



De functie van Green

<https://hdl.handle.net/1874/242448>

A^v 192

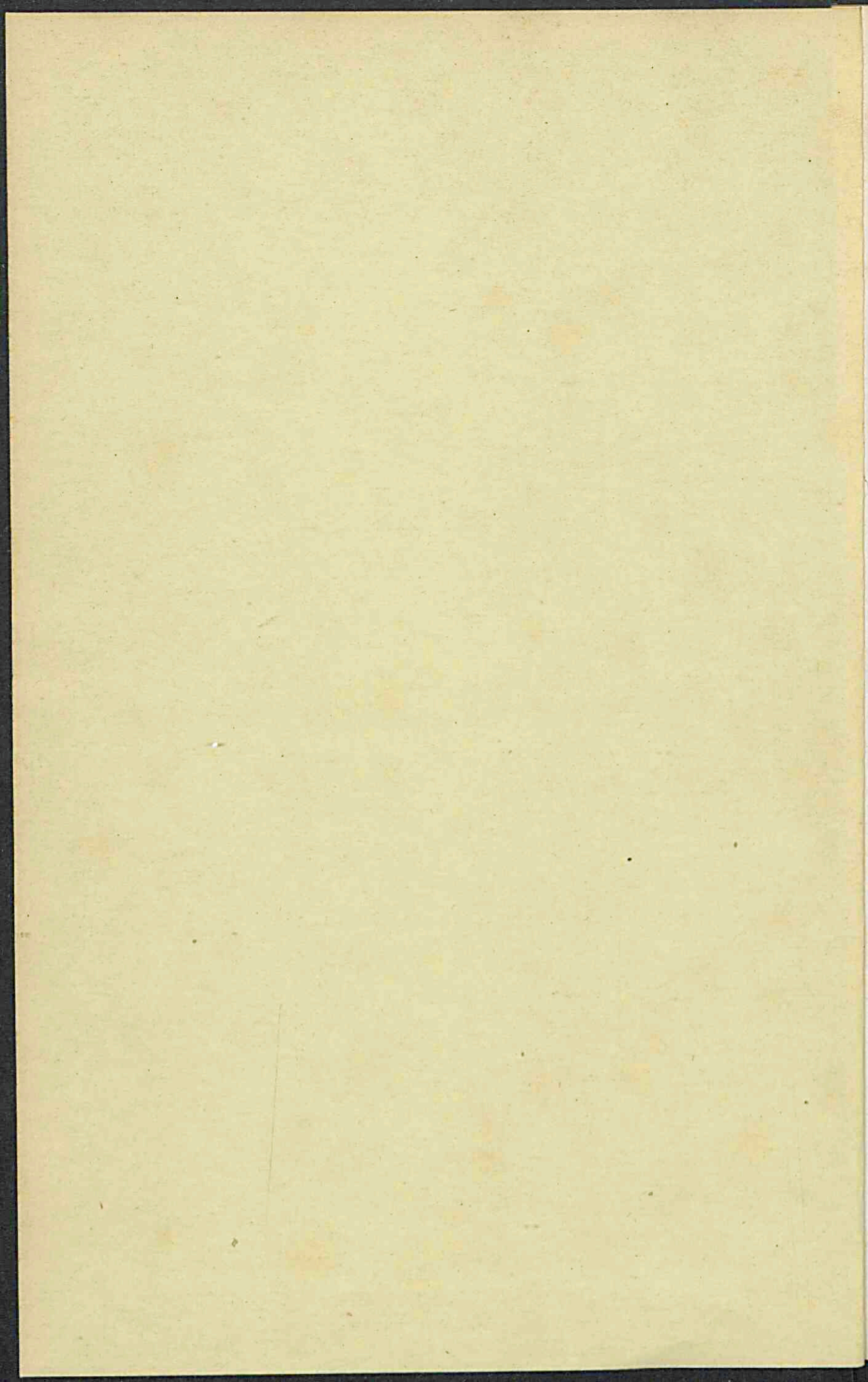
Phys
13 Juni 1879

G. J. LEGEBEKE

DE FUNCTIE VAN GREEN.

recht

A. R. Nyland
No 136



DE FUNCTIE VAN GREEN.

A an 192

DE FUNCTIE VAN GREEN.

PROEFSCHRIFT

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD

VAN

DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE,

AAN DE

RIJKS-UNIVERSITEIT TE UTRECHT,

NA MACHTIGING VAN DEN RECTOR MAGNIFICUS

Mr. J. A. FRUIN,

HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER RECHTSGELEERDHEID,

VOLGENS BESLUIT VAN DEN SENAAAT DER UNIVERSITEIT

EN

OP VOORDRACHT DER WIS- EN NATUURKUNDIGE FACULTEIT,

TE VERDEDIGEN

op Vrijdag, den 13^{den} Juni 1879, des namiddags te 2 uren,

DOOR

GERHARDUS JOANNES LEGERBEKE,

GEBOREN TE KAMPEN.



UTRECHT — J. L. BEIJERS — 1879.



DE LEEUW VAN GREEK

PROEFSTUK

DOOR DE H. A. VAN HOFEN

DE LEEUW

DE LEEUW

DE LEEUW

DE LEEUW

GEDRUKT BIJ G. A. VAN HOFEN, TE UTRECHT.



AAN MIJNE OUDERS.

JAZZ BOOK OF THE

Verhinderden mij de omstandigheden van uw onderwijs, Hooggeleerde Heeren, Hoogleeraren der Wis- en Natuurkundige Faculteit, gebruik te maken, steeds mocht ik echter van uwe zijde belangstelling en welwillendheid ondervinden. Daar, waar het noodig was, kon ik altijd op uwe hulp rekenen. Het is mij eene aangename plicht u daarvoor openlijk mijnen dank te betuigen.

De vriendelijke wijze, waarop gij, hooggeachte OUDEMANS, mij in de practische astronomie den weg weest, zal bij mij steeds in dankbare herinnering blijven.

Hooggeachte promotor, hooggeleerde GRINWIS, sedert tal van jaren, onder allerlei omstandigheden, hebt gij mij door uwen raad voorgelicht, zijt gij mij bij mijne studie behulpzaam geweest. Ontvang mijnen hartelijken dank voor het vele, dat ik u verschuldigd ben.

I N H O U D.

	Bladz.
INLEIDING	1
EERSTE HOOFDSTUK.	
BESCHOUWINGEN OVER DE POTENTIAAL IN HET ALGEMEEN EN DE FUNCTIE VAN GREEN IN HET BIJZONDER	3
§ 1. Voornaamste eigenschappen van de potentiaal. Definitie van P_i en P_n functiën voor een oppervlak S	3
§ 2. Eigenschappen van P_i en P_n functiën afgeleid uit het theorema van GREEN	7
§ 3. Onmiddellijk gevolg van die eigenschappen voor eene massaverdeeling over S	8
§ 4. Volgens GAUSS en DIRICHLET is het probleem, in de inlei- ding genoemd, bepaald	10
§ 5. Equipotentiale verdeeling van massa over een oppervlak.	11
§ 6. Functie van GREEN. Definitie van G_i en G_n	12
§ 7. Betrekkingen tusschen de potentiaal-waarden eener lading over S in punten binnen en buiten S en op S	14
§ 8. Verdere beschouwing van de theorie van GREEN	15
§ 9. Centrobarische lading. Dichtheden q_i en q_n	16
§ 10. De betrekkingen uit § 7 op andere wijze afgeleid	17
§ 11. Verschillende definities van de functie van GREEN.	19
TWEEDE HOOFDSTUK.	
WIJZE VAN BEPALING VAN DE FUNCTIE VAN GREEN EN HARE ALGEMEENE EIGENSCHAPPEN	21
§ 1. Methode der evenwichtsvlakken	21
§ 2. Toepassing op de functie van GREEN	24
§ 3. G_i is eene symmetrische functie	25

§ 4. Eigenschappen der lading, waarvan ϱ_i de dichtheid is .	26
§ 5. G_u is eene symmetrische functie. Massa van de lading, waarvan ϱ_u de dichtheid is	27
§ 6. De eigenschappen in § 4 zijn gevolgen van algemeene waarheden.	29
§ 7. Betoog van de waarheden uit § 6 voor bijzondere verdeling der massa	31
§ 8. De tweede eigenschap in § 5 is ook een gevolg van eene algemeene stelling	33

DERDE HOOFDSTUK.

DE FUNCTIE VAN GREEN VOOR HET OPPERVAK VAN EEN BOL EN VAN EEN PARALLELOPIPEDUM. TOEPASSINGEN. 35

§ 1. Onder welke voorwaarden G_i en G_u volgens de methode der evenwichts-oppervlakken algemeen kunnen berekend worden	35
§ 2. G_i en G_u bij een bolvlak	36
§ 3. ϱ_i en ϱ_u bij een bolvlak	37
§ 4. Toepassing op een bepaald vraagstuk	59
§ 5. Afleiding van eene formule van DIRICHLET	41
§ 6. Toepassing van die formule op een bepaald vraagstuk .	44
§ 7. Ontwikkeling van de potentiaal eener lading op den bol naar kogelfunctiën	45
§ 8. Ontwikkeling eener gegeven functie naar kogelfunctiën .	48
§ 9. G_i wordt berekend voor een rechthoekig parallelipedum.	49

VIERDE HOOFDSTUK.

ALGEMEENE FORM VAN V_i EN V_u FUNCTIËN BIJ EEN BOL EN BIJ EENE ROTATIE-ELLIPSOÏDE. TOEPASSING OP DE FUNCTIE VAN GREEN. 55

§ 1. Algemeene beschouwing	55
§ 2. V_i en V_u functiën bij een bol	56
§ 3. Toepassing op de functie van GREEN	60
§ 4. V_i en V_u functiën bij eene rotatie-ellipsoïde	61
§ 5. Oplossing van het algemeene probleem voor dat oppervlak.	66
§ 6. Toepassing op een bepaald vraagstuk	68
§ 7. Toepassing ter bepaling van de functie van GREEN . .	69
§ 8. Vergelijking van twee methoden tot oplossing van het algemeene probleem	70

INLEIDING.

Het is bekend, dat GEORGE GREEN in het jaar 1828 uitgaf „An Essay on the Application of mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism”, waarin eene theorie van de potentiaal ontwikkeld werd, door THAMSON en TAIT *) terecht „die wundervollen GREEN'schen Theorie des Potentials” genoemd. De verhandeling van GREEN bleef nagenoeg onbekend tot het jaar 1850, toen zij in CRELLE's Journal für die Mathematik †) overgedrukt werd. Gedurende dien tusschentijd werden vele resultaten, door GREEN reeds gevonden, op nieuw verkregen door GAUSS, CHASLES, THOMSON en anderen.

De beschouwingen van GREEN blijven steeds in vele opzichten merkwaardig en worden gedeeltelijk nog gevolgd in de leer van de potentiaal. Zoo treedt ook veelal de functie van GREEN op bij de afleiding der stelling: dat het altijd en slechts op eene wijze mogelijk is, over een gegeven oppervlak, massa zoodanig te verdeelen, dat de potentiaal in ieder punt van dat oppervlak eene gegeven waarde aanneemt. Die functie bewijst bij het betoog eenigen dienst, en verdwijnt later geheel; eene uitzondering is het

*) THOMSON und TAIT. Handbuch der Theoretischen Physik, Deutsche Uebersetzung von HELMHOLTZ und WERTHEIM. II Theil § 527, 503.

†) CRELLE. Journal für die Mathematik. Band, 39, 44, 45.

dat haar vorm voor een bijzonder geval nader bepaald wordt, zooals o. a. bij RIEMANN *). Dat plotseling optreden en even spoedig verdwijnen wekt terecht eenige verwondering en gaf mij aanleiding tot een nauwkeuriger onderzoek van genoemde functie.

De bovenvermelde stelling leidde GREEN af door gebruik te maken van de naar hem genoemde functie. GREEN's betoog is echter niet geheel wiskundig en staat in zooverre beneden het zuiver analytische bewijs, dat DIRICHLET †) later gaf. Ook GAUSS deelde in zijne „Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Kräfte” §) eene afleiding mede voor de genoemde stelling, welke boven die van GREEN is te stellen. Niettegenstaande dus twee wegen bekend zijn, om dezen „herrlichen Satz” te betoogen, vindt men nog gebruik gemaakt van de functie van GREEN — zoo o. a. door CLAUDIUS in zijne bekende potentiaal-leer — en met reden, want, zooals in het eerste hoofdstuk blijken zal, heeft hare invoering een eigenaardig voordeel. In dat hoofdstuk wordt nagegaan in welk verband de functie van GREEN staat tot de algemeene leer van de potentiaal, en de wijze waarop GREEN de genoemde stelling afleidde, met die van DIRICHLET vergeleken. De volgende hoofdstukken zijn gewijd aan de beschouwing van de functie op zich zelve en aan de wijze, waarop zij bepaald wordt.

*) RIEMANN. Schwere, Elektrizität und Magnetismus. 1876.

†) LEJEUNE DIRICHLET. Vorlesungen über die im umgekehrten etc. wirkenden Kräfte. In 1876 door GRUBE uitgegeven.

§) GAUSS und WEBER. Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins. 1839. Ook in GAUSS. Werke, 5 Band.

EERSTE HOOFDSTUK.

OVER DE POTENTIALAAL IN HET ALGEMEEN EN DE FUNCTIE VAN
GREEN IN HET BIJZONDER.

§ 1. Twee materiële punten μ en m , waarvan de rechthoekige coördinaten α, β, γ en x, y, z zijn, trekken elkander aan, volgens NEWTON's wet, met eene kracht

$$F = \frac{\mu m}{E^2}$$

zoo E den afstand van μ en m voorstelt. De componenten van de kracht door μ op m uitgeoefend zijn

$$X = \frac{\mu m}{E^2} \frac{\alpha - x}{E} = -\frac{\mu m}{E^2} \frac{dE}{dx} = \mu m \frac{d}{dx} \frac{1}{E}$$

$$Y = \frac{\mu m}{E^2} \frac{\beta - y}{E} = -\frac{\mu m}{E^2} \frac{dE}{dy} = \mu m \frac{d}{dy} \frac{1}{E}$$

$$Z = \frac{\mu m}{E^2} \frac{\gamma - z}{E} = -\frac{\mu m}{E^2} \frac{dE}{dz} = \mu m \frac{d}{dz} \frac{1}{E}$$

Hetzelfde geldt van een systeem materiële punten μ_i met coördinaten $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$; alsdan worden de componenten van de kracht op m uitgeoefend voorgesteld door

$$X = m \sum \mu_i \frac{d}{dx} \frac{1}{E_i}$$

$$Y = m \sum \mu_i \frac{d}{dy} \frac{1}{E_i}$$

$$Z = m \sum \mu_i \frac{d}{dz} \frac{1}{E_i}$$

Zij nu

$$\sum \frac{\mu_i}{E_i} = V$$

dan is

$$X = m \frac{dV}{dx}, \quad Y = m \frac{dV}{dy}, \quad Z = m \frac{dV}{dz}.$$

De componenten X , Y , Z zijn derhalve de partiële afgeleiden van V naar x , y en z , vermenigvuldigd met de massa m . De uitdrukking mV heet de potentiaal van de massa's μ_i ten opzichte van de massa m in het punt x , y , z ; de grootheid V zelve de potentiaal van het systeem μ_i in het punt x , y , z ; in het laatste punt wordt dus hierbij de eenheid van massa gedacht. De grootheid V is, zoolang het punt x , y , z niet in een der punten α_i , β_i , γ_i valt, even als hare afgeleiden eindig en continu. Hare tweede afgeleiden voldoen aan de vergelijking van LAPLACE

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = 0 \quad \text{of} \quad \Delta V = 0.$$

Op oneindigen afstand wordt V nul of liever, zoo

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

is, blijven de waarden

$$RV, \quad R^2 \frac{dV}{dx}, \quad R^2 \frac{dV}{dy} \quad \text{en} \quad R^2 \frac{dV}{dz}$$

steeds eindig, hoe groot x , y en z ook mogen genomen worden.

Vullen de massa's μ_i continu een lichaam, of zijn zij verbreid over een oppervlak, dan wordt de potentiaal in het punt x , y , z .

$$V = \int \frac{dm}{E}$$

waarbij de integratie moet uitgestrekt worden over het gebied, waarbinnen de massa's liggen.

Volgens bekende definitie is bij een lichaam

$$dm = \rho \, d\alpha \, d\beta \, d\gamma = \rho \, d\tau$$

en bij een vlak

$$dm = \rho \, d\sigma$$

waarin $d\tau$ het volume-element en $d\sigma$ het oppervlakte-element in α , β , γ voorstelt, terwijl ρ de dichtheid is in dat punt, die in

het algemeen eene eindige en continue functie van α , β en γ gerekend wordt.

Men heeft dus voor een lichaam en voor een vlak respectievelijk

$$V = \iiint \frac{\rho}{E} d\alpha d\beta d\gamma \text{ en}$$

$$V = \iint \frac{\rho}{E} d\sigma.$$

Noemen wij het oppervlak, dat het lichaam begrenst, waarbin-
nen in het eerste geval de massa verdeeld is, S , en het opper-
vlak, waarover in het tweede geval de massa uitgebreid is, even-
zoo, dan zullen in het algemeen de eigenschappen der functiën V
verschillend zijn, naar gelang het punt x , y , z buiten S , op S of
binnen dat oppervlak gelegen is. In het eerste geval vertoonen de
beide functiën V , of de potentiaal van een lichaam en van een
oppervlak, volkomen dezelfde eigenschappen, en wel juist die, welke
zooeven voor het systeem μ_1 opgenoemd zijn.

1°. Zij zijn, even als hare afgeleiden, eindig en continu.

2°. Zij voldoen aan de vergelijking $\triangle V = 0$.

3°. Op oneindigen afstand blijven de uitdrukkingen

$$RV, R^2 \frac{dV}{dx}, R^2 \frac{dV}{dy} \text{ en } R^2 \frac{dV}{dz}$$

steeds eindig.

Functiën, die voor alle punten buiten zeker oppervlak S aan deze
drie voorwaarden voldoen, noemen wij in het vervolg P_n of V_n
functiën van het oppervlak S .

Wordt het punt x , y , z binnen S gedacht, dan zijn de eigen-
schappen van de potentiaal eener vlaktelading en van een lichaam
verschillend. Wel blijft bij beide in alle punten binnen S de po-
tentiaal, evenals hare eerste afgeleiden, eindig en continu, maar de
tweede afgeleiden voldoen bij een oppervlak nog steeds aan $\triangle V = 0$,
terwijl bij een lichaam de vergelijking van LAPLACE in die van
POISSON overgaat, nl.

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = -4\pi\rho \text{ of } \triangle V = -4\pi\rho$$

waarin ρ de dichtheid voorstelt in het punt x , y , z .

De potentiaal van een oppervlak in een binnenpunt voldoet dus nog aan de voorwaarden 1 en 2, zooeven genoemd; eene functie, die, voor alle punten binnen een oppervlak S , deze twee eigenschappen vertoont, wordt in het vervolg dikwijls voorgesteld door P_i of V_i .

Zij ten slotte het punt x, y, z in het oppervlak S gelegen. Nu is het de potentiaal van eene massa over S uitgebreid, waarop vooral de aandacht moet gevestigd worden. Nemen wij drie punten aan, één binnen S , één daarbuiten en één op het oppervlak gelegen, en wel

$$P_i, \quad P_s, \quad P_u$$

waarin potentiaal-waarden

$$V_i, \quad V_s, \quad V_u$$

zoo dan P_i en P_u samenvallen in P_s , heeft men

$$\text{Lim. } V_i = \text{Lim. } V_u = V_s \dots\dots\dots 1)$$

zoowel bij een lichaam als bij een oppervlak. Tevens is hetzelfde te zeggen bij een lichaam van de eerste afgeleiden. Dit is niet zoo bij eene oppervlakte-lading. Zij in P_s eene normaal opgericht en zijn de punten P_i en P_u op die normaal gelegen, zoo men dan P_i langs de normaal naar binnen het element dn , en P_u naar buiten het element dN laat doorloopen, dan zal de functie V_i aangroeien met $\frac{dV_i}{dn} dn$ en V_u met $\frac{dV_u}{dN} dN$. Vallen nu P_i en P_u in P_s , dan is in het algemeen bij eene vlaktelading

$$\text{Lim. } \left(\frac{dV_i}{dn} \right) + \text{Lim. } \left(\frac{dV_u}{dN} \right) = -4\pi\rho \dots\dots\dots 2)$$

waarin ρ weer voorstelt de dichtheid in P_s . Bij een oppervlak is dus de eerste afgeleide van de potentiaal bij doorgang door het vlak discontinu; met de waarde van $\frac{dV}{dn}$ voor een punt op S , wordt dan ook steeds bedoeld een der beide limieten, waarvan het verschil $-4\pi\rho$ bedraagt. Wij laten in het vervolg, daar, waar zonder verklaring duidelijk is dat een der genoemde limietwaarden bedoeld wordt, meestal het woord limiet weg. De vergelijking ²⁾ vindt dikwijls geschreven

$$\left(\frac{dV}{dn}\right)_{-0} - \left(\frac{dV}{dn}\right)_{+0} = -4\pi\rho \dots\dots\dots 3)$$

§ 2. In de potentiaal-leer, vooral waar sprake is van de potentiaal eener vlakke-lading over een oppervlak S , vervullen de functiën P_i en P_u van S eene belangrijke rol. Verschillende eigenschappen van deze functiën vindt men onmiddellijk uit het bekende theorema van GREEN, dat hier in herinnering wordt gebracht.

Laten U en V twee functiën zijn van de coördinaten x, y, z , die met hare eerste afgeleiden eindig en continu blijven voor alle punten binnen een oppervlak S , dan geldt de betrekking

$$\begin{aligned} \int V \frac{dU}{dn} d\sigma + \int V \triangle U d\tau = \\ = \int U \frac{dV}{dn} d\sigma + \int U \triangle V d\tau \dots\dots\dots 4) \end{aligned}$$

waarin dn naar binnen gerekend wordt.

Zijn U en V beide P_i functiën van S , dan is zoowel $\triangle U$ als $\triangle V = 0$, dus:

$$\int V_i \frac{dU_i}{dn} d\sigma - \int U_i \frac{dV_i}{dn} d\sigma = 0 \dots\dots\dots 5)$$

Eene belangrijke betrekking verkrijgt men, indien voor U genomen wordt $\frac{1}{E_i}$, waarin E_i voorstelt den afstand van een punt P

(x, y, z) , binnen of op S , tot een vast punt $P_i (x', y', z')$ binnen S .

De uitdrukking $\frac{1}{E_i}$ is niet eindig evenmin als hare afgeleiden zoo

x, y, z in x', y', z' valt. De gelijkheid 4) kan dan ook slechts toegepast worden voor de ruimte ingesloten door S en door het oppervlak van een bol, waarvan P_i het middelpunt is en de straal ϵ genomen wordt. Door ϵ steeds kleiner te laten worden, vindt men in dit geval, zoo weer $V = V_i$ eene P_i functie is,

$$\int V_i \frac{d}{dn} \frac{1}{E_i} d\sigma - \int \frac{1}{E_i} \frac{dV_i}{dn} d\sigma = 4\pi V_i' \dots\dots\dots 6)$$

waarin V_i' de waarde is van V_i in het punt x', y', z' .

Ten einde voor de ruimte buiten S de stelling van GREEN toe te

passen, denken wij ons eerst die ruimte begrensd door een bol met straal R ; dan geldt voor het deel, tusschen S en het oppervlak van dien bol gelegen, de vergelijking ⁴⁾, waarin nu de integratie zoo- wel over S als over het oppervlak van den bol moet plaats hebben, terwijl nu de differentiatie naar de normaal binnen die ruimte ge- trokken, moet geschieden; welke bewerking voor het oppervlak S voorgesteld wordt door $\frac{d}{dN}$.

Onderstellen wij thans, dat U en V beide P_u functiën zijn van het oppervlak S , dan volgt uit de derde voorwaarde, waaraan die functiën voldoen, dat de integralen voor het oppervlak van den bol, zoo R steeds grooter wordt, gezamenlijk $= 0$ zijn, derhalve is ook dan

$$\int V_u \frac{dU_u}{dN} d\sigma - \int U_u \frac{dV_u}{dN} d\sigma = 0 \dots\dots\dots 5)$$

Wordt weer in ⁴⁾ voor U gesubstitueerd de waarde $\frac{1}{E_u}$, waarin E_u nu voorstelt den afstand van $P(x, y, z)$ tot een vast punt $P'_u(x', y', z')$ buiten S gelegen en zij weer V eene V_u functie, dan vindt men even als vroeger

$$\int V_u \frac{d}{dN} \frac{1}{E_u} d\sigma - \int \frac{1}{E_u} \frac{dV_u}{dN} d\sigma = 4\pi V'_u \dots\dots\dots 6)$$

waarin V'_u voorstelt de waarde, die V_u in het punt x', y', z' aan- neemt.

§ 3. Zoo over het oppervlak S eene lading is aangebracht, waarvan de dichtheid ρ in ieder punt gegeven is, dan bestaat het bepalen van de potentiaal dezer lading in het uitvoeren van eene integratie over het oppervlak S . Is de potentiaal V_i in een punt binnen S en hare waarde V_u in een punt buiten S bepaald; dan heeft men twee functiën gevonden, waarvan de eerste eene P_i functie voor S , de andere eene P_u functie is, en wel nemen beide functiën aan het oppervlak dezelfde waarde aan. Uit de betrekkingen, hierboven afgeleid, volgt dadelijk dat omgekeerd twee *geheel willekeurige* P_i en P_u functiën voor het oppervlak S , die slechts aan de voorwaarde voldoen dat zij voor punten van S beide

dezelfde waarden aannemen, kunnen beschouwd worden als de potentialen eener vlaktelading over S .

Zij nl. de P_i functie V_i en de P_u functie V_u en hare waarden aan het oppervlak V_s , dan wordt aangetoond dat V_i de potentiaal voorstelt in punten binnen S eener lading, waarvan de dichtheid is

$$\rho = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{dV_i}{dn} + \frac{dV_u}{dN} \right)$$

en V_u de potentiaal in punten buiten S van diezelfde lading. Inderdaad uit ⁶⁾ volgt

$$4\pi V_i' = \int V_s \frac{d}{dn} \frac{1}{E_i} d\sigma - \int \frac{1}{E_i} \frac{dV_i}{dn} d\sigma \dots\dots\dots 7)$$

En neemt men nu in aanmerking, dat $\frac{1}{E_i}$ eene P_u functie is voor S , dan volgt uit ⁵⁾

$$0 = \int V_s \frac{d}{dN} \frac{1}{E_i} d\sigma - \int \frac{1}{E_i} \frac{dV_u}{dN} d\sigma \dots\dots\dots 8)$$

Verder is $\frac{d}{dn} \frac{1}{E_i} = -\frac{d}{dN} \frac{1}{E_i}$, zoodat men door optelling van ⁷⁾ en ⁸⁾ verkrijgt

$$4\pi V_i' = - \int \frac{1}{E_i} \left(\frac{dV_i}{dn} + \frac{dV_u}{dN} \right) d\sigma$$

of

$$V_i' = - \int \frac{1}{E_i} \left(\frac{dV_i}{dn} + \frac{dV_u}{dN} \right) d\sigma = \int \frac{\rho}{E_i} d\sigma,$$

waaruit blijkt, dat de waarde, die V_i' in het geheel willekeurige punt x', y', z' binnen S aanneemt, de potentiaal is eener lading over S met de aangegeven dichtheid. Door gebruik te maken van de vergelijkingen ⁶⁾ en ⁵⁾ vindt men eveneens

$$V_u = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{E_u} \left(\frac{dV_i}{dn} + \frac{dV_u}{dN} \right) d\sigma = \int \frac{\rho}{E_u} d\sigma.$$

Over een oppervlak S is dus steeds eene massa te verdeelen, zoodat de potentiaal in alle punten binnen S eene gegeven waarde aanneemt en evenzoo de potentiaal buiten S , zoo die gegeven

waarden binnen S uitgedrukt worden door eene P_i functie van S , die buiten door eene P_u functie en voor punten van S geldt.

$$P_i = P_u.$$

De dichtheid dezer lading en daarmee de massa is geheel bepaald, zoodat er slechts ééne verdeeling mogelijk is.

§ 4. De vraag kan thans gesteld worden: zal ook iedere P_u functie van het oppervlak S kunnen beschouwd worden als de potentiaal in buitenpunten eener massaverdeeling over S , en is die massaverdeeling geheel bepaald? Geldt hetzelfde van eene geheel willekeurige P_i functie voor punten binnen S ? De potentiaal-theorie van GAUSS en het beginsel van DIRICHLET beantwoorden onmiddellijk beide vragen, en doen tevens eene nieuwe eigenschap kennen. Geheel analytisch bewijst DIRICHLET — „er bestaat voor zeker oppervlak S eene, maar ook slechts ééne P_i functie, die in alle punten van S gegeven waarden aanneemt, die voor de verschillende punten van het oppervlak eindig zijn en continu in elkander overgaan. Ook bestaat er eene, maar slechts ééne P_u functie, waarvan hetzelfde geldt.” Het bewijs voor deze gewichtige stelling komt voor in de reeds genoemde „Vorlesungen” en is in verscheidene leerboeken overgenomen; zoodat het hier kan achterwege blijven.

De vragen, zoo even gesteld, kunnen derhalve bevestigend beantwoord worden.

Is eene P_u functie gegeven, dan zijn de waarden van die functie voor het oppervlak S bekend en dan is er volgens DIRICHLET ééne P_i functie aan te wijzen, die voor alle punten van S de waarden aanneemt, waarin de P_u functie overgaat. Die functie en de gegebene kunnen beschouwd worden als potentialen in punten binnen en buiten S eener lading over dat oppervlak, die daardoor volgens de voorgaande paragraaf geheel bepaald wordt. Hetzelfde kan gezegd worden zoo eene P_i functie gegeven is. Maar verder, zoo voor alle punten van S eindige, continu veranderende waarden gegeven zijn, dan kan men eene P_i en eene P_u functie aanwijzen, welke voor punten van S die waarden aannemen. Het algemeene probleem

over een gegeven oppervlak, zoodanig massa te verdeelen, dat de potentiaal van die massa in alle punten van dat oppervlak gegeven waarden aanneemt is dus mogelijk en bepaald. Mocht de massa gegeven zijn, dan kan die massa zoodanig over een gegeven oppervlak verdeeld worden dat de potentiaal in ieder punt van dat oppervlak eene waarde heeft evenredig met eene gegeven grootheid.

§ 5. Liggen gegeven massa's binnen een oppervlak S , hetzij over vlakken uitgebreid, waarvan S er een kan zijn, hetzij continu binnen een lichaam verdeeld, of in punten opgehoopt, dan is over S altijd eene massaverdeeling aan te brengen maar slechts ééne, die in alle punten van S dezelfde potentiaal heeft als die massa's. De potentiaal toch van die verdeeling over S is in punten buiten S eene P_u functie en evenzeer geldt dat van de potentiaal der massa's binnen S gelegen; beide P_u functien hebben aan het oppervlak dezelfde waarde — volgens de stelling van DIRICHLET zijn zij dus volkomen dezelfde. Bijgevolg is het mogelijk eene massa verdeeling over S aan te brengen, die in de oneindige ruimte buiten S dezelfde potentiaal te voorschijn roept als de massa's binnen S , en die verdeeling is geheel bepaald. Het bepalen der dichtheid van de gevraagde massa verdeeling is slechts een bijzonder geval van het algemeene probleem, aan het eind van de vorige paragraaf besproken. Waren de massa's buiten S gelegen, dan zou er ééne, maar ook slechts ééne verdeeling van massa over S mogelijk zijn, die in de ruimte binnen S dezelfde potentiaal heeft als de buiten gelegen massa's. Dat werkelijk beide verdeelingen mogelijk zijn is a priori waarschijnlijk. Immers, zoolang men buiten de massa's zelve blijft — hier buiten het vlak S in het eerste geval — vertoonen de potentialen eener lading over S en van de massa's binnen S volkomen dezelfde eigenschappen; het is dus te verwachten, dat de eene massaverdeeling wel zal kunnen vervangen worden door de andere. Dat dit werkelijk zoo is, en dat tevens de nieuwe massaverdeeling over S geheel bepaald is, leert het beginsel van DIRICHLET.

In plaats van de massa's binnen of buiten S te vervangen door

door eene lading over S , die voor punten buiten of binnen S equipotential is met de gegeven massa's, kan men eene verdeeling over S eischen, waarvan de aantrekking die zij uitoefent op punten buiten of binnen S dezelfde is als die van de gegeven massa's.

Zij de potentiaal van de massa's v en van de gevraagde lading over S , V , dan moet in dit geval:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dV}{dx}, \quad \frac{dv}{dy} = \frac{dV}{dy}, \quad \frac{dv}{dz} = \frac{dV}{dz}$$

zijn, waaruit

$$v = V + \text{constante.}$$

Liggen de massa's binnen S , dan is op oneindigen afstand, zowel v als V gelijk nul, derhalve

$$v = V$$

of in dit geval is de verdeeling dezelfde als die hierboven besproken is. Zoo de massa's buiten S liggen, moet over S eene massa verdeeld worden, waarvan de potentiaal in alle punten op S en binnen S een constant verschil vertoont met de potentiaal der massa's buiten S . Het is duidelijk, dat die constante moet gegeven zijn, om ook nu de lading geheel te bepalen.

§ 6. Al de hoogst belangrijke waarheden, die in het voorafgaande slechts kort aangegeven zijn, volgen dus zeer eenvoudig uit het beginsel van DIRICHLET in verband met de stelling in § 3. GREEN vond in zijne genoemde verhandeling dit alles reeds, maar minder eenvoudig, en evenmin kon hij de stellingen geheel wiskundig bewijzen. Evenwel verdienen de beschouwingen van GREEN uit een zeker oogpunt belangstelling. Uit het beginsel van DIRICHLET toch volgt, dat voor ieder oppervlak S ééne P_i en ééne P_a functie is aan te wijzen, die in alle punten van S gegeven waarden aannemen, maar DIRICHLET geeft geen enkel middel aan de hand, om die functiën te vinden. Verder dan tot het bestaan en het geheel bepaald zijn van P_i en P_a komt men niet. GREEN nu geeft voor ieder der functiën eene uitdrukking. We gaan thans over tot het uiteenzetten van de methode van GREEN, en wel in de eerste plaats zullen wij de functie, naar hem genoemd, definiëren.

Zij S een oppervlak en $P'_i (x', y', z')$ een punt binnen S , dan is de P_i functie van de coördinaten x, y, z , die zoo het punt (x, y, z) in S valt overgaat in de waarde $\frac{1}{E_i}$, waarin E_i den afstand voorstelt van dat punt van S tot P'_i , de functie van GREEN voor punten binnen S . Ligt het punt x', y', z' , buiten S in P'_u , dan is de P_u functie van x, y, z , die zoo x, y, z , in S valt, overgaat in $\frac{1}{E_u}$, waarin weer E_u de afstand is van het punt op S tot P'_u de functie van GREEN voor punten buiten S . We zullen deze functiën respectievelijk voorstellen door G_i en G_u .

Beide functiën zijn volgens de gegeven definitie afhankelijk van de coördinaten van het punt P'_i of $P'_u (x', y', z')$, welk punt wij het vaste punt zullen noemen, en van de coördinaten x, y, z , terwijl de vorm dien zij aannemen zal afhangen van het oppervlak S . Uit het beginsel van DIRICHLET weten wij onmiddellijk, dat beide functiën bestaan en geheel bepaald zijn; immers G_i is eene P_i functie van S en G_u eene P_u functie, en van beide zijn de waarden die zij voor punten van S aannemen, gegeven.

GREEN bewees het bestaan van zijne functiën door de volgende redeneering, waardoor wij tevens hare physische beteekenis leeren kennen.

Laat het oppervlak S een volkomen geleider voor electriciteit zijn en in het punt P'_i eene hoeveelheid electriciteit — 1 opgehoopt; zoo dan de geleider met de aarde in verbinding wordt gebracht, zal de negatieve electriciteit wegstroomen en de geleider eene positieve lading vertoonen. De potentiaal van de electriciteit in P'_i en van de lading op S zal op ieder punt van S eene constante waarde moeten bezitten, en wel, daar de geleider met de aarde in verbinding staat, eene waarde *nul*. Zij dus U de potentiaal van de lading op S , dan is in ieder punt van S

$$U - \frac{1}{E_i} = 0$$

of

$$U = \frac{1}{E_i}$$

De potentiaal van deze lading in punten binnen S is eene

P_i functie en wel eene P_i functie, die aan het oppervlak de waarde $\frac{1}{E_i}$ aanneemt. Het is derhalve de functie G_i . Hiermede is aangetoond, dat de functie bestaat, en daar op een gegeven oppervlak S door de electriciteit in P_i' eene volkomen bepaalde lading geïnduceerd wordt, zoo is tevens bewezen, dat G_i eene geheel bepaalde functie is. Op dezelfde wijze toont men het bestaan der functie G_u aan, door in P_u' weer de eenheid negatieve electriciteit opgehoopt te denken. De potentiaal in punten buiten S van de geïnduceerde electriciteit op den geleider S met de aarde in verbinding gebracht, is nu de functie G_u . Merken we nog op, dat in het eerste geval de potentiaal van de geïnduceerde lading in punten buiten S noodzakelijk zal zijn $\frac{1}{E_i}$, derhalve de dichtheid der geïnduceerde lading volgens de betrekking ³⁾ in § 1.

$$e_i = \frac{1}{4\pi} \frac{d}{dn} \left(\frac{1}{E_i} - G_i \right)$$

Evenzoo de dichtheid der lading in het tweede geval geïnduceerd

$$e_u = \frac{1}{4\pi} \frac{d}{dN} \left(\frac{1}{E_u} - G_u \right)$$

§ 7. Nadat bewezen is, dat de functie G_i en G_u bestaan en geheel bepaald zijn, kunnen wij niet alleen aantoonen, dat, zoo de potentiaal eener massaverdeeling over S in alle punten van S gegeven is, ook de potentiaal in alle punten binnen en buiten S en dus ook de dichtheid bekend is, maar we vinden tevens uitdrukkingen voor hare waarden in willekeurige punten P_i' en P_u' . Zij nl. de potentiaal der massaverdeeling over S in punten op S gegeven V_s en hare waarde in punten binnen S gelijk V_i , dan is volgens ⁶⁾.

$$4\pi V_i' = \int V_s \frac{d}{dn} \frac{1}{E_i} d\sigma - \int \frac{1}{E_i} \frac{dV_i}{dn} d\sigma \dots\dots\dots 9)$$

En substitueert men nu in de vergelijking ⁵⁾ voor U_i de functie G_i , dan heeft men

$$0 = \int V_s \frac{dG_i}{dn} d\sigma - \int G_i \frac{dV_i}{dn} d\sigma \dots\dots\dots 10)$$

Aan het oppervlak is echter $G_i = \frac{1}{E_i}$, zoodat door aftrekking uit 9) en 10) volgt

$$4\pi V_i' = \int V_s \frac{d}{dN} \left(\frac{1}{E_i} - G_i \right) d\sigma. \dots\dots\dots 11)$$

Evenzoo heeft men, zoo V_u voorstelt de potentiaal der massa verdeling in punten buiten S , uit 6)

$$4\pi V_u = \int V_s \frac{d}{dN} \frac{1}{E_u} d\sigma - \int \frac{1}{E_u} \frac{dV_u}{dN} d\sigma$$

en uit de vergelijking 5'), zoo voor U_u genomen wordt G_u

$$0 = \int V_s \frac{dG_u}{dN} d\sigma - \int G_u \frac{dV_s}{dN} d\sigma$$

of

$$4\pi V_u' = \int V_s \frac{d}{dN} \left(\frac{1}{E_u} - G_u \right) d\sigma \dots\dots\dots 11')$$

De vergelijkingen 11) en 11') geven derhalve de waarden V_i' en V_u' van V_i en V_u respectievelijk aan in de geheel willekeurige punten P_i' en P_u' (x' , y' , z'). Tot het vinden van die waarden is, zoo de functiën G_i en G_u bekend zijn, slechts eene integratie uit te voeren over het oppervlak S .

§ 8. De betrekkingen 11) en 11') zijn in de voorgaande paragraaf afgeleid in de onderstelling, dat V_i en V_u de potentialen zijn eener massaverdeling over S . Bij hare afleiding zijn echter slechts toegepast de vergelijkingen 5) en 6) benevens 5') en 6'), waarvan de beide eersten voor alle P_i functiën van S gelden, en het laatste paar voor alle P_u functiën. De betrekkingen 11) en 11') gelden dus respectievelijk voor iedere P_i en iedere P_u functie van het oppervlak S , en wij besluiten daaruit, dat dergelijke functiën geheel bepaald zijn, zoo hare waarden voor punten van het oppervlak S gegeven zijn. Geen recht geven ons echter de vergelijkingen 11) en 11') om te besluiten dat er dus steeds eene P_i functie bestaat, die voor alle punten van S bepaalde waarden aanneemt; evenmin eene P_u functie. Zoover als wij tot nu toe de theorie van GREEN gevolgd hebben, leidt zij ons nog tot geen der belangrijke waarheden in § 4 en 5 aangeduid.

Daartoe is het noodig te bewijzen, dat er werkelijk voor ieder oppervlak eene P_i en eene P_u functie bestaat, die in punten van S willekeurige gegeven waarden kan aannemen. Weet men dat, dan zijn die functien, zoo de gegeven waarden V_u zijn, de functien bepaald door de integralen ¹¹⁾ en ^{11')}. Met nadruk wordt hierop gewezen, daar het voorkomt, dat deze zaak niet genoeg in het oog wordt gehouden. GREEN bewijst inderdaad, dat de functien, bepaald door ¹¹⁾ en ^{11')} P_i en P_u functien zijn, die aan het oppervlak S de gegeven waarden aannemen. Dit bewijs, gedeeltelijk steunende op gronden, aan de electriciteitsleer ontleend, komt voor in het laatste deel van § 5 van zijne tweede verhandeling, en nadat genoemde stelling bewezen is, kan men al de vroeger gevonden waarheden, onmiddellijk afleiden. Nu het beginsel van DIRICHLET — of ook zoo men wil de beschouwingen van GAUSS — veel eenvoudiger en geheel wiskundig dezelfde uitkomsten geeft als de theorie van GREEN, is het niet aan te bevelen, deze thans nog te volgen, om de theorema's uit § 4 en 5 te vinden. Zijn deze echter eenmaal afgeleid, dan kan men als bijzondere toepassing van het beginsel van DIRICHLET vragen de G_i en G_u functie voor een oppervlak S te bepalen. Die functien zijn dan niet alleen als een toepassing van het genoemd beginsel belangrijk, maar zijn zij bekend, dan is door middel van de betrekkingen ¹¹⁾ en ^{11')} het algemeene probleem, nl. eene P_i of P_u functie voor dat oppervlak S te vinden die in alle punten van S gegeven waarden aanneemt, tot eene integratie teruggebracht.

§ 9. Reeds in § 6 is eene physische beteekenis der functien G_i en G_u gevonden. Zeer eenvoudig is ook het bepalen van die functien op te vatten als eene der massaverdeelingen over S , die in § 5 besproken zijn. G_i is eene P_i functie, die in punten van S de waarde $\frac{1}{E_i}$ aanneemt, terwijl $\frac{1}{E_i}$ in alle punten op S en buiten S de potentiaal voorstelt eener massa $+1$ in P'_i geplaatst. G_i is derhalve de potentiaal eener massaverdeeling over S , die in alle punten bui-

ten en op S equipotentiaal is met eene massa $+1$ binnen S in P'_i of wat hetzelfde is: zij is de potentiaal eener massaverdeeling over S , die ieder punt buiten S aantrekt, als ware in P'_i eene massa $+1$ geplaatst. THOMSON voerde voor deze verdeeling den naam van centrobatische verdeeling in, en noemde P'_i het attractiecentrum. Op dezelfde wijze is G_u op te vatten als de potentiaal in punten buiten S van eene massaverdeeling over S , die voor alle punten binnen S dezelfde potentiaal te voorschijn roept als de massa $+1$ in P'_u gedacht. Zooals reeds bleek in § 5, is het hier niet voldoende te zeggen, dat G_u de potentiaal is eener massaverdeeling over S , die op alle punten binnen S eene attractie uitoefent als ware in P'_u eene massa $+1$ geplaatst; slechts, zoo de constante C nul is, zal G_u werkelijk de potentiaal van die lading over S zijn. Overeenkomstig met zoo even zullen wij ook deze verdeeling eene centrobatische noemen met P'_u als attractiecentrum. Van beide verdeelingen is de dichtheid onmiddellijk te bepalen uit de betrekking

$$-4\pi q = \frac{dV_i}{dn} + \frac{dV_u}{dN}.$$

Zij de dichtheid van de eerste verdeeling q_i , en van de tweede q_u , dan vindt men

$$q_i = \frac{1}{4\pi} \frac{d}{dn} \left(\frac{1}{E_i} - G_i \right)$$

en

$$q_u = \frac{1}{4\pi} \frac{d}{dN} \left(\frac{1}{E_u} - G_u \right)$$

of dezelfde dichtheden als bij de elektrische lading op S geïnduceerd door de hoeveelheid electriciteit -1 achtereenvolgens in P'_i en P'_u geplaatst, zie § 6. De formules ¹¹⁾ en ^{11')} gaan zodoende over in

$$V_i = \int q_i V_s d\sigma \dots\dots\dots 12)$$

$$\text{en } V_u = \int q_u V_s d\sigma \dots\dots\dots 12')$$

§ 10. De belangrijke betrekkingen ¹²⁾ en ^{12')} kan men ook direct afleiden en geheel in overeenstemming met de beschouwing in de vorige paragraaf. Laat V voorstellen de potentiaal van massa's

M_j in punten P_j geplaatst en v de potentiaal van massa's m_j in punten p_j gedacht; laat verder V_j de waarden aangeven, die V aanneemt in de punten p_j en v_j de waarden van v in de punten P_j , dan geldt

$$\Sigma M_j v_j = \Sigma m_j V_j \dots\dots\dots 13)$$

Natuurlijk, want beide uitdrukkingen stellen niets anders voor dan de som van alle combinaties $\frac{M_j m_j}{E_j}$, wanneer E_j de afstand is van twee willekeurige punten P_j en p_j .

Nemen wij nu over S eene massaverdeeling aan, waarvan de potentiaal in een punt α, β, γ van S is V , en de dichtheid in een punt $\alpha', \beta', \gamma', \varrho'$ en nog eene tweede massaverdeeling, waarvan de dichtheid in α, β, γ is $\bar{\varrho}$, en de potentiaal in α', β', γ' $\bar{V}'$, dan is volgens 13), zoo het oppervlakte element in α, β, γ genoemd wordt $d\sigma$ en dat in $\alpha', \beta', \gamma', d\sigma'$

$$\int V \bar{\varrho} d\sigma = \int \bar{V}' \varrho' d\sigma' \dots\dots\dots 14)$$

Zij nu de dichtheid $\bar{\varrho}_i$ die eener massaverdeeling, zoodanig, dat hare potentiaal in ieder punt van S gelijk zij aan $\frac{1}{E_i}$ of gelijk aan $\frac{1}{E_u}$, waarin E_i en E_u weer voorstellen de afstanden van dat punt van S tot een punt P_i' of P_u' ($x'y'z'$) binnen of buiten S gelegen, dan volgt uit 14), zoo we ϱ en het eerste geval ϱ_i en in het tweede ϱ_u noemen

$$\int V \varrho_i d\sigma = \int \frac{\varrho'}{E_u} d\sigma' \dots\dots\dots 15)$$

$$\int V \varrho_u d\sigma = \int \frac{\varrho'}{E_i} d\sigma' \dots\dots\dots 15')$$

De laatste integralen zijn echter volgens definitie de waarden van V , in P_i' en in P_u' of V_i' en V_u' , dus

$$\int V \varrho_i d\sigma = V_i'$$

$$\int V \varrho_u d\sigma = V_u'$$

De vergelijking 13) werd het eerst door GAUSS gegeven in § 19

van de genoemde, „Lehrsätze” en daar wordt opgemerkt, dat men ze ook toepassen kan zoo de massa's over een zelfde vlak verdeeld zijn — streng bewezen wordt het evenwel niet. Men kan dit echter onmiddellijk uit de stellingen 5) en 5') van GREEN afleiden. Zij van de eene verdeling de uitwendige potentiaal V_u , de inwendige V_i en hare waarden aan het oppervlak V_s . Van de andere verdeling de overeenkomstige grootheden V'_u , V'_i , V'_s , dan geven de vergelijkingen 5) en 5')

$$\int V_s \frac{dV'_i}{dn} d\sigma - \int V'_s \frac{dV_i}{dn} d\sigma = 0$$

$$\int V_s \frac{dV'_u}{dN} d\sigma - \int V'_s \frac{dV_u}{dN} d\sigma = 0$$

waaruit door optelling

$$\int V_s \left(\frac{dV'_i}{dn} + \frac{dV'_u}{dN} \right) d\sigma =$$

$$\int V'_s \left(\frac{dV_i}{dn} + \frac{dV_u}{dN} \right) d\sigma.$$

of, zoo de dichtheid bij de eerste verdeling ϱ en bij de tweede ϱ' genoemd wordt, volgens de bekende betrekking 2)

$$\int V_s \varrho' d\sigma = \int V'_s \varrho d\sigma.$$

§ 11. Aan het einde van dit hoofdstuk zij nog opgemerkt, dat evenals door MAXWELL ¹⁾, als definitie voor de functiën G_i en G_u is aangenomen dat zij aan het oppervlak respectievelijk overgaan in $\frac{1}{E_i}$ en $\frac{1}{E_u}$. Dikwijls, zoo bij CLAUSIUS, RIEMANN en anderen, wordt de Greensche functie voor punten binnen S genoemd de functie

$$G_i = \frac{1}{E_i} - G_i$$

en voor punten buiten S , de functie

1) MAXWELL. A Treatise on Electricity and Magnetism. Vol. I. pag. 113. Bij MAXWELL, even als in de verhandelingen van GREEN, is het teeken voor G_i en G_u omgekeerd.

$$G_u = \frac{1}{E_u} - G_u.$$

De integralen 11) en 11') worden dan geschreven

$$4\pi V_i' = \int V_s \frac{d}{dn} G_i d\sigma \dots\dots\dots 16)$$

$$4\pi V_u' = \int V_s \frac{d}{dN} G_u d\sigma \dots\dots\dots 16')$$

Bij deze definitie is de functie van GREEN voor punten binnen S geen P_i functie meer, daar $\frac{1}{E_i}$ en de afgeleiden daarvan niet voor alle punten binnen S eindig blijven; de waarde der functie aan het oppervlak is nu nul. Hetzelfde geldt van de functie van GREEN voor punten buiten S. 't Komt mij voor, dat het beter is de functie van GREEN te bepalen, zooals hier boven is geschied; overigens zijn de eigenschappen der functien G_i en G_u gemakkelijk terug te brengen tot die van de functien G_i en G_u .

TWEEDE HOOFDSTUK.

WIJZE VAN BEPALING DER FUNCTIE VAN GREEN EN HARE
ALGEMEENE EIGENSCHAPPEN.

§ 1. Zooals in het vorige hoofdstuk gebleken is, is het bepalen der functien van GREEN, of der centrobarische dichtheden een bijzonder geval van het algemeen probleem: over een oppervlak S eene massa zoodanig te verdeelen, dat deze vlaktelading in alle punten buiten en op S equipotentiaal is met eene massa binnen S , of equipotentiaal met eene massa buiten S , voor alle punten binnen of op S . Door GREEN werd eene methode aangewezen, waarnaar de dichtheid van die verdeling in vele gevallen onmiddellijk kan berekend worden.

Onderstellen wij nl. dat het oppervlak S een evenwichtsoppervlak is voor twee massa's M_1 en M_2 , waarvan M_1 geheel binnen S en M_2 buiten S gelegen is. Zij de potentiaal van M_1 en M_2 respectievelijk V_1 en V_2 , en stellen wij

$$\begin{aligned} M_1 + M_2 &= M \\ \text{en } V_1 + V_2 &= V \end{aligned}$$

dan geldt voor ieder punt P , van het oppervlak S

$$V = \text{constante}$$

Verplaatst men P , over het oppervlak over eene lengte ds , dan is

$$\frac{dV}{ds} = 0$$

en derhalve is de kracht, waarmede de eenheid van massa in P , of

zooals men het uitdrukt het punt P_s aangetrokken wordt, gericht volgens de normaal van het oppervlak en is in grootte gelijk

$$\frac{dV}{dn}.$$

Ten eerste kan nu onmiddellijk over S zoodanig massa verdeeld worden, dat deze lading in alle punten buiten S equipotentiaal is met M_1 . In dat geval moet de potentiaal in buitenpunten zijn V_1 ; binnen S moet de potentiaal eene P_1 functie wezen, die aan het oppervlak overgaat in V_1 . Maar voor punten van S geldt

$$V = C$$

of

$$V_1 + V_2 = C$$

$$V_1 = C - V_2$$

Neemt men derhalve voor de potentiaal in binnenpunten $C - V_2$, dan voldoet deze functie aan alle voorwaarden. De potentialen der gevraagde lading zijn derhalve

$$V_1 = C - V_2$$

$$V_u = V_1.$$

Voor de dichtheid ϱ heeft men

$$-4\pi\varrho = \frac{dV_1}{dn} + \frac{dV_u}{dN}$$

waarin

$$\frac{dV_1}{dn} = \frac{d(C - V_2)}{dn} = -\frac{dV_2}{dn}$$

terwijl

$$\frac{dV_u}{dN} = \frac{dV_1}{dN} = -\frac{dV_1}{dn}$$

is; dus

$$\varrho = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{dV_1}{dn} + \frac{dV_2}{dn} \right) = \frac{1}{4\pi} \frac{dV}{dn}.$$

Nu is $\frac{dV}{dn}$ de kracht, waarmede de eenheid van massa in P_s door de massa's M_1 en M_2 wordt aangetrokken; noemen wij die kracht K , dan is ook

$$\varrho = \frac{1}{4\pi} K$$

De potentiaal in een punt binnen S is

$$V_1 = C - V_2$$

Voor eene oneindig kleine verplaatsing ds in willekeurige richting ds heeft men

$$\frac{dV_1}{ds} = - \frac{dV_2}{ds},$$

of ieder punt binnen S wordt door de oppervlakte-lading aangetrokken met eene kracht gelijk aan de aantrekking door M_2 op dat punt uitgeoefend, maar tegengesteld gericht. Buiten S is

$$\frac{dV_a}{ds} = \frac{dV_1}{ds}$$

waaruit blijkt, zooals men reeds weet, dat ieder punt buiten S op volkomen dezelfde wijze wordt aangetrokken door de lading op S als door de massa M_1 .

Al het voorafgaande geldt evenzeer zoo de massa M_2 oneindig ver verwijderd gedacht wordt, of S een evenwichtsoppervlak is van M_1 en die massa geheel omsluit. Men heeft dan $V_1 = C$ en

$$4\pi\rho = \frac{dV_1}{dn}.$$

Eene lading over S , waarvan de potentiaal in alle punten van S en dus ook binnen S constant is, noemen wij eene evenwichtslading over S . Zoo de potentiaal in alle punten van $S = 1$ is, spreken wij van *de* evenwichtslading van S en hare potentiaal in een punt P_* buiten S heet II , hare dichtheid in ieder punt van het oppervlak γ . Is de potentiaal in ieder punt van $S = C$, dan is zij in P_* gelijk CII en hare dichtheid eveneens $C\gamma$. Bekend is het, dat deze verdeling van massa in de leer der statische electriciteit een groote rol speelt, en daarom meestal niet als een bijzonder geval zooals hierboven, maar als voornaamste geval behandeld wordt.

Ten tweede trachten wij over S eene lading te bepalen, die in alle punten binnen S equipotentiaal is met de massa M_2 . Van die lading is de potentiaal in punten binnen en op S

$$V_1 = V_2.$$

Voor het punt P_* heeft men

$$V_1 + V_2 = C$$

of $C - V_1 = V_2.$

Nu kan men echter in dit geval voor de potentiaal in punten buiten S niet nemen $C - V_1$. Deze functie toch gaat wel voor het oppervlak over in V_2 en voldoet ook aan de eerste en tweede voorwaarde, die de P_u functiën beheerschen, maar niet aan de derde, — op oneindigen afstand neemt zij de waarde C aan. Wordt echter genomen

$$V_u = CII - V_1$$

dan voldoet V_u aan alle voorwaarden der P_u functiën en is dus ook de potentiaal der gevraagde lading. Deze potentiaal is echter nog niet bekend, tenzij de potentiaal van de evenwichtslading over S langs anderen weg gevonden is. Voor de dichtheid vindt men dan

$$\varrho = -\frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{dV_2}{dn} + \frac{d}{dN} (CII - V_1) \right\}.$$

Volgens definitie is $-\frac{1}{4\pi} \frac{dII}{dN} = \gamma$, derhalve

$$\varrho = -\frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{dV_1}{dn} + \frac{dV_2}{dn} \right\} + C\gamma = -\frac{dV}{dn} + C\gamma.$$

Is $C = 0$, dat wil zeggen S één evenwichtsvlak van potentiaal nul voor de massa's M_1 en M_2 , dan is

$$V_1 = V_2, \quad V_u = -V_1, \quad \varrho = -\frac{1}{4\pi} \frac{dV}{dn}$$

en derhalve de massa-verdeeling geheel bekend.

Wordt slechts gevraagd over S eene massaverdeeling te bepalen, die op alle punten binnen S dezelfde aantrekking uitoefent, als de massa M_2 , dan is, volgens § 5 van het vorige hoofdstuk, dit vraagstuk niet geheel bepaald, — eene bijzondere oplossing is dan echter steeds aan te geven, nl.

$$V_1 = V_2 - C, \quad V_u = -V_1, \quad \varrho = -\frac{1}{4\pi} \frac{dV}{dn}.$$

§ 2. Laat de massa $M_1 = +1$ zijn, dan volgt uit het voorafgaande, dat onmiddellijk de functie G_1 bekend is voor het vlak S , met het punt, waarin de massa $+1$ ligt, als vast punt of attractie-centrum.

In dat geval is $V_1 = \frac{1}{E_1}$ en $G_1 = C - V_2$, eveneens is

$$q_i = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{d}{dn} \frac{1}{E_i} + \frac{dV_2}{dn} \right).$$

Zoo de massa $M_2 = +1$ is, kent men de functie van GREEN niet, tenzij de bovengenoemde grootheid II voor het oppervlak S bekend is, of S een evenwichtsoppervlak van potentiaal nul mocht zijn. In het eerste geval is

$$G_u = CII - V_1$$

en
$$q_u = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{dV_1}{dn} + \frac{d}{dn} \frac{1}{E_u} \right) + C\gamma.$$

In het tweede geval

$$G_u = -V_1 \text{ en } q_u = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{dV_1}{dn} + \frac{d}{dn} \frac{1}{E_u} \right).$$

Ook bij deze bepaling van G_u is weder het punt waarin de massa $+1$ ligt het attractie-centrum.

§ 3. Nadat in de beide voorafgaande paragrafen eene methode is aangegeven, om in enkele gevallen de functiën van GREEN werkelijk te berekenen, gaan wij thans over tot de eigenschappen, die zoowel deze functiën als de massaverdeelingen, waarbij zij als potentialen behooren, vertoonen.

Ten einde die eigenschappen op hoogst eenvoudige wijze te vinden, ga men uit van de betrekkingen ¹²⁾ en ^{12')} van het eerste hoofdstuk en wel ten eerste

$$V'_i = \int V_s q_i d\sigma \dots\dots\dots 1')$$

waarin V'_i de waarde eener P_i functie voorstelt in het punt P'_i , die aan het oppervlak de waarde V_s aanneemt. Verder is q_i de dichtheid eener lading, die in punten buiten en op S tot potentiaal heeft $\frac{1}{E_i}$ en in punten (x, y, z) binnen S tot potentiaal G_i ; het is de dichtheid eener centrobarische lading, waarvan P'_i het attractie-centrum is, of van de electriciteit door eene hoeveelheid electriciteit -1 in P'_i op S , met de aarde verbonden, geïnduceerd.

Wordt in de bovenstaande formule voor V_s gesubstitueerd $\frac{1}{\Delta}$,

waarin Δ voorstelt den afstand van het punt xyz tot een punt van S , dan zal V_i' de waarde eener P_i functie in het punt P_i' zijn, die aan het oppervlak overgaat in $\frac{1}{\Delta}$, het zal derhalve volgens definitie de GREENSCHE functie zijn met het punt xyz als vast punt of als attractie-centrum; noemen wij deze G_i' , dan is

$$G_i' = \int \frac{q_i d\sigma}{\Delta}.$$

De integraal in deze vergelijking is echter eveneens volgens definitie de potentiaal der centrobarische lading met P_i' als attractie-centrum in het punt xyz — of de functie G_i ; derhalve

$$G_i = G_i'$$

Is dus over eenig willekeurig oppervlak S eene centrobarische lading gebracht met een punt P_i' als attractie-centrum, dan is de potentiaal van die lading in P_i gelijk aan de potentiaal in P_i' eener lading over S , waarvan P_i het attractie-centrum is. De functie G_i is, behalve van den vorm van het oppervlak S , afhankelijk van de coördinaten x', y', z' en x, y, z . De functie G_i' ontstaat natuurlijk door in G_i x', y', z' met x, y, z te verwisselen en omgekeerd; uit de betrekking $G_i = G_i'$ volgt dus: de functie G_i is eene *symmetrische* functie der coördinaten x', y', z' en x, y, z .

§ 4. Evenals de vorige eigenschap uit 1) gevonden werd door in 1) voor V_s de waarde $\frac{1}{\Delta}$ te substitueeren vindt men uit dezelfde vergelijking andere eigenschappen door aan V_s achtereenvolgens verschillende waarden toe te kennen.

Zij $V_s = C$, dan is ook $V_i' = C$, en heeft men

$$C = \int C q_i d\sigma$$

$$1 = \int q_i d\sigma.$$

De gezamenlijke massa, die zich op S bevindt, is derhalve gelijk aan die welke in het attractie-centrum moet gedacht worden, of ook

de hoeveelheid electriciteit geïnduceerd op den afgeleiden conductor is is gelijk en tegengesteld met de induceerende electriciteit in P_i' .

Voor het verder onderzoek nemen wij den oorsprong van een rechthoekig coördinaten stelsel in P_i' of in het attractie-centrum. Wordt nu V_s achtereenvolgens gelijk x , y en z genomen, dan zullen, daar x , y en z P_i functiën van S zijn, ook in alle punten van S de waarden, die bij de aangenomen waarden van V_s behooren, respectievelijk zijn x , y en z .

Men heeft derhalve, daar in P_i' $x = 0$, $y = 0$ en $z = 0$ is

$$0 = \int x q_i d\sigma, \quad 0 = \int y q_i d\sigma, \quad 0 = \int z q_i d\sigma.$$

Het zwaartepunt van deze centrobarische lading ligt derhalve in het attractie-centrum. Evenzoo vindt men door voor V_s achtereenvolgens te nemen

$$xy, \quad xz, \quad yz.$$

$$0 = \int xy q_i d\sigma, \quad 0 = \int xz q_i d\sigma, \quad 0 = \int yz q_i d\sigma.$$

Neemt men achtereenvolgens

$$V_s = (x^2 + y^2) - (x^2 + z^2)$$

en $V_s = (x^2 + z^2) - (y^2 + z^2)$

dan is weer in alle punten binnen S

$$V_i = (x^2 + y^2) - (x^2 + z^2)$$

en $V_i = (x^2 + z^2) - (y^2 + z^2)$

daar deze beide waarden van V_i ook nu nog P_i functiën zijn.

Weder is V_i' in beide gevallen gelijk nul, waaruit

$$\int (x^2 + y^2) q_i d\sigma = \int (x^2 + z^2) q_i d\sigma = \int (y^2 + z^2) q_i d\sigma.$$

POINSON'S traagheids-ellipsoïde der centrobarische lading is dus in het attractie-centrum een bol.

§ 5. Onderzoeken wij thans de lading, waarbij G_u als potentiaal behoort, of wel de centrobarische lading met P_u' als attractie-centrum.

Hiertoe wordt uitgegaan van de betrekking ¹²⁾

$$V_u' = \int V_s q_u d\sigma \dots\dots\dots 2)$$

Zij in alle punten van S weer $V_s = \frac{1}{\Delta}$, waarin thans Δ voorstelt den afstand van een punt van S tot een willekeurig punt x, y, z buiten S , dan is

$$V_u' = \int \frac{q_u d\sigma}{\Delta}$$

en V_u' is nu de waarde der P_u functie in het punt $P_u' (x'y'z')$, die aan het oppervlak overgaat in $\frac{1}{\Delta}$; het is dus weer de waarde der functie G_u in x', y', z' met het punt xyz als vast punt; noemen wij deze functie G_u' , dan is

$$G_u' = \int \frac{q_u dq}{\Delta}$$

Maar de integraal in het tweede lid is volgens definitie de potentiaal der centrobarische lading over S met P_u' als attractiecentrum in het punt x, y, z , of G_u , bijgevolg

$$G_u' = G_u$$

waaruit weer volgt, dat de GREENSche functie G_u eene *symmetrische* functie van x', y', z' en x, y, z is.

Substitueert men in ²⁾ voor V_s eene constante waarde C , dan is V_u in alle punten buiten S eene P_u functie, die aan het oppervlak de waarde C aanneemt, derhalve volgens de voorgaande paragraaf

$$V_u = CH$$

In $P_u' (x'y'z')$ is nu

$$V_u' = CH_u$$

of

$$CH_u = \int C q_u d\sigma$$

$$\int q_u d\sigma = H_u$$

De massa der electriciteit op den geleider S , met de aarde verbonden, geïnduceerd door de hoeveelheid electriciteit -1 in P_u' of ook de massa der centrobarische stofverdeling over S , waarvan P_u' het attractie-centrum is, heeft dezelfde waarde als de potentiaal van de evenwichtslading van S in het punt P_u' .

Blijkbaar geeft de substitutie van de functiën x , y enz. voor V_s hier geen eenvoudige uitkomsten. De ligging van het zwaartepunt, enz. van deze lading blijven dus geheel onbekend.

§ 6. De resultaten in § 4 verkregen zijn gevolgen van zeer algemeene waarheden, die thans worden afgeleid. Zij S een oppervlak, dat eene massa M geheel omsluit en laat over S eene lading aangebracht zijn, die in alle punten buiten en op S equipotentiaal is met de massa M . Zoo dan de potentiaal der massa V genoemd wordt en de potentiaal der lading over S in punten buiten S en op S respectievelijk V_u en V_s , is zoowel V_u als V_s gelijk V . Nu is volgens het theorema van GREEN 1^e Hoofdstuk 4).

$$\int V \frac{dU}{dn} d\sigma + \int V \triangle U d\tau = \int U \frac{dV}{dn} d\sigma + \int U \triangle V d\tau \dots\dots\dots 3).$$

Zij hierin U eene willekeurige P_i functie van S , en V de potentiaal van de massa M , die zooals reeds gezegd is geheel binnen S ligt, en gedacht wordt continu verdeeld te zijn binnen een tweede oppervlak S' dan kan men de gelijkheid 3) toepassen voor de geheele ruimte binnen S . Tevens weet men, dat $\triangle U$ steeds gelijk nul is en $\triangle V$ overal gelijk nul, behalve in punten x_1, y_1, z_1 , binnen S' , waar

$$\triangle V = -4\pi q_1$$

is, zijnde q_1 de dichtheid in x_1, y_1, z_1 .

Men heeft dus, zoo $\int_s$ een integratie over het oppervlak S en $\int_{s'}$ eene integratie over de ruimte ingesloten door S' , voorstelt:

$$\int_s V \frac{dP_i}{dn} d\sigma = \int_s P_i \frac{dV}{dn} d\sigma - 4\pi \int_{s'} P_i q_1 d\tau \dots\dots\dots 4).$$

Neemt men verder in 3) weer $U = P_i$ maar voor V de potentiaal der massaverdeeling over S in punten binnen S of V_i , dan is

$$\int_s V_i \frac{dP_i}{dn} d\sigma = \int_s P_i \frac{dV_i}{dn} d\sigma \dots\dots\dots 5).$$

Aan het oppervlak is echter $V = V_s$, dus door 4) en 5) af te trekken

$$0 = \int_s P_s \left(\frac{dV}{dn} - \frac{dV_i}{dn} \right) d\sigma - 4\pi \int_{s'} P_i \varrho_i d\tau$$

Uit de betrekking $-4\pi\varrho = \frac{dV_i}{dn} + \frac{dV_u}{dN}$ volgt, daar $\frac{dV_u}{dN} = \frac{dV}{dN}$
 $= -\frac{dV}{dn}$ is

$$\int_s P_s \varrho d\sigma = \int_{s'} P_i \varrho_i d\tau \quad \dots\dots\dots 6).$$

welke vergelijking ook, zoo $\varrho d\sigma = dm$ en $\varrho_i d\tau = dm_i$ gesteld wordt, kan geschreven worden

$$\int_s P_s dm = \int_{s'} P_i dm_i \quad \dots\dots\dots 7).$$

Neemt men nu voor P_s achtereenvolgens dezelfde functiën als in § 4, waarbij echter de oorsprong van het coördinatenstelsel in een willekeurig punt gedacht wordt, dan vindt men wederom

$$\begin{aligned} \int_s dm &= \int_{s'} dm_i \\ \int_s x dm &= \int_{s'} x_i dm_i & \int_s xy dm &= \int_{s'} x_i y_i dm_i \\ \int_s y dm &= \int_{s'} y_i dm_i & \int_s xz dm &= \int_{s'} x_i z_i dm_i \\ \int_s z dm &= \int_{s'} z_i dm_i & \int_s yz dm &= \int_{s'} y_i z_i dm_i \\ \int_s (x^2 + y^2) dm &= \int_{s'} (x_i^2 + y_i^2) dm_i \\ &= \int_s (x^2 + z^2) dm = \int_{s'} (x_i^2 + z_i^2) dm_i \\ &= \int_s (y^2 + z^2) dm = \int_{s'} (y_i^2 + z_i^2) dm_i \end{aligned}$$

Wordt derhalve over S eene lading gebracht, die in alle punten buiten S en op S dezelfde potentiaal heeft als eene massa M binnen S , dan gelden de volgende eigenschappen:

1°. De massa der lading is gelijk aan de massa van M .

2°. Het zwaartepunt der lading valt samen met het zwaartepunt van M.

3°. In ieder punt hebben de traagheidsellipsoïden van de lading en van M dezelfde hoofdassen.

4°. Zoo de traagheidsmomenten van de massa M ten opzichte van drie willekeurige rechthoekige assen A', B', C' en van de lading ten opzichte der zelfde assen A, B, C zijn, dan is

$$A - A' = B - B' = C - C'.$$

De eerste eigenschap is bekend, evenals de eigenschappen in § 4, welke laatste voor THOMSON *) gevonden werden. De tweede eigenschap werd door LIOUVILLE ontdekt en de 2° en 3° door THOMSON †), nl. voor het bijzonder geval, dat S een evenwichtsoppervlak is der massa M en over S eene evenwichtslading uitgebreid wordt.

Voor een willekeurig oppervlak zijn zij hier, naar ik meen, voor het eerst afgeleid. Bij de afleiding is ondersteld, dat de massa M continu verdeeld is binnen de geheele ruimte door S' ingesloten. Volledigheidshalve wordt in de volgende paragraaf aangetoond, dat geheel hetzelfde geldt, zoo de massa M opgehoopt mocht zijn in materiele punten of over het oppervlak S' verdeeld is.

§ 7. In de beide gevallen, hierboven genoemd, komt het er slechts op aan de vergelijking 6) of 7) af te leiden, waaruit de eigenschappen 1 tot 4 onmiddellijk volgen. Zij de potentiaal van de massa, over S' verdeeld, in punten buiten S' V_u en in punten binnen S' V_i , dan moet de potentiaal der lading over S in punten buiten S V_u zijn, en stellen wij die potentiaal binnen S V_i , dan kunnen wij de stelling van GREEN 3) toepassen voor de ruimte tusschen S en S' en heeft men, zoo U een P_i functie is voor het oppervlak S en $V = V_u$ genomen wordt,

*) Proceedings of the Royal Society of Edinburgh 1863/64 pag. 190 of in THOMSON and TAIT. Handbuch etc. N°. 534—535.

†) Cambridge and Dublin Mathematical Journal 1846.

THOMSON. Reprint of papers on Electrostatics and Magnetism. 1872. pag. 108.

$$\begin{aligned} \int_s V'_s \frac{dP_i}{dn} d\sigma + \int_{s'} V'_{s'} \frac{dP_i}{dN'} d\sigma' = \\ = \int_s P_s \frac{dV'_u}{dn} d\sigma + \int_{s'} P_{s'} \frac{dV'_u}{dN'} d\sigma' \dots\dots\dots 8) \end{aligned}$$

Neemt men verder weer $U = P_i$ en $V = V_i$ dan geldt voor S

$$\int_s V_s \frac{dP_i}{dn} d\sigma = \int_{s'} P_{s'} \frac{dV_i}{dn} d\sigma' \dots\dots\dots 9)$$

Daar aan het oppervlak S de functiën V'_s en V_s dezelfde waarde hebben, vindt men uit 8) en 9)

$$\begin{aligned} \int_{s'} V'_{s'} \frac{dP_i}{dN'} d\sigma' = \int_s P_s \left(\frac{dV'_u}{dn} - \frac{dV_i}{dn} \right) d\sigma + \\ + \int_{s'} P_{s'} \frac{dV'_u}{dN'} d\sigma' \dots\dots\dots 10) \end{aligned}$$

Eindelijk volgt uit 3) zoo nog eens $U = P_i$ en $V = V'_i$ genomen wordt voor het oppervlak S'

$$\int_{s'} V'_{s'} \frac{dP_i}{dN'} d\sigma' = \int_{s'} P_{s'} \frac{dV'_i}{dN'} d\sigma' \dots\dots\dots 11)$$

Nu is $\frac{dP_i}{dN'} = -\frac{dP_i}{dn}$, dus door optelling van 10) en 11)

$$\begin{aligned} 0 = \int_s P_s \left(\frac{dV'_u}{dn} - \frac{dV_i}{dn} \right) d\sigma + \\ + \int_{s'} P_{s'} \left(\frac{dV'_u}{dN'} + \frac{dV'_i}{dN'} \right) d\sigma' \end{aligned}$$

Is in $d\sigma$ de dichtheid ϱ en in $d\sigma'$ evenzoo ϱ' , dan geldt dus

$$\int_s P_s \varrho d\sigma = \int_{s'} P_{s'} \varrho' d\sigma' \dots\dots\dots 12).$$

waardoor dus ook voor dit geval de vergelijking bewezen is.

Zijn in punten P_j massa's μ_j opgehoopt, dan is de potentiaal van die lading in een punt buiten of op $S = \sum \frac{\mu_j}{E_j}$, zoo E_j den afstand voorstelt van dat punt tot P_j . De potentiaal van de lading over S is dus $V_u = \sum \frac{\mu_j}{E_j}$, en dezelfde waarde heeft V_s .

Nu volgt uit 6) 1^e Hoofdstuk

$$\int P_i \frac{d}{dn} \frac{1}{E_j} d\sigma - \int \frac{1}{E_j} \frac{dP_i}{dn} dq = 4\pi P_j.$$

Zoo P_j de waarde voorstelt der functie P_i in het punt P_j . Hieruit volgt

$$\int P_s \frac{d}{dn} \sum \frac{\mu_j}{E_j} d\sigma - \int \sum \frac{\mu_j}{E_j} \frac{dP_i}{dn} = 4\pi \sum \mu_j P_j.$$

Zij verder de potentiaal van de lading over S in punten binnen S gelijk V_i , dan is

$$\int P_s \frac{dV_i}{dn} d\sigma - \int V_s \frac{dP_i}{dn} d\sigma = 0.$$

Door aftrekking vindt men nu op de gewone wijze

$$\int P_s dq d\sigma = \sum P_j \mu_j. \dots\dots\dots 13).$$

Dat deze vergelijking ook onmiddellijk uit de bekende vergelijking 12) van het vorige hoofdstuk kon opgeschreven worden, valt in het oog.

§ 8. Zoo over het oppervlak S eene lading uitgebreid is, die in alle punten binnen en op S equipotentiaal is met eene massa M buiten S gelegen, dan zal men door de stelling van GREEN toe te passen voor de ruimte buiten S , vergelijkingen vinden, overeenkomstig met die in 6) en 7) afgeleid, en wel

$$\int_s P_s q d\sigma = \int_{s'} P_{s'} q_1 d\tau \dots\dots\dots 6)$$

$$\int_s P_s q d\sigma = \int_{s'} P_{s'}' q' d\sigma' \dots\dots\dots 12)$$

$$\int_s P_s q d\sigma = \sum P_j \mu_j \dots\dots\dots 13)$$

Neemt men hierin P_s gelijk C (constante), dan is $P_s = CII$ en men vindt uit 6)

$$\int_s q d\sigma = \int_{s'} II q_1 d\tau$$

en overeenkomstige betrekkingen uit 12) en 13). Hieruit blijkt,

dat de eigenschap aan het slot van § 5 gevonden voor de grootte der massa eener centrobarische lading ook een bijzonder geval is van eene algemeene eigenschap.

De betrekkingen 6), 12), 13) en de overeenkomstige, hierboven genoemde, zijn geheel algemeene vergelijkingen, die men verkrijgt, zoo eene willekeurige massa over eene oppervlakte S op de bekende wijze verdeeld wordt; de vergelijkingen

$$V_i' = \int V_{i,q} dq$$

$$\text{en } V_a' = \int V_{a,q} dq$$

zijn te beschouwen als bijzondere gevallen daarvan, die verkregen worden bij de verdeling over S van eene massa $+1$ in één punt gedacht.

DERDE HOOFDSTUK.

DE FUNCTIE VAN GREEN VOOR HET OPPERVLAKE VAN EEN BOL
EN VAN EEN PARALLELOPIPEDUM. TOEPASSINGEN.

§ 1. Is een oppervlak S een evenwichts-oppervlak voor twee massa's M_1 en M_2 en wel M_1 binnen S gelegen en M_2 buiten S , dan kan men zoo $M_1 = +1$ is, op de wijze, zooals in het vorige hoofdstuk is aangegeven, onmiddellijk de functie G_1 voor dat oppervlak berekenen bij het punt, waarin de massa $+1$ ligt als vast punt of attractie-centrum.

Ten einde echter de functie G_1 te kennen bij een willekeurig punt als attractie-centrum, is het noodig, dat S kan beschouwd worden als een oppervlak van constante potentiaal voor eene massa $+1$, waar ook binnen dat oppervlak geplaatst, en eene bekende massa M_2 buiten dat oppervlak. Slechts twee oppervlakken zijn bekend, die aan deze voorwaarde voldoen, en wel het oppervlak van een bol en dat van een rechthoekig-paralleloipedum.

Zoo van de beide massa's M_1 en M_2 , waarvan S een evenwichts-oppervlak gedacht wordt, $M_2 = +1$ is, dan is de functie G_u voor S onmiddellijk te berekenen, behoorende bij het punt, waarin M_2 ligt als vast punt. Slechts is het in dit geval nog noodig, om G_u geheel te kennen, dat S een evenwichts-oppervlak van potentiaal nul is, of dat de potentiaal van de evenwichtslading van S eene bekende grootheid is. Ook hierbij geldt hetzelfde als zooeven is opgemerkt; ten einde G_u algemeen te kunnen berekenen, dat wil

zeggen bij een willekeurig punt buiten S als vast punt, is het noodig, dat S kan beschouwd worden als een evenwichtsvlak van eene massa $+1$, waar ook buiten S geplaatst, en van eene geheel bekende massa M_1 binnen S. Het bolvlak is het eenige vlak, waarvan men weet, dat het aan deze voorwaarde voldoet.

In de volgende paragrafen gaan wij over tot het bepalen der functien van GREEN voor het bolvlak en tot de toepassing van die functien; ten slotte zal de functie G_1 voor een rechthoekig parallelipedum berekend worden.

§ 2. Zij S een bol met een straal a en middelpunt M en A_1 een punt geheel willekeurig binnen den bol aangenomen, op een afstand r van het middelpunt gelegen, dan verlengt men MA_1 en neemt op dat verlengde een punt A_u aan, zoodanig, dat

$$MA_1 \times MA_u = a^2.$$

Het punt A_u buiten den bol heet het geconjugeerde punt van A_1 , en nu is volgens bekende eigenschap van het bolvlak, zoo P_s een punt op dat vlak voorstelt,

$$\frac{A_1 P_s}{A_u P_s} = \frac{r}{a} \dots\dots\dots 1)$$

Is de afstand van A_u tot M gelijk r' , dan is $rr' = a^2$ of $\frac{r}{a} = \frac{a}{r'}$.

De vergelijking 1) kan derhalve geschreven worden

$$\frac{1}{A_1 P_s} - \frac{a}{r} \frac{1}{A_u P_s} = 0 \dots\dots\dots 2)$$

of

$$-\frac{a}{r'} \frac{1}{A_1 P_s} + \frac{1}{A_u P_s} = 0 \dots\dots\dots 3)$$

Uit 2) blijkt dat het bolvlak een evenwichtsvlak van potentiaal nul is voor eene massa $+1$ in A_1 en eene massa $-\frac{a}{r}$ in A_u geplaatst. Evenzoo uit 3) dat het bolvlak als een dergelijk vlak kan beschouwd worden voor eene massa $+1$ in A_u en eene massa $-\frac{a}{r'}$ in A_1 geplaatst. Daar A_1 en ook A_u ieder op zich zelf geheel

willekeurig kunnen geplaatst worden, voldoet dus het bolvlak aan de voorwaarden, in de voorgaande paragraaf genoemd. Volgens § 1 van het tweede hoofdstuk zijn nu onmiddellijk de functien G_i en G_u aan te geven. Laat P_i een willekeurig punt binnen S zijn, en P_u een punt buiten S , dan is

$$G_i = \frac{a}{r} \frac{1}{A_i P_i}$$

en

$$G_u = \frac{a}{r'} \frac{1}{A_i P_u}$$

Weder zou men kunnen opmerken G_i is eene P_i functie van S , die volgens 2), zoo P_i in S valt, overgaat in $\frac{1}{A_i P_i}$; zij is dus de functie van GREEN voor S met A_i als vast punt. Hetzelfde kan men zeggen van G_u .

Laat de afstand van P_i tot M gelijk A zijn en de hoek tusschen $P_i M$ en $A_i M$ gelijk ϑ , dan is, daar $MA_u = \frac{a^2}{r}$ is, in den driehoek $P_i M A_u$

$$A_u P_i = \frac{1}{r} \sqrt{a^4 + r^2 A^2 - 2a^2 r A \cos \vartheta}$$

of

$$G_i = \frac{a}{\sqrt{a^4 + r^2 A^2 - 2a^2 r A \cos \vartheta}}$$

Zij evenzoo de afstand van P_u tot M gelijk A' en de hoek tusschen $P_u M$ en $A_u M$ gelijk ϑ' , dan vindt men eveneens

$$G_u = \frac{a}{\sqrt{a^4 + r'^2 A'^2 - 2a^2 r' A' \cos \vartheta'}}$$

Deze uitdrukking voor G_i en G_u vertoonen volkomen denzelfden vorm, en schrijft men in G_u voor r' , A' en ϑ' ook r , A en ϑ , dan is

$$G_{i, u} = \frac{a}{\sqrt{a^4 + r^2 A^2 - 2a^2 r A \cos \vartheta}}$$

§ 3. Ter bepaling van de dichtheden ϱ_i en ϱ_u heeft men, volgens § 9 van het eerste hoofdstuk

$$q_i = \frac{1}{4\pi} \frac{d}{dn} \left(\frac{1}{E_i} - G_i \right)$$

$$q_u = \frac{1}{4\pi} \frac{d}{dN} \left(\frac{1}{E_u} - G_u \right)$$

waarin E_i gelijk is aan $A_i P_i$ en E_u gelijk $A_u P_u$; dus

$$E_i = \sqrt{a^2 + A^2 - 2aA \cos \vartheta}$$

$$E_u = \sqrt{a^2 + A'^2 - 2aA' \cos \vartheta}$$

Verder is $\frac{d}{dn} = - \text{Lim.} \left(\frac{d}{dA} \right)_{A=a}$

en $\frac{d}{dN} = \text{Lim.} \left(\frac{d}{dA'} \right)_{A'=a}$

Men kan dus weer schrijven

$$q_{i,u} = \mp \frac{1}{4\pi} \text{Lim.} \left[\frac{d}{dA} \left\{ \frac{a}{\sqrt{a^2 + A^2 - 2aA \cos \vartheta}} - \frac{a}{\sqrt{a^2 + r^2 A^2 - 2a^2 r A \cos \vartheta}} \right\} \right]_{A=a}$$

waarin het bovenste teeken bij q_i behoort, en het onderste bij q_u . De differentiatie uitgevoerd, vindt men

$$q_{i,u} = \mp \frac{1}{4\pi} \text{Lim.} \left\{ \frac{a \cos \vartheta - A}{(a^2 + A^2 - 2aA \cos \vartheta)^{\frac{3}{2}}} - \frac{a(a^2 r \cos \vartheta - r^2 A)}{(a^4 + r^2 A^2 - 2a^2 r A \cos \vartheta)^{\frac{3}{2}}} \right\}_{A=a}$$

en ten slotte

$$q_{i,u} = \mp \frac{1}{4\pi} \frac{r^2 - a^2}{a(a^2 + r^2 - 2ar \cos \vartheta)^{\frac{3}{2}}} \dots\dots\dots 4)$$

Ter bepaling van de dichtheid q_i had men ook kunnen uitgaan van de betrekking op pag. 22.

$$q_i = \frac{1}{4\pi} K.$$

Op de eenheid van massa in P_s wordt nl. eene kracht uitgeoefend $= \frac{1}{A_i P_s^2} = \frac{1}{E^2}$ volgens $P_s A_i$ en eene kracht volgens het ver-

lengde van $A_u P_s = \frac{a}{r} \frac{1}{A_u P_s^2} = \frac{a}{r E^2}$.

Nu is $\frac{E}{E'} = \frac{r}{a}$ of $E' = \frac{aE}{r}$; dus werken in P_s twee krachten nl. eene kracht $\frac{1}{E^2}$ en eene $\frac{r}{aE^2}$, welke met elkander een hoek maken, die het supplement is van hoek $A_i P_s A_u$.

De resultante van die krachten is de derde zijde van een driehoek, waarvan een hoek gelijk $A_i P_s A_u$ is, en de beide aangrenzende zijden zijn

$$\frac{1}{E^2} \text{ en } \frac{r}{aE^2} \quad \text{of} \quad \frac{r}{aE^3} \cdot \frac{aE}{r} \text{ en } \frac{r}{aE^3} \cdot E.$$

Deze driehoek is gelijkvormig met driehoek $A_i P_s A_u$, want de zijden om hoek $A_i P_s A_u$ zijn in den laatsten driehoek $\frac{aE}{r}$ en E ; dus zal de resultante zijn

$$K = \frac{r}{aE^3} \cdot A_i A_u.$$

$$\text{Nu is } A_i A_u = \frac{a^2}{r} - r = \frac{a^2 - r^2}{r}; \text{ dus}$$

$$K = \frac{a^2 - r^2}{aE^3}$$

of

$$q_i = \frac{1}{4\pi} \frac{a^2 - r^2}{aE^2}.$$

Op volkomen dezelfde wijze kon q_u berekend worden. De bekende betrekkingen ¹²⁾ en ^{12')} pag. 15 worden nu

$$V_i = -\frac{1}{4\pi} \int V_s \frac{r^2 - a}{a(a^2 + r^2 - 2a \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} d\sigma \dots\dots\dots 5)$$

$$V_u = +\frac{1}{4\pi} \int V_s \frac{r^2 - a^2}{a(a^2 + r^2 - 2a \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} d\sigma \dots\dots\dots 5')$$

of

$$V_{i,u} = \mp \frac{1}{4\pi} \int V_s \frac{r^2 - a^2}{a(a^2 + r^2 - 2a \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} d\sigma \dots\dots\dots 6)$$

§ 4. Alvorens verdere gevolgen uit bovenstaande betrekkingen af te leiden, passen wij ze toe om werkelijk over een bol zoodanig

massa te verdeelen, dat de potentiaal van die massa in ieder punt van den bol eene gegeven waarde aanneemt.

Laat die waarde in ieder punt P van den bol S zijn

$$V_s = C \cos \gamma$$

waarin C eene constante voorstelt en γ den hoek tusschen den straal MP en den straal MN naar een punt N van den bol getrokken. In een punt A , dat respectievelijk

$$A_i \quad A_s \quad A_u$$

genoemd wordt, al naar het binnen, op of buiten S ligt, bepalen wij de waarden der potentiaal van de gevraagde massaverdeeling, en wel V_i en V_u .

Zijn deze bekend, dan vindt men op de gewone wijze de dichtheid ρ in het punt A_s .

Als grondvlak van een poolcoördinaten stelsel wordt aangenomen een vlak door het middelpunt loodrecht op MA , als oorsprong het middelpunt, en het eerste normaal-vlak wordt door N gebracht. De coördinaten van het punt P zijn dan

$$a, \quad \vartheta \quad \text{en} \quad \varphi,$$

waarin ϑ de hoek is tusschen MA en MP en φ de standhoek der normaal-vlakken door N en P gebracht. Zij de hoek tusschen MA en $MN = \beta$, dan zijn de coördinaten van het punt N

$$\alpha, \quad \beta \quad \text{en} \quad 0.$$

Men heeft dan

$$\cos \gamma = \cos \vartheta \cos \beta + \sin \vartheta \sin \beta \cos \varphi$$

$$\text{dus} \quad V_s = C (\cos \vartheta \cos \beta + \sin \vartheta \sin \beta \cos \varphi).$$

De formule ⁶⁾ is nu onmiddellijk te gebruiken; wij geven de grenzen van de integraties aan en schrijven

$$d\sigma = a^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi,$$

dan is

$$\begin{aligned} V_{i, u} = \mp \frac{C}{4\pi} a(r^2 - a^2) & \left\{ \int_0^\pi \frac{\cos \beta \cos \vartheta \sin \vartheta}{(a^2 + r^2 - 2ar \cos \vartheta)^{\frac{3}{2}}} d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi + \right. \\ & \left. + \int_0^\pi \frac{\sin \beta \sin^2 \vartheta}{(a^2 + r^2 - 2ar \cos \vartheta)^{\frac{3}{2}}} d\vartheta \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi \right\}. \end{aligned}$$

De laatste integraal in deze som is blijkbaar nul, zoodat slechts overblijft te bepalen

$$\int_0^\pi \frac{\cos\vartheta \sin\vartheta d\vartheta}{(a^2 + r^2 - 2ar\cos\vartheta)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{ar} \int_0^\pi \cos\vartheta \frac{d}{d\vartheta} (a^2 + r^2 - 2ar\cos\vartheta)^{-\frac{1}{2}} d\vartheta$$

Het resultaat van deze integratie is verschillend naar gelang men V_u of V_i bepaalt. In het eerste geval vindt men

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{\cos\vartheta \sin\vartheta d\vartheta}{(a^2 + r^2 - 2ar\cos\vartheta)^{\frac{3}{2}}} &= \frac{2}{a(r^2 - a^2)} + \\ + \frac{1}{ar} \int_0^\pi \frac{d\cos\vartheta}{(a^2 + r^2 - 2ar\cos\vartheta)^{\frac{3}{2}}} &= \frac{2a}{a^2(r^2 - a^2)} \end{aligned}$$

Derhalve
$$V_u = C \frac{a^2}{r^2} \cos\beta.$$

In het tweede geval wordt gevonden

$$V_i = C \frac{r}{a} \cos\beta.$$

Ter bepaling van q , merkt men op

$$\frac{dV_u}{dN} = \left(\frac{dV_u}{dr} \right)_{r=a} = \left(-2C \frac{a^2}{r^3} \cos\beta \right)_{r=a} = -2 \frac{C}{a} \cos\beta$$

$$\frac{dV_i}{dn} = - \left(\frac{dV_i}{dr} \right)_{r=a} = - \left(C \frac{1}{a} \cos\beta \right)_{r=a} = - \frac{C}{a} \cos\beta$$

$$q = - \frac{1}{4\pi} \left(\frac{dV_i}{dn} + \frac{dV_u}{dN} \right) = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{3C}{a} \cos\beta$$

De gevonden waarden zijn slechts afhankelijk van β , zooals te verwachten was, en men heeft

$$V_i = C \frac{r}{a} \cos\beta, \quad V_s = C \cos\beta, \quad V_u = C \frac{a^2}{r^2} \cos\beta$$

$$q = \frac{1}{4\pi} \frac{3C}{a} \cos\beta$$

Blijkbaar is de som der massa, over den bol verdeeld, gelijk nul.

§ 5. Door gebruik te maken van de integralen ⁵⁾ en ^{5')} in verband met de gelijkheid

$$q = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{dV_i}{dr} - \frac{dV_u}{dr} \right)_{r=a}$$

bestaat de mogelijkheid, de dichtheid ρ eener gevraagde massa-verdeeling onmiddellijk uit te drukken in de gegeven waarde van de potentiaal voor het oppervlak. Zoodoende verkrijgt men de merkwaardige uitdrukking voor ρ , die door DIRICHLET is afgeleid *). De eenige moeilijkheid bij deze afleiding is hierin gelegen, dat de uitdrukkingen

$$\left(\frac{dV_i}{dr}\right)_{r=a} \quad \text{en} \quad \left(\frac{dV_u}{dr}\right)_{r=a}$$

zoo men onmiddellijk ⁵⁾ en ^{5')} gaat differentiëren, onbepaald worden, daar de vorm onder het integraalteeken bij de grenzen oneindig groot wordt. 't Is daarom noodig deze vergelijkingen eerst te transformeeren, daartoe schrijven wij:

$$V = \mp \frac{1}{4\pi} a(r^2 - a^2) \int_0^\pi \frac{\sin \vartheta \, d\vartheta}{(a^2 + r^2 - 2ar \cos \vartheta)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} V_s \, d\varphi$$

waarin het bovenste teeken behoort bij V_i en het onderste bij V_u , of wel het bovenste bij $r < a$ en het onderste bij $r > a$. Het coördinatenstelsel is aangenomen als in § 2. De integratie, in zooverre zij op φ betrekking heeft, denken wij uitgevoerd en wel zij

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\vartheta \varphi) \, d\varphi = F(\vartheta)$$

waarin $f(\vartheta \varphi) = V_s$.

$F(\vartheta)$ stelt dan voor de gemiddelde waarde van de potentiaal over een parallelcirkel met een spherischen straal ϑ uit A , beschreven. Nu is

$$2V = \mp a(r^2 - a^2) \int_0^\pi \frac{F(\vartheta) \sin \vartheta \, d\vartheta}{(a^2 + r^2 - 2ar \cos \vartheta)^{\frac{3}{2}}}$$

of bij gedeelten geïntegreerd

$$\begin{aligned} 2V &= -\frac{r^2 - a^2}{r} \int_0^\pi F(\vartheta) d(a^2 + r^2 - 2ar \cos \vartheta)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \pm \frac{r-a}{r} F(\pi) + \frac{r+a}{r} F(0) \mp \frac{r^2 - a^2}{r} \int_0^\pi \frac{F'(\vartheta) \, d\vartheta}{(a^2 + r^2 - 2ar \cos \vartheta)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

*) LEJEUNE DIRICHLET. Ueber einen neuen Ausdruck zur Bestimmung der Dichtigkeit der unendlich dünnen Kugelschale etc. Abhandlungen-Akademie zu Berlin 1850. pag. 99.

Hieruit volgt:

$$\begin{aligned}
 2 \frac{dV}{dr} &= \pm \frac{a}{r^2} F(\pi) - \frac{a}{r^2} F(0) \mp \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) \int_0^\pi \frac{F'(\vartheta) d\vartheta}{(a^2 + r^2 - 2ar \cos \vartheta)^{\frac{1}{2}}} \\
 &\mp \frac{r^2 - a^2}{r} \int_0^\pi \frac{(-r + a \cos \vartheta) F'(\vartheta) d\vartheta}{(a^2 + r^2 - 2ar \cos \vartheta)^{\frac{3}{2}}} \\
 \text{Lim. } 2 \left(\frac{dV}{dr} \right)_{r=a} &= \pm \frac{1}{a} F(\pi) - \frac{1}{a} F(0) \mp 2 \int_0^\pi \frac{F'(\vartheta) d\vartheta}{2a \sin \frac{1}{2} \vartheta} \\
 &\mp \text{Lim. } \frac{r^2 - a^2}{a} \int_0^\pi \frac{(-r + a \cos \vartheta) F'(\vartheta) d\vartheta}{(a^2 + r^2 - 2ar \cos \vartheta)^{\frac{3}{2}}}
 \end{aligned}$$

De bovenste teekens behooren weer bij $\text{Lim} \left(\frac{dV_i}{dr} \right)_{r=a}$ en de onderste bij $\text{Lim} \left(\frac{dV_u}{dr} \right)_{r=a}$. De eerste integraal in bovenstaande uitdrukking heeft in het algemeen eene eindige waarde, daar $F'(\vartheta)$ te gelijk met $\sin \frac{1}{2} \vartheta$ tot nul nadert *). De laatste integraal is voor $r = a$ nul, zooals onmiddellijk blijkt, derhalve

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{dV_i}{dr} \right)_{r=a} &= -\frac{1}{2a} F(\pi) + \frac{1}{2a} F(0) + \frac{1}{2a} \int_0^\pi \frac{F'(\vartheta) d\vartheta}{\sin \frac{1}{2} \vartheta} \\
 \left(\frac{dV_u}{dr} \right)_{r=a} &= +\frac{1}{2a} F(\pi) + \frac{1}{2a} F(0) - \frac{1}{2a} \int_0^\pi \frac{F'(\vartheta) d\vartheta}{2a \sin \frac{1}{2} \vartheta}
 \end{aligned}$$

waaruit:

$$\varrho = \frac{1}{4a\pi} \left\{ F(\pi) - \int_0^\pi \frac{F'(\vartheta) d\vartheta}{\sin \frac{1}{2} \vartheta} \right\} \dots\dots\dots 7)$$

Ten einde dus de dichtheid in een punt A_* te bepalen, moet het eerst $F(\vartheta)$ gezocht worden, waartoe de integratie

$$F(\vartheta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\vartheta\varphi) d\varphi.$$

Is $f(\vartheta\varphi) = f(\cos \gamma)$, waarin γ den hoek tusschen MS en een bepaalden straal MN voorstelt, dan heeft men even als in het vorige vraagstuk

*) RIEMANN. Schwere, Elektrizität und Magnetismus. pag. 141.

$$f(\vartheta\varphi) = f(\cos \vartheta \cos \beta + \sin \vartheta \sin \beta \cos \varphi)$$

en

$$\begin{aligned} F(\vartheta) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\cos \vartheta \cos \beta + \sin \vartheta \sin \beta \cos \varphi) d\varphi = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(\cos \vartheta \cos \beta + \sin \vartheta \sin \beta \cos \varphi) d\varphi. \end{aligned}$$

Is de functie onder het integraalteeken eene geheele rationeele functie van $\cos \vartheta$, dan kan men de integratie uitvoeren en heeft dan φ teruggebracht tot eene enkelvoudige integraal. Eigenlijk behoeft slechts $\frac{df}{d\vartheta}$ eene geheele rationeele functie van $\cos \vartheta$ te zijn.

§ 6. De gevonden uitdrukking voor φ passen wij toe op het vraagstuk: „Eene gegeven massa m zoodanig over een bol met straal a te verdeelen, dat in ieder punt op het bolvlak de potentiaal evenredig zij met het vierkant van den afstand van dat punt tot een gegeven diametraalvlak, waarvan de pool in een punt N ligt.” Bij dezelfde notaties als vroeger, is in een punt P

$$V_s = Ca^2 \cos^2 \gamma = c \cos^2 \gamma$$

waarin c eene constante, die moet bepaald worden. Ter berekening van de dichtheid in A_s heeft men

$$\begin{aligned} F(\vartheta) &= \frac{c}{\pi} \int_0^{\pi} (\cos^2 \vartheta \cos^2 \beta + \sin^2 \vartheta \sin^2 \beta \cos^2 \varphi + \\ &\quad + 2 \cos \vartheta \cos \beta \sin \vartheta \sin \beta \cos \varphi) d\varphi \end{aligned}$$

of na integratie

$$F(\vartheta) = c (\cos^2 \vartheta \cos^2 \beta + \frac{1}{2} \sin^2 \vartheta \sin^2 \beta)$$

$$\begin{aligned} F'(\vartheta) &= c (\sin^2 \beta - 2 \cos^2 \beta) \cos \vartheta \sin \vartheta \\ &= c (1 - 3 \cos^2 \beta) \cos \vartheta \sin \vartheta. \end{aligned}$$

Nu is in 7)

$$F(\pi) = c \cos^2 \beta$$

$$\int_0^{\pi} \frac{F'(\vartheta) d\vartheta}{\sin \frac{1}{2} \vartheta} = c (1 - 3 \cos^2 \beta) \int_0^{\pi} \frac{\cos \vartheta \sin \vartheta}{\sin \frac{1}{2} \vartheta} d\vartheta = \frac{4}{3} c (1 - 3 \cos^2 \beta)$$

derhalve in A_s

$$\varrho = \frac{c}{4a\pi} \left(5 \cos^2 \beta - \frac{4}{3} \right) *).$$

Ten einde c te bepalen gaat men uit van de betrekking

$$m = 2\pi a^2 \int_0^\pi \varrho \sin \beta \, d\beta.$$

Substitueert men voor ϱ de gevonden waarde, dan vindt men na eenvoudige integratie $m = \frac{1}{3} ac$ of $c = \frac{3a}{m}$, dus

$$\varrho = \frac{3m}{4a^2\pi} \left(5 \cos^2 \beta - \frac{4}{3} \right)$$

en in datzelfde punt is

$$V_s = \frac{3m}{a} \cos^2 \beta.$$

Het is niet noodig, dat de gegeven potentiaalwaarden in de verschillende punten van S door eene enkele functie van ϑ en φ worden voorgesteld. Zoo behandelt DIRICHLET het vraagstuk, waarbij $V_s = \cos \gamma$ is, zoolang $\gamma < \frac{\pi}{2}$, en $V_s = 0$ is voor $\gamma > \frac{\pi}{2}$.

De dichtheid wordt dan uitgedrukt door eene elliptische integraal van de derde soort, die tot volledige elliptische integralen van de eerste en tweede soort kan terug gebracht worden.

§ 7. Uitgaande van de uitdrukkingen 5) en 5') voor V_i en V_u kan men de potentiaal van eene vlaktelading over het oppervlak van den bol ontwikkelen in eene reeks van kogelfunctien.

Dit is niet de eenvoudigste weg om tot die ontwikkeling te ko-

*) RIEMANN t. a. p. pag. 140 zegt: „Zur Berechnung von ϱ ist die Formel nicht brauchbar. Vielmehr hat man zu diesem Zweck sie in eine Reihe von Kugelfunctionen zu entwickeln“. De eerste uitspraak is zeker onjuist, en wat overigens de ontwikkeling in kogelfunctien aangaat: DIRICHLET brengt juist de bekende uitdrukking voor de dichtheid in kogelfunctien tot de uitdrukking 3) terug. In de meeste gevallen is het echter beter de uitdrukking voor ϱ in kogelfunctien onmiddellijk te gebruiken.

men en bovendien is de ontwikkeling zelve een bijzonder geval van de algemeene ontwikkeling, die in het volgend hoofdstuk gegeven wordt, maar zij brengt ons tot eene belangrijke eigenschap, waarom zij reeds hier eene plaats vindt.

Laten de coördinaten van een punt A , hetzij A_i A_u of A_s , zijn

$$r, \quad \vartheta, \quad \varphi$$

en van een punt P op den bol

$$a \quad \vartheta' \quad \varphi'$$

en de hoek tusschen MA en MP gelijk ω zijn, dan gaan de integralen 5) en 5') over in

$$V_{i,u} = \mp \frac{a}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^\pi V_s \frac{r^2 - a^2}{(a^2 + r^2 - 2ar \cos \omega)^{\frac{3}{2}}} \cdot \sin \vartheta' d\vartheta' \quad 8)$$

Stelt men verder in V_i het quotient $\frac{r}{a} = \varepsilon$ en in V_u evenzoo $\frac{a}{r} = \varepsilon$, dan is steeds $\varepsilon < 1$, en men heeft

$$V_i = - \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^\pi V_s \frac{1 - \varepsilon^2}{(1 - 2\varepsilon \cos \omega + \varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \sin \vartheta' d\vartheta' \quad \dots \dots 9)$$

en

$$V_u = \frac{1}{4\pi} \frac{a}{r} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^\pi V_s \frac{1 - \varepsilon^2}{(1 + 2\varepsilon \cos \omega + \varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \sin \vartheta' d\vartheta' \quad \dots \dots 9').$$

Zoo lang $\varepsilon < 1$ is, heeft men, volgens NEWTON,

$$\frac{1}{(1 - 2\varepsilon \cos \omega + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}} = \sum_0^\infty P_n(\cos \omega) \varepsilon^n \quad \dots \dots \dots 10)$$

waarin $P_n(\cos \omega)$ de kogelfunctie van de eerste soort is van $\cos \omega$ en wel

$$P_n(x) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{n} \left(x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} x^{n-2} + \text{enz.} \dots \right) \quad 11)$$

Beide leden van 10) gedifferentieerd geeft

$$\frac{\cos \omega - \varepsilon}{(1 - 2\varepsilon \cos \omega + \varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}} = \sum_0^\infty n P_n(\cos \omega) \varepsilon^{n-1}$$

of

$$\frac{2\varepsilon \cos \omega - 2\varepsilon^2}{(1 - 2\varepsilon \cos \omega + \varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}} = \sum_0^\infty 2n P_n(\cos \omega) \varepsilon^n$$

Hierbij de vergelijking ¹⁰⁾ optellende, vindt men

$$\frac{1 - \epsilon^2}{(1 - 2\epsilon \cos \omega + \epsilon^2)^{\frac{3}{2}}} = \sum_0^{\infty} (2n+1) P_n(\cos \omega) \epsilon^n.$$

Deze waarde in ⁹⁾ en ^{9')} substitueerende en tevens ϵ door in V_i en door $\frac{a}{r}$ in V_u vervangende, verkrijgt men, zoo in $P(a\vartheta'\varphi')$

$$V_s = f(\vartheta'\varphi') \text{ is,}$$

$$V_i = \frac{a}{4\pi} \sum_0^{\infty} (2n+1) \frac{r^n}{a^{n+1}} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{\pi} f(\vartheta'\varphi') P_n(\cos \omega) \sin \vartheta' d\vartheta' \dots \dots 10)$$

en

$$V_u = \frac{a}{4\pi} \sum_0^{\infty} (2n+1) \frac{r^n}{a^{n+1}} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{\pi} f(\vartheta'\varphi') P_n(\cos \omega) \sin \vartheta' d\vartheta' \dots \dots 12')$$

De uitdrukkingen V_i en V_u voldoen aan de vergelijking van LAPLACE, $\triangle V = 0$, die bij deze coördinaten overgaat in

$$r \frac{d^2 r V}{dr^2} + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{dV}{d\vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{d^2 V}{d\varphi^2} = 0.$$

Substitueert men in deze vergelijking de waarden van V_i en V_u uit ¹²⁾ en ^{12')} dan vindt men, daar de coëfficiënten van de verschillende machten van r nul moeten zijn, dat de integraal

$$Y_n = \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{\pi} f(\vartheta'\varphi') P_n(\cos \omega) \sin \vartheta' d\vartheta' \dots \dots \dots 13)$$

voldoet aan de vergelijking

$$\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{dY_n}{d\vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{d^2 Y_n}{d\varphi^2} + n(n+1) Y_n = 0 \dots 14).$$

Nu is ω de hoek tusschen MP en MA en derhalve

$$\cos \omega = \cos \vartheta \cos \vartheta' + \sin \vartheta \sin \vartheta' \cos (\varphi - \varphi')$$

zoodat volgens ¹¹⁾ $P_n(\cos \omega)$ eene geheele rationeele functie zal zijn van

$$\cos \vartheta, \quad \sin \vartheta \cos \varphi \quad \text{en} \quad \sin \vartheta \sin \varphi.$$

De integraties in ¹³⁾ hebben slechts betrekking op ϑ' en φ' , zoodat ook Y_n eene geheele rationeele functie van genoemde grootheden zal zijn; bovendien voldoet Y_n aan de vergelijking ¹⁴⁾, bijgevolg is deze grootheid volgens gebruikelijke definitie *) eene LAPLACE-functie

*) TODHUNTER. Treatise on LAPLACE'S functions etc. pag. 152.

van de n° orde, of zooals wij veelal zullen zeggen, eene kogelfunctie van de n° orde. Vermenigvuldigt men Y_n met eene constante, dan is het produkt nog eene kogelfunctie, zoodat wij gevonden hebben, dat de potentiaal eener massa-verdeeling op den bol ontwikkeld kan worden, zoowel in een punt binnen als buiten den bol, in eene convergente reeks, waarvan de achtereenvolgende termen kogelfuncties zijn.

§ 8. Zij nu de potentiaal van eene vlaktelading op den bol, die in ieder punt $P(a\vartheta'\varphi')$ tot potentiaal heeft $f(\vartheta'\varphi')$

$$\text{in } P_n(r\vartheta\varphi) \dots\dots\dots F(r\vartheta\varphi)$$

$$\text{» } P_1(r\vartheta\varphi) \dots\dots\dots F'(r\vartheta\varphi)$$

$$\text{» } P_n(a\vartheta\varphi) \dots\dots\dots f(\vartheta\varphi)$$

dan is volgens de gevonden ontwikkeling

$$F(r\vartheta\varphi) = \frac{a}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \frac{r^n}{a^{n+1}} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{\pi} f(\vartheta'\varphi') P_n(\cos\omega) \sin\vartheta' d\vartheta' \quad 15)$$

$$F(r\vartheta\varphi) = \frac{a}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \frac{a^n}{r^{n+1}} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{\pi} f(\vartheta'\varphi') P_n(\cos\omega) \sin\vartheta' d\vartheta' \quad 15')$$

Laat men in deze uitdrukking r tot a naderen, dan gaat zoowel $F(r\vartheta\varphi)$ als $F(r\vartheta\varphi)$ over in $f(\vartheta\varphi)$ en vindt men

$$\begin{aligned} f(\vartheta\varphi) &= \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{\pi} f(\vartheta'\varphi') P_n(\cos\omega) \sin\vartheta' d\vartheta' \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) Y_n \dots\dots\dots 16) \end{aligned}$$

Iedere functie van ϑ en φ , die als potentiaal van eene lading op een bol in punten van dat oppervlak kan beschouwd worden, dat wil zeggen, die van $\vartheta = 0$ tot $\vartheta = \pi$ en van $\varphi = 0$ tot $\varphi = 2\pi$ eindig, continu en geheel bepaald is, kan dus volgens de hier afgeleide vergelijking in eene reeks van kogelfunctien ontwikkeld worden.

Deze bekende en belangrijke stelling werd het eerst door Poisson afgeleid *), uitgaande van de integraal in 8). Afzonderlijk

*) Journal de l'Ecole polytechnique 19 cahier. pag. 145.

moet dan aangetoond worden, dat deze integraal voor $r = a$ overgaat in $f(\vartheta\varphi)$ of in de waarde van V_s in het punt, waarvan de coördinaten zijn a , ϑ en π overigens is de ontwikkeling als hierboven. De genoemde eigenschap is een zoo natuurlijk gevolg van de vergelijking ¹⁵⁾, dat hare afleiding hier eene plaats gevonden heeft. Ondertusschen dient opgemerkt te worden, dat het gegeven bewijs in sommige punten niet geheel streng is. DIRICHLET *) toonde de leemten in het betoog van POISSON aan, en gaf zelf een geheel analytisch bewijs.

§ 9. Ons rest nog, vóór dit hoofdstuk eindigt, de functie van GREEN te berekenen voor punten binnen het oppervlak van een rechthoekig parallelipedum S . Dit oppervlak is te beschouwen als een evenwichtsoppervlak van potentiaal nul voor een punt met eene massa $+1$, geheel willekeurig binnen S gelegen, en van een stelsel materiele punten, oneindig in aantal, buiten S , waarvan de ligging gevonden kan worden zoo het eerste punt bepaald is. Evenals bij den bol kan men dus ook voor dit oppervlak de functie van GREEN berekenen, en wel voor punten binnen S .

Zij A een plat vlak en P een materieel punt met eene massa $+1$, buiten A gelegen, zoo men dan uit P eene loodlijn op A neerlaat, op het verlengde van die loodlijn een punt P' neemt, evenver van A verwijderd als P en daarin eene massa -1 legt, dan noemt men de massa -1 het beeld van de massa $+1$ in het vlak A , en omgekeerd; het platte vlak zegt men is symmetrisch gelegen ten opzichte der massa's $+1$ in P en -1 in P' . Voor deze twee massa's is het vlak A een vlak van potentiaal nul, en het is duidelijk, dat dit evenzeer geldt, zoo een systeem materiele punten ter eene zijde van A genomen wordt, en een systeem ter andere zijde, zoodat de punten twee aan twee elkanders beelden zijn, of, wat hetzelfde is, het vlak A symmetrisch geplaatst is, ten opzichte van die materiele punten. Hiervan wordt uitgegaan bij het bepalen der GREEN'sche functie voor een parallelipedum.

*) CRELLE. Journal für die Mathematik. Band 17.

HEINE. Handbuch der Kugelfunctionen. pag. 432.

Het middelpunt van een rechthoekig parallelopidum wordt als oorsprong van een rechthoekig coördinaten-stelsel aangenomen, waarvan de assen achtereenvolgens evenwijdig loopen met de zijvlakken A en A', B en B', C en C', en die vlakken snijden respectievelijk van de X, Y en Z as stukken af gelijk

$$\pm \frac{a}{2}, \pm \frac{b}{2}, \pm \frac{c}{2}.$$

Laten de coördinaten van een punt A_i binnen S, dat als het vaste punt beschouwd wordt, $x' y' z'$ zijn en zij in dat punt eene massa $+1$ geplaatst, dan bepaalt men het beeld van het materiele punt A_i in het vlak A, welk beeld eene abscis $a - x'$ heeft. Vervolgens wordt het beeld van het verkregen punt in het vlak A' bepaald, waarvan de abscis $-2a + x'$ zal zijn; weer het beeld van dit punt in A enz., welke constructie eene oneindige reeks van punten oplevert, die verschillende abscissen bezitten, maar waarvan de beide andere coördinaten steeds y' en z' zullen zijn. Evenzoo construeert men het beeld van het punt A_i in A', waarvan de abscis wordt $-a - x'$, het beeld van het verkregen punt in A met eene abscis $2a + x'$ enz. Is de eerste constructie p malen en de tweede evenveel malen herhaald, dan verkrijgt men eene reeks van punten, die in paren kunnen gerangschikt worden, ten opzichte van welke de vlakken A en A' symmetrisch liggen, en wel zooals hieronder wordt aangegeven, waar p oneven is genomen.

Vlak A.

MASSA.	ABSCIS.	ABSCIS.	MASSA.
$+1$	x'	$a - x'$	-1
"	$-2a + x'$	$3a - x'$	"
"	$-4a + x'$	$5a - x'$	"
"	"	"	"
"	$-(p-1)a + x'$	$pa - x'$	"
-1	$-a - x'$	$2a + x'$	$+1$
"	$-3a - x'$	$4a + x'$	"
"	"	"	"
"	$-(p-2)a + x'$	$(p-1)a + x'$	"
"	$-pa - x'$	—	"

Vlak A'.

MASSA.	ABSCIS.	ABSCIS.	MASSA.
+ 1	$- 2 a + x'$	$a - x'$	- 1
"	$- 4 a + x'$	$3 a - x'$	"
"	$- 6 a + x'$	$5 a - x'$	"
"	"	"	"
"	$- (p-1) a + x'$	$(p-2) a - x'$	"
-	-	$p a - x'$	"
- 1	$- a - x'$	x'	+ 1
"	$- 3 a - x'$	$2 a + x'$	"
"	"	"	"
"	$- p a - x'$	$(p-1) a + x'$	"

In het algemeen zullen de coördinaten ξ , η , ζ van een der beeldpunten voorgesteld worden door

$$\xi = ma + (-1)^m x' \quad \eta = y' \quad \zeta = z'$$

waarin m alle geheele waarden van $-\infty$ tot $+\infty$ kan bezitten, terwijl de massa in dat punt $(-1)^m$ is. De potentiaal van die massa in een punt $P_1(xyz)$ binnen het parallelipedum zal zijn

$$\frac{(-1)^m}{\sqrt{N}}$$

zoo

$$N = (ma + (-1)^m x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2$$

is, en wordt dus nul voor m gelijk $\pm \infty$. De beide vlakken A en A' zijn derhalve evenwichts-vlakken van potentiaal nul voor al de geconstrueerde massa's, of voor ieder punt $P_s(xyz)$ op A of A' heeft men

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{\sqrt{N}} = 0.$$

Construeert men thans op dezelfde wijze van al de verkregen punten de beeldpunten in de vlakken B en B' dan zullen de vlakken A en A' nog evenwichtsvlakken van potentiaal nul blijven en de vlakken B en B' eveneens dergelijke evenwichtsvlakken zijn voor de massa's thans door de ruimte verdeeld. De coördinaten van een der beeldpunten zijn nu

$$\xi = ma + (-1)^m x' \quad \eta = nb + (-1)^n y' \quad \zeta = z'$$

en de massa in dat punt is $(-1)^{m+n}$. Voor ieder punt van A, A', B en B' geldt thans

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^{m+n}}{\sqrt{N}} = 0$$

waarin:

$$N = (ma + (-1)^m x' - x)^2 + (nb + (-1)^n y' - y)^2 + (z' - z)^2.$$

Worden ten slotte de beeldpunten van al de materiële punten in de vlakken C en C' geconstrueerd, dan vindt men dat de zes vlakken, die het parallelopipedum begrenzen, evenwichtsvlakken van potentiaal nul zijn voor alle thans verkregen massa's, in de geconstrueerde punten gelegen. Als coördinaten van een der punten heeft men $\xi = ma + (-1)^m x'$ $\eta = nb + (-1)^n y'$ $\zeta = pc + (-1)^p z'$ en in dat punt bevindt zich eene massa

$$(-1)^{m+n+p}.$$

Alle waarden van $-\infty$ tot $+\infty$ kunnen aan m, n en p toegekend worden. Voor ieder punt $P_s(xyz)$ op een der vlakken van S gelegen, weet men

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^{m+n+p}}{\sqrt{N}} = 0$$

waarin

$$N = (ma + (-1)^m x' - x)^2 + (nb + (-1)^n y' - y)^2 + (pc + (-1)^p z' - z)^2.$$

Volgens pag. 24 is de gevraagde functie G_i de potentiaal der massa's buiten S gelegen in een punt $P_i(xyz)$ binnen S, met het omgekeerde teeken genomen, en zij E_i weer de afstand van P_i tot A_i , dan is volgens § 11 van het 1^e Hoofdstuk

$$G_i = \frac{1}{E_i} - G_i$$

Daar binnen S slechts de massa $+1$ in het punt A_i ligt, is derhalve G_i de potentiaal van al de massa's binnen en buiten S in P_i of

$$G_i = \sum_{-\infty}^{+\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^{m+n+p}}{\sqrt{N}}$$

De gevonden uitdrukking voor G_i wordt gewoonlijk op de volgende wijze herleid. Volgens bekende eigenschap is

$$\Gamma(n) \Gamma(1-n) = \frac{\pi}{\sin n\pi} *)$$

of voor $n = \frac{1}{2}$

$$\int_0^\infty e^{-s} \frac{ds}{\sqrt{s}} = \sqrt{\pi}.$$

Neemt men nu $s = Nt$ en beschouwt t als nieuwe variabele, dan is

$$\frac{1}{\sqrt{N}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-Nt} \frac{dt}{\sqrt{t}}$$

en derhalve

$$G_i = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \left\{ \begin{array}{l} \sum (-1)^m e^{-(ma + (-1)^m x' - x)^2 t} \\ \sum (-1)^n e^{-(nb + (-1)^n y' - y)^2 t} \\ \sum (-1)^p e^{-(pc + (-1)^p z' - z)^2 t} \end{array} \right\} \frac{dt}{\sqrt{t}} \dots\dots\dots 17)$$

waarin de summaties van $-\infty$ tot $+\infty$ moeten plaats hebben. Neemt men nu in 17)

$$A = \sum (-1)^m e^{-(ma + (-1)^m x' - x)^2 t}$$

de termen met even waarden van m samen en eveneens die met oneven waarden, dan is

$$\begin{aligned} A &= \sum e^{-(2ma + x' - x)^2 t} - \sum e^{-((2m+1)a - x' - x)^2 t} = \\ &= e^{-(x' - x)^2 t} \sum e^{-m^2 \cdot 4a^2 t - i \cdot 2m \cdot 2ai(x - x')t} \\ &= e^{-(a - x' - x)^2 t} \sum e^{-m^2 \cdot 4a^2 t - i \cdot 2m \cdot 2ai(x + x' - a)t} \end{aligned}$$

Deze oneindig voortlopende reeksen kan men door ϑ functiën uitdrukken. Volgens definitie is

$$\vartheta_3(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi^2 z^2} e^{-i \cdot 2\pi z} \dagger)$$

derhalve

$$\begin{aligned} A &= e^{-(x' - x)^2 t} \vartheta_3(2ai(x - x')t) \\ &= e^{-(a - x' - x)^2 t} \vartheta_3(2ai(x + x' - a)t) \end{aligned}$$

waarin $q = 4a^2 t$.

*) BERTRAND. Calcul intégral. § 301.

†) SCHLÖMILCH. Compendium der höheren Analysis. II Band. pag. 446.

Evenzoo vindt men voor de beide andere reeksen in ^{17.)}

$$B = e^{-(y'-y)^2 t} \vartheta_3(2bi(y-y')t) \\ - e^{-(b-y'-y)^2 t} \vartheta_3(2bi(y+y'-b)t)$$

$$\text{met } \varrho = 4b^2 t$$

$$C = e^{-(z'-z)^2 t} \vartheta_3(2ci(z-z')t) \\ - e^{-(c-z'-z)^2 t} \vartheta_3(2ci(z+z'-b)t)$$

$$\text{met } \varrho = 3c^2 t.$$

Ten slotte heeft dus G_i den volgende, zeer samengestelden vorm

$$G_i = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \left\{ \begin{array}{l} e^{-(x'-x)^2 t} \vartheta_3(2ai(x-x')t) \\ - e^{-(a-x'-x)^2 t} \vartheta_3(2ai(x+x'-a)t) \\ e^{-(y'-y)^2 t} \vartheta_3(2bi(y-y')t) \\ - e^{-(b-y'-y)^2 t} \vartheta_3(2bi(y+y'-b)t) \\ e^{-(z'-z)^2 t} \vartheta_3(2ci(z-z')t) \\ - e^{-(c-z'-z)^2 t} \vartheta_3(2ci(z+z'-b)t) \end{array} \right\} \times \frac{dt}{\sqrt{t}}.$$

VIERDE HOOFDSTUK.

ALGEMEENE VORM VAN V_i EN V_u FUNCTIËN BIJ EEN BOL EN BIJ
EENE ROTATIE-ELLIPSOÏDE. TOEPASSING OP DE
FUNCTIE VAN GREEN.

§ 1. Het bepalen der functie van GREEN is, zooals in het eerste hoofdstuk bleek, slechts een bijzonder geval van het algemeene probleem: eene massa zoodanig over een oppervlak te verdeelen, dat deze verdeling in punten buiten dat oppervlak equipotentiaal is met eene massa binnen dat oppervlak, of in punten er binnen equipotentiaal met eene massa, die buiten het oppervlak ligt. Daarvan uitgaande zijn in het derde hoofdstuk, de functiën G_i en G_u bepaald volgens eene methode door GREEN aangegeven.

Evenzeer kan men het vraagstuk, dat ons bezighoudt, beschouwen als een onderdeel van het algemeene vraagstuk: voor een oppervlak S óf eene V_i functie óf eene V_u functie te bepalen, die in de punten van dat oppervlak eene gegeven waarde V_u aanneemt. Nu bestaat er eene methode, waardoor in sommige gevallen dat algemeene vraagstuk kan opgelost worden. Zoodra nl. voor zeker oppervlak alle functiën V_i of V_u onder een algemeen vorm te brengen zijn, of van eene reeks van die functiën de algemeene vorm is aan te geven, bestaat dikwijls de mogelijkheid, door de algemeene uitdrukkingen te vergelijken met de gegeven waarden aan het oppervlak, deze uitdrukkingen zoo te specialiseeren, dat zij voor punten van het oppervlak werkelijk in de gegeven waarden overgaan. Zoo gelukte het LAMÉ het algemeene vraagstuk op

te lossen voor punten binnen eene willekeurige ellipsoïde — dat wil zeggen voor de ellipsoïde eene V_1 functie te bepalen, die aan het oppervlak gegeven waarden aanneemt *).

Bij eene rotatie-ellipsoïde, hetzij eene afgeplatte of eene verlengde, gaf HEINE de oplossing voor eene V_1 en eene V_n functie †), en als bijzondere toepassing leidde LIPSCHITZ daaruit de functiën van GREEN af §). De ruimte laat niet toe in alle bijzonderheden de ontwikkelingen, die in de genoemde verhandelingen voorkomen, terug te geven. Het doel van dit hoofdstuk is dan ook slechts de methode uiteen te zetten, waarnaar het algemeene vraagstuk kan opgelost worden, en er op te wijzen, hoe, als bijzonder geval, het bepalen der functiën van GREEN daaruit kan afgeleid worden. Het kwam mij daarom niet ondienstig voor in de eerste plaats het algemeene probleem voor den bol te behandelen, om eerst daarna over te gaan tot de rotatie-ellipsoïden; daardoor is het tevens mogelijk nog op twee verschillende methoden te wijzen, die bij de algemeene oplossing kunnen gevolgd worden.

§ 2. Zij het middelpunt M van een bol S de pool van een poolcoördinatenstelsel en zijn van zeker punt P de coördinaten

$$r, \vartheta \text{ en } \varphi$$

dan zal zoowel eene V_1 functie als eene V_n functie van den bol, als functie van ϑ en φ beschouwd, volgens het theorema, aan het einde van het vorige hoofdstuk besproken, ontwikkeld kunnen worden in eene convergente reeks, waarvan de achtereenvolgende termen algemeene kogelfunctiën van ϑ en φ zijn, en wel is volgens bekende eigenschap slechts ééne dergelijke ontwikkeling voor eene gegeven functie mogelijk. Men heeft dus

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n \dots\dots\dots 1)$$

waarin Y_n de algemeene kogelfunctie is van de n^e orde, dat wil zeggen eene geheele rationeele functie van

*) LIOUVILLE. Journal de Mathématiques. Tome IV. pag. 126—163, pag. 351—385.

†) CRELLE. Journal für die Mathematik. Band 26. pag. 185.

§) " " " " " Band 58. pag. 20.

$\sin \vartheta \cos \varphi$, $\sin \vartheta \sin \varphi$, en $\cos \vartheta$
die voldoet aan de vergelijking

$$\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{dY_n}{d\vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{d^2 Y_n}{d\vartheta^2} + n(n+1)Y_n = 0 \dots 2)$$

De algemeene integraal van deze vergelijking is *)

$$Y_n = \sum_0^\infty P_{nm}(\cos \varphi) \{A_{nm} \cos m\varphi + B_{nm} \sin m\varphi\} \dots 3)$$

Hierin zijn A_{nm} en B_{nm} willekeurige constanten ten opzichte van ϑ en φ , waarin echter nog r voorkomt, terwijl $P_{nm}(x)$ de toevoegde kogelfunctie van de eerste soort voorstelt. Deze functie staat nl. met de eigenlijke kogelfunctie van de eerste soort, vorige hoofdstuk ¹¹⁾, in het volgend verband

$$P_{nm}(x) = \frac{|n-m|}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)} (x^2-1)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_n(x)}{dx^m} \dots 4)$$

of in eene eindige reeks †)

$$P_{nm}(x) = (x^2-1)^{\frac{m}{2}} \left(x^{n-m} - \frac{(n-m)(n-m-1)}{2 \cdot (2n-1)} x^{n-m-2} + \text{enz.} \right) 5)$$

Nu moet V voldoen aan de vergelijking van LAPLACE, die zooals bekend is, bij deze coördinaten overgaat in

$$r \frac{d^2 r V}{dr^2} + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{dV}{d\vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{d^2 V}{d\vartheta^2} = 0 \dots 6)$$

Men heeft dus

$$\sum_0^\infty \left\{ r \frac{d^2 r Y_n}{dr^2} + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{dY_n}{d\vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{d^2 Y_n}{d\vartheta^2} \right\} = 0$$

waaruit

$$r \frac{d^2 r Y_n}{dr^2} + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \sin \vartheta \frac{dY_n}{d\vartheta} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{d^2 Y_n}{d\vartheta^2} = 0 \dots 7)$$

Trekt men van deze vergelijking ²⁾ af, dan moet

$$r \frac{d^2 r Y_n}{dr^2} - n(n+1)Y_n = 0$$

zijn, en wordt hierin de waarde uit ³⁾ voor Y_n gesubstitueerd,

*) TODHUNTER. Treatise on Laplace's Functions. § 102.

†) De notaties, hier en in het vervolg gebruikt, komen overeen met die van HEINE in het „Handbuch der Kugelfunctionen 1878” en zijn nagenoeg dezelfde als die van TODHUNTER.

dan moet volgens bekende eigenschap A_{nm} en B_{nm} voldoen aan de vergelijkingen

$$r \frac{d^2 r A_{nm}}{dr^2} - n(n+1) A_{nm} = 0$$

en

$$r \frac{d^2 r B_{nm}}{dr^2} - n(n+1) B_{nm} = 0.$$

Deze vergelijkingen bepalen de grootheden A_{nm} en B_{nm} als functiën van r . De vergelijking

$$r \frac{d^2 r f(r)}{dr^2} - n(n+1) f(r) = 0$$

toch is zeer eenvoudig te integreeren, en geeft

$$f(r) = Cr^n + C' \frac{1}{r^{n+1}}$$

waarin C en C' willekeurige constanten zijn.

Door derhalve de eigenschap in te voeren, dat ten eerste de functiën V kunnen ontwikkeld worden volgens eene reeks van kogelfunctiën, en ten tweede, dat zij voldoen aan de vergelijking van LAPLACE, vindt men, dat deze functiën den vorm moeten bezitten

$$V = \sum_0^\infty Y_n, \text{ waarin}$$

$$Y_n = r^n \sum_0^n P_{nm}(\cos \vartheta) \{A_{nm} \cos m\varphi + B_{nm} \sin m\varphi\} + \\ + \frac{1}{r^{n+1}} \sum_0^n P_{nm}(\cos \vartheta) \{A'_{nm} \cos m\varphi + B'_{nm} \sin m\varphi\}.$$

A_{nm} , B_{nm} , A'_{nm} en B'_{nm} stellen thans constanten voor, ook onafhankelijk van r .

De functie V_i blijft eindig voor alle punten binnen S , dus ook voor het middelpunt, waar $r = 0$ is; hieruit volgt derhalve onmiddellijk, dat in de ontwikkeling van V_i alle constanten A'_{nm} en B'_{nm} nul moeten zijn, of de algemeene vorm van V_i zal zijn

$$V_i = \sum_0^\infty r^n \sum_0^n P_{nm}(\cos \vartheta) \{A_{nm} \cos m\varphi + B_{nm} \sin m\varphi\}. \dots 8)$$

Evenzoo is eene der voorwaarden, waaraan de functie V_n moet voldoen, dat zij op oneindigen afstand gelijk nul wordt, waaruit

volgt, dat de constanten A_{nm} , B_{nm} in hare ontwikkeling de waarde nul bezitten. Voor V_u vindt men derhalve

$$V_u = \sum_0^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \sum_0^n P_{nm}(\cos \vartheta) \{A'_{nm} \cos m\varphi + B'_{nm} \sin m\varphi\} \dots 8')$$

Na op deze wijze den algemeenen vorm van de functiën V_i en V_u bepaald te hebben, keeren wij terug tot het probleem eene V_i of eene V_u functie te vinden, die in de verschillende punten van S gegeven waarden V_s , die eindig en continu zijn, aanneemt. Nu is V_s eene functie van ϑ en φ , die alweder kan ontwikkeld worden volgens kogelfunctiën, en wel zal in het algemeen in het punt $P(a\vartheta\varphi)$

$$V_s = \sum_0^{\infty} \sum_0^n P_{nm}(\cos \vartheta) \{a_{nm} \cos m\varphi + b_{nm} \sin m\varphi\}.$$

zijn, waarin a_{nm} en b_{nm} geheel bepaalde constanten zijn.

De waarden van V_i en V_u in het punt $P(a\vartheta\varphi)$, zijn uit 8) en 8') onmiddellijk aan te geven en blijkbaar zullen zij overgaan in V_s , zoo genomen wordt

$$\begin{aligned} A_{nm} &= \frac{a_{nm}}{a^n} & B_{nm} &= \frac{b_{nm}}{a^n} \\ B'_{nm} &= a_{nm} \cdot a^{n+1} & B'_{nm} &= b_{nm} \cdot a^{n+1}. \end{aligned}$$

Derhalve zijn de gevraagde functiën

$$\begin{aligned} V_i &= \sum_0^{\infty} \frac{r^n}{a^n} \sum_0^n P_{nm}(\cos \vartheta) \{a_{nm} \cos m\varphi + b_{nm} \sin m\varphi\} \\ V_u &= \sum_0^{\infty} \frac{a^{n+1}}{r^{n+1}} \sum_0^n P_{nm}(\cos \vartheta) \{a_{nm} \cos m\varphi + b_{nm} \sin m\varphi\}. \end{aligned}$$

Schrijft men de gegeven waarde

$$V_s = \sum_0^{\infty} Y_n$$

dan is

$$V_i = \sum_0^{\infty} \frac{r^n}{a^n} Y_n \dots \dots \dots 9)$$

en

$$V_u = \sum_0^{\infty} \frac{a^{n+1}}{r^{n+1}} Y_n \dots \dots \dots 9')$$

Beschouwt men V_i en V_u als potentialen eener lading over S , dan heeft men ter bepaling van de dichtheid dier lading

$$\frac{dV_i}{dn} = - \left(\frac{dV_i}{dr} \right)_{r=a} = - \frac{1}{a} \sum_0^\infty n Y_n$$

$$\frac{dV_u}{dN} = + \left(\frac{dV_u}{dr} \right)_{r=a} = - \frac{1}{a} \sum_0^\infty (n+1) Y_n$$

of

$$\varrho = \frac{1}{4\pi a} \sum_0^\infty (2n+1) Y_n \dots\dots\dots 10)$$

Ter bepaling van V_i , V_u en ϱ is het dus noodig V_s in eene reeks van kogelfunctiën te ontwikkelen, maar dan zijn ook de gevraagde waarden zonder eenige berekening aan te geven. Dat op deze wijze de beide vraagstukken in § 4 en 6 van het derde hoofdstuk besproken, kunnen opgelost worden, valt in het oog.

§ 3. Na het algemeene vraagstuk behandeld te hebben, is het bepalen der functiën van GREEN, slechts eene eenvoudige toepassing. G_i is eene V_i functie der coördinaten van $P_i(r\vartheta\varphi)$, die aan het oppervlak de waarde $V_s = \frac{1}{E_i}$ aanneemt, waarin E_i voorstelt den afstand van een vast punt $A_i(r'\vartheta'\varphi')$ tot het punt $P_s(a\vartheta\varphi)$ op het oppervlak. Men heeft dus de waarde $\frac{1}{E_i}$ te ontwikkelen volgens kogelfunctiën.

Zij ω de hoek tusschen MP en MA, of $\cos \omega = \cos \vartheta \cos \vartheta' + \sin \vartheta \sin \vartheta' \cos(\varphi - \varphi')$, dan is

$$\frac{1}{E_i} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + r'^2 - 2ar' \cos \omega}} = \sum_0^\infty P_n(\cos \omega) \frac{r'^n}{a^{n+1}}$$

daar $r' < a$ is.

LAPLACE gaf in de Mémoires van de Fransche Akademie van 1782 de ontwikkeling van $P_n(\cos \omega)$. Hierdoor vindt men *).

$$V_s = \frac{1}{E_i} = \sum_0^\infty \sum_0^n \lambda_{nm} P_{nm}(\cos \vartheta) P_{nm}(\cos \vartheta') \cos m(\varphi - \varphi') \cdot \frac{r'^n}{a^{n+1}} \quad 11)$$

waarin

$$\lambda_{nm} = 2 \cdot \frac{\{1 \cdot 3 \dots (2n-1)\}^2}{[n+m][n-m]} (-1)^m$$

*) HEINE. Handbuch, § 73 of TODHUNTER. Treatise, § 168.

terwijl bij $m = 0$ slechts de helft van deze waarde voor λ moet genomen worden.

De waarde van G_i in $P_i(r, \vartheta, \varphi)$ zal dus zijn volgens 9)

$$G_i = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n r'^n}{a^{2n+1}} \sum_{m=0}^n \lambda_{nm} P_{nm}(\cos \vartheta) P_{nm}(\cos \vartheta') \cos m(\varphi - \varphi')$$

en van ϱ_i volgens 10)

$$\varrho_i = \frac{1}{4\pi a} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (2n+1) \frac{r^n r'^n}{a^{2n+1}} \lambda_{nm} P_{nm}(\cos \vartheta) P_{nm}(\cos \vartheta') \cos m(\varphi - \varphi').$$

De uitdrukking voor G_i , in het vorige hoofdstuk afgeleid, verkrijgt men thans door $\frac{a^2}{r'} = r_1$ te stellen, dan is

$$\frac{r^n r'^n}{a^{2n+1}} = \frac{a r^n}{r_1^{n+1}},$$

$$\text{en } G_i = \frac{a}{r'} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \lambda_{nm} P_{nm}(\cos \vartheta) P_{nm}(\cos \vartheta') \cos m(\varphi - \varphi') \frac{r^n}{r_1^{n+1}}$$

of daar nu $r < r_1$, is, volgens 11)

$$G_i = \frac{a}{r'} \cdot \frac{1}{P_i A_u}$$

waarin A_u voorstelt een punt, waarvan de coördinaten zijn r_1 , ϑ' en φ' , d. i. volgens vroegere definitie het geconjugeerde punt van A_i . De bepaling der functie G_u en der dichtheid ϱ_u geschiedt nu op volkomen dezelfde wijze.

§ 4. Thans wordt overgegaan tot de behandeling van het vraagstuk voor eene rotatie-ellipsoïde. Zij de vergelijking der gegeven ellipsoïde S bij een rechthoekig coördinaten-stelsel:

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2 - c^2} = 1 \quad \dots\dots\dots 12)$$

dan is de z -as de rotatie-as, en de ellipsoïde zal ontstaan zijn door de wenteling van eene ellips om hare kleine as, zoo c^2 positief en natuurlijk kleiner dan a^2 is, en om hare groote as, zoo c^2 negatief, nl. c imaginair is.

In het eerste geval noemen wij de ellipsoïde afgeplat, in het tweede geval verlengd. Zij nu van een punt P binnen of buiten S

$$\begin{aligned}x &= r \sin \vartheta \cos \varphi \\y &= r \sin \vartheta \sin \varphi \\z &= \sqrt{r^2 - c^2} \cos \vartheta\end{aligned}$$

dan wordt ieder punt bepaald door de waarden van r , ϑ en φ . De eerste coördinaat is de waarde van de x of y as eener ellipsoïde confocaal met de gegevene door P gebracht.

Bij $r = a$ ligt het punt op S , voor $r > a$ buiten S , en binnen S voor $r < a$. Om alle punten in de ruimte aan te geven, moet r bij eene afgeplatte ellipsoïde alle waarden van c tot ∞ doorloopen en bij eene verlengde ellipsoïde alle waarden van 0 tot ∞ . Brengt men door P en door de z -as een vlak, dan is de standhoek van dit vlak en het xz vlak de hoek φ . De zoogenaamde excentrische hoek ϑ is de hoek tusschen de z -as en de lijn uit den oorsprong naar het punt getrokken, dat men verkrijgt door den bol, die met $\sqrt{r^2 - c^2}$ als straal beschreven is uit den oorsprong als middelpunt, te laten snijden door eene loodlijn uit P op de z -as neergelaten. Het is duidelijk, dat men ϑ van 0 tot π en φ van 0 tot 2π moet variëren, om alle punten op eene der confocale ellipsoïden aan te geven.

Eene V_i zoowel als eene V_u functie, behoorende bij het door de vergelijking ¹²⁾ bepaalde oppervlak S , zal nu eene functie zijn der coördinaten van een punt P ($r \vartheta \varphi$), dat of binnen of buiten S gedacht wordt, en kan als functie van ϑ en φ weer ontwikkeld worden in eene convergente reeks, waarvan de termen opeenvolgende kogelfunctiën zijn. Volkomen dezelfde weg is hiertoe te volgen als bij den bol; slechts is het vinden van den algemeenen vorm der V_i en V_u functiën hier veel moeilijker. HEINE t. a. p. voert de bewerking uit, wij zullen echter, zooals reeds gezegd is, op andere wijze die algemeene vormen trachten af te leiden en wel door gebruik te maken van eene ontwikkeling, die J. NEUMANN *) het eerst gegeven heeft.

Denken wij ons een punt P_i binnen S met coördinaten

$$r', \vartheta', \varphi'$$

*) CRELLE. Journal für die Mathematik. Band 37. pag. 28.

en een punt P_n buiten S , waarvan de coördinaten zijn

$$r, \vartheta, \varphi$$

dan zal, zoo $\triangle = P_i P_n$ is,

$$\frac{1}{\triangle} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - c^2 \cos^2 \vartheta - c^2 \cos^2 \vartheta' - 2\sqrt{r^2 - c^2} \sqrt{r'^2 - c^2} \cos \vartheta \cos \vartheta' - 2rr' \sin \vartheta \sin \vartheta' \cos(\varphi - \varphi')}}.$$

Deze uitdrukking is als functie van ϑ en φ in eene convergente reeks te ontwikkelen, die voortgaat volgens kogelfunctiën.

Om daartoe te geraken, worden nieuwe coördinaten ingevoerd en wel

$$\begin{aligned} \mu &= \cos \vartheta & \sigma &= \sqrt{1 - \frac{r^2}{c^2}} \\ \mu' &= \cos \vartheta' & \sigma' &= \sqrt{1 - \frac{r'^2}{c^2}} \end{aligned}$$

waarin steeds de positieve wortel bedoeld wordt. Om alle punten van de ruimte te bepalen moet, bij eene afgeplatte ellipsoïde of bij c reëel, r alle waarden doorloopen van c tot ∞ , derhalve σ alle waarden, die men verkrijgt door in α voor α alle waarden van 0 tot ∞ te nemen. Bij eene verlengde ellipsoïde, c imaginair, doorloopt r alle waarden van 0 tot ∞ en dus σ alle waarden

van 1 tot ∞ . Voor $\sigma = \sigma_0 = \sqrt{1 - \frac{a^2}{c^2}}$ ligt het punt op S .

De waarden van μ variëren van -1 tot $+1$. Is dit vastgesteld, dan volgt, dat

$$r = c \sqrt{1 - \sigma^2}$$

is en wel moet bij eene verlengde ellipsoïde de positieve wortel en bij eene afgeplatte de negatieve wortel uit $1 - \sigma^2$ genomen worden. Steeds is

$$+ \sqrt{r^2 - c^2} = \frac{c\sigma}{i}$$

en

$$\sin \vartheta = + \sqrt{1 - \mu^2}$$

Bij deze coördinaten is, onder de genoemde overeenkomst,

$$x = c \sqrt{1 - \sigma^2} \sqrt{1 - \mu^2} \cos \varphi$$

$$y = c \sqrt{1 - \sigma^2} \sqrt{1 - \mu^2} \sin \varphi.$$

$$z = \frac{c\sigma\mu}{i}.$$

De uitdrukking voor $\frac{1}{\Delta}$ neemt nu den vorm aan

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{c \sqrt{2 - \sigma^2 - \sigma'^2 - \mu^2 - \mu'^2 + 2\sigma\sigma'\mu\mu' - 2 \sqrt{1 - \sigma^2} \sqrt{1 - \sigma'^2} \sqrt{1 - \mu^2} \cdot \sqrt{1 - \mu'^2} \cos(\varphi - \varphi')}}.$$

waarin σ , μ en φ de coördinaten zijn van een punt buiten S en σ' , μ' en φ' die van een punt binnen S.

De vergelijking van LAPLACE, waaraan $\frac{1}{\Delta}$ moet voldoen, hetzij men σ , μ en φ of σ' , μ' en φ' als variabelen aanneemt, komt onder den volgende symmetrischen vorm

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\sigma} (1 - \sigma^2) \frac{dV}{d\sigma} + \frac{1}{1 - \sigma^2} \frac{d^2V}{d\varphi^2} = \\ = \frac{d}{d\mu} (1 - \mu^2) \frac{dV}{d\mu} + \frac{1}{1 - \mu^2} \frac{d^2V}{d\varphi'^2} \end{aligned}$$

Substitueert men nu in het tweede lid dezer vergelijking voor V de uitdrukking $\frac{1}{\Delta}$, die symmetrisch is ten opzichte van σ , μ en σ' , μ' dan vindt men na differentiatie eene uitdrukking, weer symmetrisch ten opzichte van σ , μ en σ' , μ' . Deze opmerking geeft NEUMANN aanleiding tot het opstellen van drie differentiaal-vergelijkingen, waaraan $\frac{1}{\Delta}$ moet voldoen en die de ontwikkeling tot op de constanten na bepalen. Door drie andere voorwaarden in te voeren, worden ook deze bepaald en zoo vindt men ten slotte

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{i}{c} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \lambda_{nm} Q_{nm}(\sigma) P_{nm}(\sigma') P_{nm}(\mu) P_{nm}(\mu') \cos m(\varphi - \varphi') \quad 13)$$

waarin λ_{nm} en $P_{nm}(x)$ reeds bekend zijn uit § 2 en 3. Verder is $Q_{nm}(x)$ de toegevoegde functie van de tweede soort, nl.

$$Q_{nm}(x) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1)}{(n+m)(-1)^m} (x^2-1)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m Q_n(x)}{dx^m}$$

waarin $Q_n(x)$ de eigenlijke kogelfunctie van de tweede soort is, die o. a. door eene bepaalde integraal kan uitgedrukt worden:

$$Q_n(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{P_n(z)}{x-z} dz.$$

Zooals bekend is, heeft men

$$P_{nm}(x) = \infty \text{ voor Modulus } x = \infty^*) \text{ en } Q_{nm}(x) = 0.$$

Om nu door middel van deze ontwikkeling den algemeenen vorm der functiën V_i en V_u te bepalen, merkt men op, dat iedere V_i functie van S is te beschouwen als de potentiaal eener lading over S in een punt $P(\sigma, \mu, \varphi)$ binnen S .

Denken wij ons dan over S eene lading, waarvan de dichtheid in een punt $S(\sigma', \mu', \varphi')$ gelijk ϱ' is en zij het oppervlakte-element in dat punt $d\omega'$, dan is:

$$V_i = \int \frac{\varrho'}{\Delta'} d\omega',$$

zoo Δ' voorstelt den afstand van P tot S . De ontwikkeling van $\frac{1}{\Delta'}$, is bekend uit 13), waarin nu voor σ', μ', φ' moet gesubstitueerd worden σ, μ, φ en voor σ, μ, φ de coördinaten σ_0, μ', φ' . Men vindt dan

$$V_i = \sum_{\sigma=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^n \{P_{nm}(\sigma) P_{nm}(\mu) \cos m\varphi A_{nm} + P_{nm}(\sigma) P_{nm}(\mu) \sin m\varphi B_{nm}\}$$

waarin
$$A_{nm} = \frac{i}{c} \lambda_{nm} \int Q_{nm}(\sigma_0) P_{nm}(\mu') \cos m\varphi' \varrho' d\omega'$$

*) Ook in deze paragraaf zijn de notaties van HEINE pag. 210 en van TODHUNTER pag. 88 gevolgd. Daardoor is de constante λ anders dan bij NEUMANN in CRELLE. t. a. p. Ik zou het bij de schromelijke verwarring die in de notaties voor de kogelfuncties reeds bestaat, niet gewaagd hebben de uitdrukking van N . te veranderen, ware het niet dat de formules zoo-doende nog meer overeenkomst vertoonden met die voor den bol. De waarden van de kogelfunctiën voor verschillende waarden der veranderlijke komen o. a. voor in de uitnemende verhandeling van F. NEUMANN. Beiträge zur Theorie der Kugelfunctionen. 1878. pag. 88.

en
$$B_{nm} = \frac{i}{c} \lambda_{nm} \int Q_{nm}(\sigma_0) P_{nm}(\mu') \sin m\varphi' d\omega'$$

derhalve constante grootheden onafhankelijk van σ , μ en φ . De algemeene vorm der functiën V_i is derhalve

$$V_i = \sum_0^\infty \sum_0^n P_{nm}(\sigma) P_{nm}(\mu) \{\cos m\varphi A_{nm} + \sin m\varphi B_{nm}\} \dots 14)$$

Op volkomen dezelfde wijze vindt men voor den algemeenen vorm der functiën V_u in een punt buiten S met coördinaten σ , μ en φ

$$V_u = \sum_0^\infty \sum_0^n Q_{nm}(\sigma) P_{nm}(\mu) \{\cos m\varphi A'_{nm} + \sin m\varphi B'_{nm}\} \dots 14').$$

§ 5. Nu de uitdrukkingen 14) en 14') gevonden zijn kan men ter oplossing van het algemeene probleem volkomen denzelfden weg volgen als in het laatste gedeelte van paragraaf 2. Zij weer, even als daar in ieder punt van den bol, in een punt $P_s(\sigma_0, \mu, \varphi)$ van de rotatie-ellipsoïde de gegeven waarde V_s , dan is V_s als functie van σ en φ te ontwikkelen volgens kogelfunctiën, en men heeft in het algemeen

$$V_s = \sum_0^\infty \sum_0^n P_{nm}(\mu) \{a_{nm} \cos m\varphi + b_{nm} \sin m\varphi\} \dots 15)$$

waarin a_{nm} en b_{nm} geheel bepaalde constanten zijn. In het punt P_s gaat V_i uit 14) over in:

$$\sum_0^\infty \sum_0^n P_{nm}(\sigma_0) P_{nm}(\mu) \{A_{nm} \cos m\varphi + B_{nm} \sin m\varphi\}$$

en V_u uit 14') in

$$\sum_0^\infty \sum_0^n Q_{nm}(\sigma_0) P_{nm}(\mu) \{A'_{nm} \cos m\varphi + B'_{nm} \sin m\varphi\}$$

Door vergelijking met 15) vindt men

$$A_{nm} = \frac{a_{nm}}{P_{nm}(\sigma_0)} \quad B_{nm} = \frac{b_{nm}}{P_{nm}(\sigma_0)}$$

$$A'_{nm} = \frac{a_{nm}}{Q_{nm}(\sigma_0)} \quad B'_{nm} = \frac{b_{nm}}{Q_{nm}(\sigma_0)}$$

De functiën V_i en V_u , die aan het oppervlak overgaan in

$$V_s = \sum_0^\infty \sum_0^n P_{nm}(\mu) \{a_{nm} \cos m\varphi + b_{nm} \sin m\varphi\} \dots 15)$$

zijn derhalve

$$V_i = \sum_0^\infty \sum_0^n \frac{P_{nm}(\sigma)}{P_{nm}(\sigma_0)} P_{nm}(\mu) \{a_{nm} \cos m\varphi + b_{nm} \sin m\varphi\} \dots 16)$$

$$V_u = \sum_0^\infty \sum_0^n \frac{Q_{nm}(\sigma)}{Q_{nm}(\sigma_0)} P_{nm}(\mu) \{a_{nm} \cos m\varphi + b_{nm} \sin m\varphi\} \dots 16')$$

De bepaling van de dichtheid ρ , die bij de gegeven potentiaalwaarde V_s behoort, is niet zoo eenvoudig als bij den bol. Men heeft

$$\rho = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{dV_i}{dn} + \frac{dV_u}{dN} \right)$$

en, zoo de coördinaten r , en ϑ , die in het begin van de voorgaande paragraaf gebruikt zijn, weder worden ingevoerd

$$\frac{dV}{dN} = \frac{dV}{dr} \frac{dr}{dN} + \frac{dV}{d\vartheta} \frac{d\vartheta}{dN} + \frac{dV}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dN}$$

Zoowel $\frac{d\vartheta}{dN}$ als $\frac{d\varphi}{dN}$ is gelijk nul, zoodat nog blijft te bepalen

$$\frac{dV}{dr} \frac{dr}{dN} = \frac{dV}{d\sigma} \frac{d\sigma}{dr} \frac{dr}{dN}$$

Brengt men door het punt $r \vartheta \varphi$ eene ellipsoïde confocaal met de gegevene en laat men uit het middelpunt eene loodlijn neer op het raakvlak aan die ellipsoïde in $r \vartheta \varphi$, dan is die loodlijn

$$p = \frac{r \sqrt{r^2 - c^2}}{\sqrt{r^2 - c^2 \sin^2 \vartheta}} = \frac{c\sigma}{i} \sqrt{\frac{1 - \sigma^2}{\mu^2 - \sigma^2}} \dots \dots \dots 17)$$

zooals onmiddellijk is af te leiden. Verder is

$$\frac{dr}{dN} = \frac{p}{r} \quad \text{en} \quad \frac{d\sigma}{dr} = -\frac{r}{c^2 \sigma}$$

waaruit

$$\frac{dV}{dN} = -\frac{dV}{d\sigma} \frac{p}{c^2 \sigma} = \frac{i \sqrt{1 - \sigma^2}}{c \sqrt{\mu^2 - \sigma^2}} \frac{dV}{d\sigma}$$

Men vindt dus

$$\rho = \frac{1}{4\pi} \frac{i \sqrt{1 - \sigma_0^2}}{c \sqrt{\mu^2 - \sigma_0^2}} \left\{ \frac{dV_i}{d\sigma} - \frac{dV_u}{d\sigma} \right\}_{\sigma = \sigma_0}$$

Substitueert men hierin de waarden van V_i en V_u uit 16) en 16') dan wordt gevonden

$$\varrho = \frac{1}{4\pi} \frac{i}{c} \frac{\sqrt{1 - \sigma_0^2}}{\sqrt{\mu^2 - \sigma_0^2}} \sum_0^\infty \sum_0^n \frac{R \cdot P_{nm}(\mu)}{P_{nm}(\sigma_0) Q_{nm}(\sigma_0)} \{a_{nm} \cos m\varphi + b_{nm} \sin m\varphi\}$$

waarin

$$R = \left\{ Q_{nm}(\sigma_0) \frac{dP_{nm}(\sigma)}{d\sigma} - P_{nm}(\sigma_0) \frac{dQ_{nm}(\sigma)}{d\sigma} \right\} \sigma = \sigma_0.$$

Deze waarde van ϱ wordt belangrijk vereenvoudigd door de bekende betrekking *)

$$Q_{nm}(\sigma) \frac{dP_{nm}(\sigma)}{d\sigma} - P_{nm}(\sigma) \frac{dQ_{nm}(\sigma)}{d\sigma} = - \frac{2n+1}{1-\sigma^2}.$$

Ten slotte is dus:

$$\varrho = \frac{1}{4\pi i c \sqrt{1 - \sigma_0^2} \sqrt{\mu^2 - \sigma_0^2}} \cdot \sum_0^\infty (2n+1) \sum_0^n \frac{P_{nm}(\mu)}{P_{nm}(\sigma_0) Q_{nm}(\sigma_0)} \{a_{nm} \cos m\varphi + b_{nm} \sin m\varphi\}^{18)}.$$

§ 6. De oplossing van ieder vraagstuk, waarbij gegeven is de waarde der potentiaal, in de punten der ellipsoïde, kan nu onmiddellijk opgeschreven worden door gebruik te maken van de vergelijkingen 16) 16') en 18). Laat b. v. gevraagd worden over de ellipsoïde S eene massa zoodanig te verdeelen, dat in ieder punt P_s van dat oppervlak V_s gelijk zij aan het vierkant der loodlijn uit het middelpunt op het raakvlak van het punt P_s neerlaten.

Zoo de coördinaten van P_s zijn σ_0 , μ en φ , dan is volgens 17) van de voorgaande paragraaf

$$V_s = - \frac{c^2 \sigma_0^2 (1 - \sigma_0^2)}{\mu^2 - \sigma_0^2}.$$

Deze uitdrukking moet volgens kogelfunctiën ontwikkeld worden; daartoe schrijft men

$$V_s = \frac{1}{2} c^2 \sigma_0 (1 - \sigma_0^2) \left\{ \frac{1}{\sigma_0 - \mu} + \frac{1}{\sigma_0 + \mu} \right\}$$

Een bekende vergelijking †) geeft

*) TODHUNTER. Treatise, § 109.

†) HEINE. Handbuch, pag. 78.

$$\frac{1}{\sigma_0 - \mu} = \sum_0^{\infty} (2n+1) Q_n(\sigma_0) P_n(\mu)$$

en

$$\frac{1}{\sigma_0 + \mu} = \sum_0^{\infty} (2n+1) Q_n(\sigma_0) P_n(-\mu)$$

of daar

$$P_{2n}(\mu) = P_{2n}(-\mu)$$

en

$$P_{2n+1}(\mu) = -P_{2n+1}(-\mu)$$

is, heeft men

$$\frac{1}{\sigma_0 - \mu} + \frac{1}{\sigma_0 + \mu} = 2 \sum_0^{\infty} (4n+1) Q_{2n}(\sigma_0) P_{2n}(\mu)$$

of

$$V_s = c^2 \sigma_0 (1 - \sigma_0^2) \sum_0^{\infty} (4n+1) Q_{2n}(\sigma_0) P_{2n}(\mu).$$

Uit ¹⁶⁾ volgt nu voor de waarde van V_i in een punt P_i met coördinaten σ, μ, φ ,

$$V_i = c^2 \sigma_0 (1 - \sigma_0^2) \sum_0^{\infty} (4n+1) \frac{Q_{2n}(\sigma_0)}{P_{2n}(\sigma_0)} P_{2n}(\sigma) P_{2n}(\mu)$$

en uit ¹⁶⁾ voor V_u in een punt P_u , waarvan de coördinaten zijn σ, μ, φ

$$V_u = c^2 \sigma_0 (1 - \sigma_0^2) \sum_0^{\infty} (4n+1) Q_{2n}(\sigma) P_{2n}(\mu)$$

terwijl eindelijk ¹⁸⁾ voor de dichtheid in P_s geeft

$$\varrho = \frac{1}{4\pi i} \frac{c \sigma_0 \sqrt{1 - \sigma_0^2}}{\sqrt{\mu^2 - \sigma_0^2}} \sum_0^{\infty} (4n+1)^2 \frac{P_{2n}(\mu)}{P_{2n}(\sigma_0)}$$

§ 7. In deze paragraaf zullen de uitdrukkingen ¹⁶⁾, ^{16')} en ¹⁸⁾ worden toegepast ter bepaling der functiën G_i en G_u en der dichtheden ϱ_i en ϱ_u . De toepassing, hierboven behandeld, is daaraan voorafgegaan, ten einde nog duidelijker te laten uitkomen, dat de wijze van bepaling der functiën van GREEN geheel overeenkomt met het oplossen van ieder ander bijzonder vraagstuk, waarin de waarden van V_s gegeven zijn.

De coördinaten van een vast punt A_i zijn

$$\sigma', \quad \mu' \quad \text{en} \quad \varphi'$$

die van een punt P_i binnen S

$$\sigma, \quad \mu \quad \text{en} \quad \varphi,$$

zoo dan P_i valt in P_s , waarvan de coördinaten zijn:

$$\sigma_0, \quad \mu \quad \text{en} \quad \varphi$$

zal G_i als functie der coördinaten van A_i en P_i overgaan in $\frac{1}{E_i}$.

De ontwikkeling van $\frac{1}{E_i}$ is bekend uit ¹³⁾ nl.

$$\frac{1}{E_i} = \frac{i}{c} \sum_{\sigma}^{\infty} \sum_{\mu}^n \lambda_{nm} Q_{nm}(\sigma_0) P_{nm}(\sigma') P_{nm}(\mu) P_{nm}(\mu') \cos m(\varphi - \varphi')$$

wederom is dus de ontwikkeling volgens kogelfunctiën van de waarde, die G_i aan het oppervlak aanneemt, bekend, en men heeft derhalve uit ¹⁶⁾

$$G_i = \frac{i}{c} \sum_{\sigma}^{\infty} \sum_{\mu}^n \lambda_{nm} \frac{Q_{nm}(\sigma_0)}{P_{nm}(\sigma_0)} P_{nm}(\sigma) P_{nm}(\sigma') P_{nm}(\mu) P_{nm}(\mu') \cos m(\varphi - \varphi')$$

en uit ¹⁸⁾

$$\varrho_i = \frac{1}{4\pi c^2 \sqrt{1 - \sigma_0^2} \sqrt{\mu^2 - \sigma_0^2}} \cdot$$

$$\cdot \sum_{\sigma}^{\infty} (2n + 1) \sum_{\mu}^n \lambda_{nm} \frac{P_{nm}(\sigma')}{P_{nm}(\sigma_0)} P_{nm}(\mu) P_{nm}(\mu') \cos m(\varphi - \varphi') \dots \dots \dots 19)$$

De functie G_u en de dichtheid ϱ_u bepaalt men evenzoo; de waarde van deze functie aan het oppervlak is

$$\frac{1}{E_u} = \frac{i}{c} \sum_{\sigma}^{\infty} \sum_{\mu}^n \lambda_{nm} P_{nm}(\sigma_0) Q_{nm}(\sigma') P_{nm}(\mu) P_{nm}(\mu') \cos m(\varphi - \varphi')$$

zoo E_u voorstelt den afstand van een punt P_s (σ_0, μ, φ) tot een vast punt P_u (σ', μ', φ') buiten S . De vergelijking ^{16')} geeft nu

$$G_u = \frac{i}{c} \sum_{\sigma}^{\infty} \sum_{\mu}^n \lambda_{nm} \frac{P_{nm}(\sigma_0)}{Q_{nm}(\sigma_0)} Q_{nm}(\sigma) Q_{nm}(\sigma') P_{nm}(\mu) P_{nm}(\mu') \cos m(\varphi - \varphi')$$

waarbij uit ¹⁸⁾

$$\varrho_u = \frac{1}{4\pi c^2 \sqrt{1 - \sigma_0^2} \sqrt{\mu^2 - \sigma_0^2}} \cdot$$

$$\cdot \sum_{\sigma}^{\infty} (2n + 1) \sum_{\mu}^n \lambda_{nm} \frac{Q_{nm}(\sigma')}{Q_{nm}(\sigma_0)} P_{nm}(\mu) P_{nm}(\mu') \cos m(\varphi - \varphi') \dots \dots \dots 20)$$

§ 8. Aan het einde van onze beschouwingen, herinneren wij nog eens aan de integralen ¹²⁾ en ^{12')} uit het eerste hoofdstuk nl.

$$V_i' = \int \varrho_i V_s d\omega. \dots\dots\dots 21)$$

en

$$V_u' = \int \varrho_u V_s d\omega \dots\dots\dots 21')$$

waarin thans $d\omega$ het oppervlakte-element voorstelt. Door deze integralen worden V_i en V_u in een willekeurig punt bepaald, zoo V_s gegeven is, en ϱ_i en ϱ_u bekend zijn. De vraag dient gesteld te worden: waarin gaan deze betrekkingen over bij eene rotatie-ellipsoïde, en in hoeverre komen de uitdrukkingen, die zij geven voor V_i en V_u overeen met die in ¹⁶⁾ en ^{16')}. Ten einde dit na te gaan is het noodig het oppervlakte-element $d\omega$ in het punt P_s uit te drukken in de coördinaten van dat punt $\sigma_0 \mu \varphi$.

Men vindt:

$$d\omega = -c^2 \sqrt{\mu^2 - \sigma_0^2} \sqrt{1 - \sigma_0^2} d\mu d\varphi$$

en worden nu in ²¹⁾ en ^{21')} de waarden van ϱ_i en ϱ_u , zooeven gevonden, ingevoerd dan zal V_i' de waarde van V_i in het punt $A_i(\sigma' \mu' \varphi')$ zijn, zoo de waarde van V_i aan het oppervlak in $\sigma_0 \mu \varphi$ gegeven is:

$$V_s = f(\vartheta \varphi).$$

Eveneens is V_u' de waarde van V_u , bij dezelfde waarde van V_s in het punt $A_u(\sigma' \mu' \varphi')$

Men verkrijgt

$$V_i' = \frac{1}{4\pi} \sum_{\sigma}^{\infty} (2n+1) \sum_{\sigma}^n \lambda_{nm} \frac{P_{nm}(\sigma')}{P_{nm}(\sigma_0)} P_{nm}(\mu') R \dots\dots\dots 22)$$

$$V_u' = \frac{1}{4\pi} \sum_{\sigma}^{\infty} (2n+1) \sum_{\sigma}^n \lambda_{nm} \frac{Q_{nm}(\sigma')}{Q_{nm}(\sigma_0)} P_{nm}(\mu') R \dots\dots\dots 22')$$

waarin

$$R = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^{+1} P_{nm}(\mu) \cos m(\varphi - \varphi') l(\vartheta \varphi) d\mu$$

Deze uitdrukkingen zijn geheel dezelfde, als die in ¹⁶⁾ en ^{16')}, wat a priori te verwachten was, daar eene geheel bepaalde functie slechts op ééne wijze in kogelfunctiën kan ontwikkeld worden. Om duidelijk te maken, dat werkelijk de uitdrukkingen ²¹⁾ en ^{21')} en de vroegere overeenkomen, behoeft slechts opgemerkt te worden, dat in de uitdrukkingen ¹⁶⁾ en ^{16')} ondersteld wordt, dat

$$V_s = f(\vartheta \varphi)$$

reeds ontwikkeld is volgens kogelfunctiën. Die ontwikkeling zelve vindt men echter in het algemeen volgens pag. 48, aldus

$$V_s = f(\vartheta \varphi) = \frac{1}{4\pi} \sum_0^{\infty} (2n+1) Y_n$$

waarin
$$Y_n = \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_s^n P_n(\cos \omega) f(\vartheta' \varphi') \sin \vartheta' d\vartheta'$$

Vervangt men hierin $P_n(\cos \omega)$ door de waarde

$$P_n(\cos \omega) = \sum_0^n \lambda_{nm} P_{nm}(\mu) P_{nm}(\mu') \cos m(\varphi - \varphi')$$

reeds op pag. 60 aangegeven, dan vindt men

$$V_s = \frac{1}{4\pi} \sum_0^{\infty} (2n+1) \sum_0^n \lambda_{nm} P_{nm}(\mu) R'$$

zoo
$$R' = \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{-1}^{+1} P_{nm}(\mu') \cos m(\varphi - \varphi') f(\vartheta' \varphi') d\mu'$$

is, en hieruit de uitdrukkingen 22) en 22') voor V'_i en V'_u .

Is dus de ontwikkeling van

$$V_s = f(\vartheta \varphi)$$

in kogelfunctiën niet bekend, maar moet zij volgens den algemeensten weg afgeleid worden, dan is het zeker het eenvoudigste voor V'_i en V'_u de uitdrukkingen 22) en 22') te gebruiken; kent men daarentegen die ontwikkeling reeds, of kan zij op andere wijze gevonden worden, dan zijn de formules 16) en 16') te verkiezen.

STELLINGEN.

I.

Ter bepaling van de oplossing eener lineaire differentiaal-vergelijking met constante coëfficiënten, voor het geval, dat de hulpvergelijking gelijke wortels heeft, verdient de door D'ALEMBERT gegeven methode geen aanbeveling.

II.

Bij het gebruik maken van symbolische methoden tot het oplossen van differentiaal-vergelijkingen komt het voor, dat van een gedeelte der bewerking de beteekenis niet is aan te geven. Het verdient afkeuring, de juistheid van het door zoodanige bewerking verkregen resultaat te verklaren uit een algemeen beginsel, dat niet bewezen wordt, maar volgens BOOLE „claims a place among the general relations of Thought and Language.”

III.

Het substitutie-teeken van SARRUS behoort in de variatie-rekening algemeen gebruikt te worden.

IV.

Het is wenschelijk de methode van OLBERS, ter bepaling eener parabolische kometenbaan, af te leiden op de wijze, zooals door OPPOLZER *) is aangegeven.

V.

In vele gevallen is de methode van OPPOLZER, ter bepaling eener parabolische kometenbaan, te verkiezen boven die van OLBERS.

VI.

Voor de bepaling van de parallaxis der zon wordt de methode der Venus-overgangen tegenwoordig door andere methoden overtroffen.

VII.

De oculair-heliometer van STEINHEIL is ondoelmatig ingericht.

VIII.

Bij een universaal-instrument is de inrichting, welke dient om het bovendeele te kunnen omleggen, geheel overbodig.

*) Band LVII „Sitzungsberichte“ der Weener Akademie.

IX.

Terecht zegt KIRCHHOFF (Mathematische Physik).

„Die Mechanik ist die Wissenschaft von der Bewegung; als ihre Aufgabe bezeichnen wir: die in der Natur vor sich gehenden Bewegungen *vollständig und auf die einfachste Weise* zu beschreiben.

X.

Er bestaan geen redenen om met THOMSON en TAIT van het beginsel van kleinste werking gewichtige toepassingen „in der abstracten Dynamik und in der Theorie mehrerer Zweige der Physik” te verwachten.

XI.

Geen wiskundige theorie van de elasticiteit bij vaste lichamen is bekend, die voldoende kan geacht worden.

XII.

De kinetische gastheorie geeft geen voldoende verklaring van de voortplanting van het geluid.

XIII.

Het is niet waarschijnlijk, dat de aantrekking tusschen electrische massa's, op de oppervlakte der aarde geplaatst, afhangt van de geografische breedte.

XIV.

De bezwaren, die tegen de tweede wet van de mechanische

warmtetheorie (wet van CLAUSIUS) ingebracht zijn, kunnen voldoende weerlegd worden.

XV.

Bij de bepaling der verhouding tusschen de electrostatische en de electromagnetische eenheid is het te verwachten, dat die methoden, waarbij geen gebruik gemaakt wordt van condensators, de beste resultaten zullen opleveren.

XVI.

Het feit, dat de snelheid van een met den stroom afdrijvend ingedompeld vast lichaam *grooter* is dan die van den stroom, wordt door HAGEN terecht verklaart door de omstandigheid, dat bij het water verlies van snelheid plaats heeft door inwendige bewegingen, die bij het vaste lichaam niet bestaan.

XVII.

De halve-cirkelvormige kanalen in het labyrinth van het oor vervullen waarschijnlijk eene gewichtige rol bij de ruimte-waarnemingen.

XVIII.

Die Natur befindet sich in jedem Momente ihrer Existenz in einem erhaltungsmässigen Zustande. Es ist das höchste Ziel der biologischen Wissenschaften, die organischen Individuen als erhaltungsmässige Glieder des erhaltungsmässigen Naturganzen zu erkennen.

MÖBIUS. (Zeitschrift für wissenschaftliche Zoologie, 1878.)

XIX.

Wir können überhaupt zu keiner Erfahrung von Naturobjecten kommen, ohne das Gesetz der Causalität schon in uns wirkend zu haben, es kann also auch nicht erst aus den Erfahrungen, die wir an Naturobjecten gemacht haben, abgeleitet sein.

HELMHOLTZ. (Physiologische Optik.)

XX.

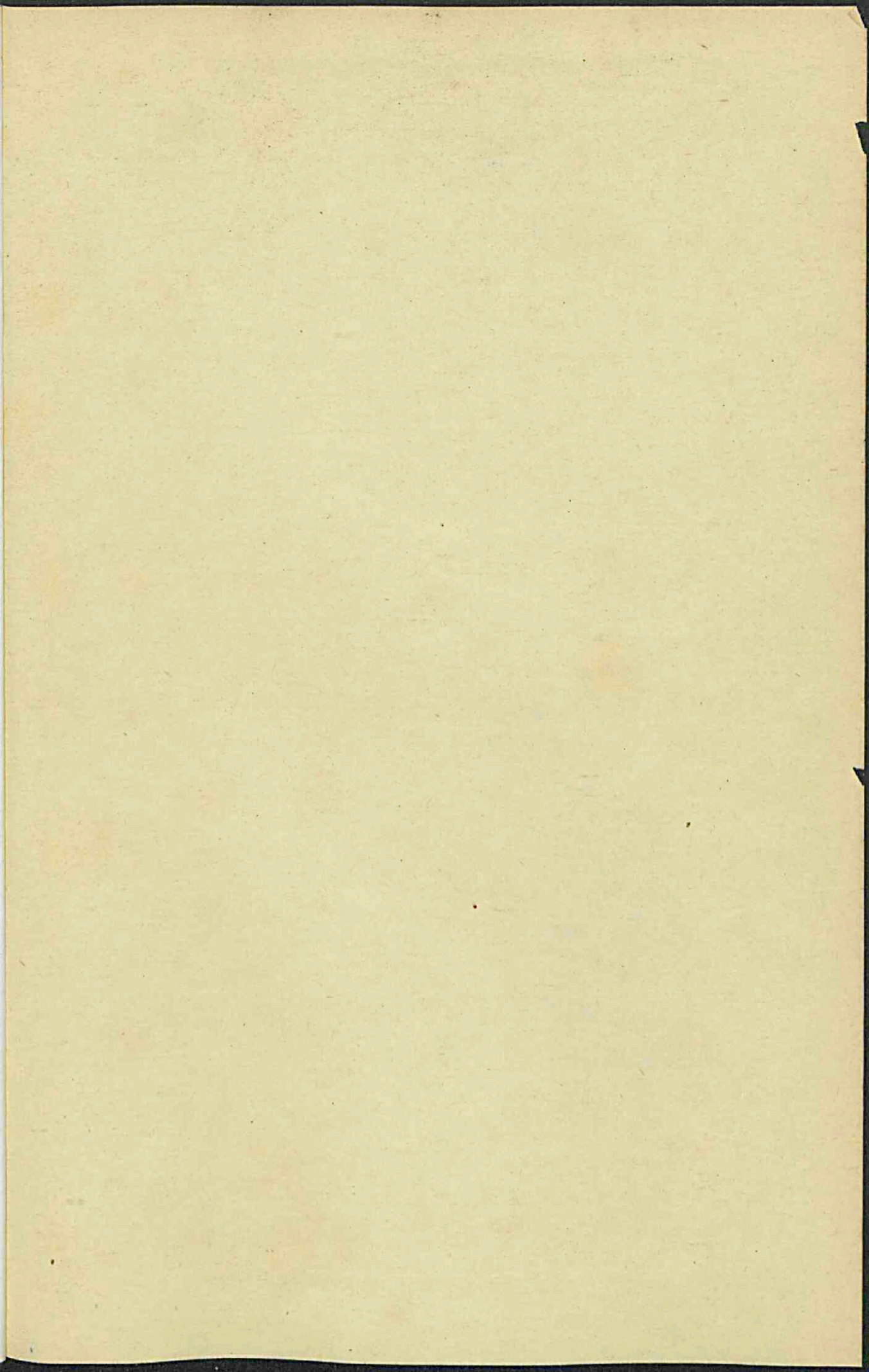
Onjuist is de volgende redeneering van BUCKLE *)

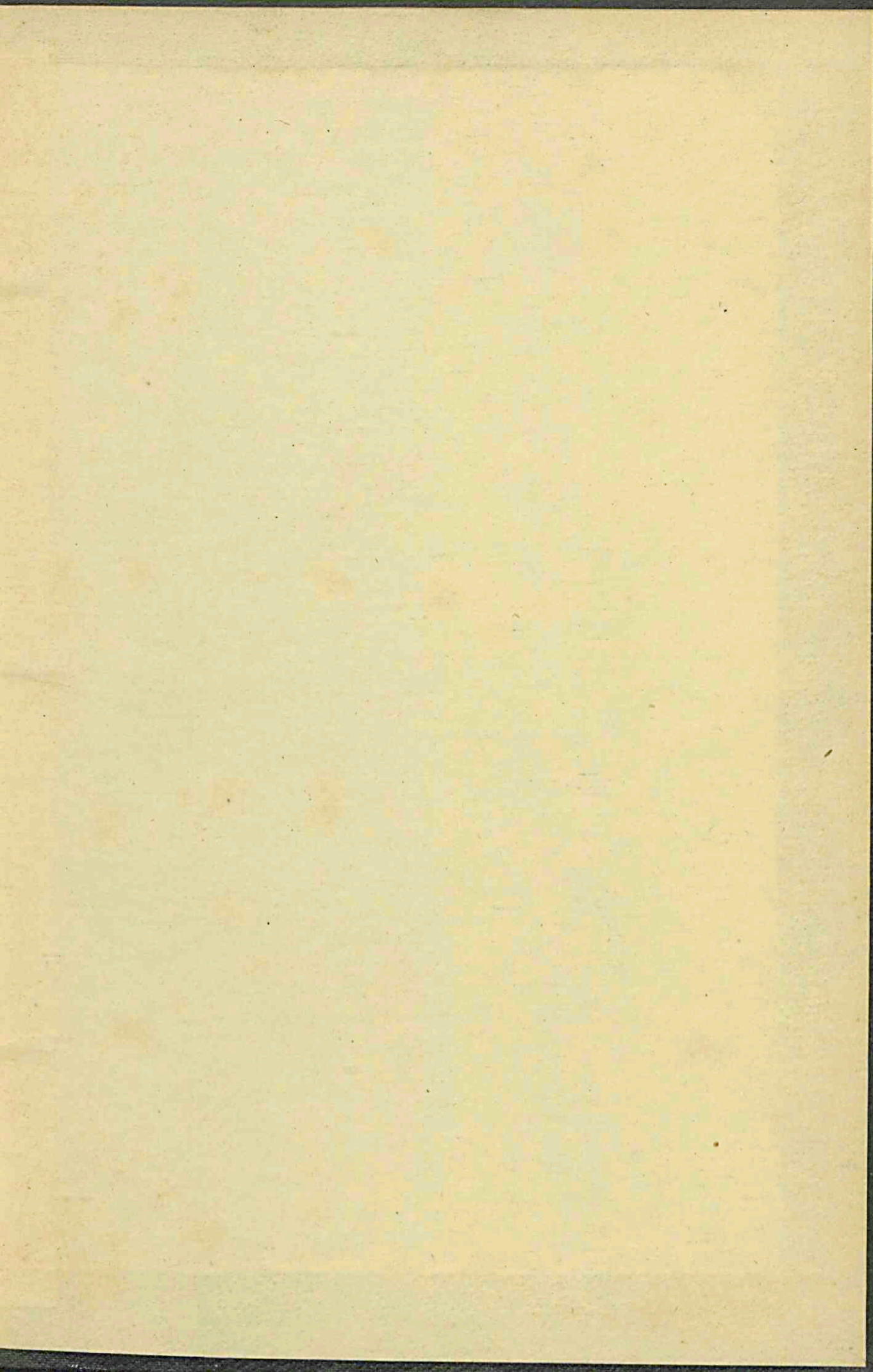
The deductive method strikes the senses less than the inductive. Hence, induction being more accessible to average standings, is more popular than deduction. Hence, too, the teachings of an inductive philosophy are more likely to affect national character than the teaching of a deductive philosophy.

*) History of Civilization in England. vol. V.

VERBETERING.

Bladz. 31. 11 r. v. b. staat 2°. en 3°. lees 3°. en 4°.





Diss.

18