



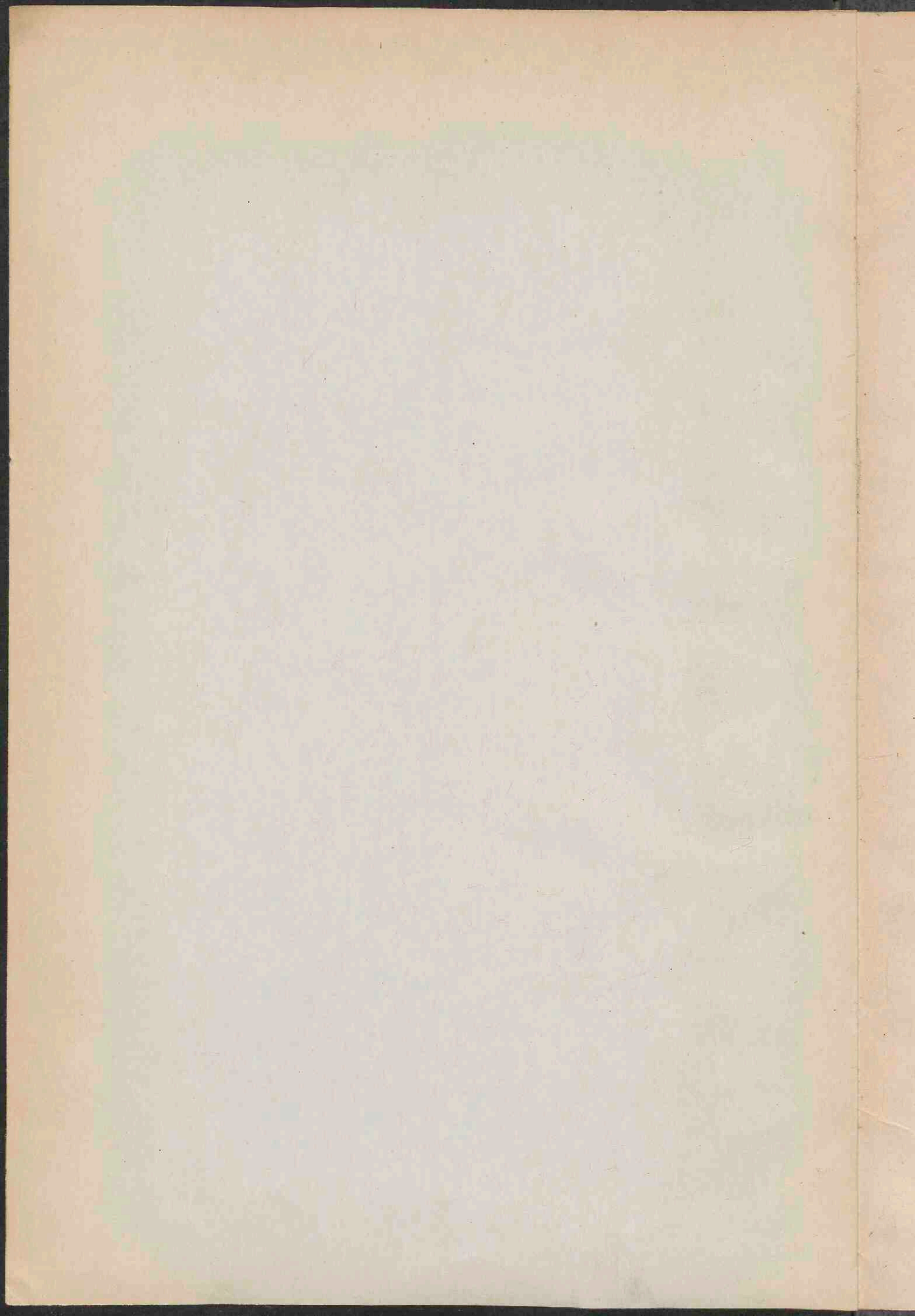
De verdeling der electriciteit over een geleidend bolvormig segment

<https://hdl.handle.net/1874/250412>

Diss.
Utrecht
1877

705 D 28.

704
D/28



DE VERDEELING DER ELECTRICITEIT

OVER EEN

GELEIDEND BOLVORMIG SEGMENT.

Vol. 9 135

THE UNIVERSITY OF CHICAGO

PHYSICS DEPARTMENT

PHYSICS 309

LECTURE NOTES

BY

ROBERT A. FAY

1962-63

CHICAGO, ILL.

UNIVERSITY OF CHICAGO PRESS

1963

15
9

Utrecht 1877

DE VERDEELING DER ELECTRICITEIT
OVER EEN
GELEIDEND BOLVORMIG SEGMENT.

A^o 192

ACADEMISCH PROEFSCHRIFT

Supplicans

NA MAGTIGING VAN DEN RECTOR MAGNIFICUS

Dr. Th. Wilh. ENGELMANN,

Hoogloeraar in de Medische Faculteit

MET TOESTEMMING VAN DEN ACADEMISCHEN SENAAT

EN

VOLGENS BESLUIT DER WIS- EN NATUURKUNDIGE FACULTEIT,

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD

VAN

Doctor in de Wis- en Natuurkunde,

AAN DE

HOOGESCHOOL TE UTRECHT,

TE VERDEDIGEN

op MAANDAG 2 JULI 1877, des namiddags ten 1 ure,

DOOR

ANTOINE GALENUS JEAN NORBERT FRANTZEN,

GEBOREN TE GORINCHEM.



BIBLIOTHEEK DER RIJKSUNIVERSITEIT

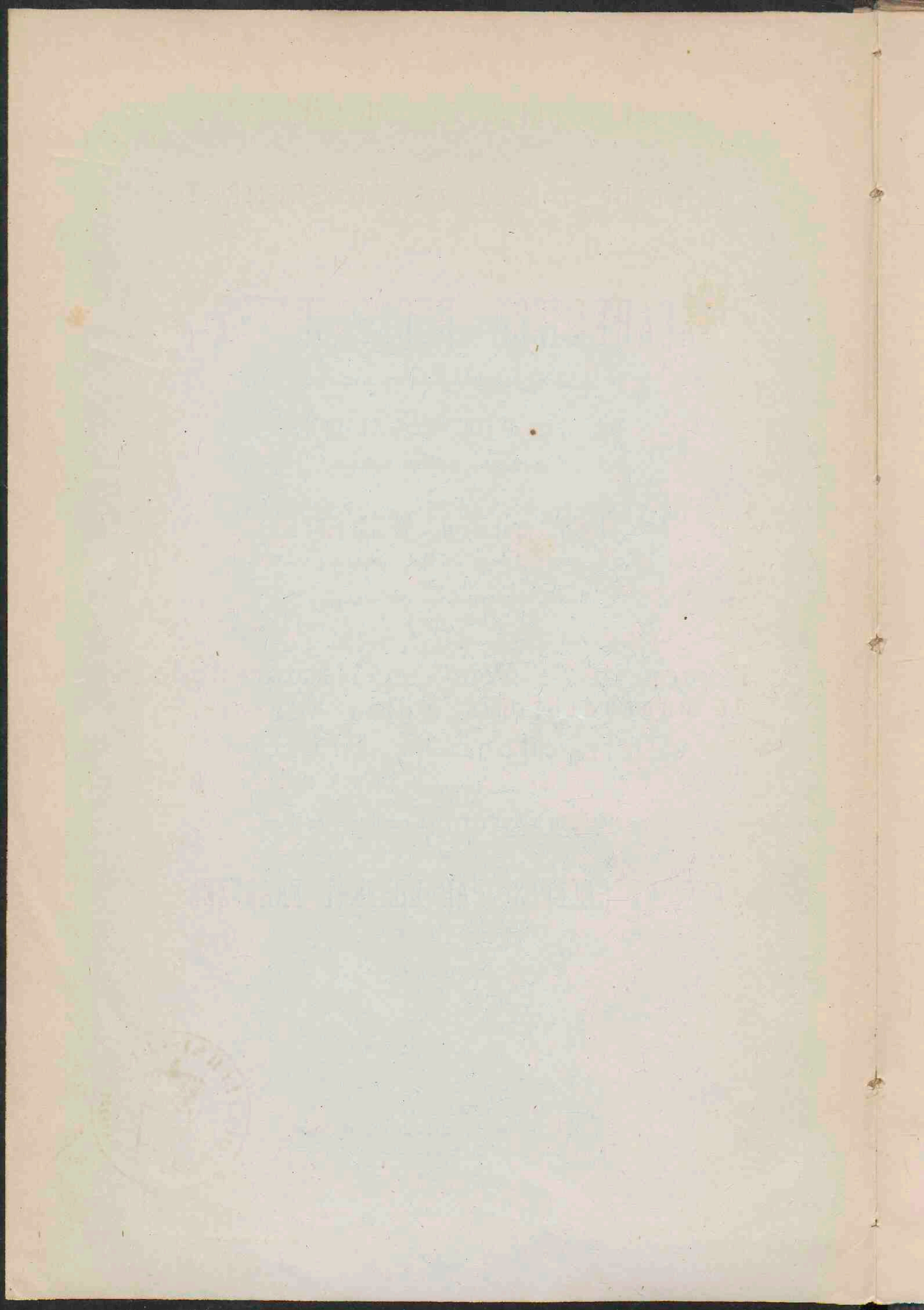


Utrecht,

Stoom Boekdrukkerij en Steendrukkerij „de Industrie.

(K. A. MANSSEN.)

1877.



Aan mijnen Vader

EN

de nagedachtenis mijner Moeder.

*Bij het verlaten der Academie gevoel ik mij gedrongen U, Hoog-
leeraren in de Wis- en Natuurkundige faculteit, mijn opregten dank
te betuigen voor al hetgeen gij gedaan hebt tot bevordering mijner
wetenschappelijke opleiding.*

*U, Hooggeleerde GRINWIS, hoog geachte Promotor, dank ik in het
bijzonder voor de bereidwilligheid, waarmede gij mij bij de vervaardiging
mijner dissertatie zijt behulpzaam geweest, alsmede voor het degelijk
onderrigt, dat ik zoo hier als elders van U heb mogen genieten, het-
welk steeds bij mij in dankbare herinnering zal blijven.*

INHOUD.

Hoofdstuk I.

Overzicht der verschillende methoden.

A. Overzicht van het vraagstuk. Elementaire behandeling door Beer en Green.

- § 1. Overzicht van het vraagstuk.
- § 2. Bepaling van de betrekking tusschen de uit- en inwendige potentialen en de potentiaal aan de oppervlakte van de over een bol willekeurig verdeelde electriciteit.
- § 3. Methode van Beer.
- § 4. Methode van Green.

B. Methode van Thomson.

§ 5. Electricische digtheid op de cirkelplaat bij gewone verdeling, afgeleid uit de digtheid op de ellipsoïde. Potentiaal op de cirkelplaat en andere formule voor de digtheid. Electricisch beeld van een gegeven massa-punt; dat van een electricisch oppervlak. Betrekking tusschen de electricische digtheid in eenig punt van een gegeven plat vlak of bol-oppervlak en de digtheid in het overeenkomstige punt van het electricisch beeld. Bewijs daarvan voor den bol. Potentiaal van het electricisch beeld. Daaruit volgende verdeling over het electricisch beeld, alsof zijn oppervlak afgeleid ware en onder influentie-werking stond. Nog andere formules voor de electricische digtheid op de cirkelplaat. Digtheid op het electricisch beeld.

§ 6. Electricische verdeling over een geïsoleerd bolvormig segment, zonder influentie. De verdeling is in overeenstemming met de proeven van Faraday en met de uitkomsten der methoden van Green en Beer.

§ 7. De verdeling der electriciteit over een bolvormig segment en cirkelvormige plaat, die afgeleid en slechts onder den invloed zijn eener, in een willekeurig punt C geconcentreerde, hoeveelheid electriciteit — q .

Bijzondere gevallen.

C. Methode van Lipschitz.

§ 8. Verdeeling der methode.

a. De elektrische verdeeling over eene afgeleide cirkelplaat.

§ 9. Formule voor de digtheid van de lading op een willekeurig gesloten oppervlak S , dat afgeleid is, geïnduceerd door de negatieve electriciteits-eenheid, geconcentreerd in een vast punt C buiten S . Voor het geval dat S eene afgeplatte omwentelings-ellipsoïde is, drukt men de regthoekige coördinaten x , y en z , alsmede den omgekeerden afstand $\frac{1}{d}$ van twee punten D en D' , uit in de elliptische σ , μ , ψ . $\sigma = p\sqrt{-1}$, waarin p alle waarden van 0 tot ∞ kan verkrijgen, wordt bij den overgang van de ellipsoïde in een cirkel aan de oppervlakte gelijk nul. Neumann's ontwikkeling van de waarde van $\frac{1}{d}$ in eene reeks volgens de kogelfuncties van Laplace. Uitwendige potentiaal en elektrische digtheid der op de ellipsoïde geïnduceerde lading.

§ 10. Potentiaal en elektrische digtheid van de lading over de afgeleide cirkelplaat; overeenstemming van de waarde der digtheid met die, welke volgt uit de digtheid op de ellipsoïde bij den overgang van deze in het cirkelvlak. Neumann's ontwikkeling toegepast op de som van twee omgekeerde afstanden; voor het geval dat het influencerende punt C ligt in de as van het cirkelvlak vindt men gemakkelijk een eindigen vorm voor de potentiaal. Verdere handelwijze van Lipschitz.

§ 11. Ook als C een gansch willekeurig punt is verkrijgt men, doch langs een anderen weg, voor de potentiaal een eindigen vorm, die al de vereischte eigenschappen bezit. Meetkundige beteekenis dezer potentiaal-functie. Eindformule voor de elektrische digtheid op de afgeleide cirkelplaat.

b. De elektrische verdeeling over een bolvormig segment.

§ 12. Vaststelling der gegevens met betrekking tot het bolvormig segment F . Eigenschap van de te vinden potentiaal-functie V der geïnduceerde lading. Formule voor de elektrische digtheid. Elektrische verdeeling ingeval het influencerende punt C ligt in het middelpunt N des bols, en daaruit volgende verdeeling eener gegevene hoeveelheid electriciteit Q over het geïsoleerde segment, zonder influentie. Hoeveelheid electriciteit Q_c der geïnduceerde lading voor eene willekeurige ligging van C . Wiskundige stelling; kenmerk voor de ligging van het overeenkomstige punt C' .

§ 13. Hierin gaat men over tot het zoeken van V , en vindt daarvoor verschillende vormen naar gelang van de ligging van het punt C en van het punt O , waarin de potentiaal genomen moet worden. Hieronder is het geval, dat het punt C met het middelpunt N zamenvalt, niet begrepen. Daarna wordt de juistheid dezer vormen voor V aangetoond.

§ 14. Vormen voor de potentiaal ingeval het punt C ligt in het middelpunt N . Met betrekking tot de ligging, die het punt C alzoo hebben kan, vindt

men ook nog de waarden van V , als C een punt des bol-oppervlaks is, waarvan het gegeven segment F een deel uitmaakt, maar niet op F gelegen.

§ 15. De elektrische digtheid op het afgeleide bolvormig segment F gevonden uit de waarden der potentiaal.

§ 16. Grenswaarde van het produkt van de elektrische digtheid (die steeds positief blijft en oneindig groot wordt aan den rand) in een punt O , zeer dicht bij den rand gelegen, met den vierkantswortel uit den afstand van O tot den rand. Elektrische digtheid voor het geval dat de punten C en N in elkaar vallen. Waarden der geïnduceerde hoeveelheden electriciteit Q_c en Q_n , de laatste wanneer het punt C met het middelpunt N zamenvalt, waardoor dan ook de gewone verdeling der hoeveelheid electriciteit Q bepaald is.

D. Methode van Kötteritzsch.

§ 17. Aard der methode. Overeenkomst tusschen de uitwendige potentiaal van elektrische massa's, gelegen binnen een gegeven bol-oppervlak, en de uitwendige potentiaal der op dat oppervlak geheel willekeurig verdeelde electriciteit. Uit- en inwendige potentiaal en elektrische digtheid der lading, op het afgeleide bol-oppervlak door genoemde vaste elektrische massa's geïnduceerd.

§ 18. Gegevens met betrekking tot den vorm en het elektrisch evenwigt des geleiders. Aanneming van een polair coördinaten-stelsel, dat het middelpunt C der schijf tot pool heeft, en waarvan de hoek θ gerekend wordt van af het naar het influencerend punt Q toegekeerde deel van de as der schijf. Constructie van het elektrisch beeld van de oppervlakte der schijf ten opzichte van een bol-oppervlak, uit C als middelpunt beschreven met een straal $a < h$, de halve dikte der schijf. Aequivalent te verplaatsen elektrische massa's.

§ 19. Hier heeft een gedurig aequivalent overbrengen plaats van elektrische massa's, gelegen binnen het oppervlak van het elektrisch beeld van de oppervlakte der schijf, op dat beeldoppervlak, waarbij telkens het laatste gedeelte van § 17 gebruikt wordt, en behalve het reeds vermelde polair coördinaten-stelsel nog twee andere gebezigd worden, die de middelpunten der bol-oppervlakken, de elektrische beelden van de beide evenwijdige grensvlakken der schijf, respectievelijk tot polen hebben, en waarvan men de hoeken θ_1 en θ_2 rekest van af de naar C toegekeerde deelen van de as der schijf. Uit de alzoo verkregene waarden der digtheid op het elektrisch beeld laat zich dan verder de waarde der elektrische digtheid op de schijf zelve afleiden.

Hoofdstuk II.

Vergelijking van de uitkomsten en nadere gevolgtrekkingen der methoden, en behandeling van de grensgevallen (cirkelplaat en bol-oppervlak).

§ 20. Overeenstemming tusschen de uitkomsten der methoden van Beer en Green. Electriche digtheid op het gansche bol-oppervlak.

§ 21. Electriche digtheid op het afgeleide bolvormig segment, als het influencerende punt C ligt in de as, hetzij binnen of buiten het bol-oppervlak, uit Thomson's algemeene formule voor de digtheid. Van de omstandigheid, die plaats heeft, ingeval het punt C met het middelpunt M zamenvalt, wordt gebruik gemaakt tot het bepalen der verdeling eener willekeurige hoeveelheid electriciteit over de beide zijden van een geïsoleerd bolvormig segment, zonder influentie; electriche verdeling over den ganschen bol en de cirkelplaat. Afgeleide waarde der electriche digtheid, wanneer het punt C gelegen is op het verlengde oppervlak van het segment. Electriche digtheid op het afgeleide bol-oppervlak.

§ 22. Aanwijzing van het verband tusschen de formules voor de electriche digtheid van Thomson en Lipschitz, door die van den laatsten te herleiden tot een vorm, die identisch is met de som van de waarden der electriche digtheid aan weërszijden van het segment; daarbij aangenomen hebbende, dat het influencerende punt C in de as ligt. Overeenstemming tusschen de uitkomsten, wanneer het punt C met het middelpunt zamenvalt; wanneer dat punt zich bevindt op het verlengde oppervlak van het segment.

§ 23. Waarde der electriche digtheid op de met den grond verbondene cirkelplaat, afgeleid uit die der digtheid op het bolvormig segment volgens de methode van Lipschitz, in overeenstemming met de vroeger gevondene. Bijzondere gevallen, waaruit weder de overeenstemming blijkt met de uitkomsten volgens Thomson.

§ 24. Waarde der electriche digtheid op het met den grond verbondene bol-oppervlak, afgeleid uit die der digtheid op het bolvormig segment volgens de methode van Lipschitz.

§ 25. Overeenstemming van de door Lipschitz verkregene uitkomsten met de benaderde oplossing van het vraagstuk door Green.

§ 26. Bepaling der electriche digtheid volgens de methode van Kötteritzsch, toegepast op het geval, dat de bolvormige schijf overgaat in den ganschen bol.

Slotwoord.

HOOFDSTUK I.

Overzicht der verschillende methoden.

A. Overzicht van het vraagstuk. Elementaire behandeling door Beer en Green.

§ 1. Het onderwerp, waarover hier gehandeld wordt, betreft de wijze, waarop de electriciteit in den evenwigtstoestand verdeeld is over de oppervlakte eener geleidende schaal van oneindig kleine dikte, die den vorm heeft van een bolvormig segment (hieronder ook de cirkelvormige plaat en bol als grensgevallen gerekend), alsmede over eene bolvormige schijf, waarvan de beide evenwijdige grensvlakken aan elkaar gelijk zijn; hetzij de geleider geïsoleerd en, na eene zekere lading ontvangen te hebben, buiten alle influentiewerking gesteld is, zoodat er eene gewone elektrische verdeling plaats heeft; hetzij de geleider door een oneindig dunnen draad met den grond verbonden en onder de influentie is van uit- of inwendige vaste elektrische massa's.

Verscheidene geleerden, Thomson, Lipschitz, Green, Beer, Kötteritzsch hebben zich uitvoerig met dit vraagstuk bezig gehouden.

De methoden van Green en Beer zijn evenwel beperkt tot het bijzonder geval dat de geleider een geïsoleerd bolvormig segment is, dat zeer weinig van een bol verschilt; derhalve eene zeer dunne bolvormige schaal met eene kleine cirkelvormige opening. Beide hebben hiertoe gebruik gemaakt van het verband dat er bestaat tusschen de uit- en inwendige potentialen en de potentiaal aan de oppervlakte van de over een bol willekeurig verdeelde electriciteit.

§ 2. Laat van deze de veranderlijke digtheid ρ zijn, R de straal van het boloppervlak, dan is de potentiaal van de lading in een punt

P binnen den bol, op den afstand r van het middelpunt M, den oorsprong der coördinaten

$$V_i = X_0 + X_1 \frac{r}{R} + X_2 \frac{r^2}{R^2} + \text{enz. } *) \quad (1)$$

waarin X_0, X_1 enz. functiën zijn van de beide andere polaire coördinaten θ en φ van het punt P.

In een buiten den bol gelegen punt P', welks coördinaten zijn r', θ en φ , is

$$V_u = X_0 \frac{R}{r'} + X_1 \frac{R^2}{r'^2} + X_2 \frac{R^3}{r'^3} + \text{enz.} \quad (2)$$

zoodat, als $V_i = f(r)$ en $V_u = F(r')$, volgt

$$F(r) = \frac{R}{r} f\left(\frac{R^2}{r}\right) \quad \text{of} \quad f(r) = \frac{R}{r} F\left(\frac{R^2}{r}\right) \quad (3)$$

Noemt men n de normaal in eenig punt gerekend van de oppervlakte naar buiten, dan heeft men

$$4\pi q = \frac{d\bar{V}_i}{dn} - \frac{d\bar{V}_u}{dn} (**) = \frac{d\bar{V}_i}{dr} - \frac{d\bar{V}_u}{dr'} = f'(R) - F'(R), \quad (4)$$

terwijl uit de eerste vergelijking (3) verkregen wordt

$$F'(r) = -\frac{R}{r^2} f\left(\frac{R^2}{r}\right) - \frac{R^3}{r^3} f'\left(\frac{R^2}{r}\right),$$

waaruit voor $r = R$ aan de oppervlakte

$$F'(R) = -\frac{f(R)}{R} - f'(R). \quad (5)$$

Door de tweede vergelijking (3) te differentieëren, vindt men evenzoo

$$f'(R) = -\frac{F(R)}{R} - F'(R); \quad (6)$$

waardoor (4) na beurtelingsche substitutie van (5) en (6) verandert in

$$\left. \begin{aligned} 4\pi q &= 2f'(R) + \frac{f(R)}{R} = 2 \frac{d\bar{V}_i}{dr} + \frac{\bar{V}}{R}, \\ 4\pi q &= -2F'(R) - \frac{F(R)}{R} = -2 \frac{d\bar{V}_u}{dr'} - \frac{\bar{V}}{R}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

*) Th. Kötteritzsch: Lehrbuch der Electrostatik, Leipzig 1872, S 174.

***) C. H. C. Grinwis: Wiskundige theorie der Wrijv. Electr. Blz. 22 N° 8.

R. Clausius: Abhandl. über die Mechan. Wärmetheorie, zw. Abth. Seite 68.

August Beer: Einleitung in die Elektrostatik usw, S 24.

G. Green. An essay on the application etc., art. 4. (Crolle's Journal, Bd. 44.)

Laat de eenheid van electriciteit geconcentreerd zijn in een punt Q buiten den bol op den afstand a van het middelpunt, U de potentiaal dezer electriciteit in eenig punt P binnen den bol; dan zal, als deze is afgeleid,

$$V_i + U = 0.$$

Alsdan gaat de eerste vergelijking (7) over in

$$4\pi q = -2 \frac{dU}{dr} - \frac{U}{R}.$$

Noemende nu den afstand PQ , l en hoek QMP , α , zoo is

$$l^2 = a^2 + r^2 - 2ar \cos \alpha,$$

waaruit

$$\frac{dl}{dr} = \frac{r - a \cos \alpha}{l},$$

$$2 \frac{dU}{dr} = 2 \frac{d}{dr} \frac{1}{l} = -\frac{2}{l^2} \frac{dl}{dr} = \frac{2a \cos \alpha - 2r}{l^3}.$$

Aan de oppervlakte $r = R$, zoodat

$$4\pi q = \frac{2R^2 - 2aR \cos \alpha - l^2}{Rl^3} = \frac{R^2 - a^2}{Rl^3},$$

of

$$q = \frac{R^2 - a^2}{4\pi Rl^3} \dots \dots \dots (8)$$

de digtheid van de lading, op de oppervlakte des afgeleiden bols door de eenheid in Q geïnduceerd, in een element ds , waarvan de afstand tot Q gelijk aan l is. De potentiaal V in het uitwendig punt Q van eene geheel willekeurig over den bol verdeelde lading is nu, als \bar{V} de potentiaal van deze lading in ds

$$V = - \int \bar{V}_q ds = \frac{a^2 - R^2}{4\pi R} \int \frac{\bar{V}}{l^3} ds, \quad (*) \dots \dots (9)$$

waarbij de integratie over het geheele boloppervlak moet worden uitgestrekt.

Door middel van de tweede vergelijking (7) verkrijgt men op overeenkomstige wijze voor de potentiaal V' in een inwendig punt Q'

$$V' = - \int \bar{V}_q ds^{**}) = \frac{R^2 - a'^2}{4\pi R} \int \frac{\bar{V}}{l^3} ds. \quad \dots \dots (10)$$

*) Grinwis l. c. Blz. 100.

***) Green l. c. art. 5. Grinwis l. c. Blz. 100.

waarin nu ρ de digtheid in ds op den afgeleiden bol geïnduceerd door de eenheid in het punt Q' , op den afstand a' van M , en l' van ds .

§ 3. Uitgaande van (9) en (10) is de methode van Beer de volgende.

Laat K de constante waarde zijn van de potentiaal der lading in de massa waaruit het holvormige segment bestaat, \bar{V} de veranderlijke waarde der potentiaal op het ontbrekende deel van het boloppervlak, die altijd kleiner dan K is. Vooronderstel dan, dat men integreerde over het geheele boloppervlak, alsof daarop de potentiaal overal gelijk aan K ware, dan zoude op het ontbrekende deel de waarde $K - \bar{V}$ te groot genomen zijn, zoodat, om de uit- of inwendige potentiaal van het gegevene segment te vinden, de uit- of inwendige potentiaal van het geheele boloppervlak (die hierop de waarde K heeft) in eenig punt moet verminderd worden met de uit- of inwendige potentiaal van het ontbrekende segment in datzelfde punt, die op dat segment $K - \bar{V}$ tot waarde heeft. Aldus verkrijgt men volgens (9) en (10) voor de uit- en inwendige potentialen V_u en V_i van het gegevene segment

$$V_u = \frac{KR}{a} - \frac{a^2 - R^2}{4\pi R} \int \frac{K - \bar{V}}{l^3} ds \quad \dots \quad (11)$$

$$V_i = K - \frac{R^2 - a^2}{4\pi R} \int \frac{K - \bar{V}}{l^3} ds \quad \dots \quad (12)$$

waarin de integratiën alleen over het oppervlak van het ontbrekende holvormige segment moeten worden uitgestrekt.

Als nu ρ de constante elektrische digtheid behoorende bij de potentiaal K over den geheelen bol, ρ' en ρ'' de digtheden op het binnen- en buitenvlak van het gegevene segment beteekenen, dan komt er, wanneer men de lading over den geheelen bol q noemt, en gemakshalve

$$\frac{1}{8\pi^2} \int \frac{K - \bar{V}}{l^3} ds = Aq \quad \dots \quad (13)$$

stelt, waar l de afstand is van het element ds tot aan het punt van het gegevene segment, waarin de digtheid gezocht wordt,

$$\rho = \frac{q}{4\pi R^2} = \frac{K}{4\pi R} \quad \dots \quad (14)$$

$$\rho' = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{dV_i}{da'} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{2a'}{4\pi R} \int \frac{K - \bar{V}}{l^3} ds - \frac{R^2 - a'^2}{4\pi R} \cdot \frac{d}{da'} \int \frac{K - \bar{V}}{l^3} ds \right) = Aq, \quad (15)$$

($a' = R$)

$$\rho'' = -\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{dV_u}{da} = -\frac{1}{4\pi} \left(-\frac{KR}{a^2} - \frac{2a}{4\pi R} \int \frac{K - \bar{V}}{l^3} ds - \right)$$

$$-\frac{a^2 - R^2}{4\pi R} \cdot \frac{d}{da} \int \frac{K - \bar{V}}{l^3} ds \Bigg|_{(a=R)} = \varrho + \Delta\varrho; \quad \dots (16)$$

waaruit blijkt, dat ϱ' en ϱ'' gelijke teekens hebben, omdat $\Delta\varrho$ en ϱ beide met K in teeken overeenstemmen. Voorts is $K - \bar{V}$ aan den rand der opening nul, en in het midden van het ontbrekende segment een maximum. In dit punt is \bar{V} gelijk aan het verschil van de potentiaal K van den geheelen bol en die van het ontbrekende segment, voor welke laatste men wegens de kleinheid der opening de potentiaal v mag nemen van het cirkelvlakje, dat den rand tot omtrek heeft. Beteekent 2θ de schijnbare middellijn der opening in het middelpunt van den bol, dan is *)

$$\begin{aligned} v &= 2\pi\varrho \left\{ \sqrt{R^2 \sin^2 \theta + R^2 (1 - \cos \theta)^2} - R(1 - \cos \theta) \right\} \\ &= 2\pi\varrho \left(\sqrt{2R^2(1 - \cos \theta)} - R(1 - \cos \theta) \right) \\ &= K \sin \frac{1}{2} \theta (1 - \sin \frac{1}{2} \theta); \end{aligned}$$

waaruit volgt, dat in elk ander punt van het ontbrekende segment

$$K - \bar{V} < v,$$

en men dus met zekerheid als grens kan aannemen

$$K - \bar{V} < K \sin \frac{1}{2} \theta \text{ of } < 4\pi\varrho R \sin \frac{1}{2} \theta.$$

Daar eindelijk

$$\int ds = R(1 - \cos \theta) \times 2\pi R = 4\pi R^2 \sin^2 \frac{1}{2} \theta;$$

vindt men

$$\Delta\varrho < 2\varrho \left(\frac{R}{l} \right)^3 \sin^3 \frac{1}{2} \theta,$$

waarin l de kortste afstand is van het punt van het binnenvlak waar de digtheid is $\Delta\varrho$ tot aan den rand, waarvoor genomen kan worden de afstand tot aan het middelpunt der opening, indien deze zeer klein is. Als b. v. de schijnbare middellijn der opening 16° bedraagt, zal $\frac{\Delta\varrho}{\varrho}$ voor punten, op 45° , 90° , 135° en 180° van het midden der

*) Grinwis. I. c. Blz 20 (1)

opening verwijderd, kleiner zijn dan 0,00266; 0,00034; 0,00012 en 0,00009. *)

§ 4. Daar met de constante waarde K der potentiaal in den evenwigtstoestand aan het oppervlak van het gegevene bolvormige segment S , indien er geene opening was, de electriche digtheid $\frac{K}{4\pi R}$ zou overeenstemmen, zoo noemt Green de algemeene waarde der digtheid in eenig punt van het bol-oppervlak $\frac{K}{4\pi R} + \sigma$, en die van de overeenkomstige potentiaal in een daarbinnen gelegen punt Q $K + V$; welke laatste aan het bol-oppervlak overgaat in $K + \bar{V}$, zoodat over het geheele segment S $\bar{V} = 0$, en vergelijking (10) verandert in

$$K + V = \frac{R^2 - a'^2}{4\pi R} \int \frac{K + \bar{V}}{r^3} ds,$$

of, omdat

$$\frac{R^2 - a'^2}{4\pi R} \int \frac{K}{r^3} ds = K, \text{ in}$$

$$V = \frac{R^2 - a'^2}{4\pi R} \int \frac{\bar{V}}{r^3} ds, \dots \dots \dots (17)$$

waar de integraal alleen over het oppervlak van het ontbrekende bolvormige segment s moet worden uitgestrekt, dat men als vlak kan beschouwen.

In elk punt van s is dan

$$\sigma = - \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d\bar{V}}{dn}, \text{ **)}$$

waarin n de naar binnen getrokken normaal van het oppervlak, en

*) De getallen 0,0641 enz. bij Beer vermeld in het geval dat de spherische straal van den rand 15° is voor punten op 45° , 90° en 180° van het midden der opening verwijderd, zijn de grenswaarden met betrekking tot $2\Delta q$, dat is: de som der beide gelijke electriche digtheden Δq aan weërszijde van het gegevene bolvormige segment der lading, die daarop zou worden geïnduceerd, als het afgeleid ware en het ontbrekende segment bedekt met electriciteit van de digtheid $-\varrho$; hetgeen nog duidelijker zal blijken uit de hierna volgende methode van Thomson.

Beer. l. c. § 54 u 55.

Grinwis. l. c. N^o. 26, c.

**) Grinwis. l. c. Blz. 20.

Green l. c. p. 365.

$$\frac{K}{4\pi R} + \sigma = 0 \text{ of } \sigma = -\frac{K}{4\pi R}.$$

Door deze beide waarden van σ aan elkaar gelijk te stellen, verkrijgt Green, na uit het zeer dicht bij het vlak s gelegen punt Q' de loodlijn $x = R - a'$ op s , waarvan de tweede en hoogere magten kunnen worden verwaarloosd, ingevoerd te hebben

$$-\frac{K\pi}{R} = \frac{d^2}{dx^2} \int \frac{\bar{V}}{r} ds, \dots \dots \dots (18)$$

waar de integraal zich uitstrekt over het geheele vlak s , en x op het einde der bewerking gelijk nul gesteld is.

Om de waarde van \bar{V} uit deze vergelijking te vinden, maakt Green verder gebruik van de potentiaal in het punt Q' en de aantrekking in de rigting van x eener oneindig dunne omwentelings-ellipsoïde, waarvan het cirkelvlak s de aequator is. \bar{V} bekend zijnde, wordt de algemeene waarde van V door (17) bepaald, en men verkrijgt voor de elektrische digtheid σ' in een element dS' van het binnenvlak van S op korten afstand van den rand

$$\sigma' = -\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{d\bar{V}}{dn} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{d\bar{V}}{da'} = \frac{K\alpha^3}{12\pi^2 Rk^3}; \dots \dots \dots (19)$$

waarin α de straal van s , en k de afstand van het middelpunt der opening tot aan het element dS' , terwijl grootheden van de orde $\frac{\alpha^2}{k^2}$ zijn verwaarloosd geworden.

De elektrische digtheid σ'' in het overeenkomstige element dS'' aan de buitenzijde van S

$$\sigma'' = \frac{K}{4\pi R} + \sigma', \dots \dots \dots (20)$$

zoodat voor punten, die wel op korten afstand, maar niet in de onmiddellijke nabijheid van den rand gelegen zijn

$$\frac{\sigma'}{\sigma''} = \frac{\alpha^3}{3\pi k^3} \text{ *)}; \dots \dots \dots (21)$$

waaruit blijkt, hoe gering de elektrische digtheid op de binnenzijde reeds is op eenigzins merkbaren afstand van den rand, terwijl voor een zelfde element van S de digtheid met de grootte der opening toeneemt.

De berekeningen, die Green aangeeft, laten aan duidelijkheid zeer te wenschen over; zijne uitkomsten stemmen echter, zooals wij later zullen

*) Green. (Crelle's Journal Bd. 47, p. 177.)

aantoonen, overeen met die, welke Beer langs een meer geleidelijken weg verkreeg.

Wij zullen nu een overzicht geven van de achtereenvolgende methoden van Thomson, Lipschitz en Kötteritzsch.

B. Methode van Thomson *).

§ 5. Over de oppervlakte eener geleidende, geïsoleerde, en buiten de inducerende werking van uitwendige electriche massa's zich bevindende ellipsoïde is in den evenwigtstoestand de daaraan medegedeelde electriciteit zoodanig verdeeld, dat hare digtheid ϱ in elk punt P der oppervlakte evenredig is aan de loodlijn l uit het middelpunt op het raakvlak in dat punt neêrgelaten, zoodat

$$\varrho = cl = \frac{Q}{4\pi pqr} l = \frac{Q}{4\pi pqr \sqrt{\left(\frac{x^2}{p^4} + \frac{y^2}{q^4} + \frac{z^2}{r^4}\right)}}; \quad (1)$$

waarin Q de totale hoeveelheid electriciteit, p q en r de halve assen, en x y en z de regthoekige coördinaten van het punt P zijn.

Door in deze formule, na eliminatie van z, $r = 0$ en $q = p$ te stellen, verkrijgt men voor de electriche digtheid ter weêrszijde van eene oneindig dunne cirkelvormige plaat, waarvan de straal is p, op een afstand t van het middelpunt de waarde

$$\varrho = \frac{Q}{4\pi p \sqrt{(p^2 - t^2)}} \quad (2)$$

Uit de uitkomsten van proefnemingen van Coulomb omtrent de electriciteitsverdeeling op een koperen plaat van 10 duim middellijn, waarvan de dikte wel niet vermeld is, doch die als zeer gering moet worden beschouwd met betrekking tot de middellijn, blijkt, dat de waarden van de digtheid in punten op verschillende afstanden van den rand der plaat, zooals de waarneming die geeft, vrij wel overeenstemmen met die welke voor dezelfde punten door berekening uit (2) gevonden worden, uitgezonderd in de onmiddellijke nabijheid van den rand. Alleen zijn de waargenomene digtheden iets kleiner dan de bere-

*) Reprint of papers on Electrostatics and Magnetism by Sir William Thomson. London 1872. Art. XV.

kende, hetgeen zich daaruit laat verklaren, dat de dikte wel gering maar toch eindig was.

De potentiaal V in eenig punt M van de oppervlakte der plaat heeft tot waarde

$$V = \frac{Q\pi}{2p} \dots \dots \dots (3)$$

welke onafhankelijk van den afstand van M tot aan het middelpunt en dus constant is. Dit toont Clausius aan met behulp van (2) voor de digtheid in P , en door M als oorsprong van polaire coördinaten aan te nemen *)

Trekt men door het punt P eene willekeurige koorde HI , dan is, daar de middellijn gaande door P in dit punt verdeeld wordt in twee segmenten, die gelijk zijn aan $p + t$ en $p - t$,

$$p^2 - t^2 = HP \cdot PI.$$

Hierdoor gaat (2) na substitutie van $\frac{2pV}{\pi}$ voor Q over in

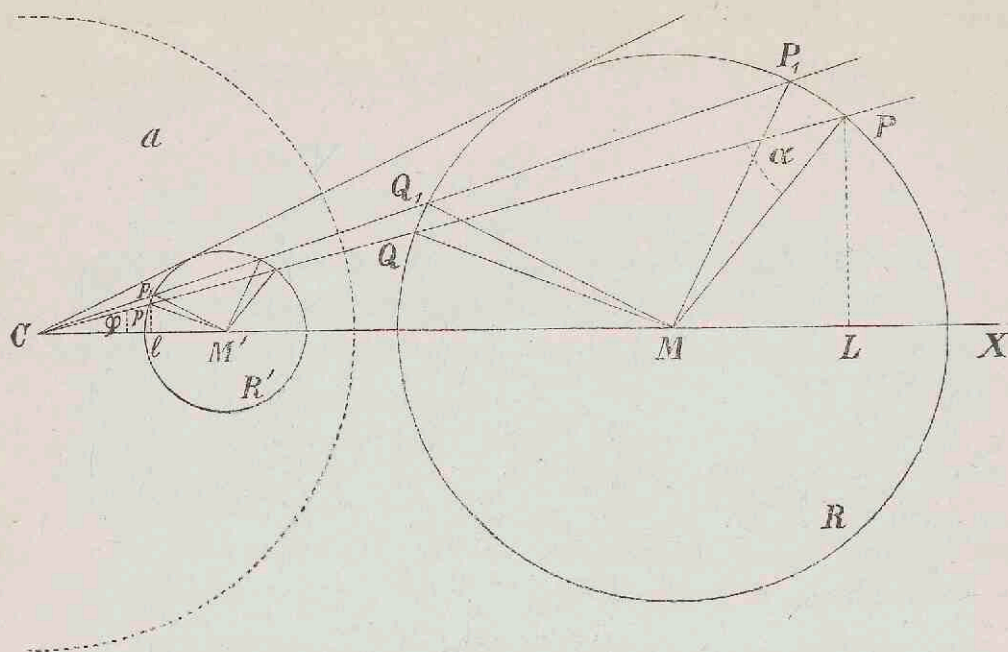
$$\rho = \frac{V}{2\pi^2 \sqrt{HP \cdot PI}} \dots \dots \dots (4)$$

Zij gegeven een bol, welks straal is a , en een punt q daarbuiten, waarin eene elektrische massa m geconcentreerd is op den afstand r van het middelpunt; dan noemt Thomson de massa $-\frac{a}{r} m$, geconcentreerd in het punt q' , gelegen op den afstand $r' = \frac{a^2}{r}$ van het middelpunt des bols in den voerstraal gaande naar het punt q , het elektrisch beeld van m , en omgekeerd deze laatste massa het elektrisch beeld van de eerste.

De aaneenschakeling der elektrische beelden met betrekking tot den zelfden bol van al de punten van een elektrisch oppervlak vormt het elektrisch beeld van dat oppervlak. Zoo is het elektrisch beeld van een plat vlak of bol een bol, waarover de electriciteit zoodanig is verbreid, dat tusschen de digtheden ρ en ρ' in eenig punt P van de gegevene oppervlakte en zijn beeldpunt p de betrekking bestaat

$$\rho' = -\frac{a^3}{r'^3} \rho \dots \dots \dots (5)$$

*) Grinwis, l. c. N°. 16a en 17.



Laat, om zulks voor den bol te bewijzen, C M en M' de middelpunten der bollen zijn, $CM = c$, den straal van den bol om M gelijk aan R , en om M' , het middelpunt van het beeld, gelijk aan R' .

Men trekke uit C twee voerstralen, snijdende den bol en zijn beeld in de punten P, P_1, Q, Q_1 en p, p_1, q, q_1 , zoodat $\angle PCM = \varphi$, $\angle PCP_1 = d\varphi$; voorts uit M en M' de twee aan twee evenwijdig zijnde stralen naar deze snijpunten, en de loodlijnen PL en pl op CMX ; dan is, als $\angle CPM = \alpha$, in driehoek CPM

$$c : R = \sin \alpha : \sin \varphi,$$

waaruit
$$\alpha = \text{Bg} \sin \left(\frac{c}{R} \sin \varphi \right).$$

Verder is $\angle PMX = \varphi + \alpha$, $\angle CMQ = 2\alpha - \angle PMX = \alpha - \varphi$,

$$\angle CMQ_1 = (\alpha + d\alpha) - (\varphi + d\varphi),$$

waaruit door aftrekking volgt $\angle QMQ_1 = d\alpha - d\varphi$.

Zoo is ook $\angle PMP_1 = d\alpha + d\varphi$.

Nog is $CP = r = c \cos \varphi + \sqrt{R^2 - c^2 \sin^2 \varphi}$,

en
$$Cp = r' = \frac{a^2}{r} = a^2 \frac{c \cos \varphi - \sqrt{R^2 - c^2 \sin^2 \varphi}}{c^2 - R^2}.$$

Bij de rondwenteling nu van de figuur om CM beschrijft elk der bogen PP_1 en zijn beeld pp_1 de ronde oppervlakte van eene bolvormige schijf. Alsdan is, de digtheid ρ eene functie van φ zijnde, de oppervl. schijf geleider $= \text{bg } PP_1 \times 2\pi PL = 2\pi Rr (d\alpha + d\varphi) \sin \varphi$,

» » beeld $= \text{bg } pp_1 \times 2\pi pl = 2\pi R'r' (d\alpha - d\varphi) \sin \varphi$,

$$\text{massa beeld} = \rho \times 2\pi Rr (d\alpha + d\varphi) \sin \varphi \times -\frac{a}{r} = -2\pi \rho R a (d\alpha + d\varphi) \sin \varphi,$$

$$\text{digtheid beeld } \rho' = -\frac{R}{R'} \cdot \frac{a}{r'} \cdot \frac{d\alpha + d\varphi}{d\alpha - d\varphi} \rho = -\frac{c^2 - R^2}{ar'} \cdot \frac{d\alpha + d\varphi}{d\alpha - d\varphi} \rho.$$

Deze uitdrukking wordt na differentiatie van α en herleiding

$$\rho' = -\frac{(c^2 - R^2)}{ar'} \cdot \frac{c \cos \varphi + \sqrt{R^2 - c^2 \sin^2 \varphi}}{c \cos \varphi - \sqrt{R^2 - c^2 \sin^2 \varphi}} \rho = -\frac{(c^2 - R^2)}{ar'} \cdot \frac{\frac{a^2}{r'}}{(c^2 - R^2) r'} \rho;$$

dat is
$$\rho' = -\frac{a^3}{r'^3} \rho^* \text{ w. t. b. w.}$$

Hetzelfde resultaat verkrijgt men voor het plat vlak.

Noemt men nu G de potentiaal van de gegevene lading in een willekeurig punt A , G' de potentiaal van het electrisch beeld in het punt A' , beeldpunt van A , dan is

$$G' = -\frac{a}{CA'} G; \text{ **) } \dots \dots \dots (6)$$

waaruit volgt dat, daar de potentiaal V der lading van het gegevene oppervlak O in alle punten van O constant is, de potentiaal V' van het electrisch beeld o in verschillende punten van o omgekeerd evenredig is aan hun afstand r' van het punt C , en stellende $-aV = q$, wordt

$$V' = \frac{q}{r'} \dots \dots \dots (7)$$

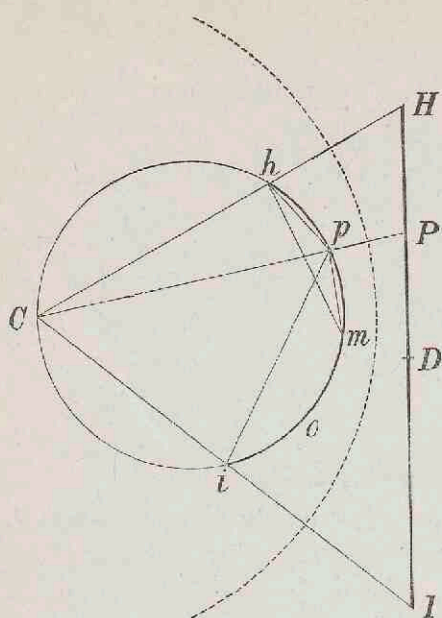
Het electrisch beeld van eene geleidende, oneindig dunne cirkelvormige plaat of bolvormig segment, waarvan de potentiaal aan de oppervlakte is V , ten opzichte van een bol uit een willekeurig punt C als middelpunt met den straal a beschreven, is dus een bolvormig segment, dat eveneens is geëlectriseerd als eene oneindig dunne schaal van denzelfden vorm, die afgeleid en slechts onder den invloed is van eene hoeveelheid electriciteit $aV = -q$, geconcentreerd in C .

Voor de cirkelvormige plaat gaat dan (4) over in

$$\rho = -\frac{q}{2\pi^2 a \sqrt{HP \cdot PI}} \dots \dots \dots (8)$$

*) Dat deze betrekking ook dan nog waar is, als de oppervlakte een willekeurigen geometrischen vorm heeft, vindt men gansch algemeen bewezen in W. Thomson u. P. G. Tait. Handbuch der Theoretischen Physik. Erst^r. Bd. Zw. Th. § 513—515.

**) § 516 van hetzelfde werk.



Zijn nu h , p en i respectievelijk de beeldpunten van H , P en I , en dus boog hi , beeld van HI , de doorsnede van het electrisch beeld o , welks verlengde oppervlak door het middelpunt C gaat, met het vlak door HI en C , dan is

$$CH = \frac{a^2}{Ch}, \quad CP = \frac{a^2}{Cp},$$

waaruit volgt $CH : CP = Cp : Ch$ of $\frac{CH}{Cp} = \frac{CP}{Ch}$; en derhalve driehoek CHI gelijkvormig met driehoek Chp , weshalve

$$HP = hp \sqrt{\frac{CH \cdot CP}{Cp \cdot Ch}} = hp \cdot \frac{a^2}{Cp \cdot Ch} \quad \dots \quad (9)$$

Uit de gelijkvormigheid der driehoeken CPI en Cpi eveneens volgende

$$PI = pi \frac{a^2}{Cp \cdot Ci},$$

zoo is

$$HP \cdot PI = \frac{hp \cdot pi}{Ch \cdot Ci} \cdot \frac{a^4}{Cp^2} \quad \dots \quad (10)$$

Voor de electrische digtheid in P verkrijgt men dus

$$e = - \frac{q \cdot Cp}{2\pi^2 a^3} \sqrt{\frac{Ch \cdot Ci}{hp \cdot pi}} \quad \dots \quad (11)$$

Het eerste lid van (10) constant zijnde voor alle koorden zooals HI , is zulks met het tweede lid ook het geval voor alle vlakken door Cp , die een op een door C en p willekeurig gebragt boloppervlak willekeurig getrokken doch onveranderlijken cirkel in punten zooals h en i snijden. Doch $\frac{a^4}{Cp^2}$ constant zijnde, is $\frac{hp \cdot pi}{Ch \cdot Ci}$ constant.

In geval C een pool is van den onveranderlijken cirkel is $Ch = Ci$ constant, dus ook $hp \cdot pi$ constant; dat is: het produkt van de beide koorden uit een willekeurig punt p van een gegeven boloppervlak naar de snijpunten van een op dat oppervlak getrokken vasten cirkel met een

vlak door p, en één der beide polen van dien cirkel heeft altijd dezelfde waarde, hoedanige stand dit vlak ook hebben moge.

Als verder D het midden is van III en m het midden van boog hi, dan is

$$\left. \begin{aligned} \text{HP.PI} &= \text{DH}^2 - \text{DP}^2, \\ \text{hp.pi} &= \text{mh}^2 - \text{mp}^2, \\ \text{Ch.Ci} &= \text{mC}^2 - \text{mh}^2; \end{aligned} \right\} \dots \dots (12)$$

waarvan de beide laatste vergelijkingen worden verkregen door toepassing van de goniometrische formule

$$\sin(f + g) \sin(f - g) = \sin^2 f - \sin^2 g$$

op de helften van de hoeken aan het middelpunt van den cirkel hCip, waarvan de koorden zijn: in het eerste geval hm en pm, in het tweede Cm en hm.

Door substitutie van (11) in (5) verkrijgt men, met inachtneming van (12) en opmerkende dat Cp = r', voor de elektrische digtheid in het beeldpunt p

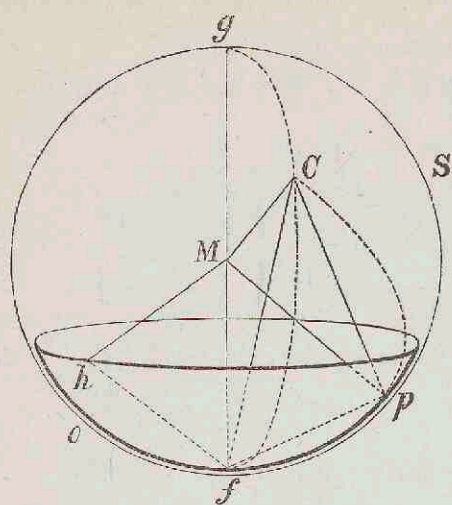
$$e' = \frac{q}{2\pi^2 r'^2} \sqrt{\frac{\text{mC}^2 - \text{mh}^2}{\text{mh}^2 - \text{mp}^2}} \dots \dots (13)$$

Gaat het vlak, door HI en C gebragt, tevens door het middelpunt f van het bolvormig segment o, dan is fh = b, die in de plaats komt van mh, de koorde uit het middelpunt van het segment naar den rand getrokken, en de laatste formule wordt

$$e' = \frac{q}{2\pi^2 r'^2} \sqrt{\frac{f\text{C}^2 - b^2}{b^2 - fp^2}} \dots \dots (14)$$

Daar hierin de straal van het boloppervlak, waarvan o een gedeelte is, niet voorkomt, zoo zal (14) ook doorgaan in het geval dat die straal is oneindig groot; dat is, voor de elektrische digtheid in een willekeurig punt p ter weërszijde van eene oneindig dunne cirkelvormige plaat, waarvan de straal is b, die afgeleid en onder den invloed is van eene hoeveelheid electriciteit gelijk aan -q, geconcentreerd in een in het vlak der plaat doch buiten den rand willekeurig gelegen punt C.

§ 6. De verdeeling der electriciteit over de oppervlakte van een bolvormig segment o, dat geïsoleerd is, en waaraan eene zekere lading is medegedeeld, zonder influentie, wordt tot het geval van influentie terug-



gebragt. Zij toch V' de in den evenwigtstoestand door o constante potentiaal der lading, dan is deze verdeeling dezelfde als die zoude plaats hebben, ingeval o ware afgeleid en onder den invloed van electriche massa's, zoodanig verbreed over een het segment omsluitend oppervlak S , dat zij daarbinnen eene constante potentiaal $-V'$ blijven voortbrengen. Is nu S een boloppervlak, concentrisch met dat waarvan o een gedeelte

is, terwijl de stralen van beide oneindig weinig verschillen, dan is de digtheid der inducerende lading gelijk aan $-\frac{V'}{2\pi d}$, de middellijn van S gelijk d zijnde. De digtheid van de lading, op de bolle zijde van o door de oneindig digtbij gelegene elementen van S geïnduceerd, is dan $+\frac{V'}{2\pi d}$, terwijl elk element van het overige gedeelte van S op de holle en bolle zijden ladingen van gelijke digtheid induceert, waarvoor (14) van toepassing is.

Zij dS zulk een element gelegen in het punt C , dan bevat dit eene hoeveelheid electriciteit gelijk aan $-\frac{V'dS}{2\pi d}$, die aan weërszijden van o eene lading induceert, waarvan de digtheid in het punt p volgens (14) is

$$\frac{V'dS}{4\pi^2 dr'^2} \sqrt{\frac{fC^2 - b^2}{b^2 - fp^2}}.$$

Als nu Mh een straal is naar den rand van o, makende den hoek $hMf = \epsilon$ met de as gf , terwijl hoek $fMp = \varphi$, hoek $fMC = \theta$, en de hoek tusschen de vlakken fMp en fMC gelijk aan ψ , dan volgt uit de gelijkbeenigheid der driehoeken en uit den bolvormigen driehoek Cfp

$$b^2 = fh^2 = \frac{d^2}{2}(1 - \cos \epsilon), \quad fp^2 = \frac{d^2}{2}(1 - \cos \varphi), \quad fC^2 = \frac{d^2}{2}(1 - \cos \theta),$$

$$r'^2 = Cp^2 = \frac{d^2}{2}(1 - \cos Cmp) = \frac{d^2}{2}(1 - \cos \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \varphi \cos \psi).$$

Door substitutie dezer waarden en van $dS = \frac{1}{4} d^2 \sin \theta d\theta d\psi$, en inte-

gratie, de totale electrische digtheid op de holle zijde van o in p q noemende, wordt

$$q = \frac{V'}{8\pi^2 d \sqrt{(\cos \varphi - \cos \varepsilon)}} \int_{\varepsilon}^{\pi} \sqrt{(\cos \varepsilon - \cos \theta)} \sin \theta d\theta \times \\ \times \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{1 - \cos \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \varphi \cos \psi}.$$

Nu is *) als $a > b$

$$\int \frac{d\psi}{a + b \cos \psi} = \frac{2}{\sqrt{(a^2 - b^2)}} \text{Bgtg} \left\{ \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \text{tg} \frac{1}{2} \psi \right\} + C;$$

dus

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{a + b \cos \psi} = \frac{4}{\sqrt{(a^2 - b^2)}} \left[\text{Bgtg} \left\{ \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \text{tg} \frac{1}{2} \psi \right\} \right]_0^{\pi} = \frac{2\pi}{\sqrt{(a^2 - b^2)}},$$

$$\text{en} \quad \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{1 - \cos \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \varphi \cos \psi} = \frac{2\pi}{\cos \varphi - \cos \theta};$$

$$\text{zoodat} \quad q = \frac{V'}{4\pi^2 d \sqrt{(\cos \varphi - \cos \varepsilon)}} \int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{\sqrt{(\cos \varepsilon - \cos \theta)} \sin \theta d\theta}{\cos \varphi - \cos \theta}.$$

Stelt men nu nog $\sqrt{(\cos \varepsilon - \cos \theta)} = x$, en opmerkende dat in het algemeen

$$\int \frac{x^2 dx}{c + x^2} = x - c \int \frac{dx}{c + x^2} = x - \sqrt{c} \text{Bgtg} \sqrt{\frac{x}{c}} + C,$$

dan wordt

$$\int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{\sqrt{(\cos \varepsilon - \cos \theta)} \sin \theta d\theta}{\cos \varphi - \cos \theta} = 2 \int_0^{\sqrt{1 + \cos \varepsilon}} \frac{x^2 dx}{\cos \varphi - \cos \varepsilon + x^2} = \\ = 2 \left\{ \sqrt{(1 + \cos \varepsilon)} - \sqrt{(\cos \varphi - \cos \varepsilon)} \text{Bgtg} \sqrt{\frac{1 + \cos \varepsilon}{\cos \varphi - \cos \varepsilon}} \right\},$$

$$\text{en} \quad q = \frac{V'}{2\pi^2 d} \left\{ \sqrt{\frac{1 + \cos \varepsilon}{\cos \varphi - \cos \varepsilon}} - \text{Bgtg} \sqrt{\frac{1 + \cos \varepsilon}{\cos \varphi - \cos \varepsilon}} \right\}; \quad (15)$$

*) M Sturm. Cours d'Anal. Trentme L'eq. Exerc. 1.

of ook met invoering van $fp = t$, d en b

$$q = \frac{V'}{2\pi^2 d} \left\{ \sqrt{\frac{d^2 - b^2}{b^2 - t^2}} - Bg \lg \sqrt{\frac{d^2 - b^2}{b^2 - t^2}} \right\}; \dots (16)$$

waarbij voor de elektrische digtheid op de bolle zijde van o nog gevoegd moet worden

$$\frac{V'}{2\pi d} \dots \dots \dots (17)$$

In geval $d = \infty$ verdwijnt (17) en gaat (16) over in

$$q = \frac{V'}{2\pi^2 \sqrt{b^2 - t^2}}, \text{ zijnde de elektrische digtheid aan weërszijde van}$$

eene geïsoleerde, oneindig dunne cirkelvormige plaat, waarvan de straal is b , op den afstand t van het middelpunt; hetgeen met (2) en (4) volmaakt overeenstemt.

Thomson heeft uit (16) en (17) de getallenwaarden berekend van de elektrische digtheid in het geval van de vlakke schijf en het bolvormige segment, waarvan de doorsnede met een vlak door de as is een boog van 10° , 20° , 90° , 180° , 270° en 340° , en wel voor het middelpunt en de 5 punten, die den boog van het middelpunt naar den rand in zes gelijke stukken verdeelen, en in elk geval de constante coëfficiënt zoodanig gekozen, dat het gemiddelde der digtheden op de holle en bolle zijden in het middelpunt gelijk aan de eenheid zij. Uit die getallen blijkt, dat reeds bij eene zeer geringe kromming (10° en 20°) de hoeveelheid electriciteit op de bolle zijde merkbaar grooter is dan die op de holle zijde, alhoewel de gemiddelde digtheid in eenig punt uiterst weinig verschilt van de digtheid in het overeenkomstige punt van de vlakke schijf; terwijl, naar mate het verschil tusschen den boog en den geheelen omtrek kleiner wordt (270° en 340°), het streven der electriciteit om zich alleen op de buiten-oppervlakte te bevinden meer en meer toeneemt; zooals in overeenstemming is met de proeven van Faraday omtrent geïsoleerde holle geleiders, waarbij aangetoond wordt, dat op de binnenvlakte bijna geene electriciteit aanwezig is, als ook met de uitkomsten der methoden van Green en Beer ter bepaling der electriciteits-verdeeling op eene geïsoleerde, zeer dunne bolvormige schaal, waarin zich eene betrekkelijk kleine cirkelvormige opening bevindt.

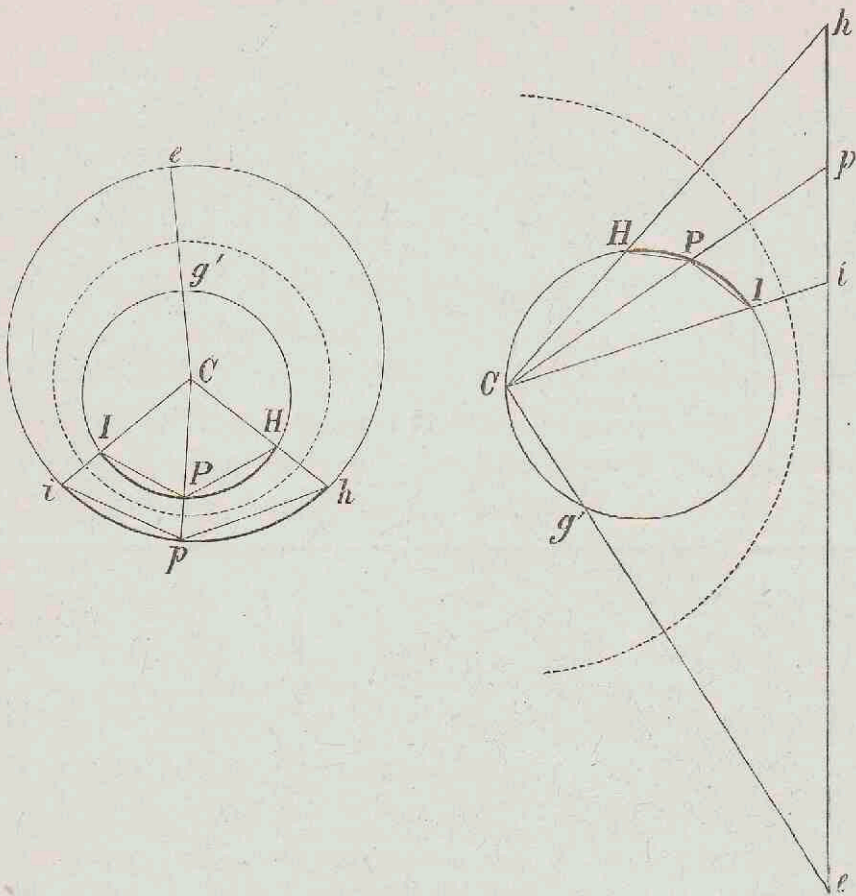
Wij laten de door Thomson berekende waarden van de elektrische digtheid hier volgen.

Vlakke Schijf.	Gebogen Schijf.		Gebogen Schijf		Schaal.	
	Boog 10°.		Boog 20°.		Boog 90°.	
	holle zijde	bolle zijde	holle zijde	bolle zijde	holle zijde	bolle zijde
	0,9136	1,0685	0,8636	1,1364	0,4459	1,5541
	0,9457	1,0826	0,8776	1,1504	0,4469	1,5551
	0,9920	1,1289	0,9236	1,1964	0,4828	1,5910
	1,0858	1,2227	1,0165	1,2893	0,5566	1,6648
	1,2722	1,4091	1,2884	1,5611	0,7065	1,8147
	1,7386	1,8755	1,6652	1,9379	1,0933	2,2015
	Gemidd. digth.		Gemidd. digth.		Gemidd. digth.	
1,0000	1,0000		1,0000		1,0000	
1,0142	1,0141		1,0140		1,0010	
1,0607	1,0605		1,0600		1,0369	
1,1547	1,1542		1,1529		1,1106	
1,3416	1,3407		1,4247		1,2606	
1,8091	1,8071		1,8016		1,6474	

Schaal.		Schaal.		Schaal.	
Boog 180°.		Boog 270°.		Boog 340°.	
holle zijde	bolle zijde	holle zijde	bolle zijde	holle zijde	bolle zijde
0,1202	1,8798	0,0135	1,9865	0,0001	1,9999
0,1266	1,8862	0,0144	1,9874	0,0002	1,9999
0,1418	1,9014	0,0176	1,9906	0,0002	2,0000
0,1779	1,9375	0,0253	1,9933	0,0004	2,0001
0,2570	2,0166	0,0451	2,0181	0,0009	2,0006
0,4959	2,2555	0,1195	2,0925	0,0042	2,0040
Gemidd. digth.		Gemidd. digth.		Gemidd. digth.	
1,0000		1,0000		1,0000	
1,0064		1,0009		1,0000	
1,0216		1,0041		1,0001	
1,0577		1,0118		1,0002	
1,1366		1,0316		1,0007	
1,3757		1,1060		1,0041	

§ 7. De verdeling der electriciteit over de oppervlakte van een bolvormig segment of cirkelvormige plaat σ , die afgeleid en alleen onder den invloed is van eene hoeveelheid electriciteit — q , geconcentreerd in een willekeurig punt C , wordt nu gevonden uit de verdeling over het electrisch beeld O ten opzichte van een boloppervlak, uit C als middelpunt met een willekeurigen straal a beschreven. De door O

constante potentiaal V van O is dan gelijk aan $-\frac{q}{a}$, zoodat volgens (16) en (17) de elektrische digtheid van O , en daaruit de digtheid ρ' van o door (5) bepaald wordt.



Beschouwen wij daartoe nevensgaande figuren, waarvan de eerste het geval voorstelt dat o is een bolvormig segment, met de holle zijde naar C gekeerd; terwijl in het tweede geval o is eene cirkelvormige plaat. De beide polen van den rand van O zijn g' en f' , en die met betrekking tot o , even als vroeger, g en f ; het vlak der figuur is het vlak door C , g' en een willekeurig punt p van o ; en hp is het beeld van HP in g' . Noemt men nu van O de middellijn d' , de koorde uit f' naar den rand b' , en $f'Pt'$, dan is

$$d'^2 - b'^2 = g'H^2 = g'I^2 = g'H \cdot g'I.$$

en

$$b'^2 - t'^2 = HP \cdot Pl. *)$$

*) Deze vergelijking is afgeleid uit de algemeene met de 2^e van (12)

De elektrische digtheid op de holle zijde van O in het punt P wordt dan

$$e = -\frac{q}{2\pi^2 ad'} \left\{ \sqrt{\frac{g'H.g'I}{HP.PI}} - Bg'tg \sqrt{\frac{g'H.g'I}{HP.PI}} \right\} \quad (18)$$

Ook nu is $g'H = g'I = ch \frac{a^2}{Ce.Ch} = ei \frac{a^2}{Ce.Ci} \quad (19)$

$$HP = hp \frac{a^2}{Cp.Ch} \text{ en } PI = pi \frac{a^2}{Cp.Ci} \quad (20)$$

Laat nog k de afstand zijn van C tot o, waarvan de middellijn d negatief is, als o de bolle zijde naar C gekeerd heeft, dan volgt

$$d' = \frac{a^2}{k} + \frac{a^2}{d-k} = \frac{a^2 d}{k(d-k)} \quad (21)$$

Na substitutie dezer waarden in (18) en (5), en voor r' Cp schrijvende, verkrijgt men voor de elektrische digtheid in het punt p op de van C afgekeerde zijde van o (de holle of bolle zijde, als o bolvormig is, naarmate C buiten of binnen het boloppervlak ligt, waarvan o een gedeelte is)

$$e' = \frac{qk(d-k)}{2\pi^2 d.Cp^3} \left\{ \frac{Cp}{Ce} \sqrt{\frac{eh.ei}{hp.pi}} - Bg'tg \left[\frac{Cp}{Ce} \sqrt{\frac{eh.ei}{hp.pi}} \right] \right\}; \quad (22)$$

waarbij voor de elektrische digtheid op de naar C toegekeerde zijde nog gevoegd moet worden

$$\frac{qk(d-k)}{2\pi d.Cp^3} \quad (23)$$

Het punt e kan men, onafhankelijk van O, door constructie uit de gegevens van C en o bepalen. Want uit (19) volgt

$$eh : ei = Ch : Ci \quad (24)$$

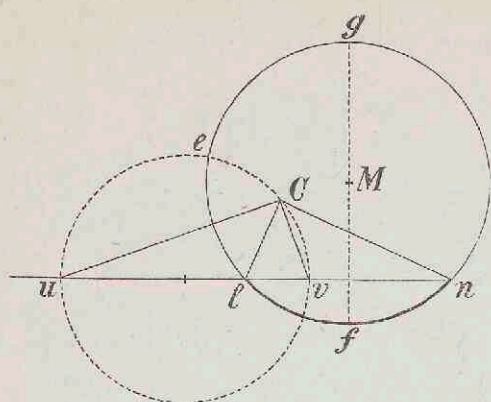
waarin h en i de snijpunten zijn van den rand van o met een willekeurig vlak door Cg'. Gaat dit vlak nu door het middelpunt M van één der beide segmenten, o, dan gaat het ook door het middelpunt van het andere, en tevens door de beide assen f'g' en fg, zoodat, als l en n de snijpunten zijn van den rand van o met genoemd vlak, in eene middellijn is, en

$$el : en = Cl : Cn.$$

overeenkomstige

$$m'H^2 - m'P^2 = HP.PI,$$

door H en I daarin te beschouwen als de snijpunten van den rand van O met het vlak door C, P en f'; maar omdat het tweede lid dezelfde waarde heeft in het vlak door C, P en g', zoo gaat bovenstaande vergelijking ook door voor dit laatste vlak, het vlak der figuur.



Alzoo snijdt de lijn Cv, die den hoek ICn midden door deelt, ln in een punt v, waardoor ook de deellijn van hoek len gaat; maar alle punten, die deze eigenschap hebben, liggen in een cirkelomtrek, waarvan de middellijn uv gevonden wordt door in C de loodlijn op Cv te trekken, snijdende het verlengde van ln in u; e is dus het ontmoetingspunt van dezen

cirkel met het verlengde oppervlak van o.

Brengt men nu een vlak door Cep, dat den rand van o in h en i snijdt, en meet eh, ei, hp, pi, Cp en Ce, dan wordt de elektrische digtheid in het punt p verder door berekening uit (22) en (23) gevonden. Daar evenwel de verhouding $\frac{eh \cdot ei}{hp \cdot pi}$ niet verandert, als h en i gelegen zijn in een willekeurig vlak door pe, zoo mag men in plaats van Cep nemen het vlak pef. Alsdan is volgens de 3^e en 2^e van (12)

$$eh \cdot ei = fe^2 - fh^2 = fe^2 - b^2;$$

$$hp \cdot pi = fh^2 - fp^2 = b^2 - fp^2.$$

Hierdoor verandert (22) voor de digtheid op de van C afgekeerde zijde (tevens het accent weglatende) in

$$e = \frac{qk(d-k)}{2\pi^2 d \cdot Cp^3} \left\{ \frac{Cp}{Ce} \sqrt{\frac{fe^2 - b^2}{b^2 - fp^2}} - \text{Bgtg} \left[\frac{Cp}{Ce} \sqrt{\frac{fe^2 - b^2}{b^2 - fp^2}} \right] \right\}. \quad (25)$$

Plaatst men de influencerende massa — q in het middelpunt M, dan is $Cp = Ce = k = \frac{1}{2}d$, $ef = d$, $\frac{2q}{d} = V$, en (25) gaat over in (16); echter met dit onderscheid, dat van twee bolvormige segmenten van gelijke afmetingen, waarvan het eene is geïsoleerd, buiten influentie, en geladen tot eene potentiaal $\frac{2q}{d}$, het andere afgeleid en onder influentie van eene elektrische massa — q in het middelpunt, de lading op de holle zijde van een van beide dezelfde is als die op de bolle zijde van het andere.

Als o is eene cirkelvormige plaat, $d = \infty$ en

*) J. Clerk Maxwell. A treatise on Electricity and Magnetism Oxford 1873. Vol. I. § 176—181.

$$e = \frac{qk}{2\pi^2 \cdot Cp^3} \left\{ \frac{Cp}{Ce} \sqrt{\frac{fe^2 - b^2}{b^2 - fp^2}} - \text{Bgtg} \left[\frac{Cp}{Ce} \sqrt{\frac{fe^2 - b^2}{b^2 - fp^2}} \right] \right\}; \quad (26)$$

waarbij voor de elektrische digtheid op de naar C toegekeerde zijde nog gevoegd moet worden

$$\frac{qk}{2\pi \cdot Cp^3} \dots \dots \dots (27)$$

Daar in dit geval e met u zamenvalt, is

$$fe = \frac{1}{2} \ln \frac{Cn + Cl}{Cn - Cl} = b \frac{Cn + Cl}{Cn - Cl}, \dots \dots (28)$$

waarin b de straal van de plaat. Cn en Cl berekent men uit de gegevens voor den betrekkelijken stand van C en o, en daaruit en uit de aldus gevondene waarde van fe, Ce.

Ligt het punt C in het vlak van de plaat, doch buiten den rand, dan is $k=0$, $Ce=0$ en $\lim \frac{k}{Ce} = 1$; zoodat (27) verdwijnt, en (26) verandert in (14) voor de elektrische digtheid ter weërszijde van de plaat.

Indien C in de as ligt, $fe = \infty$, $Ce = \infty$ en $\frac{fe}{Ce} = 1$, en men verkrijgt voor de digtheid op de van C afgekeerde zijde van o

$$e = \frac{qk}{2\pi^2 \cdot Cp^3} \left\{ \sqrt{\frac{Cp}{(b^2 - fp^2)}} - \text{Bgtg} \sqrt{\frac{Cp}{(b^2 - fp^2)}} \right\}, \dots (29)$$

en voor de digtheid op de andere zijde

$$e + \frac{qk}{2\pi \cdot Cp^3} \dots \dots \dots (30)$$

In dit geval is de digtheid in het middelpunt der plaat, als $q = 2\pi^2$, op de van C afgekeerde zijde

$$e = \frac{1}{k^2} \left(\frac{k}{b} - \text{Bgtg} \frac{k}{b} \right), \left. \begin{array}{l} \dots \dots \dots (31) \\ e + \frac{\pi}{k^2}; \end{array} \right\}$$

waaruit Thomson de volgende waarden berekend heeft, en daarbij den straal van de plaat als eenheid aangenomen.

Afstand van het influen- cerende punt k.	Geïnduceerde electriche digtheid in het midden der plaat.	
	Op de afgekeerde zijde $\rho = \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2} \operatorname{Bgcot} \frac{1}{k}$	Op de toegekeerde zijde $\rho + \frac{\pi}{k^2}$
0,2	0,1651	78,7049
0,4	0,1218	19,7567
0,6	0,1655	8,8921
0,8	0,1957	5,1044
1,0	0,2146	3,3562
1,2	0,2250	2,4067
1,4	0,2293	1,8322
1,6	0,2296	1,4568
1,8	0,2273	1,1969
2,0	0,2232	1,0086
3,0	0,1946	0,5437

C. Methode van Lipschitz.

§ 8. Deze bestaat uit twee afzonderlijke deelen, die met elkaar in naauw verband staan, namelijk

a. De electriche verdeling over eene afgeleide cirkelplaat.

b. Die over een afgeleid bolvormig segment, waarbij voor de gewone electriche verdeling het influencerende massapunt wordt geplaatst in het middelpunt des bols.

a. De electriche verdeling over eene afgeleide cirkelplaat. *)

§ 9. Zij gegeven een willekeurig gesloten oppervlak S, dat afgeleid is, en een vast punt C daarbuiten, waarin de negatieve electriciteits eenheid is geconcentreerd, dan zal, als men den afstand van C tot eenig punt P, op S of daar binnen gelegen, r noemt, de potentiaal der op S geïnduceerde lading q in P $\frac{1}{r}$ zijn.

Is n de naar buiten getrokken normale van het oppervlak, dan heeft men

*) R. Lipschitz. Beiträge zur Theorie der Vertheilung der statischen und der dynamischen Electricität in leitenden Körpern. (Crelle's Journal Bd. 58, S 19—43).

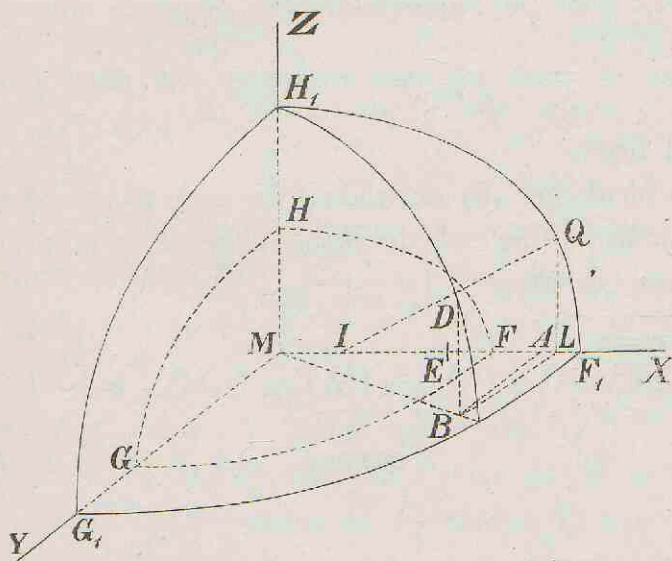
$$\frac{dV_u}{dn} - \frac{d}{dn} \frac{1}{r} = -4\pi q, \dots \dots \dots (1)$$

waarin V_u de uitwendige potentiaal, die aan de oppervlakte overgaat in $\frac{1}{r}$.

Men neme voor het grensvlak S van den geleider eene afgeplatte omwentelings-ellipsoïde, waarvan het middelpunt M de oorsprong der regthoekige coördinaten, en de omwentelings-as de z -as zijn. De lengte van de as in den aequator bedraagt $2a$, die van de omwentelings-as $2c$, de excentriciteit e , zoodat $a^2 - c^2$ of e^2 positief, en e eene positieve en bestaانبare grootheid zijn zal.

Laat x_1, y_1, z_1 de coördinaten zijn van een punt D ; x_2, y_2, z_2 die van een punt D' . In plaats van deze voert men drie nieuwe in, namelijk: de halve as in den aequator der ellipsoïde, gaande door D en confociaal met de gegevene, en twee hoeken, die de plaats van het punt daarop bepalen, zoodanig dat

$$\left. \begin{aligned} MA = x_1 &= a_1 \sin \theta_1 \cos \psi_1, \\ AB = y_1 &= a_1 \sin \theta_1 \sin \psi_1, \\ BD = z_1 &= \sqrt{a_1^2 - e^2} \cos \theta_1, \\ &\text{en} \\ x_2 &= a_2 \sin \theta_2 \cos \psi_2, \\ y_2 &= a_2 \sin \theta_2 \sin \psi_2, \\ z_2 &= \sqrt{a_2^2 - e^2} \cos \theta_2. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$



Uit de figuur blijkt, dat ψ_1 de hoek is tusschen het XZ vlak en het vlak door D en MZ ; en θ_1 de hoek IQL , die gevonden wordt door het vlak DMZ te laten wintelen om MZ , totdat het zamenvalt met het XZ vlak, en uit de nieuwe plaats Q van het punt D in dat vlak als middelpunt met $QI = MH_1 = c_1$

als straal een cirkelboogje te beschrijven, dat MX in I snijdt.

De hoek θ doorloopt alle waarden van 0 tot π , de hoek ψ van 0 tot 2π .
Is d de afstand der punten D en D', dan vindt men

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{\sqrt{\left\{ \begin{aligned} &a_1^2 + a_2^2 - e^2 \cos^2 \theta_1 - e^2 \cos^2 \theta_2 - 2\sqrt{(a_1^2 - e^2)}\sqrt{(a_2^2 - e^2)} \\ &\cos \theta_1 \cos \theta_2 - 2a_1 a_2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos(\psi_1 - \psi_2) \end{aligned} \right\}}} \quad (3)$$

Stelt men $\frac{a_1}{e} = \sigma_1$, $\sigma_1^2 + \mu_1^2 = 1$ en $\cos \theta_1 = \mu_1$,

dan gaan de vergelijkingen (2) over in

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= e\sqrt{(1 - \sigma_1^2)}\sqrt{(1 - \mu_1^2)} \cos \psi_1, \\ y_1 &= e\sqrt{(1 - \sigma_1^2)}\sqrt{(1 - \mu_1^2)} \sin \psi_1, \\ z_1 &= e \frac{\sigma_1}{i} \mu_1; \end{aligned} \right\} \dots \dots \quad (4)$$

en zoo ook voor het punt D'. Hierin zijn de regthoekige coördinaten uitgedrukt in de elliptische σ , μ en ψ .

En (3) wordt

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{e\sqrt{\left\{ \begin{aligned} &2 - \sigma_1^2 - \mu_1^2 - \sigma_2^2 - \mu_2^2 + 2\sigma_1 \sigma_2 \mu_1 \mu_2 - \\ &(-2\sqrt{(1 - \sigma_1^2)}\sqrt{(1 - \sigma_2^2)}\sqrt{(1 - \mu_1^2)}\sqrt{(1 - \mu_2^2)} \cos(\psi_1 - \psi_2)) \end{aligned} \right\}}} = \frac{1}{e\sqrt{K}} \dots \dots \quad (5)$$

Omdat de ellipsoïde is afgeplat zal σ eene positieve grootheid maal i zijn, die alle waarden van 0 tot ∞ kan verkrijgen, en $\sqrt{(1 - \sigma^2)}$ bestaanbaar en positief. Aan de oppervlakte der gegevene ellipsoïde $\sigma = \sigma_0 = c \frac{i}{e}$, zoodat $\sigma_0 = 0$ bij den overgang van deze in een cirkel, die e tot straal heeft.

Neumann heeft de uitdrukking (5) ontwikkeld in eene reeks volgens de kogelfuncties van Laplace, (die ook doorgaat in geval de ellipsoïde is verlengd) en daarvoor gevonden

$$\frac{1}{e\sqrt{K}} = \frac{i}{e} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \sum_{m=0}^m b_{n,m}^2 Q_{n,m}(\sigma_1) P_{n,m}(\sigma_2) P_{n,m}(\mu_1) P_{n,m}(\mu_2) \times \\ \times \cos m(\psi_1 - \psi_2), \quad *) \quad \dots \quad (6)$$

*) Entwicklung der in elliptischen Coördinaten ausgedrückten reciproken Entfernung zweier Punkte u. s. w. von Herrn I. Neumann. (Crelle's Journal Bd. 37. S. 35).

waarin n en m alle positieve geheele getallen van 0 af, $P_{n,m}(\sigma)$ en $Q_{n,m}(\sigma)$ de particuliere integralen der differentiaalvergelijking

$$\frac{d(1 - \sigma^2) \frac{dI}{d\sigma}}{d\sigma} + \left(n(n+1) - \frac{m^2}{1 - \sigma^2} \right) I = 0, \dots (7)$$

en wel

$$P_{n,m}(\sigma) = (1 - \sigma^2)^{\frac{1}{2}m} \frac{d^m P_{n,0}(\sigma)}{d\sigma^m},$$

$$P_{n,0}(\sigma) = \frac{1.3 \dots 2n-1}{H(n)} \left\{ \sigma^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} \sigma^{n-2} + \right. \quad \left. + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4.(2n-1)(2n-3)} \sigma^{n-4} \dots \right\} \quad (8)$$

$$Q_{n,m}(\sigma) = (1 - \sigma^2)^{\frac{1}{2}m} \frac{d^m Q_{n,0}(\sigma)}{d\sigma^m},$$

$$Q_{n,0}(\sigma) = \int_{-1}^{+1} \frac{P_{n,0}(\varepsilon)}{\sigma - \varepsilon} d\varepsilon = F - P_{n,0}(\sigma) \log \frac{\sigma - 1}{\sigma + 1}; \quad \dots (9)$$

en evenzoo $P_{n,m}(\mu)$ door verwisseling van σ met μ . F is eene gheele functie van σ van den $n - 1$ sten graad, en gelijk aan de som van die termen in de ontwikkeling van $P_{n,0}(\sigma) \log \frac{\sigma - 1}{\sigma + 1}$ volgens de magten van $\frac{1}{\sigma}$, die niet verdwijnen als $\sigma = \infty$; terwijl $Q_{n,m}(\infty) = 0$. Voor de afgeplatte ellipsoïde, $\sigma = \pi$ zijnde, komt 2i Bgtg $\frac{1}{p}$ *) in de plaats van $\log \frac{\sigma - 1}{\sigma + 1}$, waarbij de boog alle waarden kan hebben tusschen $\frac{\pi}{2}$ en 0.

Eindelijk is $b_{n,m} = \frac{H(n - m)}{H(n + m)}$, $b_{n,0} = \frac{1}{2}$ en tevens voorondersteld

$$\frac{\sigma_1}{i} > \frac{\sigma_2}{i}.$$

Laat nu voor het geheel willekeurig punt D het vaste punt C genomen worden, waarvan dan σ_1, μ_1, ψ_1 de coördinaten zijn, σ, μ, ψ die van het punt waarin de potential V_u gezocht wordt. Daar V_u op oneindigen afstand, d.i. voor $\sigma = \infty$, verdwijnen moet, en als $\sigma = \sigma_0$

*) R. Lobatto, Lessen over de Hoogere Algebra 1862 Blz. 300 (16).

gelijk is aan het omgekeerde van den afstand der punten $(\sigma_1, \mu_1, \psi_1)$ en (σ, μ, ψ) , zoo zal

$$V_n = \frac{i}{e} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \sum_{m=0}^n b_{n,m}^2 \frac{P_{n,m}(\sigma_0)}{Q_{n,m}(\sigma_0)} Q_{n,m}(\sigma) Q_{n,m}(\sigma_1) \times \\ \times P_{n,m}(\mu) P_{n,m}(\mu_1) \cos m(\psi - \psi_1). \quad (10)$$

Opmerkende dat het element van de normaal

$$dn = \frac{e}{i} \frac{\sqrt{(\mu^2 - \sigma^2)}}{\sqrt{(1 - \sigma^2)}} d\sigma, \quad (11)$$

en dat nog

$$\left(P_{n,m}(\sigma) \frac{dQ_{n,m}(\sigma)}{d\sigma} - Q_{n,m}(\sigma) \frac{dP_{n,m}(\sigma)}{d\sigma} \right) (1 - \sigma^2) = \frac{2}{b_{n,m}} \quad (12)$$

zoo verkrijgt men uit (1) met behulp van (6), (10), (11) en (12) voor de elektrische digtheid ρ

$$\rho = \frac{1}{2\pi e^2 \sqrt{(1 - \sigma_0^2)} \sqrt{(\mu^2 - \sigma_0^2)}} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \sum_{m=0}^n b_{n,m} \frac{Q_{n,m}(\sigma_1)}{Q_{n,m}(\sigma_0)} \times \\ \times P_{n,m}(\mu) P_{n,m}(\mu_1) \cos m(\psi - \psi_1) \quad (13)$$

in het punt der oppervlakte, waarvan de beide andere coördinaten zijn μ en ψ .

§ 10. Wanneer de gegevene ellipsoïde overgaat in het cirkelvlak, waarvan e de straal is, vallen de beide punten (σ_0, μ, ψ) en $(\sigma_0, -\mu, \psi)$ in één punt van dat vlak zamen, en behoeft men μ in de alsdan komende uitdrukking voor de elektrische digtheid, die uit de som van de beide waarden van het tweede lid van (13), na daarin $\sigma_0 = 0$ gesteld te hebben, bestaan zal, slechts te laten veranderen van 0 tot +1 voor de verschillende punten van het cirkelvlak.

Wij laten hier de door Lipschitz opgegevene waarden der functiën $P_{n,m}(\sigma)$ en $Q_{n,m}(\sigma)$ en harer afgeleiden voor $\sigma = 0$ volgen.

	(n - m) even	(n - m) oneven.
$P_{n,m}(0)$	$i^{n-m} \frac{1.3...(n+m-1)}{2.4...(n-m)}$	0
$P'_{n,m}(0)$	0	$i^{n-m-1} \frac{1.3...(n+m)}{2.4...(n-m-1)}$
$Q_{n,m}(0)$	$-\pi i P_{n,m}(0)$	$-\frac{2}{b_{n,m}} \frac{1}{P'_{n,m}(0)}$
$Q'_{n,m}(0)$	$\frac{2}{b_{n,m}} \frac{1}{P_{n,m}(0)}$	$-\pi i P'_{n,m}(0)$

$Q_{n,m}(0)$ vindt men in de aangehaalde verhandeling van Neumann, na eenige aldaar voorkomende drukfouten te hebben verbeterd; terwijl $P'_{n,m}(0)$ en $Q'_{n,m}(0)$ in de eene kolom gelijk zijn aan $P_{n,m}(0)$ en $Q_{n,m}(0)$ in de andere, als men in deze laatste m met de eenheid vermeerderd, volgens de ook bij Neumann gevonden wordende betrekkingen

$$\left(\frac{d P_{n,m}(\sigma)}{d\sigma} \right)_{\sigma=0} = \left(P_{n,m+1}(\sigma) \right)_{\sigma=0}$$

en

$$\left(\frac{d Q_{n,m}(\sigma)}{d\sigma} \right)_{\sigma=0} = \left(Q_{n,m+1}(\sigma) \right)_{\sigma=0}$$

Hieruit blijkt dat uit (10) die termen verdwijnen waarvoor $n - m$ oneven is, en dat voor de overblijvende termen

$$\frac{P_{n,m}(0)}{Q_{n,m}(0)} = \frac{i}{\pi}$$

Duidt men daarom de tweede sommatie aan door \sum' , zoo verkrijgt men voor de potentiaal van de lading over het cirkelvlak

$$V_u = - \frac{1}{\pi \epsilon} \sum_0^{\infty} (2n+1) \sum_0^n b_{n,m}^2 Q_{n,m}(\sigma) Q_{n,m}(\sigma_1) P_{n,m}(\mu) P_{n,m}(\mu_1) \times \\ \times \cos m(\psi - \psi_1). \quad (14)$$

De totale elektrische digtheid ρ wordt bepaald door het verschil der differentiaal quotienten van V_u ten opzichte van de normaal ter weerszijde van het vlak, en daar deze gelijk doch tegengesteld van teeken zijn, is

$$\rho = - \frac{i}{2\pi^2 \epsilon^2 \mu} \sum_0^{\infty} (2n+1) \sum_0^n b_{n,m}^2 Q'_{n,m}(0) Q_{n,m}(\sigma_1) P_{n,m}(\mu) P_{n,m}(\mu_1) \times \\ \times \cos m(\psi - \psi_1). \quad (15)$$

Dat deze uitdrukking met (13) overeenstemt, als men volgens de laatste de som neemt der elektrische digtheden in de punten (σ, μ, ψ) en $(\sigma_0 - \mu, \psi)$ en dan $\sigma_0 = 0$ stelt, volgt uit de eigenschap der grootheden $P_{n,m}(\mu)$ dat voor $(n - m)$ even $P_{n,m}(-\mu) = P_{n,m}(\mu)$ en voor $(n - m)$ oneven $P_{n,m}(-\mu) = -P_{n,m}(\mu)$, zoodat in genoemde som alleen die termen overblijven, waarvoor $n - m$ even is, d. i. waarvoor

$$\frac{1}{Q_{n,m}(0)} = - \frac{b_{n,m}}{2\pi i} Q'_{n,m}(0).$$

Past men de ontwikkeling volgens (6) voor het omgekeerde van den afstand der punten (σ, μ, ψ) en $(\sigma_1, \mu_1, \psi_1)$, waarvan de algemeene term, behalve door een voor de gansche reeks constanten factor, van den algemeenen term der dubbelreeks (14) alleen daarin verschilt, dat in den laatsten $Q_{n,m}(\sigma)$ de plaats van $P_{n,m}(\sigma)$ vervangen heeft, ook

toe op den omgekeerden afstand der punten $(\sigma, -\mu, \psi)$ en $(\sigma_1, \mu_1, \psi_1)$, en neemt de som van beide uitdrukkingen, daarbij de bovengenoemde eigenschap der $P_{n,m}(\mu)$ in het oog houdende, dan komt er

$$\frac{1}{\sqrt{K(\mu)}} + \frac{1}{\sqrt{K(-\mu)}} = 2i \sum_0^{\infty} (2n+1) \sum_0^n b_{n,m}^2 P_{n,m}(\sigma) Q_{n,m}(\sigma_1) \times \\ \times P_{n,m}(\mu) P_{n,m}(\mu_1) \cos m(\psi - \psi_1). \quad (16)$$

Voor het bijzonder geval nu, dat het vast punt C ligt in de as van het cirkelvlak $\mu_1 = 1$, $P_{n,m}(\mu_1) = 0$ en $P_{n,0}(\mu_1) = 1$, waardoor (14), nadat nog voor $Q_{n,0}(\sigma)$ de integraal uit (9) in de plaats is gesteld, overgaat in de enkelvoudige reeks

$$V_n = -\frac{1}{2\pi e} \sum_0^{\infty} (2n+1) \int_{-1}^{+1} \frac{P_{n,0}(\varepsilon)}{\sigma - \varepsilon} d\varepsilon Q_{n,0}(\sigma_1) P_{n,0}(\mu), \quad (17)$$

en (16), na verwisseling van σ met de tusschen $+1$ en -1 gelegene bestaansbare grootheid ε , zoo als geschieden mag, verandert in

$$\frac{1}{\sqrt{K(\varepsilon, \mu, \sigma_1, 1)}} + \frac{1}{\sqrt{K(\varepsilon, -\mu, \sigma_1, 1)}} = i \sum_0^{\infty} (2n+1) P_{n,0}(\varepsilon) Q_{n,0}(\sigma_1) P_{n,0}(\mu), \quad (18)$$

waarin n , even als in de voorgaande vergelijking, alleen een even positief getal kan zijn.

Door omwisseling van de orde der sommatie en integratie wordt dan

$$V_n = -\frac{1}{2\pi e} \int_{-1}^{+1} \left(\sum_0^{\infty} (2n+1) P_{n,0}(\varepsilon) Q_{n,0}(\sigma_1) P_{n,0}(\mu) \right) \frac{d\varepsilon}{\sigma - \varepsilon} = \\ = \frac{i}{2\pi e} \int_{-1}^{+1} \left(\frac{1}{\sqrt{K(\varepsilon, \mu, \sigma_1, 1)}} + \frac{1}{\sqrt{K(\varepsilon, -\mu, \sigma_1, 1)}} \right) \frac{d\varepsilon}{\sigma - \varepsilon}, \quad (19)$$

waarbij $K(\sigma, \mu, \sigma_1, 1) = 1 - \sigma^2 - \sigma_1^2 - \mu^2 + 2\sigma\sigma_1\mu$.

Of, als men de integratie uitvoert

$$V_n = \frac{1}{\pi e} \left\{ \frac{1}{\sqrt{K(\sigma, \mu, \sigma_1, 1)}} \operatorname{bg.tg} \frac{\sqrt{K(\sigma, \mu, \sigma_1, 1)}}{-\sigma\sigma_1 + \mu} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{K(\sigma, -\mu, \sigma_1, 1)}} \operatorname{bg.tg} \frac{\sqrt{K(\sigma, -\mu, \sigma_1, 1)}}{-\sigma\sigma_1 - \mu} \right\}, \quad (20)$$

waarin de bogen tusschen 0 en π moeten worden genomen.

In dit geval is (14) alzoo gesommeerd kunnen worden.

Lipschitz toont verder aan, dat wat ook in het algemeen de waarde

van m zij, er altijd een factor $G_m(\varepsilon)$ bestaat, waardoor de grootheden $Q_{n,m}(\sigma)$ uit de $P_{n,m}(\varepsilon)$ door integratie worden verkregen; hij komt tot de betrekking

$$Q_{n,m}(\sigma) = \frac{1}{(1 - \sigma^2)^{\frac{1}{2}m}} \int_{-1}^{+1} P_{n,m}(\varepsilon) (1 - \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}m} \frac{d\varepsilon}{\sigma - \varepsilon}, \quad (21)$$

waarvan de vergelijking voor $Q_{n,0}(\sigma)$ van Neumann een bijzonder geval is, en vindt ten slotte voor de potentiaal in het algemeene geval een eindigen, met (19) overeenkomstigen vorm, een dubbel-integraal, die evenwel voor verder onderzoek weinig geschikt is, zoodat daartoe een anderen weg moet worden gevolgd.

§ 11. Daar namelijk de gevraagde potentiaalfunctie voor $\mu_1 = 1$ in (20) overgaat, en verder aan de vergelijking van Laplace

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = 0$$

voldoen moet, die door de coördinaten σ, μ, ψ verandert in

$$\frac{d(1 - \sigma^2)}{d\sigma} \frac{dV}{d\sigma} - \frac{d(1 - \mu^2)}{d\mu} \frac{dV}{d\mu} + \frac{\sigma^2 - \mu^2}{(1 - \sigma^2)(1 - \mu^2)} \frac{d^2V}{d\psi^2} = 0, \quad (22)$$

en het zeer lastig is te onderzoeken, of aan deze laatste door functiën, die in vorm met (20) overeenstemmen, al of niet voldaan wordt, zoo voere men het kwadraat van het quotient van den afstand der punten (σ, μ, ψ) en $(\sigma_1, \mu_1, \psi_1)$ door den straal c , of K in plaats van ψ als coördinaat in, met behoud van de beide andere coördinaten σ en μ . Hierdoor wordt (22) voor eene functie V in het punt (σ, μ, K)

$$\begin{aligned} & \frac{d(1 - \sigma^2)}{d\sigma} \frac{dV}{d\sigma} - 2 \left[(\sigma_1^2 + \mu_1^2 - \sigma^2 + \mu^2 + K) \sigma - 2\sigma_1 \mu_1 \mu \right] \frac{d^2V}{dKd\sigma} - \\ & \frac{d(1 - \mu^2)}{d\mu} \frac{dV}{d\mu} + 2 \left[(\sigma_1^2 + \mu_1^2 + \sigma^2 - \mu^2 + K) \mu - 2\sigma_1 \mu_1 \sigma \right] \frac{d^2V}{dKd\mu} + \\ & + 2(\sigma^2 - \mu^2) \left(2K \frac{d^2V}{dK^2} + 3 \frac{dV}{dK} \right) = 0. \quad (23) \end{aligned}$$

Het blijkt nu, dat door substitutie van

$$V = \frac{1}{\sqrt{K}} \operatorname{bgtg} \left(\frac{\sqrt{K}}{-\sigma\sigma_1 + \mu\mu_1} \right) \dots \dots \dots (24)$$

in (23) deze vergelijking identiek, en derhalve ook aan (22) voldaan wordt, terwijl men uit deze eerste particuliere integraal eene tweede verkrijgt, als men μ_1 door $-\mu_1$ vervangt, dat is

$$\frac{1}{\sqrt{K(\sigma, \mu, \psi, \sigma_1, -\mu_1, \psi_1)}} \operatorname{bg.tg} \frac{\sqrt{K(\sigma, \mu, \psi, \sigma_1, -\mu_1, \psi_1)}}{-\sigma \sigma_1 - \mu \mu_1},$$
 welke uitdrukking gelijk is aan die, welke uit (24) ontstaan zoude zijn door verwisseling van μ met $-\mu$, want

$$K(\sigma, \mu, \psi, \sigma_1, -\mu_1, \psi_1) = K(\sigma, -\mu, \psi, \sigma_1, \mu_1, \psi_1).$$

Alzoo heeft men voor de gevraagde potentiaalfunctie

$$V_u = \frac{1}{\pi e} \left\{ \frac{1}{\sqrt{K(\sigma, \mu, \psi, \sigma_1, \mu_1, \psi_1)}} \operatorname{bg.tg} \frac{\sqrt{K(\sigma, \mu, \psi, \sigma_1, \mu_1, \psi_1)}}{-\sigma \sigma_1 + \mu \mu_1} + \frac{1}{\sqrt{K(\sigma, \mu, \psi, \sigma_1, -\mu_1, \psi_1)}} \operatorname{bg.tg} \frac{\sqrt{K(\sigma, \mu, \psi, \sigma_1, -\mu_1, \psi_1)}}{-\sigma \sigma_1 - \mu \mu_1} \right\}, \quad (25)$$

waarin de in hunne tangenten uitgedrukte bogen tusschen 0 en π moeten worden genomen.

Dat het tweede lid dezer vergelijking voor elk punt $(0, \mu, \psi)$ van het cirkelvlak verandert in $\frac{1}{e\sqrt{K(0, \mu, \psi, \sigma_1, \mu_1, \psi_1)}}$ blijkt uit de gelijkheid van

$$\frac{1}{e\sqrt{K(0, \mu, \psi, \sigma_1, \mu_1, \psi_1)}} \text{ en } \frac{1}{e\sqrt{K(0, \mu, \psi, \sigma_1, -\mu_1, \psi_1)}}$$

en omdat

$$\operatorname{bg.tg} \frac{\sqrt{K(0, \mu, \psi, \sigma_1, -\mu_1, \psi_1)}}{\mu \mu_1} + \operatorname{bg.tg} \frac{\sqrt{K(0, \mu, \psi, \sigma_1, \mu_1, \psi_1)}}{-\mu \mu_1} = \pi.$$

Overigens wordt de waarde van dat tweede lid op oneindigen afstand van het cirkelvlak gelijk nul, en heeft het voor de gansche ruimte, met uitzondering van het cirkelvlak, nog de eigenschap van met inbegrip zijner naar elke willekeurige rigting genomene differentiaal-quotienten eindig en continu te zijn, zoodat het al de eigenschappen eener potentiaalfunctie bezit, waarmede de waarheid van (25) bewezen is.

Wat de meetkundige beteekenis van V_u betreft, merke men op, dat deze de som is van twee uitdrukkingen, waarvan de tweede uit de eerste verkregen wordt door daarin $-\mu_1$ in de plaats van μ_1 te zetten; waaruit volgt dat, als cenmaal de elementen van de eerste door de ligging der punten $C(\sigma_1, \mu_1, \psi_1)$ en $O(\sigma, \mu, \psi)$ bepaald zijn, men het vaste punt $(\sigma_1, \mu_1, \psi_1)$ slechts behoeft te vervangen door het punt $(\sigma_1, -\mu_1, \psi_1)$, gelegen op het verlengde van de loodlijn uit C op het cirkelvlak neêr-gelaten, en op gelijken afstand als C van dat vlak, en dezelfde constructie voor de tweede uitdrukking te maken. Laat nu OP de loodlijn zijn op het cirkelvlak, M het middelpunt van den cirkel, OU en OT getrokken naar de uiteinden der middellijn $UMPT$, dan is, als $\sigma = \pi$ en μ positief, volgens de vergelijkingen (4)

$$MP = e\sqrt{(1+p^2)\sqrt{(1-\mu^2)}}, \quad OP = e\mu, \quad UT = 2e,$$

en dus

$$OU^2 = e^2 \left\{ p^2 \mu^2 + \left(1 + \sqrt{(1+p^2)\sqrt{(1-\mu^2)}} \right)^2 \right\},$$

$$OT^2 = e^2 \left\{ p^2 \mu^2 + \left(1 - \sqrt{(1+p^2)\sqrt{(1-\mu^2)}} \right)^2 \right\};$$

of

$$OU = e \left(\sqrt{(1+p^2)} + \sqrt{(1-\mu^2)} \right) \text{ en } OT = e \left(\sqrt{(1+p^2)} - \sqrt{(1-\mu^2)} \right).$$

Noemende den hoek $UOT = \eta$, dan zal

$$\cos \eta = \frac{OU^2 + OT^2 - UT^2}{2 OU \cdot OT},$$

$$\frac{1 + \cos \eta}{2} = \frac{(OU + OT)^2 - UT^2}{4 OU \cdot OT} = \frac{4e^2(1+p^2) - 4e^2}{4e^2(p^2 + \mu^2)},$$

$$\cos \frac{1}{2} \eta = \sqrt{\frac{1 + \cos \eta}{2}} = \sqrt{\frac{p}{p^2 + \mu^2}}, \quad \sin \frac{1}{2} \eta = \sqrt{\frac{\mu}{p^2 + \mu^2}}.$$

Als μ negatief is

$$\cos \left(\frac{-\eta}{2} \right) = \sqrt{\frac{p}{p^2 + \mu^2}}, \quad \sin \left(\frac{-\eta}{2} \right) = \sqrt{\frac{\mu}{p^2 + \mu^2}}$$

Laat nu eveneens de loodlijn uit het vaste punt op het cirkelvlak neêrgeleten CP_1 zijn, de middellijn $U_1MP_1T_1$ en den hoek $U_1CT_1 = \eta_1$, dan heeft men, naarmate μ_1 positief of negatief is

$$\cos \left(\frac{\pm \eta_1}{2} \right) = \sqrt{\frac{p_1}{p_1^2 + \mu_1^2}}, \quad \sin \left(\frac{\pm \eta_1}{2} \right) = \sqrt{\frac{\mu_1}{p_1^2 + \mu_1^2}}.$$

Hierdoor wordt

$$-\sigma\sigma_1 + \mu\mu_1 = pp_1 + \mu\mu_1 = \sqrt{(p^2 + \mu^2)} \sqrt{(p_1^2 + \mu_1^2)} \cos \left(\frac{\pm \eta \mp \eta_1}{2} \right),$$

en de tangens, waarvan de hoog moet worden genomen, in de eerste uitdrukking van (25)

$$\frac{e \cdot e \sqrt{K}(\sigma, \mu, \psi, \sigma_1, \mu_1, \psi_1)}{e \sqrt{(p^2 + \mu^2)} \cdot e \sqrt{(p_1^2 + \mu_1^2)} \cdot \cos \left(\frac{\pm \eta \mp \eta_1}{2} \right)},$$

waarin e de straal van het gegeven cirkelvlak, $e \sqrt{K}(\sigma, \mu, \psi, \sigma_1, \mu_1, \psi_1)$ de afstand van O tot C , $e \sqrt{(p^2 + \mu^2)}$ de midden-evenredige tusschen de lijnen OU en OT , $e \sqrt{(p_1^2 + \mu_1^2)}$ de midden-evenredige tusschen CU_1 en

CT_1 , en $\cos \left(\frac{\pm \eta \mp \eta_1}{2} \right)$ de cosinus van het halve verschil of van de

halve som der hoeken UOT en U_1CT_1 , al naar gelang de punten O en C zich aan dezelfde of aan verschillende zijden van het vlak bevinden.

De totale elektrische digtheid ρ der lading, op de afgeleide cirkelplaat door de negatieve electriciteits-eenheid in C geïnduceerd, kan nu gemakkelijk uit de potentiaal V_u dezer lading worden gevonden. Volgens (11) toch is voor $\sigma=0$ het differentiaal-quotient van V_u ten opzichte van de normaal aan die zijde van het vlak waar μ positief is $\frac{i}{e\mu} \left(\frac{dV_u}{d\sigma} \right)_{\sigma=0}$; aan de andere zijde heeft het dezelfde waarde, maar met

tegengesteld teeken.

En omdat

$$\frac{d}{d\sigma} \left(\frac{1}{\sqrt{K(\sigma, \mu, \psi, \sigma_1, \mu_1, \psi_1)}} \right)_{\sigma=0} = - \frac{d}{d\sigma} \left(\frac{1}{\sqrt{K(\sigma, \mu, \psi, \sigma_1, -\mu_1, \psi_1)}} \right)_{\sigma=0} = - \frac{\sigma_1 \mu \mu_1}{\sqrt{K^3}}$$

$$\frac{d}{d\sigma} \left(\text{bg. tg} \frac{\sqrt{K(\sigma, \mu, \psi, \sigma_1, \mu_1, \psi_1)}}{-\sigma\sigma_1 + \mu\mu_1} \right)_{\sigma=0} = \frac{d}{d\sigma} \left(\text{bg. tg} \frac{\sqrt{K(\sigma, \mu, \psi, \sigma_1, -\mu_1, \psi_1)}}{-\sigma\sigma_1 - \mu\mu_1} \right)_{\sigma=0} = \frac{\sigma_1}{\sqrt{K}}$$

wordt

$$\left(\frac{dV_u}{d\sigma} \right)_{\sigma=0} = \frac{1}{\pi e} \left(\frac{2\sigma_1}{K} + \frac{\sigma_1 \mu \mu_1}{\sqrt{K^3}} \left(\text{bg. tg} \frac{\sqrt{K}}{-\mu\mu_1} - \text{bgtg} \frac{\sqrt{K}}{\mu\mu_1} \right) \right), \quad (26)$$

waarin K beteekent $K(0, \mu, \psi, \sigma_1, \mu_1, \psi_1)$, en de bij de tangenten behoorende bogen tusschen 0 en π moeten worden genomen. Deze uitdrukking kan nog vereenvoudigd worden, want stelt men gemakshalve $\frac{\sqrt{K}}{\mu\mu_1} = \beta$, dan komt er

$$\text{bg. tg}(-\beta) - \text{bg. tg}\beta = \pi - 2 \text{bg. tg}\beta = 2 \text{bg. tg} \frac{1}{\beta},$$

in welke laatste evenwel de boog tusschen de grenzen $+\frac{\pi}{2}$ en $-\frac{\pi}{2}$ ligt. Door substitutie in de vergelijking

$$-4\pi\rho = \frac{2i}{e\mu} \left(\frac{dV_u}{d\sigma} \right)_{\sigma=0}$$

vindt men ten slotte voor de elektrische digtheid in het punt $(0, \mu, \psi)$

$$\rho = - \frac{i}{\pi^2 e^2 \mu} \left(\frac{\sigma_1}{K} + \frac{\sigma_1 \mu \mu_1}{\sqrt{K^3}} \text{bgtg} \frac{\mu\mu_1}{\sqrt{K}} \right), \quad \dots \quad (27)$$

waar de $\text{bgtg} \frac{\mu\mu_1}{\sqrt{K}}$ tusschen $+\frac{\pi}{2}$ en $-\frac{\pi}{2}$ gelegen is, en μ alleen positief mag worden genomen.

b. De elektrische verdeling over een bolvormig segment. *)

§ 12. Zooals reeds aan het begin der methode gezegd is, komt het hier hoofdzakelijk neder op het bepalen der elektrische verdeling over een afgeleid bolvormig segment F, dat onder de influentie-werking staat van de negatieve electriciteits-eenheid, geconcentreerd in een willekeurig gelegen vast punt C daarbuiten.

Den stand van dit segment kiest men zoodanig, dat de cirkel-omtrek, waardoor het begrensd wordt, zich in een horizontaal vlak bevindt, en het segment daarboven. Als oorsprong van een regthoekig coördinaten-stelsel neme men het middelpunt M van dezen cirkel, waarvan de inhoud is S, en de z-as vertikaal naar boven. Noemende dan den straal van S e, den straal van het boloppervlak B, waarvan het segment een deel uitmaakt, r_0 , zoo heeft het middelpunt N des boloppervlaks tot coördinaten $x = 0$, $y = 0$, $z = \alpha \sqrt{r_0^2 - e^2}$, waar α gelijk aan de positieve of negatieve eenheid moet worden genomen, naarmate het segment F grooter of kleiner dan het halve boloppervlak is.

De te vinden potentiaalfunctie V der geïnduceerde lading is eene potentiaal voor de gansche ruimte met uitzondering van het oppervlak F, die de eigenschap hebben moet van in het punt O gelijk te zijn aan het omgekeerde van den afstand der punten C en O, als dit laatste punt op F gelegen is, en nul, als het op oneindigen afstand van F ligt.

V bekend zijnde, wordt de elektrische digtheid ρ in het punt O van F bepaald door

$$-4\pi\rho = \left(\frac{dV}{dr}\right)_{r_0 + \delta r_0} - \left(\frac{dV}{dr}\right)_{r_0 - \delta r_0}, \dots \dots \dots (28)$$

waarin r de voerstraal NO, waarvan de naast de haakjes staande vormen de waarden zijn, en δr_0 eene oneindig kleine positieve grootheid. Maar omdat men eene lading over een bolvormig segment beschouwen kan als eene lading over den ganschen bol, waarvan de digtheid in elk punt buiten dat segment gelijk nul is, heeft men in plaats van (28)

$$4\pi\rho = 2 \left(\frac{dV}{dr}\right)_{r_0 - \delta r_0} + \frac{\bar{V}}{r_0}, \dots \dots \dots (29)$$

*) Ueber die Vertheilung der statischen Electricität in einem kreisförmig begrenzten Segment einer Kugelfläche. (Crelle's Journal Bd. 58, S 152.)

welke vergelijking dezelfde is als de eerste van (7) aan het begin dezer verhandeling, en doorgaat voor elke willekeurige electriciteits-verdeeling op het boloppervlak.

Ingeval het punt C ligt in het middelpunt N, heeft de potentiaal over het geheele oppervlak van F de constante waarde $\frac{1}{r_0}$, zoodat, als Q_n de hoeveelheid electriciteit op F is, deze daarover eveneens verdeeld zal zijn als dezelfde hoeveelheid over F, geïsoleerd en buiten influentie. Eene gegevene hoeveelheid electriciteit Q, medegedeeld aan het geïsoleerde segment, verdeelt zich dan zoodanig, dat de digtheid is $\frac{Q}{Q_n} \rho$ en de potentiaal $\frac{Q}{Q_n} V$, de grootheden ρ en V betrekking hebbende op de geïnduceerde lading, in het geval dat C met N zamenvalt.

Wat ook in het algemeen de ligging van het punt C moge zijn, zoo kan de hoeveelheid electriciteit Q_c , waaruit de daardoor geïnduceerde lading bestaat, altijd zonder integraalteeken worden uitgedrukt, en wel in de potentiaal in het punt C van de lading geïnduceerd door de negatieve eenheid in N. Want beschouwt men twee ladingen over een zelfde oppervlak, waarvan de eene gebonden is door het punt C met de digtheid ρ_c en de potentiaal V_c in het punt O der oppervlakte, de andere door het punt N, digtheid ρ_n , potentiaal V_n , dan zal volgens eene stelling van Gauss *)

$$\int \rho_c V_n d\omega = \int \rho_n V_c d\omega,$$

waarin $d\omega$ het element van het boloppervlak B en de integralen zich uitstrekken over het oppervlak F. Maar $V_n = \frac{1}{r_0}$, V_c gelijk aan het omgekeerde van den afstand der punten C en O, zoodat het tweede lid der vergelijking de potentiaal is der lading ρ_n in het punt C, dat is V_n , als hierin de coördinaten van O door die van C worden vervangen. Hierdoor verandert bovenstaande betrekking in

$$\int \rho_c d\omega = Q_c = r_0 V_{n,c}. \quad \dots \quad (30)$$

Wanneer het segment F in het geheele boloppervlak B overgaat, staat het bepalen van de potentiaal der lading, op den afgeleiden bol door een electricisch massapunt teweegebragt, in verband met de

*) C. F. Gauss: Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstossungskräfte, art. 19.

volgende wiskundige stelling: Laat in de rechte lijn uit N naar het inducerende punt C getrokken, en aan dezelfde zijde van N als C een punt C' genomen worden, zoodanig dat $NC \cdot NC' = r_0^2$, dan heeft men, als O een willekeurig punt van het boloppervlak is, de evenredigheid

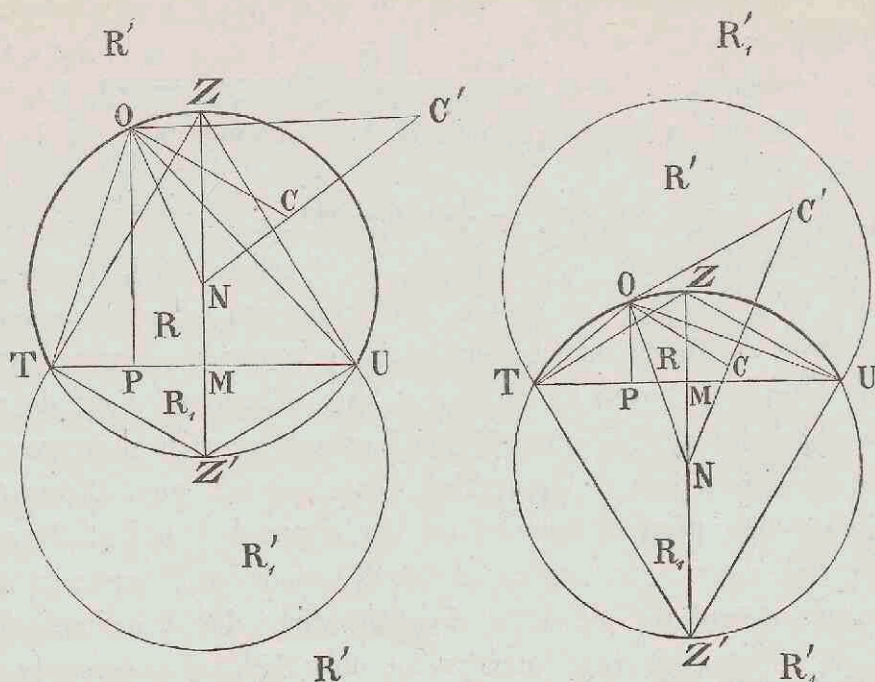
$$OC : OC' = r_0 : NC' = NC : r_0 \dots \dots \dots (31)$$

Hierbij kan C zoowel binnen als buiten B gelegen zijn. Bevindt zich C binnen B, dan ligt C' er buiten, en omgekeerd. Omdat men in het vervolg dezer methode onderscheid moet maken in de ligging van een punt C binnen B boven en onder het vlak S, zoo zal voor de plaats van het overeenkomstige punt C' een kenmerk worden verkregen door gebruik te maken van de opmerking, dat voor elk punt C van S het overeenkomstige punt C' behoort tot het segment S' buiten B van het boloppervlak door N en den cirkelomtrek, waardoor F begrensd wordt. Men noeme de ruimte, omsloten door het cirkelvlak S en het segment F, R, de ruimte, die ingesloten wordt door S en het onderste segment van B, R₁; verder, indien het segment F grooter dan het halve boloppervlak B is, dat is voor $\alpha = 1$, de ruimte tusschen het onderste segment van B en het segment S' R'₁, en de overblijvende uitwendige ruimte R', maar voor $\alpha = -1$ de ruimte, ingesloten door F en S', R', en de overblijvende uitwendige ruimte R'₁. Heeten de ruimte, waarin het punt C gelegen is, en die, waarbinnen het overeenkomstige punt C' zich bevindt, corresponderende ruimten, dan zijn volgens het voorgaande zoodanige altijd de ruimten R en R', alsmede R₁ en R'₁.

§ 13. Wij gaan nu over tot het zoeken van V, en maken daartoe gebruik van de elliptische coördinaten σ, μ, ψ , met de rechthoekige x, y, z volgens de onder α vermelde vergelijkingen (4) aldus verbonden

$$\left. \begin{aligned} x &= e \sqrt{1 - \sigma^2} \sqrt{1 - \mu^2} \cos \psi, \\ y &= e \sqrt{1 - \sigma^2} \sqrt{1 - \mu^2} \sin \psi, \\ z &= e \frac{\sigma}{1} \mu. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4')$$

Hierin is $\sigma = pi$, als p eene bestaanbare grootheid beduidt, gelegen tusschen de grenzen 0 en $+\infty$, μ ligt tusschen -1 en $+1$, ψ tusschen 0 en 2π , terwijl $\sqrt{1 - \sigma^2}$ en $\sqrt{1 - \mu^2}$ altijd positief zijn. Men late even als in α (doch met dit onderscheid dat O hier niet een geheel willekeurig punt is, maar een punt van het oppervlak F) uit O of (σ, μ, ψ) eene loodlijn OP op het XY-vlak neder, trekke de middellijn TPMU, OT, OU en noeme hoek TOU η , dan komt er



$$\left. \begin{aligned}
 OT &= e \left(\sqrt{1 - \sigma^2} - \sqrt{1 - \mu^2} \right), \quad OU = e \left(\sqrt{1 - \sigma^2} + \sqrt{1 - \mu^2} \right), \\
 \cos \frac{1}{2} \eta &= \frac{\sigma}{i \sqrt{(\mu^2 - \sigma^2)}}, \quad \sin \frac{1}{2} \eta = \frac{\pm \mu}{\sqrt{(\mu^2 - \sigma^2)}},
 \end{aligned} \right\} (32)$$

het bovenste teeken bezigende voor μ positief, dat is als O zich boven S, het onderste voor μ negatief, als O zich onder S bevindt.*)

Stelt men $\sqrt{r_0^2 - e^2} = ep_0 = e \frac{\sigma_0}{i}$, dan zijn de coördinaten van het middelpunt N $\sigma = \sigma_0$, $\mu = \alpha = \pm 1$, en het vierkant van NO volgens de vergelijking (5) gelijk aan $e^2 (1 - \sigma_0^2 - \sigma^2 - \mu^2 + 2\alpha\sigma_0 \sigma\mu)$. De voorwaarde, waaraan door de coördinaten van O voldaan moet worden, wanneer dit punt op het boloppervlak B ligt, is derhalve $NO^2 = r_0^2$ of

$$\mu^2 - 2\alpha\sigma_0 \sigma\mu + \sigma^2 = 0.$$

Van de beide factoren

$$\mu - (\alpha\sigma_0 - i\sqrt{1 - \sigma_0^2})\sigma \quad \text{en} \quad \mu - (\alpha\sigma_0 + i\sqrt{1 - \sigma_0^2})\sigma,$$

*) Zij nog opgemerkt, dat in het vlak, hetwelk door de deellijn van hoek TOU gebragt loodrecht staat op het vlak der figuur, en den cirkelomtrek, die F begrenst, in de punten f en l snijdt $Of = Ol = e\sqrt{(\mu^2 - \sigma^2)}$, de midden-evenredige tusschen OT en OU, alsook $\text{tg } \frac{1}{2} fOl = \frac{i}{\sigma}$.

waarin het voorste lid dezer vergelijking zich laat ontbinden, zal de eerste gelijk nul zijn, indien O behoort tot het oppervlak F, en de tweede gelijk nul, als O een punt is van het onderste segment van B. Want uit (32) volgt: $\frac{i\mu}{\sigma}$ gelijk aan $\text{tg} \frac{1}{2} \eta$, wanneer O boven S, en gelijk aan $-\text{tg} \frac{1}{2} \eta$, wanneer O onder S ligt. Door verder de punten Z en Z', waarin de Z-as het boloppervlak B snijdt, te vereenigen met T en U, ontstaan twee hoeken TZU en TZ'U, waarvan de eerste den constanten hoek η voor een punt O van F, de tweede den constanten hoek η voor een punt O van het onderste segment van B voorstelt. Daar nu

$$ZM = e\sqrt{(1 - \sigma_0^2)} + \alpha e \frac{\sigma_0}{i}, \quad Z'M = c\sqrt{(1 - \sigma_0^2)} - \alpha e \frac{\sigma_0}{i},$$

$$\text{vindt men } \text{tg} \frac{1}{2} \text{ TZU} = \sqrt{(1 - \sigma_0^2)} - \alpha \frac{\sigma_0}{i}, \quad \text{tg} \frac{1}{2} \text{ TZ'U} = \sqrt{(1 - \sigma_0^2)} + \alpha \frac{\sigma_0}{i};$$

zoodat voor elk punt O van F

$$\mu - (\alpha\sigma_0 - i\sqrt{(1 - \sigma_0^2)})\sigma = 0, \quad \dots \quad (33)$$

en voor elk punt O van het onderste segment des boloppervlaks

$$\mu - (\alpha\sigma_0 + i\sqrt{(1 - \sigma_0^2)})\sigma = 0. \quad \dots \quad (34)$$

Uit (33) wordt in verband met (4*) afgeleid

$$\frac{\mu}{\alpha\sigma_0 - i\sqrt{(1 - \sigma_0^2)}} = \frac{zi}{e\mu}, \quad (\alpha\sigma_0 - i\sqrt{(1 - \sigma_0^2)})\sigma = \frac{zi}{e\sigma},$$

of

$$\mu = \sqrt{(\alpha i\sigma_0 + \sqrt{(1 - \sigma_0^2)})} \sqrt{\left(\frac{z}{e}\right)}, \quad \sigma = i\sqrt{(-\alpha i\sigma_0 + \sqrt{(1 - \sigma_0^2)})} \sqrt{\left(\frac{z}{e}\right)}; \quad (33^*)$$

en uit (34)

$$\mu = \frac{zi}{e\mu} (\alpha\sigma_0 + i\sqrt{(1 - \sigma_0^2)}), \quad (\alpha\sigma_0 + i\sqrt{(1 - \sigma_0^2)})\sigma = \frac{zi}{e\sigma},$$

of

$$\mu = -\sqrt{(-\alpha i\sigma_0 + \sqrt{(1 - \sigma_0^2)})} \sqrt{\left(\frac{-z}{e}\right)}, \quad \sigma = i\sqrt{(\alpha i\sigma_0 + \sqrt{(1 - \sigma_0^2)})} \sqrt{\left(\frac{-z}{e}\right)}. \quad (34^*)$$

Het is duidelijk, dat in deze beide laatsten μ en z negatief zijn wegens de ligging van O onder het XY-vlak. Voortaan zullen wij de coördinaten van het inducerende punt C noemen σ_1, μ_1, ψ_1 , en die van het overeenkomstige punt C' σ', μ', ψ_1 , want voor beide punten is de hoek ψ dezelfde. Als dan x_1, y_1, z_1 en x', y', z' respectievelijk de reghoekige coördinaten van die punten beteekenen, zal uit

$$NC: \frac{r_0^2}{NC} = x_1 : x' = y_1 : y' = z_1 - \alpha e p_0 : z' - \alpha e p_0$$

volgen

$$\left. \begin{aligned} x' &= \frac{r_0^2 x_1}{NC^2} = \frac{r_0^2 x_1}{x_1^2 + y_1^2 + (z_1 - \alpha e p_0)^2}, & y' &= \frac{r_0^2 y_1}{x_1^2 + y_1^2 + (z_1 - \alpha e p_0)^2}, \\ z' - \alpha e p_0 &= \frac{r_0^2 (z_1 - \alpha e p_0)}{x_1^2 + y_1^2 + (z_1 - \alpha e p_0)^2} \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Omdat $z + ie = ie(1 - \sigma\mu)$ en $z - ie = -ie(1 + \sigma\mu)$, verkrijgt men, door beurtelings het vierkant van elk dezer beide vergelijkingen bij de som der vierkanten van de twee eerste van (4') op te tellen, en de teekens 1 en $'$ bij te voegen

$$\left. \begin{aligned} x_1^2 + y_1^2 + (z_1 + ie)^2 &= -e^2 (\sigma_1 - \mu_1)^2, \\ x'^2 + y'^2 + (z' - ie)^2 &= -e^2 (\sigma' + \mu')^2. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Plaastst men de uit (35) bekomene waarden

$$x'^2 + y'^2 + (z' - \alpha e p_0)^2 = \frac{e^4 (1 + p_0^2)^2}{x_1^2 + y_1^2 + (z_1 - \alpha e p_0)^2} \text{ en}$$

$$z' - \alpha e p_0 = \frac{e^2 (1 + p_0^2) (z_1 - \alpha e p_0)}{x_1^2 + y_1^2 + (z_1 - \alpha e p_0)^2} \text{ in het tweede lid der}$$

identieke vergelijking

$$x'^2 + y'^2 + (z' - ie)^2 = x'^2 + y'^2 + (z' - \alpha e p_0)^2 + 2(z' - \alpha e p_0)(\alpha e p_0 - ie) + (\alpha e p_0 - ie)^2,$$

dan laat deze zich herleiden tot den vorm

$$x'^2 + y'^2 + (z' - ie)^2 = \frac{(\alpha e p_0 - ie)^2 (x_1^2 + y_1^2 + (z_1 + ie)^2)}{x_1^2 + y_1^2 + (z_1 - \alpha e p_0)^2},$$

die door (36) verandert in

$$(\sigma' + \mu')^2 = \frac{-e^2 (1 + \alpha i p_0)^2 (\sigma_1 - \mu_1)^2}{x_1^2 + y_1^2 + (z_1 - \alpha e p_0)^2},$$

of, wanneer de noemer door $e^2 (1 - \sigma_0^2 - \sigma_1^2 - \mu_1^2 + 2\alpha\sigma_0\sigma_1\mu_1)$ en $i p_0$ door σ_0 vervangen en uit beide leden de wortel getrokken wordt

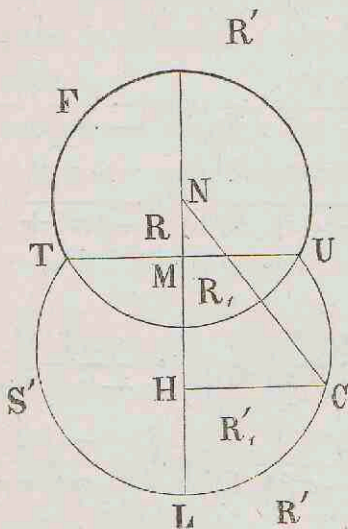
$$\sigma' + \mu' = \frac{\mp i (1 + \alpha\sigma_0) (\sigma_1 - \mu_1)}{\sqrt{(1 - \sigma_0^2 - \sigma_1^2 - \mu_1^2 + 2\alpha\sigma_0\sigma_1\mu_1)}}, \quad (37)$$

waaruit men, door het onbestaanbare van het bestaanbare gedeelte te scheiden, verkrijgt

$$\sigma' = \frac{\pm i (-\alpha\sigma_0\sigma_1 + \mu_1)}{\sqrt{(1 - \sigma_0^2 - \sigma_1^2 - \mu_1^2 + 2\alpha\sigma_0\sigma_1\mu_1)}}, \quad \mu' = \frac{\pm i (\alpha\sigma_0\mu_1 - \sigma_1)}{\sqrt{(1 - \sigma_0^2 - \sigma_1^2 - \mu_1^2 + 2\alpha\sigma_0\sigma_1\mu_1)}}. \quad (38)$$

Wat het teeken in (37) en (38) betreft, dit moet zoodanig genomen worden dat $\frac{\sigma'}{i}$ steeds positief blijft, wat ook de ligging van C moge

zijn, zoodat het zal overeenkomen met het teeken van $(-\alpha\sigma_0\sigma_1 + \mu_1)$, daar de noemer altijd positief is. Voor een punt C in het vlak S $\sigma_1 = 0$ en μ_1 positief of negatief, al naarmate dit punt beschouwd wordt te behooren tot de ruimte R of tot de ruimte R_1 . Wanneer $\alpha = 1$, blijft $-\sigma_0\sigma_1 + \mu_1$ positief, zoolang C boven S ligt; deze uitdrukking is negatief in een punt C binnen de ruimte, omsloten door S en het oppervlak, waarvoor $-\sigma_0\sigma_1 + \mu_1 = 0$, en wordt weder positief, zoodra C buiten deze ruimte ligt. Maar als $\alpha = -1$, blijft $+\sigma_0\sigma_1 + \mu_1$ negatief, zoolang C zich onder S bevindt, is positief, wanneer C binnen de ruimte ligt, omsloten door S en het oppervlak, waarvoor $+\sigma_0\sigma_1 + \mu_1 = 0$, en wordt weder negatief in een punt C buiten deze ruimte. Daar nu $-\alpha\sigma_0\sigma_1 + \mu_1 = 0$ het oppervlak S' voorstelt, *) en de door S en S' ingeslotene ruimte voor $\alpha = +1$



*) Laat C een punt van het oppervlak S' zijn in het geval dat $\alpha = +1$, als in nevensgaande figuur. Trekt men dan de loodlijn CH op de middellijn NML des boloppervlaks, waarvan S' het buiten B gelegene segment is, en plaatst

de waarden $NM = e \frac{\sigma_0}{i}$,

$$MH = -e \frac{\sigma_1}{i} \mu_1, \quad NL = \frac{e(1 - \sigma_0^2)}{\frac{\sigma_0}{i}},$$

$HC = e\sqrt{(1 - \sigma_1^2)}\sqrt{(1 - \mu_1^2)}$ in $(NM + MH) \times NL = (NM + MH)^2 + HC^2$, dan komt men na herleiding tot eene vergelijking, waarvan het voorste lid zich in twee factoren laat ontbinden, en wel

$$(-\sigma_0\sigma_1 + \mu_1)(\sigma_0\mu_1 - \sigma_1) = 0.$$

Omdat in dit geval μ_1 negatief is, zal $\sigma_0\mu_1 - \sigma_1$ in het algemeen eene negatieve grootheid maal i zijn, zoodat door alle punten van S' voldaan wordt aan de vergelijking

$$-\sigma_0\sigma_1 + \mu_1 = 0.$$

Wanneer $\alpha = -1$, verkrijgt men evenzoo

$$(\sigma_0\sigma_1 + \mu_1)(\sigma_0\mu_1 + \sigma_1) = 0.$$

Alsdan voldoen alle punten van S' aan de vergelijking

$$\sigma_0\sigma_1 + \mu_1 = 0,$$

waaruit volgt, dat $-\alpha\sigma_0\sigma_1 + \mu_1 = 0$ in ieder geval het vlak S' voorstelt.

(De beide andere factoren $\sigma_0\mu_1 - \sigma_1$ en $\sigma_0\mu_1 + \sigma_1$ zijn gelijk nul voor alle punten van dat gedeelte des boloppervlaks, hetwelk binnen B ligt.)

uit de ruimten R_I en R'_I , voor $\alpha = -1$ uit de ruimten R en R' bestaat, zoo moet in (37) en (38) het bovenste teeken gebruikt worden, als C binnen R of R' gelegen is, en het onderste teeken, voor een punt C in R_I of R'_I .

Stelt men nu kortheidshalve

$$\begin{aligned} OC^2 &= e^2 K, & OC'^2 &= e^2 K', \\ NC^2 &= e^2 k, & NC'^2 &= e^2 k', \end{aligned}$$

zoodat

$$\begin{aligned} K &= 2 - \sigma^2 - \sigma_I^2 - \mu^2 - \mu_I^2 + 2\sigma\sigma_I\mu\mu_I - 2\sqrt{(1-\sigma^2)\sqrt{(1-\sigma_I^2)\sqrt{(1-\mu^2)\sqrt{(1-\mu_I^2)\cos(\psi-\psi_I)}}, \\ K' &= 2 - \sigma^2 - \sigma'^2 - \mu^2 - \mu'^2 + 2\sigma\sigma'\mu\mu' - 2\sqrt{(1-\sigma^2)\sqrt{(1-\sigma'^2)\sqrt{(1-\mu^2)\sqrt{(1-\mu'^2)\cos(\psi-\psi_I)}}, \\ k &= 1 - \sigma_0^2 - \sigma_I^2 - \mu_I^2 + 2\alpha\sigma_0\sigma_I\mu_I, \\ k' &= 1 - \sigma_0^2 - \sigma'^2 - \mu'^2 + 2\alpha\sigma_0\sigma'\mu', \end{aligned}$$

dan is de vorm der potentiaal V in een geheel willekeurig punt O of (σ, μ, ψ) de volgende:

(I.) C binnen R ,

$$\begin{aligned} O \text{ binnen } R, V &= \frac{1}{\pi e} \left\{ \frac{1}{\sqrt{K}} \operatorname{bgtg} \frac{\sqrt{K}}{-\sigma\sigma_I + \mu\mu_I} + \frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{(1-\sigma_0^2)\sqrt{K}}} \operatorname{bgtg} \frac{-\sqrt{K'}}{-\sigma\sigma' + \mu\mu'} \right\}, \\ O \text{ buiten } R, V &= \frac{1}{\pi e} \left\{ \frac{1}{\sqrt{K}} \operatorname{bgtg} \frac{-\sqrt{K}}{-\sigma\sigma_I + \mu\mu_I} + \frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{(1-\sigma_0^2)\sqrt{K}}} \operatorname{bgtg} \frac{\sqrt{K'}}{-\sigma\sigma' + \mu\mu'} \right\}; \end{aligned}$$

(II) C binnen R' ,

$$\begin{aligned} O \text{ binnen } R, V &= \frac{1}{\pi e} \left\{ \frac{1}{\sqrt{K}} \operatorname{bgtg} \frac{-\sqrt{K}}{-\sigma\sigma_I + \mu\mu_I} + \frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{(1-\sigma_0^2)\sqrt{K}}} \operatorname{bgtg} \frac{\sqrt{K'}}{-\sigma\sigma' + \mu\mu'} \right\}, \\ O \text{ buiten } R, V &= \frac{1}{\pi e} \left\{ \frac{1}{\sqrt{K}} \operatorname{bgtg} \frac{\sqrt{K}}{-\sigma\sigma_I + \mu\mu_I} + \frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{(1-\sigma_0^2)\sqrt{K}}} \operatorname{bgtg} \frac{-\sqrt{K'}}{-\sigma\sigma' + \mu\mu'} \right\}; \end{aligned}$$

(III) C binnen R_I of R'_I ,

$$\begin{aligned} O \text{ binnen } R, V &= \frac{1}{\pi e} \left\{ \frac{1}{\sqrt{K}} \operatorname{bgtg} \frac{-\sqrt{K}}{-\sigma\sigma_I + \mu\mu_I} + \frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{(1-\sigma_0^2)\sqrt{K}}} \operatorname{bgtg} \frac{-\sqrt{K'}}{-\sigma\sigma' + \mu\mu'} \right\}, \\ O \text{ buiten } R, V &= \frac{1}{\pi e} \left\{ \frac{1}{\sqrt{K}} \operatorname{bgtg} \frac{\sqrt{K}}{-\sigma\sigma_I + \mu\mu_I} + \frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{(1-\sigma_0^2)\sqrt{K}}} \operatorname{bgtg} \frac{\sqrt{K'}}{-\sigma\sigma' + \mu\mu'} \right\}. \end{aligned}$$

Hieronder is het geval, dat het punt C met het middelpunt N zamenvalt, niet begrepen, maar dit zal later behandeld worden; de waarden der in hunne tangenten uitgedrukte bogen zijn hier en overal in het vervolg dezer methode tusschen 0 en π gelegen.

Omdat er slechts ééne functie bestaat, die aan de vroeger genoemde voorwaarden voor V voldoet, zoo blijkt uit de volgende beschouwingen,

dat die alle vervuld worden door de voor V gestelde vormen in bovenstaande vergelijkingen, en de juistheid dezer laatste.

1. In a heeft men reeds gezien, dat de functie $\frac{1}{\sqrt{K}} \text{bgtg} \frac{\sqrt{K}}{-\sigma\sigma_1 + \mu\mu_1}$ der grootheden σ, μ, ψ eene potentiaalfunctie is voor de geheele ruimte met uitzondering van het cirkelvlak S , die in een punt (σ, μ, ψ) , op oneindig grooten afstand van S gelegen, verdwijnt. Zoo zal ook de functie $\frac{1}{\sqrt{K}} \text{bgtg} \frac{-\sqrt{K}}{-\sigma\sigma_1 + \mu\mu_1} = \frac{\pi}{\sqrt{K}} - \frac{1}{\sqrt{K}} \text{bgtg} \frac{\sqrt{K}}{-\sigma\sigma_1 + \mu\mu_1}$ op oneindigen afstand van S gelijk nul en eene potentiaalfunctie zijn voor de geheele ruimte met uitzondering van S en van het ruimtedeel binnen het boloppervlak, uit C als middelpunt met een naar welgevallen kleinen straal beschreven. Ligt nu het punt C binnen R , dan is eene functie van het punt (σ, μ, ψ) of O , die binnen R gelijk aan $\frac{1}{\sqrt{K}} \text{bgtg} \frac{\sqrt{K}}{-\sigma\sigma_1 + \mu\mu_1}$ en buiten R gelijk aan $\frac{1}{\sqrt{K}} \text{bgtg} \frac{-\sqrt{K}}{-\sigma\sigma_1 + \mu\mu_1}$, eene potentiaalfunctie voor de geheele ruimte behalve F , mits er aan het vlak S , dat met F de grenzen vormt, die de ruimten, waarin elk der beide genoemde uitdrukkingen respectievelijk de potentiaal is, van elkaar scheiden, met betrekking tot die functie en hare eerste differentiaalquotienten geene discontinuïteit plaats heeft, want de punten O en C kunnen in dit geval alleen binnen R , maar nooit daarbuiten in elkaar vallen. Dat aan deze voorwaarde voldaan wordt, volgt uit de beschouwing der beide punten $(\bar{\sigma}, \bar{\mu}, \bar{\psi})$ en $(\bar{\sigma}, -\bar{\mu}, \bar{\psi})$, gelegen dicht bij het vlak S , het eerste binnen de ruimte R , het tweede binnen R_1 , zoodat $\frac{\bar{\sigma}}{i}$ eene kleine grootheid voorstelt, terwijl $\bar{\mu}$ en $\bar{\psi}$ onbepaald zijn. Van het eerste punt komt men tot het tweede, door in R $\bar{\mu}$ en $\bar{\psi}$ te behouden, en $\frac{\bar{\sigma}}{i}$ tot nul te laten afnemen, vervolgens in R_1 de constanten $-\bar{\mu}$ en $\bar{\psi}$ te behouden en $\frac{\bar{\sigma}}{i}$ van nul tot $\frac{\bar{\sigma}}{i}$ te laten aangroeiën. Door toepassing dezer handelwijze op de functiën $\frac{1}{\sqrt{K}} \text{bgtg} \frac{\sqrt{K}}{-\sigma\sigma_1 + \mu\mu_1}$ en $\frac{1}{\sqrt{K}} \text{bgtg} \frac{-\sqrt{K}}{-\sigma\sigma_1 + \mu\mu_1}$ wordt de waarde der tweede functie dezelfde als die, welke verkregen zou zijn, door in de eerste $\bar{\mu}$ en $\bar{\psi}$ onveranderd te laten en $\frac{\bar{\sigma}}{i}$ door nul heen continu te doen afnemen tot $-\frac{\bar{\sigma}}{i}$. De waarden der functie in quaestie, alsmede die

harer eerste differentiaal-quotienten boven en onder S, sluiten zich derhalve continu aan elkaâr aan, zoodat zij eene potentiaal voor de geheele ruimte behalve F is, die verdwijnt op oneindigen afstand van S of, van F.

Wanneer het punt C buiten R ligt, zal zoodanige potentiaal zijn eene functie van O, binnen R gelijk aan $\frac{1}{\sqrt{K}} \text{bgtg} \frac{-\sqrt{K}}{-\sigma\sigma_1 + \mu\mu_1}$, buiten R gelijk aan $\frac{1}{\sqrt{K}} \text{bgtg} \frac{\sqrt{K}}{-\sigma\sigma_1 + \mu\mu_1}$.

2. Daar de uitdrukkingen $\frac{1}{\sqrt{K'}} \text{bgtg} \frac{\sqrt{K'}}{-\sigma\sigma' + \mu\mu'}$, en $\frac{1}{\sqrt{K'}} \text{bgtg} \frac{-\sqrt{K'}}{-\sigma\sigma' + \mu\mu'}$ ten opzichte der punten C' of (σ', μ', ψ_1) en O of (σ, μ, ψ) zich eveneens verhouden als $\frac{1}{\sqrt{K}} \text{bgtg} \frac{\sqrt{K}}{-\sigma\sigma_1 + \mu\mu_1}$ en $\frac{1}{\sqrt{K}} \text{bgtg} \frac{-\sqrt{K}}{-\sigma\sigma_1 + \mu\mu_1}$ ten opzichte der punten C en O, zoo ziet men, dat de voor V gestelde vormen steeds zamengesteld zijn uit twee potentiaalfunctiën, in 1. omschreven, waarvan elk nog een van σ, μ, ψ onafhankelijken factor heeft. Hieruit volgt, dat ook elk der voor V gestelde vormen eene potentiaalfunctie in het punt O voor de gansche ruimte behalve F is, die op oneindigen afstand van F gelijk nul wordt.

3. Eindelijk moet men nog aantoonen dat, wanneer het punt O op F gelegen is, deze vormen overgaan in den omgekeerden afstand der punten O en C, d. i. in $\frac{1}{e\sqrt{K}}$. In dat geval bestaat tusschen de coördinaten σ en μ van O de betrekking (33)

$$\mu - (\alpha\sigma_0 - i\sqrt{1 - \sigma_0^2})\sigma = 0,$$

en kunnen (37) en (38) gebruikt worden, om K' en $-\sigma\sigma' + \mu\mu'$ in σ_1, μ_1 uit te drukken. Evenwel vindt men K' gemakkelijker uit de evenredigheid (31), die na substitutie der waarden verandert in

$$e\sqrt{K} : e\sqrt{K'} = e\sqrt{1 - \sigma_0^2} : e\sqrt{k'} = e\sqrt{k} : e\sqrt{1 - \sigma_0^2}. \quad (39)$$

Voor $-\sigma\sigma' + \mu\mu'$ volgt uit (33)

$$\frac{\sigma - \mu}{\sigma + \mu} = \frac{1 - \alpha\sigma_0 + i\sqrt{1 - \sigma_0^2}}{1 + \alpha\sigma_0 - i\sqrt{1 - \sigma_0^2}} = \frac{-1 - \alpha\sigma_0 - i\sqrt{1 - \sigma_0^2}}{-(1 + \alpha\sigma_0) - i\sqrt{1 - \sigma_0^2}} = \frac{i\sqrt{1 - \sigma_0^2}}{1 + \alpha\sigma_0}.$$

Verder komt er door het eerste lid van (37) met $(\sigma - \mu)$, het tweede met $\frac{i\sqrt{1 - \sigma_0^2}}{1 + \alpha\sigma_0} (\sigma + \mu)$ te vermenigvuldigen

$$(\sigma' + \mu')(\sigma - \mu) = \frac{\pm\sqrt{1 - \sigma_0^2}}{\sqrt{k}} (\sigma_1 - \mu_1)(\sigma + \mu), \quad (40)$$

die, door het bestaanbare van het onbestaanbare te scheiden, zich splitst in de vergelijkingen

$$\left. \begin{aligned} -\sigma\sigma' + \mu\mu' &= \frac{\pm V(1 - \sigma_0^2)}{\sqrt{k}} (-\sigma\sigma_x + \mu\mu_x), \\ -\sigma\mu' + \mu\sigma' &= \frac{\mp V(1 - \sigma_0^2)}{\sqrt{k}} (-\sigma\mu_x + \mu\sigma_x); \end{aligned} \right\} \dots (41)$$

waarin men het teeken even als in (37) en (38) moet nemen: het bovenste teeken, als C binnen R of R', en het onderste teeken, als C binnen R_x of R'_x ligt.

Volgens (39) en (41) zal nu, wanneer het punt O op F gelegen is,

$$\frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{(1 - \sigma_0^2)} \sqrt{K'}} \text{ gelijk aan } \frac{1}{\sqrt{K}}, \text{ en } \frac{\sqrt{K'}}{-\sigma\sigma' + \mu\mu'} \text{ gelijk aan } \frac{\sqrt{K}}{-\sigma\sigma_x + \mu\mu_x}$$

of gelijk aan $\frac{-\sqrt{K}}{-\sigma\sigma_x + \mu\mu_x}$ zijn, naarmate C zich binnen R en R' of binnen R_x en R'_x bevindt. Al de voor V gestelde vormen gaan dan over in

$$\frac{1}{\pi e} \left\{ \frac{1}{\sqrt{K}} \text{ bgtg } \frac{\sqrt{K}}{-\sigma\sigma_x + \mu\mu_x} + \frac{1}{\sqrt{K}} \text{ bgtg } \frac{-\sqrt{K}}{-\sigma\sigma_x + \mu\mu_x} \right\} = \frac{1}{e\sqrt{K}},$$

waarmede de juistheid der vergelijkingen (I.), (II.), (III.) is aangetoond.

§ 14. Alhoewel in deze vergelijkingen de ligging van het punt C in het middelpunt N is uitgesloten, in welk geval het overeenkomstige punt C' zich op oneindigen afstand bevindt, zoo nadert toch de waarde van V, naarmate C digter bij N komt, tot eene bepaalde grens, die met het in elkaâr vallen der beide punten overeenstemt; en daar N als $\alpha = 1$ in de ruimte R, als $\alpha = -1$ in de ruimte R_x ligt, kan die grenswaarde voor $\alpha = 1$ uit (I.), voor $\alpha = -1$ uit (III.) worden afgeleid. Van de grootheden $\frac{\sigma'}{i}$, μ' , ψ_x is dan de eerste ∞ ; $\frac{i}{\sigma}$, $\sqrt{K'}$ en

$\frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{K'}}$ gaan over in de eenheid, $\frac{\sqrt{K'}}{-\sigma\sigma' + \mu\mu'}$ wordt $\frac{i}{\sigma}$; σ_0 , α ver-

vangen σ_x , μ_x , en voor K komt de uitdrukking $1 - \sigma_0^2 - \sigma^2 - \mu^2 + 2\alpha\sigma_0\sigma\mu$, terwijl de beide waarden, die men voor V alzoo verkrijgt als $\alpha = 1$ en als $\alpha = -1$, vereenigd zijn in:

(IV.) C in het middelpunt N,

$$\text{O binnen R, } V = \frac{1}{\pi e} \left\{ \frac{1}{\sqrt{K}} \text{ bgtg } \frac{\alpha\sqrt{K}}{-\sigma_0\sigma + \alpha\mu} + \frac{1}{\sqrt{(1 - \sigma_0^2)}} \text{ bgtg } \left(\frac{-i}{\sigma} \right) \right\},$$

$$\text{O buiten R, } V = \frac{1}{\pi e} \left\{ \frac{1}{\sqrt{K}} \text{ bgtg } \frac{-\alpha\sqrt{K}}{-\sigma_0\sigma + \alpha\mu} + \frac{1}{\sqrt{(1 - \sigma_0^2)}} \text{ bgtg } \left(\frac{i}{\sigma} \right) \right\}.$$

Ligt het punt C op een der oppervlakken, die de ruimten R en R_I, R_I en R'_I, R'_I en R' van elkaâr scheiden, dan zijn de waarden van V in de twee gevallen, dat C beschouwd wordt te behooren tot elk der beide ruimten ter weêrszijde van het oppervlak, aan elkaâr gelijk; op de grensvlakte F tusschen R en R' mag C wegens den aard van het vraagstuk niet gelegen zijn. Zoo zal men ook, wanneer het segment F in het halve boloppervlak B overgaat, waarbij $\sigma_0 = 0$, voor V dezelfde waarde vinden, hetzij men $\alpha = 1$ of $\alpha = -1$ neemt. Is C een punt van het onderste segment van B, dan vallen de punten C en C' in elkaâr, en bestaat tusschen de coördinaten σ_I, μ_I de betrekking

$$\mu_I - (\alpha \sigma_0 + iV(1 - \sigma_0^2)) \sigma_I = 0,$$

waarin (34) verandert, door μ en σ te vervangen door μ_I en σ_I ; terwijl men voor V verkrijgt

$$\left. \begin{array}{l} \text{als O binnen R ligt, } V = \frac{2}{\pi e \sqrt{K}} \operatorname{bgtg} \frac{-\sqrt{K}}{-\sigma \sigma_I + \mu \mu_I}, \\ \text{als O buiten R ligt, } V = \frac{2}{\pi e \sqrt{K}} \operatorname{bgtg} \frac{\sqrt{K}}{-\sigma \sigma_I + \mu \mu_I}. \end{array} \right\} (42)$$

§ 15. Daar nu de potentiaal V van de lading, geïnduceerd op het afgeleide bolvormige segment F door de negatieve electriciteits-eenheid in C, voor elke ligging van C gevonden is, wordt verder de digtheid ρ van die lading bepaald door (29)

$$4\pi\rho = 2 \left(\frac{dV}{dr} \right)_{r_0 - \delta r_0} + \frac{\bar{V}}{r_0},$$

waarin r de voerstraal NO, derhalve $\left(\frac{dV}{dr} \right)_{r_0 - \delta r_0}$ de waarde van

$\frac{dV}{dr}$, als men het punt O binnen de ruimte R tot aan het oppervlak F verplaatst. Bij het differentieëren nu van V met betrekking tot r is ψ van r onafhankelijk, en noemende x, y, z de rechthoekige coördinaten van het punt (σ, μ, ψ), zal

$$\frac{d\sigma}{dr} = \frac{d\sigma}{dx} \frac{x}{r} + \frac{d\sigma}{dy} \frac{y}{r} + \frac{d\sigma}{dz} \frac{z - \alpha e p_0}{r},$$

$$\frac{d\mu}{dr} = \frac{d\mu}{dx} \frac{x}{r} + \frac{d\mu}{dy} \frac{y}{r} + \frac{d\mu}{dz} \frac{z - \alpha e p_0}{r}.$$

Hieruit volgt wegens de vergelijkingen (4*)

$$e \frac{d\sigma}{dr} = \frac{(1 - \sigma^2)(\sigma - \alpha\sigma_0\mu)}{(\mu^2 - \sigma^2)\sqrt{(1 - \sigma_0^2 - \sigma^2 - \mu^2 + 2\alpha\sigma_0\sigma\mu)}},$$

$$c \frac{d\mu}{dr} = \frac{-(1 - \mu^2)(\mu - \alpha\sigma_0\sigma)}{(\mu^2 - \sigma^2)\sqrt{(1 - \sigma_0^2 - \sigma^2 - \mu^2 + 2\alpha\sigma_0\sigma\mu)}}. *)$$

*) Deze waarden verkrijgt men op de volgende wijze:

Uit $x^2 + y^2 + (z - \alpha e p_0)^2 = r^2$

volgt door differentiatie

$$x = r \frac{dr}{dx}, \quad y = r \frac{dr}{dy}, \quad z - \alpha e p_0 = r \frac{dr}{dz};$$

door deze ten opzichte van r te differentieëren

$$\frac{dx}{dr} = \frac{dr}{dx} = \frac{x}{r}, \quad \frac{dy}{dr} = \frac{dr}{dy} = \frac{y}{r}, \quad \frac{dz}{dr} = \frac{dr}{dz} = \frac{z - \alpha e p_0}{r};$$

terwijl uit de vergelijkingen (4*) wordt afgeleid

$$x^2 + y^2 + z^2 = e^2(1 - \sigma^2 - \mu^2),$$

$$\left. \begin{aligned} x &= -e^2 \left(\sigma \frac{d\sigma}{dx} + \mu \frac{d\mu}{dx} \right), \\ y &= -e^2 \left(\sigma \frac{d\sigma}{dy} + \mu \frac{d\mu}{dy} \right), \\ z &= -e^2 \left(\sigma \frac{d\sigma}{dz} + \mu \frac{d\mu}{dz} \right), \end{aligned} \right\} \text{ of } \left\{ \begin{aligned} \mu \frac{d\mu}{dx} &= -\frac{x}{e^2} - \sigma \frac{d\sigma}{dx}, \\ \mu \frac{d\mu}{dy} &= -\frac{y}{e^2} - \sigma \frac{d\sigma}{dy}, \\ \mu \frac{d\mu}{dz} &= -\frac{z}{e^2} - \sigma \frac{d\sigma}{dz}. \end{aligned} \right.$$

Verder

$$1 - \sigma^2 = \frac{x^2 + y^2}{e^2(1 - \mu^2)} = \frac{\sigma^2(x^2 + y^2)}{z^2 + e^2\sigma^2},$$

of $z^2 + (e^2 - x^2 - y^2 - z^2)\sigma^2 - e^2\sigma^4 = 0.$

Differentieert men deze vergelijking achtereenvolgens ten opzichte van x , y en z , dan vindt men

$$\frac{d\sigma}{dx} = \frac{\sigma}{e^2(\mu^2 - \sigma^2)} x, \quad \frac{d\sigma}{dy} = \frac{\sigma}{e^2(\mu^2 - \sigma^2)} y, \quad \frac{d\sigma}{dz} = \frac{\sigma^2 - 1}{e^2\sigma(\mu^2 - \sigma^2)} z,$$

derhalve

$$x \frac{d\sigma}{dx} + y \frac{d\sigma}{dy} + (z - \alpha e p_0) \frac{d\sigma}{dz} = \frac{(x^2 + y^2 + z^2)\sigma}{e^2(\mu^2 - \sigma^2)} - \frac{z^2 + \alpha e p_0(\sigma^2 - 1)z}{e^2\sigma(\mu^2 - \sigma^2)} =$$

$$= \frac{(1 - \sigma^2 - \mu^2)\sigma}{\mu^2 - \sigma^2} - \frac{-\sigma\mu^2 + \alpha\sigma_0\mu(1 - \sigma^2)}{\mu^2 - \sigma^2} = \frac{(\sigma - \alpha\sigma_0\mu)(1 - \sigma^2)}{\mu^2 - \sigma^2}.$$

En omdat

$$\frac{d\mu}{dx} = -\frac{x}{\mu} \left\{ \frac{1}{e^2} + \frac{\sigma^2}{e^2(\mu^2 - \sigma^2)} \right\} = -\frac{\mu}{e^2(\mu^2 - \sigma^2)} x,$$

$$\frac{d\mu}{dy} = -\frac{\mu}{e^2(\mu^2 - \sigma^2)} y, \quad \frac{d\mu}{dz} = \frac{(1 - \mu^2)z}{e^2\mu(\mu^2 - \sigma^2)},$$

zal $x \frac{d\mu}{dx} + y \frac{d\mu}{dy} + (z - \alpha e p_0) \frac{d\mu}{dz} = \frac{-\mu(x^2 + y^2 + z^2)}{e^2(\mu^2 - \sigma^2)} + \frac{z^2 - \alpha e p_0(1 - \mu^2)z}{e^2\mu(\mu^2 - \sigma^2)} =$

$$= \frac{-\mu(1 - \sigma^2 - \mu^2) - \mu\sigma^2 - \alpha\sigma_0\sigma(\mu^2 - 1)}{\mu^2 - \sigma^2} = \frac{-(\mu - \alpha\sigma_0\sigma)(1 - \mu^2)}{\mu^2 - \sigma^2}.$$

Deze uitdrukkingen gaan, daar in dit geval het punt O op F ligt, d.i.

$$\mu - (\alpha\sigma_0 - i\sqrt{1 - \sigma_0^2})\sigma = 0,$$

over in

$$e \frac{d\sigma}{dr} = \frac{i\mu(1 - \sigma^2)}{\mu^2 - \sigma^2}, \quad e \frac{d\mu}{dr} = \frac{i\sigma(1 - \mu^2)}{\mu^2 - \sigma^2}. \quad \dots \quad (43)$$

Men stelle gemakshalve

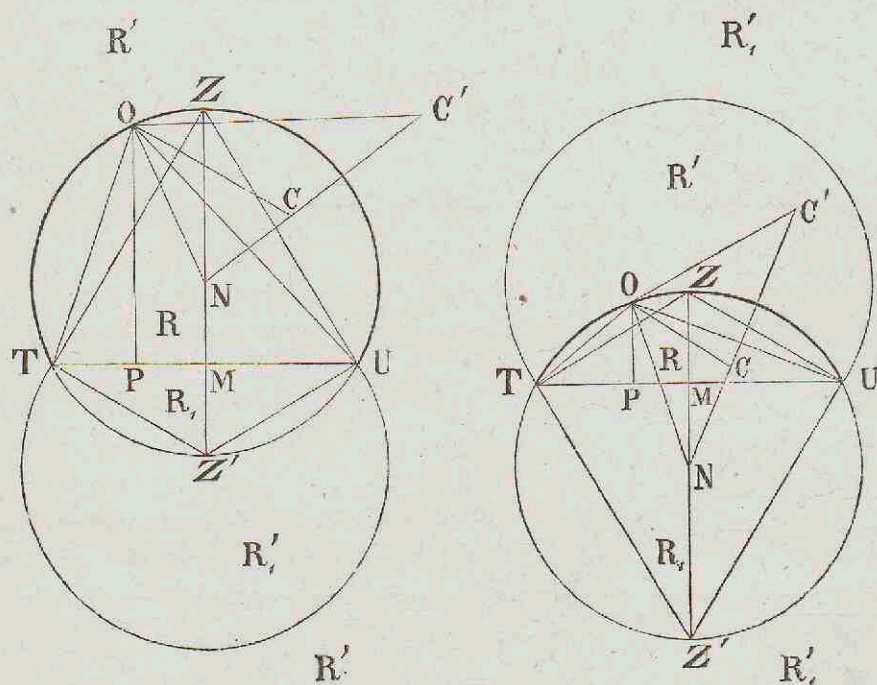
$$-\sigma\sigma_1 + \mu\mu_1 = v, \quad -\sigma\sigma' + \mu\mu' = v',$$

dan moet, om tot de waarde van $\frac{dV}{dr}$ te geraken, gebruik gemaakt

worden van de uitdrukkingen

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{\sqrt{K}} \operatorname{bgtg} \frac{\sqrt{K}}{v} \right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{K^3}} \operatorname{bgtg} \frac{\sqrt{K}}{v} + \frac{v}{K(v^2 + K)} \right) \frac{1}{2} \frac{dK}{dr} - \frac{1}{v^2 + K} \frac{dv}{dr},$$

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{\sqrt{K}} \operatorname{bgtg} \frac{-\sqrt{K}}{v} \right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{K^3}} \operatorname{bgtg} \frac{-\sqrt{K}}{v} - \frac{v}{K(v^2 + K)} \right) \frac{1}{2} \frac{dK}{dr} + \frac{1}{v^2 + K} \frac{dv}{dr}.$$



Wat het differentiaal-quotient $\frac{dK}{dr}$ betreft, in den driehoek OCN, waarvan $OC = e\sqrt{K}$, $NC = e\sqrt{k}$, is, als λ den hoek ONC beteekent,

$$K = 1 - \sigma_0^2 + k - 2\sqrt{1 - \sigma_0^2} \sqrt{k} \cos \lambda,$$

$$e \frac{dK}{dr} = 2 \left(\sqrt{1 - \sigma_0^2} - \sqrt{k} \cos \lambda \right). \quad \dots \quad (44)$$

En volgens (43)

$$e \frac{dv}{dr} = \frac{i}{\mu^2 - \sigma^2} \left(-(1 - \sigma^2) \mu \sigma_{\text{I}} + (1 - \mu^2) \sigma \mu_{\text{I}} \right),$$

of, als $-\sigma \mu_{\text{I}} + \mu \sigma_{\text{I}} = \tau$ gesteld wordt,

$$e \frac{dv}{dr} = \frac{-i}{\mu^2 - \sigma^2} (\tau + \sigma \mu v). \quad (45)$$

Door in (44) en (45) σ' , μ' respectievelijk in de plaats te zetten van σ_{I} , μ_{I} , en τ' voor $(-\sigma \mu' + \mu \sigma')$ te schrijven, zal

$$e \frac{dK'}{dr} = 2 \left(\sqrt{1 - \sigma_0^2} - \sqrt{k' \cos \lambda} \right), \quad (46)$$

$$e \frac{dv'}{dr} = \frac{-i}{\mu'^2 - \sigma'^2} (\tau' + \sigma' \mu' v'). \quad (47)$$

Wanneer men nu in

$$2e \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{\sqrt{K}} \text{bgtg} \frac{\sqrt{K}}{v} \right) + \frac{1}{\sqrt{1 - \sigma_0^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{K}} \text{bgtg} \frac{\sqrt{K}}{v},$$

$$2e \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{\sqrt{K}} \text{bgtg} \frac{-\sqrt{K}}{v} \right) + \frac{1}{\sqrt{1 - \sigma_0^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{K}} \text{bgtg} \frac{-\sqrt{K}}{v}$$

$\frac{dK}{dr}$ en $\frac{dv}{dr}$ door hunne waarden uit (44) en (45) vervangt, wordt de eerste dezer beide uitdrukkingen na herleiding

$$\frac{k - 1 + \sigma_0^2}{\sqrt{1 - \sigma_0^2} \sqrt{K^3}} \text{bgtg} \frac{\sqrt{K}}{v} + \frac{2}{v^2 + K} \left(\frac{(\sqrt{1 - \sigma_0^2} - \sqrt{k \cos \lambda}) v}{K} + \frac{i(\tau + \sigma \mu v)}{\mu^2 - \sigma^2} \right), \quad (48)$$

de tweede

$$\frac{k - 1 + \sigma_0^2}{\sqrt{1 - \sigma_0^2} \sqrt{K^3}} \text{bgtg} \frac{-\sqrt{K}}{v} - \frac{2}{v^2 + K} \left(\frac{(\sqrt{1 - \sigma_0^2} - \sqrt{k \cos \lambda}) v}{K} + \frac{i(\tau + \sigma \mu v)}{\mu^2 - \sigma^2} \right), \quad (49)$$

Verandert men daarna in (48) en (49) σ_{I} , μ_{I} in σ' , μ' , en voegt er $\frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{1 - \sigma_0^2}} = \frac{\sqrt{1 - \sigma_0^2}}{\sqrt{k}}$ als factor bij, dan verkrijgt men respectievelijk de vormen

$$\frac{\sqrt{1 - \sigma_0^2}}{\sqrt{k}} \left\{ \frac{k' - 1 + \sigma_0^2}{\sqrt{1 - \sigma_0^2} \sqrt{K'^3}} \text{bgtg} \frac{\sqrt{K'}}{v'} + \frac{2}{v'^2 + K'} \left(\frac{(\sqrt{1 - \sigma_0^2} - \sqrt{k' \cos \lambda}) v'}{K'} + \frac{i(\tau' + \sigma' \mu' v')}{\mu'^2 - \sigma'^2} \right) \right\}, \quad (50)$$

$$\frac{\sqrt{1 - \sigma_0^2}}{\sqrt{k}} \left\{ \frac{k' - 1 + \sigma_0^2}{\sqrt{1 - \sigma_0^2} \sqrt{K'^3}} \text{bgtg} \frac{-\sqrt{K'}}{v'} - \frac{2}{v'^2 + K'} \left(\frac{(\sqrt{1 - \sigma_0^2} - \sqrt{k' \cos \lambda}) v'}{K'} + \frac{i(\tau' + \sigma' \mu' v')}{\mu'^2 - \sigma'^2} \right) \right\}, \quad (51)$$

Uit de beschouwing der vergelijkingen (I.) (II.) (III.) blijkt nu, dat

$2 \left(\frac{dV}{dr} \right)_{r_0 - \delta r_0} + \frac{\bar{V}}{r_0}$ op eene constante na uit de som van twee der uitdrukkingen (48), (49), (50), (51) bestaat. Wegens de ligging van O op F geven (39) en (41) ter herleiding van (50) en (51) de waarden

$$\sqrt{K'} = \frac{\sqrt{(1-\sigma_0^2)}}{\sqrt{k}} \sqrt{K} = \frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{(1-\sigma_0^2)}} \sqrt{K}, v' = \frac{\pm \sqrt{(1-\sigma_0^2)}}{\sqrt{k}} v, \tau' = \frac{\mp \sqrt{(1-\sigma_0^2)}}{\sqrt{k}} \tau,$$

waarin het bovenste teeken geldt, als het punt C binnen R of R' ligt, en het onderste teeken, als C zich in de ruimte R_I of R'_I bevindt.

Hierdoor veranderen (50) en (51) in

$$\frac{1-\sigma_0^2-k}{\sqrt{(1-\sigma_0^2)}\sqrt{K^3}} \text{bgtg} \frac{\pm \sqrt{K}}{v} \pm \frac{2}{v^2+K} \left(\frac{(\sqrt{k}-\sqrt{1-\sigma_0^2} \cos \lambda) \sqrt{k} v}{\sqrt{(1-\sigma_0^2)} \cdot K} + \frac{i(-\tau + \sigma \mu v)}{\mu^2 - \sigma^2} \right), \quad (52)$$

$$\frac{1-\sigma_0^2-k}{\sqrt{(1-\sigma_0^2)}\sqrt{K^3}} \text{bgtg} \frac{\mp \sqrt{K}}{v} \mp \frac{2}{v^2+K} \left(\frac{(\sqrt{k}-\sqrt{1-\sigma_0^2} \cos \lambda) \sqrt{k} v}{\sqrt{(1-\sigma_0^2)} \cdot K} + \frac{i(-\tau + \sigma \mu v)}{\mu^2 - \sigma^2} \right), \quad (53)$$

waar het teeken den zoeven genoemden regel volgt, zoodat in het geval van (I.) de vormen (48) en (53) met het bovenste teeken, in het geval van (II.) (49) en (52) met het bovenste teeken, in het geval van (III.) (49) en (53) met het onderste teeken bij elkaar gevoegd moeten worden. Alzoo komt in het geval van (I.) de uitdrukking

$$\frac{1-\sigma_0^2-k}{\sqrt{(1-\sigma_0^2)}\sqrt{K^3}} \left(-\text{bgtg} \frac{\sqrt{K}}{v} + \text{bgtg} \frac{-\sqrt{K}}{v} \right) + \frac{2}{v^2+K} \left(\frac{(1-\sigma_0^2-k)v}{\sqrt{(1-\sigma_0^2)} \cdot K} + \frac{2i\tau}{\mu^2 - \sigma^2} \right), \quad (54)$$

en in het geval van (II.) en (III.)

$$\frac{1-\sigma_0^2-k}{\sqrt{(1-\sigma_0^2)}\sqrt{K^3}} \left(\text{bgtg} \frac{\sqrt{K}}{v} - \text{bgtg} \frac{-\sqrt{K}}{v} \right) - \frac{2}{v^2+K} \left(\frac{(1-\sigma_0^2-k)v}{\sqrt{(1-\sigma_0^2)} \cdot K} + \frac{2i\tau}{\mu^2 - \sigma^2} \right). \quad (55)$$

Ten einde deze beide laatste te vereenvoudigen, schrijve men $1 - \sigma_0^2 - k$ in de gedaante

$$\left(\mu_1 - (\alpha \sigma_0 - i \sqrt{1-\sigma_0^2}) \sigma_1 \right) \left(\mu_1 - (\alpha \sigma_0 + i \sqrt{1-\sigma_0^2}) \sigma_1 \right),$$

welk produkt, omdat hier $\frac{\mu}{\sigma} = \alpha \sigma_0 - i \sqrt{1-\sigma_0^2}$, overgaat in

$$\left(\mu_1 - \frac{\mu}{\sigma} \sigma_1 \right) \left(\mu_1 - \frac{\sigma}{\mu} \sigma_1 \right) = \frac{-\tau v}{\sigma \mu};$$

terwijl uit $\frac{\mu}{\sigma} - \frac{\sigma}{\mu} = -2i \sqrt{1-\sigma_0^2}$ volgt $\frac{2i}{\mu^2 - \sigma^2} = \frac{-1}{\sqrt{(1-\sigma_0^2)} \cdot \sigma \mu}$.

Hierdoor wordt

$$\frac{(1-\sigma_0^2-k)v}{\sqrt{(1-\sigma_0^2)} \cdot K} + \frac{2i\tau}{\mu^2 - \sigma^2} = - \frac{\tau v^2}{\sqrt{(1-\sigma_0^2)} \cdot \sigma \mu K} - \frac{\tau}{\sqrt{(1-\sigma_0^2)} \sigma \mu} = - \frac{\tau}{\sqrt{(1-\sigma_0^2)} \sigma \mu} \frac{v^2+K}{K}.$$

Substitueert men nu nog $\pi - \text{bgtg} \frac{\sqrt{K}}{v}$ voor $\text{bgtg} \frac{-\sqrt{K}}{v}$, alsmede de oorspronkelijke vormen $(-\sigma\sigma_1 + \mu\mu_1)$ en $(-\sigma\mu_1 + \mu\sigma_1)$ voor v en τ , dan zal men uit (54) en (55) voor de elektrische digtheid ρ in het punt (σ, μ, ψ) van het afgeleide bolvormige segment F verkrijgen:

(V.) als C binnen R ligt,

$$\rho = \frac{1}{2\pi^2 e^2 \sqrt{1-\sigma_0^2}} \left\{ \frac{1-\sigma_0^2-k}{\sqrt{K^3}} \left(\frac{1}{2} \pi - \text{bgtg} \frac{\sqrt{K}}{-\sigma\sigma_1 + \mu\mu_1} \right) + \frac{\sigma\mu_1 - \mu\sigma_1}{\sigma\mu K} \right\};$$

(VI.) als C buiten R ligt,

$$\rho = \frac{-1}{2\pi^2 e^2 \sqrt{1-\sigma_0^2}} \left\{ \frac{1-\sigma_0^2-k}{\sqrt{K^3}} \left(\frac{1}{2} \pi - \text{bgtg} \frac{\sqrt{K}}{-\sigma\sigma_1 + \mu\mu_1} \right) + \frac{\sigma\mu_1 - \mu\sigma_1}{\sigma\mu K} \right\}.$$

§ 16. Een nader onderzoek dezer waarden doet zien, dat ρ steeds positief blijft, zooals ook zijn moet wegens het aanwezen van negatieve electriciteit in het punt C. Aan den rand van F $\sigma = 0$, $\mu = 0$, ρ oneindig groot, en daar van punten op het segment, die zeer dicht bij den rand liggen, de afstand tot dezen $\frac{zr_0}{c} = z\sqrt{1-\sigma_0^2}$ bedraagt, terwijl volgens de vergelijkingen (33*)

$$\mu = \sqrt{(ai\sigma_0 + \sqrt{1-\sigma_0^2})} \sqrt{\left(\frac{z}{e}\right)}, \quad \sigma = i\sqrt{(-ai\tau_0 + \sqrt{1-\tau_0^2})} \sqrt{\left(\frac{z}{e}\right)},$$

heeft het produkt van de digtheid ρ in zoodanig punt O of (σ, μ, ψ) met den vierkantswortel uit den afstand van O tot den rand, naarmate het punt dezen nadert, de bepaalde grenswaarde

$$\lim. \left\{ \rho \sqrt{(z\sqrt{1-\sigma_0^2})} \right\} = \frac{\pm 1}{2\pi^2 e \sqrt{(e\sqrt{1-\sigma_0^2})}}.$$

$$\frac{i\mu_1 \sqrt{(-ai\sigma_0 + \sqrt{1-\sigma_0^2})} - \sigma_1 \sqrt{(ai\tau_0 + \sqrt{1-\tau_0^2})}}{iK},$$

waarin het bovenste teeken geldt voor (V.), het onderste teeken voor (VI.).

Wanneer de punten C en N in elkaâr vallen, wordt de elektrische digtheid als $\alpha = 1$ uit (V.), als $\alpha = -1$ uit (VI.) afgeleid, door daarin

te stellen $\sigma_1 = \sigma_0$, $\mu_1 = \alpha$; alsmede, daar $\frac{\mu}{\sigma} = \alpha\sigma_0 - i\sqrt{1-\sigma_0^2}$,

$K = 1 - \sigma_0^2$, $-\sigma_0 v + \alpha \mu = -i\alpha \mathcal{V}(1 - \sigma_0^2) \cdot \sigma$, $-\alpha \sigma + \sigma_0 u =$
 $= -i\alpha \mathcal{V}(1 - \sigma_0^2) \cdot \mu$, waardoor zoowel voor $\alpha = 1$ als voor $\alpha = -1$
 de vergelijking

$$\varrho = \frac{1}{2\pi^2 e^2 (1 - \sigma_0^2)} \left(\frac{1}{2} \pi - \text{bgtg} \left(\frac{i}{\sigma} \right) + \frac{i}{\sigma} \right). \quad (56)$$

ontstaat.

Vervangt men in de vergelijkingen (IV.) de coördinaten σ , μ van O respectievelijk door σ_1 , μ_1 , die van C , dan verandert daarin de groot-
 heid $K = 1 - \sigma_0^2 - \sigma^2 - \mu^2 + 2\alpha\sigma_0\sigma\mu$ in k , en volgens (30) komt voor
 de hoeveelheid electriciteit Q_c , waaruit de geïnduceerde lading bestaat,

$$\left. \begin{aligned} C \text{ binnen } R, Q_c &= \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{\mathcal{V}(1 - \sigma_0^2)}{\mathcal{V}k} \text{bgtg} \frac{\alpha \mathcal{V}k}{-\sigma_0 \sigma_1 + \alpha \mu_1} + \text{bgtg} \left(\frac{-i}{\sigma_1} \right) \right\}, \\ C \text{ buiten } R, Q_c &= \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{\mathcal{V}(1 - \sigma_0^2)}{\mathcal{V}k} \text{bgtg} \frac{-\alpha \mathcal{V}k}{-\sigma_0 \sigma_1 + \alpha \mu_1} + \text{bgtg} \left(\frac{i}{\sigma_1} \right) \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

Bij het in elkaar vallen der punten C en N wordt nu de hoeveelheid
 electriciteit Q_n der geïnduceerde lading, waarvan de digtheid in (56)
 is uitgedrukt, en die aan de oppervlakte van het segment F $\frac{1}{r_0}$ of $\frac{1}{e\mathcal{V}(1 - \sigma_0^2)}$
 tot constante potentiaalwaarde heeft, verkregen, door in (57) σ_0 in
 plaats van σ_1 , α in plaats van μ_1 te zetten. Opmerkende, dat het punt
 N als $\alpha = 1$ binnen R , als $\alpha = -1$ in de ruimte R_1 ligt, zoo moet
 de grenswaarde bepaald worden, waartoe $\frac{1}{\mathcal{V}k} \text{bgtg} \frac{+\mathcal{V}k}{-\sigma_0 \sigma_1 + \alpha \mu_1}$
 nadert, naarmate de afstand tusschen C en N afneemt; $\mathcal{V}k$ wordt
 dan onbepaald kleiner, terwijl $-\sigma_0 \sigma_1 + \alpha \mu_1$ tot de grens $1 - \sigma_0^2 > 1$
 nadert, zoodat

$$\lim. \left(\frac{1}{\mathcal{V}k} \text{bgtg} \frac{+\mathcal{V}k}{-\sigma_0 \sigma_1 + \alpha \mu_1} \right) = \frac{1}{1 - \sigma_0^2}.$$

De beide waarden van Q_n voor $\alpha = 1$ en $\alpha = -1$ zijn alzoo ver-
 eenigd in de vergelijking

$$Q_n = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{\mathcal{V}(1 - \sigma_0^2)} + \text{bgtg} \left(\frac{-\alpha i}{\sigma_0} \right) \right). \quad (58)$$

Q_n is de hoeveelheid electriciteit, die, medegedeeld aan het geïsoleerde
 en buiten alle influentie-werking geplaatste segment F , zich daarover zoo-
 danig verbreedt, dat hare digtheid bedraagt ϱ , in (56), en de potentiaal V ,

in (IV.) aangegeven. De electriche digtheid $\frac{Q}{Q_n} \rho$ en potentiaal $\frac{Q}{Q_n} V$ eener willekeurig gegevene hoeveelheid Q , over F vrij verdeeld, vindt men derhalve door middel van de zooeven genoemde vergelijkingen, verbonden met (58).

D. Methode van Kötteritzsch. *)

§ 17. Deze methode is eene herhaalde toepassing der aequivalente massa-verplaatsing. Hieronder verstaat men eene massa-verdeeling, die van de gegevene verschilt, doch zoodanig dat de werking van beide op punten, binnen gegevene ruimten gelegen, dezelfde is. Hare potentialen in die punten zijn of gelijk, of verschillen slechts eene constante.

Voorbeelden van aequivalente massa-verplaatsing zijn:

1. Eene electriche lading van constante digtheid over een boloppervlak vervangende eene evengroote hoeveelheid electriciteit, geconcentreerd in het middelpunt; waarbij de potentiaal in alle punten buiten en op het oppervlak niet verandert.

2. Massa's, die binnen een willekeurig gesloten oppervlak S liggen, kan men altijd, maar slechts op eene enkele wijze, aequivalent voor alle punten van S en van de ruimte daarbuiten op dit oppervlak verplaatsen, zoodat de potentiaal in genoemde punten dezelfde blijft.

3. Voor willekeurig verdeelde massa's buiten een gesloten oppervlak S kan eene massa-verdeeling over S in de plaats gesteld worden, waarvan de potentiaal voor alle punten, die zich bevinden op S of in de ruimte daarbinnen, slechts eene constante grootte verschilt van de potentiaal der oorspronkelijke massa's.

Alvorens nu tot de methode over te gaan, moet de overeenkomst, die er bestaat tusschen de uitwendige potentiaal van electriche massa's, gelegen binnen een gegeven boloppervlak, met de uitwendige potentiaal van de op dat oppervlak geheel willekeurig verdeelde electriciteit, aangetoond, alsmede de digtheid der lading op het boloppervlak, indien het afgeleid is, door genoemde vaste electriche massa's geïnduceerd, bepaald worden.

*) Kötteritzsch: Lehrbuch der Electrostatik Cap. IV, § 4.

Vroeger zagen wij, dat de potentiaal eener gansch willekeurig over den bol verdeelde lading in een punt P op den afstand r van het middelpunt, den oorsprong der coördinaten, naarmate $r < R$ of $r > R$ volgens onze eerste vergelijkingen (1) en (2) zich laat brengen onder den vorm

$$V_i = P_0 + P_1 \left(\frac{r}{R}\right) + P_2 \left(\frac{r}{R}\right)^2 + \dots = \sum_0^{\infty} P_n \left(\frac{r}{R}\right)^n,$$

$$V_u = P_0 \left(\frac{R}{r}\right) + P_1 \left(\frac{R}{r}\right)^2 + P_2 \left(\frac{R}{r}\right)^3 + \dots = \sum_0^{\infty} P_n \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}$$

waarin R de straal, en de coëfficiënten P_n functiën van de beide andere polaire coördinaten θ en φ van het punt P zijn.

Beteekent nu dq het element van de binnen den bol gegevene elektrische massa's, r_1 de voerstraal van dat element, α de hoek tusschen r en r_1 , dan is de potentiaal van die massa's in het uitwendige punt P

$$V = \int \frac{dq}{\sqrt{r^2 - 2rr_1 \cos \alpha + r_1^2}}.$$

Daar altijd $r > r_1$ heeft men

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rr_1 \cos \alpha + r_1^2}} = \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{r_1}{r} \cos \alpha + \frac{r_1^2}{r^2}}} = \frac{1}{r} \sum_0^{\infty} P_n \left(\frac{r_1}{r}\right)^n,$$

waardoor

$$V = \int \frac{dq}{r} \sum_0^{\infty} P_n \left(\frac{r_1}{r}\right)^n = \sum_0^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \int \frac{dq}{r_1} P_n \left(\frac{r_1}{R}\right)^{n+1}$$

of

$$V = \sum_0^{\infty} P'_n \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}$$

wanneer men stelt:

$$P'_n = \frac{1}{R} \int P_n \left(\frac{r_1}{R}\right)^n dq.$$

Nemende voor de willekeurig verdeelde lading de op het afgeleide boloppervlak door de gegevene elektrische massa's geïnduceerde:

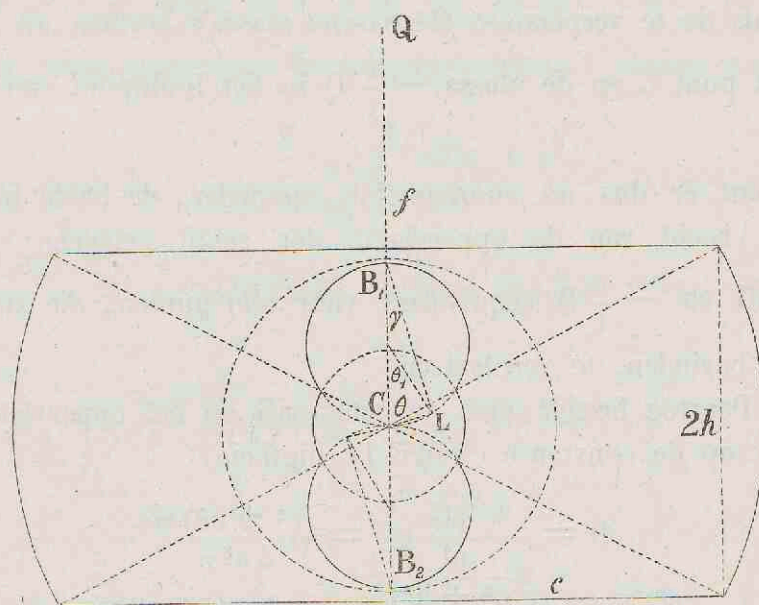
$$V + V_u = 0,$$

$$V_u = - \sum_0^{\infty} P'_n \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}, \quad V_i = - \sum_0^{\infty} P'_n \left(\frac{r}{R}\right)^n, \quad \dots \quad (1)$$

zoodat de digtheid

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{d\bar{V}_a}{dr} - \frac{d\bar{V}_i}{dr} \right) = -\frac{1}{4\pi R} \sum_0^{\infty} (2n+1) P'_n \dots (2)$$

§ 18. De vorm dan van den geleider, waarover de electriciteitsverdeeling zal worden bepaald, is hier eene bolvormige schijf, waarvan de beide evenwijdige grensvlakken c tot straal hebben, en op den afstand h van het middelpunt C der schijf verwijderd zijn. In het verlengde van de as dezer geïsoleerde schijf bevindt zich een influenserend massapunt, waarvan de massa Q en de afstand tot C f bedraagt; terwijl men de schijf zooveel electriciteit heeft medegedeeld, dat in den evenwigtstoestand de totale potentiaal binnen de schijf en aan de oppervlakte gelijk is aan G .



Laat C de pool zijn van een polair coördinatenstelsel en de hoek θ gerekend worden van af het naar Q toegekeerde deel van de as der schijf; $a < h$ de straal des boloppervlaks, uit C als middelpunt beschreven, ten opzichte waarvan het electrisch beeld van de oppervlakte der schijf moet worden geconstrueerd.

De electrische beelden der beide evenwijdige grensvlakken zijn dan twee symmetrisch gelegene boloppervlakken ${}_1B$ en ${}_2B$, die $\frac{a^2}{2h}$ tot straal hebben, en waarvan de middelpunten zich bevinden in de as op den

afstand $\frac{a^2}{2h}$ ter weërszijde van C. Van den rand der schijf is het electrisch beeld een boloppervlak F, uit C als middelpunt met den straal $\frac{a^2}{\sqrt{(c^2 + h^2)}}$ beschreven. Evenwel komen van ${}_1B$, ${}_2B$ en F alleen die gedeelten in aanmerking, waardoor het electrisch beeld van de oppervlakte der schijf uitwendig begrensd wordt. Daar in alle punten van het boloppervlak met den straal a de potentiaal der massa Q gelijk is aan die eener massa $\frac{a}{f}Q$, geconcentreerd in een punt, dat in de as ligt aan denzelfden kant van C als Q, en op den afstand $\frac{a^2}{f}$ van C, zoo zal in de punten van dat oppervlak de potentiaalwaarde van electrische massa's, die men aequivalent op het electrisch beeld van de oppervlakte der schijf verplaatsen kan, en van de massa Q te zamen G zijn, als de te verplaatsen electrische massa's bestaan uit de massa aG in het punt C en de massa $-\frac{a}{f}Q$ in het beeldpunt van Q geconcentreerd.

Het komt er dus nu voornamelijk op neder, de beide binnen het electrisch beeld van de oppervlakte der schijf gelegene electrische massa's aG en $-\frac{a}{f}Q$ aequivalent voor alle punten, die zich buiten dat beeld bevinden, te verplaatsen.

§ 19. Daartoe brenge men de massa aG op het oppervlak F over, zoodat hierop de constante electrische digtheid

$$D' = \frac{aG}{4\frac{a^4}{c^2 + h^2}\pi} = \frac{(c^2 + h^2)G}{4a^3\pi} \dots \dots \dots (3)$$

Om vervolgens de massa $-\frac{a}{f}Q$ op ${}_1B$ te kunnen overbrengen moet een nieuw polair coördinaten-stelsel der θ_1 en r worden aangenomen, dat het middelpunt van ${}_1B$ tot pool heeft, en waarvan de hoek θ_1 van af het naar C gerigte gedeelte van de as der schijf gerekend wordt. De afstand van het massapunt $-\frac{a}{f}Q$ tot aan de nieuwe pool bedraagt dan $\frac{a^2}{2h} - \frac{a^2}{f} = a^2 \left(\frac{f - 2h}{2hf} \right)$, die men als positief of negatief in rekening moet brengen, naarmate $f \gtrless 2h$, zoodat de potentiaal

van genoemd massapunt in buiten ,B gelegene punten zijn zal:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{a}{f} Q \\
 & \sqrt{\left\{ r^2 - 2a^2 \frac{f-2h}{2hf} r \cos \theta_1 + \left(a^2 \frac{f-2h}{2hf} \right)^2 \right\}} \\
 & = -\frac{a}{f} Q \sum_0^{\infty} \left(\frac{a^2}{r} \right)^{n+1} \left(\frac{a^2(f-2h)}{2hf} \right)^n \frac{1}{\frac{a^2}{2h}} P^n(\cos \theta_1) = \\
 & = \sum_0^{\infty} \left(\frac{a^2}{r} \right)^{n+1} B'_n ;
 \end{aligned}$$

maar volgens (1) en (2), doch met het tegengestelde teeken, kan men de massa $-\frac{a}{f} Q$ aequivalent voor alle punten buiten ,B vervangen door eene massa-verdeeling op dit oppervlak met de elektrische digtheid

$$\frac{1}{4\pi} \frac{a^2}{2h} \sum_0^{\infty} (2m+1) B'_m.$$

Dat is, als ,D^1 de elektrische digtheid van deze lading over ,B wordt genoemd

$$\left. \begin{aligned}
 \text{,D}^1 &= -\frac{h^2}{a^3 f \pi} Q \sum_0^{\infty} (2m+1) B'_m, \\
 B'_m &= \left(\frac{f-2h}{f} \right)^m P^m(\cos \theta_1).
 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

Daar echter een gedeelte van het electrisch oppervlak ,B binnen het electrisch beeld van de oppervlakte der schijf ligt, en wel het binnen F gelegene gedeelte, zoo brenge men de lading daarvan aequivalent voor uitwendige punten op F over, en bepale daartoe de potentiaal van dat gedeelte van ,B met betrekking tot het coördinaten-stelsel, waarvan de pool ligt in C , in een buiten F gelegen punt P (r, θ', φ'). Laat nu behalve C nog B_1 het snijpunt van de as der schijf met ,B zijn, L (ϱ, θ, φ) een punt van het gedeelte des oppervlaks ,B binnen F , γ de hoek LB_1C , dan is

$$\theta + \gamma = \frac{\pi}{2}; \quad \theta_1 = 2\gamma$$

waaruit volgt

$$\theta_1 = \pi - 2\theta; \quad \cos \theta_1 = -\cos 2\theta.$$

$$\varrho = CL = B_1C \sin \gamma = \frac{a^2}{h} \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = \frac{a^2}{h} \cos \theta.$$

Omdat verder de cosinus van den scherpen hoek tusschen de normaal ν in L van B en de normaal van het boloppervlak, uit C als middelpunt met den straal ϱ beschreven, gelijk is aan $\frac{d\varrho}{d\nu}$, zoo ontstaat voor de gevraagde potentiaal in het punt P de uitdrukking

$$= \frac{h^2}{a^3 \int \pi} Q \int_{\text{bgtg} \frac{c}{h}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \frac{\sum_0^{\infty} (2m+1) B_m \varrho^2 \sin \theta d\theta d\varphi}{\frac{d\varrho}{d\nu} \sqrt{(\varrho^2 - 2\varrho r \cos \delta + r^2)}},$$

waarin $\cos \delta = \cos LCP = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos (\varphi - \varphi')$.

Stel nu in de ontwikkeling volgens kogelfunctiën

$$\frac{1}{\sqrt{(\varrho^2 - 2\varrho r \cos \delta + r^2)}} = \sum_0^{\infty} \frac{\varrho^n}{r^{n+1}} P^n(\cos \delta)$$

voor een oogenblik $\cos \delta = z$, alsmede $\cos \theta = x$, $\cos \theta' = x'$, $\varphi - \varphi' = \psi$, dan is

$$P^n(z) = \sum_0^n (-1)^m a_m^n P_m^n(x) P_m^n(x') \cos m\psi,$$

$$\text{waar } a_m^n = 2 \frac{(1.3.5 \dots (2n-1))^2}{H(n+m) H(n-m)}, \quad a_0^n = \left(\frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{1.2.3 \dots n} \right)^2,$$

$$P_0^n(x) = \frac{1.2.3 \dots n}{1.3.5 \dots (2n-1)} P^n(x).$$

Hieruit volgt

$$\int_0^{2\pi} P^n(z) d\psi = 2\pi P^n(x) P^n(x'),$$

of, als men den hoek φ rekt van af het vlak gaande door de as der schijf en het punt P, zoodat $\varphi' = 0$, en voor z , ψ , x , x' , hunne waarden weder in de plaats stelt

*) E Heine: Handbuch der Kugelfunctionen, Berlin 1861, S 175.

$$\int_0^{2\pi} P^n(\cos \delta) d\varphi = 2\pi P^n(\cos \theta) P^n(\cos \theta').$$

De potentiaal in het punt P wordt daardoor gelijk aan

$$\begin{aligned} & -2 \frac{h^2}{a^3 f} Q \sum_0^\infty \frac{P^n(\cos \theta')}{r^{n+1}} \int_{\text{bgtg } \frac{c}{h}}^{\frac{\pi}{2}} P^n(\cos \theta) \sum_0^\infty (2m+1) B_m \frac{q^{n+2}}{\frac{d\varrho}{d\nu}} \sin \theta d\theta = \\ & = -2 \frac{h^2}{a^3 f} Q \sum_0^\infty \left(\frac{a^2}{\sqrt{c^2+h^2} r} \right)^{n+1} P^n(\cos \theta') \int_{\text{bgtg } \frac{c}{h}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{q}{\sqrt{c^2+h^2}} \right)^n \frac{q^2}{a^2} \frac{d\varrho}{\sqrt{c^2+h^2} d\nu} \\ & \cdot P^n(\cos \theta) \sum_0^\infty (2m+1) B_m \sin \theta d\theta. \end{aligned}$$

Vervangt men nu nog q door zijne hiervoren gevondene waarde, tevens opmerkende dat $\frac{d\varrho}{d\nu} = \cos \theta$

$$\left(\frac{q}{\sqrt{c^2+h^2}} \right)^n \frac{q^2}{\sqrt{c^2+h^2}} \frac{d\varrho}{d\nu} = \frac{a^2}{h^2} \sqrt{c^2+h^2} \left(\frac{\sqrt{c^2+h^2}}{h} \right)^n \cos^{n+1} \theta.$$

En de vorige uitdrukking voor de potentiaal gaat over in:

$$\begin{aligned} & -2 \frac{\sqrt{c^2+h^2}}{a f} Q \sum_0^\infty \left(\frac{a^2}{\sqrt{c^2+h^2} r} \right)^{n+1} \left(\frac{\sqrt{c^2+h^2}}{h} \right)^n P^n(\cos \theta') \\ & \int_{\text{bgtg } \frac{c}{h}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1} \theta P^n(\cos \theta) \sum_0^\infty (2m+1) B_m \sin \theta d\theta = \\ & = -2 \frac{\sqrt{c^2+h^2}}{a f} Q \sum_0^\infty \left(\frac{a^2}{\sqrt{c^2+h^2} r} \right)^{n+1} F_n^1. \end{aligned}$$

De electriche digtheid op het boloppervlak F der aequivalent overgebragte lading van het binnen F gelegene gedeelte van B zal dan zijn

$$\frac{-2 \frac{\sqrt{c^2+h^2}}{a f} Q}{4 \frac{a^2}{\sqrt{c^2+h^2}} \pi} \sum_0^\infty (2m+1) F_m^1 = -\frac{2(c^2+h^2)}{4a^3 f \pi} Q \sum_0^\infty (2m+1) F_m^1.$$

Maar op F was reeds eene lading met de digtheid D' , zoodat voor de totale electriche digtheid D_1

$$D_1 = \frac{c^2 + h^2}{4a^3 \pi} \left(G - \frac{2Q}{f} \sum_0^{\infty} m(2m+1) F_m^1 \right)$$

$$F_m^1 = \left(\frac{\sqrt{c^2 + h^2}}{h} \right)^m P^m(\cos \theta) \int_{\text{bgtg } \frac{c}{h}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m+1} \theta P^m(\cos \theta) \sum_0^{\infty} n(2n+1) B_n \sin \theta d\theta \quad (5)$$

$$B_n = \left(\frac{f - 2h}{f} \right)^n P^n(-\cos 2\theta).$$

Een gedeelte slechts dezer electriche lading van F draagt bij tot de vorming van het electricch beeld van de oppervlakte der schijf, een ander gedeelte bevindt zich binnen ${}_1B$, het overige der lading binnen ${}_2B$, welke beide laatste deelen equivalent op ${}_1B$ en ${}_2B$ moeten worden overgebracht.

Men bepale daartoe vooreerst de potentiaal van het binnen ${}_1B$ gelegene gedeelte met betrekking tot het coördinatenstelsel, waarvan de pool is het middelpunt van ${}_1B$, in een punt buiten dit oppervlak. Deze potentiaal heeft, als θ^0 en θ^1 de grenzen zijn der integratie ten opzichte van θ , tot waarde

$$\int_{\theta^0}^{\theta^1} \int_0^{2\pi} \frac{D_1 \varrho^2 \sin \theta_1 d\theta_1 d\varphi}{\frac{d\varrho}{dv} \sqrt{(\varrho^2 - 2\varrho r \cos \delta + r^2)}}$$

of als men integreert met betrekking tot φ

$$2\pi \sum_0^{\infty} n \frac{P^n(\cos \theta_1)}{r^{n+1}} \int_{\theta^0}^{\theta^1} \varrho^n D_1 P^n(\cos \theta_1) \varrho^2 \sin \theta_1 d\theta_1 \frac{d\varrho}{dv}$$

Wat de grenzen θ^0 en θ^1 der integratie betreft doen zich de gevallen voor, dat het middelpunt van ${}_1B$ ligt binnen, op, of buiten het oppervlak F, dat is

$$\frac{a^2}{2h} \leq \frac{a^2}{\sqrt{c^2 + h^2}},$$

of

$$c \begin{matrix} < \\ \equiv \\ > \end{matrix} h\sqrt{3}.$$

Voor $c < h\sqrt{3}$

$$\theta^0_1 = \pi - 2 \operatorname{bgtg} \frac{c}{h}, \quad \theta'_1 = \pi,$$

benevens de vergelijkingen

$$e \cos \theta_1 + \frac{a^2}{\sqrt{c^2 + h^2}} \cos \theta = \frac{a^2}{2h},$$

$$e \sin \theta_1 = \frac{a^2}{\sqrt{c^2 + h^2}} \sin \theta,$$

$$\left(\frac{d\theta}{dv}\right)^2 = \cos^2(\theta + \theta_1).$$

Voor $c = h\sqrt{3}$

$$\theta^0_1 = \pi - 2 \operatorname{bgtg} \sqrt{3}, \quad \theta'_1 = \frac{\pi}{2},$$

en daarbij de vergelijkingen

$$e \cos \theta_1 + \frac{a^2}{\sqrt{c^2 + h^2}} \cos \theta = \frac{a^2}{2h},$$

$$e \sin \theta_1 = \frac{a^2}{\sqrt{c^2 + h^2}} \sin \theta,$$

$$\left(\frac{d\theta}{dv}\right)^2 = \cos^2 \theta_1.$$

Voor $c > h\sqrt{3}$

bestaat de integratie ten opzichte van θ_1 uit twee deelen: het eene deel strekt zich uit van $\theta^0_1 = 0$ tot $\theta'_1 = \operatorname{bg} \sin \frac{2h}{\sqrt{c^2 + h^2}}$, het andere heeft tot grenzen

$$\theta^0_1 = \pi - 2 \operatorname{bgtg} \frac{c}{h}, \quad \theta'_1 = \operatorname{bg} \sin \frac{2h}{\sqrt{c^2 + h^2}},$$

met de vergelijkingen

$$e \cos \theta_1 + \frac{a^2}{\sqrt{c^2 + h^2}} \cos \theta = \frac{a^2}{2h},$$

$$e \sin \theta_1 = \frac{a^2}{\sqrt{c^2 + h^2}} \sin \theta,$$

$$\left(\frac{d\theta}{dv}\right)^2 = \cos^2(\theta + \theta_1).$$

In elk geval volgt uit de bijgaande vergelijkingen

$$e = \frac{a^2}{\sqrt{c^2 + h^2}} \frac{\sin \theta}{\sin \theta_1};$$

door deze waarde van e in elk der eerste vergelijkingen in de plaats te stellen

$$\sin(\theta + \theta_1) = \frac{\sqrt{c^2 + h^2}}{2h} \sin \theta_1,$$

zoodat hieruit gevonden wordt

$$\left. \begin{aligned} \sin \theta &= \sin \theta_1 \left\{ \frac{\sqrt{c^2 + h^2}}{2h} \cos \theta_1 \pm \sqrt{1 - \frac{c^2 + h^2}{(2h)^2} \sin^2 \theta_1} \right\}, \\ e &= \frac{a^2}{\sqrt{c^2 + h^2}} \left\{ \frac{\sqrt{c^2 + h^2}}{2h} \cos \theta_1 \pm \sqrt{1 - \frac{c^2 + h^2}{(2h)^2} \sin^2 \theta_1} \right\}. \end{aligned} \right\} (6)$$

Met betrekking tot het teeken moet men opmerken, dat voor $c < h\sqrt{3}$ alleen het bovenste teeken geldt, zoo ook voor $c = h\sqrt{3}$, in welk geval

$$\sin \theta = \sin 2\theta_1, \quad e = 2 \frac{a^2}{\sqrt{c^2 + h^2}} \cos \theta_1.$$

Voor $c > h\sqrt{3}$ moet bij de integratie van $\theta'_1 = 0$ tot $\theta'_1 = \text{bg} \sin \frac{2h}{\sqrt{c^2 + h^2}}$ het onderste, en bij de integratie van $\theta'_1 = \pi - 2 \text{bgtg} \frac{c}{h}$ tot $\theta'_1 = \text{bg} \sin \frac{2h}{\sqrt{c^2 + h^2}}$ het bovenste teeken gebruikt worden.

Ook neme men voor $\frac{de}{dv}$ steeds de positieve waarde.

Wij zullen nu, om verder alle drie de gevallen te gelijk te kunnen behandelen, in de laatste uitdrukking voor de potentiaal de teekens θ'_1 en θ_1 behouden, en stellen

$$e = \frac{a^2}{\sqrt{c^2 + h^2}} \chi(\theta_1), \quad D_1 = D_1(\theta_1), \quad \frac{de}{dv} = [\psi(\theta_1)]^{-1},$$

waardoor de potentiaal zich laat brengen onder den vorm

$$2\pi \sum_0^{\infty} \left(\frac{a^2}{2h} \right)^{n+1} P^n(\cos \theta_1)$$

$$\int_{\theta_1^0}^{\theta_1'} \left(\frac{a^2}{\sqrt{c^2+h^2}} \chi(\theta_1) \right)^n D_1(\theta_1) P^n(\cos \theta_1) \frac{\left(\frac{a^2}{\sqrt{c^2+h^2}} \chi(\theta_1) \right)^2}{\frac{a^2}{2h}} \psi(\theta_1) \sin \theta_1 d\theta_1 =$$

$$= \frac{4\pi a^2 h}{c^2+h^2} \sum_0^{\infty} \left(\frac{a^2}{2h} \right)^{n+1} \left(\frac{2h}{\sqrt{c^2+h^2}} \right)^n P^n(\cos \theta_1)$$

$$\int_{\theta_1^0}^{\theta_1'} [\chi(\theta_1)]^{n+2} \psi(\theta_1) D_1(\theta_1) P^n(\cos \theta_1) \sin \theta_1 d\theta_1.$$

De elektrische digtheid op het holoppervlak ${}_1B$ der aequivalent overgebrachte lading van het binnen ${}_1B$ gelegene gedeelte van F zal derhalve zijn :

$$\begin{aligned} {}_1D^2 &= \frac{2h^2}{c^2+h^2} \sum_0^{\infty} (2m+1) {}_1B_m^1, \\ {}_1B_m^1 &= \left(\frac{2h}{\sqrt{c^2+h^2}} \right)^m P^m(\cos \theta_1) \\ &\int_{\theta_1^0}^{\theta_1'} [\chi(\theta_1)]^{m+2} \psi(\theta_1) D_1(\theta_1) P^m(\cos \theta_1) \sin \theta_1 d\theta_1. \end{aligned} \quad (7)$$

Om vervolgens de lading van het binnen ${}_2B$ gelegene gedeelte van het electrisch oppervlak F aequivalent op ${}_2B$ te kunnen overbrengen, moet nog een derde polair coördinaten-stelsel der θ_2 en r worden aangenomen, hebbende tot pool het middelpunt van ${}_2B$ en waarvan de hoek θ_2 van af het naar C gerigte gedeelte van de as der schijf gerekend wordt.

Men zou nu de geheele voor ${}_1B$ gedane berekening moeten herhalen

voor ${}_2B$; maar omdat de nieuwe berekening van de vorige alleen daarin verschilt, dat θ_2 in de plaats komt van θ_1 en $\pi - \theta$ den hoek θ vervangt, volgt voor de electriche digtheid ${}_2D^1$ der aequivalent op ${}_2B$ overgebrachte lading uit (7) terstond:

$$\begin{aligned} {}_2D^1 &= \frac{2h^2}{c^2 + h^2} \sum_0^{\infty} {}^m (2m+1) {}_2B_m^1, \\ {}_2B_m^1 &= \left(\frac{2h}{\sqrt{c^2 + h^2}} \right)^m P^m(\cos \theta_2) \\ &\int_{\theta_2^0}^{\theta_2'} [\chi(\theta_2)]^{m+2} \psi(\theta_2) D_1(\theta_2) P^m(\cos \theta_2) \sin \theta_2 d\theta_2. \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\sum_0^{\infty}} \right\} (8)$$

Een gedeelte der beide electriche ladingen op ${}_1B$ en ${}_2B$, door (7) en (8) bepaald, ligt weder binnen het electriche beeld van de oppervlakte der schijf, namelijk het gedeelte binnen F . Om dit aequivalent op F over te brengen, behoeft men geene nieuwe berekening te maken, maar kan dadelijk de uitkomst uit (5) worden afgeleid. Want deze nieuwe lading van F bestaat uit twee deelen; het eene daarvan is afkomstig van de door (7) bepaalde electriche massa op ${}_1B$ en binnen F , het andere van de door (8) bepaalde electriche massa binnen F op ${}_2B$. De digtheid van het eerste deel, die zich even zoo uit (7) laat afleiden, als het tweede deel van D_1 in (5) uit (4) is afgeleid, is gelijk aan

$$\begin{aligned} &\sum_0^{\infty} {}^m (2m+1) A_m^1, \\ A_m^1 &= \left(\frac{\sqrt{c^2 + h^2}}{h} \right)^m P^m(\cos \theta) \int_{\text{bgtg } \frac{c}{h}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m+1} \theta P^m(\cos \theta) \sum_0^{\infty} {}^n (2n+1) {}_1B_n^1 \sin \theta d\theta. \end{aligned}$$

Op overeenkomstige wijze vindt men voor de electriche digtheid van het van de massa op ${}_2B$ afkomstige deel der lading, met inachtneming

$$\text{dat dan, } \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi \text{ zijnde, } \varrho = -\frac{a^2}{h} \cos \theta, \frac{d\varrho}{d\nu} = -\cos \theta$$

$$\sum_0^{\infty} m(2m+1) A_m^2,$$

$$A_m^2 = -(-1)^m \left(\frac{\sqrt{c^2 + h^2}}{h} \right)^m P^m(\cos \theta)$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\text{bgtg} - \frac{c}{h}} \cos^{m+1} \theta P^m(\cos \theta) \sum_0^{\infty} n(2n+1) {}_2B_n^I \sin \theta d\theta.$$

Wordt nu $A_m^1 + A_m^2 = F_m^2$ gesteld, dan heeft de elektrische digtheid D_2 der gezochte nieuwe lading van F de waarde

$$D_2 = \sum_0^{\infty} m(2m+1) F_m^2,$$

$$F_m^2 = \left(\frac{\sqrt{c^2 + h^2}}{h} \right)^m P^m(\cos \theta)$$

$$\left. \begin{aligned} & \int_{\frac{\pi}{2}}^{\text{bgtg} - \frac{c}{h}} \cos^{m+1} \theta P^m(\cos \theta) \sum_0^{\infty} n(2n+1) {}_1B_n^I \sin \theta d\theta \\ & - (-1)^m \int_{\frac{\pi}{2}}^{\text{bgtg} - \frac{c}{h}} \cos^{m+1} \theta P^m(\cos \theta) \sum_0^{\infty} n(2n+1) {}_2B_n^I \sin \theta d\theta \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Het gedeelte dezer lading, dat binnen ${}_1B$ ligt, moet weder equivalent voor alle punten buiten ${}_1B$ op dit oppervlak worden overgebracht, zoo ook het gedeelte, dat zich binnen ${}_2B$ bevindt, op ${}_2B$; daarna heeft weder een overbrenging van massa's plaats op F enz. zoolang totdat de nog over te brengen massa's geen invloed meer hebben. Daar de verdere uitvoering der massa-verplaatsing zelve slechts eene herhaling is van de beide het laatst verrigte verplaatsingen, levert zulks geene moeilijkheid meer op, en kan voor de elektrische digtheden ${}_1D$, ${}_2D$ en D op het electrisch beeld van de oppervlakte der schijf respectievelijk op ${}_1B$, ${}_2B$ en F aan het einde der bewerking terstond geschreven worden:

$$\begin{aligned}
{}_1D &= -\frac{h^2}{a^3 f \pi} Q \sum_0^{\infty} (2m+1) B_m \\
&+ \frac{2h^2}{c^2+h^2} \sum_0^{\infty} (2m+1) \left({}_1B_m^1 + {}_1B_m^2 + {}_1B_m^3 + \dots \right), \\
{}_2D &= \frac{2h^2}{c^2+h^2} \sum_0^{\infty} (2m+1) \left({}_2B_m^1 + {}_2B_m^2 + {}_2B_m^3 + \dots \right), \\
D &= \frac{c^2+h^2}{4a^3 \pi} \left(G - \frac{2Q}{f} \sum_0^{\infty} (2m+1) F_m^1 \right) \\
&+ \sum_0^{\infty} (2m+1) \left(F_m^2 + F_m^3 + F_m^4 + \dots \right). \\
B_m &= \left(\frac{f-2h}{f} \right)^m P^m(\cos \theta_1), \\
F_m^1 &= \left(\frac{\sqrt{c^2+h^2}}{h} \right)^m P^m(\cos \theta) \\
&\int_{\text{bgtg } \frac{c}{h}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m+1} \theta P^m(\cos \theta) \sum_0^{\infty} (2n+1) B_n \sin \theta d\theta, \\
{}_1B_m^n &= \left(\frac{2h}{\sqrt{c^2+h^2}} \right)^m P^m(\cos \theta_1) \\
&\int_{\theta_1^0}^{\theta_1^1} \left[\chi(\theta_1) \right]^{m+2} \psi(\theta_1) D_n(\theta_1) P^m(\cos \theta_1) \sin \theta_1 d\theta_1, \\
{}_2B_m^n &= \left(\frac{2h}{\sqrt{c^2+h^2}} \right)^m P^m(\cos \theta_2) \\
&\int_{\theta_2^0}^{\theta_2^1} \left[\chi(\theta_2) \right]^{m+2} \psi(\theta_2) D_n(\theta_2) P^m(\cos \theta_2) \sin \theta_2 d\theta_2, \\
F_m^n &= \left(\frac{\sqrt{c^2+h^2}}{h} \right)^m P^m(\cos \theta) \\
&\left. \begin{aligned}
&\int_{\text{bgtg } \frac{c}{h}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m+1} \theta P^m(\cos \theta) \sum_0^{\infty} (2u+1) {}_1B_u^{n-1} \sin \theta d\theta \\
& - (-1)^m \int_{\frac{\pi}{2}}^{\text{bgtg } \frac{c}{h}} \cos^{m+1} \theta P^m(\cos \theta) \sum_0^{\infty} (2u+1) {}_2B_u^{n-1} \sin \theta d\theta
\end{aligned} \right\}.
\end{aligned}
\tag{10}$$

De in de waarden van ${}_1B_m^n$ en ${}_2B_m^n$ voorkomende digtheid D_n beteekent, als $n > 1$ is, dat gedeelte van de waarde van D , hetwelk men overhoudt, wanneer alleen de uitdrukkingen F_m^n , die denzelfden aanwijzer n hebben, blijven, terwijl al de anderen alsmede de eerste term van de waarde van D worden weggelaten; deze eerste term alleen is gelijk aan D_1 . Daar nu in de uitdrukkingen voor ${}_1D$, ${}_2D$ en D de straal a slechts voorkomt in den aan alle drie gemeenschappelijken factor $\frac{1}{a^3}$, en de elektrische digtheid in eenig punt A van de oppervlakte der schijf verkregen wordt door de digtheid in het snijpunt van het electrisch beeld met den voerstraal r , uit het middelpunt C naar het punt A getrokken, met $\left(\frac{a}{r}\right)^3$ te vermenigvuldigen, zullen de vergelijkingen (10), wanneer men daarin a door r vervangt, en r als eene constante beschouwt bij de integratiën, die B en F bepalen, de elektrische digtheid in den evenwigtstoestand uitdrukken, aan de oppervlakte der schijf, waarbij de totale potentiaal in alle punten binnen en aan de oppervlakte der schijf dezelfde constante waarde G heeft als bij de verdeling over het electrisch beeld op het bol-oppervlak met den straal a . *)

*) Kötteritzsch: Lehrbuch der Electrostatik S 270, 271.

Grinwis: Wiskundige theorie der Wrijv. Electr. N^o. 11, 2^e Stelling.

HOOFDSTUK II.

Vergelijking van de uitkomsten en nadere gevolgtrekkingen der methoden, en behandeling van de grensgevallen (cirkelplaat en bol-oppervlak).

§ 20. Na een overzicht der verschillende methoden gegeven te hebben, moeten de verkregene uitkomsten met elkaar vergeleken, dat is: het verband, dat daartusschen bestaat, opgespoord worden, waardoor het mogelijk is de eene uitkomst uit de andere af te leiden; en de waarden gevonden, die daaruit voortvloeijen voor de grensgevallen.

Daarbij zullen wij zooveel mogelijk de volgorde in het vorige hoofdstuk in acht nemen, en alzoo beginnen met de overeenkomst tusschen de uitkomsten der methoden van Beer en Green aan te toonen.

Deze waren (§§ 3, 4) volgens Beer

$$\Delta q < 2q \left(\frac{R}{l} \right)^3 \sin^3 \frac{1}{2} \theta,$$

waar Δq de elektrische digtheid op het binnenvlak, $q + \Delta q$ de digtheid op het buitenvlak van het bolvormig segment, $q = \frac{K}{4\pi R}$, K de constante potentiaal der lading, R de straal van het bol-oppervlak, l de kortste afstand van het punt waar de digtheid is Δq tot aan den rand, en θ de spherische straal der opening zijn.

Volgens Green

$$\sigma' = \frac{K \alpha^3}{12 \pi^2 R \cdot k^3}, \quad \sigma'' = \frac{K}{4 \pi R} + \sigma',$$

waarin σ' de elektrische digtheid in het element dS' van het binnen-

vlak, σ' de digtheid in het overeenkomstige element dS'' van het buitenvlak, α de straal van den rand van het segment, en k de afstand van het middelpunt der opening tot aan het element dS' .

Daar nu

$$\sigma' = \Delta q = \frac{\alpha^3}{3\pi k^3} q,$$

$$\frac{\alpha^3}{3\pi k^3} = \frac{R^3 \sin^3 \theta}{3\pi k^3} = \frac{8}{3\pi} \left(\frac{R}{k}\right)^3 \sin^3 \frac{1}{2}\theta \cos^3 \frac{1}{2}\theta,$$

welke laatste uitdrukking altijd kleiner is dan $2 \left(\frac{R}{l}\right)^3 \sin^3 \frac{1}{2}\theta$, volgt hieruit, het teeken daargelaten

$$\Delta q < 2q \left(\frac{R}{l}\right)^3 \sin^3 \frac{1}{2}\theta,$$

zijnde de ongelijkheid, waartoe ons de methode van Beer geleid heeft.

Voor het gansche bol-oppervlak $\theta = 0$, $\alpha = 0$, $\sigma' = \Delta q = 0$, en de constante waarde der elektrische digtheid op het buitenvlak gelijk aan

$$\frac{K}{4\pi R} = \frac{Q}{4\pi R^2}. \quad Q \text{ de lading} \dots \dots \dots (1)$$

§ 21. In § 7 hebben wij gezien, dat de elektrische digtheid q der lading, op een afgeleid bolvormig segment o geïnduceerd door de hoeveelheid electriciteit $-q$, geconcentreerd in een willekeurig punt C, in een punt p der van C afgekeerde zijde van het segment

$$q = \frac{qk(d-k)}{2\pi^2 d \cdot Cp^3} \left\{ \frac{Cp}{Ce} \sqrt{\frac{fe^2 - b^2}{b^2 - fp^2}} - \text{bgtg} \left[\frac{Cp}{Ce} \sqrt{\frac{fe^2 - b^2}{b^2 - fp^2}} \right] \right\},$$

de elektrische digtheid op de naar C toegekeerde zijde

$$q + \frac{qk(d-k)}{2\pi d \cdot Cp^3},$$

waarin k de kortste afstand van C tot het bol-oppervlak van o, d de middellijn des bol-oppervlaks, die men negatief moet nemen als het punt C er buiten ligt, e het beeldpunt der pool g' van den rand van het bolvormig segment O, het elektrisch beeld van o met betrekking tot het bol-oppervlak, met den straal a uit C als middelpunt beschreven, f het middelpunt van o, en b de koorde uit f naar den rand getrokken.

Ligt het punt C in de as van het gegeven segment, dan valt het beeldpunt e met de pool g zamen, zoodat voor een punt C binnen

het bol-oppervlak, waarvan o een gedeelte is, de elektrische digtheid op de bolle zijde

$$e = \frac{qk(d-k)}{2\pi^2 d \cdot Cp^3} \left\{ \frac{Cp}{Cg} \sqrt{\frac{d^2 - b^2}{b^2 - fp^2}} - \text{hgtg} \left[\frac{Cp}{Cg} \sqrt{\frac{d^2 - b^2}{b^2 - fp^2}} \right] \right\}, \quad (2)$$

de elektrische digtheid op de holle zijde

$$e + \frac{qk(d-k)}{2\pi d \cdot Cp^3} \dots \dots \dots (3)$$

Maar voor een punt C buiten genoemd bol-oppervlak is van deze beide uitdrukkingen de eerste de elektrische digtheid op de holle, de tweede die op de bolle zijde, en d negatief.

Wanneer het punt C met het middelpunt M zamenvalt, bleek het dat de geïnduceerde lading overeenstemt met de lading over het geïsoleerde segment zonder influentie, die $\frac{2q}{d}$ tot potentiaal heeft en alleen daarin verschilt, dat bij gewone elektrische verdeling de lading op eene der beide zijden gelijk is aan de geïnduceerde lading op de andere zijde bij influentie. Van deze omstandigheid wordt in hetgeen nu volgt gebruik gemaakt.

Men stelle zich voor de elektrische digtheid te bepalen op de beide zijden in een punt p van een geïsoleerd bolvormig segment o zonder influentie eener daaraan medegedeelde willekeurige hoeveelheid electriciteit Q. Laat daartoe in het middelpunt van een ander bolvormig segment, dat afgeleid en van dezelfde afmetingen is als het eerste, eene elektrische hoeveelheid — q geconcentreerd gedacht worden, die aan de binnenzijde eene lading Q'_m met de digtheid e' , aan de buiten- of bolle zijde eene lading Q''_m met de digtheid e'' induceert. De gewone elektrische verdeling der hoeveelheid Q heeft dan zoodanig plaats dat, als Q' de lading op de binnenzijde, Q'' de lading op de buitenzijde van o beduidt, zoodat $Q' + Q'' = Q$, terwijl $Q'_m + Q''_m = Q_m$, de elektrische digtheden D' en D'' op de binnen- en buitenzijde van o

$$D' = \frac{Q'}{Q''_m} e'' = \frac{Q}{Q_m} e'', \quad D'' = \frac{Q''}{Q'_m} e' = \frac{Q}{Q_m} e'; \quad \dots \quad (4)$$

de ladingen

$$Q' = \left(1 - \frac{Q'_m}{Q_m}\right) Q = \frac{Q}{Q_m} Q''_m, \quad Q'' = \left(1 - \frac{Q''_m}{Q_m}\right) Q = \frac{Q}{Q_m} Q'_m. \quad (5)$$

Nu is volgens § 7

$$e'' = \frac{q}{\pi^2 d^2} \left\{ \sqrt{\frac{d^2 - b^2}{b^2 - t^2}} - \text{bgtg} \sqrt{\frac{d^2 - b^2}{b^2 - t^2}} \right\},$$

$$e' = e'' + \frac{q}{\pi d^2}.$$

Noemt men verder α den hock, dien de as van het segment maakt met den straal naar den rand getrokken, do het oppervlakte-element, dan heeft men

$$d o = \frac{1}{4} d^2 \sin \theta d \theta d \psi, \quad b^2 = \frac{1}{2} d^2 (1 - \cos \alpha), \quad t^2 = \frac{1}{2} d^2 (1 - \cos \theta),$$

$$\int \frac{q}{\pi d^2} \cdot d o = \frac{q}{\pi d^2} \int d o = \frac{b^2}{d^2} q = \frac{1 - \cos \alpha}{2} q,$$

$$\int e'' d o = \frac{q}{2\pi} \left\{ \sqrt{1 + \cos \alpha} \int_0^\alpha \frac{\sin \theta d \theta}{\sqrt{(\cos \theta - \cos \alpha)}} - \int_0^\alpha \sin \theta d \theta \cdot \text{bgtg} \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{\cos \theta - \cos \alpha}} \right\}.$$

Door $\cos \theta - \cos \alpha = x = z^2$ te stellen, en bij gedcelten te integreren ontstaat voor de algemeene integraal achtereenvolgens

$$\int \text{bgtg} \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{x}} \cdot dx = x \text{bgtg} \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{x}} + \frac{\sqrt{1 + \cos \alpha}}{2} \int \frac{\sqrt{x} \cdot dx}{1 + \cos \alpha + x};$$

$$\int \frac{\sqrt{x} \cdot dx}{1 + \cos \alpha + x} = 2 \int \frac{z^2 dz}{1 + \cos \alpha + z^2} = 2 \left\{ z - (1 + \cos \alpha) \int \frac{dz}{1 + \cos \alpha + z^2} \right\}$$

$$= 2 \left\{ z - \sqrt{1 + \cos \alpha} \text{bgtg} \sqrt{\frac{z}{1 + \cos \alpha}} \right\};$$

zoodat na substitutie en tusschen de behoorlijke grenzen integreerende

$$Q''_m = \int e'' d o = \frac{q}{2\pi} \left\{ \alpha + \sin \alpha - (1 - \cos \alpha) \frac{\pi}{2} \right\};$$

$$Q'_m = \int e' d o = Q''_m + \frac{1 - \cos \alpha}{2} q = \frac{q}{2\pi} \left\{ \alpha + \sin \alpha + (1 - \cos \alpha) \frac{\pi}{2} \right\};$$

$$Q_m = \frac{q}{\pi} (\alpha + \sin \alpha).$$

Hieruit volgt, dat (4) en (5) veranderen in

$$Q' = \frac{1}{2} Q \left(1 - \frac{1 - \cos \alpha}{\alpha + \sin \alpha} \frac{\pi}{2} \right), \quad Q'' = \frac{1}{2} Q \left(1 + \frac{1 - \cos \alpha}{\alpha + \sin \alpha} \frac{\pi}{2} \right), \quad (6)$$

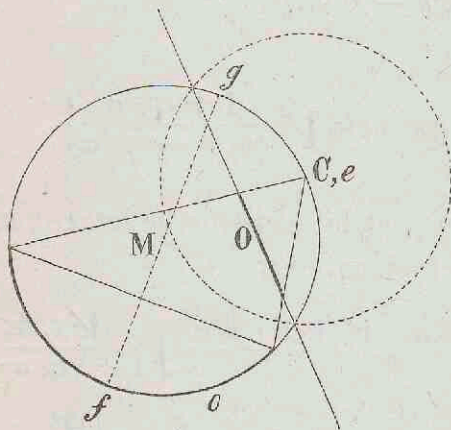
$$\left. \begin{aligned} D' &= \frac{Q}{\pi d^2(\alpha + \sin \alpha)} \left\{ \sqrt{\frac{d^2 - b^2}{b^2 - t^2}} - b g t g \sqrt{\frac{d^2 - b^2}{b^2 - t^2}} \right\}, \\ D'' &= \frac{Q}{\pi d^2(\alpha + \sin \alpha)} \left\{ \sqrt{\frac{d^2 - b^2}{b^2 - t^2}} + \pi - b g t g \sqrt{\frac{d^2 - b^2}{b^2 - t^2}} \right\} \end{aligned} \right\} \cdot \quad (7)$$

Voor den ganschen bol $\alpha = \pi$, $b = d$, waardoor

$$Q' = 0, \quad Q'' = Q, \quad D' = 0, \quad D'' = \frac{Q}{\pi d^2} \quad \dots \quad (8)$$

En voor de cirkelplaat, in welk geval $\alpha = \sin \alpha = \frac{2b}{d^2} \sqrt{(d^2 - b^2)}_{(d=\infty)}$

$$Q' = Q'' = \frac{1}{2} Q, \quad D' = D'' = \frac{Q}{4\pi b \sqrt{(b^2 - t^2)}} \quad \dots \quad (9)$$



Eindelijk kan nog het geval plaats hebben, dat het punt C gelegen is op het verlengde oppervlak van o. Dan bevindt zich de pool g' op oneindigen afstand; het beeldpunt e valt samen met het punt C, waaruit volgt $Ce = k = 0$, en de elektrische digtheid wordt aan elke zijde van het bolvormig segment

$$e = \frac{q}{2\pi^2 C p^2} \sqrt{\frac{fC^2 - b^2}{b^2 - fp^2}},$$

zijnde formule (14) § 5.

Voor het geheele bol-oppervlak verdwijnt (2), en geeft (3) op de naar het punt C toegekeerde zijde van het oppervlak de elektrische digtheid

$$e = \frac{qk(d - k)}{2\pi d \cdot C p^3}, \quad \dots \quad (10)$$

waarin d wederom negatief, als C een uitwendig gelegen punt is.

Het in elkaar vallen der punten C en M doet de voorgaande uitdrukking overgaan in de constante digtheid aan de binnenzijde

$$e = \frac{q}{\pi d^2} \quad \dots \quad (11)$$

De elektrische verdeling op de afgeleide cirkelplaat zie § 7.

§ 22. Wij vonden (§ 15) voor de elektrische digtheid q in het punt O of (σ, μ, ψ) van het afgeleide bolvormige segment F, naarmate het influencerende punt C $(\sigma_1, \mu_1, \psi_1)$ binnen of buiten de ruimte R ligt, omsloten door F en het cirkelvlak, waarvan de rand van F de omtrek is:

$$q = \frac{+1}{2\pi^2 c^2 \sqrt{1 - \sigma_0^2}} \left\{ \frac{1 - \sigma_0^2 - k}{\sqrt{K^3}} \left(\frac{1}{2} \pi - \text{bgtg} \frac{\sqrt{K}}{-\sigma\sigma_1 + \mu\mu_1} \right) + \frac{\sigma\mu_1 - \mu\sigma_1}{\sigma\mu K} \right\}, \quad (\text{V})$$

$$q = \frac{-1}{2\pi^2 c^2 \sqrt{1 - \sigma_0^2}} \left\{ \frac{1 - \sigma_0^2 - k}{\sqrt{K^3}} \left(\frac{1}{2} \pi - \text{bgtg} \frac{\sqrt{K}}{-\sigma\sigma_1 + \mu\mu_1} \right) + \frac{\sigma\mu_1 - \mu\sigma_1}{\sigma\mu K} \right\}, \quad (\text{VI})$$

waarin σ_0 de waarde van σ in het middelpunt N des bols, alwaar $\mu = \alpha = \pm 1$, naarmate F grooter of kleiner dan het halve bol-oppervlak is, e de straal van den rand, $r_0 = e\sqrt{1 - \sigma_0^2}$ de straal des bols,

$$k = \left(\frac{NC}{e} \right)^2 = 1 - \sigma_0^2 - \sigma_1^2 - \mu_1^2 + 2\alpha\sigma_0\sigma_1\mu_1,$$

$$K = \left(\frac{OC}{e} \right)^2 = 2 - \sigma^2 - \sigma_1^2 - \mu^2 - \mu_1^2 + 2\sigma\sigma_1\mu\mu_1 - \\ - 2\sqrt{(1 - \sigma^2)}\sqrt{(1 - \sigma_1^2)}\sqrt{(1 - \mu^2)}\sqrt{(1 - \mu_1^2)}\cos(\psi - \psi_1),$$

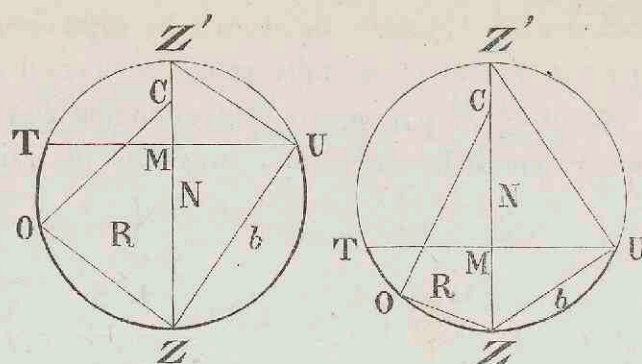
en $\frac{\mu}{\sigma} = \alpha\sigma_0 - i\sqrt{1 - \sigma_0^2}$; terwijl de in zijn tangens uitgedrukte

boog gelegen is tusschen 0 en π .

Hierbij moet worden opgemerkt dat, wat ook in het algemeen de ligging zij van het punt C, altijd elk der beide termen, uit welke som de formule voor de elektrische digtheid der geïnduceerde lading in eenig punt van F, mits dat het niet aan den rand gelegen is, bestaat, eene positieve waarde heeft. *)

Om nu het verband tusschen (V) en (VI) en de vergelijking (25) § 7 van Thomson aan te toonen, zullen wij uitgaan van (VI) en derhalve aannemen, dat het punt C ligt buiten de ruimte R in de as van het segment en binnen het bol-oppervlak, als in nevensgaande figuren.

*) Alleen als het punt C zich bevindt op het verlengde oppervlak van F verdwijnt de term, waarin de in de tangens uitgedrukte boog voorkomt.



Alsdan is

$$\sigma_1 = \frac{i}{e} CM, \quad \mu_1 = -1.$$

Wanneer verder b de koorde ZU , uit het middelpunt van F naar den rand getrokken, beteekent, dan vindt men voor het vierkant van a , de halve groote as der ellips gaande door het punt O en waarvan T en U de beide brandpunten zijn

$$a^2 = b^2 - \frac{b^2 - e^2}{b^2} OZ^2;$$

zoodat

$$\sigma^2 = 1 - \frac{a^2}{e^2} = - \frac{(b^2 - e^2)(b^2 - OZ^2)}{b^2 e^2},$$

of

$$\sigma = \frac{i}{be} \sqrt{(b^2 - e^2)(b^2 - OZ^2)} = \frac{ie \sqrt{(b^2 - OZ^2)}}{b \cdot Z'M}.$$

Daar nu

$$\frac{\mu}{\sigma} = - \left(\mp \sqrt{r_0^2 - e^2} + r_0 \right) \frac{i}{e} = - \frac{i}{e} Z'M,$$

volgt

$$\mu = - \frac{i\sigma}{e} Z'M = \frac{1}{b} \sqrt{(b^2 - OZ^2)}.$$

Hierdoor wordt

$$\begin{aligned} \text{bgtg} \frac{\sqrt{K}}{-\sigma\sigma_1 + \mu\mu_1} &= \text{bgtg} \frac{OC}{e \left(\frac{\sqrt{b^2 - OZ^2}}{b} \cdot \frac{CM}{Z'M} - \frac{\sqrt{b^2 - OZ^2}}{b} \right)} \\ &= \text{bgtg} \left[- \frac{OC}{Z'M - CM} \frac{b \cdot Z'M}{e \sqrt{(b^2 - OZ^2)}} \right] = \text{bgtg} \left[- \frac{OC}{f} \sqrt{\frac{4r_0^2 - b^2}{b^2 - OZ^2}} \right], \end{aligned}$$

waarin f den kortsten afstand CZ' van het influencerende punt tot aan het bol-oppervlak, waarvan het segment F een deel uitmaakt, aanduidt, welken afstand wij in Thomson's methode k genoemd hebben, terwijl het aldaar voorkomende beeldpunt e hier met het punt Z' zamenvalt.

Voor het tweede gedeelte verkrijgt men

$$\frac{\sigma\mu_1 - \mu\sigma_1}{\sigma\mu K} = - \frac{(e^2 + Z' M \cdot CM)b}{OC^2 \sqrt{(b^2 - OZ^2)}} = - \frac{(2r_0 - f) b \cdot Z' M}{OC^2 \sqrt{(b^2 - OZ^2)}}.$$

Daardoor verandert (VI) in

$$e = \frac{-1}{2\pi^2 r_0} \cdot \frac{r_0^2 - NC^2}{OC^3} \left\{ \frac{1}{2} \pi - \text{bgtg} \left[- \frac{OC}{f} \sqrt{\frac{4r_0^2 - b^2}{b^2 - OZ^2}} \right] - \frac{OC^3}{r_0^2 - NC^2} \cdot \frac{(2r_0 - f) b \cdot Z' M}{e OC^2 \sqrt{(b^2 - OZ^2)}} \right\},$$

of

$$e = \frac{f(2r_0 - f)}{2\pi^2 r_0 \cdot OC^3} \left\{ \frac{1}{2} \pi - \text{bgtg} \left[\frac{OC}{f} \sqrt{\frac{4r_0^2 - b^2}{b^2 - OZ^2}} \right] + \frac{OC}{f} \sqrt{\frac{4r_0^2 - b^2}{b^2 - OZ^2}} \right\}. \quad (12)$$

Voor elke andere ligging van het punt C in de as van het segment laat zich uit (V) of (VI) een dergelijken vorm voor de elektrische digtheid afleiden, zoodat in het algemeen

$$e = \frac{f(2r_0 - f)}{2\pi^2 r_0 \cdot OC^3} \left\{ \frac{1}{2} \pi - \text{bgtg} \left[\frac{OC}{CZ'} \sqrt{\frac{4r_0^2 - b^2}{b^2 - OZ^2}} \right] + \frac{OC}{CZ'} \sqrt{\frac{4r_0^2 - b^2}{b^2 - OZ^2}} \right\}, \quad (13)$$

waar, ingeval het punt C buiten het bol-oppervlak ligt, de middellijn $2r_0$ negatief moet worden genomen. Deze uitdrukking is identisch met de som der digtheden in (2) en (3) § 21 volgens Thomson, als men $q = 1$ stelt.

Wanneer de punten C en N zamenvallen, volgt uit (13) onmiddellijk

$$e = \frac{1}{2\pi^2 r_0^2} \left(\frac{1}{2} \pi - \text{bgtg} \sqrt{\frac{4r_0^2 - b^2}{b^2 - OZ^2}} + \sqrt{\frac{4r_0^2 - b^2}{b^2 - OZ^2}} \right), \quad (14)$$

waarin ook (56) na substitutie verandert, dat is gelijk aan de som der elektrische digtheden in (16) en (17) § 6.

Ligt het punt C op het verlengde oppervlak van F , dan zal

$$\frac{\mu_1}{\sigma_1} = \frac{i}{e} MZ, \quad -\sigma\sigma_1 + \mu\mu_1 = -\sigma\sigma_1 \left(1 - \frac{\mu\mu_1}{\sigma\sigma_1} \right) = 0,$$

$$1 - \sigma_0^2 - k = 0, \frac{\mu_1 - \mu}{\mu K} \sigma_1 = \frac{i}{e} \frac{(MZ + Z'M) be^2}{OC^2 \sqrt{(b^2 - OZ^2)}} \cdot \frac{ie \sqrt{(CZ^2 - b^2)}}{Z' U. M Z} =$$

$$= -\frac{2c r_0}{OC^2} \sqrt{\frac{CZ^2 - b^2}{b^2 - OZ^2}}, \text{ waardoor (VI) wordt}$$

$$e = -\frac{1}{2\pi^2 e r_0} \cdot -\frac{2c r_0}{OC^2} \sqrt{\frac{CZ^2 - b^2}{b^2 - OZ^2}} = \frac{1}{\pi^2 OC^2} \sqrt{\frac{CZ^2 - b^2}{b^2 - OZ^2}}, \quad (15)$$

hetgeen de formule (14) is in Thomson's methode, § 5.

§ 23. Om uit (VI) de waarde der elektrische digtheid op de met den grond verbundene cirkelplaat af te leiden, behoeft men slechts $\alpha = -1, \sigma = 0, \sigma_0 = \infty$ te stellen. Alsdan wordt

$$\frac{1 - \sigma_0^2 - k}{\sqrt{(1 - \sigma_0^2)}} = \frac{\sigma_1^2 + \mu_1^2}{\sqrt{(1 - \sigma_0^2)}} + \frac{2\sigma_0 \sigma_1 \mu_1}{\sqrt{(1 - \sigma_0^2)}} = 2i \sigma_1 \mu_1,$$

zoodat het eerste gedeelte van de waarde der digtheid overgaat in

$$-\frac{1}{2\pi^2 e^2} \cdot \frac{2i \sigma_1 \mu_1}{\sqrt{K^3}} \text{ bgtg } \frac{\mu \mu_1}{\sqrt{K}} = -\frac{i \sigma_1 \mu_1}{\pi^2 e^2 \sqrt{K^3}} \text{ bgtg } \frac{\mu \mu_1}{\sqrt{K}}.$$

Het tweede gedeelte laat zich aldus herleiden

$$-\frac{1}{2\pi^2 e^2} \cdot \frac{\mu_1 - \frac{\mu}{\sigma} \sigma_1}{\mu K} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1 - \sigma_0^2)}} = \frac{1}{2\pi^2 e^2} \cdot \frac{\sigma_1}{\mu K} \cdot \frac{\frac{\mu}{\sigma}}{\sqrt{(1 - \sigma_0^2)}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi^2 e^2} \cdot \frac{\sigma_1 - \sigma_0 - i \sqrt{(1 - \sigma_0^2)}}{\mu K} = \frac{1}{2\pi^2 e^2} \cdot \frac{\sigma_1}{\mu K} \cdot \frac{-1 - 1}{\frac{1}{i}} = -\frac{i}{\pi^2 e^2 \mu} \cdot \frac{\sigma_1}{K}.$$

Alzoo verkrijgt men voor de elektrische digtheid q in het punt $(0, \mu, \psi)$ op de afgeleide cirkelplaat

$$q = -\frac{i}{\pi^2 e^2 \mu} \left(\frac{\sigma_1}{K} + \frac{\sigma_1 \mu \mu_1}{\sqrt{K^3}} \text{ bgtg } \frac{\mu \mu_1}{\sqrt{K}} \right), \quad (16)$$

waar K gelijk is aan het vierkant van het quotient van den afstand der punten $(0, \mu, \psi)$ en $(\sigma_1, \mu_1, \psi_1)$ door den straal e der cirkelplaat, de bgtg $\frac{\mu \mu_1}{\sqrt{K}}$ tusschen $+\frac{\pi}{2}$ en $-\frac{\pi}{2}$ gelegen, en μ alleen positief mag worden genomen, hetgeen geheel met het vroeger gevondene (§ 11) overeenstemt.

Ingeval het punt C zich bevindt in het vlak der cirkelplaat buiten den rand

$$\sigma_1 = \frac{i}{e} \sqrt{(MC^2 - e^2)}, \quad \mu_1 = 0, \quad MO = e \sqrt{(1 - \mu^2)}$$

en de digtheid in het punt 0

$$q = -\frac{i}{\pi^2 \cdot OC^2} \cdot \frac{i \sqrt{MC^2 - e^2}}{e \mu} = \frac{1}{\pi^2 \cdot OC^2} \sqrt{\frac{MC^2 - e^2}{e^2 - MO^2}} \quad (17)$$

overeenkomstig met (14) § 5.

Wanneer het punt C ligt in de as op den afstand f van de cirkelplaat

$$\sigma_1 = \frac{f}{e} i, \quad \mu_1 = 1,$$

zoodat de digtheid

$$q = -\frac{i}{\pi^2 \cdot OC^2} \left\{ \frac{fi}{\sqrt{e^2 - MO^2}} + \frac{fi}{OC} \operatorname{bgtg} \frac{\sqrt{e^2 - MO^2}}{OC} \right\},$$

of

$$q = \frac{f}{\pi^2 \cdot OC^3} \left\{ \frac{OC}{\sqrt{e^2 - MO^2}} + \frac{\pi}{2} - \operatorname{bgtg} \frac{OC}{\sqrt{e^2 - MO^2}} \right\}, \quad (18)$$

ook weder de som der elektrische digtheden in (29) en (30) § 7.

§ 24. Uit (VI) laat zich ook de waarde der elektrische digtheid van de lading, op het afgeleide bol-oppervlak door het daarbuiten gelegene massapunt C geïnduceerd, bepalen. Daartoe schrijve men (VI), opmerkende dat hier $\alpha = +1$, onder den vorm

$$q = \frac{-1}{2\pi^2 e \cdot r_0} \left\{ \frac{r_0^2 - NC^2}{e^2 - e^2} \left[\frac{1}{2} \pi - \operatorname{bgtg} \frac{OC}{e \left(-\frac{e\sigma_1}{i(\sqrt{r_0^2 - e^2} - r_0)} + \mu_1 \right) \mu} \right] + \frac{\mu_1 - \frac{i}{e} (\sqrt{r_0^2 - e^2} - r_0) \sigma_1}{\mu \cdot OC^2} e^2 \right\}.$$

Gaat nu het positieve deel van de as der z door C, dan is

$$\sigma_1^2 = 1 - \frac{(r_0 + NC)^2}{e^2}, \quad (e=0)$$

$$\sigma_1 = \frac{i}{e} \sqrt{(r_0 + NC)^2 - e^2}, \quad (e=0)$$

$$e\sigma_1 \quad (e=0) = i(r_0 + NC),$$

terwijl

$$\frac{e}{\sqrt{(r_0^2 - e^2)} - r_0} \quad (e=0) = \frac{1}{-e} = \infty;$$

zoodat voor de electricische digtheid in het punt O op het afgeleide boloppervlak de laatste vorm eenvoudig wordt

$$e = \frac{-1}{2\pi^2 r_0} \frac{r_0^2 - NC^2}{OC^3} \cdot \pi = \frac{NC^2 - r_0^2}{4\pi r_0 \cdot OC^3}, \quad \dots \quad (19)$$

welke waarde van die in § 2, verg. (8) alleen in teeken verschilt, alwaar in het uitwendige punt de positieve electriciteits-eenheid was geconcentreerd.

Ligt het influencerende punt C binnen het afgeleide boloppervlak, dan volgt evenzoo uit (V) voor de electricische digtheid der geïnduceerde lading

$$e = \frac{r_0^2 - NC^2}{4\pi r_0 \cdot OC^3} \dots \dots \dots (20)$$

Deze uitdrukking gaat, als het punt C met het middelpunt N samenvalt, over in

$$e = \frac{1}{4\pi r_0^2}, \quad \dots \dots \dots (21)$$

hetgeen ook terstond uit (56) gevonden kan worden.

§ 25. Op het einde zijner methode toont Lipschitz de overeenstemming aan van de door hem verkregene uitkomsten met de benaderde oplossing van het vraagstuk door Green. In de onderstelling namelijk dat $\alpha = 1$ en $\frac{e}{r_0}$ eene kleine grootheid is, waarvan de hoogere magten verwaarloosd mogen worden, vindt Green voor de waarde der potentiaal in eenig punt van het ontbrekende bolvormig segment, die in § 4 door $K + \bar{V}$ is aangeduid geworden, het produkt van de constante waarde K der potentiaal aan de oppervlakte van het gegeven bolvormig segment F met

$$1 - \frac{e}{\pi r_0} V \left(1 - \frac{x^2 + y^2}{e^2} \right).$$

Maar uit de vergelijking (IV) § 14 volgt, dat de potentiaal, op F gelijk aan $\frac{1}{eV(1 - \sigma_0^2)} = \frac{1}{r_0}$, in een punt (σ, μ, ψ) of (x, y, z) van het benedenste segment des boloppervlaks B, waar σ en μ verbonden zijn door de betrekking (34) § 13

$$\mu - \left(\alpha \sigma_0 + iV(1 - \sigma_0^2) \right) \sigma = 0,$$

$\frac{2}{\pi e V(1 - \sigma_0^2)}$ bgtg $\left(\frac{i}{\sigma} \right)$ tot waarde heeft. Drukt men verder σ_0 in r_0 uit,

en substitueert $i\sigma_0 = \frac{-\sqrt{(r_0^2 - e^2)}}{e}$, $\sqrt{(1 - \sigma_0^2)} = \frac{r_0}{e}$ in de vergelijking (34*)

$$\sigma = i \sqrt{(ai\sigma_0 + \sqrt{(1 - \sigma_0^2)})} \sqrt{\left(\frac{-z}{e}\right)},$$

dan komt voor $\alpha = 1$

$$\frac{\sigma}{i} = \sqrt{\left(\frac{-\sqrt{(r_0^2 - e^2)} + r_0}{e}\right)} \sqrt{\left(\frac{-z}{e}\right)} = \sqrt{\left(\frac{-z}{r_0 + \sqrt{(r_0^2 - e^2)}}\right)};$$

welke laatste wegens de betrekking

$$-z = \sqrt{(r_0^2 - x^2 - y^2)} - \sqrt{(r_0^2 - e^2)} = \frac{e^2 - x^2 - y^2}{\sqrt{(r_0^2 - x^2 - y^2)} + \sqrt{(r_0^2 - e^2)}}$$

overgaat in

$$\frac{\sigma}{i} = \sqrt{\left\{ \frac{e^2 - x^2 - y^2}{(r_0 + \sqrt{(r_0^2 - e^2)}) (\sqrt{(r_0^2 - x^2 - y^2)} + \sqrt{(r_0^2 - e^2)})} \right\}}.$$

Worden nu de hoogere magten van $\frac{e}{r_0}$ verwaarloosd, dan mag men

voor $\text{bgtg}\left(\frac{i}{\sigma}\right) = \frac{1}{2} \pi - \text{bgtg}\left(\frac{\sigma}{i}\right)$ schrijven $\frac{1}{2} \pi - \frac{\sigma}{i}$ of

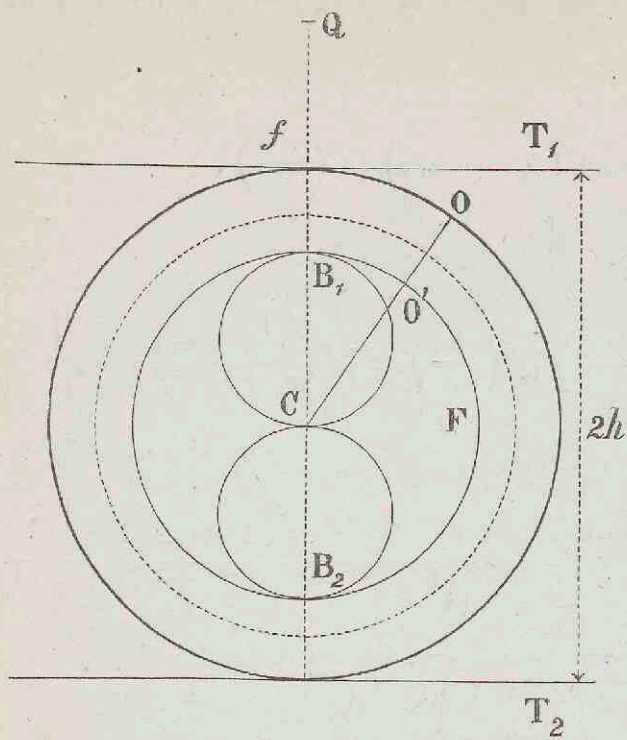
$$\frac{1}{2} \pi - \frac{e}{2r_0} \sqrt{\left(1 - \frac{x^2 + y^2}{e^2}\right)};$$

zoodat, terwijl de constante waarde der potentiaal op F bedraagt $\frac{1}{r_0}$, de benaderde waarde der potentiaal in de punten van het ontbrekende bolvormig segment is

$$\frac{1}{r_0} \left\{ 1 - \frac{e}{\pi r_0} \sqrt{\left(1 - \frac{x^2 + y^2}{e^2}\right)} \right\},$$

alzo overeenstemmende met de door Green gevondene.

§ 26. Bij de toepassing der methode van Kötteritzsch op het geval dat de bolvormige schijf overgaat in den ganschen bol is op te merken



dat de beide evenwijdige grensvlakken worden de vlakken T_1 en T_2 rakende den gegeven bol in de uiteinden der middellijn, waarvan het verlengde gaat door het influencerende massapunt Q , en de elektrische beelden ${}_1B$ en ${}_2B$ dezer vlakken, die nu geheel binnen het electrisch beeld F van het gegeven bol-oppervlak gelegen zijn, en dat beeld in de punten B_1 en B_2 raken, niet meer

in aanmerking komen. De beide electriche massa's aG in het middelpunt C des bols en $-\frac{aQ}{f}$ in het beeldpunt van Q geconcentreerd gedacht, die met het massa-punt Q op het bol-oppervlak met den straal a , ten opzichte waarvan het electrisch beeld is geconstrueerd, de constante potentiaalwaarde G opleveren, moeten nu op F æquivalent voor alle punten daarbuiten worden overgebracht.

Door het overbrengen der massa aG ontstaat op F eene electriche lading, hebbende de constante digtheid

$$\rho_1 = \frac{aG}{4\pi \frac{a^4}{h^2}} = \frac{h^2 G}{4\pi a^3}.$$

Daar verder $\frac{a^2}{h^2} f$ de afstand van het middelpunt C is, waarop een electriche massa-punt $\frac{aQ}{h}$ in het van C naar Q gerigte gedeelte der as zou moeten gelegen zijn, om op het afgeleide boloppervlak F eene lading te induceren, die in alle punten buiten F dezelfde potentiaal heeft als het electriche beeld $-\frac{aQ}{f}$, zal in een punt O'

van F , dat op den afstand t van het massa-punt $\frac{aQ}{h}$ ligt, de digtheid q_2 der lading, ontstaan uit de voor uitwendige punten aequivalent overgebrachte electricische massa $-\frac{aQ}{f}$ zijn

$$q_2 = -\frac{\frac{aQ}{h} \frac{a^4}{h^4} f^2 - \frac{a^4}{h^2}}{4\pi \frac{a^2}{h} t^3} = -\frac{Q}{4\pi a^3} \frac{h^2 (f^2 - h^2)}{l^3},$$

$$\text{waarin } t = \sqrt{\left(\frac{a^4}{h^4} f^2 - 2 \frac{a^4}{h^3} f \cos \theta + \frac{a^4}{h^2}\right)} = \frac{a^2}{h^2} l,$$

$l = \sqrt{(f^2 - 2fh \cos \theta + h^2)}$ de afstand van Q tot het punt O , beeldpunt van O' .

Na vermenigvuldiging van $q_1 + q_2$ met $\frac{a^3}{h^3}$ verkrijgt men voor de electricische digtheid q op den gegeven bol in het punt O

$$q = \frac{G}{4\pi h} - \frac{Q}{4\pi h} \frac{f^2 - h^2}{l^3} = \frac{1}{4\pi h l^3} (G l^3 - (f^2 - h^2) Q)$$

waar h de straal des bols, f de afstand van het influencerende punt tot het middelpunt, $\frac{G}{4\pi h}$ de constante digtheid der vrije, het tweede deel van q de digtheid der gebondene electriciteit, hetwelk overblijft, wanneer de bol wordt afgeleid, in welk geval $G = 0$.

SLOTWOORD.

Nog een enkel woord over de methoden zelveu.

Die van Beer en Green zijn alleen benaderings-methoden. In die van den eersten wordt namelijk voor de potentiaal \bar{V} der lading over het gegeven bolvormig segment in het middelpunt van het ontbrekende segment genomen het verschil der constante potentiaalwaarde K over den geheelen bol en die van het ontbrekende segment; alzoo het gegeven segment daarbij beschouwd als bevattende eene lading van constante digtheid ρ , terwijl toch de digtheid veranderlijk is.

Eene andere onnaauwkeurigheid, die ook bij Green voorkomt, bestaat daarin, dat in de plaats van het ontbrekende segment komt het cirkelvlak, dat den rand tot omtrek heeft.

Naarmate echter de grootte der opening afneemt, hebben beide minder invloed op de juistheid der methoden.

De methoden van Thomson, Lipschitz en Kötteritzsch zijn alle drie mathematisch juist. De eerste dezer munt uit door de eenvoudige wijze, waarop men tot de uitkomsten geraakt; de tweede, waarin benevens de electriche digtheid ook de uitwendige potentiaal en de grootte der geïnduceerde lading voorkomen, is diepzinnig en zeer werkzaam; de derde staat, doordien de vorm des geleiders, waarop zij betrekking heeft, een andere is, niet zoozeer in verband met de overige methoden, en is meer theoretisch dan praktisch.

STELLINGEN.

I.

Green's methode ter bepaling der electriche digtheid bij gewone verdeeling in een willekeurig punt van de oppervlakte eener geleidende, zeer dunne bolvormige schaal, waarin zich eene kleine, cirkelvormige opening bevindt, is onjuist.

II.

Overeenstemming van de uitkomsten der methode van Green, wat de electriche digtheid betreft, met die van de methode van Beer heeft er in zooverre plaats, en kan er ook slechts in zooverre plaats hebben, als dat twee waarden a en x , met betrekking tot eene zelfde grootheid niet met elkaar in strijd zijn, wanneer zij beide kleiner dan of hoogstens gelijk aan eene zekere grenswaarde b zijn.

III.

De methode van Thomson, die de waarde der electriche digtheid aan elke zijde van het bolvormige segment afzonderlijk geeft, is ook wegens hare eenvoudigheid boven die van Lipschitz te verkiezen.

IV.

Zoo men ook de Wiskunde onder de natuurwetenschappen wil rangschikken, is die van alle natuurwetenschappen degene, op welker gebied men het minst aan dwaling is blootgesteld.

V.

Het is wenschelijk dat de theorie der kogelfuncties van Laplace, wegens hare toepassing in Physica en Astronomie, meer beoefend worde.

VI.

Les causes primordiales ne nous sont point connues; mais elles sont assujetties à des lois simples et constantes, que l'on peut découvrir par l'observation, et dont l'étude est l'objet de la philosophie naturelle.

FOURIER.

VII.

De verklaring, die Cauchy geeft omtrent de dispersie van het licht, is niet in alle opzigten aannemelijk.

VIII.

De wet van Dulong omtrent de soortelijke warmte is niet vast genoeg gegrond, om daarop eene nieuwe chemische theorie te bouwen.

IX.

Ook bij electriciteit moet men denken aan eene werking van een medium.

X.

De natuurlijke kwarts is niet uit den gesmolten toestand gekristalliseerd.

XI.

Het gehalte der dampkrings-lucht aan koolzuur is in den loop der tijden veranderlijk.

XII.

Het is niet mogelijk eene scherpe grens te trekken tusschen de begrippen: individu en kolonie.

XIII.

Het zoogenaamd vormloos zetmeel is in de planten, waar het voorkomt, niet door kunstmatige drooging ontstaan.

XIV.

Bij de nieuwe regeling van het Hooger Onderwijs is het wenschelijk, dat aan één der drie Rijks universiteiten een observatorium voor Physische Astronomie verrijze.

E R R A T A.

Bladz	19	regel	5	van	boven	staat	a_2	lees	a^2
"	24	"	12	"	"	"	$-2\sqrt{1-\sigma_1}$	"	$-2\sqrt{1-\sigma_1^2}$
"	38	"	1	"	"	"	p^0	"	p_0
"	45	"	13	"	onder	"	$c^2(1-\mu^2)$	"	$c^2(1-\mu^2)$
"	57	"	5	"	boven	"	P_n	"	P^n
"	57	"	5	"	onder	"	$\sqrt{c^2+h}$	"	$\sqrt{c^2+h^2}$
"	63	"	7	"	"	"	overbrengce	"	overbrengen

