Goniometrie, rechtlijnige en bolvormige trigoniometrie : met vraagstukken en toepassing

GONIOMETRIE,

RECHTLIJNIGE en BOLVORMIGE TRIGONOMETRIE,

MET VRAAGSTUKKEN TER TOEPASSING.

DOOR

B. L. VRIES,

Leeraar in de Wiskunde bij het Koninklijk Instituut voor de Marine.

NIEUWEDIEP,
L. A. LAUREIJ.
1875.

GONIOMETRIE,

RECHTLIJNIGE en BOLVORMIGE
TRIGONOMETRIE,

met vraagstukken ter toepassing.

DOOR

B. L. VRIES,

Leeraar in de Wiskunde bij het Koninklijk Instituut voor de Marine.

NIEUWEDIEP,
L. A. LAUREIJ.
1875.

Stoomsnelpersdruk van A. A. Bakker Cz.

VOORBERICHT.

Voldoet dit werkje aan een lang gevoelde behoefte? Niettegenstaande de schrijver deze vraag niet volmondig met ja zou durven beantwoorden, heeft hij eindelijk toch tot de uitgave besloten, vooreerst met het oog op zijn eigen onderwijs en ten andere omdat het, naar zijn gevoelen, hier en daar toch enkele wenken bevat, die in grooter kring nuttig kunnen zijn. Zonder te uitvoerig te zijn bevat het toch alles wat en voor het onderwerp zelf en met het oog op de verdere wiskundige studieën noodzakelijk is.

Bij de behandeling der bolvormige driehoeksmeting heb ik de beschouwing van den rechthoekigen driehoek vooraf laten gaan, daar dit door de regeling der studieën aan het Koninklijk Instituut voor de Marine gevorderd wordt. Stelselmatiger ware het, het derde hoofdstuk in de volgende orde te behandelen § 13, § 16, § 17, § 18, § 14, § 15, § 19, § 20, § 21 en § 22.

NIEUWEDIEP, Maart 1875. DE SCHRIJVER.

INHOUD.

EERSTE HOOFDSTUK.

Goniometrie.

—

TWEEDE HOOFDSTUK.

Rechtlijnige Trigonometrie.

DERDE HOOFSTUK.

Bolvormige Driehoeksmeting.

(Spherische Trigonometrie.)

De lezer gelieve de volgende onnauwkeurigheden te verbeteren:

bl. 14, regel 18 v. b., staat: 1, moet zijn: ∞.
" 15, " 7 v. o., " 7, " " 8.
" 18, fig. 8, ontbreekt de letter D.
" 19, " 9, " " " D.
" 24, regel 1 v. o., staat: (65), moet zijn: (55).
" 27, " 9 v. o., " 2cot.a, " " 2cot.2a.
" 31, " 14 v. b., " $\frac{n(n-1)(n-3)}{2.3}$, moet zijn: $\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}$.
" 40, " 8 en 12 v. o., staat in den noemer van de breuk tg.μ, moet zijn: cos.μ.
" 42, " 5 v. b., staat: sin.2φ, moet zijn: 2φ.
" 44, " 6 en 7 v. b. " 2cot.φ, " " 2cot.2φ.
" 53, " 13 v. o. " de sinus " " den sinus.
" 54, fig. 12, staat: O, moet zijn: M.
" 62, regel 6 v. o., staat: $(b - c)^2$, moet zijn: $(b + c)^2$.
" 71, " 9 v. o., " den, " " de.
" 76, " 12 v. b., " A en B, " " *a* en *b*.
" 10 v. o., " β', " " β.
" 78, " 3 v. b., " EAD, " " EAC.
" 87, " 12 v. o., " BAD = BCE, " " BAD + BCE.
" 91, " 9 v. o., " elkander, " " elkander geplaatste.
" 94, " 17 v. b., " B'c', " " B'C'.
" 100, " 10 v. o., " cos.(180—B)=, " " cos.(180—C)=.
" 117, " 9 v. b., " (180 — c), " " (180 — C).
" 126, " 2 v. b., " C > A, " " C < A.
" 129, " 14 v. b., " C, " " c.
" 134. " 11 v. b., " voorwaarde is, " " voorwaarde voldaan is.
" 139, " 5 v. b., " hoek, " " zijde.
" 143, " 5 v. o., " sin.^{2}, " " sin.$^2 x$.

EERSTE HOOFDSTUK.

Goniometrie.

---

§ 1.

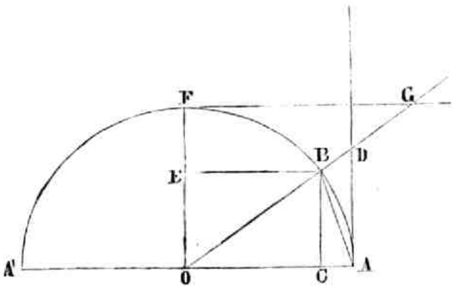
Verklaring van de goniometrische betrekkingen.

1. Bij de beschouwing van den driehoek, zoowel van den rechtlijnigen als bolvormigen, komen *zes* samenstellende deelen of elementen in aanmerking, namelijk de *drie* zijden en de *drie* hoeken, tusschen welke zulk een verband bestaat, dat drie van deze zes elementen gegeven of bekend zijnde, de driehoek door *constructie* geheel kan worden bepaald, en dus de onbekende elementen kunnen worden gevonden. In de lagere Meetkunst heeft men deze constructiën leeren uitvoeren, en toen tevens kunnen opmerken, dat onder de gegevens voor een rechtlijnigen driehoek, minstens één zijde moet voorkomen. Deze manier om de onbekende elementen van een driehoek te vinden laat echter geen groote nauwkeurigheid toe, en al vroeg was men er op bedacht de onbekenden door *berekening* uit de gegevens af te leiden. Men stuitte echter dadelijk op de zwarigheid om rechte lijnen met hoeken te vergelijken of met elkander te verbinden, daar deze beide grootheden niet door dezelfde maat of eenheid kunnen gemeten worden. Deze moeilijkheid is men te boven gekomen door in plaats van de hoeken zekere lijnen in rekening te brengen, die van deze hoeken afhangen, dat is, die te gelijk met deze hoeken veranderen en waarvan, omgekeerd, deze hoeken afhangen.

Het onderzoek naar de eigenschappen dezer lijnen en naar de betrekkingen, die er tusschen bestaan, heeft het aanwezen gegeven aan een tak der wiskunde, dien men *Goniometrie* of *meetkunst der hoeken* noemt, terwijl de berekening der onbekende elementen van den driehoek uit de gegevens door middel der goniometrie den naam van *Trigonometrie* of *driehoeksmeting* draagt, die weder onderscheiden wordt in *rechtlijnige* en *spherische* of *bolvormige driehoeksmeting*.

2. Zij, fig. 1, AFA′ een halve cirkel, beschreven met een willekeurigen straal AO, en B een punt in den omtrek van dien cirkel, dan is de boog AB de maat van den hoek AOB. Tot de goniometrische lijnen van dezen hoek of boog behooren nu, in de eerste plaats de koorde AB; vervolgens de lijn BC, die uit het eene uiteinde van den boog loodrecht valt op den straal, die door het andere uiteinde gaat; verder de lijn AD, zijnde dat gedeelte van de raaklijn aan het eene uiteinde van den boog, begrepen tusschen dit raakpunt en het punt D, waar de verlengde straal OB, gaande door het andere uiteinde van den boog, deze raaklijn snijdt, en eindelijk het gedeelte OD van den verlengden straal OB, begrepen tusschen het middelpunt des cirkels en het snijpunt met de raaklijn.

Fig. 1.



Om deze lijnen echter in de berekening te kunnen opnemen, moeten zij in getallen worden uitgedrukt, dat is, gemeten worden door een gemeene maat of eenheid, waartoe geen geschiktere kan gekozen worden dan de straal des cirkels, want daardoor blijven de betrekkingen tusschen de genoemde lijnen en den straal des cirkels, tot welken de boog AB of de hoek AOB behoort, dezelfde, zoolang de betrekking van den boog AB tot den cirkel, waartoe hij behoort, dezelfde blijft.

Noemt men nu den boog AB of den hoek AOB ter bekorting a, en den straal r, dan is $\frac{AB}{r}$ de *koorde*, $\frac{BC}{r}$ de *sinus*, $\frac{AD}{r}$ de *tangens* en $\frac{OD}{r}$ de *secans* van den boog of hoek *a*, en neemt men nu $r = 1$, dan worden de goniometrische betrekkingen van den boog a op de volgende verkorte wijze aangeduid:

AB = koorde.a.
BC = sin.a.
AD = tg.a.
OD = sec.a.

Trekt men verder den straal OF loodrecht op AO; FG raaklijn aan het uiteinde F van dezen straal en BE loodrecht uit het punt B op OF; dan is, volgens het voorgaande

BE = sin. (90° — a).
FG = tg. (90° — a).
OG = sec. (90° — a).

Deze betrekkingen zijn derhalve de ***sinus***, ***tangens*** en ***secans*** van het complement van den boog a, dat is, het zijn de ***complements-sinus***, ***complements-tangens*** en ***complements-secans*** van a, waarvoor men kortheidshalve ***cosinus***, ***cotangens*** en ***cosecans*** zegt. Men heeft dus nog de volgende goniometrische betrekkingen:

BE = cos.a.
FG = cot.a.
OG = cosec.a.

Hierbij kunnen nog gevoegd worden $\frac{AC}{r}$ en $\frac{EF}{r}$, die men ***sinus-versus*** en ***cosinus-versus*** noemt, hetwelk wordt uitgedrukt door

AC = sin.vers.a.
EF = cos.vers.a.

Daar BE evenwijdig met AO en BC met OF is, is BE = OC en dus ook

OC = cos.a,

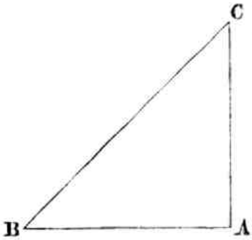
zoodat men door den cosinus van een boog verstaat de betrekking van het gedeelte van den straal, begrepen tusschen het middelpunt des cirkels en het voetpunt van den sinus tot den straal.

Nog kan men opmerken dat: 1°. de sinus, de cosinus en de straal; 2°. de tangens, de secans en de straal en 3°. de cotangens, de cosecans en de straal de zijden zijn van rechthoekige driehoeken.

3. Men kan de verschillende goniometrische betrekkingen ook op de volgende wijze bepalen.

Zij, fig. 2, in driehoek ABC de hoek A recht, dan is:

Fig. 2.



De sinus van hoek B = a, de betrekking tusschen de overstaande rechthoekszijde AC en de hypotenusa, dus:

$$\sin.a = \frac{AC}{BC}.$$

De cosinus van hoek B = a is de betrekking tusschen de aanliggende rechthoekszijde AB en de hypotenusa; dus:

$$\cos.a = \frac{AB}{BC}.$$

De tangens van hoek B = a is de betrekking tusschen de overstaande rechthoekszijde en de aanliggende, dus:

$$\text{tg}.a = \frac{AC}{AB} = \frac{AC}{BC} : \frac{AB}{BC} = \frac{\sin.a}{\cos.a}.$$

De cotangens van hoek B = a is de betrekking tusschen de aanliggende rechthoekszijde en de overstaande, dus:

$$\cot.a = \frac{AB}{AC} = \frac{AB}{BC} : \frac{AC}{BC} = \frac{\cos.a}{\sin.a} = \frac{1}{\text{tg}.a}.$$

De secans van hoek B = a is de betrekking tusschen de hypotenusa en de aangrenzende rechthoekszijde, dus:

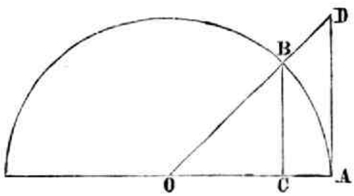
$$\sec.a = \frac{BC}{AB} = \frac{BC}{BC} : \frac{AB}{BC} = \frac{1}{\cos.a}.$$

De cosecans van hoek B = a is de betrekking tusschen de hypotenusa en de overstaande rechthoekszijde, dus:

$$\text{cosec}.a = \frac{BC}{AC} = \frac{BC}{BC} : \frac{AC}{BC} = \frac{1}{\sin.a}.$$

4. Indien, fig. 3, de boog AB $= \frac{1}{4}\pi = 45°$ is, dan is

Fig. 3.



OBC een gelijkbeenige rechthoekige driehoek, wiens hypotenusa 1 is, derhalve heeft men:

$$BC = OC = \sin.\tfrac{1}{4}\pi = \cos.\tfrac{1}{4}\pi = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Ook de driehoek OAD is gelijkbeenig en rechthoekig, derhalve:

$$AD = OA = \text{tg}.\tfrac{1}{4}\pi = 1.$$

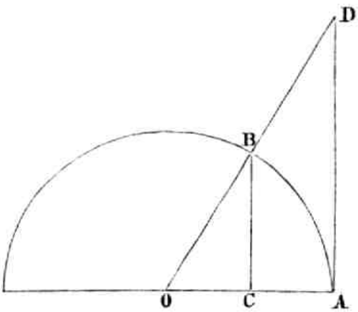
$$OD = \sec.\tfrac{1}{4}\pi = \sqrt{2},$$

en daar tg.a = cot. (90° — a), en sec.a = cosec. (90° — a) is, volgt daaruit

$$\cot.\tfrac{1}{4}\pi = 1.$$
$$\operatorname{cosec}.\tfrac{1}{4}\pi = \sqrt{2}.$$

Indien, fig. 4, boog AB $= \frac{1}{3}\pi = 60°$ is, dan zijn de driehoeken OBC en OAD rechthoekige driehoeken met een scherpen hoek van 30°, waarin, zooals men weet, de zijde over den hoek van 30° gelijk is aan de halve hypotenusa. Hieruit volgt alzoo:

Fig. 4.



$$OC = \cos.60° = \tfrac{1}{2}.$$
$$BC = \sin.60° = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}.$$
$$OD = \sec.60° = 2.$$
$$AD = \operatorname{tg}.60° = \sqrt{3},$$

en daar $\sin.30° = \cos.60°, \cos.30° = \sin.60°, \operatorname{tg}.60° = \cot.30°, \sec.60° = \operatorname{cosec}.30°$ is, heeft men ook nog:

$$\sin.30° = \tfrac{1}{2}.$$
$$\cos.30° = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}.$$
$$\cot.30° = \sqrt{3}.$$
$$\operatorname{cosec}.30° = 2.$$

waardoor, zoo noodig, nog nader blijkt, dat de goniometrische betrekkingen niets anders zijn dan getallen, die in de figuur door lijnen worden voorgesteld.

---

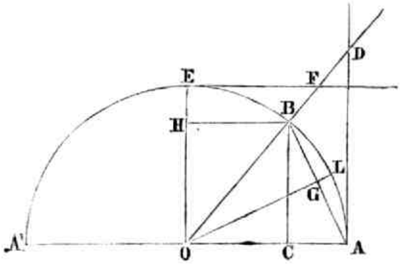
§ 2.

Verhoudingen tusschen de goniometrische betrekkingen van denzelfden boog.

5. Reeds uit de opmerking aan het slot van 2 in de vorige § heeft men kunnen besluiten tot zekere onderlinge afhankelijkheid tusschen de goniometrische betrekkingen van een zelfden boog. Er bestaat echter nog meer verband, zelfs zoodanig dat een der goniometrische betrekkingen bekend zijnde, de overige daaruit kunnen worden afgeleid.

De driehoeken OBC, OAD en OEF, fig. 5, die alle rechthoekig en onderling gelijkvormig zijn, geven namelijk

Fig. 5.



$$BC^2 + OC^2 = OB^2.$$
$$OA^2 + AD^2 = OD^2.$$
$$OE^2 + EF^2 = OF^2, \text{ dat is:}$$
$$\sin.^2a + \cos.^2a = 1.$$
$$1 + \text{tg.}^2a = \sec.^2a.$$
$$1 + \cot.^2a = \text{cosec.}^2a.$$

terwijl uit de gelijkvormigheid van OBC en OAD volgt:

$$OC : OA = BC : AD = OB : OD,$$

dat is: $\cos.a : 1 = \sin.a : \text{tg.}a = 1 : \sec.a,$

$$\text{waaruit: } \text{tg.}a = \frac{\sin.a}{\cos.a}.$$
$$\sec.a = \frac{1}{\cos.a}.$$

Evenzoo geeft de gelijkvormigheid van de driehoeken OBC en OEF:

$$OC : EF = BC : OE = OB : OF,$$

dat is: $\cos.a : \cot.a = \sin.a : 1 = 1 : \text{cosec.}a,$

$$\text{waaruit: } \cot.a = \frac{\cos.a}{\sin.a}.$$
$$\text{cosec.}a = \frac{1}{\sin.a}.$$

Vergelijkt men de uitdrukkingen voor tg.a en cot.a, dan blijkt nog dat:

$$\text{tg.}a = \frac{1}{\cot.a},$$

hetgeen ook gevonden kan worden uit de gelijkvormigheid der driehoeken OAD en OEF.

Vatten wij nu alles samen, dan hebben wij het volgende stelsel van formules:

Uit $\sin.^2a + \cos.^2a = 1$ volgt:

$$\sin.a = \sqrt{(1 - \cos.^2a)} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$
$$\cos.a = \sqrt{(1 - \sin.^2a)} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$
$$\sqrt{(\sin.^2a + \cos.^2a)} = 1. \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Uit $1 + \text{tg.}^2a = \sec.^2a$ volgt:

$$\sec.a = \sqrt{(1 + \text{tg.}^2 a)} \ldots\ldots \quad (4)$$
$$\text{tg.}a = \sqrt{(\sec.^2 a - 1)} \ldots\ldots \quad (5)$$
$$\sqrt{(\sec.^2 a - \text{tg.}^2 a)} = 1 \ldots\ldots \quad (6)$$

Uit $1 + \cot.^2 a = \text{cosec.}^2 a$ volgt:

$$\text{cosec.}a = \sqrt{(1 + \cot.^2 a)} \ldots\ldots \quad (7)$$
$$\cot.a = \sqrt{(\text{cosec.}^2 a - 1)} \ldots\ldots \quad (8)$$
$$\sqrt{(\text{cosec.}^2 a - \cot.^2 a)} = 1 \ldots\ldots \quad (9)$$

Verder heeft men:

$$\text{tg.}a = \frac{\sin.a}{\cos.a} = \frac{1}{\cot.a} \ldots\ldots \quad (10)$$
$$\cot.a = \frac{\cos.a}{\sin.a} = \frac{1}{\text{tg.}a} \ldots\ldots \quad (11)$$
$$\sec.a = \frac{1}{\cos.a} \ldots\ldots \quad (12)$$
$$\text{cosec.}a = \frac{1}{\sin.a} \ldots\ldots \quad (13)$$

Uit de drie laatste formules blijkt nog gemakkelijk:

$$\text{tg.}a \times \cot.a = \cos.a \times \sec.a = \sin.a \times \text{cosec.}a = 1 \ . \quad (14)$$

en hieruit:

$$\sin.a = \frac{1}{\text{cosec.}a} \ldots\ldots \quad (15)$$
$$\cos.a = \frac{1}{\sec.a} \ldots\ldots \quad (16)$$

zoodat volgens de aangenomen spreekwijze de sinus, de cosinus en de tangens van een boog het omgekeerde zijn van den cosecans, den secans en den cotangens van dien boog en omgekeerd.

Nog ziet men uit de figuur gemakkelijk, dat

$$\sin.\text{vers.}a = 1 - \cos.a \ldots\ldots \quad (17)$$
$$\cos.\text{vers.}a = 1 - \sin.a \ldots\ldots \quad (18)$$

is. Merkt men verder op dat de koorde AB door den straal OL, die er loodrecht op getrokken is, tegelijk met den boog $AB = a$, midden door gedeeld wordt, dan ziet men, dat:

$$BG = \sin.\tfrac{1}{2}a$$

is, en dus $\quad \text{koorde.}a = 2 \sin.\tfrac{1}{2}a \ldots\ldots \quad (19)$

en eindelijk, omdat $AB^2 = AC \times 2\ AO = 2\ (1 - OC)$ is,

$$\text{koorde.}^2 a = 2\ (1 - \cos.a) \ldots\ldots \quad (20)$$

6. Door middel der gevonden formules zal men nu gemakkelijk elk der goniometrische betrekkingen in een andere kunnen uitdrukken, om daardoor formules te verkrijgen ter berekening eener

bepaalde goniometrische betrekking als een andere gegeven is. Zij bijv. sec.a gegeven, dan zou men om sin.a te vinden, aldus kunnen te werk gaan. Uit form. (1) heeft men namelijk

$$\sin.a = \sqrt{(1 - \cos.^2 a)}$$

en uit form. (16)

$$\cos.a = \frac{1}{\sec.a}$$

door deze laatste waarde in de eerste vergelijking te substitueeren, vindt men voor het gevraagde

$$\sin.a = \sqrt{(1 - \frac{1}{\sec.^2 a})} = \frac{\sqrt{(\sec.^2 a - 1)}}{\sec.a}.$$

Om den sinus te berekenen als de tangens gegeven is, heeft men uit het laatst gevondene, door gebruik te maken van de form. (5) en (4)

$$\sin.a = \frac{tg.a}{\sqrt{(1 + tg.^2 a)}}$$

waaruit men verder, door volgens form. (10) voor tg.a te schrijven $\frac{1}{\cot.a}$,

$$\sin.a = \frac{1}{\sqrt{(\cot.^2 a + 1)}}$$

en hieruit door toepassing van form. (7)

$$\sin.a = \frac{1}{\mathrm{cosec}.a},$$

zoodat men heeft:

$$\sin.a = \sqrt{(1 - \cos.^2 a)} = \frac{\sqrt{(\sec.^2 a - 1)}}{\sec.a} = \frac{tg.a}{\sqrt{(1 + tg.^2 a)}} = \frac{1}{\sqrt{(\cot.^2 a + 1)}} = \frac{1}{\mathrm{cosec}.a},$$

waardoor dus de sinus van een boog in elk der overige goniometrische betrekkingen is uitgedrukt, en berekend kan worden als een van die alle gegeven is. Op gelijke wijze kan men met elk der andere handelen.

De wijze van afleiding is echter voor vele wijzigingen vatbaar, zooals in het algemeen de herleiding van alle goniometrische formules.

Om bijv. den sinus te berekenen als de tangens gegeven is, kan men in form. (15) voor cosec. a substitueeren de waarde uit form. (7) en daarin voor cot. a de waarde uit form. (11), waardoor men heeft:

$$\sin.a = \frac{1}{\mathrm{cosec}.a} = \frac{1}{\sqrt{(1 + \cot.^2 a)}} = \frac{1}{\sqrt{(1 + \frac{1}{tg.^2 a})}} = \frac{tg\ a}{\sqrt{1(+ tg.^2 a)}}$$

even als boven.

7. Men oefene zich door de beantwoording der volgende vragen:

1°. Bereken de waarde van de goniometrische betrekkingen van $\frac{1}{6}\pi$, $\frac{1}{3}\pi$ en $\frac{1}{4}\pi$ door den sinus als bekend aan te nemen.

2°. Bereken de goniometrische betrekkingen van den boog wiens sinus is $\frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})$.

3°. Als $tg.a = \sqrt{(5+2\sqrt{5})}$ is, wat zijn dan de overige goniometrische betrekkingen?

4°. Als $cosec.a = \sqrt{(2+2\sqrt{5})}$ is, hoe groot zijn dan de andere goniometrische betrekkingen?

5°. Bereken al de goniometrische betrekkingen van den boog van 36°.

6°. Insgelijks van dien van 18°.

7°. Insgelijks van den boog van 54° en van 72°.

8°. Druk elk der goniometrische betrekkingen uit in elk der andere.

9°. Als $sec.a = -\frac{3}{5}\sqrt{5}$ is, hoe groot zijn dan de overige goniometrische betrekkingen?

10°. Als $sin.x = a$ is, wat vindt men dan voor de andere goniometrische betrekkingen van den boog x?

---

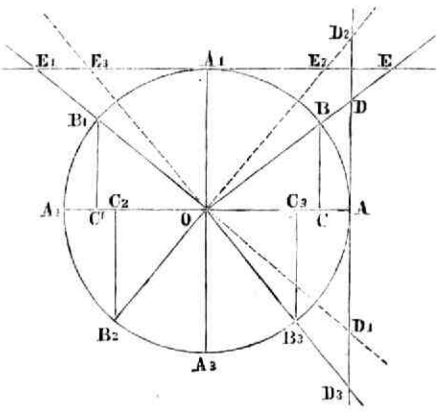
§ 3.

Over de teekens der goniometrische betrekkingen.

8. Tot nog toe beschouwden wij de goniometrische betrekkingen alleen ten opzichte van bogen in het eerste kwadrant of van hoeken kleiner dan 90° of $\frac{1}{2}\pi$. Wij zullen thans onderzoeken hoe het daarmede gesteld is in de overige kwadranten, waarbij wij kortheidshalve alleen van bogen zullen gewagen, dewijl voor de overeenkomstige hoeken dezelfde opmerkingen gelden.

Zij daartoe, fig. 6, AOA_1 het eerste, A_1OA_2 het tweede, A_2OA_3 het derde en AOA_3 het vierde kwadrant. Indien wij dan onderstellen dat de verlengde straal OB ligt op OA, dan is boog $AB = 0$, en blijkbaar

Fig. 6.



$$\sin.0° = 0.$$

Laat nu de straal OA onbewegelijk, de straal OB daarentegen om het middelpunt beweegbaar ondersteld worden, dan kunnen wij dezen straal achtereenvolgens den geheelen omtrek doen doorloopen, waarbij dan al dadelijk blijkt dat de sinus in het eerste kwadrant grooter wordt, naarmate de doorgeloopen boog aangroeit, totdat, de doorgeloopen ruimte een kwadrant zijnde, de beweegbare straal op OA_1 valt en dus de sinus gelijk aan den straal is. Derhalve

$$\sin.\ 90° = 1.$$

Wordt de doorgeloopen ruimte grooter dan een kwadrant, bijv. gelijk aan den boog AB_1, dan ziet men den sinus weder afnemen, totdat, de doorgeloopen ruimte gelijk 180° zijnde, het beweegbare been op OA_2 valt en alzoo in het verlengde van het vaste been OA ligt; alsdan ziet men dat

$$\sin.\ 180° = 0.$$

Neemt men nu den stand der lijnen in het eerste kwadrant als *positief* aan, hetgeen natuurlijk geheel willekeurig is, dan blijkt het dat de sinus van bogen in het tweede kwadrant nog positief is, want de lijn B_1C_1 is in volkomen denzelfden toestand als BC ten opzichte van AA_2, waarop zij beide loodrecht staan. Onderstelt men verder $AB = A_2B_1$, dan is $BC = B_1C_1$ en dus, den boog AB gelijk den boog A_2B_1 gelijk a stellende, is

$$\sin.a = \sin.\ (180° - a) = \sin.\ (\pi - a),$$

dat is: *de sinus van een boog is gelijk aan den sinus van zijn supplement.*

Zet men de beweging voort in het derde kwadrant, dan ziet men den sinus weder aangroeien, totdat, het beweegbare been op OA_3 vallende, de doorgeloopen ruimte 270° en de sinus weer 1 geworden is. In het vierde kwadrant neemt de sinus weer af om voor 360° op nieuw 0 te worden. In deze kwadranten is echter de stand der lijnen B_2C_2 en B_3C_3 tegengesteld aan den stand der lijn BC en dus de sinus van bogen in het derde en vierde kwadrant *negatief*. Wij hebben derhalve:

$$\sin. 270° = -1.$$
$$\sin. 360° = 0.$$

Derhalve alles te samen nemende:

$$\left.\begin{array}{r}\sin.0° = 0.\\ \sin.90° = 1.\\ \sin. 180° = 0.\\ \sin. 270° = -1.\\ \sin. 360° = 0.\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (21)$$

9. Omtrent den cosinus merke men op, dat als het beweegbare been OB op OA ligt, de cosinus alsdan 1 is. Brengt men nu het been in beweging, dan ziet men den boog aangroeien, terwijl de cosinus afneemt, om gelijk 0 te worden als OB valt op OA_1 en dus het beweegbare been een boog van 90° heeft doorloopen. Bij verdere aangroeiing van den boog groeit de cosinus ook weder aan, totdat hij voor 180° gelijk 1 is. In het derde kwadrant neemt de cosinus weder af, terwijl de boog aangroeit om voor 270° op nieuw gelijk 0 te worden, waarna hij in het vierde kwadrant nogmaals aangroeit en voor 360° weer gelijk 1 is.

In het eerste en vierde kwadrant wordt de cosinus echter op OA gemeten, van het middelpunts rechts, terwijl hij in het tweede en derde kwadrant van het middelpunt links op het verlengde van OA gemeten wordt en dus in tegengestelden toestand verkeert. Daar wij nu alle lijnen in het eerste kwadrant positief ondersteld hebben, is de cosinus alzoo *positief* in het eerste en vierde en *negatief* voor bogen in het tweede en derde kwadrant. Wij hebben diensvolgens:

$$\left.\begin{array}{r}\cos.0° = 1.\\ \cos.90° = 0.\\ \cos. 180° = -1.\\ \cos. 270° = 0.\\ \cos. 360° = 1.\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (22)$$

Is $AB = A_2B_1 = a$, dan is $OC = OC_1$ en dus:

$$\cos.a = -\cos.(180^\circ - a) = -\cos.(\pi - a),$$

derhalve: *de cosinus van een boog is gelijk aan den negatieven cosinus van zijn supplement.*

10. Om den toestand van den tangens in de verschillende kwadranten te beoordeelen, trekke men een raaklijn aan het punt A, dat is aan den oorsprong der bogen; denkt men zich nu deze raaklijn boven en beneden dat raakpunt tot in het oneindige verlengd, dan noemt men deze lijn de lijn der tangenten, omdat de tangenten van alle bogen op deze lijn geteld of gemeten moeten worden. Men ziet nu lichtelijk in dat de tangens van 0° gelijk 0 is; voor aangroeiende bogen in het eerste kwadrant groeit ook de tangens aan, daar het bewegende been OB meer en meer nadert tot een stand evenwijdig aan de lijn der tangenten. De afstand van het snijpunt D dezer twee lijnen tot het raakpunt A wordt derhalve steeds grooter, totdat de beide lijnen, op het oogenblik dat de doorgeloopen boog gelijk 90° is, evenwijdig loopen. Er heeft dan geen snijding plaats en men zou dus eigenlijk niet kunnen spreken van een tangens van 90°. Daar de wording van den tangens voor aangroeiende bogen in het eerste kwadrant echter duidelijk doet zien dat hij tot oneindig groot nadert, zegt men dat de tangens van 90° oneindig groot is.

Is het beweegbare been of de verlengde straal in den stand OB_1 gekomen en alzoo de doorgeloopen boog een boog in het tweede kwadrant, dan kan deze lijn de lijn der tangenten niet snijden, tenzij men haar door het middelpunt O verlengt, maar dan heeft die snijding plaats beneden het raakpunt A en dus zijn de tangenten van bogen in het tweede kwadrant in een stand, tegengesteld aan dien van het eerste kwadrant. Zijn dus de tangenten van bogen in het eerste kwadrant *positief*, dan zijn zij in het tweede kwadrant *negatief*. Te gelijkertijd ziet men in dit kwadrant de tangenten afnemen als de bogen aangroeien om voor 180° gelijk 0 te worden. In het derde kwadrant heeft de snijding met de lijn der tangenten weder plaats door het verlengde van den beweegbaren straal boven het raakpunt A en dus zijn de tangenten in dit kwadrant *positief*, terwijl men tevens kan opmerken, dat de tangenten tegelijk met de bogen aangroeien, zoodat de tangens van 270° weder oneindig groot is. In het vierde kwadrant snijdt de beweegbare straal de lijn der tangenten weder beneden het punt A, en zijn zij dus op nieuw *negatief*, terwijl zij voor aangroeiende bogen in dit kwadrant afnemen om voor 360° gelijk 0 te worden. Wij hebben dus:

$$\left.\begin{array}{l} \text{tg.}0^\circ = 0. \\ \text{tg.}90^\circ = \infty. \\ \text{tg. }180^\circ = 0. \\ \text{tg. }270^\circ = \infty. \\ \text{tg. }360^\circ = 0. \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (23)$$

Verder ziet men weder gemakkelijk in dat:

$$\text{tg.a} = -\ \text{tg. }(180^\circ - \text{a}) = -\ \text{tg. }(\pi - \text{a})$$

is, derhalve: ***de tangens van een boog is gelijk aan den negatieven tangens van het supplement van dien boog.***

11. Het onderzoek van den cotangens, secans en cosecans zal nu geen zwarigheden meer opleveren.

Door de lijn der cotangenten verstaat men de aan weerszijden tot in het oneindige verlengde raaklijn aan het punt A_1, dat op 90° afstands ligt van het raakpunt voor de lijn der tangenten. Het positieve gedeelte dezer lijn strekt zich, ingevolge het voorgaande, rechts van het raakpunt en het negatieve gedeelte links van dit punt uit.

Men zal dus vinden dat de cotangens *positief* is in het eerste en derde, *negatief* daarentegen in het tweede en vierde kwadrant, even als zulks met den tangens het geval is. Wij hebben dus:

$$\left.\begin{array}{l} \text{cot.}0^\circ = \infty. \\ \text{cot.}90^\circ = 0. \\ \text{cot. }180^\circ = \infty. \\ \text{cot. }270^\circ = 0. \\ \text{cot. }360^\circ = \infty. \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (24)$$

en $\text{cot.a} = -\ \text{cot. }(180^\circ - \text{a}) = -\ \text{cot. }(\pi - \text{a})$,

derhalve is ook: ***de cotangens van een boog gelijk aan den negatieven cotangens van zijn supplement.***

12. Om voor den secans en cosecans over den positieven en negatieven toestand te kunnen oordeelen, merke men op, dat deze geteld of gemeten worden op den beweegbaren straal of zijn verlengde door het middelpunt heen, van dit middelpunt tot aan het snijpunt met de lijn der tangenten of cotangenten. Wanneer dus deze snijding plaats heeft door het beweegbare been zelf, dan zijn zij *positief*, *negatief* daarentegen als het verlengde van dit been

de lijn der tangenten of cotangenten snijdt. Men zal dus vinden dat de secans *positief* is in het eerste en vierde, *negatief* in het tweede en derde kwadrant; de cosecans *positief* in het eerste en tweede, *negatief* in het derde en vierde kwadrant, en verder dat:

$$\left.\begin{aligned} \sec.0^\circ &= 1. \\ \sec.90^\circ &= \infty. \\ \sec.\ 180^\circ &= -1. \\ \sec.\ 270^\circ &= \infty. \\ \sec.\ 360^\circ &= 1. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (25)$$

$$\sec.a = -\sec.\ (180^\circ - a) = -\sec.\ (\pi - a),$$

dus ook: ***de secans van een boog gelijk aan den negatieven secans van zijn supplement.***

Evenzoo

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{cosec}.0^\circ &= \infty. \\ \operatorname{cosec}.90^\circ &= 1. \\ \operatorname{cosec}.\ 180^\circ &= \infty. \\ \operatorname{cosec}.\ 270^\circ &= -1. \\ \operatorname{cosec}.\ 360^\circ &= 1. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (26)$$

$$\operatorname{cosec}.a = \operatorname{cosec}.\ (180^\circ - a) = \operatorname{cosec}.\ (\pi - a),$$

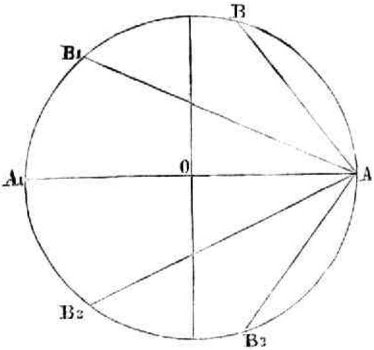
dat is: ***de cosecans van een boog is gelijk aan den cosecans van zijn supplement.***

13. Omtrent den sinus-versus zij opgemerkt, dat die voor 0° gelijk 0 is en voor 90° gelijk 1, terwijl zij voor bogen in het tweede kwadrant grooter dan 1 wordt, daar de sinus-versus geteld wordt op de lijn AA_2 van het punt A af, tot aan het voetpunt van den sinus. Voor bogen grooter dan 180° neemt hij blijkbaar weder af om voor 270° gelijk 1 en voor 360° gelijk 0 te worden. Wat den cosinus-versus aangaat, deze is voor 0° gelijk 1 en voor 90° gelijk 0, terwijl hij in het tweede en derde kwadrant blijft aangroeien, zoodat hij voor 180° gelijk 1 en voor 270° gelijk 2 wordt, waarna hij weder afneemt, totdat hij voor 360° op nieuw gelijk 1 is. Wij hebben alzoo:

$$\left.\begin{aligned} \text{sin.vers.}0^\circ &= 0. & \text{cos.vers.}0^\circ &= 1. \\ \text{sin.vers.}90^\circ &= 1. & \text{cos.vers.}90^\circ &= 0. \\ \text{sin.vers. }180^\circ &= 2. & \text{cos.vers. }180^\circ &= 1. \\ \text{sin.vers. }270^\circ &= 1. & \text{cos.vers. }270^\circ &= 2. \\ \text{sin.vers. }360^\circ &= 0. & \text{cos.vers. }360^\circ &= 1. \end{aligned}\right\} \quad (27)$$

14. Niets belet om den bewegenden straal OB, na het doorloopen van een geheelen omtrek nogmaals een- of meermalen den omtrek te doen doorloopen, en in dezen zin is het dan ook dat men spreekt van bogen in het 5^e, 6^e, 7^e, 8^e, 9^e enz. kwadrant. Het is duidelijk dat de verschillende goniometrische betrekkingen alsdan alle op nieuw dezelfde toestanden doorloopen. De eenige uitzondering hierop maakt de koorde, zooals blijkt uit fig. 7.

Fig. 7.



Voor den boog van 0° is de koorde gelijk 0. Laat men nu den boog aangroeien, dan groeit ook de koorde aan totdat zij voor 180° gelijk 2 wordt; bij verdere aangroeiing neemt de koorde weder af, om voor 360° gelijk 0 te worden, terwijl men nu lichtelijk inziet, dat bij verdere beweging van de koorde de punten A en B onderling van plaats verwisselen, en dus de koorde in het 5^e, 6^e, 7^e en 8^e kwadrant negatief is, om daarna weder positief te worden. Dit blijkt ook uit form. (19), want stellende daarin $a = 360° + a'$, dan heeft men:

$$\text{koorde } (360° + a') = 2 \text{ sin. } (180° + \tfrac{1}{2} a')$$

en dus is de koorde van een boog in het 5^e, 6^e, 7^e en 8^e kwadrant, indien $a' > 0$ en $< 360°$ ondersteld wordt, gelijk aan tweemaal den sinus van een boog in het 3^e of 4^e kwadrant, derhalve volgens de beschouwing in 7 negatief, wordt $a' > 360°$, dan wordt ook $180° + \frac{1}{2} a' > 360°$ en dus de koorde weder positief.

15. Trekken wij nu al het behandelde in deze § samen, dan verkrijgen wij daardoor de volgende tabel, die ons een beknopt overzicht geeft van den toestand der goniometrische betrekkingen in de verschillende kwadranten.

	0°	1e kw.	90° $\frac{1}{2}\pi$.	2e kw.	180° π.	3e kw.	270° $\frac{3}{2}\pi$.	4e kw.	360° 2π.	5e kw.	enz.
sinus......	0	+	1	+	0	—	—1	—	0	+	enz.
cosinus...	1	+	0	—	—1	—	0	+	1	+	enz.
tangens...	0	+	∞	—	0	+	∞	—	0	+	enz.
cotangens	∞	+	0	—	∞	+	0	—	∞	+	enz.
secans.....	1	+	∞	—	—1	—	∞	+	1	+	enz.
cosecans..	∞	+	1	+	∞	—	—1	—	∞	+	enz.

Wij hebben in deze tabel de sinus-versus, cosinus-versus en koorde niet opgenomen, daar zij in de goniometrie en trigonometrie niet dan zeer zeldzaam voorkomen.

Met weinig moeite merkt men nog het volgende op:

1°. De sinus en cosecans zijn *positief* in het eerste en tweede, *negatief* in het derde en vierde kwadrant.

2°. De cosinus en secans zijn *positief* in het eerste en vierde, *negatief* in het tweede en derde kwadrant.

3°. De tangens en cotangens zijn *positief* in het eerste en derde, *negatief* in het tweede en vierde kwadrant.

4°. De tangens en cotangens zijn *positief* als de sinus en cosinus hetzelfde teeken hebben; *negatief* als deze met verschillende teekens zijn aangedaan.

5°. Als de sinus gelijk 0 is, is de cosinus gelijk ± 1; is de tangens gelijk 0, dan is de cotangens ∞, en zoo de secans 1 is, is de cosecans ∞ en omgekeerd.

16. Om zich bovenstaande tabel gemakkelijk eigen te maken en in het geheugen te prenten, is het voldoende zich goed vertrouwd te maken met den toestand van sinus en cosinus; door toepassing der formules (10), (11), (12) en (13) kan men dan daaruit den toestand der overige goniometrische betrekkingen afleiden. De eenige zwarigheid, die zich daarbij zal voordoen, is, dat men uit de figuur vindt tg. 270° $= \infty$, terwijl uit tg.a $= \frac{\text{sin.a}}{\text{cos.a}}$ volgt tg. 270° $= -\infty$. Schijnbaar bestaat hier dus een tegenstrijdigheid. De waarde van tg. 270° is echter de grens voor den overgang

van den positieven tot den negatieven toestand, en kan alzoo als het einde van den eersten of als het begin van den tweeden beschouwd worden.

Hetzelfde geldt voor cot. 180°.

17. De goniometrische betrekkingen bevestigen wat reeds in de Algebra (zie VRIES, I. D. § 139) is opgemerkt, dat namelijk een grootheid niet van den positieven tot den negatieven toestand kan overgaan, zonder vooraf 0 of ∞ geweest te zijn. Bij den sinus en cosinus ziet men dien overgang plaats hebben door 0; bij den tangens en cotangens beurtelings door 0 en ∞; bij den secans en cosecans alleen door ∞. Men mag echter die stelling niet omkeeren, en uit het nul of oneindig groot worden eener grootheid besluiten tot het veranderen van toestand. Men heeft hiervan een voorbeeld in den sinus-versus, die in de vier eerste kwadranten *positief* is; voor 360° wordt hij 0, terwijl hij in het vijfde en de volgende kwadranten weder *positief* is. Ook de cosinus-versus verkeert in dit geval.

18. Tot nog toe beschouwden wij de bogen in de verschillende kwadranten als *positief*. Laat men echter den bewegenden straal OB in fig. 6, in plaats van uit het punt A naar boven, benedenwaarts draaien, dan zullen de doorgeloopen bogen als *negatief* moeten worden aangemerkt, en dan ziet men gemakkelijk in, dat de goniometrische betrekkingen van negatieve bogen in het 1e, 2e, 3e en 4e kwadrant eigenlijk zijn de goniometrische betrekkingen van positieve bogen in het 4e, 3e, 2e en 1e kwadrant, zoodat men heeft:

$$\left.\begin{array}{r} \text{sin.}\ (-\ a) = -\ \text{sin.a.} \\ \text{cos.}\ (-\ a) = \text{cos.a.} \\ \text{tg.}\ (-\ a) = -\ \text{tg.a.} \\ \text{cot.}\ (-\ a) = -\ \text{cot.a.} \\ \text{sec.}\ (-\ a) = \text{sec.a.} \\ \text{cosec.}\ (-\ a) = -\ \text{cosec.a.} \end{array}\right\} \quad .\ .\ .\ .\ (28)$$

De goniometrische betrekkingen van negatieve bogen zijn dus negatief, behalve de cosinus en secans, die positief blijven.

§ 4.

Goniometrische betrekkingen tusschen verschillende bogen.

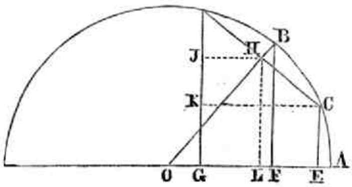
19. De goniometrische betrekkingen, die er tusschen twee of meer verschillende bogen bestaan, worden alle afgeleid uit twee formules, vervat in de beide vergelijkingen

$$\sin.(a \pm b) = \sin.a \cos.b \pm \cos.a \sin.b$$
$$\text{en } \cos.(a \pm b) = \cos.a \cos.b \mp \sin.a \sin.b,$$

waarin a en b twee geheel willekeurige bogen voorstellen, die volstrekt onafhankelijk van elkander zijn, en die beide of een van beide weder als de som of het verschil van twee of meer willekeurige bogen kunnen beschouwd worden.

Om deze beide formules te bewijzen onderstellen wij, dat in fig. 8 de boog AB = a en de boog BC = BD = b is, dan is boog AC = a — b en boog AD = a + b. Trekt men nu de lijnen CE, BF en DG loodrecht op den straal OA, dan is:

Fig. 8.



CE=sin.(a—b); OE=cos.(a—b).
BF=sin.a; OF=cos.a.
DG=sin.(a+b); OG=cos.(a+b).

Trekt men verder de koorde CD en loodrecht daarop den straal OB, dan deelt deze de lijn CD in H midden door, en dan is:

$$DH = \sin.b \text{ en } OH = \cos.b.$$

Door nu nog de lijn HL loodrecht uit H op OA en de lijnen HJ en CK loodrecht uit H en C op DG te trekken, heeft men, omdat in driehoek CDK de zijde CD midden door is gedeeld:

$$DJ = JK; \quad HL = JG.$$
$$JH = \tfrac{1}{2}CK = GL = LE,$$

en hierdoor:

$$\left.\begin{aligned} CE &= \sin.(a-b) = KG = JG - JK = HL - DJ;\\ DG &= \sin.(a+b) = JG + DJ = HL + DJ;\\ OE &= \cos.(a-b) = OL + LE = OL + GL = OL + JH;\\ OG &= \cos.(a+b) = OL - GL = OL - JH; \end{aligned}\right\} \quad (A)$$

Nu is in de gelijkvormige driehoeken OBF en OHL

$$OB : OH = OF : OL = BF : HL,$$

dat is: $\quad 1 : \cos.b = \cos.a : OL = \sin.a : HL.$

en hieruit:

$$OL = \cos.a \cos.b.$$
$$HL = \sin.a \cos.b.$$

In de gelijkvormige driehoeken OBF en DJH is verder:

$$OB : DH = OF : DJ = BF : JH,$$

dat is: $1 : \sin.b = \cos.a : DJ = \sin.a : JH,$

waaruit: $DJ = \cos.a \sin.b.$

$$JH = \sin.a \sin.b.$$

Door nu deze waarden te substitueeren in de vergelijkingen (A) komt er:

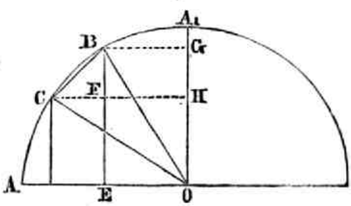
$$\sin. (a - b) = \sin.a \cos.b - \cos.a \sin.b \quad . \quad . \; (29)$$
$$\sin. (a + b) = \sin.a \cos.b + \cos.a \sin.b \quad . \quad . \; (30)$$
$$\cos. (a - b) = \cos.a \cos.b + \sin.a \sin.b \quad . \quad . \; (31)$$
$$\cos. (a + b) = \cos.a \cos.b - \sin.a \sin.b \quad . \quad . \; (32)$$

waardoor de beide formules bewezen zijn.

De leerling oefene zich vooral in het bewijzen dezer stelling door een figuur waarin de bogen ook in andere kwadranten gelegen zijn.

20. Men kan deze formules ook op de volgende manier bewijzen. Zij in fig. 9 boog $AB = a$, en boog $AC = b$, dan is boog $BC = a - b$.

Fig. 9.



Trekken wij nu CD en BE loodrecht op AO en BG en CH loodrecht op OA_1, welke laatste loodrecht staat op OA, dan is:

$$CD = \sin.b; \quad OD = \cos.b;$$
$$BE = \sin.a; \quad OE = \cos.a;$$

Nu is in den rechthoekigen driehoek BCF

$$BC^2 = CF^2 + BF^2 \; . \; . \; . \; . \; . \; (a)$$

waarin BC = koorde $(a - b)$, $CF = \cos.b - \cos.a$; $BF = \sin.a - \sin.b$, en dus verandert vergelijking (a) met toepassing van form. (20) in

$$2 \{1 - \cos. (a - b)\} = (\cos.b - \cos.a)^2 + (\sin.a - \sin b)^2$$
$$= (\cos.^2 b + \cos.^2 a - 2\cos.a \cos.b + \sin.^2 a + \sin.^2 b - 2\sin.a \sin.b,$$

of, omdat volgens form. (3) $\sin.^2 p + \cos.^2 p = 1$ is

$$\cos. (a - b) = \cos.a \cos.b + \sin.a \sin.b.$$

Door toepassing van form. (1) heeft men dan verder:

$$\sin.(a-b)=\sqrt{\{1-\cos.^2(a-b)\}}=\sqrt{\{1-(\cos.a\cos.b+\sin.a\sin.b)^2\}}$$
$$=\sqrt{(1-\cos.^2a\cos.^2b-\sin.^2a\sin.^2b-2\sin.a\sin.b\cos.a\cos.b)}$$
door hierin $\cos.^2a = 1 - \sin.^2a$ en $\sin.^2a = 1 - \cos.^2a$ te nemen, verkrijgt men:
$$\sin.(a-b)=\sqrt{\{1-(1-\sin.^2a)\cos.^2b - (1-\cos.^2a)\sin.^2b - 2\sin.a\sin.b\cos.a\cos.b\}}$$
$$=\sqrt{(1+\sin.^2a\cos.^2b-\cos.^2b-\sin.^2b+\cos.^2a\sin.^2b-2\sin.a\sin.b\cos.a\cos.b)},$$
of daar $\quad -(\sin.^2b+\cos.^2b)=-1$ is
$$\sin.(a-b)=\sqrt{(\sin.^2a\cos.^2b+\cos.^2a\sin.^2b-2\sin.a\sin.b\cos.a\cos.b)},$$
waaruit:
$$\sin.(a-b)=\pm(\sin.a\cos.b-\cos.a\sin.b)$$
en daar voor $b = 0$ de vergelijking moet overgaan in $\sin.a = \sin.a$, kan alleen het bovenste teeken in rekening komen, en alzoo:
$$\sin.(a-b)=\sin.a\cos.b-\cos.a\sin.b.$$
Stellen wij nu in beide $a - b = c$, dus $a = b + c$, dan wordt
$$\sin.c=\sin.(b+c)\cos.b-\cos.(b+c)\sin.b.$$
$$\cos.c=\cos.(b+c)\cos.b+\sin.(b+c)\sin.b.$$
Beschouwt men hierin $\sin.(b+c)$ en $\cos.(b+c)$ als onbekenden, dan kan men die daaruit op de gewone wijze oplossen. Vermenigvuldigt men daartoe de eerste met $\cos.b$ en de tweede met $\sin.b$, dan vindt men door optelling
$$\cos.b\sin.c+\sin.b\cos.c=\sin.(b+c)(\sin.^2b+\cos.^2b),$$
derhalve, daar $\sin.^2b + \cos.^2b = 1$ is:
$$\sin.(b+c)=\sin.b\cos.c+\cos.b\sin.c.$$
Vermenigvuldigt men daarentegen de eerste vergelijking met $\sin.b$ en de tweede met $\cos.b$, dan vindt men door aftrekking:
$$\cos.(b+c)=\cos.b\cos.c-\sin.b\sin.c.$$
21. Men kan echter uit $\cos.(a-b)=\cos.a\cos.b+\sin.a\sin.b$ en $\sin.(a-b)=\sin.a\cos.b-\cos.a\sin.b$ op eenvoudiger wijze tot $\cos.(a+b)$ en $\sin.(a+b)$ geraken. Onderstelt men namelijk b *negatief*, dan gaat $a - b$ over in $a + b$, en volgens form. (28) is $\sin.(-b) = -\sin.b$ en $\cos.(-b)=\cos.b$, waardoor men onmiddelijk heeft:
$$\cos.(a+b)=\cos.a\cos.b-\sin.a\sin.b.$$
$$\sin.(a+b)=\sin.a\cos.b+\cos.a\sin.b.$$

22. Het eerste gebruik dat wij van de bewezen formules zullen maken, zal zijn het opsporen der goniometrische betrekkingen tusschen bogen, die een of meer kwadranten verschillen. Onderstellen wij daartoe vooreerst $a = 90°$, dan is $\sin.a = 1$ en $\cos a = 0$, en dan wordt met toepassing van de form. (10), (11), (12) en (13)

$$\left.\begin{array}{r} \sin.\ (90° \pm b) = \cos.b. \\ \cos.\ (90° \pm b) = \mp \sin.b. \\ \text{tg}.\ (90° \pm b) = \mp \cot.b. \\ \cot.\ (90° \pm b) = \mp \text{tg}.b. \\ \sec.\ (90° \pm b) = \mp \text{cosec}.b. \\ \text{cosec}.\ (90° \pm b) = \sec.b. \end{array}\right\} \quad . \quad . \ (33)$$

Stelt men $a = 180°$, dan wordt $\sin.a = 0$ en $\cos.a = -1$ en men vindt op dezelfde wijze:

$$\left.\begin{array}{r} \sin.\ (180° \pm b) = \mp \sin.b. \\ \cos.\ (180° \pm b) = -\cos.b. \\ \text{tg}.\ (180° \pm b) = \pm \text{tg}.b. \\ \cot.\ (180° \pm b) = \pm \cot.b. \\ \sec.\ (180° \pm b) = -\sec.b. \\ \text{cosec}.\ (180° \pm b) = \mp \text{cosec}.b. \end{array}\right\} \quad . \quad . \ (34)$$

Neemt men $a = 270°$, waardoor $\sin.a = -1$ en $\cos.a = 0$ wordt, dan heeft men

$$\left.\begin{array}{r} \sin.\ (270° \pm b) = -\cos.b. \\ \cos.\ (270° \pm b) = \pm \sin.b. \\ \text{tg}.\ (270° \pm b) = \mp \cot.b. \\ \cot.\ (270° \pm b) = \mp \text{tg}.b. \\ \sec.\ (270° \pm b) = \pm \text{cosec}.b. \\ \text{cosec}.\ (270° \pm b) = -\sec.b. \end{array}\right\} \quad . \quad . \ (35)$$

Neemt men eindelijk $a = 360°$, waardoor $\sin.a = 0$ en $\cos.a = 1$ wordt, dan vindt men:

$$\left.\begin{array}{r} \sin.\ (360° \pm b) = \pm \sin.b. \\ \cos.\ (360° \pm b) = \cos.b. \\ \text{tg}.\ (360° \pm b) = \pm \text{tg}.b. \\ \cot.\ (360° \pm b) = \pm \cot.b. \\ \sec.\ (360° \pm b) = \sec.b. \\ \text{cosec}.\ (360° \pm b) = \pm \text{cosec}.b. \end{array}\right\} \quad . \quad . \ (36)$$

Uit de formules (33), (34), (35) en (36) blijkt, dat de goniometrische betrekking van eenigen boog b gelijk is aan de goniometrische betrekking met complementsbenaming van dien boog b opgeteld *bij* of afgetrokken *van* een *oneven* aantal malen 90°; en dat de goniometrische betrekking van een boog b gelijk is aan de goniometrische betrekking van denzelfden naam van dien boog b opgeteld *bij* of afgetrokken *van* een *even* aantal malen 90°, mits men in beide gevallen op het verschil in teeken lette. Zoo heeft men bijv.

$$\sin.40^\circ = \cos.50^\circ = -\cos.130^\circ = \sin.140^\circ = -\sin.220^\circ = -\cos.230^\circ = \cos.310^\circ = -\sin.320^\circ = \sin.400^\circ = \text{enz.}$$

23. Uit bovenstaande formules is verder nog gemakkelijk af te leiden, dat men in het algemeen hebben zal:

$$\left.\begin{aligned} \sin.a &= \sin.(2n\pi + a) = \sin.\{(2n+1)\pi - a\} \\ \cos.a &= \cos.(2n\pi \pm a) \\ tg.a &= tg.(n\pi + a) \\ \cot.a &= \cot.(n\pi + a) \\ \sec.a &= \sec.(2n\pi \pm a) \\ \mathrm{cosec}.a &= \mathrm{cosec}.(2n\pi + a) = \mathrm{cosec}.\{2n+1)\pi - a\} \end{aligned}\right\} . \quad (37)$$

waarin voor n elk *positief* of *negatief* geheel getal kan genomen worden.

24. Ziehier eenige opgaven ter oefening.

Men passe de formules (33), (34), (35) en (36) toe op elk van de volgende goniometrische betrekkingen:

1°. Op sin.72°; sin. 230°; cos.25°; cos. 105°.

2°. Op tg.34°; tg. 200°; cot.32°; cot. 305°.

3°. Op sec.50°; sec. 110°; cosec.20°; cosec. 210°.

4°. Breng terug tot goniometrische betrekkingen van bogen in het eerste kwadrant:

sin. 160°;	cos. 130°.
sin. 230°;	cos. 200°.
sin. 320°;	cos. 310°.
sin. 380°;	cos. 370°.

5°. Insgelijks:

tg. 140°:	cot. 110°.
tg. 220°;	cot. 260°.
tg. 330°;	cot. 350°.
tg. 400°;	cot. 410°.

6°. Nog

sec. 125°;	cosec. 175°.
sec. 215°;	cosec. 195°.
sec. 305°;	cosec. 325°.
sec. 365°;	cosec. 425°.

7°. Vindt de formules sin. (a — b) en sin. (a + b) uit die voor cos (a — b) en cos. (a + b) door toepassing van form. (33).

25. Met weinig moeite kan men nu door onderlinge verbinding van de formules (29), (30), (31) en (32) een tal van nieuwe formules vinden. Wij zullen ons echter beperken tot de onmisbaarste en meest gebruikelijke, het aan den leerling overlatende dit getal te vermeerderen.

Men telle de form. (30) en (29) op en trekke ze ook van elkander af, en doe zulks eveneens met de formules (31) en (32) dan komt er:

$$\sin.(a+b)+\sin.(a-b)=2\sin.a\,\cos.b.$$
$$\sin.(a+b)-\sin.(a-b)=2\cos.a\,\sin.b.$$
$$\cos.(a-b)+\cos.(a+b)=2\cos.a\,\cos.b.$$
$$\cos.(a-b)-\cos.(a+b)=2\sin.a\,\sin.b.$$

en stelle hierin $a+b=p$ en $a-b=q$, waardoor $a=\frac{1}{2}(p+q)$ en $b=\frac{1}{2}(p-q)$ wordt, dan heeft men:

$$\sin.p+\sin.q=2\sin.\tfrac{1}{2}(p+q)\,\cos.\tfrac{1}{2}(p-q)\;..\;(38)$$
$$\sin.p-\sin.q=2\sin.\tfrac{1}{2}(p-q)\,\cos.\tfrac{1}{2}(p+q)\;..\;(39)$$
$$\cos.p+\cos.q=2\cos.\tfrac{1}{2}(p+q)\,\cos.\tfrac{1}{2}(p-q)\;..\;(40)$$
$$\cos.q-\cos.p=2\sin.\tfrac{1}{2}(p+q)\,\sin.\tfrac{1}{2}(p-q)\;..\;(41)$$

Deelt men form. (29) door (30) en (31) door (32), dan heeft men:

$$\frac{\sin.(a-b)}{\sin.(a+b)}=\frac{\sin.a\,\cos.b-\cos.a\,\sin.b}{\sin.a\,\cos.b+\cos.a\,\sin.b}$$
$$\frac{\cos.(a-b)}{\cos.(a+b)}=\frac{\cos.a\,\cos.b+\sin.a\,\sin.b}{\cos.a\,\cos.b-\sin.a\,\sin.b}$$

en nu in beide vergelijkingen teller en noemer der tweede leden deelende door cos.a cos.b, vindt men met toepassing van form. (10) en (11)

$$\frac{\sin.(a-b)}{\sin.(a+b)}=\frac{tg.a-tg.b}{tg.a+tg.b}=\frac{\cot.b-\cot.a}{\cot.b+\cot.a}\;..\;(42)$$
$$\frac{\cos.(a-b)}{\cos.(a+b)}=\frac{1+tg.a\,tg.b}{1-tg.a\,tg.b}=\frac{\cot.a\,\cot.b+1}{\cot.a\,\cot.b-1}\;..\;(43)$$

Deelende (39) door (38) en (41) door (40), dan heeft men:

$$\frac{\sin.p-\sin.q}{\sin.p+\sin.q}=\frac{\sin.\frac{1}{2}(p-q)\,\cos.\frac{1}{2}(p+q)}{\cos.\frac{1}{2}(p-q)\,\sin.\frac{1}{2}(p+q)}$$
$$\frac{\cos.q-\cos.p}{\cos.q+\cos.p}=\frac{\sin.\frac{1}{2}(p+q)\,\sin.\frac{1}{2}(p-q)}{\cos.\frac{1}{2}(p+q)\,\cos.\frac{1}{2}(p-q)}$$

en daar $\frac{\sin.a}{\cos.a} = tg.a$ en $\frac{\cos.a}{\sin.a} = \cot.a = \frac{1}{tg.a}$ is, veranderen de beide laatste formules met toepassing van form. (10) en (11) in:

$$\frac{\sin.p - \sin.q}{\sin.p + \sin.q} = \frac{tg.\frac{1}{2}(p-q)}{tg.\frac{1}{2}(p+q)} = \frac{\cot.\frac{1}{2}(p+q)}{\cot.\frac{1}{2}(p-q)} \quad (44)$$

$$\frac{\cos.q - \cos.p}{\cos.q + \cos.p} = tg.\tfrac{1}{2}(p-q)\ tg.\tfrac{1}{2}(p+q) =$$
$$\frac{1}{\cot.\frac{1}{2}(p-q)\ \cot.\frac{1}{2}(p+q)} \quad \ldots\ldots \quad (45)$$

Deelt men sin. (a $\pm$ b) door cos. (a $\pm$ b), dan komt er:

$$\frac{\sin.(a \pm b)}{\cos.(a \pm b)} = \frac{\sin.a\ \cos.b \pm \cos.a\ \sin.b}{\cos.a\ \cos.b \mp \sin.a\ \sin.b},$$

waaruit, na teller en noemer door cos.a cos.b gedeeld te hebben en met toepassing van form. (10) en (11)

$$tg.(a \pm b) = \frac{tg.a \pm tg.b}{1 \mp tg.a\ tg.b} = \frac{\cot.b \pm \cot.a}{\cot.a\ \cot.b \mp 1} \quad (46)$$

en omdat $\cot.a = \frac{1}{tg.a}$ is, heeft men uit de laatste door deze op $1 = 1$ te deelen

$$\cot.(a \pm b) = \frac{1 \mp tg.a\ tg.b}{tg.a \pm tg.b} = \frac{\cot.a\ \cot.b \mp 1}{\cot.b \pm \cot.a} \quad (47)$$

Stelt men in de form. (30), (32), (46) en (47), in de beide laatste echter alleen voor het bovenste teeken, a = b, dan bekomt men:

$$\sin.2a = 2\sin.a\ \cos.a \quad \ldots\ldots \quad (48)$$
$$\cos.2a = \cos.^2a - \sin.^2a \quad \ldots\ldots \quad (49)$$
$$tg.2a = \frac{2tg.a}{1 - tg.^2a} = \frac{2\cot.a}{\cot.^2a - 1} \quad \ldots \quad (50)$$
$$\cot.2a = \frac{1 - tg.^2a}{2tg.a} = \frac{\cot.^2a - 1}{2\cot.a} \quad \ldots \quad (51)$$

Uit $\cos.2a = \cos.^2a - \sin.^2a$ heeft men, door volgens form. (1) $\cos.^2a = 1 - \sin.^2a$ of $\sin.^2a = 1 - \cos.^2a$ te substitueeren:

$$\cos.2a = 1 - 2\sin.^2a \quad \ldots\ldots \quad (52)$$
en $$\cos.2a = 2\cos.^2a - 1 \quad \ldots\ldots \quad (53)$$

waaruit: $$\sin.a = \sqrt{\frac{1 - \cos.2a}{2}} \quad \ldots\ldots \quad (54)$$

$$\cos.a = \sqrt{\frac{1 + \cos.2a}{2}} \quad \ldots\ldots \quad (65)$$

en hierin $2a = p$ stellende, waardoor $a = \frac{1}{2}p$ wordt, verkrijgen wij:

$$\sin.\tfrac{1}{2}p = \sqrt{\frac{1 - \cos.p}{2}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (56)$$

$$\cos.\tfrac{1}{2}p = \sqrt{\frac{1 + \cos.p}{2}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (57)$$

waaruit door deeling:

$$\text{tg}.\tfrac{1}{2}p = \sqrt{\frac{1 - \cos.p}{1 + \cos.p}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (58)$$

$$\cot.\tfrac{1}{2}p = \sqrt{\frac{1 + \cos.p}{1 - \cos.p}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (59)$$

Stelt men in (46) en (47) $b = 45°$, waardoor $\text{tg}.b = \cot.b = 1$ wordt, dan heeft men, in aanmerking nemende dat

$\text{tg}.a = \cot.\ (90° - a)$ en $\cot.a = \text{tg}.\ (90° - a)$ is:

$$\text{tg}.(a-45°) = \cot.(135°-a) = \frac{\text{tg}.a-1}{\text{tg}.a+1} = \frac{1-\cot.a}{1+\cot.a} \quad (60)$$

$$\text{tg}.(a+45°) = \cot.\ (45°-a) = \frac{1+\text{tg}.a}{1-\text{tg}.a} = \frac{\cot.a+1}{\cot.a-1} \quad (61)$$

$$\cot.(a-45°) = \text{tg}.(135°-a) = \frac{\text{tg}.a+1}{\text{tg}.a-1} = \frac{1+\cot.a}{1-\cot.a} \quad (62)$$

$$\cot.(a+45°) = \text{tg}.\ (45°-a) = \frac{1-\text{tg}.a}{1+\text{tg}.a} = \frac{\cot.a-1}{\cot.a+1} \quad (63)$$

26. Men leide nu de volgende formules af:

1°. $\text{tg}.\frac{1}{2}a = \dfrac{\sin.a}{1 + \cos.a} = \dfrac{1 - \cos.a}{\sin.a}.$

$\text{cosec}.a - \cot.a = \text{tg}.\frac{1}{2}a.$

$\text{cosec}.a + \cot.a = \cot.\frac{1}{2}a.$

$\sec.a - 1 = \text{tg}.a\ \text{tg}.\frac{1}{2}a.$

$\sec.a + 1 = \text{tg}.a\ \cot.\frac{1}{2}a.$

$\text{tg}.\frac{1}{2}a + \cot.\frac{1}{2}a = 2\text{cosec}.a.$

$\cot.\frac{1}{2}a - \text{tg}.\frac{1}{2}a = 2\cot.a.$

$\dfrac{1 - \text{tg}.^2a}{1 + \text{tg}.^2a} = \cos.2a.$

2°. $\sin.(45° + b) = \cos.(45° - b) = \frac{1}{2}(\cos.b + \sin.b)\sqrt{2}.$

$\cos.(45° + b) = \sin.(45° - b) = \frac{1}{2}(\cos.b - \sin.b)\sqrt{2}.$

$1 - \sin.a = 2\sin.^2(45° - \frac{1}{2}a) = 2\cos.^2(45° + \frac{1}{2}a).$

$1 + \sin.a = 2\cos.^2(45° - \frac{1}{2}a) = 2\sin.^2(45° + \frac{1}{2}a).$

$\dfrac{1 - \sin.a}{1 + \sin.a} = \text{tg}.^2(45° - \frac{1}{2}a) = \cot.^2(45° + \frac{1}{2}a).$

3°. $\cot.(45° - \frac{1}{2}a) - tg.(45° - \frac{1}{2}a) = 2tg.a.$

$tg.(45° - \frac{1}{2}a) + \cot.(45° - \frac{1}{2}a) = 2\sec.a.$

4°. $\sin.^2 p - \sin.^2 q = \sin.(p+q)\sin.(p-q) = \cos.^2 q - \cos.^2 p.$

$\cos.^2 q - \sin.^2 p = \cos.(p+q)\cos.(p-q) = \cos.^2 p - \sin.^2 q.$

$\sin.(45° + a) + \sin.(45° - a) = \cos.a\sqrt{2}.$

$\sin.(45° + a) - \sin.(45° - a) = \sin.a\sqrt{2}.$

$\sin.(30° + a) + \sin.(30° - a) = \cos.a.$

$\cos.(30° - a) - \cos.(30° + a) = \sin.a.$

$\frac{1}{2}\sqrt{(1 + \sin.a)} - \frac{1}{2}\sqrt{(1 - \sin.a)} = \sin.\frac{1}{2}a.$

$\frac{1}{2}\sqrt{(1 + \sin.a)} + \frac{1}{2}\sqrt{(1 - \sin.a)} = \cos.\frac{1}{2}a.$

5°. Hoe vindt men uit de beide laatsten

$\sin.\frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1 - \cos.a}{2}}$ $\cos.\frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1 + \cos.a}{2}}$?

6°. Hoe vindt men:

$\sin.a = 2\sin.\frac{1}{2}a\cos.\frac{1}{2}a = 2^2\sin.\frac{1}{4}a\cos.\frac{1}{4}a\cos.\frac{1}{2}a =$

$2^3\sin.\frac{1}{8}a\cos.\frac{1}{8}a\cos.\frac{1}{4}a\cos.\frac{1}{2}a =$

$2^4\sin.\frac{1}{16}a\cos.\frac{1}{16}a\cos.\frac{1}{8}a\cos.\frac{1}{4}a\cos.\frac{1}{2}a$?

7°. Hoe vindt men:

$\sin.a = 2^n\cos.\frac{1}{2}a\cos.\frac{1}{4}a\cos.\frac{1}{8}a\cos.\frac{1}{16}a......\cos\frac{1}{2^n}.a\ \sin\frac{1}{2^n}.a$?

Aanm.) Als n in deze formule zeer groot is, dan kan men voor

$2^n\sin.\frac{1}{2^n}a$ schrijven a, en dan is:

$a = \sin.a\sec.\frac{1}{2}a\sec.\frac{1}{4}a\sec.\frac{1}{8}a\sec.\frac{1}{16}a......$enz.

waaruit voor $a = 90° = \frac{1}{2}\pi$.

$\frac{1}{2}\pi = \sec.\frac{1}{4}\pi\sec.\frac{1}{8}\pi\sec.\frac{1}{16}\pi......$enz.

8°. Hoe leidt gij de volgende formules af?

$$\sin.(a+b+c) = \left\{\begin{array}{r}\sin.a\cos.b\cos.c\\ +\sin.b\cos.a\cos.c\\ +\sin.c\cos.a\cos.b\end{array}\right\} - \sin.a\sin.b\sin.c.$$

$$\sin.(a+b+c) = \left\{\begin{array}{r}\sin.a\cos.(b+c)\\ +\sin.b\cos.(a+c)\\ +\sin.c\cos.(a+b)\end{array}\right\} + 2\sin.a\sin.b\sin.c.$$

$$\cos.(a+b+c) = \cos.a\cos.b\cos.c - \left\{\begin{array}{r}\cos.a\sin.b\sin.c\\ +\cos.b\sin.a\sin.c\\ +\cos.c\sin.a\sin.b\end{array}\right\}.$$

$$\cos.(a+b+c) = \left\{\begin{array}{r}\cos.c\cos.(a+b)\\ +\cos.b\cos.(a+c)\\ +\cos.a\cos.(b+c)\end{array}\right\} - 2\cos.a\cos.b\cos.c.$$

9°. Leidt af de formules:

$\sin.3a = 3\sin.a - 4\sin.^3a.$

$\cos.3a = 4\cos.^3a - 3\cos.a.$

$\sin.5a = 5\sin.a - 20\sin.^3a + 16\sin.^5a.$

10°. Als $a + b + c = 90°$ is, dan is:

$1 - \sin.^2a - \sin.^2b - \sin.^2c = 2\sin.a \sin.b \sin.c.$

$\sin.2a + \sin.2b + \sin.2c = 4 \cos.a \cos.b \cos.c.$

voor $a + b + c = 180°$ is:

$\sin.2a + \sin.2b + \sin.2c = 4\sin.a \sin.b \sin.c.$

$\sin.^2c - \sin.^2b - \sin.^2a + 2\sin.a \sin.b \cos.c = 0.$

$\cos.^2a + \cos.^2b + \cos.^2c + 2\cos.a \cos.b \cos.c = 1.$

$\sin.a + \sin.b + \sin.c = 4\cos.\tfrac{1}{2}a \cos.\tfrac{1}{2}b \cos.\tfrac{1}{2}c.$

$tg.a + tg.b + tg.c = tg.a\ tg.b\ tg.c.$

$\cot.a \cot.b + \cot.a \cot.c + \cot.b \cot.c = 1.$

voor $a + b + c = 360°$ is:

$\cos.^2a + \cos.^2b + \cos.^2c - 1 = 2\cos.a \cos.b \cos.c.$

$tg.a + tg.b + tg.c = tg.a\ tg.b\ tg.c.$

$1 - tg.a\ tg.b - tg.b\ tg.c - tg.a\ tg.c = \sec.a \sec.b \sec.c.$

Op welke wijze kunnen deze formules gevonden worden?

11°. Af te leiden de formules:

$$\frac{2tg.a}{1 + tg.^2a} = \sin.2a.$$

$$\frac{1 - tg.^2a}{1 + tg.^2a} = \cos.2a.$$

$tg.a + \cot.a = 2\mathrm{cosec}.2a.$

$\cot.a - tg.a = 2\cot.a.$

$$tg.(a + b + c) = \frac{tg.a + tg.b + tg.c - tg.a\ tg.b\ tg.c}{1 - tg.a\ tg.b - tg.a\ tg.c - tg.b\ tg.c}.$$

---

§ 5.

Verhoudingen tusschen bogen, die door goniometrische betrekkingen gegeven zijn.

27. Wanneer $\sin.x = a$ is, dan is x de boog, welks sinus a is, hetgeen men uitdrukt door de vergelijking

$$x = Bg\ (\sin. = a).$$

Evenzoo beteekenen de vergelijkingen

$$y = Bg\ (\cos. = b)$$
$$z = Bg\ (tg. = c)$$

y is de boog waarvan de cosinus b is; z is de boog welks tangens c is, waaruit dus volgt:

$$\cos.y = b.$$
$$tg.z = c.$$

Is $\sin.a = x$, dan is $\cos.a = \sqrt{(1 - x^2)}$; $tg.a = \dfrac{x}{\sqrt{(1-x^2)}}$; $\cot.a = \dfrac{\sqrt{(1 - x^2)}}{x}$; $\sec.a = \dfrac{1}{\sqrt{(1 - x^2)}}$; $\operatorname{cosec}.a = \dfrac{1}{x}$; en hieruit heeft men dan:

$$a = Bg.(\sin. = x) = Bg(\cos. = \sqrt{(1-x^2)}) = Bg\left(tg. = \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)}}\right) =$$
$$= Bg.\left(\cot. = \frac{\sqrt{(1-x^2)}}{x}\right) = Bg.\left(\sec. = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}\right) = Bg.\left(\operatorname{cosec}. = \frac{1}{x}\right).$$

Door deze schrijfwijze kan men uit de gevonden formules vele verbindingen afleiden tusschen twee en meer bogen, die door goniometrische betrekkingen gegeven zijn. Daardoor ontstaan derhalve een reeks formules, die in zekeren zin het omgekeerde zijn van de boven gevondene.

Een paar voorbeelden zullen voldoende zijn om den weg aan te wijzen, dien men bij de ontwikkeling te volgen hebbe.

28. Stel dat twee bogen bepaald zijn door hun tangenten, dat men dus heeft $tg.x = a$ en $tg.y = b$, en dat gevraagd wordt de som en het verschil dezer bogen door de gegevens te berekenen, dan kan men op de volgende wijze te werk gaan.

Men neme een formule, waarin de som en het verschil van twee bogen voorkomen, in dit geval bij voorkeur form. (46)

$$tg.\ (x \pm y) = \frac{tg.x \pm tg.y}{1 \mp tg.x\ tg.y},$$

dan volgt daaruit volgens de aangenomen schrijfwijze

$$x \pm y = Bg\left(tg. = \frac{tg.x \pm tg.y}{1 \mp tg.x\ tg.y}\right)$$

en daar $tg.x = a$ en $tg.y = b$ is, heeft men $x = Bg\ (tg. = a)$ en $y = Bg\ (tg. = b)$, waardoor de laatste vergelijking overgaat in:

$$Bg\ (tg. = a) \pm Bg\ (tg. = b) = Bg\left(tg. = \frac{a \pm b}{1 \mp a\ b}\right)$$

en hierdoor is aan het gevraagde voldaan.

Stelt men $a = b$, dan vindt men nog:

$$2\text{Bg}\ (\text{tg.} = a) = \text{Bg.}\left(\text{tg.} = \frac{2a}{1 - a^2}\right)$$

waardoor de dubbele boog bekend wordt uit den tangens van den enkelen boog.

Als tweede voorbeeld zij gegeven $\sec.x = a$ en $\text{tg}.y = b$, waaruit men de som en het verschil der bogen wenscht te bepalen. Er is nu geen formule, waarin de beide gegevens te gelijk voorkomen; met eenige meerdere herleidingen zal men echter aan het gevraagde kunnen voldoen.

Men neme bijv. de formule

$$\sin.\ (x \pm y) = \sin.x \cos.y \pm \cos.x \sin.y,$$

waaruit:

$$x \pm y = \text{Bg}\ \{\sin. = (\sin.x \cos.y \pm \cos.x \sin.y)\}$$

Daar nu $\sec.x = a$ is, vindt men uit form. (16) $\cos.x = \frac{1}{a}$ en uit form. (1) $\sin.x = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{a^2}\right)} = \frac{\sqrt{(a^2 - 1)}}{a}$. Evenzoo vindt men uit $\text{tg}.y = b$ door form. (4), $\sec.y = \sqrt{(1 + b^2)}$ en hieruit door form. (16) en (1) $\cos.y = \frac{1}{\sqrt{(1 + b^2)}}$ en $\sin.y = \frac{b}{\sqrt{(1 + b^2)}}$. Men heeft dus:

$$\text{Bg}(\sec. = a) \pm \text{Bg}(\text{tg}. = b) = \text{Bg}\left\{\sin. = \left(\frac{\sqrt{(a^2-1)}}{a\sqrt{(b^2+1)}} \pm \frac{b}{a\sqrt{(b^2+1)}}\right)\right\}$$

of:

$$\text{Bg}\ (\sec. = a) \pm \text{Bg}\ (\text{tg}. = b) = \text{Bg}\ \left(\sin. = \frac{\sqrt{(a^2 - 1)} \pm b}{a\sqrt{(b^2 + 1)}}\right)$$

Men zou deze uitkomst echter spoediger verkregen hebben door de formule

$$\text{tg}.\ (x \pm y) = \frac{\text{tg}.x \pm \text{tg}.y}{1 \mp \text{tg}.x\ \text{tg}.y},$$

waaruit:

$$x \pm y = \text{Bg}\ \left(\text{tg}. = \frac{\text{tg}.x \pm \text{tg}.y}{1 \mp \text{tg}.x\ \text{tg}.y}\right).$$

Nu is uit $\sec.x = a$, volgens form. (5) $\text{tg}.x = \sqrt{(a^2 - 1)}$ en dus:

$$\text{Bg}.\ (\sec. = a) \pm \text{Bg}\ (\text{tg}. = b) = \text{Bg}\left(\text{tg}. = \frac{\sqrt{(a^2 - 1)} \pm b}{1 \mp b\sqrt{(a^2 - 1)}}\right).$$

29. Ter oefening dienen de volgende opgaven:

1°. Als $\cos.a = x$ is, bepaal dan den boog a door middel van al de goniometrische betrekkingen.

2°. Insgelijks als $tg.a = x$ is.

3°. Ook als $sec.a = x$ is.

4°. Als $cosec.x = a$ en $cosec.y = b$ is, vraagt men de som en het verschil dezer bogen, alsmede de dubbele bogen te bepalen.

5°. De waarde van x te vinden uit de vergelijkingen:

$$Bg\ (tg. = \tfrac{2}{3}) - Bg\ (tg. = \tfrac{1}{5}) = Bg\ (tg. = x).$$
$$2Bg\ (tg. = \tfrac{1}{3}) + Bg\ (tg. = \tfrac{1}{7}) = Bg\ (tg. = x).$$
$$Bg\ (tg. = \tfrac{1}{7}) + Bg\ (tg. = \tfrac{3}{4}) = Bg\ (tg. = x).$$

6°. Los x op uit de vergelijking

$$Bg\ (tg. = (x + 1)) = 3bg\ (tg. = (x - 1)).$$

7°. Men vraagt x te vinden uit:

$$a.bg\left(\cos. = \frac{a - x}{2a}\right) - a.bg\left(\cos. = \frac{a + x}{2a}\right) = b.$$

8°. Insgelijks uit:

$$r.Bg\left(tg. = \frac{r - x}{r}\right) + r.Bg\left(tg. = \frac{r + x}{r}\right) - r.Bg\left(tg. = \frac{r^2}{x^2}\right) = b.$$

---

§ 6.

Samenstelling der sinustafels en gebruik der logarithmen-sinustafels.

30. Door sinustafels verstaat men de tafels, die de sinussen bevatten van alle bogen tusschen 0° en 90°, met opklimming van 1″, 10″ of 30″. Behalve de sinussen bevatten zij echter gewoonlijk ook de cosinussen, tangenten en cotangenten, en sommige, zoo als de zeevaartkundige tafels van Brouwer, zelfs de secanten en cosecanten; waarbij dan nog gevoegd zijn tafels van evenredige deelen voor de bogen, die niet onmiddelijk in de tafels te vinden zijn. Naarmate van den graad van nauwkeurigheid, die men bij de berekeningen noodig acht, zijn deze goniometrische betrekkingen in meer of minder decimalen uitgedrukt. Zoo heeft men de zoo-

genaamde kleine tafels met 4 of 5 decimalen; de tafels van BROUWER bevatten er 6, terwijl de grootere tafels er 7 of meer geven.

Daar echter de berekeningen met goniometrische betrekkingen over het algemeen in producten en quotienten bestaan, of gemakkelijk daartoe kunnen gebracht worden, heeft men in de zoogenaamde sinustafels niet de goniometrische betrekkingen zelve, maar hare logarithmen opgenomen, die met behulp der gewone logarithmentafels, of ook uit rechtstreeksche berekeningen door daartoe geschikte reeksen bepaald zijn.

Wij zullen thans in enkele woorden trachten aan te toonen, hoe men de goniometrische betrekkingen van alle bogen heeft kunnen vinden.

31. In de Algebra (zie VRIES, 2e deel § 307) wordt bewezen, dat

$$\sin. n\varphi = n \cos.^{n-1}\varphi \sin.\varphi - \frac{n(n-1)(n-3)}{2.3}\cos.^{n-3}\varphi \sin.^3\varphi +$$

is. Wanneer nu φ een zeer kleine boog, bijv. van 1″ is, dan heeft $\cos.\varphi$ en dus ook $\cos.^{n-1}\varphi$ een waarde, die zeer weinig van 1 verschilt, die er ten minste zoo weinig van verschilt, dat zulks geen invloed heeft op de eerste zes decimalen, terwijl $\sin.\varphi$ dan ook zoo weinig van φ en van 0 verschilt, dat men $\sin.\varphi$ gelijk φ en $\sin.^3\varphi$ gelijk 0 mag stellen. Men heeft dus door φ gelijk aan den boog van 1″, dat is gelijk $\frac{1}{180.60.60}\pi$ te nemen:

$$\sin. n'' = n \sin. 1'' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

Verder volgt uit:

$$tg.\varphi = \frac{\sin.\varphi}{\cos.\varphi} = \sin.\varphi \, (1 - \sin.^2\varphi)^{-\frac{1}{2}}.$$

of na ontwikkeling van het binomium:

$$tg.\varphi = \sin.\varphi + \tfrac{1}{2}\sin.^3\varphi + \ldots..$$

dat, indien φ zeer klein is, $\frac{1}{2}\sin.^3\varphi$ zoo klein zal zijn, dat zulks weder geen invloed op de zesde decimaal van $\sin.\varphi$ kan uitoefenen. Is bijv. $\varphi = bg. 5' = \frac{5}{180.60}\pi = 0{,}0014544...$, dan is de waarde van $\frac{1}{2}\sin.^3\varphi < 0{,}0000000015...$ en heeft dus hoogstens invloed op den achtsten of negenden decimaal.

Men mag dus voor bogen kleiner dan 5′ tot in 6 decimalen gerustelijk stellen:

$$tg.\varphi = \sin.\varphi.$$

Daar nu verder

$$\sin.\varphi < \varphi < \mathrm{tg}.\varphi$$

is, blijkt daaruit, dat voor dergelijke kleine bogen zooveel te meer

$$\sin.\varphi = \varphi$$

en dus $\sin.1'' = 1''$.

Men berekene dus de lengte van den boog van 1″ door de formule

$$\mathrm{bg}.\ 1'' = \frac{1}{180.60.60}\ \pi = 0{,}0000048481....$$

en vindt daaruit de sinussen van alle bogen van 1″ tot 5′ van seconde tot seconde, door de formule (a).

Door nu verder de formules

$$\sin.2a = 2\sin.a\ \cos.a$$

$$\cos.2a = 1 - 2\sin.^2a$$

of de meer algemeene

$$\sin.\ (a + b) = 2\ \sin.a\ \cos.b - \sin.\ (a - b)$$

$$\cos.\ (a + b) = 2\ \cos.a\ \cos.b - \cos.\ (a - b)$$

toe te passen, berekent men de sinussen en cosinussen van alle bogen tusschen 0° en 1°, met aangroeiing van zooveel seconden als men verkiest.

Verder weet men dat $\sin.45° = \cos.45° = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, en $\cos.60° = \sin.30° = \frac{1}{2}$ is. Door de formules

$$\sin.\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1 - \cos.a}{2}} \text{ en } \cos.\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1 + \cos.a}{2}}$$

kan men dan den sinus en cosinus van de bogen van 22°30′, 11°15′, 5°37′30″ enz. en van 15°, 7°30′, 3°45′, 1°52′30″ enz. berekenen.

De zijde van den ingeschreven regelmatigen vijfhoek onderspant een boog van 72°, en die van den tienhoek een boog van 36°. Volgens form. (19) is dus:

$$\sin.36° = \tfrac{1}{4}\sqrt{(10 - 2\sqrt{5})} \text{ en } \sin.18° = \tfrac{1}{4}(-1 + \sqrt{5}),$$

zoodat men door bovenstaande formules ook de sinussen en cosinussen van 9°, 4°30′, 2°15′ enz. kan vinden, waarna men verder door de formules (29) en (31) de sinus en cosinus van $6° = 15° - 9°$ en dus ook van 3° en 1°30′ kan vinden. Op deze wijze, of door de vier laatste formules uit vraagstuk 4 van 26 komt men tot den sinus en cosinus van alle bogen tusschen 0° en 45°, terwijl men voor de opklimming met kleine waarden, bijv. van 1′, gebruik kan maken van de benaderingsformules

$$\sin.(a^\circ + 1') = \sin.a + \cos.a \sin.1'$$
$$\cos.(a^\circ + 1') = \cos.a - \sin.a \sin.1',$$

waarin $\cos.1' = 1$ genomen is.

De formules (10), (11), (12) en (13) geven dan de overige goniometrische betrekkingen.

De goniometrische betrekkingen van de bogen van 45° tot 90° zijn door bovenstaande berekening van zelf bekend, ingevolge de formules (33) voor het onderste teeken.

32. De wijze, waarop de logarithmen van de verschillende goniometrische betrekkingen in de tafels gevonden worden, hangt natuurlijk geheel af van de inrichting dier tafels. Een verklaring van een dier tafels zou dus weinig nut hebben, en zullen wij dus hier niet geven, te meer daar elke tafel gewoonlijk zulk een verklaring bevat. Alleen zij, met het oog op de tafels van Brouwer, die bij de Marine in gebruik zijn, nog opgemerkt, dat deze de logarithmen bevatten van alle goniometrische betrekkingen, zoodanig dat de logarithmus van den sinus naast dien van den cosecans, van den tangens naast den cotangens en van den cosinus naast den secans staat. Deze schikking is gekozen met het oog op de berekeningen in de trigonometrie, die veelal bestaan in het zoeken van het product van twee getallen, dat door een derde getal moet gedeeld worden. Om dit door logarithmen uit te voeren, zou men de som moeten nemen van twee logarithmen en deze som verminderen met een derde logarithmus.

Nu is:

$$\sin.a = \frac{1}{\text{cosec.a}} \text{ en dus } \log.\sin.a = -\log.\text{cosec.a}.$$
$$\cos.a = \frac{1}{\sec.a} \quad " \quad \log.\cos.a = -\log.\sec.a.$$
$$\text{tg.a} = \frac{1}{\cot.a} \quad " \quad \log.\text{tg.a} = -\log.\cot.a.$$
$$\cot.a = \frac{1}{\text{tg.a}} \quad " \quad \log.\cot.a = -\log.\text{tg.a}.$$
$$\sec.a = \frac{1}{\cos.a} \quad " \quad \log.\sec.a = -\log.\cos.a.$$
$$\text{cosec.a} = \frac{1}{\sin.a} \quad " \quad \log.\text{cosec.a} = -\log.\sin.a.$$

Moet dus een van de logarithmen uit de eerste leden dezer vergelijkingen worden afgetrokken, dan kan men daarvoor den overeenkomstigen uit de tweede leden nemen; maar daar deze *negatief* moet genomen worden, verandert de aftrekking in een optelling en wordt dus de bewerking eenvoudiger.

Nog volgt uit deze vergelijkingen:

$$\log.\sin.a + \log.\text{cosec}.a = 0$$

enz.

De logarithmen van sinus en cosecans, tangens en cotangens, cosinus en secans staan dus tot elkander in dezelfde verhouding als een getal tot zijn *arithmetisch complement*. Zie VRIES, Algebra 2e deel, aant. 1).

33. Met behulp der logarithmen-sinustafels lost men de twee volgende vraagstukken op.

1°. Voor een gegeven boog den logarithmus van eenige goniometrische betrekking te vinden.

2°. Voor den logarithmus van een gegeven goniometrische betrekking den boog te vinden.

De volgende opgaven kunnen ter oefening dienen.

Zoek de logarithmen van de volgende goniometrische betrekkingen:

1°.	a = sin.87°44′23″	g = tg.54°38′21″
	b = cos.18°13′22″	h = cot.61°34′35″
	c = tg.89°54′36″	i = sin.6°3′17″
	d = cot.72°13′23″	k = cos.19°15′36″
	e = sin.36°15′42″	l = cot.43°21′10″
	f = cos.29°47′47″	m = tg.62°44′36″
2°.	a = sin.143°44′40″	g = tg.104°36′25″
	b = cos.109°15′33″	h = cot.117°25′33″
	c = tg.125°14′32″	i = sin.156°32′15″
	d = cot.120°46′13″	k = cos.108°13′25″
	e = sin.127°21′21″	l = tg.178°17′36″
	f = cos.95°15′43″	m = cot.163°24′24″
3°.	a = sin.189°25′31″	g = tg.243°52′
	b = cos.197°22′17″	h = cot.197°13′13″
	c = tg.263°19′25″	i = sin.206°15′43″
	d = cot.193°25′17″	k = cos.199°15′36″
	e = sin.259°36′	l = tg.219°41′32″
	f = cos.187°29′11″	m = cot.247°23′17″

4°. a = sin.92°15'37" g = tg.282°24'30"
b = cos.125°33'43" h = cot.93°32'35"
c = tg.0°36'15" i = sin.386°15'43"
d = cot.143°45' k = cos.305°33'43"
e = sin.36°17'40" l = tg.22°17'18"
f = cos.319°20'38" m = cot.268°20'45"

Zoek de bogen behoorende bij de volgende goniometrische betrekkingen:

5°. 8.921765	= log.sin.a	8.693542	= log.cos.g
9.163215	= log.cos.b	11.193254	= log.tg.h
11.198276	= log.tg.c	9.327815	= log.sin.i
8.376509	= log.cot.d	7.939210	= log.cos.k
9.217395	= log.sin.e	9.475936	= log.tg.l
10.932154	= log.tg.f	7.102465	= log.tg.m
6°. 9.631273(—)	= log.cos.a	10.976345(—)	= log.cot.g
10.021907(—)	= log.tg.b	8.697857(—)	= log.sin.h
11.193254(—)	= log.cot.c	8.387047(—)	= log.cos.i
7.321695(—)	= log.cos.d	9.216543(—)	= log.sin.k
9.456302(—)	= log.tg.e	10.123456(—)	= log.tg.l
8.312156(—)	= log.cot.f	10.193150(—)	= log.cot.m
7°. 8.793254	= log.cos.a	11.438204(—)	= log.cot.g
10.980021	= log.cot.b	11.543276	= log.tg.h
12.463218	= log.tg.c	9.943576(—)	= log.sin.i
8.637219	= log.cos.d	8.563219	= log.cos.k
9.219873(—)	= log.sin.e	9.488280	= log.sin.l
9.902143(—)	= log.cos.f	9.852260(—)	= log.cos.m

34. Het zal niet ondienstig zijn een voorbeeld te geven hoe men een berekening met logarithmen gewoonlijk inricht. Daartoe diene de berekening van φ uit

$$\sin.\varphi = \frac{\sin.\alpha}{\cos.\beta}\sqrt{\frac{(a - b)\ \sin.(\alpha + \beta)\ \cos.2\alpha}{(a + b)\ \mathrm{tg}.(2\alpha - \beta)\ \mathrm{cosec}.\tfrac{1}{2}\beta}},$$

waarin $a = 76.3457$, $b = 62.1594$, $\alpha = 56°15'37''$, $\beta = 14°39'25''$ is.

De bewerking komt aldus te staan:

$a = 76.3457$	$\alpha = 56°15'37''$	$2\alpha = 112°31'14''$
$b = 62.1594$	$\beta = 14°39'25''$	$\beta = 14°39'25''$
$a + b = 138.5051$	$\alpha + \beta = 70°55'2''$	$2\alpha - \beta = 99°51'49''$
$a - b = 14.1863$	$\tfrac{1}{2}\beta = 7°19'42''.5$	

$$
\begin{aligned}
\log.\,(a-b) &= 1.151869\\
\log.\sin.(\alpha+\beta) &= 9.975453\\
\log.\cos.2\alpha &= 9.583216(-)\\
a.c.\log.\,(a+b) &= 7.858534\\
a.c.\log.tg.(2\alpha-\beta) &= 9{,}240234(-)\\
a.c.\log.\mathrm{cosec}.\tfrac{1}{2}\beta &= 9.105706\\
\hline
&\ 6.915012\\
&\ 2\\
\hline
&\ 8.457506\\
\log.\sin.\alpha &= 9.919899\\
a.c.\log.\cos.\beta &= 10.014368\\
\hline
\log.\sin.\varphi &= 8.391773\\
\varphi &= 1^\circ 24'44'' \text{ of } 178^\circ 35'16''.
\end{aligned}
$$

Op dezelfde wijze berekene men de onbekende uit de volgende opgaven:

8°. $tg.\varphi=\dfrac{\sin.a\cos.b}{\sin.(a-b)\cos.(a+b)}$ als $a=127^\circ 15'33''$ en $b=19^\circ 25'13''$ is.

9°. $tg.\varphi=\dfrac{tg.(a-b)\cot.(2a-b)}{\sin.(2a+b)}$ als $a=56^\circ 19'34''$ en $b=76^\circ 32'56''$ is.

10°. $\cot.\varphi=\dfrac{\sin.(a+b)\cos.(2a+b)}{tg.(3a-b)\cot.(a-2b)}$ als $a=67^\circ 15'39''$ en $b=13^\circ 24'25''$ is.

11°. $\sin.\varphi=\dfrac{(a^3-b^3)\sin.(p-q)tg.(p+q)}{(a+b)\cos.(2p+q)\cot.(2p-q)}$ als $a=0.64321$, $b=0{,}59027$, $p=126^\circ 15'34''$ en $q=97^\circ 7'52''$ is.

12°. $\sin.\varphi=a\sqrt{\dfrac{a.\sin.(x+y-p)\cos.(x-2y+p)}{b.tg.(2x-y+p)\sin.(x-y+3p)}}$ als $a=0.25734$, $b=6.19035$, $x=125^\circ 15'25''$, $y=36^\circ 27'39''$ en $p=212^\circ 36'$ is.

13°. $\sin.\varphi=\sqrt[3]{\dfrac{(a^2-b^2)\sin.(2p-q)\cot.(p+q)}{(a^2+b^2)\cos.(2p+q)tg.(p-2q)}}$ als $a=0.21965$, $b=0.37654$, $\log.tg.p=10.769325$ en $\log.\sin.q=9.021369$ is.

14°. $tg.\varphi=\dfrac{2\sin.(a+b)}{3\cos.(a-b)}\sqrt[3]{\dfrac{(p^2-q^2)\,tg.(2a-b)\sin.(a+2b)}{(p^2+q^2)\cos.(2a+b)\cos.(a-2b)}}$ als $p=1.20675$, $q=1.49832$, $a=125^\circ 14'36''$ en $b=176^\circ 25'7''$ is.

15°. $\sin.\varphi=a^2\sqrt[3]{\dfrac{(a^2+b^2)\,tg.(2p+q)\sin.(p+2p)}{(a^3-b^3)\sin.(2q-p)\cos.(p-q)}}$ als $a=0.021367$, $b=0.060475$, $\log.\cos.p=9.963917(-)$ en $q=83^\circ 17'43''$ is.

§ 7.

Oplossing van goniometrische vergelijkingen en het geschikt maken van stelkunstige vormen voor berekening door logarithmen.

35. Bij het toepassen der algebra op meetkunstige vraagstukken, waarin hoeken als onbekenden voorkomen, komt men gewoonlijk tot eindvergelijkingen, waaruit men die onbekenden, door middel der goniometrische betrekkingen moet oplossen, terwijl dan gewoonlijk de verkregen waarde nog voor berekening met logarithmen geschikt moet gemaakt worden. Dit laatste kan met behulp der bekende goniometrische formules, soms echter eerst door het invoeren van hulpbogen, altijd geschieden.

Wij zullen voor beide bewerkingen, door eenige voorbeelden den weg trachten aan te wijzen.

Voorbeeld 1. φ op te lossen uit de vergelijking:

$$\cos\varphi \sin.\alpha - \sin.\varphi \cos.\beta = \cos.\varphi \sin.(\alpha + \beta) + 2\cos.\varphi.$$

Men deele de vergelijking door $\cos.\varphi$, dan komt er:

$$\sin.\alpha - \cos.\beta \operatorname{tg}.\varphi = \sin.(\alpha + \beta) + 2$$

en hieruit:
$$\operatorname{tg}.\varphi = \frac{\sin.\alpha - \sin.(\alpha + \beta) - 2}{\cos.\beta},$$

derhalve:
$$\varphi = \operatorname{Bg}\left(\operatorname{tg}. = \frac{\sin.\alpha - \sin.(\alpha+\beta) - 2}{\cos\beta}\right),$$

waardoor φ bekend is, terwijl de overige waarden van φ, volgens form. (37), begrepen zijn in $n\pi + \varphi$.

Zijn echter α en β in graden gegeven, dan kan men ook φ in graden bepalen uit:

$$\log.\operatorname{tg}.\varphi = \log.\{\sin.\alpha - \sin.(\alpha + \beta) - 2\} - \log.\cos.\beta,$$

maar dan kan de logarithmus van den teller moeilijk bepaald worden, omdat hij, als een drietermige vorm, niet voor logarithmische berekening geschikt is.

Om den teller dus logarithmisch te maken, merke men op dat de beide eerste termen het verschil zijn van de sinussen van twee bogen, waarop men form. (39) kan toepassen en waardoor hij dan overgaat in:

$$2\sin.(-\tfrac{1}{2}\beta)\cos.(\alpha + \tfrac{1}{2}\beta) - 2 = -2\{1 + \sin.\tfrac{1}{2}\beta \cos.(\alpha + \tfrac{1}{2}\beta\}.$$

Daar nu $\sin.\frac{1}{2}\beta \cos.(\alpha + \frac{1}{2}\beta)$ altijd kleiner dan 1 is, kan men deze waarde beschouwen als den sinus of cosinus van eenigen boog δ en dus stellen:

$$\sin.\tfrac{1}{2}\beta\cos.(\alpha+\tfrac{1}{2}\beta)=\cos.\delta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

en daar nu, form. (57)

$$1+\cos.\delta = 2\cos.^2\tfrac{1}{2}\delta$$

is, zoo wordt

$$\mathrm{tg}.\varphi = -\frac{4\cos.^2\tfrac{1}{2}\delta}{\cos.\beta},$$

waarin δ bekend is uit vergelijking (a).

Had men $\sin.\tfrac{1}{2}\beta\cos.(\alpha+\tfrac{1}{2}\beta)=\sin.\delta$ gesteld, dan zou men $1+\sin.\delta$ verkregen hebben, en om dezen vorm logarithmisch te maken, zou men voor 1 kunnen schrijven $\sin.90°$ en dan wordt, met toepassing van form. (38)

$$1+\sin.\delta=\sin.90°+\sin.\delta=2\sin.(45°+\tfrac{1}{2}\delta)(\cos.(45°-\tfrac{1}{2}\delta);$$

daar echter $45°-\tfrac{1}{2}\delta$ het complement is van $45°+\tfrac{1}{2}\delta$, heeft men

$$1+\sin.\delta = 2\sin.^2(45°+\tfrac{1}{2}\delta)=2\cos.^2(45°-\tfrac{1}{2}\delta).$$

Het gebruik van hulpbogen δ is van uitgebreide toepassing bij het logarithmisch maken van goniometrische of algebraïsche vormen. Welke betrekking men gebruiken mag hangt natuurlijk af van de waarde van den vorm. Is die waarde geheel onbepaald, zoodat het niet mogelijk is te beoordeelen of zij kleiner of grooter dan 1 is, dan stelt men daarvoor $\mathrm{tg}.\delta$ of $\cot.\delta$, of ook wel $\mathrm{tg}.^2\delta$ of $\cot.^2\delta$, daar de tangens van een boog alle waarden tusschen $+\infty$ en $-\infty$ kan hebben. In ons geval hadden wij dus $\mathrm{tg}.^2\delta$ kunnen stellen en hadden dan verkregen:

$$1+\mathrm{tg}.^2\delta=\sec.^2\delta.$$

Voorbeeld 2. De waarde van φ te berekenen uit:

$$a.\sin.\varphi + b.\cos.\varphi = c.$$

Men heeft: $\quad b.\cos.\varphi = c - a.\sin.\varphi$

of $\quad b\sqrt{(1-\sin.^2\varphi)} = c - a.\sin.\varphi;$

brengt men nu de vergelijking in het vierkant, dan komt er:

$$b^2(1-\sin.^2\varphi)=c^2-2ac\sin.\varphi+a^2\sin.^2\varphi$$

en hieruit:

$$(a^2+b^2)\sin.^2\varphi-2ac\sin.\varphi-(b^2-c^2)=0,$$

zoodat φ door middel van een vierkantsvergelijking zou gevonden worden, en wel door een vorm die niet voor logarithmische berekening geschikt is.

Wij zullen hierop later terugkomen.

Men kan de oplossing van bovenstaande vergelijking echter zoo inrichten, dat men tot geen vierkantsvergelijking komt. Men deele daartoe door a, dan heeft men:

$$\sin.\varphi + \frac{b}{a}\cos.\varphi = \frac{c}{a}.$$

Dewijl de waarde van $\frac{b}{a}$ op geenerlei wijze bepaald is, stelle men $\frac{b}{a} = \operatorname{tg}.\alpha = \frac{\sin.\alpha}{\cos.\alpha}$, dan komt er:

$$\sin.\varphi + \frac{\sin.\alpha}{\cos.\alpha}\cos.\varphi = \frac{c}{a}$$

en na verdrijving der breuk

$$\sin.\varphi\cos.\alpha + \cos.\varphi\sin.\alpha = \frac{c}{a}\cos.\alpha,$$

dat is:

$$\sin.(\varphi + \alpha) = \frac{c}{a}\cos.\alpha,$$

waaruit door logarithmen $\varphi + \alpha$ en dus φ kan worden bepaald. Men vindt dan voor φ twee waarden, φ en $180° - \varphi$, terwijl de overige waarden begrepen zijn in de vormen $2n\pi + \varphi$ en $(2n+1)\pi - \varphi$.

Tot de bestaanbaarheid wordt gevorderd

$$\frac{c}{a}\cos.\alpha < 1,$$

$$\text{dus} \quad c.\cos.\alpha < a.$$

Had men $\frac{b}{a} = \cot.\alpha = \frac{\cos.\alpha}{\sin.\alpha}$ gesteld, dan zou men hebben gevonden:

$$\cos.(\varphi - \alpha) = \frac{c}{a}\sin.\alpha.$$

Voorbeeld 3. Uit de vergelijking

$$\frac{\sin.(\alpha + \varphi)}{\sin.\varphi} + \frac{\cos.\varphi}{\sin.(\alpha - \varphi)} = 1$$

φ op te lossen.

Men verdrijve de breuken en heeft dan na vermenigvuldiging met 2:

$$2\sin.(\alpha + \varphi)\sin.(\alpha - \varphi) + 2\sin.\varphi\cos.\varphi = 2\sin.\varphi\sin.(\alpha - \varphi),$$

dat is, na toepassing van de form. (41) en (48),

$$\begin{aligned}\cos.2\varphi - \cos.2\alpha + \sin.2\varphi &= \cos.(\alpha - 2\varphi) - \cos.\alpha \\ &= \cos.\alpha\cos.2\varphi + \sin.\alpha\sin.2\varphi - \cos\alpha,\end{aligned}$$

waaruit:

$1 - \cos.\alpha) \cos.2\varphi + (1 - \sin.\alpha) \sin.2\varphi = \cos.2\alpha - \cos.\alpha.$

Volgens form. (53) is $\cos.2\alpha = 2\cos.^2\alpha - 1$,
dus $\cos.2\alpha - \cos.\alpha = 2\cos.^2\alpha - \cos.\alpha - 1 = (2\cos.\alpha + 1)(\cos.\alpha - 1)$,
derhalve:

$$(1 - \cos.\alpha) \cos.2\varphi + (1 - \sin.\alpha) \sin.2\varphi = (2\cos.\alpha + 1)(\cos.\alpha - 1),$$

of na deeling door $1 - \cos.\alpha$

$$\cos.2\varphi + \frac{1 - \sin.\alpha}{1 - \cos.\alpha} \sin.2\varphi = -(2\cos.\alpha + 1).$$

Stellende nu $\frac{1 - \sin.\alpha}{1 - \cos.\alpha} = \text{tg}.\delta = \frac{\sin.\delta}{\cos.\delta}$, dan komt er:

$$\cos.(2\varphi - \delta) = -(1 + 2\cos.\alpha) \cos.\delta.$$

Ter bepaling van den hulpboog δ moet $\frac{1 - \sin.\alpha}{1 - \cos.\alpha}$ logarithmisch gemaakt worden. Daartoe heeft men:

$$\frac{1 - \sin.\alpha}{1 - \cos.\alpha} = \frac{\sin.90^\circ - \sin.\alpha}{1 - \cos\alpha} = \frac{2\sin.^2(45^\circ - \frac{1}{2}\alpha)}{2\sin.^2\frac{1}{2}\alpha} = \frac{\sin.^2(45^\circ - \frac{1}{2}\alpha)}{\sin.^2\frac{1}{2}\alpha}.$$

Vergelijk de form. (39) en (56).

Om $1 + 2\cos.\alpha$ logarithmisch te maken stelle men $2\cos.\alpha = \text{tg}.\mu$, dan wordt

$$1 + 2\cos.\alpha = 1 + \text{tg}.\mu = \text{tg}.45^\circ + \text{tg}.\mu = \frac{\sin.(45^\circ + \mu)}{\text{tg}.\mu \frac{1}{2}\sqrt{2}} = \frac{\sin.(45^\circ + \mu)\sqrt{2}}{\text{tg}.\mu},$$

zoodat men, ter berekening van φ, het volgende stelsel van vergelijkingen heeft:

$$\text{tg}\delta = \frac{\sin.^2(45^\circ - \frac{1}{2}\alpha)}{\sin.^2\frac{1}{2}\alpha};\ \text{tg}.\mu = 2\cos.\alpha$$

$$\text{en } \cos.(2\varphi - \delta) = -\frac{\sin.(45^\circ + \mu)\sqrt{2}}{\text{tg}.\mu} \cos.\delta.$$

36. Wij zullen thans nog enkele voorbeelden geven van de oplossing van algebraïsche vergelijkingen met toepassing der goniometrie, om daardoor tot uitkomsten te geraken, die voor logarithmische bewerking geschikt zijn.

Voorbeeld 4. Zij bijv. $x = \sqrt{\frac{p - q}{p + q}}$.

Men heeft $x = \sqrt{\frac{1 - \frac{q}{p}}{1 + \frac{q}{p}}}$ en daar $p > q$ moet zijn, opdat de waarde van x reëel zij, kan men $\frac{q}{p} = \cos.\alpha$ stellen en bekomt dan

$$x = \sqrt{\frac{1 - \cos.\alpha}{1 + \cos.\alpha}} = \text{tg}.\tfrac{1}{2}\alpha \ldots \text{ form. (58)},$$

zoodat nu x zonder worteltrekking en door logarithmen kan worden gevonden.

Voorbeeld 5. De onbekende op te lossen uit de vergelijking

$$\frac{\sqrt{(a + b\,x)} - \sqrt{(a - b\,x)}}{\sqrt{(a + b\,x)} + \sqrt{(a - b\,x)}} = c.$$

Men deele eerst teller en noemer door $\sqrt{a}$, dan is:

$$\frac{\sqrt{(1 + \frac{b}{a}x)} - \sqrt{(1 - \frac{b}{a}x)}}{\sqrt{(1 + \frac{b}{a}x)} + \sqrt{(1 - \frac{b}{a}x)}} = c.$$

Indien nu a, b en c reëele waarden hebben, dan kan men $\frac{b}{a}x = \sin.\varphi$, dus $x = \frac{a}{b}\sin.\varphi$ stellen, daardoor wordt

$$\frac{\sqrt{(1 + \sin.\varphi)} - \sqrt{(1 - \sin.\varphi)}}{\sqrt{(1 + \sin.\varphi)} + \sqrt{(1 - \sin.\varphi)}} = c \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

deelt men nu weder teller en noemer door $\sqrt{(1 + \sin.\varphi)}$, en neemt men in aanmerking dat, volgens form. (44)

$$\frac{1 - \sin.\varphi}{1 + \sin.\varphi} = \frac{\sin.90^\circ - \sin.\varphi}{\sin.90^\circ + \sin.\varphi} = \text{tg.}^2(45^\circ - \tfrac{1}{2}\varphi)$$

is, dan heeft men:

$$\frac{1 - \text{tg}.(45^\circ - \frac{1}{2}\varphi)}{1 + \text{tg}.(45^\circ - \frac{1}{2}\varphi)} = c,$$

dat is, na toepassing van form. (63),

$$\text{tg}.\tfrac{1}{2}\varphi = c,$$

zoodat x bekend wordt uit de beide vergelijkingen

$$\text{tg}.\tfrac{1}{2}\varphi = c \text{ en } x = \frac{a}{b}\sin.\varphi.$$

Ter herleiding van de breuk in vergelijking (a) had men ook kunnen gebruik maken van de beide laatste vergelijkingen uit 26. 4ᵉ.

Voorbeeld 6. Zij de vergelijking $x\sqrt{(p - q\,x^2)} = r$.

Hiervoor kan men schrijven:

$$x\sqrt{p\,(1 - \frac{q}{p}x^2)} = r.$$

Zijn dus p, q en r reëele waarden en daarenboven p en q beide positief, dan moet $\frac{q}{p}x^2 < 1$ zijn. Men stelle dus:

$$\frac{q}{p}x^2 = \sin.^2\varphi \text{ of } x = \sin.\varphi\sqrt{\frac{p}{q}},$$

dan heeft men:

$$x \cos.\varphi \sqrt{p} = r,$$

dus

$$\sin.\varphi \cos.\varphi \frac{p}{\sqrt{q}} = r,$$

of

$$\sin.2\varphi = \frac{2r\sqrt{q}}{p},$$

waaruit voor sin.2φ twee waarden gevonden worden, die elkanders supplementen en derhalve voor φ twee waarden, die elkanders complementen zijn.

Men heeft dus om x te vinden:

$$\sin.2\varphi = \frac{2r\sqrt{p}}{q},\ x_1 = \sin.\varphi \sqrt{\frac{p}{q}} \text{ en } x_2 = \cos.\varphi \sqrt{\frac{p}{q}}.$$

37. De vergelijkingen van den tweeden graad met reëele wortels kunnen alle met behulp der goniometrie worden opgelost.

Onderstellen wij vooreerst, dat in de algemeene vergelijking

$$Ax^2 + Bx + C = 0$$

C positief zij, dan substitueere men $x = y\sqrt{\frac{C}{A}}$, waardoor de vergelijking overgaat in:

$$Cy^2 + By\sqrt{\frac{C}{A}} + C = 0$$

en na deeling door Cy

$$y + \frac{1}{y} = -\frac{B}{\sqrt{AC}}.$$

Daar y alle willekeurige reëele waarden hebben kan, stelle men verder:

$$y = tg.\varphi,$$

dan is:

$$tg.\varphi + cot.\varphi = -\frac{B}{\sqrt{AC}}.$$

Nu is: $tg.\varphi + cot.\varphi = \frac{\sin.\varphi}{\cos.\varphi} + \frac{\cos.\varphi}{\sin.\varphi} = \frac{\sin.^2\varphi + \cos.^2\varphi}{\sin.\varphi \cos.\varphi} = \frac{2}{\sin.2\varphi}$ en hierdoor dus:

$$\frac{2}{\sin.2\varphi} = -\frac{B}{\sqrt{AC}},$$

of

$$\sin.2\varphi = -\frac{2\sqrt{AC}}{B},$$

waaruit voor 2φ twee waarden, die elkanders supplementen en voor

φ twee waarden, die elkanders complementen zijn, gevonden worden. Hierdoor wordt $y = tg.\varphi$ of $y = cot.\varphi$ en dus de beide wortels

$$x_1 = tg.\varphi \sqrt{\frac{C}{A}} \text{ en } x_2 = cot.\varphi \sqrt{\frac{C}{A}}.$$

De vergelijking $sin.2\varphi = -\frac{2\sqrt{AC}}{B}$ geeft nog aanleiding tot de volgende beschouwingen.

Is $2\sqrt{AC} > B$ of $4AC > B^2$, dan is $sin.2\varphi > 1$ en dus de beide wortels imaginair, die dan niet verder kunnen bepaald worden.

Is $2\sqrt{AC} = B$, of $4AC = B^2$, dan is $sin.2\varphi = \pm 1$, naar gelang B *negatief* of *positief* is, dus $2\varphi = 90°$ of $270°$ en $\varphi = 45°$ of $135°$. In het eerste geval is $tg.\varphi = cot.\varphi = 1$; in het tweede $tg.\varphi = cot.\varphi = -1$. In beide gevallen dus de wortels gelijk.

Is $2\sqrt{AC} < B$ of $4AC < B^2$, dan is $sin.2\varphi < \pm 1$ en dus de beide wortels reëel.

Is B *negatief*, dan is $sin.2\varphi$ *positief*, dus $2\varphi < 180°$ en $\varphi < 90°$, derhalve $tg.\varphi$ en $cot.\varphi$ beide *positief* en alzoo beide wortels *positief*.

Is B *positief*, dan is $sin.2\varphi$ *negatief* en ligt dus 2φ tusschen $180°$ en $360°$; φ derhalve tusschen $90°$ en $180°$ en alzoo zijn dan $tg.\varphi$ en $cot.\varphi$ beide *negatief*, zoodat alsdan de beide wortels *negatief* zijn.

Is $C = 0$, dan is $sin.2\varphi = 0$, dus $2\varphi = 0°$ of $180°$ en $\varphi = 0°$ of $90°$. Hierdoor wordt $tg.\varphi = 0$ of ∞ en $cot.\varphi = \infty$ of 0. Derhalve:

$$x_1 = 0 \times 0 \text{ en } x_2 = 0 \times \infty.$$

De eerste waarde is klaarblijkelijk 0; $0 \times \infty$ stelt echter een onbepaalde waarde voor, die in elk bijzonder geval kan bepaald worden. Zoo hebben wij hier uit

$$Ax^2 + Bx = 0$$

$$x_1 = 0 \text{ en } x_2 = -\frac{B}{A},$$

derhalve is $0 \times \infty = -\frac{B}{A}$.

Is de derde term *negatief*, dan stelle men even als boven in de vergelijking

$$Ax^2 + Bx - C = 0.$$

$x = y\sqrt{\frac{C}{A}}$, dan heeft men na substitutie

$$Cy^2 + By\sqrt{\frac{C}{A}} - C = 0$$

en nu weder door Cy deelende en dan $y = tg.\varphi$ stellende, verkrijgt men

$$cot.\varphi - tg.\varphi = \frac{B}{\sqrt{AC}}.$$

Nu is $cot.\varphi - tg.\varphi = \frac{cos.\varphi}{sin.\varphi} - \frac{sin.\varphi}{cos.\varphi} = \frac{cos.^2\varphi - sin.^2\varphi}{sin.\varphi\ cos.\varphi} = \frac{2cos.2\varphi}{sin.2\varphi} = 2cot.\varphi$,

$$\text{derhalve} \quad 2cot.\varphi = \frac{B}{\sqrt{AC}},$$

$$\text{of} \quad tg.2\varphi = \frac{2\sqrt{AC}}{B}.$$

Hieruit vindt men voor 2φ twee waarden, namelijk 2φ en $180° + 2\varphi$ en daardoor voor φ twee waarden, φ en $90° + \varphi$ of $y = tg.\varphi$ en $y = tg.(90° + \varphi) = -\ cot.\varphi$, zoodat de beide wortels zijn

$$x_1 = tg.\varphi\sqrt{\frac{C}{A}} \text{ en } x_2 = -\ cot.\varphi\sqrt{\frac{C}{A}},$$

die derhalve altijd verschillende teekens hebben.

Over de goniometrische oplossing van derde-machtsvergelijkingen zie men VRIES, Oplossing van hoogere-machtsvergelijkingen.

38. Ter verdere oefening dienen de volgende opgaven.

1°. Bereken den sinus en cosinus van 3°, 6°, 9°, 12° en 15°.

2°. Te berekenen $x = \sqrt{\frac{a.sin.\alpha + b.cos.\alpha}{a.cos.\alpha - b.sin.\alpha}}$ als $a = 15.2673$, $b = 27.3124$ en $\alpha = 147°15'37''$ is.

3°. Bereken φ uit de vergelijkingen:

$a.sin.^2\varphi + b.cos.^2\varphi = c$, als $a = 6.23679$, $b = 3.1287$ en $c = 3.7654$ is.

$a.sin.\varphi + b.cos.\varphi = c$, als $a = 6.3879$, $b = 0.92168$ en $c = 0.21376$ is.

$a.tg.\varphi + b.cot.\varphi = c$, als $a = 123.765$, $b = 713.046$ en $c = 8176.543$ is.

4°. φ op te lossen uit de vergelijkingen:

$sin.(\alpha + \varphi) - sin.(\alpha - \varphi) = sin.2\varphi$.

$cos.\varphi\ cos.(\varphi - \alpha) = a$.

$sin.\varphi\ sin.(\varphi - \alpha) = a.cos.^2\varphi$.

$cos.(\alpha - \varphi) - cos.(\alpha + \varphi) = \frac{1}{a}sec.\frac{1}{2}(\varphi - \alpha)\ cosec.\frac{1}{2}(\varphi + \alpha)$.

5°. φ op te lossen uit de vergelijkingen:
a.sin.$(\varphi + \alpha)$ + b.sin.$(\varphi + \beta) = $ c.
a.sin.$(\varphi + \alpha)$ + b.cos.$(\varphi + \beta)$ + c.sin.$\varphi = 0$.
cos.$(\varphi + \alpha)$ cos.$(\varphi + \beta) = $ a.
a.sin.φ + b.cos.$2\varphi = $ c.

6°. Verdeel den boog $\frac{1}{4}\pi$ in twee deelen, wier tangenten tot elkander staan als 1 : 2.

7°. Bepaal de waarde van φ uit de vergelijking:
$\frac{1}{2}\sin.\alpha \cos.\beta\, \text{tg.}^2\varphi - 2\sin.(\alpha + \beta)\cos.(\alpha - \beta)\,\text{tg.}\varphi +$
$5\sin.2\alpha \cos.(2\alpha + \beta) = 0$,
waarin $\alpha = 159°17'35''$ en $\beta = 82°9'40''$ is.

8°. Te bewijzen dat:

$$\text{Bg (tg.} = \text{x)} + \text{Bg}\left(\text{tg.} = \frac{1 - \text{x}}{1 + \text{x}}\right) = \tfrac{1}{4}\pi \text{ is.}$$

9°. Wat is grooter sin.2a of 2sin.a?

10°. Men vindt $\cos.3a = \sqrt{(1 - \sin.^2 3a)} = \pm (3\cos.a - 4\cos.^3 a)$; hoe wordt hierbij het teeken van den wortel bepaald?

11°. Bewijs dat $\sin.n\,a = \sin.(n-1)a \cos.a + \cos.(n-1)a \sin.a$ is.

12°. De waarde van x en y te bepalen uit de evenredigheden sin.x : sin.y = 2 : 1 en cos.x : cos.y = 1 : 2.

13°. Bereken φ uit de vergelijking:
$\sin.a + \sin.(\varphi - a) + \sin.(2\varphi + a) = \sin.(\varphi + a) + \sin.(2\varphi - a)$.

14°. Logarithmisch te maken den vorm $1 + \sin.A + \cos.A$.

15°. Insgelijks $\dfrac{\sin.a - \cos.b}{\sin.a + \cos.b}$.

16°. De waarde van φ te berekenen uit:

$$\cos.\varphi = \frac{\sin.a \cos.b + \text{tg.}a \cot.b}{\pi + \text{bg (sin.} = \text{c)}},$$

wanneer a = 25°42'11'', b = 17°13'31'' en c = 0.9345 is.

17°. Den boog $\frac{1}{4}\pi$ te verdeelen in twee deelen, wier sinussen tot elkander staan als 7 : 9.

18°. Tot een gedaante te herleiden, geschikt voor logarithmische berekening, den vorm $\dfrac{2\cos.^2 a - 1 - \cos.2a \cos.^2 a}{\cos.2a \cos.^2 a}$.

19°. φ te bepalen uit de vergelijking:

$$\text{tg.}(\alpha + \varphi) - \text{tg.}(\alpha - \varphi) = \sin.2\varphi.$$

20°. Wat is de waarde van de uitdrukking

$$\frac{(a^2 - b^2)(\sin.\alpha + \sin.\beta)}{c(\cos.\beta - \cos.\alpha)}$$

als $a = 37.5$, $b = 18.01$, $c = 3.25$, $\alpha = 85°13'17''$ en $\beta = 115°12'48''$ is.

21°. Men vraagt den tangens van den halven boog in den tangens van den heelen boog uit te drukken.

22°. φ te berekenen uit de vergelijking:

$$\sec.\varphi = \cos.\varphi + 2\sin.\varphi.$$

23°. Een cirkelkwadrant te verdeelen in drie deelen, wier tangenten tot elkander staan als 3, 5 en 7.

24°. x op te lossen uit de vergelijking:

$$\sin.^2 x + \cos.^2 x + \text{tg}.^2 x + \cot.^2 x + \sec.^2 x + \text{cosec}.^2 x = n.$$

25°. Van welken boog maken de sinus, de tangens en de straal een harmonische reeks uit?

26°. Wat is de waarde van φ in de vergelijking:

$$3\sin.\tfrac{1}{2}\varphi = 4\sin.\tfrac{1}{3}\varphi.$$

27°. Men vraagt φ op te lossen uit de vergelijking:

$$(2\cos.2\varphi + 6)\cos.\varphi - 3 + (4\sin.\tfrac{1}{2}\alpha + \sin.\tfrac{3}{2}\alpha)\sin.\tfrac{5}{2}\alpha = (\cos.\tfrac{3}{2}\alpha - 4\cos.\tfrac{1}{2}\alpha)\cos.\tfrac{5}{2}\alpha + 2\sin.2\varphi\sin.\varphi.$$

28°. Insgelijks uit de vergelijking:

$$\frac{\sin.\varphi \sin.2\varphi}{(1 + \sin.\varphi)(1 - 2\sin.\varphi)} + \tfrac{1}{2}(1 - \sin.\varphi)(1 + 2\sin.\varphi) = \frac{3 + 2\sqrt{2} - 8\sin.^2\varphi}{4(1 + \sin.\varphi)(1 - 2\sin.\varphi)}.$$

29°. Men vraagt x en y op te lossen uit de vergelijkingen:

$$x\sqrt{(1-x^2)} + y\sqrt{(1-y^2)} = a \text{ en } x\sqrt{(1-y^2)} + y\sqrt{(1-x^2)} = b.$$

30°. Welke waarde hebben x en y in de vergelijkingen:

$$\frac{x + 1}{1 + \sin.\alpha} = \frac{(y + 1)(1 - \sin.\alpha)}{\sin.\alpha} \text{ en } (x - 1)\,\text{tg}.\alpha = (1 - y)\cos.\alpha + 2\sin.\alpha.$$

31°. De som der sinussen en die der cosinussen te vinden eener reeks van n bogen die met gelijke verschillen opklimmen. (Zie de eerste formule van 26. 4°).

32°. Wanneer $y = \sqrt{[\tfrac{1}{4}\sin.\alpha + \sqrt{\{\tfrac{1}{4}\sin.\alpha + \sqrt{(\tfrac{1}{4}\sin.\alpha + \text{enz. tot in het oneindige})}\}}]}$ is, hoe vindt gij dan een eenvoudiger uitdrukking voor y.

33°. Met behulp van de formule $\cot.\tfrac{1}{2}a - \text{tg}.\tfrac{1}{2}a = 2\cot.a$ te vinden

$$\tfrac{1}{2}\text{tg}.\tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{4}\text{tg}.\tfrac{1}{4}a + \tfrac{1}{8}\text{tg}.\tfrac{1}{8}a + \tfrac{1}{16}\text{tg}.\tfrac{1}{16}a + \ldots \frac{1}{2^n}\text{tg}.\frac{1}{2^n}a = \frac{1}{2^n}\cot.\frac{1}{2^n}a - \cot.a.$$

TWEEDE HOOFDSTUK.

Rechtlijnige Trigonometrie.

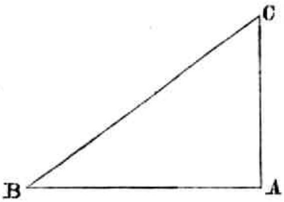
§ 8.

Oplossing der rechthoekige driehoeken.

39. In § 1 is gezegd wat men door *Trigonometrie* of *driehoeksmeting* verstaat. De zwarigheid, waarvan daar gesproken is, is door het behandelde in Hoofdstuk 1 weggenomen, daar men door middel der sinustafels, de goniometrische betrekkingen, of hare logarithmen, voor elken gegeven hoek of boog en omgekeerd, bepalen kan. Wij zullen dus nu aantoonen, hoe men de gevonden formules kan aanwenden ter berekening van de onbekende elementen des rechthoekigen driehoeks.

Laat daartoe, fig. 10, ABC een driehoek zijn, rechthoekig in A.

Fig. 10.



Indien men dan B als het middelpunt van een cirkel beschouwt, die met BC als straal beschreven is, dan is:

$$\frac{AC}{BC} = \sin.B \text{ en } \frac{AB}{BC} = \cos.B,$$

derhalve:

$$AC = BC\sin.B \text{ en } AB = BC\cos.B.$$

Beschouwt men echter AB als den straal van den cirkel, die uit B beschreven is, dan heeft men:

$$\frac{AC}{AB} = \text{tg}.B.$$

derhalve:

$$AC = AB\text{tg}.B.$$

De hoek B het complement zijnde van C, heeft men dus de volgende formules:

$$\begin{aligned} AC &= BC\sin.B = BC\cos.C. \\ AB &= BC\sin.C = BC\cos.B. \\ AC &= AB\,tg.B = AB\cot.C. \\ AB &= AC\,tg.C = AC\cot.B. \end{aligned}$$

Men vergelijke ook § 1. 3.

40. Men is echter gewoon de zijden aan te duiden door dezelfde kleine letters, die bij de overstaande hoeken staan, zoodat in een rechthoekigen driehoek, waarin A de rechte hoek is, a de hypotenusa, b en c de beide rechthoekszijden zijn, de gevonden formules worden dan:

$$\left.\begin{aligned} b &= a.\sin.B = a.\cos.C \\ c &= a.\sin.C = a.\cos.B \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} b &= c.tg.B = c.\cot.C \\ c &= b.tg.C = b.\cot.B \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (2)$$

dat is, in woorden:

1°. ***Elke rechthoekszijde is gelijk aan den sinus van den overstaanden, of den cosinus van den aanliggenden hoek, vermenigvuldigd met de hypotenusa.***

2°. ***Elke rechthoekszijde is gelijk aan den tangens van den overstaanden of den cotangens van den aanliggenden hoek, vermenigvuldigd met de andere rechthoekszijde.***

Men zal opmerken, dat de form. (2) ook uit (1) kan afgeleid worden. Men heeft namelijk door deeling:

$$\frac{b}{c} = \frac{a.\sin.B}{a.\cos.B} = \frac{a.\cos.C}{a.\sin.C},$$

$$\text{dat is: } \frac{b}{c} = tg.B = \cot.C.$$

$$\text{of} \qquad b = c.tg.B = c.\cot.C.$$

Neemt men de som der kwadraten van de beide formules (1), dan vindt men:

$$b^2 + c^2 = a^2 (\sin.^2 B + \cos.^2 B) = a^2 (\sin.^2 C + \cos.^2 C),$$

waaruit: $$b^2 + c^2 = a^2.$$

41. Met de formules (1) en (2) en het theorema van Pythagoras kan men alle gevallen, die bij de rechthoekige driehoeken voorkomen, oplossen. Zij bevatten ieder drie elementen van den driehoek, waarvan er twee gegeven moeten zijn. Daar nu in een rechthoekigen driehoek vijf veranderlijke grootheden voorkomen, zoo zouden er zooveel gevallen zijn, als het aantal verschillende combinatiën van vijf grootheden, drie aan drie bedraagt.

Dit aantal is: $\frac{5.4.3}{1.2.3} = 10$. Onder dit aantal komen echter verscheidene voor, die van elkander niet wezenlijk onderscheiden zijn, zoodat er inderdaad slechts vier verschillende gevallen voor de oplossing van den rechthoekigen driehoek zijn, namelijk:

1°. Gegeven de hypotenusa en een der scherpe hoeken.
2°. Gegeven een rechthoekszijde en een der scherpe hoeken.
3°. Gegeven de hypotenusa en een der rechthoekszijden.
4°. Gegeven de beide rechthoekszijden.

Eerste geval.

42. Zij gegeven de hypotenusa a en de hoek B.

Ter berekening der onbekenden heeft men:

$$C = 90° - B,\ b = a.\sin.B,\ \text{en}\ c = a.\cos.B \quad \text{form. (1)}$$

Voorbeeld van berekening.

Zij $a = 217.496$ en $B = 53°17'13''$.

Men heeft $C = 90° - 53°17'13'' = 36°42'47''$.

$\log.a = 2.337452$	$\log.a = 2.337452$
$\log.\sin.B = 9.903979$	$\log.\cos.B = 9.776561$
$\log.b = 2.241431$	$\log.c = 2.114013$
$b = 174.354...$	$c = 130.021...$

Tweede geval.

43. Zij gegeven de rechthoekszijde b en de scherpe hoek C.

Ter berekening der onbekenden heeft men:

$$B = 90° - C,\ c = b.\text{tg}.C,\ \text{form. (2)},\ a = \frac{b}{\cos.C},\ \text{form.(1)}$$

Voorbeeld van berekening.

Zij $b = 7392.08$ en $C = 1°55'4''$.

Men heeft $B = 90° - 1°55'4'' = 88°4'56''$.

$\log.b = 3.868767$	$\log.b = 3.868767$
$\log.\text{tg}.C = 8.524838$	$\text{ac.}\log.\cos.C = 10.000243$
$\log.C = 2.393605$	$\log.a = 3.869010$
$c = 247.517$	$a = 7396.22$

Aanmerking. De gegeven hoek had ook de overstaande kunnen zijn; de formules zouden dan zijn:

$$c = b.\cot.B, \quad a = \frac{b}{\sin.B}.$$

Derde geval.

44. Zij gegeven de hypotenusa a en de rechthoekszijde b.

Ter berekening van de onbekenden heeft men:

$$c = \sqrt{(a^2 - b^2)} = \sqrt{(a-b)(a+b)},\ \sin.B = \cos.C = \frac{b}{a},\ \text{form. (1)}.$$

Voorbeeld van berekening.

Zij a = 48856, en b = 47870.

Men heeft: a + b = 96726, a — b = 986.

log.(a — b) =	2.993871	log.b =	4.680063
log.(a + b) =	4.985543	ac.log.a =	5.311082
	7.979420	log.cos.C =	9.991145
2			
log.c =	3.989710	C =	11°31′50″.5
c =	9765.87	B =	78°28′9″.5.

Aanmerking. Is de zijde b ten opzichte van a zeer klein, dan kan men den hoek C nauwkeuriger vinden door de formule:

$$\text{tg.}\tfrac{1}{2}C = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}},$$

die gevonden wordt uit:

$$\text{tg.}\tfrac{1}{2}C = \sqrt{\frac{1-\cos.C}{1+\cos.C}} = \sqrt{\frac{1-\frac{b}{a}}{1+\frac{b}{a}}} = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}},$$

want als de hoek C weinig van 90° verschilt, dan zijn de verschillen der logarithmen voor kleine verschillen van den hoek zeer groot, en daardoor minder geschikt voor nauwkeurige berekening; $\tfrac{1}{2}$C is dan echter dicht bij 45° en de verschillen van de logarithmen der tangenten zijn dan meer evenredig met de verschillen der bogen.

Vierde geval.

45. Gegeven de beide rechthoekszijden b en c.

Ter berekening der onbekenden heeft men:

$$\text{tg.}B = \cot.C = \frac{b}{c},\ \text{form. (2), en } a = \sqrt{(b^2 + c^2)}.$$

Daar echter $\sqrt{(b^2 + c^2)}$ niet voor logarithmische berekening geschikt is, berekent men de zijde a liever door een der formules:

$$a = \frac{b}{\sin.B} = \frac{b}{\cos.C} = \frac{c}{\sin.C} = \frac{c}{\cos.B}.$$

Voorbeeld van berekening.

Zij gegeven b = 630.763, en c = 470.1915.

Men heeft:

$$\begin{array}{rl} \log.b & = 2.799866 \\ \text{ac.}\log.c & = 7.327726 \\ \hline \log.\text{tg}.B & = 10.127592 \\ B & = 53°17'53'' \\ C & = 36°42'7'' \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \log.b & = 2.799866 \\ \text{ac.}\log.\sin.B & = 10.095958 \\ \hline \log.a & = 2.895824 \\ a & = 786.727 \end{array}$$

Aanmerking. Wanneer de verhouding tusschen de beide rechthoekszijden zeer groot is, dan kan men de hoeken berekenen door de formule:

$$\text{tg}.2B = \frac{2bc}{(c-b)(c+b)} \text{ of } \text{tg}.2C = \frac{2bc}{(b-c)(b+c)},$$

die men vindt uit:

$$\text{tg}.2B = \frac{2\text{tg}.B}{1-\text{tg}.^2B},$$

door daarin $\text{tg}.B = \frac{b}{c}$ te substitueeren. De berekening van B door deze formule geeft nauwkeuriger uitkomsten, hetzij B dicht bij 0° of dicht bij 90° is, want in beide gevallen zijn de verschillen der logarithmen zeer groot, terwijl zij kleiner zijn en dus meer evenredig met de verschillen der bogen voor 2B.

---

§ 9.

Berekening van het oppervlak of den inhoud des rechthoekigen driehoeks.

46. *Eerste geval.* Men heeft $I = \frac{1}{2}bc$ en daar $b = a.\sin.B$ en $c = a.\cos.B$ is, wordt

$$I = \tfrac{1}{2}a^2\sin.B\cos.B$$

en dus volgens form. (48)

$$I = \tfrac{1}{4}a^2\sin.2B = \tfrac{1}{4}a^2\sin.2C.$$

Tweede geval. Substitueert men in $I = \frac{1}{2}bc$ de waarde van $c = b.\text{tg}.C = b.\cot.B$ of $b = c.\text{tg}.B = c.\cot.C$, dan verkrijgt men:

$$I = \tfrac{1}{2}b^2\text{tg}.C = \tfrac{1}{2}b^2\cot.B = \tfrac{1}{2}c^2\text{tg}.B = \tfrac{1}{2}c^2\cot.C.$$

Derde geval. Men substitueere in $I = \frac{1}{2}bc$ voor c de waarde $\sqrt{(a^2 - b^2)}$, dan komt er:

$$I = \tfrac{1}{2}b\sqrt{(a - b)\,(a + b)}.$$

Vierde geval. Men heeft:

$$I = \tfrac{1}{2}bc.$$

47. Men berekene de onbekende elementen van een rechthoekigen driehoek, als gegeven zijn:

1°. a = 73.26;	C = 49°12′20″.	7°. a = 918.4;	b = 621.3.
2°. b = 493;	B = 20°14′.	8°. b = 2632;	c = 3252.45.
3°. a = 506.9;	c = 383.9.	9°. a = 1471.62;	B = 29°50′.
4°. b = 27.3153;	c = 35.77.	10°. b = 206.05;	C = 23°41′.
5°. a = 4264.3;	B = 33°30′47″.	11°. a = 197471.4;	c = 185653.
6°. c = 6545.23;	B = 25°47′7″.	12°. b = 626.79;	c = 74.9.

Door welke formules worden in een rechthoekigen driehoek de onbekenden bepaald, als gegeven zijn:

13°. De som of het verschil der rechthoekszijden en een der scherpe hoeken?

14°. De som of het verschil van de hypotenusa en een der rechtshoekszijden, met een der scherpe hoeken?

15°. De omtrek 2S en een der scherpe hoeken?

16°. Hoe groot is de straal van den in- en omgeschreven cirkel van een rechthoekigen driehoek, waarvan een der rechthoekszijden en een hoek gegeven zijn?

17°. Hoe groot zijn de zijden eens rechthoekigen driehoeks, als gegeven zijn het oppervlak I en een der scherpe hoeken.

18°. Bereken het oppervlak van een rechthoekigen driehoek uit de loodlijn, die uit het hoekpunt van den rechten hoek op de hypotenusa valt en een der scherpe hoeken.

19°. Van een rechthoekigen driehoek gegeven zijnde de som of het verschil der rechthoekszijden en de hypotenusa, vraagt men elk der elementen te bepalen.

20°. Als van een rechthoekigen driehoek gegeven zijn de straal van den ingeschreven cirkel en een der scherpe hoeken, vraagt men al de overige elementen te bepalen.

21. Te bewijzen dat in een rechthoekigen driehoek

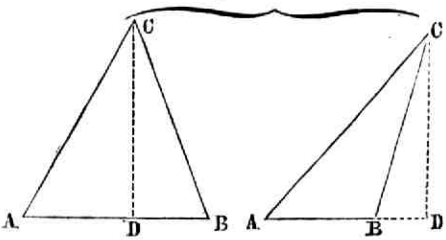
$$\text{tg.}\tfrac{1}{2}(B - C) = \sqrt{\frac{b - c}{b + c}} \text{ en } \text{tg.}(45° - \tfrac{1}{2}B) = \sqrt{\frac{a - b}{a + b}} \text{ is.}$$

§ 10.

Oplossing der scheefhoekige driehoeken.

48. De formules ter oplossing der scheefhoekige driehoeken kunnen met behulp van den rechthoekigen driehoek gemakkelijk worden afgeleid. Indien wij namelijk uit een der hoekpunten van een scherp- of stomphoekigen driehoek ABC. fig. 11, een loodlijn op de overstaande zijde neerlaten, dan ontstaan in beide twee rechthoekige driehoeken, waarin men volgens 39 heeft, mits in acht nemende, dat in den stomphoekigen driehoek $\sin.ABC = \sin.CBD$ is:

Fig. 11.



$$CD = AC.\sin.A = BC.\sin.B,$$

derhalve: $AC : BC = \sin.B : \sin.A$,

en daar het onverschillig is uit welk hoekpunt de loodlijn wordt getrokken, zoo heeft men, volgens de aangenomen schrijfwijze:

$$\left.\begin{array}{l} a : b : c = \sin.A : \sin.B : \sin.C \\ \text{of} \quad \dfrac{\sin.A}{a} = \dfrac{\sin.B}{b} = \dfrac{\sin.C}{c} \end{array}\right\} \quad . \; . \quad (3)$$

dat is: ***de zijden van den driehoek staan tot elkander als de sinussen der overstaande hoeken.***

De standvastige verhouding tusschen de zijde en de sinus van van den overstaanden hoek wordt de ***modulus*** van den driehoek genoemd, terwijl men den regel zelf, den ***regel der sinussen*** zou kunnen noemen.

49. Uit de evenredigheid

$$a : b = \sin.A : \sin.B$$

heeft men:

$$a + b : a - b = \sin.A + \sin.B : \sin.A - \sin.B,$$

dat is, volgens form. (44)

$$a + b : a - b = tg.\tfrac{1}{2}(A + B) : tg.\tfrac{1}{2}(A - B).$$

Daar echter $A + B = 180° - C$ is, is $\tfrac{1}{2}(A + B) = 90° - \tfrac{1}{2}C$ en dus $tg.\tfrac{1}{2}(A + B) = \cot.\tfrac{1}{2}C$, zoodat de evenredigheid overgaat in:

$$a + b : a - b = \cot.\tfrac{1}{2}C : \operatorname{tg}.\tfrac{1}{2}(A - B) \quad . \quad . \quad (4)$$

dat is: *In elken driehoek staat de som van twee der zijden tot haar verschil als de cotangens van den halven ingesloten hoek tot den tangens van het halve verschil der overstaande hoeken.*

50. Uit de evenredigheid (3) volgt verder:

$$a + b : c = \sin.A + \sin.B : \sin.C,$$

of volgens form. (38) en (48)

$$a + b : c = \sin.\tfrac{1}{2}(A + B).\cos.\tfrac{1}{2}(A - B) : \sin.\tfrac{1}{2}C.\cos\tfrac{1}{2}C.$$

Uit $A + B = 180° - C$ volgt echter $\tfrac{1}{2}(A + B) = 90° - \tfrac{1}{2}C$ en dus $\sin.\tfrac{1}{2}(A + B) = \cos.\tfrac{1}{2}C$, zoodat de evenredigheid overgaat in:

$$a + b : c = \cos.\tfrac{1}{2}(A - B) : \sin.\tfrac{1}{2}C.$$

Op dezelfde wijze vindt men verder:

$$a - b : c = \sin.\tfrac{1}{2}(A - B) : \cos.\tfrac{1}{2}C.$$

Uit beide heeft men:

$$c.\cos.\tfrac{1}{2}(A - B) = (a + b).\sin.\tfrac{1}{2}C.$$
$$c.\sin.\tfrac{1}{2}(A - B) = (a - b).\cos.\tfrac{1}{2}C.$$

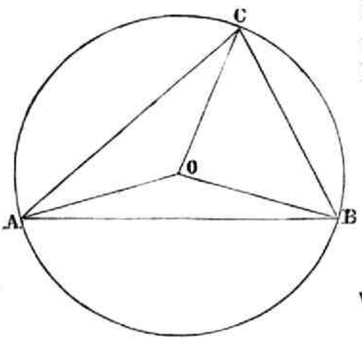
Neemt men nu de som der vierkanten van beide vergelijkingen, dan heeft men, met toepassing der form. (1) en (49),

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos.C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

dat is: *in elken driehoek is het vierkant van een der zijden gelijk aan de som der vierkanten van de beide andere zijden, verminderd met het dubbele product dier zijden en den cosinus van den ingesloten hoek.*

51. De formule (3) kan ook, onafhankelijk van den rechthoekigen driehoek, op de volgende wijze gevonden worden. Zij daartoe, in fig. 12, om den driehoek ABC een cirkel beschreven; trekt men dan de stralen naar de hoekpunten, dan is volgens form.(19)

Fig. 12.



$$\frac{AB}{AM} = 2\sin.\tfrac{1}{2}AOB = 2\sin.C.$$

$$\frac{BC}{AM} = 2\sin.\tfrac{1}{2}BOC = 2\sin.A.$$

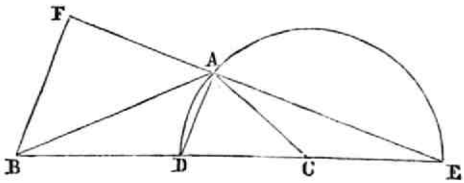
$$\frac{AC}{AM} = 2\sin.\tfrac{1}{2}AOC = 2\sin.B.$$

waaruit onmiddelijk:

$$AB : BC : AC = \sin.C : \sin.A : \sin.B.$$

52. De formules (4) en (5) kunnen ook, onafhankelijk van form. (3), uit de figuur worden afgeleid. Men beschrijve daartoe, in fig. 13, in driehoek ABC uit C met AC als straal een halven cirkel, die BC en haar verlengde snijdt in D en E, en trekke de koorde AD, dan is:

Fig. 13.



$$BD = a - b, \quad BE = a + b$$
$$\angle ADC = \angle DAC = \tfrac{1}{2}\angle ACE = \tfrac{1}{2}(A + B)$$
$$\angle BAD = A - \angle DAC = A - \tfrac{1}{2}(A + B) = \tfrac{1}{2}(A - B).$$

Nu trekke men verder de koorde AE en verlenge die tot dat zij de lijn BF, die evenwijdig aan AD is, snijdt in F, dan staat BF loodrecht op EF en dan is:

$$\angle FBE = \angle ADC = \tfrac{1}{2}(A + B)$$
$$\angle FBA = \angle BAD = \tfrac{1}{2}(A - B).$$

Verder heeft men:

$$BD : BE = AF : EF,$$

maar in de rechthoekige driehoeken BEF en ABF is:

$$EF = BF.tg.FBE = BF.tg.\tfrac{1}{2}(A + B)$$
$$AF = BF.tg.FBA = BF.tg.\tfrac{1}{2}(A - B),$$

waardoor de evenredigheid overgaat in:

$$BD : BE = tg.\tfrac{1}{2}(A - B) : tg.\tfrac{1}{2}(A + B),$$

dat is: $a - b : a + b = tg.\tfrac{1}{2}(A - B) : cot.\tfrac{1}{2}C.$

53. Om de formule (5) uit de figuur af te leiden, heeft men in fig. 11 in den scherphoekigen driehoek:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB.BD$$

en in den stomphoekigen:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2AB.BD.$$

Nu is in den eersten:

$$BD = BC.cos.B$$

en in den tweeden:

$$BD = BC.cos.CBD = - BC.cos.B,$$

waardoor men voor beide verkrijgt:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB.BC.cos.B.$$

54. De formules (3), (4) en (5) zijn voldoende ter oplossing van alle gevallen, die bij de scheefhoekige driehoeken kunnen

voorkomen. Haar aantal zou, even als bij de rechthoekige, tien zijn, zoo er geen gelijke onder voorkwamen; tengevolge daarvan zijn er maar vier verschillende gevallen. De gegevens kunnen namelijk zijn:

1°. Een zijde en twee hoeken.

2°. Twee zijden en den ingesloten hoek.

3°. Twee zijden met een der overstaande hoeken.

4°. De drie zijden.

Eerste geval.

55. Zij gegeven de zijde a met de beide hoeken B en C.

Men vindt de onbekenden uit:

$$A = 180° - (B + C),\quad \left.\begin{aligned} b &= \frac{a.\sin.B}{\sin.A} = \frac{a.\sin.B}{\sin.(B+C)} \\ c &= \frac{a.\sin.C}{\sin.A} = \frac{a.\sin.C}{\sin.(B+C)} \end{aligned}\right\} \text{form.}(3)$$

Het is natuurlijk onverschillig welke hoeken gegeven zijn, omdat de derde, het supplement zijnde van de som van de beide andere, daardoor ook bekend is.

Voorbeeld van berekening.

Zij gegeven: $a = 7858$, $B = 59°35'36''$ en $C = 50°19'2''$.

Men heeft: $B+C=109°54'38''$, $A=70°5'22''$.

$\log.a = 3.895312$	$\log.a = 3.895312$
$\log.\sin.B = 9.935736$	$\log.\sin.C = 9.886260$
$\text{ac.}\log.\sin.(B+C) = 10.026768$	$\text{ac.}\log.\sin.(B+C) = 10.026768$
$\log.b = 3.857816$	$\log.c = 3.808340$
$b = 7208$	$c = 6431.9$

Tweede geval.

56. Zij gegeven de zijden a en b en den ingesloten hoek C.

Ter berekening der onbekenden hebben wij de formules (4) en (3)

$$\text{tg.}\tfrac{1}{2}(A - B) = \frac{a - b}{a + b}\cot.\tfrac{1}{2}C;\quad c = \frac{a.\sin.C}{\sin.A} = \frac{b.\sin.C}{\sin.B}\quad . . (a)$$

Aanmerking 1. De zijden a en b kunnen alleen door hare betrekking tot elkander of door hare logarithmen gegeven zijn; in beide gevallen kan men op de volgende wijze de hoeken vinden. Men heeft namelijk:

$$\text{tg.}\tfrac{1}{2}(A - B) = \frac{1 - \frac{b}{a}}{1 + \frac{b}{a}} \text{cot.}\tfrac{1}{2}C.$$

Men stelle nu $\frac{b}{a} = \text{tg.}\varphi$, dan wordt

$$\text{tg.}\tfrac{1}{2}(A - B) = \frac{1 - \text{tg.}\varphi}{1 + \text{tg.}\varphi} \text{cot.}\tfrac{1}{2}C = \text{tg.}(45° - \varphi)\,\text{cot.}\tfrac{1}{2}C. \quad . \quad (b)$$

Voor de zijde c vindt men door dezelfde formule als boven het betrekkingsgetal tot a en b.

Aanmerking 2. De zijde c kan echter ook rechtstreeks uit de gegevens worden afgeleid, door de formule (5).

Daartoe heeft men:

$$c = \sqrt{(a^2 + b^2 - 2ab.\cos.C)}.$$

Volgens form. (52) is $\cos.C = 1 - 2\sin.^2\tfrac{1}{2}C$, zoodat men door substitutie dezer waarde verkrijgt:

$$c = \sqrt{(a^2 + b^2 - 2ab + 4ab.\sin.^2\tfrac{1}{2}C)} = \sqrt{\{(a - b)^2 + 4ab.\sin.^2\tfrac{1}{2}C\}},$$

$$\text{of} \quad c = (a - b)\sqrt{\left\{1 + \frac{4ab.\sin.^2\tfrac{1}{2}C}{(a - b)^2}\right\}}$$

Stelt men nu $\frac{4ab.\sin.^2\tfrac{1}{2}C}{(a - b)^2} = \text{tg.}^2\varphi$,

$$\text{dus:} \quad \text{tg.}\varphi = \left\{\frac{2\sin.\tfrac{1}{2}c\sqrt{ab}}{a - b}\right\}$$

dan wordt: $c = (a - b)\sec.\varphi \quad . \quad . \quad . \quad (c)$

Voorbeeld van berekening.

Zij gegeven $b = 5169$, $a = 4627$, $C = 52°4'53''$.

Volgens de formules (a) heeft men:

$a - b = -542$, $\quad a + b = 9796$, $\quad \tfrac{1}{2}C = 26°2'26''5$.

$$\begin{aligned}
\log.(a - b) &= 2.733999(-)\\
\text{ac.}\log.(a + b) &= 6.008951\\
\log.\cot.\tfrac{1}{2}C &= 10.311035\\
\hline
\log.\text{tg.}\tfrac{1}{2}(A - B) &= 9.053985(-)\\
\tfrac{1}{2}(A - B) &= -6°27'38''\\
90° - \tfrac{1}{2}C = \tfrac{1}{2}(A + B) &= 63°57'33''5\\
A &= 57°29'55''5\\
B &= 70°25'11''5
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\log.a &= 3.665299\\
\log.\sin.C &= 9.897014\\
\text{ac.}\log.\sin.A &= 10.073978\\
\hline
\log.c &= 3.636291\\
c &= 4328.....
\end{aligned}$$

Volgens de formules (b) heeft men:

$$\begin{aligned} \log.b &= 3.713407 \\ \text{ac.lag.}a &= 6.334701 \\ \hline \log.\text{tg}.\varphi &= 10.048108 \\ \varphi &= 48°10'1'' \\ 45°-\varphi &= -3°10'1'' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log.\text{tg}.(45°-\varphi) &= 8.742960(-) \\ \log.\cot.\tfrac{1}{2}C &= 10.311035 \\ \hline \log.\text{tg}.\tfrac{1}{2}(A-B) &= 9.053995(-) \\ \tfrac{1}{2}(A-B) &= -6°27'38'' \end{aligned}$$

De formule (c) geeft:

$$\begin{aligned} \log.a &= 3.665299 \\ \log.b &= 3.713407 \\ \hline & \ 7.378706 \\ 2 & \overline{} \\ & \ 3.689353 \\ \log.\sin.\tfrac{1}{2}C &= 9.642474 \\ \log.2 &= 0.301030 \\ \text{ac.log.}(a-b) &= 7.266001(-) \\ \hline \log.\text{tg}.\varphi &= 10.898858(-) \\ \varphi &= 97°11'38''5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log.(a-b) &= 2.733999(-) \\ \log.\sec.\varphi &= 10.902292(-) \\ \hline \log.c &= 3.636291 \\ c &= 4328.... \end{aligned}$$

De negatieve toestand van $(a - b)$ en daardoor van $A - B$ en $45° - \varphi$ had men kunnen vermijden door te schrijven $\text{tg}.\tfrac{1}{2}(B - A) = \dfrac{b - a}{b + a} \cot.\tfrac{1}{2}C$ of door in de formule (c) $\sqrt{(a - b)^2}$ gelijk $b - a$ te nemen.

Derde geval.

57. Zij gegeven de zijden a en b en de hoek A.

Men vindt de onbekenden uit de formules:

$$\sin.B = \frac{b.\sin.A}{a};\ C = 180° - (A + B);\ c = \frac{a.\sin.C}{\sin.A} = \frac{b.\sin.C}{\sin.B}.$$

Daar de hoek B door zijn sinus bepaald wordt, geeft dit aanleiding tot de volgende opmerkingen.

1°. Is $b.\sin.A > a$, dan is $\sin.B > 1$, hetgeen ongerijmd is. In dat geval kan er dus geen driehoek zijn.

2°. Is $b.\sin.A = a$, dan is $\sin.B = 1$, dus $B = 90°$. Is nu A scherp, dan is de driehoek rechthoekig in B.

3°. Is $b.\sin.A < a$, dan is $\sin.B < 1$ en dan heeft B twee waarden, die elkanders supplementen zijn.

Is nu $A \gtrless 90°$ en $a > b$, dan kan B niet anders dan scherp zijn. In deze gevallen is er dus maar een driehoek.

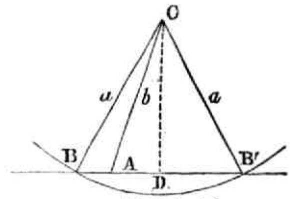
Is $A < 90°$ en $a < b$, dan voldoen de beide waarden van B en zijn er alzoo twee driehoeken. Stelt men toch $A = 90° - \delta$ en $B = 90° \mp \delta'$, dan volgt uit $a < b$ dat $A < B$ is, dus $90° - \delta < 90° - \delta'$, waaruit volgt $\delta > \delta'$, derhalve:

$$A + B = 90° - \delta + (90° \mp \delta') = 180° - (\delta \pm \delta').$$

Beide waarden van B maken dus $A + B < 180°$ en voldoen alzoo aan de gegevens. In dit geval zal men ook voor den hoek C en de zijde c twee waarden vinden.

De meetkunstige constructie zal dit nader bevestigen.

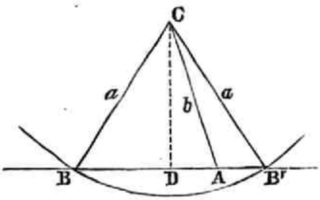
Fig. 14.



$A > 90°, a > b$

Zij, in fig. 14, $BAC > 90°$ en $a > b$; indien men dan uit C met a als straal een cirkelboog beschrijft, dan zal deze de lijn BB' snijden in twee punten B en B' en er ontstaan alzoo twee driehoeken, waarvan alleen de driehoek BAC aan de gegevens voldoet.

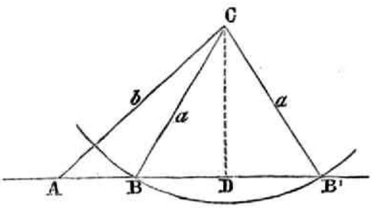
Fig. 15.



$A < 90°, a > b$

Doet men hetzelfde in fig. 15, waarin $A < 90°$ en $a > b$ is, dan ontstaan ook twee driehoeken, waarvan echter alleen ABC voldoet.

Fig. 16.



$A < 90°, a < b$

In fig. 16 echter voldoen beide driehoeken. De driehoeken AB'C, in fig. 14 en 15, worden *oneigenlijke* driehoeken genoemd; de zijden AB' en de hoek ACB' moeten als *negatief* beschouwd worden, zoo als ook uit de berekening blijkt, als men de stompe waarde van B in rekening brengt.

Merkt men verder op dat $CD = b.\sin.A$ is, dan blijkt ook uit de figuur waarom er, als $b.\sin.A > a$ is, geen driehoek bestaat.

Dit is namelijk de waarde van de loodlijn CD en deze zou dus grooter moeten zijn dan de straal a, hetgeen niet mogelijk is. Is die loodlijn gelijk aan den straal, dan wordt de driehoek blijkbaar rechthoekig.

Dit geval heet het *twijfelachtige*, omdat, daar de hoek A door zijn sinus in rekening komt, er eigenlijk gegeven is: twee zijden met den sinus van een der overstaande hoeken, waardoor het onzeker is of A dan wel 180° — A bedoeld wordt.

De zijde c kan ook rechtstreeks uit de gegevens worden afgeleid, door middel van de formule (5). Men heeft daartoe:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos.A,$$

waaruit: $c^2 - 2bc.\cos A - (a^2 - b^2) = 0,$

en hieruit: $c = b.\cos.A \pm \sqrt{\{b^2\cos.^2A + a^2 - b^2\}}$

of $c = b.\cos.A \pm \sqrt{\{a^2 - b^2(1 - \cos.^2A)\}}$

dat is: $c = b.\cos.A \pm \sqrt{(a^2 - b^2\sin.^2A)}.$

Ook hieruit blijkt, dat als $b.\sin.A > a$ is, de driehoek onbestaanbaar is; is $b.\sin.A = a$, dan wordt $c = b.\cos.A$ en dus de zijde van een rechthoekigen driehoek, waarin b de hypotenusa is.

Is $b.\sin.A < a$, dan heeft c twee waarden, die beide *positief*, één *positief* en de andere *negatief*, of beide *negatief* zijn, overeenstemmende met *twee* driehoeken, *een* driehoek of *geen* driehoek.

Tot het *positief* zijn van de beide waarden van c wordt gevorderd dat $b.\cos.A$ *positief* zij, dus $A < 90°$ en

$$b.\cos.A > \sqrt{(a^2 - b^2\sin.^2A)},$$

of $b^2\cos.^2A > a^2 - b^2\sin.^2A,$

waaruit: $b^2 > a^2$ of $b > a.$

Is slechts een van de waarden van c *positief*, dan kan dit plaats hebben onder de voorwaarden:

1°. $b.\cos.A$ *positief*, dus $A < 90°$

en $b.\cos A < \sqrt{(a^2 - b^2\sin.^2A)},$

waaruit: $b < a;$

of 2°. $b.\cos.A$ *negatief*, dus $A > 90°$

en $-b.\cos.A < \sqrt{(a^2 - b^2\sin.^2A)},$

waaruit: $b < a.$

Is daarentegen $b.\cos.A$ *negatief*, dus $A > 90°$ en

$$-b.\cos.A > \sqrt{(a^2 - b^2\sin.^2A)},$$

waaruit: $b > a,$

dan zijn de beide waarden van c *negatief* en is er dus geen driehoek.

Even als uit de figuur vinden wij dus:

Twee driehoeken als $A < 90°$ en $a < b$.

Een driehoek als $A \gtrless 90°$ en $a > b$.

Geen driehoek als $A > 90°$ en $a < b$.

Men kan nog opmerken dat de beide deelen, waaruit de zijde c bestaat, de deelen zijn, waarin die zijde verdeeld wordt, door de loodlijn, die er uit het overstaande hoekpunt op valt. In fig. 14 namelijk is:

$$AD = - AC.\cos.A = - b.\cos.A.$$
$$BD = \sqrt{(BC^2 - CD^2)} = \sqrt{(a^2 - b^2\sin.^2A)}.$$

In fig. 15 is:

$$AD = AC.\cos.A = b.\cos.A.$$
$$BD = \sqrt{(BC^2 - CD^2)} = \sqrt{(a^2 - b^2\sin.^2A)}.$$

In fig. 16 heeft men:

$$AD = AC.\cos.A = b.\cos.A.$$
$$B'D = BD = \sqrt{(BC^2 - CD^2)} = \sqrt{(B'C^2 - CD^2)} = \sqrt{(a^2 - b^2\sin.^2A)}.$$

In fig. 14 is $c = AB = AD + BD$, waarin AD *negatief*.

In fig. 15 is $c = AB = AD + BD$, waarin AD *positief*.

In fig. 16 is $c = AB = AD - BD$

en $c = AB' = AD + BD = AD + B'D$,

waarin in beide AD *positief* is.

Voorbeeld van berekening.

Zij gegeven $a = 477.8$, $b = 535.3$ en $A = 51°40'$.

Men heeft:

$$\begin{aligned} \log.b &= 2.728597 \\ \log.\sin.A &= 9.894546 \\ ac.\log.a &= 7.320754 \\ \hline \log.\sin.B &= 9.943897 \end{aligned}$$

$B = 61°29'58''$	$B' = 118°30'2''$
$A + B = 113°9'58''$	$A + B' = 170°10'2''$
$C = 66°50'2''$	$C' = 9°49'58''$
$\log.a = 2.679246$	$\log.a = 2.679246$
$\log.\sin.C = 9.963490$	$\log.\sin.C' = 9.232420$
$ac.\log.\sin.A = 10.105454$	$ac.\log.\sin.A = 10.105454$
$\log.c = 2.748190$	$\log.c' = 2.024120$
$c = 560$	$c' = 105.711$

Ter berekening van de zijde c uit de formule

$$c = b.\cos.A \pm \sqrt{(a^2 - b^2 \sin.^2 A)}$$

moet men $\sqrt{(a^2 - b^2\sin.^2A)}$ vooraf voor logarithmische berekening geschikt maken, hetgeen daar $a^2 > b^2\sin.^2A$ is, op de volgende wijze kan plaats hebben.

Men stelle $\frac{b.\sin.A}{a} = \sin.\varphi$, dan wordt:

$$\sqrt{(a^2-b^2\sin.^2A)}=\sqrt{a^2(1-\frac{b^2\sin.^2A}{a^2})}=\sqrt{a^2\cos.^2\varphi}=a.\cos.\varphi.$$

Het is echter duidelijk, dat de hulphoek φ hier niet anders is dan de hoek B en dus wordt:

$$c = b.\cos.A \pm a.\cos.B,$$

waaruit de beide deelen van de zijde c gemakkelijk te berekenen zijn. Ten gevolge van het dubbele teeken heeft men voor B slechts een waarde in rekening te brengen.

Vierde geval.

58. Zij gegeven de drie zijden a, b en c.

De hoek A kan gevonden worden uit de formule (5).

Men heeft namelijk uit:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos.A.$$

$$\cos.A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Deze uitdrukking voor cos.A is voor logarithmische berekening weinig geschikt. Men herleidt ze daarom op de volgende wijze:

Uit form. (56) en (57) heeft men:

$$1 - \cos.A = 2\sin.^2\tfrac{1}{2}A.$$

$$1 + \cos.A = 2\cos.^2\tfrac{1}{2}A.$$

Men trekke dus de vergelijking af van $1 = 1$ en telle ze er bij op, dan komt er:

$$2\sin.^2\tfrac{1}{2}A = \frac{a^2 - (b-c)^2}{2bc} = \frac{(a - b + c)(a + b - c)}{2bc}$$

$$2\cos.^2\tfrac{1}{2}A = \frac{(b - c)^2 - a^2}{2bc} = \frac{(a + b + c)(b + c - a)}{2bc}$$

Stelt men nu $a + b + c = 2s$, dan wordt:

$$a - b + c = 2(s - b)$$

$$a + b - c = 2(s - c)$$

$$b + c - a = 2(s - a)$$

en hierdoor verkrijgt men na worteltrekking:

$$\sin.\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$$

$$\cos.\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}},$$

waaruit door deeling:

$$\text{tg}.\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

en door tweemaal het product te nemen:

$$\sin.A = \frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

De berekening van den hoek A door sin.A is echter minder raadzaam, omdat dan onzeker blijft, welke waarde voor A aan de gegevens voldoet; voor $\tfrac{1}{2}$A moet men natuurlijk de kleinste waarde nemén.

Voor de hoeken B en C gelden dezelfde formules met verwisseling der letters, zoodat men heeft:

$$\sin.\tfrac{1}{2}B = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}};\quad \sin.\tfrac{1}{2}C = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}.$$

$$\cos.\tfrac{1}{2}B = \sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}};\quad \cos.\tfrac{1}{2}C = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}.$$

Voorbeeld van berekening.

Zij gegeven a = 46.3, b = 71.2 en c = 92.6.

Ter berekening der hoeken zullen wij gebruik maken van de formules:

$$\sin.\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}},\quad \cos.\tfrac{1}{2}B = \sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}},$$

$$\cos.\tfrac{1}{2}C = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}.$$

Men heeft:

a = 46.3	log.(s — b) = 1.529559
b = 71.2	log.(s — c) = 1.095169
c = 92.6	ac.log.b = 8.147520
2s = 210.1	ac.log.c = 8.033389
s = 105.05	8.805637
	2
s — b = 33.85	log.sin.$\tfrac{1}{2}$A = 9.402819
s — c = 12.45	$\tfrac{1}{2}$A = 14°38′41″
	A = 29°17′22″

log.s $=$ 2.021395		log.s $=$ 2.021395	
log.(s — b) $=$ 1.529559		log.(s — c) $=$ 1.095169	
ac.log.a $=$ 8.334419		ac.log.a $=$ 8.334419	
ac.log.c $=$ 8.033389		ac.log.b $=$ 8.147520	
9.918762		9.598503	
2		2	
log.cos.$\frac{1}{2}$B $=$ 9.959381		log.cos.$\frac{1}{2}$C $=$ 9.799252	
$\frac{1}{2}$B $=$ 24°23′46″		$\frac{1}{2}$C $=$ 50°57′34″	
B $=$ 48°47′32″		C $=$ 101°55′8″	

Wij hebben de hoeken B en C door den cosinus berekend, omdat wij daardoor log.(s — a) niet noodig hadden.

Men kan echter den tweeden onbekenden hoek ook door den regel der sinussen bepalen.

---

§ 11.

Berekening van het oppervlak of den inhoud van den scheefhoekigen driehoek.

59. *Eerste geval.* Zij, fig. 11, I het begeerde oppervlak, dan is:

$$I = \tfrac{1}{2}AB \times CD,$$

maar $$AB = \frac{a.\sin.C}{\sin.(B + C)} \text{ en } CD = a.\sin.B,$$

dus $$I = \tfrac{1}{2}a^2\frac{\sin.B \sin.C}{\sin.(B+C)}.$$

Tweede en derde geval. Men heeft $I = \frac{1}{2}AB \times CD$, maar $CD = a.\sin.B = b.\sin.A$, dus na substitutie:

$$I = \tfrac{1}{2}ac.\sin.B = \tfrac{1}{2}bc.\sin.A = \tfrac{1}{2}ab.\sin.C,$$

moetende echter in het derde geval als a, b en A gegeven zijn, de hoek B vooraf berekend worden om C te kunnen bepalen; men zal dus ook voor I twee waarden kunnen vinden.

Vierde geval. Daar $\sin.A = \frac{2}{bc}\sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}$ is, heeft men na substitutie in $I = \frac{1}{2}bc.\sin.A$

$$I = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}.$$

60. Men oefene zich door het berekenen der onbekende elementen van een driehoek, als gegeven zijn:

1°.	$B = 4°46'38''$,	$C = 145°20'49''$,	$a = 629$.
2°.	$B = 138°39'8''$,	$a = 620.8$,	$c = 1234.5$.
3°.	$C = 113°45'20''$,	$c = 896.2$,	$a = 328.4$.
4°.	$a = 481.6$,	$b = 500$,	$c = 793.8$.
5°.	$A = 54°32'52''$,	$B = 50°40'58''$,	$a = 614.7$.
6°.	$C = 57°32'15''$,	$a = 1484$,	$b = 4208$.
7°.	$c = 2163$,	$b = 877.2$,	$B = 22°2'11''$.
8°.	$c = 632$,	$a = 494$,	$b = 1035.7$.
9°.	$A = 38°44'39''$,	$C = 49°16'4''$,	$c = 428$.
10°.	$b = 126$,	$c = 253.05$,	$A = 55°51'32''$.
11°.	$a = 953.93$,	$b = 640.3$,	$B = 41°26'21''$.
12°.	$a = 572829$,	$b = 787654$,	$c = 982762$.
13°.	$a:b = 739 : 809$,	$C = 58°10'20''$.	
14°.	$a = 63.548$,	$b = 48.009$,	$A = 65°0'11''$.

15°. Van een driehoek gegeven zijnde een zijde, de som of het verschil der beide overige zijden en den overstaanden hoek, vraagt men de onbekende elementen te berekenen.

16°. Van een driehoek gegeven zijnde een zijde, de som of het verschil der beide overige zijden, en het verschil der aanliggende hoeken, den driehoek op te lossen.

17°. Van een driehoek gegeven zijnde een zijde met een der aanliggende hoeken, benevens de som of het verschil der beide andere zijden, den driehoek op te lossen.

18°. Gegeven zijnde twee zijden met den ingesloten hoek, de stukken te berekenen, waarin die hoek door de loodlijn, op de derde zijde neergelaten, verdeeld wordt.

19°. Gegeven een zijde met de beide aanliggende hoeken, de stukken te berekenen, waarin die zijde verdeeld wordt, door een lijn, welke den overstaanden hoek midden door deelt.

20°. Gegeven twee zijden met den ingesloten hoek, de stukken te bepalen, waarin de hoek verdeeld wordt door een lijn, welke de overstaande zijde midden door deelt.

21°. Gegeven de som van twee zijden, de ingesloten hoek, en de loodlijn, vallende op de derde zijde, de elementen van den driehoek te bepalen.

22°. Den driehoek op te lossen als gegeven zijn een zijde, de overstaande hoek en de loodlijn op die zijde.

23°. Van een driehoek gegeven zijnde twee zijden, en de lijn, die den ingesloten hoek midden door deelt, de overige elementen te bepalen.

24°. Van een driehoek de drie zijden gegeven zijnde, de lijnen te berekenen, die de hoeken midden door deelen.

25°. Indien de lengte van drie lijnen gegeven is, welke den tophoek van een driehoek in vier gelijke deelen verdeelen, vraagt men naar de formules om de zijden en hoeken des driehoeks te berekenen.

26°. Van een driehoek gegeven zijnde de bazis, het verschil der hoeken aan de bazis en het verschil der opstaande zijden, vraagt men al de elementen te bepalen.

27°. Uit den top van een driehoek heeft men twee lijnen getrokken naar de bazis, waardoor de tophoek in drie ongelijke deelen verdeeld is; zoo nu deze hoeken, benevens de twee getrokken lijnen gegeven zijn, vraagt men den driehoek te bepalen.

28°. Uit de formule $\sin.^2 C - \sin.^2 A - \sin.^2 B + 2\sin.A\,\sin.B\cos.C = 0$, waarin $A + B + C = 180°$, af te leiden de formule $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos.C$.

29°. Indien R de straal is van den cirkel om een driehoek beschreven, heeft men:

1°. $R = \dfrac{a}{2\sin.A} = \dfrac{b}{2\sin.B} = \dfrac{c}{2\sin.C} = \dfrac{a}{2\sin.(B + C)}$.

2°. $R = \dfrac{a}{2\cos.(S - A)}$, waarin $S = \frac{1}{2}(A + B + C)$.

3°. $R = \dfrac{\sqrt{(a^2 + b^2 - 2ab.\cos.C}}{2\sin.C}$.

4°. $R = \dfrac{c\sqrt{\{\sin.^2(A+B) - 2\sin.A\cos.B\sin.(A+B) + \sin.^2 A\}}}{2\sin.B\,\sin.(A + B)}$.

5°. $R = \dfrac{s}{\sin.A + \sin.B + \sin.C} = \dfrac{s}{4\cos.\frac{1}{2}A\cos.\frac{1}{2}B\cos.\frac{1}{2}C}$.

6°. $R = \dfrac{ab.\sin.C}{2b.\sin.A\,\sin.C}$.

Men vraagt deze formules te bewijzen.

30°. Zij r de straal van den ingeschreven cirkel, dan is:

1°. $r = \dfrac{c.\sin.A\sin.B}{\sin.A\sin.B\sin.C}$.

2°. $r = (s - a)\ tg.\frac{1}{2}A$.

3°. $r = \dfrac{ab.\sin.C}{2s}$.

4°. $r = s.tg.\frac{1}{2}A tg.\frac{1}{2}B tg.\frac{1}{2}C$.

Men vraagt het bewijs.

31°. Zij I het oppervlak van een driehoek, dan is:

1°. $I = \dfrac{\frac{1}{2}c^2}{\cot.A + \cot.B}$.

2°. $I = \frac{1}{2}(a^2 - b^2)\ \dfrac{\sin.A\sin.B}{\sin.(A-B)}$.

3°. $I = \frac{1}{4}(a + b)^2\ \dfrac{\sin.A\sin.B}{\cos.^2\frac{1}{2}(A - B)tg.\frac{1}{2}(A + B)}$.

4°. $I = \dfrac{abc}{4s(\sin.A + \sin.B + \sin.C)}$.

5°. $I = \dfrac{2s^2\ \sin.A\ \sin.B\ \sin.C}{(\sin A + \sin.B + \sin.C)^2}$.

6°. $I = s^2 tg.\frac{1}{2}A tg.\frac{1}{2}B tg.\frac{1}{2}C$.

7°. $I = s(s - a)\ tg.\frac{1}{2}A$.

Deze te bewijzen.

32°. Van een vierhoek in den cirkel beschreven zijn de vier zijden gegeven; men vraagt de diagonalen, de middellijn des cirkels en het oppervlak des vierhoeks.

33°. Men vraagt den inhoud eens vierhoeks uit te drukken in drie van zijn zijden en de twee hoeken, die door deze zijden gevormd worden.

34°. De straal der aarde 6366198 meter zijnde, vraagt men de lengte van een parallelcirkel op de breedte van 52°22′30″ te bepalen.

35°. Van twee elkander snijdende cirkels zijn de stralen 13 en 14 en de afstand der middelpunten 15 decimeter. Men vraagt het oppervlak te bepalen van het vlak, dat aan beide cirkels gemeen is.

36°. Van een bolvormig segment is het bolvormig oppervlak 324 en het grondvlak 225 vierkante meter; men vraagt den boog des grooten cirkels te berekenen, die dit bolvormig segment in twee gelijke en gelijkvormige deelen verdeelt.

37°. In den driehoek ADC gegeven zijnde de lijn DB, die den hoek D midden door deelt gelijk 26.0543, benevens de hoeken A = 53°17'35" en C = 86°52', vraagt men de zijden AD en CD, alsmede de stukken AB en BC te bepalen.

38°. Van een driehoek ABC, waarin men een cirkel heeft beschreven, is bekend hoek C = 92°5'17", benevens de lijnen AD = 17.347 en BD = 30.829, die uit de hoekpunten A en B tot het middelpunt D des ingeschreven cirkels getrokken zijn; men vraagt dezen driehoek te bepalen.

39°. Een driehoek te berekenen, als gegeven zijn een der hoeken aan de bazis, benevens de loodlijnen, die uit de hoeken aan de bazis op de tegenoverstaande zijden vallen.

---

§ 12.

Toepassing van de rechtlijnige trigonometrie op eenige vraagstukken tot de werkdadige meetkunst (Geodesie) behoorende.

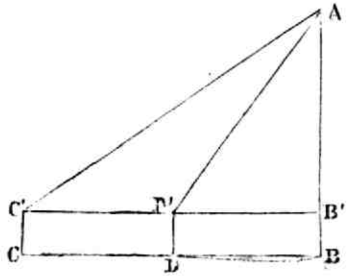
a. Hoogtemetingen.

61. Het ligt niet in onze bedoeling hier een overzicht te geven van de middelen en werktuigen, die men bezigt om in het werkdadige afstanden, richtingen en hoeken te meten. Wie daaromtrent meer wenscht te weten, kan de daarvoor bestaande handleidingen raadplegen. Wij zullen ons alleen bepalen tot de behandeling van enkele belangrijke vraagstukken en aantoonen hoe de trigonometrie daarbij met vrucht wordt toegepast.

Vraagstuk 1. De hoogte van een voorwerp, een toren bijv., te meten.

Zij, in fig. 17, AB de hoogte van het te meten voorwerp.

Fig. 17.



Men plaatse ergens, bijv. in D, een baken DD' en mete den hoek AD'B', waaronder die hoogte uit den top des bakens gezien wordt, benevens den afstand B'D' van het baken tot die hoogte. Zij nu AD'B' = α, B'D' = a, DD' = h en AB = x, dan is in den rechthoekigen driehoek AB'D':

$$AB' = a.tg\alpha,$$

derhalve: $$x = a.tg\alpha + h.$$

62. **Vraagstuk 2.** Hetzelfde gevraagd wordende als de voet des torens ongenaakbaar is.

Indien het terrein het toelaat, dan plaatse men, fig. 17, twee bakens CC' en DD' van gelijke hoogte in een rechte lijn met den voet des torens en mete den afstand $C'D' = a$ der bakens van elkander. Verder mete men de hoeken $AC'B' = \beta$ en $AD'B' = \alpha$, waaronder de toren uit de toppen der bakens wordt gezien, dan heeft men in driehoek $AC'D'$, waarin hoek $C'AD' = \alpha - \beta$ is:

$$AC' = \frac{a.\sin.\alpha}{\sin.(\alpha - \beta)},$$

maar in driehoek $AC'B'$ is:

$$AB' = AC'.\sin.\beta = \frac{a.\sin.\alpha\sin.\beta}{\sin.(\alpha - \beta)},$$

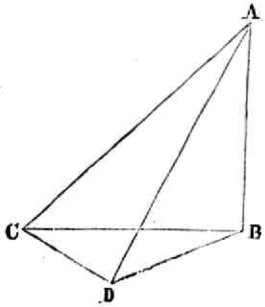
dus: $$AB = \frac{a.\sin.\alpha\sin.\beta}{\sin.(\alpha - \beta)} + h.$$

NB. In het vervolg zullen wij de hoogte der bakens buiten rekening laten, daar zij slechts bij de berekende hoogte van het voorwerp behoeven opgeteld te worden.

63. **Vraagstuk 3.** Indien de voet des torens ongenaakbaar is en het niet mogelijk is twee bakens in rechte lijn met den voet des torens te plaatsen, kan men op de volgende wijze de hoogte bepalen.

Men plaatse, fig. 18, in willekeurige richting twee bakens C en D van gelijke hoogte en mete $CD = a$. Verder mete men uit den top van elk der bakens, de hoeken waaronder men den toren, en die waaronder men den top des torens en van het andere baken ziet. Indien men dan vindt hoek $ACB = \alpha$, hoek $ACD = \beta$, hoek $ADB = \gamma$ en hoek $ADC = \delta$, en men de hoogte $AB = x$ stelt, dan heeft men in driehoek ACD:

Fig. 18.



$$a : AC : AD = \sin.(\beta+\delta) : \sin.\delta : \sin.\beta,$$

waaruit:

waaruit:

$$AC = \frac{a.\sin.\delta}{\sin.(\beta + \delta)} \text{ en } AD = \frac{a.\sin.\beta}{\sin.(\beta + \delta)}.$$

Nu is in driehoek ABC:

$$x = AC.\sin.\alpha = \frac{a.\sin.\alpha\sin.\delta}{\sin.(\beta + \delta)},$$

of in driehoek ABD:

$$x = AD.\sin.\gamma = \frac{a.\sin.\beta\sin.\gamma}{\sin.(\beta + \delta)}.$$

Tusschen de gemeten hoeken bestaat dus de betrekking

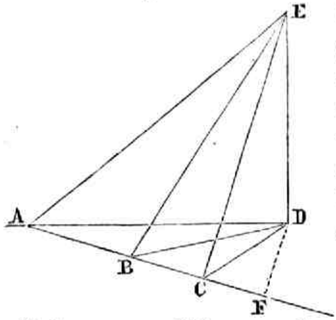
$$\sin.\alpha\sin.\delta = \sin.\beta\sin.\gamma,$$

$$\text{of} \quad \sin.\alpha : \sin.\beta = \sin.\gamma : \sin.\delta,$$

die alzoo als middel van onderzoek voor de juistheid der meting kan dienen.

64. **Vraagstuk 4.** Nog kan men op de volgende wijze werken. Men plaatse, fig. 19, in willekeurige richting drie bakens A, B en C in een rechte lijn, wier onderlinge afstanden AB $= a$, en BC $= b$ gemeten worden. Vervolgens mete men de hoeken EAD $= \alpha$, EBD $= \beta$, en ECD $= \gamma$, waaronder men den toren uit den top van elk der bakens ziet. Laat men nu uit D de loodlijn DF op AC neder, dan is in de driehoeken ADB en BDC:

Fig. 19.



$$AD^2 = AB^2 + BD^2 + 2AB \times BF.$$

$$CD^2 = BC^2 + BD^2 - 2BC \times BF.$$

Stelt men nu DE $= x$, dan heeft men:

$$AD = x.\cot.\alpha,\ BD = x.\cot.\beta \text{ en } CD = x.\cot.\gamma,$$

waardoor de beide vergelijkingen, na substitutie, overgaan in:

$$x^2\cot.^2\alpha = a^2 + x^2\cot.^2\beta + 2a.BF$$

$$x^2\cot.^2\gamma = b^2 + x^2\cot.^2\beta - 2b.BF.$$

Om BF te elemineeren vermenigvuldige men de eerste vergelijking met b en de tweede met a, dan geeft de som:

$$x^2(b.\cot.^2\alpha + a.\cot.^2\gamma) = ab(a + b) + x^2(a + b)\cot.^2\beta,$$

$$\text{waaruit:} \quad x = \sqrt{\frac{ab(a + b)}{b(\cot.^2\alpha - \cot.^2\beta) + a(\cot.^2\gamma - \cot.^2\beta)}}.$$

Ten einde deze uitdrukking meer geschikt te maken voor berekening met logarithmen, kan men de volgende herleiding toepassen.

Men heeft vooreerst:

$$\cot.^2\alpha - \cot.^2\beta = (\cot.\alpha - \cot.\beta)(\cot.\alpha + \cot.\beta) =$$

$$\left(\frac{\cos.\alpha}{\sin.\alpha} - \frac{\cos.\beta}{\sin.\beta}\right)\left(\frac{\cos.\alpha}{\sin.\alpha} + \frac{\cos.\beta}{\sin.\beta}\right) = \frac{\sin.(\beta-\alpha)\sin.(\beta+\alpha)}{\sin.^2\alpha\sin.^2\beta}.$$

Op dezelfde wijze vindt men ook:

$$\cot.^2\gamma - \cot.^2\beta = \frac{\sin.(\beta-\gamma)\sin.(\beta+\gamma)}{\sin.^2\beta\sin.^2\gamma}.$$

Nu is:

$$x^2 = \frac{\dfrac{a(a+b)}{\cot.^2\alpha - \cot.^2\beta}}{1 + \dfrac{a(\cot.^2\gamma - \cot.^2\beta)}{b(\cot.^2\alpha - \cot.^2\beta)}},$$

hetgeen, na substitutie van de gevonden waarden, en herleiding geeft:

$$x^2 = \frac{\dfrac{a(a+b)\sin.^2\alpha\sin.^2\beta}{\sin.(\beta-\alpha)\sin.(\beta+\alpha)}}{1 + \dfrac{a.\sin.^2\alpha\sin.(\beta-\gamma)\sin.(\beta+\gamma)}{b.\sin.^2\gamma\sin.(\beta-\alpha)\sin.(\beta+\alpha)}}.$$

Stellende nu de breuk $\dfrac{a.\sin.^2\alpha\sin.(\beta-\gamma)\sin.(\beta+\gamma)}{b.\sin.^2\gamma\sin.(\beta-\alpha)\sin.(\beta+\alpha)} = \mathrm{tg.}^2\varphi$, dan wordt:

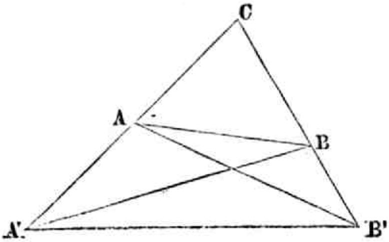
$$x = \sin.\alpha\sin.\beta\cos.\varphi\sqrt{\frac{a(a+b)}{\sin.(\beta-\alpha)\sin.(\beta+\alpha)}}.$$

Mocht de breuk, die gelijk $\mathrm{tg.}^2\varphi$ gesteld is, *negatief* zijn, dan kan men haar gelijk $\mathrm{tg.}\varphi$ stellen, waardoor de noemer verandert in $1 + \mathrm{tg.}\varphi = \dfrac{\sin.(45^\circ+\varphi)\sqrt{2}}{\cos.\varphi}.$

b. Het bepalen van afstanden.

65. **Vraagstuk 5.** Uit een punt den afstand te bepalen tot een ander ontoegankelijk punt.

Fig. 20.



Indien, fig. 20, uit A den afstand tot het ontoegankelijke punt C moet bepaald worden, plaatse men in A en een willekeurig genaakbaar punt B bakens, op een afstand AB $= a$, en mete dan de hoeken CAB$=\alpha$ en ABC $= \beta$, dan is:

$$AC = \frac{a.\sin.\beta}{\sin.(\alpha+\beta)}.$$

66. **Vraagstuk 6.** Het voorgaande vraagstuk op te lossen zonder hoeken te meten.

Daartoe plaatse men, fig. 20, in A en A′, even als in B en B′ bakens in de richting van C en mete van den vierhoek ABB′A′ de zijden AA′, AB en BB′ zoowel als de beide diagonalen, dan zijn daardoor in de driehoeken AA′B en ABB′ de zijden bekend en kan men dus de hoeken A′AB en ABB′ berekenen. Hierdoor heeft men in den driehoek ABC een zijde met twee hoeken bekend en kan dus AC worden berekend.

67. **Vraagstuk 7.** Den afstand te bepalen van twee punten, die beide ontoegankelijk zijn.

Zij, fig. 21, A en B de beide ontoegankelijke punten, dan plaatse

Fig. 21.

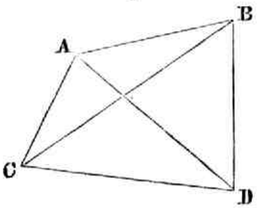
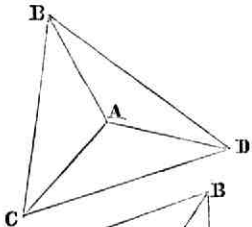


Fig. 23.



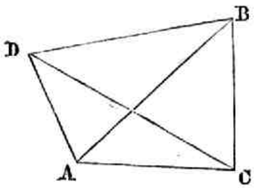


Fig. 22.

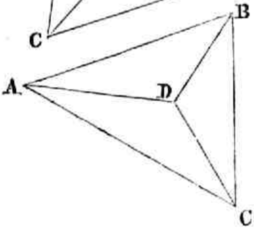


Fig. 24.

men ergens in C en D twee bakens op een afstand CD = a van elkander en mete de hoeken, waaronder uit elk der bakens de beide punten A en B, zoowel als een dezer punten en het andere baken gezien wordt. Indien dan hoek ACB = α, hoek BCD = β, hoek CDA = γ en hoek ADB = δ gemeten is, dan heeft men:

$$AC = \frac{a.\sin.\gamma}{\sin.(\alpha + \beta + \gamma)} \text{ en } BC = \frac{a.\sin.(\gamma + \delta)}{\sin.(\beta + \gamma + \delta)}.$$

Hierdoor zijn in driehoek ABC bekend twee zijden met den ingesloten hoek en kan dus de derde zijde AB, volgens 56, gevonden worden.

De lijnen AB en CD kunnen ten opzichte van elkander verschillende standen hebben, zoo als blijkt uit de figuren 22, 23 en 24. Het is echter niet moeilijk de gevonden formules voor elken bijzonderen stand te wijzigen.

68. **Vraagstuk 8.** Men kan het vorige vraagstuk omkeeren, namelijk den afstand der ontoegankelijke punten A en B bekend onderstellen en den afstand der punten C en D door berekening vinden.

Men mete daartoe, fig. 21, even als in vr. 7 dezelfde hoeken in de punten C en D en construeere verder op een willekeurige lijn cd met behulp van de hoeken α, β, γ en δ een vierkoek abcd, dan is het duidelijk dat deze vierhoek gelijkvormig is met den vierhoek ABCD. Gemakshalve neme men cd gelijk aan de eenheid der gebruikte maat, en berekene door de formules uit het vorige vraagstuk de lengte van ab. Zij nu de afstand AB = b, de berekende lengte van ab = d en de onbekende CD = x, dan vindt men deze uit de evenredigheid:

$$AB : ab = CD : cd,$$

of

$$b : d = x : 1,$$

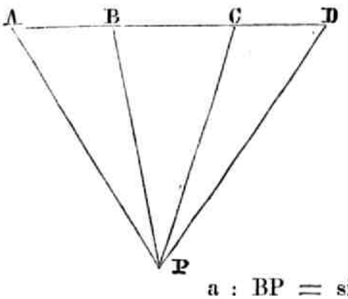
waaruit:

$$x = \frac{b}{d}.$$

69. **Vraagstuk 9.** Indien van vier punten, gelegen in een rechte lijn, de afstand tusschen het eerste en tweede punt, en tusschen het derde en vierde punt bekend is, den afstand tusschen het tweede en derde punt te berekenen.

Indien, fig. 25, AB = a en CD = b gegeven zijn, dan mete men ergens uit een willekeurig punt P, mits niet gelegen op de lijn AD, de hoeken APB = α, BPC = β en CPD = γ, waaronder men uit dit punt elke twee der punten in de lijn AD ziet. Stelt men nu

Fig. 25.



$$BC = x \text{ en } \alpha + \beta + \gamma = \delta,$$

dan heeft men in de driehoeken ABP, BCP, CDP en ADP:

$$a : BP = \sin.\alpha : \sin.A$$
$$BP : x = \sin.C : \sin.\beta$$
$$b : PD = \sin.\gamma : \sin.C$$
$$PD : (a + b + x) = \sin.A : \sin.\delta,$$

waaruit door vermenigvuldiging:

$$ab : x(a + b + x) = \sin.\alpha\sin.\gamma : \sin.\beta\sin.\delta,$$

derhalve: $$x^2 + (a + b)\,x - \frac{ab.\sin.\beta\sin.\delta}{\sin.\alpha\ \sin.\gamma} = 0$$

en hieruit:

$$x = -\tfrac{1}{2}(a + b) \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{\left\{(a + b)^2 + \frac{4ab.\sin.\beta\sin.\delta}{\sin.\alpha\sin.\gamma}\right\}}$$

Voor het bovenste teeken heeft men derhalve:

$$x = -\tfrac{1}{2}(a + b)\,;\,1 - \sqrt{\left(1 + \frac{4ab.\sin.\beta\sin.\delta}{(a + b)^2\sin.\alpha\sin.\gamma}\right)}$$

Om deze waarde van x voor logarithmische berekening geschikt te maken, stelle men:

$$\frac{4ab.\sin.\beta\sin.\delta}{(a + b)^2\sin.\alpha\sin.\gamma} = \mathrm{tg.}^2\varphi,$$

dan wordt:

$$x = -\tfrac{1}{2}(a + b)\ (1 - \sec.\varphi).$$

Maar $1-\sec.\varphi = -\dfrac{1-\cos.\varphi}{\cos.\varphi} = -\dfrac{1-\cos.\varphi}{\sin.\varphi} \times \dfrac{\sin.\varphi}{\cos.\varphi} = -\mathrm{tg.}\tfrac{1}{2}\varphi\ \mathrm{tg.}\varphi,$

derhalve: $$x = \tfrac{1}{2}(a + b)\mathrm{tg.}\tfrac{1}{2}\varphi\mathrm{tg}\varphi.$$

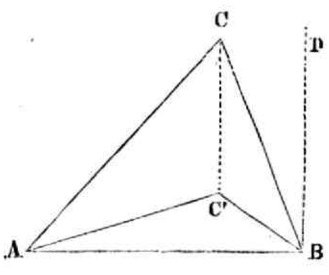
De tweede wortel, *negatief* zijnde, is daarom buiten rekening gelaten.

c. Projecteeren van punten enz. op het horizontale vlak.

70. **Vraagstuk 10.** Twee punten A en B in het horizontale vlak gegeven zijnde, den top C van een verheven voorwerp op dit vlak te projecteeren.

Men mete daartoe, fig. 26, den afstand AB = a der twee punten, benevens de hoeken BAC = α en ABC = β, waaronder men uit elk der punten A en B het punt C en het andere punt ziet. Indien nu ook nog de hoek CBD = γ gemeten wordt, die de verticaal in het punt B met den gezichtsstraal maakt, dan kan men de lengte der lijnen AC′ en BC′ berekenen, waardoor dan de plaats van het punt C′,

Fig. 26.



zijnde de projectie van C op het horizontale vlak, bepaald wordt. Men heeft namelijk in den driehoek ABC:

$$AC = \frac{a.\sin.\beta}{\sin.(\alpha + \beta)} \text{ en } BC = \frac{a.\sin.\alpha}{\sin.(\alpha + \beta)}.$$

Verder is hoek C′BD recht, dus C′BC $= 90° - \gamma$ en derhalve in driehoek CBC′:

$$BC' = BC.\sin.\gamma = \frac{a.\sin.\alpha\sin.\gamma}{\sin.(\alpha + \beta)}$$

$$CC' = BC.\cos.\gamma = \frac{a.\sin.\alpha\cos.\gamma}{\sin.(\alpha + \beta)}.$$

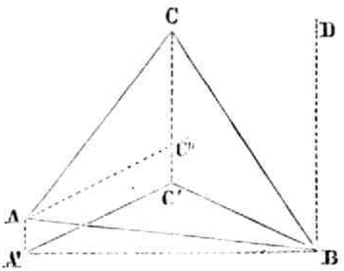
Nu is in driehoek ACC′:

$$AC' = \sqrt{(AC^2 - C'C^2)} = \sqrt{(AC + C'C)\,(AC - C'C')}.$$

71. **Vraagstuk 11.** Hetzelfde gevraagd zijnde, indien de punten A en B niet beide in het horizontale vlak gelegen zijn.

Behalve de gegevens in het vorige vraagstuk, mete men nog, fig. 27, den hoek ABD $= \delta$, welke AB met de verticaal maakt. Alsdan heeft men, even als in vr. 10:

Fig. 27.



$$AC = \frac{a.\sin.\beta}{\sin.(\alpha + \beta)}$$

$$BC = \frac{a.\sin.\alpha}{\sin.(\alpha + \beta)}$$

$$BC' = \frac{a.\sin.\alpha\sin.\gamma}{\sin.(\alpha + \beta)}$$

$$CC' = \frac{a.\sin.\alpha\cos.\gamma}{\sin.(\alpha + \beta)}.$$

Verder is in driehoek AA′B, hoek ABA′ $= 90° - \delta$, derhalve:

$$A'B = a.\sin.\delta \text{ en } AA' = a.\cos.\delta.$$

Trekt men nu AC″ evenwijdig aan A′C′, dan is:

$$C'C'' = AA' \text{ en dus } CC'' = CC' - C'C''$$

en hieruit:

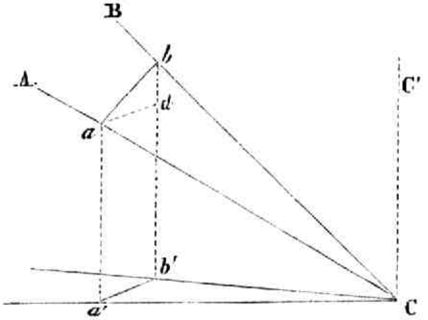
$$A'C' = AC'' = \sqrt{(AC + CC'')\,(AC - CC'')},$$

zoodat nu de driehoek A′BC′ kan geconstrueerd worden en dus de plaats van het punt C′ in het horizontale vlak bepaald is.

72. **Vraagstuk 12.** Den hoek ACB, waaronder men uit eenig punt C in het horizontale vlak, twee punten A en B in de ruimte, bijv. twee sterren, waarneemt, op het horizontale vlak te projecteeren.

Zij, fig. 28, de hoek ACB $= \alpha$ de gemeten hoek, welks projectie a'Cb' $= \varphi$ bepaald moet worden.

Fig. 28.



Men mete dan de hoeken ACC' $= \beta$ en BCC' $= \beta'$, die de gezichtsstralen AC en BC met de verticaal in het punt C maken, en neme op die gezichtsstralen twee punten A en B zoodanig, dat $aC = bC$, gelijk den straal der sinustafels is; verder trekke men de loodlijnen aa' en bb', vereenige de punten a' en b' en a en b door rechte lijnen en trekke nog ad evenwijdig aan $a'b'$, dan is:

$$aa' = \cos.\beta \qquad Ca' = \sin.\beta$$
$$bb' = \cos.\beta' \qquad Cb' = \sin.\beta'$$
$$ad = a'b'$$
$$bd = bb' - db' = bb' - aa' = \cos.\beta' - \cos.\beta.$$

Nu is, in den rechthoekigen driehoek abd:

$$ab^2 = ad^2 + bd^2;$$

maar in driehoek aCb is:

$$ab^2 = aC^2 + bC^2 - 2aC.bC.\cos.\alpha = 2 - 2\cos.\alpha$$

en in driehoek $a'Cb'$:

$$a'b'^2 = ad^2 = a'C^2 + b'C^2 - 2a'C.b'C.\cos.\varphi,$$

dat is: $ad^2 = \sin.^2\beta + \sin.^2\beta' - 2\sin.\beta\ \sin.\beta'\ \cos.\varphi,$

terwijl: $bd^2 = (\cos.\beta' - \cos.\beta)^2 = \cos.^2\beta' + \cos.^2\beta' - 2\cos.\beta\ \cos.\beta'$ is.

Hierdoor verandert de eerste vergelijking in:

$$2 - 2\cos.\alpha = \sin.^2\beta + \sin.^2\beta' - 2\sin.\beta\ \sin.\beta'\ \cos.\varphi + \cos.^2\beta + \cos.^2\beta' - 2\cos.\beta\ \cos.\beta',$$

of, na vereeniging van termen en deeling door 2:

$$1 - \cos.\alpha = 1 - \sin.\beta\sin.\beta'\cos.\varphi - \cos.\beta\cos.\beta',$$

waaruit: $$\cos.\varphi = \frac{\cos.\alpha - \cos.\beta\cos.\beta'}{\sin.\beta\sin.\beta'}.$$

Om deze formule geschikt te maken voor logarithmische berekening heeft men:

$$1 - \cos.\varphi = 1 - \frac{\cos.\alpha - \cos.\beta\cos.\beta'}{\sin.\beta\sin.\beta'},$$

dat is:

$$2\sin.^2\tfrac{1}{2}\varphi = \frac{\cos.(\beta-\beta')-\cos.\alpha}{\sin.\beta\ \sin.\beta'} = \frac{2\sin.\frac{1}{2}(\alpha+\beta-\beta')\sin.\frac{1}{2}(\alpha-\beta+\beta')}{\sin.\beta\ \sin.\beta'},$$

derhalve: $$\sin.\tfrac{1}{2}\varphi = \sqrt{\frac{\sin.\frac{1}{2}(\alpha+\beta-\beta')\sin.\frac{1}{2}(\alpha-\beta+\beta')}{\sin.\beta\ \sin.\beta'}}.$$

Dit vraagstuk, waarop wij bij de bolvormige trigonometrie terug zullen komen, is bekend onder den naam van *Herleiding van een hoek tot den horizont.*

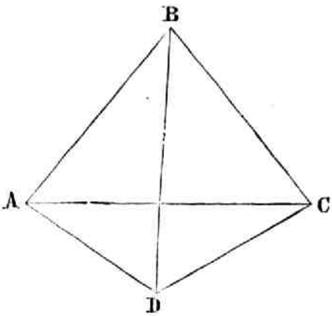
d. Problema van Snellius.

73. **Vraagstuk 13.** De onderlinge afstanden van drie punten A, B en C bekend zijnde, vraagt men uit een vierde punt D den afstand van dit punt tot elk der punten A, B, C te bepalen.

Dit vraagstuk, een der belangrijkste in de geodesie, kan door constructie op een der volgende wijzen worden opgelost.

Men mete, fig. 29, uit D de hoeken ADB = p en BDC = q, waaronder men twee der drie plaatsen ziet en heeft dan de volgende constructiën.

Fig. 29.



1°. Men beschrijve op AB en BC als koorden cirkelsegmenten, die respectievelijk de hoeken p en q bevatten, dan zal het snijpunt D dezer beide segmenten het gevraagde punt zijn, en dan kan de lengte der lijnen AD, BD en CD met behulp der schaal, waarmede de driehoek ABC beschreven is, worden gemeten.

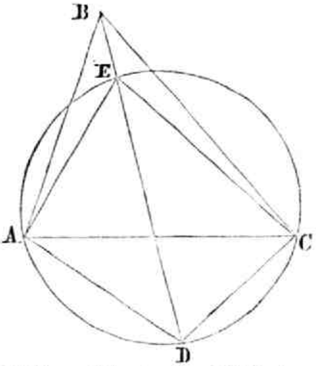
2°. Men berekene door de formule

$$r = \frac{AB}{2\sin.p}$$

den straal van een of van beide cirkels uit de voorgaande constructie, en trekke met die stralen de beide cirkels waardoor het punt D bepaald wordt.

3°. Men denke, fig. 30, een cirkel om den driehoek ADC,

Fig. 30.

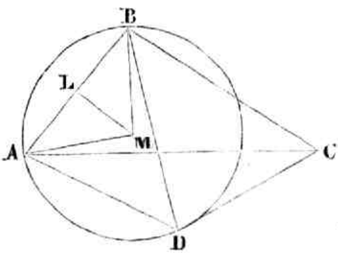


welke de lijn BD snijdt in E; indien men dan AE en CE trekt, is hoek EAD gelijk hoek BDC gelijk q en hoek ECA gelijk hoek ADB gelijk p. Hieruit volgt de volgende constructie.

Trek in den driehoek ABC uit A en C twee lijnen, die elkander in E snijden en die met AC hoeken maken, gelijk aan de gemeten hoeken q en p; laat men uit B door E een lijn BD gaan, dan ligt het punt D op deze lijn. Om dit punt D nader te bepalen, merke men op dat hoek CAD gelijk hoek CED is; men trekke dus AD zoodanig, dat daaraan voldaan worde.

4°. Onderstel, fig. 31, dat op een der zijden AB als koorde een

Fig. 31.



cirkelsegment beschreven is, dat den hoek p bevat, en dat M het middelpunt van dezen cirkel zij. Trekt men nu ML loodrecht op AB, dan is $AL = \frac{1}{2}AB$ en hoek $AML = p$; derhalve:

$$ML = \tfrac{1}{2}AB.\text{cot.p}.$$

Men berekene dus door de gevonden formule deze loodlijn, waardoor de plaats der middelpunten van beide cirkels gevonden is even als in de tweede constructie.

Om door berekening het vraagstuk op te lossen neemt men van den bekenden driehoek ABC, fig. 29, als gegeven aan $AB = c$, $BC = a$ en hoek $ABC = \alpha$, en stelle verder hoek $BAD = x$ en hoek $BCD = y$, dan is in den vierhoek ABCD:

$$x + y = 360° - (\alpha + p + q),$$

dus:

$$\tfrac{1}{2}(x + y) = 180° - \tfrac{1}{2}(\alpha + p + q) = \beta,$$

zoodat men slechts $x - y$ moet trachten te vinden.

Daartoe heeft men in de driehoeken ABD en BCD:

$$BD = \frac{c.\sin.x}{\sin.p} = \frac{a.\sin.y}{\sin.q},$$

waaruit

$$c.\sin.x \ \sin.q = a.\sin.y \ \sin.p$$

of: $\sin.x : \sin.y = a.\sin.p : c.\sin.q$

Stellende nu: $\dfrac{c.\sin.q}{a.\sin.p} = tg.\varphi,$

dan is: $\sin.x : \sin.y = 1 : tg.\varphi$

en hieruit: $\dfrac{\sin.x - \sin.y}{\sin.x + \sin.y} = \dfrac{1 - tg.\varphi}{1 + tg.\varphi},$

dat is: $\dfrac{tg.\frac{1}{2}(x - y)}{tg.\frac{1}{2}(x + y)} = tg.(45° - \varphi),$

derhalve: $tg.\frac{1}{2}(x - y) = tg.45° - \varphi)\ tg.\frac{1}{2}(x + y),$

zoodat wij voor de berekening het volgende stelsel formules hebben.

$$tg.\varphi = \frac{c.\sin.q}{a.\sin.p} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$\tfrac{1}{2}(x + y) = \beta = 180° - \tfrac{1}{2}(\alpha + p + q). \quad . \quad (2)$$

$$tg.\tfrac{1}{2}(x - y) = tg.(45° - \varphi)tg.\beta. \quad \ldots \quad (3)$$

$$AD = \frac{c.\sin.(p + x)}{\sin.p} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

$$BD = \frac{c.\sin.x}{\sin.p} = \frac{a.\sin.y}{\sin.q} \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

$$CD = \frac{a.\sin.(q + y)}{\sin.q} \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

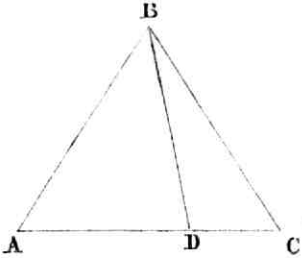
Indien de drie afstanden AB, AC en BC gegeven zijn, kan men de hoeken A en C berekenen. De hoeken x en y uit bovenstaande formules gevonden hebbende, is in driehoek ACD bekend een zijde en de beide aanliggende hoeken x — A en y — C, waaruit dan verder AD en CD kunnen gevonden worden.

74. *Aanmerking.* In de voorgaande oplossing is het punt D ondersteld buiten den driehoek ABC en wel in den hoek ABC. Dit punt kan echter ten opzichte van de punten A, B en C op verschillende wijzen gelegen zijn; waardoor bij rechtstreeksche oplossing de gevonden formules meer of minder wijziging zullen ondergaan. Deze wijzigingen zijn echter ook uit de figuur af te leiden, door behoorlijk te letten op de veranderingen, die de elementen der figuur ten opzichte der oorspronkelijke figuur hebben ondergaan.

Het zal niet ondienstig zijn deze verschillende standen van het punt D achtereenvolgens te beschouwen en na te gaan welken invloed dit op de formules heeft.

Eerste geval. Is de som der hoeken p + q = 180°, fig. 32,

Fig. 32.



dan ligt het punt D in de lijn AC en daar dan sin.p = sin.q is, veranderen de formules in:

$$\text{tg.}\varphi = \frac{c}{a}$$

$$\tfrac{1}{2}(x + y) = \beta = 90^\circ - \tfrac{1}{2}\varkappa$$

$$\text{tg.}\tfrac{1}{2}(x - y) = \text{tg.}(45^\circ - \varphi)\ \text{cot.}\tfrac{1}{2}\varkappa$$

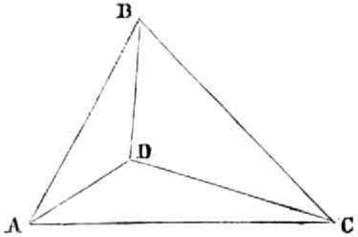
$$x = A, \quad y = C;$$

de overige formules blijven onveranderd.

Men kan dan echter AD gemakkelijker vinden door op te merken dat in den driehoek ABD een zijde en twee hoeken bekend zijn.

Tweede geval. Is, fig. 33, de som der hoeken $p + q > 180^\circ$,

Fig. 33.

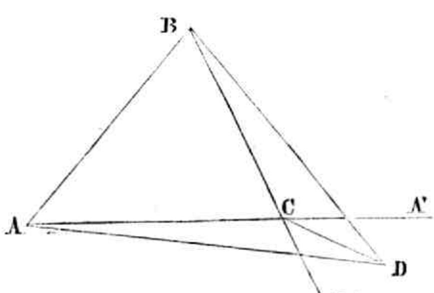


dan ligt het punt D binnen den driehoek ABC; daar deze hoeken echter door hun sinus in rekening komen, ondergaan de formules geen verandering.

Derde geval. Voor dit en de volgende gevallen kan men aannemen, dat het punt D zich van de linker- naar de rechterhand verplaatst, te gelijk met het stelsel van lijnen, dat uit D naar A, B en C getrokken is, en kan het niet moeilijk zijn den toestand der hoeken p, q, x en y in verband tot die lijnen en de onveranderlijke lijnen AB en BC te beoordeelen.

Ligt nu, fig. 34, het punt D in den hoek A′CB′, dan is hoek p

Fig. 34.



nog in denzelfden toestand, maar q is ten opzichte van BC van stand veranderd en *negatief* geworden. Hoek x is nog in denzelfden toestand, maar y is overgegaan in den overstompen hoek BCD, die in den driehoek BDC in rekening gebracht wordt door den hoek BCD = 360° — y. Daar nu φ te gelijk met q *negatief* wordt, heeft men:

$$\tfrac{1}{2}(x + 360° - y) = \beta = 180° - \tfrac{1}{2}(\alpha + p - q),$$

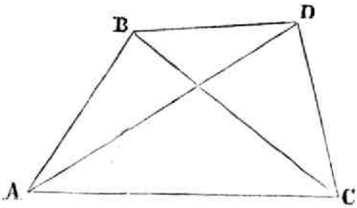
dat is:
$$\beta = \tfrac{1}{2}(y - x) = \tfrac{1}{2}(\alpha + p - q)$$
$$tg.\tfrac{1}{2}(x - 360° + y) = tg.\tfrac{1}{2}(y - x)\ tg.(45° + \varphi)$$

of:
$$tg.\tfrac{1}{2}(x + y) = tg.\tfrac{1}{2}(y - x)\ tg.(45° + \varphi).$$

De formules (4), (5) en (6) blijven onveranderd, want $sin. - q = - sin.q$, en $sin.(- q + 360° - y) = - sin.(q + y)$ zijnde, zal CD onveranderd blijven.

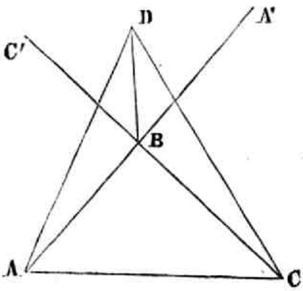
Vierde geval. Ligt, fig. 35, het punt D in den hoek BAC, dan blijft p onveranderd, q wordt *negatief*, x is nog *positief* en y gaat over in $360° - y$. De formules ondergaan dus dezelfde verandering als in het derde geval.

Fig. 35.



Vijfde geval. Ligt, fig. 36, het punt D in den hoek C′BA′, dan zijn p en q beide *negatief* geworden, x wordt insgelijks *negatief* en y gaat over in $360° - y$. Men heeft dus:

Fig. 36.



$$\beta = \tfrac{1}{2}(- x + 360° - y) = 180° - \tfrac{1}{2}(\alpha - p - q),$$

dat is:

$$\beta = \tfrac{1}{2}(x + y) = \tfrac{1}{2}(\alpha - p - q)$$
$$tg.\tfrac{1}{2}(x - y) = tg.\tfrac{1}{2}(- x - 360° + y) = tg. - \{180° + \tfrac{1}{2}(x - y) = - tg.\tfrac{1}{2}(x - y),$$

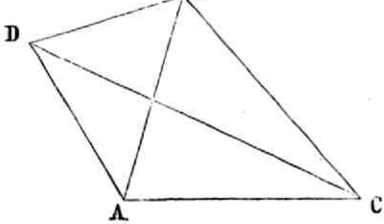
dus:

$$tg.\tfrac{1}{2}(x - y) = - tg.(45° - \varphi)\ tg.\beta;$$

de overige formules blijven onveranderd.

Zesde geval. Ligt, fig. 37, D in den hoek ACB, dan is de hoek p *negatief*, q *positief*, x *negatief* en y *positief*.

Fig. 37.



$$\beta = \tfrac{1}{2}(y - x) = 180° - \tfrac{1}{2}(\alpha - p + q)$$

Men kan echter ook y aanmerken als te zijn overgegaan in $360° + y$, waardoor men verkrijgt:

$$\tfrac{1}{2}(y - x) = \tfrac{1}{2}(p - q - \alpha),$$

hetgeen blijkbaar op hetzelfde neêrkomt, daar

$$tg.(180^\circ - \tfrac{1}{2}(\alpha - p + p) = tg\,\tfrac{1}{2}(p - q - \alpha).$$

Dewijl φ te gelijk met p *negatief* wordt, is:

$$tg.\tfrac{1}{2}(- x - y) = tg.(45^\circ + \varphi)\; tg.\beta,$$

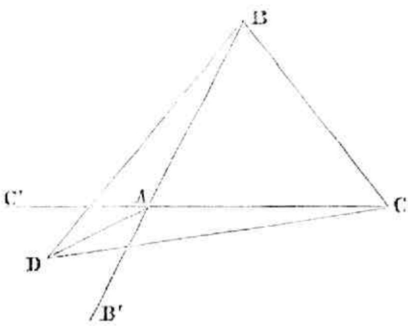
of

$$tg.\tfrac{1}{2}(x + y) = - tg.(45^\circ + \varphi)\; tg.\beta.$$

De overige formules ondergaan geen verandering.

Zevende geval. Ligt, fig. 38, het punt D in den hoek C′AB′, dan is p *negatief*, q *positief*, x *negatief* en y *positief*. De toestand is dus dezelfde als in het zesde geval.

Fig. 38.



Achtste geval. Liggen de punten A, B en C op een rechte lijn, dan is $\alpha = 180^\circ$. Men heeft alsdan:

$$\tfrac{1}{2}(x+y) = \beta = 90^\circ - \tfrac{1}{2}(p+q)$$

$$tg.\tfrac{1}{2}(x - y) = tg.(45^\circ - \varphi)\; cot.\tfrac{1}{2}(p + q).$$

De overige formules blijven onveranderd.

Negende geval. Blijkt het, dat de som der hoeken α, p en q gelijk 180° is, dan liggen de punten A, B, C en D in den omtrek van een cirkel, en het vraagstuk is onbepaald, dewijl het punt D dan in elk willekeurig punt van den omtrek genomen kan worden. Uit de formules is dit ook gemakkelijk af te leiden. Men heeft toch:

$$\beta = \tfrac{1}{2}(x + y) = 90^\circ$$

$$tg.\varphi = \frac{c.sin.q}{a.sin.p} = \frac{c}{sin.p} \times \frac{sin.q}{a} = 1,$$

want $\frac{c}{sin.p}$ en $\frac{a}{sin.q}$ zijn de middellijn van den cirkel, derhalve $\varphi = 45^\circ$ en hierdoor

$$tg.\tfrac{1}{2}(x - y) = tg.(45^\circ - \varphi)\; tg.\beta = 0 \times \infty,$$

waaruit de onbepaaldheid genoegzaam blijkt.

Verder volgt uit:

$$BD = \frac{c.sin.x}{sin.p} = \frac{a.sin.y}{sin.q},$$

dat de grootste lengte van BD gelijk is aan de middellijn van den cirkel, want $\frac{c}{\sin.p} = \frac{a}{\sin.q}$ gelijk aan deze middellijn zijnde, zal niet veranderen voor $x = y = 90°$, maar voor elke grootere of kleinere waarde van x of y kleiner worden.

Men kan de beweging van het punt D ook van de rechter- naar de linkerhand doen plaats hebben; dit zal echter tot dezelfde uitkomsten moeten leiden.

Gebruikt men in de verschillende gevallen de formules onveranderd, dan zal het teeken van de afstanden AD, BD en CD de plaats van dit punt aanwijzen. Zoo zal, in fig. 34 en 35, AD en BD *positief* zijn ten opzichte van AB; CD is echter *negatief* ten opzichte van BC. Ook BD is *negatief* ten opzichte van BC.

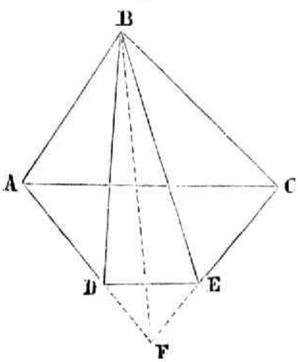
In fig. 36 zijn de drie afstanden *negatief* ten opzichte van AB en BC.

In fig. 37 en 38 zijn AD en BD *negatief* ten opzichte van AB; BD en CD *positief* ten opzichte van BC.

Ook ten opzichte van AC zou men den toestand der lijnen AD en CD kunnen beoordeelen.

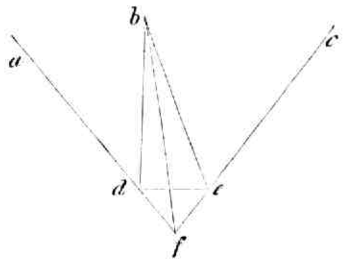
75. **Vraagstuk 14.** De afstanden te bepalen van twee punten D en E tot drie andere punten A, B en C, wier onderlinge afstanden bekend zijn.

Fig. 39.



Zij, in fig. 39, ABC de driehoek, gevormd door de punten A, B en C, wier ligging bekend is, en D en E de punten, wier afstanden tot de drie eerste punten moeten bepaald worden. Men mete de hoeken ADB $= \alpha$, BDE $= \beta$, DEB $= \gamma$ en BEC $= \delta$, waaronder men uit elk der punten D en E twee der punten A, B en C waarneemt, dan heeft men de volgende *constructie*. Men construeere aan de

Fig. 40.



uiteinden d en e, van een willekeurige lijn de, fig. 40, de gemeten hoeken α, β, γ en δ, dan ontstaat daardoor een vierhoek $bdef$, die gelijkvormig is met den vierhoek BDEF in fig. 39; trekt men nu bf, dan worden de hoeken $dfb = p$ en $bfe = q$ bekend en is het vraagstuk teruggebracht tot het vorige. Men kan alsnu den vierhoek BAFC door een der constructiën uit vr. 13 construeeren en daarna, ter bepaling van de punten D en E, gebruik maken van de gelijkheid der hoeken DBF $= dbf$, en EBF $= ebf$; of men trekke uit een willekeurig punt van AF een lijn, makende met AF een hoek α en trekke dan uit B een lijn BD evenwijdig aan deze lijn. Op dezelfde wijze bepaalt men het punt E.

Om door berekening het vraagstuk op te lossen stelle men, fig. 39, hoek BAD $=$ x en hoek BCE $=$ y, en neme verder als gegevens aan de zijden AB $=$ c en BC $=$ a, benevens den ingesloten hoek B. In de driehoeken ABD, BDE en BCE heeft men dan de evenredigheden:

$$\begin{aligned} c : BD &= \sin.\alpha : \sin.x \\ BD : BE &= \sin.\gamma : \sin.\beta \\ BE : a &= \sin.y : \sin.\delta, \end{aligned}$$

waaruit door vermenigvuldiging:

$$c : a = \sin.\alpha \sin.\gamma \sin.y : \sin.x \sin.\beta \sin.\delta,$$

of $$\sin.x : \sin.y = a.\sin.\alpha \sin.\gamma : c.\sin.\beta \sin.\delta.$$

Men stelle nu: $$\frac{c.\sin.\beta \sin.\delta}{a.\sin.\alpha \sin.\gamma} = tg.\varphi,$$

dan is: $$\frac{\sin.x - \sin.y}{\sin.x + \sin.y} = \frac{1 - tg.\varphi}{1 + tg.\varphi},$$

of $$\frac{tg.\frac{1}{2}(x - y)}{tg.\frac{1}{2}(x + y)} = tg.(45^\circ - \varphi),$$

waaruit: $$tg.\tfrac{1}{2}(x - y) = tg.\tfrac{1}{2}(x + y)\ tg.(45^\circ - \varphi).$$

Nu is in den vijfhoek ABCDE:

$$x + y = 540^\circ - (\alpha + \beta + \gamma + \delta + B),$$

of $$\tfrac{1}{2}(x + y) = 270^\circ - \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma + \delta + B = p.$$

Wij hebben dus het volgende stelsel formules:

$$\text{tg.}\varphi = \frac{\text{c.sin.}\beta\ \text{sin.}\delta}{\text{a.sin.}\alpha\ \text{sin.}\gamma} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$\text{tg.}\tfrac{1}{2}(x - y) = \text{tg.}(45^\circ - \varphi)\ \text{tg.p} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

$$p = 270^\circ - \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma + \delta + B)\ . \quad (3)$$

$$AD = \frac{\text{c.sin.}(x + \alpha)}{\text{sin.}\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

$$BD = \frac{\text{c.sin.x}}{\text{sin.}\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

$$BE = \frac{\text{a.sin.y}}{\text{sin.}\delta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

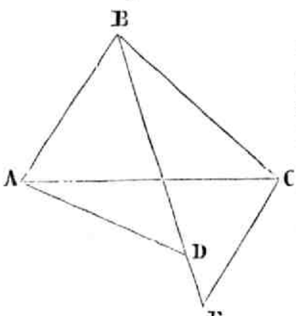
$$CE = \frac{\text{a.sin.}(y + \delta)}{\text{sin.}\delta} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

$$DE = \frac{\text{BD.sin.}(\beta + \gamma)}{\text{sin.}\gamma} = \frac{\text{BE.sin.}(\beta + \gamma)}{\text{sin.}\beta} \quad (8)$$

Dit vraagstuk, waarvan het voorgaande slechts een bijzonder geval is, laat omtrent de ligging der punten D en E ten opzichte van de punten A, B en C dezelfde onderstellingen toe, als het problema van SNELLIUS. De wijzigingen, die de formules hierdoor ondergaan, kunnen echter, na de uitvoerige behandeling van het voorgaande vraagstuk, geen moeilijkheden meer opleveren.

76. **Vraagstuk 15.** Drie plaatsen, A, B en C, fig. 41, zijn in ligging gegeven. Uit een vierde punt D kan men den hoek ADB $=$ p waarnemen; maar om de punten B en C te gelijk te kunnen zien, moet men in de richting van BD teruggaan tot in E; hier meet men den hoek BEC $=$ q; indien nu tevens de afstand DE $= \delta$ bekend is, vraagt men de plaats der punten D en E ten opzichte van A, B en C te bepalen.

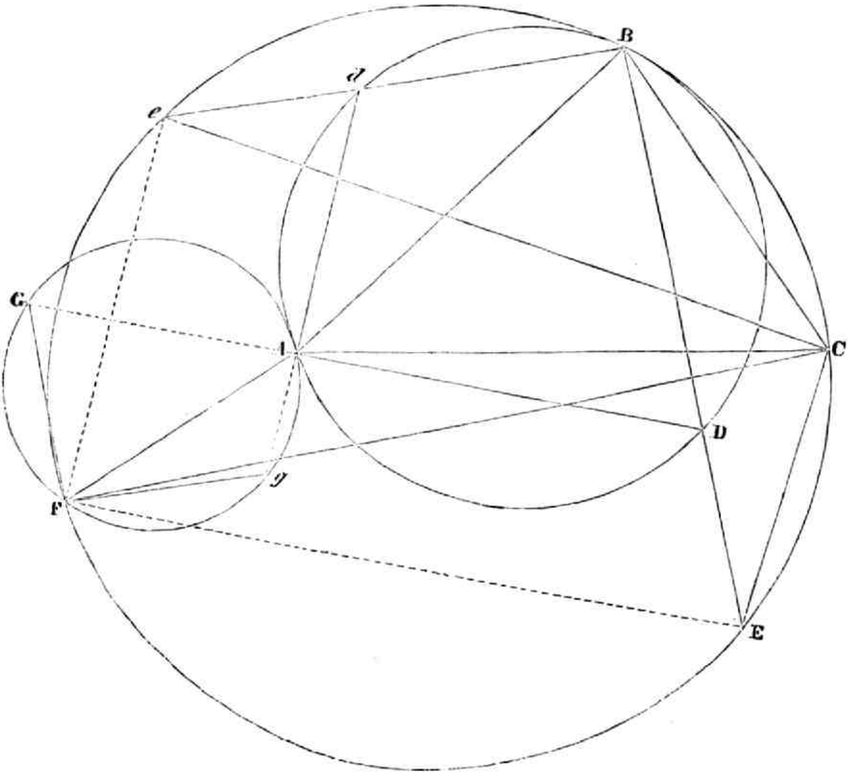
Fig. 41.



Dit vraagstuk, dat een andere uitbreiding van het problema van SNELLIUS is, kan op de volgende wijze geconstrueerd worden.

Zij, fig. 42, ABC de driehoek gevormd door de punten A, B en C.

Fig. 42.



Men beschrijve op AB en BC als koorden cirkelsegmenten, die de hoeken p en q bevatten, dan moet D op den eersten en E op den tweeden cirkel liggen. Het vraagstuk is dus teruggebracht tot het trekken eener lijn DE tusschen deze twee cirkels, die de gegeven lengte δ hebbe. Daartoe trekke men uit C een lijn CF, makende met BC een hoek BCF $=$ p; vereenige het snijpunt F van deze lijn met den tweeden cirkel door een rechte lijn met A en beschrijve op AF als koorde een cirkelsegment, dat den hoek p bevat. Vervolgens trekke men in dezen cirkel uit F de koorden FG en Fg gelijk aan den gegeven afstand δ en trekke nu uit B de lijnen BE en Be, evenwijdig aan deze koorden, dan zijn de punten

D en E, en d en e de begeerde punten; want trekkende de lijnen AG, Ag, EF en eF, dan heeft men:

$$BCF = BEF = FGA = p$$

en daar BE evenwijdig aan FG getrokken is, is DEFG een parallellogram en dus:

$$DE = FG = \delta.$$

Verder heeft men

FgA $= 180° - p$ en FeB $= 180° -$ FEB $= 180° - p$, en daar de evenwijdig is aan Fg, is ook deFg een parallelogram en dus $de = \delta$.

Er bestaan alzoo twee paren van punten, die aan het vraagstuk voldoen, indien δ kleiner dan de middellijn van den cirkel op AF is. Is δ gelijk aan die middellijn, dan is er maar een paar punten, terwijl het vraagstuk voor geen oplossing vatbaar is, indien δ grooter dan die middellijn mocht zijn.

Om het vraagstuk door berekening op te lossen neme men, fig. 41, als bekenden aan AB $=$ c, BC $=$ a en $\angle$ABC $= \alpha$, benevens de waargenomen hoeken p en q en den afstand DE $= \delta$. Nu is:

$$BAD = BCE = 360° - (\alpha + p + q) = 2\beta$$

en stelle verder:

$$BAD = \beta + x \text{ en } BCE = \beta - x,$$

dan heeft men, in de driehoeken ADB en BCE:

$$BD = \frac{c.\sin.(\beta + x)}{\sin.p} \text{ en } BE = \frac{a.\sin.(\beta - x)}{\sin.q},$$

dus: $$\frac{a.\sin.(\beta - x)}{\sin.q} - \frac{c.\sin.(\beta + x)}{\sin.p} = \delta,$$

of: $$a.\sin.p \sin.(\beta - x) - c.\sin.q \sin.(\beta + x) = \delta \sin.p \sin.q.$$

Stellende nu $\dfrac{c.\sin.q}{a.\sin.p} = tg.\varphi$, dan wordt, na deeling door a.sin.p

$$\sin.(\beta - x) - tg.\varphi \sin.(\beta + x) = \frac{\delta \sin.q}{a},$$

of: $$(1 - tg.\varphi) \sin.\beta \cos.x - (1 + tg.\varphi) \cos.\beta \sin.x = \frac{\delta \sin.q}{a}$$

en hieruit: $$\frac{(1 - tg.\varphi) \sin.\beta}{(1 + tg.\varphi) \cos.\beta} \cos.x - \sin.x = \frac{\delta \sin.q}{a(1 + tg.\varphi) \cos.\beta}.$$

Stelt men nu weder:

$$\frac{(1 - \text{tg.}\varphi)\sin.\beta}{(1 + \text{tg.}\varphi)\cos.\beta} = \text{tg.}(45^\circ - \varphi)\,\text{tg.}\beta = \text{tg.}\mu = \frac{\sin.\mu}{\cos.\mu},$$

dan komt er:

$$\frac{\sin.\mu}{\cos.\mu}\cos.x - \sin.x = \frac{\delta\sin.q}{a(1 + \text{tg.}\varphi)\cos.\beta}$$

$$\text{of}\quad \sin.(\mu - x) = \frac{\delta\sin.q\cos.\mu}{a(1 + \text{tg.}\varphi)\cos.\beta},$$

en daar $1 + \text{tg.}\varphi = \dfrac{\cos.(45^\circ - \varphi)\sqrt{2}}{\cos.\varphi}$ is:

$$\sin.(\mu - x) = \frac{\delta\sin.q\cos.\mu\cos.\varphi}{a.\cos.\beta\cos.(45^\circ - \varphi)\sqrt{2}}.$$

Men heeft derhalve het volgende stelsel formules:

$$p = 180^\circ - \tfrac{1}{2}(\alpha + p + q) \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

$$\text{tg.}\varphi = \frac{c.\sin.q}{a.\sin.p} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

$$\text{tg.}\mu = \text{tg.}(45^\circ - \varphi)\,\text{tg.}\beta \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

$$\sin.(\mu - x) = \frac{\delta\sin.q\cos.\mu\cos.\varphi}{a.\cos.\beta\cos.(45^\circ - \varphi)\sqrt{2}} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

$$AD = \frac{c.\sin.(p + \beta + x)}{\sin.p} \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

$$BD = \frac{c.\sin.(\beta + x)}{\sin.p} \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

$$CE = \frac{a.\sin.(q + \beta - x)}{\sin.q} \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

$$BE = \frac{a.\sin.(\beta - x)}{\sin.q} \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

Daar men voor $\mu - x$ twee waarden vindt, is het vraagstuk voor twee oplossingen vatbaar. Is de breuk in form. (4) gelijk 1, dan vindt men één oplossing; is die breuk grooter dan 1, dan is het vraagstuk onbestaanbaar; al hetgeen met de constructie volkomen overeenstemt.

Voor $\delta = 0$ gaat het vraagstuk in dat van Snellius over.

77. Ter toepassing volgen hier nog eenige vraagstukken.

1°. Om de hoogte van een toren te vinden bepaalt men ergens in het horizontale vlak een bazis lang 52,934 meters en meet aan het eene uiteinde dezer bazis den hoek waaronder men den toren ziet gelijk 32°19′53″ en den hoek, waaronder men den top des torens en het andere uiteinde der bazis ziet op 69°23′18″, terwijl men aan het andere uiteinde den toren ziet onder een hoek van 32°58′15″. Vrage de hoogte des torens en den hoek, waaronder men uit het tweede uiteinde der bazis den top des torens en het andere uiteinde ziet?

2°. Tot het berekenen van de hoogte eens anderen torens meet men op een rechte lijn de afstanden AB = 33,763 en BC = 42,197 meters, terwijl de toren uit A gezien wordt onder een hoek van 48°23′32″; uit B onder een hoek van 53°43′31″ en uit C onder een hoek van 49°15′27″. Men vraagt de hoogte des torens.

3°. Indien, in fig. 20, AA′ = 60, AB = 86, A′B = 97, AB′ = 81 en BB′ = 38 meters is, vraagt men den afstand van A naar C te bepalen.

4°. Den afstand van twee ontoegankelijke plaatsen A en B te bepalen, als de afstand van twee andere plaatsen C en D 76.9 meter bedraagt en de hoeken, waaronder men uit C de plaatsen A en B, alsmede de plaatsen B en D ziet 14°59′5″ en 25°16′25″ bedragen, terwijl de hoeken, waaronder men uit D de plaatsen A en B en de plaatsen A en C ziet, gevonden zijn 36°54′50″ en 19°25′40″.

5°. In fig. 22 is CD = 60,527, ACB = 69°15′34″, BCD = 37°9′51″, ADC = 40°5′21″ en ADB = 117°43′39″. Vrage de lengte van AB?

6°. Wanneer in fig. 20 AB = 50.75 meter, ACB = 12°4′18″, BCD = 27°13′20″, CDA = 20°16′24″ en ADB = 32°4′6″ is, hoe lang is dan CD?

7°. Vier plaatsen, A, B, C en D, liggen op een rechte lijn. Uit een willekeurig punt P bevindt men, dat de gezichtsstralen naar A en B een hoek van 17°15′41″, naar B en C een hoek van 23°21′57″ en naar C en D een hoek van 8°19′49″ maken. Als men nu verder weet, dat de afstand van A naar B 92,6735 en van C naar D 117,826 meters bedraagt, vraagt men den afstand van B naar C en tevens de afstanden van P naar elk der punten A, B, C en D.

8°. Twee plaatsen A en B liggen 672,95 meter van elkander. Uit A ziet men den top eens torens C en het punt B onder een hoek van 54°19′32″; uit B ziet men de punten

A en C onder een hoek van 76°19′47″, terwijl de gezichtsstraal van B naar C met de verticaal in B een hoek van 27°23′45″ maakt. Men vraagt de plaats van den voet des torens in het horizontale vlak, dat door de punten A en B gaat, te bepalen?

9°. Twee sterren A en B worden waargenomen onder een hoek van 13°17′54″; de gezichtsstraal naar A maakt met de verticaal van den waarnemer een hoek van 85°19′40″ en die naar B een hoek van 87°53′25″. Men vraagt de projectie van den hoek tusschen deze twee sterren op het horizontale vlak te bepalen?

10°. In fig. 27 is AB = 673,45 meters, CAB = 63°51′30″, CBA = 54°19′42″, CBD = 35°35′35″ en ABD = 86°15′40″. Men vraagt de projectie van het punt C in het horizontale vlak?

11°. Uit een punt D, fig. 29, meet men de hoeken ADB en BDC; de eerste vindt men 45°17′35″ en de tweede 86°39′24″. Als men nu weet, dat de afstand van A naar B 1326, van B naar C 1530 en van A naar C 1428 meters is, hoe ver ligt dan D van elk dezer plaatsen?

12°. Uit geodesische metingen weet men, dat de toren der Westerkerk te Amsterdam en de groote kerk te Haarlem een afstand hebben van 16789,3 meter; de Westerkerk te Amsterdam en de stadswaag te Alkmaar 29977 meter; de stadswaag te Alkmaar en de groote kerk te Haarlem 28882,6 meter. Indien nu waargenomen is op den toren te Wijk aan Zee den hoek van Amsterdam en Haarlem 42°37′5″ en dien van Amsterdam en Alkmaar 88°32′10″, vraagt men hoe ver Wijk aan Zee van elk dier steden verwijderd is.

13°. In fig. 39 is BC = 3998,5; AB = 4567; ABC = 113°27′30″; ADB = 39°27′20″; BDE = 65°8′30″; BED = 74°49′50″ en BEC = 33°55′10″. Men vraagt hieruit den afstand der punten D en E onderling en tot de punten A, B en C te bepalen.

14°. Indien men weet, dat in fig. 41 AB = 580,93, BC = 469,875, AC = 681,13, DE = 265,237 meter s; verder ADB = 64°29′19″ en BEC = 28°21′34″, hoe groot zijn dan de lijnen AD, BD, BE en CE?

DERDE HOOFDSTUK.

Bolvormige Driehoeksmeting.

(Spherische Trigonometrie).

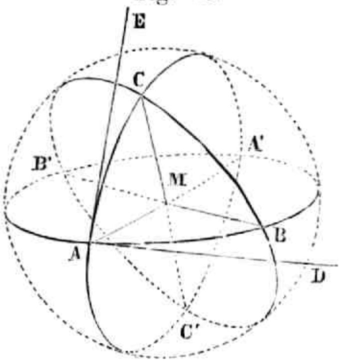
---

§ 13.

Voornaamste eigenschappen van den bolvormigen driehoek.

78. Een bolvormige driehoek is dat gedeelte van het oppervlak van een bol, dat begrepen is tusschen drie groote cirkels, die elkander niet volgens dezelfde middellijn snijden. Door de onderlinge snijding van die drie cirkels ontstaan acht driehoeken, die twee aan twee bij tegenoverstand gelijk en gelijkvormig zijn.

Fig. 43.



Deze driehoeken zijn, fig. 43:

ABC, A'BC, ABC', ACB',

A'B'C', AB'C', A'B'C, A'C'B,

van welke de onder elkander de gelijk en gelijkvormige zijn.

79. Men kan den bolvormigen driehoek ook nog anders bepalen. Wanneer men, fig. 43, uit het middelpunt M des bols, drie willekeurige, doch niet in hetzelfde vlak gelegen, stralen MA, MB en MC trekt, en door elk paar dezer stralen vlakken brengt, dan ontstaat een drievlakkige hoek, en nu is het duidelijk, dat de snijding van de zijvlakken van den drievlakkigen hoek met het oppervlak van den bol den driehoek ABC doet ontstaan. Hieruit volgt dan

van zelf, dat de zijden van den bolvormigen driehoek de vlakke hoeken zijn van den drievlakkigen hoek.

80. Door den hoek A des driehoeks verstaat men, fig. 43, den hoek EAD gevormd door de raaklijnen in het punt A aan de beide elkander in dat punt snijdende cirkels getrokken. Daar deze raaklijnen loodrecht staan op den straal MA of op een der ribben van den drievlakkigen hoek, zoo blijkt, dat de hoeken van den bolvormigen driehoek niet anders zijn dan de standhoeken van den drievlakkigen hoek.

Bij alle verdere beschouwingen van den bolvormigen driehoek wordt deze ondersteld ontstaan te zijn door de snijding van drie groote cirkels, terwijl de zijden altijd kleiner dan 180° zijn.

81. Elke bolvormige driehoek bevat dus zes elementen, de drie hoeken en de drie zijden, die alle in graden worden uitgedrukt en dus onafhankelijk zijn van den straal des bols. Tusschen deze zes elementen bestaat zulk een nauwe betrekking, dat drie van de zes voldoende zijn om de overigen te bepalen. Het onderzoek naar deze betrekkingen maakt het onderwerp uit van de *bolvormige driehoeksmeting*.

82. Uit het nauwe verband tusschen den drievlakkigen hoek en den bolvormigen driehoek volgt, dat de eigenschappen van den eersten onmiddelijk kunnen overgebracht worden op den bolvormigen driehoek, zoodat wij voor dezen de volgende vier eigenschappen hebben.

1°. ***De som der drie zijden is altijd kleiner dan vier rechte hoeken.***

2°. ***De som van twee der zijden is altijd grooter dan de derde zijde.***

3°. ***De som der drie hoeken is altijd grooter dan twee en kleiner dan zes rechte hoeken.***

4°. ***De som van twee der hoeken verminderd met den derden is altijd kleiner dan twee rechte hoeken.***

De hoeken en zijden van den bolvormigen driehoek worden gewoonlijk op dezelfde wijze aangeduid als in den rechtlijnigen; de genoemde eigenschappen geven dus de vier formules:

1°. $a + b + c < 4R$.

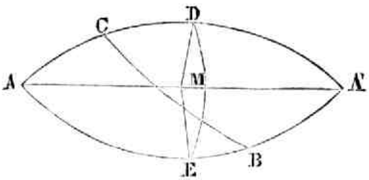
2°. $a + b > c$, $a + c > b$, $b + c > a$.

3°. $A + B + C > 2R < 6R$.

4°. $A + B - C < 2R$, $A + C - B < 2R$, $B + C - A < 2R$.

83. Wanneer men, fig. 44, twee der zijden AC en AB des

Fig. 44.



driehoeks ABC verlengt totdat zij elkander in A' nogmaals snijden, dan zullen de bogen ACA' en ABA' ieder gelijk 180° zijn. De driehoek BCA' heeft dus met den oorspronkelijken gemeen de zijde BC en een gelijken overstaanden hoek A'; want de hoeken A en A' zijn beide de standhoeken der vlakken ACA' en ABA', terwijl de beide overige zijden en hoeken de supplementen zijn van de overeenkomstige elementen in den driehoek ABC. De driehoek A'BC wordt daarom de *supplementsdriehoek* van ABC genoemd. Elke driehoek heeft dus drie supplementsdriehoeken.

Nu is in driehoek A'BC:

$$A'C + A'B + BC < 4R,$$

dat is: $(180° - AC) + (180° - AB) + BC < 4R,$

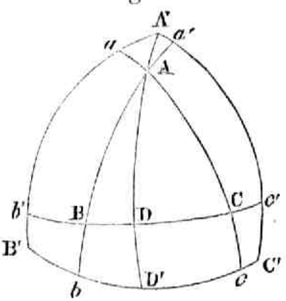
derhalve: $AC + AB > BC,$

waardoor, onafhankelijk van den drievlakkigen hoek, bewezen is, dat de eerste eigenschap des bolvormigen driehoeks als bewezen aangenomen zijnde, daaruit de tweede voortvloeit.

84. De boog ED, fig. 44, uit een der hoekpunten A als pool met een straal gelijk aan de koorde van het kwadrant beschreven, zal de maat van den hoek A zijn, want de bogen AD en AE elk 90° zijnde, zullen de stralen MD en ME ieder loodrecht op de middellijn AA' staan en dus hoek DME de standhoek der vlakken DAM en EAM, dat is gelijk A zijn.

85. Als men uit de hoekpunten A, B en C, fig. 45, van een bolvormigen driehoek als polen, groote cirkels beschrijft, dan ontstaan door de snijding dezer cirkels acht driehoeken, die men de *pool-* of *aspunts-driehoeken* van den driehoek ABC noemt. In engeren zin verstaat men evenwel door pooldriehoek alleen dien driehoek, die geheel of gedeeltelijk *om* of *in* den oorspronkelijken is gelegen.

Fig. 45.



86. De pooldriehoek heeft de belangrijke eigenschap, dat zijne drie

zijden en hoeken respectievelijk de supplementen zijn van de hoeken en zijden des oorspronkelijken driehoeks.

Om zulks te bewijzen verlenge men, fig. 45, de zijden AB, BC en AC, die ondersteld worden elk kleiner dan een kwadrant te zijn, tot aan de zijden van den pooldriehoek, dan is:

$$\mathrm{A}b = \mathrm{A}c = \mathrm{B}c' = \mathrm{B}a' = \mathrm{C}a = \mathrm{C}b' = 90^\circ$$

en volgens 84:

$$bc = \mathrm{A}, \quad a'c' = \mathrm{B}, \quad ab' = \mathrm{C}.$$

Daar verder de hoeken b, c, c', a', a en b' alle recht zijn, is ook:

$$\mathrm{B}'c = b\mathrm{C}' = \mathrm{C}'a' = c'\mathrm{A}' = \mathrm{A}'b' = a\mathrm{B}' = 90^\circ$$

en hieruit blijkt, dat de punten A′, B′ en C′ respectievelijk de polen zijn van de zijden BC, AC en AB van den oorspronkelijken driehoek. Derhalve is dan ook:

$$b'c' = \mathrm{A}', \quad ac = \mathrm{B}', \quad a'b = \mathrm{C}'.$$

Wij hebben alzoo:

$$\mathrm{B}'c + b\mathrm{C}' = \mathrm{B}'\mathrm{C}' + bc = 180^\circ,$$

waaruit:

$$\mathrm{B}'c' = 180^\circ - bc = 180^\circ - \mathrm{A}.$$

Op dezelfde wijze blijkt:

$$\mathrm{A}'\mathrm{C}' = 180^\circ - \mathrm{B}.$$
$$\mathrm{A}'\mathrm{B}' = 180^\circ - \mathrm{C}.$$

Verder is:

$$b'\mathrm{C} + \mathrm{B}c' = b'c' + \mathrm{BC} = 180^\circ,$$

derhalve:

$$\mathrm{BC} = 180^\circ - \mathrm{A}'$$

en evenzoo:

$$\mathrm{AC} = 180^\circ - \mathrm{B}'$$
$$\mathrm{AB} = 180^\circ - \mathrm{C}'.$$

Gewoonlijk worden de zijden en hoeken van den pooldriehoek van die des oorspronkelijken onderscheiden door accenten. De bewezen eigenschap wordt dan uitgedrukt door de formule:

$$\mathrm{A} + a' = \mathrm{B} + b' = \mathrm{C} + c' = \mathrm{A}' + a = \mathrm{B}' + b = \mathrm{C}' + c = 180^\circ.$$

Laat men verder door de punten A en A′ een boog van een grooten cirkel gaan, die de bogen BC en B′C′ snijdt in D en D′, dan is, daar A′ de pool van BC en A dien van B′C′ is:

$$\mathrm{A}'\mathrm{D} = \mathrm{AD}' = 90^\circ$$

en derhalve: $\mathrm{A}'\mathrm{D} + \mathrm{AD}' = \mathrm{A}'\mathrm{D}' + \mathrm{AD} = 180^\circ.$

De loodrechte bogen in beide driehoeken zijn dus ook elkanders supplementen.

86. Door middel van den pooldriehoek kan men nu gemakkelijk de eigenschappen van de hoeken des bolvormigen driehoeks afleiden uit die voor de zijden.

Volgens 82 heeft men namelijk, ook in den pooldriehoek:

$$a' + b' + c' < 4R,$$

dat is: $(180^\circ - A) + (180^\circ - B) + (180^\circ - C) < 4R,$

waaruit: $$A + B + C > 2R,$$

en daar elk der hoeken kleiner dan 2R is, is ook:

$$A + B + C < 6R.$$

Evenzoo heeft men:

$$a' + b' > c',$$

dat is: $(180^\circ - A) + (180^\circ - B) > (180^\circ - C),$

waaruit: $$A + B - C < 2R.$$

De overmaat van de som der drie hoeken boven 2R noemt men het *spherisch exces*, en wordt gewoonlijk door de letter E aangeduid.

87. De bolvormige driehoeken worden hoofdzakelijk onderscheiden in:

Rechthoekige, als een der hoeken recht is; de beide andere kunnen dan beide of een van beide scherp of stomp zijn.

Dubbel-rechthoekige, als twee der hoeken recht zijn; de overstaande zijden zijn dan kwadranten; de derde zijde is de maat van den derden hoek, die scherp of stomp kan zijn.

Gelijkhoekig-rechthoekig, als de drie hoeken recht zijn; de drie zijden zijn dan kwadranten en de geheele driehoek is het achtste deel van het oppervlak van den bol. Men kan hem ook *gelijkzijdig-rechtzijdig* noemen.

Scheefhoekig, de drie hoeken kunnen dan of alle, of een of twee scherp of stomp zijn. Zijn alle hoeken scherp, dan heet hij scherphoekig. Is ten minste een der hoeken stomp, dan noemt men hem stomphoekig.

Rechtzijdig, als een der zijden een kwadrant is; de beide andere zijden kunnen dan beide of een van beide kleiner of grooter dan een kwadrant zijn.

Gelijkbeenig, als twee der zijden gelijk zijn.

Gelijkzijdig, als de drie zijden gelijk zijn.

Ongelijkzijdig, als de drie zijden ongelijk zijn.

88. In een gelijkbeenigen bolvormigen driehoek zijn de hoeken aan de bazis ook gelijk en omgekeerd.

Het bewijs dezer stelling volgt onmiddelijk uit den drievlakkigen hoek, terwijl het omgekeerde door den pooldriehoek kan worden bewezen.

89. In elken bolvormigen driehoek staat over een grooteren hoek een grootere zijde en omgekeerd.

Het bewijs dezer stelling is hetzelfde als bij den rechtlijnigen driehoek; het omgekeerde wordt door den pooldriehoek gemakkelijk aangetoond.

90. In elken driehoek is de som van twee der hoeken grooter of kleiner dan $180°$, naar gelang de som der overstaande zijden grooter of kleiner dan $180°$ is, en omgekeerd.

Onderstellen wij, in fig. 44, $a + b < 180°$, dan is $a < 180° - b$ of $a < A'C$ en dus, volgens 89, ook $A < A'BC$ of $A < 180° - B$, derhalve $A + B < 180°$.

Zij voor het omgekeerde $A + B > 180°$, dan is $A > 180° - B$, dat is $A > A'BC$ en daarom, volgens 89, $a > A'C$ of $a > 180° - b$, derhalve $a + b > 180°$.

91. Uit de beide laatste eigenschappen volgt nog:

Indien de som van twee zijden grooter dan $180°$ is, dan zal de hoek over de grootste zijde altijd stomp zijn; de andere hoek kan dan scherp of stomp zijn en omgekeerd.

Is de som van twee zijden kleiner dan $180°$, dan zal de hoek over de kleinste zijde scherp zijn; de andere hoek kan dan scherp of stomp zijn en omgekeerd.

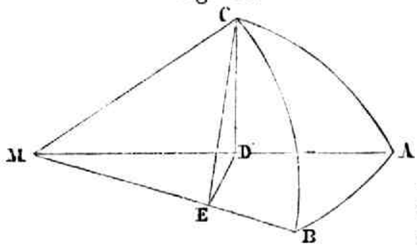
§ 14.

Afleiding der formules ter berekening van de rechthoekige driehoeken uit de figuur.

92. Ofschoon het wellicht voor een geregelde orde van ontwikkeling doelmatiger zou zijn, eerst de algemeene betrekkingen tusschen de zijden en hoeken van een bolvormigen driehoek op te sporen, ten einde daaruit de formules voor de bijzondere gevallen af te leiden, bestaan er toch gegronde redenen om daarvan af te wijken en eerst de formules op te sporen ter berekening van den rechthoekigen driehoek.

Zij daartoe, fig. 46, ABC een bolvormige driehoek rechthoekig

Fig. 46.



in A, met zijn overeenkomstigen drievlakkigen hoek. Trek dan uit C een loodlijn op de ribbe MA, en uit den voet D van deze loodlijn, in het vlak AMB, de lijn DE loodrecht op de ribbe MB; indien men dan C en E door een rechte lijn vereenigt, dan is CDE een rechtlijnige driehoek, rechthoekig in D. Verder is:

CD = sin.b, CE = sin.a, MD = cos.b, ME = cos.a en CED = B.

Nu is in driehoek DME:

$$ME = MD.\cos.BMA,$$

dat is: $\cos.a = \cos.b \cos.c \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$

In driehoek CDE is:

1°. $CD = CE.\sin.CED,$

of: $\sin.b = \sin.a \sin.B \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$

2°. $DE = CE.\cos.CED = \sin.a \cos.B,$

maar in driehoek DEM is:

$$DE = ME.\mathrm{tg}.BMA = \cos.a \,\mathrm{tg}.c,$$

derhalve: $\cos.a \,\mathrm{tg}.c = \sin.a \cos.B,$

of door cos.a deelende:

$$\mathrm{tg}.c = \mathrm{tg}.a \cos.B \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

3°. $DE = CD.\cot.CED = \sin.b \cot.B,$

maar in driehoek DEM is:

$$DE = MD.\sin.BMA = \cos.b \sin.c,$$

dus: $\sin.b \cot.B = \cos.b \sin.c,$

of door cos.b cot.B deelende:

$$\mathrm{tg}.b = \sin.c \,\mathrm{tg}.B \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Het zal nauwelijks noodig zijn op te merken, dat men de letters b en c en B en C met elkander mag verwisselen, zoodat men ook heeft:

uit (2) $\sin.c = \sin.a \sin.C,$

uit (3) $\mathrm{tg}.b = \mathrm{tg}.a \cos.C,$

uit (4) $\mathrm{tg}.c = \sin.b \,\mathrm{tg}.C.$

Deelt men verder (3) na vervanging der letters c en B door b en C op (2), dan komt er:

$$\cos.b = \cos.a \frac{\sin.B}{\cos.C}$$

en daar $\cos.a = \cos.b \cos.c$ is, heeft men na substitutie en vereenvoudiging:

$$\cos.C = \cos.c \sin.B \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

dus ook door verwisseling van letters:

$$\cos.B = \cos.b \sin.C.$$

Vermenigvuldigt men de beide laatste vergelijkingen, deelt men daarna door $\sin.B \sin.C$ en substitueert men $\cos.b \cos.c = \cos.a$, dan heeft men ten laatste:

$$\cos.a = \cot.B \cot.C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

93. De gevonden formules leeren ons dus dat:

(1) ***De cosinus van de hypotenusa is gelijk aan het product van de cosinussen der beide rechthoekszijden.***

(2) ***De sinus van een der rechthoekszijden is gelijk aan het product van den sinus van den overstaanden hoek en den sinus van de hypotenusa.***

(3) ***De tangens van een der rechthoekszijden is gelijk aan het product van den cosinus van den aanliggenden hoek en den tangens van de hypotenusa.***

(4) ***De tangens van een der rechthoekszijden is gelijk aan het product van den tangens van den overstaanden hoek en den sinus van de andere rechthoekszijde.***

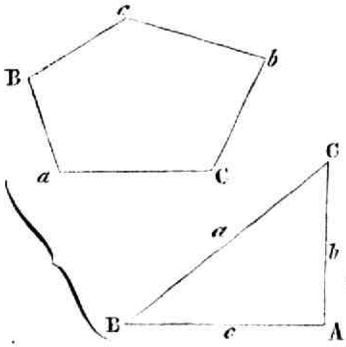
(5) ***De cosinus van een der scheeve hoeken is gelijk aan het product van den cosinus van de overstaande rechthoekszijde en den sinus van den anderen hoek.***

(6) ***De cosinus van de hypotenusa is gelijk aan het product van de cotangenten der beide scheeve hoeken.***

Met weinig moeite zal men de gevonden formules, in woorden overgebracht, in het geheugen kunnen houden. Mocht dit echter nog eenig bezwaar opleveren, dan kan daartoe dienen de zoogenaamde ***Regel van*** Neper.

94. Men denke zich, fig. 47, de elementen van den rechthoekigen driehoek, met weglating van den rechten hoek, geplaatst, in de orde waarin zij in den driehoek voorkomen, aan de hoekpunten van een vijfhoek, dan luidt de regel aldus:

Fig. 47.



De cosinus van elk element is gelijk aan het product van de cotangenten der beide aangrenzende, of gelijk aan het product van de sinussen der beide afgelegen elementen, mits men voor de rechthoekszijden de complimenten neme. Volgens dezen regel heeft men alzoo:

voor *a*:	aangr.	cos.a = cot.B cot.C,
	afgel.	cos.a = cos.b cos.c,
voor *b*:	aangr.	sin.b = tg.c cot.C of tg.c = sin.b tg.C,
	afgel.	sin.b = sin.a sin.B,
voor *c*:	aangr.	sin.c = tg.b cot.B of tg.b = sin.c tg.B,
	afgel.	sin.c = sin.a sin.C,
voor B:	aangr.	cos.B = tg.c cot.a of tg.c = tg.a cos.B,
	afgel.	cos.B = cos.b sin.C,
voor C:	aangr.	cos.C = cot.a tg.b of tg.b = tg.a cos.C,
	afgel.	cos.C = cos.c sin.B.

Men behoeft dus slechts de twee gegeven elementen met ieder der onbekenden zoodanig te rangschikken, dat twee van de drie, aangrenzende of afgelegen elementen van het derde worden, en er dan den gegeven regel op toe te passen.

95. De gevonden formules zijn voldoende ter oplossing van alle gevallen, die bij de rechthoekige driehoeken voorkomen, en kunnen, daar zij alle voor logarithmische berekening geschikt zijn, onmiddelijk worden toegepast. Zij geven nog aanleiding tot enkele opmerkingen, die bij de berekening in acht moeten genomen worden.

1°. Uit form. (1) en (6) blijkt, dat de hypotenusa kleiner of grooter dan een kwadrant is, naar gelang de beide rechthoekszijden of de beide scheeve hoeken *gelijksoortig* of *ongelijksoortig* zijn. Hieruit volgt verder, dat de hypotenusa grooter is dan elk der rechthoekszijden, als deze beide kleiner dan 90° en kleiner dan ieder der rechthoekszijden, als deze beide grooter dan 90° zijn, terwijl de hypotenusa kleiner dan de grootste rechthoekszijde is, als zij ongelijksoortig zijn.

2°. Uit form. (4) en (5) volgt, dat elke rechthoekszijde *gelijksoortig* is met den overliggenden hoek en omgekeerd.

3°. Daar $A + B + C > 2R$, $B + C - A < 2R$ en $A + B - C < 2R$ is, volgt hieruit door $A = R$ te nemen:

$$B + C > R \text{ en } < 3R \text{ en } B - C < R,$$

dat is: in elken rechthoekigen driehoek is de som der beide scheeve hoeken grooter dan 1 en kleiner dan 3 rechte hoeken, terwijl hun verschil kleiner dan een rechte hoek is.

96. Merkt men op dat een rechtzijdige driehoek altijd de pooldriehoek is van een rechthoekigen driehoek, dan kan men door toepassing van de eigenschap van den pooldriehoek gemakkelijk de formules vinden voor de berekening van de elementen van den rechtzijdigen driehoek.

Men heeft namelijk voor den rechthoekigen pooldriehoek:

$$\begin{aligned}
\cos.a' &= \cos.b' \cos.c' \\
\sin.b' &= \sin.a' \sin.B' \\
tg.b' &= tg.a' \cos.C' \\
tg.b' &= \sin.c' \, tg.B' \\
\cos.B' &= \cos.b' \sin.C' \\
\cos.a' &= \cot.B' \cot.C'.
\end{aligned}$$

Door nu, volgens 85, de eigenschap van den pooldriehoek toe te passen, heeft men:

$$\begin{aligned}
\cos.(180^\circ - A) &= \cos.(180^\circ - B) \cos.(180^\circ - C) \\
\sin.(180^\circ - B) &= \sin.(180^\circ - A) \sin.(180^\circ - b) \\
tg.(180^\circ - B) &= tg.(180^\circ - A) \cos.(180^\circ - c) \\
tg.(180^\circ - B) &= \sin.(180^\circ - C) \, tg.(180^\circ - b) \\
\cos.(180^\circ - B) &= \cos.(180^\circ - B) \sin.(180^\circ - c) \\
\cos.(180^\circ - A) &= \cot.(180^\circ - b) \cot.(180^\circ - c),
\end{aligned}$$

dat is:

$$\begin{aligned}
\cos.A &= - \cos.B \cos.C \\
\sin.B &= \sin.A \sin.b \\
tg.B &= - tg.A \cos.c \\
tg.B &= \sin.C \, tg.b \\
\cos.b &= \cos.B \sin.c \\
\cos.A &= - \cot.b \cot.c.
\end{aligned}$$

Men ziet dus, dat men slechts de groote letters in kleine en de kleine in groote heeft te veranderen, terwijl men in het tweede lid van die formules, waarin geen sinus voorkomt, het teeken — plaatst.

---

§ 15.

Berekening der rechthoekige bolvormige driehoeken.

97. Een bolvormige driehoek is volkomen bepaald door drie van de zes elementen, en daar bij de rechthoekige steeds een element, de rechte hoek, als gegeven kan worden beschouwd, zoo moet bij deze uit twee elementen het overige kunnen worden gevonden, zooals dan ook uit de formules blijkt.

Daar nu vijf dingen op tien verschillende wijzen drie aan drie kunnen worden genomen, zouden er ook tien gevallen zijn, als er geen gelijke onder waren. Hierdoor wordt het aantal gevallen tot zes verminderd, als namelijk gegeven zijn:

1°. De beide rechthoekszijden.
2°. De beide scheeve hoeken.
3°. De hypotenusa en een der rechthoekszijden.
4°. De hypotenusa en een der scheeve hoeken.
5°. Een rechthoekszijde en de aanliggende scheeve hoek.
6°. Een rechthoekszijde en den overliggenden scheeven hoek.

Eerste geval.

98. Zij gegeven de beide rechthoekszijden b en c.
Ter berekening der onbekenden heeft men:

$$\cos.a = \cos.b \cos.c \quad \text{form. (1)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{tg.c} = \sin.b\ \text{tg.C} \\ \text{tg.b} = \sin.c\ \text{tg.B} \end{array}\right\} \text{form. (4),} \qquad \begin{array}{ll} \text{waaruit:} & \text{tg.C} = \dfrac{\text{tg.c}}{\sin.b} \\ \quad " & \text{tg.B} = \dfrac{\text{tg.b}}{\sin.c}. \end{array}$$

Voorbeeld van berekening.
Zij gegeven $b = 109°2'16''$, $c = 72°25'$.
Men heeft:

$$\begin{aligned} \log.\cos.b &= 9.513473(-) \\ \log.\cos.c &= 9.480140 \\ \hline \log.\cos.a &= 8.993613(-) \\ a &= 95^\circ 39' 18''5 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \log.tg.c &= 10.499080 \\ ac.\log.\sin.b &= 10.024429 \\ \hline \log.tg.C &= 10.523509 \\ C &= 73^\circ 19' 25'' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log.tg.b &= 10.462098(-) \\ ac.\log.\sin.c &= 10.020780 \\ \hline \log.tg.B &= 10.482878(-) \\ B &= 108^\circ 12' 30''. \end{aligned}$$

Aanmerking. Ingeval a dicht bij 90° mocht zijn, kan men deze ook vinden door te stellen:

$$\cos.b \cos.c = tg.\varphi$$

en verder te nemen:

$$\frac{1 - \cos.a}{1 + \cos.a} = \frac{1 - tg.\varphi}{1 + tg.\varphi},$$

waaruit: $$tg.\tfrac{1}{2}a = \sqrt{tg.(45^\circ - \varphi)}.$$

Tweede geval.

99. Zij gegeven de beide scheeve hoeken B en C.

Ter berekening der onbekenden heeft men:

$$\cos.a = \cot.B \cot.C \quad \text{form. (6)}$$

$$\left.\begin{aligned} \cos.B &= \cos.b \sin.C \\ \cos.C &= \cos.c \sin.B \end{aligned}\right\} \text{form. (5),} \qquad \begin{aligned} \text{waaruit:} \quad \cos.b &= \frac{\cos.B}{\sin.C} \\ \text{"} \quad \cos.c &= \frac{\cos.C}{\sin.B}. \end{aligned}$$

Voorbeeld van berekening.

Zij gegeven $B = 104^\circ 45' 21''$, $C = 97^\circ 13' 15''$.

Men heeft:

$$\begin{aligned} \log.\cot.B &= 9.420595(-) \\ \log.\cot.C &= 9.102772(-) \\ \hline \log.\cos.a &= 8.523367 \\ a &= 88^\circ 5' 15''5 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \log.\cos.B &= 9.406031(-) \\ ac.\log.\sin.C &= 10.003458 \\ \hline \log.\cos.b &= 9.409489(-) \\ b &= 104^\circ 52' 35''5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log.\cos.C &= 9.099314(-) \\ ac.\log.\sin.B &= 10.014565 \\ \hline \log.\cos.c &= 9.113879(-) \\ c &= 97^\circ 28' 6''5. \end{aligned}$$

Daar de onbekende elementen alle door den cosinus bepaald worden, moeten deze kleiner dan 1 zijn, en dewijl nu de tweede leden quotienten zijn, die even goed grooter dan 1 zouden kunnen zijn, blijkt het dat de gegevens niet willekeurig kunnen zijn, maar aan een bepaalde voorwaarde moeten voldoen. Deze voorwaarde is, volgens 95. 3°:

$$B + C > R < 3R \text{ en } B - C < R,$$

want, onderstellende $B + C < R$ of $> 3R$, dan is $\cos.(B + C)$ *positief*.

Nu is: $\cos.(B + C) = \cos.B \cos.C - \sin.B \sin.C$,

derhalve: $\cos.B \cos.C > \sin.B \sin.C$,

of: $\cot.B \cot.C > 1$.

Is $B - C > R$, dan is $\cos.(B - C)$ *negatief*. Nu is:

$$\cos.(B - C) = \cos.B \cos.C + \sin.B \sin.C,$$

waarin $\cos.B \cos.C$ *negatief* moet zijn, en dus:

$$-\cos.B \cos.C > \sin.B \sin.C,$$

of: $-\cot.B \cot.C > 1$.

In deze onderstellingen zou dus $\cot.B \cot.C = \cos.a > +1$ of < -1 worden, hetgeen de onbestaanbaarheid van den driehoek aanduidt.

De voorwaarde van bestaanbaarheid, waaraan de beide hoeken B en C moeten voldoen, kan ook uit de bovenstaande formules worden afgeleid.

Uit $\cos.a = \cot.B \cot.C$ volgt:

$$\cot.B \cot.C < 1 \text{ en } > -1,$$

of: $\cos.B \cos.C < \sin.B \sin.C$ en $> -\sin.B \sin.C$,

waaruit:

$$\cos.(B + C) < 0 \text{ en } \cos.(B - C) > 0,$$

dat is: $\cos.(B + C)$ moet *negatief* zijn, derhalve $B + C > R$ en $< 3R$ en $\cos.(B - C)$ is *positief*, dus $B - C < R$.

Ook uit $\cos.b = \dfrac{\cos.B}{\sin.C}$ kan zulks worden afgeleid. Men heeft toch:

$$\cos.B < \sin.C.$$

Stel nu $B = 90° \pm B'$ en $C = 90° \pm C'$, waarin B' en C' natuurlijk kleiner dan 90° zijn, dan is:

$$\cos.(90° \pm B') < \sin.(90° \pm C'),$$

of: $\sin.B' < \sin.(90° \pm C')$,

derhalve: $B' < 90° \pm C'$

en $B' \pm C' < 90°$.

Hierdoor wordt:

$$B + C = 180^\circ \pm (B' + C') \text{ of } = 180^\circ \pm (B' - C'),$$

derhalve: $B + C > R$ en $< 3R$

en $B - C = \pm (B' - C')$,

dus: $B - C < \pm R$.

Aanmerking. Mocht een van de gegevens dicht bij 90° zijn, dan zou men nauwkeuriger uitkomsten verkrijgen door de volgende formules:

$$\frac{1-\cos.a}{1+\cos.a} = \frac{1-\cot.B\cot.C}{1+\cot.B\cot.C}, \quad \text{waaruit: } tg.\tfrac{1}{2}a = \sqrt{-\frac{\cos.(B+C)}{\cos.(B-C)}}$$

$$\frac{1-\cos.b}{1+\cos.b} = \frac{\sin.C-\sin.(90^\circ-B)}{\sin.C+\sin.(90^\circ-B)} \;\; " \quad tg.\tfrac{1}{2}b = \sqrt{\frac{tg.\{\tfrac{1}{2}(C+B)-45^\circ\}}{tg.\{\tfrac{1}{2}(C-B)+45^\circ\}}}$$

$$\frac{1-\cos.c}{1+\cos.c} = \frac{\sin.B-\sin.(90^\circ-C)}{\sin.B+\sin.(90^\circ-C)} \;\; " \quad tg.\tfrac{1}{2}c = \sqrt{\frac{tg.\{\tfrac{1}{2}(B+C)-45^\circ\}}{tg.\{\tfrac{1}{2}(B-C)+45^\circ\}}}$$

Ten gevolge van de voorwaarden, waaraan $B + C$ en $B - C$ moeten voldoen, is $\dfrac{\cos.(B + C)}{\cos.(B - C)}$ *negatief*; het teeken — maakt deze waarde echter *positief*. Verder is $\tfrac{1}{2}(B + C) > 45^\circ$ en $< 135^\circ$, dus is $\tfrac{1}{2}(B + C) - 45^\circ > 0$ en $< 90^\circ$ en derhalve de tangens *positief*; $\tfrac{1}{2}(B - C)$ is $< \pm 45^\circ$, derhalve $\tfrac{1}{2}(B - C) + 45^\circ$ of $\tfrac{1}{2}(C - B) + 45^\circ < 90^\circ$ en dus ook de tangens *positief*. Daar verder de zijden van een driehoek altijd kleiner dan 180° zijn, zijn de halve zijden kleiner dan 90°, waarom alleen de positieve wortel is in rekening gebracht.

De laatste opmerking geldt voor alle worteltrekkingen waardoor de tangens van een der halve elementen bepaald wordt.

Derde geval.

100. Zij gegeven de hypotenusa a en een der rechthoekszijden b. Ter berekening heeft men:

$$\cos.a = \cos.b\cos.c \;\text{ form. (1)}, \quad \text{waaruit: } \cos.c = \frac{\cos.a}{\cos.b}$$

$$\sin.b = \sin.a\sin.B \;\; " \;\; (2), \quad " \;\; \sin.B = \frac{\sin.b}{\sin.a}$$

$$tg.b = tg.a\cos.C \;\; " \;\; (3), \quad " \;\; \cos.C = \frac{tg.b}{tg.a}$$

Voorbeeld van berekening.

Zij gegeven $a = 95^\circ 39' 20''$, $b = 72^\circ 25' 2''$.

Men heeft:

$$\begin{array}{rlrl}
\log.\cos.a & = 8.993647(-) & \log.\sin.b & = 9.979221 \\
\text{ac.}\log.\cos.b & = 10.519873 & \text{ac.}\log.\sin.a & = 10.002119 \\
\hline
\log.\cos.c & = 9.513520(-) & \log.\sin.B & = 9.981340 \\
c & = 109°2'24'' & B & = 73°19'29''
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
\log.\text{tg}.b & = 10.499095 \\
\text{ac.}\log.\text{tg}.a & = 8.995764(-) \\
\hline
\log.\cos.C & = 9.494859(-) \\
C & = 108°12'37''.
\end{array}$$

Voor B vindt men twee waarden die elkanders supplementen zijn, omdat hij bepaald wordt door den sinus. Omdat echter, volgens 95. 2°, B en b gelijksoortig moeten zijn, heeft men de kleinste waarde voor B genomen.

Het is duidelijk dat de quotienten, waardoor de onbekenden gevonden worden, kleiner dan 1 moeten zijn, en dat dus de gegevens aan een bepaalde voorwaarde moeten voldoen. Men zal bijv. moeten hebben $\cos.a < \cos.b$. Daar a en b beide of een van beide kleiner of grooter dan 90° kan zijn, stelle men $a = 90° \pm \delta$ en $b = 90° \pm \delta'$, waarin δ en δ' uit den aard der zaak kleiner dan 90° zijn, dan heeft men:

$$\cos.(90° \pm \delta) < \cos.(90° \pm \delta'),$$

of:

$$\sin.\delta < \sin.\delta',$$

derhalve:

$$\delta < \delta'.$$

Daardoor wordt:

$$a = 90° + \delta < 90° + \delta' \text{ en } > 90° - \delta',$$

of:

$$a = 90° - \delta > 90° - \delta' \text{ en } < 90° + \delta',$$

derhalve moet a gelegen zijn tusschen b en $180° - b$, of de hypotenusa moet gelegen zijn tusschen de rechthoekszijde en zijn supplement.

Aanmerking. Mocht de onbekende niet nauwkeurig genoeg door de bovenstaande formules gevonden kunnen worden, dan kan men de volgende formules gebruiken:

$$\frac{1-\cos.c}{1+\cos.c} = \frac{\cos.b-\cos.a}{\cos.b+\cos.a}, \quad \text{waaruit: } \text{tg}.\tfrac{1}{2}c = \sqrt{\text{tg}.\tfrac{1}{2}(a+b)\,\text{tg}.\tfrac{1}{2}(a-b)}$$

$$\frac{1-\sin.B}{1+\sin.B} = \frac{\sin.a-\sin.b}{\sin.a+\sin.b}, \quad \text{,,} \quad \text{tg}.(45°-\tfrac{1}{2}B) = \pm\sqrt{\frac{\text{tg}.\tfrac{1}{2}(a-b)}{\text{tg}.\tfrac{1}{2}(a+b)}}$$

$$\frac{1-\cos.C}{1+\cos.C} = \frac{\text{tg}.a-\text{tg}.b}{\text{tg}.a+\text{tg}.b}, \quad \text{,,} \quad \text{tg}.\tfrac{1}{2}C = \sqrt{\frac{\sin.(a-b)}{\sin.(a+b)}}$$

De verschillende waarden, die $a + b$ en $a - b$, voor $a = 90° \pm \delta$, en $b = 90° \pm \delta'$, waarin $\delta < \delta'$, kunnen hebben, zijn:

$$a + b = (90° \pm \delta) + (90° + \delta') = 180° + (\delta' \pm \delta) > 180°$$
$$a - b = (90° \pm \delta) - (90° + \delta') = -(\delta' \pm \delta) \textit{ negatief}$$
$$a + b = (90° \pm \delta) + (90° - \delta') = 180° - (\delta \mp \delta') < 180°$$
$$a - b = (90° \pm \delta) - (90° - \delta') = \delta' \pm \delta \textit{ positief},$$

waaruit blijkt, dat als $a + b > 180°$ is, $a - b$ *negatief* wordt; is $a + b < 180°$, dan is $a - b$ *positief*, en derhalve de vormen onder het wortelteeken steeds *positief*.

Voor tg.$(45° - \frac{1}{2}B)$ neemt men den positieven of den negatieven wortel, naar gelang de gegeven b kleiner of grooter dan 90° is.

Vierde geval.

101. Zij gegeven de hypotenusa a en een der scheeve hoeken B. Ter berekening der onbekenden heeft men:

cos.a = cot.B cot.C form. (6), waaruit: cot.C = cos.a tg.B
" (2), sin.b = sin.a sin.B
" (5), tg.c = tg.a cos.B.

Voorbeeld van berekening.

Zij gegeven $a = 25°0'49''$, $B = 76°13'24''$.

Men heeft:

log.cos.a	= 9.957227	log.sin.a	= 9.626170
log.tg.B	= 10.610495	log.sin.B	= 9.987323
log.cot.C	= 10.567722	log.sin.b	= 9.613493
C	= 15°8'24''	b	= 24°14'49''

log.tg.a = 9.668942
log.cos.B = 9.376828
log.tg.c = 9.045770
c = 6°20'25''5.

Van de twee waarden, die men voor b vindt, neemt men die welke gelijksoortig met B is.

Aanmerking. Indien de zijde b dicht bij 90° ligt, kan men die nauwkeuriger vinden door te stellen:

$$\text{sin.a sin.B} = \text{tg.}\varphi,$$

dan heeft men:

$$\frac{1 - \text{sin.b}}{1 + \text{sin.b}} = \frac{1 - \text{tg.}\varphi}{1 + \text{tg.}\varphi},$$

dat is: $\text{tg.}(45° - \frac{1}{2}b) = \pm \sqrt{\text{tg.}(45° - \varphi)}$,

waarbij het bovenste teeken dient als $B < 90°$ en het onderste als $B > 90°$ is.

Vijfde geval.

102. Zij gegeven een der rechthoekszijden b met den aanliggenden hoek C.

Ter berekening der onbekenden heeft men:

$$\text{tg.b} = \text{tg.a}\cos.\text{C} \quad \text{form. (3), waaruit:} \quad \text{tg.a} = \frac{\text{tg.b}}{\cos.\text{C}}$$

$$\text{" (4), " } \quad \text{tg.c} = \sin.\text{b}\,\text{tg.C}$$

$$\text{" (5), " } \quad \cos.\text{B} = \cos.\text{b}\sin.\text{C}.$$

Voorbeeld van berekening.

Zij gegeven b = 125°26'40", C = 95°10'30".

Men heeft:

log.tg.b	= 10.147623(—)	log.sin.b	= 9.910986
ac.log.cos.C	= 11.044803(—)	log.tg.C	= 11.043029(—)
log.tg.a	= 11.192426	log.tg.c	= 10.954015(—)
a	= 86°19'35"	c	= 96°20'36"6

log.cos.b = 9.763363(—)
log.sin.C = 9.998226

log.cos.B = 9,761589(—)
B = 125°16'42".

Aanmerking. Indien de hoek B weinig van 90° mocht verschillen, dan kan men dien nauwkeuriger vinden uit de formule:

$$\text{tg.}\tfrac{1}{2}\text{B} = \sqrt{\text{tg.}(45° - \varphi)},$$

waarin φ gevonden wordt uit tg.φ = cos.b sin.C.

Zesde geval.

103. Zij gegeven een der rechthoekszijden b en den overstaanden hoek B.

Ter berekening der onbekenden heeft men:

$$\sin.\text{b} = \sin.\text{a}\sin.\text{B} \quad \text{form. (2), waaruit:} \quad \sin.\text{a} = \frac{\sin.\text{b}}{\sin.\text{B}}$$

$$\text{tg.b} = \sin.\text{c}\,\text{tg.B} \quad \text{" (4), "} \quad \sin.\text{c} = \frac{\text{tg.b}}{\text{tg.B}}$$

$$\cos.\text{B} = \cos.\text{b}\sin.\text{C} \quad \text{" (5), "} \quad \sin.\text{C} = \frac{\cos.\text{B}}{\cos.\text{b}}$$

Daar elk der onbekende elementen door zijn sinus wordt bepaald, verkrijgt men voor elk twee waarden, die elkanders supplementen zijn.

Men verkrijgt dus twee driehoeken, die aan de gegevens voldoen en die, daar zij een zijde gemeen en den overstaanden hoek gelijk hebben, elkanders supplements-driehoeken zijn. Het is dus dikwijls of onzeker of niet te bepalen, welke dezer driehoeken de gevraagde is, en daarom noemt men dit geval *het twijfelachtige geval.*

Omdat de sinus altijd kleiner dan 1 moet zijn, zullen de gegevens moeten voldoen aan zoodanige voorwaarden, dat de quotienten in het tweede lid kleiner dan 1 zijn.

Deze voorwaarden zijn:

1°. dat b en B gelijksoortig zijn;

2°. dat $b < B$ als zij beide kleiner dan 90°, en $b > B$ als zij beide grooter dan 90° zijn.

Voorbeeld van berekening.

Zij gegeven $b = 93°21'12''$, $B = 91°41'17''$.

Men heeft:

log.sin.b	= 9.999256	log.tg.b	=11.232150(—)
ac.log.sin.B	=10.000188	ac.log.tg.B	= 8.469388(—)
log.sin.a	= 9.999444	log.sin.c	= 9.701538
a	= 87°6'10"	c	= 30°11'47"
a_1	= 92°53'50"	c_1	= 149°48'13"

log.cos.B	= 8.469199(—)
ac.log.cos.b	=11.232893(—)
log.sin.C	= 9.702092
C	= 30°14'20"
C_1	= 149°45'40".

Tot het behoorlijk verbinden der elementen merke men op dat c en C gelijksoortig moeten zijn, en dat a kleiner of grooter dan 90° is, naar gelang de beide rechthoekszijden of de beide scheeve hoeken gelijksoortig of ongelijksoortig zijn. De bij elkander behoorende elementen zijn dus voor den

eersten driehoek	tweeden driehoek
b = 93°21'12"	b = 93°21'12"
B = 91°41'17"	B = 91°41'17"
a = 87°6'10"	a = 92°53'50"
c = 149°48'13"	c = 30°11'47"
C = 149°45'40"	C = 30°14'20"

Aanmerking. Indien een of meer der onbekende elementen weinig van 90° verschilt, kan men zich van de volgende formules bedienen:

$$\frac{1-\sin.a}{1+\sin.a}=\frac{\sin.B-\sin.b}{\sin.B+\sin.b}, \text{ waaruit: } \operatorname{tg}.(45^\circ-\tfrac{1}{2}a)=\pm\sqrt{\frac{\operatorname{tg}.\frac{1}{2}(B-b)}{\operatorname{tg}.\frac{1}{2}(B+b)}}$$

$$\frac{1-\sin.c}{1+\sin.c}=\frac{\operatorname{tg}.B-\operatorname{tg}.b}{\operatorname{tg}.B+\operatorname{tg}.b} \quad " \quad \operatorname{tg}.(45^\circ-\tfrac{1}{2}c)=\pm\sqrt{\frac{\sin.(B-b)}{\sin.(B+b)}}$$

$$\frac{1-\sin.C}{1+\sin.C}=\frac{\cos.b-\cos.B}{\cos.b+\cos.B} \quad " \operatorname{tg}.(45^\circ-\tfrac{1}{2}C)=\pm\sqrt{\operatorname{tg}.\tfrac{1}{2}(B-b)\operatorname{tg}.\tfrac{1}{2}(B+b)}$$

104. Ter oefening zij gegeven:

1°. B = 105°52′39″, C = 138°15′45″,
2°. b = 72°25′2″, c = 109°2′24″,
3°. a = 93°4′7″, C = 102°57′21″,
4°. a = 88°5′16″, b = 97°28′6″,
5°. b = 24°11′38″, C = 88°20′49″,
6°. b = 24°14′49″, B = 76°13′24″,
7°. b = 93°21′12″, c = 149°48′12″,
8°. B = 59°25′45″, C = 95°52′48″,
9°. a = 75°5′44″, B = 33°44′40″,
10°. a = 70°45′7″, c = 134°55′6″,
11°. c = 36°15′, B = 115°13′31″,
12°. c = 57°7′50″, C = 60°15′,

te berekenen de overige elementen.

Van een rechtzijdigen driehoek, waarin a = 90° is, zijn gegeven:

13°. A = 59°50′, B = 51°27′19″.
14°. b = 113°53′36″, c = 119°45′.
15°. A = 118°1′15″, c = 103°22′8″,
16°. C = 62°5′18″, b = 107°58′52″,
17°. B = 139°53′42″, b = 136°4′58″,
18°. B = 63°29′17″, C = 150°18′28″,

te berekenen de onbekende elementen.

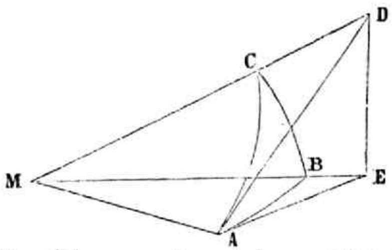
§ 16.

Analytische afleiding van de grondformules der bolvormige driehoeksmeting.

105. De algemeene betrekkingen tusschen de elementen van een bolvormigen driehoek dragen den naam van *grondformules.* Zij kunnen alle uit een enkele formule analytisch worden afgeleid. Deze eerste formule, in engeren zin *de grondformule* genoemd, moet echter met behulp van een figuur worden verkregen.

Zij daartoe, fig. 48, M het middelpunt van den bol, op welks oppervlak de driehoek ABC beschreven is, en MABC den met dezen driehoek overeenstemmenden drievlakkigen hoek. Zoo men dan in het punt A de raaklijnen AD en AE aan de bogen AC en AB trekt, die het verlengde der stralen MC en MB in D en E snijden, en daarna deze punten door een rechte lijn DE vereenigt, dan is:

Fig. 48.



$$AE = tg.c \qquad AD = tg.b$$
$$ME = sec.c \qquad MD = sec.b.$$

Nu is in de driehoeken AED en MED:

$$DE^2 = AD^2 + AE^2 - 2AD.AE.cos.DAE$$
$$DE^2 = MD^2 + ME^2 - 2MD.ME.cos.DME$$

en hieruit, in het oog houdende dat DAE $=$ A en DME $=$ a is:

$$tg.^2b + tg.^2c - 2tg.b\ tg.c\ cos.A = sec.^2b + sec.^2c - 2sec.b\ sec.c\ cos.a,$$

of daar in het algemeen $sec.^2p - tg.^2p = 1$ is:

$$sec.b\ sec.c\ cos.a = 1 + tg.b\ tg.c\ cos.A,$$

waaruit, na vermenigvuldiging met cos.b cos.c:

$$cos.a = cos.b\ cos.c + sin.b\ sin.c\ cos.A.$$

Daar men dezelfde constructie aan een der beide andere hoekpunten kan verrichten, zoo heeft men door verwisseling der letters:

$$\left.\begin{aligned} cos.a &= cos.b\ cos.c + sin.b\ sin.c\ cos.A \\ cos.b &= cos.a\ cos.c + sin.a\ sin.c\ cos.B \\ cos.c &= cos.a\ cos.b + sin.a\ sin.b\ cos.C \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (I.)$$

Deze formules bevatten een betrekking tusschen de drie zijden en een der hoeken, en worden in de toepassing het meest gebruikt. Men kan ze den *regel voor de cosinussen der zijden* noemen.

106. Uit de eerste heeft men:

$$\cos.A = \frac{\cos.a - \cos.b \cos.c}{\sin.b \sin.c}$$

en dus:

$$\sin.^2A = 1 - \cos.^2A = \frac{\sin.^2b \sin.^2c - (\cos.a - \cos.b \cos.c)^2}{\sin.^2b \sin.^2c},$$

of door in den teller voor $\sin.^2b \sin.^2c$ te schrijven $(1 - \cos.^2b)(1 - \cos.^2c)$, na ontwikkeling:

$$\sin.A = \frac{\sqrt{(1 - \cos.^2a - \cos.^2b - \cos.^2c + 2\cos.a \cos.b \cos.c)}}{\sin.b \sin.c}$$

en ter vereenvoudiging den teller gelijk M stellende:

$$\frac{\sin.A}{\sin.a} = \frac{M}{\sin.a \sin.b \sin.c}.$$

Daar de vorm M symmetriek is, en dus niet verandert als men de letters a, b en c verwisselt, heeft men ook:

$$\frac{\sin.B}{\sin.b} = \frac{M}{\sin.a \sin.b \sin.c}$$

en

$$\frac{\sin.C}{\sin.c} = \frac{M}{\sin.a \sin.b \sin.c}$$

derhalve:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\sin.A}{\sin.a} = \dfrac{\sin.B}{\sin.b} = \dfrac{\sin.C}{\sin.c} \\ \text{of: } \sin.A : \sin.B : \sin.C = \sin.a : \sin.b : \sin.c \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{II})$$

Deze regel, waaruit blijkt dat de sinussen der zijden evenredig zijn met de sinussen der overstaande hoeken, noemt men den *regel der sinussen.*

De standvastige betrekking tusschen de sinussen der hoeken en der overstaande zijden heet de *modulus.*

107. Substitueert men de waarde van cos.b uit de tweede vergelijking van stelsel I in de eerste, dan komt er:

$$\cos.a = \cos.a \cos.^2c + \sin.a \sin.c \cos.c \cos.B + \sin.b \sin.c \cos.A.$$

Brengt men nu den eersten term uit het tweede lid over in het eerste lid, en deelt men daarna door sin.c, dan heeft men:

$$\cos.a \sin.c = \cos.c \sin.a \cos.B + \sin.b \cos.A.$$

Deelt men nu nogmaals door sin.a, en stelt men, ingevolge stelsel II, $\dfrac{\sin.b}{\sin.a} = \dfrac{\sin.B}{\sin.A}$, dan vindt men:

$$\cot.a \sin.c = \cos.c \cos.B + \sin.B \cot.A,$$

of liever: $\cot.a \sin.c = \sin.B \cot.A + \cos.c \cos.B.$

Substitueert men de derde vergelijking van stelsel I in de eerste, dan verkrijgt men, na dezelfde bewerking:

$$\cot.a \sin.b = \sin.C \cot.A + \cos.b \cos.C.$$

Op dezelfde wijze vindt men nog vier formules, door uit stelsel I cos.a en cos.c achtereenvolgens te substitueeren in cos.b, en door cos.a en cos.b te substitueeren in cos.c, welke vergelijkingen men echter gemakkelijker verkrijgt door in de gevondene de letters behoorlijk te verwisselen. Men verkrijgt dan het volgende stelsel:

$$\left.\begin{array}{l} \cot.a \sin.b = \sin.C \cot.A + \cos.b \cos.C \\ \cot.a \sin.c = \sin.B \cot.A + \cos.c \cos.B \\ \cot.b \sin.a = \sin.C \cot.B + \cos.a \cos.C \\ \cot.b \sin.c = \sin.A \cot.B + \cos.c \cos.A \\ \cot.c \sin.a = \sin.B \cot.C + \cos.a \cos.B \\ \cot.c \sin.b = \sin.A \cot.C + \cos.b \cos.A \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (III.)$$

Deze formules bevatten een betrekking tusschen twee zijden en twee hoeken, waarvan een tusschen die twee zijden is gelegen. Men noemt ze den *regel der cotangenten.*

Om ze gemakkelijk te onthouden merke men op, dat in elk de drie verschillende letters voorkomen in willekeurige orde genomen; deze schrijft men tweemaal op dezelfde wijze achter elkander, zoodanig dat de eerste twee letters kleine, de volgende twee groote, dan één klein en één groot zijn. Bij de beide eersten voegt men de benamingen *cot.* en *sin.*, bij de volgende twee dezelfde benamingen in omgekeerde orde en bij elk der laatsten de benaming *cos.*

Plaatst men nu $=$ tusschen den tweeden en derden factor en $+$ tusschen den vierden en vijfden, dan heeft men de begeerde formule.

108. De vergelijking:

$$\cos.a \sin.c = \cos.c \sin.a \cos.B + \sin.b \cos.A \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

uit 107 geeft door verwisseling der letters a en c en A en C;

$$\cos.c \sin.a = \cos.a \sin.c \cos.B + \sin.b \cos.C \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

welke laatste men ook verkrijgt door de waarde van cos.b uit de tweede vergelijking van stelsel I in de derde vergelijking te substitueeren.

Brengt men nu de waarde van cos.c sin.a uit (b) over in (a), dan heeft men:

$$\cos.a \sin.c = \cos.a \sin.c \cos.^2 B + \sin.b \cos.B \cos.C + \sin.b \cos.A,$$

of, na den eersten term uit het tweede lid in het eerste overgegebracht en door sin.c gedeeld te hebben:

$$\cos.a \sin.^2 B = \frac{\sin.b}{\sin.c}(\cos.A + \cos.B \cos.C).$$

Nu is, volgens stelsel II, $\frac{\sin.b}{\sin.c} = \frac{\sin.B}{\sin.C}$ en hierdoor heeft men eindelijk:

$$\cos.a \sin.B \sin.C = \cos.A + \cos.B \cos.C,$$

of
$$\cos.A = -\cos.B \cos.C + \sin.B \sin.C \cos.a.$$

Na behoorlijke verwisseling der letters heeft men alzoo het volgende stelsel:

$$\left.\begin{aligned} \cos.A &= -\cos.B \cos.C + \sin.B \sin.C \cos.a \\ \cos.B &= -\cos.A \cos.C + \sin.A \sin.C \cos.b \\ \cos.C &= -\cos.A \cos.B + \sin.A \sin.B \cos.c \end{aligned}\right\} \quad . \quad (\mathrm{IV.})$$

Deze formules geven een betrekking tusschen de drie hoeken en één zijde en kunnen den ***regel voor de cosinussen der hoeken*** genoemd worden.

109. Neemt men de som der vergelijkingen (a) en (b) uit 108, dan komt er:

$$\sin.(a + c) = \sin.(a + c) \cos.B + \sin.b (\cos.A + \cos.C),$$

of: $\sin.b (\cos.A + \cos.C) = \sin.(a + c) (1 - \cos.B)$. . (c)

Nu is volgens stelsel (II):

$$\sin.b \sin.A = \sin.a \sin.B$$
$$\sin.b \sin.C = \sin.c \sin.B,$$

waaruit door optelling en aftrekking:

$$\sin.b (\sin.A \pm \sin.C) = \sin.B (\sin.a \pm \sin.c). \quad . \quad (d)$$

Deelt men nu (d) door (c) en neemt men de teekens afzonderlijk, dan komt er:

$$\frac{\sin.A + \sin.C}{\cos.A + \cos.C} = \frac{\sin.a + \sin.c}{\sin.(a + c)} \times \frac{\sin.B}{1 - \cos.B}$$
$$\frac{\sin.A - \sin.C}{\cos.A + \cos.C} = \frac{\sin.a - \sin.c}{\sin.(a + c)} \times \frac{\sin.B}{1 - \cos.B},$$

waaruit, na alle uitdrukkingen tot halve bogen te hebben herleid en na behoorlijke vereenvoudiging:

$$\mathrm{tg.}\tfrac{1}{2}(A + C) = \frac{\cos.\frac{1}{2}(a - c)}{\cos.\frac{1}{2}(a + c)} \cot.\tfrac{1}{2}B$$
$$\mathrm{tg.}\tfrac{1}{2}(A - C) = \frac{\sin.\frac{1}{2}(a - c)}{\sin.\frac{1}{2}(a + c)} \cot.\tfrac{1}{2}B.$$

Door verwisseling der letters heeft men dus het volgende stelsel:

$$\left.\begin{aligned}
tg.\tfrac{1}{2}(A + B) &= \frac{\cos.\frac{1}{2}(a - b)}{\cos.\frac{1}{2}(a + b)} \cot.\tfrac{1}{2}C \\
tg.\tfrac{1}{2}(A - B) &= \frac{\sin.\frac{1}{2}(a - b)}{\sin.\frac{1}{2}(a + b)} \cot.\tfrac{1}{2}C \\
tg.\tfrac{1}{2}(A + C) &= \frac{\cos.\frac{1}{2}(a - c)}{\cos.\frac{1}{2}(a + c)} \cot.\tfrac{1}{2}B \\
tg.\tfrac{1}{2}(A - C) &= \frac{\sin.\frac{1}{2}(a - c)}{\sin.\frac{1}{2}(a + c)} \cot.\tfrac{1}{2}B \\
tg.\tfrac{1}{2}(B + C) &= \frac{\cos.\frac{1}{2}(b - c)}{\cos.\frac{1}{2}(b + c)} \cot.\tfrac{1}{2}A \\
tg.\tfrac{1}{2}(B - C) &= \frac{\sin.\frac{1}{2}(b - c)}{\sin.\frac{1}{2}(b + c)} \cot.\tfrac{1}{2}A
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (V.)$$

110. Substitueert men de waarde van cos.B uit de tweede vergelijking van stelsel (IV) in de eerste, dan heeft men:

$$\cos.A = \cos.A \cos.^2 C - \sin.A \sin.C \cos.C \cos.b + \sin.B \sin.C \cos.a.$$

Brengt men den eersten term uit het tweede lid in het eerste over en deelt men door sin.C, dan komt er:

$$\cos.A \sin.C = - \sin.A \cos.C \cos.b + \sin.B \cos.a$$

en door verwisseling der letters A en C en a en c:

$$\cos.C \sin.A = - \sin.C \cos.A \cos.b + \sin.B \cos.c,$$

waaruit door optelling:

$$\sin.(A + C) = - \sin.(A + C) \cos.b + \sin.B (\cos.a + \cos.c),$$

of: $\sin.B (\cos.a + \cos.c) = \sin.(A + C) (1 + \cos.b)$. . (e)

Verder heeft men uit den regel der sinussen:

$$\sin.B \sin.a = \sin.b \sin.A$$
$$\sin.B \sin.c = \sin.b \sin.C,$$

waaruit door optelling en aftrekking:

$$\sin.B (\sin.a \pm \sin.c) = \sin.b (\sin.A \pm \sin.C) \quad . \quad . \quad (f)$$

en door nu de vergelijkingen (f) elk afzonderlijk door vergelijking (e) te deelen, en daarna alles in halve bogen uit te drukken en behoorlijk te vereenvoudigen, verkrijgt men:

$$tg.\tfrac{1}{2}(a + c) = \frac{\cos.\frac{1}{2}(A - C)}{\cos.\frac{1}{2}(A + C)} \, tg.\tfrac{1}{2}b$$

$$tg.\tfrac{1}{2}(a - c) = \frac{\sin.\frac{1}{2}(A - C)}{\sin.\frac{1}{2}(A + C)} \, tg.\tfrac{1}{2}b$$

en verder, even als in 109, door verwisseling der letters het stelsel:

$$\left.\begin{aligned}
\mathrm{tg.}\tfrac{1}{2}(a + b) &= \frac{\cos.\frac{1}{2}(A - B)}{\cos.\frac{1}{2}(A + B)}\,\mathrm{tg.}\tfrac{1}{2}c \\
\mathrm{tg.}\tfrac{1}{2}(a - b) &= \frac{\sin.\frac{1}{2}(A - B)}{\sin.\frac{1}{2}(A + B)}\,\mathrm{tg.}\tfrac{1}{2}c \\
\mathrm{tg.}\tfrac{1}{2}(a + c) &= \frac{\cos.\frac{1}{2}(A - C)}{\cos.\frac{1}{2}(A + C)}\,\mathrm{tg.}\tfrac{1}{2}b \\
\mathrm{tg.}\tfrac{1}{2}(a - c) &= \frac{\sin.\frac{1}{2}(A - C)}{\sin.\frac{1}{2}(A + C)}\,\mathrm{tg.}\tfrac{1}{2}b \\
\mathrm{tg.}\tfrac{1}{2}(b + c) &= \frac{\cos.\frac{1}{2}(B - C)}{\cos.\frac{1}{2}(B + C)}\,\mathrm{tg.}\tfrac{1}{2}a \\
\mathrm{tg.}\tfrac{1}{2}(b - c) &= \frac{\sin.\frac{1}{2}(B - C)}{\sin.\frac{1}{2}(B + C)}\,\mathrm{tg.}\tfrac{1}{2}a
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (\mathrm{VI.})$$

De formules in stelsel (V) en (VI) zijn bekend onder den naam van *Neperiaansche analogiën* en dienen om twee hoeken uit den derden hoek en de beide overstaande zijden, of om twee zijden uit de derde zijde en de beide overstaande hoeken te bepalen.

Het is duidelijk dat ze steeds twee aan twee moeten gebruikt worden.

---

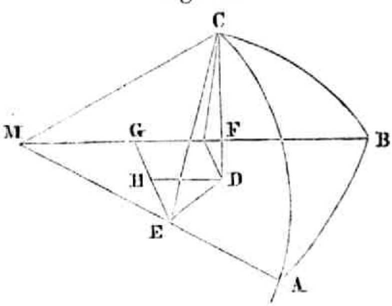
§ 17.

Afleiding der grondformules uit de figuur.

111. De grondformules, vervat in de stelsels (I), (II) en (III), kunnen echter ook uit de figuur worden afgeleid.

Zij daartoe, in fig. 49, ABC een bolvormige driehoek, beschreven op het oppervlak van een bol, wiens middelpunt in M ligt, met den daarbij behoorenden drievlakkigen hoek. Laat dan uit C de loodlijn CD op het vlak AMB neder; trek DE loodrecht op AM, en DF loodrecht op MB, verder EG evenwijdig aan DF en HD evenwijdig aan MB; vereenig eindelijk C met E en F, dan is

Fig. 49.



CED = A en CFD = B, als standhoeken van de vlakken CMA en AMB, en van de vlakken AMB en BMC, en GED = AMB = c, omdat de beenen van den eenen hoek loodrecht staan op die des anderen.

Verder is:

$$MF = \cos.a; \qquad ME = \cos.b.$$
$$CF = \sin.a; \qquad CE = \sin.b.$$

Tot het vinden van den regel der cosinussen heeft men nu:

$$MF = MG + FG \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (a)$$

Maar in driehoek MGE is:

$$MG = ME \cos.AMB = \cos.b \cos.c.$$

In driehoek DHE is:

$$HD = GF = DE\sin.GED = DE\sin.c,$$

doch uit driehoek CDE volgt:

$$DE = CE\cos.CED = \sin.b \cos.A,$$

dus:

$$GF = \sin.b \sin.c \cos.A,$$

waardoor vergelijking (a) verandert in:

$$\cos.a = \cos.b \cos.c + \sin.b \sin.c \cos.A.$$

112. Om den regel der sinussen te vinden heeft men in de driehoeken CDE en CDF:

$$CD = CE.\sin.CED = CF.\sin.CFD,$$

dat is:

$$\sin.b \sin.A = \sin.a \sin.B.$$

113. Voor den regel der cotangenten is:

$$GE = GH + EH \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (b)$$

Nu is in driehoek MEG:

$$GE = ME.\sin.AMB = \cos.b \sin.c.$$

In driehoek CFD:

$$GH = DF = CF.\cos.DFC = \sin.a \cos.B$$

en in driehoek EHD en CDE:

$$EH = DE.\cos.HED = CE.\cos.CED.\cos.HED = \sin.b \cos.c \cos.A.$$

Door al deze waarden in (b) te substitueeren, heeft men:

$$\cos.b \sin.c = \sin.a \cos.B + \sin.b \cos.c \cos.A.$$

Deelt men nu door sin.b en schrijft men $\frac{\sin.A}{\sin.B}$ in plaats van $\frac{\sin.a}{\sin.b}$, dan komt er:

$$\cot.b \sin.c = \sin.A \cot.B + \cos.c \cos.A.$$

114. De drie gevonden formules op den pooldriehoek toepassende, hebben wij:

$$\cos.a' = \cos.b' \cos.c' + \sin.b' \sin.c' \cos.A'$$
$$\frac{\sin.a'}{\sin.A'} = \frac{\sin.b'}{\sin.B'} = \frac{\sin.c'}{\sin.C'}$$
$$\cot.b' \sin.c' = \sin.A' \cot.B' + \cos.c' \cos.A'.$$

Door nu de eigenschap van den pooldriehoek toe te passen, komt er:

$$\cos.(180^\circ - A) =$$
$$\cos.(180^\circ - B)\cos.(180^\circ - C) + \sin.(180^\circ - B)\sin.(180^\circ - C)\cos.(180^\circ - a)$$
$$\frac{\sin.(180^\circ - A)}{\sin.(180^\circ - a)} = \frac{\sin.(180^\circ - B)}{\sin.(180^\circ - b)} = \frac{\sin.(180^\circ - C)}{\sin.(180^\circ - c)}$$
$$\cot.(180^\circ - B) \sin.(180^\circ - c) =$$
$$\sin.(180^\circ - a) \cot.(180^\circ - b) + \cos.(180^\circ - C) \cos.(180^\circ - a),$$

dat is:

$$\cos.A = - \cos.B \cos.C + \sin.B \sin.C \cos.a$$
$$\frac{\sin.A}{\sin.a} = \frac{\sin.B}{\sin.b} = \frac{\sin.C}{\sin.c}$$
$$- \cot.B \sin.C = - \sin.a \cot.b + \cos.C \cos.a,$$

of: $\cot.b \sin.a = \sin.C \cot.B + \cos.a \cos.C.$

De eerste is de formule voor de cosinussen van de hoeken; de beide andere geven geen nieuwe betrekkingen.

115. De Neperiaansche analogiën kunnen niet uit de figuur worden afgeleid. Neemt men echter een paar uit een der beide stelsels (V) of (VI) als bekend aan, dan kan men, door gebruik te maken van den pooldriehoek, daaruit een paar uit stelsel (VI) of (V) vinden.

Onderstelt men bijv. dat men een paar uit stelsel (V) bekend heeft, dan geeft dit, toegepast op den pooldriehoek:

$$\text{tg.}\tfrac{1}{2}(A' + B') = \frac{\cos.\frac{1}{2}(a' - b')}{\cos.\frac{1}{2}(a' + b')} \cot.\tfrac{1}{2}C'$$
$$\text{tg.}\tfrac{1}{2}(A' - B') = \frac{\sin.\frac{1}{2}(a' - b')}{\sin.\frac{1}{2}(a' + b')} \cot.\tfrac{1}{2}C'$$

en hierop de eigenschap van den pooldriehoek toepassende, verkrijgt men:

$$\text{tg.}\{180^\circ - \tfrac{1}{2}(a + b)\} = \frac{\cos.\frac{1}{2}(B - A)}{\cos.\{180^\circ - \frac{1}{2}(A + B)\}} \cot.(90^\circ - \tfrac{1}{2}c)$$
$$\text{tg.}\tfrac{1}{2}(b - a) = \frac{\sin.\frac{1}{2}(B - A)}{\sin.\{180^\circ - \frac{1}{2}(A + B)\}} \cot.(90^\circ - \tfrac{1}{2}c),$$

dat is:

$$\text{tg.}\tfrac{1}{2}(a + b) = \frac{\cos.\tfrac{1}{2}(A - B)}{\cos.\tfrac{1}{2}(A + B)}\,\text{tg.}\tfrac{1}{2}c$$

$$\text{tg.}\tfrac{1}{2}(a - b) = \frac{\sin.\tfrac{1}{2}(A - B)}{\sin.\tfrac{1}{2}(A + B)}\,\text{tg.}\tfrac{1}{2}c.$$

---

§ 18.

Afleiding van de formules ter berekening der rechthoekige bolvormige driehoeken uit de grondformules.

116. De formules in § 2 gevonden voor de oplossing der rechthoekige bolvormige driehoeken kunnen ook uit de algemeene grondformules worden afgeleid, door daarin een der hoeken $A = 90°$ te stellen, waardoor a de hypotenusa, b en c de beide rechthoekszijden en B en C de scheeve hoeken worden.

Stelsel (I) geeft alsdan:

$$\cos.a = \cos.b \cos.c.$$

Uit stelsel (II) volgt:

$$\sin.b = \sin.a \sin.B$$
$$\sin.c = \sin.a \sin.C.$$

Uit stelsel (III) heeft men:

$$\cot.a \sin.b = \cos.b \cos.C$$
$$\cot.a \sin.c = \cos.c \cos.B,$$

of na herleiding:

$$\text{tg.}b = \text{tg.}a \cos.C$$
$$\text{tg.}c = \text{tg.}a \cos.B.$$

Verder:

$$\cot.b \sin.c = \cot.B$$
$$\cot.c \sin.b = \cot.C,$$

dit is na herleiding:

$$\text{tg.}b = \sin.c\, \text{tg.}B$$
$$\text{tg.}c = \sin.b\, \text{tg.}C.$$

Uit stelsel (IV) eindelijk:

$$\cos.a = \cot.B \cot.C$$
$$\cos.B = \cos.b \sin.C$$
$$\cos.C = \cos.c \sin.B.$$

Stelsel (V) en (VI) leveren geen bruikbare uitkomsten op.

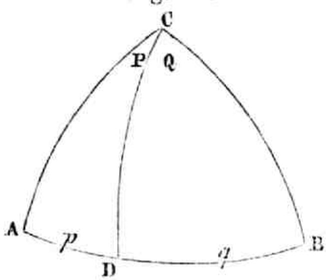
---

§ 19.

Afleiding der grondformules door middel van de rechthoekige bolvormige driehoeken, en van nog eenige nieuwe betrekkingen.

117. Men kan de grondformules ook afleiden uit de formules voor de rechthoekige driehoeken, die, zooals in § 14 is aangetoond, rechtstreeks uit de figuur zijn te vinden. Zij daartoe in den scheefhoekigen driehoek ABC, fig. 50, CD een boog uit het hoekpunt C loodrecht op de overstaande zijde AB getrokken, en stellen wij CD=d, AD = p, BD = q, ACD = P en BCD = Q, dan is c = p + q en C = P + Q. Mocht een der hoeken A of B grooter dan 90° zijn, dan valt de loodrechte boog CD buiten den driehoek, waardoor het segment der zijde c, dat aan den stompen hoek grenst, zoowel als het overstaande segment van den hoek C *negatief* wordt, hetgeen echter op de algemeene beschouwing geen invloed heeft.

Fig. 50.



Men heeft nu in de driehoeken BCD en ACD:

1°.
$$\cos.a = \cos.d \cos.q$$
$$\cos.b = \cos.d \cos.p,$$

waaruit door deeling:

$$\frac{\cos.a}{\cos.b} = \frac{\cos.q}{\cos.p} = \frac{\cos.(c - p)}{\cos.p}$$

of na ontwikkeling van het tweede lid en vermenigvuldiging met cos.b:

$$\cos.a = \cos.b \cos.c + \sin.c \cos.b \operatorname{tg}.p,$$

maar in driehoek ACD is:

$$\operatorname{tg}.p = \operatorname{tg}.b \cos.A = \frac{\sin.b}{\cos.b} \cos.A$$

en hierdoor na substitutie:

$$\cos.a = \cos.b \cos.c + \sin.b \sin.c \cos.A \quad . \quad . \quad (7)$$

2°.
$$\sin.d = \sin.a \sin.B = \sin.b \sin.A,$$

waaruit:
$$\sin.a : \sin.b = \sin.A : \sin.B. \quad . \quad (8)$$

3°.
$$\operatorname{tg}.d = \sin.q \operatorname{tg}.B = \sin.p \operatorname{tg}.A,$$

waaruit: $\text{tg.B cot.A} = \frac{\text{sin.p}}{\text{sin.q}} = \frac{\text{sin.(c—q)}}{\text{sin.q}} =$

$\text{sin.c cot.q} - \text{cos.c},$

maar in driehoek BCD is:

$$\text{tg.q} = \text{tg.a cos.B}, \quad \text{dus cot.q} = \frac{\text{cot.a}}{\text{cos.B}},$$

en hierdoor wordt:

$$\text{tg.B cot.A} = \frac{\text{sin.c cot.a}}{\text{cos.B}} - \text{cos.c},$$

of: $\quad \text{cot.a sin.c} = \text{sin.B cot.A} + \text{cos.c cos.B} \quad . \quad (9)$

4°. $\quad \text{cos.B} = \text{cos.d sin.Q}$

$\text{cos.A} = \text{cos.d sin.P},$

waaruit na deeling:

$$\frac{\text{cos.A}}{\text{cos.B}} = \frac{\text{sin.P}}{\text{sin.Q}} = \frac{\text{sin.(C} - \text{Q)}}{\text{sin.Q}},$$

dat is: $\text{cos.A} = \text{cos.B sin.C cot.Q} - \text{cos.B cos.C},$

maar uit driehoek BCD heeft men nog:

$$\text{cos.a} = \text{cot.B cot.Q of cot.Q} = \frac{\text{cos.a}}{\text{cot.B}} = \frac{\text{cos.a sin.B}}{\text{cos.B}}$$

en hierdoor na substitutie:

$\text{cos.A} = -\text{cos.B cos.C} + \text{sin.B sin.C cos.a} \quad . \quad . \ (10)$

zoodat de vier grondformules gevonden zijn.

118. Uit (1) heeft men:

$$\text{cos.A} = \frac{\text{cos.a} - \text{cos.b cos.c}}{\text{sin.b sin.c}}.$$

Nu is, zoo als men weet, $1 - \text{cos.A} = 2\text{sin.}^2\tfrac{1}{2}\text{A}$ en $1 + \text{cos.A} = 2\text{cos.}^2\tfrac{1}{2}\text{A}$; trekt men dus de eerste vergelijking van $1 = 1$ af en telt men ze er ook bij op, dan komt er:

$$2\text{sin.}^2\tfrac{1}{2}\text{A} = \frac{\text{sin.b sin.c} - \text{cos.a} + \text{cos.b cos.c}}{\text{sin.b sin.c}} = \frac{\text{cos.(b} - \text{c)} - \text{cos.a}}{\text{sin.b sin.c}}$$

$$2\text{cos.}^2\tfrac{1}{2}\text{A} = \frac{\text{sin.b sin.c} + \text{cos.a} - \text{cos.b cos.c}}{\text{sin.b sin.c}} = \frac{\text{cos.a} - \text{cos.(b} + \text{c)}}{\text{sin.b sin.c}}$$

of: $$\text{sin.}\tfrac{1}{2}\text{A} = \sqrt{\frac{\text{sin.}\tfrac{1}{2}(\text{a} - \text{b} + \text{c})\ \text{sin.}\tfrac{1}{2}(\text{b} - \text{c} + \text{a})}{\text{sin.b sin.c}}}$$

$$\text{cos.}\tfrac{1}{2}\text{A} = \sqrt{\frac{\text{sin.}\tfrac{1}{2}(\text{a} + \text{b} + \text{c})\ \text{sin.}\tfrac{1}{2}(\text{b} + \text{c} - \text{a})}{\text{sin.b sin.c}}}$$

en door $\text{a} + \text{b} + \text{c} = 2\text{s}$ te stellen:

$$\sin.\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin.(s - b)\sin.(s - c)}{\sin.b \sin.c}}$$

$$\cos.\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin.s \sin.(s - a)}{\sin.b \sin.c}},$$

waaruit na deeling:

$$\mathrm{tg}.\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin.(s - b)\sin.(s - c)}{\sin.s \sin.(s - a)}}$$

en door het dubbel product te nemen:

$$\sin.A = \frac{2}{\sin.b \sin.c}\sqrt{\sin.s \sin.(s - a)\sin.(s - b)\sin.(s - c)}.$$

Na behoorlijke verwisseling der letters hebben wij alzoo het volgende stelsel:

$$\left.\begin{aligned}
\sin.\tfrac{1}{2}A &= \sqrt{\frac{\sin.(s - b)\sin.(s - c)}{\sin.b \sin.c}}\\
\cos.\tfrac{1}{2}A &= \sqrt{\frac{\sin.s \sin.(s - a)}{\sin.b \sin.c}}\\
\sin.\tfrac{1}{2}B &= \sqrt{\frac{\sin.(s - a)\sin.(s - c)}{\sin.a \sin.c}}\\
\cos.\tfrac{1}{2}B &= \sqrt{\frac{\sin.s \sin.(s - b)}{\sin.a \sin.c}}\\
\sin.\tfrac{1}{2}C &= \sqrt{\frac{\sin.(s - a)\sin.(s - b)}{\sin.a \sin.b}}\\
\cos.\tfrac{1}{2}C &= \sqrt{\frac{\sin.s \sin.(s - c)}{\sin.a \sin.b}}
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (\mathrm{VII.})$$

119. Uit $\cos.A = -\cos.B \cos.C + \sin.B \sin.C \cos.a$ volgt:

$$\cos.a = \frac{\cos.A + \cos.B \cos.C}{\sin.B \sin.C}$$

en door deze vergelijking op volkomen dezelfde wijze te behandelen als in 117 en $A + B + C = 2S$ te stellen, verkrijgt men het stelsel:

$$\left.\begin{aligned}
\sin.\tfrac{1}{2}a &= \sqrt{-\frac{\cos.S \cos.(S - A)}{\sin.B \sin.C}} \; . \; . \; . \; . \; . \; .\\
\cos.\tfrac{1}{2}a &= \sqrt{\frac{\cos.(S - B)\cos.(S - C)}{\sin.B \sin.C}} \; . \; . \; . \; .\\
\sin.\tfrac{1}{2}b &= \sqrt{-\frac{\cos.S \cos.(S - B)}{\sin.A \sin.C}} \; . \; . \; . \; . \; . \; .\\
\cos.\tfrac{1}{2}b &= \sqrt{\frac{\cos.(S - A)\cos.(S - C)}{\sin.A \sin.C}} \; . \; . \; . \; .\\
\sin.\tfrac{1}{2}c &= \sqrt{-\frac{\cos.S \cos.(S - C)}{\sin.A \sin.B}} \; . \; . \; . \; . \; . \; .\\
\cos.\tfrac{1}{2}c &= \sqrt{\frac{\cos.(S - A)\cos.(S - B)}{\sin.A \sin.B}} \; . \; . \; . \; .\\
\mathrm{tg}.\tfrac{1}{2}a &= \sqrt{-\frac{\cos.S \cos.(S - A)}{\cos.(S - B)\cos.(S - C)}} \; . \; . \; . \; .
\end{aligned}\right\} (\mathrm{VIII.})$$

$$\sin.a = \frac{2}{\sin.B \sin.C}\sqrt{-\cos.S\cos.(S-A)\cos.(S-B)\cos.(S-C)}$$

Daar $A + B + C = 2S > 2R < 6R$ is, is $S > R < 3R$, derhalve cos.S *negatief*; $S - A$ daarentegen is $< R$, want $B + C - A = 2(S - A) < 2R$, derhalve is $\cos.(S - A)$ *positief*; door het teeken — wordt dus de waarde onder het wortelteeken *positief*.

Men had de formules van stelsel (VIII) ook kunnen afleiden uit die van stelsel (VII), door deze over te brengen op den pooldriehoek en daarna de eigenschap van den pooldriehoek toe te passen, om tot den oorspronkelijken driehoek terug te keeren. Door deze wijze van afleiden wordt tevens de reden van de verandering van sinus in cosinus verklaard.

120. Uit stelsel (VII) heeft men verder:

$$\sin.\tfrac{1}{2}A\cos.\tfrac{1}{2}B = \frac{\sin.(s-b)}{\sin.c}\sqrt{\frac{\sin.s\sin.(s-c)}{\sin.a\sin.b}} = \frac{\sin.(s-b)}{\sin.c}\cos.\tfrac{1}{2}C$$

$$\cos.\tfrac{1}{2}A\sin.\tfrac{1}{2}B = \frac{\sin.(s-a)}{\sin.c}\sqrt{\frac{\sin.s\sin.(s-c)}{\sin.a\sin.b}} = \frac{\sin.(s-a)}{\sin.c}\cos.\tfrac{1}{2}C$$

$$\cos.\tfrac{1}{2}A\cos.\tfrac{1}{2}B = \frac{\sin.s}{\sin.c}\sqrt{\frac{\sin.(s-a)\sin.(s-b)}{\sin.a\sin.b}} = \frac{\sin.s}{\sin.c}\sin.\tfrac{1}{2}C$$

$$\sin.\tfrac{1}{2}A\sin.\tfrac{1}{2}B = \frac{\sin.(s-c)}{\sin.c}\sqrt{\frac{\sin.(s-a)\sin.(s-b)}{\sin.a\sin.b}} = \frac{\sin.(s-c)}{\sin.c}\sin\tfrac{1}{2}C$$

en hieruit door de twee eersten en de twee laatsten op te tellen en af te trekken:

$$\sin.\tfrac{1}{2}(A + B) = \frac{\sin.(s - b) + \sin.(s - a)}{\sin.c}\cos.\tfrac{1}{2}C$$

$$\sin.\tfrac{1}{2}(A - B) = \frac{\sin.(s - b) - \sin.(s - a)}{\sin.c}\cos.\tfrac{1}{2}C$$

$$\cos.\tfrac{1}{2}(A + B) = \frac{\sin.s - \sin.(s - c)}{\sin.c}\sin.\tfrac{1}{2}C$$

$$\cos.\tfrac{1}{2}(A - B) = \frac{\sin.s + \sin.(s - c)}{\sin.c}\sin.\tfrac{1}{2}C,$$

waaruit na verdere vereenvoudiging:

$$\left.\begin{aligned}
\sin.\tfrac{1}{2}(A + B) &= \frac{\cos.\tfrac{1}{2}(a - b)}{\cos.\tfrac{1}{2}c}\cos.\tfrac{1}{2}C \\
\sin.\tfrac{1}{2}(A - B) &= \frac{\sin.\tfrac{1}{2}(a - b)}{\sin.\tfrac{1}{2}c}\cos.\tfrac{1}{2}C \\
\cos.\tfrac{1}{2}(A + B) &= \frac{\cos.\tfrac{1}{2}(a + b)}{\cos.\tfrac{1}{2}c}\sin.\tfrac{1}{2}C \\
\cos.\tfrac{1}{2}(A - B) &= \frac{\sin.\tfrac{1}{2}(a + b)}{\sin.\tfrac{1}{2}c}\sin.\tfrac{1}{2}C.
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad \text{(IX.)}$$

Uit stelsel (VIII) komt men door dezelfde verbinding en herleiding tot dezelfde formules.

Deze formules, die een betrekking bevatten tusschen al de elementen van een driehoek, en die kunnen dienen ter oplossing van een driehoek in sommige bijzondere gevallen, zijn bekend onder den naam van de formules van GAUSS, hoewel zij wellicht met meer recht naar DELAMBRE konden genoemd worden.

121. Deelt men van stelsel (IX) de eerste formule door de derde, de tweede door de vierde, de tweede door de eerste en de vierde door de derde, dan geven de quotienten de reeds vroeger gevonden Neperiaansche analogiën en wel een paar voor de hoeken en een paar voor de zijden.

---

§ 20.

Berekening der scheefhoekige driehoeken.

122. De oplossing van den scheefhoekigen driehoek laat zes verschillende gevallen toe. Er kunnen namelijk gegeven zijn:

1°. De drie zijden.

2°. De drie hoeken.

3°. Twee zijden met den tusschenliggenden hoek.

4°. Twee hoeken met de tusschenliggende zijde.

5°. Twee zijden met een hoek over een dezer zijden.

6°. Twee hoeken met een zijde over een dezer hoeken.

Wij hebben deze orde van opvolging gekozen omdat de 2de, 4de en 6de gevallen eigenlijk niet anders zijn dan toepassingen van den pooldriehoek respectievelijk op de 1ste, 3de en 5de gevallen.

Eerste geval.

123. Zij gegeven de drie zijden.

1ste Oplossing. Men heeft ter berekening der onbekende elementen uit stelsel (VII):

$$\sin.\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin.(s - b)\sin.(s - c)}{\sin.b \sin.c}}$$

$$\cos.\tfrac{1}{2}B = \sqrt{\frac{\sin.s \sin.(s - b)}{\sin.a \sin.c}}$$

$$\cos.\tfrac{1}{2}C = \sqrt{\frac{\sin.s \sin.(s - c)}{\sin.a \sin.b}}$$

Wij berekenen de hoeken $\frac{1}{2}$B en $\frac{1}{2}$C door den cosinus, omdat dan het verschil (s — a) niet gebruikt behoeft te worden. Men zou echter, na berekening van A, de hoeken B en C ook kunnen vinden door:

$$\sin.B = \frac{\sin.b \sin.A}{\sin.a}$$

$$\sin.C = \frac{\sin.c \sin.A}{\sin.a}.$$

De gegevens moeten voldoen aan de voorwaarden

$a + b + c < 4R$, $a + b > c$, $a + c > b$, $b + c > a$.

Het is duidelijk dat men voor $\frac{1}{2}$A de scherpe waarde moet nemen. Berekent men B en C door den regel der sinussen, dan vindt men voor elk twee waarden, die elkanders supplementen zijn. Van deze beide waarden kan alleen in rekening komen die, welke voldoet aan het vereischte dat C of B $>$ of $<$ A moet zijn, naar gelang c of b $>$ of $<$ a is.

2^de^ Oplossing. In fig. 50 heeft men in de beide rechthoekige driehoeken BCD en ACD:

$$\cos.a = \cos.d \cos.q$$
$$\cos.b = \cos.d \cos.p,$$

waaruit: $$\cos.a : \cos.b = \cos.q : \cos.p$$

en hieruit: $$\frac{\cos a - \cos.b}{\cos.a + \cos.b} = \frac{\cos.q - \cos.p}{\cos.q + \cos.p},$$

of: $$\text{tg}.\tfrac{1}{2}(a + b)\, \text{tg}.\tfrac{1}{2}(b - a) = \text{tg}.\tfrac{1}{2}(p + q)\, \text{tg}.\tfrac{1}{2}(p - q),$$

derhalve: $$\text{tg}.\tfrac{1}{2}(p - q) = \text{tg}.\tfrac{1}{2}(a + b)\, \text{tg}.\tfrac{1}{2}(b - a) \cot.\tfrac{1}{2}c,$$

waardoor de stukken p en q bekend worden, terwijl dan de hoeken A en B gevonden worden door de formules:

$$\text{tg}.p = \text{tg}.b \cos.A, \text{ waaruit: } \cos.A = \frac{\text{tg}.p}{\text{tg}.b}$$

$$\text{tg}.q = \text{tg}.a \cos.B, \quad '' \quad \cos.B = \frac{\text{tg}.q}{\text{tg}.a}.$$

De derde hoek C kan verder door den regel der sinussen gevonden worden.

Voorbeeld van berekening.

Zij gegeven $a = 97°18'22''$, $b = 100°21'30''$, $c = 90°6'6''$.

Volgens de 1^ste^ oplossing heeft men:

$$\begin{aligned}
a &= 97^\circ18'22''\\
b &= 100^\circ21'30''\\
c &= 90^\circ\ 6'\ 6''\\
\hline
2s &= 287^\circ45'58''\\
s &= 143^\circ52'59''\\
s - b &= 43^\circ31'29''\\
s - c &= 53^\circ46'53''
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log.\sin.(s - b) &= 9.838010\\
\log.\sin.(s - c) &= 9.906749\\
ac.\log.\sin.b &= 10.007136\\
ac.\log.\sin.c &= 10.000001\\
\hline
&\ 9.751896\\
&2\overline{}\\
\log.\sin.\tfrac{1}{2}A &= 9.875948\\
\tfrac{1}{2}A &= 48^\circ43'24''\\
A &= 97^\circ26'48''
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log.\sin.s &= 9.770436\\
\log.\sin.(s-b) &= 9.838010\\
ac.\log.\sin.a &= 10.003541\\
ac.\log.\sin.c &= 10.000001\\
\hline
&\ 9.611988\\
&2\overline{}\\
\log.\cos.\tfrac{1}{2}B &= 9.805994\\
\tfrac{1}{2}B &= 50^\circ13'43''\\
B &= 100^\circ27'26''
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log.\sin.s &= 9.770436\\
\log.\sin.(s - c) &= 9.906749\\
ac.\log.\sin.b &= 10.007136\\
ac.\log.\sin\ a &= 10.003541\\
\hline
&\ 9.687863\\
&2\overline{}\\
\log.\cos.\tfrac{1}{2}C &= 9.843932\\
\tfrac{1}{2}C &= 45^\circ43'24''\\
C &= 91^\circ26'48''
\end{aligned}$$

Volgens de 2de oplossing heeft men:

$$\begin{aligned}
b &= 100^\circ21'30''\\
a &= 97^\circ18'22''\\
\hline
b + a &= 197^\circ39'52''\\
b - a &= 3^\circ\ 3'\ 8''\\
\tfrac{1}{2}(b + a) &= 98^\circ49'56''\\
\tfrac{1}{2}(b - a) &= 1^\circ31'34''\\
c &= 90^\circ\ 6'\ 6''\\
\tfrac{1}{2}c &= 45^\circ\ 3'\ 3''
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log.tg.\tfrac{1}{2}(a + b) &= 10.808594(-)\\
\log.tg.\tfrac{1}{2}(b - a) &= 8.425566\\
\log.\cot.\tfrac{1}{2}c &= 9.999229\\
\hline
\log.tg.\tfrac{1}{2}(p - q) &= 9.233389(-)\\
\tfrac{1}{2}(p - q) &= -9^\circ42'44''\\
\tfrac{1}{2}c = \tfrac{1}{2}(p + q) &= 45^\circ\ 3'\ 3''\\
p &= 35^\circ20'19''\\
q &= 54^\circ45'47''
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log.tg.p &= 9.850678\\
ac.\log.tg.b &= 9.261935(-)\\
\hline
\log.\cos.A &= 9.112613(-)\\
A &= 97^\circ26'48''
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log.tg.q &= 10.150956\\
ac.\log.tg.a &= 9.107927(-)\\
\hline
\log.\cos.B &= 9.258883(-)\\
B &= 100^\circ27'26''
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log,\sin.c &= 9.999999\\
\log.\sin.A &= 9.996321\\
ac.\log.\sin.a &= 10.003541\\
\hline
\log.\sin.C &= 9.999861\\
C &= 91^\circ27'
\end{aligned}$$

De tweede waarde van $C = 88°33'$ voldoet ook aan de voorwaarde dat $C > A$ en $< B$ moet zijn, omdat $c < a$ en $< b$ is, terwijl zij tevens voldoet aan de voorwaarde $A + C > 180°$ of $B + C > 180°$, omdat $a + c > 180°$ en $b + c > 180°$ is.

Uit de eerste oplossing blijkt echter dat $C = 91°26'48''$ is; de eerste wijze van oplossing is dus verkieslijker, daar zij geen aanleiding geeft tot onzekerheid.

Het verschil in de waarde van C in de beide oplossingen, is een gevolg daarvan dat C zoo dicht bij 90° is.

Tweede geval.

124. Zij gegeven de drie hoeken A, B en C.

1ste Oplossing. Ter berekening der onbekende elementen heeft men uit stelsel (VIII):

$$\sin.\tfrac{1}{2}a = \sqrt{-\frac{\cos.S\cos.(S-A)}{\sin.B\sin.C}}$$

$$\sin.\tfrac{1}{2}b = \sqrt{-\frac{\cos.S\cos.(S-B)}{\sin.A\sin.C}}$$

$$\cos.\tfrac{1}{2}c = \sqrt{\frac{\cos.(S-A)\cos.(S-B)}{\sin.A\sin.B}}$$

De zijden b en c kunnen echter, na berekening der zijde a, ook gevonden worden door de formules:

$$\sin.b = \frac{\sin.a\sin.B}{\sin.A}$$

$$\sin.c = \frac{\sin.a\sin.C}{\sin.A}.$$

De gegevens moeten voldoen aan de voorwaarden

$$A + B + C > 2R,\ A + B - C < 2R, \text{ enz.}$$

Ten opzichte van b en c uit de laatste formules geldt dezelfde opmerking als voor B en C in het eerste geval.

2de Oplossing. Men berekene, fig. 50, vooraf de deelen P en Q van hoek C. Hiertoe heeft men in de rechthoekige driehoeken ACD en BCD:

$$\cos.A = \cos.d\sin.P$$

$$\cos.B = \cos.d\sin.Q,$$

waaruit: $\cos.A : \cos.B = \sin.P : \sin.Q,$

of: $$\frac{\cos.A - \cos.B}{\cos.A + \cos.B} = \frac{\sin.P - \sin.Q}{\sin.P + \sin.Q},$$

dat is: $$\operatorname{tg}.\tfrac{1}{2}(A+B)\operatorname{tg}.\tfrac{1}{2}(B-A) = \operatorname{tg}.\tfrac{1}{2}(P-Q)\operatorname{tg}.\tfrac{1}{2}(P+Q)$$

en hieruit: $$\operatorname{tg}.\tfrac{1}{2}(P-Q) = \operatorname{tg}.\tfrac{1}{2}(A+B)\operatorname{tg}.\tfrac{1}{2}(B-A)\operatorname{tg}.\tfrac{1}{2}C.$$

Alsnu de hoeken P en Q bekend zijnde, heeft men:

$$\cos.a = \cot.B \cot.Q$$
$$\cos.b = \cot.A \cot.P,$$

terwijl de zijde c door den regel der sinussen kan worden berekend.

Voorbeeld van berekening.

Zij gegeven $A = 102°53'32''$, $B = 63°18'20''$, $C = 73°57'55''$.

Volgens de 1ste oplossing heeft men:

$A = 102°53'32''$	$\log.\cos.S = 9.700039$
$B = 63°18'20''$	$\log.\cos.(S - A) = 9.980154$
$C = 73°57'55''$	$\text{ac.}\log.\sin.B = 10.048947$
$2S = 240'' \; 9'47''$	$\text{ac.}\log.\sin.C = 10.017234$
$S = 120° \; 4'53''5$	9.746374
	2
$S - A = 17°11'21''5$	$\log.\sin.\frac{1}{2}a = 9.873187$
$S - B = 56°46'33''5$	$\frac{1}{2}a = 48°18'41''$
	$a = 96°37'22''$
$\log.\cos.S = 9.700039$	$\log.\cos.(S - A) = 9.980154$
$\log.\cos.(S-B) = 9.738713$	$\log.\cos.(S - B) = 9.738713$
$\text{ac.}\log.\sin.A = 10.011088$	$\text{ac.}\log.\sin.A = 10.011088$
$\text{ac.}\log.\sin.C = 10.017234$	$\text{ac.}\log.\sin.B = 10.048947$
9.467074	9.778902
2	2
$\log.\sin.\frac{1}{2}b = 9.733537$	$\log.\cos.\frac{1}{2}c = 9.889451$
$\frac{1}{2}b = 32°46'50''$	$\frac{1}{2}c = 39°10'15''$
$b = 65°33'40''$	$c = 78°20'30''$

Volgens de 2de oplossing heeft men:

$A = 102°53'32''$	$\log.\text{tg}.\frac{1}{2}(A + B) = 10.917096$
$B = 63°18'20''$	$\log.\text{tg}.\frac{1}{2}(B - A) = 9.556171(-)$
$A + B = 166°11'52''$	$\log.\text{tg}.\frac{1}{2}C = 9.876841$
$\frac{1}{2}(A + B) = 83° \; 5'56''$	$\log.\text{tg}.\frac{1}{2}(P - Q) = 10.350108(-)$
$B - A = -39°35'12''$	$\frac{1}{2}(P - Q) = -65°56'9''$
$\frac{1}{2}(B - A) = -19°47'36''$	$\frac{1}{2}C = \frac{1}{2}(P + Q) = 36°58'57''5$
$C = 73°57'55''$	$P = -28°57'11''5$
$\frac{1}{2}C = 36°58'57''5$	$Q = 102°55'6''5$
$\log.\cot.B = 9.701418$	$\log.\cot.A = 9.359622(-)$
$\log.\cot.Q = 9.360537(-)$	$\log.\cot.P = 10.257085(-)$
$\log.\cos.a = 9.061955(-)$	$\log.\cos.b = 9.616707$
$a = 96°37'22''$	$b = 65°33'40''5$

De negatieve waarde van P duidt aan dat de loodrechte boog buiten den driehoek, achter den stompen hoek A valt, zooals reeds uit de ongelijksoortigheid van A en B was op te maken.

Derde geval.

125. Zij gegeven de twee zijden b en c en den ingesloten hoek A.

1ste Oplossing. Men vindt de onbekende elementen door de formules van stelsel (V) en (VI):

$$\text{tg.}\tfrac{1}{2}(B - C) = \frac{\sin.\tfrac{1}{2}(b - c)}{\sin.\tfrac{1}{2}(b + c)}\cot.\tfrac{1}{2}A$$

$$\text{tg.}\tfrac{1}{2}(B + C) = \frac{\cos.\tfrac{1}{2}(b - c)}{\cos.\tfrac{1}{2}(b + c)}\cot.\tfrac{1}{2}A$$

$$\text{tg.}\tfrac{1}{2}a = \frac{\sin.\tfrac{1}{2}(B + C)}{\sin.\tfrac{1}{2}(B - C)}\,\text{tg.}\tfrac{1}{2}(b - c) = \frac{\cos.\tfrac{1}{2}(B + C)}{\cos.\tfrac{1}{2}(B - C)}\,\text{tg.}\tfrac{1}{2}(b + c),$$

of door den regel der sinussen:

$$\sin.a = \frac{\sin.b\,\sin.A}{\sin.B}.$$

2de Oplossing. In fig. 50, waarin de loodrechte boog uit een der hoekpunten op de overstaande zijde is neergelaten, zoodanig dat daardoor twee der gegevens in een der rechthoekige driehoeken voorkomen, een bijzonderheid, die in al de volgende gevallen moet in acht genomen worden, heeft men:

$$\text{tg.}p = \text{tg.}b\cos.A \text{ en dus } q = c - p.$$

Verder is in de driehoeken BCD en ACD.

1°.
$$\cos.a = \cos.q\cos.d$$
$$\cos.b = \cos.p\cos.d,$$

$$\text{waaruit: } \cos.a = \frac{\cos.q}{\cos.p}\cos.b = \frac{\cos.(c - p)}{\cos.p}\cos.b.$$

2°.
$$\text{tg.}d = \sin.p\,\text{tg.}A = \sin.q\,\text{tg.}B,$$

$$\text{waaruit: } \text{tg.}B = \frac{\sin.p}{\sin.q}\text{tg.}A = \frac{\sin.p}{\sin.(c - p)}\text{tg.}A.$$

Door den loodrechten boog uit B op de overstaande zijde te trekken, zou men op dezelfde wijze den hoek C verkrijgen. Het is echter duidelijk dat dit alleen een verwisseling der letters B en C en b en c ten gevolge heeft, terwijl p een segment van de zijde b wordt. Men heeft dus, dit in acht nemende, door de formules uit 2°:

$$\text{tg.}C = \frac{\sin.p'}{\sin.(b - p')}\text{tg.}A \text{ en } \text{tg.}p' = \text{tg.}c\cos.A.$$

3de Oplossing. De onbekende elementen kunnen ook rechtstreeks uit de grondformules worden afgeleid.

De zijde a uit: $\cos.a = \cos.b \cos.c + \sin.b \sin.c \cos.A$ . . (1)

De hoek B uit: $\cot.b \sin.c = \sin.A \cot.B + \cos.c \cos.A$ . . (2)

De hoek C uit: $\cot.c \sin.b = \sin.A \cot.C + \cos.b \cos.A$ . . (3)

welke nog voor logarithmische berekening geschikt moeten gemaakt worden.

Uit (1) heeft men:

$$\cos.a = \cos.b (\cos.c + \operatorname{tg}.b \sin.c \cos.A).$$

Stellende nu: $\operatorname{tg}.b \cos.A = \operatorname{tg}.p$,

dan wordt: $$\cos.a = \cos.b \left(\cos.c + \frac{\sin.c \sin.p}{\cos.p}\right),$$

dat is: $$\cos.a = \frac{\cos.(c - p)}{\cos.p} \cos.b.$$

Uit (2) volgt:

$$\cot.B = \frac{\cot.b \sin.c - \cos.c \cos.A}{\sin.A} = \cot.A \left(\frac{\cot.b \sin.c}{\cos.A} - \cos.C\right).$$

Uit $\operatorname{tg}.b \cos.A = \operatorname{tg}.p$ heeft men: $\dfrac{\cot.b}{\cos.A} = \cot.p$, en hierdoor:

$$\cot.B = \cot.A \left(\frac{\cos.p. \sin.c}{\sin.p} - \cos.c\right) = \frac{\sin.(c - p)}{\sin.p} \cot.A,$$

of: $$\operatorname{tg}.B = \frac{\sin.p}{\sin.(c - p)} \operatorname{tg}.A.$$

Uit (3) heeft men op dezelfde wijze voor C:

$$\operatorname{tg}.C = \frac{\sin.p'}{\sin.(b - p')} \operatorname{tg}.A, \text{ waarin } \operatorname{tg}.p' = \operatorname{tg}.c \cos.A.$$

Men zal opmerken dat de oplossing uit de grondformules dezelfde uitkomsten geeft, als die met behulp der rechthoekige driehoeken. Men had echter ook kunnen stellen $\operatorname{tg}.b \cos.A = \cot.p$ en zou dan verkregen hebben:

$$\cos.a = \frac{\sin.(c + p)}{\sin.p} \cos.b$$

$$\operatorname{tg}.B = - \frac{\cos.p}{\cos.(c + p)} \operatorname{tg}.A.$$

Voorbeeld van berekening.

Zij gegeven $b = 125°23'35''$, $c = 50°23'46''$, $A = 90°56'43''$.

Volgens de 1ste oplossing heeft men:

$$
\begin{aligned}
b &= 125^\circ 23' 35'' \\
c &= 50^\circ 23' 46'' \\
b - c &= 74^\circ 59' 49'' \\
b + c &= 175^\circ 47' 21'' \\
\tfrac{1}{2}(b - c) &= 37^\circ 29' 54''5 \\
\tfrac{1}{2}(b + c) &= 87^\circ 53' 40''5 \\
A &= 90^\circ 56' 43'' \\
\tfrac{1}{2}A &= 45^\circ 28' 21''5
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\log.\sin.\tfrac{1}{2}(b - c) &= 9.784432 \\
\text{ac.}\log.\sin.\tfrac{1}{2}(b + c) &= 10.000293 \\
\log.\cot.\tfrac{1}{2}A &= 9.992835 \\
\hline
\log.\text{tg}.\tfrac{1}{2}(B - C) &= 9.777560 \\
\tfrac{1}{2}(B - C) &= 30^\circ 55' 46''
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\log.\cos.\tfrac{1}{2}(b - c) &= 9.899476 \\
\text{ac.}\log.\cos.\tfrac{1}{2}(b + c) &= 11.434882 \\
\log.\cot.\tfrac{1}{2}A &= 9.992835 \\
\hline
\log.\text{tg}.\tfrac{1}{2}(B + C) &= 11.327193 \\
\tfrac{1}{2}(B + C) &= 87^\circ 18' 17''
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B &= 118^\circ 14' 3'' \\
C &= 56^\circ 22' 31''
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\log.\sin.\tfrac{1}{2}(B + C) &= 9.999520 \\
\text{ac.}\log.\sin.\tfrac{1}{2}(B - C) &= 10.289052 \\
\log.\text{tg}.\tfrac{1}{2}(b - c) &= 9.884956 \\
\hline
\log.\text{tg}.\tfrac{1}{2}a &= 10.173528 \\
\tfrac{1}{2}a &= 56^\circ 9' 13'' \\
a &= 112^\circ 18' 26''
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\log.\sin.b &= 9.911264 \\
\log.\sin.A &= 9.999941 \\
\text{ac.}\log.\sin.B &= 10.055012 \\
\hline
\log.\sin.a &= 9.966217 \\
a &= 112^\circ 18' 27''
\end{aligned}
$$

Door sin.a vindt men twee waarden voor a, waarvan de grootste genomen is, hoewel beide waarden voldoen aan de eigenschap van 90. De berekening van $\frac{1}{2}a$ verdient dus de voorkeur.

Volgens de 2de en 3de oplossing heeft men:

$$
\begin{aligned}
\log.\text{tg}.b &= 10.148448(-) \\
\log.\cos.A &= 8.217413(-) \\
\hline
\log\,\text{tg}.p &= 8.365861 \\
p &= 1^\circ 19' 49'' \\
q = c - p &= 49^\circ 3' 57'' \\
\log.\cos.(c - p) &= 9.816368 \\
\log.\cos.b &= 9.762816(-) \\
\text{ac.}\log.\cos.p &= 10.000117 \\
\hline
\log.\cos.a &= 9.579301(-) \\
a &= 112^\circ 18' 27''
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\log.\text{tg}.c &= 10.082292 \\
\log.\cos.A &= 8.217413(-) \\
\hline
\log.\text{tg}.p' &= 8.299705(-) \\
p' &= -1^\circ 8' 32'' \\
b - p' &= 126^\circ 32' 7'' \\
\log.\sin.p' &= 8.299599(-) \\
\log.\text{tg}.A &= 11.782527(-) \\
\text{ac.}\log.\sin.(b - p') &= 10.095019 \\
\hline
\log.\text{tg}.C &= 10.177145 \\
C &= 56^\circ 22' 27''
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\log.\sin.p &= 8.365779 \\
\log.\mathrm{tg}.A &= 11.782527(-) \\
\mathrm{ac}.\log.\sin.(c - p) &= 10.121786 \\
\hline
\log.\mathrm{tg}.B &= 10.270092(-) \\
B &= 118°13'56''
\end{aligned}$$

Het verschil in de waarden van B en C, in beide oplossingen, wordt verklaard uit de waarde van A, die weinig van 90° verschilt, en die in de eerste oplossing door $\frac{1}{2}A$ in rekening komt. De uitkomsten der eerste oplossing zijn dus meer te vertrouwen. Voor a vindt men geen noemenswaardig verschil, omdat die in beide oplossingen onafhankelijk van A of liever van tg.A gevonden wordt.

Vierde geval.

126. Zij gegeven een zijde a met de beide aanliggende hoeken B en C.

1ste Oplossing. Men heeft door de Neperiaansche analogieën:

$$\mathrm{tg}.\tfrac{1}{2}(b + c) = \frac{\cos.\frac{1}{2}(B - C)}{\cos.\frac{1}{2}(B + C)}\,\mathrm{tg}.\tfrac{1}{2}a$$

$$\mathrm{tg}.\tfrac{1}{2}(b - c) = \frac{\sin.\frac{1}{2}(B - C)}{\sin.\frac{1}{2}(B + C)}\,\mathrm{tg}.\tfrac{1}{2}a$$

$$\cot.\tfrac{1}{2}A = \frac{\sin.\frac{1}{2}(b + c)}{\sin.\frac{1}{2}(b - c)}\,\mathrm{tg}.\tfrac{1}{2}(B - C) = \frac{\cos.\frac{1}{2}(b + c)}{\cos.\frac{1}{2}(b - c)}\,\mathrm{tg}.\tfrac{1}{2}(B+C)$$

De hoek A door den sinus te berekenen is niet raadzaam, omdat het dan weder twijfelachtig zou kunnen zijn welke waarde in rekening moet gebracht worden.

2de Oplossing. Uit fig. 50 heeft men weder ter berekening van Q:

$$\cot.Q = \cos.a\,\mathrm{tg}.B \text{ en } P = C - Q.$$

Verder heeft men in de beide rechthoekige driehoeken:

$$\cos.A = \cos.d\,\sin.P$$

$$\cos.B = \cos.d\,\sin.Q,$$

waaruit: $$\frac{\cos.A}{\cos.B} = \frac{\sin.P}{\sin.Q} = \frac{\sin.(C - Q)}{\sin.Q},$$

dus: $$\cos.A = \frac{\sin.(C - Q)}{\sin.Q}\cos.B.$$

Ter berekening van b is:

$$\mathrm{tg}.d = \mathrm{tg}.a\cos.Q = \mathrm{tg}.b\cos.(C - Q),$$

$$\text{dus:}\quad \text{tg.b} = \frac{\cos.Q}{\cos.(C - Q)}\,\text{tg.a},$$

terwijl men voor c, om dezelfde redenen als voor C in het derde geval, vindt:

$$\cot.Q' = \cos.a\ \text{tg.C}$$

$$\text{tg.c} = \frac{\cos.Q'}{\cos.(B - Q')}\,\text{tg.a.}$$

3^de^ Oplossing. De grondformules, waaruit de onbekenden kunnen worden gevonden, zijn:

voor hoek A: $\cos.A = -\cos.B\cos.C + \sin.B\sin.C\cos.a$. . (1)

voor zijde b: $\cot.b\sin.a = \sin.C\cot.B + \cos.a\cos.C$ . . . . . (2)

voor zijde c: $\cot.c\sin.a = \sin.B\cot.C + \cos.a\cos.B$ . . . . . (3)

die weder tot logarithmischen vorm moeten gebracht worden.

Uit (1) heeft men:

$$\cos.A = \cos.B\,(-\cos.C + \text{tg.B}\sin.C\cos.a).$$

Stellende nu $\text{tg.B}\cos.a = \cot.Q$, dan wordt:

$$\cos.A = \cos.B\,(-\cos.C + \cot.Q\sin.C),$$

$$\text{of:}\quad \cos.A = \frac{\sin.(C - Q)}{\sin.Q}\cos.B.$$

Uit (2) volgt:

$$\cot.b = \frac{\sin.C\cot.B + \cos.a\cos.C}{\sin.a} = \cot.a\left(\frac{\sin.C\cot.B}{\cos.a} + \cos.C\right).$$

Hierin is: $\dfrac{\cot.B}{\cos.a} = \text{tg.Q}$ en dus:

$$\cot.b = \cot.a(\sin.C\,\text{tg.Q} + \cos.C),$$

$$\text{derhalve:}\quad \cot.b = \frac{\cos.(C - Q)}{\cos.Q}\cot.a,$$

$$\text{of:}\quad \text{tg.b} = \frac{\cos.Q}{\cos.(C - Q)}\,\text{tg.a.}$$

Evenzoo uit (3):

$$\text{tg.c} = \frac{\cos.Q'}{\cos.(B - Q')}\,\text{tg.a}\quad\text{en}\quad \frac{\cot.C}{\cos.a} = \text{tg.Q}'.$$

Voorbeeld van berekening.

Zij gegeven $a = 108°19'12''5$, $B = 57°13'12''$, $C = 120°0'25''$.

Door de formules uit de 1^ste^ oplossing heeft men:

$$
\begin{aligned}
B &= 57^\circ 13' 12'' \\
C &= 120^\circ\ 0' 25'' \\
B - C &= -62^\circ 47' 13'' \\
B + C &= 177^\circ 13' 37'' \\
\tfrac{1}{2}(B - C) &= -31^\circ 23' 36'' 5 \\
\tfrac{1}{2}(B + C) &= 88^\circ 36' 48'' 5 \\
a &= 108^\circ 19' 12'' 5 \\
\tfrac{1}{2}a &= 54^\circ\ 9' 36''
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\log.\cos.\tfrac{1}{2}(B - C) &= 9.931260 \\
ac.\log.\cos.\tfrac{1}{2}(B + C) &= 11.616239 \\
\log.tg.\tfrac{1}{2}a &= 10.141292 \\
\hline
\log.tg.\tfrac{1}{2}(b + c) &= 11.688791 \\
\tfrac{1}{2}(b + c) &= 88^\circ 49' 37'' 5 \\
\log.\sin.\tfrac{1}{2}(B - C) &= 9.716764(-) \\
ac.\log.\sin.\tfrac{1}{2}(B + C) &= 10.000127 \\
\log.tg.\tfrac{1}{2}a &= 10.141292 \\
\hline
\log.tg.\tfrac{1}{2}(b - c) &= 9.858183(-) \\
\tfrac{1}{2}(b - c) &= -35^\circ 48' 25'' 5 \\
c &= 124^\circ 38'\ 3'' \\
b &= 53^\circ\ 1' 12''
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\log.\sin.\tfrac{1}{2}(b + c) &= 9.999909 \\
ac.\log.\sin.\tfrac{1}{2}(b - c) &= 10.232801(-) \\
\log.tg.\tfrac{1}{2}(B + C) &= 9.785504(-) \\
\hline
\log.\cot.\tfrac{1}{2}A &= 10.018214 \\
\tfrac{1}{2}A &= 43^\circ 47' 56'' \\
A &= 87^\circ 35' 52''
\end{aligned}
$$

Hier is $\frac{1}{2}(b - c)$ *negatief* genomen, omdat $B < C$ zijnde ook $b < c$ moet zijn.

Door de formules uit de 2^de^ en 3^de^ oplossing heeft men:

$$
\begin{aligned}
\log.\cos.a &= 9.497380(-) \\
\log.tg.B &= 10.191135 \\
\hline
\log.\cot.Q &= 9.688515(-) \\
Q &= 116^\circ\ 1'\ 2'' \\
P = (C - Q) &= 3^\circ 59' 23'' \\
\log.\sin.(C - Q) &= 8.842469 \\
\log.\cos.B &= 9.733530 \\
ac.\log.\sin.Q &= 10.046403 \\
\hline
\log.\cos.A &= 8.622402 \\
A &= 87^\circ 35' 51''
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\log.\cos.Q &= 9.642110(-) \\
\log.tg.a &= 10.480031(-) \\
ac.\log.\cos.(C - Q) &= 10.001054 \\
\hline
\log.tg.b &= 10.123195 \\
b &= 53^\circ 1' 11'' \\
\log.\cos.a &= 9.497390(-) \\
\log.tg.C &= 10.238439(-) \\
\hline
\log.\cot.Q' &= 9.735829 \\
Q' &= 61^\circ 26' 28'' \\
B - Q' &= -4^\circ 13' 16''
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\log.\cos.Q' &= 9.679484 \\
\log.tg.a &= 10.480031(-) \\
ac.\log.\cos.(B - Q') &= 10.001179 \\
\hline
\log.tg.c &= 10.160694(-) \\
c &= 124^\circ 38' 2''
\end{aligned}
$$

Vijfde geval.

127. Zij gegeven twee zijden a en b met den overliggenden hoek A.

1ste Oplossing. Men heeft ter berekening der onbekende elementen:

$$\sin.B = \frac{\sin.b \sin.A}{\sin.a}$$

$$\mathrm{tg}.\tfrac{1}{2}c = \frac{\sin.\frac{1}{2}(A+B)}{\sin.\frac{1}{2}(A-B)}\,\mathrm{tg}.\tfrac{1}{2}(a-b) = \frac{\cos.\frac{1}{2}(A+B)}{\cos.\frac{1}{2}(A-B)}\,\mathrm{tg}.\tfrac{1}{2}(a+b)$$

$$\cot.\tfrac{1}{2}C = \frac{\sin.\frac{1}{2}(a+b)}{\sin.\frac{1}{2}(a-b)}\,\mathrm{tg}.\tfrac{1}{2}(A-B) = \frac{\cos.\frac{1}{2}(a+b)}{\cos.\frac{1}{2}(a-b)}\,\mathrm{tg}.\tfrac{1}{2}(A+B).$$

Daar de hoek B door zijn sinus bepaald wordt, wordt tot de bestaanbaarheid van den driehoek gevorderd dat $\sin.b \sin.A < \sin.a$ is. Maar zelfs indien aan deze voorwaarde is, kunnen de gegevens behooren tot twee driehoeken, tot een driehoek, of er kan geen driehoek met die gegevens bestaan. Uithoofde van deze onzekerheid worden dit geval en het volgende de *twijfelachtige gevallen* genoemd.

Men kan echter uit de gegevens, mits voldoende aan de voorwaarde $\sin.b \sin.A < \sin.a$, reeds beoordeelen of zij tot twee, een of geen driehoek behooren door de volgende opmerkingen.

1°. Is $a > b$, $a + b > 180°$, dan is ook $A > B$ en $A + B > 180°$.

Daar nu A niet scherp kan zijn, zal zoowel B als $180° - B$ kunnen voldoen, want stellende $A = 90° + A'$ en $B = 90° \pm B'$, dan is $A' > B'$ en zal dus voor beide waarden van B, $A + B > 180°$ zijn.

2°. Is $a < b$, $a + b < 180°$, dan is ook $A < B$ en $A + B < 180°$.

Daar nu A niet stomp kan zijn, zal zoowel B als $180° - B$ voldoen, want wederom $A = 90° - A'$ en $B = 90° \pm B'$ stellende, is $A' > B'$ en derhalve voor beide waarden van B, $A + B < 180°$.

3°. Is $a > b$, $a + b < 180°$, dan is $A > B$ en $A + B < 180°$. Hetzij nu A scherp of stomp is, in beide gevallen kan alleen de scherpe waarde van B voldoen.

4°. Is $a < b$, $a + b > 180°$, dan is $A < B$ en $A + B > 180°$. Hetzij nu A scherp of stomp is, B zal stomp moeten zijn om te kunnen voldoen.

Uit het behandelde in 1° en 2° vindt men nu gemakkelijk den volgenden regel.

Er zijn *twee* driehoeken, als:

$$A \gtrless 90^\circ,\quad a \gtrless b,\quad \text{en } a + b \gtrless 180^\circ.$$

Er is *geen* driehoek, als:

$$A \gtrless 90^\circ,\quad a \lesseqgtr b,\quad \text{en } a + b \lesseqgtr 180^\circ.$$

In alle overige gevallen vervat in 3° en 4° is er *een* driehoek.

Is $\sin.b \sin.A = \sin.a$, dan is $B = 90^\circ$ en zal er slechts *een* rechthoekige driehoek zijn, indien de gegevens aan de eerste voorwaarde voldoen.

2de Oplossing. In fig. 50 heeft men:

$$\text{tg}.p = \text{tg}.b \cos.A$$

en verder:

$$\cos.b = \cos.d \cos.p$$
$$\cos.a = \cos.d \cos.q,$$

waaruit:

$$\frac{\cos.b}{\cos.a} = \frac{\cos.p}{\cos.q} = \frac{\cos.p}{\cos.(c - p)},$$

derhalve:

$$\cos.(c - p) = \frac{\cos.a}{\cos.b} \cos.p.$$

Hierdoor vindt men voor $c - p$ twee waarden q en $-q$, en dus $c = p \pm q$, welke beide waarden van c *positief* en kleiner dan 180° moeten zijn.

Voor den hoek C heeft men:

$$\cos.P = \cos.b \, \text{tg}.A$$
$$\text{tg}.d = \text{tg}.b \cos.P = \text{tg}.a \cos.Q,$$

waaruit:

$$\cos.(C - P) = \frac{\text{tg}.b}{\text{tg}.a} \cos.P,$$

geldende hier voor C dezelfde opmerking als voor c.

Nog heeft men:

$$\sin.d = \sin.b \sin.A = \sin.a \sin.B,$$

waaruit:

$$\sin.B = \frac{\sin.b \sin.A}{\sin.a}.$$

3de Oplossing. Men kan de onbekenden ook vinden uit de grondformules:

voor hoek B: $\sin.a : \sin.b = \sin.A : \sin.B$ . . . . (1)

voor zijde c: $\cos.a = \cos.b \cos.c + \sin.b \sin.c \cos.A$ . . . (2)

voor hoek C: $\cot.a \sin.b = \sin.C \cot.A + \cos.b \cos.C$ . . . (3)

Uit (1) heeft men dadelijk:

$$\sin.B = \frac{\sin.b \sin.A}{\sin.a}.$$

Uit (2) volgt:

$$\cos.c + \mathrm{tg}.b \sin.c \cos.A = \frac{\cos.a}{\cos.b}.$$

Door nu $\mathrm{tg}.b \cos.A = \mathrm{tg}.p$ te stellen, verkrijgt men:

$$\cos.(c - p) = \frac{\cos.a}{\cos.b} \cos.p.$$

Eindelijk heeft men uit (3):

$$\cos.C + \frac{\cot.A}{\cos.b} \sin.C = \cot.a \, \mathrm{tg}.b.$$

Stelt men nu $\dfrac{\cot.A}{\cos.b} = \mathrm{tg}.P$, dan vindt men:

$$\cos.(C - P) = \frac{\mathrm{tg}.b}{\mathrm{tg}.a} \cos.P.$$

Voorbeeld van berekening.

Zij gegeven $a = 65°38'40''$, $b = 78°20'30''$, $A = 63°18'20''$.

Daar $A < 90°$, $a < b$ en $a + b < 180°$ is, zullen er twee driehoeken mogelijk zijn.

Volgens de 1ste oplossing heeft men:

$\log.\sin.b = 9.990947$	$\log.\sin.\frac{1}{2}(a - b) = 9.046496(-)$
$\log.\sin.A = 9.951053$	$ac.\log.\sin.\frac{1}{2}(a + b) = 10.021914$
$ac.\log.\sin.a = 10.040766$	$\log.\cot.\frac{1}{2}(A - B) = 11.030153(-)$
$\log.\sin.B = 9.982766$	$\log \cot.\frac{1}{2}C = 10.098563$
$B = 73°57'55''$	$\frac{1}{2}C = 51°26'47''5$
$B' = 106°\ 2'\ 5''$	$C = 102°53'35''$
$a - b = -12°46'50''$	$\log.\sin.\frac{1}{2}(a - b) = 9.046496(-)$
$a + b = 143°54'10''$	$ac.\log.\sin.\frac{1}{2}(a + b) = 10.021913$
$\frac{1}{2}(a - b) = -6°23'25''$	$\log.\cot.\frac{1}{2}(A - B') = 10.407620(-)$
$\frac{1}{2}(a + b) = 71°57'\ 5''$	$\log.\mathrm{tg}.\frac{1}{2}C' = 9.476030$
$A - B = -10°39'35''$	$\frac{1}{2}C' = 16°39'35''$
$A - B' = -42°43'45''$	$C' = 33°19'10''$
$\frac{1}{2}(A - B) = -\ 5°19'47''5$	$\log.\cos.\frac{1}{2}(A + B) = 9.561461$
$\frac{1}{2}(A - B') = -21°21'52''5$	$ac.\log.\cos.\frac{1}{2}(A - B) = 10.001882$
$A + B = 137°16'15''$	$\log.\mathrm{tg}.\frac{1}{2}(a + b) = 10,486972$
$A + B' = 169°20'25''$	$\log.\mathrm{tg}.\frac{1}{2}c = 10.050315$
$\frac{1}{2}(A + B) = 68°38'\ 7''5$	$\frac{1}{2}c = 48°18'42''$
$\frac{1}{2}(A + B') = 84°40'12''5$	$c = 96°37'24''$

$$\begin{aligned} \log.\cos.\tfrac{1}{2}(A + B') &= 8.967966 \\ ac.\log.\cos.\tfrac{1}{2}(A - B') &= 10.030919 \\ \log.tg.\tfrac{1}{2}(a + b) &= 10.486972 \\ \hline \log.tg.\tfrac{1}{2}c' &= 9.485957 \\ \tfrac{1}{2}c' &= 17°1'\ 9'' \\ c' &= 34°2'18'' \end{aligned}$$

De elementen van elk der driehoeken zijn dus behalve de gegevens:

$$\begin{aligned} B &= 73°57'55'' & \qquad B &= 106°\ 2'\ 5'' \\ C &= 102°53'35'' & C &= 33°19'10'' \\ c &= 96°37'24'' & c &= 34°\ 2'18'' \end{aligned}$$

Volgens de 2de en 3de oplossing heeft men als $A = 121°52'$, $a = 76°36'$, $b = 50°16'$ is;

$$\begin{aligned} \log.tg.b &= 10.080295 & \qquad \log.\cos.b &= 9.805647 \\ \log.\cos.A &= 9.722588(-) & \log.tg.A &= 10.206462(-) \\ \hline \log.tg.p &= 9.802883(-) & \log.\cot.P &= 10.012109(-) \\ p &= -32°25'20'' & P &= -44°12'5'' \\ \log.\cos.a &= 9.365016 & \log.tg.b &= 10.080295 \\ ac.\log.\cos.b &= 10.194353 & ac.\log.tg.a &= 9.377003 \\ \log.\cos.p &= 9.926404 & \log.\cos.P &= 9.855455 \\ \hline \log.\cos.(c - p) &= 9.485773 & \log.\cos.(C - P) &= 9.312753 \\ c - p &= 72°10'46'' & C - P &= 78°\ 8'34'' \\ c &= 39°45'26'' & C &= 33°56'29'' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log.\sin.b &= 9.885942 \\ \log.\sin.A &= 9{,}929050 \\ ac.\log.\sin.a &= 10.011987 \\ \hline \log.\sin.B &= 9.826979 \\ B &= 42°10'30'' \end{aligned}$$

Omdat $A > 90°$, $a > b$, $a + b < 180°$ voldoet maar een driehoek, waarin $B < 90°$. Verder is $c = p + q$ en $C = P + Q$ genomen, omdat $p - q$ en $P - Q$ beide *negatief* worden. De waarden van p en P zijn *negatief*, omdat de loodrechte boog buiten den driehoek valt, zooals blijkt uit de ongelijksoortigheid van A en B.

Zesde geval.

128. Zij gegeven de hoeken A en B en de overliggende zijde a.

1ste Oplossing. Men vindt de onbekende elementen uit de formules:

$$\sin.b = \frac{\sin.a \sin.B}{\sin.A},$$

terwijl c en C gevonden worden uit dezelfde formules als in het vijfde geval.

Door een gelijksoortige redeneering als in het vijfde geval, kan men uit de betrekkingen tusschen de gegevens afleiden of er *twee*, *een*, of *geen* driehoek aan de gegevens zullen voldoen. Gemakkelijker komt men daartoe echter door de eigenschap van den pooldriehoek toe te passen op den gevonden regel uit het voorgaande geval. Men verkrijgt daardoor:

Er zijn *twee* driehoeken, als:

$$a \lesseqgtr 90^\circ, \quad A \lesseqgtr B, \quad A + B \lesseqgtr 180^\circ.$$

Er is *geen* driehoek, als:

$$a \gtreqless 90^\circ, \quad A \lesseqgtr B, \quad A + B \lesseqgtr 180^\circ.$$

In alle andere gevallen *een* driehoek.

2de Oplossing. In fig. 50 heeft men:

1°. $$\cot.Q = \cos.a \operatorname{tg}.B$$

Verder: $$\cos.B = \cos.d \sin.Q$$

$$\cos.A = \cos.d \sin.P = \cos.d \sin.(C - Q),$$

waaruit: $$\frac{\sin.(C - Q)}{\sin.Q} = \frac{\cos.A}{\cos.B},$$

derhalve: $$\sin.(C - Q) = \frac{\cos.A}{\cos.B} \sin.Q.$$

2°. $$\operatorname{tg}.q = \operatorname{tg}.a \cos.B$$

$$\operatorname{tg}.d = \sin.q \operatorname{tg}.B = \sin.p \operatorname{tg}.A = \sin.(c - q) \operatorname{tg}.A,$$

waaruit: $$\sin.(c - q) = \frac{\operatorname{tg}.B}{\operatorname{tg}.A} \sin.q.$$

3°. $$\sin.d = \sin.a \sin.B = \sin.b \sin.A$$

en hieruit: $$\sin.b = \frac{\sin.B}{\sin.A} \sin.a.$$

Daar $C - Q$ en $c - q$ beide door hun sinus bepaald worden, vindt men voor beide twee waarden, die elkanders supplementen zijn. Men heeft dus:

$$C - Q = P \text{ en } 180^\circ - P, \quad c - q = p \text{ en } 180^\circ - p,$$

dus: $C = P + Q$ en $180^\circ - (P - Q)$; $c = p + q$ en $180^\circ - (p - q)$, die beide positief en kleiner dan 180° moeten zijn.

3de Oplossing. De grondformules, waaruit de onbekenden kunnen gevonden worden, zijn:

voor de zijde b: $\sin.a : \sin.b = \sin.A : \sin.B \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$

voor hoek C: $\cos.A = - \cos.B \cos.C + \sin.B \sin.C \cos.a. \quad (2)$

voor hoek c: $\cot.a \sin.c = \sin.B \cot.A + \cos.c \cos.B \quad . \; . \quad (3)$

Uit (1) volgt:

$$\sin.b = \frac{\sin.a \sin.B}{\sin.A}.$$

Uit (2) heeft men:

$$\frac{\cos.A}{\cos.B} = - \cos.C + \mathrm{tg}.B \sin.C \cos.a.$$

Stelt men daarin: $\mathrm{tg}.B \cos.a = \cot.Q$, dan wordt:

$$\frac{\cos.A}{\cos.B} = - \cos.C + \sin.C \cot.Q$$

en hieruit: $$\sin.(C - Q) = \frac{\cos.A}{\cos.B} \sin.Q.$$

Uit (3) volgt:

$$\cos.c - \frac{\cot.a}{\cos.B} \sin.c = - \cot.A \, \mathrm{tg}.B$$

en nu $\dfrac{\cot.a}{\cos.B} = \cot.q$ stellende, heeft men:

$$\cos.c - \cot.q \sin.c = - \cot.A \, \mathrm{tg}.B,$$

waaruit: $$\sin.(c - q) = \frac{\mathrm{tg}.B}{\mathrm{tg}.A} \sin.q.$$

Voorbeeld van berekening.

Zij gegeven $A = 118°50'$, $B = 40°13'5''$, $a = 38°15'15''$.

Van de 1ste oplossing zullen wij hier geen voorbeeld geven, omdat die dezelfde is als in het vorige geval.

Volgens de 2de en 3de oplossing heeft men:

$$\begin{aligned}
\log.\sin.a &= 9.791797 \\
\log.\sin.B &= 9.810030 \\
\mathrm{ac}.\log.\sin.A &= 10.057483 \\
\hline
\log.\sin.b &= 9.659310 \\
b &= 27°9'9''
\end{aligned}$$

log.cos.a	$= 9.895020$	log.cot.a	$=10.103223$
log.tg.B	$= 9.927168$	ac.log.cos.B	$=10.117129$
log.cot.Q	$= 9.822188$	log.cot.q	$=10.220352$
Q	$= 56°24'53''$	q	$= 31°3'3''$
log.cos.A	$= 9.683284(-)$	log.tg.B	$= 9.927168$
los.sin.Q	$= 9.920678$	ac.log.tg.A	$= 9.740767(-)$
ac.log.cos.B	$=10.117129$	log.sin.q	$= 9.712479$
log.sin.(C — Q)	$= 9.721091(-)$	log.sin.(c — q)	$= 9.380414(-)$
C — Q	$=-31°44'39''$	c — q	$=-13°53'36''$
C	$= 24°40'14''$	c	$= 17°\ 9'27''$

Voor b is de kleinste waarde genomen, omdat $B < A$ zijnde, ook $b < a$ is, terwijl voor C en c alleen $P + Q$ en $p + q$ is in rekening gebracht, daar de beide andere waarden beide grooter dan 180° zijn.

Ten slotte zij nog opgemerkt, dat men in het eerste en tweede geval bij voorkeur de formules van de eerste oplossing, in de overige gevallen liever die van de tweede oplossing gebruikt.

129. Men berekene nu de onbekenden van de volgende driehoeken, waarin gegeven zijn:

1°. $a = 50°36'39''$, $b = 67°21'40''$, $c = 80°12'21''$.
2°. $A = 59°29'\ 6''$, $B = 54°39'32''$, $C = 92°\ 6'\ 6''$.
3°. $a = 48°26'39''$, $b = 51°36'30''$, $C = 71°30'36''$.
4°. $A = 80°10'\ 6''$, $B = 58°48'36''$, $c = 86°12'52''$.
5°. $a = 67°34'\ 6''$, $b = 72°30'$, $C = 69°50'$.
6°. $A = 54°30'$, $B = 25°37'22''$, $a = 77°50'42''$.
7°. $a = 51°34'36''$, $b = 27°34'18''$, $c = 44°\ 5'$.
8°. $A = 61°56'42''$, $B = 46°50'$, $C = 115°45'$.
9°. $a = 95°30'$, $c = 115°10'$, $A = 97°20'$.
10°. $a = 84°\ 5'$, $c = 78°$, $B = 61°15'$.
11°. $A = 132°54'$, $B = 99°10'$, $C = 126°50'$.
12°. $a = 83°30'$, $c = 55°$, $B = 65°40'$.
13°. $A = 33°50'$, $B = 71°15'$, $c = 53°$.
14°. $A = 34°22'17''$, $a = 40°18'29''$, $c = 67°14'20''$.
15°. $A = 139°53'52''$, $B = 42°42'46''$, $a = 109°15'33''$.
16°. $A = 63°18'20''$, $B = 73°57'55''$, $C = 102°53'32''$.
17°. $B = 45°45'45''$, $b = 20°19'18''$, $c = 95°14'\ 8''$.
18°. Van een driehoek gegeven de zijde a, de hoek A en de

som of het verschil der beide andere zijden of hoeken, de onbekende elementen te berekenen?

19°. Indien van een driehoek bekend zijn twee der zijden a en b, benevens de som of het verschil der overstaande hoeken, hoe vindt men dan de overige elementen?

20°. Van een driehoek is gegeven $a + b = f$, de hoek C en de loodrechte boog d, die uit C op de overstaande zijde valt, hoe vindt men nu de overige elementen?

21°. Als van een driehoek de drie hoeken ieder in het bijzonder scherp zijn, dan zijn ook de zijden kleiner dan een kwadrant. Hoe bewijst gij dit?

22°. Van een driehoek met drie stompe hoeken, zijn de drie zijden ieder stomp, of twee zijn stomp en de derde scherp. Men vraagt het bewijs?

23°. Van een bolvormigen driehoek zijn gegeven twee zijden, benevens de boog welke den ingesloten hoek midden doordeelt, en op de overstaande zijde valt; men vraagt de hoeken en de derde zijde te berekenen.

24°. Waarin veranderen de formules ter oplossing van het eerste, derde en vijfde geval, als de gegeven zijden gelijk, en die van het tweede, vierde en zesde geval als de gegeven hoeken gelijk zijn?

25°. Hoe groot zijn de hoeken van een driehoek, wiens zijden alle gelijk 60° zijn?

26°. En door welke formules kan men de onbekenden berekenen als $C = A + B$ is?

27°. Uit $\text{tg.}\tfrac{1}{2}(A + B) = \dfrac{\cos.\tfrac{1}{2}(a - b)}{\cos.\tfrac{1}{2}(a + b)}\cot.\tfrac{1}{2}C$ aan te toonen, dat als $a + b$ kleiner, gelijk of grooter dan 180° is, ook $A + B$ kleiner, gelijk of grooter dan 180° zal zijn.

28°. Uit een punt genomen in de gemeene doorsnede van twee vlakken, is in elk dier vlakken een lijn getrokken. Indien nu de hoeken bekend zijn, welke die lijnen onderling en elk met de gemeene doorsnede der twee vlakken maken, vraagt men de hoeken te bepalen waaronder deze lijnen op de beide vlakken hellen.

29°. Uit een punt in de gemeene doorsnede van twee vlakken is in elk dier vlakken een lijn getrokken. Zoo nu gegeven zijn de standhoek dezer vlakken, en de hoeken die deze lijnen elk met de gemeene doorsnede maken, zoo vraagt men den hoek te bepalen die deze doorsnede maakt met het vlak dat door de twee lijnen kan gebracht worden.

30°. Van twee plaatsen A en B op aarde is gegeven de lengte α en α' en de breedte β en β'; men vraagt de lengte van den boog des grooten cirkels die door deze plaatsen gaat, in de onderstelling dat beide op noorderbreedte gelegen zijn. En welke veranderingen ondergaat deze formule als de breedte ongelijknamig is?

31°. Men vraagt de standhoeken te bepalen van het regelmatig viervlak, achtvlak, twaalfvlak en twintigvlak.

---

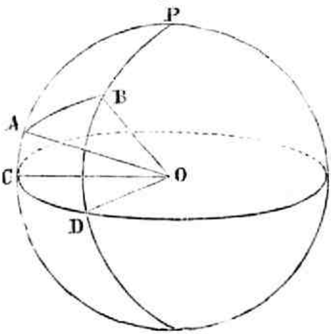
§ 21.

Herleiding van een hoek tot den horizont.

130. Dit vraagstuk, reeds in 72 door de eigenschappen van den rechtlijnigen driehoek opgelost, zullen wij thans door die van den bolvormigen driehoek oplossen en het tevens doen dienen als een voorbeeld hoe men kleine bogen in rekening brengt om een gewenschten graad van nauwkeurigheid te verkrijgen.

Zij, fig. 51, O een punt op de aarde waaruit men den hoek, waaronder men de beide sterren A en B ziet, heeft gemeten; indien men dan verder de hoogte dezer punten boven den horizont meet, dan heeft men de volgende gegevens: $AOB = AB = a$, $AOC = AC = \alpha$ en $BOD = BD = \beta$, terwijl gevraagd wordt

Fig. 51.



$$\text{hoek } COD = CD = \varphi.$$

Indien nu P de pool is van den horizont, dan is:

$$AP = 90° - \alpha$$
$$BP = 90° - \beta$$
$$\text{en hoek } P = CD = \varphi$$

en dus in den bolvormigen driehoek ABP:

$$\cos.AB = \cos.AP \cos.BP + \sin.AP \sin.BP \cos.P,$$

dat is: $\cos.a = \sin.\alpha \sin.\beta + \cos.\alpha \cos.\beta \cos.\varphi$,

waaruit: $$\cos.\varphi = \frac{\cos.a - \sin.\alpha \sin.\beta}{\cos.\alpha \cos.\beta} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

welke, even als in 72, voor logarithmische berekening geschikt gemaakt kan worden.

Zijn echter de bogen α en β zeer klein, waardoor de berekening onnauwkeurig zou worden, dan herleidt men de formule op de volgende wijze:

Men heeft:

$$\frac{1}{\cos.\alpha \cos.\beta} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \sin.^2\alpha)(1 - \sin.^2\beta)}} =$$

$$\{(1 - \sin.^2\alpha)(1 - \sin.^2\beta)\}^{-\frac{1}{2}}$$

Ontwikkelt men nu deze macht door het binomium en verwaarloost men de termen van den vierden graad, dan heeft men:

$$\frac{1}{\cos.\alpha \cos.\beta} = \{1 - (\sin.^2\alpha + \sin.^2\beta)\}^{-\frac{1}{2}} = 1 + \tfrac{1}{2}(\sin.^2\alpha + \sin.^2\beta).$$

Door deze waarde in formule (1) te substitueeren komt er:

$$\cos.\varphi = (\cos.a - \sin.\alpha \sin.\beta)\{1 + \tfrac{1}{2}(\sin.^2\alpha + \sin.^2\beta)\},$$

dat is na ontwikkeling en verwaarloozing der vierde machten:

$$\cos.\varphi = \cos.a - \sin.\alpha \sin.\beta + \tfrac{1}{2} \cos.a (\sin.^2\alpha + \sin.^2\beta) \; . \quad . \; (2)$$

Omdat nu in de aangenomen onderstelling de zijden AP en BP weinig van een kwadrant verschillen, zal ook het verschil tusschen den hoek P en de boog AB zeer klein zijn. Stelt men dus $\varphi = a + x$, dan is x zoo klein, dat $\cos.x = 1$ kan gesteld worden, en dus:

$$\cos.\varphi = \cos.(a + x) = \cos.a - \sin.a \sin.x.$$

Brengt men dit over in vergelijking (2), dan heeft men:

$$\sin.a \sin.x = \sin.\alpha \sin.\beta - \tfrac{1}{2}\cos.a (\sin.^2\alpha + \sin.^2\beta),$$

waaruit: $$\sin.x = \frac{2\sin.\alpha \sin.\beta - \cos.a (\sin.^2 + \sin.^2\beta)}{2\sin.a}$$

en daar $\sin.^2\tfrac{1}{2}a + \cos.^2\tfrac{1}{2}a = 1$ en $\cos.a = \cos.^2\tfrac{1}{2}a - \sin.^2\tfrac{1}{2}a$ is, heeft men verder: $\sin.x =$

$$\frac{2\sin.\alpha \sin.\beta (\sin.^2\tfrac{1}{2}a + \cos.^2\tfrac{1}{2}a) - (\cos.^2\tfrac{1}{2}a - \sin.^2\tfrac{1}{2}a)(\sin.^2\alpha + \sin.^2\beta)}{4\sin.\tfrac{1}{2}a \cos.\tfrac{1}{2}a}$$

of door de termen met $\sin.^2\tfrac{1}{2}a$ en die met $\cos.^2\tfrac{1}{2}a$ te vereenigen:

$$\sin.x = \frac{\sin.^2\tfrac{1}{2}a\,(\sin.\alpha + \sin.\beta)^2 - \cos.^2\tfrac{1}{2}a\,(\sin.\alpha - \sin.\beta)^2}{4\sin.\tfrac{1}{2}a\cos.\tfrac{1}{2}a},$$

of na vereenvoudiging:

$$\sin.x = \tfrac{1}{4}\mathrm{tg}.\tfrac{1}{2}a\,(\sin.\alpha + \sin.\beta)^2 - \tfrac{1}{4}\cot.\tfrac{1}{2}a\,(\sin.\alpha - \sin.\beta)^2 \quad . \quad . \ (3)$$

Wegens de kleinte der hoeken of bogen α, β en x kan men stellen:

$$\sin.x : \sin.\alpha : \sin.\beta : \sin.1'' = x : \alpha : \beta : 1,$$

waaruit:

$$\sin.x = x.\sin.1''$$
$$\sin.\alpha = \alpha.\sin.1''$$
$$\sin.\beta = \beta.\sin.1''.$$

Door substitutie van deze waarden gaat formule (3) over in:

$$x = \tfrac{1}{4}\mathrm{tg}.\tfrac{1}{2}a\,(\alpha + \beta)^2 \sin.1'' - \tfrac{1}{4}\cot.\tfrac{1}{2}a\,(\alpha - \beta)^2 \sin.1'' \quad . \quad . \ (4)$$

Men noemt deze formule de formule van Legendre.

Men berekent door haar den boog x in seconden, die bij den gemeten hoek a gevoegd worden om de horizontale projectie te verkrijgen.

---

§ 22.

Berekening van het oppervlak van den bolvormigen driehoek.

131. Indien men het oppervlak van den bol O noemt, en het spherisch exces

$$A + B + C - 180^\circ = E$$

stelt, dan zal het oppervlak van den driehoek, zoo men dit I stelt, worden gevonden uit:

$$I = \frac{E}{R} \times \tfrac{1}{8}O.$$

Het oppervlak van een bolvormigen driehoek zal dus onmiddelijk uit de drie hoeken kunnen gevonden worden. Men zal dus in de verschillende gevallen deze hoeken eerst moeten berekenen; in het eerste en derde geval kan E echter onmiddelijk uit de gegevens worden afgeleid.

Zijn de drie zijden gegeven, dan heeft men uit de formules van Gauss, stelsel (IX):

$$\sin.\tfrac{1}{2}(A + B) = \frac{\cos.\tfrac{1}{2}(a - b)}{\cos.\tfrac{1}{2}c} \cos.\tfrac{1}{2}C$$

$$\text{en} \quad \cos.\tfrac{1}{2}(A + B) = \frac{\cos.\tfrac{1}{2}(a + b)}{\cos.\tfrac{1}{2}c} \sin.\tfrac{1}{2}C.$$

Schrijft men deze in den vorm eener evenredigheid, dan worden zij:

$$\sin.\tfrac{1}{2}(A + B) : \cos.\tfrac{1}{2}C = \cos.\tfrac{1}{2}(a - b) : \cos.\tfrac{1}{2}c$$

$$\cos.\tfrac{1}{2}(A + B) : \sin.\tfrac{1}{2}C = \cos.\tfrac{1}{2}(a + b) : \cos.\tfrac{1}{2}c$$

en hieruit:

$$\frac{\sin.\tfrac{1}{2}(A + B) - \cos.\tfrac{1}{2}C}{\sin.\tfrac{1}{2}(A + B) + \cos.\tfrac{1}{2}C} = \frac{\cos.\tfrac{1}{2}(a - b) - \cos.\tfrac{1}{2}c}{\cos.\tfrac{1}{2}(a - b) + \cos.\tfrac{1}{2}c}$$

$$\frac{\cos.\tfrac{1}{2}(A + B) - \sin.\tfrac{1}{2}C}{\cos.\tfrac{1}{2}(A + B) + \sin.\tfrac{1}{2}C} = \frac{\cos.\tfrac{1}{2}(a + b) - \cos.\tfrac{1}{2}c}{\cos.\tfrac{1}{2}(a + b) + \cos.\tfrac{1}{2}c}$$

of daar $\cos.\tfrac{1}{2}C = \sin.(90^\circ - \tfrac{1}{2}C)$ en $\sin.\tfrac{1}{2}C = \cos.(90^\circ - \tfrac{1}{2}C)$ is:

$$\frac{\text{tg}.\tfrac{1}{4}(A + B + C - 180^\circ)}{\text{tg}.\tfrac{1}{4}(A + B - C + 180^\circ)} = \text{tg}.\tfrac{1}{4}(a - b + c)\,\text{tg}.\tfrac{1}{4}(-a + b + c)$$

$$\frac{\text{tg}.\tfrac{1}{4}(A + B + C - 180^\circ)}{\cot.\tfrac{1}{4}(A + B - C + 180^\circ)} = \text{tg}.\tfrac{1}{4}(a + b + c)\,\text{tg}.\tfrac{1}{4}(a + b - c).$$

Vermenigvuldigt men deze beide vergelijkingen met elkander, en stelt men $a + b + c = 2s$, dan komt er:

$$\text{tg}.\tfrac{1}{4}E = \sqrt{\text{tg}.\tfrac{1}{2}s\,\text{tg}.\tfrac{1}{2}(s - a)\,\text{tg}.\tfrac{1}{2}(s - b)\,\text{tg}.\tfrac{1}{2}(s - c)},$$

zijnde de formule van LHUILLER.

132. Zij gegeven de zijden a en b en den ingesloten hoek C, dan kan het spherisch exces op de volgende wijze uit dezelfde formules gevonden worden.

Men vermenigvuldige de eerste met $\sin.\tfrac{1}{2}C$, de tweede met $\cos.\tfrac{1}{2}C$, dan komt er door het verschil te nemen:

$$\cos.\tfrac{1}{2}(A + B + C) = \frac{\cos.\tfrac{1}{2}(a + b) - \cos.\tfrac{1}{2}(a - b)}{2\cos.\tfrac{1}{2}c} \sin.C = -\frac{\sin.\tfrac{1}{2}a \sin.\tfrac{1}{2}b}{\cos.\tfrac{1}{2}c} \sin.C. \quad . \; . \; (1)$$

Vervolgens vermenigvuldigt men de eerste met $\cos.\tfrac{1}{2}C$ en de tweede met $\sin.\tfrac{1}{2}C$, dan heeft men door optelling, tegelijk

$$\cos.^2\tfrac{1}{2}C = \tfrac{1}{2}(1 + \cos.C) \text{ en } \sin.^2\tfrac{1}{2}C = \tfrac{1}{2}(1 - \cos.C)$$

stellende:

$$\sin.\tfrac{1}{2}(A+B+C) = \frac{\cos.\tfrac{1}{2}(a-b)\,(1 + \cos.C) + \cos.\tfrac{1}{2}(a+b)\,(1-\cos.C)}{2\cos.\tfrac{1}{2}c}$$

$$= -\frac{\cos.\tfrac{1}{2}a \cos\tfrac{1}{2}b + \sin.\tfrac{1}{2}a \sin.\tfrac{1}{2}b \cos.C}{\cos.\tfrac{1}{2}c}.$$

Deelt men nu de laatste door de eerste, dan heeft men, omdat $A + B + C = 180° + E$, derhalve $\frac{1}{2}(A + B + C) = 90° + \frac{1}{2}E$ is:

$$\cot.\tfrac{1}{2}E = \frac{\cot.\frac{1}{2}a \cot.\frac{1}{2}b + \cos.C}{\sin.C}.$$

Om deze formule voor logarithmische berekening geschikt te maken, stelle men als $C < 90°$ is:

$$\frac{\cot.\frac{1}{2}a \cot.\frac{1}{2}b}{\cos.C} = \operatorname{tg.}^2\varphi,$$

waardoor

$$\cot.\tfrac{1}{2}E = \sec.^2\varphi \cot.C$$

$$\text{of} \quad \operatorname{tg.}\tfrac{1}{2}E = \cos.^2\varphi \operatorname{tg.}C$$

wordt. Is $C > 90°$, dan stelle men $C = 90° + C'$, waardoor:

$$\cot.\tfrac{1}{2}E = \frac{\cot.\frac{1}{2}a \cot.\frac{1}{2}b - \sin.C'}{\cos.C'}$$

en stellende nu $\frac{\cot.\frac{1}{2}a \cot.\frac{1}{2}b}{\sin.C'} = \sec.^2\varphi$ of $\sin.^2\varphi$, naarmate deze uitdrukking grooter of kleiner is dan 1, dan wordt in het eerste geval:

$$\cot.\tfrac{1}{2}E = \operatorname{tg.}^2\varphi \operatorname{tg.}C'$$

en in het tweede geval:

$$\cot.\tfrac{1}{2}E = -\cos.^2\varphi \operatorname{tg.}C'.$$

133. Schrijft men de formule (1) onder den vorm:

$$-\cos.\tfrac{1}{2}(A + B + C) = \frac{\sin.a \sin.b \sin.C}{4\cos.\frac{1}{2}a \cos.\frac{1}{2}b \cos.\frac{1}{2}c}$$

en substitueert men daarna:

$$\sin.C = \frac{2\sqrt{\sin.s \sin.(s - a) \sin.(s - b) \sin.(s - c)}}{\sin.a \sin.b},$$

dan komt er:

$$\sin.\tfrac{1}{2}E = \frac{\sqrt{\sin.s \sin.(s - a) \sin.(s - b) \sin.(s - c)}}{2\cos.\frac{1}{2}a \cos.\frac{1}{2}b \cos.\frac{1}{2}c},$$

waardoor E ook kan gevonden worden als de drie zijden gegeven zijn.

Het Grieksche alphabet.

Hoofdletter.	Gewone schrijfletter.	Naam.	Latijnsche letter.
Α	α	alpha	A
Β	β	bêta	B
Γ	γ	gamma	G
Δ	δ	delta	D
Ε	ε	epsilon	E
Ζ	ζ	zêta	Z
Η	η	èta	H
Θ	θ	thêta	Th
Ι	ι	jota	J
Κ	κ	kappa	K
Λ	λ	lambda	L
Μ	μ	mu	M
Ν	ν	nu	N
Ξ	ξ	xi	X
Ο	ο	omikron	O
Π	π	pi	P
Ρ	ρ	rho	R
Σ	σ	sigma	S
Τ	τ	tau	T
Υ	υ	upsilon	Y
Φ	φ	phi	Ph
Χ	χ	chi	Ch
Ψ	ψ	psi	Ps
Ω	ω	omega	OO

Opgaven van eenige waarden van π.

$$\pi = 3.14159; \quad \log.\pi = 0.497150.$$
$$2\pi = 6.28319; \quad \log.2\pi = 0.798180.$$
$$\tfrac{1}{2}\pi = 1.57080; \quad \log.\tfrac{1}{2}\pi = 0.196120.$$
$$\frac{1}{\pi} = 0.31831; \quad \log.\frac{1}{\pi} = 9.502850-10.$$
$$\frac{1}{2\pi} = 0.15915; \quad \log.\frac{1}{2\pi} = 9.201820-10.$$
$$\frac{2}{\pi} = 0.63662; \quad \log.\frac{2}{\pi} = 9.803880-10.$$
$$\pi^2 = 9.86960; \quad \log.\pi^2 = 0.994300.$$
$$\frac{1}{\pi^2} = 0.10132; \quad \log.\frac{1}{\pi^2} = 9.005700-10.$$
$$\sqrt{\pi} = 1.77245; \quad \log.\sqrt{\pi} = 0.248575.$$
$$\sqrt{\tfrac{1}{2}\pi} = 1.25331; \quad \log.\sqrt{\tfrac{1}{2}\pi} = 0.098060.$$
$$\sqrt{\frac{1}{\pi}} = 0.56419; \quad \log.\sqrt{\frac{1}{\pi}} = 9.751425-10.$$
$$\text{Nep.log.}\pi = 1.144730.$$

---

ha.