



# Traagheidsmomenten en equivalente massas

<https://hdl.handle.net/1874/240327>

40192

Inys. 10 Dec. 189

J. J. VAN RIJN.

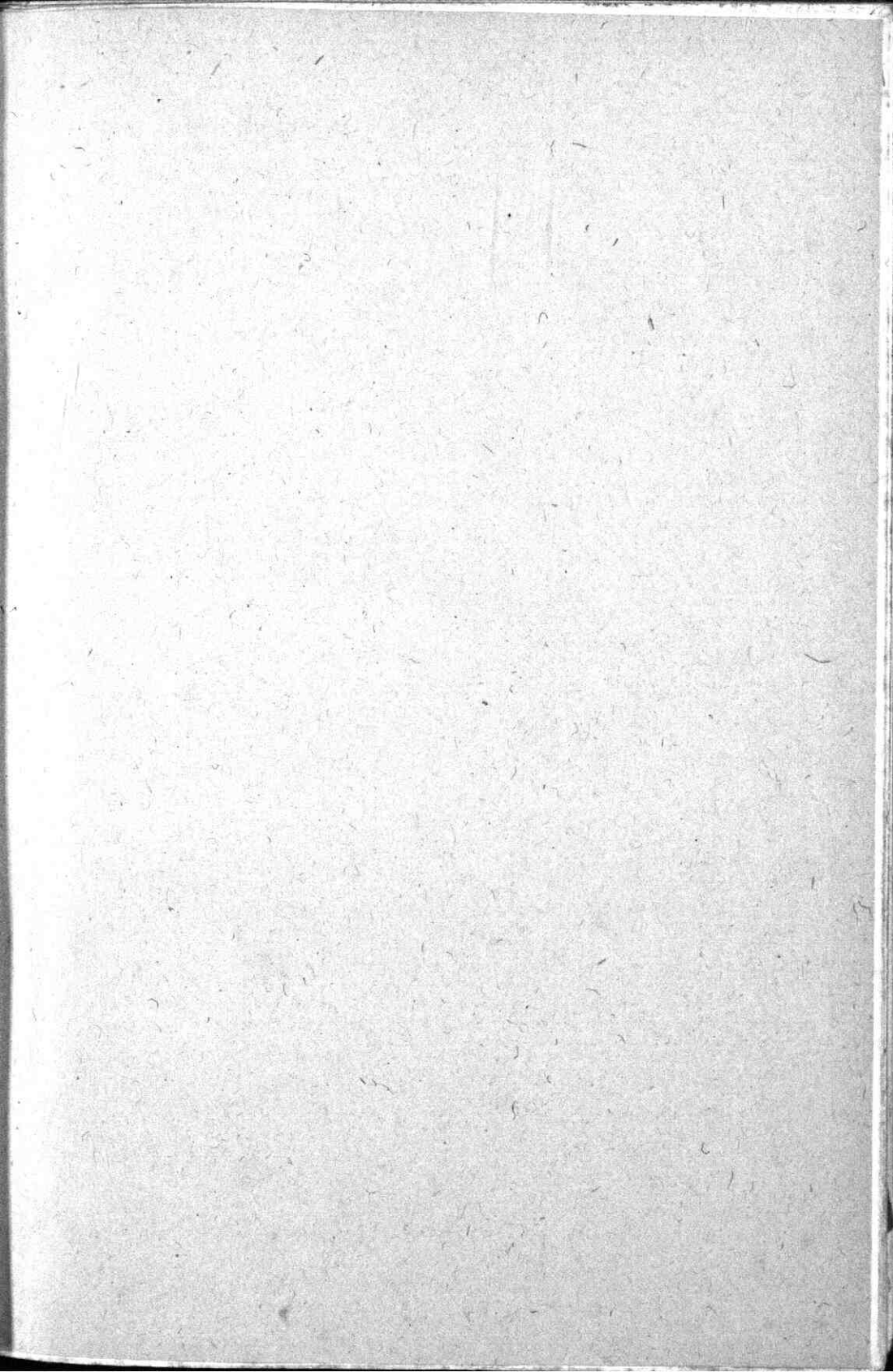
TRAAGHEIDSMOMENTEN

EN

EQUIVALENTE MASSAS.

U.

A. qu.  
192







TRAAGHEIDSMOMENTEN

EN

EQUIVALENTE MASSAS.

Typ. J. VAN BOEKHOVEN, Utrecht.

TRAAGHEIDSMOMENTEN  
EN  
EQUIVALENTE MASSAS.

PROEFSCHRIFT

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN

Doctor in de Wis- en Natuurkunde

AAN DE RIJKS-UNIVERSITEIT TE UTRECHT,

NA MACTHIGING VAN DEN RECTOR-MAGNIFICUS

DR. J. H. GALLÉE,

Hoogleeraar in de Faculteit der Letteren en Wijsbegeerte.

VOLGENS BESLUIT VAN DEN SENAAAT DER UNIVERSITEIT

TEGEN DE BEDENKINGEN VAN DE FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE

TE VERDEDIGEN

op Vrijdag den 10<sup>den</sup> October 1890, des namiddags ten 3 ure,

DOOR

JOHANNES JACOBUS VAN RIJN,

geboren te Boxmeer.

---

UTRECHT,  
J. VAN BOEKHOVEN,  
1890.

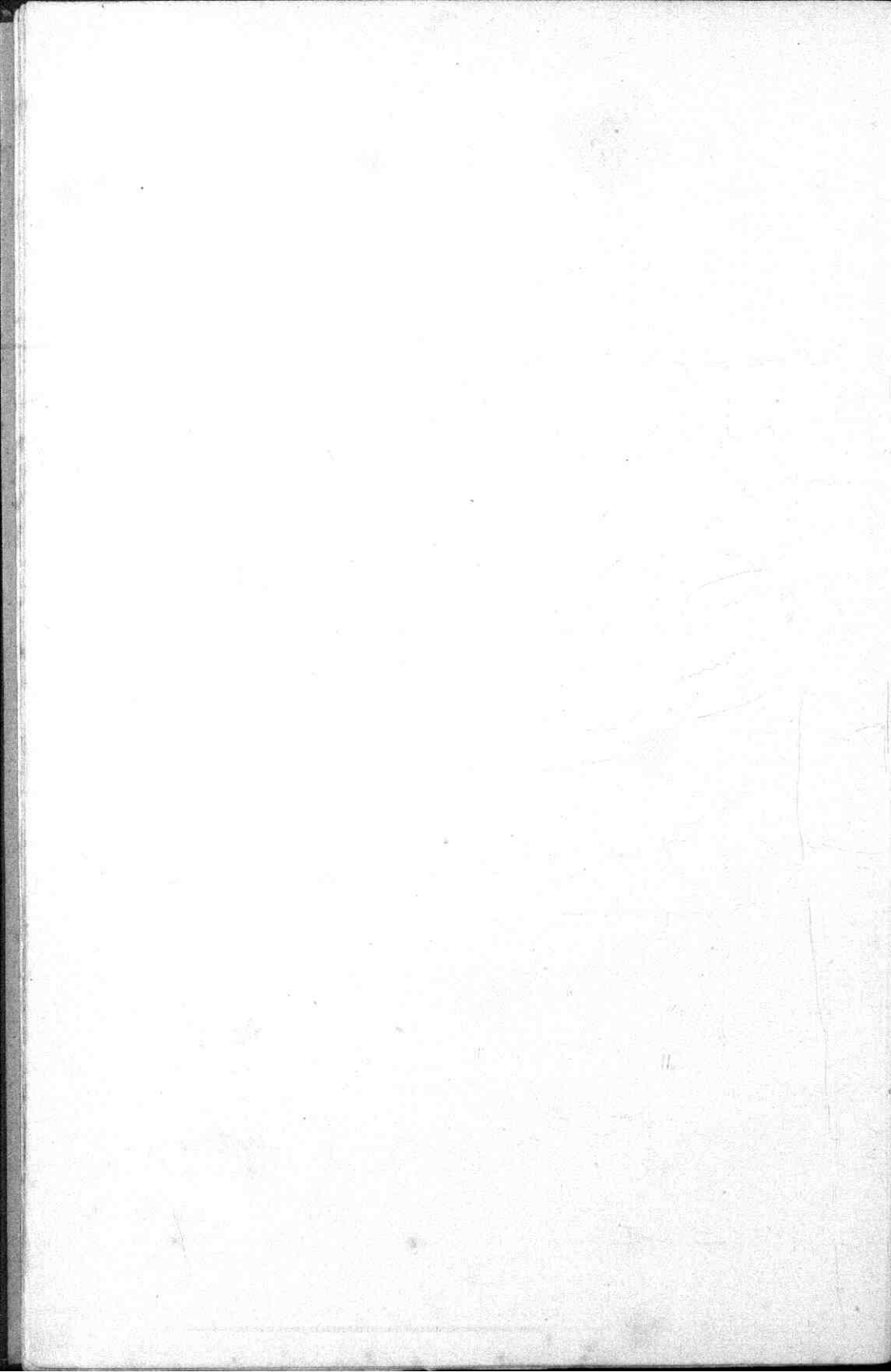






AAN MIJNE OUDERS.





*Aan het einde mijner academische loopbaan gekomen, breng ik gaarne mijnen oprechten dank aan U, Hooggel. Heeren, Professoren in de Faculteit der Wis- en Natuurkunde, wier onderwijs en voorlichting ik heb mogen genieten.*

*Met innig leedwezen herdenk ik den overleden Hoogleeraar BUYS BALLOT, aan wiens onderwijs ik zoo veel verschuldigd ben.*

*Hooggel. GRINWIS, hooggeachte promotor, sedert tal van jaren hebt gij mij, onder allerlei omstandigheden, door uwen raad voorgelicht en mij bij mijne studiën gesteund. Ontvang daarvoor, alsmede voor uwe hulp bij het samenstellen van dit proefschrift, mijnen hartelijken dank.*

---



## ERRATA.

---

Bladz. 4 regel 11 v. boven staat:  $\frac{\text{constante}}{\Sigma(mr^2)}$  lees:  $\frac{\text{constante}}{\Sigma m}$

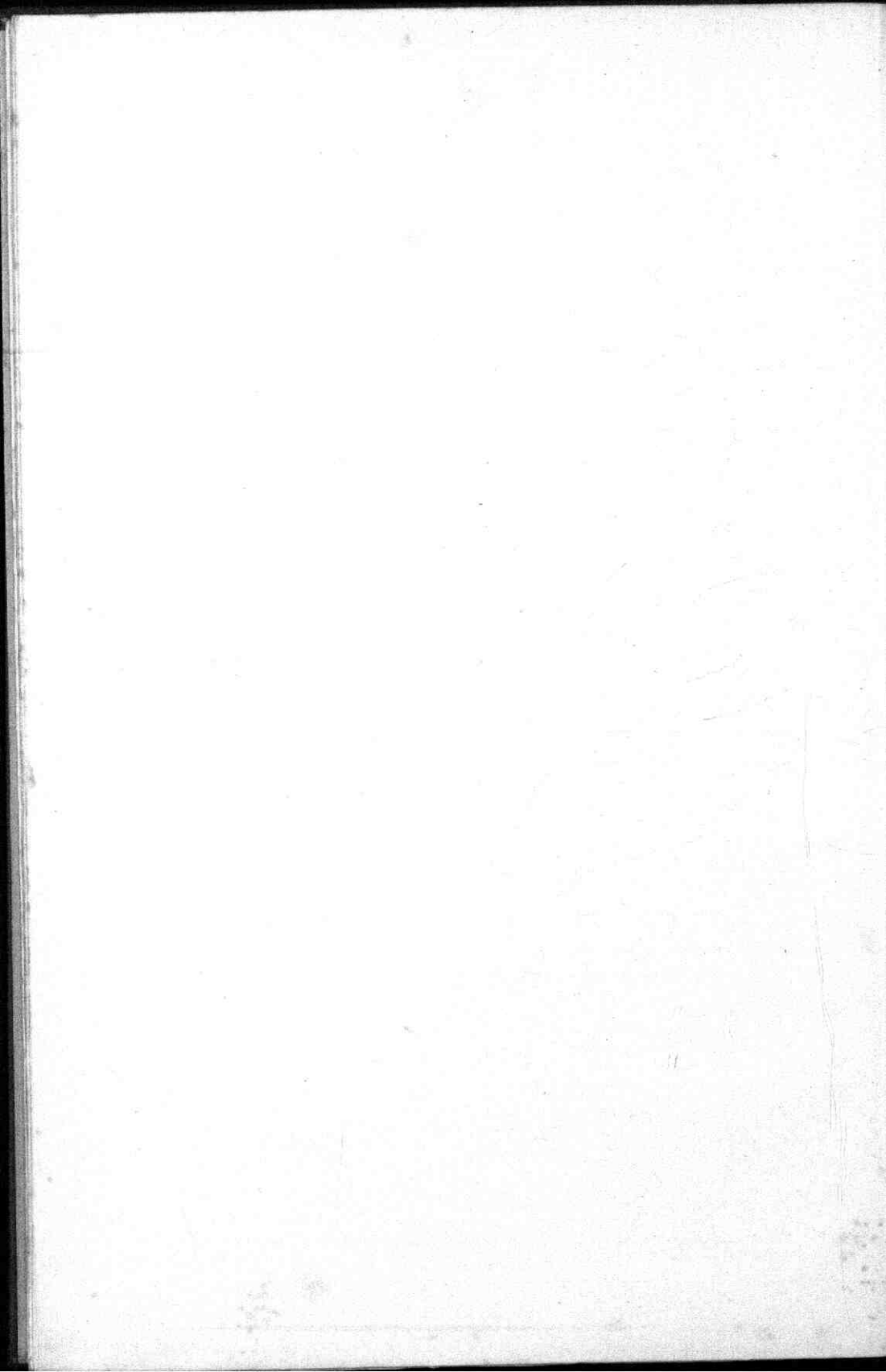
» 4 » 14 » » » :  $\Sigma\left(m \cdot \frac{\epsilon^4}{\rho^2}\right)$  » :  $\frac{\epsilon^4}{\rho^2} \Sigma m$

» 19 » 13 » onder » : der- moet vervallen

» 37 » 10 » » » : liggen lees: ligt

» 53 » 5 » » » : de » : een

---



# I N H O U D.

---

## HOOFDSTUK I.

### Traagheidsellipsoïden. — Traagheidsmomenten.

	Bladz.
<i>A.</i> Bepalingen . . . . .	I
<i>B.</i> Traagheidsellipsoïden. . . . .	2
<i>C.</i> Hoofdtraagheidsassen. . . . .	8
<i>D.</i> Berekening van traagheidsmomenten . . . . .	24
$\alpha$ . Methode van HUYGHENS . . . . .	24
$\beta$ . Berekening door Integratie . . . . .	29
$\gamma$ . Bepaling der traagheidsmomenten door Differentiatie.	35
$\delta$ . Met behulp van Symmetrievlakken . . . . .	37
$\epsilon$ . Traagheidsmomenten van Omwentelingslichamen. . . . .	40
$\zeta$ . Methode van TOWNSEND . . . . .	42
$\eta$ . Methode bij gelijkvormige stelsels. . . . .	44
$\theta$ . Met behulp van toegevoegde middellijnen . . . . .	48
$\iota$ . Inversie methode. . . . .	50
<i>E.</i> Traagheidsmomenten van eenige stelsels . . . . .	52

---



## HOOFDSTUK II.

## Traagheidsproducten.

	Bladz.
<i>A.</i> Invloed van de draaiing der vlakken om eene as. . . . .	61
<i>B.</i> Invloed van evenwijdige verplaatsing der as . . . . .	64
<i>C.</i> Draaiing der as om een vast punt . . . . .	71
<i>D.</i> MOHR-LAND'sche Methode. . . . .	76

## HOOFDSTUK III.

## Equivalentente massas . . . . . 89

<i>A.</i> Stelsels die ten opzichte van eene bepaalde as gelijke traagheidsmomenten hebben. . . . .	90
<i>B.</i> Theoremas over equivalentente stelsels . . . . .	105
<i>C.</i> Toepassingen. . . . .	108
<i>D.</i> MÖBIUS-GRASSMANN'sche methode . . . . .	118
Literatuur . . . . .	127
Stellingen . . . . .	129

## HOOFDSTUK I.

---

### Traagheidsellipsoiden. — Traagheidsmomenten.

---

#### A. Bepalingen.

1. — Is  $m$  de massa van een punt van een massastelsel en  $p$  de afstand van dat punt tot een punt  $O$ , dan wordt de som der producten van elk massadeeltje van het stelsel met het vierkant van zijn afstand tot  $O$ , voorgesteld door  $\Sigma (mp^2)$ , het *Polaire traagheidsmoment* van het massastelsel ten opzichte van het punt  $O$  genoemd.

Bepaalt men de som der producten  $mr^2$ , waarin  $r$  den afstand tot een rechte lijn beteekent, dan noemt men  $\Sigma (mr^2)$  het *Traagheidsmoment* ten opzichte van die lijn.

Bepaalt men ten slotte de som der producten  $mq^2$ , waarin  $q$  den afstand tot een vlak beteekent, dan wordt  $\Sigma (mq^2)$  het *Vlakte traagheidsmoment* ten opzichte van dit vlak genoemd.

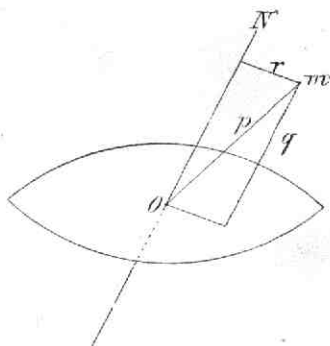
2. — Neemt men in een vlak een punt  $O$  aan, en richt men in  $O$  de normaal op het vlak, dan is

$$p^2 = q^2 + r^2$$

waaruit volgt:

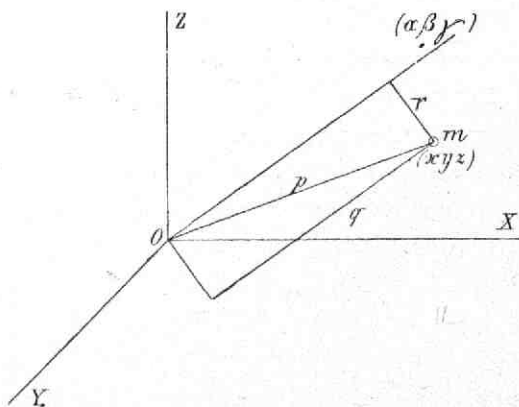
$$\Sigma(mr^2) = \Sigma(mp^2) - \Sigma(mq^2)$$

of het *Traagheidsmoment* ten opzichte van  $ON$  is gelijk het *Polaire traagheidsmoment* verminderd met het *Vlakte traagheidsmoment*.



### B. Traagheidsellipsoiden.

3. — Neemt men een punt  $O$  als oorsprong van een rechthoekig coördinatenstelsel in de ruimte aan, en brengt men door  $O$  eene lijn, welke met de coördinatenassen de hoeken  $\alpha$ ,  $\beta$  en  $\gamma$  maakt, dan kan men het traagheidsmoment van een massastelsel ten opzichte van die lijn vinden, want



$$p^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$q = x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma$$

dus  $\Sigma(m p^2) = \Sigma(m x^2) + \Sigma(m y^2) + \Sigma(m z^2)$  en

$$\begin{aligned} \Sigma(m q^2) &= \cos^2 \alpha \Sigma(m x^2) + \cos^2 \beta \Sigma(m y^2) + \cos^2 \gamma \Sigma(m z^2) \\ &\quad + 2 \cos \beta \cos \gamma \Sigma(m y z) \\ &\quad + 2 \cos \gamma \cos \alpha \Sigma(m z x) \\ &\quad + 2 \cos \alpha \cos \beta \Sigma(m x y) \end{aligned}$$

waaruit

$$\begin{aligned} \Sigma(m r^2) &= (1 - \cos^2 \alpha) \Sigma(m x^2) + (1 - \cos^2 \beta) \Sigma(m y^2) \\ &\quad + (1 - \cos^2 \gamma) \Sigma(m z^2) - 2 \cos \beta \cos \gamma \Sigma(m y z) - \\ &\quad - 2 \cos \gamma \cos \alpha \Sigma(m z x) - 2 \cos \alpha \cos \beta \Sigma(m x y) \end{aligned}$$

of daar:  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$  is

$$\begin{aligned} \Sigma(m r^2) &= \cos^2 \alpha \Sigma m (y^2 + z^2) + \cos^2 \beta \Sigma m (z^2 + x^2) \\ &\quad + \cos^2 \gamma \Sigma m (x^2 + y^2) - 2 \cos \beta \cos \gamma \Sigma(m y z) - \\ &\quad - 2 \cos \gamma \cos \alpha \Sigma(m z x) - 2 \cos \alpha \cos \beta \Sigma(m x y). \end{aligned}$$

Stel nu ter verkorting:

$$A = \Sigma m (y^2 + z^2) \quad B = \Sigma m (z^2 + x^2) \quad C = \Sigma m (x^2 + y^2)$$

$$D = \Sigma(m y z) \quad E = \Sigma(m z x) \quad F = \Sigma(m x y)$$

dan wordt het traagheidsmoment:

$$\begin{aligned} \Sigma(m r^2) &= A \cos^2 \alpha + B \cos^2 \beta + C \cos^2 \gamma - 2 D \cos \beta \cos \gamma - \\ &\quad - 2 E \cos \gamma \cos \alpha - 2 F \cos \alpha \cos \beta, \end{aligned}$$

terwijl het *Vlakte* traagheidsmoment  $\Sigma(m q^2)$ , na invoering van  $A' = \Sigma(m x^2)$   $B' = \Sigma(m y^2)$   $C' = \Sigma(m z^2)$  wordt

$$\begin{aligned} \Sigma(m q^2) &= A' \cos^2 \alpha + B' \cos^2 \beta + C' \cos^2 \gamma + 2 D \cos \beta \cos \gamma \\ &\quad + 2 E \cos \gamma \cos \alpha + 2 F \cos \alpha \cos \beta, \end{aligned}$$

terwijl het blijkt dat de grootheden  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ ,  $D$ ,  $E$  en  $F$  de volgende eigenschappen bezitten.

$$1^0. \quad A + B \geq C.$$

$$2^0. \quad A + B + C = 2 P, \text{ waarin } P \text{ het polaire traagheidsmoment beteekent.}$$

$$3^0. \quad A + A' = P.$$

$$4^0. \quad \frac{1}{2} A \geq D.$$

$$5^0. \quad A \cdot B \geq F^2.$$

$$6^{\circ}. (A + B - C)(B + C - A) \geq 4E^2.$$

$$7^{\circ}. (A + B - C)(B + C - A)(A + C - B) \geq 8DEF.$$

4. — Noemt men  $M$  de totale massa van het stelsel en kiest men een grootheid  $k$ , zoodanig dat  $\Sigma(mr^2) = Mk^2$  is, dan noemt men  $k$  den *traagheidstraal*.

Zet men nu op elke as ( $\alpha \beta \gamma$ ), aan weerszijden van  $O$  stukken  $OM$  af, wier lengten omgekeerd evenredig zijn met den wortel uit het traagheidsmoment ten opzichte van

die as, dus  $OM = \varrho = \sqrt{\frac{\text{constante}}{\Sigma(mr^2)}}$  of  $\varrho^2 \Sigma(mr^2) = \text{const.}$

en kiest men de constante zoodanig dat, daar

$$\Sigma(mr^2) = k^2 \Sigma m \text{ is, } \varrho k = \epsilon^2 \text{ is, dus } \frac{\text{constante}}{\Sigma(mr^2)} = \epsilon^4,$$

waar  $\epsilon$  een constante is, die nog willekeurig gekozen kan worden, dan wordt

$$\Sigma(mr^2) = \Sigma \left( m \cdot \frac{\epsilon^4}{\varrho^2} \right) = A \cos^2 \alpha + B \cos^2 \beta + C \cos^2 \gamma -$$

$$- 2 D \cos \beta \cos \gamma - 2 E \cos \gamma \cos \alpha - 2 F \cos \alpha \cos \beta,$$

of na vermenigvuldiging met  $\varrho^2$  en bedenkende dat  $\varrho \cos \alpha$ ,  $\varrho \cos \beta$  en  $\varrho \cos \gamma$  de coördinaten  $x$ ,  $y$  en  $z$  van de punten  $M$  zijn, dan ontstaat voor de meetkundige plaats der punten  $M$  de vergelijking

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 2Dyz - 2Exz - 2Fxy = \Sigma(m \cdot \epsilon^4).$$

Hieruit blijkt dus, dat de punten  $M$  op een oppervlak van den tweeden graad liggen.

5. — Daar nu, volgens de bepaling, een traagheidsmoment een positieve grootheid is, volgt hieruit dat

$\varrho = \sqrt{\frac{\text{constante}}{\Sigma(mr^2)}}$  bestaanbaar is, en dat derhalve het

oppervlak van den tweeden graad een *Ellipsoïde* moet zijn, die den oorsprong van coördinaten tot middelpunt heeft.

Daar de onderling rechthoekige coördinatenassen willekeurig gekozen zijn, kan men deze assen altijd laten samenvallen met de assen van de Ellipsoïde waardoor de grootheden

$$D = \Sigma(myz), E = \Sigma(mzx) \text{ en } F = \Sigma(mxy)$$

nul worden en onze vergelijking zich vereenvoudigt tot

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = \Sigma m \cdot \epsilon^4 \dots \dots (1)$$

wat de *Cauchy-Poinsot'sche* traagheidsellipsoïde genoemd wordt, terwijl  $A$ ,  $B$  en  $C$  *Hoofdtraagheidsmomenten* en de coördinatenassen *Hoofdtraagheidsassen* zijn.

Is het punt  $O$  het zwaartepunt van het massastelsel dan heet de Ellipsoïde *Centraalellipsoïde*.

6. — Handelt men op dezelfde wijze bij het vlaktraagheidsmoment

$$\Sigma(mq^2) = A' \cos^2 \alpha + B' \cos^2 \beta + C' \cos^2 \gamma + 2 D \cos \beta \cos \gamma \\ + 2 E \cos \gamma \cos \alpha + 2 F \cos \alpha \cos \beta$$

den traagheidstraal  $l$  noemende en aan weerszijde van  $O$  op de normaal stukken  $OM = q$  uitzettende die omgekeerd evenredig zijn met den wortel uit het vlaktraagheidsmoment, dus  $q = \sqrt{\frac{\text{constante}}{\Sigma(ml^2)}}$  en kiest men nu de

constante weder zoo, dat  $\frac{\text{constante}}{\Sigma m} = \epsilon^4$  is, dan krijgt men

$$A'x^2 + B'y^2 + C'z^2 + 2 Dyz + 2 Ezx + 2 Fxy = \Sigma(m \cdot \epsilon^4)$$

of herleid op hoofdassen

$$A'x^2 + B'y^2 + C'z^2 = \Sigma(m \cdot \epsilon^4) \dots \dots (2)$$

wat de Ellipsoïde van BINET genoemd wordt.

7. — Noemt men de Hoofdtraagheidsstralen van (1)  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , zoodat dus  $A = \Sigma m \cdot a^2$   $B = \Sigma m \cdot b^2$   $C = \Sigma m \cdot c^2$  is,



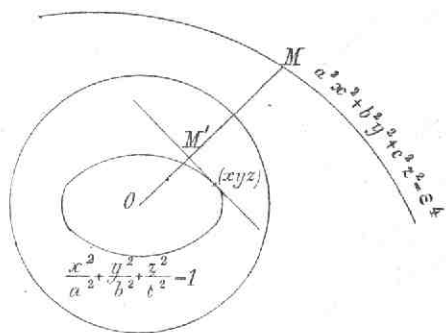
dan wordt (1)

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = \epsilon^4.$$

Past men nu de methode der reciproke voerstralen toe, dan is de *reciproke* ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

want beschrijft men om  $O$  een bol met straal  $\epsilon$  en bepaalt



voor alle punten  $M$  eener figuur hare poolvlakken ten opzichte van den bol dan omhullen die vlakken eenefiguur die de *reciproke* van de eerste genoemd wordt. Snijdt dus het poolvlak den voerstraal

$$OM = \rho \text{ in } M'$$

waardoor dus  $OM' = k$  den afstand van  $O$  tot het poolvlak aangeeft, zoo is  $\rho k = \epsilon^2$ .

Trekt men nu aan  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  een raakvlak, dan is de vergelijking van dit vlak

$$\frac{x}{a^2} \cdot X + \frac{y}{b^2} \cdot Y + \frac{z}{c^2} \cdot Z = 1,$$

waar  $X, Y, Z$  loopende coördinaten zijn; want in het algemeen is de vergelijking van het raakvlak aan  $f(x, y, z) = 0$ ,

$$\frac{df}{dx}(X - x) + \frac{df}{dy}(Y - y) + \frac{df}{dz}(Z - z) = 0.$$

De cosinussen der richtingshoeken  $(l, m, n)$  van de normaal uit  $O$  op dit vlak zijn

$$\cos l = \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}} \quad \cos m = \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}} \quad \cos n = \frac{1}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}$$

waar  $p = -\frac{df}{dX} : \frac{df}{dZ} = -\frac{c^2 x}{a^2 z}$  en

$q = -\frac{df}{dY} : \frac{df}{dZ} = -\frac{c^2 y}{b^2 z}$  is

dus  $\cos l = \frac{x}{a^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}$

daar  $\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}} = k$  is,

volgt  $\cos l = \frac{x}{a^2} \cdot k$

evenzoo  $\cos m = \frac{y}{b^2} \cdot k$  en  $\cos n = \frac{z}{c^2} \cdot k$

dus

$$a \cos l = \frac{x}{a} \cdot k \quad b \cos m = \frac{y}{b} \cdot k \quad c \cos n = \frac{z}{c} \cdot k$$

waaruit

$$a^2 \cos^2 l + b^2 \cos^2 m + c^2 \cos^2 n = \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) \cdot k^2$$

of  $a^2 \cos^2 l + b^2 \cos^2 m + c^2 \cos^2 n = k^2$

en daar  $OM \cdot OM' = \epsilon^2$  dus  $k = \frac{\epsilon^2}{\rho}$  is

$$a^2 \cos^2 l + b^2 \cos^2 m + c^2 \cos^2 n = \frac{\epsilon^4}{\rho^2}$$

of omdat  $\rho \cos l = x$   $\rho \cos m = y$   $\rho \cos n = z$   
de coördinaten van  $M$  zijn

$$a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2 = \epsilon^4$$

dus ligt  $M$  op de Cauchy-Poinsot'sche ellipsoïde en is het bewijs geleverd.

8. — Past men dezelfde methode toe op de Ellipsoïde van BINET.

$$A'x^2 + B'y^2 + C'z^2 = M\epsilon^4$$

dan krijgt men van deze de reciproke, zijnde

$$\frac{x^2}{A'} + \frac{y^2}{B'} + \frac{z^2}{C'} = \frac{1}{M},$$

zoodat men ten slotte 4 Ellipsoïden heeft

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = M\epsilon^4. \dots (\text{CAUCHY-POINSON}).$$

$$A'x^2 + B'y^2 + C'z^2 = M\epsilon^4. \dots (\text{BINET}).$$

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = \frac{1}{M} \dots (\text{CLEBSCH}).$$

$$\frac{x^2}{A'} + \frac{y^2}{B'} + \frac{z^2}{C'} = \frac{1}{M} \dots (\text{LEGENDRE}).$$

Hiervan zijn dus de 3<sup>e</sup> en 4<sup>e</sup> ellipsoïde de reciproken van de 1<sup>e</sup> en 2<sup>e</sup>.

### C. Hoofdtraagheidsassen.

9. — In 4. — is de traagheidsellipsoïde

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 2Dyz - 2Exz - 2Fxy = \Sigma m \cdot \epsilon^4$$

gevonden, waaruit blijkt dat de traagheidsproducten ten opzichte van de assen de halve coëfficiënten zijn van  $-yz$ ;  $-xz$  en  $-xy$ .

Bij herleiding der ellipsoïde op hoofdassen verdwijnen deze coëfficiënten.

Nu noemt men de assen waarvoor  $D = E = F = 0$  is, *hoofdtraagheidsassen* van het stelsel.

Daar nu elke ellipsoïde drie hoofdassen heeft, bezit elk stoffelijk stelsel minstens drie hoofdtraagheidsassen.

10. — Wil men de hoofdassen van bovenstaande ellipsoïde  $U = 0$  vinden, dan kan men de eigenschap gebruiken dat het raakvlak aan de ellipsoïde in het uiteinde van den voerstraal  $\rho(\alpha\beta\gamma)$ , van het middelpunt naar

het punt  $(xyz)$  getrokken, loodrecht op den voerstraal staan moet.

Daar nu de richtingscosinussen van den voerstraal en van de normaal in  $(xyz)$  van het vlak  $U = 0$  evenredig zijn met

$$\alpha \text{ en } \frac{1}{2} \frac{dU}{dx} = Ax - Fy - Ez = \rho(A\alpha - F\beta - E\gamma)$$

$$\beta \text{ en } \frac{1}{2} \frac{dU}{dy} = -Fx + By - Dz = \rho(-F\alpha + B\beta - D\gamma)$$

$$\gamma \text{ en } \frac{1}{2} \frac{dU}{dz} = -Ex - Dy + Cz = \rho(-E\alpha - D\beta + C\gamma)$$

zoo moet, willen deze lijnen samenvallen

$$\left. \begin{aligned} A\alpha - F\beta - E\gamma &= \lambda\alpha \\ -F\alpha + B\beta - D\gamma &= \lambda\beta \\ -E\alpha - D\beta + C\gamma &= \lambda\gamma \end{aligned} \right\} \dots \dots (1)$$

zijn

waar de beteekenis van  $\lambda$  duidelijk wordt door respectievelijk de vergelijkingen met  $\alpha$ ,  $\beta$  en  $\gamma$  te vermenigvuldigen en hunne som te nemen, waardoor men krijgt  $A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 - 2D\beta\gamma - 2E\gamma\alpha - 2F\alpha\beta = \lambda = \Sigma(mr^2) = T$ . Schrijft men dus (1) in de gedaante

$$\left. \begin{aligned} (T-A)\alpha + F\beta + E\gamma &= 0 \\ F\alpha + (T-B)\beta + D\gamma &= 0 \\ E\alpha + D\beta + (T-C)\gamma &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (2)$$

en elimineert hieruit  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  dan krijgt men een derde machtsvergelijking waarvan de determinant is

$$\begin{vmatrix} T-A & F & E \\ F & T-B & D \\ E & D & T-C \end{vmatrix} = 0 \dots (3)$$

De 3 wortels  $T_1$ ,  $T_2$  en  $T_3$  dezer vergelijking gesubstitueerd in (2) geven de 3 bijbehorende richtingen  $(\alpha_1\beta_1\gamma_1)$ ,  $(\alpha_2\beta_2\gamma_2)$  en  $(\alpha_3\beta_3\gamma_3)$  der hoofdassen.

11. — Daar de grootste halve as met den kleinsten

hoofdtraagheidsstraal enz. overeenkomt, kan men nog een anderen weg volgen tot het opsporen der hoofdassen, namelijk

$A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 - 2D\beta\gamma - 2E\gamma\alpha - 2F\alpha\beta = T$   
 ten opzichte van  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  tot maximum of minimum maken, door de vergelijking naar  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  te differentieeren, en  $\frac{dT}{d\alpha}$   $\frac{dT}{d\beta}$   $\frac{dT}{d\gamma}$  gelijk nul te stellen, waardoor men hetzelfde resultaat verkrijgt.

12. — Wil men onderzoeken of de 3 wortels van (3) reëel zijn, dan kan men dit doen door (3) te vermenigvuldigen met  $D$ ,  $E$  en  $F$

$$\begin{vmatrix} (T-A)D & DF & DE \\ EF & (T-B)E & DE \\ EF & DF & (T-C)F \end{vmatrix} = 0$$

en de 2<sup>e</sup> horizontale rij van de 1<sup>e</sup>, alsmede de 3<sup>e</sup> van de 2<sup>e</sup> af te trekken, waardoor de determinant wordt

$$\begin{vmatrix} (T-A)D - EF & DF - (T-B)E & 0 \\ 0 & (T-B)E - DF & DE - (T-C)F \\ EF & DF & (T-C)F \end{vmatrix} = 0$$

Deelt men nu de verticalen rijen door  $D$ ,  $E$  en  $F$  en stelt  $A + \frac{EF}{D} = L$ ;  $B + \frac{DF}{E} = M$ ;  $C + \frac{DE}{F} = N$  dan krijgt men

$$\begin{vmatrix} T-L & M-T & 0 \\ 0 & T-M & N-T \\ \frac{EF}{D} & \frac{DF}{E} & T-N + \frac{DE}{F} \end{vmatrix} = 0$$

of na herleiding

$$\frac{\frac{EF}{D}}{L-T} + \frac{\frac{EF}{E}}{M-T} + \frac{\frac{DE}{F}}{N-T} = 1$$

welke vergelijking in de gedaante

$$\frac{1}{L-T} + \frac{1}{M-T} + \frac{1}{N-T} - \frac{1}{D \cdot E \cdot F} = 0$$

gebracht, doet zien dat, indien  $L < M < N$  is, de 3 wortels liggen tusschen  $-\infty$  en  $L$ ;  $L$  en  $M$ ;  $M$  en  $N$  of tusschen  $L$  en  $M$ ;  $M$  en  $N$ ;  $N$  en  $+\infty$  naargelang  $D \cdot E \cdot F$  positief of negatief is; want voor  $T = -\infty$  zijn de 3 eerste termen nul en dus het linksche gedeelte negatief.

Heeft  $T$  een waarde iets kleiner dan  $L$ , dan is de eerste term positief en zeer groot, dus het linksche gedeelte positief.

Er ligt dus een wortel tusschen  $-\infty$  en  $L$ .

Ligt  $T$  tusschen  $L$  en  $M$  en zeer dicht bij  $L$ , dan is de eerste term negatief en zeer groot, dus het linksche gedeelte negatief.

Ligt  $T$  echter dicht bij  $M$ , dan is de tweede term positief en zeer groot, dus het linksche gedeelte positief.

Er ligt dus een wortel tusschen  $L$  en  $M$ .

Ligt  $T$  tusschen  $M$  en  $N$  en zeer dicht bij  $M$  dan is de tweede term negatief en zeer groot, dus het linksche gedeelte negatief.

Ligt  $T$  echter dicht bij  $N$  dan is de derde term positief en zeer groot, dus het linksche gedeelte positief.

Er ligt dus een wortel tusschen  $M$  en  $N$ .

Men vindt dus dat, indien  $D \cdot E \cdot F$  positief is de 3 wortels liggen tusschen

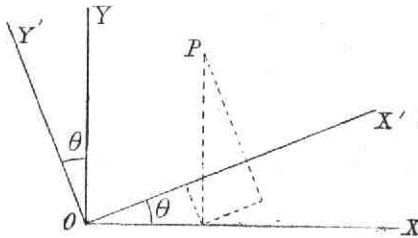
$$-\infty \text{ en } L; L \text{ en } M; M \text{ en } N$$

terwijl men op dezelfde wijze vindt, dat indien  $D \cdot E \cdot F$  negatief is, de 3 wortels liggen tusschen

$$L \text{ en } M; M \text{ en } N; N \text{ en } +\infty.$$



13. — Is er nu een rechte lijn gegeven en wil men weten of die rechte lijn in eenig punt hoofdas van het stelsel is, terwijl men tevens dat punt en de beide andere hoofdassen in dat punt wil vinden, dan neemt men die rechte lijn als  $z$  as aan en een punt  $O$  van die



lijn als oorsprong van coördinaten. Stel nu dat er een punt  $C$  is op afstand  $CO = h$  waarvoor die lijn hoofdas is, en laten  $Cx'$  en  $Cy'$  de twee andere hoofdassen zijn.

De assen  $Cx'$  en  $Cy'$  geprojecteerd worden  $OX'$  en  $OY'$  makende met  $OX$  en  $OY$  den hoek  $\theta$ , dan is

$$x' = x \cos \theta + y \sin \theta$$

$$y' = y \cos \theta - x \sin \theta$$

$$z' = z - h$$

$$\Sigma mx'z' = \cos \theta \Sigma mxz + \sin \theta \Sigma myz - h(\cos \theta \Sigma mx + \sin \theta \Sigma my)$$

$$\Sigma my'z' = \cos \theta \Sigma myz - \sin \theta \Sigma mxz - h(\cos \theta \Sigma my - \sin \theta \Sigma mx)$$

$$\Sigma mx'y' = (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \Sigma mxy + \cos \theta \sin \theta (\Sigma my^2 - \Sigma mx^2)$$

daar  $A = \Sigma m(y^2 + z^2)$  en  $B = \Sigma m(x^2 + z^2)$  is, wordt het

$$\Sigma mx'y' = F \cdot \cos 2\theta + \frac{\sin 2\theta}{2} \cdot (A - B).$$

Opdat de  $z$ -as hoofdas worde, moet

$\Sigma mx'z' = 0$  en  $\Sigma my'z' = 0$  zijn en daar  $OX'$  en  $OY'$  de twee andere hoofdassen zijn, moet ook  $\Sigma mx'y' = 0$  zijn, waardoor men dus krijgt:

$$\cos \theta \Sigma mxz + \sin \theta \Sigma myz - h(\cos \theta \Sigma mx + \sin \theta \Sigma my) = 0 \dots (1)$$

$$\cos \theta \Sigma myz - \sin \theta \Sigma mxz - h(\cos \theta \Sigma my - \sin \theta \Sigma mx) = 0 \dots (2)$$

$$F \cos 2\theta + \frac{\sin 2\theta}{2} \cdot (A - B) = 0 \dots \dots \dots (3)$$

(3) geeft 
$$\text{tang } 2\theta = \frac{2F}{B - A} \dots \dots \dots (4)$$

De vergelijkingen (1) en (2) moeten door dezelfde waarde van  $h$  voldaan worden.

Elimineer dus uit (1) en (2)  $h$

$$h = \frac{\cos \theta \Sigma mxz + \sin \theta \Sigma myz}{\cos \theta \Sigma mx + \sin \theta \Sigma my} = \frac{\cos \theta \Sigma myz - \sin \theta \Sigma mxz}{\cos \theta \Sigma my - \sin \theta \Sigma mx}$$

dan geeft dit na vereenvoudiging

$$\Sigma mxz \Sigma my = \Sigma myz \Sigma mx \dots \dots \dots (5)$$

voor de voorwaarde waarop de  $z$ -as in een punt hoofdas zij.

(5) in (1) substitueerende geeft

$$h = \frac{\Sigma myz}{\Sigma my} = \frac{\Sigma mxz}{\Sigma mx} \dots \dots \dots (6)$$

De vergelijking (6) geeft dus de voorwaarde aan waarop de  $z$  as in een punt hoofdas is, en de waarde van  $h$  geeft de ligging van dit punt.

De beide andere hoofdassen kunnen dan door middel van de vergelijking (4) gevonden worden.

14. — Hieruit volgt:

- 1<sup>o</sup>. Is  $\Sigma mxz = 0$  en  $\Sigma myz = 0$  dan worden (1) en (2) voldaan door  $h = 0$  dat is,  $\Sigma mxz = 0$  en  $\Sigma myz = 0$  zijn de voorwaarden dat de  $z$  as hoofdas is in den oorsprong.
- 2<sup>o</sup>. Is het stelsel een vlakke plaat dan is  $z = 0$  dus  $\Sigma mxz = 0$  en  $\Sigma myz = 0$ . Dus één der hoofdassen in een punt van een vlakke plaat is de normaal in dat punt op die plaat.
- 3<sup>o</sup>. Is het stelsel een omwentelingslichaam begrensd door 2 vlakken loodrecht op de as, dan is die as in elk zijner punten hoofdas, want elke door-

snede loodrecht op de as is een cirkel, bijgevolg  $\Sigma mxz = 0$  en  $\Sigma myz = 0$ .

- 4<sup>o</sup>. uit vergelijking (4) blijkt dat er meer waarden van  $\theta$  voldoen en wel  $\theta + n \cdot \frac{\pi}{2}$  want

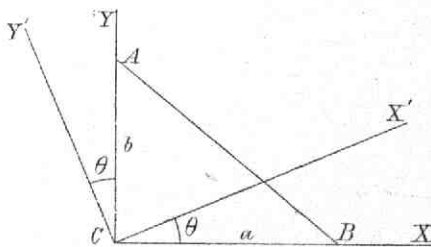
$$\operatorname{tg} 2\left(\theta + n \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{tg} (2\theta + n\pi) = \operatorname{tg} 2\theta$$

waardoor dus de assen in het  $x'y'$  vlak onderling loodrecht zijn.

- 5<sup>o</sup>. Omdat (4) onafhankelijk is van  $h$ , ziet men dat, zoo er meer punten waren waarvoor de  $z$  as hoofdas is, die hoofdassen (namelijk de twee overige assen loodrecht staande op de  $z$  as), alle paarsgewijze evenwijdig met elkander zouden loopen.

In dat geval zou (6) meer dan één waarde voor  $h$  moeten geven, wat alleen onmogelijk is, indien  $\Sigma myz = 0$ ;  $\Sigma mxz = 0$ ;  $\Sigma my = 0$  en  $\Sigma mx = 0$  is, dit sluit in dat de lijn door het zwaartepunt gaat en hoofdas is in den oorsprong, en daar de oorsprong willekeurig genomen kan worden, hoofdas is in ieder harer punten.

15. — Daar  $z$  niet in de vergelijking (4) voorkomt,



volgt er uit dat, indien de gegevene lijn hoofdas is in een punt  $C$ , de andere twee hoofdassen in  $C$  evenwijdig zullen zijn aan de hoofdassen van het projecteerde stelsel in  $O$ .

projecteerde stelsel in  $O$ .

Zoekt men bijvoorbeeld de hoofdassen van een recht-

hoekigen driehoek  $ABC$  in den rechten hoek, dan is, omdat het stelsel een vlakke plaat is, één der hoofdassen de normaal in  $C$ .

De twee anderen zijn bepaald door

$$\operatorname{tg}. 2\Theta = \frac{2F}{B-A}.$$

Nu is  $A = M \cdot \frac{b^2}{6}$        $B = M \cdot \frac{a^2}{6}$

en  $F = M \cdot \frac{ab}{12}$

dus  $\operatorname{tg}. 2\Theta = \frac{\frac{M}{6} \cdot ab}{\frac{M}{6}(a^2 - b^2)} = \frac{ab}{a^2 - b^2}$

of  $\Theta = \frac{1}{2} Bg \cdot \operatorname{tg}. \frac{ab}{a^2 - b^2}.$

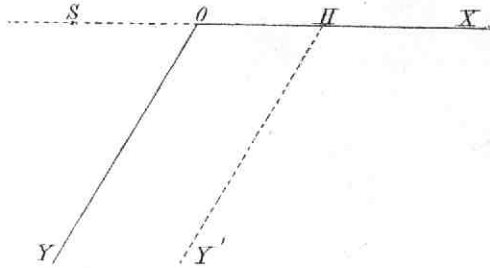
16. — Zijn de hoofdassen  $OX$ ,  $OY$  en  $OZ$  in het zwaartepunt  $O$  en de traagheidsmomenten ten opzichte van die assen bekend, dan kan men op de volgende wijze de hoofdassen in eenig punt  $P$ , liggende in het  $XY$  vlak, en de traagheidsmomenten ten opzichte van die assen vinden.

Een der hoofdassen in  $P$  is de normaal op het  $xy$  vlak, want zijn  $p$  en  $q$  de coördinaten van  $P$  dan zijn de voorwaarden opdat die normaal hoofdas is,  $\Sigma m(x - p)z = 0$  en  $\Sigma m(y - q)z = 0$  vervuld; want  $O$  is het zwaartepunt en de coördinatenassen zijn hoofdassen.

Om de beide andere assen te vinden, stellen wij dat  $A$  en  $B$  de traagheidsmomenten ten opzichte van  $OX$  en  $OY$  zijn en wel  $A > B$ .

Zet men nu op de as van het grootste moment stukken af, aan weerszijden van  $O$ ,  $OS = OH = \sqrt{\frac{A-B}{M}}$ , dan

zijn de hoofdassen in  $S$  en  $H$  evenwijdig aan de coördi-



natenassen, omdat  $S$  en  $H$  punten zijn in een der hoofdassen van het zwaartepunt.

Het traagheidsmoment ten opzichte van  $OX$

is  $= A$  en ten opzichte van

$$Hy' = B + M \cdot OH^2 *) = B + (A - B) = A$$

dus gelijk dat ten opzichte van  $OX$ .

\*) Het traagheidsmoment ten opzichte van een as is namelijk gelijk aan het traagheidsmoment ten opzichte van een daarmede evenwijdige as gaande door het zwaartepunt, vermeerderd met het product van de totale massa met het vierkant van den

afstand tusschen de beide assen; want laten  $h$  en  $h'$  twee evenwijdige assen zijn,  $r$  en  $r'$  de afstanden van een massapunt  $m$  tot die assen, en  $\delta$  de afstand der assen. Nu is

$$mr'^2 = mr^2 - 2mr\delta \cos A + m \cdot \delta^2$$

$$\text{dus} \quad \Sigma mr'^2 = \Sigma mr^2 - 2\delta \Sigma mr \cos A + \delta^2 \Sigma m.$$

Brengt men door de as  $h$  een vlak loodrecht op  $\delta$ , dan is  $r \cos A = x$  de afstand van  $m$  tot dit vlak en

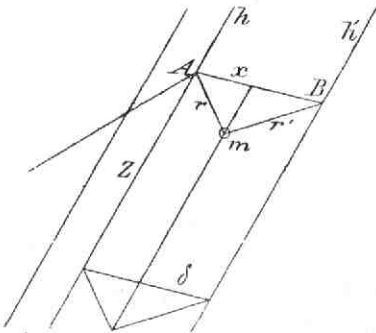
$$\Sigma mr \cos A = \Sigma mx = x_1 \Sigma m.$$

Onze formule wordt dus

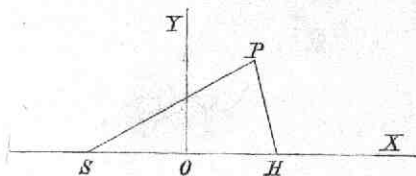
$$\Sigma mr'^2 = \Sigma mr^2 - 2\delta x_1 \Sigma m + \delta^2 \Sigma m.$$

Gaat de as  $h$  door het zwaartepunt van het stelsel  $Z$  dan is  $x_1 = 0$  en dus

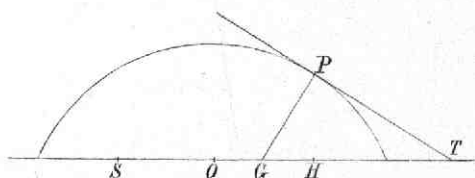
$$\Sigma mr'^2 = \Sigma mr^2 + \delta^2 \Sigma m.$$



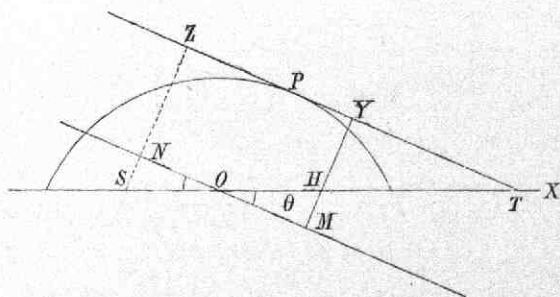
Elke rechte lijn door  $S$  of  $H$  in het  $xy$ -vlak getrokken is dus hoofdas in dit punt en het traagheidsmoment ten opzichte van die as is  $A$ . Trek dus  $SP$  en  $HP$ , dan zijn de traagheidsmomenten ten opzichte van die lijnen gelijk. Daar  $P$  in een hoofdvlak ligt, deelen de hoofdassen den hoek  $SPH$  (in- en uitwendig) middendoor.



Indien men dus met  $S$  en  $H$  tot brandpunten een Ellips of Hyperbool beschrijft, zijn de raaklijn en normaal  $PT$  en  $PG$  in een punt  $P$  hoofdassen in  $P$ . De punten  $S$  en  $H$  worden brandpunten van traagheid genoemd.



17. — Het traagheidsmoment ten opzichte van de



raaklijn kan men nu vinden door uit  $O$  een lijn  $MN$  te trekken, makende met de  $x$ -as een hoek  $\theta$ , en uit  $S$  en  $H$  loodlijnen  $SN$  en  $MH$  op  $MN$ , dan is het traagheidsmo-



ment ten opzichte van  $MN$  gelijk aan

$$\begin{aligned} A \cos^2 \theta + B \sin^2 \theta &= A - (A - B) \sin^2 \theta \\ &= A - M(OH \sin \theta)^2 = A - M \cdot HM^2. \end{aligned}$$

Trek nu  $PT$  evenwijdig aan  $MN$ , dan is het traagheidsmoment ten opzichte van  $PT$  gelijk aan

$$\begin{aligned} A - M(HM)^2 + M(MY)^2 &= A + M(MY^2 - HM^2) \\ &= A + M(HY \cdot SZ). \end{aligned}$$

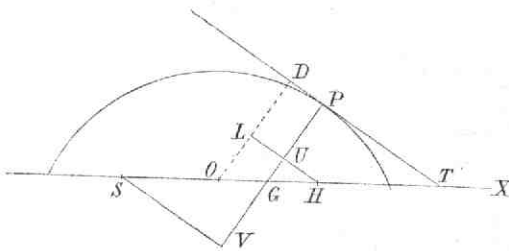
Bij de ellips is  $a^2 - b^2 = OS^2 = \frac{A-B}{M}$  dus

$$A + M \cdot b^2 = B + M \cdot a^2.$$

Men krijgt dus

$$\begin{aligned} A + M(HY \cdot SZ) &= A + M \cdot b^2 = B + M \cdot a^2 \\ &= B + M \left( \frac{SP + HP}{2} \right)^2. \end{aligned}$$

18. — Om het traagheidsmoment ten opzichte van



$PG$  te vinden, trekt men uit  $S$  en  $H$  op  $PG$  de loodlijnen  $SV$  en  $HL$ , dan is het traagheidsmoment ten opzichte van  $OD$  gelijk aan

$$\begin{aligned} B \cos^2 \theta + A \sin^2 \theta \\ = A - (A - B) \cos^2 \theta = A - M \cdot HL^2. \end{aligned}$$

Het traagheidsmoment ten opzichte van  $PG$  is dus gelijk aan

$$\begin{aligned} A - M \cdot HL^2 + M \cdot LU^2 &= A - M(HL - LU)(HL + LU) \\ &= A - M \cdot HU \cdot SV. \end{aligned}$$

Bij de Hyperbool is  $a^2 + b^2 = OS^2 = \frac{A-B}{M}$  dus

$$A - M \cdot b^2 = B + M \cdot a^2.$$

Men krijgt dus

$$\begin{aligned}
 A - M(HU \cdot SV) &= A - M \cdot b^2 = B + M \cdot a^2 \\
 &= B + M \left( \frac{SP - HP}{2} \right)^2.
 \end{aligned}$$

19. — De brandpunten van traagheid zijn gemakkelijk te vinden voor eene Ellips met assen  $2a$  en  $2b$ .

Daar namelijk de traagheidsmomenten van eene ellips ten opzichte van de groote en kleine as respectievelijk  $M \cdot \frac{b^2}{4}$  en  $M \cdot \frac{a^2}{4}$  zijn, is de kleine as de as van het grootste moment en liggen dus de brandpunten van traagheid op de kleine as.

Daar nu  $A = M \cdot \frac{a^2}{4}$  en  $B = M \cdot \frac{b^2}{4}$  is, wordt de afstand dier punten tot  $O$

$$OS = OH = \sqrt{\frac{A - B}{M}} = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 - b^2}.$$

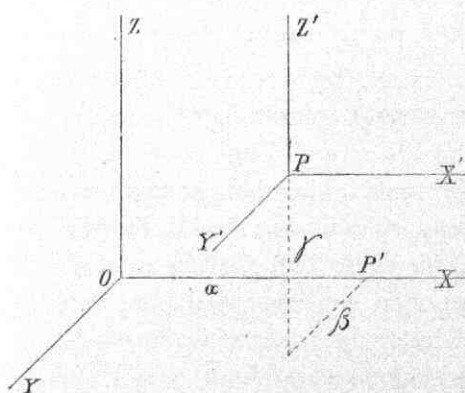
20. — De punten  $S$  en  $H$  liggende op de  $X$ -as, dus in het  $XY$ -vlak hebben, zooals gebleken is, de eigenschap dat de traagheidsmomenten ten opzichte van alle lijnen in het  $XY$ -vlak door  $S$  en  $H$  getrokken gelijk zijn.

Zijn er nu dergelijke punten in de ruimte, punten der-

derhalve waarvoor de Ellipsoïde een bol wordt?

Laat  $O$  het zwaartepunt en  $OX$ ,  $OY$  en  $OZ$  de hoofdassen in het zwaartepunt zijn. Wil dan  $P(\alpha\beta\gamma)$  zulk een punt zijn, dan moet

$$\begin{aligned}
 \Sigma my'z' &= \Sigma mx'z' \\
 &= \Sigma mx'y' = 0 \text{ zijn}
 \end{aligned}$$



$$x = \alpha + x', \quad y = \beta + y', \quad z = \gamma + z',$$

dus  $\Sigma m(y - \beta)(z - \gamma) = 0$ ;  $\Sigma m(x - \alpha)(z - \gamma) = 0$ ;  
 $\Sigma m(x - \alpha)(y - \beta) = 0$

dat is

$$\Sigma myz - \beta \Sigma mz - \gamma \Sigma my + M \cdot \beta\gamma = 0$$

$$\Sigma mxz - \alpha \Sigma mz - \gamma \Sigma mx + M \cdot \alpha\gamma = 0$$

$$\Sigma mxy - \alpha \Sigma my - \beta \Sigma mx + M \cdot \alpha\beta = 0.$$

Daar  $O$  het zwaartepunt is en de coördinatenassen hoofdassen zijn, vereenvoudigen onze vergelijkingen zich dus tot  $M\beta\gamma = 0$   $M\alpha\gamma = 0$   $M\alpha\beta = 0$

of  $\alpha\beta = 0$   $\alpha\gamma = 0$   $\beta\gamma = 0.$

Hieruit volgt dat 2 van de 3 groottheden  $\alpha$ ,  $\beta$  en  $\gamma$  nul moeten zijn. Stel  $\beta = 0$  en  $\gamma = 0.$

Het punt  $P$  moet dus liggen op een van de hoofdassen in  $O$ , en is nu  $P'$ .

Daar de traagheidsmomenten ten opzichte van de 3 assen in  $P'$ , die evenwijdig aan de coördinatenassen zijn,

$$A; B + M\alpha^2 \text{ en } C + M\alpha^2 \quad \text{zijn,}$$

moet  $C = B$  en  $A = B + M\alpha^2$  zijn, dus

$$\alpha^2 = \frac{A - B}{M} \text{ of } \alpha = \pm \sqrt{\frac{A - B}{M}} = OS = OH,$$

waardoor men dus de punten  $S$  en  $H$  vindt, en daaruit besluit dat deze de eenige punten zijn, waarvoor de Ellipsoïde een bol wordt.

21. — Is een lichaam herleid tot zijn hoofdassen in het zwaartepunt  $O$  en zijn  $A$ ,  $B$  en  $C$  zijn hoofdtraagheidsmomenten, terwijl de massa van het lichaam als eenheid wordt aangenomen, en wil men dan de hoofdassen en hoofdmomenten in eenig willekeurig punt  $P$  opsporen, dan construeere men een oppervlak van den tweeden graad, confociaal met de traagheidsellipsoïde, waarvan de vierkanten der halve assen zijn  $a^2 = A + \lambda$ ;  $b^2 = B + \lambda$  en  $c^2 = C + \lambda$ , wat dus voor de traagheids-

ellipsoïde  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  een confocale Ellipsoïde  $\frac{x^2}{A + \lambda} + \frac{y^2}{B + \lambda} + \frac{z^2}{C + \lambda} = 1$  geeft, en bepale nu het traagheidsmoment ten opzichte van een raakvlak aan het confocale oppervlak.

Zijn  $\alpha$ ,  $\beta$  en  $\gamma$  de hoeken die de loodlijn op een raakvlak met de coördinatenassen maakt, dan is het traagheidsmoment ten opzichte van een vlak door  $O$  evenwijdig aan het raakvlak

$$\frac{A + B + C}{2} - (A \cos^2 \alpha + B \cos^2 \beta + C \cos^2 \gamma).$$

Telt men hierbij op het vierkant van den afstand tusschen de beide evenwijdige vlakken, te weten

$$(A + \lambda) \cos^2 \alpha + (B + \lambda) \cos^2 \beta + (C + \lambda) \cos^2 \gamma$$

dan krijgt men voor het traagheidsmoment ten opzichte van een raakvlak

$$\frac{A + B + C}{2} + \lambda \quad \text{of} \quad \frac{B + C - A}{2} + a^2.$$

Hieruit blijkt dus dat de traagheidsmomenten ten opzichte van alle raakvlakken aan een oppervlak confoocaal met de traagheidsellipsoïde dezelfde zijn.

Al deze vlakken zijn hoofdvlakken in het raakpunt, want brengt men een willekeurig vlak door  $P$ , dan zal, indien het confocale oppervlak een Ellipsoïde is, het raakvlak evenwijdig aan het vlak door  $P$ , verder van den oorsprong liggen dan dit vlak, dus zal het traagheidsmoment ten opzichte van een vlak door  $P$  kleiner zijn dan dat ten opzichte van een raakvlak aan de confocale Ellipsoïde door  $P$ . Het raakvlak aan de Ellipsoïde is dus het Hoofdvlak van het grootste moment. Daar men door een gegeven punt, 3 confocale oppervlakken kan brengen, namelijk een Ellipsoïde, een Hyperboloïde

met 2 takken en een Hyperboloïde met één tak, vindt men op dezelfde wijze redeneerende, dat het raakvlak aan de confocale Hyperboloïde met 2 takken het Hoofdvlak van het kleinste moment is, en het raakvlak aan de Hyperboloïde met 1 tak het Hoofdvlak is van het tusschenliggende moment

De normalen op de 3 confocale oppervlakken door  $P$  zijn de hoofdassen in  $P$ , want wanneer 3 onderling loodrechte lijnen elkander in het gegeven punt  $P$  ontmoeten en zoodanig zijn, dat zij als coördinatenassen aangenomen de producten  $\Sigma mxy$ ;  $\Sigma myz$ ;  $\Sigma mxz$  nul maken, dan zijn die lijnen hoofdassen in het gegeven punt.

De hoofdas van het kleinste moment is normaal op de confocale Ellipsoïde, en van het grootste moment normaal op de confocale Hyperboloïde met 2 takken, want de som van de traagheidsmomenten van een stelsel ten opzichte van een vlak door een gegeven punt en de normaal in dat punt is constant en gelijk aan het traagheidsmoment van het stelsel ten opzichte van dat punt. Neemt men namelijk het gegeven punt als oorsprong en het vlak als  $xy$  vlak aan, dan is  $C' + C = \Sigma mr^2$  onafhankelijk van de richting der assen.

$$\text{Hieruit volgt } A' = \frac{B + C - A}{2}.$$

Het traagheidsmoment ten opzichte van  $P$  is

$$\frac{A + B + C}{2} + OP^2,$$

want het traagheidsmoment voor eenig coördinatenstelsel is gelijk het traagheidsmoment voor een daarmede evenwijdig coördinatenstelsel met het zwaartepunt als oorsprong vermeerderd met het traagheidsmoment van de totale massa in het zwaartepunt ten opzichte van het eerste coördinatenstelsel.

De traagheidsmomenten ten opzichte van de normalen aan de 3 confocale oppervlakken door  $P$  wier parameters zijn  $\lambda_1$ ;  $\lambda_2$  en  $\lambda_3$  worden dus

$$OP^2 - \lambda_1, OP^2 - \lambda_2 \text{ en } OP^2 - \lambda_3.$$

22. — Indien de hoofdassen in het zwaartepunt tot coördinatenassen gekozen zijn, kan men als volgt te werk gaan om de voorwaarden op te sporen opdat een gegeven rechte lijn

$$\frac{x-f}{l} = \frac{y-g}{m} = \frac{z-h}{n} \dots \dots \dots (1)$$

in een bepaald punt hoofdas worde.

Wil die rechte lijn hoofdas zijn in een punt, dan moet  $zy$  in dat punt normaal zijn op

$$\frac{x^2}{A+\lambda} + \frac{y^2}{B+\lambda} + \frac{z^2}{C+\lambda} = 1 \dots \dots \dots (2)$$

Hieruit volgt dat men krijgt:

$$\frac{x}{A+\lambda} = \mu l \quad \frac{y}{B+\lambda} = \mu m \quad \frac{z}{C+\lambda} = \mu n \dots \dots (3)$$

De waarden van  $x, y, z$  uit (3) in (1) gesubstitueerd geeft

$$A\mu - \frac{f}{l} = B\mu - \frac{g}{m} = C\mu - \frac{h}{n}.$$

Hieruit  $\mu$  elimineerende krijgt men

$$\mu = \frac{\frac{f}{l} - \frac{g}{m}}{A-B} = \frac{\frac{g}{m} - \frac{h}{n}}{B-C} = \frac{\frac{h}{n} - \frac{f}{l}}{C-A} \dots \dots \dots (4)$$

voor de voorwaarde dat de rechte lijn hoofdas is in een bepaald punt.

$x, y, z$  uit (3) in (2) substitueerende geeft

$$\lambda(l^2 + m^2 + n^2) = \frac{1}{\mu^2} - (Al^2 + Bm^2 + Cn^2).$$

Men kent dus nu  $\lambda$  en  $\mu$ , terwijl (3) de coördinaten  $x, y, z$  van het punt bepaalt.



## D. Berekening van Traagheidsmomenten.

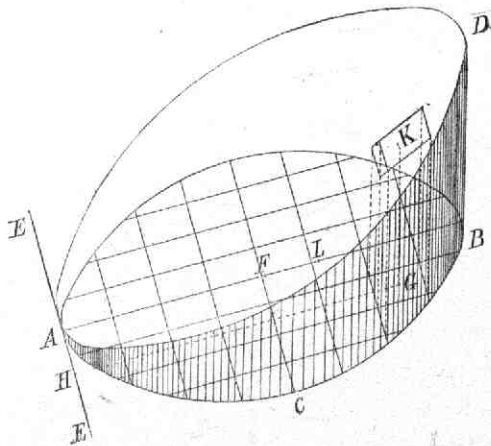
### α. METHODE VAN HUYGHENS.

23. — In het vierde deel van zijn *Horologium oscillatorium* onder het opschrift „de centro oscillationis” bewijst HUYGHENS, dat de lengte van den enkelvoudigen slinger is

$$l = \frac{\sum mr^2}{\sum mr}$$

Ten einde nu  $\sum mr^2$  te vinden, bezigt HUYGHENS een wigvormig lichaam.

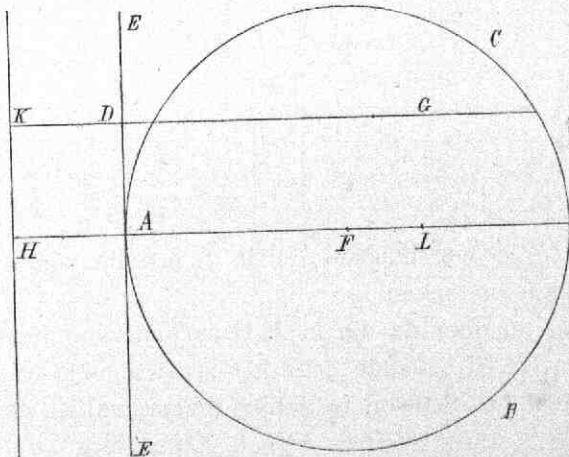
Indien men namelijk door de raaklijn aan het vlakke grondvlak van een recht cilindrisch lichaam getrokken, een vlak brengt dat met het grondvlak een hoek van  $45^\circ$  maakt, dan ontstaat een wigvormig lichaam begrensd door 2 vlakken, die genoemde raaklijn gemeen hebben, terwijl de zijwand van het lichaam loodrecht staat op het



grondvlak. De op het grondvlak geprojecteerde afstand  $LA$  van het zwaartepunt der wig tot de raaklijn wordt *subcentrica* genoemd.

In de 7<sup>e</sup> stelling bewijst HUYGHENS dat de inhoud der

wig die van een lichaam is, hetwelk het grondvlak tot basis en de afstand  $FA$  van het zwaartepunt van het grondvlak tot de raaklijn tot hoogte heeft. Verdeel  $ACB$  in kleine gelijke deeltjes en richt op die deeltjes parallel-opipeda op. Zij  $LA$  de *subcentrica* van de wig. De hoogte van een parallel-opipedum zooals  $GK$  is gelijk aan den afstand van een deeltje  $G$  tot  $AE$ ; het product van  $GK$  met  $GH$  is dus gelijk het deeltje  $G$  met het vierkant van  $GH$ . De som der producten van alle parallel-opipeda met hunne afstanden tot  $AE$  is gelijk aan het product van de wig  $ABD$  met den afstand  $AL$ . Dus is de som der producten van de deeltjes  $G$  met de kwadraten van hunne afstanden tot  $AE$  gelijk aan het product van  $ACB$  met een rechthoek tot zijden hebbende  $FA$  en  $LA$ . Daar nu  $ACB$  gelijk is aan het product van een deeltje  $G$  met het aantal van die deeltjes volgt er uit dat de som van de kwadraten der afstanden tot  $AE$  gelijk is aan den rechthoek op  $FA$  en  $LA$  vermenigvuldigd met het aantal deeltjes.



Trekt men een lijn  $HK$  evenwijdig aan  $AE$  dan is

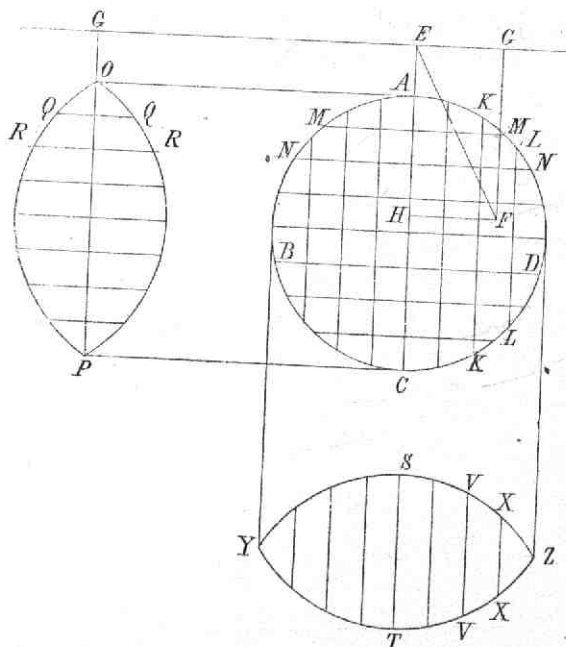
$$\Sigma(GK)^2 = \Sigma(KD)^2 + 2\Sigma(KD \cdot DG) + \Sigma(DG)^2.$$

Daar  $KD = HA$ ,  $\Sigma(DG) = \Sigma(AF) = n \cdot AF$  is, zoo blijkt

$$\begin{aligned}\Sigma(GK)^2 &= n \cdot HA^2 + 2HA \cdot n \cdot AF + n \cdot AF \cdot AL \\ &= n \cdot HA^2 + 2n \cdot HA \cdot AF + n \cdot AF^2 + n \cdot AF \cdot FL \\ &= n \cdot HF^2 + n \cdot AF \cdot FL.\end{aligned}$$

Gaat  $HK$  door het zwaartepunt  $F$  dan is

$$\Sigma(GK)^2 = n \cdot AF \cdot FL.$$



Zij  $ABCD$  een lichaam, en in  $E$  een lijn loodrecht op het vlak van teekening.

Breng nu door de lijn in  $E$  twee onderling loodrechte vlakken ( $EAC$ , gaande door het zwaartepunt) en  $EG$ .

Verdeel het lichaam in gelijke kleine deeltjes zooals  $F$ , dan is

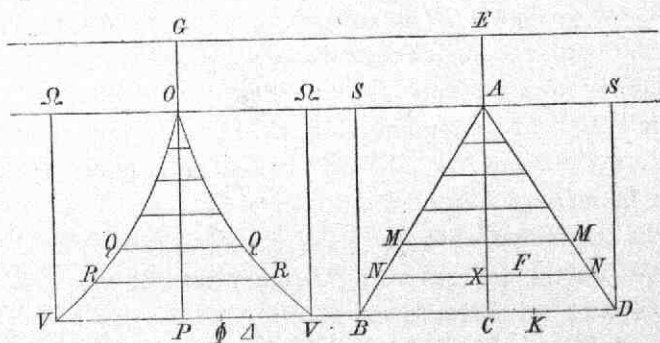
$$FE^2 = FG^2 + FH^2.$$

Zij nu  $OQP$  een vlakke figuur in het slingervlak van  $ABCD$  en van gelijke hoogte met  $ABCD$  en zoo gecon-

strueerd dat de lijnen  $QQ$ ,  $RR$ , enz. evenwijdig zijn aan, en overeenkomen met de vlakken  $MM$ ,  $NN$ , enz.

Verdeel  $OQP$  in evenveel deeltjes als  $ABCD$ . De lijnen  $QQ$  en  $RR$  evenwijdig aan de vlakken  $MM$  en  $NN$  getrokken, zijn zoodanig dat de verhouding van  $RR$  tot  $QQ$  dezelfde is als die van  $NN$  tot  $MM$ , dan zullen er in het segment  $RQQR$  evenveel deeltjes aanwezig zijn als in het segment  $NMMN$ . De som van de kwadraten der loodlijnen uit  $NMMN$  op  $EG$  neergelaten zal dus gelijk zijn aan de som van de kwadraten der loodlijnen uit  $RQQR$  op  $EG$  neergelaten.

Zij op dezelfde wijze  $SYTZ$  een vlakke figuur van gelijke breedte met  $ABCD$  en loodrecht op zijn slinger-vlak, dan zal de som van de kwadraten der loodlijnen uit  $KLLK$  op  $EAC$  neergelaten gelijk zijn aan de som van de kwadraten der loodlijnen uit  $VXXV$  op  $EAC$  neergelaten.



Zij  $ABCD$  een doorsnede van het lichaam en is in de evenredige figuur  $OQP$ , die in het slingervlak is, de

afstand  $\Phi P$  gegeven, waarop het zwaartepunt van de halve figuur  $OPV$  van de as  $OP$  ligt, dan kan men de som der kwadraten van de afstanden der deeltjes van het lichaam  $ABCD$  tot het vlak  $EC$  bepalen.

Alle secties  $NN$ ,  $MM$  enz. moeten echter gelijkvormig zijn, en het vlak  $EC$  moet door de zwaartepunten van hen allen gaan, zooals het geval is bij prismas, pyramiden, enz.

Laat  $BD$  de grootste der genoemde secties zijn, en in  $B$  een lijn opgericht evenwijdig aan de as in  $E$ .

Zij  $BC$  de afstand van het zwaartepunt van de sectie  $BD$  tot de lijn in  $B$  en  $BK$  de subcentrica van de wig op  $BD$ . Zij  $A$  het midden van  $PV$ . Indien nu

$AP: P\Phi =$  rechthoek  $BCK$ : een ruimte  $Z$

dan is  $Z$  maal het aantal deeltjes van  $ABCD$  gelijk aan de gevraagde som der kwadraten van de afstanden tot  $EC$ .

Zij  $NX$  de afstand van het zwaartepunt van de sectie  $NN$  tot de lijn in  $N$  evenwijdig aan die in  $E$  getrokken en  $NF$  de subcentrica van de wig op  $NN$ .

De kwadraten van de afstanden der deeltjes van het vlak  $BD$  en  $NN$  tot het vlak  $EC$  zijn dan respectievelijk  $BC \cdot CK \cdot n$  en  $NX \cdot XF \cdot n'$ , indien er  $n$  en  $n'$  deeltjes zijn in  $BD$  en  $NN$ .

Nu staat de rechthoek  $BCK$  tot  $NXF$  als  $BD^2: NN^2$ .

Het aantal deeltjes van  $BD$  staat tot dat van  $NN$  als die secties zelve dat is als  $BD^2: NN^2$ .

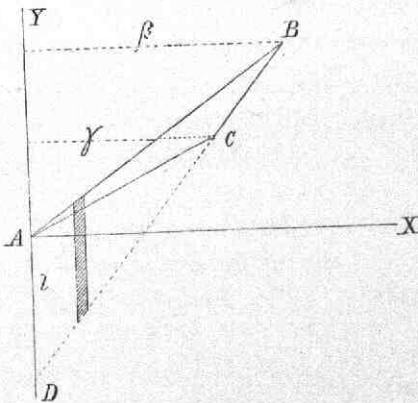
Dus  $BC \cdot CK \cdot n: NX \cdot XF \cdot n' = BD^4: NN^4$  of in de overeenkomstige figuur  $= VV^2: RR^2$ .

Hieruit volgt dat de som der kwadraten van de secties van het lichaam tot die van een cilinder  $BDSS$  met hetzelfde grondvlak en dezelfde hoogte zich moeten verhouden als de som van alle  $VV^2, RR^2$  tot evenvele  $VV^2$  dat is, als het omwentelingslichaam om  $OP$  tot een

cilinder  $VV\Omega\Omega$  met basis  $VV$  en hoogte  $OP$ , dus als de producten der beschrijvende vlakken ( $OPV$  en den rechtehoek  $P\Omega$ ) met de afstanden der zwaartepunten  $P\Phi$  en  $PA$ ;  $OPV$  en  $P\Omega$  verhouden zich als het lichaam  $ABCD$  tot den cilinder  $BDS\Omega$  dat is, als het aantal deeltjes van  $ABCD$  tot het aantal deeltjes van  $BDS\Omega$ ; terwijl  $P\Phi$  zich tot  $PA$  verhoudt als  $Z$  tot  $BCK$ ; dus de som van de kwadraten van de afstanden der deeltjes van  $ABCD$  tot  $EC$  verhoudt zich tot de som van de kwadraten der afstanden van de deeltjes van den cilinder  $BDS\Omega$  tot  $EC$ , als  $Z$  maal het aantal deeltjes van  $ABCD$  tot den rechtehoek  $BCK$  maal het aantal deeltjes van  $BDS\Omega$ ; en hieruit volgt dat  $Z$  maal het aantal deeltjes van het lichaam gelijk is aan de som van de kwadraten der afstanden tot  $EC$ .

### β. BEREKENING DOOR INTEGRATIE.

24. — Ten einde bij vlakke figuren het traagheidsmoment door Integratie te bepalen, verdeele men de figuur door lijnen evenwijdig aan de as in oneindig dunne



strooken. Indien men dan verder den inhoud van een strook uitdrukt in functie van den afstand tot de as kan men, door Integratie, zeer gemakkelijk tot het traagheidsmoment der figuur komen.

Wil men bijvoorbeeld het traagheidsmoment van een driehoek ten opzichte van een lijn gaande door een van



zijne hoekpunten bepalen, dan verlengt men  $BC$  tot in  $D$ , dan is

$$ABC = ABD - ACD$$

dus  $T_{ABC} = T_{ABD} - T_{ACD}$ .

Inhoud strook =  $y dx$  terwijl  $y : l = \beta - x : \beta$

dus  $y = l \cdot \frac{\beta - x}{\beta}$

waardoor inhoud strook =  $l \cdot \frac{\beta - x}{\beta} dx$ .

Beteekent nu ( $Y$ ) onderaan  $T$  het traagheidsmoment ten opzichte van de  $Y$ -as, dan is dus

$$T_{ABD(Y)} = \int_0^{\beta} \mu \cdot l \left( \frac{\beta - x}{\beta} \right) \cdot x^2 dx = \frac{\mu l}{12} \cdot \beta^3.$$

Noem de loodlijn uit  $C$  op  $AY \dots \gamma$  dan is evenzoo

$$T_{ACD(Y)} = \frac{\mu l}{12} \cdot \gamma^3. \quad \text{Men vindt dus}$$

$$T_{ABC(Y)} = \frac{\mu l}{12} (\beta^3 - \gamma^3)$$

maar  $M = \mu l \left( \frac{\beta - \gamma}{2} \right)$  zijnde

$$T_{ABC(Y)} = \frac{M}{6} (\beta^2 + \beta\gamma + \gamma^2).$$

Zoekt men het traagheidsmoment ten opzichte van  $AX$  en noemt men de loodlijnen uit  $B$  en  $C$  op  $AX \dots \beta'$  en  $\gamma'$ ,

dan is  $T_{ABC(X)} = \frac{M}{6} (\beta'^2 + \beta'\gamma' + \gamma'^2)$ .

De grootheden

$$A = \Sigma m(y^2 + z^2), \quad B = \Sigma m(z^2 + x^2);$$

$$C = \Sigma m(x^2 + y^2) \quad \text{zijn in dit geval } (z = 0),$$

$$A = \Sigma m y^2, \quad B = \Sigma m x^2, \quad C = \Sigma m(x^2 + y^2),$$

dus

$$C = A + B \quad \text{of}$$

$$T_{(\text{normaal})} T_{(X)} + T_{(Y)} \quad \text{dus}$$

$$T_{(\text{normaal in } A)} = \frac{M}{6} (\beta^2 + \beta\gamma + \gamma^2 + \beta'^2 + \beta'\gamma' + \gamma'^2).$$

Men heeft gevonden  $T_{(Y)} = \frac{M}{6} (\beta^2 + \beta\gamma + \gamma^2)$ .

Wordt de hoek  $XAY$  kleiner, dan wordt  $\beta$  kleiner en dus ook  $T_{(Y)}$ . Valt  $AY$  langs  $AB$  dan is  $\beta = 0$  en

$$T_{(AB)} = \frac{M}{6} \cdot \gamma^2.$$

Valt  $AY$  binnen den driehoek dan is  $\beta$  negatief dus dan is het traagheidsmoment

$$\frac{M}{6} (\beta^2 - \beta\gamma + \gamma^2).$$

25. — Heeft een lichaam een massa  $\mu\omega$  dan is, indien het lichaam homogeen is

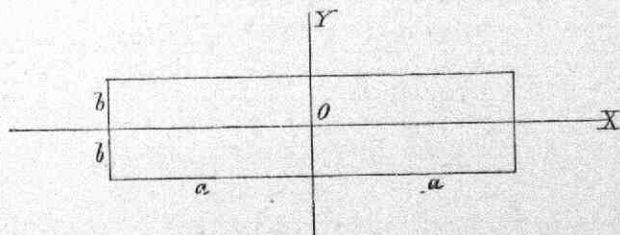
$$T = \mu \int y^2 d\omega$$

maar  $d\omega = dydx$  dus

$$T = \mu \int dx \int y^2 dy \quad \text{of}$$

$$T = \frac{\mu}{3} \int (y^3 - y_0^3) dx.$$

Heeft men dus een homogeeene rechthoek, met zijden  $2a$  en  $2b$  en wil men van dien rechthoek het traagheidsmoment ten opzichte van eene as opsporen, welke as door het centrum van den rechthoek evenwijdig aan een van de zijden loopt, dan is



$$T_{(x)} = \frac{\mu}{3} \int_{-a}^{+a} 2b^3 dx = 2 \cdot \frac{\mu}{3} \cdot b^3 \cdot 2a.$$

$$T_{(x)} = \frac{4ab^3\mu}{3}$$

of daar  $M = 4ab\mu$  is

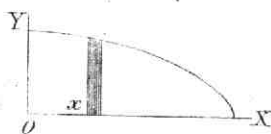
$$T_{(x)} = M \cdot \frac{b^2}{3}.$$

Evenzoo  $T_{(y)} = M \cdot \frac{a^2}{3}$

derhalve

$$T_{(\text{normaal})} = M \frac{a^2 + b^2}{3}.$$

26. — Heeft men een Ellips met assen  $2a$  en  $2b$  en verdeelt men die ellips in strooken evenwijdig aan de  $y$ -as, dan is de inhoud van een strook gelijk  $ydx$ , als  $dx$  de dikte der strook voorstelt. Daar de Ellips 4 kwadranten heeft, vindt men voor het traagheidsmoment ten opzichte van de  $Y$ -as.



$$T_{(y)} = 4\mu \int x^2 y dx,$$

maar uit de vergelijking van de

Ellips  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

volgt

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \quad \text{dus}$$

$$T_{(y)} = 4\mu \cdot \frac{b}{a} \int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx.$$

Stel  $x = a \sin \varphi$ , dan is

$$T_{(y)} = \mu \cdot \frac{b}{a} \cdot a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi d\varphi$$

$$= \mu \cdot \frac{b}{a} \cdot a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\varphi d\varphi$$

$$\begin{aligned}
 &= \mu b a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{1 - \cos 4\varphi}{2} \right) d\varphi \\
 &= \frac{\pi}{4} \cdot \mu b a^3.
 \end{aligned}$$

Daar

$$M = \mu \pi a b$$

is

$$T_{(Y)} = M \cdot \frac{a^2}{4}.$$

Evenzoo vindt men

$$T_{(X)} = M \cdot \frac{b^2}{4}$$

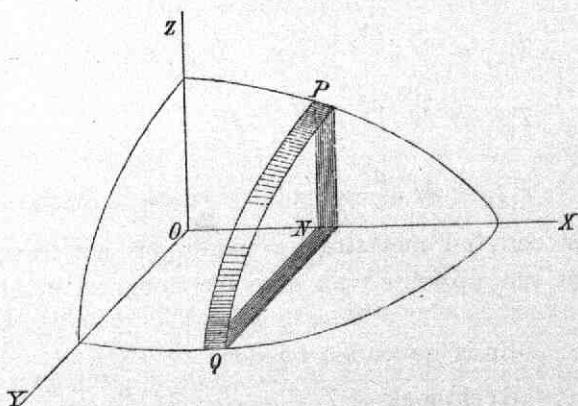
en dus

$$T_{(\text{normaal})} = M \cdot \frac{a^2 + b^2}{4}.$$

Voor den cirkel wordt  $b = a$  dus

$$T_{(\text{normaal})} = M \cdot \frac{a^2}{2}.$$

27. — Uit de vergelijking der Ellipsoïde



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{volgt}$$

$$PN = \frac{c}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$QN = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

dus inhoud schijfje

$$= (\pi \cdot PN \cdot QN) = \frac{bc}{a^2} \cdot \pi(a^2 - x^2).$$

Bij de Ellips heeft men gevonden

$$T_{(\text{normaal})} = M \left( \frac{a^2 + b^2}{4} \right)$$

dus hier daar de  $x$ -as normaal op de Elliptische schijf is en gebruik makende van

$$T_{(\text{normaal})} = T_{(x)} + T_{(y)}$$

$$\mu \cdot \frac{bc}{a^2} \cdot \pi(a^2 - x^2) dx \left( \frac{PN^2 + QN^2}{4} \right) \quad \text{dus}$$

$$T_{(x)} = \left\{ \frac{\mu\pi}{4} \cdot \frac{bc}{a^4} (b^2 + c^2) \int_{-a}^{+a} (a^2 - x^2)^2 dx \right\}$$

$$T_{(x)} = \frac{\mu\pi}{4} \cdot \frac{bc}{a^4} (b^2 + c^2) \cdot \frac{16}{15} a^5$$

$$= \frac{4}{3} \mu\pi abc \left( \frac{b^2 + c^2}{5} \right)$$

daar  $M = \frac{4}{3} \mu\pi abc$  is, volgt dus

$$T_{(x)} = M \cdot \frac{b^2 + c^2}{5}.$$

Evenzoo vindt men

$$T_{(y)} = M \cdot \frac{a^2 + c^2}{5}$$

en

$$T_{(z)} = M \cdot \frac{a^2 + b^2}{5}.$$

Voor een bol met straal  $a$  wordt dus het traagheidsmoment ten opzichte van elke lijn door het middelpunt

$$T = \frac{2}{5} Ma^2.$$

28. — Er is gevonden bij den

Rechthoek  $T_{(\text{norm.})} = M \cdot \frac{a^2 + b^2}{3}$

Ellips  $T_{(\text{norm.})} = M \cdot \frac{a^2 + b^2}{4}$

Ellipsoïde  $T_{(x)} = M \cdot \frac{b^2 + c^2}{5}$

dus blijkt de volgende algemeene regel bij symmetrie lichamen

$$\left. \begin{array}{l} \text{Het traagheidsmoment} \\ \text{ten opzichte van een} \\ \text{symmetrie as} \end{array} \right\} = M. \frac{\text{Som der kwadraten van de} \\ \text{beide andere onderling} \\ \text{loodrechte, halve assen}}{3 \text{ of } 4 \text{ of } 5}$$

waarin de noemer 3, 4 of 5 is, naargelang het lichaam rechthoekig, elliptisch of ellipsoïdisch is.

#### γ. BEPALING DER TRAGHEIDSMOMENTEN DOOR DIFFERENTIATIE.

29. — Wil men het traagheidsmoment van een dunne schil bepalen, dan kan men dit door Differentiatie doen, indien het traagheidsmoment van het lichaam dat door die schil wordt ingesloten bekend is, benevens de wet volgens welke het volumen bij Differentiatie toeneemt.

Men weet dat het traagheidsmoment van een Ellipsoïde met assen  $2a$ ;  $2b$  en  $2c$  ten opzichte van de  $a$  as is

$$M. \frac{b^2 + c^2}{5} \quad \text{of } \frac{4}{3} \pi abc \cdot \frac{b^2 + c^2}{5}.$$

Laat de Ellipsoïde zeer weinig in grootte toenemen, dan is het traagheidsmoment van de schil

$$t_{(a)} = d \left\{ \frac{4}{3} \pi abc \cdot \frac{b^2 + c^2}{5} \right\}.$$

Is de schil gelijkvormig met de eerste gedaante zoodat dus  $\frac{b}{a} = p$  en  $\frac{c}{a} = q$  is, dan is het traagheidsmoment van de schil

$$t_{(a)} = d \left\{ \frac{4}{3} \pi p q \cdot \frac{p^2 + q^2}{5} \cdot a^5 \right\} = \frac{4}{3} \pi p q (p^2 + q^2) a^4 da.$$

Daar nu  $M = \frac{4}{3} \pi abc = \frac{4}{3} \pi p q a^3$  en dus



$m = dM = 4\pi\rho p q a^2 da$  is, zoo is het traagheidsmoment

van de schil 
$$t_{(a)} = m \left( \frac{b^2 + c^2}{3} \right).$$

Voor een bolvormige schil is  $a = b = c$  dus

$$t = \frac{2}{3} m a^2.$$

30. — Wanneer een Ellipsoïde verdeeld is in oneindig dunne lagen, terwijl de dichtheid van laag tot laag verandert, maar in elke laag constant is, kan men met behulp van deze methode het traagheidsmoment van de Ellipsoïde vinden.

Laat het traagheidsmoment van de Ellipsoïde van constante dichtheid  $D$ , afhangen van zekeren parameter  $a$ , dan kan men dit traagheidsmoment voorstellen door

$$T = \varphi(a) \cdot D.$$

Het traagheidsmoment van de schil is dan

$$t = dT = D\varphi'(a) da.$$

Wordt  $D$  nu veranderlijk met  $a$  dan is,  $D$  voorgesteld door  $\varrho$ ,

$$T = \int_0^a \varrho \varphi'(a) da.$$

Als voorbeeld neem ik een Ellipsoïde met halve grootte  $a$ - $a$  en  $\varrho = ka$  dan is

$$dT = \frac{4}{3} \pi k p q (p^2 + q^2) a^5 da$$

$$T_{(a)} = \frac{4}{3} \pi k p q (p^2 + q^2) \int_0^a a^5 da$$

$$T_{(a)} = \frac{2}{9} \pi k p q (p^2 + q^2) a^6$$

maar

$$dM = 4\pi\rho p q a^2 da = 4\pi k p q a^3 da$$

$$M = \pi k p q a^4$$

zijnde.

dus

$$T_{(a)} = \frac{2}{9} M (p^2 + q^2) a^2$$

$$T_{(a)} = \frac{2}{9} M (b^2 + c^2).$$

31. — Als 2<sup>de</sup> voorbeeld neem ik een bol waarvan de

dichtheid in het centrum  $\varrho_0$  afneemt naar den omtrek toe,  
 dus

$$\begin{aligned} \varrho &= \varrho_0 - \mu r \\ T &= \frac{2}{5} Mr^2 \\ &= \frac{8}{15} \pi \varrho r^5 \\ dT &= \frac{8}{3} \pi \varrho r^4 dr \\ T &= \frac{8}{3} \pi \int \varrho r^4 dr \\ &= \frac{8}{3} \pi \int (\varrho_0 r^4 - \mu r^5) dr \\ &= \frac{8}{3} \pi \left( \frac{\varrho_0}{5} - \frac{\mu r}{6} \right) r^5 \\ &= \frac{8}{3} \pi r^5 \left( \frac{\varrho_0}{5} - \frac{\mu r}{6} \right) \end{aligned}$$

#### δ. MET BEHULP VAN SYMMETRIEVLAKKEN.

32. — In het algemeen heeft men tot het vinden van traagheidsmomenten de hoofdassen voor het zwaartepunt noodig. Nu kan men deze gemakkelijk vinden, wanneer de massaelementen ten opzichte van een vlak  $\varepsilon$  symmetrisch liggen, dat wil zeggen wanneer deze elementen paarsgewijze gelijke massas bezitten en elk paar op een normaal op dit vlak aan weerszijden op gelijke afstanden van dit vlak liggen.

Want zulk een normaal is hoofdas voor zijn voetpunt. Kiest men namelijk het voetpunt tot oorsprong van een rechthoekig coördinatenstelsel en de normaal tot z-as dan is  $\Sigma(myz) = 0$  en  $\Sigma(mxz) = 0$ . Is er nu nog een tweede symmetrie vlak  $\varepsilon'$  loodrecht op het eerste  $\varepsilon$ , dan zijn de lijnen die in een willekeurig punt van de snijlijn dezer vlakken  $\varepsilon$  en  $\varepsilon'$  loodrecht op die vlakken getrokken worden 2 hoofdassen. Heeft men dus 3 onderling loodrechte symmetrie vlakken, dan snijden deze vlakken

elkander volgens 3 hoofdassen, en daar hun snijpunt het zwaartepunt is, zijn deze assen hoofdcentraalassen.

Dan heeft men slechts

$$A' = \Sigma x^2 dm \quad B' = \Sigma y^2 dm \quad C' = \Sigma z^2 dm$$

te vormen, waarin  $dm = \rho dv = \rho dx dy dz$  is, om te vinden

$$A = \Sigma (y^2 + z^2) dm = B' + C'$$

$$B = \Sigma (z^2 + x^2) dm = C' + A'$$

$$C = \Sigma (x^2 + y^2) dm = A' + B'$$

en dus is ook het traagheidsmoment ten opzichte van een willekeurige as, die de hoeken  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  met de coördinatenassen maakt, bekend

$$T = A \cos^2 \alpha + B \cos^2 \beta + C \cos^2 \gamma.$$

Legt men door een punt  $(xyz)$  drie vlakken loodrecht op de coördinatenassen en noemt de doorsneden  $Qx$ ,  $Qy$  en  $Qz$  zoo is

$$A' = \int \rho x^2 Qx dx$$

$$B' = \int \rho y^2 Qy dy$$

$$C' = \int \rho z^2 Qz dz.$$

33. — Nemen wij als voorbeeld het rechthoekig Parallelepipedum  $(abc)$  dus

$$A' = \rho bc \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} x^2 dx = \frac{1}{12} ma^2$$

$$B' = \rho ca \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} y^2 dy = \frac{1}{12} mb^2$$

$$C' = \rho ab \int_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}} z^2 dz = \frac{1}{12} mc^2$$

$$A = \frac{1}{12} m (b^2 + c^2) \quad B = \frac{1}{12} m (c^2 + a^2)$$

$$C = \frac{1}{12} m (a^2 + b^2)$$

dus is het traagheidsmoment voor een willekeurige as, die de hoeken  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  met de hoofdassen maakt:

$$T = \frac{1}{12} m \left\{ (b^2 + c^2) \cos^2 \alpha + (c^2 + a^2) \cos^2 \beta + (a^2 + b^2) \cos^2 \gamma \right\}.$$

De vergelijking van de reeks Cauchy-Poinsot'sche Ellipsoïden wordt dus

$$(b^2 + c^2) x^2 + (c^2 + a^2) y^2 + (a^2 + b^2) z^2 = 12 \epsilon^4$$

en de vergelijking van de reciproke

$$\frac{x^2}{b^2 + c^2} + \frac{y^2}{c^2 + a^2} + \frac{z^2}{a^2 + b^2} = 12.$$

34.— Heeft men een Ellipsoïde met halve assen  $a$ ,  $b$ , en  $c$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

dan is de vergelijking der doorsnede loodrecht op de  $X$ -as

$$\frac{y^2}{b^2 \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} \right)} + \frac{z^2}{c^2 \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} \right)} = 1.$$

Men verkrijgt dus

$$Q_x = \pi b c \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} \right) \quad Q_y = \pi c a \left( 1 - \frac{y^2}{b^2} \right)$$

$$Q_z = \pi a b \left( 1 - \frac{z^2}{c^2} \right)$$

en dus

$$A' = \pi \rho b c \int_{-a}^{+a} x^2 \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} \right) dx = \frac{4}{15} \pi \rho a^3 b c = \frac{1}{5} m a^2.$$

Evenzoo

$$B' = \frac{1}{5} m b^2 \quad \text{en} \quad C' = \frac{1}{5} m c^2$$

$$\text{dus} \quad A = \frac{1}{5} m (b^2 + c^2) \quad B = \frac{1}{5} m (c^2 + a^2)$$

$$C = \frac{1}{5} m (a^2 + b^2).$$

Het traagheidsmoment voor eene as, die de hoeken  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  met de hoofdassen maakt, is dus

$$T = \frac{1}{5} m \left\{ (b^2 + c^2) \cos^2 \alpha + (c^2 + a^2) \cos^2 \beta + (a^2 + b^2) \cos^2 \gamma \right\}.$$

Voor de Omwentelingsellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{is}$$

$$A = B = \frac{1}{5} m (a^2 + c^2) \quad C = \frac{2}{5} m a^2$$

$$T = \frac{1}{5} m \left\{ a^2 + c^2 + (a^2 - c^2) \gamma^2 \right\}.$$

Voor den bol  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  is

$$A = B = C = T = \frac{2}{5} m a^2.$$

#### ε. TRAAGHEIDSMOMENTEN VAN OMWENTELINGSLICHAMEN.

35. — Kies een punt O van de omwentelingsas tot oorsprong, de as zelve tot  $x$ -as en  $z$  daarop en onderling loodrechte assen als  $y$ - en  $z$ -as.

Dan is

$$A' = \Sigma x^2 dm$$

$$B' = \Sigma y^2 dm = C' = \Sigma z^2 dm = \frac{1}{2} \Sigma (y^2 + z^2) dm = \frac{1}{2} A$$

$$B = C' + A' = \Sigma (z^2 + x^2) dm = C = A' + B'$$

$$= \Sigma (x^2 + y^2) dm = A' + \frac{1}{2} A.$$

Men heeft dus alleen  $A$  en  $A'$  te kennen. Het volumenelement krijgt men door het lichaam te snijden:

- 1<sup>o</sup>. door 2 Meridiaanvlakken gaande door de  $x$ -as makende met het snijvlak de hoeken  $\varphi$  en  $\varphi + d\varphi$ .
- 2<sup>o</sup>. door 2 cilinders om de  $x$ -as op afstanden  $r$  en  $r + dr$ .
- 3<sup>o</sup>. door 2 vlakken loodrecht op de  $x$ -as op afstanden  $x$  en  $x + dx$  van den oorsprong.

Hierdoor is  $dm = \rho r dr d\varphi dx$ .

Daar ook nog  $r^2 = y^2 + z^2$  is, volgt

$$A = \rho \int_a^b dx \int_0^\pi d\varphi \int_0^r r^3 dr$$

$$A' = \rho \int_a^b x^2 dx \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^r r dr$$

$$m = \rho \int_a^b dx \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^r r dr$$

De grenzen zijn  $r = 0$  en  $r = f(x)$  als

$$r = \sqrt{y^2 + z^2} = f(x)$$

de vergelijking van het omwentelingsvlak is;

$$\varphi = 0 \text{ en } \varphi = 2\pi;$$

$x = a$  en  $x = b$  de grensvlakken loodrecht op de  $x$ -as.

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\pi\rho \int_a^b [f(x)]^4 dx \\ A' &= \pi\rho \int_a^b x^2 [f(x)]^2 dx \\ m &= \pi\rho \int_a^b [f(x)]^2 dx \end{aligned} \right\} \text{ gesubstitueerd in}$$

$$\begin{aligned} T &= A \cos^2 \alpha + B \cos^2 \beta + C \cos^2 \gamma = \\ &= A \cos^2 \alpha + (A' + \frac{1}{2}A) (\cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) = \\ &= A \cos^2 \alpha + (A' + \frac{1}{2}A) (1 - \cos^2 \alpha) \\ T &= (\frac{1}{2}A + A') + (\frac{1}{2}A - A') \cos^2 \alpha. \end{aligned}$$

36. — Voor een omwentelingscilinder  $r$  tot straal en  $h$  tot hoogte hebbende is

$$a = -\frac{1}{2}h \quad b = \frac{1}{2}h \quad f(x) = r \quad \text{en} \quad m = \pi\rho r^2 h$$

$$A = \frac{1}{2} \pi\rho r^4 h = \frac{1}{2} m r^2$$

$$A' = \frac{1}{12} \pi\rho r^2 h^3 = \frac{1}{12} m h^2$$

$$B = C = \frac{1}{4} m (r^2 + \frac{1}{4} h^2).$$

37. — Voor een omwentelingskegel, hoogte  $h$  en straal grondvlak  $r$ , wordt als de top tot oorsprong gekozen

wordt  $f(x) = \frac{r}{h} \cdot x$ ;  $a = 0$ ;  $b = h$ .



$$A = \frac{3}{10} m r^2 \quad A' = \frac{3}{5} m h^2$$

$$B = C = \frac{3}{5} m \left( \frac{1}{4} r^2 + h^2 \right).$$

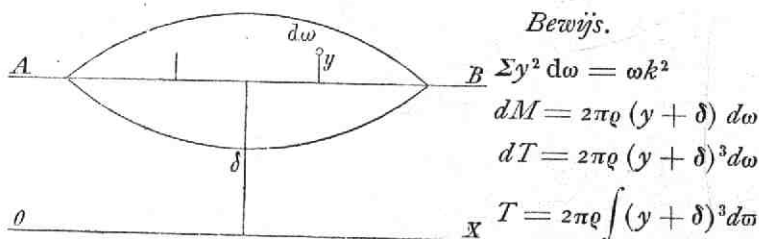
Het Traagheidsmoment voor de Hoofdcentraalas loodrecht op de as van den kegel is

$$T = \frac{3}{80} m (4r^2 + h^2).$$

### ζ. METHODE VAN TOWNSEND.

38. — TOWNSEND heeft bewezen dat, als een symmetrische vlakke figuur wentelt om een lijn evenwijdig aan de symmetrieas, dan zal, indien  $M$  de massa,  $K$  de traagheidstraal en  $\delta$  de afstand tot de omwentelingsas is

$$T = M(3k^2 + \delta^2) \text{ zijn.}$$



$$T = 2\pi\rho \int (y^3 + 3y^2\delta + 3y\delta^2 + \delta^3) d\omega.$$

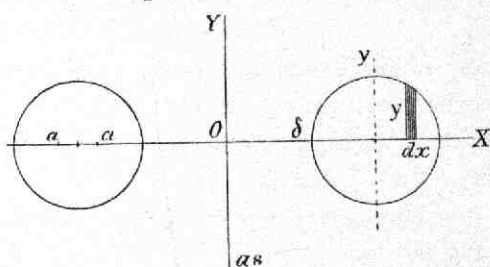
Nu is

$$\left. \begin{array}{l} \int 3y\delta^2 d\omega = 3\delta^2 \int y d\omega = 0 \\ \text{en } \int y^3 d\omega = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{daar er evenveel positieve} \\ \text{als negatieve deeltjes zijn.} \end{array}$$

dus

$$\begin{aligned} T &= 2\pi\rho \int (3\delta y^2 d\omega + \delta^3 d\omega) \\ &= 2\pi\rho (3\delta\omega k^2 + \delta^3 \omega) \\ &= 2\pi\rho\omega\delta (3k^2 + \delta^2) \\ T &= M(3k^2 + \delta^2). \end{aligned}$$

39. — Wil men nu het traagheidsmoment van een ring bepalen, dan zoekt men eerst, daar de ring ontstaat door wending van een cirkel om een lijn, buiten den cirkel maar in het vlak van den cirkel gelegen, met behulp van de Integratiemethode, het traagheidsmoment van den cirkel, ten opzichte van een middellijn, evenwijdig aan de



as en past dan de methode van TOWNSEND toe.

Men vindt dus massa laagje

$$= \mu y dx$$

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$T_{(y)} = 4\mu \int_0^a x^2 (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} dx.$$

Stel  $x = a \sin \varphi$

$$T_{(y)} = 4\mu \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \sin^2 \varphi (a^2 - a^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} \cdot a \cos \varphi d\varphi$$

$$= a^4 \mu \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{1 - \cos 4\varphi}{2} \right) d\varphi$$

$$= a^4 \mu \frac{\pi}{4}$$

$$T_{(y)} = \frac{\mu \pi a^4}{4}.$$

Daar  $I = \pi a^2$  dus  $M = \mu \pi a^2$  is, zoo volgt

$$T_{(y)} = M \frac{a^2}{4} = M k^2, \quad \text{waaruit } k^2 = \frac{a^2}{4}.$$

Door toepassing van de stelling van TOWNSEND verkrijgt men dus, daar  $T_{(Y)} = M(3k^2 + \delta^2)$  is

$$T_{(Y)} = M \left( \frac{3a^2}{4} + \delta^2 \right).$$

7. METHODE BIJ GELIJKVORMIGE STELSLS.

40. — Worden 2 gelijkvormige stelsels in evenveel gelijkvormige elementen verdeeld, dan verhouden de elementen zich als hunne afmetingen, dus voor lineaire afmetingen is de verhouding  $\epsilon$ , voor vlakken  $\epsilon^2$ , voor ruimteafmetingen  $\epsilon^3$ .

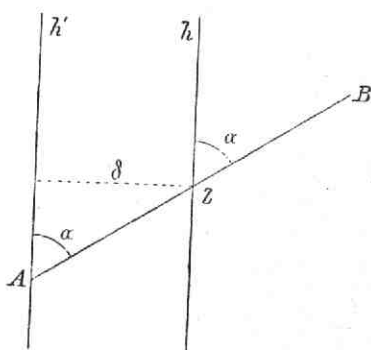
Ten opzichte van 2 gelijkstandige assen verhouden zich dus hunne traagheidsmomenten als  $\epsilon^3$ ,  $\epsilon^4$ ,  $\epsilon^5$ .

Noemt men dus de traagheidsmomenten ten opzichte van die beide assen  $T$  en  $T'$  dan is

$$T' = \epsilon^n \cdot T$$

waarin  $n = 3; 4$  of  $5$  is.

41. — Heeft men bijvoorbeeld eene rechte lijn  $AB = l$



met eene massa  $m$  en deelt men die lijn door een willekeurige as  $h$  middendoor, en trekt aan het uiteinde  $A$  eene daarmede evenwijdige as  $h'$ , dan zijn  $BZ$  en  $AB$  gelijkvormige stelsels ten opzichte van de gelijkstandige assen  $h$  en  $h'$ .

Het traagheidsmoment van  $AB$  ten opzichte van  $h$

is gelijk het traagheidsmoment van  $AZ$  en van  $BZ$  ten opzichte van  $h$ , dus is het traagheidsmoment van  $BZ$  ten opzichte van  $h$  het halve traagheidsmoment van  $AB$  ten opzichte van  $h$ .

Noemt men nu het traagheidsmoment van  $AB$  ten opzichte van  $h \dots T$  en het traagheidsmoment van  $AB$  ten opzichte van  $h' \dots T'$ , dan is het traagheidsmoment

van  $BZ$  ten opzichte van  $h = \frac{1}{2} T$  en daar  $\frac{AB}{BZ} = \epsilon = 2$  is, krijgt men

$$T'_{AB(h')} = 2^3 \cdot \frac{1}{2} T_{AB(h)} = 4 T_{AB(h)}$$

Noemt men nu  $\delta$  de afstand der evenwijdige assen, dan geldt in het algemeen

$$T' = T + M\delta^2$$

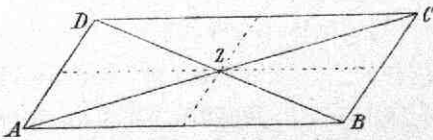
dus in ons geval

$$T'_{AB(h')} = T_{AB(h)} + \frac{1}{4} ml^2 \sin^2 \alpha$$

waaruit in verband met bovenstaande vergelijking volgt

$$T_{AB(h)} = \frac{m}{12} l^2 \sin^2 \alpha.$$

42. — Kiezen wij als tweede voorbeeld een parallellogram.



Het traagheidsmoment is de som der traagheidsmomenten van de 4 parallellogrammen  $AZ$ ;  $BZ$ ;

$CZ$  en  $DZ$  welke onderling congruent zijn, dus is  $\epsilon = 2$ .

$AZ$  en  $CZ$  hebben evenals  $BZ$  en  $DZ$  gelijke traagheidsmomenten ten opzichte van een willekeurige as- $h$  door  $Z$ , welke as niet in het vlak van het parallellogram behoort te liggen.

Men heeft dus

$$T_{AC(h)} = 2 (T_{AZ=CZ(h)} + T_{BZ=DZ(h)}).$$

Trek door  $A$  een as  $h'$  evenwijdig aan  $h$ , dan is dus

$$T_{AZ=CZ(h)} = T'_{AZ(h')}$$

Trek door  $B$  een as  $h''$  evenwijdig aan  $h$ , dan is dus

$$T_{BZ=DZ(h)} = T''_{BZ(h'')} \quad \text{dus is}$$

$$T_{AC(h)} = 2(T'_{AZ(h')} + T''_{BZ(h'')}).$$

Daar nu de parallelogrammen  $CZ$  en  $AC$ , alsmede  $DZ$  en  $BD$  gelijkvormige stelsels zijn ten opzichte van de assen  $h$  en  $h'$  als ook van  $h$  en  $h''$  en  $\epsilon = 2$  is volgt, als  $T'_{AC(h')}$  en  $T''_{AC(h'')}$  de traagheidsmomenten van het geheele parallelogram zijn ten opzichte van  $h'$  en  $h''$

$$T'_{AC(h')} = 2^4 \cdot T_{AZ=CZ(h)} = 2^4 \cdot T'_{AZ=CZ(h')}$$

$$T''_{AC(h'')} = 2^4 \cdot T_{BZ=DZ(h)} = 2^4 \cdot T''_{BZ=DZ(h'')}$$

Noemt men  $p$  en  $q$  de afstanden van de as  $h$  tot de assen  $h'$  en  $h''$  dan is

$$T'_{AC(h')} = T_{AC(h)} + Mp^2 \quad \text{en}$$

$$T''_{AC(h'')} = T_{AC(h)} + Mq^2$$

dus krijgt men

$$T'_{AC(h')} + T''_{AC(h'')} = 2T_{AC(h)} + M(p^2 + q^2) \quad \text{of}$$

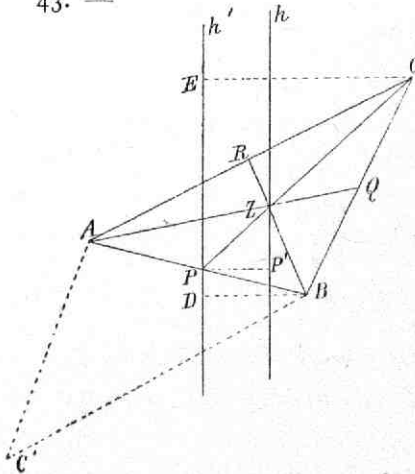
in verband met het bovenstaande

$$16(T'_{AZ(h')} + T''_{BZ(h'')}) = 8T_{AC(h)} = 2T_{AC(h)} + M(p^2 + q^2)$$

waaruit

$$T_{AC(h)} = \frac{1}{6} M(p^2 + q^2).$$

43. —



Als 3<sup>e</sup> voorbeeld nemen wij een driehoek  $ABC$  met massa  $m$ . Hij is de helft van het parallelogram  $ACBC'$  met massa  $M = 2m$ . Trekt men door het uiteinde  $P$  van de zwaartelijns  $CP$  eene as- $h'$  evenwijdig aan de willekeurig getrokken as  $h$  door het zwaartepunt  $Z$  van den driehoek, dan



is het traagheidsmoment van den driehoek ten opzichte van  $h'$  het halve traagheidsmoment van het parallelogram ten opzichte van  $h'$ .

Volgens 42 is dus

$$T_{ABC(h')} = \frac{1}{6}m \left\{ \left( \frac{1}{2}\gamma \right)^2 + (3\phi)^2 \right\},$$

waarin  $\frac{1}{2}\gamma = BD$  en  $3\phi = CE$  de loodlijnen zijn uit  $B$  en  $C$  op  $h'$  neergelaten.

Brengt men een vlak loodrecht op de assen  $h$  en  $h'$ , dan is  $\gamma$  de projectie van  $AB = c$  op dit vlak en  $CE = 3\phi$  de projectie van  $CP$  op dit vlak.

Daar  $Z$  op  $\frac{1}{3}$  van  $CP$  ligt, is de projectie van  $PZ$ , dat is  $PP'$ , op dit vlak  $= \phi$ .

Om dus het traagheidsmoment  $T$  van den driehoek  $ABC$  ten opzichte van  $h$  te vinden, moet men van  $T'$  aftrekken  $m \cdot \phi^2$  waardoor men vindt

$$T_{ABC(h)} = \frac{1}{24}m\gamma^2 + \frac{1}{2}m\phi^2$$

Noemt men nu  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $3q$  en  $3r$  de projecties op dit vlak van  $BC = a$ ,  $AC = b$ ,  $AQ$  en  $BR$  dan vindt men

$$\text{evenzoo} \quad T_{ABC(h)} = \frac{1}{24}m\beta^2 + \frac{1}{2}mq^2$$

$$\text{en} \quad T_{ABC(h)} = \frac{1}{24}m\alpha^2 + \frac{1}{2}mr^2,$$

waaruit dus volgt.

$$T_{ABC(h)} = \frac{1}{72}m(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + \frac{1}{6}(p^2 + q^2 + r^2).$$

Nu is echter

$$(6\phi)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \cos C$$

$$\text{en} \quad \gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \cos C \quad \text{dus}$$

$$(6\phi)^2 = 2(\alpha^2 + \beta^2) - \gamma^2.$$

Evenzoo vindt men

$$(6q)^2 = 2(\beta^2 + \gamma^2) - \alpha^2$$

$$(6r)^2 = 2(\gamma^2 + \alpha^2) - \beta^2.$$



bijgevolg  $12(p^2 + q^2 + r^2) = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$  dus

$$T_{ABC(h)} = \frac{1}{36} m(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2).$$

9. MET BEHULP VAN TOEGEVOEGDE MIDDELIJNEN.

44. — In Journal de l'École Polytechnique Cah. XVI bewijst BINET de stelling: „De 3 assen van een punt „waarvoor als coördinatenassen de vergelijkingen  $\Sigma mxy$  „=  $\Sigma myz = \Sigma mxz = 0$  gelden, zijn toegevoegde middel- „lijnen van de reciproke BINET'sche traagheidsellipsoïde „voor vlakken door dit punt.”

Want is  $P$  een vlak door het snijpunt dezer assen,  $\alpha$ ,  $\beta$  en  $\gamma$  de hoeken die de normaal op  $P$  met de assen maakt en  $q$  de afstand van een punt  $m(xyz)$  tot dit vlak dan is

$$q = x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma \quad \text{dus.}$$

$$\begin{aligned} \Sigma m q^2 &= i^2 \Sigma m = \Sigma m (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma)^2 \\ &= \cos^2 \alpha \Sigma m x^2 + \cos^2 \beta \Sigma m y^2 + \cos^2 \gamma \Sigma m z^2. \end{aligned}$$

Stelt men nu  $\Sigma m x^2 = a^2 \Sigma m$ ,  $\Sigma m y^2 = b^2 \Sigma m$  en  $\Sigma m z^2 = c^2 \Sigma m$  dan krijgt men voor den traagheidstraal  $i$  voor het vlak  $P$  de waarde

$$i^2 = a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \cos^2 \beta + c^2 \cos^2 \gamma.$$

Het vlak loodrecht op het uiteinde van  $i$  aangebracht, omhult, als het daarmede evenwijdige vlak  $P$  verandert, de reciproke BINET'sche traagheidsellipsoïde en wanneer  $x_0$ ,  $y_0$  en  $z_0$  de stukken zijn die op de coördinatenassen worden afgesneden, dan is

$$x_0 \cos \alpha = y_0 \cos \beta = z_0 \cos \gamma = i$$

waardoor men dus verkrijgt

$$1 = \frac{a^2}{x_0^2} + \frac{b^2}{y_0^2} + \frac{c^2}{z_0^2}.$$

Dit is dus de voorwaarde die er tusschen  $x_0$ ,  $y_0$  en  $z_0$  moet bestaan, opdat het vlak raakvlak aan deze Ellipsoïde zal zijn.

$x_0$ ,  $y_0$  en  $z_0$  kunnen vervangen worden door de coör-

dinaten van het raakpunt, want heeft men een Ellipsoïde op scheefhoekige assen

$$\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} + \frac{z^2}{r^2} = 1$$

waarvoor, omdat de producten  $xy$ ,  $yz$  en  $zx$  ontbreken,  $2p$ ,  $2q$  en  $2r$  toegevoegde middellijnen zijn en zoekt men de voorwaarde, opdat het vlak

$$\frac{\xi}{x_0} + \frac{\eta}{y_0} + \frac{\zeta}{z_0} = 1$$

deze Ellipsoïde raakt, dan is de vergelijking van het raakvlak

$$\frac{x\xi}{p^2} + \frac{y\eta}{q^2} + \frac{z\zeta}{r^2} = 1.$$

Door toepassing van de methode der onbepaalde coëfficiënten volgt

$$\frac{x}{p^2} = \frac{1}{x_0}; \quad \frac{y}{q^2} = \frac{1}{y_0}; \quad \frac{z}{r^2} = \frac{1}{z_0}$$

of

$$x = \frac{p^2}{x_0}; \quad y = \frac{q^2}{y_0} \text{ en } z = \frac{r^2}{z_0}.$$

Substitueert men nu de coördinaten van het raakpunt  $x$ ,  $y$ ,  $z$  in de vergelijking van de Ellipsoïde, dan krijgt men als voorwaarde dat het vlak, hetwelk van de assen de stukken  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$  afsnijdt, de Ellipsoïde in het punt  $(xyz)$  rake:

$$\frac{p^2}{x_0^2} + \frac{q^2}{y_0^2} + \frac{r^2}{z_0^2} = 1.$$

Deze voorwaarde vergeleken met

$$1 = \frac{a^2}{x_0^2} + \frac{b^2}{y_0^2} + \frac{c^2}{z_0^2}$$

doet ons dus zien dat het vlak hetwelk van de assen de stukken  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$  afsnijdt, raakvlak is in het punt

$(xyz)$  aan de Ellipsoïde  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  en dat  $2a$ ,  $2b$

en  $2c$  toegevoegde middellijnen zijn.

45. — Als voorbeeld nemen wij een scheef Parallelo-  
pipedum, waarvan de ribben  $p$ ,  $q$  en  $r$  zijn, terwijl  $Z$   
het zwaartepunt en de assen  $ZX$ ,  $ZY$  en  $ZZ$  evenwijdig  
loopen aan de ribben.

Blijkbaar is  $\int yzdm = \int xzdm = \int xydm = 0$  en

$$\left. \begin{aligned} ma^2 &= \int x^2 dm = \frac{1}{12} mp^2 \\ mb^2 &= \frac{1}{12} mq^2 \\ mc^2 &= \frac{1}{12} mr^2 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} a^2 &= \frac{1}{12} p^2 \\ \text{of } b^2 &= \frac{1}{12} q^2 \\ c^2 &= \frac{1}{12} r^2. \end{aligned}$$

De assen door  $Z$  zijn dus toegevoegde middellijnen van

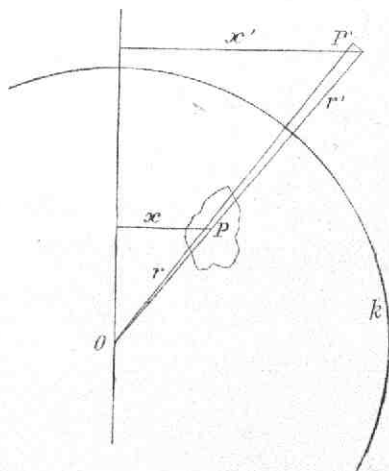
$$\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} + \frac{z^2}{r^2} = \frac{1}{12}$$

en de Hoofdtraagheidsassen zijn de assen van de Ellipsoïde

$$\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} + \frac{z^2}{r^2} = \sigma^2.$$

Neemt men  $x = \frac{1}{2}p$ ;  $y = \frac{1}{2}q$  en  $z = \frac{1}{2}r$ , dan gaat deze  
Ellipsoïde door de 8 hoekpunten van het Parallelopipe-  
dum, terwijl dan  $\sigma^2 = \frac{3}{4}$  is.

#### 1. INVERSIE METHODE.



46. — Trek uit een  
vasten oorsprong  $O$   
een voerstraal  $OP = r$   
naar een punt  $P$  van  
een figuur en verleng  
dien tot  $OP' = r'$ ,  
waarin  $P'$  zoo geko-  
zen is dat als  $k$  de  
straal van een bol uit  
 $O$  voorstelt  
 $OP \cdot OP' = k^2$  is.

Indien dan  $P$  over de gegeven figuur loopt, vormt  $P'$  een figuur die de *inverse* van de gegeven figuur genoemd wordt.

Noem de overeenkomstige volumina van  $P$  en  $P'$   $dv$  en  $dv'$  en de dichtheden  $\varrho$  en  $\varrho'$ , terwijl  $d\omega$  de opening van den elementair kegel in  $O$  is, dan is

$$dv' = r'^2 d\omega dr' = \frac{k^4}{r^2} d\omega \cdot \frac{k^2}{r^2} dr,$$

want het negatieve teeken valt wegt, omdat als  $r$  toeneemt,  $r'$  afneemt, want steeds moet  $rr' = k^2 = \text{const.}$  zijn,

$$\text{dus } dv' = \frac{k^6}{r^4} d\omega dr = \left(\frac{k}{r}\right)^6 r^2 d\omega dr = \left(\frac{k}{r}\right)^6 dr.$$

Nu is, als men de afstanden van  $P$  en  $P'$  tot een willekeurige lijn door  $O$   $x$  en  $x'$  noemt,  $x : x' = r : r'$

$$\text{dus } x' = x \cdot \frac{r'}{r}$$

$$x'^2 dv' = x^2 \left(\frac{r'}{r}\right)^2 \cdot \left(\frac{k}{r}\right)^6 dv$$

daar  $\frac{r'}{r} = \frac{k^2}{r^2}$  is, volgt hieruit  $x'^2 dv' = x^2 \left(\frac{k}{r}\right)^{10} dv$ .

Nu is  $\varrho' dv' = dm'$  en  $\varrho dv = dm$  dus

$$\frac{dv'}{dv} = \frac{\varrho}{\varrho'} \cdot \frac{dm'}{dm} \quad \text{dus}$$

$$x'^2 \cdot \frac{\varrho}{\varrho'} \cdot \frac{dm'}{dm} = x^2 \left(\frac{k}{r}\right)^{10}$$

$$x'^2 dm' = \frac{\varrho'}{\varrho} \cdot \left(\frac{k}{r}\right)^{10} \cdot x^2 dm.$$

$\Sigma x'^2 dm'$  zal dus gelijk  $\Sigma x^2 dm$  zijn, als

$$\frac{\varrho'}{\varrho} = \left(\frac{r}{k}\right)^{10} \quad \text{is, dat wil zeggen:}$$

Indien een homogeen lichaam geïnverteerd wordt ten opzichte van een punt  $O$  en de dichtheid van het door inversie gevormde lichaam omgekeerd evenredig is met

de 10<sup>de</sup> macht van den afstand tot  $O$ , dan hebben deze twee lichamen gelijke traagheidsmomenten voor alle rechte lijnen door  $O$  getrokken.

### E. Traagheidsmomenten van eenige stelsels.

47. — Bij omwentelingslichamen kan men de  $X$ -as als omwentelingsas aannemen, dan is de massa van een volumenelement  $2\pi\rho r dx dr$ . Het traagheidsmoment verkrijgt men dus door integratie van  $2\pi\rho r^3 dx dr$

$$T = 2\pi\rho \int_{x_0}^x dx \int_0^y r^3 dr = \frac{\pi\rho}{2} \int_{x_0}^x y^4 dx$$

en deze integraal is gemakkelijk te vinden indien men  $y$  weet uit te drukken in functie van  $x$  zooals bij de volgende 5 toepassingen:

a. De beschrijvende lijn van een bol is een cirkel  $x^2 + y^2 = a^2$  dus  $y^4 = (a^2 - x^2)^2$ ;  $x_0 = -a$ ;  $x = a$

$$T = \frac{\pi\rho}{2} \int_{-a}^{+a} (a^4 - 2a^2x^2 + x^4) dx = \frac{8}{15} \pi\rho a^5$$

daar  $M = \frac{4}{3} \pi\rho a^3$  is, volgt

$$T = \frac{2}{5} Ma^2.$$

b. De beschrijvende lijn van een cilinder is een rechte lijn evenwijdig aan de as; dus  $y = r$ ; is  $h$  de hoogte

dan is 
$$T = \frac{\pi\rho}{2} r^4 \int_0^h dx = \frac{\pi\rho}{2} r^4 h.$$

$$M = \pi\rho r^2 h$$

dus

$$T = \frac{Mr^2}{2}.$$

c. Een parabool  $y^2 = px$  wentelende om zijn as begrensd door het vlak  $x = h$  geeft een paraboloid.

$$y^4 = p^2 x^2$$

$$T = \frac{\pi \rho \rho^2}{2} \int_0^h x^2 dx = \frac{\pi \rho \rho^2 h^3}{6}.$$

$$M = \frac{\pi \rho h^2 \rho}{2} \quad \text{dus}$$

$$T = \frac{M h \rho}{12}.$$

d. De beschrijvende lijn van een kegel is een rechte lijn  $y = ax$ ; straal grondvlak  $r$ ; hoogte kegel  $= h$ .

$$y^4 = a^4 x^4; x_0 = 0; x = h; a = \frac{r}{h}.$$

$$T = \frac{\pi \rho}{2} a^4 \int_0^h x^4 dx = \frac{\pi \rho}{2} \cdot \frac{a^4 h^5}{5}.$$

$$M = \frac{1}{3} \pi r^2 h \rho \quad \text{dus}$$

$$T = \frac{3}{10} M r^2.$$

e. Van een afgeknotten kegel, stralen grond- en bovenzvlak  $a$  en  $b$ , hoogte  $h$ , is de beschrijvende lijn  $y = \vartheta x + b$ , als  $\vartheta$  de tangens van den halven tophoek is.

$$T = \frac{\pi \rho}{2} \int_0^h y^4 dx = \frac{\pi \rho}{2 \vartheta} \int_b^a y^4 dy = \frac{\pi \rho}{10 \vartheta} (a^5 - b^5).$$

$$M = \frac{\pi \rho}{3 \vartheta} (a^3 - b^3) \quad \text{dus}$$

$$T = \frac{3}{10} M \cdot \frac{a^5 - b^5}{a^3 - b^3}.$$

48. Neemt men de omwentelingsas als  $y$ -as en de straal van het grondvlak als  $x$ -as aan en wil men dan het traagheidsmoment ten opzichte van de  $x$ -as van den kegel vinden, dan is in het algemeen

$$T = \pi \rho \int_{y_0}^{y_1} (x^2 y^2 + \frac{1}{4} x^4) dy$$



dus bij onzen afgeknotten kegel

$$y = \frac{a-x}{\vartheta} \quad dy = -\frac{dx}{\vartheta}$$

$$T = -\frac{\pi \varrho}{\vartheta} \int_a^b \left\{ x^2 \frac{(a-x)^2}{\vartheta^2} + \frac{1}{4} x^4 \right\} dx.$$

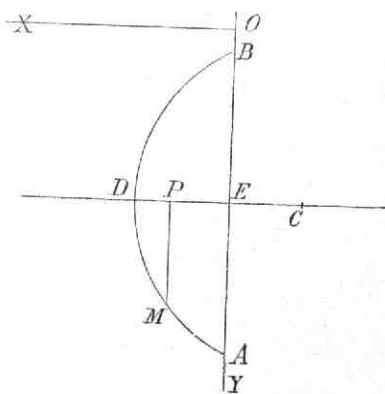
$$= \frac{\pi \varrho}{\vartheta} \int_b^a \left\{ \frac{a^2 x^2}{\vartheta^2} - \frac{2ax^3}{\vartheta^2} + \frac{(4+\vartheta^2)}{4\vartheta^2} x^4 \right\} dx$$

$$= \frac{\pi \varrho}{\vartheta} \left\{ \frac{4+\vartheta^2}{20\vartheta^2} \cdot (a^5 - b^5) - \frac{a}{2\vartheta^2} (a^4 - b^4) + \frac{1}{4} \frac{a^2}{\vartheta^2} (a^3 - b^3) \right\}$$

daar  $M = \frac{\pi \varrho}{3\vartheta} (a^3 - b^3)$  is, volgt

$$T = \frac{3M}{\vartheta^2} \left\{ \frac{4+\vartheta^2}{20} \frac{(a^5 - b^5)}{(a^3 - b^3)} - \frac{1}{2} a \frac{(a^4 - b^4)}{(a^3 - b^3)} + \frac{1}{3} a^2 \right\}.$$

49. — Het traagheidsmoment van een bolvormig segment ten opzichte van een as loodrecht op het grondvlak?



Stel  
 $CD = r; DE = h$   
 $OX$  evenwijdig aan  
 $CD$  op afstand  
 $OE = \delta$ .  
 Men heeft  $EP = x$

$$PM^2 = \{2r - (h - x)\}(h - x).$$

Het traagheidsmoment ten opzichte van  $CD$  is

$$T' = \frac{\pi \varrho}{2} \int y^2 dx = \frac{\pi \varrho}{2} \int_0^h \{2r - (h - x)\}^2 (h - x)^2 dx$$

$$= \pi \varrho \left( \frac{2}{3} r^2 h^3 - \frac{1}{2} r h^4 + \frac{1}{10} h^5 \right)$$

daar

$$M = \pi \varrho \left( r h^2 - \frac{1}{3} h^3 \right)$$

is

$$T' = Mh \cdot \frac{\frac{3}{4}r^2 - \frac{1}{2}rh + \frac{1}{16}h^2}{r - \frac{1}{4}h}.$$

Het traagheidsmoment ten opzichte van  $OX$  is dus:

$$T = M \left( h \cdot \frac{\frac{3}{4}r^2 - \frac{1}{2}rh + \frac{1}{16}h^2}{r - \frac{1}{4}h} + \delta^2 \right).$$

50. — Zoekt men de Enveloppe van een rechte lijn van constante lengte  $a$ , die zich beweegt, steunende op 2 rechthoekige coördinatenassen, dan vindt men

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

Het traagheidsmoment  $T_{(x)}$  of  $T_{(y)}$  van een kwadraat van deze kromme vindt men door gebruik te maken van:

$$T_{(x)} = q\varrho \int_{x_0}^{x_1} y^2 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx.$$

$$T_{(y)} = q\varrho \int_{x_0}^{x_1} x^2 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx.$$

waarin  $y = f(x)$ ;  $q$  de doorsnede en  $\varrho$  de dichtheid is.

$$y = (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} \quad \text{dus } y^2 = (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^3$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}} \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}$$

$$T_{(x)} = q\varrho \int_0^a (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^3 \cdot \frac{a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}} dx$$

$$= q\varrho \int_0^a \left\{ a^{\frac{7}{3}} x^{-\frac{1}{3}} - 3a^{\frac{4}{3}} x^{\frac{1}{3}} + 3ax - a^{\frac{1}{3}} x^{\frac{5}{3}} \right\} dx$$

$$= q\varrho \cdot \frac{3}{8} a^3$$

dus  $T_{(x)} = \frac{1}{4} Ma^2.$

Evenzoo  $T_{(y)}.$

51. — Voor Polaire coördinaten gebruikt men:

$$T_{(x)} = q\varrho \int_{\Theta_0}^{\Theta_1} r^2 \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\Theta}\right)^2} \cdot \sin^2 \Theta d\Theta$$

$$T_{(y)} = q\varrho \int_{\Theta_0}^{\Theta_1} r^2 \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\Theta}\right)^2} \cdot \cos^2 \Theta d\Theta.$$

Het traagheidsmoment van een cirkelboog, waarvan de straal  $a$  en de middelpuntshoek  $\gamma$  is? De polaire vergelijking van den cirkel is

$$r = 2a \cos \Theta$$

$$\frac{dr}{d\Theta} = -2a \sin \Theta \quad \left(\frac{dr}{d\Theta}\right)^2 = 4a^2 \sin^2 \Theta$$

$$T_{(x)} = q\varrho \int_{\frac{1}{2}(\pi-\gamma)}^{\frac{\pi}{2}} 4a^3 \cos^2 \Theta \cdot 2a \sin^2 \Theta d\Theta.$$

Nu is

$$\begin{aligned} 2a^3 \int 4 \sin^2 \Theta \cos^2 \Theta d\Theta &= 2a^3 \int \sin^2 2\Theta d\Theta = \\ &= 2a^3 \int \frac{1 - \cos 4\Theta}{2} d\Theta = a^3 \int (1 - \cos 4\Theta) d\Theta = \\ &= a^3 \left\{ \Theta - \frac{1}{4} \sin 4\Theta \right\} \end{aligned} \quad \text{dus}$$

$$T_{(x)} = q\varrho a^3 \left\{ \Theta - \frac{1}{4} \sin 4\Theta \right\}_{\frac{1}{2}(\pi-\gamma)}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$I_{(x)} = \frac{1}{2} q\varrho a^3 (\gamma - \sin \gamma \cos \gamma).$$

52. — In het  $xz$ -vlak ligt de kromme  $z = \frac{1}{2} x^2$ ,  
(de parabool  $z = \frac{x^2}{2a}$  waarvoor  $a = 1$  is)

in het  $xy$ -vlak de kromme  $y = \frac{2}{3} \sqrt[3]{2x^3}$

(de ontwondene van de parabool  $y = \frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{2x^3}{a}}$

waarvoor  $a = 1$  is).

Op beide krommen zijn cilindervlakken evenwijdig aan de  $y$  en  $z$ -as gebracht. Wat is  $T_{(x)}$  en  $T_{(y)}$  voor de doorsnede dezer vlakken?

Men gebruikt hier

$$T_{(x)} = q\varrho \int_a^b (y^2 + z^2) \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} dx$$

$$T_{(y)} = q\varrho \int_a^b (x^2 + z^2) \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} dx$$

$$z = \frac{1}{2} x^2; \quad z^2 = \frac{1}{4} x^4$$

$$\frac{dz}{dx} = x \quad \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = x^2$$

$$y = \frac{2}{3} (2x^3)^{\frac{1}{2}} \quad y^2 = \frac{8}{9} x^3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{6x^2}{\sqrt{2x^3}} \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 2x$$

$$T_{(x)} = q\varrho \int_0^x \left(\frac{8}{9} x^3 + \frac{1}{4} x^4\right) \sqrt{1 + 2x + x^2} dx$$

$$= q\varrho \int_0^x \left(\frac{8}{9} x^3 + \frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{4} x^5\right)$$

$$T_{(x)} = q\varrho \left(\frac{8}{36} x^4 + \frac{1}{180} x^5 + \frac{1}{24} x^6\right)$$

$$T_{(x)} = \frac{1}{36} q\varrho (80 + 82x + 15x^2) \cdot x^4$$

$$T_{(y)} = q\varrho \int_0^x \left(x^2 + \frac{1}{4} x^4\right) (1 + x) dx$$

$$= q\varrho \left(\frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{20} x^5 + \frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{24} x^6\right)$$

$$T_{(y)} = \frac{1}{36} q\varrho (40 + 30x + 6x^2 + 5x^3) \cdot x^3.$$

53. — Indien  $u$  de hoek is tusschen den straal van den cirkel naar het punt  $(xy)$  en de verticaal door het middelpunt, dan is bij de Cycloïde

$$x = a(u - \sin u)$$

$$y = a(1 - \cos u).$$

Om  $T_{(x)}$  en  $T_{(y)}$  te vinden gebruikt men

$$T_{(x)} = \frac{1}{2} \delta\varrho \int_{x_0}^{x_1} (y_1^3 - y_0^3) dx$$

$$T_{(y)} = \delta\varrho \int_{x_0}^{x_1} (y_1 - y_0) x^2 dx$$

waarin  $\delta$  = dikte van het vlak en  $\varrho$  de dichtheid is.

$$dx = a(1 - \cos u)du \quad \text{dus}$$

$$T_{(x)} = \frac{1}{3} \delta \rho \int_0^\pi a^3 (1 - \cos u)^3 a (1 - \cos u) du$$

$$T_{(x)} = \frac{1}{3} \delta \rho a^4 \int_0^\pi (1 - \cos u)^4 du.$$

$$\text{Nu is } \int (1 - \cos u)^4 du =$$

$$= \int (1 - 4 \cos u + 6 \cos^2 u - 4 \cos^3 u + \cos^4 u) du$$

$$6 \cos^2 u = 3 \cos 2u + 3$$

$$4 \cos^3 u = \cos 3u + 3 \cos u$$

$$\cos^4 u = \frac{1}{8} \cos 4u + \frac{1}{2} \cos 2u + \frac{3}{8} \quad \text{dus}$$

$$\int_0^\pi (1 - \cos u)^4 du = \frac{35}{8} \pi$$

$$T_{(x)} = \frac{35}{24} \pi \delta \rho a^4 \quad \text{daar } M = \frac{3}{2} \pi \delta \rho a^2 \quad \text{is}$$

$$T_{(x)} = \frac{35}{36} Ma^2.$$

$$\text{Evenzoo } T_{(y)} = \frac{1}{36} (12\pi^2 - 35) Ma^2.$$

54. — Gebruikt men Polaire coördinaten, dan heeft men

$$T_{(x)} = \frac{1}{4} \delta \rho \int_{\Theta_0}^{\Theta_1} (r_1^4 - r_0^4) \sin^2 \Theta d\Theta$$

$$T_{(y)} = \frac{1}{4} \delta \rho \int_{\Theta_0}^{\Theta_1} (r_1^4 - r_0^4) \cos^2 \Theta d\Theta.$$

Het traagheidsmoment van een Elliptischen ring (binnenste Ellips tot halve assen hebbende  $a$ ;  $b$ , de buitenste  $a_1$ ;  $b_1$ )?

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{wordt}$$

$$r^2 = \frac{1}{\alpha^2 \cos^2 \Theta + \beta^2 \sin^2 \Theta}$$

als  $\frac{1}{a} = \alpha; \frac{1}{a_1} = \alpha_1; \frac{1}{b} = \beta; \frac{1}{b_1} = \beta_1$  is

$$\frac{1}{4} T_{(x)} = \frac{1}{4} \delta \varrho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{1}{(\alpha_1^2 \cos^2 \Theta + \beta_1^2 \sin^2 \Theta)^2} - \frac{1}{(\alpha^2 \cos^2 \Theta + \beta^2 \sin^2 \Theta)^2} \right\} \cdot \sin^2 \Theta d\Theta.$$

Nu is

$$X = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \Theta d\Theta}{(\alpha^2 \cos^2 \Theta + \beta^2 \sin^2 \Theta)^2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg}^2 \Theta \frac{d\Theta}{\cos^2 \Theta}}{(\alpha^2 + \beta^2 \operatorname{tg}^2 \Theta)^2}$$

Stel  $\operatorname{tg} \Theta = x$  dan is

$$X = \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{(\alpha^2 + \beta^2 x^2)^2}.$$

Stel nu  $\beta x = \alpha y$  dan is

$$\begin{aligned} X &= \int_0^{\infty} \frac{\alpha^3}{\beta^3} \cdot y^2 dy \frac{1}{\alpha^4 (1+y^2)^2} = \frac{1}{\alpha \beta^3} \int_0^{\infty} \frac{y^2 dy}{(1+y^2)^2} = \\ &= \frac{1}{\alpha \beta^3} \int_0^{\infty} \frac{y}{2} d \left( \frac{-1}{1+y^2} \right) = \\ &= \frac{1}{\alpha \beta^3} \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{y}{1+y^2} \right)_0^{\infty} + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{dy}{1+y^2} \right\} \end{aligned}$$

$$X = \frac{1}{2\alpha\beta^3} \left( Bg \operatorname{tg} y \right)_0^{\infty}$$

$$X = \frac{\pi}{4\alpha\beta^3}$$

$$X = \frac{\pi}{4} ab^3$$

dus

$$\frac{1}{4} T_{(x)} = \frac{1}{4} \delta \varrho \cdot \frac{\pi}{4} (a_1 b_1^3 - ab^3)$$

$$T_{(x)} = \frac{1}{4} \pi \delta \varrho (a_1 b_1^3 - ab^3)$$

55. — Is de as loodrecht op het vlak, dan geldt:

$$T_{(z)} = T_{(x)} + T_{(y)}$$



dus voor de Cycloïde van 53 is

$$T_{(x)} = \frac{35}{36} Ma^2 \text{ en } T_{(y)} = \frac{1}{36} (12\pi^2 - 35) Ma^2$$

$$T_{(z)} = \frac{1}{3} \pi^2 Ma^2.$$

56. — Resumeerende blijkt dus uit het behandelde dat de Integratiemethode de meest algemeene is ter opsporing van traagheidsmomenten, dat echter bij lichamen waarvan de dichtheid volgens een bepaalde wet verandert met voordeel de methode door Differentiatie te gebruiken is. Verder is gebleken dat indien men symmetrievlakken in een lichaam kan vinden, hiervan gebruik gemaakt kan worden, daar men dan slechts de grootheden  $A'$ ;  $B'$ ; en  $C'$  behoeft te berekenen, terwijl dit bij omwentelingslichamen nog gemakkelijker wordt, daar dan slechts  $A$  en  $A'$  behoeven opgespoord te worden.

Bij gelijkvormige stelsels heeft men het voordeel dat, door invoering van een as die op een bepaalden afstand van de werkelijke as gelegen is, er twee betrekkingen tusschen de traagheidsmomenten ten opzichte van die beide assen gevonden kunnen worden, welke twee betrekkingen kunnen dienen ter eliminatie van het traagheidsmoment ten opzichte van een der assen en ons ten slotte geeft het traagheidsmoment ten opzichte van de gegevene as.

De methode met behulp van de stelling van BINET geeft op eene gemakkelijke wijze de Hoofdtraagheidsassen, terwijl de Inversiemethode de betrekking tusschen de dichtheden van 2 lichamen doet kennen, opdat die beide lichamen dezelfde traagheidsmomenten ten opzichte van een willekeurige as door een bepaald punt getrokken, kunnen hebben.

## HOOFDSTUK II.

### Traagheidsproducten.

HATON DE LA GOUPILLIÈRE geeft in Journal de l'École Imperiale Polytechnique Tome XXI eene beschouwing over traagheidsproducten, die hij noemt, Theorie Nouvelle de la Géométrie des Masses en waaraan het volgende ontleend is.

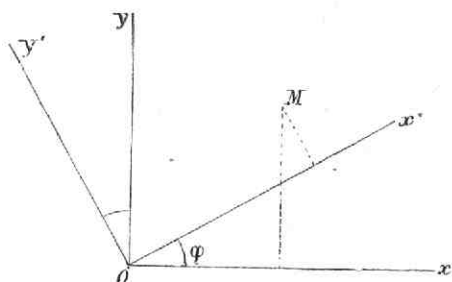
#### A. Invloed van de draaiing der vlakken om een as.

57. — Men kan  $\Sigma mxy$ , dat hij het moment ten opzichte van de  $z$ -as noemt, voorstellen door  $MY$ , waarin  $M$  de totale massa beteekent, en men dus krijgt  $XY = \frac{\Sigma mxy}{M}$  hetwelk voorstelt een hyperbool op asymptoten.

Wij hebben dus  $XY = \frac{A^2}{2}$  waaruit  $A^2 = \frac{2\Sigma mxy}{M}$ .  $A$  komt overeen met den traagheidstraal en wordt de *parameter* van het moment genoemd.

Gaan wij van het stelsel  $xy$  over op  $x'y'$  dat met het

eerste een hoek  $\varphi$  maakt, dan is



$$x' = y \sin \varphi + x \cos \varphi$$

$$y' = y \cos \varphi - x \sin \varphi$$

dan volgt

$$\begin{aligned} 2 \Sigma m x' y' &= \\ &= \sin 2\varphi \Sigma m (y^2 - x^2) \\ &\quad + 2 \Sigma m x y \cos 2\varphi. \end{aligned}$$

Nu is

$$\Sigma m (y^2 - x^2) = \Sigma m (y^2 + z^2) - \Sigma m (x^2 + z^2) = M(u^2 - v^2)$$

waarin  $u$  en  $v$  de traagheidsstralen zijn ten opzichte van  $x$  en  $y$  en noemt men  $A$  en  $\lambda$  de parameters der 2 stelsels, dan is

$$\lambda^2 = (u^2 - v^2) \sin 2\varphi + A^2 \cos 2\varphi$$

welke grootheid gelijk nul gesteld (voor  $\varphi$  stellende  $-\omega$ )

geeft 
$$\operatorname{tg} 2\omega = \frac{A^2}{u^2 - v^2}.$$

Er bestaat dus voor elke as een vlakstelsel dat een moment nul geeft.

Zulk een stelsel noemt men een nulvlak.

58. — Neemt men de nulvlakken tot  $XY$ -vlakken aan, dan wordt de laatste term nul, dus

$$\lambda^2 = (U^2 - V^2) \sin 2\Phi$$

welke parameter voor  $\Phi = 45^\circ$  zijn grootste waarde

$$l^2 = U^2 - V^2$$

krijgt en *Hoofdparameter* genoemd wordt, waardoor onze vergelijking ten slotte wordt

$$\lambda^2 = l^2 \sin 2\Phi.$$

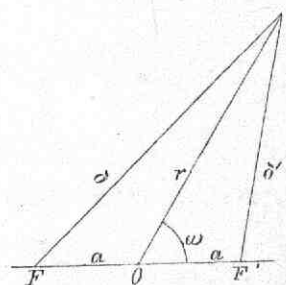
Neemt men nu op de lijn, die elk stelselassen midden doordeelt een lengte gelijk aan den overeenkomstigen

Parameter, dan zal de meetkundige plaats der uiteinden een kromme zijn, wier polaire vergelijking is

$$r = l \sqrt{\sin 2\theta}.$$

Men noemt de kromme een *lemniscaat* indien het product der afstanden van een willekeurig punt dier kromme tot 2 vaste brandpunten gelijk een gegeven vierkant is; terwijl, indien de zijde van het vierkant gelijk de halve brandpuntsafstand is, die kromme een gelijkzijdige lemniscaat genoemd wordt, dan volgt daar

$$a^4 = \rho^2 \rho'^2 = (r^2 + a^2 - 2ar \cos \omega) \times \\ \times (r^2 + a^2 + 2ar \cos \omega) \quad \text{is} \\ r^2 = 2a^2 \cos 2\omega.$$

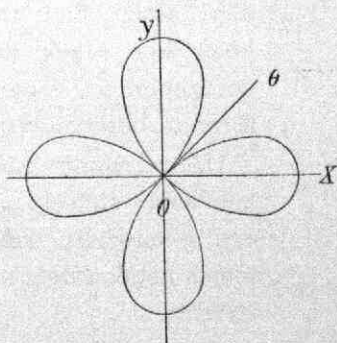


Stel nu  $a\sqrt{2} = l$  en  $\theta$  het azimuth ten opzichte van de raaklijn in  $O$  en niet ten opzichte van de as, waardoor  $\omega = \theta - 45^\circ$  wordt, zoo wordt de vergelijking

$$r^2 = l^2 \sin 2\theta,$$

waaruit dus blijkt dat onze kromme een gelijkzijdige lemniscaat is.

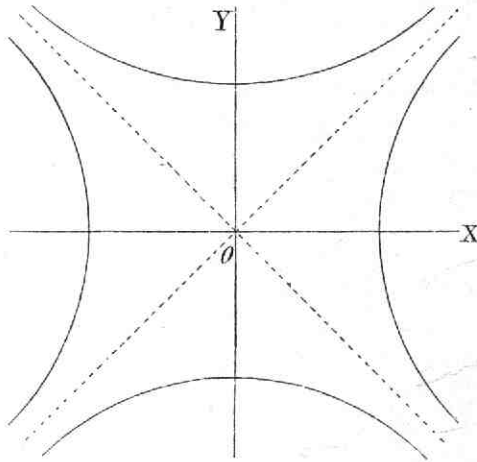
De parameter verandert dus als de voerstraal van een gelijkzijdige lemniscaat wier halve as de hoofdparameter is.



Ziet men af van het teeken van  $l^2$  en maakt men ook in het 2<sup>e</sup> kwadraat de imaginaire lemniscaat, dan krijgt men nevenstaande figuur.

59. — Zet men echter, even als bij de traagheids-

momenten, stukken af, *omgekeerd evenredig* met de over-



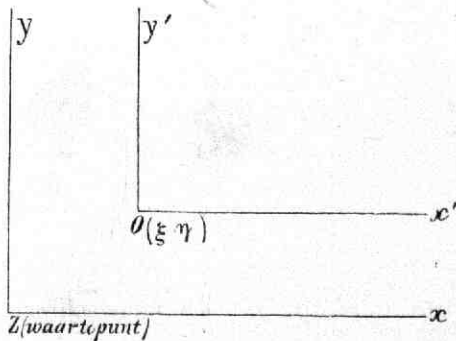
eenkomstige Parameters, dan krijgt men de vergelijking

$$r = \frac{C}{\sqrt{\sin 2\theta}}$$

dus  $C' = 2r \sin \theta \cdot r \cos \theta$  of  $C' = 2xy$   
of een gelijkzijdige Hyperbool op asymptoten.

### B. Invloed van evenwijdige verplaatsing der as.

60. — Brengt men door het zwaartepunt een vlak lood-



recht op alle evenwijdige assen, dan heeft men alleen de voetpunten  $O$  dier assen te beschouwen.

De overgang van het eene stelsel op een evenwijdig kan plaats hebben door te stellen:



$$\begin{array}{l}
 x' = x - \xi \qquad y' = y - \eta, \\
 \text{waaruit} \qquad \Sigma mx'y' = \Sigma mxy + M\xi\eta \\
 \text{want} \qquad \xi\Sigma my \text{ en } \eta\Sigma mx \qquad \text{zijn nul.}
 \end{array}$$

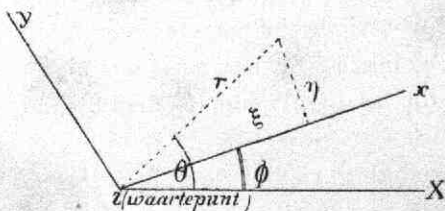
De momenten behorende bij evenwijdige assen worden evenwijdige momenten genoemd.

Wil men omgekeerd een as vinden waarvan het evenwijdige moment een gegeven waarde heeft, dan heeft men slechts de enkele vergelijking

$$\xi\eta = \frac{\Sigma mx'y' - \Sigma mxy}{M}$$

De assen met hetzelfde moment vormen dus een cilinder, een hyperbool op asymptoten tot basis hebbende.

61. — Om de algemeene vergelijking van deze krommen



te vinden, gebruikt men Polaire coördinaten, voor vaste lijn de nul-as door  $Z$  nemende

$$\begin{array}{l}
 \xi = r \cos(\theta - \phi) \\
 \eta = r \sin(\theta - \phi).
 \end{array}$$

Noemt men  $L$  de hoofdparameter van de centrale as, dat is de as door het zwaartepunt, dan is

$$\frac{2 \Sigma mxy}{M} = L^2 \sin 2\phi.$$

Maak nu elke as gelijk aan haar parameter; dan is de meetkundige plaats der uiteinden

$$r^2 \sin 2(\theta - \phi) = \lambda^2 - L^2 \sin 2\phi.$$

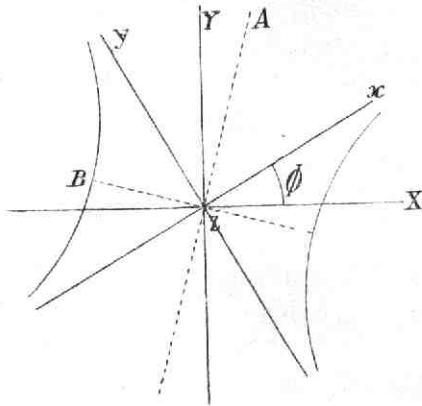
Om den doorgang van dit oppervlak van den tweeden graad te vinden met het vlak loodrecht op den bundel stellen wij  $\lambda = 0$  dus

$$r^2 \sin 2(\theta - \phi) = -L^2 \sin 2\phi$$



of een gelijkzijdige hyperbool ten opzichte van de vaste richtingen.

De deellijn  $ZA$  is een der symmetrieassen. Door



$\theta = \phi + 135^\circ$  te maken, krijgt men de doorsnede met het vlak loodrecht op  $ZB$  en er komt

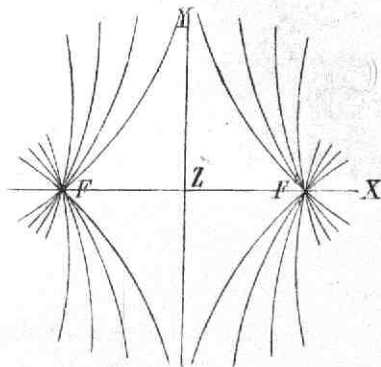
$\lambda^2 + r^2 = L^2 \sin 2\phi$ ,  
dus een cirkel gelegen in het vlak loodrecht op  $ZB$ .

Het is dus een omwentelings oppervlak om  $ZA$ , waaruit volgt

dat de parameter der evenwijdige momenten verandert als de ordinaat van een gelijkzijdige omwentelingshyperboloïde met één tak, tot as hebbende de deellijn der vaste richtingen.

Stelt men in de vergelijking van al deze hyperbolen

$$\theta = 0 \text{ dan is } r = \pm L.$$



Is dus  $ZF = ZF' = L$ ,

dan zijn de punten  $F$  en  $F'$  de plaatsen waar alle hyperbolen elkander kruisen.

Deze punten noemt men *brandpunten*. In verband

met 58 blijkt dus dat de reeks punten van een hoofdtraagheidsvlak, waarvoor

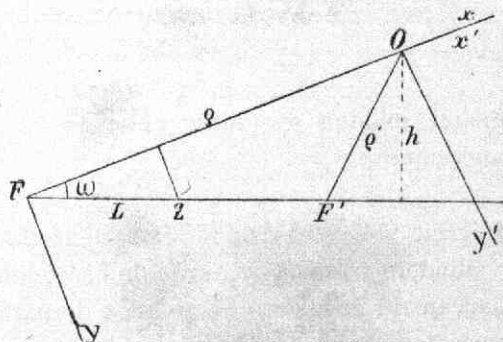
de traagheidsassen een

vaste richting hebben, een gelijkzijdige hyperbool is, die tot asymptoten heeft de rechte lijnen door het zwaarte-

punt volgens deze richtingen getrokken. Deze hyperbolen snijden elkander in 2 brandpunten en hunne toppen vormen een gelijkzijdige lemniscaat, wier toppen in deze 2 brandpunten liggen.

Voor deze brandpunten zijn de beide traagheidsassen willekeurig en is de traagheidsellipsoïde een omwentelingslichaam.

62. — Het moment van eene as  $O$  wordt *focaal moment* genoemd als het behoort bij vlakken waarvan er een gaat door deze as en een der beide focale assen. Dadelijk zal blijken, dat het geen verschil maakt, welke der beide focale assen men kiest.



Men kan van het stelsel  $(O; x'y')$  tot  $(F; xy)$  overgaan door te stellen

$$x' = x - q$$

$$y' = y$$

dus

$$\Sigma mx'y' = \Sigma mxy - q\Sigma my,$$

$\Sigma mxy$  verdwijnt omdat het moment van  $F$  nul is.

Daar  $-L \sin \omega$  de ordinaat van het zwaartepunt is, is

$$\Sigma my = -ML \sin \omega$$

dus

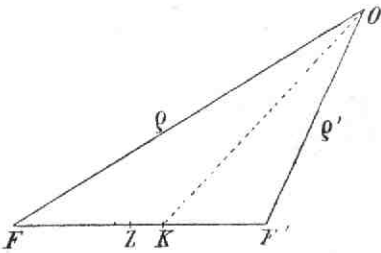
$$\Sigma mx'y' = MLq \sin \omega = MLh$$

$Lh$  is driehoek  $FOF'$ .

Het *focale moment* van een as  $O$  is dus het product van de totale massa met een driehoek verkregen door vereeniging met de beide brandpunten,

Hieruit blijkt dat het moment van  $O$  dezelfde waarde heeft voor de beide vlakken  $OF$  en  $OF'$ .

Daar de basis  $FF'$  van dezen driehoek constant is, verhouden de focale momenten zich als de afstanden tot de lijn door  $Z$  en de beide brandpunten.



Het focale moment is dus

$$\frac{1}{2} M \rho \rho' \sin FOF'$$

maar in functie van den hoofdparameter

$$\frac{1}{2} M l^2 \sin 2 \cdot FOK$$

daar  $OK$  de hoek  $FOF'$  middendoordeelt, volgt

$$l^2 = \rho \rho', \text{ dus is de}$$

hoofdparameter midden evenredig tusschen de afstanden tot de brandpunten.

63. — Hieruit volgt dat de assen met denzelfden hoofdparameter cilinders vormen, waarvan de bases lemniscaten zijn en waarvan de constante voor ieder de parameter is. Deze lemniscaten hebben dezelfde brandpunten en verschillen slechts door de waarde van den parameter  $l$ .

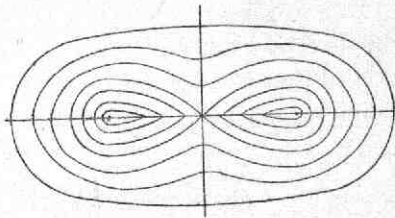
Maakt men  $l = L$ , dan krijgt men een gelijkzijdige lemniscaat.

Laat men  $l$  van de waarde  $L$  af onbepaald toenemen, dan komt men aan het ovaal, dat meer en meer cirkelvormig wordt.

Laat men  $l$  daarentegen afnemen tot nul, dan komt men tot 2 afzonderlijke ovalen, die ten slotte de brandpunten worden.

Zet op iedere as van af zijn voetpunt zijn hoofdpara-

meter uit, dan blijkt, dat de hoofdparameter verandert

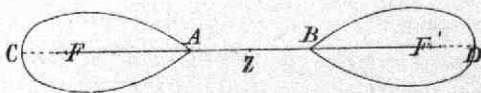


als de ordinaat van het oppervlak voortgebracht door een lemniscaat die zich zoodanig verplaatst dat zijn middelpunt en zijne brandpunten rechte lijnen loodrecht op zijn

vlak beschrijven, en zich zoo wijzigende dat de constante steeds de afstand is door het vlak doorloopen.

Wil men den vorm van het oppervlak of liever de meetkundige plaats van de toppen der lemniscaten bepalen, dan ga men als volgt te werk:

Het oppervlak bestaat uit lemniscaten die in evenwijdige vlakken boven elkander gelegen zijn.  $A$  en  $B$  zijn de inwendige toppen,  $C$  en  $D$  de uitwendige.



kundige plaats dier toppen voor de as loodrecht op het vlak der

lemniscaten vindt men door op te merken dat, als  $x$  den afstand tot het middelpunt voorstelt, voor den inwendigen top  $A$ :

$$\varrho = AF = FZ - AZ = L - x \quad \text{is}$$

$$\text{voor } B \text{ is } \varrho = L + x \quad \text{dus } \varrho = L \mp x$$

$$\text{voor } A \text{ is } \varrho' = AF' = F'Z + AZ = L + x$$

$$\text{voor } B \text{ is } \varrho' = L - x \quad \text{dus } \varrho' = L \pm x.$$

Men heeft dus voor de *inwendige* toppen

$$l^2 = \varrho\varrho' = L^2 - x^2$$

dus een *cirkel* waarvan de middellijn is de brandpuntsafstand; in de figuur op Bl. 70 voorgesteld door  $FZF$ .

Voor den uitwendigen top  $C$  is

$$\varrho = CF = CZ - FZ = x - L$$

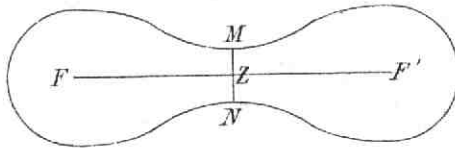
voor  $D$  is  $q = x + L$       dus  $q = x \mp L$   
 voor  $C$  is

$$q' = CF' = CZ + F'Z = x + L$$

voor  $D$  is  $q' = x - L$       dus  $q' = x \pm L$ .

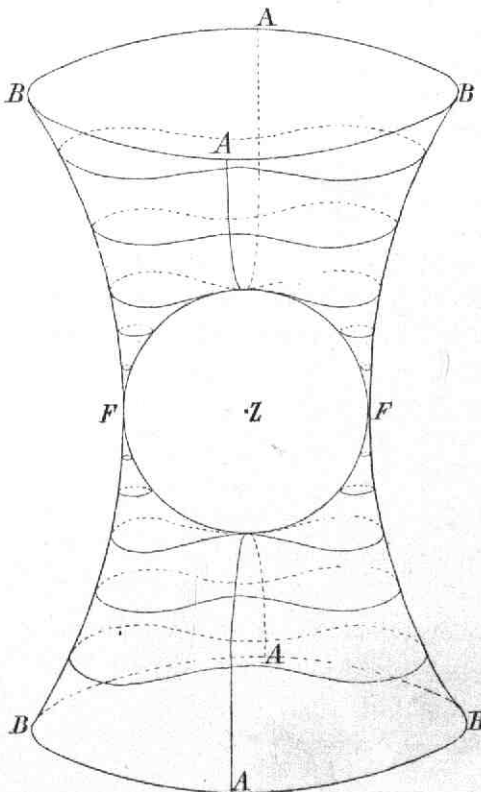
Men heeft dus voor de *uitwendige* toppen

$$l^2 = qq' = x^2 - L^2$$



dus een gelijkzijdige *hyperbool* op dezelfde middellijn; in de figuur op Bl. 70 voorgesteld door  $BFB$ .

Voor de 2<sup>o</sup> as gelegen in het vlak der lemniscaten



zijn  $M$  en  $N$  de toppen. Noem den afstand tot het middelpunt  $y$  dan is

$$q = MF = MF' = \\ q' = \sqrt{FZ^2 + MZ^2} = \\ \sqrt{L^2 + y^2}$$

dus

$$l^2 = qq' = L^2 + y^2$$

dit is ook een gelijkzijdige *hyperbool*; in de figuur op Bl. 70 voorgesteld door  $AA$ .



### C. Draaiing der as om een vast punt.

64. — Uit 4 op Bl. 3 volgt dat het traagheidsmoment ten opzichte van eene lijn die met de hoofdassen de hoeken  $\alpha$ ,  $\beta$  en  $\gamma$  maakt, bepaald is door

$$T = A \cos^2 \alpha + B \cos^2 \beta + C \cos^2 \gamma \dots (1)$$

Stel nu  $A > B > C$  en elimineer  $\alpha$

$$T = A + (B - A) \cos^2 \beta + (C - A) \cos^2 \gamma$$

dus  $T < A$ .

Voor de maximumwaarde van  $T$  moet

$$(B - A) \cos^2 \beta + (C - A) \cos^2 \gamma = 0 \quad \text{zijn,}$$

dat is  $\beta = \gamma = 90^\circ$ , of de lijn valt langs de  $X$ -as.

Door eliminatie van  $\gamma$  vindt men dat voor de minimumwaarde van  $T$  de lijn moet vallen langs de  $Z$ -as.

De reeks assen door den oorsprong gaande, die hetzelfde traagheidsmoment hebben, vormen Elliptische kegels, want uit (1) volgt:

$$\begin{aligned} T(x^2 + y^2 + z^2) &= Ax^2 + By^2 + Cz^2 && \text{of} \\ (A - T)x^2 + (B - T)y^2 + (C - T)z^2 &= 0. \end{aligned}$$

1<sup>o</sup>. Is  $T < B$  en stel  $z = m$  dan is

$$(A - T)x^2 + (B - T)y^2 = (T - C)m^2$$

dat is een *Ellips* om de  $z$ -as.

2<sup>o</sup>. Is  $T > B$  en stel  $x = n$  dan is

$$(T - B)y^2 + (T - C)z^2 = (A - T)n^2$$

of een *Ellips* om de  $x$ -as.

3<sup>o</sup>. Is  $T = B$  dan is

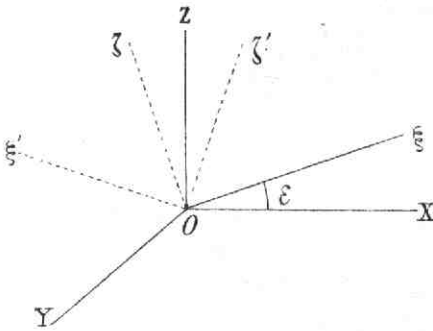
$$\frac{z}{x} = \pm \sqrt{\frac{A - B}{B - C}}$$

of 2 vlakken die een traagheidsmoment  $B$  hebben.

Stellen  $a$ ,  $b$ ,  $c$  waarin  $a > b > c$  is, de traagheidsstralen voor der 3 traagheidsassen  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ , terwijl  $X$  de maxi-



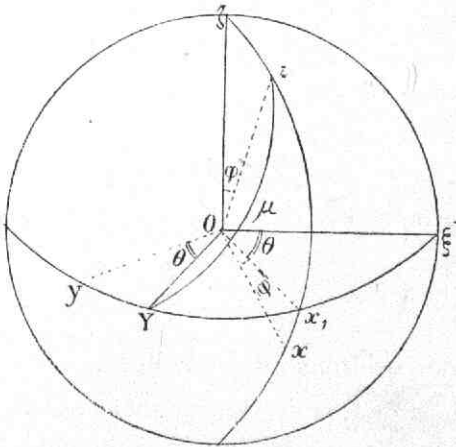
mum-as,  $Z$  de minimum-as en  $Y$  de middelste as is, en wil men de betrekkingen nagaan, die er bestaan tusschen de assen uit eenzelfde punt  $O$ , dan snijdt men dezen bundel door een bol met den Hoofdparameter van de middelste traagheidsas tot straal  $L = \sqrt{a^2 - c^2}$ . Het snijpunt van elke as met den bol wordt *pool* genoemd.



De reeks assen die hetzelfde traagheidsmoment hebben, vormen Elliptische kegels, die vlak worden voor 2 vlakken  $\xi OY$  en  $\xi' OY$  welke vlakken met de maximum-as  $X$  een hoek  $\epsilon$  vormen bepaald door

$$\operatorname{tg} \epsilon = \pm \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2 - c^2}}.$$

65. — Voor elk punt  $O$  zijn er dus twee assen  $\zeta$  en  $\zeta'$  waarvan de hoofdparameter nul is.



Deze assen worden *bijzondere* assen genoemd en *bijzonder* moment van een as dat met betrekking tot vlakken waarvan er een gaat door de bedoelde as en een der twee bijzondere assen. Neem als assenstelsel de bijzondere as  $\zeta$ , de middelste traagheidsas  $Y$  en de lood-

lijn op deze twee  $\xi$ . Laat nu  $z$  een willekeurige as zijn, dan geeft nevensgaande figuur, in het vlak  $\zeta z x_1 x$

$$x = x_1 \cos \varphi - \zeta \sin \varphi$$

dus (daar  $y$  constant is)

$$\Sigma mxy = -\sin \varphi \Sigma m\zeta y,$$

want de term  $\cos \varphi \Sigma mx_1 y$  is nul, omdat  $\zeta$  bijzondere as is.

In het vlak  $\xi x_1 Yy$

$$y = Y \cos \Theta - \xi \sin \Theta$$

dus (daar  $\zeta$  constant is)

$$\Sigma m\zeta y = -\sin \Theta \Sigma m\zeta \xi,$$

want de term  $\cos \Theta \Sigma m\zeta Y$  is nul, omdat  $Y$  traagheidsas is.

Men heeft dus

$$\Sigma mxy = \sin \varphi \sin \Theta \Sigma m\zeta \xi$$

$zx_1 y$  geeft

$$\cos \mu = \sin \varphi \sin \Theta$$

terwijl

$$\Sigma m\zeta \xi = \frac{1}{2} M(a^2 - c^2) \sin 2\varepsilon$$

$$= M(a^2 - c^2) \cdot \frac{\operatorname{tg} \varepsilon}{1 + \operatorname{tg}^2 \varepsilon}$$

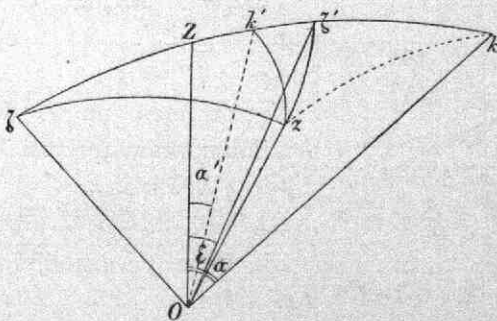
$$= M \sqrt{(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)} \quad \text{is}$$

dus

$$\Sigma mxy = M \sqrt{(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)} \cdot \cos \mu$$

of het *bijzonder* moment van een as is de projectie van de middelste traagheidsas.

66. — Daar de uitdrukking van het bijzonder moment dezelfde is voor de  $\zeta$  as, als voor de  $\zeta'$  as, volgt er



uit dat de nulvlakken van een willekeurige as deelvlakken zijn voor de vlakken, welke die as met 2 bijzondere assen verbinden.

De deelvlakken in  $z$  van den

boldriehoek  $z\zeta\zeta'$  verdeelen de basis zoodanig dat

$$\frac{\sin \zeta k}{\sin \zeta' k} = \frac{\sin \zeta k'}{\sin \zeta' k'} \quad \text{is,}$$

daar de tweevlakkige hoek  $kzk'$  recht is, vormen de assen uit  $O$  kegels. Wij kunnen bovenstaande evenredigheid in de gedaante brengen

$$\begin{aligned} \frac{\sin (\varepsilon - \alpha)}{\sin (\varepsilon + \alpha)} &= \frac{\sin (\alpha' - \varepsilon)}{\sin (\alpha' + \varepsilon)} \\ \frac{\operatorname{tg} \varepsilon - \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \varepsilon + \operatorname{tg} \alpha} &= \frac{\operatorname{tg} \alpha' - \operatorname{tg} \varepsilon}{\operatorname{tg} \alpha' + \operatorname{tg} \varepsilon} \\ \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha' &= \operatorname{tg}^2 \cdot \varepsilon = \frac{a^2 - b^2}{b^2 - c^2}. \end{aligned}$$

67. — Laat men  $M$  buiten rekening dan is het bijzonder moment

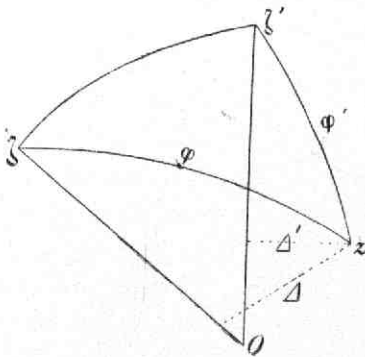
$$\sin \varphi \sin \Theta \sqrt{(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)}$$

maar in functie van den hoofdparameter en den hoek  $\zeta zk$  begrepen tusschen het vlak van het moment en het nulvlak

$$\frac{1}{2} l^2 \sin 2 \cdot \zeta zk \quad \text{of} \quad \frac{1}{2} l^2 \sin \zeta z \zeta'.$$

Men heeft dus

$$\sin \varphi \sin \Theta \sqrt{(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)} = \frac{1}{2} l^2 \sin \zeta z \zeta'.$$



De driehoek  $\zeta z \zeta'$  geeft ons

$$\frac{\sin \varphi'}{\sin \Theta} = \frac{\sin 2\varepsilon}{\sin \cdot \zeta z \zeta'}$$

want  $\angle z \zeta \zeta' = \Theta$  en  
boog  $\zeta \zeta' = 2\varepsilon$ .

Noemt men nu  $L$  de maximumparameter van  $Y$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} L^2 \sin 2\varepsilon &= \\ &= \sqrt{(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)}. \end{aligned}$$

Uit deze 3 vergelijkingen volgt

$$l^2 = L^2 \sin \varphi \sin \varphi'.$$

Noemt men nu de afstanden van den pool  $z$  op den bol met straal  $L$  tot 2 bijzondere assen  $A$  en  $A'$  dan wordt het

$$l^2 = AA'.$$

De assen van denzelfden hoofdparameter vormen dus kegels waarvan de richtlijnen spherische lemniscaten zijn, als men van deze krommen met behulp der polen dezelfde definitie geeft als van de vlakke lemniscaat met de voetpunten der assen.

68. — Indien wij op iedere as, van af het middelpunt, haar hoofdparameter uitzetten, krijgt men een oppervlak, waarvan de niveau krommen lemniscaten zijn, en waar de verandering van den hoofdparameter wordt aangewezen door den voerstraal.

*Niveau krommen* worden zoodanige kromme lijnen op het oppervlak genoemd, die eenzelfde constanten parameter hebben.

Noem  $\omega$  de hoekafstand tot de minimumas  $Z$  in het bijzondere vlak, dan is voor de *uitwendige* toppen

$$l^2 = L^2 \sin(\omega \pm \epsilon) \sin(\omega \mp \epsilon) = L^2 (\sin^2 \omega - \sin^2 \epsilon)$$

voor de *inwendige* toppen

$$l^2 = L^2 \sin(\epsilon \pm \omega) \sin(\epsilon \mp \omega) = L^2 (\sin^2 \epsilon - \sin^2 \omega).$$

Het zijn dus krommen die tot maximum stralen hebben

$$L \cos \epsilon \quad \text{en} \quad L \sin \epsilon \quad \text{of}$$

$$\sqrt{b^2 - c^2} \quad \text{en} \quad \sqrt{a^2 - b^2}$$

en waarvan de voerstralen omgekeerd evenredig zijn met die der Hyperbolen, asymptoot aan de bijzondere assen.

In het middenvlak  $FZ$ , als men  $\theta$  de hoekafstand tot  $Z$  noemt, heeft men

$$\cos \varphi = \cos \varphi' = \cos \epsilon \cos \theta \quad \text{dus}$$

$$l^2 = L^2 \sin^2 \varphi = L^2 (1 - \cos^2 \epsilon \cos^2 \theta).$$

Het is dus een *ovaal* tot halve assen hebbende

$$L \sin \epsilon \text{ en } L$$

of

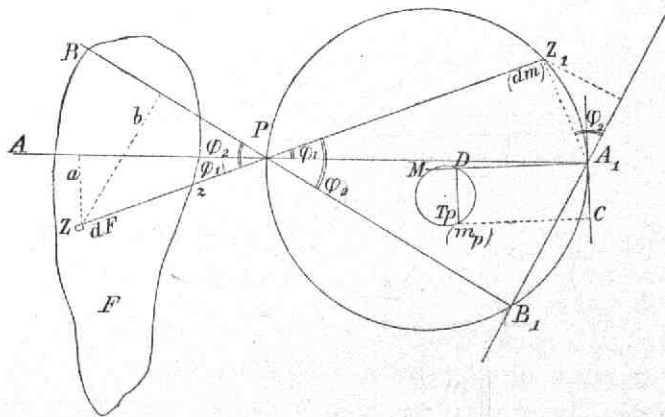
$$\sqrt{a^2 - b^2} \text{ en } \sqrt{a^2 - c^2}$$

en waarvan de voerstraal omgekeerd evenredig is aan dien van een ellips.

#### D. Mohr-Land'sche Methode.

69. — In „Civilingenieur” Bd. XXXIII. Heft I heeft MOHR eene verhandeling geschreven „Ueber die Bestimmung und die graphische Darstellung von Trägheitsmomenten ebener Flächen” die in hetzelfde tijdschrift Bd. XXXIV Heft II door R. LAND gewijzigd is, in eene verhandeling, tot opschrift dragende „Ueber die Berechnung und die bildliche Darstellung von Trägheits- und Centrifugalmomenten ebener Massenfiguren.”

Het traagheidsproduct van een gegeven vlak  $F$  ten



opzichte van twee willekeurige assen  $PA$  en  $PB$  in dit vlak, die elkander in een punt  $P$ , pool genoemd, snijden, kan, indien de afstanden van een element  $dF$  van dit vlak tot  $PA$  en  $PB$ ,  $a$  en  $b$  genoemd worden, voor-



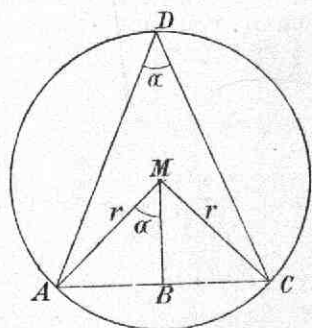
gesteld worden door

$$I_{ab} = \int ab \cdot dF = \int z^2 dF \sin \varphi_1 \sin \varphi_2,$$

waarin  $a = z \sin \varphi_1$ ,  $b = z \sin \varphi_2$  en  $z = ZP$  is.

Breng door  $P$  een willekeurigen cirkel met straal  $r$ , welke de verlengde poolstralen  $PA$  en  $PB$  in  $A_1$  en  $B_1$  snijdt.

Verleng  $ZP = z$  tot  $Z_1$ , dan is  $A_1 Z_1 = 2r \sin \varphi_1$ , volgens nevensgaande figuur, waar



$$AB = r \sin \alpha, \quad \text{dus}$$

$$AC = 2r \sin \alpha \quad \text{is.}$$

De loodrechte afstand van  $Z_1$  tot  $A_1 B_1$  is dus  $2r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2$ .

Denkt men zich dus in  $Z_1$  een massa  $dm = \frac{z^2 dF}{2r}$  aangebracht, dan kan men het traagheidsproduct van  $dF = z^2 dF \sin \varphi_1 \sin \varphi_2$

beschouwen als het *statische moment* van de massa  $dm$  ten opzichte van de koorde  $A_1 B_1$ .

Zoekt men dus het zwaartepunt  $T_p$  van al deze massas  $dm$ , met de totale massa

$$m_p = \int \frac{z^2 dF}{2r} = \frac{1}{2r} \cdot I_p$$

waarin  $I_p$  het polaire traagheidsmoment van het vlak ten opzichte van  $P$  beteekent, dan is *het gezochte traagheidsproduct gelijk aan het statische moment van de massa  $m_p$  van het traagheidszwaartepunt  $T_p$  ten opzichte van de koorde  $A_1 B_1$ , die bij de beide gegeven poolstralen  $PA$  en  $PB$  behoort.* . . . (I)

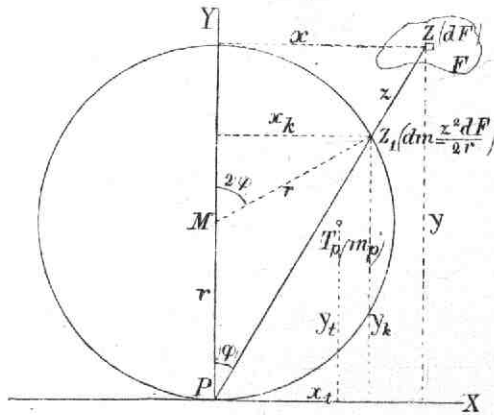
Vallen de beide assen  $PA$  en  $PB$  samen bijvoorbeeld in  $PA$ , dan gaat het traagheidsproduct over in het traag-



heidsmoment van het vlak ten opzichte van de as  $PA$  en de koorde  $A_1B_1$  over in de raaklijn in  $A_1$ .

Dit kan men voorstellen door een tweeden cirkel, wiens middellijn door  $M$  en  $T_p$  begrensd is, want de hefboomsarm  $T_pC$  van  $T_p$  ten opzichte van de raaklijn in  $A_1$  is gelijk  $DA_1$  die door de beide cirkels van den straal  $MA_1$  wordt afgesneden.

Ter bepaling van het traagheidsmoment is het dus niet noodig de raaklijn in  $A_1$  te trekken. Het komt er nu nog op aan, de coördinaten van het traagheidszwaartepunt te vinden.



De coördinaten van het algemeene punt  $Z_1$  zijn

$$x_k = r \cdot \sin 2\varphi = 2r \sin \varphi \cos \varphi$$

$$= 2r \cdot \frac{x}{z} \cdot \frac{y}{z} = 2r \cdot \frac{xy}{z^2}$$

$$y_k = r(1 + \cos 2\varphi) = 2r \cos^2 \varphi = 2r \cdot \frac{y^2}{z^2}.$$

De statische momenten van de in  $Z_1$  aan te brengen massas  $dm = \frac{z^2 dF}{2r}$  ten opzichte van de coördinatenassen zijn dus voor:

de  $Y$ -as  $x_k dm = \frac{z^2 dF}{2r} \cdot 2r \frac{xy}{z^2} = xy dF$

de  $X$ -as  $y_k dm = \frac{z^2 dF}{2r} \cdot 2r \frac{y^2}{z^2} = y^2 dF$

en de som van de gezamentlijke massas

$$\Sigma dm = m_p = \frac{1}{2r} \cdot I_p$$

dus het statische moment van  $m_p$  van het gezochte traagheidszwaartepunt  $T_p$  met coördinaten  $x_t y_t$  ten opzichte

van de  $\left| \begin{array}{l} Y\text{-as} \\ X\text{-as} \end{array} \right|$  is gelijk aan het moment van de tweede

orde van het vlak  $F$  ten opzichte van de  $\left| \begin{array}{l} X\text{- en } Y\text{-as} \\ X\text{-as} \end{array} \right|$

dus uit  $m_p \cdot x_t = \int xy dF = I_{xy}$

$$m_p \cdot y_t = \int y^2 dF = I_x$$

volgen de coördinaten van het traagheidszwaartepunt  $T_p$ , bij den cirkel behoorende die de  $X$ -as in den oorsprong  $P$  aanraakt.

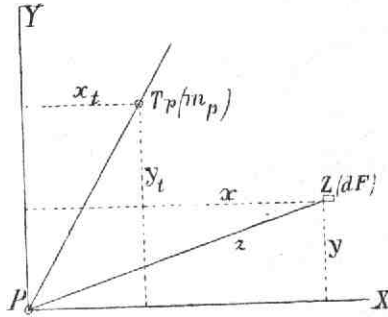
$$x_t = \frac{I_{xy}}{m_p} = \frac{I_{xy}}{I_p} \cdot 2r$$

$$y_t = \frac{I_x}{m_p} = \frac{I_x}{I_p} \cdot 2r.$$

70. — Hieruit blijkt dat de coördinaten van het traagheidszwaartepunt onafhankelijk zijn van de in de punten  $Z_1$  aan te brengen massas, waardoor het zich laat aanzien, dat men langs anderen weg tot bovenstaande betrekkingen kan geraken.

Neemt men een rechthoekig coördinatenstelsel, waarvan  $P$  de oorsprong is, dan kan men voor een willekeurig massapunt  $Z$  de grootheden  $xy dF$  en  $y^2 dF$  beschouwen

als de statische momenten van massadeeltjes ( $ydF$ ) wer-



kende in  $Z$  ten opzichte van de  $Y$  en  $X$ -as.

Het traagheidsproduct ten opzichte van de  $Y$  en  $X$ -as

$$I_{xy} = \int xy dF = \int x(y dF)$$

en het traagheidsmoment ten opzichte van de  $X$ -as

$$I_x = \int y^2 dF = \int y(y dF)$$

kan men dus beschouwen als het statische moment van een massa  $m_p$ , werkende in een punt  $T_p$  met coördinaten  $x_t$ ,  $y_t$ , ten opzichte van de  $Y$  en  $X$ -as.

$$\left. \begin{aligned} I_{xy} &= \int xy dF = m_p x_t \\ I_x &= \int y^2 dF = m_p y_t \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

Hierbij moet  $T_p$  liggen op een rechte lijn gaande door  $P$  en het zwaartepunt der gedachtemassas ( $ydF$ ) zoodanig dat de tangens van den hoek welke deze lijn met de  $X$ -as maakt, bepaald is door

$$\frac{y_t}{x_t} = \frac{I_x}{I_{xy}}.$$

De grootheid  $m_p$  kan nog naar believen gekozen worden en dan kunnen  $x_t$  en  $y_t$  uit bovenstaande vergelijkingen opgelost worden.

Kies nu  $m_p$  gelijk een veelvoud van het polaire traagheidsmoment  $I_p = \int z^2 dF$  (omdat  $I_p$  van de ligging der

door  $P$  gaande  $X$ - en  $Y$ -assen onafhankelijk is) en stel

$$m_p = \frac{I_p}{d} \dots \dots \dots (2)$$

Uit de betrekking  $I_x + I_y = I_p$  kan men nu  $I_y$  oplossen

$$I_y = \int x^2 dF = I_p - I_x = m_p (d - y_t).$$

Nu behoeft er nog slechts bewezen te worden, dat het door (1) en (2) bepaalde punt  $T_p(x_t, y_t)$  het traagheidszwaartepunt is, en voor alle door  $P$  als pool gaande assen, de eigenschap ( $I$ ) bezit.

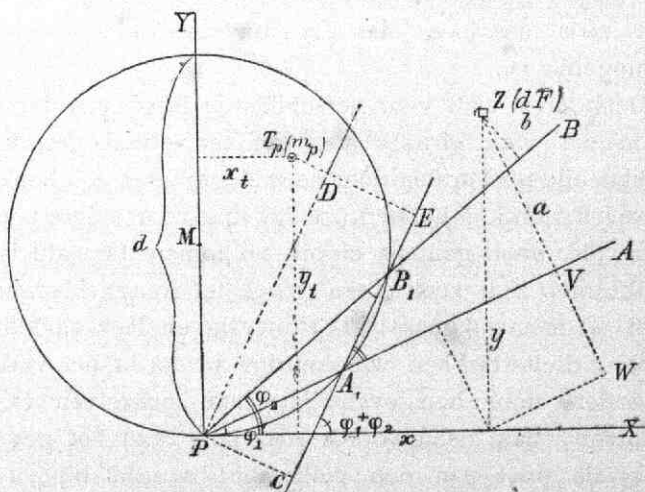
Noem de afstanden van de deeltjes  $dF$  tot de assen  $PA$  en  $PB$   $a$  en  $b$  dan is het moment ten opzichte van deze beide assen  $I_{ab} = \int ab \cdot dF$ .

Voor een willekeurig punt  $Z(xy)$  is

$$a = ZW - VW$$

dus

$$a = y \cos \varphi_1 - x \sin \varphi_1; \quad b = y \cos \varphi_2 - x \sin \varphi_2$$



dus

$$\begin{aligned} I_{ab} &= \int dF \{ y^2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + x^2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 - xy(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2) \} \\ &= m_p \{ y_t \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + (d - y_t) \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 - x_t \sin(\varphi_1 + \varphi_2) \} \\ &= m_p \{ y_t \cos(\varphi_1 + \varphi_2) - x_t \sin(\varphi_1 + \varphi_2) + d \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \} \end{aligned}$$

De loodlijn  $PC = d \sin \varphi_1 \sin \varphi_2$ . Trek door  $P$  een lijn evenwijdig aan  $A_1 B_1$  en door  $T_p$  een loodlijn op  $A_1 B_1$  dan is

$$T_p D = y \cos(\varphi_1 + \varphi_2) - x \sin(\varphi_1 + \varphi_2) \quad \text{dus}$$

$$I_{ab} = m_p \cdot T_p E \quad \text{wat hetzelfde is als } (I).$$

71. — Daar de oorspronkelijk door  $P$  gebrachte coördinatenassen willekeurig zijn, is ook de ligging van den door  $P$  gebrachten cirkel willekeurig, echter moet zijn middellijn  $d$  en de massa  $m_p$  van het traagheidszwaartepunt  $T_p$  voldoen aan  $m_p \cdot d = I_p$ .

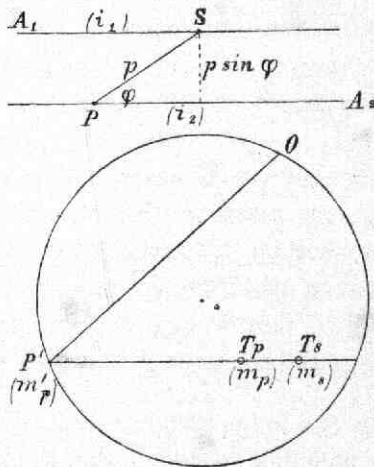
Elke ligging van den cirkel komt overeen met een bepaalde ligging van  $T_p$  en steeds ligt  $T_p$  binnen den bijbehorenden cirkel, want lag het er buiten dan zouden de beide traagheidsmomenten ten opzichte van de beide poolstralen, die door de raakpunten, van de door  $T_p$  aan den cirkel getrokken raaklijnen, gingen, gelijk nul zijn, wat voor massas  $dF$  die allen bijvoorbeeld positief zijn, onmogelijk is.

Denkt men zich voor verschillende liggingen der pool  $P$  in het vlak cirkels met gelijken straal getrokken, zoodat alle poolstralen door de middelpunten een bepaalde gegeven richting hebben (zoodat dus voor iedere pool de door die pool gaande cirkel volkomen bepaald is) en denkt men zich voor elken cirkel het traagheidszwaartepunt  $T_p$  met zijn massa  $m_p$  aanwezig en legt eindelijk al deze cirkels op een willekeurige plaats in het vlak op elkander, door hen evenwijdig aan zichzelf te verschuiven, dan beantwoordt elk punt van het gegeven vlak als pool aan een volkomen bepaald binnen den cirkel liggend traagheidszwaartepunt.

Dezen cirkel noemt men *grondcirkel* en zijn pool  $O$ .



72. — Laat  $S$  het zwaartepunt van een gegeven massa (bijvoorbeeld een vlak) en  $P$  een willekeurige pool van het vlak op afstand  $PS = \rho$  van  $S$  zijn.



Laat  $O$  de pool van den grondcirkel zijn en  $OP'$  evenwijdig aan  $SP$  de poolstraal.

Laat de polaire traagheidsmomenten van  $F$  ten opzichte van de beide punten  $S$  en  $P$  zijn

$$I_s = F i_s^2 \quad \text{en}$$

$$I_p = F i_p^2$$

en laten  $S$  en  $P$  overeenkomen met de traagheidszwaarte-

punten  $T_s$  met massa  $m_s = \frac{I_s}{d}$

en  $T_p$  met massa  $m_p = \frac{I_p}{d}$ .

Leg door  $S$  en  $P$  twee evenwijdige lijnen  $SA_1$  en  $PA_2$  die met  $SP$  den hoek  $\varphi$  maken en noem de traagheidsmomenten ten opzichte van die assen

$$I_1^s = F i_1^2 \quad \text{en} \quad I_2 = F i_2^2.$$

Voor deze traagheidsmomenten geldt:

$$I_p = I_s + F \rho^2 \dots \dots \dots (a)$$

$$I_2 = I_1^s + F (\rho \sin \varphi)^2 \dots \dots \dots (b)$$

De in  $P$  werkzaam gedachte massa  $F$  komt voor  $S$  als pool overeen met het op den cirkelomtrek liggend traagheidszwaartepunt  $P'$  met massa  $m'_p = \frac{F \rho^2}{d}$  want voor de door de pool  $S$  gaande as  $SP$  is het traagheidsmoment





noemt de afstanden der punten  $T_s$  en  $T_p$  tot de raaklijn in  $A'$   $h_s^a$  en  $h_p^a$  dan is volgens (I)

$$I_1^s = m_s h_s^a \quad I_2 = m_p h_p^a.$$

Stelt men deze waarden in (b) en  $F_p^2 = m'_p d$  dan volgt

$$m_p h_p^a = m_s h_s^a + m'_p d \sin^2 \varphi.$$

Nu is echter  $d \sin^2 \varphi$  de loodlijn uit  $P'$  op de raaklijn in  $A'$ , dus de bij de raaklijn behoorende hefboomsarm van  $P'$ , daarom werkt  $m'_p$  in  $P'$  want  $m'_p$  is ook onafhankelijk van  $\varphi$  en nu volgt dadelijk het bovenstaande resultaat.

Hieruit volgt dat  $T_p$  op de rechte lijn  $T_s P'$  ligt en er tusschen de 3 massas en hunne afstanden de betrekkingen bestaan

$$\begin{aligned} m_p &= m_s + m'_p & \text{of} & \quad i_p^2 = i_s^2 + p^2 \\ T_s T_p : T_p P' : T_s P' &= m'_p : m_s : m_p \\ &= p^2 : i_s^2 : i_p^2 \end{aligned}$$

74. — De gewone opgave bij een willekeurig gegeven vlakke massa, is het bepalen op bekende wijze van de ligging van het zwaartepunt  $S$  ten opzichte van  $z$  door een willekeurig punt  $O$  gaande elkander rechthoekig snijdende coördinatenassen, en dan de ligging en bijbehorende massa van het bij  $S$  als pool behoorende traagheidszwaartepunt te bepalen, daar men hieruit volgens bovenstaande betrekkingen zeer gemakkelijk het traagheidszwaartepunt voor iedere andere willekeurige pool  $P$  kan vinden.

*Voorbeeld.*

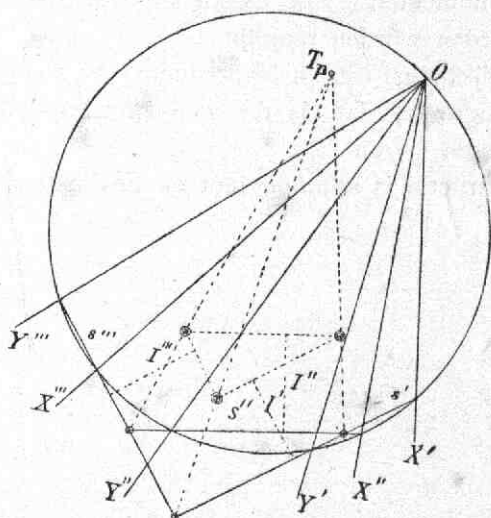
Gegeven het bij het zwaartepunt  $S$  behoorende traagheidszwaartepunt  $T_s$  met massa

$$m_s = \frac{I_s}{d} = \frac{F i_s^2}{d}.$$

Gevraagd het bij een willekeurige pool  $P$  op afstand  $p$  van  $S$  behoorende traagheidszwaartepunt  $T_p$ ?



3 gegeven momenten van de 2<sup>e</sup> orde te construeeren.  
Laten voor 3 door een punt  $P$  gaande assenparen  $X'Y'$ ;



$X''Y''$ ;  $X'''Y'''$  de traagheidsproducten  $I'$ ;  $I''$  en  $I'''$  gegeven zijn.

Trek door de pool  $O$  van den grondcirkel lijnen evenwijdig aan de assen en trek de koorden  $s'$ ;  $s''$  en  $s'''$ . Trek evenwijdig aan die koorden lijnen op afstanden  $I'$ ;  $I''$  en  $I'''$  of veelvouden hiervan; verbindt nu de snijpunten van elke twee koorden met het overeenkomende snijpunt, van de daarmede evenwijdige lijnen, dan is het snijpunt der 3 verbindingslijnen  $T_p$ , want noem de afstanden van het traagheidszwaartepunt  $T_p$  tot de koorden  $h'$ ;  $h''$  en  $h'''$ , dan is

$$I' = m_p \cdot h'; \quad I'' = m_p \cdot h''; \quad I''' = m_p \cdot h'''$$

dus  $I' : I'' : I''' = h' : h'' : h'''$ ,

welke voorwaarde door onze constructie vervuld is. De massa die bij  $T_p$  hoort, kan men vinden uit één der vergelijkingen  $I = m_p \cdot h$ , want  $h$  is bekend.

76. — Dezelfde betrekkingen blijven gelden, indien in plaats van de traagheidsproducten gegeven zijn de traagheidsmomenten. Elk assenpaar wordt dan één as, en de koorden worden raaklijnen.

Zijn gelijktijdig traagheidsproducten en traagheidsmomenten gegeven, dan is dit analytisch opgelost in de vergelijkingen (1) en (2).

De constructie is analoog met de bovenstaande.

## HOOFDSTUK III.

---

### Equivalente massas.

---

77. — Twee lichamen of stelsels zijn equivalent of equimomenteel, als hunne traagheidsmomenten ten opzichte van alle rechte lijnen aan elkander gelijk zijn.

Hebben 2 stelsels hetzelfde zwaartepunt en dezelfde hoofdassen en hoofdmomenten in het zwaartepunt dan zijn hunne traagheidsmomenten ten opzichte van alle rechte lijnen gelijk en zijn die stelsels dus equimomenteel.

Ook is het omgekeerde waar, want voor alle rechte lijnen die volgens een bepaalde richting in het lichaam loopen, is het traagheidsmoment het kleinste voor de lijn die door het zwaartepunt gaat. Deze kleinste traagheidsmomenten kunnen in 2 stelsels voor alle richtingen onmogelijk gelijk zijn, tenzij de stelsels een gemeenschappelijk zwaartepunt hebben.

Van alle rechte lijnen door het zwaartepunt zijn er twee van de hoofdassen die het grootste en kleinste traagheidsmoment hebben, waaruit dus volgt dat deze en de 3<sup>e</sup> hoofdas in de beide stelsels in richting moeten samenvallen, indien de stelsels equimomenteel zijn. De



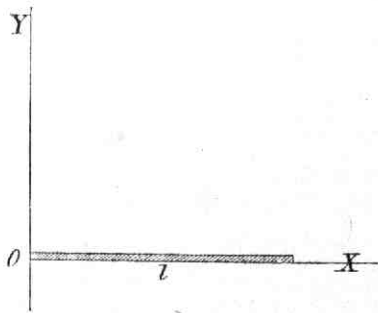
hoofdtraagheidsmomenten moeten dus gelijk zijn omdat alle momenten gelijk zijn.

Daarenboven kunnen de 2 stelsels geen gelijke momenten ten opzichte van 2 evenwijdige assen hebben, tenzij hunne massas gelijk zijn.

### A. Stelsels die ten opzichte van een bepaalde as gelijke traagheidsmomenten hebben.

78. — Een homogeeene staaf van contante dikte  $\omega$  (oneindig klein), dichtheid  $\rho$  en lengte  $l$ , heeft ten opzichte van een as door haar uiteinde, hetzelfde traagheidsmoment als eene massa, die het 3<sup>e</sup> gedeelte van de massa der staaf is, geplaatst aan het andere einde der staaf.

Staat de as loodrecht op de staaf dan is



$$T_{(Y)} = \rho\omega \int_0^l x^2 dx$$

$$= \rho\omega \cdot \frac{l^3}{3}$$

$$M = \rho\omega l \quad \text{dus}$$

$$T_{(Y)} = M \cdot \frac{l^2}{3}$$

Op den afstand  $l$  van  $O$  zal dus eene massa

$\frac{M}{3}$  geplaatst moeten worden om hetzelfde traagheidsmoment als de staaf te hebben.

Maakt de as een hoek  $\delta$  met de staaf dan is

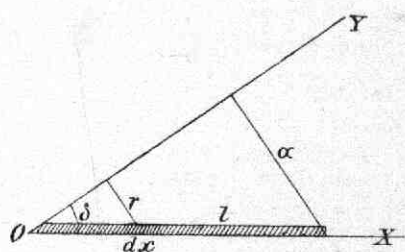
$$T_{(Y)} = \rho\omega \int_0^l r^2 dx$$

$$r = x \sin \delta$$

$$T_{(Y)} = \rho\omega \sin^2 \delta \int_0^l x^2 dx$$

$$= \rho\omega \sin^2 \delta \cdot \frac{l^3}{3}$$

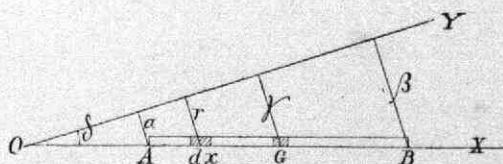
$$M = \rho\omega l$$



$$T_{(Y)} = \frac{M}{3} \cdot l^2 \sin^2 \delta.$$

Daar  $\alpha = l \sin \delta$  is, zal een massa  $\frac{M}{3}$  op een afstand  $\alpha$  van  $OY$  geplaatst, hetzelfde traagheidsmoment als de staaf hebben.

79. — Indien de as het verlengde der staaf snijdt heeft de staaf hetzelfde traagheidsmoment als een stelsel van 3 punten waarvan 2 in de uiteinden der staaf ieder met eene massa  $\frac{M}{6}$  en het derde in het zwaartepunt met een massa  $\frac{2}{3} M$ .



Stel  $OA = a$

$$M = \rho\omega l = \rho\omega (a + l - a)$$

$$T_{(Y)} = \rho\omega \int_a^{a+l} r^2 dx$$

$$r = x \sin \delta$$

dus

$$T_{(Y)} = \rho\omega \sin^2 \delta \int_a^{a+l} x^2 dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{3} q \omega \sin^2 \delta \{ (a+l)^3 - a^3 \} \\
 &= \frac{M}{3} \sin^2 \delta (3a^2 + 3al + l^2) \\
 &= \frac{M}{3} \{ 3a^2 + 3[(\beta - \alpha)\alpha] + (\beta - \alpha)^2 \}
 \end{aligned}$$

$$T_{(Y)} = \frac{M}{3} (\beta^2 + \beta\alpha + \alpha^2) \dots \dots \dots (1)$$

Plaats in het zwaartepunt  $G$  eene massa  $q$  en in  $A$  en  $B$  eene massa  $p$ .

Men heeft 
$$\gamma = \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Het traagheidsmoment van deze 3 massas is

$$\begin{aligned}
 T_{(Y)} &= p\alpha^2 + q\gamma^2 + p\beta^2 \\
 &= \left(p + \frac{q}{4}\right) \alpha^2 + \left(\frac{q}{2}\right) \alpha\beta + \left(p + \frac{q}{4}\right) \beta^2.
 \end{aligned}$$

Vergeleken met (1) is dus

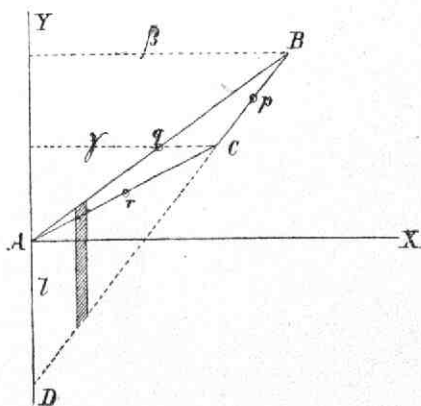
$$p + \frac{q}{4} = \frac{M}{3}$$

$$\frac{q}{2} = \frac{M}{3}$$

$$p + \frac{q}{4} = \frac{M}{3}$$

waaruit 
$$q = \frac{2}{3} M \text{ en } p = \frac{M}{6}.$$

80. — Een homogeeene driehoek met massa  $M$  heeft



ten opzichte van een as door een der hoekpunten in zijn vlak getrokken, hetzelfde traagheidsmoment als een stelsel van 3 punten ieder met  $\frac{1}{3}$  van de massa van den driehoek in het midden der zijden geplaatst.

In 24 Bl. 29 heeft men voor het traagheidsmoment van den driehoek  $ABC$  ten opzichte van  $AY$  gevonden.

$$T_{ABC(Y)} = \frac{M}{6}(\beta^2 + \beta\gamma + \gamma^2) \dots (1)$$

Liggen nu de massas  $p$ ,  $q$  en  $r$  in het midden der zijden dan is

$$\begin{aligned} T_{(Y)} &= p \left( \frac{\beta + \gamma}{2} \right)^2 + q \left( \frac{\beta^2}{4} \right) + r \left( \frac{\gamma^2}{4} \right) \\ &= \left( \frac{p}{4} + \frac{q}{4} \right) \beta^2 + \left( \frac{p}{4} + \frac{r}{4} \right) \gamma^2 + \left( \frac{p}{2} \right) \beta\gamma. \end{aligned}$$

Vergeleken met (1) is dus

$$\frac{p}{4} + \frac{q}{4} = \frac{M}{6}$$

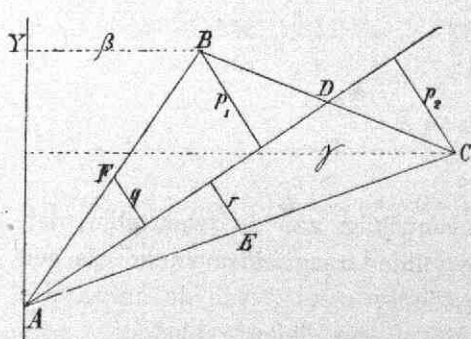
$$\frac{p}{4} + \frac{r}{4} = \frac{M}{6}$$

$$\frac{p}{2} = \frac{M}{6}$$

waaruit

$$p = q = r = \frac{M}{3}.$$

81. — Deelen de punten  $D$ ,  $E$  en  $F$  de zijden van den driehoek midden door, dan heeft de driehoek ten opzichte van de zwaartelij  $AD$  hetzelfde traagheidsmoment als een stelsel van 2 punten ieder met eene massa



$\frac{M}{12}$  in  $B$  en  $C$  ge-

plaatst, of ook als een

stelsel van 2 punten

ieder met eene massa

$\frac{M}{3}$  in  $E$  en  $F$  geplaatst.

Het traagheidsmoment van  $ABC$  ten opzichte van  $AY$  is

$$T_{(AY)} = \frac{M}{6} (\beta^2 + \beta\gamma + \gamma^2)$$

valt  $AY$  langs  $AB$  dan is  $\beta = 0$  dus

$$T_{(AB)} = \frac{M}{6} \cdot \gamma^2.$$

Noem de massa van  $ABD = M_1$  en van  $ACD = M_2$

dan is 
$$T_{(AD)} = \frac{M_1}{6} \cdot \rho_1^2 + \frac{M_2}{6} \rho_2^2$$

daar  $M_1 = M_2 = \frac{M}{2}$  is, zoo volgt

$$T_{(AD)} = \frac{M}{12} \rho_1^2 + \frac{M}{12} \rho_2^2 \dots \dots \dots (1)$$

Plaatst men dus in  $B$  en  $C$  2 massas ieder met  $\frac{M}{12}$  dan zijn deze 2 massas equivalent met den driehoek.

Plaatst men in  $E$  en  $F$  2 massas  $a$  en  $b$  dan is

$$\begin{aligned} T_{(AD)} &= a(\rho^2) + b(\rho^2) \\ &= a\left(\frac{\rho_1}{2}\right)^2 + b\left(\frac{\rho_2}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

$$T_{(AD)} = \left(\frac{a}{4}\right) \rho_1^2 + \left(\frac{b}{4}\right) \rho_2^2$$

vergeleken met (1) is dus

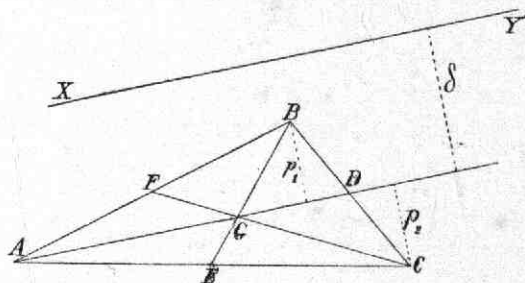
$$\frac{a}{4} = \frac{M}{12} \qquad \frac{b}{4} = \frac{M}{12}$$

waaruit 
$$a = b = \frac{M}{3}.$$

82. — Is de as evenwijdig aan de zwaartelijn, dan heeft de driehoek hetzelfde traagheidsmoment als een stelsel van 3 punten, ieder met  $\frac{1}{3}$  van de massa van den driehoek in het midden der zijden geplaatst.

Het traagheidsmoment ten opzichte van  $AD$  is

$$T_{(AD)} = \frac{M}{12} \cdot \rho_1^2 + \frac{M}{12} \cdot \rho_2^2.$$



Daar  $XY$  op een afstand  $\delta$  van  $AD$  ligt is. (Zie de noot van 16)

$$T_{(XY)} = \frac{M}{12} \rho_1^2 + \frac{M}{12} \rho_2^2 + M\delta^2 \dots \dots (1)$$

Plaats nu in  $D$ ,  $E$  en  $F$  de massas  $a$ ,  $b$  en  $c$  dan is het traagheidsmoment van dit massastelsel ten opzichte van  $XY$

$$\begin{aligned} T_{(XY)} &= a(\delta^2) + b\left(\delta + \frac{\rho_2}{2}\right)^2 + c\left(\delta - \frac{\rho_1}{2}\right)^2 \\ &= (a + b + c)\delta^2 + \left(\frac{b}{4}\right)\rho_2^2 + \left(\frac{c}{4}\right)\rho_1^2 + b\rho_2\delta - c\rho_1\delta \end{aligned}$$

Vergeleken met (1) is dus

$$\begin{aligned} a + b + c &= M \\ \frac{b}{4} &= \frac{M}{12} & \frac{c}{4} &= \frac{M}{12} \end{aligned}$$

waaruit 
$$a = b = c = \frac{M}{3}.$$

83. — Staat de as loodrecht op het vlak van den driehoek dan heeft de driehoek hetzelfde traagheidsmoment



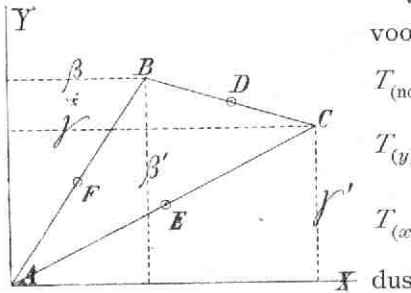
als een stelsel van 3 punten ieder met  $\frac{1}{3}$  van de massa van den driehoek in het midden der zijden geplaatst.

Volgens 24 Bl. 29 geldt voor elke vlakke figuur

$$T_{(\text{normaal})} = T_{(x\text{-as})} + T_{(y\text{-as})}$$

$$T_{(y)} = \frac{M}{6} (\beta^2 + \beta\gamma + \gamma^2)$$

$$T_{(x)} = \frac{M}{6} (\beta'^2 + \beta'\gamma' + \gamma'^2)$$



$$T_{(\text{norm. in } A)} = \frac{M}{6} (\beta^2 + \beta\gamma + \gamma^2 + \beta'^2 + \beta'\gamma' + \gamma'^2). \quad (1)$$

Plaats in  $D$ ,  $E$  en  $F$  de massas  $p$ ,  $q$  en  $r$  dan is het traagheidsmoment van dit massastelsel ten opzichte van de normaal, daar de coördinaten

$$\begin{array}{ll} \text{van } F. & \dots \dots \frac{\beta}{2} \quad \text{en} \quad \frac{\beta'}{2} \\ \text{van } E. & \dots \dots \frac{\gamma}{2} \quad \text{en} \quad \frac{\gamma'}{2} \\ \text{van } D. & \dots \dots \frac{\beta + \gamma}{2} \quad \text{en} \quad \frac{\beta' + \gamma'}{2} \quad \text{zijn,} \end{array}$$

$$\begin{aligned} T_{(\text{norm. in } A)} &= p \left( \frac{\beta^2}{4} + \frac{\beta'^2}{4} \right) + q \left( \frac{\gamma^2}{4} + \frac{\gamma'^2}{4} \right) + r \left\{ \left( \frac{\beta + \gamma}{2} \right)^2 + \left( \frac{\beta' + \gamma'}{2} \right)^2 \right\} \\ &= \left( \frac{p}{4} + \frac{r}{4} \right) \beta^2 + \left( \frac{r}{2} \right) \beta\gamma + \left( \frac{q}{4} + \frac{r}{4} \right) \gamma^2 + \\ &\quad + \left( \frac{p}{4} + \frac{r}{4} \right) \beta'^2 + \left( \frac{r}{2} \right) \beta'\gamma' + \left( \frac{q}{4} + \frac{r}{4} \right) \gamma'^2 \end{aligned}$$

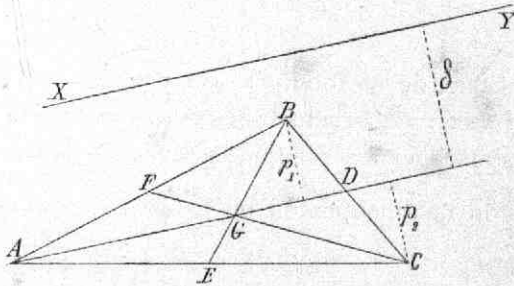
Vergeleken met (1) is dus

$$\begin{aligned} \frac{p}{4} + \frac{r}{4} &= \frac{M}{6} \\ \frac{r}{2} &= \frac{M}{6} \end{aligned}$$

$$\frac{q}{4} + \frac{r}{4} = \frac{M}{6}$$

$$\text{waaruit } p = q = r = \frac{M}{3}.$$

84. — Loopt de as evenwijdig aan een zwaartelij, dan heeft de driehoek hetzelfde traagheidsmoment als een stelsel van 4 punten, waarvan 3 ieder met een massa  $\frac{M}{12}$  in de hoekpunten en het vierde met een massa  $\frac{3}{4} M$  in het zwaartepunt.



Volgens 82 Bl. 94 is

$$T_{(XY)} = \frac{M}{12} p_1^2 + \frac{M}{12} p_2^2 + M \delta^2 \dots (1)$$

Plaats in de punten  $A$ ,  $B$ ,  $C$  en  $G$  respectievelijk de massas  $a$ ,  $b$ ,  $c$  en  $d$  dan is het traagheidsmoment van dit stelsel ten opzichte van  $XY$

$$\begin{aligned} T_{(XY)} &= a(\delta^2) + b(\delta - p_1)^2 + c(\delta + p_2)^2 + d(\delta^2) \\ &= (a + b + c + d)\delta^2 + (b)p_1^2 + (c)p_2^2 - 2b\delta p_1 + 2c\delta p_2 \end{aligned}$$

vergeleken met (1) is dus

$$a + b + c + d = M$$

$$b = \frac{M}{12}$$

$$c = \frac{M}{12}$$

waaruit

$$a + d = \frac{5}{6} M.$$

Berekent men op dezelfde wijze het traagheidsmoment ten opzichte van een as evenwijdig aan  $CF$  dan vindt men

$$c + d = \frac{5}{6} M.$$

Voor een as evenwijdig aan  $BE$  vindt men

$$b + d = \frac{5}{6} M.$$

Men vindt dus

$$a + b + c + 3d = \frac{15}{6} M \text{ en } a = b = c = \frac{M}{12}$$

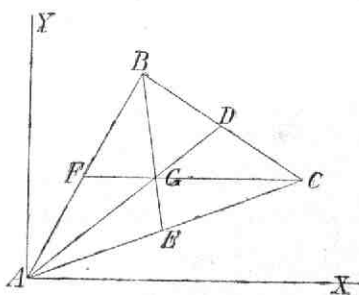
waaruit

$$d = \frac{3}{4} M.$$

85. — Staat de as loodrecht op het vlak van den driehoek dan heeft de driehoek hetzelfde traagheidsmoment als een stelsel van 4 punten, waarvan 3 ieder met een massa  $\frac{M}{12}$  in de hoekpunten en het vierde met een massa

$\frac{3}{4} M$  in het zwaartepunt.

Volgens 24 Bl. 29 is het traagheidsmoment van den driehoek  $ABC$  ten opzichte van de normaal in  $A$ .



$$T_{(\text{normaal in } A)} = \frac{M}{6} (\beta^2 + \beta\gamma + \gamma^2 + \beta'^2 + \beta'\gamma' + \gamma'^2). \quad (1)$$

Plaats in de punten  $A$ ,  $B$ ,  $C$  en  $G$  respectievelijk de massas  $a$ ,  $b$ ,  $c$  en  $d$  dan is het traagheidsmoment van dit stelsel ten opzichte van de normaal, daar de coördinaten

van  $A$ . . . . .  $o$  en  $o$

van  $B$ . . . . .  $\beta$  en  $\beta'$

van  $C$ . . . .  $\gamma$  en  $\gamma'$

van  $G$ . . . .  $\frac{\beta + \gamma}{3}$  en  $\frac{\beta' + \gamma'}{3}$  zijn

$$T_{(\text{norm. in } A)} = a(o^2 + o^2) + b(\beta^2 + \beta'^2) + c(\gamma^2 + \gamma'^2) + d \left\{ \left( \frac{\beta + \gamma}{3} \right)^2 + \left( \frac{\beta' + \gamma'}{3} \right)^2 \right\}$$

$$= \left( b + \frac{d}{9} \right) \beta^2 + \left( c + \frac{d}{9} \right) \gamma^2 + \left( \frac{2d}{9} \right) \beta\gamma +$$

$$= \left( b + \frac{d}{9} \right) \beta'^2 + \left( c + \frac{d}{9} \right) \gamma'^2 + \left( \frac{2d}{9} \right) \beta'\gamma'.$$

Vergeleken met (1) is dus

$$b + \frac{d}{9} = \frac{M}{6}$$

$$c + \frac{d}{9} = \frac{M}{6}$$

$$\frac{2d}{9} = \frac{M}{6}$$

waaruit  $b = c = \frac{M}{12}$  en  $d = \frac{3}{4} M$ .

Neemt men een ander hoekpunt als oorsprong dan vindt men  $a = \frac{M}{12}$ , dus

$$a = b = c = \frac{M}{12} \quad \text{en} \quad d = \frac{3}{4} M.$$

86. — In 79 Bl. 91 is gevonden dat eene staaf met massa  $M$  equivalent is met een stelsel van 3 punten, waarvan 2 in de uiteinden der staaf ieder met een massa  $\frac{1}{6} M$  en het derde in het zwaartepunt met een massa  $\frac{2}{3} M$ .

In 85 Bl. 98 is gevonden dat een driehoek met massa  $M$  equivalent is met een stelsel van 4 punten, waarvan 3 in de hoekpunten ieder met een massa  $\frac{1}{12} M$  en het vierde in het zwaartepunt met een massa  $\frac{3}{4} M$ .

Beschouwt men de staaf als een 2 hoekige figuur,

waar dus de uiteinden der staaf de hoekpunten der figuur voorstellen, dan kan men zeggen: een 2-hoek met massa  $M$  is equivalent met een massastelsel, zoo verdeeld dat in elk hoekpunt een massa  $\frac{1}{6} M$  en in het zwaartepunt een massa  $\frac{2}{3} M$  geplaatst is.

Een 3-hoek met massa  $M$  is equivalent met een massastelsel, zoo verdeeld dat in elk hoekpunt een massa  $\frac{1}{12} M$  en in het zwaartepunt een massa  $\frac{3}{4} M$  geplaatst is.

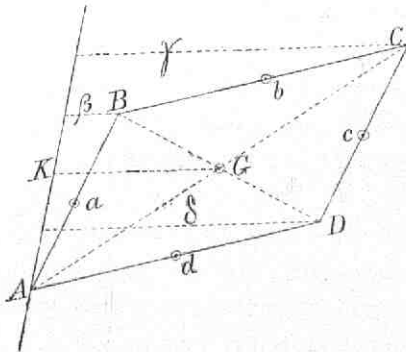
Hermede in overeenstemming zou dus zijn: een  $n$ -hoek met massa  $M$  is equivalent met een massastelsel, zoo verdeeld dat in elk hoekpunt een massa  $\frac{1}{n(n+1)} M$  en in het zwaartepunt een massa  $\frac{n}{n+1} M$  geplaatst is.

Het bewijs voor dezen regel vindt men in de Math. Annalen Bd. 23.

87. — Een parallellogram met massa  $M$  heeft ten opzichte van een as door een der hoekpunten in zijn vlak getrokken hetzelfde traagheidsmoment als een stelsel van 5 punten waarvan 4 ieder met een massa  $\frac{1}{6} M$  in

het midden der zijden en het vijfde met een massa  $\frac{1}{3} M$  in het zwaartepunt.

Het traagheidsmoment van  $ABCD$  is het traagheidsmoment van  $ABC$  vermeerderd met dat van  $ACD$  dus



$$T_{ABCD} = T_{ABC} + T_{ACD}$$

$$T_{ABC} = \frac{M}{12} (\beta^2 + \beta\gamma + \gamma^2)$$

$$T_{ACD} = \frac{M}{12} (\gamma^2 + \gamma\delta + \delta^2) \quad \text{dus}$$

$$T_{ABCD} = \frac{M}{12} (\beta^2 + \beta\gamma + 2\gamma^2 + \gamma\delta + \delta^2) \dots (1)$$

Plaats nu in  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  en  $G$  respectievelijk massas  $p$ ,  $q$ ,  $r$ ,  $s$  en  $t$  dan is het traagheidsmoment van dit stelsel ten opzichte van  $AK$

$$\begin{aligned} T &= p \left( \frac{\beta}{2} \right)^2 + q \left( \frac{\beta + \gamma}{2} \right)^2 + r \left( \frac{\gamma + \delta}{2} \right)^2 + s \left( \frac{\delta}{2} \right)^2 + t \left( \frac{\gamma}{2} \right)^2 \\ &= \left( \frac{p}{4} + \frac{q}{4} \right) \beta^2 + \left( \frac{q}{2} \right) \beta\gamma + \left( \frac{q}{8} + \frac{r}{8} + \frac{t}{8} \right) \cdot 2\gamma^2 + \left( \frac{r}{2} \right) \gamma\delta + \\ &\quad + \left( \frac{r}{4} + \frac{s}{4} \right) \delta^2. \end{aligned}$$

Vergeleken met (1) is dus

$$\frac{p}{4} + \frac{q}{4} = \frac{M}{12}$$

$$\frac{q}{2} = \frac{M}{12}$$

$$\frac{q}{8} + \frac{r}{8} + \frac{t}{8} = \frac{M}{12}$$

$$\frac{r}{2} = \frac{M}{12}$$

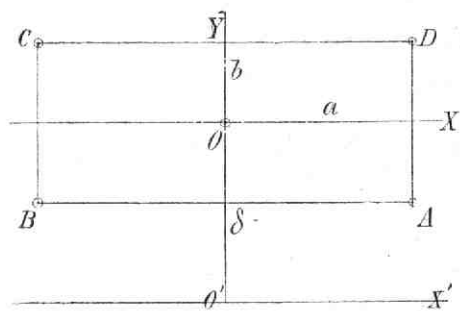
$$\frac{r}{4} + \frac{s}{4} = \frac{M}{12}$$

waaruit  $p = q = r = s = \frac{1}{6} M$  en  $t = \frac{1}{3} M$ .

88. — Een rechthoek met massa  $M$  heeft, ten opzichte van een as evenwijdig loopende aan de lijn die door het midden van den rechthoek twee overstaande zijden midden doordeelt, hetzelfde traagheidsmoment als een stelsel van 5 punten, waarvan 4 ieder met eene massa



$\frac{M}{12}$  in de hoekpunten en het vijfde met eene massa  $\frac{2}{3} M$  in het zwaartepunt.



In 25 Bl. 31 heeft men voor het traagheidsmoment van den rechthoek ten opzichte van  $OX$  gevonden

$$T_{(X)} = M \cdot \frac{b^2}{3}.$$

Is dus  $OO' = \delta$

dan is het traagheidsmoment ten opzichte van  $O'X'$

$$T_{(X')} = M \cdot \frac{b^2}{3} + M\delta^2 \quad \dots \quad (1)$$

Plaats in  $A, B, C, D$  en  $O$  respectievelijk massas  $p, q, r, s$  en  $t$  dan is het traagheidsmoment van dit stelsel ten opzichte van  $O'X'$

$$\begin{aligned} T_{(X')} &= p(\delta - b)^2 + q(\delta - b)^2 + r(\delta + b)^2 + s(\delta + b)^2 + t(\delta^2) \\ &= (p + q + r + s + t)\delta^2 + (p + q + r + s)b^2 - 2p\delta b - \\ &\quad - 2q\delta b + 2r\delta b + 2s\delta b. \end{aligned}$$

Vergeleken met (1) is dus

$$p + q + r + s + t = M \quad p + q + r + s = \frac{M}{3},$$

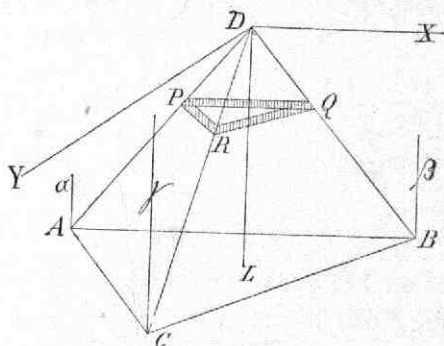
waaruit

$$t = \frac{2}{3} M.$$

Daar de  $x$ - en  $y$ -as symmetrielijnen zijn van den rechthoek, is het noodzakelijk het overige van de massa ( $\frac{1}{3} M$ ) symmetrisch in de 4 hoekpunten te plaatsen, waardoor in elk hoekpunt  $\frac{1}{12} M$  geplaatst moet worden.

89. — Een tetraeder met massa  $M$  is equipotentieel met een stelsel van 5 punten waarvan 4 ieder met een

massa  $\frac{M}{20}$  in de hoekpunten en het vijfde met een massa  $\frac{1}{5} M$  in het zwaartepunt.



Breng door den top  $D$  van het Tetraeder een willekeurig vlak  $XY$ .

Verdeel het Tetraeder door vlakken evenwijdig aan het grondvlak in elementen.

Noem de inhoud van  $ABC = \varrho$ ; de loodlijn  $DL$  uit  $D$  op  $ABC = \rho$  en uit  $D$  op  $PQR = u$ ; de dikte van  $PQR = du$  dan is  $PQR = \frac{u^2}{\rho^2} \cdot \varrho du$ ; de afstanden van  $A$ ,  $B$  en  $C$  tot het  $XY$ -vlak  $\alpha$ ,  $\beta$  en  $\gamma$ .

De driehoek  $ABC$  is te vervangen door 3 punten, ieder met  $\frac{1}{3}$  van de massa van den driehoek in het midden der zijden. De afstanden van het midden der 3 zijden van  $ABC$  tot het  $XY$ -vlak zijn

$$\frac{\alpha + \beta}{2}; \quad \frac{\beta + \gamma}{2}; \quad \frac{\gamma + \alpha}{2}.$$

De afstanden van het midden der zijden van  $PQR$  tot het  $XY$ -vlak zijn dus

$$\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \frac{u}{\rho}; \quad \frac{\beta + \gamma}{2} \cdot \frac{u}{\rho}; \quad \frac{\gamma + \alpha}{2} \cdot \frac{u}{\rho}.$$

Het traagheidsmoment van den driehoek  $PQR$  ten opzichte van het  $XY$ -vlak is dus

$$\begin{aligned} dT &= \frac{1}{3} \cdot \frac{u^2}{\rho^2} \cdot \varrho du \left\{ \left( \frac{\beta + \gamma}{2} \cdot \frac{u}{\rho} \right)^2 + \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \frac{u}{\rho} \right)^2 + \left( \frac{\gamma + \alpha}{2} \cdot \frac{u}{\rho} \right)^2 \right\} \\ &= \frac{1}{3} \varrho \cdot \frac{u^4}{\rho^4} du \left\{ \left( \frac{\beta + \gamma}{2} \right)^2 + \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right)^2 + \left( \frac{\gamma + \alpha}{2} \right)^2 \right\} \end{aligned}$$

Integreert men van  $u = 0$  tot  $u = p$  dan vindt men voor het traagheidsmoment van het Tetraeder ten opzichte van het  $XY$ -vlak.

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{15} \rho p \left( \frac{\beta^2 + \beta\gamma + \gamma^2 + \alpha^2 + \alpha\beta + \alpha\gamma}{2} \right) \\ &= \frac{1}{30} \rho p (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \beta\gamma + \alpha\beta + \alpha\gamma). \end{aligned}$$

Men heeft  $V = \frac{1}{3} \rho \cdot p$  dus

$$T = \frac{V}{10} (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \beta\gamma + \alpha\beta + \alpha\gamma). \quad (1)$$

Plaats in  $A, B, C, D$  en het zwaartepunt respectievelijk massas  $p, q, r, s$  en  $t$  dan is het traagheidsmoment van dit stelsel ten opzichte van het  $XY$ -vlak

$$T = p(\alpha^2) + q(\beta^2) + r(\gamma^2) + s(0^2) + t \left( \frac{\alpha + \beta + \gamma}{4} \right)^2$$

Vergeleken met (1) is dus

$$p + \frac{t}{16} = \frac{V}{10}$$

$$q + \frac{t}{16} = \frac{V}{10}$$

$$r + \frac{t}{16} = \frac{V}{10}$$

$$\frac{t}{8} = \frac{V}{10}$$

waaruit  $p = q = r = \frac{V}{20}$  en  $t = \frac{4}{5} V$ .

Brengt men het  $XY$  vlak door een ander hoekpunt dan vindt men dat ook  $s = \frac{V}{20}$  is.

Het Tetraeder en het stelsel van 5 punten hebben hetzelfde zwaartepunt en dezelfde massa.

De traagheidsmomenten der 2 stelsels ten opzichte van een willekeurig vlak door het zwaartepunt zijn dus

gelijk en deze gelijkheid bestaat dus ook voor elk willekeurig vlak.

Hieruit volgt dat de traagheidsmomenten ten opzichte van elke rechte lijn ook gelijk zijn en dus zijn de beide stelsels equimomenteel.

### B. Theoremas over equivalente stelsels.

90. — Elke vlakke figuur kan vervangen worden door 3 punten met gelijke massa.

*Bewijs.*

Zij  $O$  het zwaartepunt van de vlakke figuur,  $OX$  en  $OY$  de hoofdassen in  $O$ .  $m$  de massa van elk punt zoodat dus  $M = 3m$  is.

Noem  $(xy)$ ;  $(x'y')$ ;  $(x''y'')$  de coördinaten der 3 punten en  $M\alpha^2$  en  $M\beta^2$  de traagheidsmomenten ten opzichte van  $OX$  en  $OY$  dan is:

$$m(x^2 + x'^2 + x''^2) = M\beta^2$$

$$m(y^2 + y'^2 + y''^2) = M\alpha^2$$

$$m(xy + x'y' + x''y'') = 0.$$

Omdat de 2 stelsels hetzelfde zwaartepunt moeten hebben, is

$$m(x + x' + x'') = 0$$

$$m(y + y' + y'') = 0.$$

Daar  $M = 3m$  is, worden onze vergelijkingen

$$x^2 + x'^2 + x''^2 = 3\beta^2 \quad \dots \quad (1)$$

$$y^2 + y'^2 + y''^2 = 3\alpha^2 \quad \dots \quad (2)$$

$$xy + x'y' + x''y'' = 0 \quad \dots \quad (3)$$

$$x + x' + x'' = 0 \quad \dots \quad (4)$$

$$y + y' + y'' = 0 \quad \dots \quad (5)$$

Ter eliminatie van  $x'$ ,  $y'$ ,  $x''$  en  $y''$  uit deze 5 vergelijkingen volgt uit (1)

$$2x'^2 + 2x''^2 = 6\beta^2 - 2x^2$$

uit (4) 
$$x'^2 + 2x'x'' + x''^2 = x^2.$$

Door aftrekking krijgt men dus

$$(x' - x'')^2 = 6\beta^2 - 3x^2$$

of 
$$x' - x'' = \sqrt{6\beta^2 - 3x^2}$$

dus met behulp van (4)

$$x' = \frac{1}{2}(-x + \sqrt{6\beta^2 - 3x^2})$$

en 
$$x'' = \frac{1}{2}(-x - \sqrt{6\beta^2 - 3x^2})$$

Op dezelfde wijze met (2) en (5) te werk gaande vindt

men 
$$y' = \frac{1}{2}(-y + \sqrt{6\alpha^2 - 3y^2})$$

en 
$$y'' = \frac{1}{2}(-y - \sqrt{6\alpha^2 - 3y^2})$$

(3) kan als volgt geschreven worden:

$$xy + x'y' + x''y' - x''y' + x''y'' = 0$$

of 
$$xy + y'(x' + x'') - x''(y' - y'') = 0.$$

Door substitutie van de gevondene waarden krijgt men

$$xy + \frac{1}{2}(-y + \sqrt{6\alpha^2 - 3y^2})(-x) - \frac{1}{2}(-x - \sqrt{6\beta^2 - 3x^2})(\sqrt{6\alpha^2 - 3y^2}) = 0$$

of

$$2xy + xy - x\sqrt{6\alpha^2 - 3y^2} + x\sqrt{6\alpha^2 - 3y^2} + (\sqrt{6\beta^2 - 3x^2})(\sqrt{6\alpha^2 - 3y^2}) = 0$$

of 
$$3xy = -(\sqrt{6\alpha^2 - 3y^2})(\sqrt{6\beta^2 - 3x^2})$$

$$x^2y^2 = (2\alpha^2 - y^2)(2\beta^2 - x^2)$$

of 
$$\alpha^2x^2 + \beta^2y^2 = 2\alpha^2\beta^2$$

of 
$$\frac{x^2}{2\beta^2} + \frac{y^2}{2\alpha^2} = 1$$

dus een Ellips waarvan de halve assen zijn

$$\beta\sqrt{2} \quad \text{en} \quad \alpha\sqrt{2}.$$

91. — Elk lichaam kan vervangen worden door 4 punten met gelijke massa.

*Bewijs.*

Wil dit mogelijk zijn, dan is noodzakelijk en voldoende dat:

- 1<sup>o</sup>. De traagheidsellipsoïden van beide stelsels voor een gegeven punt  $O$  samenvallen, dat dus 3 geconjugeerde diameters gelijke richting en grootte hebben.



2<sup>o</sup>. De zwaartepunten samenvallen en dus de beide centraal-ellipsoïden en bijgevolg de traagheidsellipsoïden voor een willekeurig punt elkander bedekken.

3<sup>o</sup>. De beide stelsels dezelfde massa hebben.

Geef aan het punt  $O$  een massa  $m$  en de 3 overige punten de massas  $m_x$ ,  $m_y$  en  $m_z$ .

Beschouw  $O$  als oorsprong van coördinaten en laat de assen door de 3 punten gaan. Noem de afstanden van deze 3 punten tot  $O$ ,  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  dan is

$$\begin{aligned} \Sigma mx^2 &= m_x \xi^2; \quad \Sigma my^2 = m_y \eta^2; \quad \Sigma mz^2 = m_z \zeta^2 \\ \Sigma myz &= 0 \quad ; \quad \Sigma mxz = 0 \quad ; \quad \Sigma mxy = 0. \end{aligned}$$

De 3 lijnen die  $O$  met de 3 punten verbinden zijn dan geconjugeerde diameters der traagheidsellipsoïde in  $O$ . Uithoofde van den eersten eisch moeten zij in richting en grootte samenvallen met 3 geconjugeerde diameters van de traagheidsellipsoïde in  $O$  van het gegeven lichaam.

De vergelijking van de laatste ellipsoïde moet zich dus terug laten brengen tot

$$\frac{x^2}{a_0^2} + \frac{y^2}{b_0^2} + \frac{z^2}{c_0^2} = 1$$

terwijl de grootte der halve assen bepaald zijn uit:

$$(1) \dots m_x \xi^2 = Ma_0^2; \quad m_y \eta^2 = Mb_0^2; \quad m_z \zeta^2 = Mc_0^2.$$

Noem  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$  de coördinaten van het zwaartepunt  $S$ , dan is tengevolge van den 2<sup>den</sup> eisch:

$$(2) \dots m_x \xi = Mx_0; \quad m_y \eta = My_0; \quad m_z \zeta = Mz_0.$$

De derde eisch geeft:

$$(3) \dots m + m_x + m_y + m_z = M.$$

De vergelijkingen (1), (2) en (3) geven:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{a_0^2}{x_0} \quad ; \quad \eta = \frac{b_0^2}{y_0} \quad ; \quad \zeta = \frac{c_0^2}{z_0} \\ m_x &= M \frac{x_0^2}{a_0^2}; \quad m_y = M \frac{y_0^2}{b_0^2}; \quad m_z = M \frac{z_0^2}{c_0^2} \end{aligned}$$



$$m = M \left( 1 - \frac{x_0^2}{a_0^2} - \frac{y_0^2}{b_0^2} - \frac{z_0^2}{c_0^2} \right).$$

De verhouding  $\frac{m}{M}$  hangt slechts af van de onderlinge ligging der punten  $O$  en  $S$  en niet van het coördinatenstelsel of van de ligging der 3 overige punten want de functie

$$1 - \frac{x^2}{a_0^2} - \frac{y^2}{b_0^2} - \frac{z^2}{c_0^2} = f(xyz)$$

krijgt voor ieder punt van de ruimte, dus ook voor het zwaartepunt een bepaalde waarde, die niet verandert, wanneer men de coördinaten  $x, y, z$  door andere grootheden uitdrukt.

De vergelijking van het vlak waarin de 3 overige punten liggen, is

$$\frac{x}{\xi} + \frac{y}{\eta} + \frac{z}{\zeta} = 1 \quad \text{of}$$

$$\frac{x_0 x}{a_0^2} + \frac{y_0 y}{b_0^2} + \frac{z_0 z}{c_0^2} = 1.$$

Ook de ligging van dit vlak is dus onafhankelijk van de keus van het coördinaten stelsel of van de punten

$$m_x, m_y \text{ en } m_z.$$

Door de willekeurige aanname van één van de 4 hoekpunten van een Tetraeder is dus niet alleen de massa, maar ook het vlak, waarin de 3 overige punten liggen, volkomen bepaald.

### C. Toepassingen.

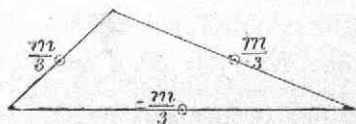
92. — Men noemt de traagheidsellipsoïde in het zwaartepunt  $S$  van een stelsel *Centraalellipsoïde*, die bij een vlak stelsel overgaat in de *Centraalellips*. Kent men nu van een massastelsel de centraalellipsoïde en de massa  $m$ ,

dan is het traagheidsmoment ten opzichte van elk door het zwaartepunt gaand vlak gemakkelijk te vinden. Zij dit traagheidsmoment  $mr^2$ . Ten opzichte van een daarmede op een afstand  $a$  evenwijdig loopend vlak is het traagheidsmoment dan  $m(r^2 + a^2)$ . Hieruit volgt dat de traagheidsmomenten van 2 massastelsels ten opzichte van iedere as en van elk vlak in de ruimte slechts dan aan elkander gelijk zijn, indien de centralellipsoiden der beide stelsels samenvallen en hunne massas even groot zijn.

Liggen 2 zulke equivalente massastelsels in een plat vlak, dan moeten zij gelijke massas en identische centralellipsen hebben.

De beide centralellipsen bedekken elkander, wanneer de zwaartepunten van beide stelsels en 2 willekeurige Tangentiaaldriehoeken (omgeschreven driehoeken, wier raakpunten de zijden midden door deelen) van hen elkander bedekken.

93. — Een driehoek en een stelsel van 3 punten in

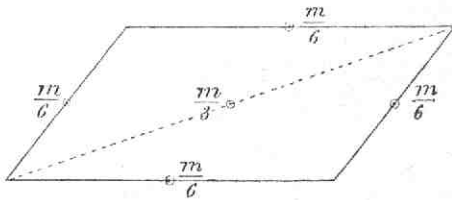


het midden der zijden geplaatst, ieder met  $\frac{1}{3}$  der totale massa van den driehoek zijn dus equivalente stelsels, want de massa der 3 punten is gelijk de massa

van den driehoek; het zwaartepunt der 3 punten valt met dat van den driehoek samen en het traagheidsmoment en dus ook de traagheidstraal, ten opzichte van iedere zijde en bijgevolg ook ten opzichte van iedere door het zwaartepunt gaande en aan een zijde evenwijdige lijn, der 3 punten is gelijk aan dat van den driehoek.

Hieruit volgt, dat een parallelogram in 2 congruente

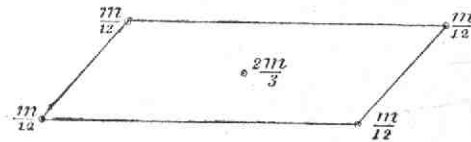
driehoeken verdeeld, ieder met een massa  $\frac{m}{2}$ , equivalent



is met een stelsel van 5 punten, waarvan er 4 ieder met een massa  $\frac{m}{6}$  in het midden der zijden en een 5<sup>e</sup> met een massa  $\frac{m}{3}$  in het

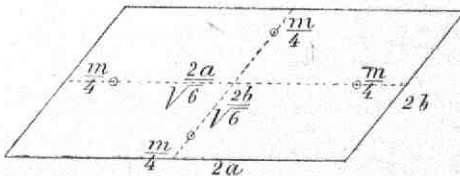
snijpunt der diagonalen geplaatst zijn.

94. — Daar 2 Ellipsen elkander bedekken, wanneer 2 paar toegevoegde middellijnen, in richting en grootte samenvallen; en de centralellips van een parallellogram twee toegevoegde middellijnen bezit, welke evenwijdig aan de zijden loopen, alsmede 2, welke langs de beide diagonalen vallen, zoo blijkt



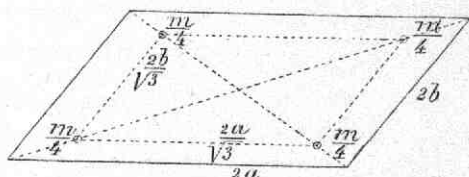
aan de zijden loopen, alsmede 2, welke langs de beide diagonalen vallen, zoo blijkt

dat een parallellogram hetzelfde traagheidsmoment heeft als een stelsel van 5 punten, waarvan er 4 met een massa  $\frac{m}{12}$  in de hoekpunten en het 5<sup>e</sup> met een massa  $\frac{2}{3} m$  in het zwaartepunt geplaatst zijn.



Verder ook met een stelsel van 4 punten ieder met een massa  $\frac{m}{4}$  geplaatst op afstanden  $\frac{2a}{\sqrt{6}}$  en  $\frac{2b}{\sqrt{6}}$  van

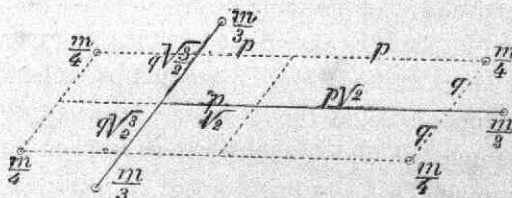
het zwaartepunt, indien de zijden van het parallellogram  $2a$  en  $2b$  zijn.



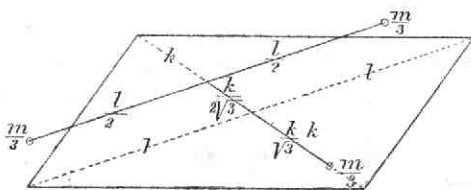
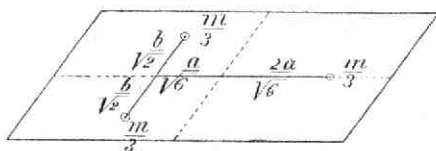
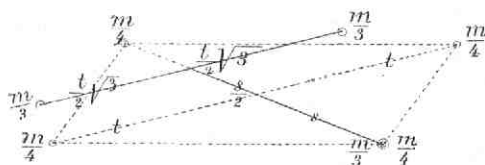
Ten slotte nog met een stelsel van 4 punten ieder met een massa  $\frac{m}{4}$  geplaatst op de diagonalen op afstanden

$\frac{2a}{\sqrt{3}}$  en  $\frac{2b}{\sqrt{3}}$ , indien de zijden van het parallellogram wederom  $2a$  en  $2b$  zijn; want in alle 3 deze figuren hebben de massapunten dezelfde massa  $m$  en hetzelfde zwaartepunt als het parallellogram, terwijl hunne traagheidsmomenten ten opzichte van ieder der genoemde 4 diameters gelijk zijn aan die van het parallellogram.

95. — In 90 is bewezen dat de traagheidsmomenten van elk vlak massastelsel voorgesteld kunnen worden door 3 even groote puntmassas; dat daarenboven de meetkundige plaats van al deze puntmassas een Ellipsis is, die met de centraalellips van het massastelsel concentrisch en gelijkvormig is en wier afmetingen zich tot die der centraalellips verhouden als  $\sqrt{2} : 1$ .



Hebben wij dus een massastelsel van 4 punten in de hoeken van een parallellogram ieder met een massa  $\frac{m}{4}$ ,



dan kunnen wij die door een massastelsel van 3 punten, ieder met een massa

$\frac{m}{3}$  vervangen, zooals de beide nevensgaande figuren doen zien.

Onze vroegere voorstellingen der traagheidsmomenten van een parallelogram kunnen nu ook door de beide nevensgaan-

de figuren worden voorgesteld.

96. — Ten einde nu een vlakke figuur door een stelsel punten te vervangen is dus in de eerste plaats noodig dat men 2 toegevoegde middellijnen van hare centraalellips kan aanwijzen.

Dit is bij sommige figuren gemakkelijk. Is bijvoorbeeld de figuur symmetrisch, dan vormen de symmetrieassen en hare normalen in het zwaartepunt 2 toegevoegde middellijnen, waar langs de assen der centraalellips vallen. Bij het trapezium zijn de beide rechte lijnen, waarvan de eene de beide evenwijdige zijden midden doordeelt en de andere aan hen evenwijdig loopt en door het zwaartepunt gaat, twee toegevoegde middellijnen der centraalellips.

Bij een parabool-segment deelt een middellijn der cen-



traalellips alle koorden, die evenwijdig met de begren- zende koorde loopen, middendoor, terwijl de toegevoegde middellijn evenwijdig loopt met die koorden.

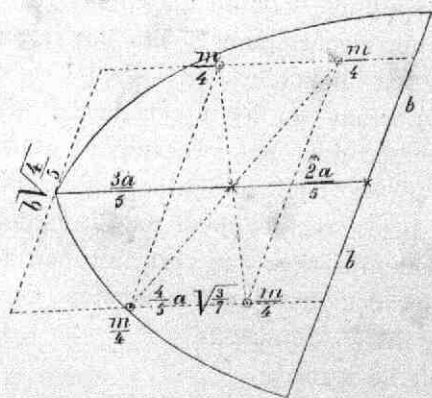
Voor een willekeurig begrensde figuur is het ook niet moeilijk 2 toegevoegde middellijnen van hare centraal- ellips te vinden, door met behulp der traagheidsstralen 2 paar evenwijdige raaklijnen aan deze ellips te constru- eeren, dan vormen deze een parallellogram, wiens diagon- nalen telkens 2 toegevoegde middellijnen der ellips zijn.

Indien men graphisch of door berekening de traagheids- stralen der figuur met betrekking tot 2 zulke toegevoegde middellijnen bepaalt, verkrijgt men 2 paar raaklijnen der centraalellips, welke aan de beide middellijnen evenwijdig loopen; dit omgeschreven parallellogram kan men tot teekening der centraalellips benuttigen, terwijl voor zulk een parallellogram de volgende stelling geldt:

„Concentreert men in ieder hoekpunt van een paral- lelogram, wiens zijden de centraalellips van een vlak massastelsel aanraken en aan 2 toegevoegde middellijnen er van evenwijdig loopen, een vierde der massa van het

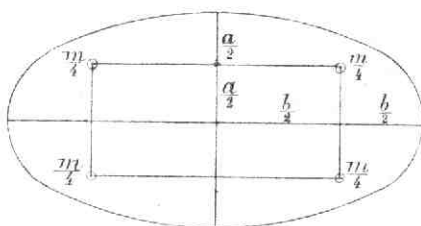
stelsel, zoo ver- krijgt men een stelsel van 4 gelij- ke punten, wiens traagheidsmo- menten ten op- zichte van iedere willekeurige as aan dat van het gegeven massa- stelsel gelijk is.”

Want het vier- puntige massa-



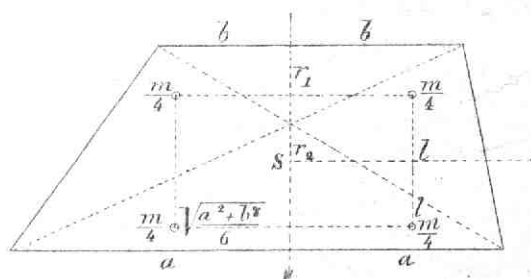


stelsel heeft dezelfde massa en dezelfde centraalellips als het geveene.



Deze stelling leidt ons dus tot de volgende voorstelling van het traagheidsmoment van een paraboolsegment en van een ellips:

97. — Zijn  $r_1$  en  $r_2$  de beide deelen, waarin de mid-



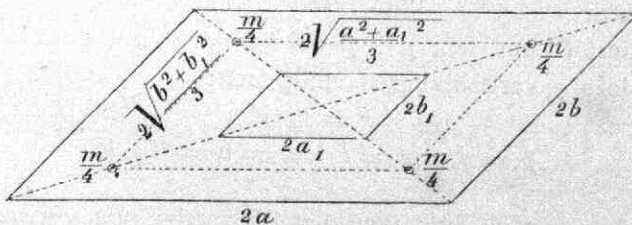
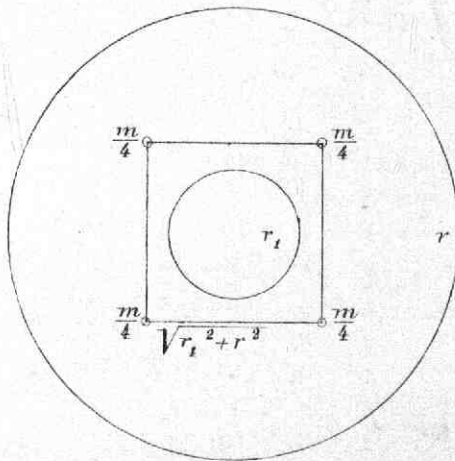
dellijn van een Trapezium door de diagonalen verdeeld wordt, zoo heeft het zwaartepunt  $S$  van het trapezium van het deelpunt den afstand  $\frac{2}{3}(r_2 - r_1)$ . Berekent men het traagheidsmoment van het trapezium ten opzichte van de middellijn en de door het zwaartepunt gebrachte evenwijdige lijn aan de beide gelijklopende zijden en bedenkt dat deze beide rechte lijnen toegevoegde middellijnen der centraalellips zijn; dan verkrijgt men bovenstaande voorstelling der traagheidsmomenten van een trapezium door 4 gelijke puntmassas.

De lengte  $l$  heeft de waarde

$$\frac{1}{6} \sqrt{3(r_2 + r_1)^2 - (r_2 - r_1)^2}.$$

Uit de opgegevene constructie volgt een analoge voor den driehoek wanneer  $b = 0$  en bijgevolg ook  $r_1 = 0$  gesteld wordt.

98. — De traagheidsmomenten van een door concentrische cirkels of parallelogrammen begrensde ruimte kunnen door 4 even groote puntmassas voorgesteld worden volgens nevensgaande figuren.



99. — In 89 vonden wij voor het traagheidsmoment

van een Tetraeder ten opzichte van een vlak door den top gebracht

$$T = \frac{V}{10} (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) \dots (1)$$

Dit tetraeder is te vervangen door een stelsel van 7 punten, waarvan 6 in het midden der zijden ieder met  $\frac{1}{10} m$ , en het 7<sup>e</sup> in het zwaartepunt met  $\frac{2}{5} m$ , want het traagheidsmoment van deze 7 punten ten opzichte van het  $XY$ -vlak is, als de massas in het midden der zijden  $p, q, r, t, u, v$  en in het zwaartepunt  $s$  genoemd worden:

$$T = p \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right)^2 + q \left( \frac{\alpha + \gamma}{2} \right)^2 + r \left( \frac{\beta + \gamma}{2} \right)^2 + s \left( \frac{\alpha + \beta + \gamma}{4} \right)^2 + t \left( \frac{\alpha}{2} \right)^2 + u \left( \frac{\gamma}{2} \right)^2 + v \left( \frac{\beta}{2} \right)^2$$

Vergeleken met (1) is dus

$$\frac{p}{4} + \frac{q}{4} + \frac{s}{16} + \frac{t}{4} = \frac{V}{10}$$

$$\frac{p}{4} + \frac{r}{4} + \frac{s}{16} + \frac{v}{4} = \frac{V}{10}$$

$$\frac{q}{4} + \frac{r}{4} + \frac{s}{16} + \frac{u}{4} = \frac{V}{10}$$

$$\frac{p}{2} + \frac{s}{8} = \frac{V}{10}$$

$$\frac{q}{2} + \frac{s}{8} = \frac{V}{10}$$

$$\frac{r}{2} + \frac{s}{8} = \frac{V}{10}$$

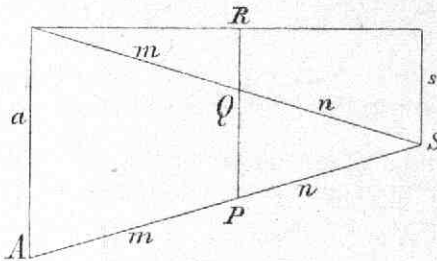
Hierbij komt nog  $p + q + r + s + t + u + v = V$  uit deze 7 vergelijkingen vindt men:

$$s = \frac{2}{5} V$$

$$p = q = r = t = u = v = \frac{1}{10} V.$$

100. — Ook kan men het Tetraeder nog vervangen door een stelsel van 4 punten, ieder met  $\frac{1}{4}$  van de totale massa, indien zij zoo geplaatst zijn, dat zij den

afstand van het zwaartepunt tot de hoekpunten in reden van  $1 : \sqrt{5} - 1$  verdeelen.



Zij  $A$  een hoekpunt,  $S$  het zwaartepunt,  $a$  en  $s$  de afstanden tot het  $XY$ -vlak terwijl  $P$  de lijn  $AS$  verdeelt in verhouding van  $n$  tot  $m$ , dan is

$$n : m + n = PQ : a \quad \text{of} \quad PQ = \frac{na}{m + n}$$

$$m : m + n = RQ : s \quad \text{of} \quad RQ = \frac{ms}{m + n}$$

dus 
$$PR = PQ + RQ = \frac{ms + na}{m + n}$$

Stel nu  $n = 1$  en  $m = \sqrt{5} - 1$ , dus  $m + n = 5$  dan is  $P$  één van de 4 punten en  $PR$  de afstand tot het  $XY$ -vlak.

Daar  $a = \alpha$  en  $s = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{4}$  is, vindt men voor het vierkant van de 4 loodlijnen

$$\frac{(\alpha + \beta + \gamma)^2}{16} \cdot (6 - 2\sqrt{5}) + \alpha^2 + \frac{1}{2} \alpha (\alpha + \beta + \gamma) (\sqrt{5} - 1)$$

$$\frac{(\alpha + \beta + \gamma)^2}{16} \cdot (6 - 2\sqrt{5}) + \beta^2 + \frac{1}{2} \beta (\alpha + \beta + \gamma) (\sqrt{5} - 1)$$

$$\frac{(\alpha + \beta + \gamma)^2}{16} \cdot (6 - 2\sqrt{5}) + \gamma^2 + \frac{1}{2} \gamma (\alpha + \beta + \gamma) (\sqrt{5} - 1)$$

en 
$$\frac{(\alpha + \beta + \gamma)^2}{16} \cdot (6 - 2\sqrt{5}).$$

Na eenige herleidingen krijgt men nu voor het traagheidsmoment van deze 4 punten.

$$\frac{V}{10}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) \text{ of (1).}$$

#### D. Möbius-Grassmann'sche Methode.

101. — Om deze methode toe te passen is het noodzakelijk een en ander uit de „Ausdehnungslehre” van HERMANN GRASSMANN te doen voorafgaan.

In deze theorie worden aan punten, lijnen en vlakken getalcoëfficiënten gegeven, en men noemt slechts dan twee stelsels gelijk, indien zij behalve gelijke ligging ook gelijke coëfficiënten bezitten.

Met coëfficiënten voorziene punten worden op dezelfde wijze opgeteld, als men in de Mechanica stoffelijke punten tot hun zwaartepunt samenstelt, dat is, twee punten  $a$  en  $b$  met de coëfficiënten  $\lambda$  en  $\mu$  geven tot som dat punt met den coëfficiënt  $(\lambda + \mu)$  hetwelk de lijn  $ab$  in de verhouding  $\mu : \lambda$  verdeelt.

Is  $\lambda + \mu = 0$  dan krijgt men het oneindig ver gelegen punt van de rechte lijn  $ab$  met den coëfficiënt nul.

De som van twee lijnen  $AB$  en  $BC$  is steeds  $AC$ , onverschillig of het punt  $C$  tusschen  $A$  en  $B$  ligt of niet, daar  $BC = -CB$  is, en dus ook de richting in aanmerking genomen wordt.



Maken de lijnen  $AB$  en  $BC$  een hoek met elkander, dan is nog steeds  $AB + BC = AC$ .

Als product van twee lijnen kan het parallelogram opgevat worden, mits slechts, zooals hier overal geschiedt, de richting der lijnen in aanmerking genomen

wordt. De factoren van dit product mogen slechts verwisseld worden, indien het teeken omgekeerd wordt, terwijl het product van twee gelijkgerichte lijnen nul is.

Wanneer de eene lijn op de andere geprojecteerd wordt, kan men als product van deze twee lijnen ook beschouwen het product van de projectie met de lijn waarop geprojecteerd is. Van dit product mogen echter de factoren, zonder verandering van teeken, verwisseld worden, en het product van twee loodrecht op elkander staande lijnen is nul.

Het eerste product wordt een uitwendig product, het tweede een inwendig product genoemd, omdat het eerste slechts bij het uit elkander gaan der lijnen, het tweede bij het naar elkander toegaan der lijnen een bepaalde waarde heeft.

Het uitwendige product van een rechte lijn  $A$  en een punt  $x$ , geeft, wanneer beide den coefficient 1 hebben, het vlak door beide, met een coefficient gelijk aan den afstand van het punt tot de rechte lijn. Het inwendige product van twee vlakken  $B$  en  $\Gamma$  (geschreven  $B|\Gamma$ ) is gelijk het product van hunne metrische waarden met den cosinus van den tusschenliggenden hoek.

Dus is  $Ax|Ax$  gelijk aan het kwadraat van de metrische waarde van  $Ax$ , dat is gelijk aan het kwadraat van den afstand van het punt  $x$  tot de rechte lijn  $A$ ; verder is  $Ay|Az$ , wanneer  $y$  en  $z$  twee willekeurige punten met den coefficient 1 zijn, gelijk aan het product der afstanden van deze punten tot de rechte lijn  $A$ , vermenigvuldigd met den cosinus van den hoek tusschen de vlakken  $Ay$  en  $Az$ .

In het nu volgende beteekent:

$A_1$ . . . GRASSMANN-Lineale Ausdehnungslehre 1844  
 en  $A_2$ . . . " " " 1862.



102. — In de Mathematische Annalen Bd. 23 Bladzijde 143 bezigt R. MEHMKE deze methode ter bepaling van traagheidsmomenten.

Daartoe splitst hij het stelsel, waarvan men het traagheidsmoment ten opzichte van eene willekeurige as  $A$  wil kennen, in elementen.

Laat  $x$  een punt van een willekeurig element en  $dm$  de massa zijn. Als men nu aan  $A$  en aan  $x$  den coëfficiënt 1 geeft, is  $Ax/Ax$  het kwadraat van den afstand van  $x$  tot  $A$ , dus is het gezochte traagheidsmoment

$$T = S Ax/Ax dm.$$

Hierin kan men het tweemaal voorkomende punt  $x$  buitenbrengen en op de plaats waar  $x$  stond een open ruimte laten.

$$T = (S A_{( )}/A_{( )} dm)x^2.$$

Daar echter de as  $A$  bij de sommatie (integratie) constant is, kan men schrijven:

$$T = (A_{( )}/A_{( )}) S x^2 dm.$$

Dus is het traagheidsmoment het product van

$$L = A_{( )}/A_{( )}$$

met de integraal

$$P = S x^2 dm$$

welke de as  $A$  niet meer bevat.

Heeft men dus eerst  $P$  gevonden dan moet men nog met  $L$  vermenigvuldigen, wat gemakkelijk te doen is, daar voor 2 willekeurige punten  $y$  en  $z$

$$(A_{( )}/A_{( )}) \cdot yz = (A_{( )}/A_{( )}) \cdot zy = Ay/Az = Az/Ay \text{ is.}$$

{Zie  $A_2$  N<sup>o</sup>. 353—364}.

103. — Bepaal nu de integraal  $S x^2 dm$  voor een ruimte

van  $(n - 1)$  afmetingen, welke door  $n$  willekeurige punten  $a_1, a_2, \dots, a_n$  begrensd is.

Laat  $x$  een punt van het lichaam zijn, evenals de punten  $a$  de eenheid tot coefficient hebbende;  $x$  kan men lineair in  $a$  uitdrukken ( $A_1$  § 107—110)

$$x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n$$

terwijl  $1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$  is.

Hierdoor wordt dus

$$S x^2 dm = S (\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n)^2 dm$$

$$S x^2 dm = \sum_{(i,k)=1}^n a_i a_k \cdot S \lambda_i \lambda_k dm.$$

Deze integralen behooren tot de groep

$$S \lambda_1^{\mu_1} \lambda_2^{\mu_2} \dots \lambda_n^{\mu_n} dm.$$

Beschouwt men nu een der hoeken, bijvoorbeeld  $a_1$  dan kan men, daar  $\lambda_1 = 1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \dots - \lambda_n$  is, schrijven:

$$x = a_1 + \lambda_2(a_2 - a_1) + \lambda_3(a_3 - a_1) + \dots + \lambda_n(a_n - a_1)$$

Splits nu het lichaam in elementen door ruimten van  $(n - 2)$  afmetingen, die aan de  $(n - 2)$  ribben, die in  $a_1$  samenkomen

$$a_1 a_2; a_1 a_3; \dots a_1 a_n,$$

evenwijdig zijn.

Het element van  $x$  heeft de in  $x$  samenkomende ribben ( $A_1$  § 105)

$$\frac{dx}{d\lambda_2} d\lambda_2 = (a_2 - a_1) d\lambda_2$$

$$\frac{dx}{d\lambda_3} d\lambda_3 = (a_3 - a_1) d\lambda_3$$

.....

$$\frac{dx}{d\lambda_n} d\lambda_n = (a_n - a_1) d\lambda_n$$

met deze ribben zijn de overige evenwijdig.

De inhoud van het element is dus ( $A_1$  § 36—109)

$$\{a_1(a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \dots (a_n - a_1)\} d\lambda_2 d\lambda_3 \dots d\lambda_n = \\ = \{a_1 a_2 \dots a_n\} d\lambda_2 d\lambda_3 \dots d\lambda_n.$$

Nu is  $\{a_1 a_2 \dots a_n\}$  het  $(n - 1)!$ voud van den inhoud van het lichaam ( $A_1$  § 111); is dus  $dm$  de massa van het element van  $x$ ,  $m$  de totale massa,  $\sigma$  de dichtheid, dan is

$$dm = \sigma \{a_1 a_2 \dots a_n\} d\lambda_2 d\lambda_3 \dots d\lambda_n \\ (n - 1)! m = \sigma \{a_1 a_2 \dots a_n\}$$

dus  $dm = (n - 1)! m d\lambda_2 d\lambda_3 \dots d\lambda_n$

Hieruit volgt:

$$S \lambda_1^{\mu_1} \lambda_2^{\mu_2} \dots \lambda_n^{\mu_n} dm =$$

$$= (n - 1)! m S (1 - \lambda_2 - \lambda_3 \dots - \lambda_n)^{\mu_1} \lambda_2^{\mu_2} \dots \lambda_n^{\mu_n} d\lambda_2 \dots d\lambda_n$$

$x$  ligt alleen dan binnen het lichaam als de getallen  $\lambda_1; \lambda_2; \dots \lambda_n$  positief zijn ( $A_1$  § 110).

De bovenste grens van de integraal strekt zich dus uit over alle positieve waarden van de veranderlijke, waarvoor

$$\lambda_1 = 1 - \lambda_2 - \dots - \lambda_n > 0 \text{ is.}$$

Volgens een stelling van LIONVILLE, (MEIJER bepaalde integralen, Bladzijde 591) is nu

$$S (1 - \lambda_2 - \lambda_3 \dots - \lambda_n)^{\mu_1} \lambda_2^{\mu_2} \dots \lambda_n^{\mu_n} d\lambda_2 \dots d\lambda_n =$$

$$= \frac{\mu_1! \mu_2! \dots \mu_n!}{(\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n + n - 1)!} \quad \text{dus}$$

$$S \lambda_1^{\mu_1} \lambda_2^{\mu_2} \dots \lambda_n^{\mu_n} dm = \frac{\mu_1! \mu_2! \dots \mu_n! (n - 1)!}{(\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n + n - 1)!} \cdot m$$

Hieruit vindt men:

$$S \lambda_i^2 dm = \frac{2m}{n(n + 1)}$$

$$S \lambda_i \lambda_n dm = \frac{m}{n(n + 1)}.$$

De gezochte integraal is dus

$$S x^2 dm = \frac{m}{n(n+1)} \left( 2 \sum_{i=1}^n a_i^2 + \sum_{(i;k)=1}^n a_i a_k \right)$$

waar  $i$  en  $k$  in de tweede sommatie steeds van elkander moeten verschillen.

Voor de rechte lijn ( $n = 2$ ) krijgt men

$$S x^2 dm = \frac{m}{3} (a_1^2 + a_2^2 + a_1 a_2).$$

Voor den driehoek ( $n = 3$ )

$$S x^2 dm = \frac{m}{6} (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_2 a_3 + a_3 a_1 + a_1 a_2).$$

Voor het Tetraeder ( $n = 4$ )

$$S x^2 dm = \frac{m}{10} (a_1^2 + \dots + a_4^2 + a_1 a_2 + a_1 a_3 + \dots + a_3 a_4).$$

104. — Men moet nu nog met  $L = A_{(i)} / A_{(i)}$  vermenigvuldigen om het traagheidsmoment te verkrijgen.

Daar

$$L a_i^2 = A a_i / A a_i$$

$$L a_i a_k = A a_i / A a_k \text{ is, heeft men dus}$$

het volgende resultaat:

Beteekent  $\alpha_i$  den afstand van het hoekpunt  $a_i$  van een lijn, driehoek of tetraeder met de massa  $m$  tot een willekeurige as  $A$ ;  $\varphi_{ik}$  den door de vlakken  $A a_i$  en  $A a_k$  ingesloten hoek, zoo is het traagheidsmoment ten opzichte van die as gelijk aan:

Van de rechte lijn,

$$\frac{m}{3} (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_1 \alpha_2 \cos \varphi_{12})$$

van den driehoek,

$$\frac{m}{6} (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_2 \alpha_3 \cos \varphi_{23} \dots \alpha_3 \alpha_4 \cos \varphi_{34}).$$

105. — Men kan echter eenvoudiger uitdrukkingen vinden.

Is namelijk  $S$  het zwaartepunt van het lichaam (tegelijk het zwaartepunt van zijn  $n$  hoekpunten) dan is

$$ns = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

$$n^2s^2 = a_1^2 + \dots + a_n^2 + 2a_1a_2 + \dots + 2a_{n-1}a_n$$

of

$$2(a_1a_2 + \dots + a_{n-1}a_n) = n^2s^2 - (a_1^2 + \dots + a_n^2)$$

dus

$$S x^2 dm = \frac{m}{n(n+1)} (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 + n^2s^2)$$

Hieruit volgt dus voor  $n = 2; 3; 4$  het volgende:

Beteekent  $\sigma$  den afstand van het zwaartepunt van een lijn, driehoek of tetraeder tot een willekeurige as, en  $\alpha_i$  den afstand van het hoekpunt  $a_i$  tot dezelfde as,  $m$  de massa van de lijn, driehoek of tetraeder, dan is het traagheidsmoment ten opzichte van die as.

Van de rechte lijn,

$$\frac{m}{6} (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 4\sigma^2)$$

van den driehoek:

$$\frac{m}{12} (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + 9\sigma^2)$$

Van het tetraeder:

$$\frac{m}{20} (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2 + 16\sigma^2)$$

106. — Voeren wij, ter herleiding van  $S x^2 dm$ ,  $n$  punten  $b_1, b_2, \dots, b_n$  in, die voldoen aan de vergelijkingen  $(1 + \lambda)b_i = a_i + \lambda s$  (waarin  $i = 1; 2 \dots n$  is).

Door deze vergelijkingen in het vierkant te brengen, krijgt men

$$(1 + \lambda)^2 b_i^2 = a_i^2 + 2\lambda a_i s + \lambda^2 s^2 \quad \text{dus}$$

$$(1 + \lambda)^2 \Sigma b_i^2 = \Sigma a_i^2 + 2\lambda \Sigma a_i s + n\lambda^2 s^2.$$



Maar daar  $ns = a_1 + a_2 + \dots + a_n$  dus  $\Sigma a_i s = ns^2$  is, zoo is  $(1 + \lambda)^2 \Sigma b_i^2 = \Sigma a_i^2 + (2n\lambda + n\lambda^2)s^2$ .

De uitdrukking achter het teeken gelijk, is

$$\begin{array}{ll} \Sigma a_i^2 + n^2 s^2 & \text{indien} \\ n\lambda^2 + 2n\lambda = n^2 & \text{is, dat is} \\ \text{als} \quad \lambda = -1 \pm \sqrt{1+n} & \text{is.} \end{array}$$

Stelt men dus

$$\begin{array}{ll} \pm \sqrt{1+n} \cdot b_i = a_i + (-1 \pm \sqrt{1+n})s & \text{of} \\ b_i = s \pm \frac{a_i - s}{\sqrt{1+n}} & \text{dan is} \end{array}$$

$$S x^2 dm = \frac{m}{n(n+1)} (\Sigma a_i^2 + n^2 s^2) = \frac{m}{n} (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2).$$

Het lichaam heeft dus hetzelfde traagheidsmoment als de  $n$  massa punten  $b_1; b_2; \dots b_n$ .

Voor  $n = 2$  is

$$\begin{aligned} b_1 &= s + \frac{a_1 - s}{\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3} + 1)a_1 + (\sqrt{3} - 1)a_2}{2\sqrt{3}} \\ b_2 &= s + \frac{a_2 - s}{\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3} - 1)a_1 + (\sqrt{3} + 1)a_2}{2\sqrt{3}} \end{aligned}$$

De punten  $b_1$  en  $b_2$  liggen dus symmetrisch ten opzichte van het midden van de lijn  $a_1 a_2$  en verdeelen dien afstand in verhouding  $(\sqrt{3} - 1) : (\sqrt{3} + 1)$ .

Voor  $n = 3$  is:

(voor  $b_i$  het onderste teeken gebruikende)

$$b_i = s - \frac{a_i - s}{2} = \frac{3s - a_i}{2}$$

of daar  $3s = a_1 + a_2 + a_3$  is

$$b_i = \frac{a_{i+1} + a_{i+2}}{2}.$$

De punten  $b_i$  zijn dus het midden der zijden van den driehoek  $a_1 a_2 a_3$ . Hieruit volgt:

Het traagheidsmoment van een driehoek ten opzichte



van een willekeurige as is hetzelfde als dat van 3 massadeeltjes, ieder  $\frac{1}{3}$  van de massa van den driehoek bevattende, geplaatst in het midden der 3 zijden.

Neemt men voor  $b_i$  het bovenste teeken dus

$$b_i = s + \frac{a_i - s}{2} = \frac{s + a_i}{2}$$

dan ligt  $b_i$  in het midden van  $sa_i$ .

„Een driehoek is dus equimomenteel met 3 massadeeltjes ieder  $\frac{1}{3}$  van de massa van den driehoek bevattende, gelegen op het midden van de lijnen, die het zwaartepunt met de hoekpunten verbinden.

Voor  $n = 4$  is 
$$b_i = s \pm \frac{a_i - s}{\sqrt{5}}.$$

Trekt men dus uit het zwaartepunt  $s$  van een tetraeder naar zijn hoekpunten  $a_1 \dots a_4$  lijnen en zet aan weerszijden van  $s$  op die lijnen stukken af, die gelijk zijn aan  $sa_i : \sqrt{5}$ , dan krijgt men aan de uiteinden van die stukken 2 stel punten, ieder van 4 punten, die equimomenteel zijn met het tetraeder.

## LITERATUR.

- HUYGHENS. — Horologium oscillatorium,  
 HATON DE LA GOUPILLIÈRE. — Mémoire sur une théorie nouvelle  
 de la géométrie des masses. Journal de l'Ecole  
 polytechnique. Cah. XXXVII.
- BINET. — Mémoire sur la théorie des axes conjugués et des  
 moments d'inertie des corps.  
 Journal de l'École polytechnique. Cah. XVI.
- MOIGNO. — Leçons de Mécanique analytique.
- GUILBERT. — Note sur les axes principaux des corps. Journal  
 de l'Ecole polytechnique. Cah. XXV.
- JULLIEN. — Problèmes de Mécanique rationnelle.
- ROUTH. — An elementary treatise on the dynamics of a  
 system of rigid bodies.
- W. THOMSON. — On the principal axes of a solid body. Cambridge  
 and Dublin Mathem. Journal.
- TOWNSEND. — On the principal axes of a body, their moment  
 of inertia and distribution in space.  
 Cambridge and Dublin Math. Journal.
- REIJE. — Einfache Darstellung der Trägheitsmomente ebener  
 Figuren.  
 Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure.  
 Bd. XIX.
- FUHRMANN. — Aufgaben aus der analytischen Mechanik.
- SCHELL. — Theorie der Bewegung und der Kräfte.

- R. LAND. — Ueber die Berechnung und die bildliche Darstellung von Trägheits- und Centrifugalmomenten ebener Massenfiguren.
- MEHMKE. — Ueber die Bestimmung von Trägheitsmomenten mit Hülfe Grassmann'scher Methoden.  
Math. Annalen. Bd. 23.
- SCHLÖMILCH. — Ueber die Bestimmung der Massen und Trägheitsmomente symmetrischer Rotationskörper von ungleichförmiger Dichtigkeit  
Abh. der math.-phys. Classe der Königl. sächs. Gesellsch der Wissensch. Bd. II.
- SOMOFF. — Mémoire sur les axes et les moments principaux des corps homogènes.  
Bullet. de la classe phys.-math. de l'Acad. de St. Pétersbourg. Tome XII.
-

## STELLINGEN.

---

### I.

Onjuist is de bewering van MEHMKE (Zeitschrift für Math. und Phys. Bd. 29) dat de MÖBIUS-GRASSMANN'sche puntrekening voor het vinden van traagheidsmomenten geschikter is dan het gebruik van Cartesiaansche coördinaten.

### II.

SCHLÖMILCH's bewijs voor  $\text{Lim. } \frac{\sin x}{x} = 1$ , (SCHLÖMILCH, Compendium der höh. Analysis) is af te keuren.

### III.

Het is onjuist, wanneer STURM beweert, dat het kenmerk voor de convexiteit en de concaviteit van lijnen alleen dan niet toe te passen is, als de hoek der coördinatenassen stomp is.

(STURM, Cours d'Analyse Tome I).

## IV.

Het gebruik van de Rectificatie formule

$$s = \int dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

is bij toepassing op ontwondenen niet wenschelijk.

## V.

De door D'ALEMBERT gegeven methode ter oplossing eener lineaire differentiaal vergelijking met constante coëfficiënten, is, in geval de hulpvergelijking gelijke wortels heeft, onnauwkeurig.

## VI.

Het bewijs der stelling dat door 3 punten slechts ééne kegelsnede kan getrokken worden, indien een harer brandpunten bekend is, (Anal. Meetkunde van P. VAN GEER Bl. 238) is onjuist.

## VII.

Het bewijs van VERDET voor het ontbreken van longitudinale trillingen is te verkiezen boven dat van FRESNEL.

## VIII.

Dat de intensiteit van een totaal gereflecteerden lichtstraal bij doorschijnende media, gelijk is aan de intensiteit van den invallenden straal, rechtvaardigt de interpretatie van FRESNEL niet (indringen van licht in het medium).

## IX.

De verklaring der werking van den minimum-thermometer van RUTHERFORD, voorkomende in WÜLLNER's Experimental Physik, is onjuist.

## X.

De theorie van den bliksemafleider (werking van spitse geleiders) is onbevredigend.

## XI

Het weergeven van het geluid in de telephoon geschiedt grootendeels door moleculair trillingen.

## XII.

Om \*het meeste nuttig effect bij electriciteit te verkrijgen zijn Thermo-Electrische werktuigen aanbevelenswaardig.

## XIII.

Ook in de kinetische gastheorie is men nog genoodzaakt afstootende krachten aan te nemen.

## XIV.

Wanneer twee atomen door een zekere kracht aan elkander verbonden zijn, is reeds een veel geringere kracht in staat die atomen te scheiden.



## XV.

De in vele leerboeken voorkomende uitdrukking „als homogeen licht kan men Natriumlicht gebruiken” moet vermeden worden.

## XVI.

Voor de berekening der verplaatsingen van sterren volgens de gezichtslijn is de spectrophotographische methode de beste.

## XVII.

De beste verklaring van de verschijnselen welke bij de roode sterren worden waargenomen is die van BRESTER.

## XVIII.

Ook aan hen, die in het bezit zijn van het diploma van het eindexamen eener H. B. S. met 5-jarigen cursus moest, op grond van dat diploma de gelegenheid tot promoveeren in de Wis- en Natuurkundige faculteit worden geschonken.

---



