Utrecht University Library
Partner in Science
Universiteit Utrecht

De viriaal en hare beteekenis in de mechanica

https://hdl.handle.net/1874/240337

A° 192

Phys.
6 Juni
1888

L. VAN ELFRINKHOF.

DE VIRIAAL

EN

hare beteekenis in de Mechanica

es.
cht
88

DE VIRIAAL

EN

HARE BETEEKENIS IN DE MECHANICA.

Stoomdruk van J. VAN BOEKHOVEN te Utrecht.

DE VIRIAAL

EN

HARE BETEEKENIS IN DE MECHANICA.

PROEFSCHRIFT

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN

Doctor in de Wis- en Natuurkunde

AAN DE RIJKS-UNIVERSITEIT TE UTRECHT

NA BEKOMEN MACHTIGING VAN DEN RECTOR MAGNIFICUS

D^R. G. H. LAMERS

Hoogleeraar in de Faculteit van Godgeleerdheid

EN

MET TOESTEMMING VAN DEN ACADEMISCHEN SENAAT

TEGEN DE BEDENKINGEN DER WIS- EN NATUURKUNDIGE FACULTEIT

TE VERDEDIGEN

op Vrijdag den 1^sten Juni 1888, des namiddags ten 3 ure,

DOOR

LAMBERTUS VAN ELFRINKHOF,

geboren te NIJKERK (Veluwe).

UNIVERSITEITS BIBLIOTHEEK UTRECHT

UTRECHT. — J. VAN BOEKHOVEN.

1888.

Aan mijne Ouders.

Aan het einde mijner Academische studiën breng ik gaarne mijnen dank aan U, Hooggel. Heeren, Professoren bij de Faculteit der Wis- en Natuurkunde, wier onderwijs ik heb mogen genieten.

In het bijzonder geldt dien dank U, Hooggel. Heeren Buys Ballot, Grinwis *en* Kapteyn, *voor al wat gij tot mijne vorming hebt bijgedragen, voor de bewijzen van welwillendheid mij meermalen betoond.*

Hooggel. Grinwis, *hooggeachte promotor, uw steun bij dit proefschrift en de blijken uwer vriendschap zullen mij steeds in dankbare herinnering blijven.*

ERRATA.

Bladz.	5	regel	17	v.	boven	staat: $\frac{\partial V}{\partial x}$;	lees: $\frac{\partial r}{\partial x}$.
„	38	„	7	„	onder	„ : krachten	„ : trachten
„	45	„	2	„	boven	„ : k;	„ : $\varkappa$.
„	94	„	8	„	„	„ : $\frac{d^2(x^2)}{dt}$	„ : $\frac{d^2(x^2)}{dt^2}$.
„	96	„	5	„	„	„ : MB'	„ : $M'B'$.
„	107	„	9	„	onder	„ : der	„ : van den
„	121	„	6	„	„	is achter de letter d de veranderlijke φ weggevallen.	

HOOFDSTUK I.

Bepaling, verschillende vormen en hoofdeigenschappen der viriaal.

A. BEPALING EN VERSCHILLENDE VORMEN DER VIRIAAL.

§ 1. Wanneer een krachtenstelsel is gegeven, zoodat ons de grootte en richting van iedere kracht en daarbij het aangrijpingspunt bekend zijn, dan weten wij voor iedere kracht de composanten langs de coördinatenassen X, Y en Z, benevens de coördinaten van het aangrijpingspunt x, y en z. Door telkens een der laatste met een der eerste tot een produkt te combineeren, verkrijgen wij de negen uitdrukkingen:

$$x\,X,\ x\,Y,\ x\,Z,$$
$$y\,X,\ y\,Y,\ y\,Z,$$
$$z\,X,\ z\,Y,\ z\,Z.$$

In drie van deze, n.l. $x\,X$, $y\,Y$ en $z\,Z$, valt de richting van de krachtcomposante samen met de daarin voorkomende coördinaat van het aangrijpingspunt; in de zes andere staan beide loodrecht op elkander. De dimensie van al deze grootheden is klaarblijkelijk lijn × kracht ($M L^2 T^{-2}$), en is dus die, welke men sedert lang als moment heeft gedefinieerd. Het is waarschijnlijk naar

aanleiding hiervan, dat SCHWEINS het genoemde zestal met den naam „Drehmomente" en de drie andere, welke blijkbaar niet dien invloed op het stelsel hebben, met den naam „Fliehmomente" betiteld heeft. De verhandelingen, waarin deze benamingen voorkomen, en waarin hij de hoofdeigenschappen dezer grootheden mededeelt, zijn te vinden in CRELLE's Journal, Bd. XXXVIII en XLVII. In deze verhandelingen worden vooral de eigenschappen nagegaan der grootheden $\Sigma\ (x\ X + y\ Y)$ voor vlakke krachtenstelsels, en $\Sigma\ (x\ X + y\ Y + z\ Z)$ voor stelsels in de ruimte. Zonder aan deze grootheden eenigen naam te geven, heeft toch reeds MÖBIUS in zijne „Statik" de beteekenis van den vorm $\Sigma\ (x\ X + y\ Y + z\ Z)$ voor het evenwicht in vele opzichten in het licht gesteld.

§ 2. Een veel grootere beteekenis, vooral voor de toegepaste mechanica op natuurkundige vraagstukken heeft deze grootheid verkregen, sedert CLAUSIUS in 1870 in eene voordracht in de „Niederrheinische Gesellschafft für Natur- und Heilkunde" een bewegingsvergelijking mededeelde, waarin de gemiddelde waarde dezer grootheid voor een zich in stationaire beweging bevindend stelsel optreedt. Aan de halve negatieve waarde van dit gemiddelde, de grootheid $-\frac{1}{2}\ \Sigma\ (x\ X + y\ Y + z\ Z)$ heeft hij den naam: viriaal gegeven.

Toch is in deze geen eenstemmigheid gebleven. Zoo heeft GRINWIS in een verhandeling voorkomende in de „Verslagen en Mededeelingen der Koninklijke Academie van Wetenschappen 1884", ten einde de grootheid in verband te brengen met de kinetische energie van het stelsel, den naam viriaal toegekend aan de uitdrukking $-\frac{1}{2}\ \Sigma\ (x\ X + y\ Y + z\ Z)$.

In het werk van Dr. W. SCHELL „Theorie der Bewe-

gung und der Kräfte" komt het woord viriaal voor als benaming voor de uitdrukking

$$-\Sigma\,(x\,X + y\,Y + z\,Z).$$

Wij zullen in de volgende bladzijden eenvoudigheidshalve met deze laatste bepaling medegaan.

Tevens zullen wij voor deze grootheid dikwijls het teeken F gebruiken en dus stellen wij bij definitie

$$F = -\Sigma\,(x\,X + y\,Y + z\,Z)$$

Voor één enkele kracht is dan de viriaal bepaald door de vergelijking

$$F = -\,(x\,X + y\,Y + z\,Z).$$

Indien meerdere krachten op een punt werken, blijft dezelfde vorm der functie bestaan, mits men dan X, Y en Z als de composanten der resultante dier krachten beschouwt.

§ 3. Aan de viriaal eener kracht wordt een anderen vorm gegeven op de volgende wijze.

Stellen r de voerstraal van het aangrijpingspunt en R de kracht voor, dan is

$$F = -\,(x\,X + y\,Y + z\,Z) = -\,r\,R\left(\frac{x}{r}\frac{X}{R} + \frac{y}{r}\frac{Y}{R} + \frac{z}{r}\frac{Z}{R}\right)$$
$$= -\,r\,R\,cos\,(r, R)$$

Noemen wij de projectie van R op de voerstraal van het aangrijpingspunt P en nemen P positief in de richting van de verlengde voerstraal, dan is

$$-\,(x\,X + y\,Y + z\,Z) = -\,r\,P\,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

In de benaming door Schweins ter aangehaalder plaatse ingevoerd is dus rP het Fliehmoment der kracht R. Projecteeren wij daarentegen R op een lijn loodrecht op r door het aangrijpingspunt en noemen wij die projectie Q, dan is rQ het Drehmoment. Wil men deze woorden in onze taal overbrengen, dan zou men de Drehmomente „werkzame momenten" kunnen noemen,

want alleen deze komen in de bewegingsvergelijkingen voor. De Fliehmomente, die geen invloed op de beweging hebben, mogen dan „verloren momenten" genoemd worden.

§ 4. Men kan evengoed de voerstraal r projecteeren op de richting der kracht, en zoo wij die projectie p noemen, dan is

$$-(x\,X + y\,Y + z\,Z) = -\,p\,R \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Uit (1) en (2) volgt

$$r\,P = p\,R$$

en dus liggen de uiteinden van R en P, de oorsprong en het voetpunt der loodlijn uit O op de lijn R neergelaten op een cirkel.

§ 5. Maakt men onderstellingen omtrent den aard der krachten, dan kan men verschillende vormen voor de viriaal afleiden.

Bestaat er ten opzichte van het stelsel een coördinatenfunctie, ergal genaamd — zoodanig dat iedere composante der in een willekeurig punt van het stelsel aangrijpende kracht uitgedrukt kan worden door het negatieve partieele differentiaal-quotient van dat ergal ten opzichte van de aan die composante gelijknamige veranderlijke — dan zijn, indien U het ergal voorstelt:

$$X = -\frac{\partial U}{\partial x},\quad Y = -\frac{\partial U}{\partial y},\quad Z = -\frac{\partial U}{\partial z};$$

en vervolgens wordt

$$F = -\Sigma\,(x\,X + y\,Y + z\,Z)$$
$$= \Sigma\left(x\frac{\partial U}{\partial x} + y\frac{\partial U}{\partial y} + z\frac{\partial U}{\partial z}\right).$$

Is daarenboven het ergal U een homogeene functie der coördinaten, dan kan, indien k den graad der functie aanduidt, volgens een eigenschap der homogeene functieën geschreven worden

$$F = k\,U.$$

In dit geval staan viriaal en ergal in een constante verhouding tot elkander.

Bij constante krachten is $k = 1$, dus wordt

$$F = U.$$

Bij krachten, waar het ergal van den -1^{sten} graad is, zooals bij NEWTON'sche aantrekking naar den oorsprong is

$$F = -U.$$

§ 6. Wordt een punt aangetrokken of afgestooten door eene kracht, die een functie is van den afstand tot een vast centrum, dat als oorsprong van coördinaten genomen wordt, en welke kracht gericht is langs den voerstraal, dan kan men die kracht aanduiden door

$$R = \varphi\,(r).$$

Dan is

$$U = -\int \varphi\,(r)\,dr$$

en dientengevolge

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -\varphi\,(r)\,\frac{\partial Y}{\partial x}.$$

Daar nu

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

zijn

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r},\ \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r},\ \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r};$$

derhalve zijn

$$X = \frac{x}{r}\,\varphi\,(r),\ Y = \frac{y}{r}\,\varphi\,(r),\ Z = \frac{z}{r}\,\varphi\,(r)$$

waaruit volgt

$$F = -(x\,X + y\,Y + z\,Z) = -r\,\varphi\,(r).$$

Is U tegelijkertijd een algebraïsche homogeene functie van den k^{den} graad, dan volgt uit deze vergelijking en de laatste der vorige paragraaf:

$$k\int \varphi\,(r)\,dr = r\,\varphi\,(r) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

De onderstelling

$$\varphi(r) = Cr^n$$

waarbij wij aannemen, dat $n > -1$ is, voldoet aan de voorwaarde, dat het ergal een homogeene functie der coördinaten is. Hierdoor wordt

$$U = -\frac{C}{n+1} r^{n+1}.$$

Bedenken wij nu dat

$$k = n + 1$$

dan blijkt aan de vergelijking (3) voldaan te zijn.

Dan is de viriaal

$$F = -Cr^{n+1}$$

voor $n = 1$

$$F = -Cr^2$$

voor $n = -2$

$$F = -\frac{C}{r}.$$

§ 7. Een anderen vorm heeft CLAUSIUS [1]) aan de viriaal gegeven door een splitsing in te voeren tusschen de uit- en inwendige krachten. Geven wij het onderscheid door aanhechting van de indices e en i aan, dan volgt uit de beteekenis van het teeken Σ, dat

$$-\Sigma(xX+yY+zZ) = -\Sigma(xX_i+yY_i+zZ_i) \\ -\Sigma(xX_e+yY_e+zZ_e)$$

is, of

$$F = F_i + F_e.$$

Men noemt dan F_i de inwendige, F_e de uitwendige viriaal.

§ 8. Nemen wij aan, dat de inwendige krachten werken langs de verbindingslijnen der deeltjes, en gelijk en tegengesteld zijn; en beschouwen wij dan eerst twee deelt-

---

[1]) CLAUSIUS. Pogg. Ann. Jubelband.

jes, op elkander werkende met een kracht f, terwijl wij hun afstand Δ noemen, dan is voor het eerste deeltje dat x_1, y_1, z_1, tot coördinaten heeft (x_2, y_2, z_2, die van het tweede deeltje) de X-composante der kracht

$$X_1 = \frac{x_2 - x_1}{\Delta} f$$

derhalve

$$x_1 X_1 = \frac{(x_2 - x_1) x_1}{\Delta} f.$$

Evenzoo voor het tweede deeltje

$$X_2 = \frac{x_1 - x_2}{\Delta} f$$

en

$$x_2 X_2 = \frac{(x_1 - x_2) x_2}{\Delta} f.$$

Door optelling

$$x_1 X_1 + x_2 X_2 = - \frac{(x_2 - x_1)^2}{\Delta} f.$$

Insgelijks

$$y_1 Y_1 + y_2 Y_2 = - \frac{(y_2 - y_1)^2}{\Delta} f$$

$$z_1 Z_1 + z_2 Z_2 = - \frac{(z_2 - z_1)^2}{\Delta} f.$$

Summeeren wij dit over alle deeltjes der massa, dan wordt de inwendige viriaal

$$F_i = \Sigma \Delta f.$$

§ 9. Bij vaste (onveranderlijke) lichamen mogen wij aannemen, dat alle deeltjes steeds ten opzichte van elkander in evenwicht zijn. Indien dus op het lichaam, terwijl het in rust verkeert, een krachtenstelsel aangrijpt, dan moeten steeds aan ieder punt de uitwendige krachten met de inwendige evenwicht maken. Daardoor is aan ieder punt de resultante van alle zoowel uit- als inwendige krachten nul, en dus ook de viriaal voor ieder

punt nul. Maar dan is ook de viriaal voor het geheele stelsel nul, zoodat wij verkrijgen

$$\Sigma \Delta f + F_e = 0$$

of wel

$$\Sigma \Delta f = - F_e.$$

Bij gassen mogen we als eerste benadering aannemen dat er tusschen de deeltjes geen krachten werken; in dat geval is

$$F_i = 0.$$

Bij vloeistoffen heeft VAN DER WAALS in zijn Acad. proefschrift „Over de continuiteit van den gas- en vloeistoftoestand" de waarde van F_i op de volgende wijze bepaald. Wij mogen de deeltjes in het inwendige der vloeistofmassa als in evenwicht beschouwen. De viriaal der op die deeltjes werkende krachten is dus nul. De deeltjes aan de oppervlakte echter worden door de attractie der overigen naar binnen getrokken. Deze oppervlaktespanning mogen wij wegens de geringe dikte van het laagje behandelen als een druk op de oppervlakte der vloeistof. Zij dan de grootte van dien druk per eenheid van oppervlak N, dan werkt in een punt x, y, z van het oppervlak een kracht $- N\, d\sigma$, indien $d\sigma$ het oppervlakte-element voorstelt. Deze kracht is volgens de normaal op $d\sigma$ naar binnen gericht. Laten de richtingscosinussen dezer normaal α, β, γ zijn en de hoek, dien de normaal met den voerstraal r maakt ϑ, dan is

$$\begin{aligned} x\, X_i + y\, Y_i + z\, Z_i &= - N\, d\sigma\, (x\alpha + y\beta + z\gamma) \\ &= - N r\, d\sigma\, \cos\vartheta. \end{aligned}$$

Bij summatie over het geheele oppervlak wordt dus

$$F_i = N \int r \cos\vartheta\, d\sigma.$$

Nu is echter $r \cos\vartheta\, d\sigma = 3 \times$ inhoud der pyramide, die $d\sigma$ tot basis en den oorsprong tot top heeft.

De integratie geeft dus het totale volumen van het lichaam. Zij dit v, dan is dus

$$F_i = 3\ N\ v.$$

Werkt op een lichaam een uitwendige druk normaal op de oppervlakte, en stelt p daarvan de grootte per eenheid van oppervlak voor, zoo verkrijgt men redeneerende als boven, voor de viriaal van die drukkrachten

$$F = 3\ p\ v.$$

§ 10. Hebben wij een stelsel evenwijdige krachten, wier gemeenschappelijke richting ten opzichte van de coördinaten-assen gegeven wordt door de hoeken α, β en γ, dan vinden wij voor de viriaal van zulk een stelsel

$$F = -\ \Sigma\ (x\ X + y\ Y + z\ Z)$$
$$= -\ (\cos\alpha.\ \Sigma\ x\ R + \cos\beta.\ \Sigma\ y\ R + \cos\gamma.\ \Sigma\ z\ R)$$

De coördinaten van het middelpunt der evenwijdige krachten worden bepaald door de vergelijkingen

$$x_1\ \Sigma\ R = \Sigma\ x\ R,\ y_1\ \Sigma\ R = \Sigma\ y\ R,\ z_1\ \Sigma\ R = \Sigma\ z\ R.$$

Zij daarenboven de voerstraal van het centrum r_1 en de hoek, dien deze maakt met de richting der krachten ϑ, zoo is

$$\cos\alpha.\ \Sigma\ x\ R + \cos\beta.\ \Sigma\ y\ R + \cos\gamma.\ \Sigma\ z\ R =$$
$$(x_1\cos\alpha + y_1\cos\beta + z_1\cos\gamma)\ \Sigma\ R = r_1\cos\vartheta\ \Sigma\ R,$$

waaruit volgt

$$F = -\ r_1\cos\vartheta\ \Sigma\ R.$$

De viriaal van een stelsel evenwijdige krachten is dus gelijk aan de viriaal van hun resultante aangrijpende in het middelpunt van het stelsel.

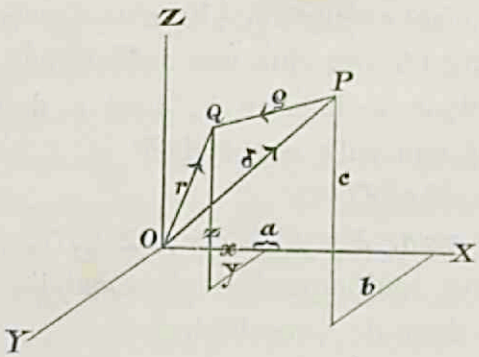
Voor de zwaartekracht verkrijgen wij, als r_c de voerstraal van het zwaartepunt voorstelt:

$$F = -\ r_c\cos\vartheta\ \Sigma\ mg = -\ Mg\ r_c\cos\vartheta.$$

§ 11. Denken wij een stelsel massapunten Q in ieder van welke een massa dm aanwezig is. Door den invloed van de in P aanwezige eenheid van massa ontstaat tusschen P en ieder punt Q twee gelijke en tegengestelde krachten.

Wij nemen aan, dat die krachten evenredig zijn aan de massa's in Q en P en aan zekere funtie van den afstand. Op die wijze grijpen in P een aantal krachten aan, wier totale viriaal wij wenschen te bepalen. Evenzoo de viriaal van het stelsel, dat door de verschillende punten Q en de daarop aangrijpende krachten gevormd wordt.

In P grijpt onder invloed van Q een kracht aan, wier composanten zijn



$$X = -\frac{a-x}{\varrho}\varphi(\varrho)\,dm$$

$$Y = -\frac{b-y}{\varrho}\varphi(\varrho)\,dm$$

$$Z = -\frac{c-z}{\varrho}\varphi(\varrho)\,dm.$$

De viriaal dezer kracht is

$$-(xX+yY+zZ) = \left(a\,\frac{a-x}{\varrho} + b\,\frac{b-y}{\varrho} + c\,\frac{c-z}{\varrho}\right)\varphi(\varrho)\,dm.$$

Nu is

$$\varrho^2 = (a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

waaruit volgt

$$\frac{\partial\varrho}{\partial a} = \frac{a-x}{\varrho},\ \frac{\partial\varrho}{\partial b} = \frac{b-y}{\varrho},\ \frac{\partial\varrho}{\partial c} = \frac{c-z}{\varrho}.$$

Dit invoerende, verkrijgen wij

$$-(xX+yY+zZ) = \left(a\,\frac{\partial\varrho}{\partial a} + b\,\frac{\partial\varrho}{\partial b} + c\,\frac{\partial\varrho}{\partial c}\right)\varphi(\varrho)\,dm.$$

Stellen wij nu

$$\int\varphi(\varrho)\,d\varrho = \psi(\varrho) \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

dan hebben wij

$$\varphi(\varrho)\,d\varrho = d\,\psi(\varrho)$$

$$\varphi(\varrho)\,\frac{\partial\varrho}{\partial a} = \frac{\partial\psi(\varrho)}{\partial a}$$

en dus

$$-(x\,X + y\,Y + z\,Z) = \left(a\frac{\partial\,\psi\,(\varrho)}{\partial\,a} + b\frac{\partial\,\psi\,(\varrho)}{\partial\,b} + c\frac{\partial\,\psi\,(\varrho)}{\partial\,c}\right) dm.$$

En bij summatie wordt de totale viriaal der in P aangrijpende krachten

$$F_p = \int \left(a\,\frac{\partial\,\psi\,(\varrho)}{\partial\,a} + b\,\frac{\partial\,\psi\,(\varrho)}{\partial\,b} + c\,\frac{\partial\,\psi\,(\varrho)}{\partial\,c}\right) dm.$$

Hierbij hebben de integratiën betrekking op het lichaam; derhalve zijn a, b, c ten opzichte dier betrekkingen als constanten te beschouwen.

Laat nu μ de dichtheid voorstellen in het punt (x, y, z) terwijl $dv = dx\,dy\,dz$ is en stellen wij

$$\int \psi\,(\varrho)\,dm = \iiint \mu\,\psi\,(\varrho)\,dx\,dy\,dz = U \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

dan is

$$F_p = \left(a\,\frac{\partial\,U}{\partial\,a} + b\,\frac{\partial\,U}{\partial\,b} + c\,\frac{\partial\,U}{\partial\,c}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Gaan wij nu over tot het stelsel der punten Q.

Op dm werkt een kracht $\varphi\,(\varrho)\,dm$, welks composanten zijn

$$X = \frac{a-x}{\varrho}\,\varphi\,(\varrho)\,dm$$

$$Y = \frac{b-y}{\varrho}\,\varphi\,(\varrho)\,dm$$

$$Z = \frac{c-z}{\varrho}\,\varphi\,(\varrho)\,dm.$$

Dan is de viriaal in Q:

$$-(x\,X + y\,Y + z\,Z) = -\left(x\frac{a-x}{\varrho} + y\,\frac{b-y}{\varrho} + z\frac{c-z}{\varrho}\right)\varphi\,(\varrho)\,dm.$$

Uit (4) volgt:

$$\frac{\partial\,\varrho}{\partial\,x} = \frac{x-a}{\varrho},\ \frac{\partial\,\varrho}{\partial\,y} = \frac{y-b}{\varrho},\ \frac{\partial\,\varrho}{\partial\,z} = \frac{z-c}{\varrho}.$$

Dus

$$-(x\,X + y\,Y + z\,Z) = \left(x\,\frac{\partial\,\varrho}{\partial\,x} + y\,\frac{\partial\,\varrho}{\partial\,y} + z\,\frac{\partial\,\varrho}{\partial\,z}\right)\varphi\,(\varrho)\,dm.$$

Uit (5) volgt evenals boven

$$\varphi\,(\varrho)\,\frac{\partial\,\varrho}{\partial\,x} = \frac{\partial\,\psi\,(\varrho)}{\partial\,x}$$

Dus ook

$$-(x\,X + y\,Y + z\,Z) = \left(x\,\frac{\partial\,\psi\,(\varrho)}{\partial\,x} + y\,\frac{\partial\,\psi\,(\varrho)}{\partial\,y} + z\,\frac{\partial\,\psi\,(\varrho)}{\partial\,z}\right)dm.$$

Vervolgens wordt bij summatie, als wij de viriaal der op het lichaam werkende krachten F noemen,

$$F = \int\left(x\,\frac{\partial\,\psi\,(\varrho)}{\partial\,x} + y\,\frac{\partial\,\psi\,(\varrho)}{\partial\,y} + z\,\frac{\partial\,\psi\,(\varrho)}{\partial\,z}\right)dm.$$

Of als μ de dichtheid voorstelt:

$$F = \iiint\left(x\,\frac{\partial\,\psi\,(\varrho)}{\partial\,x} + y\,\frac{\partial\,\psi\,(\varrho)}{\partial\,y} + z\,\frac{\partial\,\psi\,(\varrho)}{\partial\,z}\right)\mu\,dx\,dy\,dz.$$

Beschouwen wij ieder der termen afzonderlijk, dan is

$$-\Sigma\,x\,X = \iiint x\,\frac{\partial\,\psi\,(\varrho)}{\partial\,x}\,\mu\,dx\,dy\,dz.$$

$$= \iint dy\,dz\int\mu\,x\,\frac{\partial\,\psi\,(\varrho)}{\partial\,x}\,dx.$$

$$= \iint dy\,dz\,[\mu\,x\,\psi\,(\varrho)] - \iiint\mu\,\psi\,(\varrho)\,dx\,dy\,dz$$

$$-\iiint x\,\psi\,(\varrho)\,\frac{\partial\,\mu}{\partial\,x}\,dx\,dy\,dz.$$

Indien ds het element der oppervlakte voorstelt, en α, β, γ de hoeken, die de buitenwaarts gerichte normaal met de assen maakt, is

$$dy\,dz = ds\,\cos\,\alpha$$

$$\iint dy\,dz\,[-\mu_1\,x_1\,\psi\,(\varrho) + \mu_2\,x_2\,\psi\,(\varrho_2) - \ldots\ldots]$$

$$= \int[-\mu_1\,x_1\,\psi\,(\varrho_1)\,\cos\,\alpha_1\,ds_1 + \mu_2\,x_2\,\psi\,(\varrho_2)\,\cos\,\alpha_2\,ds_2\ \ldots]$$

$$= \int\mu\,x\,\cos\,\alpha\,\psi\,(\varrho)\,ds.$$

In verband met (6) wordt nu

$$-\Sigma\, x\, X = \int \mu\, x \cos\alpha\, \psi(\varrho)\, ds - U - \int x\, \psi(\varrho)\, \frac{\partial \mu}{\partial x}\, dv.$$

en de viriaal

$$F = \int (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\, \mu\, \psi(\varrho)\, ds - 3\, U -$$

$$\int \left(x\frac{\partial \mu}{\partial x} + y\frac{\partial \mu}{\partial y} + z\frac{\partial \mu}{\partial z}\right) \psi(\varrho)\, dv.$$

Of als ϑ_1 de hoek tusschen de normaal en r voorstelt,

$$F = \int r\cos\vartheta_1\, \mu\, \psi(\varrho)\, ds - 3\, U - \int \left(x\frac{\partial \mu}{\partial x} + y\frac{\partial \mu}{\partial y} + r\frac{\partial \mu}{\partial z}\right) \psi(\varrho)\, dv.$$

Herleiden wij nu deze laatste integraal.

Noemen wij daartoe de hoeken, de ϱ met de assen maakt ξ, η, ζ, dan zijn

$$\varrho\cos\xi = x - a;\ \varrho\cos\eta = y - b;\ \varrho\cos\zeta = z - c.$$

Door differentiatie met constante hoeken verkrijgen wij

$$\cos\xi = \frac{dx}{d\varrho} = \frac{x-a}{\varrho};\ \cos\eta = \frac{dy}{d\varrho} = \frac{y-b}{\varrho};\ \cos\zeta = \frac{dz}{d\varrho} = \frac{z-c}{\varrho}$$

waaruit volgt

$$x = a + \varrho\frac{dx}{d\varrho},\ y = b + \varrho\frac{dy}{d\varrho},\ z = c + \varrho\frac{dz}{d\varrho}.$$

Door invoering dezer waarden wordt de bedoelde integraal

$$\int \left(a\frac{\partial \mu}{\partial x} + b\frac{\partial \mu}{\partial y} + c\frac{\partial \mu}{\partial z}\right) \psi(\varrho)\, dv +$$

$$\int \left(\frac{\partial \mu}{\partial x}\frac{dx}{d\varrho} + \frac{\partial \mu}{\partial y}\frac{dy}{d\varrho} + \frac{\partial \mu}{\partial z}\frac{dz}{d\varrho}\right) \varrho\ \psi(\varrho)\, dv$$

$$= A + B.$$

De grootheden a, b en c zijn constanten ten opzichte van de integratie. Wanneer wij nu A in drie gedeelten splitsen, is het eerste

$$a\int \frac{\partial \mu}{\partial x}\, \psi(\varrho)\, dv = a\iiint \frac{\partial \mu}{\partial x}\, \psi(\varrho)\, dx\, dy\, dz$$

$$= a\iint dy\ dz \int \psi\ (\varrho)\ \frac{\partial \mu}{\partial x}\ dx$$

$$= a\iint dy\ dz\ [\mu\ \psi\ (\varrho)] - a\int \mu\ \frac{\partial\ \psi\ (\varrho)}{\partial\ x}\ dv$$

$$= a\int \mu\ \psi\ (\varrho)\ cos\ \alpha\ ds - a\int \mu\ \frac{\partial\ \psi\ (\varrho)}{\partial\ x}\ dv$$

of daar $\frac{\partial\ \psi\ (\varrho)}{\partial\ x} = -\frac{\partial\ \psi\ (\varrho)}{\partial\ a}$

$$a\int \frac{\partial\ \mu}{\partial\ x}\ \psi\ (\varrho)\ dv = a\int \mu\ \psi\ (\varrho)\ cos\ \alpha\ ds + a\ \frac{\partial}{\partial\ a}\int \psi\ (\varrho)\ \mu\ dv$$

$$b\int \frac{\partial\ \mu}{\partial\ y}\ \psi\ (\varrho)\ dv = b\int \mu\ \psi\ (\varrho)\ cos\ \beta\ ds + b\ \frac{\partial}{\partial\ b}\int \psi\ (\varrho)\ \mu\ dv$$

$$c\int \frac{\partial\ \mu}{\partial\ z}\ \psi\ (\varrho)\ dv = c\int \mu\ \psi\ (\varrho)\ cos\ \gamma\ ds + c\ \frac{\partial}{\partial\ c}\int \psi\ (\varrho)\ \mu\ dv$$

---

opt.

$$A = \iint \delta\ cos\ \vartheta_2\ \mu\ \psi\ (\varrho)\ ds + \left(a\ \frac{\partial\ U}{\partial a} + b\ \frac{\partial\ U}{\partial\ b} + c\ \frac{\partial\ U}{\partial\ c}\right)$$

Om B te herleiden schrijven wij

$$B = \int \frac{d\ \mu}{d\ \varrho}\ \varrho\ \psi\ (\varrho)\ dv.$$

Het volumen-element dv vervangende door de uitdrukking $\varrho^2\ d\ \varrho\ d\ \tau$ verkrijgen wij

$$B = \int \frac{d\ \mu}{d\ \varrho}\ \psi\ (\varrho)\ \varrho^3\ d\ \varrho\ d\ \tau = \iint d\ \tau \int \psi\ (\varrho)\ \varrho^3\ \frac{d\ \mu}{d\ \varrho}\ d\ \varrho.$$

Nu is

$$\int \psi\ (\varrho)\ \varrho^3\ \frac{d\ \mu}{d\ \varrho}\ d\varrho = [\psi(\varrho)\varrho^3\mu] - 3\int \mu\ \psi\ (\varrho)\ \varrho^2\ d\ \varrho - \int \mu\ \varrho^3\ \frac{d\ \psi\ (\varrho)}{d\ \varrho}\ d\varrho.$$

Dus redeneerende als boven

$$B = \int \mu\ \psi\ (\varrho)\ \varrho\ cos\ \Theta_3\ ds - 3\ U - \int \varrho\ \frac{d\ \psi\ (\varrho)}{d\ \varrho}\ dm.$$

Indien het punt P binnen de massa ligt, geeft de term $[\psi\ (\varrho)\ \varrho^{\ 3}\mu]$ behalve de integraal $\int \mu\ \psi\ (\varrho)\ \varrho\ cos\ \vartheta_3\ ds$ nog

de integraal $\int \psi(\varrho)\, \varrho^3\, \mu\, d\tau$ voor $\varrho = 0$. Voor krachten, die aan positieve machten van ϱ evenredig zijn, of aan de — 1ste, — 2de of — 3de macht van ϱ wordt deze term nul en blijft dus buiten rekening.

Is de kracht evenredig aan ϱ^{-4} dan is $\psi(\varrho) = -\frac{1}{3}\varrho^{-3}$ en geeft deze term dus de constante grootheid $\frac{4}{3}\pi\mu$. Bij krachten, wier negatieve exponent 5 of meer is, wordt deze term ∞.

De gevonden waarden voor A en B in de uitdrukking voor de viriaal substitueerende, wordt deze in verband met (7)

$$F = \int (r\cos\vartheta_1 - \delta\cos\vartheta_2 - \varrho\cos\vartheta_3)\,\psi(\varrho)\,\mu\,ds - F_p + \int \varrho\frac{d\psi(\varrho)}{d\varrho}dm.$$

De uitdrukking $r\cos\vartheta_1 - \delta\cos\vartheta_2 - \varrho\cos\vartheta_3$ is de projectie van den omtrek van den gesloten driehoek $O\,Q\,P$ op de normaal op het oppervlakte-element ds en is alzoo gelijk nul.

Ten slotte wordt

$$F + F_p = \int \varrho\,\varphi(\varrho)\,dm.$$

De integraal is een coördinaten-functie, afhankelijk van de plaats van P_1 doch niet van den oorsprong.

In het bijzondere geval, dat de aantrekking plaats heeft volgens de wet van Newton, is

$$\varphi(\varrho) = \varrho^{-2}$$

en

$U = V =$ de potentiaal der massa in P.

Dan wordt

$$\int \varrho\,\varphi(\varrho)\,dm = \int \varrho^{-1}\,dm$$

tevens is

$$\psi(\varrho) = \int \varphi(\varrho)\,d\varrho = -\varrho^{-1}$$

en dus

$$V = -\int \varrho^{-1}\, dm$$

waaruit in dit bijzondere geval volgt

$$F + F_p = -V.$$

In woorden: „De som der virialen der beide stelsels is gelijk aan de waarde der potentiaal in P met tegengesteld teeken genomen."

Plaatsen wij P in den oorsprong, dan is $F_p = 0$ en dus

$$F = -V,$$

wat een zeer groote analogie tusschen viriaal en potentiaal aantoont en met § 5 overeenstemt.

Geldt bijv. de wet van WEBER, dan is

$$\varphi(\varrho) = \frac{1}{\varrho^2}\left(1 - k^2 \frac{d\varrho^2}{dt^2} + 2\, k^2 \varrho \frac{d^2\varrho}{dt^2}\right)$$

en dus

$$\psi(\varrho) = \frac{1}{\varrho}\left(k^2 \frac{d\varrho^2}{dt^2} - 1\right)$$

en

$$U = \int \frac{dm}{\varrho}\left(k^2 \frac{d\varrho^2}{dt^2} - 1\right).$$

Dan wordt

$$F + F_p + U = 2\, k^2 \int \varrho \frac{d^2\varrho}{dt^2}\, dm.$$

§ 12. Is in P niet de eenheid van massa, doch een massa dm_2, en noemen wij die in Q ter onderscheiding dm_1, dan is volgens boven

$$F = \int \varrho\, \varphi(\varrho)\, dm_1\, dm_2 - F_p$$

$$= \int \varrho\, \varphi(\varrho)\, dm_1\, dm_2 - \left(a \frac{\partial U}{\partial a} + b \frac{\partial U}{\partial b} + c \frac{\partial U}{\partial c}\right) dm_2$$

Maakt nu P ook deel uit van een stelsel massapunten, en noemen wij de totale viriaal van het stelsel Q: F_1, die van het stelsel P: F_2 dan is bij integratie

$$F_1 = \int\int \varrho\, \varphi(\varrho)\, dm_1\, dm_2 - \int \left(a \frac{\partial U}{\partial a} + b \frac{\partial U}{\partial b} + c \frac{\partial U}{\partial c}\right) dm_2$$

Maar deze laatste integraal is F_2, derhalve is

$$F_1 + F_2 = \int\int \varrho\, \varphi(\varrho)\, dm_1\, dm_2$$

Indien de wet van NEWTON geldt en dientengevolge de wederkeerige potentiaal

$$W = -\int\int \frac{dm_1\, dm_2}{\varrho}$$

is, verkrijgen wij

$$F_1 + F_2 = -W.$$

Valt het stelsel P met het stelsel Q samen, dan verkrijgen wij de viriaal der tusschen de massa's onderling werkende krachten; wat wij vroeger de inwendige veriaal genoemd hebben. Deze is dan

$$F_i = {}^1/_2 \int\int \varrho\, \varphi(\varrho)\, dm^2.$$

Het cijfer ${}^1/_2$ volgt uit het feit, dat bij het samenvallen alle massapunten dubbel worden en dus iedere kracht tweemaal optreedt. Bij het bepalen der inwendige viriaal moeten wij echter deze slechts éénmaal nemen, en moet de integraal door 2 gedeeld worden.

Vergelijken wij dit met § 8 zoo zien wij dat de hier gevonden uitdrukking dezelfde is als de daar bepaalde in eenigzins gewijzigden en meer uitvoerigen vorm. [1])

Geldt ten opzichte der werking de wet van NEWTON en is de potentiaal der massa ten opzichte van zich zelf:

$$W^1 = -{}^1/_2 \int\int \frac{dm^2}{\varrho}$$

dan is ook nu

$$F_i = -W^1$$

---

[1]) In § 8 ontbreekt voor $\Sigma\, A\, f$ de factor ${}^1/_2$, daar in die uit drukking Σ zich uitstrekt over de combinatieën der punten twee aan twee.

B. HOOFDEIGENSCHAPPEN DER VIRIAAL.

§ 13. Zij F_0 de viriaal ten opzichte van den oorsprong, dan is

$$F_0 = -\Sigma (x X + y Y + z Z).$$

Om nu de viriaal ten opzichte van een punt O_1 (x_1, y_1, z_1) te bepalen, kiezen wij x_1, y_1, z_1 als oorsprong van een nieuw coördinaten-stelsel. Wanneer nu de richtingscosinussen van de nieuwe X-as α, β, γ zijn, die van de nieuwe Y-as α', β', γ', die van de nieuwe Z—as $\alpha'', \beta'', \gamma''$, hebben wij de volgende betrekkingen

$$\begin{aligned} x &= x_1 + \alpha x' + \alpha' y' + \alpha'' z' \\ y &= y_1 + \beta x' + \beta' y' + \beta'' z' \\ z &= z_1 + \gamma x' + \gamma' y' + \gamma'' z' \end{aligned}$$

waaruit

$$\begin{aligned} x' &= \alpha\ (x-x_1) + \beta\ (y-y_1) + \gamma\ (z-z_1) \\ y' &= \alpha'\ (x-x_1) + \beta'\ (y-y_1) + \gamma'\ (z-z_1) \\ z' &= \alpha''\ (x-x_1) + \beta''\ (y-y_1) + \gamma''\ (z-z_1) \end{aligned}$$

Verder zijn

$$\begin{aligned} X' &= \alpha X + \beta Y + \gamma Z \\ Y' &= \alpha' X + \beta' Y + \gamma' Z \\ Z' &= \alpha'' X + \beta'' Y + \gamma'' Z. \end{aligned}$$

Zij nu

$$F_1 = -\Sigma (x' X' + y' Y' + z' Z')$$

dan is

$$F_1 = -\Sigma [(x-x_1) X + (y-y'_1) Y + (z-z_1) Z]$$

of wel

$$F_1 = F_0 + \Sigma (x_1 X + y_1 Y + z_1 Z).$$

Door invoering van de grootheden

$$A = \Sigma X,\ B = \Sigma Y,\ C = \Sigma Z$$

wordt dit

$$F_1 = F_0 + A x_1 + B y_1 + C z_1.$$

De hoeken zijn uit de uitkomst verdwenen; van daar de eigenschap:

„De waarde der viriaal is alleen afhankelijk van de plaats van het punt, dat men als oorsprong kiest, niet van de richtingen der coördinaten-assen."

Dit blijkt ook uit de uitdrukking van § 3 namelijk

$$F = - r R \cos (r, R).$$

Schrijven wij de vergelijking in de gedaante

$$F_0 = F_1 - (x_1 A + y_1 B + z_1 C)$$

zoo zien wij, dat de viriaal in O gelijk is aan de viriaal in O_1, vermeerderd met de viriaal van de resultante der krachten aangrijpend in het punt O_1 genomen ten opzichte van O.

Op de drie grootheden

$L_0 = \Sigma (y Z - z Y), M_0 = \Sigma (z X - x Z), N_0 = \Sigma (x Y - y X)$

dezelfde transformatieën toepassend, worden voor den nieuwen oorsprong

$$L_1 = \alpha (L_0 - y_1 C + z_1 B) + \beta (M_0 - z_1 A + x_1 C) + \gamma (N_0 - x_1 B + y_1 A)$$
$$M_1 = \alpha' (L_0 - y_1 C + z_1 B) + \beta' (M_0 - z_1 A + x_1 C) + \gamma' (N_0 - x_1 B + y_1 A)$$
$$N_1 = \alpha'' (L_0 - y_1 C + z_1 B) + \beta'' (M_0 - z_1 A + x_1 C) + \gamma'' (N_0 - x_1 B + y_1 A).$$

En dus

$$G_1^2 = (L_0 - y_1 C + z_1 B)^2 + (M_0 - z_1 A + x_1 C)^2 + (N_0 - x_1 B + y_1 A)^2 \quad (8)$$

en ook deze grootheid is onafhankelijk van de richting der coördinaten-assen.

§ 14. Vragen wij voor welke punten in de ruimte de viriaal nul is, dan vinden wij deze meetkundige plaats uit de vergelijking

$$A x + B y + C z + F_0 = 0.$$

Dit stelt een plat vlak voor, welks normaal met de assen hoeken maakt, wier cosinussen evenredig zijn aan A, B en C.

Bij krachtenstelsels, die in een plat vlak gelegen zijn,

vinden wij op dezelfde wijze een meetkundige plaats van de gedaante

$$Ax + By + F_0 = 0.$$

Het vlak noemt men hoofdvlak; de lijn hoofdlijn der virialen.

§ 15. Volgens § 13 is de viriaal in een punt x_1, y_1, z_1 bepaald door de vergelijking

$$F_1 = F_0 + Ax_1 + By_1 + Cz_1.$$

Daaruit blijkt, dat voor alle punten van het vlak

$$Ax + By + Cz + (F_0 - F_1) = 0$$

de waarde der viriaal constant is. Dit vlak is evenwijdig aan het hoofdvlak.

Bij vlakke stelsels verkrijgen wij op dezelfde wijze lijnen van constante viriaal, evenwijdig aan de hoofdlijn. Hun vergelijking is

$$Ax + By + (F_0 - F) = 0.$$

§ 16. Indien we ons drie punten x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3 voorstellen, gelegen in een rechte lijn, hebben wij uit het voorgaande de drie vergelijkingen

$$F_1 = F_0 + Ax_1 + By_1 + Cz_1$$
$$F_2 = F_0 + Ax_2 + By_2 + Cz_2$$
$$F_3 = F_0 + Ax_3 + By_3 + Cz_3$$

Door vermenigvuldiging resp. met $x_2 - x_3$, $x_3 - x_1$, $x_1 - x_2$, daarna met $y_2 - y_3$, $y_3 - y_1$, $y_1 - y_2$ en ook met $z_2 - z_3$, $z_3 - z_1$, $z_1 - z_2$ en in het oog houdend dat

$$\frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2} = \frac{x_1 - x_3}{y_1 - y_3} = \frac{x_2 - x_3}{y_2 - y_3}$$

en dat

$$\frac{x_1 - x_2}{z_1 - z_2} = \frac{x_1 - x_3}{z_1 - z_3} = \frac{x_2 - x_3}{z_2 - z_3}$$

verkrijgen wij

$$F_1 (x_2 - x_3) + F_2 (x_3 - x_1) + F_3 (x_1 - x_2) = 0$$
$$F_1 (y_2 - y_3) + F_2 (y_3 - y_1) + F_3 (y_1 - y_2) = 0$$
$$F_1 (z_2 - z_3) + F_2 (z_3 - z_1) + F_3 (z_1 - z_2) = 0.$$

Legt men nu het punt x_2, y_2, z_2 in het hoofdvlak en de beide andere punten aan weerszijden evenver van dat vlak verwijderd, dan zijn:

$F_2 = 0$, $x_2 - x_3 = x_1 - x_2$, $y_2 - y_3 = y_1 - y_2$, $z_2 - z_3 = z_1 - z_2$.

Na invoering hiervan worden de drie vergelijkingen

$$F_1 = -F_3$$

Ergo, de virialen op gelijke afstanden van het hoofdvlak aan weerszijden genomen zijn gelijk en tegengesteld in teeken.

Legt men x_1, y_1, z_1, in het hoofdvlak dan is $F_1 = 0$ en verder

$$\frac{F_2}{F_3} = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1} = \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}$$

Of: de virialen ten opzichte van punten aan dezelfde zijde van het hoofdvlak verhouden zich als de afstanden van die punten tot het hoofdvlak.

Bovenstaand bewijs dezer eigenschappen is volgens Schweins. Een eenvoudiger bewijs is het volgende: Kiezen wij het hoofdvlak tot XY-vlak, hetgeen wij doen door in de vergelijking daarvan, n.l.

$$Ax + By + Cz + F_0 = 0$$

de grootheden

$$A = B = F_0 = 0, \quad C = R$$

te stellen. Hierdoor wordt de viriaal in de punten x_1, y_1, z_1 en x_2, y_2, z_2

$$F_1 = Rz_1$$
$$F_2 = Rz_2$$

Dus

$$F_1 : F_2 = z_1 : z_2$$

en voor

$$F_1 = -F_2 \qquad z_1 = -z_2$$

Voor vlakke krachtenstelsels gelden dezelfde eigenschappen ten opzichte van de hoofdlijn.

§ 17. Als wij een enkele kracht P beschouwen, aangrijpend in een punt x_1, y_1, z_1 is hare viriaal

$$F_0 = -(x_1 X + y_1 Y + z_1 Z)$$

Het blijkt dus dat het hoofdvlak door het aangrijpingspunt gaat. De negatieve viriaal is dan

$$-F_0 = Pr \cos(P,r)$$

Het moment van die kracht ten opzichte van den oorsprong is

$$G = Pr \sin(P,r)$$

Zoo blijken moment en negatieve viriaal elkander in zekeren zin aan te vullen.

Indien het aangrijpingspunt op de richting der kracht verplaatst wordt blijft G constant. Zulks is niet het geval met F.

§ 18. Bij vlakke krachtenstelsels kan men het stelsel terugbrengen tot een resultante R welks composanten op de assen A en B zijn en een koppel $G_0 = \Sigma(x Y - y X)$.

Dit koppel is nul voor alle punten der centraal-as, die tot vergelijking heeft

$$Bx - Ay - G_0 = 0.$$

De hoofdlijn der virialen (zie § 14 bldz. 20) is,

$$Ax + By + F_0 = 0.$$

Deze twee lijnen staan alzoo loodrecht op elkander en de coördinaten van hun snijpunt zijn

$$x_c = \frac{BG_0 - AF_0}{R^2}, \quad y_c = -\frac{AG_0 + BF_0}{R^2}.$$

Dit punt noemt men het middelpunt (astatisch centrum) van het stelsel. Ten opzichte daarvan zijn het moment en de viriaal van het stelsel beide nul.

Herleidt het systeem zich tot een koppel, dan zijn A en B ieder gelijk nul. Zoo wij alsdan de waarde van het koppel ten opzichte van het punt x_1, y_1 als oorsprong G_1 noemen, zoodat (8)

$$G_1 = G_0 - x_1 B + y_1 A$$

is, dan zijn (§ 15)

$$G_1 = G_0 \text{ en } F_1 = F_0.$$

Dus: èn het koppel èn de viriaal zijn voor het geheele vlak constant.

Dan zijn, als x_1, y_1 en x_2, y_2 de aangrijpingspunten der koppelkrachten zijn

$$F = -[(x_1 - x_2) X + (y_1 - y_2) Y]$$
$$G = [(x_1 - x_2) Y - (y_1 - y_2) X]$$

of als P de grootte der krachten en $A_1 A_2$ de afstand hunner aangrijpingspunten is, terwijl hun verbindingslijn een hoek α met de richting van P maakt

$$F = -A_1 A_2 . P \cos \alpha$$
$$G = A_1 A_2 . P \sin \alpha.$$

Valt $A_1 A_2$ met de richting van P samen, dan is het stelsel in evenwicht, want dan is

$$G = 0$$

en is

$$F = -A_1 A_2 . P.$$

Derhalve een constante grootheid. Eerst wanneer A_1 en A_2 samenvallen is ook $F = 0$.

§ 19. Bij krachtenstelsels in de ruimte hebben wij behalve drie krachten A, B, C ook de drie koppels $L = \Sigma (y Z - z Y)$, $M = \Sigma (z X - x Z)$, $N = \Sigma (x Y - y X)$.

De vergelijkingen van de centraal-as, de lijn, waarvoor de as van het resulteerend koppel met de resultante samenvalt, kunnen ongeveer naar Schell „ Theorie der Bewegung und der Kräfte" Th. I, Cap. IV, § 10 afgeleid worden op de volgende wijze:

Daar G_1 onafhankelijk van α, β, γ, enz. is, (8. § 13) nemen wij een evenwijdig coördinaten-systeem, dan is voor een willekeurig punt x, y, z als oorsprong

$L_1 = L - Cy + Bz$; $M_1 = M - Az + Cx$; $N = N - Bx + Ay$.

Daar G_1 evenwijdig aan R (de resultante) moet zijn, is

$$\frac{L_1}{A} = \frac{M_1}{B} = \frac{N_1}{C} = \frac{G}{R}$$

en dus

$$C M_1 - B N_1 = 0.$$

Na invoering

$$(B^2 + C^2)\, x - A\,(By + Cz) = BN - CM$$

of

$$R^2 x - A\,(Ax + By + Cz) = BN - CM.$$

Een vlak door den oorsprong, evenwijdig aan het hoofdvlak der viriaal heeft tot vergelijking

$$Ax + By + Cz = 0$$

Noemen wij het snijpunt van dit vlak met de centraal-as ξ, η, ζ, dan verkrijgen wij

$$A\xi + B\eta + C\zeta = 0$$

en

$$R^2 \xi = BN - CM.$$

Dit in bovenstaande vergelijking gesubstitueerd geeft

$$R^2\,(x - \xi) = A\,(Ax + By + Cz)$$

of

$$\frac{x - \xi}{A} = \frac{Ax + By + Cz}{R^2}$$

De vergelijkingen van de centraal-as zijn derhalve

$$\frac{x - \xi}{A} = \frac{y - \eta}{B} = \frac{z - \zeta}{C},$$

waarin

$$R^2 \xi = BN - CM;\ R^2 \eta = CL - AN;$$
$$R^2 \zeta = AM - BL.$$

Hieruit blijkt dat deze lijn loodrecht staat op het hoofdvlak der viriaal. De coördinaten van hun snijpunt zijn

$$x = \xi - \frac{AF}{R^2};\ y = \eta - \frac{BF}{R^2};\ z = \zeta - \frac{CF}{R^2}.$$

§ 20. De hiervoorgaande eigenschappen kunnen met behulp van de methode der quaternions op eenvoudige wijze behandeld worden. Is namelijk β een vector, die een kracht voorstelt, aangrijpende in een punt welks vector α is, dan is het werkzame moment (Drehmoment) ten opzichte van den oorsprong $V\alpha\beta$ en het verloren moment (Fliehmoment) $S\alpha\beta$. Dat beide grootheden elkander aanvullen behoeft bij deze wijze van voorstelling geen nadere uiteenzetting. Samen vormen zij het product $\alpha\beta$ dat het totale moment van β ten opzichte van den oorsprong moge genoemd worden. Verder is

$$R = \Sigma\beta, \quad G = \Sigma V\alpha\beta, \quad F = \Sigma S\alpha\beta$$

De vergelijking van de centraal-as laat zich gemakkelijk afleiden uit de eigenschap, dat voor een punt van die as het resulteerend werkzame moment als vector met R moet samenvallen. Stelt dus γ den vector van een punt der centraal-as voor, dan moet

$$\Sigma\ V(\alpha-\gamma)\ \beta = \gamma R$$

zijn. Nu is

$$\Sigma\ V(\alpha-\gamma)\ \beta = G - V\gamma R$$

dus moet

$$\gamma R = G - V\gamma R.$$

Opereert men hierop met SR dan verkrijgt men

$$\gamma R^2 = SGR.$$

Derhalve

$$V\gamma R = G - R^{-1}SGR = -RVGR^{-1}$$

waaruit volgt als vergelijking der centraal-as

$$\gamma = VGR^{-1} + xR.$$

Een stelsel is reduceerbaar tot een enkele resultante, als men maken kan, dat

$$G - V\gamma R = 0$$

of met SR opereerend, als

$$SRG = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Voor een punt γ is de viriaal

$$F_1 = \Sigma S(\alpha - \gamma)\beta = F - S\gamma R.$$

De viriaal is constant voor alle punten γ, waarvoor

$$S\gamma R = F - F_1 = const. = -n T R^2 = n R^2$$

$$S(\gamma - n R) R = 0.$$

Dus in een vlak loodrecht op R. De lengte der loodlijn uit den oorsprong op dit vlak is klaarblijkelijk

$$n T R = \frac{F_1 - F}{T R}$$

Het hoofdvlak vinden wij door $F_1 = 0$ te stellen; de hierbij behoorende waarde van n noemen wij p, dan is

$$p T R = - \frac{F}{T R}$$

en de vergelijking van het hoofdvlak

$$S(\gamma - p R) R = 0$$

of

$$S\gamma R = F. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Verder is

$$n T R = p T R + \frac{F_1}{T R}$$

of

$$F_1 = (p - n) R^2.$$

In woorden: de viriaal ten opzichte van een willekeurig punt is evenredig aan den afstand van dat punt tot het hoofdvlak.

Substitueert men de waarde van γ uit de vergelijking van de centraal-as in (10), dan vindt men voor den vector van het snijpunt γ_0:

$$S R \gamma_0 = x R^2 = F = p R^2$$

of

$$x = p$$

dus

$$\gamma_0 = V G R^{-1} + p R$$

of omdat $p = F R^{-2}$

$$\gamma_0 = F R^{-1} + V G R^{-1}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

HOOFDSTUK II.

De viriaal in de Statica.

A. ASTATISCH EVENWICHT..

α. Vlakke krachtenstelsels.

§ 21. Wanneer een stelsel krachten aangrijpt aan een stelsel punten, die onderling onveranderlijk verbonden zijn, en het krachtenstelsel is in evenwicht, dan zal in het algemeen, bij een willekeurige verplaatsing van dat stelsel het evenwicht verbroken zijn. Nu kan iedere verplaatsing van een systeem beschouwd worden als een voortgaande verschuiving, gevolgd door een draaiing om een zekere as, die men bij een vlak systeem loodrecht op het vlak van het stelsel denkt. De verschuiving heeft op het evenwicht geen invloed, de draaiing echter wel.

Laten wij nu de voerstralen der aangrijpingspunten om een punt in het vlak, dat wij als oorsprong kiezen een hoek φ draaien, terwijl de krachten in grootte en richting constant blijven, dan zijn de coördinaten van een punt x, y geworden x', y' en wij hebben de betrekkingen

$$x' = x \cos \varphi - y \sin \varphi$$
$$y' = x \sin \varphi + y \cos \varphi.$$

Voeren wij de volgende bekortingen in:

$$\Sigma X = A;\ \Sigma Y = B;\ \Sigma(xY - yX) = G;\ -\Sigma(xX + yY) = F.$$

Nu hebben wij na de draaiing

$$\Sigma(x'Y - y'X) = \Sigma xY\cos\varphi - \Sigma yY\sin\varphi - \Sigma xX\sin\varphi - \Sigma yX\cos\varphi$$

$$G' = F\sin\varphi + G\cos\varphi$$

$$-\Sigma(x'X + y'Y) = -\Sigma xX\cos\varphi + \Sigma yX\sin\varphi - \Sigma xY\sin\varphi - \Sigma yY\cos\varphi$$

$$F' = F\cos\varphi - G\sin\varphi.$$

Daar echter het stelsel vóór de draaiing in evenwicht was, zijn

$$A = B = G = 0$$

dus

$$G' = F\sin\varphi$$

$$F' = F\cos\varphi$$

Het stelsel is derhalve aequivalent geworden aan een koppel, waarvan het moment is $F\sin\varphi$. Een draaiing van 90° of 270° zou dus dit moment zijn grootste positieve of negatieve waarde geven n.l. $\pm F$; terwijl een draaiing van 180° het stelsel op nieuw in evenwicht gebracht zou hebben. Een draaiing over een rechten hoek had het resulteerend koppel gelijk gemaakt aan de oorspronkelijke viriaal.

Een stelsel zal alleen dan bij een willekeurige draaiing in evenwicht blijven als $F = 0$.

Daar volgens § 18 de viriaal van een in evenwicht zijnd stelsel constant is voor alle punten van het vlak, blijkt het, dat deze voorwaarde onafhankelijk is van den oorsprong van coördinaten, dat dus het resulteerend koppel enkel afhangt van de grootte van den hoek van draaiing, en derhalve alleen dan het stelsel in astatisch evenwicht is, als ook de viriaal van het oorspronkelijk stelsel gelijk nul is.

De viriaal verandert bij draaiing van 180° van teeken. Bij draaiing van 90° of 270° wordt de viriaal gelijk $\pm G$,

dat is, gelijk het oorspronkelijk koppel. Bij astatische stelsels is de viriaal steeds nul.

§ 22. Indien het stelsel niet in evenwicht is, kan men vragen of het mogelijk is het door bijvoeging van een kracht in astatisch evenwicht te brengen en zoo ja, waar die kracht dan zal moeten aangrijpen

Noemen wij de composanten dier kracht X_1 en Y_1 en haar aangrijpingspunt x_1, y_1, dan moet dus voor willekeurige φ

$$A + X_1 = 0$$
$$B + Y_1 = 0$$
$$(F - x_1 X_1 - y_1 Y_1) \sin\varphi + (G + x_1 Y_1 - y_1 Y_1) \cos\varphi = 0.$$

Het evenwicht zal dus bewaard blijven, als

$$F - x_1 X_1 - y_1 Y_1 = F + A x_1 + B y_1 = 0$$
$$G + x_1 Y_1 - y_1 X_1 = G - B x_1 + A y_1 = 0.$$

Maar volgens § 18 zijn dit de vergelijkingen van de centraal-as en van de hoofdlijn der viriaal. De gevraagde kracht is dus hiermede bepaald zoowel in grootte en richting als ten opzichte van de plaats van het aangrijpingspunt (het snijpunt der juist genoemde lijnen). In § 18 gaven wij aan dit punt den naam middelpunt. Daar dit punt in eigenschappen overeenkomt met het middelpunt van evenwijdige krachten, wordt deze naam gerechtvaardigd. Voor de coördinaten vonden wij

$$x_1 = \frac{BG - AF}{A^2 + B^2}; \; y_1 = -\frac{AG + BF}{A^2 + B^2}$$

Indien wij een systeem evenwijdige krachten hebben, die alle een hoek φ met de X-as maken, zijn

$$A = \cos\varphi \,.\, \Sigma P, \quad B = \sin\varphi \,.\, \Sigma P,$$
$$G = \sin\varphi \,.\, \Sigma x P - \cos\varphi \,.\, \Sigma y P,$$
$$F = -\cos\varphi \,.\, \Sigma x P - \sin\varphi \,.\, \Sigma y P.$$

en worden de coördinaten van het astatisch centrum

$$x_0 = \frac{\Sigma x P}{\Sigma P}, \quad y_0 = \frac{\Sigma y P}{\Sigma P}$$

Dit zijn juist de coördinaten van het middelpunt der evenwijdige krachten.

§ 23. Ware echter het oorspronkelijk stelsel aan een koppel aequivalent of in evenwicht, dan zijn

$$A = B = 0$$

en onverschillig of G al dan niet nul is, toch worden de coördinaten van het astatisch centrum ∞; terwijl de grootte der kracht nul wordt. Een stelsel, dat zich tot een koppel herleidt, is dus niet door toevoeging van een enkele kracht astatisch te aequilibreeren, wel echter door twee krachten. Rekenende als boven, hebben wij

$$X_1 + X_2 = 0$$
$$Y_1 + Y_2 = 0$$
$$(G + x_1 Y_1 + x_2 Y_2 - y_1 X_1 - y_2 X_2) \cos\varphi$$
$$+ (F - x_1 X_1 - x_2 X_2 - y_1 Y_1 - y_2 Y_2) \sin\varphi = 0.$$

Uit de eerste twee

$$X_2 = -X_1, \quad Y_2 = -Y_1 \text{ en dus } P_2 = -P_1$$

Gesubstitueerd in de derde

$$G + (x_1 - x_2) Y_1 - (y_1 - y_2) X_1 = 0$$
$$F - (x_1 - x_2) X_1 - (y_1 - y_2) Y_1 = 0.$$

Wij hebben dus ter bepaling van zes onbekenden slechts twee vergelijkingen. Daaruit zien wij, dat een dergelijk krachtenstelsel op een oneindig aantal wijzen met behulp van twee krachten in astatisch evenwicht te brengen is. Tevens moeten die twee krachten een koppel vormen, waarvan zoowel het moment als de viriaal gelijk en tegengesteld moeten zijn aan het moment en de viriaal van het gegeven krachtenstelsel. Is het oorspronkelijk stelsel alzoo in evenwicht, dan moet de arm $A_1 A_2$ van het koppel met de richting der beide krachten samenvallen.

§ 24. Möbius heeft aangetoond, dat, wanneer men bij een vlak krachtenstelsel alle krachten naar een willekeurige richting ontbonden heeft en men dan van het daardoor

ontstane stelsel parallel-krachten het centrum zoekt, de meetkundige plaats van dat centrum een voor ieder stelsel bepaalde lijn is, onafhankelijk van de richting volgens welke men de krachten ontbonden heeft. Hij geeft aan die lijn den naam centraal-lijn. Om de vergelijking dezer lijn te vinden, kunnen wij de krachten naar twee willekeurige richtingen ontbinden, van ieder dezer stelsels het centrum zoeken en vervolgens de lijn bepalen, die door die centra gaat. Wij kiezen voor de eenvoudigheid de coördinaten-assen als richtingen.

Dan is het centrum der X-composanten (α_1, β_1)

$$\alpha_1 = \frac{\Sigma x X}{A}, \quad \beta_1 = \frac{\Sigma y X}{A}$$

Dat der Y-composanten (α_2, β_2)

$$\alpha_2 = \frac{\Sigma x Y}{B}, \quad \beta_2 = \frac{\Sigma y Y}{B}$$

De vergelijking der centraallijn, die door deze beide punten gaat, is

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & \alpha_1 & \alpha_2 \\ y & \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} = 0$$

of

$$\begin{vmatrix} 1 & A & B \\ x & \Sigma x X & \Sigma x Y \\ y & \Sigma y X & \Sigma y Y \end{vmatrix} = 0$$

Kiest men deze lijn zelve als richting, langs welke men de gegeven krachten ontbindt, zoo vindt men op deze lijn een punt als centrum dier ontbondenen.

Dit punt is het centraal-punt.

Kiezen wij dus de centraal-lijn als X-as en het centraal-punt als oorsprong, dan moeten

$$\beta_1 = \beta_2 = \alpha_1 = 0$$

zijn, of wel

$$\Sigma x X = 0, \quad \Sigma y X = 0, \quad \Sigma y Y = 0.$$

Dus dan worden

$$G = \Sigma\, x\, Y \text{ en } F = 0.$$

In dit coördinaten-systeem is nu de vergelijking van de centraal-as

$$B\,x - A\,y - \Sigma\, x\, Y = 0$$

en de vergelijking van de hoofdlijn der viriaal

$$A\,x + B\,y = 0.$$

Op de centraallijn liggen, gelijk wij gezien hebben, twee merkwaardige punten, het centraalpunt en een tweede punt, dat wij verkrijgen, door de ontbondenen van alle krachten te vormen volgens een richting loodrecht op den centraal-lijn, en van die ontbondenen het middelpunt te bepalen. In het centraalpunt snijden elkaar volgens het bovenstaande de centraallijn en de centraal-as; in het tweede punt, de centraallijn en de hoofdlijn der virialen. Deze twee punten vormen alzoo met het astatisch centrum een rechthoekigen driehoek, die aan het laatstgenoemde punt zijn rechten hoek heeft.

§ 25. Indien in de vergelijking van de centraallijn de onderdeterminanten:

$$\begin{vmatrix} A & B \\ \Sigma y\,X & \Sigma y\,Y \end{vmatrix} = 0; \begin{vmatrix} A & B \\ \Sigma x\,X & \Sigma x\,Y \end{vmatrix} = 0; \begin{vmatrix} \Sigma x\,X & \Sigma x\,Y \\ \Sigma y\,X & \Sigma y\,Y \end{vmatrix} = 0$$

zijn wordt de centraallijn onbepaald, maar dan zijn $\alpha_1 = \alpha_2$ en $\beta_1 = \beta_2$ en vallen deze punten met het astatisch centrum samen. Is het stelsel tot een koppel reduceerbaar, dan zijn $A = B = 0$ en de drie lijnen komen alle op oneindigen afstand.

Is het stelsel in astatisch evenwicht, dan worden al deze lijnen onbepaald.

β. *Krachtenstelsels in de ruimte.*

§ 26. Wij voeren de volgende notatieën in:

$$\Sigma\, X = A \qquad \Sigma\, Y = B \qquad \Sigma\, Z = C$$

$$\Sigma x X = a_{11} \quad \Sigma x Y = a_{12} \quad \Sigma x Z = a_{13}$$
$$\Sigma y X = a_{21} \quad \Sigma y Y = a_{22} \quad \Sigma y Z = a_{23}$$
$$\Sigma z X = a_{31} \quad \Sigma z Y = a_{32} \quad \Sigma z Z = a_{33}$$
$$a_{23} - a_{32} = L \quad a_{31} - a_{13} = M \quad a_{12} - a_{21} = N$$
$$-(a_{11} + a_{22} + a_{33}) = F$$
$$A^2 + B^2 + C^2 = R^2 \quad L^2 + M^2 + N^2 = G^2.$$

§ 27. Bij een stelsel evenwijdige krachten, wier richtingscosinussen α, β, γ mogen zijn, hebben wij

$$A = \alpha \Sigma P, \quad B = \beta \Sigma P, \quad C = \gamma \Sigma P, \quad R = \Sigma P,$$
$$L = \gamma \Sigma y P - \beta \Sigma z P, \; M = \alpha \Sigma z P - \gamma \Sigma x P, \; N = \beta \Sigma x P - \alpha \Sigma y P,$$
$$F = -(\alpha \Sigma x P + \beta \Sigma y P + \gamma \Sigma z P).$$

Substitueeren wij deze waarden in de gevondene voor het snijpunt der centraal-as met het hoofdvlak der viriaal (zie § 19) dan worden deze

$$Rx = \Sigma x P, \quad Ry = \Sigma y P, \quad Rz = \Sigma z P.$$

Maar dat zijn juist de coördinaten van het astatisch centrum der krachten.

§ 28. In het algemeen heeft een krachtenstelsel geen astatisch centrum.

Projecteert men alle krachten op onderling evenwijdige lijnen, wier richtingen door α, β, γ bepaald worden, dan kan men van die projecties, die een stelsel evenwijdige krachten vormen, het centrum bepalen. Zijn de coördinaten daarvan weder x, y, z; dan is de projectie van een kracht P op de gegeven richting

$$\alpha X + \beta Y + \gamma Z$$

en men vindt

$$R = \alpha A + \beta B + \gamma C,$$
$$Rx = \alpha a_{11} + \beta a_{12} + \gamma a_{13},$$
$$Ry = \alpha a_{21} + \beta a_{22} + \gamma a_{23},$$
$$Rz = \alpha a_{31} + \beta a_{32} + \gamma a_{33}.$$

Elimineert men hieruit α, β, γ, dan verkrijgt men als meetkunstige plaats der centra het vlak

$$\begin{vmatrix} 1 & A & B & C \\ x & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ y & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ z & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Dat vlak is door MÖBIUS centraal-vlak genoemd.

Voor het geval, dat men tot projectie-richting de richting der resultante van het stelsel kiest, worden

$$\alpha = \frac{A}{R}, \quad \beta = \frac{B}{R}, \quad \gamma = \frac{C}{R},$$

en men vindt dan een punt in het centraalvlak:

$$x_0 = \frac{A a_{11} + B a_{12} + C a_{13}}{R^2}; y_0 = \frac{A a_{21} + B a_{22} + C_0 a_{23}}{R^2};$$

$$z_0 = \frac{A a_{31} + B a_{32} + C a_{33}}{R^2}.$$

Dit punt is het centraalpunt van het stelsel.

Ontbindt men de krachten naar drie loodrecht op elkander staande richtingen, waarvoor men de coördinatenassen neemt, en zoekt de centra dier stelsels, dan vindt men eveneens het centraalvlak. Die centra zijn

$$x_1 = \frac{a_{11}}{A}, \quad y_1 = \frac{a_{21}}{A}, \quad z_1 = \frac{a_{31}}{A},$$

$$x_2 = \frac{a_{12}}{B}, \quad y_2 = \frac{a_{22}}{B}, \quad z_2 = \frac{a_{32}}{B},$$

$$x_3 = \frac{a_{13}}{C}, \quad y_3 = \frac{a_{23}}{C}, \quad z_3 = \frac{a_{33}}{C}.$$

Hierdoor een vlak brengend komt men op het centraalvlak terug.

Kiest men dit als XY-vlak, dan zijn

$$a_{31} = 0, \quad a_{32} = 0, \quad a_{33} = 0.$$

Dan bepalen de X- en Y-composanten in het vlak de centraallijn, en, zoo men die dan als X-as kiest, moeten

$$a_{21} = 0, \quad a_{22} = 0.$$

Neemt men nu het centrum der aan de centraallijn

evenwijdige composanten, zoo vindt men het centraalpunt der centraallijn.

Kiest men dit als oorsprong, dan is

$$a_{11} = 0$$

en

$$L = a_{23}, \quad M = -a_{13}, \quad N = a_{12}, \quad F = 0.$$

Het hoofdvlak der viriaal gaat dus door den oorsprong. De snijlijn van dit vlak met het centraalvlak heeft dan tot vergelijkingen

$$Ax + By = 0, \quad z = 0.$$

Als de minores ten opzichte van de eerste kolom van den determinant nul zijn, is het centraalvlak onbepaald en men heeft een stelsel vlakken, die echter allen de centraallijn bevatten. In dat geval zijn de vergelijkingen dier lijn

$$\begin{vmatrix} 1 & A & B \\ x & a_{11} & a_{12} \\ y & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} 1 & A & B \\ x & a_{11} & a_{12} \\ z & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = 0.$$

Eindelijk kan het gebeuren, dat ook deze lijn onbepaald wordt, dan hebben wij niets dan een centraalpunt. Tot dit einde moeten

$$a_{11} : a_{12} : a_{13} = a_{21} : a_{22} : a_{23} = a_{31} : a_{32} : a_{33} = A : B : C.$$

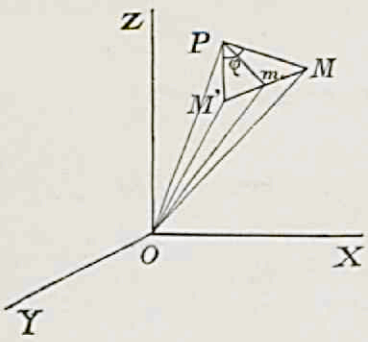
§ 29. Wij zullen nu de onveranderlijk aan elkander verbonden aangrijpingspunten der krachten van een stelsel laten draaien om een as door den oorsprong en zien, welke veranderingen dit in het stelsel geeft.

Zij dan door draaiing om de as OP het punt M in M' gekomen en zij

$$\angle MPM' = \varphi,$$

coördinaten M :	x	y	z
„ M':	$x + \Delta x$	$y + \Delta y$	$z + \Delta z$
„ m :	ξ	η	ζ

dan zijn



$$\xi = x + {}^1/_2\, \Delta x,$$
$$\eta = y + {}^1/_2\, \Delta y,$$
$$\zeta = z + {}^1/_2\, \Delta z.$$

De richtingscosinussen van OP zijn λ, μ, ν.

De lijn $M'm$ staat loodrecht op OP en Om.

Dus

$$\lambda\, \Delta x + \mu\, \Delta y + \nu\, \Delta z = 0$$
$$\xi\, \Delta x + \eta\, \Delta y + \zeta\, \Delta z = 0$$
$$(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 = 4\, \overline{mM.}^2$$

Hieruit

$$\frac{\Delta x}{\mu\zeta - \nu\eta} = \frac{\Delta y}{\nu\xi - \lambda\zeta} = \frac{\Delta z}{\lambda\eta - \mu\xi}$$

$$= \frac{2\, mM}{\sqrt{(\mu\zeta - \nu\eta)^2 + (\nu\xi - \lambda\zeta)^2 + (\lambda\eta - \mu\xi)^2}}$$

$$= \frac{2\, mM}{\sqrt{(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2)(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) - (\lambda\xi + \mu\eta + \nu\zeta)^2}}$$

$$= \frac{2\, Pm\ tg\ \frac{\varphi}{2}}{Om\ sin\ (POm)} = 2\, tg\, \frac{\varphi}{2}.$$

Hieruit

$$\Delta x = 2\, tg\, \frac{\varphi}{2} \left\{ \mu\,(z + {}^1/_2\, \Delta z) - \nu\,(y + {}^1/_2\, \Delta y) \right\},$$

$$\Delta y = 2\, tg\, \frac{\varphi}{2} \left\{ \nu\,(x + {}^1/_2\, \Delta x) - \lambda\,(z + {}^1/_2\, \Delta z) \right\},$$

$$\Delta z = 2\, tg\, \frac{\varphi}{2} \left\{ \lambda\,(y + {}^1/_2\, \Delta y) - \mu\,(x + {}^1/_2\, \Delta x) \right\},$$

waaruit weder

$$ctg\,\frac{\varphi}{2}\,\Delta x + \nu\,\Delta y - \mu\,\Delta z = 2\,(\mu z - \nu y),$$

$$-\nu\,\Delta x + ctg\,\frac{\varphi}{2}\,\Delta y + \lambda\,\Delta z = 2\,(\nu x - \lambda z),$$

$$\mu\,\Delta x - \lambda\,\Delta y + ctg\,\frac{\varphi}{2}\,\Delta z = 2\,(\lambda y - \mu x).$$

Oplossend

$$\Delta x = 2\,sin^2\frac{\varphi}{2}\left\{-(\mu^2+\nu^2)\,x + \left(\lambda\mu - \nu\,ctg\,\frac{\varphi}{2}\right)y + \left(\lambda\nu + \mu\,ctg\,\frac{\varphi}{2}\right)z\right\},$$

$$\Delta y = 2\,sin^2\frac{\varphi}{2}\left\{\left(\lambda\mu + \nu\,ctg\,\frac{\varphi}{2}\right)x - (\lambda^2+\nu^2)\,y + \left(\mu\nu - \lambda\,ctg\,\frac{\varphi}{2}\right)z\right\},$$

$$\Delta z = 2\,sin^2\frac{\varphi}{2}\left\{\left(\lambda\nu - \mu\,ctg\,\frac{\varphi}{2}\right)x + \left(\mu\nu + \lambda\,ctg\,\frac{\varphi}{2}\right)y - (\lambda^2+\mu^2)\,z\right\}.$$

Door deze draaiingen zijn de veranderingen van L, M, N en F

$$\begin{aligned}
\Delta L &= \Sigma\, Z\,\Delta y - \Sigma\, Y\,\Delta z,\\
\Delta M &= \Sigma\, X\,\Delta z - \Sigma\, Z\,\Delta x,\\
\Delta N &= \Sigma\, Y\,\Delta x - \Sigma\, X\,\Delta y,\\
\Delta F &= -\Sigma\, X\,\Delta x - \Sigma\, Y\,\Delta y - \Sigma\, Z\,\Delta z.
\end{aligned}$$

Na substitutie

$$\Delta L = 2\,sin^2\frac{\varphi}{2}\left\{-L\,(\lambda^2+\mu^2) + a_{23}\,(\mu^2-\nu^2) + a_{13}\left(\lambda\mu + \nu\,ctg\,\frac{\varphi}{2}\right)\right.$$
$$\left. - a_{12}\left(\lambda\nu - \mu\,ctg\,\frac{\varphi}{2}\right) + (a_{33}-a_{22})\,\mu\nu + (F+a_{11})\,\lambda\,ctg\,\frac{\varphi}{2}\right\},$$

$$\Delta M = 2\,sin^2\frac{\varphi}{2}\left\{-M\,(\mu^2+\nu^2) + a_{31}\,(\nu^2-\lambda^2) + a_{21}\left(\mu\nu + \lambda\,ctg\,\frac{\varphi}{2}\right)\right.$$
$$\left. - a_{23}\left(\mu\lambda - \nu\,ctg\,\frac{\varphi}{2}\right) + (a_{11}-a_{33})\,\lambda\nu + (F+a_{22})\,\mu\,ctg\,\frac{\varphi}{2}\right\},$$

$$\Delta N = 2\,sin^2\frac{\varphi}{2}\left\{-N\,(\nu^2+\lambda^2) + a_{12}\,(\lambda^2-\mu^2) + a_{32}\left(\nu\lambda + \mu\,ctg\,\frac{\varphi}{2}\right)\right.$$
$$\left. - a_{31}\left(\nu\mu - \lambda\,ctg\,\frac{\varphi}{2}\right) + (a_{22}-a_{11})\,\lambda\mu + (F+a_{33})\,\nu\,ctg\,\frac{\varphi}{2}\right\},$$

$$\Delta F = -2\sin^2\frac{\varphi}{2}\Big\{ -a_{11}(\mu^2+\nu^2) + a_{21}\left(\lambda\mu - \nu\,ctg\frac{\varphi}{2}\right) + a_{31}\left(\lambda\nu + \mu\,ctg\frac{\varphi}{2}\right)$$
$$+ a_{12}\left(\lambda\mu + \nu\,ctg\frac{\varphi}{2}\right) - a_{22}(\lambda^2+\nu^2) + a_{32}\left(\mu\nu - \lambda\,ctg\frac{\varphi}{2}\right)$$
$$+ a_{13}\left(\lambda\nu - \mu\,ctg\frac{\varphi}{2}\right) + a_{23}\left(\mu\nu + \gamma\,ctg\frac{\varphi}{2}\right) - a_{33}(\lambda^2+\mu^2)\Big\}.$$

Voeren we nu in

$$\begin{aligned} a_{11}\lambda + a_{12}\mu + a_{13}\nu &= \alpha,\\ a_{21}\lambda + a_{22}\mu + a_{23}\nu &= \beta,\\ a_{31}\lambda + a_{32}\mu + a_{33}\nu &= \gamma,\\ L\lambda + M\mu + N\nu &= \delta. \end{aligned}$$

Dan hebben wij

$$\left.\begin{aligned} \Delta L &= 2\sin^2\frac{\varphi}{2}\left\{\alpha\,ctg\frac{\varphi}{2} + \mu\gamma - \nu\beta + \lambda\left(F\,ctg\frac{\varphi}{2} - \delta\right)\right\},\\ \Delta M &= 2\sin^2\frac{\varphi}{2}\left\{\beta\,ctg\frac{\varphi}{2} + \nu\alpha - \lambda\gamma + \mu\left(F\,ctg\frac{\varphi}{2} - \delta\right)\right\},\\ \Delta N &= 2\sin^2\frac{\varphi}{2}\left\{\gamma\,ctg\frac{\varphi}{2} + \lambda\beta - \mu\alpha + \nu\left(F\,ctg\frac{\varphi}{2} - \delta\right)\right\},\\ \Delta F &= -2\sin^2\frac{\varphi}{2}\left\{\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma + F + \delta\,ctg\frac{\varphi}{2}\right\}. \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Hiermede zijn bij een gegeven draaiing om een gegeven as de veranderingen bepaald.

§ 30. Men kan ook omgekeerd als ΔL, ΔM, ΔN gegeven zijn, krachten λ, μ, ν, φ te bepalen. Daartoe elimineert men uit de drie eersten β en γ, dan komt er

$$\alpha\,ctg\frac{\varphi}{2} + \lambda\left(F\,ctg\frac{\varphi}{2} - \delta\right) =$$
$$\tfrac{1}{2}\left\{\left(\lambda^2 + ctg^2\frac{\varphi}{2}\right)\Delta L + \left(\lambda\mu + \nu\,ctg\frac{\varphi}{2}\right)\Delta M + \left(\lambda\nu - \mu\,ctg\frac{\varphi}{2}\right)\Delta N\right\}.$$

Stelt men nu

$$\delta\,tg\frac{\varphi}{2} + \tfrac{1}{2}\,tg\frac{\varphi}{2}(\lambda\Delta L + \mu\Delta M + \nu\Delta N) - F = s,$$

dan worden de drie eerste vergelijkingen

$$\alpha - \lambda s - {}^1/_2 \left(\Delta L \, ctg \frac{\varphi}{2} + \nu \Delta M - \mu \Delta N \right) = 0,$$

$$\beta - \mu s - {}^1/_2 \left(\Delta M \, ctg \frac{\varphi}{2} + \lambda \Delta N - \nu \Delta L \right) = 0,$$

$$\gamma - \nu s - {}^1/_2 \left(\Delta N \, ctg \frac{\varphi}{2} + \mu \Delta L - \lambda \Delta M \right) = 0.$$

Telt men deze op na ze respectievelijk met λ, μ, ν vermenigvuldigd te hebben, zoo geeft dit

$$\alpha \lambda + \beta \mu + \gamma \nu - s - {}^1/_2 (\lambda \Delta L + \mu \Delta M + \nu \Delta N) \, ctg \frac{\varphi}{2} = 0.$$

Hieruit komt

$$\Delta F = -2 (F + s) \ldots\ldots\ldots (13)$$

Indien men de waarden voor α, β, γ, δ terug substitueert, vindt men ter bepaling der onbekenden s, φ, λ, μ, ν, waarbij de betrekking $(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) = 1$ bestaat, de vier vergelijkingen

$$(a_{11} - s)\lambda + (a_{12} + {}^1/_2 \Delta N)\mu + (a_{13} - {}^1/_2 \Delta M)\nu - {}^1/_2 \Delta L \, ctg \frac{\varphi}{2} = 0,$$

$$(a_{21} - {}^1/_2 \Delta N)\lambda + (a_{22} - s)\mu + (a_{23} + {}^1/_2 \Delta L)\nu - {}^1/_2 \Delta M \, ctg \frac{\varphi}{2} = 0,$$

$$(a_{31} + {}^1/_2 \Delta M)\lambda + (a_{32} - {}^1/_2 \Delta L)\mu + (a_{33} - s)\nu - {}^1/_2 \Delta N \, ctg \frac{\varphi}{2} = 0,$$

$$(L + {}^1/_2 \Delta L)\lambda + (M + {}^1/_2 \Delta M)\mu + (N + {}^1/_2 \Delta N)\nu - (F + s) \, ctg \frac{\varphi}{2} = 0.$$

Hieruit moeten eerst λ, μ, ν en φ geëlimineerd worden, dan s bepaald en daaruit door lineaire vergelijkingen de overige onbekenden.

De vergelijking voor s is

$$\begin{vmatrix} a_{11} - s & a_{12} + {}^1/_2 \Delta N & a_{13} - {}^1/_2 \Delta M & {}^1/_2 \Delta L \\ a_{21} - {}^1/_2 \Delta N & a_{22} - s & a_{23} + {}^1/_2 \Delta L & {}^1/_2 \Delta M \\ a_{31} + {}^1/_2 \Delta M & a_{32} - {}^1/_2 \Delta L & a_{33} - s & {}^1/_2 \Delta N \\ L + {}^1/_2 \Delta L & M + {}^1/_2 \Delta M & N + {}^1/_2 \Delta N & F + s \end{vmatrix} = 0.$$

Hieruit vindt men vier waarden voor s.

De verandering der viriaal is dan gemakkelijk uit $\Delta F = -2\,(F+s)$ te berekenen.

§ 31. Wanneer wij nu het bijzondere geval nagaan, dat het stelsel in evenwicht is, en wij dan een draaiing zoeken, waarbij dit evenwicht behouden is gebleven, moet in onze vergelijkingen

$L = 0$; $M = 0$, $N = 0$; $\Delta L = 0$; $\Delta M = 0$; $\Delta N = 0$;

en dus

$$a_{21} = a_{12}, \quad a_{32} = a_{23}, \quad a_{13} = a_{31},$$

gesteld worden, stellen wij verder

$$\begin{vmatrix} a_{11} - s & a_{12} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} - s & a_{23} \\ a_{31} & a_{23} & a_{33} - s \end{vmatrix} = D$$

dan worden de vergelijkingen

$$\begin{aligned} (a_{11} - s)\,\lambda + a_{12}\,\mu + a_{31}\,\nu &= 0 \\ a_{12}\,\lambda + (a_{22} - s)\,\mu + a_{23}\,\nu &= 0 \\ a_{31}\,\lambda + a_{23}\,\mu + (a_{33} - s)\,\nu &= 0 \\ (F+s)\,D &= 0 \end{aligned}$$

Stellen wij als eerste geval D niet $= 0$, dan moet $-F = s$ zijn. Gesubstitueerd in de drie vergelijkingen maakt ze onmogelijk, tenzij men ze eerst met $tg\,\frac{\varphi}{2}$ vermenigvuldigt, want dan kunnen ze door $\varphi = 0$ voldaan worden.

Doch dit is de oorspronkelijke stand.

Het tweede geval is $D = 0$.

Men kan het coördinatenstelsel zoo leggen, dat

$$a_{12} = a_{23} = a_{31} = 0$$

wordt. Dan is

$$D = (a_{11} - s)\,(a_{22} - s)\,(a_{33} - s).$$

Verder hebben wij dan

$$(a_{11} - s)\,\lambda = 0, \quad (a_{22} - s)\,\mu = 0, \quad (a_{33} - s)\,\nu = 0,$$

$$(F+s)\,ctg\,\frac{\varphi}{2} = 0.$$

De wortel $s = a_{11}$ geeft $\lambda = 1$, $\mu = 0$, $\nu = 0$, $\varphi = \pi$,
de wortel $s = a_{22}$ geeft $\lambda = 0$, $\mu = 1$, $\nu = 0$, $\varphi = \pi$,
de wortel $s = a_{33}$ geeft $\lambda = 0$, $\mu = 0$, $\nu = 1$, $\varphi = \pi$.

De evenwichtsstanden worden alsdan door draaiing om een der coördinaten-assen over een hoek van 180° uit elkander afgeleid. De bij iedere stand behoorende viriaal, zoo die bij den oorspronkelijken stand

$$F_1 = -(a_{11} + a_{22} + a_{33})$$

is, wordt

$$F_2 = -(+ a_{11} - a_{22} - a_{33}),$$
$$F_3 = -(- a_{11} + a_{22} - a_{33}),$$
$$F_4 = -(- a_{11} - a_{22} + a_{33}).$$

§ 32. Heeft de vergelijking

$$(F + s)\, D = 0$$

twee gelijke wortels $s = -F$ dan kan men $s = -F$ in D substitueeren. Doen wij dit tevens in de andere vergelijkingen, zoo verkrijgen wij

$$\left.\begin{aligned} (a_{11} + F)\,\lambda + a_{12}\,\mu + a_{31}\,\nu &= 0, \\ a_{12}\,\lambda + (a_{22} + F)\,\mu + a_{23}\,\nu &= 0, \\ a_{31}\,\lambda + a_{23}\,\mu + (a_{33} + F)\,\nu &= 0, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ (14)$$

en

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} + F & a_{12} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} + F & a_{23} \\ a_{31} & a_{23} & a_{33} + F \end{vmatrix} = 0.$$

De onderlinge onafhankelijkheid der drie vergelijkingen voor λ, μ, ν is zoodoende voor alle waarden van φ gewaarborgd; deze grootheid is bovendien uit de rekening gevallen. Bij iedere willekeurige draaiing om de zoo bepaalde as blijft dus het evenwicht bewaard. Het stelsel is ten opzichte van dien as astatisch.

Zulk een as noemt Möbius een evenwichts-as.

Een stelsel bezit dus een evenwichts-as of niet, naarmate A al of niet $= 0$ is.

De waarde $s = -F$ geeft verder in (13)

$$\Delta F = 0$$

Indien dus een stelsel draait om een evenwichts-as, blijft de viriaal constant. En omgekeerd, indien bij draaiing volgens willekeurigen hoek om zekere as de viriaal van een in evenwicht verkeerend stelsel constant blijft, is die as een evenwichts-as. Wil men echter weten of een gegeven as evenwichts-as kan zijn, dan moeten λ, μ, ν aan elke der drie vergelijkingen (14) voldoen.

Dan is van zelf $A = 0$. Vraagt men of de Z-as bijv. evenwichts-as kan zijn, dan hebben wij

$$\lambda = 0, \qquad \mu = 0, \qquad \nu = 1,$$

en moet derhalve

$$a_{31} = 0, \qquad a_{23} = 0, \qquad a_{33} + F = 0,$$

of wel

$$\Sigma z X = 0, \qquad \Sigma y Z = 0, \qquad \Sigma (x X + y Y) = 0.$$

§ 33. De grootheden λ, μ, ν zijn evenredig aan de coördinaten van een willekeurig punt der evenwichts-as. Vervangen wij ze door x, y, z in (14), dan stellen deze vergelijkingen drie platte vlakken voor, die door den oorsprong gaan; en de conditie $A = 0$ zegt, dat die drie vlakken door een zelfde lijn gaan. Deze lijn is dan de evenwichts-as. Indien echter

$$(a_{11} + F) : a_{12} : a_{31} = a_{12} : (a_{22} + F) : a_{23} = a_{31} : a_{23} : (a_{33} + F)$$

wordt die evenwichts-as onbepaald. Men komt tot deze verhoudingen, zoodra men vraagt, wanneer een stelsel twee assen tegelijk bezit.

Er volgt uit

$$(a_{11} + F)\, a_{23} = a_{12}\, a_{31};$$
$$(a_{22} + F)\, a_{31} = a_{12}\, a_{23};$$
$$(a_{33} + F)\, a_{12} = a_{23}\, a_{31}.$$

Substitueert men dit in (14), dan herleiden alle drie

zich tot de vergelijking

$$\frac{x}{a_{23}} + \frac{y}{a_{31}} + \frac{z}{a_{12}} = 0.$$

Iedere lijn in dit vlak is dan evenwichts-as.

Zal een stelsel ten opzichte van drie assen in astatisch evenwicht zijn, dan moet voldaan worden aan de volgende twaalf voorwaarden:

$$\begin{array}{lll} A = 0, & B = 0, & C = 0, \\ a_{11} = 0, & a_{12} = 0, & a_{13} = 0. \\ a_{21} = 0, & a_{22} = 0, & a_{23} = 0, \\ a_{31} = 0, & a_{32} = 0, & a_{33} = 0. \end{array}$$

In dat geval is het stelsel in evenwicht ten opzichte van iedere willekeurige as door den oorsprong. Het is m. a. w. volkomen astatisch.

§ 34. Is A niet $= 0$, dan heeft het stelsel geen evenwichts-as door den oorsprong.

Möbius heeft echter aangetoond, dat een in evenwicht zijnd stelsel door toevoeging van twee gelijke en tegengestelde krachten steeds astatisch ten opzichte van een willekeurig gegeven as kan gemaakt worden. Laten de composanten dier krachten en hun resp. aangrijpingspunten gegeven zijn door

$$\begin{array}{ll} X_1, Y_1, Z_1 & \\ x_1, y_1, z_1 & \end{array} \quad \text{en} \quad \begin{array}{l} X_2, Y_2, Z_2 \\ x_2, y_2, z_2 \end{array}$$

zoo hebben wij dus eerst

$$X_1 = -X_2, \qquad Y_1 = -Y_2, \qquad Z_1 = -Z_2,$$

en worden de nieuwe waarden van a_{11}, a_{22}, enz die wij met accenten zullen aangeven

$$\begin{array}{lll} a'_{11} = a_{11} + (x_2 - x_1)X_2 & a'_{12} = a_{12} + (x_2 - x_1)Y_2 & a'_{13} = a_{13} + (x_2 - x_1)Z_2, \\ a'_{21} = a_{21} + (y_2 - y_1)X_2 & a'_{22} = a_{22} + (y_2 - y_1)Y_2 & a'_{23} = a_{23} + (y_2 - y_1)Z_2, \\ a'_{31} = a_{31} + (z_2 - z_1)X_2 & a'_{32} = a_{32} + (y_2 - y_1)Y_2 & a'_{33} = a_{33} + (z_2 - z_1)Z_2. \end{array}$$

Het nieuwe stelsel moet in evenwicht zijn, dus

$$a'_{12} = a'_{21}, \qquad a'_{13} = a'_{31}, \qquad a'_{23} = a'_{32}$$

Maar daar het oorspronkelijk stelsel in evenwicht is, zijn

$$a_{12} = a_{21}, \qquad a_{13} = a_{31}, \qquad a_{23} = a_{32}.$$

Uit deze volgt

$$\frac{x_2 - x_1}{X_2} = \frac{y_2 - y_1}{Y_2} = \frac{z_2 - z_1}{Z_2} = \frac{r}{P_2}.$$

De krachten moeten derhalve gericht zijn langs de lijn, die hun aangrijpingspunten verbindt.

Voor de viriaal van het nieuwe stelsel vinden wij

$$F' = F - (x_2 - x_1) X_2 - (y_2 - y_1) Y_2 - (z_2 - z_1) Z_2$$

of wel

$$F' = F - P_2 r = F + F_2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

Noemen wij de cosinussen der hoeken, die r en P_2 met de assen maken α, β, γ, dan zijn

$$X_2 = P_2 \alpha, \qquad Y_2 = P_2 \beta, \qquad Z_2 = P_2 \gamma,$$
$$x_2 - x_1 = r\alpha, \qquad y_2 - y_1 = r\beta, \qquad z_2 - z_1 = r\gamma.$$

Alles in aanmerking genomen, worden onze vergelijkingen (14)

$$[a_{11} + F - F_2(\alpha^2 - 1)]\lambda + [a_{12} - F_2 \alpha\beta]\mu + [a_{31} - F_2 \alpha\gamma]\nu = 0,$$
$$[a_{12} - F_2 \alpha\beta]\lambda + [a_{22} + F - F_2(\beta_2 - 1)]\mu + [a_{23} - F_2 \beta\gamma]\nu = 0,$$
$$[a_{31} - F_2 \alpha\gamma]\lambda + [a_{23} - F_2 \beta\gamma]\mu + [a_{33} + F - F_2(\gamma_2 - 1)]\nu = 0.$$

Of wel

$$(a_{11} + F)\lambda + a_{12}\mu + a_{31}\nu = F_2(\overline{\alpha^2 - 1}\,.\,\lambda + \alpha\beta\mu + \alpha\gamma\nu),$$
$$a_{12}\lambda + (a_{22} + F)\mu + a_{23}\nu = F_2(\alpha\beta\lambda + \overline{\beta^2 - 1}\,.\,\mu + \beta\gamma\nu),$$
$$a_{31}\lambda + a_{23}\mu + (a_{33} + F)\nu = F_2(\alpha\gamma\lambda + \alpha\beta\mu + \overline{\gamma^2 - 1}\,.\,\nu).$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1, \qquad \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1.$$

De aangrijpingspunten zijn uit de berekening weggevallen, terwijl voor de grootte der krachten en den afstand hunner aangrijpingspunten alleen F_2 in de vergelijkingen voorkomt. Als men dus een koppelarm gevonden heeft, voldoen alle daaraan evenwijdige lijnen, mits de viriaal slechts een bepaalde waarde hebbe.

Stellen wij verder

$$\alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu = k$$
$$\begin{aligned}(a_{11} + F)\lambda + a_{12}\mu + a_{31}\nu &= a\Delta,\\ a_{12}\lambda + (a_{22} + F)\mu + a_{23}\nu &= b\Delta,\\ a_{31}\lambda + a_{23}\mu + (a_{33} + F)\nu &= c\Delta,\end{aligned} \quad \ldots\ldots (16)$$
$$a^2 + b^2 + c^2 = 1.$$

Dan zijn

$$\begin{aligned}a\Delta &= F_2(\alpha\varkappa - \lambda),\\ b\Delta &= F_2(\beta\varkappa - \mu),\\ c\Delta &= F_2(\gamma\varkappa - \nu).\end{aligned}$$

Vermenigvuldigen resp. met λ, μ, ν en optellen geeft

$$(a\lambda + b\mu + c\nu)\Delta = F_2(\varkappa^2 - 1).$$

Id. met α, β, γ

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 0,$$

tenzij $\Delta = 0$; in dat geval echter was de lijn λ, μ, ν reeds vooruit evenwichts-as, wat niet verondersteld is.

Met a, b, c en optellen

$$\Delta = -F_2(a\lambda + b\mu + c\nu)$$

of wel

$$F_2 = -\frac{\Delta}{a\lambda + b\mu + c\nu} \quad \ldots\ldots\ldots (17)$$

verder nog

$$1 - \varkappa^2 = (a\lambda + b\mu + c\nu)^2$$

en daaruit α, β, γ.

Vragen wij bijv. hoe groot de viriaal moet zijn, en hoe de krachten gericht moeten wezen, opdat de Z-as evenwichts-as worde. Dan moet

$$\lambda = 0, \qquad \mu = 0, \qquad \nu = 1.$$

Dit geeft

$$a_{31} = a\Delta, \qquad a_{23} = b\Delta, \qquad (a_{33} + F) = c\Delta,$$
$$\Delta^2 = a_{31}^2 + a_{23}^2 + (a_{33} + F)^2,$$
$$F_2 = -\frac{\Delta}{c} = -\frac{\Delta^2}{(a_{33} + F)} = -\frac{a_{31}^2 + a_{23}^2 + (a_{33} + F)^2}{a_{33} + F},$$
$$1 - \varkappa^2 = (a_{33} + F).$$

§ 35. Een stelsel dat niet in evenwicht is kan steeds door toevoeging van twee krachten in evenwicht gebracht worden, zoodanig dat dat evenwicht ten opzichte van een gegeven as astatisch is.

Laten P_1 en P_2 de beide krachten zijn aangrijpende in de punten x_1, y_1, z_1 en x_2, y_2, z_2 en stellen wij

$$a'_{11} = a_{11} + x_1 X_1 + x_2 X_2,\quad a'_{21} = a_{21} + y_1 X_1 + y_2 X_2,\quad a'_{31} = a_{31} + z_1 X_1 + z_2 X_2,$$
$$a'_{12} = a_{12} + x_1 Y_1 + x_2 Y_2,\quad a'_{22} = a_{22} + y_1 Y_1 + y_2 Y_2,\quad a'_{32} = a_{32} + z_1 Y_1 + z_2 Y_2,$$
$$a'_{13} = a_{13} + x_1 Z_1 + x_2 Z_2,\quad a'_{23} = a_{23} + y_1 Z_1 + y_2 Z_2,\quad a'_{33} = a_{33} + z_1 Z_1 + z_2 Z_2,$$
$$F' = F + F_1, \qquad F_1 = -x_1 X_1 - y_1 Y_1 - z_1 Z_1 - x_2 X_2 - y_2 Y_2 - z_2 Z_2,$$

dan moet voldaan worden aan de vergelijkingen

$$A + X_1 + X_2 = 0, \qquad a'_{12} = a'_{21},$$
$$B + Y_1 + Y_2 = 0, \qquad a'_{23} = a'_{32},$$
$$C + Z_1 + Z_2 = 0, \qquad a'_{31} = a'_{13},$$
$$(a'_{11} + F')\lambda + a'_{12}\mu + a'_{31}\nu = 0,$$
$$a'_{12}\lambda + (a'_{22} + F')\mu + a'_{23}\nu = 0,$$
$$a'_{31}\lambda + a'_{23}\mu + (a'_{33} + F')\nu = 0.$$

Het blijkt, dat wij slechts negen vergelijkingen ter bepaling van twaalf grootheden hebben. Het vraagstuk heeft dus een oneindig aantal oplossingen. Voeren wij nog in

$$x_2 - x_1 = r\alpha, \qquad y_2 - y_1 = r\beta, \qquad z_2 - z_1 = r\gamma,$$
$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1,$$

dan kunnen x_2, y_2, z_2 geëlimineerd worden.

Indien wij nu de lijn r evenwijdig aan de gestelde evenwichts-as willen maken dan noemt MÖBIUS zulk een as hoofdas van het stelsel. Zoo wij deze beperking invoeren, geeft dit

$$\alpha = \lambda, \qquad \beta = \mu, \qquad \gamma = \nu.$$

Deze waarden substitueerend en $x_2, y_2, z_2, X_1, Y_1, Z_1, \alpha, \beta, \gamma$ elimineerend, verkrijgen wij

$$(a_{11} + F + y_1 B + z_1 C)\lambda + (a_{12} - x_1 B)\mu + (a_{23} - x_1 C)\nu = 0,$$
$$(a_{21} - y_1 A)\lambda + (a_{22} + F + z_1 C + x_1 A)\mu + (a_{23} - y_1 C)\nu = 0,$$
$$(a_{21} - z_1 A)\lambda + (a_{32} - z_1 B)\mu + (a_{33} + F + x_1 A + y_1 B)\nu = 0,$$

terwijl uit de vergelijkingen $a'_{12} = a_{21}'$ enz. volgt:

$$(a_{23} - a_{32} - y_1 C + z_1 B)\lambda + (a_{31} - a_{13} - z_1 A + x_1 C)\mu + (a_{12} - a_{21} - x_1 B + y_1 A)\nu = 0.$$

Voert men verder in

$$z_1 \mu - y_1 \nu = \xi, \quad x_1 \nu - z_1 \lambda = \eta, \quad y_1 \lambda - x_1 \mu = \zeta, \quad . \quad . \quad (18)$$

zoo is

$$\lambda \xi + \mu \eta + \nu \zeta = 0$$

en wij verkrijgen

$$\left.\begin{aligned} B\zeta - C\eta + (a_{11} + F)\lambda + a_{12}\mu + a_{13}\nu &= 0, \\ C\xi - A\zeta + a_{21}\lambda + (a_{22} + F)\mu + a_{12}\nu &= 0, \\ A\eta - B\xi + a_{31}\lambda + a_{32}\mu + (a_{33} + F)\nu &= 0, \\ A\xi + B\eta + C\zeta = L\lambda + M\mu + N\nu. & \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

Uit deze door eenvoudige omwerking

$$a_{21}\lambda\nu + (a_{22} + F)\mu\nu + a_{23}\nu^2 - a_{31}\lambda\mu - a_{32}\mu^2 - (a_{33} + F)\mu\nu + (A\lambda + B\mu + C\nu)\xi = 0,$$

$$a_{31}\lambda^2 + a_{32}\lambda\mu + (a_{33} + F)\lambda\nu - (a_{11} + F)\lambda\nu - a_{12}\mu\nu - a_{13}\nu^2 + (A\lambda + B\mu + C\nu)\eta = 0,$$

$$(a_{11} + F)\lambda\mu + a_{22}\mu^2 + a_{13}\mu\nu - a_{21}\lambda^2 - (a_{22} + F)\lambda\mu - a_{23}\lambda\nu + (A\lambda + B\mu + C\nu)\zeta = 0.$$

En verder door eliminatie van ξ, η, ζ uit deze en de vier vergelijkingen (19)

$$(B a_{31} - C a_{21} + A L)\lambda^2 + (C a_{12} - A a_{32} + B M)\mu^2 + (A a_{23} - B a_{13} + C N)\nu^2 + (C a_{31} - B a_{21} + A(a_{22} - a_{33}))\mu\nu + (A a_{12} - C a_{32} + B(a_{33} - a_{11}))\lambda\nu + (B a_{23} - A a_{13} + C(a_{11} - a_{22}))\lambda\mu = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

en uit de drie eerste van (19)

$$(A(a_{11} + F) + B a_{21} + C a_{31})\lambda + (A a_{21} + B(a_{22} + F) + C a_{32})\mu + (A a_{13} + B a_{23} + C(a_{33} + F))\nu = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

Vervangen wij λ, μ, ν, door x, y, z dan stelt de vergelijking (20) een kegelvlak voor en (21) een plat vlak.

De top van den kegel ligt in den oorsprong, het platte vlak gaat door den oorsprong. Er bestaan dus

2 hoofdassen, 1 hoofdas of geen hoofdassen naar mate deze vlakken elkander snijden, raken of buiten den oorsprong geen punt gemeen hebben. De grootheid r is uit de berekening gevallen en kan dus willekeurig gekozen worden.

§ 36. Ter nadere beschouwing der vergelijkingen kiezen wij het centraal-vlak als XY-vlak, de centraal-lijn tot X-as en het centraalpunt der centraal-lijn tot oorsprong. Dan zijn (§ 28)

$$a_{11} = 0, \quad a_{21} = 0, \quad a_{22} = 0, \quad a_{31} = 0, \quad a_{32} = 0, \quad a_{33} = 0,$$
$$L = a_{23}, \quad M = -a_{13}, \quad N = a_{12}, \quad F = 0,$$

en de vergelijkingen (20) en (21) worden

$$A a_{23} \lambda^2 + (C a_{12} - B a_{13}) \mu^2 + (A a_{23} - B a_{13} + C a_{12}) \nu^2 + A a_{12} \lambda \nu + (B a_{23} - A a_{13}) \lambda \mu = 0$$
$$A a_{12} \mu + (A a_{13} + B a_{23}) \nu = 0.$$

Het platte vlak blijkt door de X-as te gaan. De beide hoofdassen en de centraallijn zijn dus evenwijdig aan eenzelfde vlak.

Stellen we $z_1 = 0$ dan is uit (18)

$$\xi = -y_1 \nu, \qquad \eta = x_1 \nu,$$

maar bij dit coördinaten-stelsel is ook

$$A \eta - B \xi = 0,$$

dus

$$A x_1 + B y_1 = 0.$$

De doorgangen der hoofdassen door het centraal-vlak liggen in de snijlijn van dat vlak met het hoofdvlak der viriaal.

Men kan ook vragen hoe het coördinaten-stelsel gelegd moet worden, opdat de Z-as een der hoofdassen worde. Daartoe moet aan de vergelijkingen (20) en (21) voldaan worden door de waarden

$$\lambda = 0, \quad \mu = 0, \quad \nu = 1, \quad x_1 = 0, \quad y_1 = 0.$$

Dus moeten

$$a_{13} = 0, \quad a_{23} = 0, \quad a_{33} + F = 0, \quad N = 0,$$

of anders geschreven

$$\Sigma x Z = 0, \quad \Sigma y Z = 0, \quad \Sigma(x X + y Y) = 0, \quad \Sigma(x Y - y X) = 0,$$

Leggen wij deze vergelijkingen naast die van § 22, dan zien wij, dat, wanneer wij een krachtenstelsel projecteeren op een vlak, dat loodrecht staat op een der hoofdassen van het stelsel, deze hoofdas juist door het astatisch centrum van het geprojecteerde stelsel gaat.

De hoofdassen hebben dus voor een stelsel in de ruimte dezelfde beteekenis als het astatisch centrum voor een vlak krachtenstelsel.

§ 37. Is het krachtenstelsel herleidbaar tot een enkele resultante, zoo is

$$A L + B M + C N = 0.$$

Kiezen wij dan het hoofdvlak der viriaal tot XY-vlak en de centraal-as tot Z-as, dan hebben wij

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = R, \quad L = 0, \quad M = 0, \quad F = 0,$$

en dus ook

$$N = 0.$$

Dientengevolge zijn

$$a_{23} = a_{32}, \quad a_{21} = a_{12}, \quad a_{31} = a_{13}$$

en de vergelijkingen (20) en (21) worden

$$a_{12}(\mu^2 - \lambda^2) + a_{31}\mu\nu - a_{23}\lambda\nu + (a_{11} - a_{22})\lambda\mu = 0,$$

$$a_{31}\lambda + a_{23}\mu + a_{33}\nu = 0.$$

Door eleminatie van ν verkrijgen wij de vergelijking

$$(a_{12}a_{33} - a_{31}a_{23})(\mu^2 - \lambda^2) - (a^2_{31} - a^2_{23} + a^2_{11} - a^2_{22})\lambda\mu = 0$$

en daaruit ter bepaling van μ/λ (de tangens van den hoek, dien de projectieën der hoofdassen met de X-as maken)

$$\frac{\mu^2}{\lambda^2} - \frac{a^2_{31} - a^2_{23} + a^2_{11} - a^2_{22}}{a_{12}a_{33} - a_{31}a_{23}} \cdot \frac{\mu}{\lambda} - 1 = 0.$$

Deze vergelijking heeft steeds twee reëele wortels.

De projectieën der hoofdassen op het hoofdvlak der

viriaal staan loodrecht op elkander. Verder blijkt uit de vierde vergelijking van (19)

$$\zeta = 0,$$

en derhalve

$$y_1 \lambda - x_1 \mu = 0,$$

De beide hoofdassen ontmoeten dus de centraal-as. Men kan daarom hunne projectieën als coördinaten-assen nemen. In dat geval worden de vergelijkingen der hoofdassen zelve

$$a_{31} x + a_{33} z = \frac{1}{R}(a^2_{31} - a_{11} a_{33}), \qquad y = 0,$$

en

$$a_{23} y + a_{33} z = \frac{1}{R}(a_{22} a_{33} - a^2_{23}), \qquad x = 0,$$

In dit stelsel is de vergelijking van het centraal-vlak

$$(a_{12} a_{23} - a_{22} a_{31}) x + (a_{31} a_{12} - a_{11} a_{23}) y + (a_{11} a_{22} - a^2_{12}) z =$$

$$\frac{1}{R}(a_{11} a_{22} a_{33} - a_{11} a^2_{23} - a_{22} a^2_{31} - a_{33} a^2_{12}).$$

Het blijkt dat de doorgangspunten der hoofdassen aan deze vergelijking voldoen.

§ 38. Reduceert het stelsel zich tot een koppel, dan hebben we in onze vergelijkingen te stellen

$$A = 0, \; B = 0, \; C = 0$$

Dit geeft in (19)

$$\begin{aligned}
(a_{11} + F) \lambda + a_{12} \mu + a_{13} \nu &= 0, \\
a_{21} \lambda + (a_{22} + F) \mu + a_{23} \nu &= 0, \\
a_{31} \lambda + a_{32} \mu + (a_{33} + F) \nu &= 0, \\
L \lambda + M \mu + N \nu &= 0.
\end{aligned}$$

Er moet dus voldaan worden aan de beide voorwaarden

$$\begin{vmatrix} a_{11} + F & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} + F & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} + F \end{vmatrix} = 0 \text{ en } \begin{vmatrix} a_{11} + F & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} + F & a_{23} \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0.$$

Indien wij het vlak van het resulteerend koppel tot XY-vlak kiezen, zijn

$$L = 0, \qquad M = 0,$$

en dus

$$a_{23} = a_{32}, \qquad a_{13} = a_{31},$$

waaruit volgt

$$\nu = 0.$$

Zoo er assen bestaan loopen zij dus evenwijdig aan het vlak van het resulteerend koppel.

Ter bepaling dient ieder der drie vergelijkingen

$$\begin{aligned} (a_{11} + F)\,\lambda + a_{12}\,\mu &= 0, \\ a_{12}\,\lambda + (a_{22} + F)\,\mu &= 0, \\ a_{31}\,\lambda + a_{33}\,\mu &= 0. \end{aligned}$$

De voorwaarde voor het bestaan der hoofdassen is nu

$$a_{11} + F : a_{12} : a_{31} = a_{12} : a_{22} + F : a_{23}.$$

Deze vergelijkingen geven maar één oplossing en daar ξ, η, ζ uit de berekening weggevallen zijn, kunnen dus alle lijnen evenwijdig aan die richting tot hoofdas genomen worden.

§ 39. Zijn alle krachten evenwijdig aan een zelfde vlak, zoo kiezen wij dat tot XY-vlak, dan is steeds $Z = 0$ en dus

$$a_{13} = 0, \qquad a_{23} = 0, \qquad a_{33} = 0, \qquad C = 0,$$
$$L = -a_{32}, \qquad M = a_{31}, \qquad N = a_{12} - a_{21}.$$

Het centraalvlak wordt dientengevolge onbepaald en de vergelijkingen der centraal-lijn (§ 28) worden

$$\begin{vmatrix} 1 & A & B \\ x & a_{11} & a_{12} \\ y & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} 1 & A & B \\ x & a_{11} & a_{12} \\ z & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = 0$$

Kiezen wij de projectie dezer lijn op het XY-vlak tot X-as, dan zijn verder

$$a_{21} = 0, \qquad a_{22} = 0, \qquad F = -a_{11}$$

en worden de vergelijkingen (20) en (21)

$$(B a_{31} - A a_{32})(\lambda^2 + \mu^2) + (A a_{12} - B a_{11})\lambda \nu = 0,$$
$$(A a_{12} + B F)\mu = 0;$$

waaruit

$$\mu = 0 \text{ met } \lambda = 0 \text{ of } \frac{\nu}{\lambda} = \frac{B a_{31} - A a_{32}}{B a_{11} - A a_{12}}.$$

De eerste oplossing geeft de hoofdas

$$x = \frac{A a_{11} + B a_{12}}{A^2 + B^2}, \quad y = -\frac{A a_{12} - B a_{11}}{A^2 + B^2}.$$

Dit is een lijn loodrecht op het vlak der krachten. De andere as is

$$x(B a_{31} - A a_{32}) + z(A a_{12} - B a_{11}) + a_{11} a_{32} - a_{12} a_{31} = 0.$$

Dit is de centraal-lijn zelve.

De vergelijking van het hoofdvlak der viriaal wordt

$$A x + B y = a_{11}.$$

De eerste hoofdas ligt dus geheel in dit vlak.

Waren toevallig nog $a_{31} = 0$ en $a_{32} = 0$, dan wordt de tweede hoofdas (centraallijn)

$$y = 0, \qquad z = 0.$$

Dit is het geval bij een vlak krachtenstelsel.

§ 40. Voor het geval de krachten slechts een centraalpunt bezitten, valt het centraalpunt van het stelsel met het centraalpunt der centraallijn samen en zijn

$$a_{11} : a_{12} : a_{13} = a_{21} : a_{22} : a_{23} = a_{31} : a_{32} : a_{33} = A : B : C$$

of als men de coördinaten van het middelpunt (astatisch centrum) van het systeem x_0, y_0, z_0 noemt

$$a_{11} = x_0 A, \quad a_{21} = y_0 A, \quad a_{31} = z_0 A,$$
$$a_{12} = x_0 B, \quad a_{22} = y_0 B, \quad a_{32} = z_0 B,$$
$$a_{13} = x_0 C, \quad a_{23} = y_0 C, \quad a_{33} = z_0 C.$$

Dan kiezen wij dat punt als oorsprong, waardoor

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0, \quad F = 0$$

worden. In de vroegere vergelijkingen dit invoerende, worden λ, μ, ν onbepaald en $\xi = \eta = \zeta = 0$.

Alle lijnen door het middelpunt kunnen hoofdas zijn. De centraal-as en het hoofdvlak der viriaal gaan door het astatisch centrum. Men kan, door in dat punt één bepaalde kracht aan te brengen, het stelsel astatisch aequilibreeren.

B. Standvastigheid van evenwicht.

a. De evenwichtsfunctie.

§ 41. Wanneer een zich in evenwicht bevindend stelsel krachten uit den evenwichtsstand gedraaid wordt, hebben wij gezien, dat in het algemeen het stelsel aequivalent wordt aan een koppel. De krachten zullen trachten alsdan het evenwicht te herstellen en in dat geval wordt het evenwicht standvastig genoemd of zij zullen trachten het stelsel nog verder van den evenwichtsstand te verwijderen, in welk geval het evenwicht wankelbaar genoemd wordt.

Beschouwen wij eerst een koppel, zijnde een stelsel van twee gelijke en tegengestelde krachten P_1 en P_2 resp. aangrijpende in de punten A_1 en A_2. Dit koppel heeft twee evenwichtsstanden. Bij beide valt de arm van het koppel samen met de richtingslijn der krachten. In de eene stand trachten de krachten de aangrijpingspunten van elkander te verwijderen; in de tweede daarentegen trachten zij de aangrijpingspunten elkander te doen naderen. In het eerste geval is volgens boven het evenwicht standvastig; in het tweede wankelbaar.

Gaan wij nu na, wat er is van de viriaal van het koppel in die twee gevallen.

De waarde dezer grootheid is

$$F = -A_1 A_2 \,.\, P_2.$$

In het eerste geval valt de richting van P_2 samen met die van de lijn $A_1 A_2$ en is dus F negatief. In het tweede geval is de richting van P_2 tegengesteld aan die van $A_1 A_2$ en is F positief. Dus is het evenwicht standvastig of wankelbaar naarmate F negatief of positief is. Is $F = 0$ dan is volgens vroeger het evenwicht astatisch.

§ 42. In § 21 hebben wij gezien, dat, als een in evenwicht verkeerend willekeurig vlak stelsel een hoek φ uit den evenwichtsstand gedraaid wordt, het aequivalent wordt aan een koppel G', zoodat

$$G' = F \sin \varphi,$$

terwijl de viriaal

$$F' = F \cos \varphi$$

geworden is. Leggen wij nu naast dit stelsel een koppel en construeeren wij krachten en koppelarm daarvan zoodanig, dat zijn moment en zijn viriaal resp. gelijk G en F zijn, dan zullen het stelsel en het koppel beide in iederen stand aan elkander aequivalent zijn; dus ook in de evenwichtsstanden. In dat geval echter moet volgens boven bij standvastig evenwicht F' negatief en $G' = 0$ zijn, en bij wankelbaar evenwicht F' positief en $G' = 0$. Is nu voor de gegeven evenwichtsstand F negatief, dan moet dus bij standvastig evenwicht $\varphi = 0$, bij wankelbaar $\varphi = \pi$ zijn. Dus als F negatief is, is de aanvangstoestand die van standvastigheid. Is F positief, dan moet voor standvastig evenwicht $\varphi = \pi$, voor wankelbaar $\varphi = 0$ zijn, terwijl dan de aanvangstoestand die van wankelbaar evenwicht is. In verband met § 21 zien wij dus, dat het evenwicht van een willekeurig vlak stelsel standvastig, astatisch of wankelbaar is, naar gelang de viriaal negatief, nul of positief is.

§ 43. Volgens § 34 kan een stelsel in de ruimte, dat

in evenwicht is, steeds ten opzichte van een willekeurige as astatisch gemaakt worden door toevoeging van een koppel waarvan de viriaal F_2 is. Keeren wij de krachten van dat koppel om, dan wordt zijn viriaal $-F_2$. Dit koppel is dus bij draaiing steeds aequivalent aan het stelsel en dit laatste in standvastig of wankelbaar evenwicht naarmate F positief of negatief is. Volgens (15) is $F' = F + F_2$. Hierin is F' de viriaal van het stelsel vermeerderd met de bijgevoegde krachten zoodanig, dat bij draaiing om λ, μ, ν, die as een evenwichts-as wordt. Daaruit volgt dat F' constant is, maar daarom behoeft F nog niet het tegengestelde teeken van F_2 te bezitten; dit zou slechts het geval zijn, als F' nul was De viriaal van het gegeven krachtenstelsel geeft dus door haar teeken geen kenmerk voor de standvastigheid van het evenwicht. Er bestaat echter een andere functie, die Möbius gevonden heeft, welke zulks wel doet.

Uit vergelijking (17)

$$F_2 = -\frac{\Delta}{a\lambda + b\mu + c\nu}$$

volgt

$$F_2 = -\frac{\Delta^2}{S},$$

waarin dan

$$S = (a\lambda + b\mu + c\nu)\,\Delta$$

of in verband met (16)

$$S = (a_{11} + F)\lambda^2 + (a_{22} + F)\mu^2 + (a_{33} + F)\nu^2 + 2a_{23}\mu\nu + 2a_{31}\lambda\nu + 2a_{12}\lambda\mu.$$

Nu blijkt ons hieruit dat een stelsel in standvastig of wankelbaar evenwicht verkeert al naardat S negatief of positief is.

Tusschen beide toestanden ligt het geval, dat $S = 0$ is. Schrijven wij dan voor λ, μ, ν de daarmede evenredige

grootheden x, y, z, dan wordt dit uitgedrukt door de vergelijking

$$(a_{11} + F) x^2 + (a_{22} + F) y^2 + (a_{33} + F) z^2 + 2 a_{23} yz + 2 a_{31} xz + 2 a_{12} xy = 0.$$

Maar dit is de vergelijking van een kegelvlak, dat de assen van standvastig en die van wankelbaar evenwicht van elkander scheidt.

Voor assen op dit kegelvlak gelegen, is, zoo $\Delta = 0$ is, F_2 niet bepaald maar toch constant, doch voeren we de waarde $\Delta = 0$ in (16) in, zoo zien wij dat dan de lijn λ, μ, ν een evenwichtsas is en dus het stelsel om die as astatisch is.

Is $\Delta \gtrless 0$, dan is op het kegelvlak $F_2 = \infty$.

In dat geval is $\varkappa^2 = 1$ en dus is de arm van het koppel gericht langs de draaiingsas. Dit evenwicht waar bij draaiing een koppel ontstaat, dat op de draaiing zelve geen invloed heeft, doch de draaiingsas tracht te verplaatsen, heeft Möbius het neutrale evenwicht genoemd.

Laat men bij voorbeeld het stelsel om de Z-as draaien, dan zijn $\lambda = \mu = 0$ en $\nu = 1$ en vinden wij

$$S = a_{33} + F$$

en het evenwicht is standvastig, zoo S negatief is. Nu is

$$S = -\Sigma (x X + y Y)$$

en wij zien dus dat de standvastigheid samen hangt met het teeken der viriaal van de projectie van het krachtenstelsel op een vlak loodrecht op de draaiingsas.

§ 44. Men kan de coördinaten-assen zoo kiezen, dat zij samenvallen met de assen van het kegelvlak $S = 0$. Dan verdwijnen na transformatie uit die vergelijking de termen die produkten van twee der grootheden x, y, z bevatten, en de vergelijking van het kegelvlak wordt

$$c_1 x^2 + c_2 y^2 + c_3 z^2 = 0,$$

waarin c_1, c_2, c_3 wortels zijn van de vergelijking

$$\begin{vmatrix} (a_{11}+F)-c & a_{12} & a_{31} \\ a_{12} & (a_{22}+F)-c & a_{33} \\ a_{31} & a_{23} & (a_{33}+F)-c \end{vmatrix} = 0 \quad . \quad (22)$$

De evenwichtsfunctie wordt in dat geval

$$S = c_1 \lambda^2 + c_2 \mu^2 + c_3 \nu^2.$$

Zijn nu c_1, c_2 en c_3 allen negatief, dan is het evenwicht voor alle assen in de ruimte standvastig. Zijn zij allen positief, dan is het evenwicht voor alle assen wankelbaar. In alle andere gevallen is het evenwicht voor sommige assen standvastig, voor andere wankelbaar, terwijl beide soorten door het kegelvlak gescheiden worden.

§ 45. De functie S kan soms in de gedaante van de som van twee vierkanten geschreven worden; en wel zoodra bovenstaande vergelijking (22) een wortel nul heeft. Dit zal het geval zijn, zoodra

$$\begin{vmatrix} a_{11}+F & a_{12} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22}+F & a_{21} \\ a_{31} & a_{23} & a_{33}+F \end{vmatrix} = 0$$

is. Maar dan heeft het stelsel een evenwichtsas, die de gemeenschappelijke snijlijn is der vlakken

$$\begin{aligned} (a_{11}+F)\,x + a_{12}\,y + a_{31}\,z &= 0, \\ a_{12}\,x + (a_{22}+F)\,y + a_{23}\,z &= 0, \\ a_{31}\,x + a_{23}\,y + (a_{33}+F)\,z &= 0. \end{aligned}$$

Als wij aannemen, dat c_3 verdwijnt, hebben wij

$$S = c_1 \lambda^2 + c_2 \mu^2.$$

Zijn c_1 en c_2 beide negatief dan is het evenwicht voor alle assen standvastig. Zijn beide positief dan is voor alle assen wankelbaar. Is een van beide negatief, zoo hebben wij

$$S = m^2 \lambda^2 - n^2 \mu^2 = (m\lambda + n\mu)(m\lambda - n\mu).$$

De kegel is dus overgegaan in de beide vlakken

$$mx + ny = 0 \quad \text{en} \quad mx - ny = 0,$$

die elkander loodrecht snijden en wier snijlijn door den oorsprong gaat (de Z-as). In twee tegengestelde quadranten is het evenwicht voor alle assen standvastig, in twee andere voor alle wankelbaar. In welke hangt van de waarden van m en n af. Voor assen in een der twee vlakken gelegen is het evenwicht neutraal, alleen voor de snijlijn (de evenwichtsas) is het evenwicht astatisch.

Reduceert S zich tot een enkel quadraat, dan vallen de beide vlakken samen en het evenwicht is standvastig of wankelbaar naarmate de coëfficient van dat quadraat negatief of positief is.

Voor alle assen gelegen in dat vlak, welks vergelijking (zie § 33) wordt aangeduid door

$$\frac{x}{a_{23}} + \frac{y}{a_{31}} + \frac{z}{a_{12}} = 0,$$

is het evenwicht astatisch.

β. *Maxima en minima bij het evenwicht.*

§ 46. Niet alleen het teeken der viriaal heeft in de vragen betreffende het evenwicht een groote beteekenis, maar ook de waarde zelve der viriaal kan dienen om den aard van het evenwicht nader te karakteriseeren. Beschouwen wij daartoe in de eerste plaats weder een vlak stelsel. In § 21 hebben wij gevonden, dat bij draaiing over een hoek φ

$$F' = F \cos \varphi - G \sin \varphi.$$

Was het stelsel voor de draaiing in evenwicht, dan is $G = 0$ en dus

$$F' = F \cos \varphi.$$

Bij standvastig evenwicht moet dit negatief zijn, bij wankelbaar positief, maar dan is ook bij het standvastig

evenwicht de waarde van F minimum en bij het wankelbaar evenwicht maximum.

Het maximum en het minimum vallen alzoo samen met de evenwichtsstanden van het stelsel en bepalen deze.

Was het stelsel niet in evenwicht, dan is

$$F' = F \cos \varphi - G \sin \varphi$$

en is volgens de regels der maxima en minima die waarde van F maximum of minimum, welke behoort bij de waarde van φ, waarvoor

$$F \sin \varphi + G \cos \varphi = 0$$

is. Doch § 21 zegt ons ook, dat

$$F \sin \varphi + G \cos \varphi = G'$$

Wij zien derhalve, dat gedurende de draaiing het maximum of minimum in die gevallen voorkomt, waar

$$G' = 0$$

d. w. z. zoodra de resultante van het stelsel door den oorsprong gaat, want dan wordt de vergelijking van de centraal-as

$$B x - A y = 0.$$

§ 47. In de ruimte wordt een in evenwicht zijnd stelsel, zoo het uit dien stand gebracht wordt door draaiing om een as λ, μ, ν over een hoek φ aequivalent aan een koppel.

Uit de formule (12) § 29 zien wij, dat de verandering van de viriaal bij die draaiing is

$$\Delta F = -2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \left\{ \lambda \alpha + \mu \beta + \nu \gamma + F + \delta \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \right\}$$

Was het stelsel oorspronkelijk in evenwicht, dan waren

$$L = 0 , \qquad M = 0 , \qquad N = 0$$

en

$$\delta = L \lambda + M \mu + N \nu = 0,$$

derhalve

$$\Delta F = -2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \left\{ \lambda \alpha + \mu \beta + \nu \gamma + F \right\}.$$

Nu is

$$F' = F + \Delta F,$$

waaruit volgt

$$F' = (F + \lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma)\cos\varphi - (\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma),$$

en dus zoo F positief is, maximum voor $\varphi = 0$ en minimum voor $\varphi = \pi$ en zoo F negatief is, juist omgekeerd; maar dus in beide gevallen is F' maximum bij wankelbaar en minimum bij standvastig evenwicht.

§ 48. Is het systeem oorspronkelijk niet in evenwicht, dan is

$$\Delta F = -2\sin^2\frac{\varphi}{2}\left\{\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma + F + \delta\,ctg\frac{\varphi}{2}\right\}.$$

Nu stelt δ de projectie voor van den as van het resulteerend koppel G der krachten in den oorsprong, wanneer die as op de draaiingsas λ, μ, ν geprojecteerd wordt.

In dat geval wordt

$$F' = (F + \lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma)\cos\varphi - \delta\sin\varphi - (\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma)$$

en dus maximum of minimum voor de waarde van φ voldoende aan de vergelijking

$$\delta\cos\varphi + (F + \lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma)\sin\varphi = 0.$$

Wanneer wij nu bij de vergelijkingen (12) L, M, N optellen, vinden wij

$$L' = (1 - \cos\varphi)(\mu\gamma - \nu\beta - \lambda\delta) + (\alpha + \lambda F)\sin\varphi + L,$$
$$M' = (1 - \cos\varphi)(\nu\alpha - \lambda\gamma - \mu\delta) + (\beta + \mu F)\sin\varphi + M,$$
$$N' = (1 - \cos\varphi)(\lambda\beta - \mu\alpha - \nu\delta) + (\gamma + \nu F)\sin\varphi + N.$$

Vermenigvuldigen wij deze vergelijkingen resp. met λ, μ, ν en tellen ze daarna op, dan verkrijgen wij

$$\delta' = -\delta(1 - \cos\varphi) + (F + \lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma)\sin\varphi + \delta$$
$$\delta' = \delta\cos\varphi + (F + \lambda\alpha + \mu\beta + \gamma\nu)\sin\varphi$$

en wij zien daaruit, dat F' maximum of minimum wordt zoodra $\delta' = 0$, dat wil zeggen, voor die waarde van φ, waarbij de as van het resulteerend koppel loodrecht op de draaiings-as is komen te staan.

§ 49. Wanneer een krachtenstelsel om een vaste as draait en wij de draaiingshoek als onafhankelijk variable beschouwen, zijn

$$\frac{dx}{d\varphi} = \mu z - \nu y, \quad \frac{dy}{d\varphi} = \nu x - \lambda z, \quad \frac{dz}{d\varphi} = \lambda y - \mu x,$$

en, zoo de krachten als onveranderlijk beschouwd worden

$$\frac{dL}{d\varphi} = \Sigma\left(z\frac{dy}{d\varphi} - Y\frac{dz}{d\varphi}\right) = \nu a_{13} - \lambda a_{33} - \lambda a_{22} + \mu a_{12},$$

of wel met de beteekenis van § 29

$$\frac{dL}{d\varphi} = \alpha + \lambda F, \quad \frac{dM}{d\varphi} = \beta + \mu F, \quad \frac{dN}{d\varphi} = \gamma + \nu F,$$

$$\frac{dF}{d\varphi} = -\Sigma\left(X\frac{dx}{d\varphi} + Y\frac{dy}{d\varphi} + Z\frac{dz}{d\varphi}\right)$$

$$= -(\mu a_{31} - \nu a_{21} + \nu a_{12} - \lambda a_{32} + \lambda a_{23} - \mu a_{13}),$$

$$\frac{dF}{d\varphi} = -\delta.$$

Hieruit volgt: F is maximum of minimum, zoodra $\delta = 0$, d. w. z. in geval van evenwicht. F is constant, als voortdurend $\delta = 0$, d. w. z. bij astatisch evenwicht. L, M en N zijn tegelijk constant, wanneer tegelijk

$$\alpha + \lambda F = 0, \qquad \beta + \mu F = 0, \qquad \gamma + \nu F = 0,$$

of voluit geschreven

$$(a_{11} + F)\lambda + a_{12}\mu + a_{13}\nu = 0,$$
$$a_{21}\lambda + (a_{22} + F)\mu + a_{23}\nu = 0,$$
$$a_{31}\lambda + a_{32}\mu + (a_{33} + F)\nu = 0.$$

Wegens het verband tusschen λ, μ en ν kan dit alleen plaats hebben, wanneer

$$\begin{vmatrix} a_{11} + F & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} + F & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} + F \end{vmatrix} = 0.$$

In evenwichtstoestand zijn $a_{12} = a_{21}$, $a_{13} = a_{31}$, $a_{23} = a_{32}$ en deze determinant gaat over in de determinant A van § 32. Toch is dit slechts schijnbaar dezelfde, want in

§ 32 behoefde de voorwaarde slechts voor één bepaalde ligging vervuld te zijn. De beteekenis der hier voorkomende differentiaal-quotienten vordert het voortdurend vervuld zijn dezer voorwaarde. Differentieeren wij nogmaals, zoo verkrijgen wij na eenvoudige herleiding

$$\frac{d^2L}{d\varphi^2} = \frac{d\alpha}{d\varphi} + \lambda\frac{dF}{d\varphi} = \mu\gamma - \nu\beta - \lambda\delta,$$

$$\frac{d^2M}{d\varphi^2} = \frac{d\beta}{d\varphi} + \mu\frac{dF}{d\varphi} = \nu\alpha - \lambda\gamma - \mu\delta,$$

$$\frac{d^2N}{d\varphi^2} = \frac{d\gamma}{d\varphi} + \nu\frac{dF}{d\varphi} = \lambda\beta - \mu\alpha - \nu\delta,$$

$$\frac{d^2F}{d\varphi^2} = -\frac{d\delta}{d\varphi} = -(\alpha\lambda + \mu\beta + \gamma\nu + F).$$

In geval van evenwicht wordt deze laatste uitdrukking:

$$\frac{d^2F}{d\varphi^2} = -S$$

en dus is F maximum of minimum naar gelang S positief of negatief is.

Indien wij nu nog de derde differentiaal-quotienten bepalen, vinden wij

$$\frac{d^3L}{d\varphi^3} = \mu\frac{d\gamma}{d\varphi} - \nu\frac{d\beta}{d\varphi} - \lambda\frac{d\delta}{d\varphi} = \lambda\mu\beta - \mu^2\alpha - \nu^2\alpha + \lambda\nu\gamma$$
$$-\lambda^2\alpha - \lambda\mu\beta - \lambda\nu\gamma - \lambda F$$
$$= -\alpha - \lambda F$$

en dus

$$\frac{d^3L}{d\varphi^3} = -\frac{dL}{d\varphi}, \quad \frac{d^3M}{d\varphi^3} = -\frac{dM}{d\varphi}, \quad \frac{d^3N}{d\varphi^3} = -\frac{dN}{d\varphi},$$
$$\frac{d^3F}{d\varphi^3} = -\frac{dF}{d\varphi}.$$

Hieruit volgt: dat alle volgende differentiaal-quotienten eenvoudig in de twee eerste kunnen uitgedrukt worden; dat wanneer tegelijk $dL/d\varphi$ en $d^2L/d\varphi^2$ gelijk nul zijn, L een constante is, want dan zijn alle verdere differentiaal-quotienten ook nul. Hierdoor wordt het onderscheid

tusschen de beide determinanten weer opgeheven; want zoodra in een bepaalde stand $\alpha + \lambda F$, $\beta + \mu F$, $\gamma + \nu F$ en δ allen gelijk nul zijn, worden ook de tweede differentiaal-quotienten $= 0$ dus L, M, N en F constant, en omdat $\delta = 0$ is, tevens $L = M = N = 0$. Dientengevolge wordt ook weder $S = 0$, wat alles met het vroeger behandelde overeenstemt. Tevens blijkt uit onze vergelijkingen, dat L, M, N en F allen voldoen aan de differentiaal-vergelijking

$$\frac{d^3\psi}{d\varphi^3} = -\frac{d\psi}{d\varphi}.$$

Hiervan is de algemeene integraal

$$\frac{d\psi}{d\varphi} = c_1 \sin(\varphi + c_2) = m \sin\varphi + n \cos\varphi$$

en dus

$$\psi = -m\cos\varphi + n\sin\varphi + const.$$
$$\psi_0 = -m + const.$$

$$\Delta\psi = m(1 - \cos\varphi) + n\sin\varphi$$
$$= 2\sin^2\frac{\varphi}{2}\left(m + n\,ctg\frac{\varphi}{2}\right).$$

Uit de algemeene waarde van ψ volgt:

$$\left(\frac{d\psi}{d\varphi}\right)_0 = n, \quad \left(\frac{d^2\psi}{d\varphi^2}\right)_0 = m.$$

Zoo verkrijgen wij

$$\Delta\psi = 2\sin^2\frac{\varphi}{2}\left\{\left(\frac{d^2\psi}{d\varphi^2}\right)_0 + \left(\frac{d\psi}{d\varphi}\right)_0 ctg\frac{\varphi}{2}\right\}.$$

Substitueeren wij hierin voor ψ achtereenvolgens L, M, N en F, dan komen wij op de waarden van § 29 in juiste overeenstemming terug.

C. BEHANDELING MET QUATERNIONS.

α. *Afleiding der grondvergelijkingen.*

§ 50. De uitdrukking $\alpha_q = q\,\alpha\,q^{-1}$ stelt voor de waarde van den vector α in een stand verkregen door draaiing van dien vector α om de as van het quaternion q, terwijl de grootte der draaiing den dubbelen hoek van q bedraagt.

Hebben wij nu een stelsel constante krachten β aangrijpende in de punten α en laten wij die vectoren α draaien om den as van q den dubbelen hoek van q, dan blijft $\Sigma\,\beta$ aan zichzelf gelijk. Maar het quaternion $\alpha\,\beta$ wordt nu

$$\alpha_q\,\beta = q\,\alpha\,q^{-1}\,\beta.$$

Gebruik makende van de eigenschap

$$q = Sq + Vq$$

en van de betrekking

$$q^{-1} = \frac{1}{(Tq)^2}(Sq - Vq),$$

verkrijgen wij:

$$\Sigma\,\alpha_q\,\beta = \Sigma\,(Tq)^{-2}\,(Sq + Vq)\,\alpha\,(Sq - Vq)\,\beta$$
$$= (Tq)^{-2}\{(Sq)^2\,\Sigma\,\alpha\,\beta + Sq\,Vq\,\Sigma\,\alpha\,\beta - Sq\,\Sigma\,\alpha\,Vq\,\beta - \Sigma\,Vq\,\alpha\,Vq\,\beta\}$$

Stellen wij nu

$$Sq = w, \qquad Vq = \varrho$$

en, daar wij voor q een versor mogen nemen,

$$Tq = 1,$$

dan hebben wij, daar

$$(Sq)^2 - (Vq)^2 = (Tq)^2,$$

de betrekking

$$w^2 - \varrho^2 = 1.$$

En derhalve

$$\Sigma\,\alpha_q\,\beta = w^2\,\Sigma\,\alpha\,\beta + w\,\varrho\,\Sigma\,\alpha\,\beta - w\,\Sigma\,\alpha\,\varrho\,\beta - \Sigma\,\varrho\,\alpha\,\varrho\,\beta.$$

Nemen wij van beide zijden het scalar- en het vectorgedeelte, zoo verkrijgen wij

$$\Sigma\,S\alpha_q\,\beta = \Sigma\,(w^2\,S\alpha\,\beta + w\,S\varrho\,\alpha\,\beta - w\,S\alpha\,\varrho\,\beta - S\varrho\,\alpha\,\varrho\,\beta)$$

en

$$\Sigma\, V\alpha_\varrho\beta = \Sigma\,(w^2\, V\alpha\beta + w\, V\varrho\,\alpha\beta - w\, V\alpha\varrho\beta - V\varrho\,\alpha\varrho\beta).$$

§ 51. Ter herleiding dezer uitdrukkingen maken wij gebruik van de volgende formulen:

$$\begin{aligned}
S\alpha\varrho\beta &= S\beta\alpha\varrho = -S\varrho\,\alpha\beta = -S\varrho\; V\alpha\beta,\\
V\varrho\,\alpha\beta &= \varrho\, S\alpha\beta - \alpha\, S\varrho\beta + \beta\, S\varrho\,\alpha,\\
V\alpha\varrho\beta &= \alpha\, S\varrho\beta - \varrho\, S\alpha\beta + \beta\, S\varrho\,\alpha,\\
S\varrho\,\alpha\varrho\beta &= S\varrho\, V\alpha\varrho\beta = 2\, S\varrho\,\alpha\, S\varrho\beta - \varrho^2\, S\alpha\beta,\\
V\varrho\,\alpha\varrho\beta &= V\varrho\, S\alpha\varrho\beta + V\varrho\, V\alpha\varrho\beta,\\
&= \varrho\, S\alpha\varrho\beta + V\varrho\,\alpha\, S\varrho\beta + V\varrho\beta\, S\varrho\,\alpha.
\end{aligned}$$

terwijl wij nog de volgende herleiding toevoegen:

$$\begin{aligned}
S\alpha\beta &= S\beta\,\alpha,\\
\alpha\beta - V\alpha\beta &= \beta\,\alpha - V\beta\,\alpha = \beta\,\alpha + V\alpha\beta,\\
S\alpha\beta - \varrho\, V\alpha\beta &= \varrho\beta\,\alpha + \varrho\, V\alpha\beta,\\
V\varrho\,\alpha\beta - V\varrho\, V\alpha\beta &= V\varrho\beta\,\alpha + V\varrho\, V\alpha\beta,\\
\varrho\, S\alpha\beta - \alpha\, S\varrho\beta + \beta\, S\varrho\,\alpha - V\varrho\, V\alpha\beta &=\\
&\varrho\, S\alpha\beta - \beta\, S\varrho\,\alpha + \alpha\, S\varrho\beta + V\varrho\, V\alpha\beta,\\
\beta\, S\varrho\,\alpha &= \alpha\, S\varrho\beta + V\varrho\, V\alpha\beta,
\end{aligned}$$

en daar

$$S\varrho\; V\varrho\; V\alpha\beta = 0$$

is, wordt

$$V\varrho\,\beta\, S\varrho\,\alpha = V\varrho\,\alpha\, S\varrho\beta + \varrho\, V\varrho\; V\alpha\beta.$$

Door invoering van al deze herleidingen verkrijgen wij:

$$\Sigma S\alpha_\varrho\beta = w^2\Sigma S\alpha\beta + 2\,w\, S\varrho\,\Sigma V\alpha\beta - 2\,\Sigma S\varrho\,\alpha\, S\varrho\beta + \varrho^2\Sigma S\alpha\beta$$

en

$$\begin{aligned}
\Sigma\, V\alpha_\varrho\beta = w^2\,\Sigma\, V\alpha\beta + \varrho\, S\varrho\,\Sigma V\alpha\beta - 2\,w\,\Sigma(\alpha\, S\varrho\beta - \varrho\, S\alpha\beta)\\
- 2\,\Sigma\, V\varrho\,\alpha\, S\varrho\,\beta - \varrho\; V\varrho\,\Sigma\, V\alpha\beta.
\end{aligned}$$

§ 52. Denken wij ons nu een vlak krachtenstelsel zoodanig, dat alle vectoren loodrecht staan op den vector k en dus de as van het quaternion q evenwijdig aan k is, dan hebben wij

$$U\varrho = k, \qquad S\,k\,\alpha = 0, \qquad S\,k\,\beta = 0, \qquad U\Sigma\, V\alpha\beta = k$$

en zoo

$$T\varrho = r,$$

$$\Sigma S\alpha_q\beta = w^2\,\Sigma S\alpha\beta + 2\,w\,r\,k^2\,\Sigma T V\alpha\beta + r^2k^2\,\Sigma S\alpha\beta$$

en

$$\Sigma V\alpha_q\beta = w^2\,\Sigma V\alpha\beta - r^2k\,\Sigma T V\alpha\beta + 2\,w\,r\,k\,\Sigma S\alpha\beta.$$

Indien wij nu aannemen, dat het stelsel in evenwicht is en na de draaiing weder in evenwicht zal zijn, hebben wij in deze formule te stellen:

$$\Sigma V\alpha_q\beta = \Sigma V\alpha\beta = 0$$

en dus

$$\Sigma S\alpha_q\beta = w^2\,\Sigma S\alpha\beta + r^2k^2\,\Sigma S\alpha\beta$$

$$0 = 2\,w\,r\,\Sigma S\alpha\beta.$$

Wij hebben alzoo drie gevallen:

1e: $$r = T V q = 0;$$

dus geen draaiing, en daar

$$w^2 + r^2 = 1,$$

$$\Sigma S\alpha_q\beta = \Sigma S\alpha\beta.$$

2e: $$w = Sq = 0;$$

dat is: hoek $q = \frac{\pi}{2}$, dus een draaiing van 180° en daar

$$k^2 = -1,$$

$$\Sigma S\alpha_q\beta = -\Sigma S\alpha\beta.$$

3e: $$\Sigma S\alpha\beta = F = 0;$$

de draaiing is onbepaald, doch steeds zijn $\Sigma S\alpha\beta$ en $\Sigma V\alpha\beta$ beide gelijk nul en dus

$$\Sigma\alpha\beta = 0.$$

Wanneer wij nu $\alpha\beta$ het totale moment der kracht β ten opzichte van den oorsprong noemen, hebben wij de stelling:

„Indien een vlak krachtenstelsel in astatisch evenwicht is ten opzichte van een zeker punt in zijn vlak, dan is het resulteerend quaternion der totale momenten der krachten ten opzichte van dat punt voortdurend gelijk nul."

§ 53. Is het vlakke stelsel niet in evenwicht, doch vraagt men het in astatisch evenwicht te brengen door middel eener kracht β_1 aangrijpende in het punt α_1, zoo moet voldaan worden aan de voorwaarden:

$$\beta_1 + \Sigma\,\beta = 0,$$
$$V\alpha_1\,\beta_1 + \Sigma\,V\alpha\,\beta = 0,$$
$$S\alpha_1\,\beta_1 + \Sigma\,S\alpha\,\beta = 0,$$

of wel

$$\beta_1 + \mathrm{R} = 0,$$
$$V\alpha_1\,\beta_1 + \mathrm{G} = 0,$$
$$S\alpha_1\,\beta_1 + \mathrm{F} = 0.$$

Optelling van de beide laatsten geeft:

$$\alpha_1\,\beta_1 + \mathrm{F} + \mathrm{G} = 0.$$

Maar

$$\beta_1 = -\mathrm{R}.$$

Dus

$$\alpha_1\,\mathrm{R} = \mathrm{F} + \mathrm{G}$$

of opereerend met $V(\ )\,\mathrm{R}^{-1}$

$$\alpha_1 = \mathrm{F}\,\mathrm{R}^{-1} + V\mathrm{G}\,\mathrm{R}^{-1}$$

zijnde het snijpunt van centraallijn en hoofdlijn der virialen (zie verg. 11).

§ 54. Keeren wij terug tot de formulen voor stelsels in de ruimte aan het einde van § 51 en voeren wij een functie $\varphi\,\varrho$ in, die wij bepalen door de vergelijking

$$\varphi\,\varrho = \Sigma\,(\alpha\,S\varrho\,\beta - \varrho\,S\alpha\,\beta),$$

dan is

$$S\varrho\,\varphi\,\varrho = \Sigma\,(S\varrho\,\alpha\,S\varrho\,\beta - \varrho^2\,S\alpha\,\beta)$$

en

$$V\varrho\,\varphi\,\varrho = \Sigma\,V\varrho\,\alpha\,S\varrho\,\beta.$$

Dan worden onze vergelijkingen:

$$\mathrm{F}' = \varpi^2\,\mathrm{F} + 2\,\varpi\,S\varrho\,\mathrm{G} - 2\,S\varrho\,\varphi\,\varrho - \varrho^2\,\mathrm{F},$$
$$\mathrm{G}' = \varpi^2\,\mathrm{G} + \varrho\,S\varrho\,\mathrm{G} - 2\,\varpi\,\varphi\,\varrho - 2\,V\varrho\,\varphi\,\varrho - \varrho\,V\varrho\,\mathrm{G},$$

of wel, zoo wij de veranderingen van F en G met Δ F en Δ G aanduiden:

$$^1/_2\ \Delta\,\mathrm{F} = w\,S\,\varrho\,\mathrm{G} - S\,\varrho\,\varphi\,\varrho \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

$$^1/_2\ \Delta\,\mathrm{G} = \varrho\,S\,\varrho\,\mathrm{G} - V\,\varrho\,\varphi\,\varrho - w\,\varphi\,\varrho \quad \ldots\ldots \quad (24)$$

Deze laatste vergelijking, zijnde eene tusschen vectoren is aequivalent aan drie scalar-vergelijkingen.

§ 55. Nemen wij nu aan, dat het stelsel in evenwicht is, en dat dat evenwicht door de draaiing niet verstoord worde, dan moeten wij $\mathrm{G} = \Delta\,\mathrm{G} = 0$ stellen, waardoor wij verkrijgen

$$\Delta\,\mathrm{F} = -\,2\,S\,\varrho\,\varphi\,\varrho,$$

$$0 = V\,\varrho\,q\,\varrho + w\,\varphi\,\varrho.$$

Wij hebben weder drie gevallen:

1e geval:

$$T\,\varrho = T\,V q = 0,$$

dat is: geen draaiing en $\Delta\,\mathrm{F} = 0$;

2e geval:

$$w = S q = 0 \quad \text{en} \quad V\,\varrho\,\varphi\,\varrho = 0,$$

dus een draaiing van 180° om een as bepaald door de vergelijking $V\,\varrho\,\varphi\,\varrho = 0$. Daar $w = 0$ is, is in dit geval $T\,\varrho = 1$;

3e geval:

$$\varphi\,\varrho = 0 \quad \text{zonder dat} \quad T\,\varrho = 0,$$

$T\,\varrho$ en w blijven onbepaald, dus: astatisch evenwicht ten opzichte van een as bepaald door $\varphi\,\varrho = 0$.

Dan is

$$\Delta\,\mathrm{F} = 0, \quad \text{dus} \quad \mathrm{F}' = \mathrm{F}.$$

De beide laatste gevallen hangen af van de vergelijkingen $\varphi\,\varrho = 0$ en $V\,\varrho\,\varphi\,\varrho = 0$, wier algemeene oplossing wij hier zullen invoegen.

β. *Oplossing der liniaire vector-vergelijking.*

§ 56. Bij de oplossing der liniaire vector-vergelijking

$$\varphi\,\varrho = = \gamma,$$

waarin ϱ een onbekende vector is, treedt herhaaldelijk de geconjugeerde functie φ' op. Dit is eene functie, die met φ verbonden is door de vergelijking

$$S\sigma\varphi\varrho = S\varrho\varphi'\sigma,$$

waarin ϱ en σ geheel willekeurige vectoren voorstellen.

In geval

$$\varphi' = \varphi$$

is, noemt men de functie φ een aan zich zelf geconjugeerde.

Volgens TAIT „Quaternions" § 92 is

$$\varrho S\lambda\mu\nu = V\mu\nu S\lambda\varrho + V\nu\lambda S\mu\varrho + V\lambda\mu S\nu\varrho \ldots (25)$$

waarin λ, μ, ν drie willekeurig te kiezen niet-complanaire vectoren voorstellen. In dat geval is

$$\varphi\varrho S\lambda\mu\nu = \varphi V\mu\nu S\lambda\varrho + \varphi V\nu\lambda S\mu\varrho + \varphi V\lambda\mu S\nu\varrho \ldots (26)$$

Stellen wij in (25) successivelijk $\varrho = \varphi V\mu\nu, \varphi V\nu\lambda, \varphi V\lambda\mu$, dan verkrijgen wij achtereenvolgens:

$$\begin{aligned}
\varphi V\mu\nu S\lambda\mu\nu &= V\mu\nu S\lambda\varphi V\mu\nu + V\nu\lambda S\mu\varphi V\mu\nu + V\lambda\mu S\nu\varphi V\mu\nu,\\
&= V\mu\nu S(V\mu\nu)\varphi'\lambda + V\nu\lambda S(V\mu\nu)\varphi'\mu + V\lambda\mu S(V\mu\nu)\varphi'\nu,\\
&= V\mu\nu S\mu\nu\varphi'\lambda + V\nu\lambda S\mu\nu\varphi'\mu + V\lambda\mu S\mu\nu\varphi'\nu,\\
\varphi V\nu\lambda S\lambda\mu\nu &= V\mu\nu S\nu\lambda\varphi'\lambda + V\nu\lambda S\nu\lambda\varphi'\mu + V\lambda\mu S\nu\lambda\varphi'\nu,\\
\varphi V\lambda\mu S\lambda\mu\nu &= V\mu\nu S\lambda\mu\varphi'\lambda + V\nu\lambda S\lambda\mu\varphi'\mu + V\lambda\mu S\lambda\mu\varphi'\nu.
\end{aligned}$$

Stellen wij nu

$$\left.\begin{aligned}
S\mu\nu\varphi'\lambda S\lambda\varrho + S\nu\lambda\varphi'\lambda S\mu\varrho + S\lambda\mu\varphi'\lambda S\nu\varrho &= A S\lambda\mu\nu,\\
S\mu\nu\varphi'\mu S\lambda\varrho + S\nu\lambda\varphi'\mu S\mu\varrho + S\lambda\mu\varphi'\mu S\nu\varrho &= B S\lambda\mu\nu,\\
S\mu\nu\varphi'\nu S\lambda\varrho + S\nu\lambda\varphi'\nu S\mu\varrho + S\lambda\mu\varphi'\nu S\nu\varrho &= C S\lambda\mu\nu,
\end{aligned}\right\} \ldots (27)$$

dan zijn A, B en C scalars en na substitutie vinden wij uit (26)

$$\varphi\varrho S\lambda\mu\nu = A V\mu\nu + B V\nu\lambda + C V\lambda\mu. \ldots . (28)$$

Bedenken wij nu, dat uit (25) volgt

$$\gamma S\lambda\mu\nu = V\mu\nu S\lambda\gamma + V\nu\lambda S\mu\gamma + V\lambda\mu S\nu\gamma,$$

zoo verkrijgen wij ter oplossing der vergelijking

$$\varphi\varrho = \gamma$$

door substitutie onzer gevonden waarden de vergelijking:
$(A - S\lambda\gamma)\,V\mu\nu + (B - S\mu\gamma)\,V\nu\lambda + (C - S\nu\gamma)\,V\lambda\mu = 0.$

Daar λ, μ, ν drie gegeven niet-complanaire vectoren zijn, moeten

$$A = S\lambda\gamma,$$
$$B = S\mu\gamma,$$
$$C = S\nu\gamma$$

zijn. Gesubstitueerd in (27) verkrijgen wij het stelsel van drie liniaire vergelijkingen tusschen scalars, waaraan de oorspronkelijke vector-vergelijking aequivalent is: n.l.

$$\left.\begin{aligned} S\mu\nu\varphi'\lambda\,S\lambda\varrho + S\nu\lambda\varphi'\lambda\,S\mu\varrho + S\lambda\mu\varphi'\lambda\,S\nu\varrho &= S\lambda\gamma\,S\lambda\mu\nu, \\ S\mu\nu\varphi'\mu\,S\lambda\varrho + S\nu\lambda\varphi'\mu\,S\mu\varrho + S\lambda\mu\varphi'\mu\,S\nu\varrho &= S\mu\gamma\,S\lambda\mu\nu, \\ S\mu\nu\varphi'\nu\,S\lambda\varrho + S\nu\lambda\varphi'\nu\,S\mu\varrho + S\lambda\mu\varphi'\nu\,S\nu\varrho &= S\nu\gamma\,S\lambda\mu\nu, \end{aligned}\right\} \quad . \quad (29)$$

Uit deze drie vergelijkingen vinden wij $S\lambda\varrho$, $S\mu\varrho$ en $S\nu\varrho$ en vervolgens uit de vergelijking (25) de waarde van ϱ.

Een geschikte keuze der vectoren λ, μ, ν kan in bijzondere gevallen deze vergelijkingen nog vereenvoudigen.

Zoo kan het soms voordeelig zijn voor λ, μ, ν drie loodrecht op elkander staande eenheidsvectoren te nemen; in dat geval zijn

$$V\mu\nu = \lambda, \quad V\nu\lambda = \mu, \quad V\lambda\mu = \nu, \quad S\lambda\mu\nu = -1$$

en wij vinden voor onze vergelijkingen:

$$S\lambda\varphi\lambda\,S\lambda\varrho + S\lambda\varphi\mu\,S\mu\varrho + S\lambda\varphi\nu\,S\nu\varrho = -S\lambda\gamma,$$
$$S\mu\varphi\lambda\,S\lambda\varrho + S\mu\varphi\mu\,S\mu\varrho + S\mu\varphi\nu\,S\nu\varrho = -S\mu\gamma,$$
$$S\nu\varphi\lambda\,S\lambda\varrho + S\nu\varphi\mu\,S\mu\varrho + S\nu\varphi\nu\,S\nu\varrho = -S\nu\gamma,$$

terwijl

$$\varrho = -\lambda\,S\lambda\varrho - \mu\,S\mu\varrho - \nu\,S\nu\varrho$$

en

$$\varphi\varrho = -A\lambda - B\mu - C\nu$$

wordt.

§ 57. In het algemeen echter hadden wij

$$\varphi\varrho\,S\lambda\mu\nu = A\,V\mu\nu + B\,V\nu\lambda + C\,V\lambda\mu$$

en de vergelijkingen (27).

Ware nu gegeven de vergelijking:

$$\varphi\,\varrho = 0,$$

dan moeten wij in onze vergelijkingen (29) $\gamma = 0$ stellen, maar dan wordt er slechts aan voldaan door de waarden

$$S\lambda\varrho = 0, \quad S\mu\varrho = 0, \quad S\nu\varrho = 0$$

en dus

$$\varrho = 0,$$

tenzij de determinant

$$\mathfrak{H} = \begin{vmatrix} S\mu\nu\varphi'\lambda & S\nu\lambda\varphi'\lambda & S\lambda\mu\varphi'\lambda \\ S\mu\nu\varphi'\mu & S\nu\lambda\varphi'\mu & S\lambda\mu\varphi'\mu \\ S\mu\nu\varphi'\nu & S\nu\lambda\varphi'\nu & S\lambda\mu\varphi'\nu \end{vmatrix} = 0$$

worde, in welk geval de vergelijkingen (29) van elkander afhankelijk zijn. Deelt men ze dan door $T\varrho$ dan blijven in die vergelijkingen slechts de scalars:

$$S\lambda U\varrho, \quad S\mu U\varrho, \quad S\nu U\varrho$$

ter bepaling over en tusschen deze grootheden bestaat een betrekking, want uit (25) volgt

$$U\varrho\, S\lambda\mu\nu = V\mu\nu\, S\lambda U\varrho + V\nu\lambda\, S\mu U\varrho + V\lambda\mu\, S\nu U\varrho$$

en door dit in het vierkant te verheffen vinden wij

$$\begin{aligned} -(S\lambda\mu\nu)^2 = {} & (V\mu\nu)^2 (S\lambda U\varrho)^2 + (V\nu\lambda)^2 (S\mu U\varrho)^2 + (V\lambda\mu)^2 (S\nu U\varrho)^2 \\ & + 2\, S\lambda U\varrho\, S\mu U\varrho\, S.\, V\mu\nu\, V\nu\lambda + 2\, S\mu U\varrho\, S\nu U\varrho\, S.\, V\nu\lambda\, V\nu\mu \\ & + 2\, S\lambda U\varrho\, S\nu U\varrho\, S.\, V\lambda\mu V\mu\nu. \end{aligned}$$

Ten einde $\mathfrak{H}$ nader uit te werken, maken wij gebruik van de formulen

$$\begin{aligned} & S\alpha\delta\, S\beta\gamma - S\alpha\gamma\, S\beta\delta = S.\, V\alpha\beta\, V\gamma\delta, \\ & V.\, V\alpha\beta\, V\beta\gamma = -\beta\, S\alpha\beta\gamma, \\ & \delta\, S\alpha\beta\gamma = \alpha\, S\beta\gamma\delta + \beta\, S\gamma\alpha\delta + \gamma\, S\alpha\beta\delta, \end{aligned}$$

waardoor wij ten slotte verkrijgen

$$\mathfrak{H} = (S\lambda\mu\nu)^2\, S\varphi'\lambda\varphi'\mu\varphi'\nu.$$

De waarde van $T\varrho$ blijft echter onbepaald, zoodat ingeval

$$S\varphi'\lambda\varphi'\mu\varphi'\nu = 0$$

is, alle vectoren van één bepaalde richting aan de vergelijking voldoen, terwijl hun lengte onverschillig is.

Lossen wij namelijk de vergelijkingen (29) voor dit geval op, dan vinden wij uit de twee eerste bijv.

$$\frac{S\lambda U\varrho}{S\lambda\varphi'\lambda\varphi'\mu} = \frac{S\mu U\varrho}{S\mu\varphi'\lambda\varphi'\mu} = \frac{S\nu U\varrho}{S\nu\varphi'\lambda\varphi'\mu} \quad \ldots \quad (30)$$

Uit de eerste en derde komt hetzelfde, alleen met het verschil, dat in de noemers $\varphi'\lambda\varphi'\mu$ vervangen wordt door $\varphi'\nu\varphi'\lambda$. Uit de tweede en derde vergelijking wordt dit $\varphi'\mu\varphi'\nu$. Toch is dit onderscheid slechts schijnbaar, want uit de betrekking:

$$S\varphi'\lambda\varphi'\mu\varphi'\nu = 0$$

volgt

$$UV\varphi'\mu\varphi'\nu = UV\varphi'\nu\varphi'\lambda = UV\varphi'\lambda\varphi'\mu.$$

§ 58. Uit de vergelijkingen:

$$\varphi\varrho S\lambda\mu\nu = A V\mu\nu + B V\nu\lambda + C V\lambda\mu$$

en

$$\varrho S\lambda\mu\nu = V\mu\nu S\lambda\varrho + V\nu\lambda S\mu\varrho + V\lambda\mu S\nu\varrho$$

volgt door vermenigvuldiging:

$$\begin{aligned} S\varrho\varphi\varrho(S\lambda\mu\nu)^2 = {} & A(V\mu\nu)^2 S\lambda\varrho + B(V\nu\lambda)^2 S\mu\varrho + C(V\lambda\mu)^2 S\nu\varrho \\ & + (BS\nu\varrho + CS\mu\varrho) S.V\nu\lambda V\lambda\mu + (CS\lambda\varrho + AS\nu\varrho) S.V\lambda\mu V\mu\nu \\ & + (AS\mu\varrho + BS\lambda\varrho) S.V\mu\nu V\nu\lambda \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned} V\varrho\varphi\varrho . S\lambda\mu\nu = {} & (BS\nu\varrho - CS\mu\varrho)\lambda + (CS\lambda\varrho - AS\nu\varrho)\mu \\ & + (AS\mu\varrho - BS\lambda\varrho)\nu. \end{aligned}$$

Daar de vectoren λ, μ, ν niet complanair zijn, kan dus aan de vergelijking

$$V\varrho\varphi\varrho = 0 \quad \text{of} \quad \varphi\varrho = g\varrho$$

alleen voldaan worden door de vergelijkingen

$$\frac{A}{S\lambda\varrho} = \frac{B}{S\mu\varrho} = \frac{C}{S\nu\varrho}.$$

Stellen wij nu de waarde dezer breuken $= g$ dan wordt

$$A = gS\lambda\varrho, \quad B = gS\mu\varrho, \quad C = gS\nu\varrho, \ldots . \quad (31)$$

maar is ook

$$\varphi\varrho\, S\lambda\mu\nu = g\,(V\mu\nu\, S\lambda\varrho + V\nu\lambda\, S\mu\varrho + V\lambda\mu\, S\nu\varrho)$$

en is volgens (25) voldaan aan

$$\varphi\varrho = g\varrho \quad \text{of} \quad (\varphi - g)\varrho = 0.$$

Ter bepaling van g verkrijgen wij door combinatie van de vergelijkingen (27) en (31) drie homogene vergelijkingen in $S\lambda\varrho$, $S\mu\varrho$, $S\nu\varrho$ n.l.

$$\left.\begin{aligned}
(S\mu\nu\varphi'\lambda - g\,S\lambda\mu\nu)S\lambda\varrho + S\nu\lambda\varphi'\lambda\, S\mu\varrho + S\lambda\mu\varphi'\lambda\, S\nu\varrho &= 0,\\
S\mu\nu\varphi'\mu\, S\lambda\varrho + (S\nu\lambda\varphi'\mu - g\,S\lambda\mu\nu)S\mu\varrho + S\lambda\mu\varphi'\mu\, S\nu\varrho &= 0,\\
S\mu\nu\varphi'\nu\, S\lambda\varrho + S\nu\lambda\varphi'\nu\, S\mu\varrho + (S\lambda\mu\varphi'\nu - g\,S\lambda\mu\nu)S\nu\varrho &= 0,
\end{aligned}\right\} \quad (32)$$

In dit geval moet hunne resultante nul zijn, zoodat g bepaald wordt door de derdemachtsvergelijking:

$$\begin{vmatrix}
S\mu\nu\varphi'\lambda - g\,S\lambda\mu\nu & S\nu\lambda\varphi'\lambda & S\lambda\mu\varphi'\lambda\\
S\mu\nu\varphi'\mu & S\nu\lambda\varphi'\mu - g\,S\lambda\mu\nu & S\lambda\mu\varphi'\mu\\
S\mu\nu\varphi'\nu & S\nu\lambda\varphi'\nu & S\lambda\mu\varphi\nu - g\,S\lambda\mu\nu
\end{vmatrix} = 0,$$

of uitgewerkt evenals boven met $\mathfrak{H}$ is geschied:

$$g^3 - m_2 g^2 + m_1 g - m = 0. \quad \ldots\ldots \quad (33)$$

waarin

$$\left.\begin{aligned}
m\, S\lambda\mu\nu &= S\varphi'\lambda\varphi'\mu\varphi'\nu\\
m_1 S\lambda\mu\nu &= S(\lambda\varphi'\mu\varphi'\nu + \varphi'\lambda\mu\varphi'\nu + \varphi'\lambda\varphi'\mu\nu)\\
m_2 S\lambda\mu\nu &= S(\lambda\mu\varphi'\nu + \lambda\varphi'\mu\nu + \varphi'\lambda\mu\nu)
\end{aligned}\right\}. \quad (33a)$$

Door substitutie der waarden van g in (32) verkrijgen wij alzoo naar mate de vergelijking (33) één of drie reëele wortels heeft, één of drie richtingen in de ruimte, volgens welke de operatie φ den vector ϱ niet van richting doch slechts van lengte doet veranderen.

Verder verkrijgen wij

$$S\varrho\varphi\varrho = g\varrho^2,$$

zoodat bij iedere waarde van g een afzonderlijke waarde van $S\varrho\varphi\varrho$ behoort.

§ 59. Zijn alzoo g_1, g_2, g_3 de waarden van g en $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ de resp. waarden van ϱ dan wordt identiek

voldaan aan de drie vergelijkingen:

$$(\varphi - g_1)\varrho_1 = 0,\ (\varphi - g_2)\varrho_2 = 0,\ (\varphi - g_3)\varrho_3 = 0 \quad . \quad (34)$$

De vectoren $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ vormen den hoofd-drievlakkenhoek van de functie $\varphi\varrho$.

Evenzoo kan men met φ' den geconjugeerden drievlakkenhoek bepalen.

Opdat nu een der wortels $g = 0$ zij, moet de vergelijking (33) of de daaraanvoorafgaande determinant door $g = 0$ voldaan zijn, dus moet

$$m = 0 \quad \text{of} \quad \mathfrak{H} = 0.$$

Of wel, voor dien vector moet

$$\varphi\varrho = g\varrho = 0.$$

Deze beschouwingen leiden allen tot dezelfde voorwaarde

$$S\varphi'\lambda\varphi'\mu\varphi'\nu = 0.$$

Uit de vergelijkingen (29) kan, door $\gamma = 0$ te stellen, die vector bepaald worden.

Daar iedere vector $\varrho = x\varrho_1 + y\varrho_2 + x\varrho_3$ is, kan men op ϱ successievelijk de operatieën $\varphi - g_1, \varphi - g_2, \varphi - g_3$ toepassen.

Dit geeft:

$$(\varphi - g_3)\varrho = x(\varphi - g_3)\varrho_1 + y(\varphi - g_3)\varrho_2 + z(\varphi - g_3)\varrho_3$$

Uit (34)

$$0 = x(\varphi - g_1)\varrho_1 + y(\varphi - g_2)\varrho + z(\varphi - g_3)\varrho_3.$$

Aftrekkend

$$(\varphi - g_3)\varrho = x(g_1 - g_3)\varrho_1 + y(g_2 - g_3)\varrho_2.$$

En hieruit

$$(\varphi - g_2)(\varphi - g_3)\varrho = x(g_1 - g_3)(\varphi - g_2)\varrho_1 + y(g_2 - g_3)(\varphi - g_2)\varrho_2.$$

Derhalve

$$\left.\begin{aligned}(\varphi - g_2)(\varphi - g_3)\varrho &= x(g_1 - g_2)(g_1 - g_3)\varrho_1\\ (\varphi - g_3)(\varphi - g_1)\varrho &= y(g_2 - g_3)(g_2 - g_1)\varrho_2\\ (\varphi - g_1)(\varphi - g_2)\varrho &= z(g_3 - g_1)(g_3 - g_2)\varrho_3\end{aligned}\right\} \quad . \quad (35)$$

Opereeren wij op deze respectievelijk met $\varphi - g_1$, $\varphi - g_2$, $\varphi - g_3$, zoo geven alle drie:

$$(\varphi - g_1)(\varphi - g_2)(\varphi - g_3)\varrho = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (36)$$

De operatieën $(\varphi - g_1)$ enz. ontnemen dus aan een vector ϱ achtereenvolgens zijne composanten volgens de kanten van den hoofddrievlakkenhoek.

Daar φ' de geconjugeerde functie is, hebben wij

$$\begin{aligned} S\sigma(\varphi - g)\varrho &= S\sigma\varphi\,\varrho - g\,S\sigma\varrho, \\ &= S\varrho\,\varphi'\sigma - g\,S\varrho\,\sigma, \\ &= S\varrho(\varphi' - g)\sigma. \end{aligned}$$

Nu volgt uit

$$(\varphi - g_1)\varrho_1 = 0,$$

$$S\varrho(\varphi - g_1)\varrho_1 = S\varrho_1(\varphi' - g)\varrho = 0.$$

Dus staat $(\varphi' - g_1)\varrho$ loodrecht op ϱ_1, evenzoo $(\varphi' - g_2)\varrho$ loodrecht op ϱ_2. Dus staat $(\varphi' - g_1)(\varphi' - g_2)\varrho = n\varrho'_3$ loodrecht op het vlak door ϱ_1 en ϱ_2, dus zijn de beide drievlakkenhoeken complementair.

Is nu $\varphi'\varrho = \varphi\varrho$, dan is de functie aan zich zelf geconjugeerd, dan zijn de wortels g_1, g_2, g_3 steeds reëel en dus ook de vectoren $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$; want ware dit niet het geval, laat dan

$$g'_2 + g'_3\sqrt{-1} \quad \text{en} \quad \varrho'_2 + \varrho'_3\sqrt{-1}$$

een wortel zijn, dan zou

$$\varphi(\varrho'_2 + \varrho'_3\sqrt{-1}) = (g'_2 + g'_3\sqrt{-1})(\varrho'_2 + \varrho'_3\sqrt{-1})$$

zijn en dus

$$\varphi\varrho'_2 = g'_2\varrho'_2 - g'_3\varrho'_3, \qquad \varphi\varrho'_3 = g'_2\varrho'_3 + g'_3\varrho'_2,$$

verder

$$S\varrho'_3\varphi\varrho'_2 = g'_2 S\varrho'_3\varrho'_2 - g'_3\varrho'^2_3, \quad S\varrho'_2\varphi\varrho'_3 = g'_2 S\varrho'_3\varrho'_2 + g'_3\varrho'^2_2$$

$$g'_3(\varrho'^2_2 + \varrho'^2_3) = S\varrho'_2\,\varphi\varrho'_3 - S\varrho'_3\,\varphi\varrho'_2 = 0.$$

Nu is $\varrho'^2_2 + \varrho'^2_3$ steeds negatief en dus moet $g'_3 = 0$ of wat hetzelfde is, de wortels reëel zijn.

Verder moet dan

$$S\varrho_1(\varphi-g_1)\varrho=0,$$

$S\varrho_1(\varphi-g_1)(\varphi-g_2)\varrho=0$ en $S\varrho_2(\varphi-g_1)(\varphi-g_2)\varrho=0$.
Alzoo staat $(\varphi-g_1)(\varphi-g_2)\varrho$ of ϱ_3, loodrecht op ϱ_1 en ϱ_2.

§ 60. In de vergelijking (36) zijn g_1, g_2, g_3 de wortels van

$$g^3-m_2 g^2+m_1 g-m=0.$$

Wij kunnen derhalve (36) ook schrijven

$$(\varphi^3-m_2\varphi^2+m_1\varphi-m)\varrho=0,$$

of wel symbolisch

$$\varphi^3-m_2\varphi^2+m_1\varphi-m=0.$$

Dit is de symbolische derdemachtsvergelijking van HAMILTON (Elements of Quaternions § 346—366; Lectures on Quaternions § XCVII).

Opereeren wij hierop met φ^{-1} en zetten de termen om, dan is

$$m\varphi^{-1}=m_1-m_2\varphi+\varphi^2.$$

Hiermede is de inverse functie uitgedrukt in directe functieën en dus de vergelijking $\varphi\varrho=\gamma$ of $\varrho=\varphi^{-1}\gamma$ op de eenvoudigste wijze opgelost, want wij zien hieruit, dat alsdan

$$m\varrho=m_1\gamma-m_2\varphi\gamma+\varphi^2\gamma \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (37)$$

Ware nu gegeven $\gamma=0$, dan zijn tevens $\varphi\gamma=\varphi^2\gamma=0$ en de vergelijking geeft $\varrho=0$ of $m=0$ welke laatste voorwaarde dezelfde is als $S\varphi'\lambda\varphi'\mu\varphi'\nu=0$.

Maar uit de vergelijkingen (30) volgt, dat dan de oplossing is

$$U\varrho=UV\varphi'\mu\varphi'\nu=UV\varphi'\nu\varphi'\lambda=UV\varphi'\lambda\varphi'\mu \quad \ldots (38)$$

Is tevens $m_1=0$, zoo geeft dit in verband met (33_a)

$$V\varphi'\mu\varphi'\nu=V\varphi'\nu\varphi'\lambda=V\varphi'\lambda\varphi'\mu=0$$

of

$$U\varphi'\lambda=U\varphi'\mu=U\varphi'\nu.$$

Maar dan voldoet iedere ϱ liggende in het vlak, dat bepaald wordt door

$$S\varrho\varphi'\lambda = S\varrho\varphi'\mu = S\varrho\varphi'\nu = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (39)$$

Als laatste geval hebben wij, dat ook nog $m_2 = 0$ of

$$\varphi'\lambda = \varphi'\mu = \varphi'\nu = 0.$$

Dan is ϱ geheel onbepaald.

Hiermede is de liniaire vector-vergelijking opgelost.

De oplossing van de vergelijking $V\varrho\varphi\varrho = 0$ volgt nu uit de derdemachtsvergelijking (33). Deze geeft g_1, g_2, g_3, terwijl uit (35) volgt:

$$\left.\begin{aligned} \varrho_1 &= U(\varphi - g_2)(\varphi - g_3)\varrho \\ \varrho_2 &= U(\varphi - g_3)(\varphi - g_1)\varrho \\ \varrho_3 &= U(\varphi - g_1)(\varphi - g_2)\varrho \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (40)$$

waardoor de bijbehoorende eenheidsvectoren gevonden zijn.

§ 61. Indien nu $\varphi\varrho$ een aan zich zelf geconjugeerde functie is, heeft de vergelijking $V\varrho\varphi\varrho = 0$ drie reëele wortels. De er aan voldoende drie vectoren staan onderling loodrecht, terwijl de tensors onbepaald blijven. Stellen wij ze nu door i, j en k voor, dan verkrijgen wij uit (25)

$$\varrho = -iSi\varrho - jSj\varrho - kSk\varrho.$$

Verder is dan identiek

$$\varphi i = g_1 i, \qquad \varphi j = g_2 j, \qquad \varphi k = g_3 k$$

en alzoo uit (27)

$$A = -g_1 Si\varrho, \qquad B = -g_2 Sj\varrho, \qquad C = -g_3 Sk\varrho.$$

Daardoor wordt

$$\varphi\varrho = g_1 iSi\varrho + g_2 jSj\varrho + g_3 kSk\varrho.$$

Ook verkrijgen wij

$$\mathfrak{H} = -g_1 g_2 g_3$$

en

$$\begin{aligned} V\varrho\varphi\varrho = {} & i(g_2 - g_3)Sj\varrho\, Sk\varrho + j(g_3 - g_1)Sk\varrho\, Si\varrho \\ & + k(g_1 - g_2)Si\varrho\, Sj\varrho, \end{aligned}$$

terwijl nog

$$S\varrho\varphi\varrho = g_1 (Si\varrho)^2 + g_2 (Sj\varrho)^2 + g_3 (Sk\varrho)^2 = h \quad . \quad (41)$$

Deze uitdrukking is een functie van den tweeden graad in ϱ. Laat men ϱ alle mogelijke richtingen en lengten aannemen, dan zal $S\varrho\varphi\varrho$ ook verschillende waarden verkrijgen. Voor constante waarden van h zal dus het uiteinde van ϱ steeds eindigen in een oppervlak van den tweeden graad. Geven wij nu h verschillende waarden dan verkrijgen wij op deze wijze een stelsel gelijkvormige oppervlakken, wier hoofdassen alle samenvallen volgens de vectoren i, j en k. Indien nu g_1, g_2 en g_3 gelijke teekens hebben, zijn alle oppervlakken ellipsoïden. Zij zijn positief wanneer de hoek tusschen ϱ en $\varphi\varrho$ grooter dan $\frac{\pi}{2}$, negatief wanneer die hoek $< \frac{\pi}{2}$ is. Zijn twee der grootheden g aan elkander gelijk, dan zijn de oppervlakken omwentelingslichamen om den vector van de derde grootheid als as. Is een der grootheden g nul en zijn de beide andere gelijk van teeken, dan zijn de oppervlakken elliptische cylinders, die den vector waarvoor $\varphi\varrho = 0$ is tot as hebben.

Daar wij veronderstellen, dat $g_1 < g_2 < g_3$ is, zullen, indien de teekens ongelijk zijn, g_1 en g_3 van teeken verschillen. Dan vormen de oppervlakken een stelsel hyperboloïden, gedeeltelijk met één, gedeeltelijk met twee mantels, welke gescheiden worden door de gemeenschappelijke asymptotische kegel $S\varrho\varphi\varrho = 0$. Hoe die twee soorten ten opzichte van de assen geplaatst zijn, hangt van het teeken van g_2 en van de operatie φ af. Is dan $g_2 = 0$, dan worden de hyperboloïden hyperbolische cylinders, gescheiden door twee elkaar volgens de j-vector snijdende vlakken, voor welke $S\varrho\varphi\varrho = 0$. Voor de j-vector zelve is dan $\varphi\varrho = \varphi j = 0$. Zijn twee der groot-

heden g gelijk nul, zoo worden de oppervlakken een stelsel evenwijdige platte vlakken loodrecht op den vector van de derde grootheid. Voor iederen vector in één dier vlakken is dan steeds $\varphi\,\varrho = 0$. Zijn alle grootheden $g = 0$, dan is voor iederen vector in de ruimte de vergelijking $\varphi\,\varrho = 0$ vervuld.

7. *Voortzetting der behandeling van het astatisch evenwicht.*

§ 62. Wij zullen nu de gevonden resultaten op het vraagstuk van het evenwicht toepassen.

Het tweede geval van § 55 eischte tot behoud van het evenwicht een draaiing van 180° om een as, die bepaald werd door de vergelijking $V\varrho\,\varphi\,\varrho = 0$ of $\varphi\,\varrho = g\,\varrho$. De vergelijking (33) bepaalt de drie waarden van g, welke hieraan voldoen; en met behulp van (32) vindt men de bij iedere waarde van g behoorende waarden van $S\,\lambda\,\varrho$, $S\,\mu\,\varrho$ en $S\,\nu\,\varrho$. Hierdoor worden de richtingen der vectoren bepaald. Wij weten uit § 55, dat wij eenheidsvectoren hiervoor nemen moeten. Eenvoudiger wordt dit doel bereikt uit de vergelijkingen (40).

In ons geval was

$$\varphi\,\varrho = \Sigma\,(\alpha\,S\varrho\,\beta - \varrho\,S\alpha\,\beta)$$

en dus

$$S\sigma\,\varphi\,\varrho = \Sigma\,(S\sigma\,\alpha\,S\varrho\,\beta - S\sigma\,\varrho\,S\alpha\,\beta) = S\varrho\,\varphi'\,\sigma,$$

waaruit volgt, dat de geconjugeerde functie is

$$\varphi'\,\varrho = \Sigma\,(\beta\,S\varrho\,\alpha - \varrho\,S\alpha\,\beta).$$

Volgens § 51 is

$$\Sigma\,\beta\,S\varrho\,\alpha = \Sigma\,\alpha\,S\varrho\,\beta + V\varrho\,\mathrm{G}$$

en derhalve

$$(\varphi + \varphi')\,\varrho = 2\,\varphi\,\varrho + \varrho\,\mathrm{G}.$$

Dit is een bijzonder geval van de algemeene eigenschap

TAIT „Quaternions" § 174), dat iedere niet aan zich zelf geconjugeerde liniaire vector-functie van een aan zich zelf geconjugeerde verschilt door een term van de gedaante $V\varepsilon\varrho$.

Hebben wij nu zooals in § 55 met een stelsel te doen dat in evenwicht is, dan is $G = 0$ en dus in dat geval

$$\varphi'\varrho = \varphi\varrho.$$

Zoodat dan de functie aan zich zelf geconjugeerd blijkt te zijn.

De vergelijkingen bepalen nu een stelsel van drie loodrecht op elkander staande eenheidsvectoren, die wij i, j, k kunnen noemen, zoodat de eigenschappen van § 61 op ons stelsel van toepassing worden. Stellen wij dus $\lambda = i$, $\mu = j$, $\nu = k$ zoo vinden wij

$$g_1 i = \varphi i = \Sigma(\alpha S i\beta - i S\alpha\beta)$$

en door met Si te opereeren

$$g_1 = -\Sigma(S\alpha\beta + S i\alpha\, S i\beta),$$
$$g_2 = -\Sigma(S\alpha\beta + S j\alpha\, S j\beta),$$
$$g_3 = -\Sigma(S\alpha\beta + S k\alpha\, S k\beta).$$

En alzoo in verband met (41)

$$S i\varphi i = F + \Sigma S i\alpha S i\beta,$$
$$S j\varphi j = F + \Sigma S j\alpha S j\beta,$$
$$S k\varphi k = F + \Sigma S k\alpha S k\beta.$$

Na zulk een draaiing is de viriaal geworden: — zie vergelijking (23)

$$F_i' = -(F + 2\Sigma S i\alpha S i\beta),$$
$$F_j' = -(F + 2\Sigma S j\alpha S j\beta),$$
$$F_k' = -(F + 2\Sigma S k\alpha S k\beta).$$

Schrijft men voor

$$\alpha = x i + y j + z k,$$
$$\beta = X i + Y j + Z k.$$

dan zijn

$\Sigma S i\alpha S i\beta = \Sigma x X$, $\Sigma S j\alpha S j\beta = \Sigma y Y$, $\Sigma S k\alpha S k\beta = \Sigma z Z$,

waarmede onze resultaten overgaan in de waarden in § 31 door F_2, F_3, F_4 aangegeven.

§ 63. Indien nu een der wortels bijv. g_1 gelijk nul is, is voor dien wortel

$$S i \varphi i = -g_1 = 0$$

en wij komen daarmede op het derde geval van § 55, want dan zijn voor dien vector tegelijk

$$S \varrho \varphi \varrho = 0 \quad \text{en} \quad V \varrho \varphi \varrho = 0$$

en dus

$$\varphi \varrho = 0.$$

Daar in dit geval $T\varrho$ gerekend wordt niet nul te zijn, wat op het eerste geval zou terugvoeren, maar onbepaald blijft, mogen wij de vergelijkingen als door $T\varrho$ gedeeld achten en alzoo $\varrho = U\varrho$ beschouwen.

Volgens § 57 is er alleen in dat geval een oplossing mogelijk, wanneer voldaan is aan de voorwaarde

$$S \varphi' \lambda \varphi' \mu \varphi' \nu = 0 \quad \text{of} \quad m = 0.$$

Dit is tevens de voorwaarde, opdat de vergelijking $V \varrho \varphi \varrho = 0$ een wortel 0 hebbe, zoodat de beide beschouwingen tot dezelfde voorwaarde aanleiding geven.

Kiezen wij nu voor λ, μ, ν drie onderling loodrechte eenheidsvectoren, dan wordt de voorwaarde (daar $\varphi' = \varphi$)

$$S \varphi \lambda \varphi \mu \varphi \nu = 0.$$

Of bij instelling der waarde van φ

$$S.\ \Sigma(\alpha S \lambda \beta - \lambda S \alpha \beta).\ \Sigma(\alpha S \mu \beta - \mu S \alpha \beta).\ \Sigma(\alpha S \nu \beta - \nu S \alpha \beta).$$

Stelt men hierin

$$\alpha = x i + y j + z k,$$
$$\beta = X i + Y j + Z k,$$
$$\lambda = i,\ \mu = j,\ \nu = k,$$

dan gaat deze uitdrukking over in de in § 32 berekende. Hiermede is in quaternions de voorwaarde voor het bestaan van een evenwichtsas gevonden. En de as zelve

wordt bepaald uit de voor ons geval luidende vergelijkingen (38):

$$\varrho = U\,V\varphi\,\mu\,\varphi\,\nu = U\,V\varphi\,\nu\,\varphi\,\lambda = U\,V\varphi\,\lambda\,\varphi\,\mu.$$

Of bij de invoering der waarde van φ

$$\varrho = \begin{cases} U\,V\Sigma\,(\alpha\,S\mu\,\beta - \mu\,S\,\alpha\,\beta).\,\Sigma\,(\alpha\,S\,\nu\,\beta - \nu\,S\,\alpha\,\beta), \\ U\,V\Sigma\,(\alpha\,S\,\nu\,\beta - \nu\,S\,\alpha\,\beta).\,\Sigma\,(\alpha\,S\,\lambda\,\beta - \lambda\,S\,\alpha\,\beta), \\ U\,V\Sigma\,(\alpha\,S\lambda\,\beta - \lambda\,S\,\alpha\,\beta).\,\Sigma\,(\alpha\,S\,\mu\,\beta - \mu\,S\,\alpha\,\beta), \end{cases}$$

Daar in dit geval $S\,\varrho\,\varphi\,\varrho = 0$ is, hebben wij ook hier

$$\mathrm{F}' = \mathrm{F}.$$

Alzoo $\Sigma\,S\,\alpha_q\,\beta$ is constant, $\Sigma\,V\alpha_q\,\beta = 0$.

Wij zien uit het voorgaande, dat bij draaiing om een as van astatisch evenwicht het resulteerend quaternion der totale momenten ten opzichte van een punt dier as voortdurend tot een scalar gedegenereerd blijft, welks waarde constant is. Deze waarde behoeft echter niet zooals voor een vlak stelsel (§ 52) nul te zijn.

Is behalve m ook $m_1 = 0$, dan voldoet volgens § 60 iedere vector, die ligt in het vlak bepaald door een der drie vergelijkingen:

$$S\,\varrho\,\varphi\,\lambda = S\,\varrho\,\varphi\,\mu = S\,\varrho\,\varphi\,\nu = 0.$$

Dit is het geval van § 32.

Is tevens $m_2 = 0$ dan wordt ϱ onbepaald. Het stelsel is alzoo in astatisch evenwicht ten opzichte van den oorsprong. De vereischten hiervoor zijn in quaternions:

$$\Sigma\,\beta = 0, \quad \varphi\,\lambda = 0, \quad \varphi\,\mu = 0, \quad \varphi\,\nu = 0.$$

§ 64. De vergelijkingen van § 56 kunnen ook dienen ter oplossing van het algemeene geval

$$\Sigma\,V q\,\alpha\,q^{-1}\,\beta = \mathrm{G}',$$

welke vergelijking wij getransformeerd hebben tot de gedaante (zie verg. (24)):

$$^1/_2\,\Delta\,\mathrm{G} = \varrho\,S\,\varrho\,\mathrm{G} - V\varrho\,\varphi\,\varrho - w\,\varphi\,\varrho,$$

Stellen λ, μ, ν, drie onderling loodrechte eenheids-vectoren voor, dan zijn

$$\varphi\,\varrho = -A\,\lambda - B\,\mu - C\,\nu,$$
$$\varrho = -\lambda\,S\lambda\,\varrho - \mu\,S\mu\,\varrho - \nu\,S\nu\,\varrho.$$

Stellen wij voor ϱ hierin G of Δ G, dan vinden wij

$$\mathrm{G} = -\lambda\,S\lambda\,\mathrm{G} - \mu\,S\mu\,\mathrm{G} - \nu\,S\nu\,\mathrm{G},$$
$$\Delta\,\mathrm{G} = -\lambda\,S\lambda\,\Delta\,\mathrm{G} - \mu\,S\mu\,\Delta\,\mathrm{G} - \nu\,S\nu\,\Delta\,\mathrm{G}$$

en nog is

$$V\varrho\,\varphi\,\varrho = (C\,S\mu\,\varrho - B\,S\nu\,\varrho)\,\lambda + (A\,S\nu\,\varrho - C\,S\lambda\,\varrho)\,\mu + (B\,S\lambda\,\varrho - A\,S\mu\,\varrho)\,\nu.$$

Substitueeren wij nu in onze vergelijking (24) deze waarden, zoo verkrijgen wij bij splitsing

$$\tfrac{1}{2}\,S\lambda\,\Delta\,\mathrm{G} = S\varrho\,\mathrm{G}\,S\lambda\,\varrho + (C\,S\mu\,\varrho - B\,S\nu\,\varrho) - w\,A,$$
$$\tfrac{1}{2}\,S\mu\,\Delta\,\mathrm{G} = S\varrho\,\mathrm{G}\,S\mu\,\varrho + (A\,S\nu\,\varrho - C\,S\lambda\,\varrho) - w\,B,$$
$$\tfrac{1}{2}\,S\nu\,\Delta\,\mathrm{G} = S\varrho\,\mathrm{G}\,S\nu\,\varrho + (B\,S\lambda\,\varrho - A\,S\mu\,\varrho) - w\,C,$$

Dit zijn de drie scalar-vergelijkingen, waaraan (24) aequivalent is. Door B en C te elimineeren verkrijgen wij

$$\tfrac{1}{2}\,(w^2 + (S\lambda\,\varrho)^2)\,S\lambda\,\Delta\,\mathrm{G} + \tfrac{1}{2}\,(S\lambda\,\varrho\,S\mu\,\varrho - w\,S\nu\,\varrho)\,S\mu\,\Delta\,\mathrm{G} + \tfrac{1}{2}\,(S\lambda\,\varrho\,S\nu\,\varrho + w\,S\mu\,\varrho)\,S\nu\,\Delta\,\mathrm{G} = S\lambda\,\varrho\,S\varrho\,\mathrm{G} - w\,A.$$

Opereeren wij op (24) met $S\varrho$, dan verkrijgen wij

$$\tfrac{1}{2}\,S\varrho\,\Delta\,\mathrm{G} + S\varrho\,\mathrm{G} + w\,S\varrho\,\varphi\,\varrho = 0$$

en in verband met de waarde voor Δ G verkrijgen wij door eliminatie van A en C en daarna van B en C:

$$(S\lambda\,\varphi\,\lambda - S\varrho\,\varphi\,\varrho)\,S\lambda\,\varrho + (S\lambda\,\varphi\,\mu + \tfrac{1}{2}\,S\nu\,\Delta\,\mathrm{G})\,S\mu\,\varrho + (S\lambda\,\varphi\,\nu - \tfrac{1}{2}\,S\mu\,\Delta\,\mathrm{G})\,S\nu\,\varrho + \frac{w}{2}\,S\lambda\,\Delta\,\mathrm{G} = 0,$$

$$(S\mu\,\varphi\,\lambda - \tfrac{1}{2}\,S\nu\,\Delta\,\mathrm{G})\,S\lambda\,\varrho + (S\mu\,\varphi\,\mu - S\varrho\,\varphi\,\varrho)\,S\mu\,\varrho + (S\mu\,\varphi\,\nu + \tfrac{1}{2}\,S\lambda\,\Delta\,\mathrm{G})\,S\nu\,\varrho + \frac{w}{2}\,S\mu\,\Delta\,\mathrm{G} = 0,$$

$$(S\nu\,\varphi\,\lambda + \tfrac{1}{2}\,S\mu\,\Delta\,\mathrm{G})\,S\lambda\,\varrho + (S\nu\,\varphi\,\mu - \tfrac{1}{2}\,S\lambda\,\Delta\,\mathrm{G})\,S\mu\,\varrho + (S\nu\,\varphi\,\nu - S\varrho\,\varphi\,\varrho)\,S\nu\,\varrho + \frac{w}{2}\,S\nu\,\Delta\,\mathrm{G} = 0,$$

$$(S\lambda\,\mathrm{G} + \tfrac{1}{2}\,S\lambda\,\Delta\,\mathrm{G})\,S\lambda\,\varrho + (S\mu\,\mathrm{G} + \tfrac{1}{2}\,S\mu\,\Delta\,\mathrm{G})\,S\mu\,\varrho + (S\nu\,\mathrm{G} + \tfrac{1}{2}\,S\nu\,\Delta\,\mathrm{G})\,S\nu\,\varrho + w\,S\varrho\,\varphi\,\varrho = 0.$$

Deze vergelijkingen zijn homogeen in $S\lambda\varrho$, $S\mu\varrho$, $S\nu\varrho$ en w, en dus moet

$$\begin{vmatrix} S\lambda\varphi\lambda - S\varrho\varphi\varrho, & S\lambda\varphi\mu + \tfrac{1}{2}S\nu\Delta_G, & S\lambda\varphi\nu - \tfrac{1}{2}S\mu\Delta_G, & S\lambda\Delta_G, \\ S\mu\varphi\lambda - \tfrac{1}{2}S\nu\Delta_G, & S\mu\varphi\mu - S\varrho\varphi\varrho, & S\mu\varphi\nu + \tfrac{1}{2}S\lambda\Delta_G, & S\mu\Delta_G, \\ S\nu\varphi\lambda + \tfrac{1}{2}S\mu\Delta_G, & S\nu\varphi\mu - \tfrac{1}{2}S\lambda\Delta_G, & S\nu\varphi\nu - S\varrho\varphi\varrho, & S\nu\Delta_G, \\ S\lambda G + \tfrac{1}{2}S\lambda\Delta_G, & S\mu G + \tfrac{1}{2}S\mu\Delta_G, & S\nu G + \tfrac{1}{2}S\nu\Delta_G, & S\varrho\varphi\varrho. \end{vmatrix} = 0,$$

welke vergelijkingen volkomen dezelfde zijn als die van § 30. Door substitutie van de hieruit gevonden waarden van $S\varrho\varphi\varrho$ vinden wij de bij iedere draaiing behoorende waarde van Δ_F uit vergelijking (23).

§ 65. Uit het derde geval van § 55 is alzoo gebleken, dat, wanneer ϱ een eenheidsvector voorstelt, samenvallende met de draaiingsas, een constant krachtenstelsel bij draaiing om die as alleen dan voortdurend in evenwicht zal zijn, als voldaan is aan de drie voorwaarden

$$\Sigma\beta = 0, \qquad \Sigma V\alpha\beta = 0, \qquad \varphi\varrho = 0.$$

De §§ 34—40 toonden aan op welke wijze krachtenstelsels, die niet aan drie voorwaarden voldeden, konden veranderd worden door toevoeging van twee krachten, zoodat zij er wel aan voldoen. Om die gevallen volgens de hier gebruikte rekenmethode na te gaan, stellen wij de krachten β_1 en β_2 en de vectoren hunner aangrijpingspunten α_1 en α_2. Dan moet voldaan worden aan de vergelijkingen

$$\Sigma\beta + \beta_1 + \beta_2 = 0,$$
$$\Sigma V\alpha\beta + V\alpha_1\beta_1 + V\alpha_1\beta_2 = 0,$$
$$\varphi\varrho + \alpha_1 S\varrho\beta_1 + \alpha_2 S\varrho\beta_2 = \varrho(S\alpha_1\beta_1 + S\alpha_2\beta_2).$$

Is ons bekend, dat het stelsel in evenwicht is, dan zijn

$$\Sigma\beta = 0 \quad \text{en} \quad \Sigma V\alpha\beta = 0,$$

dus

$$\beta_2 = -\beta_1$$

en stellen wij

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \gamma, \qquad \beta_1 = x\gamma,$$

zoo is aan de tweede vergelijking voldaan.

De derde wordt:

$$\varphi\,\varrho = x\,(\varrho\,\gamma^2 - \gamma\,S\varrho\,\gamma),$$

waaruit

$$V\varrho\,\varphi\,\varrho = -x\,V\varrho\,\gamma\,S\varrho\,\gamma, \qquad S\varrho\,\varphi\,\varrho = x\varrho^2\gamma^2 - x\,(S\varrho\,\gamma)^2,$$
$$(V\varrho\,\varphi\,\varrho)^2 = x^2\,(V\varrho\,\gamma\,S\varrho\,\gamma)^2, \qquad = -x\,(V\varrho\,\gamma)^2.$$

Uit deze beide vergelijkingen:

$$x\,(S\varrho\,\gamma)^2 = -\frac{(V\varrho\,\varphi\,\varrho)^2}{S\varrho\,\varphi\,\varrho}.$$

Verder is $\mathrm{F}_2 = S\alpha_1\,\beta_1 + S\alpha_2\,\beta_2 = x\,\gamma^2$,

dus

$$S\varrho\,\varphi\,\varrho = \varrho^2\,\mathrm{F}_2 + \frac{(V\varrho\,\varphi\,\varrho)^2}{S\varrho\,\varphi\,\varrho},$$

$$\mathrm{F}_2 = \frac{(V\varrho\,\varphi\,\varrho)^2}{S\varrho\,\varphi\,\varrho} - S\varrho\,\varphi\,\varrho = -\frac{(S\varrho\,\varphi\,\varrho)^2 - (V\varrho\,\varphi\,\varrho)^2}{S\varrho\,\varphi\,\varrho},$$

$$\mathrm{F}_2 = \frac{(\varphi\,\varrho)^2}{S\varrho\,\varphi\,\varrho}.$$

Maar $\mathrm{F}_2 = x\,\gamma^2 = -x\,(T\gamma)^2$

en derhalve

$$\frac{x\,(S\varrho\,\gamma)^2}{x\,(T\gamma)^2} = \frac{(V\varrho\,\varphi\,\varrho)^2}{(\varphi\,\varrho)^2}$$

of

$$S\varrho\,U\gamma = \pm\,\frac{V\varrho\,\varphi\,\varrho}{\varphi\,\varrho}.$$

$S\varrho\,U\gamma$ is de cosinus van den hoek, die γ met ϱ maakt, dus de grootheid, die in § 34 met $\varkappa$ is aangegeven.

Uit de formule (17) aldaar is F_2 bekend, welke grootheid in § 43 uitgedrukt is in de grootheden A en S.

Wanneer wij nu bedenken, dat

$$S\varrho\,\varphi\,\varrho = \Sigma\,(S\varrho\,\alpha\,S\varrho\,\beta - \varrho^2\,S\alpha\,\beta)$$

en wij, teneinde dit tot gewone coördinaten over te brengen, de volgende vormen invoeren:

$$\alpha = x\,i + y\,j + z\,k,$$
$$\beta = X\,i + Y\,j + Z\,k,$$
$$\varrho = \lambda\,i + \mu\,j + \nu\,k.$$

dan wordt na uitwerking

$$S\,\varrho\,\varphi\,\varrho = S$$

en

$$\varphi\,\varrho = \Delta.$$

De eenvoudigheid en natuurlijkheid der HAMILTON'sche symbolen, zooals zij hier voorkomen, is treffend. Om in § 34 en § 43 de resultaten duidelijk en eenvoudig te formuleeren, waren naar MÖBIUS de grootheden Δ en S ingevoerd, maar scheen hun keuze alleen door den bijzonderen aard van het vraagstuk bepaald te zijn.

Bij de behandeling met quaternions is de invoering dier functieën totaal overbodig geworden, daar de functie φ, die door hare eigenschappen het geheele vraagstuk van de draaiing van krachtenstelsels beheerscht, ook nu alleen voldoende is om deze oplossingen in hun eenvoudigste gedaante te geven.

De in de §§ 41—45 behandelde evenwichtsfunctie is geen andere dan de reeds herhaalde malen opgetreden grootheid $S\,\varrho\,\varphi\,\varrho$.

In § 44 zagen wij, dat door een geschikte keuze van het coördinatenstelsel de evenwichtsfunctie kon geschreven worden:

$$c_1\,\lambda^2 + c_2\,\mu^2 + c_3\,\nu^2.$$

In § 61 vonden wij (verg. (41))

$$S\,\varrho\,\varphi\,\varrho = g_1\,(S\,i\,\varrho)^2 + g_2\,(S\,j\,\varrho)^2 + g_3\,(S\,k\,\varrho)^2.$$

Is nu

$$\varrho = \lambda\,i + \mu\,y + \nu\,k,$$

dan is

$$S\,i\,\varrho = \lambda\,i^2 = -\lambda$$

en dus

$$c_1 = g_1, \qquad c_2 = g_2, \qquad c_3 = g_3.$$

Zoo blijkt, wanneer wij de mechanische eigenschappen uit de §§ 41—45 ter vergelijking leggen naast de meet-

kundige eigenschappen in § 61, dat de eerste als het ware de vertaling zijn der laatste.

Voor den kegel van het neutrale evenwicht vinden wij in deze symbolen alzoo

$$S\varrho\,\varphi\,\varrho = 0.$$

§ 66. Zoo het gegeven stelsel niet in evenwicht is, schrijven wij onze vergelijkingen

$$\mathrm{R} + \beta_1 + \beta_2 = 0,$$

$$\mathrm{G} + V\alpha_1\,\beta_1 + V\alpha_2\,\beta_2 = 0,$$

$$\varphi\,\varrho + a_1\,S\varrho\,\beta_1 + \alpha_2\,S\varrho\,\beta_2 = \varrho\,(S\alpha_1\,\beta_1 + S\alpha_2\,\beta_2)$$

Om nu de hoofdassen te vinden, elimineeren wij met behulp van de eerste vergelijking β_1 en stellen tegelijkertijd

$$\alpha_2 = \alpha_1 + x\,\varrho,$$

dan wordt de tweede vergelijking

$$\mathrm{G} - V\alpha_1\,\mathrm{R} + x\,V\varrho\,\beta_2 = 0.$$

Om x te elimineeren opereeren wij met $S\varrho.$, dus

$$S\varrho\,\mathrm{G} = S\varrho\,V\alpha_1\,\mathrm{R} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

De derde vergelijking wordt

$$\varphi\,\varrho = \alpha_1\,S\varrho\,\mathrm{R} - \varrho\,S\alpha_1\,\mathrm{R}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (b)$$

Opereerende met $S\mathrm{R}$

$$S\mathrm{R}\,\varphi\,\varrho = 0,$$

of

$$S\varrho\,\varphi'\,\mathrm{R} = 0.$$

Dus een plat vlak (het vlak van verg. (21)).

Passen wij op de resultante R de operatie φ' toe, zoo wordt R normaal op dit vlak. De operatie φ op de hoofdassen toegepast stelt ze loodrecht op R.

Opereeren wij op (b) met $V(\ )\,\mathrm{R}$ dan verkrijgen wij

$$V(\varphi\,\varrho)\,\mathrm{R} = V\alpha_1\,\mathrm{R}\,S\varrho\,\mathrm{R} - V\varrho\,\mathrm{R}\,S\alpha_1\,\mathrm{R}$$

en hierop met $S\varrho$

$$S\varrho\,V(\varphi\,\varrho)\,\mathrm{R} = S\varrho\,V\alpha_1\,\mathrm{R}\,S\varrho\,\mathrm{R},$$

of ingevolge (a)

$$S\mathrm{R}\,\varrho\,\varphi\,\varrho - S\varrho\,\mathrm{G}\,S\varrho\,\mathrm{R} = 0,$$

het kegelvlak (20) van § 35.

Indien wij alle krachten β projecteeren op de richting ϱ is de groote van zulk een projectie $= S\varrho\beta$. De vector γ van het middelpunt der aldus geprojecteerde krachten wordt gegeven door de formule

$$\gamma S\varrho R = \Sigma \alpha S\varrho\beta$$

en dus is

$$\begin{aligned}\gamma S\varrho R &= \varphi\varrho + \varrho F \\ &= (\varphi + F)\varrho\end{aligned}$$

en omgekeerd

$$(\varphi + F)^{-1}\gamma S\varrho R = \varrho.$$

Opereerende met SR

$$SR(\varphi + F)^{-1}\gamma = 1.$$

Dit nu is in quaternions de vergelijking van het centraalvlak; want ϱ is geëlimineerd, zoodat wij de meetkundige plaats van de uiteinden der vectoren γ verkregen hebben.

Uit § 20 verg. (10) is de vergelijking van het hoofdvlak der viriaal

$$SR\gamma = F.$$

Uit (b) volgt

$$\varphi\varrho + \varrho S\alpha_1 R = \alpha_1 S\varrho R$$

en dus als boven opereerend

$$SR(\varphi + S\alpha_1 R)^{-1}\alpha_1 = 1.$$

Opdat α_1 dus voldoe aan de vergelijking van het centraalvlak moet α_1 voldoen aan

$$S\alpha_1 R = F$$

d. w. z. aan de vergelijking van het hoofdvlak der viriaal. M. a. w.: de beide hoofdassen snijden de snijlijn van het centraalvlak met het hoofdvlak der viriaal. (Zie § 36).

§ 67. Is het stelsel herleidbaar tot een enkele resultante, dan is (9)

$$SRG = 0.$$

Dan kiezen wij het snijpunt van de centraal-as met het hoofdvlak tot oorsprong en moet volgens (11)

$$FR^{-1} + VGR^{-1} = 0$$

en daar ook $S_R^{-1} G$ alsdan $= 0$ is, zijn dus

$$F = G = 0.$$

Maar in dat geval is ook

$$\varphi' = \varphi,$$

of de functie φ is een aan zich zelf geconjugeerde.

De vergelijkingen van het vlak en van den kegel worden dan

$$S_R \varphi \varrho = 0 = S \varrho \varphi R,$$
$$S_R \varrho \varphi \varrho = 0.$$

Aan deze laatste wordt voldaan door de voorwaarde

$$V \varrho \varphi \varrho = 0$$

en door te stellen

$$\varrho = U_R.$$

Hieruit volgt dat de kegel gaat door de drie loodrecht op elkander staande vectoren i, j, k, die wortels zijn van $V \varrho \varphi \varrho = 0$ en door den vector R. Daar het vlak $S_R \varphi \varrho = 0$ loodrecht op R staat, moet dit den kegel in twee reëele snijlijnen snijden. In dit geval zijn dus de hoofdassen steeds reëel. Door op hunne vectoren de operatie φ toe te passen komen ze loodrecht op R te staan. De substitutieën

$$\varphi \varrho = -A\lambda - B\mu - C\nu$$
$$S_R \varphi \varrho = -A S_R \lambda - B S_R \mu - C S_R \nu,$$
$$S_R \varrho \varphi \varrho = (B S \nu \varrho - C S \mu \varrho) S_R \lambda + (C S \lambda \varrho - A S \nu \varrho) S_R \mu + (A S \mu \varrho - B S \lambda \varrho) S_R \nu,$$

voeren wij ter berekening in. Zoo wij daarbij stellen

$$\nu = U_R,$$

dan zijn

$$S_R \lambda = S_R \mu = 0 \text{ en } R = \nu T_R$$

en gaan onze vergelijkingen over in

$$C T_R = 0,$$
$$(A S \mu \varrho - B S \lambda \varrho) T_R = 0,$$

of

$$C = 0,$$
$$A S \mu \varrho = B S \lambda \varrho$$

of, de waarden van A, B en C invoerend

$$S\lambda\varphi\nu\, S\lambda\varrho + S\mu\varphi\nu\, S\mu\varrho + S\nu\varphi\nu\, S\nu\varrho = 0,$$

$$S\lambda\varphi\mu\,(S\lambda\varrho)^2 + S\mu\varphi\mu\, S\lambda\varrho\, S\mu\varrho + S\nu\varphi\mu\, S\lambda\varrho\, S\nu\varrho$$
$$= S\lambda\varphi\lambda\, S\lambda\varrho\, S\mu\varrho + (S\mu\varphi\lambda)(S\mu\varrho)^2 + S\nu\varphi\lambda\, S\mu\varrho\, S\nu\varrho.$$

En met inachtneming der eigenschap $\varphi' = \varphi$ of

$$S\sigma\varphi\tau = S\tau\varphi\sigma,$$

verkrijgen wij nu eliminatie van $S\nu\varrho$

$$S\mu\varphi\mu\varphi\nu\,[(S\lambda\varrho)^2 - (S\mu\varrho)^2] = (S\lambda\varphi\mu\varphi\nu - S\mu\varphi\nu\varphi\lambda)\, S\lambda\varrho\, S\mu\varrho.$$

Kiezen wij nu μ zoodanig, dat

$$S\mu\varphi\mu\varphi\nu = 0,$$

dan wordt aan de vergelijking voldaan door

$$S\lambda\varrho = 0 \quad \text{en} \quad S\mu\varrho = 0.$$

De projectiëen der hoofdassen op het vlak $\lambda\mu$ (het hoofdvlak der virialen) zijn dus μ en λ, en staan dus loodrecht op elkander (zie § 37). Om de bij $S\lambda\varrho = 0$ behoorende hoofdas te vinden, hebben wij achtereenvolgens:

$$S\mu\varphi\nu\, S\mu\varrho + S\nu\varphi\nu\, S\nu\varrho = 0,$$

$$S\mu\varrho = -\frac{S\nu\varphi\nu}{S\mu\varphi\nu} S\nu\varrho.$$

En daar

$$\varrho = -\lambda\, S\lambda\varrho - \mu\, S\mu\varrho - \nu\, S\nu\varrho,$$

$$\varrho = x\,(\mu\, S\nu\varphi\nu - \nu\, S\mu\varphi\nu).$$

De vergelijking (a) is in ons geval

$$S\varrho\, V\alpha_1\, \nu = 0,$$

$$x\, S\mu\, V\alpha_1\, \nu\, S\nu\varphi\nu - x\, S\nu\, V\alpha_1\, \nu\, S\mu\varphi\nu = 0.$$

Daar $S\nu\, V\alpha_1\, \nu = 0$ is, is ook $S\mu\, V\alpha_1\, \nu = 0$, en derhalve

$$V\alpha_1\, \nu = x_1\, \lambda,$$

$$\alpha_1 = y\,\mu + z\,\nu.$$

Gesubstitueerd in (b) geeft

$$\varphi\mu\, S\nu\varphi\nu - \varphi\nu\, S\mu\varphi\nu = \mu\, T_R\,(y\, S\mu\varphi\nu + z\, S\nu\varphi\nu).$$

Opereerende met $S\mu$

$$S\lambda\varphi\mu\varphi\nu = T_R\,(y\, S\mu\varphi\nu + z\, S\nu\varphi\nu).$$

Dus vinden wij slechts één betrekking tusschen y en z. Voor $-z$ schrijven wij x, dan wordt de hoofdas:

$$\alpha\, T_{\mathrm{R}}\, S\mu\varphi\nu = \mu\, S\lambda\varphi\mu\varphi\nu + x\,(\mu\, S\nu\varphi\nu - \nu\, S\mu\varphi\nu).$$

Evenzoo de andere

$$\alpha\, T_{\mathrm{R}}\, S\lambda\varphi\nu = \lambda\, S\mu\varphi\nu\varphi\lambda + x\,(\lambda\, S\nu\varphi\nu - \nu\, S\lambda\varphi\nu).$$

§ 68. Het geval van § 38, dat het stelsel zich tot een koppel laat reduceeren, laat zich als volgt behandelen. In dit geval is $\mathrm{R} = 0$, zoodat wij de operatieën S_{R} en $V(\ )_{\mathrm{R}}$ niet hadden mogen toepassen. Wij moeten dus terug naar de vergelijkingen (a) en (b) van § 66, welke nu worden

$$S\varrho\,\mathrm{G} = 0,$$
$$\varphi\varrho = 0.$$

Deze laatste splitst zich nu in

$$A = 0; \qquad B = 0; \qquad C = 0.$$

Daar $S\varrho\,\mathrm{G} = 0$ is, staat ϱ en dus de hoofdas (zoo er een is) loodrecht op G. Daar φ een liniaire functie is, komen er geen twee oplossingen, doch daar α_1 uit de berekening is gevallen, voldoen alle evenwijdige lijnen.

Kiezen wij den vector $\nu \parallel \mathrm{G}$, dan wordt $S\nu\varrho = 0$, en dit in de drie andere ingevoerd, geeft

$$S\lambda\varphi\lambda\, S\lambda\varrho + S\lambda\varphi\mu\, S\mu\varrho = 0,$$
$$S\mu\varphi\lambda\, S\lambda\varrho + S\mu\varphi\mu\, S\mu\varrho = 0,$$
$$S\nu\varphi\lambda\, S\lambda\varrho + S\nu\varphi\mu\, S\mu\varrho = 0.$$

Deze drie vergelijkingen stemmen overeen, zoodra

$$S\lambda\varphi\lambda\varphi\mu = S\mu\varphi\lambda\varphi\mu = S\nu\varphi\lambda\varphi\mu = 0$$

en dan geeft bijv. de derde vergelijking de hoofdas

$$\varrho = x\,(\lambda\, S\,\mathrm{G}\varphi\mu - \mu\, S\,\mathrm{G}\varphi\lambda).$$

§ 69. Zijn alle krachten evenwijdig aan een bepaald vlak, dan kiezen we van de drie vectoren λ, μ, ν de

laatste loodrecht op dat vlak, dus

$$S\nu\beta = 0,$$
$$S\nu\,\mathrm{R} = 0,$$
$$\mathrm{R} = -\lambda S\lambda\,\mathrm{R} - \mu S\mu\,\mathrm{R},$$
$$S\mu\,\mathrm{G} = S\mu\Sigma V\alpha\beta = \Sigma S\mu\alpha\beta,$$
$$= \Sigma S\nu\lambda\alpha\beta = \Sigma S\nu V\lambda\alpha\beta,$$
$$= \Sigma S\nu\lambda S\alpha\beta - \Sigma S\nu\alpha S\lambda\beta + \Sigma S\nu\beta S\lambda\alpha,$$
$$= -\Sigma S\nu\alpha S\lambda\beta.$$

En derhalve

$$S\mu\,\mathrm{G} = -S\lambda\varphi'\nu = -S\nu\varphi\lambda,$$

evenzoo

$$S\lambda\,\mathrm{G} = S\mu\varphi'\nu = S\nu\varphi\mu.$$

Hierdoor wordt de vergelijking van het vlak, daar

$$\varphi\nu = -\nu\,\mathrm{F}, \qquad S\lambda\varphi\nu = 0, \qquad S\mu\varphi\nu = 0,$$
$$(S\lambda\varphi\lambda S\lambda\,\mathrm{R} + S\mu\varphi\lambda S\mu\,\mathrm{R})S\lambda\varrho$$
$$+ (S\lambda\varphi\mu S\lambda\,\mathrm{R} + S\mu\varphi\mu S\mu\,\mathrm{R})S\mu\varrho = 0,$$

en die van den kegel:

$$(S\lambda\,\mathrm{G}\,S\lambda\,\mathrm{R} + S\mu\,\mathrm{G}\,S\mu\,\mathrm{R})[(S\lambda\varrho)^2 + S\mu\varrho)^2]$$
$$+ [(S\nu\,\mathrm{G} - S\mu\varphi\lambda)S\lambda\,\mathrm{R} + (S\lambda\varphi\lambda - S\nu\varphi\nu)S\mu\,\mathrm{R}]S\lambda\varrho\,S\nu\varrho,$$
$$+ [(S\lambda\varphi\mu + S\nu\,\mathrm{G})S\mu\,\mathrm{R} + (S\nu\varphi\nu - S\mu\varphi\mu)S\lambda\,\mathrm{R}]S\mu\varrho\,S\nu\varrho = 0.$$

Een der twee oplossingen is

$$S\lambda\varrho = 0, \qquad S\mu\varrho = 0,$$

of

$$\varrho = \nu.$$

Gesubstitueerd in (b) op bladz. 87 geeft

$$\varphi\nu = -\nu S\alpha_1\,\mathrm{R},$$

of

$$\mathrm{F} = S\alpha_1\,\mathrm{R}.$$

Maar dan is ook

$$S(\alpha_1 + x\nu)\,\mathrm{R} = \mathrm{F}.$$

Aan de vergelijking van het hoofdvlak der viriaal

$$S\gamma\,\mathrm{R} = \mathrm{F},$$

wordt voldaan door

$$\gamma = \alpha_1 + x\nu,$$

dus deze hoofdas ligt geheel in dat vlak (zie § 39).

§ 70. Indien voor een stelsel gegeven is

$$\varphi\,\varrho = \alpha_0\,S\,\mathrm{R}\,\varrho - \varrho\,S\,\alpha_0\,\mathrm{R},$$

volgt uit de formulen

$$\begin{aligned} S\lambda\,\mathrm{G} &= S\nu\,\varphi\,\mu - S\mu\,\varphi\,\nu,\\ S\mu\,\mathrm{G} &= S\lambda\,\varphi\,\nu - S\nu\,\varphi\,\lambda,\\ S\nu\,\mathrm{G} &= S\mu\,\varphi\,\lambda - S\lambda\,\varphi\,\mu,\\ 2\,\mathrm{F} &= S\lambda\,\varphi\,\lambda + S\mu\,\varphi\,\mu + S\nu\,\varphi\,\nu, \end{aligned}$$

dat alsdan

$$\mathrm{G} = V\alpha_0\,\mathrm{R} \quad \text{en} \quad \mathrm{F} = S\alpha_0\,\mathrm{R}.$$

Kiezen wij dan α_0 tot oorsprong, dan worden

$$\mathrm{G} = 0, \qquad \mathrm{F} = 0, \qquad \varphi\,\varrho = 0.$$

De vergelijkingen zijn nu voor alle ϱ voldaan, terwijl $\alpha_1 = \alpha_0 = 0$ wordt. Dus alle lijnen door α_0 kunnen hoofdassen zijn.

Het punt α_0 is dan het middelpunt van het krachtenstelsel.

Daar een functie $\varphi\,\varrho$ negen scalar-constanten bevat, komt de gegeven voorwaarde overeen met negen voorwaarden uitgedrukt door scalar-vergelijkingen. De eene vergelijking voor $\varphi\,\varrho$ representeert in quaternions alzoo de negen voorwaarden uit § 40.

HOOFDSTUK III.

De viriaal in de Dynamica.

A. DYNAMICA VAN EEN PUNT.

a. Afleiding der vergelijking van VILLARCEAU *en* CLAUSIUS.

§ 71. Uit de identieke vergelijking

$$\frac{d(x^2)}{dt} = 2x\frac{dx}{dt}$$

volgt door te differentieeren

$$\frac{d^2(x^2)}{dt} = 2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2x\frac{d^2x}{dt^2}$$

en door vermenigvuldiging met $^1/_2\ m$ en omzetting der termen

$$m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = -xm\frac{d^2x}{dt^2} + {}^1/_2\frac{d^2(mx^2)}{dt^2},$$

of zoo wij d^2x/dt^2 vervangen door X

$$m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = -xX + {}^1/_2\frac{d^2(mx^2)}{dt^2},$$

evenzoo

$$m\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = -yY + {}^1/_2\frac{d^2(my^2)}{dt^2},$$

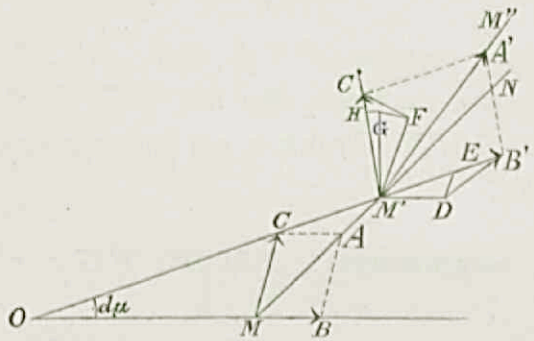
$$m\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = -zZ + {}^1/_2\frac{d^2(mz^2)}{dt^2}$$

en door optelling dezer vergelijkingen

$$m v^2 = F + {}^1/_2 \frac{d^2 (m r^2)}{d t^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (42)$$

Deze vergelijking werd door CLAUSIUS en VILLARCEAU ongeveer gelijktijdig gepubliceerd. Door CLAUSIUS in Poggendorff's Annalen, Bd. 141; in de Göttinger Nachrichten 1871; in Clebsch Mathem. Annalen e. a. m.; YVON VILLARCEAU in de Comptes Rendus: Tome 75.

Een geheel andere afleiding der vergelijking komt voor bij SCHELL „Theorie der Bewegung und der Kräfte" Th. II, Cap. XII.



Laten M, M' en M'' drie opeenvolgende punten der baan zijn. Dan is MM' de richting der snelheid in M, $M'M''$ die der snelheid in M'. Zij de grootte der snelheid in M: $v = MA$, in M': $v' = M'A'$.

Ontbinden wij dan die snelheden in hunne composanten langs en loodrecht op de respectieve voerstralen, dan is

$$MB = v_r = \frac{dr}{dt}$$

en zoo wij den conischen hoek $M'OM$ $d\mu$ noemen:

$$MC = v_\mu = r \frac{d\mu}{dt}.$$

Evenzoo aan het punt M'

$$M'B' = v'_r \quad \text{en} \quad M'C' = v'_\mu$$

Trekken wij dan $M' D =$ en $\parallel MB$ en eveneens $M' F =$ en $\parallel MC$, dan is de totale versnelling de resultante van

$$DB' \text{ en } FC'.$$

Trek dan $DE \perp$ op MB', dan is DB' de resultante van

$$DE \text{ en } EB'$$

DB' geeft dus een composante evenwijdig aan de voerstraal: $EB' = d\frac{dr}{dt}$, en eene loodrecht op de voerstraal:

$$DE = \frac{dr}{dt} d\mu.$$

Trekken wij verder $FG \perp$ vlak $M'' M' O$, dan is $\angle FM' G = d\sigma$ de hoek, die het vlak $OM' M''$ maakt met het vlak OMN. Trekken wij dan verder $GH \perp M' C$ dan geeft FC

1e: een composante $\perp OMM'$: $FG = r\frac{d\mu}{dt} d\sigma$,

2e: een composante $\parallel r$: $GH = -r\frac{d\mu}{dt} d\mu$,

3e: een composante $HC = d\left(r\frac{d\mu}{dt}\right)$.

Nemen wij nu de bij elkander behoorende deelen samen, dan verkrijgen wij als composanten der totale versnelling φ

$$1e: \varphi_r = \frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\mu}{dt}\right)^2$$

$$2e: \varphi_\mu = 2\frac{dr}{dt}\frac{d\mu}{dt} + r\frac{d^2\mu}{dt^2},$$

$$3e: \varphi_\sigma = r\frac{d\mu}{dt}\frac{d\sigma}{dt}.$$

Verder hebben wij door ontbinding der snelheid

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\mu}{dt}\right)^2$$

De waarde van $\frac{d\mu}{dt}$ uit φ_r hierin gesubstitueerd geeft

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r\frac{d^2r}{dt^2} - r\varphi_r$$

$$= {}^1/_2 \frac{d^2(r^2)}{dt^2} - r\varphi_r.$$

Of wanneer wij met m vermenigvuldigen:

$$mv^2 = F + {}^1/_2 \frac{d^2(mr^2)}{dt^2},$$

waarmede de vergelijking teruggevonden is.

§ 72. Schrijft men in de vergelijking ${}^1/_2 mv^2 = T$, dan verkrijgen wij

$$2T = F + {}^1/_2 \frac{d^2(mr^2)}{dt^2},$$

welke een betrekking tusschen de kinetische energie en de viriaal geeft.

Voert men daarentegen de centripetaalkracht in, n. l.

$$P = \frac{mv^2}{\varrho},$$

zoo is

$$P\varrho = F + {}^1/_2 \frac{d^2(mr^2)}{dt^2}.$$

Bezitten de krachten een ergal, welks negatieve partieele differentiaalquotienten de kracht-composanten bepalen, dan is (§ 5)

$$F = x\frac{\partial U}{\partial x} + y\frac{\partial U}{\partial y} + z\frac{\partial U}{\partial z}.$$

Is nu U een homogeene functie van den k^{den} graad, dan is

$$F = kU$$

en dus

$$2T = kU + {}^1/_2 \frac{d^2(mr^2)}{dt^2}$$

en daar $T = E - U$, verkrijgen wij hieruit

$$E = \frac{k+2}{2} U + {}^1/_4 \frac{d^2(m r^2)}{d t^2},$$

of

$$E = \frac{k+2}{k} T - \frac{1}{2k} \frac{d^2(m r^2)}{d t^2},$$

of

$$E = \frac{k+2}{2k} F + {}^1/_4 \frac{d^2(m r^2)}{d t^2}.$$

En uit de beide laatsten of uit de wet der energie

$$E = T + \frac{1}{k} F.$$

Zoo verkrijgen wij bij aantrekking naar een centrum volgens de wet van NEWTON, in welk geval $k = -1$ is:

$$E = {}^1/_2 U + {}^1/_4 \frac{d^2(m r^2)}{d t^2},$$

$$E = -T + {}^1/_2 \frac{d^2(m r^2)}{d t^2},$$

$$E = -{}^1/_2 F + {}^1/_4 \frac{d^2(m r^2)}{a t^2}.$$

Is het ergal een homogeene functie van den -2^{den} graad, dan is $k = -2$ en gaan de drie formulen over in de eene

$$\frac{d^2(m r^2)}{d t^2} = 4 E.$$

$$m r^2 = 2 E t^2 + c_1 t + c_2.$$

β. *Toepassing der vergelijking op de vrije beweging van een punt.*

§ 73. Passen wij deze vergelijkingen toe op de vrije beweging van een punt.

Beweegt het punt M zich langs een rechte lijn, als dan

het voetpunt der loodlijn uit den oorsprong het punt A is en $AM = x$, dan hebben wij

$$r^2 = (OA)^2 + x^2$$

en dus

$$2T = F + \tfrac{1}{2}\frac{d^2(mx^2)}{dt^2},$$

$$= F + mv^2 + mx\varphi,$$

als φ de versnelling voorstelt.

Is dus v constant dan is $\varphi = 0$ en dus $F = 0$.

Is α constant dan is $F = -mx\alpha$.

Beschrijft M op AM de projectie van een gelijkmatige cirkelbeweging, van welke cirkel a de straal moge zijn, dan zijn

$$x = a\cos\vartheta, \qquad v = -a\sin\vartheta\frac{d\vartheta}{dt}$$

en wordt, zoo i de tijd voorstelt, verloopende tusschen twee gelijke phasen der beweging

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{2\pi}{i}.$$

Achtereenvolgens verkrijgen wij hieruit:

$$v = -2\pi a i^{-1}\sin\vartheta,$$

$$x^2 = a^2\cos\vartheta,$$

$$\frac{d^2(mx^2)}{dt^2} = -\frac{8\pi^2 m a^2\cos 2\vartheta}{i^2},$$

$$2T = mv^2 = \frac{4\pi^2 m a^2\sin^2\vartheta}{i^2},$$

$$F = \frac{4\pi^2 m a^2\cos^2\Theta}{i^2} = \frac{4\pi^2 m x^2}{i^2},$$

$$U = \int F x^{-1}\,dx = \frac{2\pi^2 m x^2}{i^2} = \frac{2\pi^2 m a^2\cos^2\vartheta}{i^2}$$

en dus

$$E = T + U = \frac{2\pi^2 m a^2}{i^2}.$$

§ 74. Bij de parabolische baan hebben wij

$$x = v_0 \cos\alpha \,.\, t,$$
$$y = v_0 \sin\alpha \,.\, t - {}^1\!/_2\, g\, t^2,$$

waarin v_0 de aanvangssnelheid en α de hoek, dien deze met den horizon maakt, voorstellen, en dus

$$m r^2 = m t^2 \left(v_0^2 - g\, v \sin\alpha \,.\, t + \frac{g}{4} t^2 \right)$$

en hieruit

$$\frac{d^2(m r^2)}{d t^2} = m (2 v_0^2 - 6 g v_0 \sin\alpha \,.\, t + 3 g t^2)$$

De viriaal is

$$F = m g y = m g (v_0 \sin\alpha \,.\, t - {}^1\!/_2\, g t^2).$$

Daar de kracht constant is, is de graad van U: + 1, zoodat wij verkrijgen

$$F = U.$$

De viriaalvergelijking is

$$T = {}^1\!/_2\, F + {}^1\!/_4 \frac{d^2(m r^2)}{d t^2},$$

of na substitutie

$$T = {}^1\!/_2\, m v_0^2 - m g v_0 \sin\alpha \,.\, t + {}^1\!/_2\, m g t^2$$
$$T = T_0 - F.$$

En tevens is (§ 72)

$$E = {}^3\!/_2\, F + {}^1\!/_4 \frac{d^2(m r^2)}{d t^2}$$

en dus verkrijgen wij

$$E = {}^1\!/_2\, m v_0^2 = T_0.$$

§ 75. Ter toepassing op centraalbeweging gaan wij uit van de vergelijking

$$v^2 = c^2 \left\{ \frac{1}{r^2} + \left(\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\vartheta} \right)^2 \right\}$$

of zoo wij $r^{-1} = \varrho$ stellen

$$v^2 = c^2 \left\{ \varrho^2 + \left(\frac{d\varrho}{d\vartheta} \right)^2 \right\}$$

Verder is

$$\frac{d^2(r^2)}{dt^2} = \frac{d^2(\varrho^{-2})}{d\vartheta^2}\cdot\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 + \frac{d(\varrho^{-2})}{d\vartheta}\cdot\frac{d^2\vartheta}{dt^2}$$

$$\frac{d(\varrho^{-2})}{d\vartheta} = -2\varrho^{-3}\frac{d\varrho}{d\vartheta}$$

$$\frac{d^2(\varrho^{-2})}{d\vartheta^2} = 6\varrho^{-4}\left(\frac{d\varrho}{d\vartheta}\right)^2 - 2\varrho^{-3}\frac{d^2\varrho}{d\vartheta^2}$$

en daar

$$r^2\frac{d\vartheta}{dt} = c$$

is, is

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{c}{r^2} = c\varrho^2$$

en

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = 2c\varrho\frac{d\varrho}{dt} = 2c^2\varrho^3\frac{d\varrho}{d\vartheta}.$$

Dus is

$$\frac{d^2(r^2)}{dt^2} = 2c^2\left(\left(\frac{d\varrho}{d\vartheta}\right)^2 - \varrho\frac{d^2\varrho}{d\vartheta^2}\right).$$

Nu volgt uit de viriaalvergelijking

$$F = mv^2 - \tfrac{1}{2}\frac{d^2(mr^2)}{dt^2}.$$

En derhalve

$$F = mc^2\varrho\left(\varrho + \frac{d^2\varrho}{d\vartheta^2}\right).$$

Als wij nu invoeren

$$F = mr\varphi(r) = m\varrho^{-1}\varphi(r)$$

dan komen wij op de bekende vergelijking

$$\varphi(r) = c^2\varrho^2\left(\varrho + \frac{d^2\varrho}{d\vartheta^2}\right).$$

Bedenken wij, dat

$$U = \frac{F}{k},$$

zoo zien wij, dat

$$E = \frac{mv^2}{2} + U = \frac{mc^2}{2}\left(\varrho^2 + \frac{d\varrho^2}{d\vartheta^2}\right) + \frac{mc^2\varrho}{k}\left(\varrho + \frac{d^2\varrho}{d\vartheta^2}\right)$$

en alzoo

$$E = \frac{m\,c^2}{2\,k}\left\{(k+2)\,\varrho^2 + k\left(\frac{d\,\varrho}{d\,\vartheta}\right)^2 + 2\,\varrho\,\frac{d^2\,\varrho}{d\,\vartheta^2}\right\}.$$

Stellen wij nu

$$\varphi(r) = \mu\, r^n = \mu\, \varrho^{-n}$$

en dus

$$k = n + 1$$

dan wordt de energie der centraalbeweging

$$E = \frac{m\,\mu}{2\,(n+1)} \cdot \frac{(n+3)\,\varrho^2 + (n+1)\left(\frac{d\,\varrho}{d\,\vartheta}\right)^2 + 2\,\varrho\,\frac{d^2\,\varrho}{d\,\vartheta^2}}{\varrho^{n+2}\left(\varrho + \frac{d^2\,\varrho}{d\,\vartheta^2}\right)} \cdot \quad (43)$$

§ 76. Voor cirkelbeweging, $\varrho = \text{const} = \frac{1}{r}$, wordt dit

$$E = \frac{m\,\mu}{2} \cdot \frac{n+3}{n+1}\, r^{n+1}.$$

Voor elliptische beweging om het middelpunt is

$$n = 1\,,\ \varrho^2 = \frac{1 - \varepsilon^2 \cos^2\vartheta}{b^2}\,,$$

$$\frac{d\,\varrho}{d\,\vartheta} = \frac{\varepsilon^2 \cos\vartheta \sin\vartheta}{b\,(1 - \varepsilon^2\cos^2\vartheta)^{1/2}},$$

$$\frac{d^2\,\varrho}{d\,\vartheta^2} = -\frac{\varepsilon^2\,(1 - 2\cos^2\vartheta) + \varepsilon^4\cos^4\vartheta}{b\,(1 - \varepsilon^2\cos^2\vartheta)^{3/2}}.$$

En daaruit wordt:

$$E = \frac{\mu\,(2 - \varepsilon^2)}{2\,(1 - \varepsilon^2)}\, m\,b^2 = \frac{\mu}{2}(2 - \varepsilon^2)\, m\,a^2.$$

Voor elliptische beweging om het brandpunt, waarvoor

$$n = -2\,,\ \varrho = \frac{1 + \varepsilon\cos\vartheta}{p}\,,$$

$$\frac{d\,\varrho}{d\,\vartheta} = -\frac{\varepsilon}{p}\sin\vartheta\,,$$

$$\frac{d^2\,\varrho}{d\,\vartheta^2} = -\frac{\varepsilon}{p}\cos\vartheta,$$

verkrijgen wij

$$E = -\frac{\mu\,(1 - \varepsilon^2)}{2} \cdot \frac{m}{p} = -\frac{\mu\,m}{2\,a}.$$

Bij parabolische beweging om het brandpunt is $\varepsilon = 1$ en dus

$$E = 0.$$

§ 77. In § 72 zagen wij, dat als het ergal een homogeene functie van den -2^{den} graad is, wij de betrekking hebben:

$$\frac{d^2(m r^2)}{d t^2} = 4 E.$$

Hebben wij nu bovendien met een centraalbeweging te doen, dan gelden ook voor dat geval bovenstaande formulen. Dan wordt de viriaalvergelijking

$$m v^2 = 2 E + m r \varphi(r).$$

Daar er een ergal bestaat, geldt dus het theorema der levende kracht, dat in differentiaalvorm voor ons geval wordt

$$d(\tfrac{1}{2} m v^2) + m \varphi(r)\, d r = 0.$$

Door eliminatie van $\varphi(r)$ uit beide vergelijkingen verkrijgen wij:

$$\frac{r}{2}\frac{d(v^2)}{d r} + v^2 = \frac{2 E}{m}.$$

Integreeren wij deze liniaire differentiaal-vergelijking van de 1e orde, dan is 't resultaat

$$v^2 = \frac{a}{r^2} + \frac{2 E}{m},$$

waarin a de integratie-constante voorstelt.

Door substitutie verkrijgen wij verder

$$\frac{d(v^2)}{d r} = -\frac{2 a}{r^3} \text{ en } \varphi(r) = \frac{a}{r^3}.$$

De hierbij optredende kracht moet dus omgekeerd evenredig aan de derde macht van den afstand zijn. Verder is in verband met bovengenoemde formulen

$$v^2 = c^2\left(\varrho^2 + \frac{d\varrho^2}{d\vartheta^2}\right) = \frac{2 E}{m} + a \varrho^2$$

en

$$\varphi(r) = c^2 \varrho^2 \left(\varrho + \frac{d^2 \varrho}{d \vartheta^2}\right) = a \varrho^3.$$

Hieruit volgt

$$\left(\frac{d \varrho}{d \vartheta}\right)^2 = \frac{2 E}{m c^2} + \frac{a - c^2}{c^2} \varrho^2$$

en

$$\frac{d^2 \varrho}{d \vartheta^2} = \frac{a - c^2}{c^2} \varrho.$$

Substitueeren wij dit in de vergelijking (43), dan komt er

$$a = \mu.$$

Alzoo is de differentiaalvergelijking der baan

$$\left(\frac{d \varrho}{d \vartheta}\right)^2 = \frac{2 E}{m c^2} + \frac{\mu - c^2}{c^2} \varrho^2.$$

Eerste geval: $c^2 < \mu$.

Stel dan

$$\frac{2 E}{m c^2} = \alpha^2, \quad \frac{\mu - c^2}{c^2} = \beta^2$$

en de vergelijking wordt:

$$d \vartheta = \frac{d \varrho}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 \varrho^2}}.$$

Indien wij de integratie-constante $\vartheta_0 = \frac{log\, \alpha}{\beta}$ stellen, dan is de integraal

$$\varrho = \frac{\alpha}{2 \beta} \left(e^{\beta \vartheta} - e^{-\beta \vartheta}\right)$$

en de vergelijking der baan

$$2 \beta = r \alpha \left(e^{\beta \vartheta} - e^{-\beta \vartheta}\right).$$

Drukt men met behulp van de perkenwet:

$$r^2 d \vartheta = c \, d t$$

r in t uit door ϑ te elimineeren, dan vindt men

$$r^2 = \frac{2 E}{m} \left(t - t_0\right)^2 + 2 \left(t - t_0\right) \sqrt{\mu - c^2},$$

waarin in dit bijzonder geval de integraal-vergelijking uit § 72 overgaat.

Tweede geval: $c^2 > \mu$.

Stellen wij dan $\frac{c^2 - \mu}{c^2} = \beta^2$, zoo vinden wij achtereenvolgens

$$d\vartheta = \frac{d\varrho}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2 \varrho^2}}$$

$$\vartheta - \vartheta_0 = \frac{1}{\beta} arc\ sin \frac{\beta \varrho}{\alpha}$$

en dus de baan

$$\alpha r\ sin\ \beta (\vartheta - \vartheta_0) = \beta$$

en verder

$$r^2 = \frac{2E}{m}\left(t - t_0\right)^2 + \frac{m(c^2 - \mu)}{2E}.$$

Derde geval: $c^2 = \mu$.

Dan wordt de baan de hyperbolische spiraal:

$$r\vartheta = c\sqrt{\frac{m}{2E}},$$

terwijl ten slotte r, in t uitgedrukt, wordt:

$$r = \left(t_0 - t\right)\sqrt{\frac{2E}{m}}.$$

§ 78. Uit de bekende vergelijkingen

$$v p = c$$

en

$$\frac{m v^2}{2} + U = E$$

volgt

$$\frac{m c^2}{2 p^2} + U = E. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

Nu is

$$U = -\int m \varphi (r)\, dr$$

en

$$F = - m r \varphi (r)$$

en dus

$$d U = F \frac{dr}{r}$$

door differentiatie van (a)

$$- \frac{m c^2}{p^3} d p + F \frac{dr}{r} = 0$$

derhalve

$$F = \frac{m c^2 r}{p^3} \frac{d p}{d r}.$$

Nu is $\frac{d p}{d r} = \frac{r}{R}$, als R de kromtestraal voorstelt, en zoodoende wordt

$$F = \frac{n c^2 r^2}{p^3 R}.$$

Noemen wij de centripetaal-kracht P, dan is

$$P = \frac{m v^2}{R} = \frac{m c^2}{R p^2}$$

en dus

$$F = \frac{r^2}{p} P$$

of

$$F : P = r^2 : p.$$

Uit de vergelijking: (zie boven)

$$F = m c^2 \varrho \left(\varrho + \frac{d^2 \varrho}{d \vartheta^2} \right)$$

volgt, dat $F = 0$ wordt voor

$$\varrho = 0 \quad \text{of} \quad r = \infty$$

of voor

$$\varrho + \frac{d^2 \varrho}{d \vartheta^2} = 0.$$

De integratie dezer differentiaalvergelijking geeft

$$\varrho = A \cos \vartheta + B \sin \vartheta,$$

of door met r te vermenigvuldigen

$$Ax + By = 1;$$

F is alleen gelijk nul bij beweging op een rechte lijn. F is constant voor de centraalbeweging, waarvoor

$$\varrho \left(\varrho + \frac{d^2 \varrho}{d \vartheta^2}\right) = \frac{F}{m c^2},$$

$$\frac{d^2 \varrho}{d \vartheta^2} = \frac{F}{m c^2 \varrho} - \varrho,$$

$$\left(\frac{d \varrho}{d \vartheta}\right)^2 = \frac{2 F}{m c^2} \log \varrho - \varrho^2 + c_1.$$

Zoodat de differentiaalvergelijking dier beweging wordt:

$$d \vartheta = \frac{d \varrho}{\sqrt{\frac{2 F}{m c^2} \log \varrho - \varrho^2 + c_1}}.$$

γ. Toepassing der vergelijking op de gedwongen beweging van een punt.

§ 79. Wordt een punt gedwongen zich op een gegeven kromme lijn te bewegen, en is dan R_t de tangentieele composante der weerstand, N die der normale en σ de hoek, dien de voerstraal met de normaal maakt, dan wordt de viriaalvergelijking:

$$m v^2 = F + r R_t \cos \sigma - r N \cos (r, N) + \tfrac{1}{2} \frac{d^2 (m r^2)}{d t^2}.$$

De werkende kracht kunnen wij ons tevens gesplitst denken in een tangentieele composante $m \frac{d v}{d t}$ en een normale. Deze laatste geeft met N de centrepetaalkracht $\frac{m v^2}{\varrho}$. Na invoering van deze wordt de viriaalvergelijking.

$$m v^2 = - r \left(m \frac{d v}{d t} - R_t\right) \cos \sigma + \frac{m v^2 r}{\varrho} \cos (r, \varrho) + \tfrac{1}{2} \frac{d^2 (m r^2)}{d t^2}.$$

Uit beide vergelijkingen volgt:

$$F - r\,N\cos(r,N) = \frac{mv^2 r}{\varrho}\cos(r,\varrho) - r\,m\frac{dv}{dt}\cos\sigma$$

en daaruit

$$F = r\left[N\cos(r,N) - m\frac{dv}{dt}\cos\sigma\right] + \frac{2\,Tr}{\varrho}\cos(r,\varrho).$$

Lossen wij hieruit T op, dan is

$$T = \frac{\frac{\varrho}{2}F - \varrho\left\{N\cos(r,N) - m\frac{dv}{dt}\cos\sigma\right\}}{2\cos(r,\varrho)}.$$

Als wij het geval beschouwen, dat de krachten een ergal hebben, dat door de homogeene functie U van den k^{den} graad wordt voorgesteld, is

$$U = \frac{F}{k}$$

en door optelling der beide laatste vergelijkingen verkrijgen wij voor de energie

$$E = \frac{\left(\frac{\varrho}{r} + \frac{2\cos(r,\varrho)}{k}\right)F + \varrho\left(m\frac{dv}{dt}\cos\sigma - N\cos(r,N)\right)}{2\cos(r,\varrho)}$$

§ 80. In geval niet de baan zelve voorgeschreven is, doch slechts een oppervlak gegeven is, tot hetwelk de beweging van het punt zich beperken moet, dan is de normale weerstand N steeds gericht langs de normaal op het oppervlak. Maakt dan de kromtestraal der baan ϱ een hoek γ met de kromtestraal R der normale snede, die met de baan de raaklijn gemeen heeft, dan is volgens het theorema van MEUNIER

$$\varrho = R\cos\gamma$$

en dus

$$E = \frac{\left(\frac{R}{r}\cos\gamma + \frac{2}{k}\cos(r,\varrho)\right)F + R\left(m\frac{dv}{dt}\cos\sigma - N\cos(r,N)\right)}{2\cos(r,\varrho)}.$$

Uit drie van de hoeken (r, N), (r, ϱ), γ en σ is de vierde te bepalen, daar zij tot een zelfde drievlakkenhoek behooren.

Beschrijft het punt een geodetische lijn, zoo is $\gamma = 0$, $(r, \varrho) = (r, N)$ en $v =$ constante, dus

$$F = r\,N\cos(r, N) + \frac{2\,T\,r}{R}\cos(r, N)$$

en dus

$$E = \left(\frac{R}{2\,r\cos(r, N)} + \frac{1}{k}\right) F - \tfrac{1}{2}\,R\,N.$$

Is er geen werkende kracht, dan is

$$F = 0,$$

$$N = -\frac{2\,T}{R}$$

en derhalve

$$E = -\tfrac{1}{2}\,R\,N = T.$$

Hiermede is het vraagstuk voorkomende bij GILBERT „Cours de Mécanique Analytique" Deuxième Edition pag. 232 N°. 7 in ruimeren zin opgelost.

§ 81. Is het oppervlak een bol met den oorsprong in het middelpunt, dan zijn

$$\angle(r, N) = 0, \quad \sigma = \frac{\pi}{2}, \angle(r, \varrho) = 0, \quad \gamma = 0, \quad \varrho = r = R$$

en dus

$$F = R\,N + 2\,T,$$

$$E = -\tfrac{1}{2}\,R\,N + \frac{k+2}{2\,k}\,F.$$

Stellen wij weder

$$F = k\,U,$$

dan is

$$E = -\tfrac{1}{2}\,R\,N + \frac{k+2}{2}\,U.$$

en daaruit volgt

$$N = \frac{(k+2)\,U - 2\,E}{R}.$$

Bij zwaartekracht is $U = -gz$, $k = 1$,

$$N = -\frac{2E + 3gz}{R},$$

voor $k = -2$ is N constant. Derhalve is U van de gedaante

$$U = \frac{\alpha}{x^2} + \frac{\beta}{y^2} + \frac{\gamma}{z^2} + \frac{\delta}{yz} + \frac{\varepsilon}{xz} + \frac{\xi}{xy}.$$

§ 82. Is gegeven, dat het punt zich op een bepaalde kromme lijn moet bewegen, dan is in de formulen

$$F = \frac{2Tr}{\varrho}\cos(r, \varrho) - r\left(m\frac{dv}{dt}\cos\sigma - N\cos(r, N)\right)$$

en

$$E = \frac{\left(\frac{\varrho}{r} + \frac{2\cos(r,\varrho)}{k}\right)F + \varrho\left(m\frac{dv}{dt}\cos\sigma - N\cos(r, N)\right)}{2\cos(r, \varrho)}$$

ϱ bekend als kromtestraal der baan. Maar nu moet de richting van N bepaald worden.

Bij vlakke banen valt N langs ϱ en verkrijgen wij, omdat alsdan tevens

$$(r, \varrho) = (r, N) = \frac{\pi}{2} - \sigma,$$

is

$$F = \left(\frac{2T}{\varrho} - m\frac{dv}{dt}tg(r, \varrho) + N\right)r\cos(r, \varrho),$$

$$E = \left(\frac{\varrho}{2r\cos(r, \varrho)} + \frac{1}{k}\right)F + \frac{\varrho}{2}\left(m\frac{dv}{dt}tg(r, \varrho) - N\right).$$

Is de baan een cirkel, dan komen dezelfde vormen als voor de beweging van een punt op een bol voor den dag.

δ. *Transformatie der eerste vergelijking. Tweede vergelijking van* Clausius.

§ 83. Clausius heeft de vergelijking (42) nog een kleine maar belangrijke transformatie doen ondergaan. De vergelijking (42) luidde:

$$mv^2 = F + \tfrac{1}{2}\frac{d^2(mr^2)}{dt^2}.$$

Integreert men deze na vermenigvuldiging met dt van t_0 tot t, dan verkrijgt men

$$\int_{t_0}^{t} m v^2 \, dt = \int_{t_0}^{t} F \, dt + {}^1/_2 \left\{ \left(\frac{dmr^2}{dt} \right)_t - \left(\frac{dmr^2}{dt} \right)_{t_0} \right\}.$$

Hebben wij nu met een periodiesche beweging te doen, dan is na afloop eener periode, waarover een tijd i verloopt $t = t_0 + i$ en worden de waarden der beide differentiaalquotienten in het tweede lid aan elkander gelijk. Deelt men nu tegelijkertijd door i, zoo verkrijgt men voor de beide integralen de gemiddelde waarden der zich onder het teeken bevindende functiën. Duidt men die middelwaarde aan door een dwarsstreep er boven, dan wordt de vergelijking:

$$\overline{m v^2} = \overline{F}.$$

Hebben wij niet met zuiver periodische bewegingen te doen, maar met zulke, waarbij de voerstraal r van het zich bewegend punt steeds kleiner dan een bepaalde grootheid blijft, en binnen die grens toch voortdurend van grootte verandert, nu eens aangroeiend, dan weer afnemend, dan noemt CLAUSIUS zulk een beweging stationair. Nemen wij dan de tijd maar lang genoeg dan mag op den duur toch de vergelijking gelden en wij verkrijgen zoo de stelling van CLAUSIUS:

„Bij stationaire beweging is de gemiddelde kinetische energie gelijk aan de halve gemiddelde viriaal."

§ 84. Naast deze heeft CLAUSIUS nog een tweede vergelijking afgeleid en in Poggendorf's Annalen Bd. 142 S. 433 medegedeeld. Wij zullen daarvan de volgende afleiding geven.

Denken wij ons dat de beweging van het punt door de een of andere oorzaak veranderd wordt. Deze verandering kan een plotselinge zijn, zoowel van plaats, als van snelheid of werkende kracht of uit combinatieën

hiervan bestaan, maar zij kan ook geleidelijk plaats hebben. De oneindig kleine veranderingen hierdoor ontstaande geven wij aan door het teeken der variatie δ, dan is de variatie der levende kracht

$$\delta T = \delta \frac{m}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2)$$
$$= m\left(\frac{dx}{dt}\delta\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}\delta\frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt}\delta\frac{dz}{dt}\right).$$

Beschouwen wij nu een gedeelte der baan, hetwelk in den tijd t_0 tot t_1 $(t_1 - t_0 = i)$ doorloopen wordt, dan kunnen wij ons voorstellen, dat niet alleen de punten der baan x_0, y_0, z_0 en x_1, y_1, z_1 verplaatst worden, maar dat ook de tijd i verandert, en zoo wij rekenen, dat de verandering reeds voor den tijd t_0 kan ingetreden zijn, de variatieën zich dus ook tot den veranderlijke t uitstrekken. Voeren wij nu een onafhankelijk veranderlijke φ in verbonden met t door de vergelijking

$$t - t_0 = i(\varphi - \varphi_0),$$

dan blijft φ bij de variatie onveranderd.

Uit deze betrekking volgt alzoo

$$dt = i\,d\varphi$$

en

$$\delta t = \delta t_0 + (\varphi - \varphi_0)\,\delta i.$$

Differentieeren wij nu de variatie δx dan verkrijgen wij

$$\frac{d\,\delta x}{dt} = \frac{d\,\delta x}{d\varphi}\,\frac{d\varphi}{dt}$$

en omdat ten opzichte van de onafhankelijk variable φ, δ en d verwisseld mogen worden

$$\frac{d\,\delta x}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\,\delta\frac{dx}{d\varphi} = \frac{1}{i}\,\delta\frac{dx}{d\varphi}$$

$$\delta\frac{dx}{d\varphi} = \delta\left(\frac{dx}{dt}\,\frac{dt}{d\varphi}\right)$$
$$= i\,\delta\frac{dx}{dt} + \frac{dx}{dt}\,\delta i$$

en dus

$$\frac{d\,\delta x}{dt} = \frac{\delta\, dx}{dt} + \frac{dx}{dt}\,\delta\,(log\, i).$$

In bovenstaande vergelijking ingevoerd geeft

$$\delta T = m\left(\frac{dx}{dt}\,\frac{d\,\delta x}{dt} + \frac{dy}{dt}\,\frac{d\,\delta y}{dt} + \frac{dz}{dt}\,\frac{d\,\delta z}{dt}\right),$$

$$- m\left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2}\right)\delta\,(log\, i).$$

Vermenigvuldigen wij met dt en integreeren van φ_0 tot φ_1 of wat hetzelfde is van t_0 tot t_1 zoo verkrijgen wij, daar door partieele integratie

$$\int \frac{dx}{dt}\,\frac{d\,\delta x}{dt}\,dt = \frac{dx}{dt}\,\delta x - \int \frac{d^2x}{dt^2}\,dt\,\delta x,$$

is, vervolgens

$$i\int_{\varphi_0}^{\varphi} \delta T\, d\varphi = m\left\{\frac{dx}{dt}\,dx + \frac{dy}{dt}\,\delta y + \frac{dz}{dt}\,dz\right\}_{\varphi_0}^{\varphi}$$

$$- m\int_{\varphi_0}^{\varphi}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\,\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\,\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\,\delta z\right)dt - m\int_{\varphi_0}^{\varphi} v^2\, dt\,\delta\,(log\, i) \quad (44).$$

Indien wij slechts met één punt te doen hebben, is

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = Z.$$

Nemen wij dan verder $\varphi = \varphi_1$, en deelen door i, waardoor wij weder de middelwaarden verkrijgen, dan wordt

$$\overline{\delta T} = \frac{m}{i}\left\{\frac{dx}{dt}\,\delta x + \frac{dy}{dt}\,\delta y + \frac{dz}{dt}\,\delta z\right\}_{\varphi_0}^{\varphi_1}$$

$$- \overline{(X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z)} - m\,\overline{v^2}\,\delta\, log\, i.$$

Bij gesloten banen nemen wij voor $\varphi_1 - \varphi_0$ een geheele omwenteling, alsdan verdwijnt de eerste term rechts

en wij verkrijgen na omzetting de vergelijking van CLAUSIUS:

$$-\overline{(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)} = \frac{m}{2}\delta\,\overline{v^2} + m\,\overline{v^2}\,\delta\,log\,i. \quad . \quad (45)$$

Het eerste lid dezer vergelijking stelt de arbeid voor der kracht, die het punt in beweging brengt, bij de verplaatsing der baan, gemiddeld genomen. Indien men den tijd maar lang genoeg neemt, mag de vergelijking ook voor stationaire bewegingen gelden. Hebben de krachten een ergal, dan wordt de vergelijking

$$\delta\,\overline{U} = \frac{m}{2}\delta\,\overline{v^2} + m\,\overline{v^2}\,\delta\,log\,i.$$

Bevat het ergal een of meer constanten, die bij de verandering der baan ook veranderen, dan moeten in deze vergelijking die grootheden als constant blijvend beschouwd worden.

Bij combinatie der beide vergelijkingen van CLAUSIUS verkrijgt men: (45) en (bldz. 111)

$$-\overline{(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)} = {}^1/_2\,\delta\,\overline{F} + \overline{F}\,\delta\,log\,i.$$

§ 85. CLAUSIUS geeft in de Math. Annalen van CLEBSCH en NEUMANN bd. IV een toepassing dezer vergelijkingen die wij hier in gewijzigden vorm willen mededeelen. Wij nemen gesloten banen, dan is dus

$$\begin{aligned}\delta\,\overline{U} &= m\,\overline{v^2}\left({}^1/_2\,\frac{\delta\,\overline{v^2}}{\overline{v^2}} + \delta\,log\,i\right),\\ &= m\,\overline{v^2}\,({}^1/_2\,\delta\,log\,\overline{v^2} + \delta\,log\,i),\\ &= m\,\overline{v^2}\,\delta\,log\,i\sqrt{\overline{v^2}}.\end{aligned}$$

Stel nu

$$\lambda = i\sqrt{\overline{v^2}}$$

zoo is

$$\delta\,\overline{U} = m\,\overline{v^2}\,\delta\,log\,\lambda.$$

De linkerzijde is een volkomen variatie, dus ook de rechterzijde, dus is $m\,\overline{v^2}$ functie van λ en dus is $\overline{U}$ een

functie van λ, alzoo

$$\overline{U} = f(\lambda),$$
$$\delta\,\overline{U} = f'(\lambda)\,\delta\,\lambda,$$
$$f'(\lambda)\,\delta\,\lambda = m\,\overline{v^2}\,\frac{\delta\,\lambda}{\lambda},$$
$$\frac{m}{2}\,\overline{v^2} = {}^1/_2\,\lambda f'(\lambda),$$

verder is

$$i = \frac{\lambda}{\sqrt{\overline{v^2}}} = \sqrt{\frac{m\,\lambda}{f'(\lambda)}}.$$

De wet der energie geeft

$$U + \frac{m}{2}\,v^2 = E,$$

of

$$E = \overline{U} + \frac{m}{2}\,\overline{v^2}$$

en dus

$$E = f(\lambda) + {}^1/_2\,\lambda f'(\lambda)$$

Indien nu de kracht, volgens welke het punt aangetrokken wordt, $m\,F'(r)$ is, dan stellen wij

$$\int F'(r)\,dr = F(r).$$

Dan is $m\,F(r)$ het ergal en dus

$$m\,.\,\overline{F(r)} = f(\lambda).$$

Om den vorm der functie $f(\lambda)$ te vinden, maakt Clausius gebruik van de cirkelvormige baan waarvoor r constant is, want $f(\lambda)$ is onafhankelijk van den vorm der baan. In dit speciale geval is

$$m\,.\,F(r) = f(\lambda),$$
$$\lambda = i\sqrt{\overline{v^2}} = i\,v,$$
$$\lambda = 2\,\pi\,r,$$
$$r = \lambda/2\,\pi,$$
$$m\,.\,F\left(\frac{\lambda}{2\,\pi}\right) = f(\lambda),$$
$$f'(\lambda) = \frac{m}{2\,\pi}\,F'\left(\frac{\lambda}{2\,\pi}\right).$$

Stelt men nu in het algemeen $\varrho = \frac{\lambda}{2\pi}$, dan is

$$f(\lambda) = m F(\lambda)$$

en dus

$$\overline{F(r)} = F(\varrho),$$
$$\overline{v^2} = \varrho F'(\varrho),$$
$$i = 2\pi \sqrt{\frac{\varrho}{F'(\varrho)}},$$
$$E = m \{ F(\varrho) + \tfrac{1}{2} \varrho F'(\varrho) \}.$$

Voor $F'(r) = \mu r^n$ met uitsluiting van $n = -1$ verkrijgen wij

$$F(r) = \frac{\mu}{n+1} r^{n+1},$$
$$\overline{r^{n+1}} = \varrho^{n+1},$$
$$\overline{v^2} = \mu \varrho^{n+1},$$
$$i = 2\pi \mu^{-\frac{1}{2}} \varrho^{\frac{1-n}{2}},$$
$$E = \frac{\mu (n+3)}{2(n+1)} m \varrho^{n+1}.$$

Bij cirkelbeweging is $\varrho = r$ en komen wij dus op de vergelijking van § 76 bladz. 102 terug.

Bij eliminatie van ϱ uit bovenstaande vergelijkingen komt er

$$\overline{r^{n+1}} = \frac{2(n+1)}{\mu (n+3)} \cdot \frac{E}{m},$$
$$\frac{m}{2} \overline{v^2} = \frac{n+1}{n+3} E,$$
$$i = 2\pi \mu^{-\frac{1}{n+1}} \left(\frac{2(n+1)}{n+3} \cdot \frac{E}{m} \right)^{\frac{1-n}{2(1+n)}},$$

Voor $n = 1$ worden deze:

$$\overline{r^2} = \varrho^2 = \frac{E}{\mu m},$$
$$\frac{m}{2} \overline{v^2} = \frac{m \mu}{2} \varrho^2 = \tfrac{1}{2} E,$$
$$i = 2\pi \mu^{-\frac{1}{2}}.$$

en voor $n = -2$

$$\overline{r^{-1}} = \frac{1}{\varrho} = -\frac{2E}{\mu m},$$

$$\frac{m}{2}\overline{v^2} = \frac{m\mu}{2\varrho} = -E,$$

$$t^2 = \frac{4\pi^2}{\mu}\varrho^3.$$

Op pag. 102 was gevonden voor de elliptische baan om het centrum:

$$E = \frac{\mu}{2}(2-\varepsilon^2)\, m a^2$$

en dus wordt

$$\overline{r^2} = \frac{2-\varepsilon^2}{2} a^2$$

en

$$E = \frac{2\pi^2 m a^2}{t^2}(2-\varepsilon^2).$$

Evenzoo voor elliptische beweging om het brandpunt

$$E = -\frac{\mu m}{2a},$$

dus

$$\overline{r^{-1}} = \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{a},$$

waaruit volgt

$$\mu t^2 = 4\pi^2 a^3 \quad (3^{\text{de}} \text{ wet van KEPPLER}).$$

De perkenwet en de wet der energie zijn in dit geval

$$r^2 \frac{d\vartheta}{dt} = c \text{ en } {}^1\!/_2 v^2 = \frac{\mu}{r} + {}^1\!/_2 v_0^2 - \frac{\mu}{r_0}.$$

Bij integratie blijkt dan dat

$$p = \frac{c^2}{\mu}, \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \left(\frac{c}{\mu}\right)^2 \left(v_0^2 - \frac{2\mu}{r_0}\right)}$$

en dus

$$\overline{r^{-1}} = \frac{1}{a} = \frac{1-\varepsilon^2}{p} = \frac{2}{r_0} - \frac{v_0^2}{\mu}.$$

Verder door eliminatie van μ

$$E = -\frac{2\pi^2 m a^2}{t^2}$$

en

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{r_0} + \frac{m v_0^2}{2 a E}.$$

Of, zoo wij de potentieele energie bij het begin door P_0 aangeven

$$2a : r_0 = P_0 : E.$$

B. DYNAMICA VAN EEN STELSEL.

α. De vergelijkingen van VILLARCEAU *en* CLAUSIUS *voor stelsels.*

§ 86. In § 71 vonden wij

$$m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = -x\,m\frac{d^2x}{dt^2} + \tfrac{1}{2}\frac{d^2(mx^2)}{dt^2},$$

$$m\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = -y\,m\frac{d^2y}{dt^2} + \tfrac{1}{2}\frac{d^2(my^2)}{dt^2},$$

$$m\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = -z\,m\frac{d^2z}{dt^2} + \tfrac{1}{2}\frac{d^2(mz^2)}{dt^2},$$

$$mv^2 = -\left(x\,m\frac{d^2x}{dt^2} + y\,m\frac{d^2y}{dt^2} + z\,m\frac{d^2z}{dt^2}\right) + \tfrac{1}{2}\frac{d^2(mr^2)}{dt^2}$$

en voor meerdere punten

$$\Sigma\, mv^2 = -\Sigma\, m\left(x\frac{d^2x}{dt^2} + y\frac{d^2y}{dt^2} + z\frac{d^2z}{dt^2}\right) + \tfrac{1}{2}\frac{d^2\,\Sigma\, mr^2}{dt^2}.$$

De bewegingsvergelijkingen leeren wel, dat $\Sigma m\frac{d^2x}{dt^2} = \Sigma X$, $\Sigma m\frac{d^2y}{dt^2} = \Sigma Y$, $\Sigma m\frac{d^2z}{dt^2} = \Sigma Z$ is, en mede, dat de koppels ten opzichte van den oorsprong der coördinaten van de krachten $m\frac{d^2x}{dt^2}$ enz. gelijk zijn aan de koppels der

krachten X enz., maar omtrent de virialen dier krachten leeren de bewegingsvergelijkingen ons niets. Uit de vroegere onderzoekingen weten wij reeds, dat de viriaal van in evenwicht verkeerende stelsels niet gelijk nul behoeft te zijn, en het gaat dus niet aan $\frac{d^2 x}{d t^2} = X$ enz. te stellen. Dit blijkt vooral ook uit het theorema van D'ALEMBERT, dat wel zegt, dat de verloren krachten in een stelsel evenwicht met elkander maken, maar nog volstrekt niet, dat zij nul zijn. Ten opzichte van de viriaal is dit ook niet hetzelfde. Wanneer wij daarentegen onder de krachten ΣX enz. niet alleen de uitwendige krachten rekenen, die de beweging bepalen, doch ook alle inwendige krachten en reactieën, die ten gevolge van de beweging optreden, dan mogen wij die gelijkstelling wel invoeren. Alleen in dat geval is het dus geoorloofd de viriaalvergelijking volgens CLAUSIUS te schrijven

$$2\,T = F + \tfrac{1}{2}\,\frac{d^2\,\Sigma\,m\,r^2}{dt^2}.$$

Onder de zelfde beschouwingen wordt ook voor gemiddelde waarden

$$2\,\overline{T} = \overline{F}.$$

De vergelijking (44) luidt bij summatie over meerdere punten

$$i\,\Sigma\int_{\varphi_0}^{\varphi}\delta\,T\,d\varphi = \Sigma\,m\,\Big\{\frac{dx}{dt}\delta x + \frac{dy}{dt}\delta y + \frac{dz}{dt}\delta z\Big\}_{\varphi_0}^{\varphi} - \Sigma\,m\int_{\varphi_0}^{\varphi} v^2\,dt\,\delta\,log\,i$$

$$-\Sigma\,m\int_{\varphi_0}^{\varphi}\left(\frac{d^2x}{d\,t^2}\,\delta\,x + \frac{d^2y}{d\,t^2}\,\delta\,y + \frac{d^2z}{d\,t^2}\,\delta\,z\right)dt.$$

Maar volgens het theorema van D'ALEMBERT is

$$\int_{t_0}^{t} \Sigma \left\{ \left(X - m\frac{d^2x}{dt^2} \right) \delta x + \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2} \right) \delta y + \left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2} \right) \delta z \right\} dt = 0.$$

Door aftrekking verkrijgen wij

$$i\Sigma \int_{\varphi_0}^{\varphi} \delta T d\varphi = \Sigma m \left\{ \frac{dx}{dt}\delta x + \frac{dy}{dt}\delta y + \frac{dz}{dt}\delta z \right\}_{\varphi_0}^{\varphi} - \int_{\varphi_0}^{\varphi} \Sigma m v^2 dt \, \delta \log i,$$

$$- \int_{\varphi_0}^{\varphi} \Sigma (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\, dt.$$

In deze vergelijking stellen ΣX, enz. alleen de uitwendige krachten voor. Integreeren wij tot φ_1 en nemen wij aan, dat bij φ_0 en φ_1 t_0 en t_1 onveranderlijk zijn en evenzoo x_0, y_0, z_0 en x_1, y_1, z_1 dan wordt het eerste lid der rechterzijde der vergelijking nul en daar alsdan i constant is, verkrijgen wij

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\{ \delta T + \Sigma (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) \right\} dt = 0$$

en deze vorm is geen andere dan het principe van HAMILTON zonder de onderstelling eener krachtfunctie. Indien er een krachtfunctie of liever een ergal bestaat, wordt de vergelijking

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T - U)\, dt = 0.$$

Geldt het principe der energie, zoo is

$$\delta T + \delta U = 0$$

en derhalve

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} 2\, T dt = 0,$$

of wel

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \Sigma\, m v\, ds = 0.$$

Dit is het principe der kleinste werking.

Ingeval de totale energie der beweging veranderen kan door uitwendige invloeden, doch wij aannemen dat t de onafhankelijk veranderlijke is, dan hebben wij, daar dan $\delta i = 0$ is

$$\Sigma \int_{t_0}^{t} \delta\, T\, dt = \Sigma\, m \left\{ \frac{dx}{dt}\delta x + \frac{dy}{dt}\delta y + \frac{dz}{dt}\delta z \right\}_{t_0}^{t} + \int_{t_0}^{t} \delta\, U\, dt,$$

en daar

$$\delta\, T + \delta\, U = \delta\, E,$$

is ook

$$\delta \int_{t_0}^{t} (2\, T - E) = \Sigma\, m \left\{ \frac{dx}{dt}\delta x + \frac{dy}{dt}\delta y + \frac{dz}{dt}\delta z \right\}_{t_0}^{t}.$$

Bij banen met vaste eindpunten en gesloten banen is dus

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (2\, T - E)\, dt = 0,$$

of

$$2\, \delta\, T = \delta\, E.$$

Voor gesloten banen met veranderlijken omloopstijd verkrijgen wij op dezelfde wijze

$$\int_{\tau_0}^{\tau_1} \left\{ T\, \delta\, log\, (T_i)^2 - \delta E \right\} d\tau = 0.$$

In geval van stationaire beweging daarentegen, valt ook wel het eerste lid ter rechterzijde weg, doch dan verkrijgen wij na deeling door i de vergelijking van Clausius

$$\overline{\delta T} = -\Sigma\, (\overline{X\, \delta x + Y\, \delta y + Z\, \delta z}) - \Sigma\, m \overline{v^2}\, \delta\, log\, i,$$

of wel

$$-\Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = \Sigma\frac{m}{2}\delta\overline{v^2} + \Sigma m\overline{v^2}\delta \log i.$$

In deze vergelijking behoeft in het eerste lid bij vaste onveranderlijke lichamen de som alleen over de uitwendige krachten genomen te worden, daar bij zulke lichamen voor de zich in evenwicht houdende inwendige krachten

$$\Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = 0$$

is, ingevolge het principe der virtueele snelheden.

Clausius heeft deze vergelijking voor stelsels in stationaire beweging tot basis genomen voor een afleiding van de tweede hoofdwet der mechanische warmtetheorie.

(Zie Pogg. Ann. Bd. 142. S. 433)

§ 87. Dezelfde schrijver heeft in Pogg. Ann. Jubelband verschillende transformatieën der vergelijking medegedeeld van welke eenige hier plaats mogen vinden.

Als de coördinaten van het zwaartepunt door x_c, y_c, z_c en de relatieve coördinaten van een punt ten opzichte van dat punt door ξ, η, ζ voorgesteld worden zijn,

$$x = x_c + \xi, \quad y = y_c + \eta, \quad z = z_c + \xi,$$

en dus

$$\Sigma m x^2 = \Sigma m (x_2 + \xi)^2 = \Sigma m (x^2_c + 2 x_c \xi + \xi^2).$$

Maar

$$\Sigma m x_c \xi = x_c \Sigma m \xi = 0.$$

Derhalve ook

$$\Sigma m x^2 = M x_c^2 + \Sigma m \xi^2.$$

Op dezelfde wijze

$$\Sigma m \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = M\left(\frac{dx_c}{dt}\right)^2 + \Sigma m\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2.$$

Ook is

$$\Sigma x X = x_c \Sigma X + \Sigma \xi X.$$

Vormt men deze drie vergelijkingen eveneens voor

de coördinaten-assen, dan verkrijgt men door optelling

$$\left.\begin{aligned} \Sigma m r^2 &= M r_c^2 + \Sigma m \varrho^2, \\ \Sigma m v^2 &= M v_c^2 + \Sigma m w^2, \\ \Sigma(x X + y Y + z Z) &= r_c R \cos(r_c, R) + \Sigma(\xi X + y Y + \zeta Z) \end{aligned}\right\} (46),$$

waarin ϱ de relatieve voerstraal, w de relatieve snelheid, r_c de voerstraal van het zwaartepunt, R de resultante van het krachtenstelsel voorstelt.

Ook voor het massacentrum geldt de identieke vergelijking

$$\tfrac{1}{2} \frac{d^2 (x_c^2)}{d t^2} = \left(\frac{d x_c}{d t}\right)^2 + x_c \frac{d^2 x_c}{d t^2}.$$

Dus ook

$$M \left(\frac{d x_c}{d t}\right)^2 = - M x_c \frac{d^2 x_c}{d t} + \frac{M}{2} \frac{d^2 x_c^2}{d t^2}.$$

Volgens een eigenschap van het massacentrum is

$$M \frac{d^2 x}{d t^2} = \Sigma m \frac{d^2 x}{d t^2} = \Sigma X.$$

Derhalve

$$M \left(\frac{d x_c}{d t}\right)^2 = - x_c \Sigma X + \frac{M}{2} \frac{d^2 x_c^2}{d t^2}$$

en alzoo ook

$$M v_c^2 = - r_c R \cos(r_c, R) + \frac{M}{2} \frac{d^2 r_c^2}{d t^2} \quad \ldots\ldots (47)$$

Indien men de waarden (46) in de viriaalvergelijking substitueert en gebruikt maakt van (47), verkrijgt men

$$\Sigma m w^2 = - \Sigma (\xi X + \eta Y + \zeta Z) + \tfrac{1}{2} \frac{d^2 \Sigma m \varrho^2}{d t^2} \quad \ldots (48)$$

zoodat de viriaalvergelijking voor relatieve coördinaten ten opzichte van het zwaartepunt volkomen dezelfde gedaante heeft als voor absolute coördinaten.

In de vergelijking (47) treedt een viriaal op, die men verkrijgt, wanneer alle krachten naar het zwaartepunt als aangrijpingspunt verlegd worden. De inwendige

krachten, die paarsgewijze gelijk en tegengesteld zijn, heffen elkander in dezen vorm op. Maar daar de inwendige krachten in de volledige vergelijking optreden, moeten zij dus in (48) tot hun volle bedrag gebleven zijn. Dit volgt ook uit de eigenschap dezer krachten, dat zij ten opzichte van ieder punt der ruimte in evenwicht zijn, want dan moet volgens § 13, omdat $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ zijn, de waarde van de viriaal onafhankelijk van den oorsprong der coördinaten zijn. In § 8 vonden wij voor de inwendige viriaal

$$F_i = \Sigma \Delta f,$$

waarin f de grootte der krachten tusschen twee deeltjes en Δ hun onderlingen afstand aanduidt. Zoo verkrijgen wij de viriaalvergelijking voor een stelsel gesplitst in de beide vergelijkingen

$$M v_c^2 = - r_c R \cos(r_c, R) + \frac{M}{2} \frac{d^2 r_c^2}{d t^2}.$$

$$\Sigma m w^2 = \Sigma \Delta f - \Sigma (\xi X + \eta Y + \zeta Z) + \tfrac{1}{2} \frac{d^2 \Sigma m \varrho^2}{d t^2},$$

waarin nu de uitdrukking $\Sigma (\xi X + \eta Y + \zeta Z)$ alleen over de uitwendige krachten behoeft genomen te worden.

Wordt het stelsel op eenigerlei wijze in zijne beweging belemmerd, dan moeten de daarvoor noodige krachten als uitwendige in rekening worden gebracht.

De algemeene viriaalvergelijking verkrijgt bij deze splitsing de hiermede overeenkomstige gedaante

$$\Sigma m v^2 = \Sigma \Delta f - \Sigma (x X + y Y + z Z) + \tfrac{1}{2} \frac{d^2 \Sigma m r^2}{d t^2},$$

of zoo wij voor de uitwendige viriaal F_e schrijven

$$\Sigma m v^2 = \Sigma \Delta f + F_e + \tfrac{1}{2} \frac{d^2 \Sigma m r^2}{d t^2}.$$

§ 88. Ten einde de veranderingen, die de uitwendige viriaal ondergaat nader te beschouwen, differentieeren

wij deze grootheid ten opzichte van den tijd. Dan wordt

$$\frac{dF_e}{dt} = -\Sigma\left(X\frac{dx}{dt} + Y\frac{dy}{dt} + Z\frac{dz}{dt}\right) - \Sigma\left(x\frac{dX}{dt} + y\frac{dY}{dt} + z\frac{dZ}{dt}\right).$$

Ingevolge de regels der differentiaal-rekening wordt het eerste lid gevonden door in het eerste lid der rechterzijde de krachtcomposanten constant te laten, in het tweede lid daarentegen met de coördinaten der aangrijpingspunten aldus te handelen.

Voeren wij dan de drie centra in, die in § 28 beschouwd werden en dienen kunnen ter bepaling van het centraalvlak, dan hebben wij

$$x_1 \Sigma X = \Sigma x X, \quad y_2 \Sigma y = \Sigma y Y, \quad z_3 \Sigma Z = \Sigma z Z.$$

Differentieëren wij deze met constante coördinaten der aangrijpingspunten, dan wordt:

$$x_1 d\Sigma X = \Sigma x dX, \quad y_2 d\Sigma Y = \Sigma y dY, \quad z_3 d\Sigma Z = \Sigma z dZ.$$

Nemen wij verder aan, dat de krachten een ergal U bezitten, dan hebben wij:

$$-\Sigma\left(X\frac{dx}{dt} + Y\frac{dy}{dt} + Z\frac{dz}{dt}\right) = \frac{dU}{dt}$$

en dus verkrijgen wij:

$$\frac{dF_e}{dt} = \frac{dU}{dt} - \left(x_1\frac{d\Sigma X}{dt} + y_2\frac{d\Sigma Y}{dt} + z_3\frac{d\Sigma Z}{dt}\right).$$

Bezit het krachtenstelsel een centrum, welks coördinaten x_0, y_0, z_0 zijn, dan wordt deze uitdrukking:

$$\frac{dF_e}{dt} = \frac{dU}{dt} - \left(x_0\frac{d\Sigma X}{dt} + y_0\frac{d\Sigma Y}{dt} + z_0\frac{d\Sigma Z}{dt}\right).$$

De uitwendige viriaal blijft constant, zoodra

$$\frac{dU}{dt} = x_1\frac{d\Sigma X}{dt} + y_2\frac{d\Sigma Y}{dt} + z_3\frac{d\Sigma Z}{dt}.$$

§ 89. Uit de vergelijking:

$$\frac{dU}{dt} = -\Sigma\left(X\frac{dx}{dt} + Y\frac{dy}{dt} + Z\frac{dz}{dt}\right),$$

laat zich in geval van beweging om een vast punt nog

eenige gevolgen afleiden. In dat geval namelijk zijn

$$\frac{dx}{dt} = qz - ry, \quad \frac{dy}{dt} = rx - pz, \quad \frac{dz}{dt} = py - qx.$$

Voeren wij deze in, dan verkrijgen wij

$$\frac{dU}{dt} = \Sigma [p(zY - yZ) + q(xZ - zX) + r(qX - xY]$$

of, zoo wij de composanten van het resulteerend koppel door G_x, G_y, G_z voorstellen:

$$\frac{dU}{dt} = -pG_x - qG_y - rG_z.$$

Noemen wij nu de projectie van het resulteerend koppel op de momentane of de constante draaiingsas δ, dan is

$$dU = -\delta\omega\, dt.$$

Is dus gedurende de beweging voortdurend $\delta = 0$ dan is U constant. Dit geschiedt in twee gevallen: 1e wanneer de as van het resulteerend koppel steeds loodrecht op de draaiingsas staat, 2e wanneer het krachtenstelsel steeds ten opzichte van de draaiingsas in evenwicht is. Heeft een zoodanig evenwicht gedurende de beweging op sommige oogenblikken plaats, dan zal op die oogenblikken het ergal òf maximum òf minimum zijn. Dit maximum of minimum kan ook intreden, zoodra de as van het resulteerend koppel loodrecht op de draaiingsas staat. Wij zien dus, dat de eigenschappen in de §§ 46—49 voor de viriaal afgeleid, voor ieder krachtenstelsel ten opzichte van het ergal gelden. Zijn de krachten in grootte en richting constant, dan is $F_e = U$, waarmede het verband aangetoond is. Bij een krachtenstelsel als in § 11 behandeld is, is zoodra P in den oorsprong ligt $F_e = -U$ en gelden dus eveneens deze eigenschappen, met dit verschil, dat alsdan met een maximum van F_e een minimum van U correspondeert en omgekeerd.

β. Toepassing der vergelijkingen op eenige stelsels.

§ 90. Bij de draaiing van een lichaam om een vast punt moeten wij in de viriaalvergelijking

$$\Sigma m v^2 = \Sigma \Delta f - \Sigma (x X + y Y + z Z) + {}^1/_2 \frac{d^2 \Sigma m r^2}{d t^2},$$

daar alle voerstralen constant in grootte blijven, de laatste term nul stellen en wordt dus de vergelijking

$$\Sigma \Delta f = 2 T - F_e.$$

Vermenigvuldigt men de EULER'sche bewegingsvergelijkingen

$$A \frac{dp}{dt} + (C - B) q r = G_x,$$

$$B \frac{dq}{dt} + (A - C) r p = G_y,$$

$$C \frac{dr}{dt} + (B - A) p q = G_z,$$

resp. met p, q, r en telt men ze op, dan verkrijgt men

$$Ap \frac{dp}{dt} + Bq \frac{dq}{dt} + Cr \frac{dr}{dt} = - \delta \omega \, dt,$$

of daar

$$d U = \delta \omega \, dt$$

is, door integratie

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = - 2 U + \text{constante},$$

en dus

$$T + U = T_0 + U_0 = E.$$

Hierdoor vinden wij voor $\Sigma \Delta f$ de beide uitdrukkingen:

$$\Sigma \Delta f = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - F_e$$

en

$$\Sigma \Delta f = 2 (E - U) - F_e.$$

Onder het teeken F_e is de reactie van het vaste punt niet begrepen, daar men dit punt tot oorsprong kiest, en dus de viriaal van de in dat punt aangrijpende kracht

nul wordt. Als men een ander punt tot oorsprong kiest, zou deze viriaal niet nul zijn, maar een zekere waarde F' hebben. Doch dan zou, ingevolge § 13 bladz. 19, F_e met dezelfde waarde verminderd worden, en de waarde der grootheid $\Sigma\, \Delta f$ dezelfde blijven, want $E - U = T$ is van de keuze van den oorsprong onafhankelijk. Daar nu $\Sigma\, \Delta f$ de inwendige viriaal voorstelt, blijkt het, dat deze voor alle punten der ruimte als oorsprong constant is, wat geen bijzonderheid is, daar wij van deze krachten aangenomen hebben, dat zij twee aan twee gelijk en tegengesteld zijn en dus het stelsel dezer krachten steeds in evenwicht is. Toch blijkt uit dezelfde vergelijkingen, dat $\Sigma\, \Delta f$ ten opzichte van den tijd niet constant is. Wanneer wij dus een vast lichaam beschouwen als een aggregraat van massapunten, die op onderling onveranderlijke afstanden blijven, dan zijn de verschillende Δ's constant en bij differentiatie vinden wij

$$\Sigma\, \Delta \frac{df}{dt} = -2\frac{dU}{dt} - \frac{dF_e}{dt},$$

of daar

$$\frac{dF_e}{dt} = \frac{dU}{dt} - \Sigma\left(x\frac{dX}{dt} + y\frac{dY}{dt} + z\frac{dZ}{dt}\right),$$

$$\Sigma\, \Delta \frac{df}{dt} = -3\frac{dU}{dt} + \Sigma\left(x\frac{dX}{dt} + y\frac{dY}{dt} + z\frac{dZ}{dt}\right).$$

De inwendige krachten blijven constant: 1e wanneer er geen uitwendige krachten zijn, want dan zijn

$$U = F_e = 0$$

en dus

$$\Sigma\, \Delta f = 2E = 2T;$$

deze krachten zijn grooter naarmate de snelheid der beweging grooter is;

2e wanneer het ergal een homogeene functie van den -2^{den} graad is.

Bij constante krachten is

$$U = F_e,$$

$$\Sigma \Delta f = 2E - 3F_e = 2E - 3U.$$

Is het ergal een homogeene functie van den — 1sten graad, dan is

$$\Sigma \Delta f = 2E - U = 2E + F_e$$

en derhalve

$$\Sigma \Delta f - F_e = 2E.$$

In dit geval is het verschil van uit- en inwendige viriaal constant.

Voor een zich vrij bewegend lichaam kan men aan de relatieve viriaalvergelijking, die voor een vast lichaam luidt

$$\Sigma m w^2 = \Sigma \Delta f - \Sigma (\xi X + \eta Y + \zeta Z),$$

dezelfde beschouwingen vastknoopen en verkrijgt men analoge resultaten.

Wij zien dus, dat bij de beweging van een vast lichaam er tusschen de verschillende deeltjes reactieën ontstaan onafhankelijk van den aard der krachten, die ook in rust tusschen de deeltjes onderling werken, doch enkel afhankelijk van den aard der beweging en de op het lichaam werkende uitwendige krachten. Daar zij steeds in evenwicht zijn, worden zij slechts door het niet nul zijn der viriaal verraden. Op den aard der beweging hebben zij geen invloed.

§ 91. Clausius en Villarceau hebben beide reeds in de eerste verhandelingen over hunne vergelijkingen de toepassing gegeven op een stelsel van een groot aantal massapunten, waartusschen geen krachten werken, doch die onder een uitwendigen oppervlakte-druk staan. Daar voor zulk een stelsel $\Sigma m r^2$ wegens het groote aantal als constant mag beschouwd worden, kan zoowel de volledige als de gemiddelde vergelijking gebruikt worden Beide geven dan (zie § 9)

$$T = {}^3/_2 \, \dot{p} v.$$

Voor een massa, die in een stadium tusschen gas en vloeistof verkeert, kan men dan met VAN DER WAALS schrijven

$$T = {}^3/_2 (N + p) v,$$

waarin N en p als in § 9 voorkomen.

§ 92. Werken op de deeltjes geen uitwendige krachten, doch alleen inwendige, die evenredig zijn aan de massa's en een zekere functie der onderlinge afstand, dan is volgens § 12

$$\Sigma m v^2 = {}^1/_2 \iint \varrho \, \varphi(\varrho) \, dm^2 + {}^1/_2 \frac{d^2 \Sigma m r^2}{dt^2}.$$

Maar dan geldt het theorema der levende kracht, en dus is

$${}^1/_2 \Sigma m v^2 + W^1 = constante = E,$$

of

$$\Sigma m v^2 + \iint \psi(\varrho) \, dm^2 = 2 E,$$

en dus

$$\frac{d^2 \Sigma m r^2}{dt^2} = 4 E - 2 \iint \psi(\varrho) \, dm^2 - \iint \varrho \, \varphi(\varrho) \, dm^2,$$

of

$$\frac{d^2 \Sigma m r^2}{dt^2} = 4 E - \iint \{ 2 \psi(\varrho) + \varrho \, \varphi(\varrho) \} \, dm^2.$$

Is nu $\varphi(\varrho) = \varrho^n$, dan is volgens (5)

$$\psi(\varrho) = \frac{1}{n+1} \varrho^{n+1}$$

en daaruit

$$\frac{d^2 \Sigma m r^2}{dt^2} = 4 E - \frac{n+3}{n+1} \iint \varrho^{n+1} \, dm^2.$$

Voor $n = 1$ wordt dit

$$\frac{d^2 \Sigma m r^2}{dt^2} = 4 E - 2 \iint \varrho^2 \, dm^2.$$

Voor $n = -2$

$$\frac{d^2 \Sigma m r^2}{dt^2} = 4 E + \iint \frac{dm^2}{\varrho},$$

$$= 4 E - 2 W^1,$$

en daar $E = T + W^1$

$$T = -\,{}^1\!/_2\, W^1 + {}^1\!/_4 \frac{d^2 \Sigma m r^2}{d t^2}.$$

Voor stationaire beweging, zooals het zonnestelsel, bereikt $\Sigma m r^2$ bij afwisseling zijn maximum- en minimumwaarden, zoodat $\frac{d^2 \Sigma m r^2}{d t^2}$ nu eens positief, dan weer negatief is. F schommelt dus om de waarde van $-\,{}^1\!/_2\, W^1$ heen.

Voor $n = -3$ verkrijgen wij

$$\frac{d^2 \Sigma m r^2}{d t^2} = 4 E$$

of

$$\Sigma m r^2 = 2 E t^2 + c_1 t + c_2,$$

zoodat het polaire traagheidsmoment van het stelsel een quadratische functie van den tijd is. Dit laatste geval omvat de oplossing der opgaven N°. 9 en 10 uit GILBERT, „Cours de Mécanique" IIe Ed. page 261. De daar bedoelde constante blijkt viermaal de totale energie der beweging te zijn.

§ 93. Als voorbeeld van toepassing der gemiddelde viriaalvergelijking op een veranderlijk stelsel kiezen wij de trillende snaar. Daarvoor geeft de vergelijking

$$\Sigma \overline{m v^2} = -\,\Sigma \overline{m y \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}}.$$

Volgens de bewegingsvergelijking is

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

verder is $m = \frac{M}{l} dx$. Voeren wij deze in, dan verkrijgen wij

$$\Sigma \overline{m v^2} = -\,\frac{M a^2}{l} \int_0^l \overline{\left(y \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)} dx.$$

De algemeene integraal der bewegingsvergelijking is

$$y = \sum_{n=0}^{n=\infty} \sin \frac{n\pi}{l} x \left(A_n \cos \frac{n\pi a}{l} t + B_n \sin \frac{n\pi a}{l} t \right),$$

waarin

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(\sigma) \sin \frac{n\pi}{l} \sigma \, d\sigma$$

en

$$B_n = \frac{2}{n a \pi} \int_0^l F(\sigma) \sin \frac{n\pi}{l} \sigma \, d\sigma.$$

In deze uitdrukkingen stellen $f(\sigma)$ en $F(\sigma)$ de waarden van y en $\frac{\partial y}{\partial t}$ voor $t = 0$ voor. Wij hebben dus

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{\pi^2}{l^2} \sum_{n=0}^{n=\infty} n^2 \sin \frac{n\pi}{l} x \left(A_n \cos \frac{n\pi a}{l} t + B_n \sin \frac{n\pi a}{l} t \right).$$

Stelt nu $\tau = \frac{2\,l}{a}$ de periode voor en bedenken wij, dat

$$\int_0^\tau \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \frac{n\pi a}{l} t \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \frac{p\pi a}{l} t \, dt = 0$$

is, zoolang n en p verschillend zijn, of men het product van een sinus en een cosinus heeft, zoo verkrijgt men

$$-\overline{y \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}} = \frac{\pi^2}{l^2 \tau^2} \sum_{n=0}^{n=\infty} n^2 \sin^2 \frac{n\pi}{l} x \left(A_n^2 \int_0^\tau \cos^2 \frac{n\pi a}{l} t \, dt + B_n^2 \int_0^\tau \sin^2 \frac{n\pi a}{l} t \, dt \right)$$

$$= \frac{\pi^2}{2\,l^2} \sum_{n=0}^{n=\infty} n^2 \sin^2 \frac{n\pi}{l} x \left(A_n^2 + B_n^2 \right).$$

Hieruit leiden wij af

$$\Sigma m \bar{v}^2 = \frac{\pi^2 M a^2}{2\,l^3} \sum_{n=0}^{n=\infty} n^2 \int_0^l \sin^2 \frac{n\pi}{l} x \, dx$$

en zoo wij de grootheid $\tau_n = \frac{2}{a}\frac{l}{n}$ invoeren, verkrijgen wij

$$\Sigma m \overline{v^2} = 2\,\overline{T} = \pi^2 M \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{A_n^2 + B_n^2}{\tau_n^2}.$$

Daar iedere term der reeks aan een partiaal-toon der snaar beantwoordt, laat zich deze formule ook gebruiken ter berekening der relatieve intensiteit der boventonen ten opzichte van den grondtoon.

§ 94. Een belangrijke toepassing van de tweede vergelijking van CLAUSIUS op een veranderlijk stelsel, vinden wij in een vraagstuk der hydrodynamika. Werkt namelijk op het volumen-element $d\mu$, welks dichtheid ϱ moge zijn, de kracht $X\varrho\,d\mu$, $Y\varrho\,d\mu$, $Z\varrho\,d\mu$, en het drukkingsverschil $-\frac{\partial p}{\partial x}d\mu, -\frac{\partial p}{\partial y}d\mu, -\frac{\partial p}{\partial z}d\mu$ en zij ω de hoeksnelheid bij draaiing om de Z-as, dan vinden wij

$$\overline{d\mu\left(\frac{\partial p}{\partial x}\delta x + \frac{\partial p}{\partial y}\delta y + \frac{\partial p}{\partial z}\delta z - \varrho X\delta x - \varrho Y\delta y - \varrho Z\delta z\right)} =$$

$$\tfrac{1}{2}\varrho\,d\mu\,\delta\left(\overline{\omega^2(x^2+y^2)}\right) + \varrho\,d\mu\,\overline{\omega\,(x^2+y^2)}\,\delta\,log\,i.$$

Is nu ω constant dan is ook i constant en mogen wij de dwarsstreepen weglaten. Nemen wij daarbij aan, dat de krachten X, Y, Z een ergal U hebben, dan wordt de vergelijking;

$$\delta p + \varrho\,\delta U = \tfrac{1}{2}\omega^2\varrho\,\delta(x^2+y^2)$$

en dus

$$p + \varrho U = \tfrac{1}{2}\varrho\,\omega^2(x^2+y^2) + C.$$

Voor vlakken van gelijken druk, zooals de vrije oppervlakte, geldt dus de vergelijking:

$$\tfrac{1}{2}\omega^2(x^2+y^2) - U = c.$$

Dit resultaat heeft SCHELL „Theorie der Bewegung und der Kräfte" IV Th., Cap. IX, § 10, langs anderen weg gevonden.

§ 95. Wij hebben in § 86 afgeleid voor een stelsel, welks energie veranderlijk is, de vergelijking:

$$\int (T\,\delta\, log\,(T\,i)^2 - \delta\, E)\, d\varphi = 0.$$

Deze vergelijking geldt voor gesloten banen. Hierin stelt $\delta\, E$ de verandering der totale energie voor. Alzoo was

$$\delta\, E = \delta\, T - \Sigma\,(X\,\delta\, x + Y\,\delta\, y + Z\,\delta\, z)$$

Behooren tot de op het stelsel werkende krachten zoowel uit- als inwendige en hebben de inwendige tot ergal U_i, terwijl wij van de uitwendige krachten aannemen dat zij in het algemeen geen ergal bezitten, dan stelt toch voor die krachten $\Sigma\,(X_e\,\delta\, a + Y_e\,\delta\, y + Z_e\,\delta\, z)$ de arbeid voor, die zij op het stelsel uitoefenen. Verricht het stelsel uitwendigen arbeid, dan is de arbeid dier uitwendige krachten negatief. Nemen wij dit geval in de formule op, dan wordt

$$\Sigma\,(X_e\,\delta\, x + Y_e\,\delta\, y + Z_e\,\delta\, z) = -\,\delta\, W$$

en verkrijgen wij

$$\delta\, \varepsilon = \delta\, T + \delta\, U_i + \delta\, W.$$

Daar echter $\delta\, W$ in het algemeen niet de differentiaal van een ergal is, kan bovenstaande vergelijking niet geintegreerd worden, voor dat δx, δy en δz bekend zijn.

Nemen we de inwendige energie E_i dan wordt dit

$$\delta\, E = \delta\, E_i = \delta\, W. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (49)$$

Verder volgt uit de vergelijking

$$\int \left\{ T\,\delta\, log\,(T\,i)^2 - \delta\, E \right\} d\varphi = 0,$$

$$T\,\delta\, log\,(T\,i)^2 - \delta\, E.$$

Bij de tweede vergelijking van Clausius, onder aanname van veranderlijke energie, bij beide leden $\delta\, T$ optellend, verkrijgt men, terwijl dezelfde beschouwingen als boven gelden, de analoge vergelijking

$$\overline{T}\,\delta\, log\,(\overline{T}\,i)^2 = \delta\, E.$$

Is het nu mogelijk dat na verschillende veranderingen $log\,(\overline{T}\,i)^2$ weder dezelfde waarde kan terugkrijgen, dan is $\delta\,log\,(\overline{T}\,i)^2$ een exacte variatie en wordt dus voor zulk een periode

$$\int \frac{\delta E}{T} = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (50)$$

De vergelijkingen (49) en (50) zijn mechanisch analoog aan de beide hoofdwetten der warmteleer.

Voor het heelal, waarvoor wij aannemen dat $\delta E = 0$ is, is ook $\delta W = 0$ en dus, zoo de deelen van het heelal zich niet oneindig ver van elkander verwijderen kunnen, ook

$$\delta\,log\,(\overline{T}\,i)^2 = 0,$$

of

$$\overline{T}\,i = constante.$$

---

§ 96. Gaan wij nu aan het einde onzer beschouwingen gekomen, deze na, dan zien wij, dat bij de bestudeering van krachtenstelsels, de viriaal eene belangrijke functie is, om hunne samenstelling te leeren kennen. Wij hebben gezien dat de leer van het astatisch evenwicht en de daarmede samenhangende der standvastigheid van het evenwicht er geheel door beheerscht worden. Voor vlakke stelsels vonden wij astatisch evenwicht, zoodra de viriaal nul wordt, voor stelsels in de ruimte, zoodra de viriaal der projectie van het stelsel op een vlak loodrecht op de draaiingsas nul is. De evenwichtsfunctie S is juist de viriaal dier projectie. Wij hebben tevens gezien, dat er bij verschillende soorten van krachten een nauw verband bestaat tusschen viriaal en ergal en dat bij standvastige krachten deze grootheden aan elkaar gelijk worden. In de dynamica is de viriaal een gemakkelijk uit de gegevens van het stelsel te bepalen functie

en de vergelijkingen van CLAUSIUS en VILLARCEAU geven daardoor dikwijls een eenvoudig middel ter bepaling der levende kracht. Ook het ergal kan dikwijls eenvoudig in de viriaal uitgedrukt worden en zoo verkrijgt men, zooals wij in de §§ 75—78 voor centraalbeweging afgeleid hebben, belangrijke formulen ter bepaling der totale energie. Of wel, de formule geeft een betrekking tusschen de energie en de reactieën, die bij de beweging optreden, zooals wij in de §§ 79—82 aangetoond hebben. Het eigenaardige der viriaalvergelijking, dat zij een verband aangeeft tusschen drie grootheden: de levende kracht, de viriaal en het polaire traagheidsmoment, maakt, dat zij, zoo een dier grootheden bekend is, zonder integratie een betrekking tusschen twee gewoonlijk in mechanische vergelijkingen niet samenkomende grootheden geeft. In de werken van CLAUSIUS en in het proefschrift van VAN DER WAALS kan men de beteekenis der vergelijking voor natuurkundige toepassingen, waarmede wij ons minder hebben bezig gehouden, herhaaldelijk vinden. Al moge nu YVON DE VILLARCEAU overdrijven, waar hij zijne vergelijking als een nieuw principe der mechanika betiteld, toch blijkt het, dat er met die vergelijking een belangrijke betrekking gewonnen is.

In de §§ 20 en 50—70 is tevens getracht een toepassing te geven van de methode der quaternions op mechanische vraagstukken. Vergelijking met de behandeling dier vraagstukken volgens de methode der Cartesische coördinaten, heeft ook hier de zooveel grootere eenvoudigheid der HAMILTON'sche methode duidelijk aangetoond. Tevens is hier ingevoegd een oplossing van de lineaire vector-vergelijking langs meer elementairen weg, dan de door den uitvinder der quaternions gegevene. Moge het mij gelukt zijn, hiermede een bijdrage gegeven te hebben,

die leiden kan tot een grootere waardeering, dan die waarmede de quaternions tot nog toe in ons vaderland beschouwd werden. Ik twijfel niet of bij meerdere kennis zullen deze steeds meer in toepassing gebracht worden, daar de voornaamste hinderpaal voor hunne invoering wel daarin gelegen is, dat de meeste wiskundigen te weinig geoefend zijn in het gebruik dier symbolen. De zelfde onbekendheid is waarschijnlijk de oorzaak, dat de voorstanders dier methode uit vrees van niet verstaan te worden, nog zoo weinig in hunne werken ervan gebruik hebben gemaakt. Toch zijn de voordeelen groot genoeg om te vertrouwen, dat die tegenstand met der tijd verdwijnen zal.

STELLINGEN.

I.

Het gebruik van imaginaire punten en lijnen in de analytische meetkunde is van groote waarde.

II.

De methode van D'ALEMBERT ter oplossing van liniaire differentiaal-vergelijkingen met constante coëfficienten heeft hare zwakke zijde in het geval van gelijke wortels.

III.

De theorie der Θ-functieën is geen voldoende basis voor de theorie der elliptische functieën.

IV.

De definitie van differentiaal voorkomende bij HAMILTON „Elements of quaternions" Book III, Ch. II, n. 1.

$$d f(x) = Lim_{n=\infty} n \left\{ f\left(x + \frac{dx}{n}\right) - f(x) \right\},$$

is ook in de gewone analyse boven de gebruikelijke te verkiezen.

V.

De gewone quaternions kunnen niet als complexe (imaginaire) grootheden beschouwd worden, wel de biquaternions.

VI.

Voor sommige wiskundige toepassingen wordt het gebruik van quaternions dringend gevorderd.

VII.

De theoretische mechanica moet hare voornaamste uitbreiding van de leer der functieën verwachten.

VIII.

De theorie der wrijving vormt een onderdeel der rationeele mechanica.

IX.

De verdeeling der energie in kinetische en potentieele energie, behoort in de mechanica gehandhaafd te worden.

X.

De beste definitie van massa verkrijgt men uit den volgenden regel, aangegeven door Dr. E. Mach in „die Mechanik in ihrer Entwickelung," Seite 227:

„Das Massenverhältniss zweier Körper ist das negatieve umgekehrte Verhältniss der gegenseitige Beschleunigungen."

XI.

Met de definitie kracht = massa × versnelling worden dan de principes der traagheid en der gelijkheid van actie en reactie overbodig.

XII.

Het uitdrukken van de eenheid van massa in die van lengte en tijd verdient eerst dan aanbeveling, zoodra men een algemeen geldende wet voor de werking der stofdeeltjes ten opzichte van elkander kent.

XIII.

De redeneering, volgens welke FRESNEL aan de verschijnselen van het gepolariseerde licht bij totale reflectie zijn grondformulen tracht te doen beantwoorden, is mathematisch onjuist, en verklaart alzoo die verschijnselen niet.

XIV.

De bezwaren welke E. KETTELER „Theoretische Optik" (Braunschweig 1885, Seiten 79 u. 80) tegen de dispersietheorie van HELMHOLTZ opwerpt, zijn ongegrond.

XV.

De electrodynamische grondstelling van CLAUSIUS verdient niet de voorkeur boven die van WEBER.

XVI.

De wijze, waarop W. SIEMENS de kracht der stormen uit het principe der energie zoekt te verklaren, is onvoldoende.

XVII.

De meerdere of mindere betrouwbaarheid der beginselen, waarop de methode der kleinste quadraten berust, kan slechts door de ervaring aangetoond worden.

XVIII.

Ter bepaling van den afstand der zon is de zoogenaamde physische methode de meest aanbevelingswaardige.

XIX.

De physische toestand der zon kan bij den tegenwoordigen stand der wetenschap niet verklaard worden.

INHOUD.

Bladz.

HOOFDSTUK I. BEPALING, VERSCHILLENDE VORMEN EN HOOFDEIGENSCHAPPEN DER VIRIAAL 1

A. BEPALING EN VERSCHILLENDE VORMEN DER VIRIAAL . . 1

B. HOOFDEIGENSCHAPPEN DER VIRIAAL 18

HOOFDSTUK II. DE VIRIAAL IN DE STATICA . . 27

A. ASTATISCH EVENWICHT 27

α. Vlakke krachtenstelsels 27

β. Krachtenstelsels in de ruimte 32

B. STANDVASTIGHEID VAN EVENWICHT 53

α. De evenwichtsfunctie 53

β. Maxima en minima bij het evenwicht . . . 58

C. BEHANDELING MET QUATERNIONS 64

α. Afleiding der grondvergelijkingen. 64

β Oplossing der liniaire vector-vergelijking . . . 68

γ. Voortzetting der behandeling van het astatisch evenwicht 79

HOOFDSTUK III. DE VIRIAAL IN DE DYNAMICA. 94

A. DYNAMICA VAN EEN PUNT 94

α. Afleiding der vergelijkingen van VILLARCEAU en CLAUSIUS 94

Bladz.

β. Toepassing der vergelijking op de vrije beweging van een punt 98

γ. Toepassing der vergelijking op de gedwongen beweging van een punt 107

δ. Transformatie der eerste vergelijking. Tweede vergelijking van CLAUSIUS 110

B. DYNAMICA VAN EEN STELSEL 118

α. De vergelijkingen van VILLARCEAU en CLAUSIUS voor stelsels 118

β. Toepassing der vergelijkingen op eenige stelsels. 127

STELLINGEN 139

