dus nog slechts aan de uitkomsten, dat voor die elementen onafhankelijk en zelfstandig tot de limiet *werkelijk* worde *overgegaan*, dat is dat ϑ en ε nog $= 0$ worden gesteld.

Uit de laatst gemaakte opmerkingen blijkt, dat Dr. Schouten de snelheid en versnelling tòch heeft gekarakteriseerd als resp. $=$ $\frac{ds}{dt}$ en $\frac{dv}{dt}$, en daarvoor nu door limiet-overgang de waarden zoekt; — hetwelk volkomen in orde is. Doch nu heeft de schrijver, in overeenstemming met zijne meening betreffende het exceptioneele der omstandigheden in het discontinuïteitspunt, voor dit punt verkozen om niet langs den gewonen, maar langs een' om-weg die waarden van $\frac{ds}{dt}$ en $\frac{dv}{dt}$ te bepalen. Voor de *snelheid* neemt Dr. Schouten (als wij door t het tijdstip der discontinuïteit aanduiden, en $s = f(t)$ de eindige bewegings-verg. is) voor ds: $\lim f(t) - f(t - \vartheta)$, waarbij ϑ de (oneindig klein wordende) aangroeiing Δt van den tijd voorstelt. Zoo wordt dan $\lim \frac{f(t) - f(t - \vartheta)}{\vartheta}$, — en ook nog $\lim \frac{f(t + \vartheta) - f(t)}{\vartheta}$, — de voorstelling der *snelheid*. Op analoge wijs worden de *twee* met het discontinuïteitspunt overeenkomende waarden der *versnelling* volgens de handelwijs van Dr. Schouten verkregen, door aldaar de grenswaarden te nemen van de verhouding der aangroeiingen van *tijd* en *snelheid*. Dit is alles juist, doch thans de verdere bepaling.

De door Dr. Schouten gekozene voorbeelden bevatten allen 3de machtswortels. Zoo is in het op bl. 18 en 19 behandelde voorbeeld $f(t) = \sqrt[3]{t - a^3}$. Om nu van $\lim \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$, waar $f(t)$ eene gebrokene macht met den exponent $^1/_3$ voorstelt, de waarde te vinden, zou men naar den gewonen regel uit de beginselen der differentiaal-rekening moeten te werk

gaan, volgens welke $\frac{d\ (t\ -\ a^3)^{1/3}}{dt} = \frac{1}{3}\ (t\ -\ a^3)^{-\ 2/3}$ is.
De afleiding van dezen regel kan men doen steunen op de differentiatie van een product, of op de eigenschappen der logarithmen, of wel op rechtstreeksche algebraïsche deeling, of ook op de Newton'sche binomiaalformule; in allen gevalle ter laatster instantie natuurlijk op de eigenschappen der getallen. Nemen wij hier, waar *toelichting* hoofdzaak is, eene zeer bekende afleiding, n.l. de in de derde plaats genoemde, die eerst wordt uitgevoerd voor geheele positieve exponenten, doch daarna door middel van machtsverheffing, substitutie en herleiding wordt uitgebreid, en ook op geheel *willekeurige* exponenten toepasselijk gemaakt.

Men heeft, z bijv. $= t - a^3$ zijnde: $\frac{d.z^m}{dt} = \lim \frac{(z + \Delta\, t)^m - z^m}{\Delta\, t}$

$= \lim\ \frac{(z + \Delta t)^m - z^m}{(z + \Delta t) - z} = \lim\ [(z + \Delta t)^{m-1} + (z + \Delta t)^{m-2}z$

$+ \ldots + z^{m-1}]$. Men ziet, dat de limietwaarde dezer som van termen noodzakelijk z tot eene macht zal bevatten, 1 lager dan de gegevene. Dit is eigenlijk een gevolg van de deeling door Δt. Stelt men nu in 't vorige $\Delta t = 0$, dan komen er m gelijke termen, en: $\lim\ \frac{(z + \Delta t)^m - z^m}{\Delta\, t} = mz^{m-1}$. De coëfficient m, eveneens een gevolg der deeling, beantwoordt aan den graad m der gegevene functie. En dit is juist, want de grenswaarde van $\frac{d.f\,(z)}{dt}$ moet noodzakelijk van den vorm van f afhangen en daardoor bepaald worden. Daarom is een allereerste en verbindende regel, dat men eene afgeleide bepaalt uit den vorm der *algemeene* functie, en *eerst daarna* speciale waarden voor de veranderlijke mag substitueeren. Had men in het bovenstaande *reeds terstond* voor t eene waarde a^3 gesubstitueerd, dan zou men door $z = 0$ verkregen hebben: $\left(\frac{d.z^m}{dt}\right)_{a^3} =$

$\lim \frac{\Delta t^m - 0^m}{\Delta t} = \lim \Delta t^{m-1} = 0^{m-1}$, terwijl men door *later* in de werkelijk juiste afgeleide diezelfde waarde te substitueeren, behoorlijk verkrijgt: $\left(\frac{d.z^m}{dt}\right)_{a^3} = m.0^{m-1}$. Door de eerste *ongeoorloofde handelwijs*, — waardoor de algebraïsche ontwikkeling, die eeniglijk tot den vorm der gederiveerde kan leiden, ter zijde wordt gesteld, — wordt de nauwkeurige waarde der afgeleide belet voor den dag te komen: men heeft wel gedeeld, en krijgt dus een quotient van één graad lager, doch men heeft *niet uitgedeeld, en mist daardoor den karakteristieken coëfficient m.*

Dit nu is de handelwijs, gevolgd in de voorbeelden, die Dr. Schouten bewerkt op bl. 14, 19 en 20. De dáár ondernomene bepalingen van grenswaarden zijn niets anders, dan herhalingen der ontwikkeling van de *afgeleide eener macht,* n.l. voor den exponent $1/_3$. Bij die ontwikkeling wordt echter hier de bovenbedoelde misslag begaan, dat te vroeg, nog vóór het vinden van den algemeenen vorm der afgeleide, wordt gesubstitueerd eene speciale waarde: resp. $t = 0$ en $t = a^3$ (bl. 14, r. 6 en bl. 19, r. 1). Wij verkrijgen daardoor, in plaats van eene nieuwe, en volgens des schrijvers meening en intentie voor dit geval betere, limietbepaling, — niets dan eene onnauwkeurige differentiatie, wier eenvoud den strengen ernst der kritiek ontwapent. [1])

Aan de op die wijs verkregene uitkomsten ontbreekt vóór $\Delta t = \vartheta$ of ε overal de coëfficient m, d. i. hier de factor $1/_3$, en »de waarden

---

[1]) Op bl. 36 wordt later in een »voorbeeld" nogmaals hetzelfde gedaan, en *eerst* $x = 0$, dàn $\delta = 0$ gesteld, om daardoor te bewijzen: »dat voor $x = 0$, $\frac{-1}{x^2}$ niet meer de afgeleide van $\frac{1}{x}$ is." Alsof men ooit eene limietverhouding van 2 oneindig kleinen direct, zonder hulp van éénige algemeene betrekking, en na substitutie eener speciale waarde voor x kon vinden, en niet de eenig mogelijke weg daartoe juist de *algemeene* functie was (verg. beneden, § 5). Door 't stellen eener singuliere speciale waarde, welke die functie ∞ doet worden, maakt men het middel tot limietbepaling illusoir, dat in haar *algemeenen* vorm gegeven is.

voor v en φ gevonden," zijn dus »driemaal" *te groot*. (Verg. bl. 19).

Op bl. 14, regel 6 moet het zijn: $\lim \frac{a}{3\sqrt[3]{\varepsilon^2}}$, en op dezelfde wijs op bl. 19 bovenaan voor de snelheid: $\lim \frac{1}{3\sqrt[3]{\vartheta^2}}$, en hierdoor ook voor de daaruit afgeleide versnelling: $\lim \frac{\pm 2}{9\,\vartheta\sqrt[3]{\vartheta^2}}$. Evenzoo moet het dus op bl. 20 zijn: $\lim \pm {}^2/_9\, \vartheta^{-\,^5/_3}$, en $\lim {}^1/_3\, \vartheta^{-\,^2/_3}$. Gaat men nu eindelijk *inderdaad* tot de limiet over, door ε en $\vartheta = 0$ te stellen, dan komt op bl. 14: $\frac{a}{3\sqrt[3]{0^2}}$, d. i. 't *zelfde*, wat door $t = 0$ voortvloeit uit de *algemeene* formule: $v = \frac{a}{3\sqrt[3]{t^2}}$. Zoo ook komt nu op bl. 19: $v_{a^3 \mp 0} = \frac{1}{3\sqrt[3]{0^2}}$, en $\varphi_{a^3 \mp 0} = \frac{\pm 2}{9\sqrt[3]{0^5}}$, d. i. *hetzelfde*, wat voor $t = a^3$ volgt uit de op bl. 18 opgegevene *algemeene* formules voor v en φ. Al deze uitkomsten hebben de waarde ∞ of $-\infty$.

Het tot hiertoe gezegde geeft aanleiding tot de volgende opmerkingen:

1°. Bij vermijding der boven aangewezene onnauwkeurigheid zou Dr. Schouten, — voor 't centrum juist *dezelfde* snelheid en versnelling vindende, die terstond volgen uit de *algemeene* formules, — geleid zijn tot de ontdekking, dat zijne meening aangaande 't illusoir zijn der algemeene versnellingswet eene misvatting is. De conclusies op bl. 17, ja wellicht ook de vorige en latere bladzijden, waren dan achterwege gebleven. De vermeende zelfstandige en nauwkeurigere limiet-bepalingen zijn merkwaardige voorbeelden van *schijn-resultaten*. In 't bijzonder mag de beoefenaar eener wetenschap, die van de beschouwing der *oneindig kleinen* moet uitgaan, niet lichtelijk meenen, dat een ernstig onderzoek der methoden en begrippen met de in die wetenschap voorkomende quaestien »niets te maken heeft."

2°. De twee waarden, die in 't krachtcentrum de *versnelling* heeft, n.l. $\pm \lim \frac{2}{9\sqrt[3]{\vartheta^5}}$, blijken ook hier weder in absolute waarde *gelijk* te zijn, nu niet de afstand x of s, maar t de onafhankelijke veranderlijke is, zijnde $\lim \vartheta = dt$. Daar ook van deze *onafhankelijke* veranderlijke de oneindig kleine aangroeiingen (»elementen") als *gelijk* moeten gelden (zie »*Vrije Centr.*," § 5), heeft terecht Dr. Schouten voor de tijdsverschillen onmiddellijk vóór en na de passage door 't centrum $+\vartheta$ en $-\vartheta$ gesteld. Ook hier wordt dus weêr bevestigd, dat in het centrum de beide versnellingen volgens de bewegingsrichting oneindig groot, maar *tegengesteld-gelijk* zijn, 't geen den totaal-invloed op de snelheid *nul* maakt, daar die twee versnellingen elkaâr opheffen (verg. boven § 3), zoodat het punt één oogenblik is in »directioneele rust" (*Thomson en Tait, Treatise on Nat. Philos.*, § 245).

3°. Op bl. 20 beneden zegt Dr. Schouten, dat ε »zeer weinig" van 0 verschilt, en $\frac{1}{\varepsilon^{2/3}}$ »wel zeer groot doch eindig" is. Daar (verg. boven en § 5) $\lim \varepsilon = \lim \Delta t = dt$ onbepaald tot nul genaderd zijnde, *aan* de limiet werkelijk nul *wordt*, moet (verg. ook t. a. p. bl. 12) de bedoeling zijn, dat $\lim \varepsilon$ *oneindig* weinig, d. i. *niets* van 0 verschilt, en $\lim \frac{1}{\varepsilon^{2/3}}$ *oneindig* groot is. Daardoor zal Dr. Schouten op bl. 20 beneden niet slechts verkrijgen $\lim \frac{1}{3\varepsilon^{2/3}} = \infty$, maar deze uitkomst, die t. a. p. voor de snelheid in 't centrum verkregen wordt uit de *algemeene* snelheids-formule (blijkens den factor $\frac{1}{3}$), *in de onderstelling, dat de versnelling in 't centrum nul is*, stemt volkomen overeen met die (gecorrigeerde), welke boven voor de snelheid in het centrum kwam, *bij de positief en negatief oneindig groote versnelling*. Dus blijkt: dat bij die tweeërlei onderstellingen in de uitkomsten geen »onderscheid" bestaat, en werkelijk de versnellingen $+\infty$ en $-\infty$ samen eene *absolute* versnellingswaarde *nul* opleveren. (Over het onjuiste der vergelijking van de versnelling met een' tangens, in plaats van met zijne afgeleide, zie »*De vrije C.*," bl. 36).

Op nog enkele punten uit het geschrift van Dr. Schouten kom ik hierachter terug. [1]) Intusschen merk ik reeds hier op, dat bij dien schrijver verschillende dispositien aanwezig zijn, om het ten slotte met mij eens te worden. Immers blijkens 't hierboven gezegde, zal ook Dr. Schouten in 't centrum de oneindig groote waarden van snelheid en versnelling verkrijgen, de laatste èn positief èn negatief. Verder stelt deze schrijver

---

[1]) Voor de »niet geringe fout" van bl. 29—31 mag ik zulks overbodig achten, daar Prof. v. G. zelf wel aan Dr. Schouten de noodige opheldering verschaffen zal. De redeneeringen ten bewijze dat de cirkel slechts kan doorloopen worden bij eene versnellingswet: $f(x) = -\frac{a}{x^3}$, en niet bijv. bij de algemeene gravitatie-wet: $f(x) = \pm\frac{a}{x^2}$, zijn echter niet voldoende om ons de illusie te ontnemen, dat bij de planeten-beweging de cirkelvormige baan als bijzonder geval kan voorkomen. Tot het inzicht, dat de wet, naar welke de versnelling verandert met den afstand r, niet te pas komt als r *constant* blijft, zou Dr. S. gekomen zijn, door op bl. 30 ben. uit $r =$ const. af te leiden: $\frac{dr}{d\varphi} = 0$ of $\sqrt{p^m - r^m} = 0$, d. i. $r = p$: de straal standvastig $=$ den aanvangs-afstand, zoodat deze standvastigheid, èn de versnellingswet of m, onderling onafhankelijk zijn. De 2 bekende formules bovenaan die bladzijde geven door de substitutie $P = \rho = r$ inderdaad $F = \frac{c^2}{r^3}$: 't geen leert, dat niet de *wet* der versnelling F, maar deze zelf omgekeerd evenredig aan r^3 is. Eene *wet* der versnelling komt niet meer in aanmerking sedert de genoemde substitutie, die slechts bij den cirkel kan bestaan, zoodat men inderdaad gesteld heeft: r *constant*. Daar nu $\frac{1}{2}c$ den standvastigen sector in de tijdseenheid, en v de snelheid beteekent, wordt door $c^2 = r^2v^2$ de vorige verg.: $F = \frac{v^2}{r}$. Dit nu is de formule die jeugdige beoefenaars der werktuigkunde gewoon zijn te vinden, en waaruit zij dan meenen af te leiden, dat de baan een cirkel *is*, zoodra slechts de »centripetaal-kracht" F, *welke* overigens ook hare wet zij, loodrecht op de richting der aanvangs-snelheid v, en zóó groot is, dat $F = \frac{v^2}{r}$.

ook symmetrische beweging in 't geval dat de versnelling in 't centrum [absoluut] *nul* is (bl. 32), en neemt op bl. 19 en 37 terecht de aangroeiingen ϑ en ε overal *gelijk:* daar dit gelijk men weet voor de afhankelijke veranderlijke *niet* kan zijn, is het natuurlijk onder de algemeene restrictie: voor de *onafhankelijke* veranderlijke.

Misschien wordt door het hier en nog hier achter opgemerkte Dr. Schouten overtuigd, dat:

1^e. Geene afzonderlijke onderstelling mag gemaakt worden aangaande éène bepaalde richting der versnelling in 't krachtcentrum;

2^e. de reeks van Taylor hier niet dienen kan;

3^e. het *krachtcentrum* op zichzelf *niets* is, slechts de gemeenschappelijke limiet van het positieve en negatieve deel der beweging aanduidt;

4^e. de berekeningen van bl. 19 niets zijn, dan *gebrekkige* differentiaties, en

5^e. de »correctie der begrensde integralen en der methode van Cauchy" (bl. 36—38) slechts eene vergissing is: zie hierachter, § 7.

Indien dat inzicht is verschaft door deze nadere toelichting, dan zal ik mij geluk kunnen wenschen met de verklaring van Dr. Schouten op bl. 8: dat er thans »geene sprake is van zwarigheid," »geen enkel bezwaar hoegenaamd bestaat."

5. In nagenoeg alle takken der wiskunde heeft men gedurig te doen met de *oneindig kleinen,* d. i. waarden, die absoluut kleiner zijn, dan elke gegevene of te denken grootheid. Aan deze omschrijving, die met den naam *oneindig klein* vrij wel overeenstemt, voldoet alléén *nul.* Daarom wordt algemeen gezegd, dat het oneindig kleine de nul heeft tot *limiet,* d. i. tot *absolute waarde.* Daarom is in een plat vlak een *oneindig klein* richtings-verschil = *geen* richtings-verschil, en dus snijding op *oneindigen* afstand = *niet*-snijding (parallelisme). Voor vergelijking, bij wijze van arithmetische optelling of aftrekking, zijn de oneindig kleinen dan ook niet vatbaar, of wel het resultaat is in beide gevallen nul. Evenzoo moet, *wanneer niets* *naders gegeven is*, de *verhouding* van twee oneindig kleinen $= \frac{0}{0}$, d. i. onbepaald zijn. Toch kan tengevolge van gegevene betrekkingen deze onbepaaldheid in eene *bepaalde* waarde overgaan, eene zekere *limiet* hebben, die zelfs oneindig groot kan worden, in welk laatste geval men in eenigszins oneigenlijken zin spreekt van oneindig kleinen van verschillende orden.

De limiet-waarden, die de verhouding van twee oneindig kleinen somtijds aanneemt, vinden wij uit door vergelijkingen gegevene betrekkingen tusschen de eindige grootheden, waarvan de oneindig kleine waarden genomen worden. Wij moeten daartoe deze laatsten beschouwen terwijl zij oneindig klein *worden*, tot hare limiet nul *naderen* en *overgaan*, om uit het *blijven* der pasgenoemde betrekkingen voor *eindige* waarden, af te leiden de limiet-betrekking bij den overgang tot oneindig klein. Deze oneindig klein *wordende* grootheden noemt men *differentialen*. Dus blijkt, dat het vinden van differentiaal-verhoudingen eene *limiet-bepaling*, en deze limiet-overgang aan de voorwaarde der *continuïteit* gebonden is. Deze laatste en het begrip van limiet-verhouding, zijn dan ook sedert Cauchy de ware en rationeele basis der differentiaalrekening, en de vroegere poging van Lagrange, om uit de grondslagen dezer wetenschap het *oneindig kleine* te weren, is vruchteloos geweest.

Naar het pas opgemerkte, is de beteekenis der differentiaal dx die van: symbool van 't *oneindig kleine in wording*. In dezen zin is het, dat vele schrijvers de tot nul *naderende* hoeveelheid veranderlijk noemen, zie bijv. Sturm, *Anal.* I, p. 6. In dezen zin zegt ook Schlömilch (*Comp. d. höh. An.* I, § 59): »Unter der Voraussetzung nämlich, dass x die unabhängige Variable ist, bedeutet [de differentiaal] dx einen gegen die Null convergirenden, im Übrigen aber willkürlichen Zuwachs des x, den man Z. B. dadurch bilden kann, dass man $\Delta x = \frac{1}{\alpha}$ setzt, und α das Gebiet der natürlichen Zahlen durchlaufen lässt." Men ziet, dat zoolang α *zeer* groot, maar overigens *willekeurig* is, Δx *onbepaald* maar *eindig* blijft, doch dit eerst in 't *oneindig* kleine dx overgaat, als α *oneindig* groot, dus de waarde van $\Delta x = \frac{1}{\alpha}$ *nul* wordt, waarmede de veranderlijkheid van α en van dx moet eindigen. Daarom zegt Sturm ook (*An.* I, p. 18) dat eene differentiaal-verhouding minder is eene verhouding der limiet-aangroeiingen, dan wel de limiet eener verhouding, want »les accroissements, étant nuls à la limite, n'ont pas *à proprement parler* de rapport."

De evenwel somtijds nog aangetroffene miskenning van 't begrip *oneindig klein*, schijnt mij alleen verklaarbaar door eene verwarring van *zeer* klein met *oneindig* klein: »la confusion entre l'*infiniment* petit et le *très-petit*, que l'emploi de deux lettres d et Δ, pour désigner successivement les mêmes accroissements, peut faire naître dans certains esprits" (Gerono: *Nouv. Ann.* 1873). Evenwel verhouden zich die twee begrippen als *iets* en *niets*, want de verbinding van 't begrip oneindig met dat van klein is niets dan eene negatie van elke *grootheid*. Men kan zich het oneindig kleine evenmin als eene *grootheid* voorstellen als 't oneindig groote (verg. Locke, *On human underst.*, B. 2, XVII, § 7), maar als wij het *noemen*, dan duiden wij 't *resultaat* aan nà de oneindig herhaalde afneming, d. i. de *limiet* of *nul*.

De heer *J. Versluys* intusschen meent in zijne *kritiek*, dat »het oneindig kleine iets anders is dan nul," en gebruikt evenzoo op bl. 12 der »*Fouten*" de tegenstelling: »dat de versnelling in een bepaald *punt, niet* werkt gedurende een' *oneindig kleinen* tijd, *maar voortdurend verandert.*" De slot-redeneering der tweede »fout," bl. 5—6, komt dan ook daarop neêr, dat ons bewegend punt op *verschillende* oneindig kleine afstanden van 't centrum, in posities die *niet* met 't centrum of onderling samenvallen, met verschillende, maar toch *allen oneindig groote* versnellingen en snelheden zou zijn aangedaan. Zoodanige uitkomsten mogen niemand verbazen, die eerst heeft zien werken met 1, 2, 3 enz. maal oneindig klein, alsof daar niets geheimzinnigs in steekt. De berekening op bl. 5 der »*Fouten,*" strekkende om ook een cinematisch voorbeeld te geven, wil ik niet hard vallen, niettegenstaande de ongewone handelwijs, om x in plaats van t te elimineeren, waardoor geen positief en negatief deel der beweging (ten opzichte van 't centrum) kan worden onderscheiden, en de uitkomsten voor p en v op den duur eene snelheid en versnelling aantoonen, die voor eeuwig imaginair zijn. Maar de formules beneden op bl. 5, veel herinnerende aan die van Dr. Schouten op bl. 19, (zie boven, § 4), zijn met de daaruit getrokken conclusien inderdaad ergerlijk. Dat men toch bijv. niet inziet het simpele, *bloot analytische* feit, dat bij »weglating van grootheden die oneindig klein zijn ten aanzien van wat men behoudt," ook δ ten aanzien van 1 in dit geval is, en dus $= 0$ moet gesteld worden, zoodat alle zes formules in plaats van *verschillende*, gelijke uitkomsten geven, n.l. $-\infty$! Dat men niet begrijpt, hoe hier onmogelijk die »weglating" tot vergelijking van 3 gevallen, of tot eenig ander resultaat dienen kan, daar er geene limiet-*verhouding* wordt bepaald, wijl slechts in den *noemer* oneindig kleinen voorkomen.

De breuk $\frac{a}{x}$ wordt *oneindig klein* op het oogenblik dat x *oneindig groot* wordt. Hoe verklaart nu de heer *V.* aan zijne leerlingen, dat $\frac{a}{\infty} = 0$, indien »oneindig klein iets anders is dan nul"? Op welke wijs wordt aan die leerlingen verzekerd dat $\frac{\sin x}{x} = 1$ is, voor waarden van x, die *niet nul* zijn? Hoe kan de behandeling van de elementen der nieuwere meetkunde eenige volledigheid erlangen, zonder de waarheid: snijding op *oneindigen* afstand = *niet*-snijding, door *evenwijdigheid* (vg. boven)? (Daargelaten nog de beteekenis dier waarheid o. a. in de leer der koppels, en bij eenige optische formules).

Voorbeelden als de pas aangehaalde zijn overigens in menigte te vinden, vooral bij de inhoudsbepalingen in de gewone meetkunde, en bij den cirkel. Nu kan men wel in de plaats dier inhouden enz., voortdurend spreken van de *limiet*, waartoe de inhouden of omtrekken der hulpfiguren naderen, zie J. Versluys, *Leerboek der vlakke meetkunde,* waar de eigenschappen der onmeetbare grootheden »met de vereischte juistheid zijn behandeld," door middel van een hoofdstuk (uit Duhamel) over limieten, enz. (*Voorrede*). Het bedoelde hoofdstuk begint met eene »*bepaling,*" waarin »voortdurend" zou moeten zijn »onbepaald"; de bedoeling wordt nu eerst duidelijk door de nadere opheldering: »dat het verschil tusschen eenige grootheid en hare limiet nooit nul, *maar* [ten laatste (bl. 78)] *kleiner* wordt dan *eenige grootheid.*" (»Nooit" beteekent *in geen eindigen tijd*, en »ten laatste" beteekent hier: *in het oneindige;* daarom: kleiner dan eenige grootheid, d. i. oneindig klein, = *nul*)· Noemt men nu telkens de *limiet* der hulpfiguur, en niet de *waarde* dier limiet, dan is dat *woord* slechts eene vermomming, want eindelijk moet het er toch uit, dat de gezochte grootheid die limiet *is,* zie bijv. J. Versluys, *Lb. der Stereom.*, bl. 55: »*Elk* der twee sommen heeft dus tot limiet de pyramide," en vgg. Nu verschillen, volgens het bekende t. a. p. herhaalde bewijs, de bedoelde prisma-sommen onderling een prisma, dat »zoo klein kan worden als men wil," d. i. *aan* de *limiet oneindig* klein. Indien nu dit oneindig kleine verschil *niet nul* is, dan mogen in de zoo even aangehaalde woorden de 2 limieten niet [onderling en] aan de pyramide *gelijk* worden genoemd, en is het eene ongeoorloofde *onnauwkeurigheid*, dat in het bewijs van § 115 op de volgende bl. 56, uit de gelijkheid van 2 zulke sommen tot de *gelijkheid der pyramiden* (limieten) wordt besloten. Dezelfde aanmerking past op »blijkbaar tot dezelfde limiet," in § 256 van het eerstgenoemde »*Leerboek,*" op de theorie der raaklijnen, en op de hoofdstukken over cirkel, cilinder, kegel en bol. [1])

Zoude wellicht de *integraal-rekening* aanleiding kunnen geven tot de misvatting omtrent het oneindig kleine, en tot de tegenwerping, dat eene rij van termen, die tot limiet, d. i. tot *waarde* nul hebben, niet als som (integraal) eene *eindige* waarde kon opleveren? In dat geval mag ik antwoorden met de opmerking, die 't meest geschikt is, om ook bij de leerlingen eene mogelijke overeenkomstige bedenking te beantwoorden, betreffende waarden

---

[1]) In § 278 van *Kempees, Beg. der Meetk.*, II, 1867 tracht men te vergeefs 't oneindig kleine en den limiet-overgang bij de pyramide te ontwijken, want de ondersteld *standvastigheid* der breuk *f* moet juist bewezen worden (2e Gev. en § 286).

als $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ en $\lim \frac{1^p + 2^p + 3^p + \text{in inf.}}{n^{p+1}} =$ $\frac{1}{p+1}$: — de opmerking namelijk, dat men wèl heeft factoren en termen, die *oneindig* weinig verschillen van 1 en 0, maar dat daarentegen ook hun aantal *oneindig* groot is, en deze beide oneindigheden onderling zijn verbonden op eene bepaalde manier, waarvan juist de gevondene waarden gevolg en uitdrukking zijn. Voor eene *eindige* optelling ware de tegenwerping alléén juist.

Grondslag en uitgangspunt der geheele differentiaalrekening is eene definieerende vergelijking van den vorm: $\frac{\lim \Delta x}{\lim \Delta t} =$ $\lim \frac{\Delta x}{\Delta t}$. Op zichzelf zou n.l. $\frac{\lim \Delta x}{\lim \Delta t} = \frac{0}{0}$ onbepaald zijn, doch alléén eene gegevene eindige vergelijking tusschen x en t stelt ons in staat, om door toepassing daarop van de methode der limieten de ware waarde $\lim \frac{\Delta x}{\Delta t}$ van dat $\frac{0}{0}$ te vinden. Bij die toepassing, bij 't afleiden van de grondregels der differentiaalrekening, wordt gedurig werkelijk gesteld: $\lim \Delta x = 0$, (waar n.l. Δx *niet* als term der verhouding, maar op zichzelf beschouwd voorkomt). 't »Weglaten van grootheden, die oneindig klein zijn ten aanzien van wat men behoudt," kan n.l. alleen gerechtvaardigd worden door deze waarheid: oneindig klein, vergeleken met 't eindige, d. i. in werkelijke *waarde*, $=$ nul.

Op die wijze volgt uit de gegevene vergelijking $x = f(t)$: $\lim \Delta x = f^1(t) \lim \Delta t$ en $\frac{dx}{dt} = \lim \frac{\Delta x}{\Delta t} = f^1(t)$. En waar men nu hieruit later afleidt: $dx = f^1(t)\, dt$, is dat steeds eene omzetting dier verg.: $\frac{dx}{dt} = f^1(t)$. Evenzoo bij al dergelijke gevallen. Daarom heeft bovenaan op de tweede bl. 4 der »*Fouten*" de schrijver ongelijk. Men neemt daar een' op zichzelf beschouwden tijd dt, of wel zelfs $2dt$. *Op zichzelf* is

$dt = 2dt = 0$; alléén kan men hebben de limiet-verhouding: $\frac{dx}{dt} = 2$, waar 2 eene *snelheid* is, en *geen* onbenoemde factor.

Het vinden der waarde van de limiet-verhouding $\frac{\lim \Delta x}{\lim \Delta t}$ tusschen *twee* veranderlijken hangt dus geheel af van 't gegeven zijn eener betrekking: $x = f(t)$. Had men te doen met slechts ééne onafhankelijke (ruimte-) veranderlijke x, zoodat de limiet-verhouding tusschen twee opeenvolgende aangroeiingen Δx en Δx^1 dezer *zelfde* variabele moet gevonden worden, dan komt geene dergelijke betrekking te pas, maar hangt alles af van de wijze waarop men x zelf laat veranderen. Hier geeft nu de ondersteld (zie boven) en steeds gegevene continuïteit der ruimte, en de definitie der onafhankelijke veranderlijkheid de ware waarde aan de hand dezer onbepaalde uitdrukking: $\frac{\lim \Delta x^1}{\lim \Delta x} = \frac{0}{0}$.

Die continuïteit veroorlooft de elementen eener rechte lijn als oneindig klein en gelijk te beschouwen, 't welk noodzakelijk is voor het grondbeginsel betreffende de *onafhankelijke* veranderlijkheid. De verandering der onafhankelijke variabele, aan geene wet gebonden dan die der continuïteit, zou zonder de *analytische* toepassing dier continuïteit willekeurig zijn, doch de analyse zelf heeft behoefte aan eene bepaling daaromtrent. De 2e differentiaal d^2y eener *afhankelijke* veranderlijke $y = f(x)$ zou geene bepaalde beteekenis hebben, indien men er niet onder verstond: het verschil van twee opeenvolgende waarden van dy, verkregen door tweemaal achtereen aan de ònafhankelijke x *dezelfde oneindig kleine aangroeiing* dx te geven. De opeenvolgende oneindig kleine deelen derzelfde *onafhankelijke* veranderlijke zijn dus door definitie *gelijk*, hetwelk van algemeene bekendheid is. Waar men in leerboeken de *differentiaal* dx als *oneindig-klein wordend*, nog als tot nul *naderend*, dus veranderend beschouwt (zie boven), bepaalt men toch uitdrukkelijk, dat twee opeenvolgende dx op *dezelfde* wijs tot nul naderen, dus steeds en ook aan de limiet, als *gelijk* moeten beschouwd worden, zoodat dx met betrekking tot x constant is: elke dx

gelijk is aan die dx, welke aan de *volgende waarde van* x beantwoordt. In dien zin laat Schlömilch op zijne hierboven aangehaalde woorden volgen: »Ebendesswegen ist dx nicht von x abhängig, sondern constant in Beziehung auf x, wie es sich sonst auch *ändern* moge," (Zie hierboven de aanhaling, en »*Welke waarde,*" bl. 33 en 34).

Waar wij dus in de Analyse ontmoeten de limiet-verhouding van twee opeenvolgende oneindig kleine aangroeiingen derzelfde onafhankelijke veranderlijke (gelijk $\lim \frac{\eta}{\delta} = \lim \frac{p\,\varepsilon}{q\,\varepsilon}$ in ons probleem, verg. »*De vrije C.*," § 5), *daar zijn wij verplicht ons te houden aan de in die Analyse aangenomene beginselen, en die limiet-verhouding* = 1, d. i. $\lim \eta = \lim \delta$ of $p = q$, *te stellen.*

6. De definitie eener *begrensde integraal* (»intégrale définie"): $\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$, als som van de waarden der gegevene differentiaal (*aangroeiingen* der integraal), is *beter* dan die als verschil van de grenswaarden der integraal (vg. »*de vrije C.*," bl. 23), omdat bij deze laatste de algemeene onbegrensde integraal als reeds bekend ondersteld en op de al of niet algemeene integreerbaarheid van $f(x)\,dx$ geanticipeerd wordt. Dit is het standpunt van Cauchy en de nieuweren.

Uit het boven gezegde is het echter duidelijk, dat het ons onmogelijk is, om als *som* van differentialen de waarde der begrensde integraal werkelijk te *vinden.* Kunnen wij door limiet-overgang eene *verhouding* van oneindig kleinen bepalen, eene berekening der bedoelde *som* is ons onmogelijk, omdat bij optelling de differentialen niet »integreeren," maar slechts door 't *oneindige* der som eene eindige waarde geven. Daarom kan ook in weêrwil der betere definitie, de waarde der begrensde integraal onmogelijk door optelling *rechtstreeks* gevonden worden, en moet de, niet indirecte òf benaderende, berekening steeds geschieden door eerst tot de oorspronkelijke functie (de *onbegrensde* integraal) terug te gaan, en dan werkelijk toch 't verschil van aanvangs- en eindwaarde dezer integraal te nemen.

De *discontinuïteit* van functien bestaat, (behalve somtijds in '*t* aannemen van imaginaire waarden), in gevallen als ons probleem in het aannemen van twee *verschillende* waarden te gelijker tijd. (Vg. Schlöm., *Comp. d. höh. An., Einl.* III). Wij hebben hier te doen met dàt geval van discontinuïteit, waarin de functie $f\ (x)$ onder 't integratieteeken, *niet* $\lim\ [f\ (a + \delta) - f\ (a - \eta)] = 0$ geeft voor zekere waarde a van x, indien δ en η tot 0 naderende aangroeiingen van x zijn, die men ook met $q\,\varepsilon$ en $p\,\varepsilon$ kan aanduiden, als ook ε eene tot 0 naderende grootheid is. (Zie »*Onderzoek*" enz. en »*De vrije Centr.*") In dit geval nu is het niet geoorloofd te stellen:

$\int_{x_1}^{x_2} f\ (x)\ dx = \mathrm{F}\ (x_2) - \mathrm{F}\ (x_1)$, als a ligt tusschen x_1 en x_2,

en $\int f\ (x)\ dx = \mathrm{F}\ (x)$ is. De reden is, dat indien ook $\lim\ [\mathrm{F}\ (a + \delta) - \mathrm{F}\ (a - \eta)]$ niet $= 0$ is, de integraal in het punt $x = a$ eene sprongswijze verandering ondergaat, die naar de boven gegevene opvatting niet behoort tot de waarde der begrensde integraal, niet als eene *aangroeiing* mag beschouwd worden, daar zij niet beantwoordt aan eene *aangroeiing* der veranderlijke x. Die sprongswijze verandering, het limiet-verschil: $\lim\ [\mathrm{F}\ (a + \delta) - \mathrm{F}\ (a - \eta)]$, *kan* $= 0$ zijn, en dàt beantwoordt aan de »voorname waarde" der begrensde integraal: ook mijn eerste opstel strekt om aan te toonen, dat zulks in ons probleem inderdaad het geval is. In het algemeen moet echter juist die *plotselinge* verandering, waarvan hier alles afhangt, afzonderlijk en nauwlettend onderzocht worden, en daartoe strekt de methode van Cauchy.

De *plotselinge* vermeerdering der integraal bij het discontinuïteitspunt $x = a$, zou men meer rationeel als eene plotselinge waarde-verandering der willekeurige integratie-constante C of der initiale waarde kunnen aanzien, overeenkomstig met de bovengenoemde opvatting der begrensde integraal, en met Cauchy in *C. rend.* t. XXIII, p. 788. In allen gevalle is, daar in ons vraagstuk $f\ (x)\ dx$ de differentiaal van $^1/_2\, v^2$ voorstelt, de aan x_2 beantwoordende waarde van $^1/_2\, v^2 =$ die waarde voor x_1, *plus* de waarde der begrensde integraal (*aangroeiing*) tusschen de grenzen x_1 en x_2, *plus* de *plotselinge* vermeerdering, — zoodat de eigenlijke begrensde integraal gelijk is aan de vermeerdering van $\frac{1}{2}v^2$ in het geheele interval, *minus* de plotselinge vermeerdering (der constante). *De waarde van* $\frac{1}{2}v^2$ *blijft voor elk punt die van* $F(x) + Const.$ Noemt men nu die waarden voor de punten x_1, $\lim(a - \eta)$, $\lim(a + \delta)$ en x_2 respectievelijk $\frac{1}{2}v_1^2$, $\frac{1}{2}v_0^2$, $\frac{1}{2}v_{-0}^2$ en $\frac{1}{2}v_2^2$, en zij de oorspronkelijke willekeurige constante C ($= -F(x_0)$ als voor $x = x_0$, $v = 0$ was), dan kunnen wij, *in de schrijfwijs* de plotselinge vermeerdering en C tusschen $\{\ \}$ bijeenvoegende, schrijven:

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}v_1^2 &= F(x_1) + C;\\
\tfrac{1}{2}v_0^2 &= F(x_1) + [\lim F(a-\eta) - F(x_1)] + C;\\
\tfrac{1}{2}v_{-0}^2 &= F(x_1) + [\lim F(a-\eta) - F(x_1)] +\\
&\quad + \{C + [\lim F(a+\delta) - \lim F(a-\eta)]\};\\
\tfrac{1}{2}v_2^2 &= F(x_1) + [\lim F(a-\eta) - F(x_1)] + [F(x_2) - \lim F(a+\delta)] +\\
&\quad + \{C + [\lim F(a+\delta) - \lim F(a-\eta)]\};
\end{aligned}$$

dus $\frac{1}{2}v_2^2 - \frac{1}{2}v_1^2 = [\lim F(a-\eta) - F(x_1)] + [F(x_2) - \lim F(a+\delta)] +$

$$+ \{\lim F(a+\delta) - \lim F(a-\eta)\},$$

d. i. daar de integraal voor 't inwendige van elk der intervallen: x_1 tot $\lim(a-\eta)$, en $\lim(a+\delta)$ tot x_2, continu is:

$$\tfrac{1}{2}v_2^2 - \tfrac{1}{2}v_1^2 = \lim \int_{x_1}^{a-\eta} f(x)\,dx + \lim \int_{a+\delta}^{x_2} f(x)\,dx + \\ + \{\lim F(a+\delta) - \lim F(a-\eta)\}.$$

Het verschil tusschen $\frac{1}{2}v_1^2$ en $\frac{1}{2}v_0^2$, èn dat tusschen $\frac{1}{2}v_{-0}^2$ en $\frac{1}{2}v_2^2$ is *aangroeiing* (begrensde integraal), maar 't verschil tusschen $\frac{1}{2}v_0^2$ en $\frac{1}{2}v_{-0}^2$ is *plotselinge* vermeerdering, d. i. men moet, gelijk geschiedt in goede leerboeken (Herr, Schlömilch, Sturm) het laatstgenoemde verschil *niet* tot de begrensde integraal rekenen, en behoort derhalve te stellen:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = \lim \int_{x_1}^{a-\eta} f(x)\,dx + \lim \int_{a+\delta}^{x_2} f(x)\,dx. \quad (A)$$

Hiermede wordt nu:

$$\tfrac{1}{2}v_2^2 - \tfrac{1}{2}v_1^2 = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \{\lim F(a+\delta) - \lim F(a-\eta)\}$$

of $\int_{x^1}^{x_2} f(x)\,dx = \frac{1}{2}v_2^2 - \frac{1}{2}v_1^2 - \{\lim F(a+\delta) - \lim F(a-\eta)\}$,

d. i. de begrensde integraal (aangroeiing): $\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$ wordt gevonden door de *totale* vermeerdering $\frac{1}{2} v_2^2 - \frac{1}{2} v_1^2 = F(x_2) - F(x_1)$ te *verminderen* met de plotselinge vergrooting $\lim [F(a+\delta) - F(a-\eta)]$. Hetzelfde geeft (A), naar de gewone manier berekend, n.l.:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = \lim F(a-\eta) - F(x_1) + F(x_2) - \lim F(a+\delta),$$

$$\text{of } \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = F(x_2) - F(x_1) - [\lim F(a+\delta) - \lim F(a-\eta)], \;..(1)$$

d. i. de waarde der begrensde integraal $\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$ wordt gevonden door deze integraal, — berekend naar de gewone manier, n.l. door 't verschil der grenswaarden voor x_2 en x_1, — te *verminderen* met de plotselinge vermeerdering. Deze laatste is dus een *correctie-term*, en (voor dit afzonderlijk geval nòch aan eene som van »aangroeiingen," nòch aan eene »aanvangs"- en »eind"-waarde denkende), kan men *bij definitie* dien term, dat limiet-verschil, ook onder den vorm eener *begrensde integraal* voorstellen, door kortaf te schrijven:

$$\lim [F(a+\delta) - F(a-\eta)] = \lim \int_{a-\eta}^{a+\delta} f(x)\,dx. \;...(2)$$

Deze »begrensde integraal" is dan geen deel eener begrensde integraal in gewonen zin, daar het geene *aangroeiing* is, en de grenzen $\lim (a-\eta)$ en $\lim (a+\delta)$ geheel samenvallen. Cauchy geeft daarom aan deze soort van »begrensde integralen" een' afzonderlijken naam, en definieert ze als *»singuliere begrensde integralen."* [1]) Door deze notatie wordt eindelijk (1):

$$\left.\begin{aligned} &\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = F(x_2) - F(x_1) - \lim \int_{a-\eta}^{a+\delta} f(x)\,dx, \\ \text{of } &\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = F(x_2) - F(x_1) + \lim \int_{a+\delta}^{a-\eta} f(x)\,dx, \end{aligned}\right\} ..(3^{\dagger})$$

terwijl men heeft:

$$\tfrac{1}{2}v_2^2 - \tfrac{1}{2}v_1^2 = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \lim \int_{a-\eta}^{a+\delta} f(x)\,dx,$$

de integraal tusschen de grenzen x_1 en x_2 behoorlijk volgens den aanhef dezer §, als som der aangroeiingen opgevat zijnde.

---

[1]) *Mémoire sur la theorie des int. déf.*, van 22 Aug. 1814, 1825; en vele latere stukken.

In § 4 der »*Vrije Centraalbew.*" is nu $x_2 = -x_1$ en $a = 0$; voorts *neemt* x voortdurend *af*, en moet voor η en δ dus gesteld worden $-\eta$ en $-\delta$, zoodat de verg. (3†) wordt:

$$\left.\begin{aligned} \int_{x_1}^{-x_1} f(x)\,dx &= \mathrm{F}(-x_1) - \mathrm{F}x_1) - \lim \int_{\eta}^{-\delta} f(x)\,dx, \\ \text{of } \int_{x_2}^{-x_1} f(x)\,dx &= \mathrm{F}(-x_1) - \mathrm{F}x_1) + \lim \int_{-\delta}^{\eta} f(x)\,dx, \end{aligned}\right\} \ldots (3)$$

en dit is juist de form. (3) der genoemde § 4. De laatste term daarvan behoort niet tot de *hier gezochte* begrensde integraal, maar is een correctie-term, die om de waarde dezer integraal te vinden aan het verschil $\mathrm{F}(-x_1) - \mathrm{F}(x_1)$ moet aangebracht worden, n.l. de *af te trekken* »*singuliere integraal*": $\lim \int_{\eta}^{-\delta} f(x)\,dx$. Voor 't overige wordt in die § 4 het eerste gedeelte van 't tweede lid van (3) $= 0$, tengevolge der teekenbepalingen van bl. 10 boven, waardoor $\mathrm{F}(x_1) = \mathrm{F}(-x_1)$ wordt; want $\int -\frac{dx}{x^{2n+1}} = \frac{1}{2n} \cdot \frac{1}{x^{2n}}$ en $\int \mp \frac{dx}{x^{2n}} = \pm \frac{1}{2n-1} \cdot \frac{1}{x^{2n-1}}$, welke beide integralen, bij inachtneming der teekens, voor $x = x_1$ en $x = -x_2$ dezelfde waarden geven; terwijl men ook geene afwijking van dit resultaat ontmoet, indien men voor de integraal van $-\frac{dx}{x}$ neemt $-{}^1/_2\, l\,(x^2)$, of ook ${}^1/_2\, l\, \frac{1}{x^2}$.

Dus wordt eindelijk: $\int_{x_1}^{-x_1} f(x)\,dx = \lim \int_{-\delta}^{\eta} f(x)\,dx$, (verg. »*de Vrije C.*," bl. 11) en komt alles aan op de waarde dezer singuliere integraal, voor welke men ook kan schrijven: $\lim \int_{-q\varepsilon}^{p\varepsilon} f(x)\,dx$.

7. De vergelijking, welke door $\mathrm{F}(x_1) = \mathrm{F}(-x_1)$ voortvloeit uit (3), n.l.:

$$\int_{x_1}^{-x_1} f(x)\,dx = \lim \int_{-\delta}^{\eta} f(x)\,dx,$$

$$\text{of } \int_{x_1}^{-x_1} f(x)\,dx = \lim \int_{-q\varepsilon}^{+p\varepsilon} f(x)\,dx,$$

heeft in het bijzonder de kritische opmerkzaamheid getrokken van den heer J. Versluys. Op bl. 7 der »*Fouten*" leest men dat in de uitdrukking: $\lim \int_{+p\varepsilon}^{-q\varepsilon} f(x)\,dx$ »alleen bij het punt $x = 0$ zou moeten *geïntegreerd* worden." Juister dan »geïntegreerd," ware: de limiet-waarde bepaald. In overeenstemming met het aangehaalde, wordt door denzelfden heer in zijne *kritiek* mijner brochure gezegd: »dat ik dezelfde fout als prof. v. G. heb begaan, door van *de* geheele *integraal* alleen het »*deel*" bij het punt van discontinuïteit te nemen, en dit »deel" voor de waarde der geheele integraal aan te zien." De »letterlijke" overeenkomst tusschen prof. v. G. en mij bestaat, hoewel niet door toeval (vg. boven, bl. 7), inderdaad in zoover, dat in de formules op bl. 36 van »*Onderzoek*" enz. de grenzen waren omgewisseld, en bij mij niet: eene ondergeschikte omstandigheid, tengevolge waarvan echter de op bl. 7 der »*Fouten*" geciteerde integralen bij mij met omgekeerde teekens voorkomen. Met het straksgenoemde »deel *der* integraal" nu wordt door den heer V. bedoeld de term $\lim \int_{+p\varepsilon}^{-q\varepsilon} f(x)\,dx$ van prof. v. G., en $\lim \int_{-q\varepsilon}^{+p\varepsilon} f(x)\,dx$ bij mij; deze bedoeling is later gebleken, en blijkt nader uit de aangehaalde bl. 7 der »*Fouten.*"

Nopens die opvatting merk ik op: dat deze term *geen deel dezer begrensde integraal is.* Mijne integraal $+\lim \int_{-q\varepsilon}^{+p\varepsilon} f(x)\,dx$ is integendeel de negatief genomene (en dus *nu* opgetelde) *correctie*-term: $-\lim \int_{p\varepsilon}^{-q\varepsilon} f(x)\,dx$, die van de totale vermeerdering van $\frac{1}{2} v_1^2$ tusschen x_1 en $-x_1$, n.l. $F(-x_1) - F(x_1)$ moest worden *afgenomen*, om de eigenlijke begrensde integraal:

$$\int_{x_1}^{-x_1} f(x)\,dx = \lim \int_{x_1}^{p\varepsilon} f(x)\,dx + \lim \int_{-q\varepsilon}^{-x_1} f(x)\,dx$$

te verkrijgen, verg. formm. (1), (2) en (3) der vorige §. En daar tengevolge der teekens $F(-x_1) - F(x_1) = 0$ is, *wordt* hier als toevallig $\int_{x_1}^{-x_1} f(x)\,dx = -\lim \int_{p\varepsilon}^{-q\varepsilon} f(x)\,dx$ $= \lim \int_{-q\varepsilon}^{p\varepsilon} f(x)\,dx$. Den heer Versluys, wien die term een *deel* der begrensde *integraal* schijnt, moet het dan ook wel verbazen, dat bij prof. v. G. dat deel »van teeken *veranderd* is," zijnde de *orde* der *grenzen*: $+p\varepsilon$ tot $-q\varepsilon$ ($-q\varepsilon$ naar $+p\varepsilon$ bij mij), omgekeerd, en tegengesteld genomen aan de orde der geheele integratie, die bij prof. v. G. van negatief naar positief is, (bij mij omgekeerd).

Op bl. 7 der »*Fouten*" trekt de heer Versluys de bovenste twee vergelijkingen van elkander af, en verkrijgt aan de rechterhand:

$$\lim \left[\int_{+1}^{+p\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{+p\varepsilon}^{-q\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{-q\varepsilon}^{-1} f(x)dx\right] \quad (4)$$

Dit, zegt de heer V., is $= \lim \int_{+1}^{-1} f(x)\,dx$. Hetwelk *fout* is.

Want blijkens de vorige § is $\int_{+1}^{-1} f(x)dx = \lim \int_{+1}^{+p\varepsilon} f(x)\,dx +$ $\lim \int_{-q\varepsilon}^{-1} f(x)\,dx$, en behoort juist de tweede term van (4): $\lim \int_{+p\varepsilon}^{-q\varepsilon} f(x)\,dx$ *niet* tot de begrensde integraal: het is de *plotselinge* vergrooting, de discontinuïteits-sprong. Een criticus behoorde te weten, dat de methode van Cauchy strekt, om juist dit limiet-verschil $\lim\,[F(-q\varepsilon) - F(p\varepsilon)]$ af te zonderen. Naar de manier, waarop de waarde van elken term van (4) *moet* worden berekend, wordt (4) gelijk aan:

$$\lim F(p\varepsilon) - F(1) + \lim F(-q\varepsilon) - \lim F(p\varepsilon) + F(-1) -$$
$$- \lim F(-q\varepsilon),$$

d. i. $= F(-1) - F(+1)$. Is nu dit $= \int_{+1}^{-1} f(x)\,dx$? Dan ware de methode van Cauchy voor discontinue integralen dus overbodig, en zoude men maar, als bij continue integralen, eenvoudig 't verschil der aanvangs- en eindwaarde kunnen nemen?

$F(-1) - F(+1)$ is niet aan de discontinue integraal, maar hier aan *nul* gelijk, want tengevolge der teekenverhoudingen is in onze integraal $F(-x_1) = F(x_1)$. Door hierop te letten, zou de heer V. behoorlijk beneden op bl. 7 verkregen hebben: $0 = 0$, in plaats van het resultaat: $0 = \int_{+1}^{-1} f(x)\,dx$, dat nog wel door dien criticus genoemd wordt: »meer dan iets anders geschikt om te overtuigen."

De term $\lim \int_{-q\varepsilon}^{p\varepsilon} f(x)\,dx$ bij mij, is evenmin een *deel* der gezochte *integraal* als bij Prof. v. G. de omgekeerde term; tot het inzicht dier waarheid had, behalve door de kennis der Cauchy'sche methode, de criticus kunnen gebracht worden door op te merken:

1^e^. dat *ook* bij mij voor dien term de grenzen omgekeerd, tegengesteld genomen zijn aan de orde mijner geheele integratie (van positief naar negatief). Aan het oog der »*kritiek*" is dit echter ontsnapt; de heer V. verzekert zelfs, dat »het onderscheid tusschen de handelwijze van prof. v. G. en van mij daarin bestaat," dat ik *voor het bewuste* »*deel*" »het teeken onveranderd laat."

2^e^. Moest de vóórgeplaatste syllabe *lim* bij den heer V. nadenken en de overtuiging gewekt hebben, dat er niet sprake is van eene integratie tusschen grenzen, die van elkaâr verwijderd liggen, niet van eene som van aangroeiingen, niet van een uitgenomen »deel der *integraal*," maar van twee onderling en met nul *samenvallende* grenzen, van eene *plotselinge* vermeerdering, wier bedrag van $F(-x_1) - F(x_1)$ moet *afgetrokken* worden, om de ware waarde *der* integraal in-quaestie te verkrijgen. [1])

---

[1]) Nadat de onjuiste *kritiek* des redacteurs eenmaal deze zaak in het »Schoolblad" ter spraak had gebracht, zond ik aan die courant eenige korte opmerkingen. Ik had daarin het geoorloofde der hier besprokene korte notatie:
$\lim [F(-q\varepsilon) - F(p\varepsilon)] = \lim \int_{p\varepsilon}^{-q\varepsilon} f(x)\,dx$ willen toelichten, door blootelijk aan te toonen het overeenkomstige der *berekening* (verschil der waarden voor boven- en benedengrens), — en zonder aldáár, als te voren in »*De vrije C.*," mij te beroepen op Cauchy. Het eerste is echter minder noodzakelijk, daar 't hier slechts een vaststellen bij *definitie* betreft, waarin de groote *auteur der methode* ten volle aanspraak op navolging, en recht heeft tot zijn initiatief: »J'appelle *intégrale définie singulière* une intégrale prise relativement à une ou à plusieurs variables entre des limites *infiniment* rapprochées de certaines valeurs attribuées à ces variables, savoir, de valeurs infiniment grandes ou de valeurs pour lesquelles la fonction sous le signe $\int$ devient infinie ou indéterminée." Daarom, en wijl toen nog de bepaalde *aanwijzing* van het bedoelde »deel" ontbrak, heb ik voor het »Schoolblad" liever mijn stukje na opvraging

Die, trouwens door Cauchy steeds aangenomene, conditie: lim $+ p\varepsilon = 0$ en lim $- q\varepsilon = 0$, is volstrekt noodzakelijk, daar men anders niet zou mogen stellen:

$$\int_{x_1}^{-x_1} f(x)\,dx = \lim \int_{x_1}^{p\varepsilon} f(x)\,dx + \lim \int_{-q\varepsilon}^{-x_1} f(x)\,dx.$$

Indien $p\varepsilon$ en $-q\varepsilon$ *zeer* klein, doch niet *oneindig* klein waren, niet *tot nul* convergeerden, dàn zou men integendeel moeten stellen:

$$\int_{x_1}^{-x_1} f(x)\,dx = \int_{u_1}^{p\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{-q\varepsilon}^{-x_1} f(x)\,dx +$$
$$+ \int_{p\varepsilon}^{-q\varepsilon} f(x)\,dx.$$

En deze laatste term, waarop dan nòg de methode van Cauchy zou moeten toegepast worden, zou (*negatief genomen!*) juist datgene zijn, waarvoor de heer V. lim $\int_{-q\varepsilon}^{p\varepsilon} f(x)\,dx$ aanziet, n.l. een *deel der integraal*, en wel het bij 't discontinuïteitspunt gelegene.

Merkt men op, dat bij de op bl. 11 beneden der »*Fouten*" weêrgegevene integratie nog behoort de vervolgens door Prof. v. G. uitgevoerde *limiet*-overgang door $\varepsilon = 0$, dan blijkt dit samen weêr niets anders te zijn, dan de berekening der »singuliere integraal," en de kapitale »fouten" die t. a. p. worden »aangewezen," derhalve te liggen aan de zijde van den »criticus."

Door zuivere toepassing van Cauchy's methode, wordt dáár *niet* het punt von discontinuïteit vermeden, gelijk wèl Poisson deed, verg. »*De Fouten*," bl. 10 en 9. De »afkeuring" op bl. 10 midden is dan ook in zoover ongegrond, want Cauchy wijst in 't daar aangehaalde wel degelijk eene fout van Poisson aan, n.l. deze, dat door 't *ontwijken* van 't discontinuïteits-*punt* het onderzoek der »singuliere integraal" wordt verzuimd, zoodat er a priori onmogelijk iets anders dan de *voorname waarde* kan verkregen worden. En toch is men verplicht tot die discussie

---

in zoover gewijzigd, dat ik mij bepaalde tot de verzekering 2e: dat de bewuste term (de singuliere integraal n.l.) geen »deel der integraal" voorstelt. De logica der »kritiek" verstond hieruit, dat dàn »*zulk een integraal*" (meenende: eene singuliere integraal) *de geheele* begrensde integraal moet verbeelden. Zie »Schoolbl.," 4 Febr. 1873. Volgens zijne beteekenis in deze methode is echter die term *noch deel, noch geheel,* maar *correctie* van F $(-x_1)$ — F (x_1).

der »singuliere integraal," welke bij Cauchy's vroeger onderzoek afhangt van de orde der integratien, zie beneden, § 8.

Naar Cauchy's methode nu integreert men door het *geheele* veld der integraal, van x_1 *tot* $+ 0$, en *van* $- 0$ tot $- x_1$, met vermijding van den *invloed* der discontinuïteit; of wel, men neemt voor de integraal: $F(x_1) - F(x_1)$, *verminderd* met de singuliere integraal: $\lim \int_{p\varepsilon}^{-q\varepsilon} f(x)\, dx$. [1])

Mijne conclusie is, dat in 't boven besprokene geen blijk is te vinden, dat den heer J. Versluys *de methode van Cauchy behoorlijk bekend is.* Deze criticus beseft blijkbaar zelfs niet de *reden* dier methode, als gelegen in de beteekenis en waarde van den term $\lim \int_{-q\varepsilon}^{p\varepsilon} f(x)\, dx$, die, gelijk de »kritiek" zich kan herinneren, den naam draagt van *singuliere integraal* (zie de vorige §). Deze *bepaalde integraal, door den heer Versluys afgekeurd"* (Schoolblad, 4 Febr. 1873), is een voorbeeld dier »*intégrales singulières, dont l'idée appartient à l'auteur* (Cauchy), *et qui peuvent être regardées comme une découverte en analyse.*" (Legendre, Rapport betreffende 22 Aug. 1814).

Naar ik hoop, is thans de voorgaande »opheldering" duidelijk genoeg. In 't geval der *integratie tusschen imaginaire grenzen*, welke den heer Versluys in 't algemeen bekend is, heeft men iets, dat met de singuliere integralen overeenkomstig en ten nauwste verwant is: het »*integraal-residu*": zie nog beneden § 10.

---

[1]) Met voorbijgang van het »altijd doorloopend" en »geen beteekenis" op bl. 34 ben. en 35 bov., moet ik hier even stilstaan bij bl. 37 van »*Welke waarde*": de functie waaruit, volgens de beschouwing van Dr. Schouten, de correctie eener bepaalde integraal moet bestaan, behalve die welke Cauchy heeft gegeven". Deze »correctie" komt overeen met de »singuliere integraal". Inderdaad moet (zie de form. boven bl. 37 waar gedurig *lim* of *Gr.* ontbreekt) lim $F(c + \varepsilon) - \lim (c - \varepsilon)$ noodzakelijk gelijk zijn aan lim $\delta f(c)$, enz. De eerst *afgetrokkene* sing. int. wordt door Dr. S. later *weêr bijgeteld*, en dit zal voor de begrensde integraal moeten geven: $F(b) - F(a)$. Dr. Schouten wil eenvoudig niets anders, dan terugkeeren tot de oude definitie: verschil der grenswaarden, *ook* bij discontinuïteit. 't Zelfde herhalen de voorbeelden op bl. 38, en de »correcties" aldaar zijn van denzelfden retrograden aard.

8. Indien wij nu in ons vraagstuk de waarde der singuliere integraal: $\lim \int_{-q\varepsilon}^{+p\varepsilon} f(x)\,dx$ werkelijk *berekenen*, dan is zij gelijk aan de limiet-waarde van $F(p\varepsilon) - F(q\varepsilon)$. [1]) En daar $f(x)$ eene der vormen (1) en (2) van bl. 10 der »*Vrije Centraalbew.*" heeft, zal vóór den limiet-overgang, met uitzondering der macht -1 van x, $F(p\varepsilon) - F(-q\varepsilon)$ bestaan uit termen, die allen tot factor hebben $\frac{q-p}{\varepsilon^x}$, òf wel $\frac{\delta-\eta}{\eta^x \delta^x}$.

Voor den term $-\frac{a_1}{x}$ neme men de formule: $\int -\frac{dx}{x} = -\frac{1}{2}\, l(x^2) + C$, waardoor men voor het van dien term afkomstige deel van $F(p\varepsilon) - F(-q\varepsilon)$ verkrijgt: $\frac{a_1}{2} l(q^2\varepsilon^2) - \frac{a_1}{2}\, l(p^2\varepsilon^2)$ $= \frac{a_1}{2}\, l\left(\frac{q^2}{p^2}\right) = a_1\, l\,\frac{q}{p}$, — òf wel $a_1\, l\,\frac{\delta}{\eta}$.

[Wilde men voor de integraal nemen: $lx + C$, dan zoude de *afzonderlijke* behandeling der singuliere integraal aanleiding geven tot eenige onnauwkeurigheid, die dan ook ligt in form. (4) op bl. 12 der »*Vrije C.*;" daarom is 't hier gegevene beter. Men kan echter zeer wel de integraal lx gebruiken, mits de *geheele* begrensde integraal behandelende naar form. (A) van § 6 hierboven; dit geeft:

$$\int_{x_1}^{-x_1} -\frac{a_1\,dx}{x} = \lim \int_{x_1}^{p\varepsilon} -\frac{a_1\,dx}{x} + \lim \int_{-q\varepsilon}^{-x_1} -\frac{a_1 dx}{x}$$
$$= a_1 \lim\left[-l(p\varepsilon) + l(x_1) - l(-x_1) + l(-q\varepsilon)\right]$$
$$= a_1 \lim\left[l\,\frac{x_1}{p\varepsilon} + l\,\frac{q\varepsilon}{x_1}\right] = a_1 \lim l\left(\frac{q\,\varepsilon}{p\,\varepsilon}\right) = a_1\, l\,\frac{q}{p}.$$

Er worden hier *niet* »logarithmen van negatieve getallen *genomen*," maar zij en de tweemaal voorkomende factor -1 verdwijnen door deze bekende en geoorloofde transformatie. De heer J. Versluys meent, dat men ook in deze *transformatie* logarithmen van negatieve getallen moet vermijden, omdat »logarithmen van negatieve getallen imaginair zijn, en elk negatief

---

[1]) Ofschoon in »*de vrije C.*" vóóraf bl. 11 ondubbelzinnig genoeg is, en bepaald zegt, dat »ε tot nul nadert," ware 't wellicht duidelijkheidshalve beter, in de eerste drie vergg. op bl. 12 vóór elk der leden 't woordje *lim* niet weg te laten.

getal niet één maar een onbepaald aantal logarithmen heeft." Men moet dus ook transformatien met den factor $\sqrt{-1}$ vermijden? En de »kritiek" schijnt thans aan de (*niet* te vermijden?) logarithmen van *positieve* getallen *slechts ééne* waarde toe te kennen].

Volgens het hierboven aan 't slot van § 5 gezegde, moet nu $q = p$ of $\delta = \eta$ worden genomen, daar $p\,\varepsilon$ en $q\,\varepsilon$ of η en δ aan de limiet niets anders dan de differentiaal der *onafhankelijke veranderlijke* x voorstellen, en dus in de analyse als *gelijk* zijn *ondersteld* (verg. »*De vrije C.*," § 5 en bl. 22). Eerst hier treedt dus mijne voornaamste afwijking van Prof. v. G. op. Door die waarheid worden $q - p$ en $l\,\frac{q}{p}$ òf wel $\delta - \eta$ en $l\,\frac{\delta}{\eta}$, en dus *alle* termen der singuliere integraal, *nul*, en men heeft in ons vraagstuk:

$$\int_{x_1}^{-x_1} f(x)\,dx = \lim \int_{-q\,\varepsilon}^{p\,\varepsilon} f(x)\,dx = 0.$$

Aan mijne meeningen ten aanzien der laatst aangevoerde omstandigheid is de heer Korteweg niet geheel vreemd. Zeer juist is op bl. 6 en 7 boven, der »*Nasporingen*" de opmerking: dat de geheele uitkomt afhangt van de *wijze hoe* tot de limiet wordt overgegaan. (Vg. »*De Vrije C.*," bl. 16 en noot ald.) Men zou er bij kunnen voegen, dat op bl. 6 van »*Nasp.*" eene betrekking als: $p = q + k\alpha$ niet *mag* gesteld worden, omdat de boog dáár de *onafhankelijke veranderlijke* is, wier variatie en limiet-overgang niet willekeurig aan andere wetten mag onderworpen worden, dan de analytische en die der continuïteit. Geen wonder, dat dan ook de heer K., zie blad 4 boven en later, ongezind is, om in ons vraagstuk voor de waarde der totale versnelling in 't krachtcentrum *nul* aan te nemen, en de beweging als symmetrisch te beschouwen.

Als nu de schrijver slechts bedenkt, dat om bovengenoemde reden op bl. 7 de kleinste deelen van α *gelijk*, en ook noodzakelijk $\lim \frac{1}{\alpha} = -\lim \frac{1}{-\alpha}$ moet zijn, dan zal hij mij toestemmen, dat ook de onbepaaldheid in regel 3 van bl. 8 in het bijzonder geval der onafhankelijke veranderlijkheid overgaat in de bepaalde waarde *nul*. Dezelfde uitkomst moet in datzelfde geval verkregen worden aan den voet van bl. 8, door te stellen: $\varepsilon = \eta$. Dit is ook toepasselijk op § 2 van den heer K.; ook dáár moet $p = q$ en op bl. 23 alleen de *tweede* onderstelling toegelaten worden. Op bl. 22 is het *niet* geoorloofd, bepaalde wetten (functien van ε) *aantenemen* en *intevoeren*, volgens welke $p\ \varepsilon$ en $q\ \varepsilon$ tot nul naderen: de onafhankelijke veranderlijkheid *eischt*, dat $\lim \frac{p\varepsilon}{q\varepsilon} = 1$ zij. In die § 2 voor $q\ \varepsilon$ liever zeggende: $-q\ \varepsilon$, merk ik tegen bl. 23 op, dat men in ons vraagstuk moet stellen $\lim v_p = \lim v_{-q} = \infty$. Immers voor de *snelheid* is in 't krachtcentrum *geene* teekenverandering *ondersteld*, en daarom mag v aldaar slechts ééne waarde $+ \infty$ hebben, en bestaat de (nog wel voor *beide* leden) beweerde onbepaaldheid der form. (I) *niet*.

Ook Dr. Schouten neemt op bl. 37 ter weêrszijde der discontinuïteitspunten *dezelfde oneindig kleine* aangroeiing ε, en zegt bovendien uitdrukkelijk, dat wegens de continuïteit »voor alle functies" (bij alle discontinuïteitspunten) »ε gelijk moet genomen worden." In overeenstemming daarmede zegt Dr. Schouten op bl. 27 beneden, dat »de waarde onzer singuliere integraal hier nul wordt."

De heer J. Versluys daarentegen meent, dat de [oneindige kleine] »aangroeiingen der *onafhankelijke* veranderlijke wel ongelijk mogen genomen worden," en noemt in zijne *kritiek* de meening, dat die aangroeiingen gelijk moeten zijn, eene *dwaling*. Toch is die »dwaling" een gevolg van de continuïteit der ruimte, en de ondersteldc grondslag der geheele differentiaalrekening; zie hierboven.

Verder helt de heer V. over tot de meening, dat »in Cauchy's methode p en q steeds gelijk *moeten* genomen worden," en wordt ook in »*De Fouten*" op bl. 8 gezegd, dat er bewijs vereischt wordt voor de onderstelling, dat p en q »hier ongelijk mogen of moeten zijn." Zoodanig bewijs nu is op zichzelf *niet* noodig, omdat de òngelijkheid van p en q het *algemeene* geval is. Het konde bovengenoemden criticus bekend zijn, dat in het tweede gedeelte van Cauchy's *Mémoire sur la th. des int. déf.* van 1814, waar voor 't eerst het denkbeeld der *singuliere integralen* voorkomt, sprake is van eene *dubbele* integratie, en aangetoond wordt, hoe de onbepaaldheid afhangt van de *orde* der integratien· Die dubbele integratie heeft betrekking op 't vinden der grootte van een *oppervlak*, waarvan de vergelijking is: $y = f(x, z)$. De onbepaaldheid, aanleiding gevende tot eene singuliere integraal, kan zich vertoonen na de eerste integratie, dus bij de *tweede*, die betrekking heeft op éénе der *twee onafhankelijke* veranderlijken, terwijl daarbij de grenzen nog functien kunnen zijn der andere variabele. Die grenzen, ontleend aan de vergelijkingen van de projectien der limietkrommen van het oppervlaks-element, kunnen discontinuïteitspunten vertoonen, en nu *blijft* juist de onbepaaldheid bestaan, indien deze punten aldus niet *binnen* de grenzen, maar juist *op* den omtrek van 't element liggen. Dergelijke beschouwingen geeft Cauchy in zijn *Mémoire sur les int. déf. pr. entre des lim. imagin.* van 1825, bij 't integraal-residu, alwaar de complexe $z = x + iy$ ook aan *twee* reëele veranderlijken x en y beantwoordt. Dáár blijkt $\Delta = \Sigma \pm 2\pi i F = 0$ te zijn, indien $f(z)$ verdwijnt voor $x = \pm\infty$, *welke* ook de waarde zij van x, òf omgekeerd, dus bij afhankelijkheid der functie, van slechts éénе reëele veranderlijke.

Hieruit kan der »kritiek" blijken, dat, terwijl in het algemeene geval p en q onderling onafhankelijk moeten zijn, daar men, gelijk bij een *oppervlak*, te doen heeft met *twee onafhankelijke* veranderlijken, het geval gansch anders is in ons probleem, waar slechts *éénе reëele onafhankelijke veranderlijke* in de integraal optreedt. Eene onbepaaldheid $\frac{0}{0}$ als deze, bij slechts éénе veranderlijke, is bloot schijnbaar, en de handelwijzen of definitien zelf der analyse kunnen haar steeds doen verdwijnen; zie ook »*De vrije C.*," bl. 15 ben.

Intusschen is het ook in ons vraagstuk ver van overbodig, de singuliere integraal te *onderzoeken*, en door verifieering ons te *overtuigen*, dat hare waarde nul is. Onverantwoordelijk ten minste zou het zijn, indien men in voorkomende gevallen handelde volgens »*De Fouten*," bl. 12 ben.: »Bij het geheele onderzoek van de quaestie *kan* men de versnelling *in het centrum* wel *missen*." Dit voorstel om de geheele moeilijkheid eenvoudig ter zijde te stellen, is het éénige *stellige* resultaat, dat »*De Fouten*" aanbieden van des schrijvers overdenkingen. In de volgende § zal ik nog een enkel voorbeeld aanvoeren van het min gelukkige licht, waarin zich soms de »kritiek" vertoont, zoodra zij opbouwende zich begeeft op het veld van zelfwerkzaamheid.

Eigenlijk is de limiet, waartoe in het vorige $p\varepsilon$ en $q\varepsilon$ naderen, eene *gemeenschappelijke*, n.l. het ondeelbare *punt zelf*, dat hier krachtcentrum is. Daar ε aan de limiet geene andere interpretatie kàn hebben, dan die als element dx des afstands, beantwoordt het beter aan eene gemakkelijke voorstelling der zaak, indien men p en q beide $= 1$ neemt: in dezen geest heb ik ook in den aanvang (§ 6 boven) liever de grootheden $p\varepsilon$ en $q\varepsilon$ resp. willen voorstellen door η en δ, voor welke dan $\lim \eta = \frac{p}{q} \lim \delta$ blijkt over te gaan in $\lim \eta = \lim \delta$. Daar intusschen, p en q constanten zijnde, $p\varepsilon$ en $q\varepsilon$ evenzeer oneindig klein, en van dezelfde orde, zijn als ε, en het hier slechts op de (limiet-)*verhouding* aankomt, doet zulks eigenlijk niet ter zake, en kan men voor p en q even goed als de eenheid, nemen twee *willekeurige* positieve *getallen, mits gelijk*.

9. Mijn voorslag, om voor de gelijke, maar overigens *willekeurige getallen* p en q, de *eenheid* te nemen, gaf incidenteel aanleiding tot zekere controverse, of de eenheid niet of wel tot de »getallen" moet worden gerekend. Het antwoord op deze vraag hangt geheel af van eene vrij willekeurige conventie, deze namelijk, of men getallen als de »namen" der hoeveelheden, dan wel als die der hoeveelheden èn der eenheid verkiest te definieeren. In 't eerste geval moet men later zeggen: de cijfers (met uitzondering der 0) zijn teekens voor getallen èn voor de eenheid: men krijgt dus dan een paar woorden *minder* in 't begin, en *meer* bij de latere gelegenheid. Daar men overigens in 't vervolg, wanneer het op den aard der dingen aankomt, steeds met *grootheden*, niet met *getallen* te doen heeft, bestaat het geheele onderscheid in geringe verschillen als het zoo even genoemde. Met de beteekenis der woorden schijnt het beter te strooken om, gelijk vroeger en grootendeels nog heden, »getal" (van *tellen*, en synoniem met *aantal*) als naam voor hoeveelheden-alleen te gebruiken. Zoodanige onbeteekenende en tamelijk onverschillige conventies kunnen intusschen geene ongezochte aanleiding geven tot getwist, daar een bloote woorden*strijd* hierbij slechts 't gevolg zou zijn eener met overigens onschadelijke vrijheid gewijzigde woorden*keus*.

Minder geoorloofd is het, indien men in de wiskunde *redeneeringen* gaat bouwen op *onjuiste* woorden, die men voor »nieuwe" definities uitgeeft, ja zelfs bestempelt met den naam van *axiomas*, zonder het zelf te merken, dat men niets anders heeft gedaan, dan door die woorden de uitdrukking te vermijden van het begrip, dat men zou moeten definieeren. Ik mag niet nalaten hiervan een enkel sterk sprekend voorbeeld aan te voeren, nu eene *meetkundige* grond-definitie geldende, en waarvan ik slechts in minder algemeene bekendheid eene oorzaak kan gissen voor de omstandigheid, dat de opmerking niet reeds vóór mij is gemaakt.

De heer J. Versluys schreef onlangs een paar artikels over de methoden bij 't meetkundig onderwijs. In één daarvan, gericht tegen Dr. Onnen, wordt gezegd, dat Dr. Schlömilch's geheele theorie der evenwijdige lijnen »fout" is, en men het begrip van *rechte lijn* (verbonden met dat van *richting*) tegenwoordig verkeerd gebruikt. In een vorig artikel wordt door denzelfden »criticus" gewraakt het »axioma:" »de rechte lijn is de kortste weg tusschen 2 punten," en wel voornamelijk omdat de leerling (welke leerling toch wel?) nog niet zou weten, waarin het even lang zijn van eene rechte en eene kromme lijn bestaat, geen begrip zou hebben van de lengte eener rechte lijn, niet de lengte van rechte en kromme lijnen zou kunnen vergelijken. Alsof niet de grondstof, ook van juist de eenvoudigste meetkundige begrippen, door de ervaring alleen en voldoende wordt geleverd, en daarom definitien als de gewraakte, ontleend aan de waarneming der beweging, en die zoowel wording als mogelijkheid doen inzien, juist de besten en de éénig-rationeele zijn! De criticus meent, dat op de aangewezene »slordigheid de onderwijzers of leeraren niet attent zullen gemaakt zijn, en dat er verstand toe schijnt vereischt te worden, om het uit zich zelven in te zien," terwijl »er zoowel in het buitenland als bij ons *voor het grootste deel* een zeer groot onderscheid schijnt te bestaan tusschen wetenschappelijke mannen en leerboekschrijvers." Nu is de schrijver der »*Fouten*" tevens auteur van het »Leerboek der vlakke meetkunde, door J. Versluys," in welks voorrede ter »rechtvaardiging" gezegd wordt, dat de axiomas er veel scherper in zijn behandeld dan in de gewone ook in 't buitenland verschijnende leerboeken, [in welke] »men nog al te vaak van de rechte lijn eene definitie geeft, waarvan sints lang zonneklaar aangetoond is, dat zij *logisch* geheel onjuist is."

Bij de groote rol, die 't begrip der *rechte lijn* ook in ons probleem speelt, nam ik de moeite om dan de definitie des heeren V. eens te raadplegen. Ik vond op bl. 3 dit »Axioma: Door elke twee punten kan men altijd één lijn laten gaan, die zich naar twee kanten onbepaald ver kan uitstrekken, en waarvan geen enkel punt van plaats verandert, als men de lijn *om die twee punten* laat *wentelen*. Bepaling: Die lijn noemt men eene *rechte lijn*." Alzoo door *omwenteling*. Doch omwentelingen kunnen slechts plaats hebben in bepaalde vlakken, dat is *om* bepaalde *rechte lijnen*, die op die vlakken normaal staan, en onmogelijk is het, zich eene *omwenteling* voor te stellen, *niet* om eene door 2 punten gelegde *lijn, maar om die punten* zelf. Elk eenvoudig menschenverstand beseft dit; de leer der koppels in de werktuigkunde toont het; »moment ten opzichte van een punt" beteekent steeds: »ten opzichte der normaal in dat punt," en zelfs in de analytische mechanica is men verplicht, *willekeurige* rotaties »om punten" terug te brengen tot verschillende omwentelingen om (onderling rechthoekige) *rechte lijnen* als assen. De heer Versluys echter, »wiens studie eene andere richting genomen heeft," ziet zulks niet, en laat de *wenteling* geschieden *om twee punten,* zonder te beseffen, dat hij niets anders doet, dan de *rechte lijn* te definieeren naar haar gedrag bij de aswenteling om eene .... *rechte lijn!*

Op die wijs laat men zichzelf verschalken door *woorden.* Had men slechts gesproken van »beweging, waarbij 2 punten hunne plaats behouden," dan ware voor den vorm althans de »logica" gered; doch zelfs dàn is deze »nieuwe definitie" verwerpelijk. Want het begrip van zoodanige beweging wordt vaag; *met recht* zou *hier* de leerling de mogelijkheid der verlangde beweging betwijfelen, en vernemende, dat de rechte lijn aan de vraag voldoet, en tevens geleerd hebbende, dat beweging = plaatsverandering is, ons tegenwerpen, dat bij de gestelde voorwaarde der 2 onverplaatste punten, de rechte lijn zich in 't geheel niet beweegt, en wij hem dus spreken van eene beweging, die .... geene beweging is! Hetwelk wij hem zouden moeten toestemmen, inziende dat hier nòch van voortgaande, nòch van wentelende beweging sprake mag zijn, en in stilte opmerkende, dat de leerling meer »logisch" is dan wij, zijne leeraren of leerboekschrijvers.

Maar ook zou die leerling daardoor te meer kunnen twijfelen aan het recht, waarmede in bovenstaand »axioma," blijkens de gevolgtrekking 1e op bl. 4, »ééne" eigenlijk de beteekenis heeft van »slechts ééne." En juist dit is een punt van veel gewicht. De bepaling der rechte lijn zal toch onvermijdelijk gebaseerd moeten zijn op de onderstelling van iets, dat reeds uit de ervaring als het wezen der rechte lijn bekend is. Maar de voornaamste eisch bij de keuze der bepaling, is het opnemen *dier* eigenschap, die vooral noodig is voor 't afleiden en bewijzen van latere eigenschappen, en dàt is boven alles het samenvallen van 2 rechte lijnen, gelegd door dezelfde 2 punten. Deze eigenschap moet dus met recht uit de bepaling voortvloeien, en dat is het geval, als men naar de ervaring de rechte lijn definieert als *kortste* (dus unieke) *weg.*

En wat is nu meer »logisch" en tegelijk paedagogisch: een zoo belangrijk feit als dat der mogelijkheid van slechts ééne rechte lijn, te ontleenen aan de ervaring, de moeder aller wetenschap, dan wel het te decreteeren bij wijze van »axioma?"

10. Keeren wij terug tot de boven behandelde integraal, dan maken wij weder de opmerking, dat in de »studie-richting" van den heer J. Versluys meer voorliefde schijnt geschonken te worden aan het *nieuwe* in de wiskunde. [1]) Althans in de laatste der »*Fouten*" (bl. 14 ben.) wordt men onderricht: wàt »*tegenwoordig*" toch wel de beteekenis is van *krom-* en *rechtlijnige integratie.* Deze verklaring schenkt intusschen weinig licht, daar zij ons hoogstens de geometrische interpretatie ontdekt der imaginaire *variabele;* ware daaraan nu toegevoegd eenige opheldering betreffende imaginaire *functien,* d. i. functien der genoemde variabele, dan had gevoegelijk kunnen volgen de verklaring der »*integratie* tusschen imaginaire grenzen" (zie »Mémoire" daarover van Cauchy in 1825; ook *C. rendus,* vooral t. XXIII).

1) Ook de »*Archives Néerl. des sc. ex. et nat.*" van 1872 bevatten een »nieuw bewijs der associatieve eigenschap van de quaternion-vermenigvuldiging, door J. Versluys." Opmerkelijk is 't dat daarin eene *fout* voorkomt, die in hare soort juist een tegenhanger is van de boven aangehaalde definitie-fout. Op de laatste der zes bladzijden van dat artikel wordt gewezen op eene *fout* van Dr. H. Hankel, in diens bewijs van 't distributief principe, 't welk steunen moet op de eigenschap in §§ 4 en 5 des schrijvers »bewezen." Het eerste en hoofd-gedeelte van dit laatste »bewijs" vindt men bovenaan op de derde blz. De heer V. beschouwt daar 3 »quaternions droits" of »vecteurs": v, v_1, v_2 en redeneert aldus: $(v+v_1)v_2 = (v+v_1)\colon \mathrm{R}v_2 = \frac{v+v_1}{\mathrm{R}v_2}$; $(v+v_1)v_2 = \frac{v}{\mathrm{R}v_2} + \frac{v_1}{\mathrm{R}v_2}$ $= vv_2 + v_1v_2$. De betoogkracht van dit bewijs zou voornamelijk moeten liggen in de vergelijking: $\frac{v+v_1}{\mathrm{R}v_2} = \frac{v}{\mathrm{R}v_2} + \frac{v_1}{\mathrm{R}v_2}$. Nu zegt de slot-opmerking, dat deze definieerende vergelijking: $\frac{v_1}{v} + \frac{v_2}{v} = \frac{v_1+v_2}{v}$, tegelijk de distributieve eigenschap der deeling van »vectoren" uitdrukt. Voor *vectoren* in den zin van *rechte quaternions*, geldt dit eerst *na* 't invoeren van de verwisseling dezer laatsten met hunne indices. Het recht daartoe ontstaat echter eerst door de overeenkomst tusschen de wetten bij bewerkingen met (willekeurige en *rechte*) quaternions, èn bij die met vectoren, speciaal wat betreft de eigenschappen, die voor de laatsten bij *definitie* zijn vastgesteld. En de zekerheid aangaande die overeenkomst bestaat niet, als men nog voor rechte quaternions het distributief principe moet *bewijzen.* Daarom is het in § 4 nog *niet* geoorloofd te stellen: $\frac{v+v_1}{\mathrm{R}v_2} = \frac{v}{\mathrm{R}v_2} + \frac{v_1}{\mathrm{R}v_2}$, of $(v+v_1)\frac{1}{\mathrm{R}v_2} = v\,\frac{1}{\mathrm{R}v_2} + v_1\frac{1}{\mathrm{R}v_2}$, want dáár beteekenen v, v_1 en $\frac{1}{\mathrm{R}v_2}$ »rechte *quaternions.*" Zoodat in dit »bewijs" niets anders wordt gedaan, dan *onderstellen* hetgeen *bewezen moet worden.*

De complexe veranderlijke $z = x + y\sqrt{-1}$ of $x + iy$ behoeft niet noodzakelijk »een punt in een plat vlak voor te stellen," maar volgens zekere overeenkomsten (het beschouwen van $i = \sqrt{-1}$ als een teeken van loodrechten stand, of 't aannemen der exponentiaal $e^{ip} = \left(-1\right)^{\frac{p}{\pi}}$ als *richtingsfactor*), *kan* hare geometrische interpretatie zijn: de voorstelling van den *vector* r_p van zoodanig punt, d. i. zijn voerstraal naar lengte *en richting*. Met invoering der geometrische (vectoren-) optelling: AC = AB + BC, wordt dan: $z = x + iy = r \cos p + r\, i \sin p = r e^{ip} = r_p$, waarin de modulus r de absolute lengte van genoemden voerstraal uitdrukt, en het argument p den hoek, dien hij maakt met de x-as. Deze interpretatie geeft aanleiding tot het vereenigen van pool- en rechthoekig coördinatensysteem onder beknopten symbolischen vorm, en de daaruit ontstaande handelwijs [1]) heeft groote voordeelen boven 't gebruik der coördinaten van Descartes. Door definitie is, tengevolge van de eigenschappen der operaties van optelling en aftrekking: $\lim \Delta (z_1 - z) = dx + i\,dy$, en blijkt bij vectoren-optelling en limiet-overgang gemakkelijk, dat $z - z_0 = \int_{z_0}^{z} dz$ onafhankelijk moet zijn van den (recht- of kromlijnigen) weg, door 't punt z gevolgd tusschen z_0 en z. Eene overeenkomstige eigenschap heeft Cauchy bewezen bij eene *functie* w der complexe variabele, voor de integraal $\int_{z_0}^{z} w dz$, indien die functie »synectisch" is.

Nu is door Prof. v. G. en door mij geen beroep gedaan op Cauchy's *resultaten* bij *recht- of kromlijnige integratie*, maar zijn bloot deze laatste *benamingen* ook op de integralen in dit vraagstuk ter onderscheiding toegepast; dit nu is de laatstaangewezene »fout" des heeren Versluys, die meent, dat de moge-

---

[1]) Zie, behalve o. a. Houel's *Cours de Calc. Inf.*, 1872, en Witzschel's *Grundlinien der neueren Geom.*, — over den »Calcul directif" fraaie opstellen van Abel Transon in Gerono's *Nouv. Ann. de Math.* van 1868 en Jan. 1873.

lijkheid om van recht- en kromlijnige integralen te spreken, afhangt van 't gebruik van *imaginairen.* Deze opvatting schijnt mij eene getrouwheid aan Cauchy, die men noemen mag: »*à la chinoise*"; zij onderstelt althans vreemde denkbeelden aangaande de algemeenheid der wiskundige begrippen en het verband tusschen reëele en complexe (imaginairen bevattende) grootheden. De bedoelde benamingen zijn slechts een gevolg van de bovengenoemde geometrische interpretatie, die door Cauchy eerst later op de imaginairen is toegepast (verg. *Nouv. Ex. d'An.* etc. t. IV p. 157), ter verzinlijking zijner te voren bloot operatieve en symbolische theorie. Die benamingen zijn dus niet een gevolg van 't *imaginaire,* maar juist van de *reëele* interpretatie, waardoor de complexe aan een' voerstraal gelijk *wordt.* Indien nu echter de reëele veranderlijke werkelijk een voerstraal *is,* wiens uiteinde in een plat vlak eene kromme of rechte lijn beschrijft, dan zal toch wel a fortiori, — daar conventies nu overbodig zijn, — die interpretatie kunnen gelden? Of: indien eene kromme lijn, waarop eene integraal betrekking heeft, *gegeven* is, dan zal men toch ook mogen spreken van »*kromlijnige integratie*"? (Verg. Cauchy in *C. rend.* t. XXXII p. 789: *Sur les valeurs principales et générales des »intégrales curvilignes" dans lesquelles la fonction sous le signe* $\int$ *devient infinie en un point de la »courbe donnée.*") En of men dan daarbij de rechthoekige coördinaten vereenigt door eene complexe uitdrukking, dan wel ze afzonderlijk houdt, of poolcoördinaten gebruikt, dat zal toch wel 't recht dier benaming niet wijzigen.

De heer Versluys diende te weten of te bedenken, dat de reëele getallen niets anders zijn, dan bijzonder geval der complexe, n.l. als de coëfficient van $\sqrt{-1}$ nul wordt. Bij eene verdere studie der werken van Cauchy zal de »criticus" dan ook vinden, hoe gene gedurig opmerkt, dat zijne resultaten »subsistent pour toutes les valeurs réelles ou imaginaires de la variable". Ja zelfs zegt in *C. rend.* t. XXIII p. 566 Cauchy uitdrukkelijk, dat »gewoonlijk eene *rechtlijnige integraal* bedoeld wordt, wanneer het betreft de berekening van *reëele* integralen." Verder zijn de voorbeelden, die Cauchy van zijne rechtlijnige integralen geeft, dikwijls van dien aard, dat het imaginaire deel der variabele nul is, zie bijv. *C. rend.* t. XXIII, p. 736. Dus zal dan toch wel eene integratie langs de x-as een voorbeeld van rechtlijnige integratie zijn. En dit is juist de rechtlijnige integraal in onze beschouwing, waar de veranderlijke $z = x$ wordt, daar $y = 0$ is.

De heer V. gelooft ook (zie de laatste regels der »*Fouten*"), dat bij deze kromlijnige integratie en bij reëele veranderlijken in 't algemeen, *niet* toepasselijk is de door Cauchy voor imaginaire begrensde integralen bewezene eigenschap: »dat bij eene differentiaal, die" (eigenlijk: wier *afgeleide*, of *functie* onder 't teeken) »*synectisch* blijft voor alle punten, gelegen tusschen twee verschillende kromme lijnen, getrokken van A naar B, de waarde der begrensde integraal *gelijk* is, bij integratie van A tot B, langs deze *beide* kromme lijnen" (liever algemeen: en langs *alle* tusschen die beiden *mogelijke* krommen).

Eene »*synectische*" functie is eene zoodanige, die tegelijk is »*monogeen*" (de afgeleide onafhankelijk van de richting, waarin de veranderlijke groeit), »*uniform*" of »*monodroom*" (zoo, dat aan elke waarde der variabele slechts ééne waarde der functie beantwoordt), en »*continu*" (zoo, dat met eene oneindig kleine aangroeiing der variabele ook eene oneindig kleine aangroeiing der functie overeenkomt). Deze drie eigenschappen nu kunnen op dezelfde wijs attributen zijn van *reëele,* als van *imaginaire* functien, en men is daarom zelfs *gewoon* te zeggen (en aan te toonen), dat eene *reëele* begrensde integraal met *monogene* afgeleide, kan beschouwd worden als eene *synectische* functie van elke harer limieten. Inderdaad beteekent dan ook de bovengenoemde door Cauchy bewezene eigenschap niets anders dan dit, dat in het geval van »synexie" de imaginaire begrensde integralen overeenkomstige eigenschappen hebben met die, welke voor reëele integralen reeds lang te voren bekend waren.

De kromlijnige integralen in ons vraagstuk nu stellen de aangroeiing van 't vierkant der snelheid voor, en zijn inderdaad *monogeen.* Bij imaginaire integralen heeft Cauchy het aangetoond, en bij reëele is 't van algemeene bekendheid, dat de boven gedefinieerde monogenie plaats vindt in het geval, dat de te integreeren differentiaal is eene *totale* (volledige) *differentiaal.* Dit nu is het geval in elk cinematisch probleem waar, als hier, eene *krachtfunctie* bestaat; ieder weet zulks. Dat de differentiaal inderdaad onafhankelijk van de richting is, wordt bij reëele veranderlijken bevestigd op bl. 17 van »*De vrije C.*," waar bij kromlijnige beweging toch weder voor de totale differentiaal, met verdwijning van s komt: $d.v^2 = \frac{-2\mu}{r^2} dr$ [verg. (6).] Wilde men de vergelijking (6) transformeeren door invoering van imaginairen, dan zou men in plaats van r stellen: $r_p = z = x + iy$, waarbij men in dit geval eener werkelijke kromlijnige *beweging,* x en y in 't algemeen kan beschouwen als functien van t; dit is juist als in de door Cauchy dikwijls gebruikte aanschouwelijke voorstelling, waarin met hulp der auxiliaire veranderlijke t, $x = \varphi(t)$ en $y = \varphi_1(t)$ wordt, 't geen de studie van de verandering der complexe terugbrengt tot die der beweging van een punt. Daar voorts hier ds uit de vergel. verdwijnt, heeft het geen' invloed, of men daarvoor naar Cauchy's beschouwing nog $\rho = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, (d. i. *hier niet* volgens de vectoren-additie: $ds = dz$) wilde stellen, en wordt de vergelijking: $d.v^2 = -\frac{2\mu}{z^2} dz$. Deze laatste totale differentiaal blijkt ook nu aan de conditie van *monogenie* te voldoen.

Verder bestaat bij deze *kromlijnige* integralen met de reëele r *òf* de imaginaire z als variabele, telkens bovendien beide, *uniformiteit* en *continuïteit.*

En inderdaad is dan ook de integraal (waarde der aangroeiing van v^2) bij *kromlijnige* integratie *onafhankelijk* van vorm en lengte der tusschen twee punten gevolgde *baan.* Deze eigenschap is, — in plaats van »merkwaardig en alles omverwerpend," — voor 't hier bedoelde cinematische geval, — waar de variabele der integraal altijd eene ruimte-veranderlijke wordt, — geheel algemeen en aan ieder bekend, wiens »studie-richting" niet gansch de mechanica heeft misgeloopen. Die waarheid vertoont zich onafhankelijk van den imaginairen of reëelen aard der variabele (zie voor 't laatste geval slechts form. (7) op bl. 17 der »*Vrije C.*"); ook is het niet moeilijk, zich algemeen te overtuigen, dat die eigenschap moet bestaan bij reëele begrensde integralen, bij welke tegelijk *monogenie, uniformiteit* en *continuïteit*, derhalve »*synexie*," bestaat. En voor het overige strekt hier het geheele onderzoek om aan te toonen, dat de onafhankelijkheid der resultaten, behalve in het synectische, tengevolge der *wijze* van multiformiteit en discontinuïteit, bovendien ook bestaat in het rechtlijnige, *monogene* maar *niet-synectische* geval.

Wilde men voorts bij deze rechtlijnige integratie volstrekt de imaginaire vormen invoeren, alvorens den naam rechtlijnige integraal toe te passen, dan hadden onze integralen oorspronkelijk den vorm $\int \Sigma \left(\frac{a}{x^n}\right) dx$. Laat men de x-as een' hoek $-p$ draaien met behoud van denzelfden oorsprong, dan gaat x over in $r_p = z = x + iy$ en dx in $dz = dx + i\,dy$ ('t welk wegens het standvastige argument p hier tot modulus heeft $\rho = dr$). Dus zoude nu de rechtlijnige integraal komen onder den vorm $\int \Sigma \left(\frac{a}{z^n}\right) dz$, zoodat de twee ontbondenen der functie $w = az^{-n}$ door de formule van Moivre de waarden zouden hebben: $u = r \cos n p$ en $i v = -i r \sin n p$. Deze vorm is echter alleen dàn dienstig, indien men op onze singuliere integraal Cauchy's in *formules* vervatte *resultaten* wilde toepassen, gelijk bijv. 't geval kan zijn met de *residu-rekening*, die hier al een zeer eenvoudig geval zou gelden.

Tengevolge van 't besprokene theorema betreffende willekeurige kromlijnige integratie bij synexie, is n.l. blijkens Cauchy's beschouwingen (zie *Ex. de Math.* t. I p. 11 en 95, t. II p. 341 en t. IV p. 161) 't verschil tusschen de waarde der *rechtlijnige* integraal $\int_{z_0}^{z} wdz$ met *niet-synectische* functie, èn de waarde derzelfde integraal, genomen *kromlijnig en synectisch*, $= 2\pi i \times$ het »integraal-residu," dat in ons probleem op slechts één discontinuïteitspunt $z = a = 0$ betrekking heeft. Wordt dus de integraal $\int_{z_0}^{z} wdz = \int_{z_0}^{z} \frac{1}{z^n} dz$, dan heeft men voor

$n = 1 : w = f(z) = \frac{1}{z}$, en 't residu $= \lim_{z=a} [f(z)(z - a)]$
$= \lim_{z=a} \left[\frac{z-a}{z}\right] = \lim_{\varepsilon=0} \frac{\varepsilon}{\varepsilon}$, daar $a = 0$.

Is $n > 1$, dan heeft de verg. $\frac{1}{f(z)} = 0$ of $z^n = 0$, n gelijke wortels 0 : n is de orde der eerste niet 0 wordende afgeleide van $\frac{1}{f(z)}$, haar »index" (aanwijzende de orde van oneindig groot der $f(z)$, voor $z - a$ oneindig klein). In dit geval is, tengevolge der door Cauchy bewezene uitbreiding der Taylor'sche reeks ook op complexe getallen, het residu $\mathcal{E}\, \frac{f(z)\,(z-a)}{[(z-a)]}$
$= \frac{1}{1.2.3....(n-1)} \cdot \lim_{z=a} \left[\frac{d^{n-1}[f(z)(z-a)^n]}{dz^{n-1}}\right] = \frac{1}{1.2.3...(n-1)}$
$\times \lim_{z=a} \left[\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left(\frac{z-a}{z}\right)^n\right]$. Deze afgeleide blijkt te bestaan uit termen, tot factoren hebbende $\pm \frac{a^m (z-a)^{n-m}}{z^{2n-1}}$, zoodat wegens de factoren $\pm \lim_{\varepsilon=0} \frac{\varepsilon^p}{\varepsilon^{n+p-1}}$, m en $p \geq 0$ en $< n$ zijnde, de termen van 't residu de waarden $+\infty$ en $-\infty$ verkrijgen. In beide gevallen blijft dus 't resultaat nog onbepaald, hetgeen doet zien, dat de invoering der imaginairen onvruchtbaar is in ons van slechts ééne reëele veranderlijke afhangend vraagstuk, en waardoor bevestigd wordt het hierboven in § 2 opgemerkte, omtrent de verhouding der eigenlijke analyse tot dit vraagstuk.

11. Daar blijkens § 8 de singuliere integraal, en dus ook de plotselinge vergrooting van $\frac{1}{2} v^2$ in het punt $x = 0$, *nul* is, kan men vervolgens voor twee *geheel willekeurige* waarden v_0 en v van x_0 en x, stellen:

$$\tfrac{1}{2} v^2 - \tfrac{1}{2} v_0^2 = F(x) - F(x_0) \quad \ldots\ldots (5)$$

en voor het dynamische geval:

$$\tfrac{1}{2} m v^2 - \tfrac{1}{2} m v_0^2 = mF(x) - mF(x_0),$$

of als wij $-mF(x) = U$, en $U_0 + \frac{1}{2} m v_0^2 = E$ stellen:

$$U + \tfrac{1}{2} m v^2 = E;$$

d. i. de som van *'t arbeidsvermogen van plaats* en *dat van* *beweging* (»*potentieele energie*" en *levende kracht*) is gedurende de geheele beweging *standvastig, ook als het materieele punt inmiddels döör het* (bloot geometrisch opgevatte) *krachtcentrum passeert*. Dit resultaat laat zich ook tot een willekeurig systeem uitstrekken, bij afwezigheid van botsingen.

Hoe na substitutie van v_0 en 0, uit (5) door $v = 0$ terstond blijkt, dat de tweede helft der rechtlijnige baan in absolute lengte aan de eerste helft gelijk, en de beweging symmetrisch wordt, is aangetoond in § 11 van »*De vrije Centraalbew.*"

In plaats der uit $v = 0$ en (5) voortvloeiende verg.: $F(x) = F(x_0) - {}^1/_2 v_0^2$ was door Prof. v. G. verkeerdelijk gebruikt de alleen voor *eenparig* vertragende beweging geldige verg.: $S = \frac{v_0^2}{2p}$, $\left(\text{of in onze notatie: } x = {}^1/_2 v_0^2 : \frac{d^2x}{dt^2}\right)$. Het ongeoorloofde daarvan had ik genoegzaam doen uitkomen in § 10 der »*Vrije Centr.*" Dat nochtans in elke der drie hier te bespreken brochures dit punt kritisch, doch met volslagene onjuistheid behandeld zou worden, is een feit, dat men niet had kunnen verwachten, en tòch heeft zien gebeuren.

In zijne § 1 ontwikkelt de heer Korteweg tegen die formule $S = v_0^2 : 2p$ *twee* bezwaren. Het eerste is vervat in bl. 13—15, en voor de hierbedoelde zaak zonder vrucht, omdat de praemissen op bl. 12 onjuist zijn: de geheele discussie is doelloos, omdat in reg. 8 van bl. 12 in plaats van *vertraging*, in dezen niet is kunnen gezegd worden: *eenparige* vertraging, gelijk in reg. 4 was gedaan: want alleen voor de a priori als *eenparig vertragend* bekende beweging geldt de besprokene formule. Het tweede bezwaar is opgeworpen in bl. 15—20, en steunt op de toepassing der reeks van Taylor, van welke reeds op bl. 10 is gezegd, dat zij »immer convergeert en altijd doorgaat, behalve wanneer de afgeleiden oneindig groot worden." Wat het laatste betreft: de convergentie heeft niet plaats in *zeer vele* gevallen, waarin de afgeleiden eindig blijven; en het »niet doorgaan" (niet geldig zijn) bij ∞ wordende afgeleiden is waar, maar bevat dan ook de veroordeeling van het gebruik dezer reeks op bl. 15—20, juist voor het punt van discontinuïteit in onze quaestie (verg. boven, § 4). (Voor 't overige is het af te keuren, om in plaats van de ware Cauchy'sche limieten-methode, weêr te willen teruggaan (bl. 10) tot de reeksen-ontwikkeling als basis voor het differentiaal-quotient, eene afleiding, die door Lagrange beproefd geworden, doch verkeerd is, vooral wegens de beperkte en a priori betwijfelbare *mogelijkheid* der ontwikkeling van willekeurige functien in reeksen). De heer K. geeft derhalve twee redeneeringen zonder eenige waarde, in plaats van de rechtmatige bedenking, die door de eenvoudigste begrippen van differentiaal-vergelijkingen wordt aan de hand gedaan.

Dr. Schouten bespreekt deze zaak op bl. 23 en vgg. Wat dáár bij mij eene »verkeerde opvatting" en »onderstelling" genoemd wordt, is eene aanhaling der woorden van Prof. v. G., waarvan vervolgens de strekking »blijkt" door het *feit* zelf, dat op bl. 40 van het »*Onderzoek*," »in verband met de toelichting tot verg. 5)," deze vergelijking wordt toegepast op eene beweging van geheel anderen aard dan die, waarvoor zij gevonden is, zijnde bij de laatste de hier *veranderlijke*, éénig karakteristieke grootheid *p constant*. Dat voorts (»*Welke waarde*," bl. 23) bij elke centripetale versnelling $S = 0$ zal zijn, indien behalve de aanvangs-afstand ook de initiale snelheid $v_0 = 0$ is, zal wel door niemand betwijfeld worden. Maar dat eene voor A geldige formule in eene zelfde omstandigheid $A = 0$ geeft, waarin eene voor B geldige formule geeft $B = 0$, daaruit volgt toch niet, dat die formule van A ook in andere gevallen geldt voor B, of zelfs maar tot B in de minste betrekking staat. Op bl. 26 en 27, — ook in een voorbeeld dat *herhaalt*, niet »aantoont," — betwist ook Dr. Schouten de geldigheid der besprokene formule alléén op grond der *oneindigheid* van v_0 en p in *dit* geval, in plaats van te beseffen, dat zij gevonden, bestemd is, uitsluitend voor eenparig veranderlijke beweging, en voor *niets anders*.

De schrijver der »*Fouten*" zegt op bl. 5 uitdrukkelijk: dat »het door Prof. v. G. op bl. 33 gezegde voor eindige grootheden eene *waarheid*" is, die daarop berust, dat etc.; en vindt *hier* alléén bezwaar in de momentane *oneindigheid*, discontinuïteit, der versnelling. Het is ongelooflijk, hoe zelfs de opzettelijke »kritiek" niet inziet, dat eene formule, verkregen door integratie eener differentiaal-vergelijking, waarin de afgeleide *constant* is, nooit mag worden gebruikt tot het afleiden eener bijzondere uitkomst voor een ander geval, waarin die afgeleide p *veranderlijk* is. Is dan thans de integratie van differentiaal-vergelijkingen eene verborgene wetenschap, dat de kritiek niet weet, hoe eene vergelijking waarin p standvastig, en eene andere waarin p functie van x is, twee *geheel verschillende* differentiaal-vergelijkingen zijn? *Kan* men criticus, ja beoefenaar der wiskunde zijn, en aldus miskennen den invloed van het groote onderscheid tusschen standvastige en veranderlijke grootheden? Die formule $x = v_0^2 : 2p$ is bijzonder geval van deze vergelijking (I) : $x = (v_0^2 - v^2) : 2p$, ($x = 0$ voor $v = v_0$ zijnde), verkregen door integratie der differentiaal-vergelijking : $d.v^2 = - 2p\,dx$, waar p *constant* is. Is echter p *veranderlijk*, bijv. $= - ax$, dan geeft $d.v^2 = - 2\,ax\,dx$ *deze* integraal-vergelijking (II) : $x^2 = (v_0^2 - v^2) : a$, waarin weder $x = 0$ voor $v = v_0$ is ondersteld. En nu moet men zelfs het vluchtigste denkbeeld van het wezen eener differentiaal-vergelijking missen, om al kritiseerende te meenen, dat *ook maar in éénig voorkomend geval* de vergelijking (I) in plaats van (II) bij eene *veranderlijke* versnelling gebruikt mag worden.

In het voorafgaande is vóór en na ongeveer de gansche »*fouten*"-lijst des heeren J. Versluys ter sprake gebracht, en naar ik meen voldoende aangetoond, hoe wij hier telkens te doen hebben met *fouten* — eener onkundige kritiek. De éénige hier nog niet besprokene »fouten" zijn het drietal, voorkomende op bl. 10 beneden, en bl. 13. Wat de laatste op bl. 13 betreft, het voornaamste van 't dáár opgemerkte was »toevallig" reeds te vinden in de noot op bl. 30 der »*Vrije C.*" De overige twee, n.l. bl. 13 boven en bl. 10 ben., betreffen punten als die ik in den aanhef van § 1 hierboven bedoelde. De »kritiek" gaat hier leven van — afval. Ingewikkeld schijnt een vervolg der »*Fouten*" toegezegd te worden : de kritiek heeft zich »in de eerste plaats" slechts met bl. 32—41 van 't »*Onderzoek*" kunnen bezighouden. Mocht na eenigen tijd een *vervolg* verschijnen, dan zullen ook bijv. enkele *druk*-fouten van bl. 45, 56, 57 zeker der »kritiek" niet ontgaan.

Mèt de »*Fouten*," heb ik tegelijk des zelfden schrijvers »*kritiek*" mijner eerste brochure kunnen bespreken. Onnavolgbaar in vele opzichten is het, hoe in de aanhaling der noot op bl. 6 hierboven de heer Versluys zelf zijne onbekendheid belijdt met de mechanische deelen der wiskunde, en in den zelfden adem zich opwerpt als rechter in deze quaestie. Wie echter in één onderdeel zich vreemdeling verklaart en betoont, kan die ook bevoegd rechter zijn in andere takken eener wetenschap, wier deelen zoo nauw te samen hangen? Naar *mijne* overtuiging heeft door de genoemde belijdenis deze criticus ook zijne onbevoegdheid erkend in zaken van »zuivere" wiskunde. Bovendien, de in 't voorgaande ook uit dit gebied gegevene voorbeelden, ofschoon beperkt in getal door den aard van 't onderwerp, spreken des te sterker, en bewijzen afdoende de rechtvaardigheid mijner uitspraak. Tot kritiek op algemeen wiskundig zoowel als op analytisch-mechanisch gebied, acht ik den heer J. Versluys *onbevoegd*, en uit dit oogpunt zal ik voor mij in het vervolg de oordeelvellingen van dien schrijver beschouwen. Ik neem dus hier van den »criticus" *afscheid*.

In de hier uitgesproken meening kan ik voor 't overige niet alleen staan, want het is onmogelijk, dat op den duur eene kritiek waarde of gezag kan hebben, die zonder juistheid of zaakkennis, te pas of te onpas wordt uitgoefend. Elk Midasoordeel toch treft den bedrijver der geusurpeerde kritiek, en strekt slechts tot de zichtbare ontvouwing der eigene organische gebreken:

..... aures
.... trahit in spatium, villisque albentibus implet, etc.

Zoodanige »ooren" tracht men vruchteloos te verbergen onder de phrygische muts van »kordate" vrijmoedigheid: 't geheim verraadt zichzelf.

12. In *cinematische* termen, is de moeilijkheid van ons probleem gelegen in de gelijktijdige oneindig groote waarde van snelheid en versnelling. Die omstandigheid mag men noch wegcijferen, noch over 't hoofd zien. Nà de hiervóór reeds besprokene Inleiding en §§ 1 tot 3, bevat nu het overige en grootste deel der »*Nasporingen*" de toepassing van nog twee methoden, waarmede de Schrijver het vraagstuk tracht op te lossen door *limiet-overgangen,* en wel telkens voor het belangrijke, vroeger ook door mij nog afzonderlijk beschouwde geval der versnellingswet : $f(x) = \mp \frac{\mu}{x^2}$. Tegen die tweeërlei limiet-overgangen heb ik om de aangevoerde reden één algemeen bezwaar, n.l. dit, dat daarbij de *rechtlijnige* ten slotte een bijzonder geval wordt eener willekeurige *kromlijnige* baan. Hierdoor nu *voert* men willekeurig verhoudingen *in,* en *ontwijkt* het punt van discontinuïteit, en daarmede de oneindig groote snelheid en versnelling.

Door de beschouwing als limiet-geval van kromlijnige banen, *voert* men vooreerst willekeurige limiet-verhoudingen a priori in; in plaats van eene moeilijkheid, wordt dan het oneindig kleine door die insluipende verhoudingen 't middel tot het verkrijgen van uitkomsten, die den stempel dragen van 't algemeene karakter der *willekeurig* aangenomene kromlijnige baan. In ons vraagstuk nu is 't absoluut centrale der beweging gegeven; niet: de tangentiale aanvangs-snelheid *wordt* nul, nadert volgens eenige *wet* tot nul (verg. »*Nasp.*" bl. 64 boven), maar wèl: zij *is* a priori absoluut nul. Wèl is eene *oneindig kleine* tangentiale aanvangssnelheid = *nul,* doch ofschoon een oneindig klein (nul) *worden,* tengevolge van *algemeen geldige* eindige *betrekkingen* gepaard *kan* gaan met het optreden van bepaalde verhoudingen aan de limiet, mag men toch niet omgekeerd bij een a priori nul *zijn* die genoemde betrekkingen en deze bepaalde limiet-verhoudingen willekeurig *invoeren. Geene* tangentiale aanvangs-snelheid geeft de *rechtlijnige,* eene als *oneindig klein wordend beschouwde* aanvangs-snelheid geeft een bijzonder geval der *elliptische* baan, (verg. § 9 van mijn vorig opstel). Al ware de *beweging* te beschouwen als te zijn een limiet-geval, dan zou dit daarom nog niet gelden van den vorm der *baan,* die slechts het *gevolg* der beweging is. Daar bovendien dikwijls de algemeen mogelijke kromlijnige banen meer dan ééne zijn, voert men door deze handelwijs reeds vooraf de *onbepaaldheid* in, die daarbij veelal het resultaat is.

Ten andere wordt door die methode juist de hoofdzaak, de *discontinuïteit*, *ontweken*. In dit geval bijv. der *potentiaal*: $F(x) = \frac{1}{x}$, of wel $f(x) = \mp \frac{\mu}{x^2}$, gaat juist de kromlijnige baan niet dóór 't krachtcentrum, daarbij komen dus de oneindig groote waarden niet voor. En daar men den limiet-overgang bewerkstelligt op de meetkundige *baan*-zelf, bij wier algemeene voorstelling de cinematische beschouwing van *snelheid* en *versnelling* geëlimineerd en ter zijde gesteld is, wordt het onmogelijk, om aan de limiet zelf den invloed der oneindig groot wordende snelheid en versnelling tot zijn recht te doen komen. Om deze redenen is elk zoodanig onderzoek door limiet-overgang ongeoorloofd, even als de verklaring van *Legendre* (vg. »*Nasp.*" bl. 66); daarentegen zijn de meeningen van *d' Alembert* en *Laplace* (Dr. v. G. »*Onderzoek*," bl. 24 en 27) met het hier opgemerkte in volkomene overeenstemming. Met de oplossing der quaestie, geformuleerd aan 't slot der »*Nasporingen*," wordt, meen ik, de door mij voorgestelde bedoeld: het *op zich zelf* beschouwen nu der rechtlijnige baan wordt blijkbaar gebiedend vereischt.

Het meest ter zake dienende gedeelte van § 4 der »*Naspor.*" bevat eene naar Jullien gevolgde beschouwing onzer rechtlijnige beweging, als limiet-geval der hyperbolische onder de vereenigde werking van *twee* (met de brandpunten samenvallende) centra. Volgens 't boven gezegde is de beschouwing als *bijzonder* (in plaats van *afzonderlijk*) *geval* ongeoorloofd, en behoeft de richting der beweging niet in de vereenigde centra plotseling eene afwijking te ondergaan, *juist* gelijk aan den asymptotenhoek, maar gaat het punt dóór, volgens *dezelfde* asymptoot. De onmogelijke paradox, dat het zelfde rechtlijnige geval geheel anders zou uitvallen volgens *deze* limiet-beschouwing, dan volgens die uit de *elliptische* beweging, bevestigt het in 't eerste gedeelte dezer § opgemerkte. (Dat het bedoelde geval *geen bijzonder* geval meer is, blijkt ook uit de limiet-formule voor v_i^2 beneden op bl. 36, want deze formule is eigenlijk illusoir, daar immers 't punt alsdan met *elke* waarde der centrale aanvangs-snelheid de rechtlijnige baan moet afleggen. Voor 't overige laat de heer K. stilzwijgend maar terecht c en $-c$ *gelijkelijk* nul worden, verg. boven § 8). De vroegere verbindingslijn wordt wel onbepaald, maar de beweging blijft vóór en na symmetrisch ten opzichte van *elke* door 't centrum gaande lijn; het tweede deel der baan ligt *negatief*, en bij deze *verwijdering* nu tot op gelijken afstand, blijft het karakter der gegevene beweging bewaard, bij *onveranderd centripetale* versnelling. Naar deze beschouwing is de overeenkomst met het afzonderlijk geval der *elliptische* beweging (»*De vrije C.*," bl. 28) inderdaad fraai; bij deze is het andere deel der baan eene tweede as der quasi verdubbelde ellips, bij de hyperbool daarentegen de andere helft van dezelfde der twee voorhandene asymptoten.

In het overige der § 4 van »*Nasp.*" zouden bijv. bl. 41—45 tot verschillende bedenkingen aanleiding kunnen geven; eene der gewichtigste schijnt mij deze: in de tweede formule der bl. 43 is $r_A = \frac{r}{k}$: hierin moet die oude r noodzakelijk $= \infty$ zijn als r_A niet $= 0$ zal worden; dus was $v = \sqrt{\Sigma \frac{2f}{r}} = 0$; hoe groot is nu $V = v_{1_A} = v\sqrt{k} = 0\sqrt{\infty}$?

Wat de laatste § 5 der »*Nasp.*" betreft: afgezien van de onzekerheid, waarin m. i. bl. 47 ons laat omtrent de *onafhankelijke* veranderlijke, is op die § weder toepasselijk het boven opgemerkte omtrent het ongeoorloofde der willekeurige invoering van bepaalde limiet-overgangen. Deze zijn hier zelfs tweeërlei, door gelijktijdige onderstelling voor 't algemeene geval, van eene niet-centrale èn van eene in verschillende richtingen ongelijke versnelling, (ook op bl. 64 en 65). De onbepaaldheid van bl. 47 en 59 wordt daardoor reeds te voren opzettelijk ingevoerd. Op bl. 56, 57 en 58 integreert men voor φ' tòch òver $\rho = 0$, dus dóór ∞ voor 't afzonderlijk (»limiet")-geval, hetgeen zonder nader onderzoek niet mag geschieden. Men wil dáár door middel van 't kromlijnige geval, waar de discontinuïteit niet voorkomt, deze discontinuïteit ontwijken; maar juist dàt is weêr de Legendre'sche handelwijs, die niet geoorloofd is.

13. Men mag dus ons vraagstuk niet behandelen door limiet-overgang, toegepast op den *meetkundigen* vorm eener kromlijnige *baan;* want de *rechtlijnige* beweging moet geheel onafhankelijk zijn van de uit dien vorm voortvloeiende limietverhoudingen, die dan zonder recht den grootsten invloed zouden erlangen op het resultaat. Bovendien zou men op die *meetkundige* manier *ontwijken* de *discontinuïteit,* die optreedt bij *cinematische* beschouwing der snelheid en versnelling. Slechts dàn zou eene zoodanige *meetkundige* behandeling mogelijk zijn, en tevens vrij van de bij de eerstbedoelde telkens ingevoerde onbepaaldheid, indien men het middel had om daarbij de *snelheid* en de *versnelling* in de beschouwing op te nemen, indien men m. a. w. het *cinematische* vraagstuk zelf meetkundig kon behandelen. Met het door hem ontdekte nieuwe systeem van imaginairen (de quaternions), heeft nu werkelijk Hamilton dat bedoelde middel gevonden in den *hodograaf.* (Zie daarover bijv. *Schell, Theorie der Beweg. u. d. Kräfte*). Deze eerst sedert weinige jaren bekende kromme lijn schijnt nu juist voor het belangrijke geval, dat $f(x) = \mp \frac{\mu}{x^2}$ is, onze beantwoording van het vraagstuk te bevestigen.

Door toepassing van den straksgenoemden tak van symbolische geometrie op de eindige vergelijking eener kromlijnige beweging, waarbij dan de voerstraal veranderlijke baan-vector, en de tijd veranderlijke scalair is, krijgt men eene bewegingsvergelijking, wier eerste afgeleide weder een veranderlijke vector is, die naar richting en grootte de *snelheid* voorstelt. Brengt men dezen laatsten vector voor alle oogenblikken der beweging over naar *denzelfden* oorsprong, en wel den oorsprong der baan-vectoren, dan vormen de uiteinden der eerstgenoemde vectoren eene kromme lijn, den *hodograaf.* Bij eene centraalbeweging rondom den oorsprong der baan-vectoren x als krachtcentrum, ligt de hodograaf met de baan in een zelfde plat vlak, en o. a. de integratie van den versnellings-vector leert, dat in het geval van $f(x) = \mp \frac{\mu}{x^2}$ *bij elken vorm der baan* de hodograaf een *cirkel* is, wiens middelpunt ligt op de loodlijn, die in het brandpunt op de groote as wordt opgericht, en wel naar die zijde, waarheen in het *perihelium* de beweging is gericht. De snelheids-vector doorloopt altoos den hodograaf op *continue* wijs. Dit alles is bekend, en men ziet in, dat de pasgenoemde *loodlijn* steeds den hodografischen cirkel in 2 symmetrisch-gelijke *helften* deelt, die geheel of voor homologe gedeelten *werkelijk* door den snelheids-vector worden doorloopen.

Nu hangt de vorm des hodograafs *niet van den vorm der baan*, doch *enkel van de versnellingswet* af. Onderstellen wij dus bijv. eene elliptische baan, die zich steeds meer afplat, met behoud van 't zelfde brandpunt en denzelfden aphelium-afstand, doch zoo, dat met deze laatste lijn eindelijk de baan samenvalt, terwijl aan de limiet het perihelium valt in het brandpunt, tevens vectoren-oorsprong en krachtcentrum. Alsdan zal het punt des hodograafs, 't welk met de kleinste (aphelium-)snelheid 0 correspondeert, gaan door het krachtcentrum, terwijl de hodograaf zelf overgaat in eene *rechte lijn*, d. i. een' cirkel met oneindig grooten straal. (Dit stemt ook overeen met de bekende eigenschap, dat de straal des hodograafs, vermenigvuldigd met den (hier *steeds* 0 wordenden) afstand van het aantrekkend brandpunt tot de raaklijn *aan eenig punt* des hodograafs, gelijk is aan de in het algemeen *eindige* waarde der potentiaal, die aan dat punt beantwoordt). De richting dier rechte lijn, limiet van den hodograaf, is de groote as der vroegere ellips, de richting der rechtlijnige baan zelf, en zij strekt zich naar den kant van het perihelium tot in het *oneindige* uit.

En nu is er geene enkele reden om te onderstellen, dat de bovengenoemde *algemeene* eigenschap van het *halveeren* des hodograafs, door de loodlijn in het krachtcentrum op de baan geplaatst, niet meer zou doorgaan in dit limiet-geval. Indien wij dan aannemen, dat die eigenschap ook thans nog geldig blijft, dan volgt daaruit terstond, dat de hodograaf ook naar de aphelium-zijde zich tot in het oneindige uitstrekt. Hieruit blijkt dan, dat het bewegend punt òf in het centrum plotseling het teeken zijner snelheid zal omkeeren, òf zijne beweging naar de andere zijde voortzetten en symmetrisch volbrengen zal. Wat nu het eerste aangaat, dit is vroeger voldoende aangetoond onmogelijk te zijn (»*De vrije C.*," bl. 37 en 45), indien men niet de speciale (hier afwezige) onderstelling maakt, dat in het krachtcentrum eene veêrkrachtige botsing plaats vindt. Alzoo moet dan ons resultaat zijn het werkelijk plaats hebben der *symmetrische beweging.*

Deze bevestiging van de uitkomst der in mijn vorig, en in §§ 5, 6, 8 en 11 van dit opstel voorgedragene analytische beschouwing, hoewel verkregen door *meetkundige* behandeling van het limietgeval, schijnt toch niet onderhevig te zijn aan de bedenkingen, die in de vorige § tegen de dáár bedoelde limiet-overgangen zijn gemaakt, omdat men dáár had eene zuiver meetkundige beschouwing der *baan*, waarbij de hier alles beheerschende oneindige waarden der *cinematische* snelheid en versnelling uit het oog werden verloren. Hier daarentegen is het eene beschouwing van 't meetkunstige *beeld* der *beweging-zelf.*

14. Aan het slot mijner »*opmerkingen*" gekomen, geloof ik thans van deze quaestie wel afscheid te mogen nemen. Ik wil echter nog de algemeene conclusien nit het geheel mijner beschouwing hier kortelijk resumeeren.

Verkeerd is het om in dit vraagstuk met Prof. van Geer te blijven staan bij de *algemeene* waarde der *singuliere integraal,* en zoodoende ook de rechtlijnige baan te beschouwen als bijzonder (in stede van »afzonderlijk") geval der kromlijnige; — òf wel om met den heer Korteweg de rechtlijnige beweging door *limiet*-overgang (en *invoering* van bepaalde verhoudingen, met *ontwijking* der discontinuïteit) te willen afleiden uit de kromlijnige; — òf eindelijk om met Dr. Schouten, bij rechtmatige waardeering overigens van het kritieke en moeilijke der discontinuïteit, voor 't historische vraagstuk een *ander* in de plaats te willen stellen, terwijl men *ten onrechte* het eerste verklaart voor onmogelijk en onoplosbaar.

Maar daarentegen moet men: het vraagstuk zuiver aanvaarden, zooals het historisch vóór ons staat, met zijne niet te ontwijken discontinuïteit; zijne rechtheid, die van zijpaden weet noch omwegen, elke krijgslist teleurstelt, en slechts overwonnen kan worden bij open aanval met het wapen der vruchtbaarste kritiek: die onzer eigene methoden en begrippen.

Wat aangaat de meer objectieve kritiek, in de voorgaande bladzijden beproefd: ik heb uit den aard der zaak haar niet kunnen terughouden of wijzigen, nu ik eenmaal de zaak opnieuw ging bespreken, en naar mijn beste weten heb ik getracht mij te vrijwaren voor eenzijdigheid.

TOEGIFT.

Deze gelegenheid is gunstig, om alsnog enkele vroeger niet opgegevene misstellingen te verbeteren, in »*De vrije Centr.*" voorkomende, en eerst later opgemerkt, maar nagenoeg allen ontsnapt aan het oog der kritiek:

bl. 12. Vóór elk der leden van de eerste 2 vgg. de syllabe *lim* te plaatsen.
» id. In plaats der verg. (4) te lezen:

$$\lim \int_{-q\varepsilon}^{+p\varepsilon} \frac{a_1\, dx}{x} = \frac{a_1}{2}\left[l(q^2\varepsilon^2) - l(p^2\varepsilon^2)\right] = a_1\, l\, \frac{q}{p},$$

Zie bov. bl. 41.

» 17 reg. 32: *t lees: z*

» 25 en later, telkens voor $-\frac{\mu}{x^2}$ te lezen: $\mp\frac{\mu}{x^2}$. Evenzoo:

» 38 reg. 8: $-\frac{a}{x_n}$ *lees:* $-\frac{a}{x^n}$ òf $\mp\frac{a}{x^n}$. Voorts:

» 32 » 20: $\int_{p\varepsilon}^{-q\varepsilon}$ *lees:* $\int_{-q\varepsilon}^{p\varepsilon}$

» 36 » 25: d^2y *lees:* $\frac{d^2y}{dz^2}$

» 37 » 10: *achter* tangens *intevoegen:* van den hoek der raaklijn met de x-as

» 43 » 24: $\frac{d^2x}{d\tau}$ *lees:* $\frac{d^2x}{d\tau^2}$

» 47 de noot reg. 2: $\left(1 + \frac{\cos 3\varphi}{4 \sin^2\varphi}\right)$ *lees:* $\left(\sin\varphi + \frac{\cos 3\varphi - 2\cos\varphi}{4\sin^2\varphi}\right)$.

» 60 reg. 7: *achter* éene *intevoegen:* absoluut genomene.

Februari 1873.

ERRATA.

bl.	18	r.	18:	$\lim f(\mathrm{t}) - f(\mathrm{t} - \vartheta)$ *lees:* $\lim [f(\mathrm{t}) - f(\mathrm{t} - \vartheta)]$
»	23	»	16:	$\pm$ *lees:* $\mp$
»	39	»	7:	$\int_{u_1}^{p\varepsilon}$ *lees:* $\int_{x_1}^{p\varepsilon}$
»	40	»	6:	$\mathrm{F}(x_1) -$ *lees:* $\mathrm{F}(-x_1) -$
»	40	»	30:	$\lim (c - \varepsilon)$ *lees:* $\lim \mathrm{F}(c - \varepsilon)$
»	41	»	7:	ε^x en $\eta^x \delta^x$ *lees:* ε^n en $\eta^n \delta^n$
»	42	»	27:	ongezind *lees:* niet ongezind
»	43	»	12:	p en $-q$ *lees:* $p\varepsilon$ en $-q\varepsilon$
»	44	»	24:	van x, *lees:* van y,
»	45	»	21:	constanten *lees:* eindige constanten.