De oplossing van quaternion-vergelijkingen

P. T. GRINWIS

DE OPLOSSING VAN Quaternion-Vergelijkingen

DE OPLOSSING

VAN

QUATERNION-VERGELIJKINGEN.

Typ. J. VAN BOEKHOVEN, Utrecht.

DE OPLOSSING

VAN

QUATERNION-VERGELIJKINGEN.

PROEFSCHRIFT

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN

Doctor in de Wis- en Natuurkunde

AAN DE RIJKS-UNIVERSITEIT TE UTRECHT,

NA MACHTIGING VAN DEN RECTOR-MAGNIFICUS

Dr. J. A. C. OUDEMANS,

Hoogleeraar in de Faculteit der Wis- en Natuurkunde,

EN MET TOESTEMMING VAN DEN SENAAT DER UNIVERSITEIT

TEGEN DE BEDENKINGEN DER WIS- EN NATUURKUNDIGE FACULTEIT

TE VERDEDIGEN

op Maandag den 21sten April 1890, des namiddags ten 3 ure,

DOOR

PIETER THOMAS GRINWIS,

geboren te Delft.

UTRECHT,
J. VAN BOEKHOVEN.
1890.

Aan mijne Ouders

Aan het einde mijner academische studiën breng ik gaarne mijnen oprechten dank aan de Hoogleeraren bij de faculteit der Wis- en Natuurkunde, wier onderwijs ik heb mogen genieten.

Inzonderheid ben ik den Hoogleeraar KAPTEYN *erkentelijk voor zijn degelijk onderricht en de mij betoonde welwillendheid.*

Met weemoed herdenk ik den onlangs overleden Hoogleeraar BUYS BALLOT, *aan wiens onderwijs ik veel verplicht ben.*

Mijnen hooggeachten Promotor dank ik voor zijne leiding en voor den steun, mij bij het samenstellen van dit proefschrift verleend.

ERRATA.

Bladz. 3	reg. 1	v. b.	*staat:* waarden, voor;	*lees:* waarden voor.
„ 19	„ 2 en 3 v. o.	„	$(1+j)$;	„ $(1-j)$.
„ 20	„ 9 „ 10 v. b.	„	$(1+j)$;	„ $(1-j)$.
„ 32	„ 5 „ 9 „ „	„	$\sqrt{1}$;	„ $\sqrt{-1}$.
„ 41	„ 11 „ „	„	zoodat,	„ dan is.
„ 63	„ 5	v. o. „	$\frac{w}{\cos\angle\frac{\beta}{\alpha}}\sqrt{\quad}$	

lees: $\frac{w}{\cos\angle\frac{\beta}{\alpha}} = \sqrt{\quad}$

INHOUD.

HOOFDSTUK I.

Vectorvergelijkingen.

§ 1. Eene quaternion-vergelijking van den eersten graad ten opzichte van een onbekend quaternion q, laat zich zoo algemeen mogelijk voorstellen onder den volgenden vorm:

$$\Sigma bqa + \Sigma d.S.b'qa' + \Sigma e.V.b''qa''.f = c,$$

waarin b, a, b', a', b'', a'', e, f, d en c gegeven quaternions voorstellen en waaruit q bepaald moet worden. Vervangt men in den derden term $V.b''qa''$ door $b''qa'' - S.b''qa''$, dan neemt de quaternion-vergelijking de volgende meer eenvoudige gedaante aan

$$\Sigma bqa + \Sigma d.S.b'qa' = c.$$

De oplossing eener zoodanige vergelijking kan steeds teruggebracht worden tot die eener lineaire vector-vergelijking, zooals uit het volgende blijkt.

Neemt men van beide leden der bovenstaande vergelijking de scalar- en vectorgedeelten, zoo geeft zij twee nieuwe vergelijkingen.

Bij toepassing der formules:

$$S.rq = SrSq + S.VrVq \text{ en}$$

$$V.\gamma\beta\alpha = \gamma S.\beta\alpha - \beta S.\gamma\alpha + \alpha S.\beta\gamma,$$

waarin r, q quaternions en α, β, γ vectoren zijn, worden deze laatste vergelijkingen tot de twee volgenden herleid

$$wh + S.\,\eta'\varrho = Sc \qquad \text{en}$$

$$w\eta + V.(h' + \Theta)\varrho + \Sigma\{VaS.\,b\varrho + VbS.\,a\varrho + VdS.(Va'b')\varrho\} = Vc,$$

waarin $w = Sq$, $\varrho = Vq$, $\Sigma SdS.\,b'a' + \Sigma S.\,ba = h$

$$\eta' = \Sigma SdV.\,a'b' + \Sigma V.\,ab \qquad \Theta = \Sigma(VbSa - SbVa)$$

$$\eta = \Sigma V.\,ba + \Sigma VdS.\,b'a' \qquad h' = \Sigma(SbSa - S.\,VbVa).$$

Elimineert men w uit deze twee vergelijkingen, en stelt ter bekorting $h(h' + \Theta) = r$ en $hVc - \eta Sc = \gamma$, dan vindt men eene vergelijking van den vorm

$$\Sigma\alpha S.\,\beta\varrho + V.\,r\varrho = \gamma\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (I)$$

waarin α, α' ...., β, β' ..... en γ gegeven vectoren zijn en r een gegeven quaternion.

De oplossing van de quaternion-vergelijking van den eersten graad wordt dus teruggebracht tot die van eene lineaire vector-vergelijking. Schrijft men deze in den vorm

$$\varphi\varrho = \gamma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (II)$$

en opereert men hierop met φ^{-1}, dan vindt men

$$\varrho = \varphi^{-1}\gamma.$$

Het probleem komt dus neer op het bepalen van de omgekeerde functie φ^{-1}.

§ 2. Behandeling van eenige eenvoudige voorbeelden.

1°. $V.\,\alpha\varrho\beta = \gamma$, waaruit ϱ op te lossen.

Past men hierop de bewerkingen $S.\,\alpha$ en $S.\,\beta$ toe, dan is:

$$S.\,\alpha V.\,\alpha\varrho\beta = S.\,\alpha^2\varrho\beta = \alpha^2 S.\,\beta\varrho = S.\,\alpha\gamma \quad \text{en}$$

$$S.\,\beta V.\,\alpha\varrho\beta = S.\,\beta^2\varrho\alpha = \beta^2 S.\,\alpha\varrho = S.\,\beta\gamma$$

waaruit volgt $\qquad \alpha S.\,\beta\varrho = \alpha^{-1}S.\,\alpha\gamma$ en

$$\beta S.\,\alpha\varrho = \beta^{-1}S.\,\beta\gamma.$$

Daar de gegeven vergelijking ook kan geschreven worden

$$\alpha S.\,\beta\varrho + \beta S.\,\alpha\varrho - \varrho S.\,\alpha\beta = \gamma$$

krijgt men, na substitutie der bovenstaande waarden, voor de beide eerste termen

$$\varrho = \frac{\alpha^{-1} S.\alpha\gamma + \beta^{-1} S.\beta\gamma - \gamma}{S.\alpha\beta}.$$

Zijn α, β, γ coplanair, dan is $S.\alpha\beta\gamma = 0$.

Na operatie met $S.\alpha\beta$ op de gevonden waarde van ϱ krijgt men bij deze onderstelling

$$S.\alpha\beta\varrho = \frac{S\beta\, S.\alpha\gamma + S\alpha\, S.\beta\gamma - S.\alpha\beta\gamma}{S.\alpha\beta} = \frac{S.\alpha\beta\gamma}{S.\alpha\beta} = 0,$$

mits $S.\alpha\beta$ niet gelijk nul is.

De oorspronkelijke vergelijking wordt dan

$$\alpha\varrho\beta = \gamma \text{ en dus } \varrho = \alpha^{-1}\gamma\beta^{-1}.$$

2°. $V.\alpha\beta\varrho = \gamma$, waaruit ϱ op te lossen.

$$\gamma = V.(S.\alpha\beta)\varrho + V.(V.\alpha\beta)\varrho = \varrho S.\alpha\beta + V.(V.\alpha\beta)\varrho.$$

Hierop met $S.V\alpha\beta$ opereerende, heeft men

$$S.\alpha\beta\gamma = S.\alpha\beta\varrho S.\alpha\beta$$

daar $\qquad S.V.\alpha\beta\, V.(V.\alpha\beta)\varrho = S.\delta V.\delta\varrho = 0.$

Deelt men beide leden der vergelijking

$$S.\alpha\beta\gamma = S.\alpha\beta\varrho S.\alpha\beta \text{ door } S.\alpha\beta$$

en telt deze dan bij de gegeven vergelijking op, dan is:

$$\gamma + \frac{S.\alpha\beta\gamma}{S.\alpha\beta} = \alpha\beta\varrho, \qquad \text{waaruit}$$

$$\varrho = \beta^{-1}\alpha^{-1}\left(\gamma + \frac{S.\alpha\beta\gamma}{S.\alpha\beta}\right).$$

3°. $V.\alpha\varrho = \gamma$, waaruit ϱ te vinden. Stelt men, daar $S.\alpha\varrho$ onbepaald is gelaten, $S.\alpha\varrho = x$, dan geeft dit, opgeteld bij de gegeven vergelijking,

$$\alpha\varrho = x + \gamma.$$

derhalve $\qquad \varrho = \alpha^{-1}(x + \gamma).$

§ 3. Eigenschappen der functie φ.

Elke functie φ bepaald door het eerste lid der vergelijking (1) heeft de volgende eigenschappen :

1°. $\varphi(\varrho + \sigma + \tau \ldots\ldots) = \varphi\varrho + \varphi\sigma + \varphi\tau \ldots\ldots$

2°. $d\varphi\varrho = \varphi(\varrho + d\varrho) - \varphi\varrho = \varphi d\varrho$.

3°. $\varphi a\varrho = a\varphi\varrho$, waarin a eene scalargrootheid.

De functie $\varphi(\varphi\varrho)$ stelt men voor door $\varphi^2\varrho$, de n-malen herhaalde operatie met deze functie φ op ϱ door $\varphi^n\varrho$.

In analogie hiermede is $\varphi^{-2}\varrho = \varphi^{-1}(\varphi^{-1}\varrho)$ en zal de n-malen herhaalde operatie met φ^{-1} voorgesteld worden door $\varphi^{-n}\varrho$.

§ 4. Verwante functies. Opereert men op de vectorfunctie met $S.\,\sigma$, dan volgt uit de algemeene vergelijking

$$\varphi\varrho = \Sigma\alpha\, S.\,\beta\varrho + V.\,r\varrho \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

waarin r een quaternion voorstelt,

$$\begin{aligned} S.\,\sigma\varphi\varrho &= \Sigma\, S.\,\sigma\alpha\, S.\,\beta\varrho + S.\,\sigma V.\,r\varrho \\ &= \Sigma\, S.\,\varrho\beta\, S.\,\sigma\alpha + S.\,\sigma V.(Sr + Vr)\varrho \\ &= \Sigma\, S.\,\varrho\beta\, S.\,\sigma\alpha + S.\,\varrho V.(Sr)\sigma - S.\,\varrho V.(Vr)\sigma \\ &= \Sigma\, S.\,\varrho\beta\, S.\,\sigma\alpha + S.\,\varrho V.\,Kr\sigma \end{aligned}$$

$$S.\,\sigma\varphi\varrho = S.\,\varrho[\Sigma\,\beta\, S.\,\alpha\sigma + V.\,Kr\sigma].$$

Stelt men nu

$$\varphi'(\varrho) = \Sigma\,\beta\, S.\,\alpha\varrho + V.\,Kr\varrho \quad \ldots\ldots \quad (1a)$$

zoodat, $\varphi'(\sigma) = \Sigma\,\beta\, S.\,\alpha\sigma + V.\,Kr\sigma$

dan is $S.\,\sigma\varphi\varrho = S.\,\varrho\varphi'\sigma \quad \ldots\ldots \quad (2).$

De functie φ' wordt de verwante van φ genoemd. Zij verschilt daarmede door de verwisseling van α en β en door de verandering van het quaternion r in het geconjugeerde. Wederkeerig volgt, daar $KKr = r$ is, dat φ de verwante functie is van φ', zoodat men ook heeft

$$S.\,\varrho\varphi\sigma = S.\,\sigma\varphi'\varrho \quad \ldots\ldots \quad (3).$$

Telt men de vergelijkingen (2) en (3) op, dan vindt men

$$S.\,\sigma(\varphi + \varphi')\varrho = S.\,\varrho(\varphi + \varphi')\sigma.$$

Hieruit blijkt dus, dat de functie $\varphi + \varphi'$ verwant is aan zich zelf.

Is $\sigma = \varrho$, dan is $S.\,\varrho\varphi\varrho = S.\,\varrho\varphi'\varrho$ en

$$S.\,\varrho(\varphi - \varphi')\varrho = 0.$$

De vector $(\varphi - \varphi')\rho$ staat dus loodrecht op ρ. Men kan nu stellen $(\varphi - \varphi')\rho = V.\,\delta\rho$, waarin δ een bepaalde vector is, die loodrecht staat op $(\varphi - \varphi')\rho$. Bijgevolg is

$$\begin{aligned} \varphi\rho &= \tfrac{1}{2}(\varphi + \varphi')\rho + \tfrac{1}{2}(\varphi - \varphi')\rho \\ &= \tfrac{1}{2}(\varphi + \varphi')\rho + \tfrac{1}{2}\,V.\,\delta\rho \\ \tfrac{1}{2}\varphi\rho &= \tfrac{1}{2}\,\varphi'\rho + \tfrac{1}{2}\,V.\,\delta\rho. \end{aligned}$$

Eene lineaire vector-functie verschilt dus van de met haar verwante functie slechts een term van den vorm $V.\delta\rho$.

Ook het product van twee willekeurige operaties geeft eene aan zichzelf verwante operatie, men heeft toch

$$S.\,\rho\varphi\varphi'\sigma = S.\,\varphi'\sigma\,\varphi'\rho = S.\,\varphi'\rho\,\varphi'\sigma = S.\,\sigma\varphi\varphi'\rho\,,$$

$\varphi\varphi'$ blijkt dus zelfverwant te zijn.

Is $\varphi + g$ eene nieuwe lineaire vector-functie, waarin g eene scalargrootheid, dan is

$$S.\,\sigma(\varphi + g)\rho = S.\,\sigma\varphi\rho + S.\,\sigma g\rho$$

$$S.\,\sigma(\varphi + g)\rho = S.\,\rho\varphi'\sigma + S.\,\rho g\sigma = S.\,\rho(\varphi' + g)\sigma.$$

§ 5. Omkeering van φ. Eerste methode.

Iedere vector kan in het algemeen uitgedrukt worden als de som van drie niet coplanaire vectoren, die ieder met reëele coefficienten vermenigvuldigd zijn.

Men kan dus $\varphi^3\rho$ uitdrukken in termen van ρ, $\varphi\rho$ en $\varphi^2\rho$, mits deze drie vectoren niet in een zelfde vlak zijn gelegen.

Zij $$-\varphi^3\rho = x\rho + y\varphi\rho + z\varphi^2\rho \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

opereert men op deze vergelijking met φ^{-1}, dan is

$$-x\varphi^{-1}\rho = y\rho + z\varphi\rho + \varphi^2\rho\,,$$

de omgekeerde functie is dan uitgedrukt in termen van directe operaties.

De coefficienten x, y, z, zijn onafhankelijk van ρ en kunnen bepaald worden, door ρ achtereenvolgens te vervangen door drie bekende vectoren en de drie resulteerende vergelijkingen op te lossen.

Zijn ϱ, $\varphi\varrho$ en $\varphi^2\varrho$ coplanair, dan heeft men eene vergelijking van den vorm

$$\varphi^2\varrho = a\varrho + b\varphi\varrho \qquad \text{of}$$
$$\varphi^3\varrho = a\varphi\varrho + b\varphi^2\varrho,$$
$$\varphi^3\varrho = ab\varrho + (a + b^2)\varphi\varrho,$$

zoodat $\varphi^3\varrho$ eveneens coplanair is met ϱ en $\varphi\varrho$.

§ 6. Toepassing van het omkeerproces op een voorbeeld.

1°. Heeft $\varphi\varrho$ den vorm $-a^2 i\, S.\, i\varrho - b^2 j\, S.\, j\varrho - c^2 k\, S.\, k\varrho$ dan is

$$\begin{array}{lll} \varphi i = a^2 i & \varphi j = b^2 j & \varphi k = c^2 k \\ \varphi^2 i = a^4 i & \varphi^2 j = b^4 j & \varphi^2 k = c^4 k \\ \varphi^3 i = a^6 i & \varphi^3 j = b^6 j & \varphi^3 k = c^6 k. \end{array}$$

Substitueert men nu in de vergelijking (4) voor ϱ achtereenvolgens i, j, k, dan heeft men

$$-a^6 = x + ya^2 + za^4$$
$$-b^6 = x + yb^2 + zb^4$$
$$-c^6 = x + yc^2 + zc^4$$

zoodat

$$a^6 + za^4 + ya^2 + x = 0$$
$$b^6 + zb^4 + yb^2 + x = 0$$
$$c^6 + zc^4 + yc^2 + x = 0.$$

De grootheden a^2, b^2, c^2 zijn dus de wortels van de derde-machtsvergelijking

$$\xi^3 + z\xi^2 + y\xi + x = 0.$$

De coefficienten dezer vergelijking zijn derhalve
$x = -a^2b^2c^2$, $y = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$ en $z = -(a^2 + b^2 + c^2)$

Deze waarden in de vergelijking (4) substitueerende, vindt men

$$\varphi^3\varrho = a^2b^2c^2\varrho - (a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)\varphi\varrho + (a^2 + b^2 + c^2)\varphi^2\varrho.$$

Stellen wij nu $\varphi\varrho = \gamma$, zoo wordt

$$\varrho = \frac{1}{a^2b^2c^2}\left\{(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)\gamma - (a^2 + b^2 + c^2)\varphi\gamma + \varphi^2\gamma\right\}.$$

2^0. Heeft $\varphi\varrho$ den vorm $\frac{iS.\,i\varrho}{a^2} + \frac{jS.\,j\varrho}{b^2}$, dan behoort φ tot een ellips; ϱ, $\varphi\varrho$ en $\varphi^2\varrho$ zijn dan coplanair, zoodat

$$\varphi^2\varrho = x\varrho + y\varphi\varrho.$$

Nu is $$\varphi i = -\frac{i}{a^2},\ \varphi j = -\frac{j}{b^2}$$

$$\varphi^2 i = \frac{i}{a^4} \text{ en } \varphi^2 j = \frac{j}{b^4}.$$

Substitueert men nu in de vergelijking $\varphi^2\varrho = x\varrho + y\varphi\varrho$, voor ϱ achtereenvolgens i en j, dan heeft men

$$\frac{i}{a^4} = -\frac{i}{a^2}y + xi \text{ en } \frac{j}{b^4} = -\frac{j}{b^2}y + xj,$$

zoodat $$xa^4 - ya^2 - 1 = 0 \qquad \text{en}$$

$$xb^4 - yb^2 - 1 = 0.$$

Nu zijn a^2 en b^2 de wortels van de vierkantsvergelijking

$$x\xi^2 - y\xi - 1 = 0,$$

waaruit volgt:

$$\frac{y}{x} = a^2 + b^2 \text{ en } a^2b^2 = -\frac{1}{x}$$

en dus

$$\varphi^2\varrho = -\frac{\varrho}{a^2b^2} - \frac{(a^2+b^2)}{a^2b^2}\varphi\varrho,$$

Stelt men nu $\varphi\varrho = \gamma$, zoo wordt

$$\varrho = -(a^2+b^2)\gamma - (a^2b^2)\varphi\gamma.$$

§ 7. Methode van Hamilton.

Men kan bijv. steeds twee vectoren λ en μ zoodanig kiezen, dat $V.\,\lambda\mu = \varphi\varrho$; na operatie met $S.\,\lambda$ en $S.\,\mu$ heeft men dan $S.\,\lambda\varphi\varrho = 0$ en $S.\,\mu\varphi\varrho = 0$, tevens geven deze vergelijkingen door de invoering der verwante functie φ'

$$S.\,\varrho\varphi'\lambda = 0 \text{ en } S.\,\varrho\varphi'\mu = 0.$$

Uit deze twee laatste formules blijkt, dat ϱ loodrecht staat op de vectoren $\varphi'\lambda$ en $\varphi'\mu$; de vector $V.\,\varphi'\lambda\varphi'\mu$, die loodrecht op hun vlak staat, heeft dus dezelfde richting als de vector ϱ, zoodat $m\varrho = V.\, \varphi'\lambda\varphi'\mu$, waarin m een scalar voorstelt. Nu is ook $\varrho = \varphi^{-1} V.\, \lambda\mu$, waaruit volgt

$$m\varphi^{-1} V.\lambda\mu = V.\varphi'\lambda\varphi'\mu. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Het komt er nu nog op aan de constante m te bepalen en het tweede lid uittedrukken in functie van den vector $V.\lambda\mu$. Zij ν een vector, niet coplanair met λ en μ. Na operatie op vergelijking (5) met $S.\,\varphi'\nu$, krijgt men door rekening te houden met de hoofdeigenschap der verwante functies

$$mS.\,\varphi'\nu\varphi^{-1} V.\,\lambda\mu = mS.\,\nu\varphi\varphi^{-1} V.\,\lambda\mu = mS.\,\lambda\mu\nu$$
$$= S.\,\varphi'\lambda\;\varphi'\mu\;\varphi'\nu$$

of

$$m = \frac{S.\,\varphi'\lambda\;\varphi'\mu\;\varphi'\nu}{S.\,\lambda\mu\nu}.$$

Deze grootheid m is onafhankelijk van de bijzondere waarden van λ, μ, ν.

Vervangt men λ, μ, ν door drie nieuwe vectoren $\lambda' = p\lambda + q\mu + r\nu$, $\mu' = p_1\lambda + q_1\mu + r_1\nu$ en $\nu' = p_2\lambda + q_2\mu + r_2\nu$, dan is:

$$\varphi'\lambda' = p\varphi'\lambda + q\varphi'\mu + r\,\varphi'\nu$$
$$\varphi'\mu' = p_1\varphi'\lambda + q_1\varphi'\mu + r_1\varphi'\nu$$
$$\varphi'\nu' = p_2\varphi'\lambda + q_2\varphi'\mu + r_2\varphi'\nu,$$

waaruit men afleidt

$$S.\,\varphi'\lambda'\;\varphi'\mu'\;\varphi'\nu' = \begin{vmatrix} p & q & r \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix} S.\,\varphi'\lambda\;\varphi'\mu\;\varphi'\nu$$

en

$$S.\,\lambda'\mu'\nu' = \begin{vmatrix} p & q & r \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix} S.\,\lambda\mu\nu$$

zoodat de teller en de noemer van de breuk, die m uitdrukt, in dezelfde verhouding veranderd worden.

Verandert men φ in $\varphi + g$, in de vergelijking (5), waarin g een scalar is en noemt men m_g de waarde, die de constante door deze transformatie verkrijgt, dan is

$$m_g(\varphi+g)^{-1}V.\lambda\mu = V.(\varphi'+g)\lambda(\varphi'+g)\mu$$
$$= V.\varphi'\lambda\,\varphi'\mu + g\,V.(\varphi'\lambda\mu+\lambda\varphi'\mu)+g^2V.\lambda\mu$$

of

$$m_g(\varphi+g)^{-1}V.\lambda\mu=(m\varphi^{-1}+g\chi+g^2)\,V.\lambda\mu \quad . \quad . \quad (6)$$

wanneer men stelt $\chi\,V.\lambda\mu = V(\lambda\varphi'\mu+\varphi'\lambda\mu)$.

In de bovenstaande vergelijking is

$$m_g = \frac{S.(\varphi'+g)\lambda(\varphi'+g)\mu(\varphi'+g)\nu}{S.\lambda\mu\nu}$$

of $\qquad m_g = m + m_1 g + m_2 g^2 + g^3,$

waarin m_1 en m_2 twee nieuwe scalarconstanten, wier waarden zijn

$$m_1 = \frac{S(\lambda\varphi'\mu\varphi'\nu+\mu\varphi'\nu\varphi'\lambda+\nu\varphi'\lambda\varphi'\mu)}{S.\lambda\mu\nu}$$

$$m_2 = \frac{S(\lambda\mu\varphi'\nu+\mu\nu\varphi'\lambda+\nu\lambda\varphi'\mu)}{S.\lambda\mu\nu}.$$

Substitueert men in vergelijking (6) voor m_g zijne waarde, dan krijgt men de gelijkheid

$$(m+m_1g+m_2g^2+g^3)\,(\varphi+g)^{-1}\,V.\lambda\mu =$$
$$(m\varphi^{-1}+g\chi+g^2)\,V.\lambda\mu.$$

Na operatie met $\varphi+g$ is

$$(m+m_1g+m_2g^2+g^3)\,V.\lambda\mu=$$
$$\{m+g(\varphi\chi+m\varphi^{-1})+g^2(\varphi+\chi)+g^3\}\,V.\lambda\mu,$$

waaruit volgt

$$m_1 = \varphi\chi + m\varphi^{-1}$$
$$m_2 = \varphi+\chi.$$

De tweede symbolische gelijkheid geeft $\chi=m_2-\varphi$ en deze in de eerste gesubstitueerd, geeft de symbolische vergelijking

$$m\varphi^{-1} = m_1 - m_2\varphi + \varphi^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

Deze vergelijking bevat de volledige oplossing der lineaire vectorvergelijkingen.

§ 8, Voorbeelden van toepassing der methode van Hamilton.

1°. Zij $\qquad \varphi\varrho = V.\,\alpha\varrho\beta = \gamma$

dan is $\qquad \alpha\, S.\,\beta\varrho - \varrho\, S.\,\alpha\beta + \beta\, S.\,\alpha\varrho = \gamma = \varphi\varrho \qquad$ en

$$\beta\, S.\,\alpha\varrho - \varrho\, S.\,\alpha\beta + \alpha\, S.\,\beta\varrho = \varphi'\varrho = \varphi\varrho$$

$\varphi\varrho$ is dus eene zelfverwante functie. Kiest men $\lambda = \alpha$, $\mu = \beta$ en $\nu = \gamma$, dan is

$$\varphi'\lambda = \varphi\alpha = \alpha^2\beta\,,\ \varphi'\mu = \varphi\beta = \beta^2\alpha\,,\ \varphi'\nu = V.\,\alpha\gamma\beta.$$

Nu is

$$m = \frac{S\,(\alpha^2\beta\,.\,\beta^2\alpha\,.\,V.\,\alpha\gamma\beta)}{S.\,\alpha\beta\gamma} = \frac{\alpha^2\beta^2\,S\,(\beta\alpha\ V.\,\alpha\gamma\beta)}{S.\,\alpha\beta\gamma}.$$

Voor $V.\,\alpha\gamma\beta$ substitueerende $\alpha\, S.\,\beta\gamma - \gamma\, S.\,\alpha\beta + \beta\, S.\,\alpha\gamma$ vindt men $m = \alpha^2\beta^2\, S.\,\alpha\beta$.

Schrijft men evenzoo in

$$m_1 = \frac{1}{S.\alpha\,\beta\gamma}\, S(\alpha^2\beta\,.\,\alpha\beta^2\gamma + \alpha\,.\,\alpha\beta^2\, V.\,\alpha\gamma\beta + \alpha^2\beta\,.\,\beta\ V.\alpha\gamma\beta)$$

voor $V.\,\alpha\gamma\beta$ de bovengenoemde waarde, dan vindt men

$$m_1 = -\,\alpha^2\beta^2, \text{ daar } S\beta\, S.\alpha\gamma \text{ en } S\alpha\, S.\,\beta\gamma = 0.$$

Evenzoo is

$$m_2 = \frac{1}{S.\,\alpha\beta\gamma}\, S(\alpha^2\beta\,.\,\beta\,.\,\gamma + \alpha\,.\,\alpha\beta^2\,.\,\gamma + \alpha\beta\ V.\,\alpha\gamma\beta) = -\,S.\,\alpha\beta,$$

zoodat

$$\varrho = \frac{1}{\alpha^2\beta^2 S.\,\alpha\beta}\left\{-\,\alpha^2\beta^2\gamma + S.\,\alpha\beta.V.\,\alpha\gamma\beta + V.\alpha\,(V.\alpha\gamma\beta)\beta\right\}.$$

Voor het laatste vectorproduct kan men schrijven

$$\alpha\, S.\,(V.\,\alpha\gamma\beta)\,\beta - V.\,(\alpha\gamma\beta)\, S.\,\alpha\beta + \beta\, S.\,(V.\,\alpha\gamma\beta)\,\alpha$$

of

$$- V.(\alpha\gamma\beta)\, S.\,\alpha\beta + \alpha\, S.\,\alpha\beta\, S.\,\beta\gamma + \alpha\, S.\,\beta^2 S.\,\alpha\gamma - \alpha\, S.\,\beta\gamma\, S.\,\alpha\beta$$
$$+ \beta\, S.\,\alpha^2\, S.\,\beta\gamma + \beta\, S.\,\alpha\beta\, S.\,\alpha\gamma - \beta\, S.\,\alpha\gamma\, S.\,\alpha\beta,$$

zoodat

$$\varrho = \frac{\alpha^{-1}\, S.\,\alpha\gamma + \beta^{-1}\, S.\,\beta\gamma - \gamma}{S.\,\alpha\beta},$$

welke waarde van ϱ met de vroeger gevondene overeenkomt.

2^0. $$V.\alpha\varrho = \gamma = \varphi\varrho.$$

Stel $$\lambda = \alpha\,,\ \mu = \gamma \text{ en } \nu = \alpha\gamma.$$

Nu is $$\varphi'\varrho = V. - \alpha\varrho = V.\varrho\alpha\,,$$

zoodat $$m = \frac{S.\,\varphi'\alpha\varphi'\gamma\varphi'(\alpha\gamma)}{S.\,\alpha\gamma(\alpha\gamma)} = 0$$

$$m_1 = -\alpha^2, \quad m_2 = 0$$

en de vergelijking in φ wordt nu $\alpha^2\varphi - \varphi^3 = 0$.

Na operatie met φ^{-2} is

$$\varphi^{-1}\gamma = \frac{1}{\alpha^2}\,\varphi\gamma + \varphi^{-2}\,0$$

of $$\varrho = \frac{1}{\alpha^2}\,V.\alpha\gamma + \varphi^{-2}\,0.$$

Stelt men $\varphi^{-2}\,0 = \sigma$, dan volgt uit $\varphi^2\sigma = 0$

$$V(\alpha V.\,\alpha\sigma) = 0,$$

waaruit blijkt dat $V.\,\alpha\sigma = 0$ of $\sigma = x\alpha$, zoodat

$$\varrho = \alpha^{-1}(x + \gamma).$$

§ 9. De vraag kan gesteld worden, wanneer zullen de richtingen van ϱ en $\varphi\varrho$ samenvallen, of wat hetzelfde is, wanneer zal de operatie φ op een vector ϱ toegepast, diens richting niet veranderen. Alsdan moet $\varphi\varrho = z\varrho$ zijn of $V.\,\varrho\varphi\varrho = 0$, verder $\varphi^2\varrho = z^2\varrho$, $\varphi^3\varrho = z^3\varrho$.

Deze waarden gesubstitueerd in de vergelijking

$$(\varphi^3 - m_2\varphi^2 + m_1\varphi - m)\,\varrho = 0$$

geven de vergelijking

$$(z^3 - m_2 z^2 + m_1 z - m)\,\varrho = 0,$$

zoodat z een van de drie wortels s_1, s_2 en s_3 moet zijn van de derde-machtsvergelijking

$$s^3 - m_2 s^2 + m_1 s - m = 0$$

Onderstelt men, dat de drie wortels van deze vergelijking allen reëel zijn, en de drie richtingen worden aangeduid door ϱ_1, ϱ_2 en ϱ_3, dan moet noodzakelijk

$$(\varphi - s_1)\,\varrho_1 = 0,\ (\varphi - s_2)\,\varrho_2 = 0 \text{ en } (\varphi - s_3)\,\varrho_3 = 0.$$

Een willekeurige vector ϱ kan volgens deze drie richtingen, die *hoofdrichtingen* worden genoemd, worden ontbonden, zoodat

$$\varrho = x_1\varrho_1 + x_2\varrho_2 + x_3\varrho_3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

waarin de coefficienten x_1, x_2 en x_3 scalargrootheden zijn.

Opereert men hierop met $\varphi - s_1$, dan zal

$$(\varphi - s_1)\,\varrho = x_2\,(s_2 - s_1)\,\varrho_2 + x_3\,(s_3 - s_1)\,\varrho_3.$$

Dus doet de operatie $\varphi - s_1$ van een vector ϱ zijne composante evenwijdig aan ϱ_1 verliezen.

Nu met $\varphi - s_2$ opereerende, komt er

$$(\varphi - s_1)(\varphi - s_2)\,\varrho = x_3\,(s_3 - s_2)(s_3 - s_1)\,\varrho_3.$$

Evenzoo

$$(\varphi - s_1)(\varphi - s_3)\,\varrho = x_2\,(s_2 - s_1)(s_2 - s_3)\,\varrho_2$$
$$(\varphi - s_2)(\varphi - s_3)\,\varrho = x_1\,(s_1 - s_2)(s_1 - s_3)\,\varrho_1.$$

De uitdrukkingen

$(\varphi - s_1)(\varphi - s_2)\,\varrho$, $(\varphi - s_1)(\varphi - s_3)\,\varrho$ en $(\varphi - s_2)(\varphi - s_3)\,\varrho$ leveren dus de drie gezochte hoofdrichtingen op.

Zijn de twee wortels s_2 en s_3 gelijk, dan zal men na operatie met $\varphi - s_2$ op de vergelijking (8) hebben

$$(\varphi - s_2)\,\varrho = x_1\,(s_1 - s_2)\,\varrho_1$$

dus zal de richting ϱ_1 gegeven zijn door $(\varphi - s_2)\,\varrho$.

Opereert men integendeel met $\varphi - s_1$ op deze zelfde vergelijking (8), dan is

$$(\varphi - s_1)\,\varrho = (s_2 - s_1)(x_2\varrho_2 + x_3\varrho_3).$$

Dus is een willekeurige vector σ in het vlak $\varrho_2\varrho_3$, in richting gegeven door $(\varphi - s_1)\,\varrho$, wat ook ϱ zij.

Voor het geval alle drie wortels s_1, s_2 en s_3 gelijk zijn, krijgt men na operatie met $\varphi - s_1$ op de vergelijking

$$\varrho = x_1\varrho_1 + x_2\varrho_2 + x_3\varrho_3$$
$$(\varphi - s_1)\,\varrho = 0.$$

Elke vector in de ruimte is dan eene hoofdrichting.

In het geval, dat de drie wortels van de vergelijking

$$s^3 - m_2 s^2 + m_1 s - m = 0$$

allen bestaanbaar zijn en ongelijk, vormen de drie hoofdrichtingen ϱ_1, ϱ_2 en ϱ_3 een drievlakkigen hoek, dien wij hoofddrievlakkigen hoek kunnen noemen.

Daar $(\varphi - s_1)\varrho_1 = 0$, zal men ook hebben $S.\varrho(\varphi - s_1)\varrho_1 = 0$ en wegens de eigenschap der verwante functies ook

$$S.\varrho_1(\varphi' - s_1)\varrho = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Dus is elke vector van den vorm $(\varphi' - s_1)\varrho$ loodrecht op ϱ_1. Evenzoo is elke vector $(\varphi' - s_2)\varrho$ loodrecht op ϱ_2. Bijgevolg is de vector $(\varphi' - s_1)(\varphi' - s_2)\varrho$, waarvan men de richting ϱ_3' kan noemen, loodrecht op ϱ_1 en ϱ_2. Evenzoo zijn de richtingen

$$(\varphi' - s_1)(\varphi' - s_2)\varrho \text{ en } (\varphi' - s_2)(\varphi' - s_3)\varrho$$

of ϱ_2' en ϱ_1', respectievelijk loodrecht op de vlakken $\varrho_1\varrho_3$ en $\varrho_2\varrho_3$. De drievlakkige hoek, gevormd door ϱ_1', ϱ_2' en ϱ_3' is dus de drievlakkige poolhoek van den oorspronkelijken. Daarom heet hij ook verwante drievlakkenhoek.

Is de functie φ zelfverwant, dan zijn de drie wortels der vergelijking

$$s^3 - m_2 s^2 + m_1 s - m = 0$$

allen bestaanbaar.

Zij, om dit te bewijzen, $s_1 + t_1\sqrt{-1}$ een van de wortels en $\varrho_1 + \sigma_1\sqrt{-1}$ de waarde, die er uit voortvloeit voor den correspondeerenden vector, dan is

$$\varphi(\varrho_1 + \sigma_1\sqrt{-1}) = (s_1 + t_1\sqrt{-1})(\varrho_1 + \sigma_1\sqrt{-1}),$$

waaruit volgt

$$\varphi\varrho_1 = s_1\varrho_1 - t_1\sigma_1 \text{ en } \varphi\sigma_1 = s_1\sigma_1 + t_1\varrho_1.$$

Opereert men op deze vergelijkingen respectievelijk met $S.\sigma_1$ en $S.\varrho_1$ en trekt de leden van elkander af, dan is

$$t_1 (\varrho_1{}^2 + \sigma_1{}^2) = 0$$

waaruit volgt $t_1 = 0$ en de bestaanbaarheid van de drie wortels der vergelijking

$$s^3 - m_2 s^2 + m_1 s - m = 0$$

dus aangetoond is.

De vectoren der hoofdrichtingen ϱ_1, ϱ_2 en ϱ_3 moeten bij de verwante functies noodzakelijk bestaanbaar zijn.

De vergelijking (9) wordt hier $S.\varrho_1(\varphi - s_1)\varrho = 0$ wat ook ϱ zij. Uit deze formule blijkt, dat ϱ_1 loodrecht staat op het vlak van ϱ_2 en ϱ_3.

Evenzoo kan men aantoonen, dat ϱ_2 loodrecht staat op het vlak $\varrho_1\varrho_3$.

Is de functie φ zelfverwant, dan zijn derhalve de drie vlakke hoeken van den hoofddrievlakkenhoek allen recht.

HOOFDSTUK II.

Quaternion-vergelijkingen van den eersten en tweeden graad.

§ 10. *a*. QUATERNION-VERGELIJKINGEN VAN DEN EERSTEN GRAAD.

Hamilton heeft eene eenvoudige oplossing gegeven voor den volgenden vorm van lineaire quaternion-vergelijkingen

$$aq + qb = c,$$

waarin a, b en c gegeven quaternions zijn en het onbekend quaternion q moet bepaald worden.

Vermenigvuldigende achtereenvolgens *met* Ka en *door* b, heeft men

$$(Ta)^2 q + Ka.\,qb = Ka.\,c$$

en

$$aqb + qb^2 = cb$$

$$(Ta)^2 q + (Ka + a)qb + qb^2 = Ka.\,c + cb,$$

de factor q kan nu links gebracht worden in het 1ste lid

$$q\{(Ta)^2 + 2\,Sa.\,b + b^2\} = Ka.\,c + cb,$$

waaruit

$$q = \frac{Ka.\,c + cb}{(Ta)^2 + 2\,Sa.\,b + b^2}.$$

Iedere vergelijking van den vorm $a'qb' + c'qd' = e$ kan hiertoe herleid worden, door vermenigvuldiging *met* c'^{-1} en *door* b'^{-1}.

$$c'^{-1}a'q + qd'b'^{-1} = c'^{-1}eb'^{-1}$$

of $\quad c'^{-1}a' = A \quad d'b'^{-1} = B$ en $c'^{-1}eb'^{-1} = C$ stellende, heeft men de vergelijking tot den vorm $Aq + qB = C$ teruggebracht

De vergelijking $q^2 = aq + qb$, die schijnbaar van den tweeden graad is, geeft na vermenigvuldiging *met* q^{-1} en *door* q^{-1}.

$$1 = q^{-1}a + bq^{-1}$$

of $q^{-1} = r$ stellende,

$$br + ra = 1.$$

Dus is ook deze vergelijking tot eene lineaire quaternion-vergelijking van den vorigen vorm $aq + qb = c$ teruggebracht.

§ 11*b*. Quaternion-vergelijkingen van den tweeden graad.

De quaternion-vergelijking van den tweeden graad, zal in het algemeen voorgesteld kunnen worden door de vergelijking

$$\Sigma a_2 q a_1 q a + \Sigma b_1 q b = c,$$

waarin q het onbekende quaternion is.

Door daarin voor q zijne waarde $w + ix + jy + kz$ en de analoge waarden voor de gegeven quaternions te substitueeren, en de coefficienten der grootheden i, j, k, aan beide zijden gelijk te stellen, krijgt men vier nieuwe vergelijkingen tusschen de vier gezochte scalars w, x, y en z, en een aantal gegeven scalars, die in het algemeen van den tweeden graad zullen zijn.

Elimineert men x, y en z uit deze vier vergelijkingen, dan verkrijgt men volgens het theorema van Bezout (zie o. a. Serret, Algèbre supérieure) voor w in 't algemeen eene vergelijking van den zestienden graad; evenzoo zal men voor x, y en z vergelijkingen van den zestienden graad verkrijgen, zoodat men voor eene quadratische vergelijking in het algemeen zestien wortels (reëel of imaginair) kan verwachten.

§ 12. Eenvoudige oplossing van de bijzondere klasse $q^2 = qa + b$.

Van deze vergelijking kunnen, zooals later blijken zal, slechts zes wortels bepaald worden. Vervangt men q door zijne waarde $w + ix + jy + kz$, a en b door hunne overeenkomstige waarden

$$e + fi + gj + hk \text{ en } e' + f'i + g'j + h'k,$$

dan is

$$(w + ix + jy + kz)^2 = (w + ix + jy + kz)(e + fi + gj + hk) + e' + f'i + g'j + h'k.$$

Stelt men in beide leden dezer vergelijking de scalargedeelten en de coefficienten van i, j en k gelijk, dan vindt men de volgende vier betrekkingen tusschen de vier onbekende scalars w, x, y en z

$$\begin{aligned} w^2 - x^2 - y^2 - z^2 &= ew - fx - gy - hz + e' \\ 2wx &= fw + ex + hy - gz + f' \\ 2wy &= gw - hx + ey + fz + g' \\ 2wz &= hw + gx - fy + ez + h'. \end{aligned}$$

Nemen wij 1°. het bijzondere geval

$$a = fi,\ b = g'j,$$ dan is

$$(w + ix + jy + kz)^2 = (w + ix + jy + kz)fi + g'j,$$

$$w^2 - x^2 - y^2 - z^2 + 2wxi + 2wyj + 2wzk =$$
$$fwi - fx - fyk + fzj + g'j.$$

Na gelijkstelling der coefficienten van i, j en k en der beide scalargedeelten, volgt

$$\left\{ \begin{aligned} w^2 - x^2 - y^2 - z^2 &= -fx \\ 2wx &= fw \\ 2wy &= fz + g' \\ 2wz &= -fy. \end{aligned} \right.$$

Aan de 2de vergelijking kan voldaan worden door $w = 0$ en $x = \frac{f}{2}$.

In het eerste geval geeft de eerste vergelijking

$$x^2 - fx + \frac{g'^2}{f^2} = 0,$$

daar $y = 0$ en $z = -\frac{g'}{f}$.

Men vindt dus in dit geval voor q de waarden

$$q_1 = \frac{f}{2} + \sqrt{\left(\frac{f^2}{4} - \frac{g'^2}{f^2}\right)}\, i - \frac{g'}{f} k$$

$$q_2 = \frac{f}{2} - \sqrt{\left(\frac{f^2}{4} - \frac{g'^2}{f^2}\right)}\, i - \frac{g'}{f} k$$

die bestaanbaar zijn, wanneer $f^2 > 2g'$.

In het 2de geval geeft de eliminatie van z uit de twee laatste vergelijkingen, $y = \frac{2wg'}{f^2 + 4w^2}$, en deze waarde van y in de 4de vergelijking gesteld, $z = -\frac{fg'}{f^2 + 4w^2}$.

De waarden van x, y en z in de 1ste vergelijking gesubstitueerd geven

$$w^2 + \frac{f^2}{4} = \frac{(f^2 + 4w^2)g'^2}{(f^2 + 4w^2)^2},$$

waaruit volgt $f^2 + 4w^2 = \pm 2g'$

$$w_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2g' - f^2} \qquad w_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{2g' - f^2}$$

$$w_3 = \frac{1}{2}\sqrt{-2g' - f^2} \qquad w_4 = -\frac{1}{2}\sqrt{-2g' - f^2}$$

$$y \text{ is nu} = \frac{2wg'}{f^2 + 4w^2} = \frac{2wg'}{\pm 2g'},$$

zoodat

$$y_1 = w_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2g' - f^2}$$

$$y_2 = w_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{2g' - f^2}$$

$$y_3 = - w_3 = - \frac{1}{2} \sqrt{-2g' - f^2}$$

$$y_4 = - w_4 = \frac{1}{2} \sqrt{-2g' - f^2},$$

evenzoo is $\quad z_1 = - \frac{f}{2} \quad z_2 = - \frac{f}{2}$

$$z_3 = \frac{f}{2} \text{ en } z_4 = \frac{f}{2}.$$

De vergelijking $q^2 = qfi + g'j$ geeft dus de zes volgende wortels

$$q_1 = \left\{ \frac{f}{2} + \sqrt{\left(\frac{f^2}{4} - \frac{g'^2}{f^2} \right)} \right\} i - \frac{g'}{f} k$$

$$q_2 = \left\{ \frac{f}{2} - \sqrt{\left(\frac{f^2}{4} - \frac{g'^2}{f^2} \right)} \right\} i - \frac{g'}{f} k$$

$$q_3 = \frac{1}{2} \sqrt{2g' - f^2} + \frac{f}{2} i + \frac{1}{2} \sqrt{2g' - f^2} . j - \frac{f}{2} k$$

$$q_4 = - \frac{1}{2} \sqrt{2g' - f^2} + \frac{f}{2} i - \frac{1}{2} \sqrt{2g' - f^2} . j - \frac{f}{2} k$$

$$q_5 = \frac{1}{2} \sqrt{-2g' - f^2} + \frac{f}{2} i - \frac{1}{2} \sqrt{-2g' - f^2} . j + \frac{f}{2} k$$

$$q_6 = - \frac{1}{2} \sqrt{-2g' - f^2} + \frac{f}{2} i + \frac{1}{2} \sqrt{-2g' - f^2} . j + \frac{f}{2} k.$$

De vier laatste wortels kunnen nog eenvoudiger geschreven worden

$$q_3 = \frac{1}{2} \sqrt{2g' - f^2} \, (1 + j) + \frac{f}{2} (i - k)$$

$$q_4 = - \frac{1}{2} \sqrt{2g' - f^2} \, (1 + j) + \frac{f}{2} (i - k)$$

$$q_5 = \frac{1}{2} \sqrt{-2g' - f^2} \, (1 + j) + \frac{f}{2} (i + k)$$

$$q_6 = - \frac{1}{2} \sqrt{-2g' - f^2} \, (1 + j) + \frac{f}{2} (i + k)$$

Voorbeeld $\qquad q^2 = 5qi + 10j.$

Hier is $a = fi = 5i \qquad b = g'j = 10j.$
zoodat $f = 5$ en $g' = 10.$

Substitueert men deze waarden voor f en g', dan vindt men

$$q_1 = \left(\frac{5}{2} + \sqrt{\frac{25}{4} - 4}\right) i - 2k = 4i - 2k$$

$$q_2 = \left(\frac{5}{2} - \sqrt{\frac{25}{4} - 4}\right) i - 2k = i - 2k$$

$$q_3 = \frac{1}{2}\sqrt{-5}\,(1 + j) + \frac{5}{2}\,(i - k)$$

$$q_4 = -\frac{1}{2}\sqrt{-5}\,(1 + j) + \frac{5}{2}\,(i - k)$$

$$q_5 = \frac{3}{2}\sqrt{-5}\,(1 + j) + \frac{5}{2}\,(i + k)$$

$$q_6 = -\frac{3}{2}\sqrt{-5}\,(1 + j) + \frac{5}{2}(i + k).$$

Andere voorbeelden.

Ongelijke wortels.

$q^2 = 10qi + 30j \quad q_1 = 9i - 3k,\ q_2 = i - 3k$
$q^2 = 10qi + 40j \quad q_1 = 8i - 4k,\ q_2 = 2i - 4k$
$q^2 = 25qi + 300j \quad q_1 = 16i - 12k,\ q_2 = 9i - 12k$
$q^2 = 13qi + 78j \quad q_1 = 9i - 6k,\ q_2 = 4i - 6k$

Gelijke wortels.

$q^2 = 2qi + 2j \quad q_1 = q_2 = i - k$
$q^2 = 4qi + 8j \quad q_1 = q_2 = 2\,(i - k)$
$q^2 = 6qi + 18j \quad q_1 = q_2 = 3\,(i - k)$
$q^2 = 8qi + 32j \quad q_1 = q_2 = 4\,(i - k).$

In het algemeen zal de vergelijking

$$q^2 = 2nqi + 2n^2 j$$

tot reëele wortels hebben $q_1 = q_2 = n\,(i - k)$.

2^0. $\qquad q^2 = qe + e'$

waarin e en e' geen quaternions, maar scalars zijn.

In dit bijzondere geval derzelfde klasse

$$q^2 = qa + b \text{ is } a = e \text{ en } b = e'.$$

De vier betrekkingen tusschen de onbekende scalars w, x, y en z worden nu

$$w^2 - x^2 - y^2 - z^2 = ew + e'$$
$$2wx = ex$$
$$2wy = ey$$
$$2wz = ez.$$

Is $x = 0$, $y = 0$ en $z = 0$, dan geeft de vergelijking $w^2 - ew - e' = 0$ de twee wortels

$$w_1 = \frac{e}{2} + \sqrt{\frac{e^2}{4} + e'} \text{ en } w_2 = \frac{e}{2} - \sqrt{\frac{e^2}{4} + e'}.$$

zoodat

$$q_1 = \frac{e}{2} + \sqrt{\frac{e^2}{4} + e'} \text{ en } q_2 = \frac{e}{2} - \sqrt{\frac{e^2}{4} + e'}.$$

Is $w = \frac{e}{2}$, dan is $\frac{e^2}{4} - x^2 - y^2 - z^2 = \frac{e^2}{2} + e'$

$$x^2 + y^2 + z^2 + \frac{e^2}{4} + e' = 0.$$

In dit geval is het vraagstuk onbepaald. Van het *vectorgedeelte* wordt alleen de lengte $= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, niet de ligging bepaald, zoodat elk quaternion van den vorm

$$q = \frac{e}{2} \pm \sqrt{-\frac{e^2}{4} - e'} \,.\, l,$$

waarin l een willekeurige eenheidsvector is, aan de vergelijking $q^2 = eq + e'$ voldoet.

Het aantal wortels dezer vergelijking is derhalve oneindig groot.

3^0. $$q^2 = qe + fi.$$

Substitueert men hierin voor q zijne waarde

$$w + ix + jy + kz,$$ dan is

$$w^2 - x^2 - y^2 - z^2 + 2wxi + 2wyj + 2wzk =$$
$$(w + ix + jy + kz)\, e + fi.$$

Hieruit leidt men de vier volgende vergelijkingen af

$$w^2 - x^2 - y^2 - z^2 = ew$$
$$2wx = xe + f$$
$$2wy = ye$$
$$2wz = ze.$$

Het is noodzakelijk, dat $y = 0$ en $z = 0$.

Substitueert men toch in de 2de vergelijking voor w de waarde $\frac{e}{2}$, dan zou men tot resultaat krijgen $f = 0$.

Uit de vergelijkingen

$$w^2 - x^2 = ew \text{ en } 2wx = xe + f,$$

kan men nu gemakkelijk x elimineeren, men krijgt dan de volgende vergelijking in w

$$w^2 - \frac{f^2}{(2w - e)^2} = ew$$

of $$4w^4 - 8w^3e + 5w^2e^2 - we^3 - f^2 = 0.$$

Voorbeeld. Zij gegeven de vergelijking

$$q^2 = -q + 3\sqrt{2} \,.\, i$$

dan is $$e = -1 \qquad f = 3\sqrt{2}.$$

De vierde-machtsvergelijking in w wordt nu

$$4w^4 + 8w^3 + 5w^2 + w - 18 = 0.$$

Hieraan voldoet $w = 1$,

dan is $$x = \frac{f}{2w - e} = \frac{3\sqrt{2}}{2 + 1} = \sqrt{2}.$$

$q = 1 + \sqrt{2} \,.\, i$ is dus eene oplossing.

Ook $w = -2$ voldoet aan de vierde-machtsvergelijking. De daarmede overeenkomende waarde van x is $-\sqrt{2}$, zoodat ook $q = -2 - \sqrt{2} \,.\, i$ voldoet.

4⁰. $$q^2 = qfi + gi.$$

$$w^2 - x^2 - y^2 - z^2 + 2wxi + 2wyj + 2wzk =$$
$$(w + ix + jy + kz)fi + gi.$$

Hieruit volgt:

$$w^2 - x^2 - y^2 - z^2 = -fx$$

$$2wx = fw + g$$
$$2wy = fz$$
$$2wz = -fy.$$

Na eliminatie van w, y en z vindt men de volgende vergelijking in x

$$\frac{g^2}{(2x-f)^2} - x^2 + xf = 0$$

of

$$g^2 - (4x^2 - 4xf + f^2)\,x^2 + (4x^2 - 4xf + f^2)\,xf = 0$$
$$g^2 - 5x^2f^2 - 4x^4 + 8x^3f + xf^3 = 0.$$

De waarde van w vindt men dan uit de 2^{de} vergelijking.

Voorbeeld. $q^2 = -2qi + 4\sqrt{3}\,.\,i.$

Hier is $g = 4\sqrt{3}$ en $f = -2.$

De vergelijking in x wordt dan

$$48 - 20x^2 - 4x^4 - 16x^3 - 8x = 0$$ of

$$x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x - 12 = 0$$

$x_1 = 1$ en $x_2 = -3$ zijn wortels dezer vergelijking.

Men vindt dan

$$w_1 = \frac{g}{2x_1 - f} = \frac{4\sqrt{3}}{2+2} = \sqrt{3}$$

$$w_2 = \frac{4\sqrt{3}}{-6+2} = -\sqrt{3}.$$

$$q_1 = \sqrt{3} + i \text{ en } q_2 = -\sqrt{3} - 3i$$

zijn dus oplossingen van de vergelijking

$$q^2 = -2qi + 4\sqrt{3}\,.\,i.$$

De twee andere wortels dezer vierde-machtsvergelijking zijn imaginair.

5°, $q^2 = qfi + e.$

Substitueert men hierin voor q zijne waarde

$$w + ix + jy + kz,$$ dan is

$$w^2 - x^2 - y^2 - z^2 + 2wxi + 2wyj + 2wzk =$$
$$(w + ix + jy + kz)\,fi + e.$$

Deze laat zich weer in de vier volgende vergelijkingen splitsen

$$w^2 - x^2 - y^2 - z^2 = -fx + e$$
$$2wx = wf$$
$$2wy = zf$$
$$2wz = -yf.$$

In dit geval is het even als in het voorgaande noodzakelijk dat $y = 0$ en $z = 0$.

Elimineert men nu x uit de twee eerste vergelijkingen, dan krijgt men de volgende vergelijking in w

$$w^2(4w^2 + f^2 - 4e) = 0.$$

Hieraan voldoen

$$w_1 = 0, \; w_2 = 0, \; w_3 = \sqrt{e - \frac{f^2}{4}}, \; w_4 = -\sqrt{e - \frac{f^2}{4}}$$

en daarmede correspondeeren de volgende waarden van x

$$x_1 = \frac{f}{2} + \sqrt{\frac{f^2}{4} - e}, \; x_2 = \frac{f}{2} - \sqrt{\frac{f^2}{4} - e}, \; x_3 = \frac{f}{2}, \; x_4 = \frac{f}{2}$$

zoodat de vergelijking $q^2 = qfi + e$ de vier volgende wortels heeft

$$q_1 = \left\{\frac{f}{2} + \sqrt{\frac{f^2}{4} - e}\right\} i$$
$$q_2 = \left\{\frac{f}{2} - \sqrt{\frac{f^2}{4} - e}\right\} i$$
$$q_3 = \sqrt{e - \frac{f^2}{4}} + \frac{f}{2} i \qquad q_4 = -\sqrt{e - \frac{f^2}{4}} + \frac{f}{2} i.$$

Voorbeeeld. $q^2 = 4qi + 3.$

Hier is $f = 4$ en $e = 3$

zoodat
$$q_1 = (2 + 1)\, i = 3i$$
$$q_2 = (2 - 1)\, i = i$$
$$q_3 = \sqrt{-1} + 2i$$
$$q_4 = -\sqrt{-1} + 2i.$$

Is $e = \frac{f^2}{4}$ dan zijn alle vier wortels gelijk.

Men heeft dan

$$q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = \frac{f}{2} i.$$

Voorbeeld. $\quad q^2 = 2qi + 1.$

Hier is $\quad q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = i.$

§ 13. ALGEMEENE OPLOSSING DER VERGELIJKING $q^2 = qa + b$. METHODE VAN HAMILTON.

Schrijven wij $q = \frac{1}{2}(a + w + \varrho)$, zoodat w en ϱ scalar- en vector-gedeelte zijn van het quaternion $2q - a$.

De vergelijking wordt nu

$$a^2 + (w + \varrho)^2 + 2aw + a\varrho + \varrho a = 2a^2 + 2aw + 2\varrho a + 4b$$

of $$(w + \varrho)^2 + a\varrho - \varrho a = a^2 + 4b.$$

Stel

$$Va = \alpha, \quad S(a^2 + 4b) = c \quad V(a^2 + 4b) = 2\gamma$$

dan is $$(w + \varrho)^2 - \varrho\alpha + \alpha\varrho = c + 2\gamma$$

$$w^2 + \varrho^2 + 2w\varrho + 2V.\alpha\varrho = c + 2\gamma.$$

Stelt men in deze vergelijking de scalar- en vector-gedeelten aan elkander gelijk, dan geeft zij aanleiding tot twee nieuwe vergelijkingen

$$w^2 + \varrho^2 = c \text{ en } V.(w + \alpha)\varrho = \gamma.$$

Uit deze twee vergelijkingen moet ϱ worden geelimineerd. Daartoe opereert men op de 2de vergelijking met $S.\alpha$

$$S.\alpha(w + \alpha)\varrho = S.\alpha w\varrho = S.\alpha w\varrho + S.w^2\varrho =$$
$$wS.(w + \alpha)\varrho = S.\alpha\gamma$$

$$(w + \alpha)\varrho = \gamma + \frac{1}{w} S.\alpha\gamma$$

$$w(w + \alpha)\varrho = w\gamma + S.\alpha\gamma$$

$$w\alpha\varrho + w^2\varrho = S.\alpha\gamma + w\gamma.$$

Neemt men van beide leden de tensors, dan geven hunne vierkanten

$$\{T(w\alpha\varrho + w^2\varrho)\}^2 = \{T(S.\alpha\gamma + w\gamma)\}^2.$$

Met toepassing der formule

$$(Tq)^2 = (Sq)^2 - (Vq)^2$$

is
$$w^2\alpha^2\varrho^2 - w^4\varrho^2 = (S.\,\alpha\gamma)^2 - w^2\gamma^2.$$

Substitueert men vóor ϱ^2 zijne waarde $c - w^2$, dan is

$$w^2\{(w^2 - \alpha^2)(w^2 - c) + \gamma^2\} = (S.\,\alpha\gamma)^2$$

$$f(w^2) = w^2\{w^4 - (c + \alpha^2)w^2 + c\alpha^2 + \gamma^2\} - (S.\alpha\gamma)^2 = 0.$$

Deze vergelijking geeft zes wortels voor w.

De correspondeerende waarden van ϱ vindt men uit de vergelijking

$$\varrho = \frac{w\gamma + S.\,\alpha\gamma}{w(w+\alpha)} = \frac{w\gamma(w-\alpha) + S.\,\alpha\gamma(w-\alpha)}{w(w^2-\alpha^2)} =$$

$$\frac{w(-\gamma\alpha + S.\,\alpha\gamma) + w^2\gamma - \alpha\, S.\,\alpha\gamma}{w(w^2-\alpha^2)} =$$

$$\frac{V.\,\gamma\alpha}{w^2-\alpha^2} + \frac{w^2\gamma - \alpha\, S.\,\alpha\gamma}{w(w^2-\alpha^2)}$$

q is dus

$$= \frac{a}{2} + \frac{V.\,\gamma\alpha}{2(w^2-\alpha^2)} + \frac{w}{2}\left(1 + \frac{\gamma - w^{-2}\alpha\, S.\,\alpha\gamma}{w^2-\alpha^2}\right)$$

waarin w een van de wortels der zesde-machtsvergelijking is. Deze kan ook geschreven worden

$$(w^2-\alpha^2)(w^2-c)w^2 + w^2\gamma^2 - \alpha^2\gamma^2 - (V.\alpha\gamma)^2 = 0$$

of

$$(w^2-\alpha^2)(w^4 - cw^2 + \gamma^2) - (V.\,\alpha\gamma)^2 = 0.$$

De gewone vierkantsvergelijking $x^2 - cx + \gamma^2 = 0$, waarin $\gamma^2 = -(T\gamma)^2 < 0$ heeft twee reëele wortels, één positief en één negatief, g^2 en $-h^2$. Dus wanneer $T\alpha = l$, $TV.\,\gamma\alpha = m$ is

$$f(x) = (x - g^2)(x + h^2)(x + l^2) + m^2.$$

Nu is

$$f(0) = -(S.\,\alpha\gamma)^2 < 0 \text{ en } f(g^2) = f(-h^2) = f(-l^2) = m^2 > 0.$$

Daar $f(-\infty) = -\infty$ is het duidelijk, dat de derde-machtsvergelijking $f(x) = 0$ in het algemeen drie reëele en ongelijke wortels heeft, namelijk een wortel x_1, die positief is en $< g^2$, een anderen x_2, die negatief is en algebraïsch grooter dan ieder van de twee negatieve getallen $-h^2$ en $-l^2$ en een derden x_3, ook negatief en algebraïsch kleiner dan elk van deze twee getallen.

De algebraïsche vergelijking van den zesden graad in w heeft daarom twee reëele en vier imaginaire wortels $(\pm\sqrt{x_1}, \pm\sqrt{x_2}, \pm\sqrt{x_3})$, met elk waarvan éénе bepaalde waarde van ϱ overeenkomt en dus ook éénе bepaalde waarde van q.

Er geven dus van de zes wortels der quadratische quaternion-vergelijking slechts twee aanleiding tot reëele quaternions, terwijl de andere vier wortels imaginaire quaternions opleveren.

§ 14. Voor het geval α en γ loodrecht op elkaar staan is $S.\alpha\gamma = 0$ en een van de wortels der derdemachtsvergelijking $f(x) = 0$ verdwijnt, derhalve blijven twee wortels van de vergelijking in w^2.

Om in dit geval de correspondeerende waarden van ϱ te vinden, moet men terugkeeren tot de twee oorspronkelijke vergelijkingen

$$w^2 + \varrho^2 = c \text{ en } V.(w + \alpha)\varrho = \gamma$$

en daarin $w = 0$ stellen, zoodat $\varrho^2 = c$ en $V.\alpha\varrho = \gamma$.

Nu is

$$c(T\alpha)^2 = -\alpha^2 c = -\alpha^2\varrho^2 = -(T.\alpha\varrho)^2 = -(S.\alpha\varrho)^2 + (V.\alpha\varrho)^2$$

$$(S.\alpha\varrho)^2 = \gamma^2 - c(T\alpha)^2 = \gamma^2 + \alpha^2 c$$

$$S.\alpha\varrho = t_1 = +(\gamma^2 + \alpha^2 c)^{\frac{1}{2}} \quad S.\alpha\varrho = t_2 = -(\gamma^2 + \alpha^2 c)^{\frac{1}{2}}$$

$$\alpha\varrho_1 = \gamma + t \qquad \alpha\varrho_2 = \gamma - t$$

zoodat men vindt

$$\varrho_1 = \alpha^{-1}\gamma + \alpha^{-1}t \qquad \varrho_2 = \alpha^{-1}\gamma - \alpha^{-1}t$$

$$q_1 = \frac{1}{2} a + \frac{1}{2} \alpha^{-1} \gamma + \frac{1}{2} \alpha^{-1} t$$

$$q_2 = \frac{1}{2} a + \frac{1}{2} \alpha^{-1} \gamma - \frac{1}{2} \alpha^{-1} t.$$

Is nu t reëel en van o verschillende, zoodat

$$t^2 = c\alpha^2 + \gamma^2 > 0.$$

$$c < -(T.\alpha^{-1}\gamma)^2 \qquad -c > (T.\alpha^{-1}\gamma)^2$$

dan zijn c en $c + \alpha^2$ negatieve scalars en de vergelijking $x^2 - (c + \alpha^2) x + t^2 = 0$ heeft twee reëele en negatieve wortels; dus vindt men vier imaginaire waarden van w uit de vergelijking $w^4 - (c + \alpha^2) w^2 + t^2 = 0$.

Zijn de twee wortels van de vergelijking in x

$$x_2 = -u^2 \text{ en } x_3 = -v^2$$

waarin u en v reëel zijn, zoodat $u^2 + v^2 = -(c + \alpha^2)$ en $uv = t$, dan zijn de wortels der vierde-machtsvergelijking in w

$$w_3 = u\sqrt{-1}\,,\; w_4 = -u\sqrt{-1}\,,\; w_5 = v\sqrt{-1}\,,$$
$$w_6 = -v\sqrt{-1}$$

waarin $\sqrt{-1}$ een imaginaire scalar is.

Voor het geval dat t reëel is, geven de vier gevondene waarden voor w, de volgende imaginaire waarden voor q,

$$q_3 = q'_3 + \sqrt{-1}\,.\,q''_3 \qquad q_4 = q'_3 - \sqrt{-1}\,.\,q''_3$$
$$q_5 = q'_5 + \sqrt{-1}\,.\,q''_5 \qquad q_6 = q'_5 - \sqrt{-1}\,.\,q''_5$$

waarin q'_3, q''_3, q'_5, q''_5, vier reëele quaternions zijn, namelijk

$$q'_3 = \frac{a}{2} + \frac{\alpha\gamma}{2(u^2 + \alpha^2)} \qquad q''_3 = \frac{u}{2}\left(1 - \frac{\gamma}{u^2 + \alpha^2}\right)$$

$$q'_5 = \frac{a}{2} + \frac{\alpha\gamma}{2(v^2 + \alpha^2)} \qquad q''_5 = \frac{v}{2}\left(1 - \frac{\gamma}{v^2 + \alpha^2}\right).$$

Is $t^2 = c^2\alpha^2 + \gamma^2 < 0$, dan is t een imaginaire scalar van den vorm $t'\sqrt{-1}$, waarin t' reëel is; de twee uitdrukkingen voor q_1 en q_2 worden dan imaginaire quaternions.

De vergelijking $x^2 - (c + \alpha^2)x + c\alpha^2 + \gamma^2 = 0$ heeft nu een positieven en een negatieven wortel. In dit geval zijn de zes wortels van de quadratische vergelijking $q^2 = qa + b$

$$q_1 = q'_1 + \sqrt{-1} \,.\, q''_1 \qquad q_2 = q'_1 - \sqrt{-1} \,.\, q''_1$$

$$q_3 = q'_3 + \sqrt{-1} \,.\, q''_3 \qquad q_4 = q'_3 - \sqrt{-1} \,.\, q''_3$$

$$q_5 = q'_5 + q'_6 \qquad q_6 = q'_5 - q'_6$$

waarin q'_1, q''_1, q'_3, q''_3, q'_5, q'_6 zes reëele quaternions zijn met de volgende waarden

$$q'_1 = \frac{1}{2}(a + \alpha^{-1}\gamma) \qquad q''_1 = \frac{1}{2}\alpha^{-1}t'$$

$$q'_3 = \frac{a}{2} + \frac{\alpha\gamma}{2(u^2 + \alpha^2)} \qquad q''_3 = \frac{u}{2}\left(1 - \frac{\gamma}{u^2 + \alpha^2}\right)$$

$$q'_5 = \frac{a}{2} + \frac{\alpha\gamma}{2(\alpha^2 - v^2)} \qquad q'_6 = \frac{v}{2}\left(1 + \frac{\gamma}{v^2 - \alpha^2}\right)$$

§ 15. VOORBEELDEN.

1°. $$q^2 = 5qi + 10j.$$

Hier is $\alpha = 5i$, $S(-25 + 40j) = c = -25$

$$V(-25 + 40j) = 2\gamma, \quad \gamma = 20j, \quad S.\alpha\gamma = 0.$$

De zesde-machtsvergelijking in w wordt nu

$$w^2(w^4 + 50w^2 + 225) = 0.$$

De vergelijking $w^4 + 50w^2 + 225 = 0$ heeft tot wortels $w^2 = -25 \pm 20$, zoodat men voor de zes wortels der zesde-machtsvergelijking vindt,

$$w_1 = 0, \; w_2 = 0, \; w_3 = \sqrt{-5}, \; w_4 = -\sqrt{-5},$$

$$w_5 = 3\sqrt{-5}, \; w_6 = -3\sqrt{-5}.$$

Nu is

$$q_1 = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\alpha^{-1}\gamma + \frac{1}{2}\alpha^{-1}t = \frac{5}{2}i - 2k + \frac{3}{2}i$$

$$q_2 = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\alpha^{-1}\gamma - \frac{1}{2}\alpha^{-1}t = \frac{5}{2}i - 2k - \frac{3}{2}i$$

zoodat $$q_1 = 4i - 2k$$
en $$q_2 = i - 2k$$

$$\frac{V.\gamma\alpha}{2(w^2 - \alpha^2)} = -\frac{100k}{40} = -\frac{5}{2}k \text{ voor } w_3 \text{ en } w_4$$

$$\frac{V.\gamma\alpha}{2(w^2 - \alpha^2)} = +\frac{100k}{40} = \frac{5}{2}k \text{ voor } w_5 \text{ en } w_6,$$

zoodat
$$q_3 = \frac{5}{2}(i - k) + \frac{\sqrt{-5}}{2}(1 + j)$$
$$q_4 = \frac{5}{2}(i - k) - \frac{\sqrt{-5}}{2}(1 + j)$$
$$q_5 = \frac{5}{2}(i + k) + \frac{3\sqrt{-5}}{2}(1 - j)$$
$$q_6 = \frac{5}{2}(i + k) - \frac{3\sqrt{-5}}{2}(1 - j)$$

2^0. $$q^2 = qe + e',$$
waarin e en e' scalars zijn.

Hier is $Va = 0, \quad \gamma = 0, \quad c = e^2 + 4e'$.

De twee oorspronkelijke vergelijkingen
$$w^2 + \varrho^2 = c \text{ en } V.(w + \alpha)\varrho = \gamma$$
worden in dit geval
$$w^2 + \varrho^2 = 4e' + e^2 \text{ en } V.w\varrho = 0.$$

Hieraan kan voldaan worden door
$$w = \pm\sqrt{4e' + e^2}, \qquad \varrho = 0$$
en $$\varrho = \pm\sqrt{4e' + e^2}, \qquad w = 0$$
zoodat men voor oplossingen vindt
$$q_{12} = \tfrac{1}{2}(e \pm \sqrt{4e' + e^2})$$
$$q_{34} = \tfrac{1}{2}\{e \pm \sqrt{-(4e' + e^2)}\eta)\}$$
waarin η een willekeurige eenheidsvector is. Het aantal oplossingen is dus oneindig groot.

Is $c = 4e' + e^2 > 0$, dan is q_{12} bestaanbaar.

Is $c = 4e' + e^2 < 0$, dan is q_{34} bestaanbaar.

3^0. $$q^2 = 2q + i.$$

Hier is $\quad Va = \alpha = 0, \quad c = 4, \quad \gamma = 2i.$

De twee oorspronkelijke vergelijkingen worden hier

$$w^2 + \varrho^2 = 4 \text{ en } w\varrho = 2i.$$

Elimineert men hieruit ϱ, dan krijgt men de volgende vergelijking in w

$$w^4 - 4w^2 - 4 = 0$$

$$w_1 = \sqrt{2 + 2\sqrt{2}}, \; w_2 = -\sqrt{2 + 2\sqrt{2}}$$

$$w_3 = \sqrt{2 - 2\sqrt{2}}, \; w_4 = -\sqrt{2 - 2\sqrt{2}}.$$

Substitueert men w_1 en w_2 in

$$q = \frac{a}{2} + \frac{V.\gamma\alpha}{2(w^2 - \alpha^2)} + \frac{w}{2}\left(1 + \frac{\gamma - w^{-2}\alpha S.\alpha\gamma}{w^2 - \alpha^2}\right)$$

dan vindt men, daar $\frac{1}{2}\sqrt{2 + 2\sqrt{2}} = 1{,}098$

$$q_1 = 2{,}098 + 0{,}455 \cdot i$$

$$q_2 = -0{,}098 - 0{,}455 \cdot i$$

w_3 en w_4 zijn imaginair, zoodat deze aanleiding geven tot twee onbestaanbare wortels.

4^0. $\qquad q^2 = \frac{3}{4}qi + \frac{5}{8}i$

Hier is $\qquad \alpha = \frac{3}{4}i \quad \gamma = \frac{5}{4}i.$

De twee oorspronkelijke vergelijkingen

$$w^2 + \varrho^2 = c \text{ en } V.(w + \alpha)\varrho = \gamma$$

worden in dit geval

$$w^2 + \varrho^2 = -\frac{9}{16} \text{ en } w\varrho = \frac{5}{4}i,$$

daar hier de richting van ϱ met die van α moet samenvallen, zoodat $V.\alpha\varrho = 0$.

Men kan nu uit deze twee vergelijkingen ϱ elimineeren; men krijgt dan de volgende vergelijking in w.

$$w^4 + \frac{9}{16}w^2 - \frac{25}{16} = 0,$$

Men vindt hieruit de volgende waarden voor w,

$$w_1 = +1,\ w_2 = -1,\ w_3 = \frac{5}{4}\sqrt{-1},\ w_4 = -\frac{5}{4}\sqrt{-1}.$$

Daarmede correspondeeren de volgende waarden van ϱ

$$\varrho_1 = \frac{5}{4}i, \qquad \varrho_2 = -\frac{5}{4}i$$

$$\varrho_3 = -i\sqrt{1},\ \varrho_4 = i\sqrt{-1},$$

zoodat men de vier volgende oplossingen vindt

$$q_1 = \frac{3}{8}i + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{5}{4}i\right) = \frac{1}{2}(1 + 2i)$$

$$q_2 = \frac{3}{8}i + \frac{1}{2}\left(-1 - \frac{5}{4}i\right) = -\frac{1}{4}(2 + i)$$

$$q_3 = \frac{3}{8}i + \frac{5}{8}\sqrt{-1} - \frac{1}{2}i\sqrt{-1} = \frac{5}{8}\sqrt{-1} + \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{2}\sqrt{1}\right)i$$

$$q_4 = \frac{3}{8}i - \frac{5}{8}\sqrt{-1} + \frac{1}{2}i\sqrt{-1} = -\frac{5}{8}\sqrt{-1} + \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{2}\sqrt{-1}\right)i.$$

HOOFDSTUK III.

Quaternionvergelijkingen van den derden graad.

§ 16. Substitueert men in de quaternionvergelijking van den derden graad, voor q, het onbekende quaternion, $w + ix + jy + kz$ en analoge waarden voor de gegeven quaternions, dan zal de quaternionvergelijking aanleiding geven tot vier nieuwe derde-machtsvergelijkingen, waaruit men drie van de vier onbekenden w, x, y en z kan elimineeren.

Volgens het theorema van Bezout zal men dus voor w in het algemeen eene vergelijking kunnen verwachten van den 3^4 of een en tachtigsten graad.

§ 17. Behandeling van de quaternionvergelijking $q^3 = qa + b$.

Substitueert men voor q zijne waarde $w + ix + jy + kz$ en voor de gegeven quaternions a en b de waarden

$$e + fi + gj + hk \text{ en } e' + f'i + g'j + h'k$$

dan verandert de vergelijking in

$$w(w^2 - 3x^2 - 3y^2 - 3z^2) + x(3w^2 - x^2 - y^2 - z^2)i +$$
$$y(3w^2 - x^2 - y^2 - z^2)j + z(3w^2 - x^2 - y^2 - z^2)k =$$
$$(w + ix + jy + kz)(e + fi + gj + hk) + e' + f'i + g'j + h'k.$$

Deze laat zich splitsen in de vier volgende vergelijkingen

$$w(w^2 - 3x^2 - 3y^2 - 3z^2) = ew - fx - gy - zh + e'$$
$$x(3w^2 - x^2 - y^2 - z^2) = wf + xe - zg + yh + f'$$
$$y(3w^2 - x^2 - y^2 - z^2) = wg + ye - xh + zf + g'$$
$$z(3w^2 - x^2 - y^2 - z^2) = wh + ze + xg - yf + h'$$

Bijzondere gevallen.

1°. Zij gegeven de vergelijking

$$q^3 = qe + e'$$

dan worden de vier bovenstaande vergelijkingen

$$w(w^2 - 3x^2 - 3y^2 - 3z^2) = ew + e'$$
$$x(3w^2 - x^2 - y^2 - z^2) = xe$$
$$y(3w^2 - x^2 - y^2 - z^2) = ye$$
$$z(3w^2 - x^2 - y^2 - z^2) = ze.$$

Stelt men $x = y = z = 0$, dan wordt w bepaald door de volgende vergelijking

$$w^3 - ew - e' = 0.$$

Stelt men $3w^2 - x^2 - y^2 - z^2 = e$, dan heeft men ter bepaling van w de vergelijking

$$w(w^2 - 9w^2 + 3e - e) = e'$$

of
$$8w^3 - 2ew + e' = 0.$$

Voorbeeld. Zij gegeven de vergelijking

$$q^3 = -q - 10.$$

dan is $e = -1$ en $e' = -10.$

De eerste derde-machtsvergelijking wordt nu

$$w^3 + w + 10 = 0$$

zoodat aan de gegeven vergelijking voldaan wordt door

$$q_1 = -2$$
$$q_2 = 1 + \sqrt{-4}$$
$$q_3 = 1 - \sqrt{-4}.$$

De tweede derde-machtsvergelijking wordt nu

$$8w^3 + 2w - 10 = 0.$$

Hieraan wordt voldaan door $w = 1$.

De beide andere wortels zijn imaginair. x, y en z kunnen in dit geval niet afzonderlijk worden bepaald.

Men heeft $\quad x^2 + y^2 + z^2 = 3w^2 - e = 4$,

zoodat $\quad \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \pm 2$

en dus elk quaternion van den vorm

$$q = 1 \pm 2l,$$

waarin l een willekeurige eenheidsvector is, aan de gegeven vergelijking voldoet.

Zoo zullen o. a. voldoen

$$q = 1 + 2i \qquad q = 1 - 2i$$
$$q = 1 + 2j \qquad q = 1 - 2j$$
$$q = 1 + 2k \qquad q = 1 - 2k.$$

Het aantal wortels is dus oneindig groot.

2^0. $\quad q^3 = fi.$

De vier vergelijkingen worden in dit geval

$$w(w^2 - 3x^2 - 3y^2 - 3z^2) = 0$$
$$x(3w^2 - x^2 - y^2 - z^2) = f$$
$$y(3w^2 - x^2 - y^2 - z^2) = 0$$
$$z(3w^2 - x^2 - y^2 - z^2) = 0.$$

Uit de 2^{de} vergelijking blijkt, dat $3w^2 - x^2 - y^2 - z^2$ niet gelijk nul zijn kan, zoodat men in de derde en vierde vergelijking noodzakelijk y en z nul moet stellen.

Men kan dan w en x uit de vergelijkingen

$$w(w^2 - 3x^2) = 0$$
$$x(3w^2 - x^2) = f$$

en oplossen. Zij $w^2 = 3x^2$, dan is $x(9x^2 - x^2) = f$ of $8x^3 = f$. Uit de vergelijking $w^2 - 3x^2 = 0$ kan dan w bepaald worden.

Is $w = 0$, dan is $x^3 = -f$.

Voorbeeld. $\quad q^3 = 24\sqrt{3} \cdot i.$

Hier is $\quad 8x^3 = f = 24\sqrt{3}$

en dus $\quad x^3 = 3\sqrt{3}$ en $x = \sqrt{3}$.

De beide andere wortels zijn imaginair.

Nu is $w^2 = 3x^2 = 9$ dus $w = \pm 3$

zoodat $q = 3 + \sqrt{3} \cdot i$ en

$q = -3 + \sqrt{3} \cdot i$ voldoen.

Is $w = 0$, dan is $x^3 = -24\sqrt{3}$

zoodat ook $q = -2\sqrt{3} \cdot i$ voldoet.

3^0. $q^3 = fi + gj$.

Hier is $a = 0$ $b = fi + gj$.

In dit geval worden de vergelijkingen

$$
\begin{aligned}
w(w^2 - 3x^2 - 3y^2 - 3z^2) &= 0 \\
x(3w^2 - x^2 - y^2 - z^2) &= f \\
y(3w^2 - x^2 - y^2 - z^2) &= g \\
z(3w^2 - x^2 - y^2 - z^2) &= 0.
\end{aligned}
$$

Uit de drie laatste vergelijkingen blijkt, dat z noodzakelijk gelijk nul moet zijn.

Stelt men $w = 0$, dan is

$$
\begin{aligned}
-x(x^2 + y^2) &= f \\
-y(x^2 + y^2) &= g
\end{aligned}
$$

dus $x = \frac{f}{g} y$.

Deze waarde van x in de 2de vergelijking gesteld geeft

$$-y\left(y^2 + \frac{f^2}{g^2} y^2\right) = g,$$

zoodat $$y^3 = -\frac{g^3}{g^2 + f^2}.$$

Is $w^2 = 3(x^2 + y^2)$, dan is $3w^2 = 9(x^2 + y^2)$.

De 2de en 3de vergelijking worden nu

$$
\begin{aligned}
x(8x^2 + 8y^2) &= f \\
y(8x^2 + 8y^2) &= g.
\end{aligned}
$$

Bij deeling van deze twee vergelijkingen vindt men $x = \frac{f}{g} y$, en substitueert men deze waarde van x in de laatste vergelijking, dan vindt men

$$y^3 = \frac{g^3}{8(f^2+g^2)}.$$

Voorbeeld. Zij $g = 3\sqrt{2}$ en $f = 3$, zoodat de gegeven vergelijking is $q^3 = 3i + 3\sqrt{2}\,.j$, dan is, wanneer men $w = 0$ stelt,

$$y^3 = -\frac{54\sqrt{2}}{27} = -2\sqrt{2}.$$

$y = -\sqrt{2}$ is de reëele wortel van de vergelijking

$$y^3 + 2\sqrt{2} = 0.$$

Daarmede correspondeert $x = -1$, zoodat $q = -i - \sqrt{2}\,.j$ eene oplossing is.

Stelt men $w^2 = 3(x^2+y^2)$, dan is

$$y^3 = \frac{54\sqrt{2}}{8 \times 27} = \frac{1}{4}\sqrt{2}.$$

Aan de derde-machtsvergelijking $y^3 - \frac{1}{4}\sqrt{2} = 0$ voldoet $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Hiermede komt overeen $x = \frac{1}{\sqrt{2}\,.\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$

$$w^2 = 3\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) = \frac{9}{4} \qquad w = \pm\frac{3}{2}$$

$$q = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i + \frac{1}{\sqrt{2}}j \text{ en } q = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i + \frac{1}{\sqrt{2}}j$$

zijn dus ook oplossingen der quaternionvergelijking.

4^0. $$q^3 = qfi + e.$$

De vier vergelijkingen worden nu

$$\begin{aligned} w(w^2 - 3x^2 - 3y^2 - 3z^2) &= e - xf \\ x(3w^2 - x^2 - y^2 - z^2) &= fw \\ y(3w^2 - x^2 - y^2 - z^2) &= fz \\ z(3w^2 - x^2 - y^2 - z^2) &= -fy. \end{aligned}$$

Uit de twee laatste vergelijkingen volgt

$$y^2 + z^2 = 0,$$

zoodat de twee eerste vergelijkingen worden

$$w(w^2 - 3x^2) = e - xf$$

$$x(3w^2 - x^2) = fw.$$

De laatste vergelijking kan geschreven worden in den vorm van eene vierkantsvergelijking in w, namelijk

$$w^2 - \frac{f}{3x} w - \frac{x^2}{3} = 0$$

die tot wortels heeft

$$w_1 = \frac{f}{6x} + \sqrt{\frac{f^2}{36x^2} + \frac{x^2}{3}} \qquad \text{en}$$

$$w_2 = \frac{f}{6x} - \sqrt{\frac{f^2}{36x^2} + \frac{x^2}{3}}.$$

Brengt men deze waarden van w in de vergelijking $w(w^2 - 3x^2) = e - xf$ over, dan is

$$\left(\frac{f}{6x} \pm \sqrt{\frac{f^2}{36x^2} + \frac{x^2}{3}}\right)\left\{\frac{f^2}{18x^2} + \frac{x^2}{3} \pm \frac{f}{3x}\sqrt{\frac{f^2}{36x^2} + \frac{x^2}{3}} - 3x^2\right\} = e - xf$$

Voorbeeld. $\qquad q^3 = 2qi - \frac{260}{27}$,

$$f = 2,\ e = -\frac{260}{27}.$$

Aan de vergelijking

$$\left(\frac{1}{3x} + \sqrt{\frac{1}{9x^2} + \frac{x^2}{3}}\right)\left\{\frac{2}{9x^2} + \frac{x^2}{3} + \frac{2}{3x}\sqrt{\frac{1}{9x^2} + \frac{x^2}{3}} - 3x^2\right\} = -\frac{260}{27} - 2x$$

voldoet $x = 2$.

Hieruit volgt

$$w = \frac{1}{6} + \sqrt{\frac{1}{36} + \frac{4}{3}} = \frac{4}{3},$$

zoodat het quaternion $q = \frac{4}{3} + 2i$ aan de vergelijking voldoet.

HOOFDSTUK IV.

Coplanaire Vectoren.

§ 18. Zijn α, β, γ drie coplanaire vectoren, wier vlak met dat van een gegeven rechten versor i samenvalt, dan zal het symbool $\frac{\beta}{\alpha}\gamma$ een bepaalden vector δ in het gegeven vlak voorstellen; men kan zich toch het quaternion $\frac{\beta}{\alpha}$ in het vlak i gedraaid denken, totdat α met γ samenvalt

Deze zelfde vector δ kan ook voorgesteld worden door het symbool $\frac{\gamma}{\alpha}\beta$. Door eene teekening blijkt toch duidelijk, dat de operatie $\frac{\beta}{\alpha}$ op den vector γ, hetzelfde resultaat heeft, als de bewerking $\frac{\gamma}{\alpha}$ op den vector β.

Men kan dus zeggen, dat δ de vierde evenredige is tot de drie vectoren α, β en γ. De beide middelsten van zulk eene coplanaire betrekking tusschen vier vectoren kunnen dan verwisseld worden.

Men kan eveneens schrijven

$$\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\delta}{\beta} \text{ dus } \gamma = \frac{\delta}{\beta}\alpha,$$

terwijl
$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\delta}{\gamma} \text{ geeft } \gamma = \frac{\alpha}{\beta}\delta,$$

zoodat ook de beide uitersten α en δ van zulk eene betrekking kunnen verwisseld worden.

§ 19. Vallen de beide middelste vectoren van zulk eene coplanaire betrekking samen, dan heeft men eene betrekking tusschen drie vectoren α, β en γ van den volgenden vorm

$$\gamma = \frac{\beta}{\alpha}\beta \text{ of } \alpha = \frac{\beta}{\gamma}\beta.$$

Men heeft nu ook de betrekking

$$\beta = \frac{\alpha}{\beta}\gamma = \frac{\gamma}{\beta}\alpha,$$ zoodat ook

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 = \frac{\gamma}{\alpha} \text{ en } \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^2 = \frac{\alpha}{\gamma},$$

waaruit men vindt

$$\beta = \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}\alpha \text{ en } \beta = \left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}\gamma.$$

Nu is
$$\left(\frac{-\beta}{\alpha}\right)^2 = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2,$$

zoodat men de volgende algemeene formule heeft

$$\beta = \pm\sqrt{\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)} \cdot \alpha = \pm\sqrt{\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)} \cdot \gamma.$$

De bovenste teekens worden genomen, wanneer de hoek tusschen de vectoren α en γ door β zelf gehalveerd wordt; de onderste teekens daarentegen, wanneer deze hoek door $-\beta$ wordt gehalveerd.

§ 20. Men kan het begrip van eene gedurige evenredigheid tusschen drie vectoren op vier en meer coplanaire vectoren uitbreiden, en daardoor eene theorie van de hoogere machten en wortels van quaternions vormen.

Vormen de vier vectoren α, β, γ en δ eene gedurige evenredigheid, dan is:

$$\frac{\delta}{\gamma}=\frac{\gamma}{\beta}=\frac{\beta}{\alpha} \text{ en dus } \frac{\delta}{\gamma}\times\frac{\gamma}{\beta}\times\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\beta}{\alpha}\times\frac{\beta}{\alpha}\times\frac{\beta}{\alpha} \text{ of } \frac{\delta}{\alpha}=\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^3$$

zoodat het laatste quaternion een derde-machtswortel van het eerste is, want

$$\beta=\left(\frac{\delta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{3}}\alpha.$$

Stelt men zich voor, dat β' en β'' twee even lange vectoren in hetzelfde vlak zijn, die men krijgt door twee op elkander volgende positieve draaiingen van af β, en waarvan ieder het derde deel van een cirkelomtrek bedraagt, zoodat

$$\frac{\beta}{\beta''}=\frac{\beta''}{\beta'}=\frac{\beta'}{\beta} \text{ of } \frac{\beta}{\beta'}=\frac{\beta'}{\beta''}=\frac{\beta''}{\beta}$$

en daarom $\left(\frac{\beta'}{\beta}\right)^3=\left(\frac{\beta''}{\beta}\right)^3=1.$

Nu is $\left(\frac{\beta'}{\alpha}\right)^3=\left(\frac{\beta'}{\beta}\right)^3\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^3=\frac{\delta}{\alpha}.$

op dezelfde wijze is

$$\left(\frac{\beta''}{\alpha}\right)^3=\left(\frac{\beta''}{\beta}\right)^3\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^3=\frac{\delta}{\alpha},$$

zoodat men eveneens schrijven kan

$$\beta'=\left(\frac{\delta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{3}}\alpha \text{ en } \beta''=\left(\frac{\delta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{3}}\alpha.$$

Men kan dus zeggen, dat een quaternion Q drie reëele van elkaar verschillende wortels heeft; ieder van hen, gedeeld door een der beide anderen, geeft als quotient een reëel quaternion, dat een van de kubieke wortels der positieve eenheid is.

Is het quaternion Q geen negatieve scalar, dan bezit slechts een van de drie wortels van het quaternion een hoek kleiner dan 60° graden; deze wortel wordt de *hoofdcubiekwortel* van het quaternion genoemd en aangeduid door het symbool $\sqrt[3]{Q}$.

§ 21. Breidt men het begrip van eene gedurige evenredigheid uit op $n + 1$ coplanaire vectoren α, α_1, α_2, α_3, ... α_n dan is

$$\frac{\alpha_n}{\alpha} = \left(\frac{\alpha_1}{\alpha}\right)^n \text{ en } \alpha_1 = \left(\frac{\alpha_n}{\alpha}\right)^{\frac{1}{n}} \alpha.$$

Duidt men den hoofdwortel van de vergelijking $q^n = Q$, waarin Q een werkelijk quaternion is, aan door $\sqrt[n]{Q}$, dan zal in het algemeen een wortel van de vergelijking $q^n = Q$ aldus kunnen worden voorgesteld,

$$Q^{\frac{1}{n}} = 1^{\frac{1}{n}} \sqrt[n]{Q}$$

de factor $1^{\frac{1}{n}}$ heeft n verschillende waarden, die van de verdeeling van een cirkelomtrek in n gelijke deelen afhangen.

§ 22. Voorbeelden.

Quaternions, wier vlak samenvalt met dat van den rechten versor i, zullen voorgesteld worden door de algemeene formule

$$q = x + iy,$$

waarin x en y twee scalargrootheden zijn.

Schrijft men het quaternion q in den vorm $\frac{\beta}{\alpha}$, dan is

$$x = \frac{T\beta}{T\alpha} \cos\vartheta \text{ en } y = \frac{T\beta}{T\alpha} \sin\vartheta,$$

wanneer ϑ de hoek van het quaternion voorstelt.

Zij gegeven de vergelijking

$$q^2 = 1 + \sqrt{3} \,.\, i,$$

dan is $\quad S.\, q^2 = 1$ en $V.\, q^2 = \sqrt{3} \,.\, i.$

Wordt het 2^de^ lid van de vergelijking nu in den vorm $\frac{\beta}{\alpha}$ geschreven, dan is $tang \angle \frac{\beta}{\alpha} = \frac{y}{x} = \sqrt{3}$

dus $\angle \frac{\beta}{\alpha} = 60°$

en $$\frac{T\beta}{T\alpha} = \frac{x}{\cos \angle \frac{\beta}{\alpha}} = 2.$$

Zij een van de twee wortels $= \frac{\gamma}{\alpha}$ dan is $\angle \frac{\gamma}{\alpha} = 30°$ en

$$T\alpha : T\gamma = T\gamma : T\beta.$$

Kiest men $T\alpha = 1$, dan is:

$$(T\gamma)^2 = 2 \text{ en } T\gamma = \sqrt{2},$$

derhalve zal

$$q = Sq + Vq = \frac{1}{2}\sqrt{6} + \frac{1}{2}\sqrt{2} \,.\, i$$

een van de twee wortels zijn.

De andere wortel wordt voorgesteld door

$$-\frac{\gamma}{\alpha} = -\frac{1}{2}\sqrt{6} - \frac{1}{2}\sqrt{2} \,.\, i.$$

Tweede Voorbeeld $\qquad q^2 = 1 + i + j + k.$

Zij $i + j + k$ een vector $\alpha = T\alpha \,.\, U\alpha$.

Stelt men dan $U\alpha = l$, dan is, daar

$$T\alpha = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{3}.$$

$$q^2 = 1 + \sqrt{3} \,.\, l.$$

De twee reëele coplanaire quaternions, die aan deze vergelijking voldoen, zijn volgens het bovenstaande

$$q_1 = \frac{1}{2}\sqrt{6} + \frac{1}{2}\sqrt{2} \,.\, l \text{ en } q_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{6} - \frac{1}{2}\sqrt{2} \,.\, l.$$

Substitueert men daarin voor l zijne waarde $\frac{i + j + k}{\sqrt{3}}$,

dan worden de oplossingen

$$q_1 = \frac{1}{2}\sqrt{6} + \frac{1}{6}\sqrt{6} \,.\, i + \frac{1}{6}\sqrt{6} \,.\, j + \frac{1}{6}\sqrt{6} \,.\, k$$

en

$$q_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{6} - \frac{1}{6}\sqrt{6} \,.\, i - \frac{1}{6}\sqrt{6} \,.\, j - \frac{1}{6}\sqrt{6} \,.\, k.$$

Derde Voorbeeld. $q^3 = 8i.$

Wanneer men het 2[de] lid in den vorm $\frac{\beta}{\alpha}$ schrijft, is

$$\angle \frac{\beta}{\alpha} = 90^\circ \text{ en } T\beta = 8 T\alpha.$$

Is de hoofdwortel $q_1 = \frac{\gamma}{\alpha}$

dan is

$$\angle \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{90^\circ}{3} = 30^\circ \text{ en } T\gamma = \sqrt[3]{8} \, . \, T\alpha \text{ of } \frac{T\gamma}{T\alpha} = 2$$

bijgevolg is $q_1 = Sq_1 + Vq_1 = \sqrt{3} + i.$

Evenzoo zal voldoen $q_2 = \frac{\delta}{\alpha}$, waarin $T\delta = 2T\alpha$ en

$$\angle \frac{\delta}{\alpha} = 30^\circ + 120^\circ = 150^\circ$$

dus is $q_2 = Sq_2 + Vq_2 = -\sqrt{3} + i.$

$$q_3 = \frac{\varepsilon}{\alpha} \text{ waarin } \angle \frac{\varepsilon}{\alpha} = 30^\circ + 2 \times 120^\circ = 270^\circ$$

en $T\varepsilon = 2T\alpha,$ zal ook voldoen.

$$q_3 = Vq_3 = -2i.$$

Vierde Voorbeeld. $q^4 = -1 + \sqrt{3} \, . \, i.$

Schrijft men het 2[de] lid in den vorm $\frac{\beta}{\alpha}$, dan is

$$\angle \frac{\beta}{\alpha} = 120^\circ \text{ en } T\beta = 2T\alpha.$$

De hoek van den hoofdwortel $q_1 = \frac{\gamma}{\alpha}$ bedraagt nu

$$\frac{120^\circ}{4} = 30^\circ \text{ en } T\gamma = \sqrt[4]{2} \, . \, T\alpha$$

zoodat

$$q_1 = Sq_1 + Vq_1 = \frac{1}{2}\sqrt{3} \, . \, \sqrt[4]{2} + \frac{1}{2}\sqrt[4]{2} \, . \, i =$$

$$\frac{1}{2}\sqrt[4]{18} + \frac{1}{2}\sqrt[4]{2} \, . \, i.$$

Eene tweede oplossing zal zijn $q_2 = \frac{\delta}{\alpha}$, waarin

$$\angle\frac{\delta}{\alpha} = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ \text{ en } T\delta = \sqrt[4]{2}\,.\,T\alpha,$$

zoodat

$$q_2 = Sq_2 + Vq_2 = -\frac{1}{2}\sqrt[4]{2} + \frac{1}{2}\sqrt[4]{18}\,.\,i.$$

Ook zal voldoen $q_3 = \frac{\varepsilon}{\alpha}$, waarin

$$\angle\frac{\varepsilon}{\alpha} = 210^\circ \text{ en } T\varepsilon = \sqrt[4]{2}\,.\,T\alpha,$$

zoodat $\qquad q_3 = -\frac{1}{2}\sqrt[4]{18} - \frac{1}{2}\sqrt[4]{2}\,.\,i$

evenzoo $q_4 = \frac{\vartheta}{\alpha}$, waarin $\angle\frac{\vartheta}{\alpha} = 300^\circ$ en $T\vartheta = \sqrt[4]{2}\,.\,T\alpha$,

zoodat $\qquad q_4 = \frac{1}{2}\sqrt[4]{2} - \frac{1}{2}\sqrt[4]{18}\,.\,i.$

Vijfde Voorbeeld. $\quad q^4 = -5 + 7i + j + 5k.$

Nu stelt $7i + j + 5k$ een vector λ voor, en is

$$T\lambda = \sqrt{7^2 + 1^2 + 5^2} = 5\sqrt{3}.$$

Stelt men $U\lambda = l$, dan kan men de vierde-machtsvergelijking ook schrijven

$$q^4 = -5 + 5\sqrt{3}\,.\,l.$$

Schrijft men het 2[de] lid in den vorm van een quotient van twee vectoren $\frac{\beta}{\alpha}$, dan is

$$\angle\frac{\beta}{\alpha} = 120^\circ \text{ en } T\beta = 10T\alpha.$$

Men gaat dan op dezelfde wijze te werk, als bij het voorgaande voorbeeld en vindt dan de vier wortels

$$q_1 = \frac{1}{2}\sqrt[4]{90} + \frac{1}{2}\sqrt[4]{10}\,.\,l.$$

$$q_2 = -\frac{1}{2}\sqrt[4]{10} + \frac{1}{2}\sqrt[4]{90}\,.\,l.$$

$$q_3 = -\frac{1}{2}\sqrt[4]{90} - \frac{1}{2}\sqrt[4]{10}\,.\,l.$$

$$q_4 = \frac{1}{2}\sqrt[4]{10} - \frac{1}{2}\sqrt[4]{90}\,.\,l$$

Nu is $\quad 7i + j + 5k = 5\sqrt{3}\,.\,l$

en dus $\quad l = \frac{7}{15}\sqrt{3}\,.\,i + \frac{1}{15}\sqrt{3}\,.\,j + \frac{1}{3}\sqrt{3}\,.\,k.$

Substitueert men deze waarde van l in de vier wortels, dan is

$$q_1 = \frac{1}{2}\sqrt[4]{90} + \frac{7}{30}\sqrt[4]{90}\,.\,i + \frac{1}{30}\sqrt[4]{90}\,.\,j + \frac{1}{6}\sqrt[4]{90}\,.\,k.$$

$$q_2 = -\frac{1}{2}\sqrt[4]{10} + \frac{7}{10}\sqrt[4]{10}\,.\,i + \frac{1}{10}\sqrt[4]{10}\,.\,j + \frac{1}{2}\sqrt[4]{10}\,.\,k.$$

$$q_3 = -\frac{1}{2}\sqrt[4]{90} - \frac{7}{30}\sqrt[4]{90}\,.\,i - \frac{1}{30}\sqrt[4]{90}\,.\,j - \frac{1}{6}\sqrt[4]{90}\,.\,k.$$

$$q_4 = \frac{1}{2}\sqrt[4]{10} - \frac{7}{10}\sqrt[4]{10}\,.\,i - \frac{1}{10}\sqrt[4]{10}\,.\,j - \frac{1}{2}\sqrt[4]{10}\,.\,k.$$

Zesde Voorbeeld. $\quad q^8 = -3\sqrt{3} + i + 4j + 8k$

Zij $\; i + 4j + 8k =$ een vector λ en $U\lambda = l$, dan is

$$T\lambda = \sqrt{1^2 + 4^2 + 8^2} = \sqrt{81} = 9.$$

Schrijft men het 2^de^ lid in den vorm van een quotient van twee vectoren $\frac{\beta}{\alpha}$, dan is

$$\angle\frac{\beta}{\alpha} = 120^\circ \text{ en } T\beta = 6\sqrt{3}\,.\,T\alpha.$$

Is q_1 de hoofdwortel $= \frac{\gamma}{\alpha}$, dan is $\angle\frac{\gamma}{\alpha} = 15^\circ$ en

$$T\gamma = \sqrt[8]{6\sqrt{3}}\,.\,T\alpha.$$

Nu is $\; cos\, 15^\circ = \sqrt{\left(\frac{1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{3}}$

en $\quad sin\, 15^\circ = \sqrt{\left(\frac{1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{3}}$

en derhalve

$$q_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt[16]{108} + \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}} \cdot \sqrt[16]{108} \,. \, l$$

Zij $\qquad q_2 = \frac{\delta}{\alpha}$, dan is $\angle \frac{\delta}{\alpha} = 45^\circ + 15^\circ = 60^\circ$

$$T\delta = \sqrt[16]{108} \,.\, T\alpha.$$

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \qquad \sin 60^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

$$q_2 = \frac{1}{2}\sqrt[16]{108} + \frac{1}{2}\sqrt[16]{108} \,.\, \sqrt{3} \,.\, l$$

$$q_2 = \frac{1}{2}\sqrt[16]{108}\left\{1 + \sqrt{3} \,.\, l\right\}$$

$q_3 = \frac{\varepsilon}{\alpha}$. Hier is $\angle \frac{\varepsilon}{\alpha} = 90^\circ + 15^\circ = 105^\circ$

$$T\varepsilon = \sqrt[16]{108} \,.\, T\alpha.$$

$$\cos 105^\circ = -\sin 15^\circ = -\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

$$\sin 105^\circ = \cos 15^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

$$q_3 = -\frac{1}{2}\sqrt[16]{108}\left(\sqrt{2-\sqrt{3}} - \sqrt{2+\sqrt{3}} \,.\, l\right).$$

$q_4 = \frac{\vartheta}{\alpha}$, $\angle \frac{\vartheta}{\alpha} = 150^\circ$, $\cos 150^\circ = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\sin 150^\circ = \frac{1}{2}$

$$q_4 = -\frac{1}{2}\sqrt[16]{108}\left(\sqrt{3} - l\right).$$

Verder voortgaande vindt men $q_5 = -q_1$

$$q_6 = -q_2 \qquad q_7 = -q_3 \qquad q_8 = -q_4.$$

Substitueert men nu voor l zijne waarde $\frac{i + 4j + 8k}{9}$, dan vindt men

$$q_1 = \frac{\sqrt[16]{108}}{2}\left\{\sqrt{2+\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{9}(i + 4j + 8k)\right\}$$

$$q_2 = \frac{\sqrt[16]{108}}{2}\left\{1 + \frac{\sqrt{3}}{9}(i + 4j + 8k)\right\}$$

$$q_3 = -\frac{\sqrt[16]{108}}{2}\left\{\sqrt{3} - \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{9}(i + 4j + 8k)\right\}$$

$$q_4 = -\frac{\sqrt[16]{108}}{2}\left\{\sqrt{3} - \left(\frac{i + 4j + 8k}{9}\right)\right\}$$

$$q_5 = -q_1 \qquad q_6 = -q_2$$

$$q_7 = -q_3 \qquad q_8 = -q_4.$$

§ 23. Wil men van eene vergelijking van den vorm,

$$q^2 = a$$

waarin a een gegeven quaternion is, waarvan het vlak met dat van een rechten versor i samenvalt, de imaginaire met a coplanaire wortels opsporen, dan substitueere men

$$q = x + \sqrt{-1} \,.\, x' + (y + \sqrt{-1} \,.\, y')i$$

x, x', y en y' zijn hier reëele scalars, terwijl x' en y' niet gelijktijdig $= 0$ mogen zijn.

Voorbeeld. $\qquad q^2 = 1 + \sqrt{3} \,.\, i.$

Bij substitutie vindt men

$$x^2 - x'^2 - y^2 + y'^2 + 2xx'\sqrt{-1} - 2yy'\sqrt{-1} + 2xyi - 2x'y'i$$
$$+ 2\sqrt{-1}\,(yx' + y'x)i = 1 + \sqrt{3} \,.\, i.$$

Deze vergelijking laat zich in de vier volgenden splitsen

$$x^2 - x'^2 - y^2 + y'^2 = 1$$
$$xx' - yy' = 0$$
$$2xy - 2x'y' = \sqrt{3}$$
$$x'y + xy' = 0.$$

Elimineert men uit de tweede en vierde vergelijking x, dan vindt men

$$y(x'^2 + y'^2) = 0$$

zoodat $y = 0$ en daarom ook $x = 0$.

De eerste en derde vergelijking worden nu

$$y'^2 - x'^2 = 1 \text{ en } 2x'y' = -\sqrt{3}.$$

Bij eliminatie van x' krijgt men

$$y'^2 - \frac{3}{4y'^2} = 1$$

of $y'^2 = z$ stellende

$$z^2 - z - \frac{3}{4} = 0$$

zoodat $$z = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \frac{1}{2} \pm 1.$$

Van deze twee waarden mag men slechts $z = \frac{3}{2}$ kiezen, daar $y'^2 = z$ noodzakelijk positief moet zijn, derhalve is

$$y' = \pm \sqrt{\frac{3}{2}} = \pm \frac{1}{2}\sqrt{6}$$

de bijbehoorende waarden van x' zijn

$$x' = \mp \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \mp \frac{1}{6}\sqrt{18} = \mp \frac{1}{2}\sqrt{2},$$

zoodat men voor de gevraagde oplossingen van de gegeven quaternion-vergelijking vindt

$$q_1 = -\frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{-1} + \frac{1}{2}\sqrt{6}\sqrt{-1} \,.\, \dot{i}$$

$$q_2 = +\frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{-1} - \frac{1}{2}\sqrt{6}\sqrt{-1} \,.\, \dot{i}.$$

§ 24. Hamilton heeft in zijn werk „Elements of quaternions” aangetoond, dat eene quaternion-vergelijking van den vorm

$$F_n q = q^n + q_1 q^{n-1} + q_2 q^{n-2} \ldots + q_n = 0$$

waarin $q_1, q_2 \ldots q_n$ gegeven reëele coplanaire quaternions zijn, steeds n^2 quaternion-wortels, reëel of imaginair, in het gegeven vlak bezit. Schrijft men al de quaternions, die in deze vergelijking voorkomen, in den vorm van een paar, dan is

$$F_n q = F_n(x + iy) = X_n + iY_n.$$

Deze reëele scalarfuncties X_n en Y_n zijn met betrekking tot de beide gezochte scalargrootheden x en y van de n^{de} macht; zij bevatten bovendien de $2n$ gegeven reëele scalargrootheden $x_1, y_1, \ldots . x_n, y_n$.

De quaternion-vergelijking $F_n q$ vervalt nu in de beide scalar-vergelijkingen

$$X_n = 0 \text{ en } Y_n = 0.$$

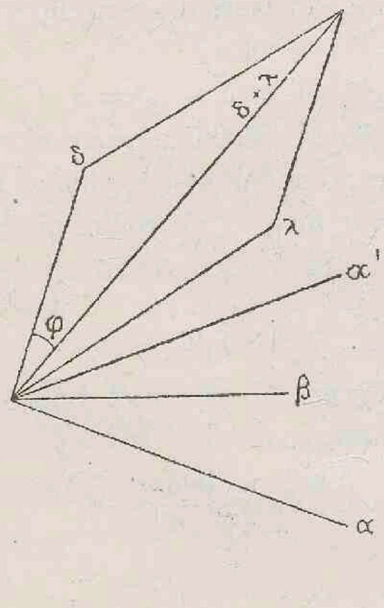
Elimineert men y uit deze twee vergelijkingen, dan krijgt men eene algebraïsche vergelijking van den graad n^2 in x. Men vindt dus n^2 wortels van den vorm $q = x + iy$, die aan de vergelijking $F_n q = 0$ voldoen.

De vergelijking $q^2 = qa + b$, waarin a en b in hetzelfde vlak gelegen zijn, bezit dus vier met a en b coplanaire wortels.

§ 25. Men kan zich de vraag stellen, van de door Hamilton behandelde klasse van vergelijkingen $q^2 = qa + b$, waarin hier a en b aangenomen worden in hetzelfde vlak gelegen te zijn, de reëele, met a en b coplanaire quaternionwortels optesporen, door als voorwaarden, waaraan de gevraagde quaternions moeten voldoen, te stellen

$$(Tq)^2 = T(qa + b) \text{ en } 2\angle q = \angle(qa + b) \quad \text{of}$$
$$(Tq)^2 = T(qa + b) \text{ en } 2\angle q = \angle(qa + b) + 360^\circ.$$

Deze twee gevallen moeten van elkander onderscheiden worden.



Zijn de gegeven quaternions

$$a = \frac{\beta}{\alpha} \text{ en } b = \frac{\delta}{\alpha}.$$

1°. *Onderstel.*

$$\angle\frac{\delta}{\alpha} > 2\angle\frac{\beta}{\alpha}.$$

Eerste geval.

$$2\angle q = \angle(qa + b).$$

Stelt men

$$\angle\frac{\delta}{\beta} - \angle\frac{\beta}{\alpha} = d,$$

en een van de reëele wortels $q = \frac{\lambda}{\beta}$, dan is

$$2\angle\frac{\lambda}{\beta}=\angle\left(\frac{\lambda}{\beta}\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\delta}{\alpha}\right)\qquad\text{of}$$

$$2\angle\frac{\lambda}{\beta}=\angle\frac{\delta+\lambda}{\alpha}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\quad(1)$$

Uit deze gelijkheid volgt, dat de vector λ binnen $\angle\frac{\delta}{\beta}$ moet gelegen zijn.

Viel toch λ buiten $\angle\frac{\delta}{\beta}$, dan zou zij aanleiding geven tot de gelijkheid

$$\angle\frac{\delta+\lambda}{\lambda}=\angle\frac{\beta}{\alpha}-\angle\frac{\lambda}{\beta},$$

welke onmogelijk is, omdat $\angle\frac{\lambda}{\beta}>\angle\frac{\beta}{\alpha}$ moet zijn.

Trekt men van beide leden der vergelijking (1) $\angle\frac{\lambda}{\alpha}$ af, dan is

$$\angle\frac{\lambda}{\beta}-\angle\frac{\beta}{\alpha}=\angle\frac{\delta+\lambda}{\lambda}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\quad(1a).$$

Heeft men nu den vector α' zoodanig getrokken, dat

$$\angle\frac{\alpha'}{\beta}=\angle\frac{\beta}{\alpha},\qquad\text{dan is dus}$$

$$\angle\frac{\lambda}{\alpha'}=\angle\frac{\delta+\lambda}{\lambda}.$$

Verder is $$T\left(\frac{\lambda}{\beta}\right)^2=T\left(\frac{\lambda}{\beta}\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\delta}{\alpha}\right)$$

of $$\frac{(T\lambda)^2}{(T\beta)^2}=\frac{T(\delta+\lambda)}{T\alpha}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\quad(2).$$

In het paralellogram op δ en λ beschreven, heeft men de betrekkingen

$$T(\delta+\lambda):\sin\angle\frac{\delta}{\lambda}=T\delta:\sin\angle\frac{\delta+\lambda}{\lambda}=T\lambda:\sin\angle\frac{\delta+\lambda}{\delta}\;.\;.\;(3)$$

Stelt men $\angle\frac{\delta+\lambda}{\delta}=\varphi$, dan is, daar $\angle\frac{\delta}{\alpha'}=d$

$$\angle\frac{\delta+\lambda}{\lambda}=\frac{d-\varphi}{2} \text{ en } \angle\frac{\delta}{\lambda}=\frac{d+\varphi}{2}$$

wegens formule ($1a$).

Substitueert men in vergelijking (2) voor $T(\delta+\lambda)$ zijne uit (3) afteleiden waarde, dan volgt

$$\frac{(T\lambda)^2}{(T\beta)^2}=\frac{sin\left(\frac{d+\varphi}{2}\right)T\delta}{sin\left(\frac{d-\varphi}{2}\right)T\alpha.}$$

Uit vergelijking (3) volgt verder

$$\frac{T\lambda}{T\delta}=\frac{sin\ \varphi}{sin\ \frac{1}{2}(d-\varphi)}$$

Uit de twee laatst gevonden vergelijkingen kan men $T\lambda$ elimineeren, door de laatste vergelijking in het kwadraat te verheffen en de twee waarden van $(T\lambda)^2$ aan elkaar gelijk te stellen; men krijgt dan tot resultaat

$$\frac{sin^2\ \varphi}{sin^2\left(\frac{d-\varphi}{2}\right)}\ T\delta=\frac{(T\beta)^2}{T\alpha}\frac{sin\left(\frac{d+\varphi}{2}\right)}{sin\left(\frac{d-\varphi}{2}\right)}.$$

Stelt men $\frac{T\delta\, T\alpha}{(T\beta)^2}=\frac{1}{2}c=$ bekende grootheid, dan is

$$\frac{2\ sin\ \frac{1}{2}(d+\varphi)\ sin\ \frac{1}{2}(d-\varphi)}{sin^2\ \varphi}=c$$

$$cos\ \varphi-cos\ d=c\,(1-cos^2\ \varphi)$$

of
$$cos^2\ \varphi+\frac{1}{c}\,cos\ \varphi-\frac{cos\ d}{c}-1=0.\quad .\quad .\quad (4)$$

Lost men $cos\ \varphi$ uit deze vergelijking op, dan vindt men

$$cos\ \varphi=-\frac{1}{2c}\pm\frac{1}{2c}\sqrt{4c^2+4c\ cos\ d+1}.$$

Is φ eenmaal bekend, dan is men in staat uit de evenredigheid

$$T\delta : sin\left(\frac{d - \varphi}{2}\right) = T\lambda : sin\ \varphi$$

$T\lambda$ te berekenen, men vindt dan

$$T\lambda = \frac{T\delta\ sin\ \varphi}{sin\ \frac{1}{2}(d - \varphi)}\ .$$

Men vindt nu ook $\angle\frac{\lambda}{\beta}$ gemakkelijk, daar

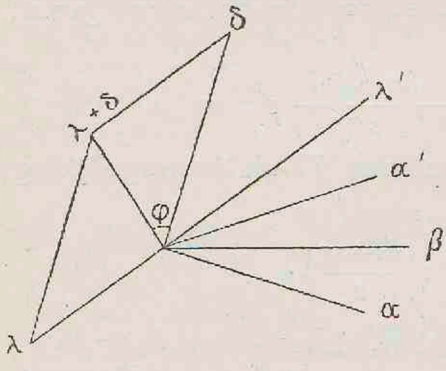
$$\angle\frac{\lambda}{\beta} = \frac{1}{2}(d - \varphi) + \angle\frac{\beta}{\alpha}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\angle\frac{\delta}{\beta} - \angle\frac{\beta}{\alpha} - \varphi\right) + \angle\frac{\beta}{\alpha}$$

$$= \frac{1}{2}\angle\frac{\delta}{\beta} + \frac{1}{2}\angle\frac{\beta}{\alpha} - \frac{1}{2}\varphi$$

$$= \frac{1}{2}\angle\frac{\delta}{\alpha} - \frac{1}{2}\varphi.$$

Tweede geval.



$$2\angle\frac{\lambda}{\beta} = 360^\circ + \angle\frac{\lambda + \delta}{\alpha}$$

Ligt λ' in 't verlengde van λ, dan kan men deze voorwaarde ook schrijven

$$2\angle\frac{\lambda'}{\beta} = \angle\frac{\lambda + \delta}{\alpha}$$

Trekt men van beide leden $\angle\frac{\lambda'}{\alpha}$ af, dan is

$$\angle\frac{\lambda'}{\beta} - \angle\frac{\beta}{\alpha} = \angle\frac{\lambda'}{\alpha'} = \angle\frac{\lambda + \delta}{\lambda'}.$$

Stelt men weder $\angle\frac{\lambda + \delta}{\delta} = \varphi$, dan is

$$\angle\frac{\delta + \lambda}{\lambda} = 180^\circ - \varphi - \left(\angle\frac{\delta}{\alpha'} - \angle\frac{\lambda'}{\alpha'}\right).$$

Nu is $\angle\frac{\lambda'}{\alpha'} = \angle\frac{\delta+\lambda}{\lambda'} = 180° - \angle\frac{\delta+\lambda}{\lambda}$,

zoodat $2\angle\frac{\delta+\lambda}{\lambda} = 360° - \varphi - d.$

Derhalve is $\angle\frac{\delta+\lambda}{\lambda} = 180° - \frac{d+\varphi}{2}$ en

$$\angle\frac{\lambda}{\delta} = 180° - \frac{d-\varphi}{2}.$$

Men gaat nu op dezelfde wijze te werk, als in het *eerste geval*.

Uit de vergelijkingen $\frac{(T\lambda)^2}{(T\beta)^2} = \frac{T(\delta+\lambda)}{T\alpha}$ en

$$T\lambda : sin\,\varphi = T\delta : sin\left(180° - \frac{d+\varphi}{2}\right) = T(\delta+\lambda) : sin\left(180° - \frac{d-\varphi}{2}\right)$$

kan men $T(\delta+\lambda)$ en $T\lambda$ elimineeren.

Men krijgt dan de vergelijking

$$\frac{T\delta\, T\alpha}{(T\beta)^2} = \frac{1}{2}c = \frac{sin\left(\frac{d-\varphi}{2}\right) sin\left(\frac{d+\varphi}{2}\right)}{sin^2\varphi}.$$

Na herleiding vindt men, evenals in het *eerste geval*, de vergelijking

$$cos^2\varphi + \frac{cos\,\varphi}{c} - \frac{cos\,d}{c} - 1 = 0.$$

Is φ bekend, dan berekene men $T\lambda$ uit de vergelijking

$$\frac{T\lambda}{T\delta} = \frac{sin\,\varphi}{sin\left(\frac{d+\varphi}{2}\right)}.$$

Men kan nu ook $\angle\frac{\lambda}{\beta}$ bepalen, daar

$$\angle\frac{\lambda}{\beta} = 180° + \angle\frac{\beta}{\alpha} + \angle\frac{\delta+\lambda}{\lambda'}$$

$$= 180° + \frac{1}{2}(\varphi + d) + \angle\frac{\beta}{\alpha}$$

$$= 180° + \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{2}\angle\frac{\delta}{\alpha}.$$

Beschouwen wij nu nader de vergelijking (4) waarin c en d veranderlijke grootheden zijn. Wordt de wortel, die met het positieve teeken correspondeert, kortheidshalve, „de 1^{ste} wortel" en die, welke met het negatieve teeken overeenkomt, „de 2^{de} wortel" genoemd, en wordt ondersteld, dat d niet $= 0$ of $180°$, en dat $2c > 1$ is, dan kan de waarde van den wortelvorm varieeren tusschen $2c - 1$ en $2c + 1$. De 1^{ste} wortel is dan $< + 1$ en $> - 1$, en daarom bij de bovengenoemde onderstelling steeds reëel.

De 2^{de} wortel is bij deze onderstelling $> -\frac{1}{c} - 1$ en $< - 1$, of, daar $2c > 1$ is, $> - 3$ en $< - 1$. Deze wortel is dus imaginair.

Is $1 > 2c$, dan varieert de waarde van den wortelvorm tusschen $1 - 2c$ en $1 + 2c$.

De 1^{ste} wortel is dan $< + 1$ en $> - 1$, zoodat deze bij de onderstelling $1 > 2c$ steeds reëel is.

De 2^{de} wortel is dan $< -\frac{1}{c} + 1$ en $> -\frac{1}{c} - 1$ of, daar $\frac{1}{c} > 2$ is, $< - 1$ en $> - 3$.

Laatstgenoemde wortel is dus bij de onderstelling, $1 > 2c$, imaginair.

Is $2c = 1$, dan varieert de waarde van den wortelvorm tusschen 0 en 2.

De 1^{ste} wortel is dan $< + 1$ en $> - 1$ en daarom reëel; de 2^{de} wortel $< - 1$ en $> - 3$, dus imaginair.

Behandelen wij nu het geval, dat $d = 0$ is.

De 1^{ste} wortel is dan $= 1$ en de 2^{de} wortel $= -\frac{1}{c} - 1$.

Is $\cos\varphi = 1$, dan bepale men in het *eerste geval* $T\lambda$ uit de vergelijking

$$\frac{T\lambda + T\delta}{T\alpha} = \frac{(T\lambda)^2}{(T\beta)^2}.$$

Men vindt dan

$$T\lambda = \frac{(T\beta)^2}{2T\alpha} \pm \frac{1}{2T\alpha}\sqrt{(T\beta)^4 + 4(T\beta)^2 T\delta\, T\alpha}.$$

Daar $T\lambda$ positief moet zijn, vindt men slechts ééne waarde, die voldoet.

In het *tweede geval* bepale men $T\lambda$ uit de vergelijking

$$\frac{T\delta - T\lambda}{T\alpha} = \frac{(T\lambda)^2}{(T\beta)^2}.$$

Men vindt dan

$$T\lambda = -\frac{(T\beta)^2}{2T\alpha} \pm \frac{1}{2T\alpha}\sqrt{(T\beta)^4 + 4(T\beta)^2 T\delta\, T\alpha}.$$

Hieruit vindt men ook slechts ééne waarde van $T\lambda$, die voldoet.

Wanneer d niet $= 180°$ is, vindt men dus, zoowel in het *eerste geval*, als in het *tweede geval*, één reëel quaternion, coplanair met a en b, dat aan de gegeven vergelijking $q^2 = qa + b$ voldoet.

Ons blijft nog over, het geval te onderzoeken, dat $d = 180°$ is. Onderscheiden wij weder $2c > 1$ en $2c < 1$.

Is $2c > 1$, dan is de 1ste wortel $= 1 - \frac{1}{c}$. Deze varieert tusschen $+1$ en -1, en is dus steeds reëel.

De 2de wortel is dan $= -1$.

Is $\cos\varphi = -1$, dan bepale men in het *eerste geval* $T\lambda$ uit de vergelijking

$$\frac{T\lambda - T\delta}{T\alpha} = \frac{(T\lambda)^2}{(T\beta)^2}$$

waaruit men vindt

$$T\lambda = \frac{(T\beta)^2}{2T\alpha} \pm \frac{1}{2T\alpha}\sqrt{(T\beta)^4 - 4(T\beta)^2 T\delta\, T\alpha}.$$

Men vindt hieruit reëele positieve waarden voor $T\lambda$, wanneer $(T\beta)^2 > 4 T\delta T\alpha$, of, wat hetzelfde is, wanneer

$$\frac{4 T\delta T\alpha}{(T\beta)^2} = 2c < 1.$$

Dit strijdt evenwel tegen de onderstelling.

In het *tweede geval* geeft de 2^de^ wortel geen reëel quaternion, dat aan de vergelijking $q^2 = qa + b$ voldoet, daar de richting van λ met die van α' moet samenvallen, wanneer d en φ beiden $180°$ zijn.

Is $d = 180°$ en $2c < 1$, dan is de 1^ste^ wortel $= -1$ en de 2^de^ wortel $-\frac{1}{c} + 1$, dus imaginair.

Alleen in het *eerste geval*, vindt men dan reëele quaternions, die aan de vergelijking $q^2 = qa + b$ voldoen, daar bij den 1^sten^ wortel de richting van λ met die van α' moet samenvallen.

Men bepale nu $T\lambda$ uit de vergelijking

$$\frac{T\lambda - T\delta}{T\alpha} = \frac{(T\lambda)^2}{(T\beta)^2}$$

die, zooals wij boven gezien hebben, twee reëele positieve waarden voor $T\lambda$ geeft, wanneer $2c < 1$.

Is eindelijk $d = 180°$ en $2c = 1$, dan hebben wij een merkwaardig geval.

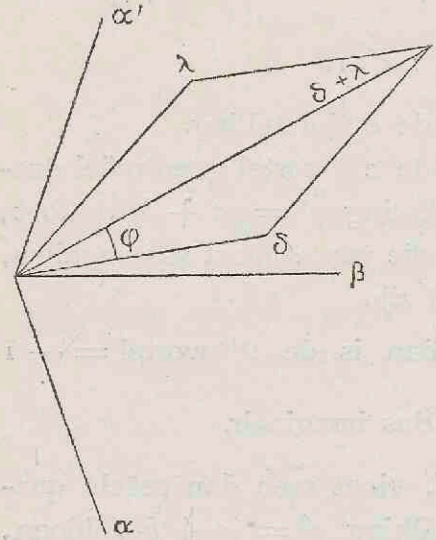
De 1^ste^ en de 2^de^ wortel zijn dan beiden $= -1$.

Bij elk van de wortels vindt men twee positieve, reëele en gelijke waarden van $T\lambda$, zoodat het *eerste geval* vier reëele, met a en b coplanaire quaternions oplevert, die aan de vergelijking $q^2 = qa + b$ voldoen.

Het *tweede geval* levert dan om de bovengenoemde reden, geen reëele quaternions op.

2^0, *Onderstel* $\angle \frac{\delta}{\alpha} > \angle \frac{\beta}{\alpha}$ en $< 2 \angle \frac{\beta}{\alpha}$.

Zij α' zoodanig getrokken dat $\angle\frac{\alpha'}{\beta} = \angle\frac{\beta}{\alpha}$.



Eerste geval.

$$2\angle q = \angle(qa + b).$$

Stelt men een van de reële wortels, $q = \frac{\lambda}{\beta}$, dan is

$$2\angle\frac{\lambda}{\beta} = \angle\left(\frac{\lambda}{\beta}\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\delta}{\alpha}\right) \quad \text{of}$$

$$2\angle\frac{\lambda}{\beta} = \angle\left(\frac{\delta+\lambda}{\alpha}\right).$$

De vector λ moet hier binnen $\angle\frac{\alpha'}{\delta}$ vallen.

Trekt men nu beide leden der bovenstaande vergelijking van $\angle\frac{\lambda}{\alpha}$ af, dan is

$$\angle\frac{\alpha'}{\lambda} = \angle\frac{\delta+\lambda}{\lambda}.$$

Stelt men de bekende

$$\angle\frac{\beta}{\alpha} - \angle\frac{\delta}{\beta} = d \text{ en } \angle\frac{\delta+\lambda}{\delta} = \varphi, \qquad \text{dan is}$$

$$\angle\frac{\delta+\lambda}{\lambda} = \frac{d-\varphi}{2} \text{ en } \angle\frac{\delta}{\lambda} = \frac{d+\varphi}{2}.$$

Nu kan men weer uit de vergelijkingen

$$T(\delta+\lambda) : sin\left(\frac{d+\varphi}{2}\right) = T\lambda : sin\,\varphi = T\delta : sin\left(\frac{d-\varphi}{2}\right)$$

en
$$\frac{(T\lambda)^2}{(T\beta)^2} = \frac{T(\delta+\lambda)}{T\alpha}$$

$T\lambda$ en $T(\delta+\lambda)$ elimineeren, waardoor men, evenals bij de 1^{ste} onderstelling, de volgende vergelijking krijgt

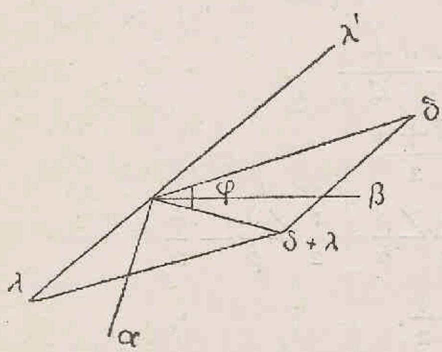
$$cos^2\varphi + \frac{cos\,\varphi}{c} - \frac{cos\,d}{c} - 1 = 0.$$

Is φ bekend, dan is

$$\angle\frac{\lambda}{\beta} = \angle\frac{\alpha'}{\beta} - \angle\frac{\delta+\lambda}{\lambda}$$

$$= \angle\frac{\beta}{\alpha} - \frac{1}{2}\angle\frac{\beta}{\alpha} + \frac{1}{2}\angle\frac{\delta}{\beta} + \frac{\varphi}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\angle\frac{\delta}{\alpha} + \frac{\varphi}{2}.$$



Tweede geval.

$$2\angle\frac{\lambda'}{\beta} = \angle\frac{\delta+\lambda}{\alpha}.$$

Trekt men beide leden dezer vergelijking van $\angle\frac{\lambda'}{\alpha}$ af, dan is

$$\angle\frac{\beta}{\alpha} - \angle\frac{\lambda'}{\beta} = \angle\frac{\delta+\lambda}{\lambda'}.$$

Stelt men $\angle\frac{\delta+\lambda}{\delta} = \varphi$, dan is

$$\angle\frac{\delta+\lambda}{\lambda} = 180^\circ - \angle\frac{\beta}{\alpha} + \angle\frac{\lambda'}{\beta}$$

$$= 180^\circ - \angle\frac{\beta}{\alpha} + \angle\frac{\lambda'}{\delta} + \angle\frac{\delta}{\beta}$$

$$= 180^\circ - \angle\frac{\beta}{\alpha} + 180^\circ - \varphi - \angle\frac{\delta+\lambda}{\lambda} + \angle\frac{\delta}{\beta}$$

$$2\angle\frac{\delta+\lambda}{\lambda} = 360^\circ - d - \varphi$$

$$\angle\frac{\delta+\lambda}{\lambda} = 180^\circ - \frac{d+\varphi}{2}$$

$\angle\frac{\delta}{\lambda}$ is dan $= 180^\circ - \frac{d-\varphi}{2}$.

De hoek φ wordt dan, evenals bij de 1ste onderstelling bepaald door de vergelijking

$$\cos^2\varphi + \frac{\cos\varphi}{c} - \frac{\cos d}{c} - 1 = 0.$$

Is φ niet $= 0$ of $180°$, dan berekene men $T\lambda$ uit de vergelijking

$$\frac{T\lambda}{T\delta} = \frac{\sin\varphi}{\sin\left(\frac{d+\varphi}{2}\right)}.$$

Men kan nu ook $\angle\frac{\lambda}{\beta}$ bepalen, daar

$$\angle\frac{\lambda}{\beta} = 180° + \angle\frac{\beta}{\alpha} - \angle\frac{\delta+\lambda}{\lambda'}$$

$$= 180° + \angle\frac{\beta}{\alpha} - \frac{d+\varphi}{2}$$

$$= 180° + \angle\frac{\beta}{\alpha} - \frac{1}{2}\angle\frac{\beta}{\alpha} + \frac{1}{2}\angle\frac{\delta}{\beta} - \frac{\varphi}{2}$$

$$= 180° + \frac{1}{2}\angle\frac{\delta}{\alpha} - \frac{\varphi}{2}.$$

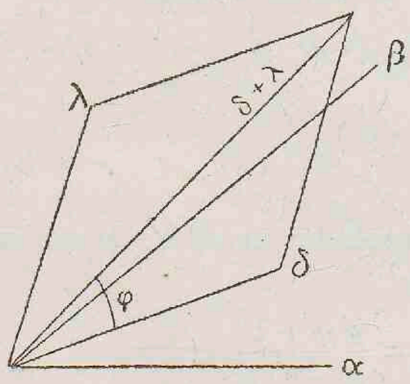
Hier gelden dezelfde opmerkingen omtrent de wortels der vergelijking

$$\cos^2\varphi + \frac{\cos\varphi}{c} - \frac{\cos d}{c} - 1 = 0$$

als aan het slot van de 1ste onderstelling.

Is echter $2c < 1$ en $d = 180°$, dan vindt men nu in het *tweede geval* twee reëele quaternions, die aan de vergelijking $q^2 = qa + b$ voldoen.

Is $d = 180°$ en $2c = 1$, dan vindt men nu in het *tweede geval* vier gelijke reëele quaternions, die aan de vergelijking $q^2 = qa + b$ voldoen.



3°. *Onderstelling.*

$$\angle\frac{\beta}{\alpha} > \angle\frac{\delta}{\alpha}.$$

Eerste geval.

$$2\angle\frac{\lambda}{\beta} = \angle\frac{\delta+\lambda}{\alpha}.$$

Trekt men beide leden dezer vergelijking van $\angle\frac{\lambda}{\alpha}$ af,

dan is $$\angle\frac{\beta}{\alpha} - \angle\frac{\lambda}{\beta} = \angle\frac{\delta+\lambda}{\lambda}.$$

Zij $\angle\frac{\delta+\lambda}{\delta} = \varphi$ en $2\angle\frac{\beta}{\alpha} - \angle\frac{\delta}{\alpha} = d$, dan is

$$\begin{aligned}\angle\frac{\delta+\lambda}{\lambda} &= \angle\frac{\beta}{\alpha} - \angle\frac{\lambda}{\beta}\\ &= \angle\frac{\beta}{\alpha} - \angle\frac{\lambda}{\beta} + \angle\frac{\beta}{\alpha}\\ &= 2\angle\frac{\beta}{\alpha} - \angle\frac{\delta}{\alpha} - \angle\frac{\delta+\lambda}{\lambda} - \varphi\\ &= \frac{d-\varphi}{2}\end{aligned}$$

$\angle\frac{\delta}{\lambda}$ is dan $= \frac{d+\varphi}{2}$.

De hoek φ wordt dan, evenals bij de vorige onderstellingen, gevonden uit de vergelijking

$$\cos^2\varphi + \frac{\cos\varphi}{c} - \frac{\cos d}{c} - 1 = 0$$

en $T\lambda$ uit

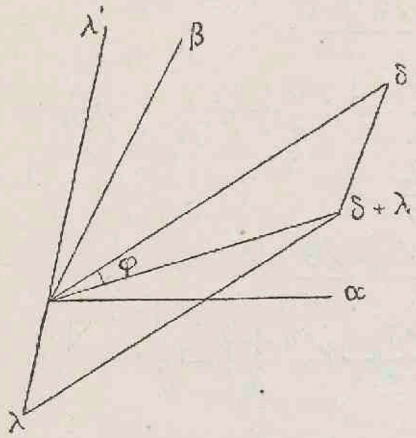
$$\frac{T\lambda}{T\delta} = \frac{\sin\varphi}{\sin\left(\frac{d-\varphi}{2}\right)}.$$

Men bepale nu $\angle\frac{\lambda}{\beta}$, als volgt:

$$\begin{aligned}\angle\frac{\lambda}{\beta} &= \angle\frac{\beta}{\alpha} - \angle\frac{\delta+\lambda}{\lambda}\\ &= \angle\frac{\beta}{\alpha} - \left(\angle\frac{\beta}{\alpha} - \frac{1}{2}\angle\frac{\delta}{\alpha}\right) + \frac{\varphi}{2}.\\ &= \frac{1}{2}\angle\frac{\delta}{\alpha} + \frac{\varphi}{2}.\end{aligned}$$

Tweede geval. $$2\angle\frac{\lambda'}{\beta} = \angle\frac{\delta+\lambda}{\alpha}.$$

Beide leden met $180° - \angle\frac{\lambda'}{\alpha}$ of $\angle\frac{\lambda}{\alpha}$ vermeerderende krijgt men



$$\angle\frac{\delta+\lambda}{\lambda} = 180° + \angle\frac{\lambda'}{\beta} - \angle\frac{\beta}{\alpha}.$$

$$2\angle\frac{\delta+\lambda}{\lambda} = 360° - \varphi - \angle\frac{\beta}{\delta} - \angle\frac{\beta}{\alpha}$$

$$\angle\frac{\delta+\lambda}{\lambda} = 180° - \frac{d+\varphi}{2}$$

$$\angle\frac{\lambda}{\delta} \text{ is dan } = 180° - \frac{d-\varphi}{2}.$$

De hoek φ wordt dan evenals bij de vorige onderstelling gevonden uit de vergelijking

$$cos^2\varphi + \frac{cos\,\varphi}{c} - \frac{cos\,d}{c} - 1 = 0.$$

$T\lambda$ bepale men dan uit de vergelijking

$$\frac{T\lambda}{T\delta} = \frac{sin\,\varphi}{sin\left(\frac{d+\varphi}{2}\right)}.$$

Is φ bekend, dan kan men $\angle\frac{\lambda}{\beta}$ berekenen, als volgt:

$$\angle\frac{\lambda}{\beta} = 180° + \angle\frac{\lambda'}{\beta}$$

$$= 180° + \angle\frac{\delta+\lambda}{\lambda} - 180° + \angle\frac{\beta}{\alpha}$$

$$= 180° - \frac{\varphi}{2} - \left(\angle\frac{\beta}{\alpha} - \frac{1}{2}\angle\frac{\delta}{\alpha}\right) + \angle\frac{\beta}{\alpha}$$

$$= 180° + \frac{1}{2}\angle\frac{\delta}{\alpha} - \frac{\varphi}{2}.$$

Het zij hier opgemerkt, dat bij deze onderstelling $2\angle\frac{\beta}{\alpha} - \angle\frac{\delta}{\alpha} = d$ kan varieeren tusschen 0 en 720°.

Zoo zal men bijv. niet alleen voor $2c = 1$ en $d = 180°$

maar ook voor $2c = 1$ en $d = 540^\circ$ vier reëele quaternions vinden, die aan de vergelijking $q^2 = qa + b$ voldoen.

§ 26. De voorwaarde, dat twee quaternions

$$q = w + ix + jy + kz \text{ en } q' = w' + ix' + jy' + kz'$$

in hetzelfde vlak zijn gelegen, is dat

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'} = \text{constante.}$$

Is toch aan die voorwaarde voldaan, dan staan hunne vlakken loodrecht op vectoren, die dezelfde richting hebben.

Zij kunnen dan geschreven worden

$$q = w + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,.\,l \qquad \text{en}$$
$$q' = w' + \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,.\,l$$

waarin l de eenheidsvector

$$\frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}}\,.\,i + \frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}}\,.\,j + \frac{z}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}}\,.\,k$$

aanduidt.

Wil men het quaternion $q = w + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,.\,l$ in den vorm $\frac{\beta}{\alpha}$ schrijven, dan is

$$tang \angle \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}}{w} \qquad \text{en}$$

$$\frac{T\beta}{T\alpha} = \frac{w}{\cos \angle \frac{\beta}{\alpha}} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + w^2}.$$

§ 27. *Voorbeeld.* Zij gegeven de vergelijking

$$q^2 = q(2\sqrt{3} + i + \frac{j}{2}\sqrt{3} + \frac{3}{2}k) +$$
$$+ (-4\sqrt{6} + 2i\sqrt{2} + j\sqrt{6} + 3k\sqrt{2})$$

De vlakken van de beide gegeven quaternions vallen hier samen, daar

$$\frac{2\sqrt{2}}{1} = \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{2}}{3} = \text{constante}$$

De eenheidsvector l is hier $= \frac{i}{2} + \frac{j}{4}\sqrt{3} + \frac{3}{4}k.$

De tangens van den hoek van het quaternion $\frac{\beta}{\alpha}$ is $\frac{1}{\sqrt{3}}$, en die van het quaternion $\frac{\delta}{\alpha}$ is $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ derhalve is

$$\angle\frac{\beta}{\alpha} = 30^\circ \text{ en } \angle\frac{\delta}{\alpha} = 150^\circ.$$

Men heeft hier te doen met de eerste der drie onderstellingen, daar $\angle\frac{\delta}{\alpha}$ grooter is dan $2\angle\frac{\beta}{\alpha}$

$$d = \angle\frac{\delta}{\alpha} - 2\angle\frac{\beta}{\alpha} = 90^\circ.$$

Verder is $\frac{T\beta}{T\alpha} = 4$ en $\frac{T\delta}{T\alpha} = 8\sqrt{2}.$

Kiest men $T\alpha = 1$, dan is $T\beta = 4$ en $T\delta = 8\sqrt{2}$

dus $$\frac{2\,T\alpha\,T\delta}{(T\beta)^2} = c = \sqrt{2}.$$

De vierkantsvergelijking in $\cos\varphi$ wordt nu

$$\cos^2\varphi + \frac{\cos\varphi}{\sqrt{2}} - 1 = 0.$$

De 1ste wortel van deze vergelijking is

$$\cos\varphi = -\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2},$$

zoodat $\varphi = 45^\circ$, daar φ niet grooter kan zijn dan 180°.

Nu is $$\angle\frac{\lambda}{\beta} = \frac{1}{2}\angle\frac{\delta}{\alpha} - \frac{1}{2}\varphi = 52^\circ 30'$$

en $$T\lambda = \frac{T\delta \sin\varphi}{\sin\frac{1}{2}(d-\varphi)} = \frac{8}{\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}}$$

en $$\frac{T\lambda}{T\beta} = \frac{4}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}} = 2\sqrt{4+2\sqrt{2}}.$$

$$sin\, 52^\circ 30' = sin\,(30^\circ + 22^\circ 30') = \frac{1}{4}\sqrt{2+\sqrt{2}} + \frac{1}{4}\sqrt{6-3\sqrt{2}}$$

$$cos\, 52^\circ 30' = cos\,(30^\circ + 22^\circ 30') = \frac{1}{4}\sqrt{6+3\sqrt{2}} - \frac{1}{4}\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

Men behoeft nu slechts in:

$$\frac{T\lambda}{T\beta}\left(cos \angle\frac{\lambda}{\beta} + sin \angle\frac{\lambda}{\beta}\,.\,l\right) = \frac{\lambda}{\beta} = q_1$$

voor $T\lambda$, $T\beta$, $cos \angle\frac{\lambda}{\beta}$, $sin \angle\frac{\lambda}{\beta}$ en l de respectievelijke waarden te substitueeren, om het gezochte quaternion q_1 te vinden.

Na eenige herleiding vindt men dan

$$q_1 = \sqrt{6} + \sqrt{3} - 1 + (\sqrt{2} + 1 + \sqrt{3})\left(\frac{i}{2} + \frac{j}{4}\sqrt{3} + \frac{3}{4}k\right).$$

De hoek van den tweeden reëelen quaternion-wortel, dien wij $\frac{\lambda'}{\beta}$ zullen noemen, is $180^\circ + \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{2}\angle\frac{\delta}{\alpha}$,

zoodat $$\angle\frac{\lambda'}{\beta} = 277^\circ 30'.$$

$T\lambda'$ bepale men uit de vergelijking

$$\frac{T\lambda'}{T\delta} = \frac{sin\ \varphi}{sin\left(\frac{d+\varphi}{2}\right)}.$$

Men vindt dan

$$T\lambda' = \frac{8}{cos\ 22^\circ 30'} = \frac{16}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$ en

$$\frac{T\lambda'}{T\beta} = \frac{4}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} = 2\sqrt{4-2\sqrt{2}}.$$

Nu is

$$cos\, 277^\circ 30' = cos\,(300^\circ - 22^\circ 30') = \frac{1}{4}\sqrt{2+\sqrt{2}} - \frac{1}{4}\sqrt{6-3\sqrt{2}}$$

$$sin\, 277^\circ 30' = sin\,(300^\circ - 22^\circ 30') = \frac{1}{4}\sqrt{2-\sqrt{2}} + \frac{1}{4}\sqrt{6+3\sqrt{2}}.$$

Substitueert men deze waarden in

$$q_2 = \frac{\lambda'}{\beta} = \frac{T\lambda'}{T\beta}\left(\cos \angle\frac{\lambda'}{\beta} + \sin \angle\frac{\lambda'}{\beta} . \iota\right)$$

dan vindt men na eenige herleiding

$$q_2 = \frac{\lambda'}{\beta} = (1 - \sqrt{6} + \sqrt{3})$$

$$-(-\sqrt{3} - \sqrt{2} + 1)\left(\frac{i}{2} + \frac{j}{4}\sqrt{3} + \frac{3}{4}k\right).$$

HOOFDSTUK V.

Nader onderzoek omtrent het aantal wortels der klasse $q^2 = qa + b$.

§ 28. Een quaternion laat zich op twee wijzen voorstellen, namelijk 1°. als de som van een vector en een scalar, in welk geval het zich in den vorm $q = w + ix + jy + kz$ laat schrijven, waarbij i, j en k drie onderling rechthoekige vectoren zijn, en 2°. als een quotient van twee vectoren $\frac{\beta}{\alpha}$.

In het laatste geval, waarbij het operatiekarakter van het quaternion duidelijker op den voorgrond treedt, is het voldoende, dat behalve het vlak en de hoek der beide vectoren, de verhouding hunner lengten (tensoren) bekend zij, om het quaternion geheel te bepalen.

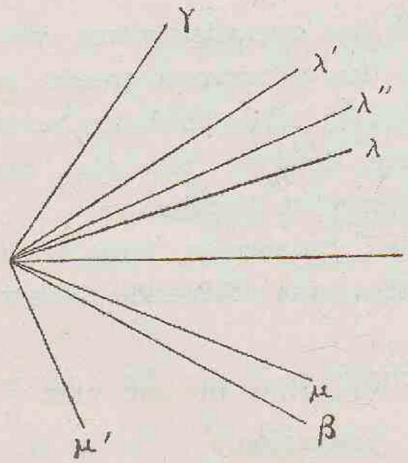
Beide schrijfwijzen voor een quaternion laten zich gemakkelijk in elkander omzetten, wat voldoende uit het voorgaande hoofdstuk blijkt.

Noemt men bij de tweede schrijfwijze β den *bovenvector* en α den *ondervector* van het quaternion $\frac{\beta}{\alpha}$, dan is het duidelijk, dat twee quaternions, waarvan de ondervectoren in een zelfde vlak liggen en elkander snijden, niet aan elkander gelijk kunnen zijn, tenzij hunne bovenvectoren ook in dit zelfde vlak gelegen zijn.

Een eerste vereischte voor de gelijkheid van twee quaternions is toch, dat hunne vlakken samenvallen of evenwijdig zijn.

Is nu de quaternionvergelijking $q^2 = qa + b$, waaruit q moet opgelost worden, gegeven, dan kan men zich de gegeven quaternions a en b zoo verplaatst en gedraaid denken, dat de bovenvector van a en de ondervector van b samenvallen, zoodat zij respectievelijk kunnen voorgesteld worden door $\frac{\alpha}{\beta}$ en $\frac{\gamma}{\alpha}$.

Voldoet het quaternion $q = \frac{\lambda}{\mu}$ aan de gegeven vergelijking, dan kan men zich dit quaternion zoo verplaatst en gedraaid denken, dat de ondervector in het vlak van het quaternion $\frac{\alpha}{\beta}$ ligt en het snijpunt der vectoren met het snijpunt van de vectoren α en β samenvalt.



Het is dan de vraag de ligging van den bovenvector te bepalen.

Nemen wij aan, dat deze vector niet in het vlak $\frac{\gamma}{\alpha}$ ligt.

Zij verder $T\mu = T\alpha$

$$\angle\frac{\mu'}{\mu} = \angle\frac{\alpha}{\beta}.$$

$T\mu' = T\beta$ en μ' in het

vlak $\frac{\alpha}{\beta}$ gelegen, λ' de snijlijn van het vlak $\frac{\lambda}{\mu}$ met het vlak $\frac{\gamma}{\alpha}$ en λ'' die van het vlak $\frac{\lambda}{\mu'}$ met het vlak $\frac{\gamma}{\alpha}$.

Denkt men zich nu het quaternion $\frac{\alpha}{\beta}$ in zijn vlak gedraaid, totdat α met μ en β met μ' samenvalt, dan zal het quaternion qa voorgesteld worden door $\frac{\lambda}{\mu'}$. Dit quaternion wordt nu in zijn vlak gedraaid, totdat de richting van zijn ondervector met die van λ'' samenvalt. Evenzoo wordt het quaternion $\frac{\gamma}{\alpha}$ in zijn vlak gedraaid, totdat de richting van zijn ondervector met die van λ'' samenvalt. De quaternions qa en b kan men nu samenstellen, daar zij een gemeenschappelijken ondervector hebben. De ondervector van het quaternion $qa + b$ zal dus gericht zijn volgens λ'' en de bovenvector zal buiten het vlak $\frac{\gamma}{\alpha}$ moeten vallen.

Het quaternion q^2 zal in het vlak $\frac{\lambda}{\mu}$ moeten gelegen zijn. Men denkt zich evenzoo dit quaternion in zijn vlak gedraaid, totdat zijn ondervector in richting met λ' samenvalt. De ondervectoren van de quaternions $qa + b$ en q^2, die gelijk moeten zijn, liggen dus in hetzelfde vlak en snijden zich, terwijl hunne bovenvectoren buiten dat vlak gelegen zijn. Volgens het bovenstaande kunnen de twee quaternions in dit geval niet gelijk zijn. Men komt dus, door aantenemen dat de vector λ buiten het vlak $\frac{\gamma}{\alpha}$ ligt, tot eene ongerijmdheid.

De vector λ moet dus noodzakelijk in het vlak $\frac{\gamma}{\alpha}$ gelegen zijn.

Vallen nu de vlakken van de quaternions $\frac{\alpha}{\beta}$ en $\frac{\gamma}{\alpha}$ samen, dan moet ook de vector λ in hun gemeenschappelijk vlak gelegen zijn.

De vergelijking $q^2 = qa + b$, waarin a en b coplanair zijn, bezit dus slechts wortels, die in het gemeenschappelijk vlak van a en b gelegen zijn. Het aantal wortels bedraagt dus in dit geval *vier*. (Zie § 24).

Is a een scalar en b een werkelijk quaternion, dan kan men gemakkelijk bewijzen, dat alle wortels in het gegeven vlak b moeten gelegen zijn.

Zij toch $\frac{\lambda}{\beta}$ een quaternion, dat aan de vergelijking voldoet en waarvan de ondervector in het vlak b gelegen is, terwijl de bovenvector buiten dat vlak valt, dan kan men zich het gegeven quaternion b zoo in zijn vlak verplaatst denken, dat zijn ondervector in richting en grootte met β samenvalt. Men kan ook het quaternion $\left(\frac{\lambda}{\beta}\right)^2$ zoo plaatsen, dat zijn ondervector in richting en grootte met β samenvalt. Nu is een vereischte voor de gelijkheid van de quaternions $\left(\frac{\lambda}{\beta}\right)^2$ en $\frac{a\lambda + \alpha}{\beta}$, waarin α de bovenvector van het gegeven quaternion b voorstelt, dat hunne vlakken samenvallen. De samenstelling van de vectoren $a\lambda$ en α moet dus een vector geven, die in het vlak van $\frac{\lambda}{\beta}$ gelegen is. Dit is evenwel onmogelijk, daar twee vectoren, die in twee elkaar snijdende vlakken gelegen zijn en hunne uiteinden in een punt der doorsnede hebben, bij samenstelling geen vector kunnen opleveren, die in één der beide vlakken gelegen is. Hiermede is dus aangetoond dat λ in het vlak b moet gelegen zijn.

Is a een werkelijk quaternion en b een scalar, en is $\frac{\lambda}{\beta}$ een quaternion, dat aan de vergelijking voldoet, waarvan de ondervector β in het vlak a gelegen is, terwijl λ buiten dat vlak ligt, dan kan men het quaternion a zoo kiezen, dat zijn bovenvector in richting en grootte met β samenvalt. Zij de ondervector van a dan α, dan zal de operatie $\frac{\lambda}{\beta}$ op $\frac{\beta}{\alpha}$ het quaternion $\frac{\lambda}{\alpha}$ opleveren. Het vlak van dit quaternion zal het vlak van $\frac{\lambda}{\beta}$ moeten snijden. Telt men nu bij het quaternion $\frac{\lambda}{\alpha}$ den scalar b op, dan zal het vlak van het quaternion niet veranderd worden. Men komt dus, door aantenemen, dat λ buiten het vlak a ligt, tot eene ongerijmdheid. Dus moeten ook in dit geval alle wortels in het gegeven vlak a gelegen zijn.

Het behoeft wel geen betoog, dat meer algemeen de klasse van vergelijkingen $q^n = qa + b$, waarin n een geheel positief getal voorstelt, en a en b in hetzelfde vlak liggen of kunnen opgevat worden in het door één van beiden bepaalde vlak gelegen te zijn, geen wortels kan bezitten, die niet in het gemeenschappelijk vlak van a en b liggen.

§ 29. Houden wij ons ten slotte bezig met de bepaling van het aantal wortels in het algemeene geval, namelijk wanneer a en b beiden werkelijke quaternions zijn en in verschillende vlakken liggen.

Hamilton laat zich daaromtrent onbepaald uit. Na er op gewezen te hebben, dat de quaternionvergelijking van den tweeden graad, door substitutie van $q = w + ix + jy + kz$ en analoge waarden voor de gegeven quaternions, aanleiding geeft tot vier tweede-machtsvergelijkingen, waaruit men bij eliminatie van drie der vier onbekende scalars, w, x, y en z eene zestiende-machtsvergelijking kan verwachten, zegt hij (zie Lectures on Quaternions. § 553):

„The particular class of quadratic equations, which is of the form $q^2 = qa + b$, appears to have *only six roots;* but *probably* it should be said, that the *ten missing roots*, are for this particular equation, *infinite*."

Trachten wij, ten einde het aantal wortels nauwkeuriger te bepalen, de hierboven bedoelde eliminatie uittevoeren, en de macht van de vergelijking in w te bepalen.

Men kan de vier scalarvergelijkingen (zie § 12) schrijven, als volgt:

$$(2w - e)^2 = (2x - f)^2 + (2y - g)^2 + (2z - h)^2 + e^2 + 4e' - f^2 - g^2 - h^2$$
$$(2w - e)(2x - f) = ef + 2hy - 2gz + 2f'$$
$$(2w - e)(2y - g) = eg - 2hx + 2fz + 2g'$$
$$(2w - e)(2z - h) = eh + 2gx - 2fy + 2h'.$$

Stel

$$2w - e = w', \quad 2x - f = x', \quad 2y - g = y', \quad 2z - h = z'$$

en
$$e^2 + 4e' - f^2 - g^2 - h^2 = c,$$

dan worden deze vergelijkingen

$$w'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 + c \quad \ldots\ldots \quad (1)$$
$$w'x' = ef + hy' - gz' + 2f' \quad \ldots\ldots \quad (2)$$
$$w'y' = eg - hx' + fz' + 2g' \quad \ldots\ldots \quad (3)$$
$$w'z' = eh + gx' - fy' + 2h' \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Verheft men alle leden van de drie laatste vergelijkingen in het kwadraat, en telt dan de vergelijkingen bij elkander op, dan is

$$w'^2(x'^2 + y'^2 + z'^2) = c' + (hy' - gz')^2 + (fz' - hx')^2 + (gx' - fy')^2 + 2(ef + 2f')(hy' - gz') + 2(eg + 2g')(fz' - hx') + 2(eh + 2h')(gx' - fy'). \quad (5)$$

wanneer men

$$(ef + 2f')^2 + (eg + 2g')^2 + (eh + 2h')^2 = c' \quad \text{stelt.}$$

Voor het 2^de^ lid van vergelijking (5) kan men schrijven

$$\begin{aligned} & c' + 2(hy' - gz')^2 + 2(fz' - hx')^2 + 2(gx' - fy')^2 \\ & + 4f'(hy' - gz') + 4g'(fz' - hx') + 4h'(gx' - fy') - h^2y'^2 \\ & - g^2z'^2 - f^2z'^2 - h^2x'^2 - g^2x'^2 - f^2y'^2 \\ & - (f^2x'^2 + g^2y'^2 + h^2z'^2) + f^2x'^2 + g^2y'^2 + h^2z'^2 \\ & + 2hgy'z' + 2fhx'z' + 2gfx'y'. \end{aligned}$$

Vermenigvuldigt men nu vergelijking (2), (3) en (4) respectievelijk met f, g en h, en telt ze dan bij elkander op, dan is

$$w'(fx' + gy' + hz') = e(f^2 + g^2 + h^2) + 2(ff' + gg' + hh').$$

Stelt men het 2^de^ lid der laatste vergelijking $= d$, dan is

$$w'^2(fx' + gy' + hz')^2 = d^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Men vermenigvuldigt nu, ten einde daaruit w' te elimineeren, de vergelijkingen (2) en (3) respectievelijk met y' en x', de vergelijkingen (3) en (4) met z' en y', en de vergelijkingen (2) en (4) met z' en x'. Men krijgt dan de drie volgende vergelijkingen,

$$\begin{aligned} e(fy' - gx') + 2(f'y' - g'x') + y'(hy' - gz') - x'(fz' - hx') &= 0 \\ e(gz' - hy') + 2(g'z' - h'y') + z'(fz' - hx') - y'(gx' - fy') &= 0 \\ e(hx' - fz') + 2(h'x' - f'z') + x'(gx' - fy') - z'(hy' - gz') &= 0. \end{aligned}$$

Vermenigvuldigt men deze vergelijkingen respectievelijk met h, f en g, en telt ze dan bij elkander op, dan vindt men de vergelijking

$$\begin{aligned} & 2h(g'x' - f'y') + 2f(h'y' - g'z') + 2g(f'z' - h'x') = \\ & (hy' - gz')^2 + (fz' - hx')^2 + (gx' - fy')^2. \end{aligned}$$

Voor het 1^ste^ lid dezer vergelijking kan men ook schrijven

$$- 2f'(hy' - gz') - 2g'(fz' - hx') - 2h'(gx' - fy'),$$

zoodat vergelijking (5) na vermenigvuldiging der beide leden met w'^2, de volgende gedaante aanneemt

$$w'^4(x'^2 + y'^2 + z'^2) = w'^2c'$$
$$- w'^2(f^2 + g^2 + h^2)(x'^2 + y'^2 + z'^2) + d^2.$$

Nu kan men de waarde van $x'^2 + y'^2 + z'^2$ uit vergelijking (1) in de laatste vergelijking substitueeren, men krijgt dan

$$w'^4(w'^2 - c) = w'^2c' - w'^2(f^2 + g^2 + h^2)(w'^2 - c) + d^2$$

of

$$w'^6 - (c - f^2 - g^2 - h^2)w'^4 - \{c' + c(f^2 + g^2 + h^2\}w'^2 - d^2 = 0.$$

Deze vergelijking bevat, behalve w', niets dan bekende grootheden; bij substitutie van $2w - e$ voor w' zal de macht van de vergelijking niet veranderen. Men vindt dus zes waarden voor w.

Is w bekend, dan bepale men x, y en z uit de determinanten

$$x = \frac{\begin{vmatrix} fw + f', & -h, & g \\ gw + g', & 2w - e, & -f \\ hw + h', & f, & 2w - e \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2w - e, & -h, & g \\ h, & 2w - e, & -f \\ -g, & f, & 2w - e \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2w - e, & fw + f', & g \\ h, & gw + g', & -f \\ -g, & hw + h', & 2w - e \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2w - e, & -h, & g \\ h, & 2w - e, & -f \\ -g, & f, & 2w - e \end{vmatrix}}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2w - e, & -h, & fw + f' \\ h, & 2w - e, & gw + g' \\ -g, & f, & hw + h' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2w - e, & -h, & g \\ h, & 2w - e, & -f \\ -g, & f, & 2w - e \end{vmatrix}}$$

§ 30. Resumeerende, kunnen wij het volgende omtrent de wortels der quaternionvergelijkingen van de klasse $q^2 = qa + b$, besluiten:

1°. Zijn a en b beiden scalars, dan is het aantal wortels *oneindig groot*.

2°. Zijn a en b coplanaire quaternions, of is één van beiden een scalar, zoodat zij opgevat kunnen worden in hetzelfde bepaalde vlak gelegen te zijn, dan is het aantal wortels *vier*. Alle wortels zijn dan in het gemeenschappelijke vlak van a en b gelegen. Er zijn dan steeds twee reëele en twee imaginaire wortels, behalve in enkele bijzondere gevallen (zie § 25), waarin men vier gelijke reëele wortels vindt.

3°. Zijn a en b beiden werkelijke quaternions, en in elkaar snijdende vlakken gelegen, dan is het aantal wortels *zes*, waarvan steeds twee reëel en vier imaginair zijn, behalve wanneer $S.\ \alpha\gamma = 0$ en $t = 0$, (zie § 14) in welk geval vier wortels reëel zijn.

STELLINGEN.

I.

De meening van Hamilton, dat aan de vergelijking $q^2 = qa + b$ tien oneindige wortels toekomen, is onjuist.

II.

Bij de door Hamilton gegeven methode ter oplossing van bovenstaande vergelijking, is het vraagstuk slechts opgelost, voor het geval dat de gegeven quaternions diplanair zijn.

III.

De regel door Hamilton gegeven, dat eene complanaire quaternionvergelijking van den n^{den} graad steeds n reëele wortels en niet meer in het gegeven vlak bezit, (Elements of quaternions, § 244) gaat niet algemeen door.

IV.

De oplossingsmethode, waarbij men de quaternionvergelijking in scalarvergelijkingen ontbindt, is te verkiezen, wanneer de vergelijking geen gegeven quaternions bevat, of wanneer deze in verschillende vlakken gelegen zijn.

V.

Complanaire quaternion-vergelijkingen bezitten geen wortels, die buiten het gemeenschappelijk vlak van de gegeven quaternions gelegen zijn.

VI.

De wortels van eene complanaire quaternionvergelijking van den n^{den} graad kunnen in n groepen verdeeld worden. Het kan dan evenwel voorkomen, dat meer dan n wortels tot eene zelfde groep behooren.

VII.

Hierop kan men eene methode gronden tot oplossing van complanaire quaternionvergelijkingen van den derden en vierden graad.

VIII.

Een lijncoordinatenstelsel, dat volkomen analoog is met het gewone rechthoekige Cartesiaansche puntcoordinatenstelsel, is niet mogelijk.

IX.

Van de methode van den integreerenden factor is voor de studie der differentiaalvergelijkingen weinig heil te verwachten.

X.

De ontdekking van de jaarlijksche vereffening der maan moet toegeschreven worden aan KEPLER.

XI.

Het is wenschelijk, het atoomgewicht van zuurstof onveranderlijk = 16 te stellen en dit als standaard te kiezen voor de berekening van alle andere atoomgewichten.

XII.

Ter voorstelling van de holoëdrische kristalvormen verdienen de symbolen van WEISS de voorkeur boven die van MILLER en NAUMANN.

XIII.

De absolute temperatuurschaal, zooals zij door THOMSON is gedefinieerd, is de eenige rationeele.

XIV.

De formule door Clausius gegeven voor de gemiddelde waarschijnlijke waarde van de weglengte der gasmoleculen, die in een in toestand van rust verkeerend medium verplaatst worden, mag slechts als eene benaderde worden beschouwd.

XV.

Het bewijs voor het beginsel der virtueele snelheden, zooals dat bij Sturm gegeven wordt, is niet voldoende.