Onderzoek der trillende platte vliezen

https://hdl.handle.net/1874/253051

ONDERZOEK

DER

TRILLENDE PLATTE VLIEZEN.

ONDERZOEK

DER

TRILLENDE PLATTE VLIEZEN.

Akademisch Proefschrift

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN

DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE,

AAN DE HOOGESCHOOL TE UTRECHT,

NA MACHTIGING VAN DEN RECTOR MAGNIFICUS

DR. C H. C. GRINWIS,

GEWOON HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE,

MET TOESTEMMING VAN DEN ACADEMISCHEN SENAAT

EN

VOLGENS BESLUIT VAN DE FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE,

TE VERDEDIGEN

Op Donderdag, 24 Juni 1875, des namiddags ten 7 ure,

DOOR

JACOBUS CORNELIUS KAPTEYN,

GEBOREN TE BARNEVELD.

BARNEVELD,
P. ANDREÆ MENGER.
1875.

Aan mijne Ouders.

Gaarne betuig ik, bij het in 't licht geven van dit geschrift, openlijk mijnen dank aan de Hoogleeraars in de Wis- en Natuurkundige faculteit voor hetgeen zij gedaan hebben voor de ontwikkeling van mijn verstand.

Aan U in de eerste plaats, Hooggeleerde Grinwis, die het wel op U hebt willen nemen mijn Promotor te zijn en die nooit, gedurende mijnen geheelen studietijd, in gebreke waart in alles wat in Uwe macht stond, mij de behulpzame hand te reiken.

U, Hooggeleerde Buys Ballot, hartelijken dank voor al wat ik van U leerde en wat Gij voor mij hebt gedaan.

En Gij, Hooggeleerde Van Rees, die, na het eindigen van Uwen loopbaan als Hoogleeraar nog tijd en moeite overhad, om ook mij in de stndie der Mechanica in te leiden en die zoo bereidwillig Uwe hulpmiddelen ter mijner beschikking heb gesteld, wees overtuigd van mijne erkentelijkheid.

INHOUD.

HOOFDSTUK I.

INLEIDING.

§ 1. Doel van de studie der trillende vliezen.

Waar wij eene mathematische theorie met de proeven te vergelijken hebben, zal zich steeds de zwarigheid voordoen, dat de lichamen van de natuur niet volstrekt voldoen aan de voorwaarden, waarop de theorie is gegrond en waarvan wij wel genoodzaakt zijn uit te gaan om niet te stuiten op onoverkomelijke analytische bezwaren. Bij de benadering, waarmede wij ons dus moeten tevreden stellen, hebben wij recht des te nauwkeuriger overeenstemming tusschen proeven en theorie te verwachten, naarmate het lichaam waarop wij experimenteren, minder verschilt van de abstractie, die wij theoretisch kunnen nagaan. — Om deze reden is de studie der vliezen zeer belangrijk voor de theorie der Elasticiteit, die eene zeer kleine dikte en volmaakte homogeniteit eischt; zij zijn in dit opzicht boven de platen te verkiezen, bij welke de dikte nooit onmerkbaar, de homogeniteit twijfelachtig en de wijze van ondersteuning gebrekkig is.

Behalve dit is eene studie van de trillende vliezen onmisbaar in de theorie van het gehoor, welke natuurlijk zich daarop moet baseren.

§ 2. Historisch overzicht.

Niettegenstaande dit hebben zoowel wiskunstenaars als natuurkundigen zich in de eerste plaats bezig gehouden met de platen en dateert eene grondige beschouwing der vliezen eerst van den laatsten tijd.

Wat de vorige eeuw ons daarover opleverde is van weinig of geen beteekenis en wordt door Poisson als »quelques essais infructueux" gekarakteriseerd, hoewel daaronder stukken voorkomen van L. Euler. Deze laatste gaf zelfs reeds de vergelijking der platte vliezen 1), maar het bewijs daarvan liet te veel te wenschen over om daarop eene volledige theorie te bouwen.

Ook de proeven in dien tijd op vliezen gedaan, hebben weinig waarde.

De proeven toch van Riccati en Euler worden door Chladni afgekeurd en wat hij zelf daarover in zijne Akustik geeft, bepaalt zich tot gissingen.

Wij kunnen dus aannemen dat de wetenschappelijke behandeling van ons onderwerp begint met het proefondervindelijk onderzoek van Savart en de mathematische beschouwingen van Poisson.

Van dezen laatsten bezitten wij twee verhandelingen over elastische lichamen. De eerste dateert van 1812 en is opgenomen in de *mémoires de l'Institut de France* van dat jaar. Hij leidt daarin de algemeene vergelijking af voor het evenwicht en de beweging der elastische oppervlakken, welke ook reeds eenige jaren vroeger door Sophie Germain was gevonden. Het bijzondere geval van de platte oppervlakken geeft hij daarin niet. Hiertoe

1) Nov. commentat. Academ. Petropolit. Tom X.

gaat hij eerst over in zijne tweede verhandeling 1), het eerste grondige werk over de theorie der trillende platte vliezen. Het is in dit werk dat de strenge afleiding van de vergelijking

$$\frac{d^2w}{dt^2} = c^2 \left(\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{d^2w}{dy^2}\right)$$

wordt gegeven, welke de grondslag is van de theorie.

Bij de integratie daarvan bepaalt Poisson zich tot het algemeene geval van het rechthoekige en een bijzonder geval van het cirkelvormige vlies (n.l. het geval dat w in bovenstaande vergelijking slechts functie is van t en r en niet van θ, waardoor de diametrale knooplijnen worden uitgesloten.) Hij stelt zich tevreden met het afleiden der algemeene wetten en treedt niet in de details van eene classificatie der toonen en knooplijnen.

Lijnrecht in strijd met de door Poisson gegevene theorie, welke voor een bepaald vlies slechts ééne serie van toonen toelaat, zijn de waarnemingen van Savart een paar jaar vroeger gedaan, met het oog op zijne theorie van het gehoor. Hij vindt dat een vlies elke willekeurige toon kan voortbrengen en breidt dezen regel zelfs uit over alle lichamen, zoowel de snaarvormige als die waarvan alle drie afmetingen van dezelfde orde zijn. Eerst in den allerlaatsten tijd is door de proeven van Bourget en Bernard, de dwaling van Savart bewezen en de oorzaak daarvan aangetoond. Wij komen daarop terug als wij de proeven met de uitkomsten van de theorie vergelijken.

1) Mémoires de l'Institut VIII 1829. Behalve deze twee verhandelingen, bestaat er nog eene van Poisson, voorkomende in de Annales de Chimie et de Physique t. 37 pag. 337. Deze, gewoonlijk de kleinere genoemd in tegenstelling met de bovengenoemde, lieten we onvermeld omdat zij slechts een overzicht is van de resultaten der grootere.

Ondertusschen was bij dit essentieel verschil van proeven en berekening een nader onderzoek van de quaestie dringend noodzakelijk. Toch is er, behalve de proeven van Marx, 1) die minder de bevestiging van de theorie op het oog hadden, zoo goed als niets over de vliezen geschreven, totdat het vraagstuk weêr door Lamé is opgevat in zijne *Leçons sur l'Elasticité*. Daarin geeft hij de oplossing van een nieuw geval, dat, waarin het vlies den vorm van eenen gelijkzijdigen driehoek heeft, en waarbij hij groote analytische netheid bereikt door het invoeren van een nieuw soort van coördinaten, voor het eerst door hemzelf gebruikt in zijne *Theorie Analytique de la Chaleur*. Bovendien geeft hij de volledige ontwikkeling van het geval der vierkante vliezen.

Met het doel, de uitkomsten door Lamé verkregen aan de waarneming te toetsen hebben Bourget en Bernard talrijke proeven op vierkante vliezen in het werk gesteld 2). De resultaten van dit onderzoek verdienen, om de zorgvuldige wijze van waarneming, alle vertrouwen. Ook de cirkelvormige hebben zij aan proeven onderworpen, nadat eerst de theorie daarvan door Bourget 3) geheel algemeen is ontwikkeld en de berekening der numerische waarden van de afmetingen der knooplijnen met hunne correspondeerende toonen met veel zorg is gegeven. Door deze proeven zijn de beweringen van Savart voldoende wederlegd. Toch geven ook deze proeven eene afwijking van de theorie, die misschien daarin zijn' grond heeft, dat in de algemeene vergelijking waarop de theorie

---

1) Schweigger—Seidels Journal, Bd 65 en 66 (5 en 6 3e serie.)

2) Annales de Chimie et de Phys. 3e serie t. 60.

3) Annales de l'Ecole Normale III 1866.

is gebaseerd de weêrstand van de lucht niet in aanmerking is genomen. Wij komen hierop terug in het laatste hoofdstuk.

Behalve aan de werken van genoemde auteurs, herinneren wij aan de theoretische behandeling van de platte vliezen van Riemann 1) en Mathieu 2). Aan dezen laatsten zijn wij nog de behandeling van het elliptische vlies 3) schuldig. De talrijke analytische bezwaren aan dit geval verbonden, zijn gelukkig door den auteur overwonnen; wij stellen ons voor in het 5e hoofdstuk daarvan een overzicht te geven.

In het voorgaande gaven wij een overzicht van hetgeen, voor zoover ons bekend is, over de trillende platte vliezen is geschreven. Wij willen nu achtereenvolgens de verschillende vormen van vliezen behandelen, voor welke de integratie gelukt is, om daarna de resultaten van proefneming en theorie te vergelijken.

---

1) Partielle diff. Gleichungen 1869.

2) Cours de Physique Mathematique 1873.

3) Liouville. Journal de Mathematique 13, 1868.

HOOFDSTUK II.

RECHTHOEKIGE VLIEZEN.

---

§ 1. Analytische voorstelling der quaestie.

Wij beschouwen steeds homogene vliezen, van constante zeer kleine dikte en waarbij de krachten, die we in het vlak van het vlies en loodrecht op den omtrek aannemen, langs dien omtrek overal dezelfde waarde hebben.

Leggen wij een loodrecht assensysteem in het vlak van het vlies, dan is de algemeene differentiaal vergelijking der beweging (zie Lamé, Leçons sur l'Elasticité p. 115).

$$(1) \quad \frac{d^2w}{dt^2} = c^2 \left(\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{d^2w}{dy^2} \right)$$

waarin:

w de oneindig kleine verplaatsing is van eenig punt van het vlies. Deze verplaatsing is bij de afleiding der vergelijking (1) aangenomen loodrecht te zijn op het oorspronkelijk oppervlak.

x,y de rechthoekige coordinaten van eenig punt.

t de tijd.

c^2 eene constante $= \frac{F}{\varrho}$ als F de constante normale trekkracht langs den rand voor de eenheid van oppervlak en ϱ de densiteit voorstelt.

Voor het geval van de rechthoekige vliezen, dat wij gaan behandelen, hebben wij behalve aan (1) te voldoen aan de condities langs den rand. Leggen wij de assen langs de zijden van het vlies zoo moet

$$(2) \begin{cases} w = o \text{ voor } x = o \text{ en } y = o \\ w = o \quad \text{»} \quad x = l \quad \text{»} \quad y = l' \end{cases}$$

welke uitdrukken, dat de rand onbewegelijk is. Ook aan den aanvangstoestand moet worden voldaan, aangezien natuurlijk zoowel de oorspronkelijke vorm van het vlies, als de snelheid van elk punt willekeurig gegeven kan zijn en dus

$$(3) \quad w = f(x,y) \text{ voor } t = o$$

$$(4) \quad \frac{dw}{dt} = F(x,y) \quad \text{»} \quad t = o$$

§ 2. Oplossing door particuliere integralen.

a. *Algemeene oplossing, voldoende aan de voorwaarden* (2).

Trachten wij aan de vergelijking te voldoen door $w = X\,Y\,T$ waarin X eene zuivere functie van x
Y » » » » y
T » » » » t voorstelt.

Brengen wij deze waarde in (1) en deelen wij door X Y T zoo komt

$$\frac{1}{T}\frac{d^2T}{dt^2} = \frac{c^2}{X}\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{c^2}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}$$

Het eerste lid hiervan is eene zuivere functie van t, terwijl het 2e lid alleen x en y bevat. Elk lid van de vergelijking moet dus eene constante waarde hebben. Evenzoo elke term van het tweede lid afzonderlijk. Geven wij aan deze constanten negatieve waarden, omdat de beweging periodisch zijn moet en zij dus

$$\frac{1}{T}\frac{d^2T}{dt^2} = -\gamma^2 \quad \frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -h^2 \quad \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = -k^2$$

zoo bestaat tusschen de constanten h, k, γ de betrekking

$$\gamma^2 = c^2 (h + k^2).$$

De integratie dezer drie vergelijkingen geeft

$$T = A \cos \gamma t + B \sin \gamma t$$
$$X = C \cos hx + D \sin hx$$
$$Y = E \cos ky + F \sin ky \quad \text{en dus}$$

$$(k) \quad w = (A \cos \gamma t + B \sin \gamma t)(C \cos hx + D \operatorname{Sin} hx)(E \cos ky + F \sin ky).$$

Om nu aan de condities (2) te voldoen, moet, daar voor

$x = o \quad w = o$ wat ook y en t $\quad C = o$ zijn

$y = o \quad w = o$ » x » $\quad E = o$ »

$x = l \quad w = o \quad \sin hl = o \quad \therefore \quad hl = i\pi \quad \therefore \quad h = \frac{i}{l}\pi$

$y = l' \quad w = o \quad \sin hl' = o \quad \therefore \quad kl' = i'\pi \quad \therefore \quad k = \frac{i'}{l'}\pi.$

Stellende dus $A\,D\,F = A_{ii'}$ en $B\,D\,F = B_{ii'}$ zoo is

$$(5) \quad w = (A_{ii'} \cos \gamma t + B_{ii'} \sin \gamma t) \sin i\pi \frac{x}{l} \sin i'\pi \frac{y}{l'}$$

waarin i en i' willekeurige maar geheele getallen zijn en

$$(6) \quad \gamma = c\pi \sqrt{\frac{i^2}{l^2} + \frac{i'}{l'^2}}.$$

Ook de som van alle particuliere oplossingen zal voldoen aan (1) en (2).

$$(7) \quad \therefore w = \sum_{i=o}^{\infty} \sum_{i'=o}^{\infty} (A_{ii'} \cos \gamma t + B_{ii'} \sin \gamma t) \sin i\pi \frac{x}{l} \sin i'\pi \frac{y}{l'}$$

b. *Bepaling van de constanten A en B zoodanig, dat aan de voorwaarden 3 en 4 wordt voldaan.*

Wij maken nu gebruik van de onbepaaldheid der coëfficienten A en B om ook de voorwaarden (3) en (4) te vervullen. Stellende $t = o$ in (7) en de afgeleide daarvan, zoo vinden wij als vergelijkingen voor deze constanten:

$$(8) \begin{cases} \sum_{i=o}^{\infty} \sum_{i'=o}^{\infty} A_{ii'} \sin i\pi \frac{x}{l} \sin i'\pi \frac{y}{l'} = f(x,y) \text{ en} \\ \sum_{i=o}^{\infty} \sum_{i'=o}^{\infty} \gamma B_{ii'} \sin i\pi \frac{x}{l} \sin i'\pi \frac{y}{l'} = F(x,y) \end{cases}$$

Ontwikkelen wij nu de functies van het tweede lid volgens Fourier's methode in dubbele sinusreeksen, zoo zal de gelijkstelling der afzonderlijke termen ons terstond de waarde der coëfficienten geven.

Om de gewenschte ontwikkeling te verkrijgen, hebben wij slechts de algemeene formule van Fourier een weinig te vervormen, waardoor zij eenen vorm aanneemt analoog aan dien van het eerste lid van eene der vergelijkingen (8).

Volgens dit theorema toch is 1)

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{4cc'} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-c}^{c} \int_{-c'}^{c'} d\lambda \, d\mu \; \varphi(\lambda, \eta)$$

$$\cos \frac{m\pi}{c} (\lambda - x) \cos \frac{n\pi}{c'} (\mu - y).$$

1) Zie o. a. Riemann. Partielle Diff. Gleichungen p 93.

Veranderen wij de somteekens in andere, die zich, evenals die van (8), van 0 tot ∞ uitstrekken, zoo hebben wij algemeen

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A \cos mh \cos nk =$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty} A \cos mh \left[\sum_{-\infty}^{0} \cos nk + \sum_{0}^{\infty} \cos nk \right] =$$

$$= 2 \sum_{-\infty}^{\infty} A \cos mh \sum_{0}^{\infty} \cos nk = 4 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \cos mh \cos nk$$

en dus kunnen wij schrijven

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{c\,c'} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-c}^{c} \int_{-c'}^{c'} d\lambda \; d\mu \; \varphi(\lambda, \mu)$$
$$\cos \frac{m\pi}{c} (\lambda - x) \cos \frac{n\pi}{c'} (\mu - y).$$

Als wij nu aannemen dat $\varphi(x, y)$ slechts voor positieve waarden van de veranderlijken gegeven is, zooals dit in (8) het geval is, zoo laat deze formule zich vereenvoudigen.

Ontwikkelen wij de cosin. en schrijven de x's en y's buiten het integraalteeken zoo komt

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{cc'} \times$$

$$\left[\Sigma\Sigma \cos \frac{m\pi x}{c} \cos \frac{n\pi y}{c'} \int_{-c}^{c} d\lambda \cos \frac{m\pi\lambda}{c} \int_{-c'}^{c'} d\mu \cos \frac{n\pi\mu}{c'} \varphi(\lambda,\mu) \right.$$

$$+ \Sigma\Sigma \sin \frac{m\pi x}{c} \sin \frac{n\pi y}{c'} \int_{-c}^{c} d\lambda \sin \frac{m\pi\lambda}{c} \int_{-c'}^{c'} d\mu \sin \frac{n\pi\mu}{c'} \varphi(\lambda,\mu)$$

$$+ \Sigma\Sigma \sin \frac{m\pi x}{c} \cos \frac{n\pi y}{c'} \int_{-c}^{c} d\lambda \sin \frac{m\pi\lambda}{c} \int_{-c'}^{c'} d\mu \cos \frac{n\pi\mu}{c'} \varphi(\lambda,\mu)$$

$$\left. + \Sigma\Sigma \cos \frac{m\pi x}{c} \sin \frac{n\pi y}{c} \int_{-c}^{c} d\lambda \cos \frac{m\pi\lambda}{c} \int_{-c'}^{c'} d\mu \sin \frac{n\pi\mu}{c} \varphi(\lambda,\mu) \right]$$

Daar nu $\varphi\ (x,y)$ slechts voor positieve waarden van x en y gegeven is, kunnen wij hare waarde voor negatieve x's en y's geheel willekeurig nemen. Nemen wij
$\varphi\ (x,-y) = -\varphi\ (x,y)$ dan wordt

$$\int_{-c'}^{c'} \cos \frac{n\pi\mu}{c'}\ \varphi\ (\lambda,\mu)\ d\mu =$$

$$\int_{c'}^{o} \cos \frac{n\pi\mu}{c'}\ \varphi\ (\lambda,\mu)\ d\mu + \int_{o}^{c'} \cos \frac{n\pi\mu}{c'}\ \varphi\ (\lambda,\mu)\ d\mu =$$

$$\int_{c'}^{o} \cos \frac{n\pi\mu}{c'}\ \varphi\ (\lambda,-\mu)\ d\ (-\mu) + \int_{o}^{c'} \cos \frac{n\pi\mu}{c'}\ \varphi\ (\lambda,\mu)\ d\mu =$$

$$-\int_{o}^{c'} \cos \frac{n\pi\mu}{c'}\ \varphi\ (\lambda,\mu)\ d\mu + \int_{o}^{c'} \cos \frac{n\pi\mu}{c'}\ \varphi\ (\lambda,\mu)\ d\mu = o.$$

terwijl

$$\int_{-c'}^{c'} \sin \frac{n\pi\mu}{c'}\ \varphi\ (\lambda,\mu)\ d\mu =$$

$$\int_{-c'}^{o} \sin \frac{n\pi\mu}{c'}\ \varphi\ (\lambda,\mu)\ d\mu + \int_{o}^{c'} \sin \frac{n\pi\mu}{c'}\ \varphi\ (\lambda,\mu)\ d\mu =$$

$$\int_{c'}^{o} - \sin \frac{n\pi\mu}{c'}\ \varphi\ (\lambda,-\mu)\ d\ (-\mu) + \int_{o}^{c'} \sin \frac{n\pi\mu}{c'}\ \varphi\ (\lambda,\mu)\ d\mu =$$

$$2 \int_{o}^{c'} \sin \frac{n\pi\mu}{c'}\ \varphi\ (\lambda,\mu)\ d\mu.$$

Bijgevolg als wij de integralen in μ nu vóór die van λ schrijven

$$\varphi\ (x,y) = \frac{2}{cc'} \times$$

$$\left[\Sigma\Sigma \sin \frac{m\pi x}{c} \sin \frac{n\pi y}{c'} \int_{o}^{c'} \sin \frac{n\pi\mu}{c'}\ d\mu \int_{-c}^{c} \sin \frac{m\pi\lambda}{c}\ \varphi\ (\lambda,\mu)\ d\lambda \right.$$

$$\left. + \Sigma\Sigma \cos \frac{m\pi x}{c} \sin \frac{n\pi y}{c'} \int_{o}^{c'} \sin \frac{n\pi\mu}{c'}\ d\mu \int_{-c}^{c} \cos \frac{m\pi\lambda}{c}\ \varphi\ (\lambda,\mu)\ d\lambda \right]$$

Zij nu alweêr, daar $\varphi\ (x,y)$ voor negatieve x's willekeurig is

$\varphi\,(-x,y) = -\varphi\,(x,y)$ dan is evenzoo

$\int_{-c}^{c} \sin\frac{m\pi\lambda}{c}\,\varphi\,(\lambda,\mu)\,d\lambda = 2\int_{0}^{c} \sin\frac{m\pi\lambda}{c}\,\varphi\,(\lambda,\mu)\,d\lambda$ en

$\int_{-c}^{c} \cos\frac{m\pi\lambda}{c}\,\varphi\,(\lambda,\mu)\,d\lambda = o.$ Daardoor is dan eindelijk

$$(9).\quad \varphi\,(x,y) = \frac{4}{cc'}\sum_{m=o}^{\infty}\sum_{n=o}^{\infty} \sin\frac{m\pi x}{c}\,.\,\sin\frac{n\pi y}{c'}\int_{o}^{c}\int_{o}^{c^1}$$

$$\sin\frac{m\pi\lambda}{c}\,.\,\sin\frac{n\pi\mu}{c'}\,\varphi\,(\lambda,\mu)\,d\lambda\,d\mu.$$

Dit is de vorm dien wij zochten en die analoog is met het voorste lid der vergelijkingen (8). Willen wij ze volmaakt in overeenstemming brengen zoo behoeven wij slechts te nemen

$c=l$ $c'=l'$ $m=i$ $m'=i'$ en successievelijk $\varphi=f$ of $\varphi=F$ en eindelijk

$$A_{ii'} = \frac{4}{ll^1}\int_{o}^{l}\int_{o}^{l'} \sin\frac{i\pi\lambda}{l}\,\sin\frac{i'\pi\mu}{l'}\,f\,(\lambda,\mu)\,d\lambda\,d\mu$$

$$B_{ii'} = \frac{4}{ll^1}\int_{o}^{l}\int_{o}^{l'} \sin\frac{i\pi\lambda}{l}\,\sin\frac{i'\pi\mu}{l'}\,F\,(\lambda,\mu)\,d\lambda\,d\mu$$

waardoor de coëfficienten in (7) gegeven zijn en dus w geheel en al is bepaald.

§ 3. Andere oplossing.

Wij kunnen de oplossing van het voorgaande vraagstuk ook anders geven, waardoor beter in het oog zal vallen in hoeverre het gevonden resultaat algemeen is. Wij zullen vinden dat (7) algemeen is, onder de eenige aanname dat na eenigen tijd het vlies zijne vorige gedaante herneemt. De duur dezer periode zij $2\,\pi$.

De integraal van (1) is eene functie van x, y, t; nemen wij $w=\varphi\,(x,\,y,\,t)$ dan behoeft men deze functie slechts te zoeken tusschen de grenzen

o en l voor x

o en l' voor y

$-\pi$ en $+\pi$ voor t en te zorgen dat w buiten die grenzen periodisch is. Elke functie nu laat zich tusschen deze grenzen ontwikkelen door eene formule welke geheel op de wijze van (9) wordt gevonden n. l. deze

$$\varphi\,(x,\,y,\,t) = \frac{4}{ll'\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}\Sigma\Sigma_{o}\int_{o}^{l}\int_{o}^{l'}\int_{-\pi}^{\pi}\sin\frac{m\pi x}{l}\,\sin\frac{n\pi y}{l'}$$

$$\sin\frac{m\pi\lambda}{l}\,\sin\frac{n\pi\mu}{l'}\,\cos p\,(v-t)\,\varphi\,(\lambda,\mu,v)\,d\lambda\,d\mu\,dv.$$

Deze is steeds $= o$ voor $x = o$ en $y = o$

en ook voor $n = l$ $y = l'$ aangezien m en n geheele getallen voorstellen. Ontwikkelen wij hierin de cos. in aanmerking nemende dat de bepaalde integraal = constante, dan is

$$\varphi\,(x, y, t) = \Sigma\Sigma\Sigma\,\sin\frac{m\pi x}{l}\,\sin\frac{n\pi y}{l'}\,[\mathrm{A}\cos pt + \mathrm{B}\sin pt].$$

Zal nu deze functie voldoen aan de vergelijking (1) zoo moet $p = c\pi\sqrt{\frac{m}{l^2} + \frac{n^2}{l'^2}}$ z. a. wij terstond vinden door de functie in (1) te substitueren.

De coëfficiënten worden weêr berekend evenals bij de vorige oplossing. Eindelijk blijkt dat $\varphi\,(2\pi + t) = \varphi\,(t)$ en $\varphi\,(2\pi - t) = \varphi\,(-t)$ zoodat de gevondene oplossing, die geldig is tusschen de grenzen $-\pi$ en π, buiten die grenzen periodisch wordt.

§ 4. Rangschikking der toonen en knooplijnen van het rechthoekig vlies waarvan de vierkanten der zijden onderling onmeetbaar zijn.

Wij vonden (zie form. (7)).

$$(7) \quad w = \Sigma\,\Sigma\,(A_{ii'} \cos \gamma t + B_{ii'} \sin \gamma\, t) \sin i\,\pi \frac{x}{l} \sin i'\,\pi \frac{y}{l'}.$$

Elke term hiervan kan geheel alleen bestaan als de begintoestand een bijzondere is; want hadden wij in de form. (10) gegeven

$$f(x,y) = \mathrm{K} \sin k\,\pi \frac{x}{l} \sin k'\,\pi \frac{y}{l}$$

$$\mathrm{F}(x,y) = \mathrm{H} \sin k\,\pi \frac{x}{l'} \sin k'\,\pi \frac{y}{l'}$$

zoo zouden alle A's behalve $A_{kk'}$
en alle B's behalve $B_{kk'}$

verdwijnen omdat steeds alle integralen als deze

$$\int_o^l \sin k\,\pi \frac{\lambda}{l} \sin k'\,\pi \frac{\lambda}{l}\, d\,\lambda = o \text{ behalve voor } k = k'.$$

Elke term van (7) stelt dus eene mogelijke vibratie voor waarvan de periode is (vgl. form. (6)).

$$\mathrm{T} = \frac{2\,\pi}{\gamma} = \frac{2}{c\sqrt{\dfrac{i^2}{l'} + \dfrac{i'^2}{l'^2}}}$$ en het aantal trillingen per seconde

$$\mathrm{N}\,(i\,i') = \frac{1}{\mathrm{T}} = \frac{1}{2}\,c\,\sqrt{\frac{i^2}{l^2} + \frac{i'^2}{l'^2}}$$ waarin de notatie

N $(i\,i')$ aanduidt de hoogte van den toon, gegeven door den term waarin de beide getallen i en i' voorkomen.

Het aantal toonen, dat een rechthoekig vlies kan voortbrengen, is dus even groot als het aantal van elkaar verschillende waarden van γ, dus in het algemeen oneindig. Willen wij deze toonen ieder afzonderlijk beschouwen, zoo wordt daartoe vereischt alle termen in de form. (7) te vinden, die denzelfden toon voorstellen of m. a. w.

alle waarden van K en K′ te vinden, die voldoen aan de vergelijking

$$\frac{i^2}{l^2} + \frac{i'^2}{l'^2} = \frac{K^2}{l^2} + \frac{K'^2}{l'^2}.$$

Schrijven wij deze

$$i'^2 - K'^2 = (K^2 - i^2)\,\frac{l'^2}{l^2}$$ zoo blijkt terstond, dat,

als l^2 en l'^2 (l en l' de zijden van het vlies) onderling onmeetbaar zijn, het eerste lid een geheel en het tweede een onmeetbaar getal is. Aan deze vergelijking kan dus niet worden voldaan, dan door $K = i$, $K' = i'$, zoodat *met elke toon slechts één term correspondeert.* Alle toonen van het rechthoekige vlies, waarvan de vierkanten der zijden onderling onmeetbaar zijn, vormen dus oneindig veel reeksen, analoog met die van de snaar. De grondtoon van elke reeks is een toon $N\,(i, i')$ waarin i en i' betrekkelijke priemgetallen zijn, terwijl alle overige termen derzelfde reeks worden voorgesteld door $N\,(m\,i, m\,i')$.

Met elken toon correspondeert één enkel systeem knooplijnen, waarvoor in

$$w = (A_{ii'} \cos \gamma t + B_{ii'} \sin \gamma t) \sin i\pi \frac{x}{l} \sin i'\pi \frac{y}{l}$$

op elk oogenblik (dus onafhankelijk van t) $w = o$ is.

De meetkunstige plaats der knooplijnen is dus gegeven door

$$\sin i\pi \frac{x}{l} \sin i\pi \frac{y}{l'} = o$$

waaraan voldaan wordt door

$$
\begin{array}{ll}
x = o & y = o \\
= \frac{l}{i} & = \frac{l'}{i'} \\
= \frac{l}{i} & = 2.\frac{l'}{i'} \\
\ldots & \ldots\ldots \\
= l & = l'
\end{array}
$$

De eerste en laatste waarden van beiden, stellen den rand voor; de overige $i - 1$ en $i' - 1$ lijnen respectivelijk // de zijden.

§ 5. Het vierkante vlies.

a. *Enkelvoudige toonen die het vlies geven kan.*

Bij het vierkante vlies is $l = l' = a$.

$$T = \frac{2a}{c\sqrt{i^2 + i'^2}} = \frac{2a}{\sqrt{r}} \qquad N(i\,i') = \frac{c}{2a}\sqrt{r}.$$

De termen, die denzelfden toon geven als $N(i\,i')$ moeten voldoen aan de vergelijking

$$r = A^2 + B^2 = i^2 + i'^2.$$

Om alle oplossingen hiervan te vinden schrijven wij

$$i^2 + i'^2 = (i + i'\sqrt{-1})(i - i'\sqrt{-1}).$$

Ontbinden wij nu elk dezer twee complexe factoren in zijne priemfactoren, aldus:

$$i + i'\sqrt{-1} = (\alpha + \beta\sqrt{-1})^k (\alpha_1 + \beta_1\sqrt{-1})^{k_1} \ldots q^p q_1^{p_1}$$
$$i - i'\sqrt{-1} = (\alpha - \beta\sqrt{-1})^k (\alpha_1 - \beta_1\sqrt{-1})^{k_1} \ldots q^p q_1^{p_1}$$

waarin de q's de rëeele priemfactoren zijn, die zich niet in complexe factoren laten ontbinden, d. i. niet gelijk zijn aan de som van twee quadraatgetallen. Volgens bekende theorema's uit de getallen theorie zijn deze alle van den vorm $4n + 3$, aangezien alle rëeele priemgetallen van dien vorm ook complexe priemgetallen zijn en die van den vorm $4n + 1$ zich steeds laten voorstellen als de som van twee vierkanten of, wat hetzelfde is, als het product van twee complexe factoren. Behalve deze factoren kan eenig getal dan nog slechts als ondeelbare factor het getal 2 hebben dat zich laat schrijven $(1 + \sqrt{-1})(1 - \sqrt{-1})$. Bij gevolg laat zich r schrijven

$$r = i^2 + i'^2 = (\alpha + \beta\sqrt{-1})^k (\alpha - \beta\sqrt{-1})^k (\alpha_1 + \beta_1\sqrt{-1})^{k_1} (\alpha_1 - \beta_1\sqrt{-1})^{k_1} \,.\,.\, q^{2p} q_1^{2p_1}.$$

Het product van alle complexe factoren laat zich hieruit gemakkelijk op verschillende wijzen als het product van slechts twee complexe factoren schrijven. Om alle wijzen te hebben waarop dit kan geschieden behoeven wij slechts te schrijven

$$i^2 + i'^2 = q^{2p} q_1^{2p_1} \,.\,.\, (m + n\sqrt{-1})(m - n\sqrt{-1})$$

en dan te nemen voor $m + n\sqrt{-1}$ een product bestaande uit factoren waarvan er een genomen is uit elk paar factoren $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$. Het product der overblijvende factoren zal dan $m - n\sqrt{-1}$ zijn. Doen wij dit zoo dikwijls als mogelijk is, zoo vinden wij $(k + 1)(k_1 + 1) \ldots$ wijzen, waarop r in twee complexe factoren

$$(m + n\sqrt{-1})\, q^p q_1^{p_1} \,.\,.\, \text{ en } (m - n\sqrt{-1})\, q_1^p q_1^{p_1} \,.\,.$$

kan worden ontbonden en dus hetzelfde aantal voor de wijzen waarop

$$r = i^2 + i'^2 = (m^2 + n^2) q^{2p} q_1^{2p} \,.\,.\, = (m q^p q_1^p \,.\,.)^2 + \\ + (n q^p q_1^{p_1} \,.\,.)^2 = A^2 + B^2$$

kan worden gemaakt.

Hiermede is dus het vraagstuk opgelost. Nemen wij als voorbeeld $r = 85$

$$85 = 5.\ 17 = (2^2 + 1)(4^2 + 1) = (2 + \sqrt{-1})$$
$$(4 + \sqrt{-1})(2 - \sqrt{-1})(4 - \sqrt{-1})$$

$(2 + \sqrt{-1})(4 + \sqrt{-1}) = 7 + 6\sqrt{-1}$ dus is de andere factor
$7 - 6\sqrt{-1} \therefore m^2 + n^2 = 7^2 + 6^2$

$(2 + \sqrt{-1})(4 - \sqrt{-1}) = 9 + 2\sqrt{-1}$ dus is de andere factor
$9 - 2\sqrt{-1} \therefore m^2 + n^2 = 9^2 + 2^2$

$(2 - \sqrt{-1})(4 + \sqrt{-1}) = 9 - 2\sqrt{-1}$ dus is de andere factor
$9 + 2\sqrt{-1} \therefore m^2 + n^2 = 9^2 + 2^2$

$(2 - \sqrt{-1})(4 - \sqrt{-1}) = 7 - 6\sqrt{-1}$ dus is de andere factor
$7 + 6\sqrt{-1} \therefore m^2 + n^2 = 7^2 + 6^2$

Rangschikken wij nu de toonen, die het vierkante vlies geven kan. Ook hier zijn oneindig veel reeksen van toonen mogelijk. De laagste term van elke reeks is $\frac{c}{2a}\sqrt{r}$ waarin r een getal is, dat niet door een quadraat deelbaar is en gelijk is aan de som van twee quadraten. Lamé noemt r het argument van de reeks en noemt het enkel, dubbel enz. naarmate r zich volgens het voorgaande op één, twee enz. wijzen in de som van twee vierkanten laat ontbinden. De andere termen van elke serie worden gegeven door de formule

$$N = m\frac{c}{2a}\sqrt{r}$$

waarin m elk geheel getal kan zijn.

Behalve deze reeksen is er nog eene onvolledige reeks

$$5\ \frac{c}{2a} \quad 10\ \frac{c}{2a} \ . \ . \ . \ (i^2 + i'^2)\ \frac{c}{2a} \ . \ . \ .$$

waarvan het argument 1 is.

Van al deze toonen hebben alleen die waarin $i = i'$ is éénen term. Elke andere toon waarvoor $r = \alpha^2 + \beta^2$ heeft minstens 2 termen, de éene waarin $i = \alpha$, $i' = \beta$ en de andere waarin $i = \beta$, $i' = \alpha$. Dit duidt Lamé aan door de notatie $N\binom{i}{i'}$, welke dus beteekent dat de toon N de twee termen $N(i\,i')$ en $N(i'\,i)$ heeft. — In 't algemeen heeft een toon evenveel termen als de vergelijking $i^2 + i'^2 = r\,m^2$ oplossingen heeft. Zoo heeft de toon $\frac{c}{2a}\sqrt{85}$ vier termen. Wij duiden dit aldus aan:

$$N\binom{7}{6} = N\binom{9}{2}.$$

De toon $13\,\frac{c}{2a}\sqrt{85} = \frac{c}{2a}\sqrt{13^2.85}$ heeft 10 termen want:

$$13^2 85 = 13^2.5.17 = (2^2 + 3^2)^2\,(2^2 + 1^2)\,(4^2 + 1^2) =$$
$$= (2 + 3\sqrt{-1})^2\,(2 - 3\sqrt{-1})^2\,(2 + \sqrt{-1})$$
$$(2 - \sqrt{-1})\,(4 + \sqrt{-1})\,4 - \sqrt{-1})$$
$$(2 + 3\sqrt{-1})^2\,(2 + \sqrt{-1})\,(4 + \sqrt{-1}) = -107 +$$
$$+ 54\sqrt{-1} \therefore 13^2.85 = 107^2 + 54^2$$
$$(2 + 3\sqrt{-1})^2\,(2 + \sqrt{-1})\,(4 - \sqrt{-1}) = -69 +$$
$$+ 98\sqrt{-1} \therefore 69^2 + 98^2$$
$$(2 + 3\sqrt{-1})^2\,(2 - \sqrt{-1})\,(4 + \sqrt{-1}) = -21 +$$
$$+ 118\sqrt{-1} \therefore 21^2 + 118^2$$
$$(2 - 3\sqrt{-1})^2\,(2 + \sqrt{-1})\,(4 + \sqrt{-1}) = -107 +$$
$$+ 54\sqrt{-1} \therefore 107^2 + 54^2$$
$$(2 + 3\sqrt{-1})^2\,(2 - \sqrt{-1})\,(4 - \sqrt{-1}) = 107 -$$
$$- 54\sqrt{-1} \therefore 54^2 + 107^2$$
$$(2 - 3\sqrt{-1})^2\,(2 + \sqrt{-1})\,(4 - \sqrt{-1}) = 21 -$$
$$- 118\sqrt{-1} \therefore 118^2 + 21^2$$
$$(2 - 3\sqrt{-1})^2\,(2 - \sqrt{-1})\,(4 + \sqrt{-1}) = 69 -$$
$$- 98\sqrt{-1} \therefore 98^2 + 69^2$$
$$(2 - 3\sqrt{-1})^2\,(2 - \sqrt{-1})\,(4 - \sqrt{-1}) = 107 -$$
$$- 54\sqrt{-1} \therefore 54^2 + 107^2$$

$$(2+3\sqrt{-1})(2-3\sqrt{-1})(2+\sqrt{-1})(4+\sqrt{-1}) = \\ = 13\,(7+6\sqrt{-1}) \therefore 91^2+78^2$$

$$(2+3\sqrt{-1})(2-3\sqrt{-1})(2+\sqrt{-1})(4-\sqrt{-1}) = \\ = 13\,(9+2\sqrt{-1}) \therefore 117^2+26^2$$

$$(2+3\sqrt{-1})(2-3\sqrt{-1})(2-\sqrt{-1})(4+\sqrt{-1}) = \\ = 13\,(9-2\sqrt{-1}) \therefore 26^2+117^2$$

$$(2+3\sqrt{-1})(2-3\sqrt{-1})(2-\sqrt{-1})(4-\sqrt{-1}) = \\ = 13\,(7-6\sqrt{-1}) \therefore 78^2+91^2$$

Wij hebben dus de notatie

$$\mathrm{N}\binom{107}{54} = \mathrm{N}\binom{69}{98} = \mathrm{N}\binom{21}{118} = \mathrm{N}\binom{91}{78} = \mathrm{N}\binom{117}{26}.$$

b. *Knooplijnen.*

Nu wij de toonen hebben gerangschikt en de verschillende termen kunnen vinden, die bij één' toon behooren, kunnen wij de knooplijnen beschouwen, welke zich bij elken toon zullen voordoen. Beginnen wij bij het eenvoudigste geval:

1e — $\mathrm{N}\,(1,1) = \dfrac{c}{2a}\sqrt{2}$ heeft slechts één term; zal

$$w = (\mathrm{A}\cos\gamma t + \mathrm{B}\sin\gamma t)\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{a}$$

gelijk nul zijn van voor alle waarden van t, zoo moet

fig. 1.

N (1.1)

$$\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{a} = o$$

Hieraan voldoen op het vlies geene andere punten dan die waarvoor

$$x = o \text{ of } x = a$$
$$y = o \text{ » } y = a$$

d. w. z. er zijn geene andere plaatsen van rust dan de randen.

2^e — $N\binom{2}{1} = \frac{c}{2a}\sqrt{5}$ heeft twee termen en dus als

$$w = (A_{1.2} \cos \gamma t + B_{1.2} \sin \gamma t) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{a} +$$

$$+ (A_{2.1} \cos \gamma t + B_{2.1} \sin \gamma t) \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a}$$

gelijk nul zal zijn voor elke t zoo moet

$$A_{1.2} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{a} + A_{2.1} \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a} = o$$

$$B_{1.2} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{a} + B_{2.1} \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a} = o$$

of als wij de sinussen van den dubbelen boog ontwikkelen

$$\sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a} \left(A_{1.2} \cos \frac{\pi y}{a} + A_{2.1} \cos \frac{\pi x}{a} \right) = o$$

$$\sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a} \left(B_{1.2} \cos \frac{\pi y}{a} + B_{2.1} \cos \frac{\pi x}{a} \right) = o.$$

Hieraan wordt in de eerste plaats voldaan door

$$\sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a} = o$$

welke weêr uitdrukt dat de randen knooplijnen zijn. De andere factoren $= o$ gesteld geven algemeen slechts één enkel punt, het middelpunt (zie fig. 2); immers kan

$N\binom{2}{1}$

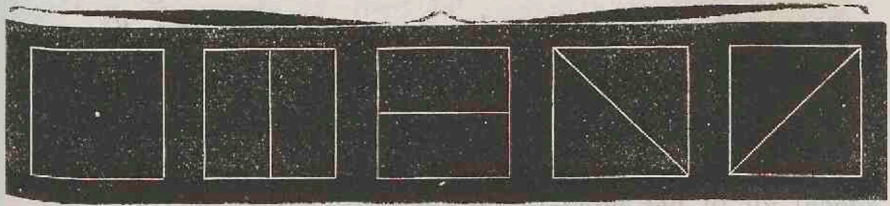


fig. 2. fig. 3. fig. 4. fig. 5. fig. 6.

aan bovenstaande vergelijkingen, behalve door de randen, slechts voldaan worden door gelijktijdig

$$\frac{\pi y}{a} = \frac{\pi}{2} \text{ en } \frac{\pi x}{a} = \frac{\pi}{2}$$

te nemen, d. i. alleen door het punt $x = \frac{1}{2} a$, $y = \frac{1}{2} a$.

In het gewone geval zal de toon $N \binom{2}{1}$ dus slechts het middelpunt als knoop*punt* hebben. Is evenwel de begintoestand zoodanig dat $A_{2.1}\, B_{1.2} = A_{1.2}\, B_{2.1}$ is, zoo worden de beide factoren tusschen haakjes gelijk. Bij gevolg zal in dat geval de kromme

$$A_{1.2} \cos \frac{\pi y}{a} + A_{2.1} \cos \frac{\pi x}{a} = o.$$

eene knooplijn zijn. De vorm van deze knooplijn hangt af van de constanten $A_{2.1}$ en $A_{1.2}$

Is de begintoestand zoodanig dat

$A_{1.2} = o$, zoo is $x = \frac{1}{2} a$ d. i. eene middellijn $//\, y$ as, eene knooplijn (zie fig. 3)

als $A_{2.1} = o$, zoo is $y = \frac{1}{2} a$ d. i. eene middellijn $//\, x$ as, eene knooplijn (zie fig. 4)

als $A_{1.2} = A_{2.1}$, zoo is $y = x$ d. i. de diagonaal tegenover den oorsprong (zie fig. 5)

als $A_{1.2} = - A_{2.1}$, zoo is $x + y = a$ d. i. de diagonaal, welke door den oorsprong gaat (fig. 6).

Voor elke andere waarde der constanten is de knooplijn eene kromme, die door het middelpunt gaat en waarvan de holle kant steeds naar dezelfde diagonaal is gewend, zoodat zij in het middelpunt een buigpunt heeft.

3e. — $N(2.2) = 2 \frac{c}{2a} \sqrt{2}$ heeft slechts éénen term.

De vergelijking van de knooplijnen is:

N (2.2)

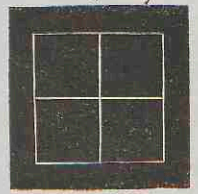


fig. 7.

$$\sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{2\pi}{a} = o$$

en dus

$$\sin \frac{2\pi x}{a} = o \quad \text{of} \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi x}{a} = o$$

deze geeft $x = a$ of $x = \frac{1}{2} a$

$$\sin \frac{2\pi y}{a} = o \quad \text{of} \sin \frac{\pi y}{a} \cos \frac{\pi y}{a} = o$$

$$\therefore y = a \text{ of } y = \frac{1}{2} a$$

d. i. de randen en twee middellijnen evenwijdig aan de zijden.

4e. — $N\binom{3}{1} = \frac{c}{2a} \sqrt{10}$ heeft 2 termen.

Wij krijgen even als in het 2e voorb. deze twee vergelijkingen, waaraan gelijktijdig moet worden voldaan:

$$A_{1\,3} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{3\pi y}{a} + A_{3\,1} \sin \frac{3\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a} = o$$

$$B_{1.3} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{3\pi y}{a} + B_{3.1} \sin \frac{3\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a} = o$$

maar $\sin 3\delta = \sin \delta\, (4 \cos^2 \delta - 1)$; wij kunnen dus schrijven met weglating van den factor $\sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{y\pi}{a}$ die weder den rand geeft

$$A_{1.3} \left(4 \cos^2 \frac{\pi y}{a} - 1\right) + A_{3.1} \left(4 \cos^2 \frac{\pi x}{a} - 1\right) = 0 \text{ en}$$

$$B_{1.3}\ (4\ \cos^2 \frac{\pi y}{a} - 1) + B_{3.1}\ (4\ \cos^2 \frac{\pi x}{a} - 1) = 0$$

Aan deze twee vergelijkingen voldoen algemeen slechts deze paren waarden

$$y = \frac{a}{3} \text{ met } x = \frac{a}{3}$$

$$y = \frac{a}{3} \quad \text{»} \quad x = 2\frac{a}{3}$$

$$y = 2\frac{a}{8} \quad \text{»} \quad x = \frac{a}{3}$$

$$y = 2\frac{a}{3} \quad \text{»} \quad x = 2\frac{a}{3}$$

d. i. vier knoop*punten* (zie fig. 8) liggende op de plaats van snijding der lijnen, // aan de zijden, welke het vlies in 9 gelijke vierkanten verdeelen.

$$N\binom{3}{1}$$

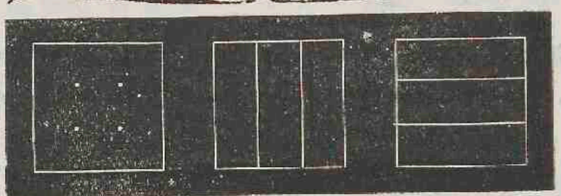


fig. 8. fig. 9. fig. 10.

Is evenwel $A_{3.1}\ B_{1.3} = A_{1.3}\ B_{3.1}$, zoo worden de twee bovenstaande vergelijkingen dezelfde en er is bijgevolg eene knooplijn aanwezig, wier vergelijking is

$$A_{1.3}\ (4\ \cos^2 \frac{\pi y}{a} - 1) + A_{3.1}\ (4\ \cos^2 \frac{\pi x}{a} - 1) = 0.$$

Is dan bovendien

$A_{1.3} = 0$ zoo geeft $\cos \frac{\pi x}{a} = \frac{1}{2}$ $\quad x = \frac{a}{3}$ en $x = \frac{a}{3}$ (fig. 9.)

Is $A_{3.1} = 0$ » » $\cos\frac{\pi y}{a} = \frac{1}{2}$ $y = \frac{a}{3}$ en $y = 2\frac{a}{3}$ (fig. 10.)

welke respectievelijk lijnen aanduiden, // de zijden, die vlies in drie gelijke deelen verdeelen.

Is $A_{1.2} = A_{3.1}$ zoo is

$$2\cos^2\frac{\pi x}{a} + 2\cos^2\frac{\pi y}{a} - 1 = 0 \text{ of}$$

$$1 + \cos\frac{2\pi x}{a} + \cos\frac{2\pi y}{a} = 0.$$

eene geslotene kromme waarvan het centrum met dat van het vlies samenvalt en die zoodanig is dat juist een derde der beide diagnalen daarbinnen ligt (zoodat zij door de 4 punten van fig. 8 gaat.)

4ᵉ. — Algemeen heeft de toon $N\binom{p}{q}$ een knooplijnsysteem dat gegeven is door de vergelijkingen

$$A_{p.q}\sin\frac{p\pi x}{a}\sin\frac{q\pi y}{a} + A_{q.p}\sin\frac{q\pi x}{a}\sin\frac{p\pi y}{a} = 0 \text{ en}$$

$$B_{p.q}\sin\frac{p\pi x}{a}\sin\frac{q\pi y}{a} + B_{q.p}\sin\frac{q\pi x}{a}\sin\frac{q\pi y}{a} = 0.$$

Nu is steeds

$$\sin mx = \sin x\,(m\cos^{m-1}x - \frac{m\,(m-1\,(m-2)}{1.\;2.\;3.}\cos^{m-3}x$$
$$\sin^2 x + ---).$$

Als wij door deze formule de bovenstaande sinussen ontwikkelen blijkt, dat beide vergelijkingen de factor $\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{a}$ hebben. Bijgevolg is de lijn, voorgesteld door $\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{a} = 0$ d. i. de rand eene knooplijn z.a natuurlijk. — Maar bovendien wordt aan de beide bovenstaande vergelijkingen voldaan door alle punten voor welke gelijktijdig

$$\frac{p\pi x}{a} = h\pi \quad \text{en} \quad \frac{p\pi y}{a} = k\pi$$

$$\text{of} \quad \frac{q\pi x}{a} = m\pi \quad \text{en} \quad \frac{q\pi y}{a} = n\pi$$

d. i. door alle punten

$$x = h\frac{a}{p}, y = k\frac{a}{p} \qquad \text{en door } x = m\frac{a}{q}, y = n\frac{a}{q}$$

Deze vergelijkingen stellen voor de punten

$$\left.\begin{array}{l} x = \frac{a}{p} \\ x = 2.\frac{a}{p} \\ \text{— — — —} \\ x = (p-1)\frac{a}{p} \end{array}\right\} \text{met een van de waarden} \left\{\begin{array}{l} y = \frac{a}{p} \\ y = 2.\frac{a}{p} \\ \text{— — — —} \\ y = (p-1)\frac{a}{p} \end{array}\right.$$

en verder

$$\left.\begin{array}{l} x = \frac{a}{q} \\ x = 2.\frac{a}{q} \\ \text{— — — —} \\ x = (q-1)\frac{a}{q} \end{array}\right\} \text{met een van de waarden} \left\{\begin{array}{l} y = \frac{a}{q} \\ y = 2.\frac{a}{q} \\ \text{— — — —} \\ y = (q-1)\frac{a}{q} \end{array}\right.$$

Trekken wij de lijnen, // de zijden, welke het vlies in p^2 gelijke vierkanten verdeelen dan zijn dus de $(p-1)^2$ snijpunten dier lijnen knooppunten. Evenzoo de $(q-1)^2$ snijpunten der lijnen die het vlies in q^2 gelijke vierkanten verdeelen, zoodat er steeds voor den toon $N\binom{p}{b}$

$(p-1)^2 + (q-1)^2$ punten zijn aan te wijzen, die steeds in rust zijn. (Als $A_{p.q}\ B_{p.q} = A_{p.q}\ B_{p.q}$ zoo is er een knoop*lijn*. Deze knooplijn moet steeds door alle knooppunten gaan).

b.v. De toonen $N\binom{3}{2}$ en $N\binom{4}{3}$ hebben respectievelijk $2^2 + 1^2 = 5$ en $3^2 + 2^2 = 13$. Knooppunten wier ligging duidelijk is uit de figuren 11 en 12.

$N\binom{3}{2}$

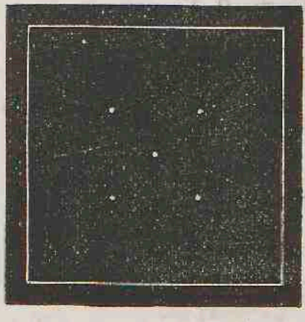


fig. 11.

$\binom{4}{3}$

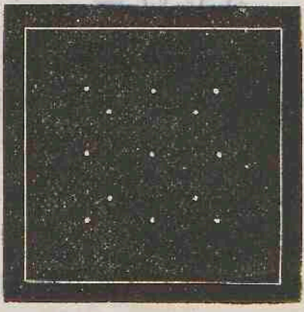


fig. 12.

De toonen $N\binom{p}{1}$ hebben $(p-1)^2$ knooppunten, liggende op de snijding der lijnen evenwijdig aan de zijden en die het vlies in p^2 gelijke vierkanten verdeelen.

Deze voorbeelden doen genoegzaam zien, hoe men te werk gaat om bij elken toon de correspondeerende knooplijnen te vinden. Het is duidelijk dat er, met uitzondering van de toonen waarvoor $i = i'$ (d. i. de toonen $\frac{c}{2a}\sqrt{2}$, $\frac{c}{2a}\sqrt{8}$, $\frac{c}{2a}\sqrt{18}$ . . . . .) voor elken toon een oneindig aantal knooplijnen bestaat. De gezamenlijke knooplijnen, behoorende bij denzelfden toon, noemt men het knooplijnenstelsel van dien toon.

Een overzicht der mogelijke toonen geven wij in het laatste hoofdstuk.

§ 6. Rechthoekig vlies waarvan de quadraten der zijden onderling meetbaar zijn.

Zij $l^2 = \frac{\alpha}{k^2}$ $\qquad l'^2 = \frac{\beta}{k^2}$ dan zal

$$N\,(i\,i') = \frac{c}{2k} \sqrt{\alpha\, i^2 + \beta\, i'^2}$$

Er zullen dus weder evenveel termen met elken toon correspondeeren, als er wijzen mogelijk zijn waarop

$$r = \alpha i^2 + \beta i'^2$$

zich in de som van twee termen αk^2 en $\beta k'^2$ laat ontbinden.

Zijn ook l en l' zelf onderling meetbaar en is

$$l = p\alpha \qquad l' = p\beta \qquad \text{dan is}$$

$$N\,(i\,i') = \frac{c}{2p} \sqrt{\frac{i^2}{\alpha^2} + \frac{i'^2}{\beta^2}}$$

welke toon evenveel termen heeft als

$r = \frac{i^2}{\alpha^2} + \frac{i'^2}{\beta^2}$ verschillende oplossingen in geheele getallen.

Voor de toonen $N\,(k\alpha,\ k'\beta)$ d. i. die waarvoor i en i' respectievelijk door α en β deelbaar zijn, is het aantal trillingen per seconde

$$N\,(k\alpha,\ k'\beta) = \frac{c}{2p} \sqrt{k^2 + k'^2}.$$

Deze vergelijking is dezelfde, welke bij het vierkante vlies is behandeld. Bij gevolg bevinden zich onder de toonen die het vlies geven kan, steeds alle toonen van het vierkante vlies waarvan de zijde p is. De knooplijnen, die deze toonen vergezellen, verdeelen het vlies in $\alpha\,\beta\,k\,k'$ gelijke rechthoeken, immers de vergelijking der knooplijnen is

$$\sin\frac{k\alpha\,\pi x}{p\alpha}\cdot\sin\frac{k'\beta\,\pi y}{p\beta}=o \quad \text{of}$$

$$\sin\frac{k\pi x}{p}\cdot\sin\frac{k'\pi y}{p}=o$$

waaraan op het vlies voldaan wordt door

$$\begin{array}{ll}
x=o & y=o \\
\;\;=\frac{p}{k} & \;\;=\frac{p}{k'} \\
\;\;=2\frac{p}{k} & \;\;=2\frac{p}{k'} \\
\;\;\ldots\ldots & \;\;\ldots\ldots \\
\;\;=(k-1)\frac{p}{k} & \;\;=(k'-1)\frac{p}{k'} \\
\;\;=p & \;\;=p \\
\;\;=(k+1)\frac{p}{k} & \;\;=(k'+1)\frac{p}{k'} \\
\;\;\ldots\ldots & \;\;\ldots\ldots \\
\;\;=\alpha p & \;\;=\beta p
\end{array}$$

d. i. behalve de randen door $\alpha\,k-1$ en $\beta\,k'-1$ lijnen respectievelijk evenwijdig aan de zijden. Deze verdeelen het vlies in $\alpha\beta\,kk'$ rechthoeken of z. a. wij deze verdeeling ook kunnen opvatten: in $\alpha\beta$ vierkanten waarvan elk als het gewone vierkante vlies trilt, n.l. elk met k knooplijnen // de eene en k' knooplijnen // de andere zijde.

HOOFDSTUK III.

VLIEZEN VAN DEN VORM EENS GELIJKZIJDIGEN DRIEHOEKS.

§ 1. Algemeene oplossing.

a. *Invoering van nieuwe coördinaten.*

Het bezwaar van de integratie eener partieele differentiaal-vergelijking, bestaat gewoonlijk in de condities waaraan de integraal aan den rand moet voldoen. Gewoonlijk zal dus de oplossing des te gemakkelijker zijn, naarmate die condities zich eenvoudiger laten voorstellen. Zulk eene eenvoudige voorstelling kan dikwijls worden bereikt door de invoering van nieuwe coördinaten die b. v. voor onze quaestie zoodanig moeten zijn, dat $w = o$ wordt door aan die coördinaten bepaalde, constante waarden te geven, zooals de rechthoekige coördinaten dit toelieten voor het geval van een rechthoekig vlies. Lamé heeft zulk een coördinatenstelsel, geschikt voor het driehoekig vlies, gegeven in zijne Theorie analytique de la Chaleur, bij het onderzoek naar de beweging der warmte in het regelmatige driehoekige prisma.

Zij o het middelpunt en l de straal van den cirkel, ingeschreven in den gelijkzijdigen driehoek. Trekken wij dan door eenig punt van het vlies lijnen evenwijdig aan de zijden, zoo noemt hij de loodlijnen P, P′, P″ op die lijnen uit o neêrgelaten, de coördinaten van dat punt.

Door de invoering dezer coördinaten wordt onze quaestie deze:

eene functie w te vinden, die voldoet aan de algemeene differentiaal-vergelijking

$$(1) \quad \frac{d^2w}{dt^2} = c^2\left(\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{d^2w}{dy^2}\right)$$

en zoodanig is dat

(2) $w = o$ voor $P = l$, $P' = l$, $P'' = l$ onafhankelijk van t en

(3) $w = f(x,y)$ en $\dfrac{dw}{dt} = o$ voor $t = o$.

Het geval dat ook $\dfrac{dw}{dt}$ eene willekeurige functie van x en y is, laat zich, zooals wij zullen zien, gemakkelijk afleiden, als eens de oplossing voor $\dfrac{dw}{dt} = o$ is gevonden.

Eindelijk nemen wij ten 4ᵉ aan, dat de begintoestand symetrisch is t. o. van de P as. Zeer gemakkelijk zullen wij, als α, α'. α'' de hoeken zijn, die de P, P′, P″ as respectievelijk met de x as maken, de transformatie-formules vinden:

$$(4) \quad \begin{cases} x \cos\alpha + y \sin\alpha = P \\ x \cos\alpha' + y \sin\alpha' = P' \\ x \cos\alpha'' + y \sin\alpha'' = P'' \quad \text{waaruit nog volgt} \\ \quad P + P' + P'' = o \end{cases}$$

b. *Algemeene oplossing voor nog onbepaalde begintoestand.*

Schrijven wij nu de particuliere integraal van (1), die voldoet aan $\frac{dw}{dt} = o$ in den vorm

$$w = A \cos \gamma t \, (C \cos hx + D \sin hx) \, (E \cos ky + F \sin ky)$$

zoo zien wij dat in de nieuwe coördinaten uitgedrukt w eenen vorm zal hebben als deze:

$$w = A \cos \gamma t \, [B \sin (m P + n P' + p P'') + \\ + C \cos (m P + n P' + p P'')]$$

waarin volgens (4)

$$m P + n P' + p P'' = (m \cos \alpha + n \cos \alpha' + p \cos \alpha'') \, x + \\ + (m \sin \alpha + n \sin \alpha' + p \sin \alpha'') \, y$$

Substitueeren wij deze waarde van w in (1) zoo vinden wij als conditie waarop zij eene particuliere integraal van (1) is

$$\frac{\gamma^2}{c^2} = (m \cos \alpha + n \cos \alpha' + p \cos \alpha'')^2 + (m \sin \alpha + n \sin \alpha' + \\ + p \sin \alpha'')^2 = m^2 + n^2 + p^2 + 2 \, n \, m \cos (\alpha - \alpha') + 2 \, p \, m \\ \cos (\alpha - \alpha'') + 2np \cos (\alpha' - \alpha'')$$

maar $\cos (\alpha - \alpha') = \cos (\alpha - \alpha'') = \cos (\alpha' - \alpha'') = -\frac{1}{2}$ en dus

$$(5) \quad \frac{\gamma^2}{c^2} = m^2 + n^2 + p^2 - (np + pm + mn).$$

Uit de symetrie van deze conditievergelijking is het duidelijk dat voor alle navolgende bogen de daarmede correspondeerende γ dezelfde is:

$$\begin{array}{ll} mP + nP' + pP'' & pP + nP' + mP'' \\ nP + pP' + mP'' & nP + mP' + pP'' \\ pP + mP' + nP'' & mP + pP' + nP'' \end{array}$$

Wij kunnen daarom de som der sinussen en cosinussen van al deze bogen tot eene particuliere solutie vereenigen, elke term afzonderlijk met eene arbitraire constante vermenigvuldigende. Op deze wijze verkrijgen wij eenen vorm voor w bestaande uit 12 termen, die wij evenwel tot 6 kunnen reduceeren als wij voor de constanten K en L, welke bij den sinus en den cosinus van denzelfden boog behooren, schrijven:

$$K = B \cos b \qquad L = B \sin b \text{ enz.}$$

daardoor wordt

$$(6)\quad w = A.\cos \gamma t\,[B \sin(mP + nP' + pP'' + b) + \\ + C \sin(nP + pP' + mP'' + c) + D \sin(pP + mP' + nP'' + d) + \\ + E \sin(pP + nP' + mP'' + e) + F \sin(nP + mP' + pP'' + f) + \\ + G \sin(mP + pP' + nP'' + g)].$$

Beginnen wij nu met de vierde conditie.

Men ziet gemakkelijk in dat, als M′ een punt is symetrisch t. o. der P as met het punt M,

$$P(M') = P(M); \quad P'(M') = P''(M); \quad P''(M') = P'(M).$$

De verwisseling van P′ en P″ moet dus geene verandering in w te weeg brengen (want als (6) voorstelt de verplaatsing van het punt M, zoo zal diezelfde formule als P′ en P″ verwisseld worden, voorstellen de verplaatsing van het punt M′, die gelijk moet zijn aan die van M, ten minste voor $t = o$). Daar deze verwisseling P onveranderd laat, moeten de termen waarin P denzelfden coëfficiënt heeft bij die verwisseling in elkander overgaan. Zoo moet de eerste term waarin voor P′ wordt geschreven P″ en omgekeerd, den laatsten geven enz.

Dit geeft:

$$(7)\left\{\begin{array}{ll} B = G & b = g \\ D = E & d = e \\ F = C & f = c. \end{array}\right.$$ Bij gevolg wordt

(8) $w = A \cos \gamma t$
$[B \sin (mP + nP' + pP'' + b) + c \sin (nP + pP' + mP'' + c)$
$+ D \sin (pP + mP' + nP'' + d) + D \sin (pP + nP' + mP'' + d)$
$+ C \sin(nP + mP' + pP'' + c) + B \sin (mP + pP' + nP'' + b)]$.

Om nu aan de conditie (2) te voldoen, elimineeren wij eerst P'' door de vergelijking $P + P' + P'' = 0$ (zie (4). Er komt

$$\begin{aligned} w = A \cos \gamma t \, [& B \sin \{ (m-p) P + (n-p) P' + b \} + \\ & + C \sin \{ (n-m) P + (p-m) P' + c \} + \\ & + D \sin \{ (p-n) P + (m-n) P' + d \} + \\ & + D \sin \{ (p-m) P + (n-m) P' + d \} + \\ & + C \sin \{ (n-p) P + (m-p) P' + c \} + \\ & + B \sin \{ (m-n) P + (p-n) P' + b \}]. \end{aligned}$$

Voor $P = l$ moet $w = 0$ zijn en moeten dus de termen, waarin P' denzelfden coëfficient (met omgekeerd teeken) heeft, tegen elkander wegvallen. Bijgevolg

$$(9)\left\{\begin{array}{l} (m-p)\, l + b = (n-m)\, l - b + 2\lambda\pi \\ (n-p)\, l + c = (m-n)\, l - c + 2\mu\pi \\ (p-n)\, l + d = (m-p)\, l - d + 2\nu\pi. \end{array}\right.$$

De som van deze drie geeft

$$b + c + d = (\lambda + \mu + \nu)\, \pi$$

Op dezelfde wijze geeft de conditie $w = 0$ voor $P' = l$.

(10) $B = C = D$

$$(11)\left\{\begin{array}{l} (m-n)\, l + d = (p-m)\, l - c + 2\alpha\pi \\ (n-p)\, l + b = (m-n)\, l - d + 2\beta\pi \\ (p-m)\, l + c = (n-p)\, l - b + 2\delta\pi \end{array}\right.$$

waarvan de som is

$$b + c + d = (\alpha + \beta + \delta)\, \pi$$ zoodat

(12) $\alpha + \beta + \delta = \lambda + \mu + \nu = A.$

Tellen wij de vergelijkingen (9) 2 aan 2 op, zoo komt

$$(13)\left\{\begin{array}{l} 2\,(c+d) = (2m-n-p)\,l + 2\,(\mu+\nu)\,\pi \\ 2\,(d+b) = (2n-p-m)\,l + 2\,(\nu+\lambda)\,\pi \\ 2\,(b+c) = (2p-m-n)\,l + 2\,(\lambda+\mu)\,\pi \end{array}\right.$$

Uit de vergelijkingen (11) vinden wij voor dezelfde grootheden

$$(14)\left\{\begin{array}{l} 2\,(c+d) = -2\,(2m-n-p)\,l + 4\,\alpha\pi \\ 2\,(d+b) = -2\,(2n-p-m)\,l + 4\,\beta\pi \\ 2\,(b+c) = -2\,(2p-m-n)\,l + 4\,\delta\pi. \end{array}\right.$$

Deze beide vereenigende

$$(15)\left\{\begin{array}{l} 3\,(2m-n-p)\,l = 2\,(2\alpha-\mu-\nu)\,\pi \\ 3\,(2n-p-m)\,l = 2\,(2\beta-\nu-\lambda)\,\pi \\ 3\,(2p-m-n)\,l = 2\,(2\delta-\lambda-\mu)\,\pi \end{array}\right.$$

Eindelijk als wij deze 2 aan 2 aftrekken

$$9l\,(n-p) = 2\,[2\,(\beta-\delta) + \mu-\nu]\,\pi = [(2\beta+\mu) - (2\delta+\nu)]\,2\pi$$

$$9l\,(p-m) = 2\,[2\,(\delta-\alpha) + \nu-\lambda]\,\pi = [(2\delta+\nu) - (2\alpha+\lambda)]\,2\pi$$

$$9l\,(m-n) = 2\,[2\,(\alpha-\beta) + \lambda-\mu]\,\pi = [(2\alpha+\lambda) - (2\beta+\mu)]\,2\pi$$

waaruit, als B′ eene willekeurige constante is

$$9lm = 2\,(2\alpha+\lambda)\,\pi + B'$$
$$9ln = 2\,(2\beta+\mu)\,\pi + B'$$
$$2lp = 2\,(2\delta+\nu)\,\pi + B'.$$

Om b, c, d te vinden, trekken wij (14) af van $2\,(b+c+d) = 2\,(\alpha+\beta+\delta)\,\pi$, er komt:

$$2b = 2\,(2m-n-p)\,l + 2\,(-\alpha+\beta+\delta)\,\pi$$
$$2c = 2\,(2n-p-m)\,l + 2\,(\alpha-\beta+\delta)\,\pi$$
$$2d = 2\,(2p-m-n)\,l + 2\,(\alpha+\beta-\delta)\,\pi.$$

Hierin de waarden (15)

$$b = \frac{2}{3}(2\alpha - \mu - \nu)\,\pi + (-\alpha + \beta + \delta)\,\pi = \frac{1}{3}\,[A + 2\,(\lambda - \alpha)]\,\pi$$

$$c = \frac{2}{3}\,(2\beta - \nu - \lambda)\,\pi + (\alpha - \beta + \delta)\,\pi = \frac{1}{3}\,[A + 2\,(\mu - \beta)]\,\pi$$

$$d = \frac{2}{3}\,(2\delta - \lambda - \mu)\,\pi + (\alpha + \beta - \delta)\,\pi = \frac{1}{3}\,[A + 2\,(\nu - \delta)]\,\pi.$$

Merken wij op, dat wij de constante B′ in de vergelijkingen (16) kunnen weglaten, omdat die, zooals gemakkelijk is in te zien, door de vergelijking $P + P' + P'' = o$ toch terstond kan worden geëlimineerd, zoo zullen wij de gezochte particuliere integraal hebben als wij in (8) substitueeren

$$(10) \qquad B = C = D$$

$$(18)\left\{\begin{aligned} m &= \frac{2\pi}{9l}\,(2\alpha + \lambda) \\ n &= \frac{2\pi}{9l}\,(2\beta + \mu) \\ p &= \frac{2\pi}{9l}\,(2\delta + \nu) \end{aligned}\right. \qquad (19)\left\{\begin{aligned} b &= \frac{2\pi}{9l}\left[\frac{3}{2}A + 3(\lambda - \alpha)\right]l \\ c &= \frac{2\pi}{9l}\left[\frac{3}{2}A + 3(\mu - \beta)\right]l \\ d &= \frac{2\pi}{9l}\left[\frac{3}{2}A + 3(\nu - \delta)\right]l \end{aligned}\right.$$

met de conditie (12)

$$\alpha + \beta + \delta = \lambda + \mu + \nu = A.$$

Schijnbaar is deze oplossing, waarin 5 der constante, geheele getallen willekeurig zijn, algemeener dan die van L a m é, bij wien 3 constanten voorkomen, wier som $= o$ moet zijn. Toch zijn de toonen, die beide vormen geven, dezelfde, aangezien in m, n, p waarvan γ (zie form. (5)) en dus ook het aantal vibraties afhangt, slechts drie willekeurige constanten voorkomen, welke ook aan de voorwaarde onderworpen zijn, dat hare som $= o$ is, als wij in (16) slechts nemen $B' = -\frac{2\pi}{9l}A$, wat volgens het bovenstaande gedaan kan worden zonder schade voor de algemeenheid der oplossing.

Nemen wij dus evenals Lamé $\alpha = \beta = \delta = o \quad \therefore A = o$ en substitueeren wij de daardoor gevondene waarden van m, n, p, a, b, c in (8), zoo komt

$$(19) \quad w = A \cos \gamma t \Big[\sin \frac{2\pi}{9l}(\lambda P + \mu P' + \nu P'' + 3\lambda l)$$
$$+ \sin \frac{2\pi}{9l}(\mu P + \nu P' + \lambda P'' + 3\mu l)$$
$$+ \sin \frac{2\pi}{9l}(\nu P + \lambda P' + \mu P'' + 3\nu l)$$
$$+ \sin \frac{2\pi}{9l}(\nu P + \mu P' + \lambda P'' + 3\nu l)$$
$$+ \sin \frac{2\pi}{9l}(\mu P + \lambda P' + \nu P'' + 3\mu l)$$
$$+ \sin \frac{2\pi}{9l}(\lambda P + \nu P' + \mu P'' + 3\lambda l)\Big]$$

met de conditie

$$(20) \qquad \lambda + \mu + \nu = o$$

waarin λ, μ, ν willekeurige, positieve of negatieve, geheele getallen voorstellen, maar die niet de waarde *nul* mogen hebben, omdat daardoor, zooals lichtelijk te zien is, w verdwijnt.

Voor γ vinden wij volgens form. (5)

$$\gamma^2 = c^2 \left(\frac{2\pi}{9l}\right)^2 [\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 - (\mu\nu + \nu\lambda + \lambda\mu)] =$$
$$= c^2 \left(\frac{2\pi}{9l}\right)^2 [(\lambda + \mu + \nu)^2 - 3 \{ \mu\nu + \lambda(\mu + \nu)\}]$$

of, als wij λ elimineeren door (20)

$$\gamma^2 = 3c^2\left(\frac{2\pi}{9l}\right)^2 [(\mu+\nu)^2 - \mu\nu] = \frac{4}{27}\,\frac{\pi^2c^2}{l^2}\,(\mu^2+\mu\nu+\nu^2)$$

of eenvoudiger door de zijde $a = 2l\sqrt{3}$ in te voeren.

$$(21)\quad \gamma = \frac{4}{3}\,\frac{\pi c}{a}\sqrt{\mu^2+\mu\,\nu+\nu^2}.$$

c. *Bepaling van de constanten A.*

De waarde (19) met de voorwaarden (20) en (21) voldoet nu aan alle vereischten, behalve aan de eerste conditie (3). Om ook hieraan te voldoen, nemen wij de som van alle particuliere w's (19) en trachten dan zóó over de nog willekeurige constanten A te beschikken, dat ook deze laatste voorwaarde wordt vervuld.

Stellen wij kortheidshalve de waarde (19) van w, voor door;

$$(22)\quad w = \mathrm{A}u \cos \gamma t$$

dan is de algemeene oplossing

$$(23)\quad w = \Sigma\, \mathrm{A}u \cos \gamma t.$$

Bij gevolg is

(K) $\Sigma\,\mathrm{A}u = f(x,y)$ of voluit geschreven

$$\mathrm{A}_1u_1 + \mathrm{A}_2u_2 + \ldots + \mathrm{A}_ku_k + \ldots + \mathrm{A}_nu_n + \ldots = f(x,y),$$

de vergelijking waaruit de constanten moeten worden bepaald. Om dit te bereiken vermenigvuldigen wij met $u_k\,dx\,dy$ en integreeren over het geheele vlies. Daardoor zal A_k geïsoleerd worden, omdat alle andere termen uit de vergelijking verdwijnen; want $\int\!\!\int u_k\,u_n\,dx\,dy = o$ bij eene integratie over het geheele oppervlak, behalve voor $n = k$.

Bewijs hiervan. Aangezien w voldoet aan de vergelijking

$$\frac{d^2w}{dx^2} = c^2\left(\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{d^2w}{dy^2}\right)$$

is de differentiaal-vergelijking van u

$$(24)\quad \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \theta^2 u = o$$

als wij $\frac{\gamma^2}{c^2} = \theta^2$ nemen. Deze vergelijking geldt evenzeer voor eene particuliere solutie van den vorm $w = A'u \sin \gamma t$.

Als bijzonder geval is dus ook

$$\frac{d^2u_n}{dx^2} + \frac{d^2u_n}{dy^2} + \theta_n^{\,2} u_n = o.$$

Vermenigvuldig met $u_k\, dx\, dy$ en integreer over het geheele vlies

$$(25)\quad \int\!\!\int \left(\frac{d^2u_n}{dx^2} + \frac{d^2u_n}{dy^2} + \theta_n^{\,2} u_n\right) u_k\, dx\, dy = o.$$

Nu is, integreerende over x

$$\int\!\!\int \frac{d^2u_n}{dx^2} u_k\, dx\, dy = \int dy \int_{x_1}^{x_2} u_k \frac{d^2u_n}{dx^2} dx =$$

$$= \int dy \left(u_k \frac{du_n}{dx}\right)_{x_1}^{x_2} - \int\!\!\int \frac{du_k}{dx}\frac{du_n}{dx} dx\, dy.$$

Hierin zijn x_1 en x_2 de abscissen van punten aan den omtrek. Maar langs den geheelen omtrek is $u_k = o$ en dus de eerste term van het tweede lid $= o$; bij gevolg

$$\int\!\!\int \frac{d^2u_n}{dx^2} u_k\, dx\, dy = -\int\!\!\int \frac{du_k}{dx}\frac{du_n}{dx} dx\, dy$$

evenzoo zal

$$\int\!\!\int \frac{d^2u_n}{dy^2} u_k\, dx\, dy = -\int\!\!\int \frac{du_k}{dy}\frac{du_n}{dy} dx\, dy$$

Deze gelijkheden in (25) gebracht geven

$$\theta_n^2 \int\int u_n\, u_k\, dx\, dy = \int\int\left(\frac{du_k}{dx}\frac{du_n}{dx} + \frac{du_k}{dy}\,\frac{du_n}{dy}\right) dx\, dy.$$

Eveneens zullen wij vinden, als wij in (24) $u = u_k$ schrijven

$$\theta_k^2 \int\int u_n\, u_k\, dx\, dy = \int\int\left(\frac{du_k}{dx}\,\frac{du_n}{dx} + \frac{du_k}{dy}\frac{du_n}{dy}\right) dx\, dy.$$

Het verschil van deze vergelijkingen geeft:

$$(\theta_n^2 - \theta_k^2)\int_o u_n\, u_k\, do = o$$

als het element van het oppervlak door do wordt voorgesteld. Bijgevolg

(26) $\int_o u_n\, u_k\, do = o$ als n en k ongelijk zijn.

Het is daarom dat wij in de particuliere oplossing de 6 bogen, die dezelfde γ, gaven tot éene oplossing hebben vereenigd.

Nu wij elke constante op deze wijze kunnen afzonderen, hebben wij geene zwarigheid meer te overwinnen, dan die van de integratiën. Deze zullen in behandeling en uitkomst verschillen, naarmate twee van de getallen λ, μ, ν gelijk zijn, of dat alle verschillende waarden hebben. Wij zullen daarom de termen waarin $\mu = \lambda$ en dus $\nu = -2\lambda$ is, bij elkander voegen en schrijven (zie (K))

$$\begin{aligned}
(27)\quad f(x,y) = {} & A_{\lambda=1,\,\mu=2}\, u_{1.2} + A_{1.3}\, u_{1.3} + A_{1.4}\, u_{1.4} + \;\cdot\;\cdot \\
& \qquad\qquad \cdot\;\cdot\;\cdot + A_{1.n}\, u_{1.n} + \;\cdot\;\cdot \\
& + A_{2.1}\quad u_{2.1} + A_{2.3}\, u_{2.3} + A_{2.4}\, u_{2.4} + \;\cdot\;\cdot \\
& \qquad\qquad \cdot\;\cdot\;\cdot + A_{2.n}\, u_{2.n} + \;\cdot\;\cdot \\
& + \;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
& + A_{k.1}\quad u_{k.1} + \cdot\;\cdot + A_{k.n}\, u_{k.n} + \;\cdot\;\cdot \\
& + \;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
& + A_{1,1} u_{1.1} + A_{2.2}\, u_{2.2} + \cdot\;\cdot + A_{\lambda\lambda}\, u_{\lambda\lambda} + \;\cdot\;\cdot
\end{aligned}$$

Bepalen wij eerst de coëfficienten van de laatste reeks. Vermenigvuldigen wij ter weêrszij met $u_{\lambda\lambda}\, do$ en integreeren over het geheele vlies, dan zal volgens (26)

$$(28) \quad \int_o u_{\lambda\lambda} f(x,y)\, do = A_{\lambda\lambda} \int_o u_{\lambda\lambda}^2\, do.$$

Hierin is

$$u_{\lambda\lambda} = 2 \sin \frac{2\pi}{9l} \left[\lambda (P + P' - 2 P'') + 3\lambda l\right] +$$

$$+ 2 \sin \frac{2\pi}{9l} \left[\lambda (P - 2 P' + P'') + 3\lambda l\right] +$$

$$+ 2 \sin \frac{2\pi}{9l} \left[\lambda (-2 P + P' + P'') - 6\lambda l\right]$$

of daar $P + P' + P'' = o$

$$u_{\lambda\lambda} = 2 \sin \frac{2\lambda\pi}{3l} (l - P) + 2 \sin \frac{2\lambda\pi}{3l} (l - P') +$$

$$+ 2 \sin \frac{2\lambda\pi}{3l} (l - P'')$$

of, als we invoeren

$$(29) \quad l - P = p \quad ; \quad l - P' = p' \quad ; \quad l - P'' = p''$$

zoodat p, p', p'' de afstanden tot de zijden voorstellen, die gebonden zijn aan de conditie

$$(30) \quad p + p' + p'' = 3l,$$

$$(31) \quad u_{\lambda\lambda} = 2 \sin \frac{2\lambda\pi}{3l} p + 2 \sin \frac{2\lambda\pi}{3l} p' + 2 \sin \frac{2\lambda\pi}{3l} p''.$$

Nemen wij verder voor een element van het oppervlak een parallelogram waarvan de zijden // loopen aan de zijden van den driehoek $p' = o$, $p'' = o$ [zie fig. 13].

Daarvan is de

hoogte $= dp'$ en de

basis $= cm'' = \dfrac{kc}{\sin m''} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\, dp''$ en dus

$$do = \frac{2}{\sqrt{3}}\, dp'\, dp''.$$

Wij kunnen dus (28) schrijven, deelende door $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$,

$$\int_o^l dp' \int_o^{3l-p'} u_{\lambda\lambda}\, f(x,y)\, dp'' = A_{\lambda\lambda} \int_o^{3l} dp' \int_o^{3l-p'} u_{\lambda\lambda}^2\, dp''.$$

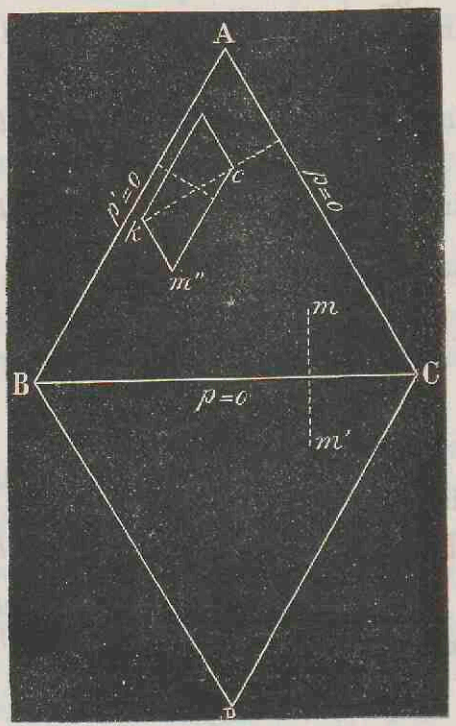


Fig. 13.

In het laatste lid kunnen wij ook de tweede integraal uitstrekken van o tot $3l$, al we het resultaat halveeren d. i. de waarde van de integraal $\int_o u_{\lambda\lambda}^2\, do$ over den driehoek ABC = de helft van de waarde der integraal over de ruit ABDC.

Want: als m' symetrisch is t. o. v. BC met een willekeurig punt m van het vlies, dan is, als wij de coördinaten van m' noemen p_0, p_0', p_0'', terwijl die van m zijn p, p', p''.

$$p_0 = -p$$
$$p_0' = p' + 2p\cos 60^\circ = p' + p$$
$$p_0'' = p'' + 2p\cos 60^\circ = p'' + p.$$

Bij gevolg is de waarde van de functie

$$u_{\lambda\lambda} \text{ in } m' = -2\sin\frac{2\pi\lambda}{3l}p + 2\sin\frac{2\pi\lambda}{3l}(p'+p) +$$

$$+ 2\sin\frac{2\pi\lambda}{3l}(p''+p) = -2\sin\frac{2\pi\lambda}{3l}p - 2\sin\frac{2\pi\lambda}{3l}p' - \sin\frac{2\pi\lambda}{3l}p''$$

wegens de gelijkheid (30).

De waarde van de functie $u_{\lambda\lambda}$ voor het punt m', verschilt dus van die in het punt m (vgl. (31)) alleen in teeken. Dientengevolge is de waarde van $\int\int u_{\lambda\lambda}^2\, do$ over den driehoek BDC gelijk aan de waarde van die integraal over den driehoek ABC, die dus weder gelijk is aan de helft van de integraal over de ruit ABDC. q. e. d.

Wij mogen dus ten slotte schrijven:

$$(32)\quad \int_0^l dp' \int_0^{3l-p'} u_{\lambda\lambda}\, f(x,y)\, dp'' = \frac{1}{2} A_{\lambda\lambda} \int_0^{3l} \int_0^{3l} u_{\lambda\lambda}^2\, dp'\, dp''$$

waarin $u_{\lambda\lambda}$ de waarde (31) heeft.

Nemen wij kortheidshalve $\frac{2\lambda\pi}{3l} = k$ zoo is

$$\frac{1}{4} u_{\lambda\lambda}^2 = \sin^2 kp + \sin^2 kp' + \sin^2 kp'' +$$

$$+ 2\sin kp \sin kp' + 2\sin kp \sin kp'' + 2\sin kp' \sin kp''$$

Deze in (32) geeft aanleiding tot de volgende integralen

$$\int\int \sin^2 kp\, dp'\, dp'' = \int\int \sin^2 \frac{2\pi\lambda}{3l}(3l-p'-p'')\, dp'\, dp'' =$$

$$= \int_o^{3l} dp' \int_o^{3l} \sin^2 k\,(p'+p'')\, dp'' =$$

$$= \int_o^{3l} dp' \int_{p'}^{p'+3l} \sin^2 kq\, dq.$$

$$\int\int \sin^2 kp'\, dp'\, dp'' = \int_o^{3l} dp'' \int_o^{3l} \sin^2 kp'\, dp'$$

$$\int\int \sin kp''\, dp'\, dp'' = \int_o^{3l} dp' \int_o^{3l} \sin^2 kp''\, dp''$$

Nu is algemeen

$\int_h^{h+3l} \sin^2 \frac{2\pi\,\lambda}{3l}\, t\, dt = \frac{3}{2}l$ dus onafhankelijk van h. Bovenstaande drie integralen zijn dus elk voor zich gelijk aan

$$\frac{3}{2}l \int_o^{3l} d\nu = \frac{9}{2}l^2 \text{ en hare som } = \frac{27}{2}l^2$$

Voor de andere integralen is

$$\int\int \sin kp \sin kp'\, dp'\, dp'' = -\int_o^{3l} \sin kp'\, dp'$$

$$\int_o^{3l} \sin k\,(p'+p'')\, dp'' =$$

$$= \int_o^{3l} \sin kp'\, dp' \int_{p'}^{p'+3l} \sin kq\, dq$$

evenzoo

$$\int\int \sin kp \sin kp''\, dp'\, dp'' = -\int_o^{3l} \sin kp''\, dp''$$

$$\int_{p''}^{p''+3l} \sin kq\, dq$$

$$\int\int \sin kp' \sin kp''\, dp'\, dp'' = -\int_o^{3l} \sin kp'\, dp'$$

$$\int_o^{3l} \sin kp''\, dp''$$

maar

$$\int_r^{r+3l} \sin \frac{2\pi\,\lambda}{3l} z\, dz = o.$$

Bijgevolg zijn deze drie integralen $= o$ en is dus ten slotte

$$\int_o^{3l} \int_o^{3l} u_{\lambda\lambda}{}^2\, dp'\, dp'' = 2.27l^2.$$

Deze in (32) geeft

$$(31)\quad A_{\lambda\lambda} = \frac{1}{27l^2} \int_o^{l} dp' \int_o^{3l-p'} f(x,y)\, dp''$$

waarin men $f\,(x,y)$ gemakkelijk tot eene functie van p' en p'' maakt met behulp der formules (4) en (29).

Zoeken wij nu de coëfficiënten der termen waarin λ en μ verschillend zijn. Deze zijn gegeven door de vergelijking

$$(34)\quad \int_o^{3l} dp' \int_o^{3l-p'} u_{\lambda\mu} f(x,y)\, dp'' =$$

$$\frac{1}{2} A_{\lambda\mu} \int_o^{3l} \int_o^{3l} u_{\lambda\mu}^{\ 2}\, dp'\, dp''.$$

Vervormen wij de waarde van $u_{\lambda\mu}$ door eliminatie van P (met behulp van $P + P' + P'' = o$) en invoering van de formules (29), terwijl wij kortheidshalve schrijven

$$(35)\quad \mu - \nu = \lambda_1 \qquad \nu - \lambda = \mu_1 \qquad \lambda - \mu = \nu_1$$

zoo komt

$$(36)\quad u_{\lambda\mu} = A + B + C + D + E + F$$

waarin de letters verkorte uitdrukkingen zijn voor

$$(37)\begin{cases} A = \sin\frac{2\pi}{9l}(\nu_1 p' - \mu_1 p'') & B = \sin\frac{2\pi}{9l}(\mu_1 p'' - \lambda_1 p') \\ C = \sin\frac{2\pi}{9l}(\lambda_1 p' - \nu_1 p'') & D = \sin\frac{2\pi}{9l}(\lambda_1 p'' - \nu_1 p') \\ E = \sin\frac{2\pi}{9l}(\mu_1 p' - \lambda_1 p'') & F = \sin\frac{2\pi}{9l}(\nu_1 p'' - \mu_1 p') \end{cases}$$

De nieuw ingevoerde grootheden λ_1, μ_1, ν_1 voldoen klaarblijkelijk (vgl. (20)) aan

$$(38)\quad \lambda_1 + \mu_1 + \nu_1 = o.$$

$$(39)\quad \nu_1 - \mu_1 = 3\lambda \qquad \lambda_1 - \nu_1 = 3\mu \qquad \mu_1 - \lambda_1 = 3\nu$$

waaruit weer terstond

$$(40)\quad \lambda_1 \equiv \mu_1 \equiv \nu_1 \ (\text{mod. } 3).$$

Bij het zoeken van de integraal $\int\int u_{\lambda\mu}^{\ 2}\, dp'\, dp''$ hebben wij dus te maken met 21 termen, aangezien

$$(41)\quad u_{\lambda\mu}^{\ 2} = A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + E^2 + F^2 +$$
$$+ 2\,[AB + AD + BC + CF + DE + EF +$$
$$+ AC + AE + BD + BF + CE + DF +$$
$$+ AF + BE + CD].$$

Behandelen wij in de eerste plaats de integralen van de termen in den quadraatvorm

$$\int_0^{3l}\int_0^{3l} A^2 dp' dp'' = \int_0^{3l} dp' \int_0^{3l} \sin^2 \frac{2\pi}{9l}(\nu_1 p' - \mu_1 p'')\, dp''$$

Den tweeden factor hiervan schrijven wij

$$\frac{1}{2}\int_0^{3l}\left[1 - \cos\frac{4\pi}{9l}(\nu_1 p' - \mu_1 p'')\right]dp'' =$$

$$= \left[\frac{3}{2}p'' - \frac{9l}{8\mu\pi}\sin\frac{4\pi}{9l}(\nu_1 p' - \mu_1 p'')\right]_0^{3l} =$$

$$= \frac{3}{2}l - \frac{9l}{8\mu\pi}\left[\sin\left(\frac{4\pi\nu_1}{9l}p' - \frac{4\pi\mu}{3}\right) - \sin\frac{4\pi}{9l}\nu_1 p'\right]$$

en dus, vermenigvuldigende met dp' en integreerende.

$$\int_0^{3l}\int_0^{3l} A^2 dp' dp'' = \left[\frac{3}{2}lp' +\right.$$

$$\left. + \frac{8_1 l^2}{32\mu_1\nu_1\pi^2}\left\{\cos\left(\frac{4\pi\nu_1}{9l}p' - \frac{4\pi\mu_1}{3}\right) - \cos\frac{4\pi}{9l}\nu_1 p'\right\}\right]_0^{3l}$$

welke met invoering van (35) geeft

$$\int_0^{3l}\int_0^{3l} A^2 dp' dp'' =$$

$$\frac{9}{2}l^2 + \frac{1}{2\mu_1\nu_1}\left(\frac{9l}{4\pi}\right)\left[2 - \cos\frac{4\mu_1\pi}{3} - \cos\frac{4\nu_1\pi}{3}\right]$$

maar aangezien $\mu_1 \equiv \nu_1$ (mod. 3) hebben de twee laatste termen dezelfde waarde. Zij

$$(42)\quad \cos\frac{4\mu_1\pi}{3} = \cos\frac{4\nu_1\pi}{3} = \cos\frac{4\lambda_1\pi}{3} = \gamma$$

dan is

$$(43)\quad \int\int A^2 dp' dp'' = \frac{9}{2}l^2 + \left(\frac{9l}{4\pi}\right)^2 \frac{1-\gamma}{\mu_1\nu_1}$$

De andere quadraattermen van (41) geven in plaats van den factor $\frac{1}{\mu_1 \nu_1}$ respectievelijk $\frac{1}{\lambda_1 \mu_1}$; $\frac{1}{\nu_1 \lambda_1}$; $\frac{1}{\nu_1 \lambda_1}$; $\frac{1}{\lambda_1 \mu_1}$; $\frac{1}{\mu_1 \nu_1}$.

Bij gevolg zullen wij hebben:

(44) Som der quadraattermen geintegreerd

$$= 27\, l^2 + 2\,(1-\gamma)\left(\frac{9l}{4\pi}\right)^2 \frac{\lambda_1 + \mu_1 + \nu_1}{\lambda_1 \mu_1 \nu_1} = 27 l^2 \text{ volgens (38)}$$

en omdat λ_1, μ_1, ν_1, geen van alle $= 0$ kunnen zijn, bij de veronderstelde ongelijkheid van λ, μ, ν.

De integralen der dubbele producten zijn niet alle analoog, maar vormen drie groepen. Bij de rangschikking van (41) vormen de 6 eerste termen eene groep waarin de beide factoren denzelfden coëfficiënt voor p' of p'' hebben; bij de 6 volgende is de coëfficiënt van p'' in den éénen factor gelijk aan den coëfficiënt van p' in den anderen en omgekeerd, terwijl de beide andere coëfficiënten verschillend zijn. Eindelijk zijn in de drie laatsten, de coëfficiënten van p' en p'' in de beide factoren verwisseld.

Onderzoeken we dus de algemeene integraal

$$(45)\ k = \int_0^{3l}\int_0^{3l} \sin\frac{2\pi}{9l}(\varrho p' - \sigma p'')\, \sin\frac{2\pi}{9l}(\tau p' - \theta p'')\, dp' dp''$$

waarin $\varrho, \sigma, \tau, \theta$ geheele getallen zijn. Ontwikkelende volgens de formule

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}\cos(a-b) - \frac{1}{2}\cos(a+b) \text{ komt}$$

$$(46)\ 2k = \int_0^{3l} dp'' \int_0^{3l} \cos\frac{2\pi}{9l}\Big[(\varrho-\tau)\,p' - (\sigma-\theta)\,p''\Big]\, dp' -$$

$$-\int_0^{3l} dp'' \int_0^{3l} \cos\frac{2\pi}{9l}\Big[(\varrho+\tau)\,p' - (\sigma+\theta)\,p''\Big]\, dp'.$$

De eerste integraal hiervan geeft:

$$1^e \text{ integr.} = \frac{9l}{2\pi(\varrho-\tau)}\int_0^{3l} dp''\left\{\sin\frac{2\pi}{9l}\Big[(\varrho-\tau)p'-(\sigma-\theta)p''\Big]\right\}_0^{3l} =$$

$$= -\frac{9l}{2\pi(\varrho-\tau)}\int_0^{3l}\left[\sin\left\{\frac{2\pi}{9l}(\sigma-\theta)p''-\frac{2\pi(\varrho-\tau)}{3}\right\}-\right.$$

$$\left.-\sin\frac{2\pi}{9l}(\sigma-\theta)\,p''\right]dp'' = \left(\frac{9l}{2\pi}\right)^2\frac{1}{(\varrho-\tau)(\sigma-\theta)}$$

$$\left[\cos\left\{\frac{2\pi}{9l}(\sigma-\theta)p''-\frac{2\pi(\varrho-\tau)}{3}\right\}-\cos\frac{2\pi}{9l}(\sigma-\theta)\,p''\right]_0^{3l} =$$

$$= \left(\frac{9l}{2\pi}\right)^2\frac{1}{(\varrho-\tau)(\sigma-\theta)}\left[\cos\frac{2\pi(\sigma-\theta-\varrho+\tau)}{3}-\right.$$

$$\left.-\cos\frac{2\pi(\varrho-\tau)}{3}-\cos\frac{2\pi(\sigma-\theta)}{3}+1\right].$$

De tweede integraal vindt men uit deze eerste door verandering van $\varrho-\tau$ in $\varrho+\tau$ en $\sigma-\theta$ in $\sigma+\theta$.

Men heeft dus:

$$(47)\quad 2k = \left(\frac{9l}{2\pi}\right)^2\left\{\frac{1}{(\varrho-\tau)(\sigma-\theta)}\left[\cos\frac{2\pi(\sigma-\theta-\varrho+\tau)}{3}-\right.\right.$$

$$\left.-\cos\frac{2\pi(\varrho-\tau)}{3}-\cos\frac{2\pi(\sigma-\theta)}{3}+1\right]-$$

$$-\frac{1}{(\varrho+\tau)(\sigma+\theta)}\left[\cos\frac{2\pi(\delta+\theta-\varrho-\tau)}{3}-\cos\frac{2\pi(\varrho+\tau)}{3}-\right.$$

$$\left.\left.-\cos\frac{2\pi(\sigma+\theta)}{3}+1\right]\right\}.$$

Voor de eerste groep, b. v. voor AB hebben wij $\varrho=\nu_1$, $\sigma=\mu_1$, $\theta=-\mu_1$, $\tau=-\lambda_1$; deze waarden in (47), geven voor den eersten term

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{9l}{2\pi}\right)^2\frac{1}{\cdot}\left(2-\cos\frac{2\pi\mu_1}{3}-\cos\frac{4\pi\mu_1}{3}\right);$$

de tweede term is oneindig omdat $\sigma+\theta=0$. Voor dit geval evenwel gaat de vorige wijze van integreeren niet door. Substitueeren wij echter deze waarden terstond in den tweeden term van (46) zoo komt voor dien term

$$\frac{27l^2}{2\pi(\nu_1-\lambda_1)}\sin\frac{2\pi(\nu_1-\lambda_1)}{3}=0 \text{ volgens (39)}$$

en dus

$$2\int\int AB\,dp'\,dp''=-\frac{1}{2}\left(\frac{9l}{2\pi}\right)^2\frac{1}{\mu_1^2}\left(2-\cos\frac{2\pi\mu_1}{3}-\cos\frac{4\pi\mu_1}{3}\right)$$

Nu is

$$\cos\frac{4\pi\mu_1}{3}=\cos\left(\pi\mu_1+\frac{\pi\mu_1}{3}\right)=\cos\left(\pi\mu_1-\frac{\pi\mu_1}{3}\right)=\cos\frac{2\pi\mu_1}{3}.$$

Stellen wij dus (vgl. (40))

$$(48)\begin{cases}\cos\frac{2\pi\mu_1}{3}=\cos\frac{2\pi\nu_1}{3}=\cos\frac{2\pi\lambda_1}{3}=\delta \text{ dan is ook}\\ \cos\frac{4\pi\mu_1}{3}=\cos\frac{4\pi\nu_1}{3}=\cos\frac{4\pi\lambda_1}{3}=\delta.\end{cases}$$

Daardoor wordt

$$2\int\int AB\,dp'\,dp''=-\left(\frac{9l}{2\pi}\right)^2\frac{1}{\mu_1^2}(1-\delta).$$

Wij vinden analoge waarden voor de andere integralen dezer groep en voor hare som

(49) Som der 6 eerste integr. =

$$=-2\left(\frac{9l}{2\pi}\right)^2(1-\delta)\left(\frac{1}{\mu_1^2}+\frac{1}{\nu_1^2}+\frac{1}{\lambda_1^2}\right).$$

De substitutie van $\varrho=\nu_1$, $\sigma=\mu_1$, $\tau=\lambda_1$, $\theta=\nu_1$ in (47) geeft, aangezien de eerste term $=0$ wordt,

$$2\int\int AC\,dp'\,dp''=\frac{1}{\mu_1\lambda_1}\left(\frac{9l}{2\pi}\right)^2\left(2-\cos\frac{2\pi\mu_1}{3}-\cos\frac{2\pi\lambda_1}{3}\right)=$$

$$=-2\left(\frac{9l}{2\pi}\right)^2\frac{1}{\mu_1\lambda_1}(1-\delta) \text{ volgens (48)}$$

en (daar $\lambda_1 + \mu + \nu_1 = o$)

(50) som der 6 integr. 2[e] groep =

$$= -4\left(\frac{9l}{2\pi}\right)^2 (1-\delta)\left(\frac{1}{\mu_1\lambda_1}+\frac{1}{\nu_1\lambda_1}+\frac{1}{\mu_1\nu_1}\right)=$$

$$= -4\left(\frac{9l}{2\pi}\right)^1 (1-\delta)\frac{\lambda_1+\mu_1+\nu_1}{\lambda_1\,\mu_1\,\nu_1}=o$$

Eindelijk als $\varrho = \nu_1,\ \sigma = \mu_1,\ \tau = -\mu_1,\ \theta = -\nu_1$

$$\therefore\ 2\int\int \mathrm{A\,F}\, dp'\, dp'' = 2\left(\frac{9l}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{\lambda_1^2}\left[1-\cos\frac{2\pi\lambda_1}{3}\right]$$

$$= 2\left(\frac{9l}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{\lambda_1^2}(1-\delta)$$

en dus

(51) Som der 3 integr. 3[e] groep =

$$= 2\left(\frac{9l}{2\pi}\right)^2 (1-\delta)\left(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{\mu_1^2}+\frac{1}{\nu_1^2}\right).$$

Bijgevolg als wij de som nemen van (49), (50) en (51), blijkt het dat de som der integralen, correspondeerende met de dubbele producten in (41) $= o$ is, en wij hebben dus

$$\int_o^{3l}\int_o^{3l} u_{\lambda\mu}^{\ 2}\, dp'\, dp'' = 27l^2 \text{ (vgl. (44))}$$

waardoor uit (34)

$$(52)\ \mathrm{A}_{\lambda\mu} = \frac{2}{27l^2}\int_o^{3l} dp' \int_o^{3l-p'} u_{\lambda\mu}\, f\,(x,y)\, dp''$$

Hiermede is de quaestie geheel opgelost, want wij kennen nu in de algemeene oplossing, $w = \Sigma\, \mathrm{A}\, u \cos\gamma\, t$, alle coëfficiënten.

Wij vatten het gevondene samen in de formule

$$(53)\ w = \sum_{\lambda=o}^{\infty} \mathrm{A}_{\lambda\lambda}\, u_{\lambda\lambda} \cos\gamma\, t + \sum_{\lambda=o}^{\infty}\sum_{\lambda=o}^{\infty} \mathrm{A}_{\lambda\mu}\, u_{\lambda\mu} \cos\gamma\, t$$

waarin

$\mathrm{A}_{\lambda\lambda}$ de waarde (33) en $\mathrm{A}_{\lambda\mu}$ de waarde (52) heeft, terwijl

$u_{\lambda\lambda}$ en $u_{\lambda\mu}$ respectievelijk door (31) en (36) worden gegeven.

d. *Oplossing in geval ook de beginsnelheid van het vlies willekeurig gegeven is.*

Wij kunnen eindelijk het geval van het symetrisch trillende driehoekige vlies in zijne grootste algemeenheid opvatten en voldoen aan

$$(1)\quad \frac{d^2w}{dt^2} = c^2 \left(\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{d^2w}{dy^2}\right)$$

terwijl voor

$$(3')\quad t = o \quad w = f\,(x,y) \quad \frac{dw}{dt} = \mathrm{F}\,(x,y)$$

Immers: Zij w_1 eene functie, die voldoet aan (1) en aan de voorwaarde

$$(w_1)_o = f\,(x,y) \quad \left(\frac{dw}{dt}\right)_o = o$$

en w_2 eene functie voldoende aan (1), zoodanig dat

$$(\mathrm{a})\quad (w_2)_o = o \quad \text{en} \quad \left(\frac{dw}{dt}\right)_o = \mathrm{F}\,(x,y)$$

dan zal $w = w_1 + w_2$ klaarblijkelijk voldoen aan (1) met de voorwaarden (3′).

Nu hebben wij w_1 in het voorgaande gevonden.

Voor w_2 zal zijn

$w_2 = \mathrm{A}'\,v \sin \gamma\,\tau$ eene particuliere oplossing, welke in (1) gebracht, dezelfde vergelijking voor v geeft als die, welke wij voor u vonden (vgl. (24)). Bijgevolg zal zijn

$$w_2 = \Sigma\, \mathrm{A}'\, u \sin \gamma\,\tau$$

De constanten worden bepaald door de conditie (a), welke geeft

$$\Sigma\, \mathrm{A}'\gamma\, u = \mathrm{F}\,(x,y)$$

Geheel op dezelfde wijze als hierboven, vinden wij daaruit

$$
(54)\quad \left\{\begin{aligned}
A'_{\lambda\lambda} &= \frac{1}{27l^2\gamma_{\lambda\lambda}} \int_0^{3l} dp' \int_0^{3l-p'} u_{\lambda\lambda}\ F(x,y)\, dp'' \\
A'_{\lambda\mu} &= \frac{2}{27l^3\gamma_{\lambda\mu}} \int_0^{3l} dp' \int_0^{3l-p.} u_{\lambda\mu}\ F(x,y)\, dp''
\end{aligned}\right.
$$

welke waarden dan, met die, welke gegeven zijn door (33) en (52), in de algemeene oplossing

$$
(55)\quad w = \sum_{\lambda=0}^{\infty} u_{\lambda\lambda} (A_{\lambda\lambda} \cos \gamma t + A'_{\lambda\lambda} \sin \gamma t) +
$$

$$
+ \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} u_{\lambda\mu} (A_{\lambda\mu} \cos \gamma t + A'_{\lambda\mu} \sin \gamma t)
$$

moeten worden gesubstitueerd.

§ 2. Rangschikking der toonen. Knooplijnen.

a. *Groepering der enkelvoudige toonen en bepaling van het aantal termen behoorende bij denzelfden toon.*

Elke term van de voorgaande oplossing kan weêr afzonderlijk bestaan. De trillingsduur van zulk eenen enkelvoudigen toon wordt gegeven door

$\gamma T = 2\pi$. Het aantal trillingen per tijdseenheid

$$
N(\mu,\nu) = \frac{1}{T} = \frac{\gamma}{2\pi} = \frac{2c}{3a} \sqrt{\mu^2 + \mu\nu + \nu^2} \quad \text{volgens (21)}
$$

De toonen door deze formule voorgesteld, kunnen wij in evenveel reeksen groeperen, als er argumenten zijn van den vorm $m = \mu^2 + \mu\nu + \nu^2$, die niet gelijk aan, noch deelbaar door een vierkant zijn. Elke term van zulk eene reeks is dan voor te stellen door $\frac{2c}{3a} k \sqrt{m}$, waarin $k = 1$ is voor den grondtoon der reeks en voor de overige termen respectievelijk alle mogelijke geheele waarden doorloopt. Bovendien komt er nog ééne onvolledige reeks voor waarvan het argument 1 is. De basis van deze groep stelt geen' toon voor omdat als wij μ of $\nu = o$ nemen, w verdwijnt (vgl. bldz. 20) en er dus geen vibratie bestaat, zoodat $\mu^2 + \mu\nu + \nu^2$ nooit $= 1$ zijn kan. Het aantal termen van deze laatste reeks is even groot als het aantal oplossingen dat $\mu^2 + \mu\nu + \nu^2 = h^2$ toelaat voor h.

Met denzelfden toon kunnen meer dan één term correspondeeren. Om alle termen te vinden, die denzelfden toon $\frac{2c}{3a} \sqrt{m'}$ geven, hebben wij alle oplossingen in geheele getallen te zoeken van de vergelijking

$$\mu^2 + \mu\nu + \nu^2 = m'$$

α. Oplossingen in geheele getallen van de vergelijking $\mu^2 + \mu\nu + \nu^2 = m'$.

De behandeling van deze vergelijking is niet zoo eenvoudig als die van de vergelijking, welke bij de vierkante vliezen voorkomt. Wij zullen trachten bij de oplossing zoo kort mogelijk te zijn.

Vermenigvuldigen wij onze vergelijking met 2, om den middelsten term dien coefficiënt te geven, zoo is de vergelijking

$$(1) \quad 2\mu^2 + 2\mu\nu + 2\nu^2 = 2m' = m$$

welke gemakkelijker te behandelen is. Zoeken wij hiervan in de eerste plaats slechts die oplossingen, waarin μ en ν onderling ondeelbaar zijn. Het geval dat er ook oplossingen μ en ν zijn, die eenen gemeenschappelijken factor hebben leidt men gemakkelijk daaruit af.

1e. — *μ en ν onderling ondeelbaar.*

Wanneer wij den vorm

(2) $2x^2 + 2xy + 2y^2$ waarvan de determinante $D = -3$ is 1) transformeeren door de substitutie

$$x = \mu x' + \varrho y'$$
$$y = \nu x' + \sigma y'$$ of, zooals deze substitutie gewoonlijk in de getallentheorie wordt geschreven,

(3) $\begin{pmatrix} \mu & \varrho \\ \nu & \sigma \end{pmatrix}$ zoo zal de eerste coëfficiënt den vorm (1) aannemen. Wij zullen n.l. vinden de uitdrukking

(4) $mx'^2 + 2nx'y' + ly'^2$ waarin

(5) $m = 2\mu^2 + 2\mu\nu + 2\nu^2$

(6) $n = 2\mu\varrho + \mu\sigma + \nu\varrho + 2\nu\sigma.$

Om l te vinden, merken wij op dat de determinante van den nieuwen vorm (4) zooals gemakkelijk te vinden is 2)

$$D' = (\mu\sigma - \nu\varrho)^2 D = -3(\mu\sigma - \nu\varrho)^2.$$

Stel nu dat wij de willekeurige constanten ϱ en σ zoo kiezen, dat

$$(7) \quad \mu\sigma - \nu\varrho = 1$$

zoo zal de determinante van den nieuwen vorm gelijk zijn aan die van (2) en dus

---

1) De determinant n.l. is = het quadraat van den halven coëfficiënt van xy verminderd met het product der coëfficiënten van x^2 en y^2.

2) Algemeen toch wordt de vorm
$ax^2 + 2bxy + cy^2$, waar $D = b^2 - ac$, door de substitutie (3) tot
$(a\mu^2 + 2b\mu\nu + c\nu^2)x'^2 + 2[a\mu\varrho + b(\nu\varrho + \mu\sigma) + c\nu\sigma]x'y' + (a\varrho^2 + 2b\varrho\sigma + c\sigma^2)y'^2$
waarvan de determinante
$D' = [a\mu\varrho + b(\nu\varrho + \mu\sigma)^2 + c\nu\sigma]^2 - (a\mu^2 + 2b\mu\nu + c\nu^2)(a\varrho^2 + 2b\varrho\sigma + c\sigma^2)$
$= (b^2 - ac)(\mu\sigma - \nu\varrho)^2 = D(\mu\sigma - \nu\varrho)^2$ q. e. d.

$$-3 = n^2 - ml \quad \text{waaruit}$$

$$(8)\ l = \frac{n^2+3}{m}.$$

Hierdoor verkrijgt dus (4) den vorm

$$mx'^2 + 2nx'y' + \frac{n^2+3}{m}y'^2$$

of zooals men gewoonlijk schrijft, den vorm

$$(9) \quad \left(m, \quad n, \quad \frac{n^2+3}{m}\right).$$

Aangezien nu de vorm (2) en de vorm (9) dezelfde determinante hebben en (9) uit (2) door eene substitutie als (3) verkregen is, waarin μ, ν, ϱ, σ geheele getallen zijn, zoo zijn (2) en (9) equivalent 1) d. w. z. dat ook wederkeerig (2) uit (9) af te leiden is. Er bestaat dus eene substitutie *in geheele getallen* waardoor (9) weer den vorm (2) aanneemt. In (9) is evenwel n niet geheel willekeurig maar, omdat l een geheel getal moet zijn, moet n^2+3 deelbaar zijn door m en dus moet -3 quadratische rest zijn van m en n moet zijn een wortel van de congruëntie

$$(10) \quad z^2 \equiv -3 \pmod{m}.$$

Aan deze congruëntie kan op oneindig veel wijzen worden voldaan. Kennen wij al deze waarden van n en alle mogelijke substituties waardoor elke vorm (9) in (2) overgaat, zoo kennen wij alle waarden die de transformatie-constanten hebben kunnen en daarmede alle waarden van μ en ν voldoende aan (1). Wij hebben daartoe evenwel niet alle wortels van (10) noodig, maar alleen de

1) Zie voor het bewijs hiervan o.a. Dirichlet. Vorles. über Zahlenth. § 56 pag. 145.

onderling incongruente, die steeds slechts in beperkt aantal aanwezig zijn; want nemen wij in plaats van eene zekere waarde n eene andere, die daarmede congruent is, zoo veranderen daardoor alleen de constanten σ en ϱ, niet μ en ν, zoodat wij daardoor geene nieuwe voorstelling van m krijgen. Om dit aan te toonen behoeven wij omgekeerd slechts te bewijzen, dat door het aannemen van andere waarden van σ en ϱ, n alle met zijne oorspronkelijke waarde congruente waarden en geene andere doorloopt.

Dit nu blijkt terstond, want; laat zijn σ' en ϱ' een ander paar constanten, voldoende aan

$$\mu\sigma' - \nu\varrho' = 1.$$

Trekken wij (7) hiervan af zoo komt

$$\mu(\sigma' - \sigma) = \nu(\varrho' - \varrho),$$

maar wij hebben aangenomen dat μ en ν onderling ondeelbaar zijn; bij gevolg moet $\varrho' - \varrho$ door μ deelbaar zijn, en dus

$$\frac{\varrho' - \varrho}{\mu} = \theta \quad \text{of } \varrho' = \varrho + \mu\theta \quad \sigma' = \sigma + \nu\theta$$

waarin θ alle mogelijke positieve en negatieve geheele getallen kan voorstellen. De waarde n' van n, met ϱ', σ' correspondeerende, wordt volgens (6)

$$n' = 2\mu\varrho' + \mu\sigma' + \nu\varrho' + 2\nu\sigma' = n + m\theta.$$

Als dus θ alle mogelijke waarden doorloopt, doorloopt n' alle mogelijke waarden die congruent zijn met n en geene andere. Wat te bewijzen was.

Beschouwen wij dus nu alleen een volledig stel incongruente wortels van (10). In de getallen-theorie wordt bewezen dat het aantal daarvan, als m oneven en niet deelbaar door 3 is, 2^{π} is, waarin π voorstelt het aantal deelers van m, die den vorm $3h + 1$ hebben 1). Als m deelbaar is door 3 zoo kan de congruentie nog meer wortels hebben. Is m' even, zoo moeten, aangezien $m' = \mu^2 + \mu\nu + \nu^2$ is, μ en ν beide even zijn en vallen zij dus niet onder het nu beschouwde geval dat μ en ν onderling ondeelbaar zijn.

Stel dat wij deze wortels gevonden hebben, dan hebben wij op elk daarvan den vorm

$$(9) \quad \left(m,\ n,\ \frac{n^2 + 3}{m}\right)$$

te construeeren en het vraagstuk wordt gereduceerd tot deze quaestie:

Alle substitutiën te vinden waardoor (9) in (2) overgaat.

Wij zullen al deze substitutiën kennen als wij

1e. Eene substitutie gevonden hebben waardoor (9) in (2) overgaat (waardoor natuurlijk ook de omgekeerde substitutie terstond te vinden is) en

2e. Alle substitutiën opgespoord hebben waardoor (2) in zich zelf verandert d. w. z. denzelfden vorm behoudt.

Want: laat zijn L éène substitutie waardoor (2) in (9) overgaat en laat T voorstellen alle substitutiën waardoor (2) in zichzelf verandert, zoo zal door elk paar substitutiën LT natuurlijk (2) in (9) omgezet worden. Bijgevolg behooren deze substitutiën LT alle tot de gezochte S substitutiën waardoor (2) in (9) wordt getransformeerd. Maar niet alleen behooren zij daaronder, te zamen geven zij ook *al* deze S substitutiën en wel elk slechts eenmaal, want: laat L′ zijn de omgekeerde substitutie van L, waardoor dus (9) in (2) overgaat, zoo heeft elke samen-

---

1) Vgl. b. v. Dirichlet t. a. p. § 37.

gestelde substitutie SL' ten gevolge, eerst een verandering van (2) in (9), daarna weêr van (9) in (2), zoodat SL' in het geheel eene verandering van (2) in zichzelf te weeg brengt, hetzelfde dus wat T alleen doet. Wij kunnen dit kort zoo schrijven

$$SL' = T.$$

Bij gevolg is ook $SLL' = TL$ maar L en L' heffen elkaar op en dus $S = TL$ d. w. z. elke S kan worden voortgebracht door de substitutie L met eene der substitutiën T. Bovendien treedt op deze wijze elke substitutie slechts éénmaal op, want, daar $TL = S$ is, terwijl L steeds dezelfde transformatie voorstelt en elke T slechts eenmaal voorkomt, zoo zal ook elke S niet meer dan eens te voorschijn komen.

Zoeken wij dus nu in de eerste plaats ééne substitutie, waardoor de vorm

$$(9) \quad \left(m, n, \frac{n^2+3}{m}\right) \text{ overgaat in}$$

$$(2) \quad (2, 1, 2).$$

Om deze reductie te volvoeren, brengen wij (9) onder zijnen gereduceerden vorm, waaronder men een' vorm verstaat waarin de 3e coëfficient $\geqq$ 1e coëff. $\geqq 2 \times$ absolute waarde 2e coëff. is. Dit kunnen wij bereiken door eenige achtereenvolgende transformaties van den vorm $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \delta \end{pmatrix}$. Schrijven wij nl. ter verkorting (9) op deze wijze

$$(13) \quad (a, b, c)$$

zoo neemt deze door de substitutie $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \delta \end{pmatrix}$ den vorm aan

$$(14) \quad (c, -b - c\delta, a + 2b\delta + c\delta^2)$$

waarin de eerste coëfficient dezelfde is als de laatste van (13) 1) of korter

$$(15) \quad (c\,,\ d\,,\ e)$$

waarin de waarden van d en e blijken uit (14). — Wij kunnen nu δ gemakkelijk zoo kiezen dat $2\,(d) \leqq c$ ((d) aanduidende de absolute waarde van d). Is dan te gelijk ook $c \leqq e$ zoo is de vorm gereduceerd. Zoo niet, zoo voeren we weder in de substitutie $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \delta' \end{pmatrix}$; er komt

$$(e, \quad -d-e\delta\,, \quad c+2d\delta' + e\delta^2) \quad \text{of}$$

$$(16) \quad (e \quad , \quad f \quad , \quad g \quad)$$

waarin wij alweer δ' zoodanig nemen dat

$$2\,(f) \leqq e$$

Op deze wijze voortgaande, moet eindelijk de laatste coëfficiënt grooter worden dan de eerste, want volgens de veronderstelling dat (15) nog niet gereduceerd is, is $e < c$ en dus de eerste coëfficiënt van (16) kleiner dan die van (15). Evenzoo zal telkens de eerste coëfficiënt van eenen getransformeerden vorm kleiner zijn, dan die van den voorgaanden vorm. Eindelijk moet dus de eerste coëfficiënt $\leqq$ worden aan den laatsten, aangezien gemakkelijk blijkt dat beide steeds positief blijven. Zoodra dit nu het geval is, is de vorm gereduceerd. Nu laat het zich bewijzen 2) dat steeds twee equivalente, gereduceerde, quadratische vormen *identisch* zijn, behalve de vormen

1) Gewoonlijk wordt, waar dit het geval is, (14) een naar rechts verwante vorm van (13) genoemd.

2) Vgl. Dirichlet t. a. p. § 64 pg. 170.

$(a, \frac{1}{2}a, c)$ en (a, b, a), die respectievelijk equivalent zijn met $(a, -\frac{1}{2}a, c)$ en $(a, -b, a)$.

Bijgevolg moeten wij bij de reductie van den vorm (9) steeds ten slotte komen tot den vorm $(2, \pm 1, 2)$ waarvan wij dien met het onderste teeken, terstond den gewenschten vorm geven, door de substitutie $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

De ééne gezochte substitutie is hiermede gevonden en deze is het resultaat der successieve transformaties

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \delta' \end{pmatrix} \ldots\ldots\ldots$$

zoo noodig nog met de substitutie $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Al deze achtereenvolgende transformatiën laten zich gemakkelijk tot ééne transformatie vereenigen z. a. wij zullen zien.

Ons blijft nu alleen nog over, alle substitutiën op te sporen waardoor de vorm $(2, 1, 2)$ in zichzelven overgaat; zoodra wij deze nog zullen hebben gevonden en wij passen die toe op de reeds verkregene voorstellingen van m onder den vorm $(2, 1, 2)$ (waarvan er ééne correspondeert met elken wortel van (10)) zullen wij alle mogelijke wijzen hebben, volgens welke m zich in dien vorm laat voorstellen. Zij dus x en y een stel waarden voldoende aan

$$(2) \quad 2x^2 + 2xy + 2y^2 = m,$$

dan zijn gevraagd alle substitutiën

$$(17) \quad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

welke (2) in zichzelf veranderen.

Voeren wij de substitutie (17) uit, zoo komt

$$2(\alpha^2 + \alpha\gamma + \gamma^2)x'^2 + 2(2\alpha\beta + \alpha\delta + \beta\gamma + 2\gamma\delta)x'y' + \\ + 2(\beta^2 + \beta\delta + \delta^2)y'^2 = m$$

zal deze weêr den vorm (2) hebben, zoo moet

$$(18)\quad \alpha^2 + \alpha\gamma + \gamma^2 = 1$$

$$(19)\quad 2\alpha\beta + \alpha\delta + \beta\gamma + 2\gamma\delta = 1$$

$$(20)\quad \beta^2 + \beta\delta + \delta^2 = 1.$$

Trekken wij het vierkant van (19) af van viermaal het product van (18) en (20) zoo komt

(21) $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$ (welke alleen uitdrukt vgl. form. (7) dat de determinante van den gezochten vorm $=$ die van (2) moet zijn).

Deze substitueerende in (4) geeft

$$(22)\quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\delta = 0$$

welke wij, met α vermenigvuldigd, aftrekken van (18) vermenigvuldigd met β. Er komt

$$\gamma(\beta\gamma - \alpha\delta) = \beta \text{ en dus volgens (21)}$$

$$(23)\quad \beta = -\gamma.$$

Evenzoo geeft (22) vermenigvuldigd met γ afgetrokken van (18) » » δ

$$(\alpha + \gamma)(\delta\alpha - \beta\gamma) = \delta \text{ of volgens (21)}$$

$$(24)\quad \alpha - \delta = -\gamma.$$

Substitueeren wij nu (23) in (21) dan is

$\alpha\delta = -\gamma^2 + 1$ en deze verbonden met (24) geeft

$$(25)\quad (\alpha + \delta)^2 = -3\gamma^2 + 4.$$

Als wij nu $\alpha + \delta = t$ stellen zoo is

$$(26)\quad \begin{cases} \alpha = \dfrac{t - \gamma}{2} \\ \beta = -\gamma \\ \delta = \dfrac{t + \gamma}{2} \end{cases}$$

Hierin zijn t en γ twee geheele getallen, zoodanig dat:

$$t^2 + 3\gamma^2 = 4.$$

Deze vergelijking heeft slechts 6 oplossingen, welke zijn:

$$t = \pm 1 \qquad \gamma = \pm 1$$
$$t = \pm 2 \qquad \gamma = 0.$$

Hiermede correspondeeren de 6 eenige mogelijke substitutiën, die een' vorm als (2) geven:

$$(27) \left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

Deze zelfde transformatien gaan door als wij niet $2x^2 + 2xy + 2y^2$ maar in eens $x^2 + xy + y^2$ vervormen willen.

Met elken wortel van (10) correspondeeren dus 6 oplossingen.

2^e. *μ en ν hebben eenen gemeenschappelijken factor.*

Zij ε de grootst gemeene deeler en dus in $\mu = \varepsilon\mu'$ $\nu = \varepsilon\nu'$ μ' en ν' onderling ondeelbare getallen. Wij zoeken dan de oplossingen van

$$2\,\varepsilon^2\,\mu'^2 + 2\,\varepsilon^2\,\mu'\,\nu' + 2\,\varepsilon^2\,\nu'^2 = 2m' = m$$

bijgevolg moet m' door ε^2 deelbaar zijn; deelende komt:

$$2\,\mu'^2 + 2\,\mu'\,\nu' + 2\,\nu'^2 = \frac{m}{\varepsilon^2} = \mathrm{M},$$ welke weêr op de boven behandelde wijze wordt opgelost.

Wij hebben dus dezen regel voor het vinden van alle oplossingen der vergelijking $\mu^2 + \mu\,\nu + \nu^2 = m'$.

1^e. Als $m' = \frac{1}{2}m$ geen factor heeft, die een zuiver quadraat is, zoo zoek de incongruente wortels van $z^2 \equiv -3$ (mod. m).

Construeer op elk daarvan een' vorm als $\left(m, n, \frac{n+3}{m}\right)$ en breng dezen onder den gereduceerden vorm (2, 1, 2). De substitutiën, die daarvoor moeten worden gebruikt, geven ons elk één paar waarden μ en ν voldoende aan $2\mu^2 + 2\mu\nu + 2\nu^2 = m$; elk paar levert weer 6 paar oplossingen door de substitutiën (27).

2^e. Heeft m factoren p^2, p'^2, ... die een zuiver vierkant zijn, zoo komen bij de mogelijk op deze wijze gevondene waarden van μ en ν, nog evenveel paar waarden als de vergelijkingen

$$2x'^2 + 2x'y' + 2y'^2 = \frac{m}{p^2}$$

$$2x''^2 + 2x''y'' + 2y''^2 = \frac{m}{p'^2}$$

oplossingen toelaten; de hierdoor gevondene waarden zijn respectievelijk gelijk aan alle waarden van

$$px', py'; \; p'x'', \; p'y''; \ldots\ldots$$

β. Toonen van gelijke hoogte.

Hiermede is de volledige oplossing gegeven van het vraagstuk: alle waarden μ en ν in geheele getallen te vinden, welke voldoen aan

$$\mu^2 + \mu\nu + \nu^2 = m'.$$

Zoeken wij nu de toonen van gelijke hoogte, zoo moet wel aan deze vergelijking worden voldaan, maar niet elke oplossing daarvan geeft daarom eenen afzonderlijken term van w. Want wij merken op:

1^o. — Als n een wortel is van $z^2 \equiv -3 \pmod{m}$ zoo is ook $-n$ een wortel daarvan. Zij nu μ en ν het stel waarden dat $+n$ ons geeft, zoo zal met $-n$ correspondeeren het stel $-\mu$, $-\nu$, zooals blijkt uit de vergelijking (6). Twee stellen waarden, die alleen in teeken verschillen [want ook λ heeft klaarblijkelijk in beide oplossingen dezelfde waarde met verschillend teeken] geven niet aanleiding tot verschillende termen z. a. men terstond ziet uit den vorm van zulk een' term [zie form. (19) bldz. 19]. Hierdoor wordt het aantal oplossingen dus gehalveerd.

2°. — Veronderstellen wij dat α, β één paar waarden is van μ en ν. De substitutiën (27) geven ons daarvoor in de plaats de 6 oplossingen.

$$[-\beta, \alpha+\beta] \qquad [-(\alpha+\beta), \alpha] \qquad [\alpha+\beta, -\alpha]$$
$$[\beta, -(\alpha+\beta)] \qquad [\alpha, \beta] \qquad [-\alpha, -\beta]$$

Hiervan kunnen wij er drie weglaten, die met de overigen alleen in teeken verschillen. Er blijven dus 3 oplossingen over

$$\beta, -(\alpha+\beta); \qquad -(\alpha+\beta), -\alpha; \qquad \alpha, \beta$$

Deze geven respectievelijk, daar $\lambda+\mu+\nu=0$

$$\begin{array}{lll} \lambda=\alpha & \lambda=\beta & \lambda=-(\alpha+\beta) \\ \mu=\beta & \mu=-(\alpha+\beta) & \mu=\alpha \\ \nu=-(\alpha+\beta) & \nu=\alpha & \nu=\beta \end{array}$$

Uit den vorm van de particuliere oplossing van w (form. 19 pag. 19) blijkt nu terstond, dat ook deze 3 oplossingen één en denzelfden term geven.

Het aantal verschillende termen die met den toon $N(\mu\,\nu)=\dfrac{2c}{3a}\sqrt{m'}$ overeenkomen is dus ten slotte gelijk aan het halve aantal incongruente wortels van

$$(10) \quad z^2 \equiv -3 \ (\text{mod. } m)$$

waarin $m=2m'$. Om deze oplossingen te vinden hebben wij slechts, als de wortels van (10) gevonden zijn, laat zijn $\pm a$, $\pm b$, ... te construeeren de vormen

$$\left(m,\ a,\ \frac{a^2+3}{m}\right)\quad \left(m,\ b,\ \frac{b^2+3}{m}\right)\ \text{enz.}$$

en de substitutiën te zoeken, waardoor deze den vorm (2, 1, 2) aannemen. Deze substitutiën geven terstond *alle* oplossingen.

Eindelijk nog deze ééne opmerking. Door den aard van het vraagstuk, dat eischt: alle toonen te vinden van gelijke hoogte als $N(\mu, \nu)$ is steeds ééne voorstelling gegeven. Wij kunnen gemakkelijk nagaan, met welken wortel deze correspondeert en behoeven dan nog alleen de oplossingen te zoeken bij de overige wortels.

Passen we nu het voorgaande toe op eenige voorbeelden.

1^e. Gevraagd alle termen te vinden die denzelfden toon geven als

$$N(3\,.\,1).\quad \text{Hier is}\quad m' = 13\quad \therefore m = 2\,.\,13$$

m' is oneven en niet deelbaar door 3 en verder van den vorm $3h+1$; bijgevolg heeft de congruentie $z^2 \equiv -3$ (mod. 26) slechts 2 incongruente wortels, die natuurlijk slechts in teeken verschillen en waarvan wij er dus slechts één' hebben te beschouwen. Derhalve is er maar ééne solutie; deze nu is gegeven door de quaestie zelf.

Alle oplossingen van de vergelijking $\mu^2 + \mu\nu + \nu^2 = m'$ zouden hier zijn

$$\pm(1, -4);\qquad \pm(1, 3);\qquad \pm(4, -3).$$

2^e. Gevraagd de toonen van gelijke hoogte als $N(9\,.\,1)$. Hier is $m' = 91$ en dus $m = 182 = 2\,.\,7\,.\,13$.

Twee deelers hebben den vorm $3h+1$ terwijl m' oneven en ondeelbaar door 3 is; bij gevolg heeft

$z^2 \equiv -3$ (mod. 182), $2^2 = 4$ incongruente wortels. Deze vindt men gemakkelijk 1). Ze zijn

$$\pm 19, \quad \pm 33.$$

De hiermede correspondeerende vormen

$\left(m, n, \dfrac{n^2+3}{m}\right)$ zijn, als we slechts één teeken nemen

$$(182, -19, 2) \quad \text{en} \quad (182, 33, 6).$$

De oplossing (9, 1), die gegeven is correspondeert met den wortel -19, immers aan

(7) $\mu\sigma - \nu\varrho = 1$ kan voor $\mu = 9, \nu = 1$ voldaan worden door $\sigma = 1$ $\varrho = 8$. Door deze waarden geeft de vergelijking (6) $n = 163$. Door het kiezen van andere ϱ's en σ's zijn evenwel alle hiermede congruente getallen te verkrijgen en dus ook $n = -19$ aangezien $143 \equiv -19$ (mod. 182). Wij hebben dus slechts te reduceeren den vorm

$$(182, 33, 6).$$

Substitueeren wij hierin $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \delta \end{pmatrix}$ zoo verkrijgen wij (vgl. form. (14))

$$(6, -33-6\delta, 182+66\delta+6\delta^2)$$

zal nu $2(33+6\delta) \leqq 6$ zoo moet $\delta \leqq -5$ zijn; zij $\delta = -5$ zoo wordt onze vorm

$$(6, -3, 2).$$

Hierin is nog de 3e coëfficiënt grooter dan de eerste en deze vorm is dus nog niet gereduceerd.

Substitueeren wij weder $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \delta' \end{pmatrix}$ zoo komt

$$(2, 3-2\delta', \quad 6-6\delta'+2\delta'^2);$$

1) Hiervoor bestaan verschillende methoden. Het snelst worden de wortels wel gevonden door de indirecte methode, die Gauss de *methodus exclusionis* noemt. Vgl. Gauss Werke I, p. 388.

weêr moet $6 - 4\delta \leqq 2$ $\therefore \delta \geqq 1$. Zij $\delta = 1$ zoo komt (2 , 1 , 2) welke gereduceerd is en den gewenschten vorm heeft.

Wij gebruikten hierbij de transformaties

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} \text{ en } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nu is algemeen, zooals gemakkelijk te zien is, de uitkomst van twee achtereenvolgende substitutiën:

$$\text{(A)} \quad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\alpha' + \beta\gamma' & \alpha\beta' + \beta\delta' \\ \gamma\alpha' + \delta\gamma' & \gamma\beta' + \delta\delta' \end{pmatrix}$$

en dus

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

Door deze substitutie gaat dus (182, 33, 6) over in (2, 1, 2). Keeren wij deze substitutie om, om de transformatie $\begin{pmatrix} \mu & \varrho \\ \nu & \sigma \end{pmatrix}$ te hebben waardoor (2, 1, 2) in (182, 33, 6) overgaat zoo vinden wij, omdat alweer algemeen het omgekeerde van de substitutie

$$\text{(B)} \quad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \text{ is } \begin{pmatrix} \delta\varepsilon & -\beta\varepsilon \\ -\gamma\varepsilon & \alpha\varepsilon \end{pmatrix} \text{ als } \varepsilon = \frac{1}{\alpha\beta - \beta\gamma},$$

$$\begin{pmatrix} \mu & \varrho \\ \nu & \sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{en dus } \mu = -6 \text{ , } \nu = -5$$

of als wij de omgekeerde teekens nemen $\mu = 6$, $\nu = 5$.

Bij gevolg $N(9 . 1) = N(6 . 5)$.

Het geheele aantal voorstellingen van $\mu^2 + \mu\nu + \nu^2 = 91$ is 12 en wel $\pm$ (1, 9); $\pm$ (1, -10); $\pm$ (5, 6); $\pm$ (5, -11); $\pm$ (6, -11); $\pm$ (9, -10).

3^e^. Zij gegeven $m' = 532 = 2^2 . 7 . 19$ $\therefore m = 1064 = 2 . 2^2 . 7 . 19$.

Aangezien m' even is kunnen in $\mu^2 + \mu\nu + \nu^2 = m'$, μ en ν geene onderling ondeelbare waarden hebben (immers beide moeten even zijn, om een even getal voort te brengen). Maar m' heeft den quadratischen factor 2^2 en bij gevolg hebben wij de oplossingen te zoeken van

$$2\mu^2 + 2\mu\nu + 2\nu^2 = 2 \,.\, 7 \,.\, 19 = 266.$$

$z^2 \equiv -3$ (mod. 266) heeft 4 wortels, daar 7 en 19 beide den vorm $3h + 1$ hebben; deze wortels zijn

$$n = \pm 23, \quad n = \pm 61.$$

De daarop geconstrueerde vormen (één teeken nemende) zijn

$$(266,\ 23,\ 2) \qquad (266,\ 61,\ 14).$$

De eerste wordt terstond gereduceerd door de transformatie $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -12 \end{pmatrix}$ waarvan volgens (B) het omgekeerde is $\begin{pmatrix} -12, & -1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix}$. Hierdoor verkrijgen wij dus het stel

$$\mu = -12, \ \nu = 1.$$

(266, 61, 14) wordt door de substitutie $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$

(14, 9, 6) deze weer » » » $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

(6, 3, 2) en deze » » » $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

(2, 1, 2).

Nu is volgens (A) (zie vorige bladz)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -9 & -13 \end{pmatrix}$$

waarvan het omgekeerde is (volgens (B))

$\begin{pmatrix} -13 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ en waardoor dus $\mu = -13$, $\nu = 9$ gevonden wordt en dus

$$N(-24,\ 2) = N(-26,\ 18).$$

b. *Knooplijnen.*

Wij kunnen nu steeds alle termen vinden, die denzelfden toon geven, en zijn daardoor in staat elken toon, die het vlies geven kan, afzonderlijk te beschouwen en de knooplijnen na te gaan, welke die toonen vergezellen.

De algemeene vergelijking der knooplijnen van die toonen, welke slechts één' enkelen term 1) hebben is

$$u = o.$$

Door vervorming van de in de form. (36) bldz. 45 gevondene uitdrukking voor $u_{\lambda\mu}$ kunnen wij deze schrijven

$$(28) \quad o = \sin\frac{\pi\lambda}{3l}(p'+p'')\cos\frac{\pi\lambda_1}{9l}(p'-p'') + \\ + \sin\frac{\pi\mu}{3l}(p'+p'')\cos\frac{\pi\mu_1}{9l}(p'-p'') + \\ + \sin\frac{\pi\nu}{3l}(p'+p'')\cos\frac{\pi\nu_1}{9l}(p'-p'')$$

waarin $\lambda_1 = \mu - \nu$; $\mu_1 = \nu - \lambda$; $\nu_1 = \lambda - \mu$ en $p + p' + p'' = 3l$.

Beschouwen wij de gevallen waarin de knooplijnen rechte lijnen zijn.

1^e^. μ en ν beide even. In dit geval is ook λ even. Aan (28) wordt dan klaarblijkelijk voldaan door

$$\frac{2\pi}{3l}(p'+p'') = i\pi \text{ of } p = 3l\left(1 - \frac{1}{2}i\right).$$

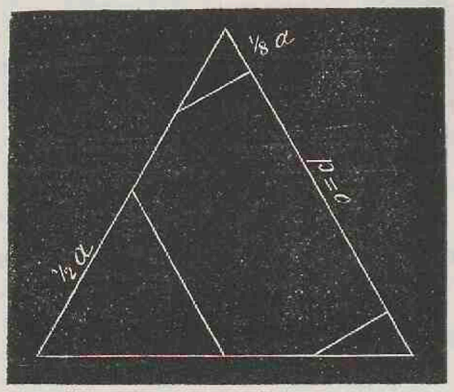
Het is duidelijk dat i slechts de waarden 1 of 2 hebben

---

1) De laagste toonen van het vlies hebben alle slechts éénen term. Zij verhouden zich als de vierkantswortel uit de getallen 3, 7, 9, 12, 13, 19, 21, 27, 28, 31, 37, 39, 43, 48, 49, ...

kan. In het laatste geval is bovenstaande vergelijking, de vergelijking der zijde $p = o$, in het andere geval vinden wij $p = \frac{3}{2} l$, welke een lijn aanduidt, gaande door het midden van de loodlijn op de zijde $p = o$ en evenwijdig met die zijde.

fig. 14.



μ en ν even.

Bovendien wordt voldaan aan (28) door

$$\frac{2\pi}{9l}(p'-p'') = \pm \frac{2i+1}{2}\pi$$

welke voor $i = o$ geeft $p'-p'' = \pm \frac{9}{4} l$. Hierdoor worden twee lijnen voorgesteld loodrecht op de zijde $p = o$ en wier voet $\frac{1}{8}$ van de lengte der zijde, van de uiteinden verwijderd is. Deze 3 knooplijnen komen dus altijd voor bij de toonen N (2.2), N (2.4). . . . . . .

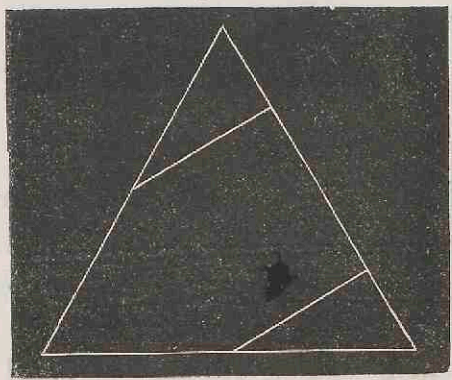
2°. Een der getallen λ_1, μ_1, ν_1, deelbaar door 3 zonder $= o$ te zijn. De beide anderen zijn in dit geval ook deelbaar door 3 (vgl. form. (40) pag. 24).

De tweede factor van elken term zal nu $= o$ worden als

$$\frac{\pi}{3l}(p'-p'') = \pm \frac{2i+1}{2}\pi \text{ en dus } p' - p'' = \pm \frac{3}{2} l \text{ d. i.}$$

twee knooplijnen loodrecht op de zijde $p = o$ (zig fig. 15), die beide een vierde gedeelte daarvan afsnijden. Deze twee knooplijnen komen dus voor bij al de toonen N (1.4, N (2.5), N (1.7). . . . . . .

fig. 15.



μ_1, ν_1, λ_1 deelbaar door 3.

3_e. μ en ν beide deelbaar door 3. λ zal het dan ook zijn. Vooreerst hebben wij hier de knooplijnen van het vorig nummer, maar vervolgens ook die, welke gegeven worden door de vergelijking

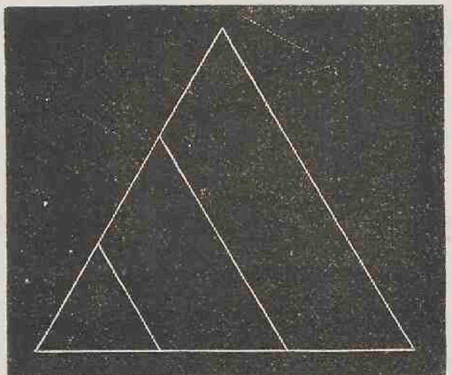
$$\frac{\pi}{l}(p' + p'') = i\,\pi,$$

waarin $i = 1$ en $i = 2$ respectievelijk geven $p = 2l$ en $p = l$ d. i. twee lijnen evenwijdig aan de zijde $p = o$ en welke de twee andere zijden in drie gelijke deelen verdeelen. (Zie fig. 16).

4e. Algemeen ziet men gemakkelijk in:

Als μ en ν tot grootst gemeenen deeler hebben τ, zoo zullen er steeds $\tau - 1$ knooplijnen aanwezig zijn evenwijdig met de zijde $p = o$ en onderling op gelijken afstand. Bovendien komen er knooplijnen voor, loodrecht op $p = o$. Het aantal van deze laatsten is gelijk aan het dubbel van het grootste geheele getal onder $\frac{1}{3}\,\tau + 1$. Hare afstanden tot het midden van de zijde $p = o$ zijn respectievelijk $\frac{3a}{4\tau}$, $3.\,\frac{3a}{4\tau}$, $5\,\frac{3a}{4\tau}$ . . . . ,

fig. 16.



μ en ν beide deelbaar door 3.

waarin $a =$ de lengte der zijde is. Eindelijk zijn deze laatstgenoemden de eenige als μ_1 en ν_1 eenen grootst gemeenen deeler ι hebben, terwijl μ en ν onderling ondeelbaar zijn.

5^e. $\mu = \nu \qquad \therefore \lambda = -2\mu$.

Wij kunnen de vergelijking (28) voor $\mu = \nu$ brengen onder den vorm

$$o = \sin \mu \pi \frac{p}{3l} \sin \mu \pi \frac{p'}{3l} \sin \mu \pi \frac{p''}{3l}$$

Deze vergelijking geeft niets dan de randen als $\mu = 1$ d. i. voor den grondtoon $N\,(1.1) = \frac{2c}{3a} \sqrt{3}$. In het algemeen geeft zij $3\,(\mu - 1)$ knooplijnen, waarvan er $\mu - 1$ evenwijdig zijn met elke zijde. Zij verdeelen het vlies in μ^2 gelijke, gelijkzijdige driehoeken.

HOOFDSTUK IV.

CIRKELVORMIGE VLIEZEN.

§ 1. Invoering van poolcoordinaten.

Leggen wij den oorsprong van het coordinatenstelsel in het middelpunt van het vlies en voeren wij poolcoordinaten in door te stellen

$$x = r \cos \theta \qquad\qquad y = r \sin \theta$$

zoo wordt de algemeene vergelijking

$$(1) \qquad \frac{d^2 w}{dt^2} = c^2 \left(\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{d^2 w}{dy^2}\right)$$

vervormd in

$$(2) \qquad \frac{d^2 w}{dt^2} = c^2 \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dw}{dr} + \frac{1}{r^2}\frac{d^2 w}{d\theta^2}\right).$$

Wij zullen nu aannemen, dat er geen beginverplaatsing is gegeven, maar eene willekeurige beginsnelheid. Wanneer wij de oplossing met deze beperking hebben gevonden, wordt daaruit, zonder de minste zwarigheid, de meest algemeene solutie afgeleid voor het geval dat ook de beginverplaatsing van elk punt willekeurig gegeven is. Dit geschiedt geheel op dezelfde wijze als dit gedaan is voor het driehoekige vlies. Nemen wij den straal van het vlies $= 1$, zoo zijn dus de voorwaarden waaraan w moet voldoen

$$(3)\quad w = o \qquad \text{voor } r = 1$$

$$(4)\quad w = o \qquad \text{»} \quad t = o$$

$$(5)\quad \frac{dw}{dt} = \mathrm{F}\,(r, \theta) \quad \text{»} \quad t = o$$

§ 2. Afleiding der algemeene oplossing, welke voldoet aan de voorwaarden (3) en (4).

Zoeken we weêr eene particuliere oplossing als

$$(6)\quad w = \mathrm{T\,R\,}Ⓗ$$

waarin T, R, Ⓗ respectievelijk zuivere functies van t, r, θ voorstellen. De substitutie van (6) in (2) geeft, deelende door T R Ⓗ

$$\frac{1}{\mathrm{T}}\,\frac{d^2\mathrm{T}}{dt^2} = c^2\left(\frac{1}{\mathrm{R}}\,\frac{d^2\mathrm{R}}{dr^2} + \frac{1}{r}\,\frac{1}{\mathrm{R}}\,\frac{d\mathrm{R}}{dr} + \frac{1}{r^2}\,\frac{1}{Ⓗ}\,\frac{d^2Ⓗ}{d\theta^2}\right).$$

Het eerste lid van deze vergelijking is eene zuivere functie van t terwijl het laatste lid slechts r en θ bevat; bijgevolg moeten zij gelijk zijn aan eene constante $- q^2 c^2$, die wij, als vroeger, negatief nemen, omdat de beweging periodisch moet zijn.

Hierdoor is dus

$$(7)\quad \frac{d^2\mathrm{T}}{dt^2} + q^2 c^2\,\mathrm{T} = o.$$

De blijvende vergelijking laat zich schrijven

$$\frac{r^2}{\mathrm{R}}\,\frac{d^2\mathrm{R}}{dr^2} + \frac{r}{\mathrm{R}}\,\frac{d\mathrm{R}}{dr} + q^2 r^2 = -\,\frac{1}{Ⓗ}\,\frac{d^2Ⓗ}{d\theta^2}$$

welke door dezelfde redeneering in 2 vergelijkingen te splitsen is, welke wij schrijven kunnen

$$(8) \qquad \frac{d^2 Ⓗ}{d\theta^2} + n^2 Ⓗ = o$$

$$(9) \qquad \frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} + q^2 - \left(\frac{n^2}{r^2}\right)R = o.$$

De integralen van (7) en (8) zijn respectievelijk $T = A \cos qct + B \sin qct$, welke door de conditie (4) wordt

$$(10) \qquad T = B \sin qct \quad , \text{ en}$$

$$(11) \qquad Ⓗ = H \cos n\theta + K \sin n\theta.$$

Door in (10) q slechts positieve waarden toe te kennen verminderen wij de algemeenheid der oplossing niet. In (11) moet, als θ met 2π aangroeit, Ⓗ weder dezelfde zijn; hieruit volgt dat n een geheel getal moet zijn, dat we evenzeer alleen positief behoeven te nemen.

Zoeken wij eindelijk de integraal van (9). Wij kunnen deze op verschillende wijzen vinden; in oneindigen vorm, door reeksen of onbepaalde coëfficiënten; in eindigen vorm door bepaalde integralen. Wij geven hier beide vormen, omdat zij beiden in het vervolg zullen moeten worden gebruikt.

1^e^. *Integratie door reeksen.*

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} + \left(q^2 - \frac{n^2}{r^2}\right)R = o.$$

Wij zien aanstonds, dat, als wij onmiddelijk ontwikkelen volgens de formule

$$R = R_0 + r\left(\frac{dR}{dr}\right)_0 + \frac{r^2}{2}\left(\frac{d^2R}{dr}\right)_0 + \ldots$$

wij, om geene oneindige waarde voor $\left(\frac{d^3R}{dr}\right)_0$ te krijgen, beide $\left(\frac{dR}{dr}\right)_o = o$ en $R_o = o$ zouden moeten nemen, waardoor weêr alle volgende differentiaalquotienten $= o$ worden. De oorzaak hiervan is dat voor $r = o$, de coëfficiënten van $\frac{dR}{dr}$ en R beide ∞ worden, omdat zij r en r^2 in den noemer hebben. Stellen wij evenwel $R = r^p y$ zoo laat p zich zoodanig kiezen dat ten minste één der beide coëfficiënten eindig blijft, want door die veronderstelling wordt de vergelijking

$$\frac{d^2y}{dr^2} + (2p+1)\frac{1}{r} \cdot \frac{dy}{dr} + \left(\frac{p^2 - n^2}{r^2} + q^2\right) y = o.$$

Wij nemen dus $p^2 = n^2 \quad \therefore \; p = \pm n$.

Zij $p = +n$ dan is $R = r^n y$.

De vergelijking en hare achtereenvolgende afgeleiden zijn:

$$(A) \left\{ \begin{array}{l} r\,\dfrac{d^2y}{dr^2} + (2n+1)\dfrac{dy}{dr} + q^2 ry = o \\ r\,\dfrac{d^3y}{dr^3} + (2n+2)\dfrac{d^2y}{dr^2} + q^2 r\,\dfrac{dy}{dr} + q^2 y = o \\ r\,\dfrac{d^4y}{dr^4} + (2n+3)\dfrac{d^3y}{dr^3} + q^2 r\,\dfrac{d^2y}{dr^2} + 2q^2\dfrac{dy}{dr} = o \\ r\,\dfrac{d^5y}{dr^5} + (2n+4)\dfrac{d^4y}{dr^4} + q^2 r\,\dfrac{d^3y}{dr^3} + 3q^2\dfrac{d^2y}{dr^2} = o. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

De opvolging is duidelijk. Stellen wij nu $\left(\frac{dy}{dr}\right)_o = o$, $y_o = A$ en brengen wij deze en de waarden van $\left(\frac{d^2y}{dr^2}\right)$ $\left(\frac{d^3y}{dr^3}\right)$ . . . . uit deze vergelijkingen berekend, in

$$(B) \quad R = r^n y = r^n \left[y_o + r \left(\frac{dy}{dr}\right)_o + \frac{r^2}{2} \left(\frac{d^2y}{dr^2}\right)_o + \ldots\ldots \right]$$

De eerste van de vergelijkingen (A) wordt voor $r = o$

$$\left(\frac{d^2y}{dr^2}\right)_o + (2n+1)\left(\frac{\frac{dy}{dr}}{r}\right)_o + q^2 A = o.$$

$\dfrac{\frac{dy}{dr}}{r}$ neemt den vorm $\dfrac{o}{o}$ aan voor $r = o$, bijgevolg

$$\lim \frac{\frac{dy}{dr}}{r} = \left(\frac{\frac{d^2y}{dr^2}}{1}\right)_o. \text{ Men vindt dus}$$

$$\left(\frac{d^2y}{dr^2}\right)_o = -\frac{q_2}{2(n+1)} A$$

Deze waarde invoerende in de 2e vergelijking (A) en $r = o$ stellende geeft:

$$\left(\frac{d^3y}{dr^3}\right)_o + q^2 \left(\frac{dy}{dr}\right)_o = o \quad \therefore \left(\frac{d^3y}{dr^3}\right)_o = o$$

De derde vergelijking geeft

$$\left(\frac{d^4y}{dr^4}\right)_o + (2n+3)\left(\frac{\frac{d^3y}{dr^3}}{r}\right)_o + q^2\left(\frac{d^2y}{dr^2}\right)_o + 2q^2\left(\frac{\frac{dy}{dr}}{r}\right)_o = o$$

hierin is $\lim \dfrac{\frac{d^3y}{dr^3}}{r} = \left(\dfrac{d^4y}{dr^4}\right)_o$; $\lim \dfrac{\frac{dy}{dr}}{r} = \left(\dfrac{d^2y}{dr^2}\right)$ zoodat men verkrijgt

$$\left(\frac{d^4y}{dr^4}\right)_o = \frac{3q^4}{4(n+1)(n+2)} A$$

Op deze wijze voortgaande en de waarden der differentiaal-quotienten in (B) brengende komt:

$$(12)\ R = A\, r^n\, U \text{ waarin}$$

$$(13)\ U = 1 - \frac{\left(\frac{qr}{2}\right)^2}{1.\,n+1)} + \frac{\left(\frac{qr}{2}\right)^4}{1.2\,(n+1)\,(n+2)} - \ldots$$

Voor $p = -n$ krijgen wij eene tweede particuliere oplossing, die met de nu gevondene alleen in het teeken van n verschilt, zoodat $R' = B r^{-n}\, U'$ is. Deze moeten wij evenwel verwerpen omdat zij voor $r = o$ $R = \infty$ geeft d. i. eene oneindige verplaatsing voor het middelpunt van het vlies, hetgeen ongerijmd is.

2e. *Oplossing in eindigen vorm.*

Wij kunnen de reeks (13) den vorm eener bepaalde integraal geven. Algemeen is n.l.

$$\cos\ (\alpha \cos \omega) = 1 - \frac{\alpha^2 \cos \omega}{1.2} + \frac{\alpha^4 \cos^4 \omega}{1.2.3.4} - \ldots\ldots.$$

Als wij deze vermenigvuldigen met $\sin^{2n} \omega\, d\omega$ en integreeren van o tot π zoo komt

$$\int_o^\pi \sin^{2n} \omega \cos(\alpha \cos \omega)\, d\omega = \int_o^\pi \sin^{2n} \omega\, d\omega -$$

$$- \frac{\alpha^2}{1.2} \int_o^\pi \sin^{2n} \omega \cos^2 \omega\, d\omega + \frac{\alpha^4}{1.2.3.4} \int_o^\pi \sin^{2n} \omega \cos^4 \omega\, d\omega \ldots.$$

nu is

$$\int_o^\pi \sin^2\ \omega\, d\omega = \frac{1.3.5\ \ldots\ldots\ (2\,n-1)}{2.4.6\ \ldots\ldots .2n}\ \pi = K$$

$$\int_o^{\pi} \sin^{2n} \omega \cos^2 \omega\, d\omega = \frac{1}{2\,n+2} \int_o^\pi \sin^{2n} \omega\, d\omega = \frac{1}{2\,n+2} K$$

$$\int_o^\pi \sin^{2n} \omega \cos^4 \omega\, d\omega = \frac{1.3}{(2n+2)\,(2n+4)}\ K$$

. . . .

waarvan elk door partiëele integratie uit de voorgaande is af te leiden. Bij gevolg, na eene kleine herleiding

$$\int_0^\pi \sin^{2n}\omega \cos(\alpha \cos\omega)\, d\omega = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots\;2n}\,\pi$$

$$\left[1 - \frac{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}{1.(n+1)} + \frac{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^4}{1.2.(n+1)(n+2)} \cdots\right]$$

Deze vergelijkende met (13) is dus

$$(14)\quad U = \frac{2.4.6\ldots\;2n}{1.3.5\ldots(2n-1)}\,\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin^{2n}\omega \cos(qr\cos\omega)\, d\omega$$

Hierdoor is dus de oplossing van (9) in eindigen vorm gegeven.

De waarden, die wij hebben gevonden voor T, Θ, R geven eene particuliere oplossing, voldoende aan de differentiaalvergelijking (2) en ook reeds aan de voorwaarde (4) $w_0 = o$. Zal nu de conditie (3), $w = o$ voor $r = 1$, vervuld zijn, zoo moet $U = o$ zijn voor $r = 1$ en bij gevolg moet

$$(15)\quad o = 1 - \frac{\left(\frac{q}{2}\right)^2}{1.(n+1)} + \frac{\left(\frac{q}{2}\right)^4}{1.2(n+1)(n+2)} \cdots$$

waardoor q in n gegeven is. Deze vergelijking heeft z. a. wij zullen aantoonen oneindig veel positieve wortels (de negatieve nemen wij niet in aanmerking). Bij elke waarde van n behooren dus oneindig veel q's. Noemen wij in het algemeen $q_{n,s}$ de s^e wortel van (15) behooren bij de waarde n (als wij die wortels in opklimmende orde gerangschikt denken) zoo zal de particuliere oplossing, welke aan de 3^e en 4^e voorwaarde voldoet, zijn

$$(16)\quad w_{n,s} = R_{n,s}\left[A_{n,s}\cos n\theta + B_{n,s}\sin n\theta\right]\sin q_{n,s}\, ct.$$

Voegen wij al deze particuliere integralen samen, zoo vinden wij als algemeene oplossing

$$(17)\quad w = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty} R_{n.s}\,[A_{n.s}\cos n\theta + B_{n.s}\sin n\theta]\sin q_{n.s}\,ct$$

waarin de constanten $A_{n.s}$ en $B_{n.s}$ nog moeten worden bepaald door de laatste conditie (zie (5)) d. i. door de vergelijking

$$(18)\quad F(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty} q_{n.s}\,c\,R_{n.s}\,[A_{n.s}\cos n\theta + B_{n.s}\sin n\theta].$$

§ 3. Bepaling der constanten A en B.

De constanten kunnen uit (18) niet worden afgezonderd door de algemeene formule $\int_0^{\circ} u\,u'\,do = o$ van bladz. 40, maar worden zeer gemakkelijk gevonden door de betrekking

$$\int_0^1 R\,R'\,r\,dr = o$$

welke tusschen twee *verschillende* R's bestaat en die zich nagenoeg op dezelfde wijze laat betoogen als de aangehaalde formule. Immers R en R′ voldoen aan de vergelijking (9) en dus

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} + \left(q^2 - \frac{n^2}{r^2}\right)R = o$$

$$\frac{d^2R'}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR'}{dr} + \left(q'^2 - \frac{n^2}{r^2}\right)R' = o$$

welke verbonden kunnen worden tot

$$R'\frac{d^2R}{dr^2} - R\frac{d^2R'}{dr^2} + \frac{1}{r}\left(R'\frac{dR}{dr} - R\frac{dR'}{dr}\right) + (q^2 - q'^2)\,RR' = o$$

Vermenigvuldigen wij deze met rdr en integreeren van 0 tot 1.

Aangezien dan

$$\int\left(R'\frac{d^2R}{dr^2}-R\frac{d^2R'}{dr^2}\right)rdr=\left[\left(R'\frac{dR}{dr}-R\frac{dR'}{dr}\right)r\right]_0^1-$$
$$-\int_0^1\left(R'\frac{dR}{dr}-R\frac{dR'}{dr}\right)dr=-\int_0^1\left(R'\frac{dR}{dr}-R\frac{dR'}{dr}\right)dr$$

is, omdat R en R' beide $= o$ zijn aan den rand van het vlies (d. i. voor $r = 1$), zoo wordt onze vergelijking

$$(q^2 - q'^2)\int_0^1 RR'\, rdr = o \qquad \text{en dus}$$

$$(19) \qquad \int_0^1 RR'\, rdr = o$$

als q en q' verschillend zijn. *q. e. d.*

Vermenigvuldigen wij nu (18) met $R_{n.s}r\cos n\theta drd\theta$ en integreeren over het geheele vlies, zoo krijgt elke term van het tweede lid den vorm

$$q_{n's'}\, c\, A_{n's'}\int_0^1 R_{n.s}\, R_{n's'}\, rdr\int_0^{2\pi}\cos n\theta\cos n'\theta d\theta +$$
$$+\, q_{n's'}\, c\, B_{n's'}\int_0^1 R_{n.s}\, R_{n's'}\, rdr\int_0^{2\pi}\cos n\theta\sin n'\theta d\theta.$$

Alle termen waarin n' en s' beide of één van beide van n en s verschillen vallen dus weg volgens (19). Voor $n' = n$ en $s' = s$ verdwijnt alleen de coëfficiënt van B_{ns} want

$$\int_0^{2\pi}\cos n\theta\sin n\theta = o.$$

De coëfficiënt van $A_{n.s}$ wordt $q_{n.s}\, c\pi \int_0^1 R_{n.s}^2\, rdr$ omdat $\int_0^{2\pi}\cos^2 n\theta d\theta = \pi$. Bij gevolg is

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 F(r,\theta)\, R_{n.s}\, r\cos n\theta d\theta dr = q_{n.s}\, c\pi\, A_{n.s}\int_0^1 R_{n.s}^2\, rdr$$

Evenzoo vinden wij $B_{n.s}$ door met $R_{n.s}\, r\sin n\theta drd\theta$ te vermenigvuldigen. Wij hebben dus ten slotte

$$(20) \quad A_{n.s} = \frac{1}{\pi c q_{n.s}}\; \frac{\int_0^{2\pi}\int_0^1 F(r,\theta)\, R_{n.s}\cos n\theta d\theta dr}{\int_0^1 R_{n.s}^2\, rdr}$$

$$(21) \quad B_{n.s} = \frac{1}{\pi c q_{n.s}}\; \frac{\int_0^{2\pi}\int_0^1 F(r,\theta)\, R_{n.s}\, r\sin n\theta d\theta dr}{\int_0^1 R_{n.s}^2\, rdr}$$

§ 4. Rangschikking der toonen. Knooplijnen.

De volledige oplossing toont aan dat er over het algemeen oneindig veel toonen gelijktijdig door het vlies worden voortgebracht. De begintoestand kan evenwel zoodanig zijn, dat er slechts één term van die oplossing blijft bestaan. Bij gevolg stelt elke term één' der mogelijke toonen van het vlies voor. Beschouwen wij dus eenen enkelen term.

$$(22) \quad w = r^n \mathrm{U}\ [\mathrm{A} \cos n\theta + \mathrm{B} \sin n\theta] \sin qct.$$

De trillingsduur en de hoogte van den toon, hierdoor voorgesteld, zijn klaarblijkelijk gegeven door de formules

$$(23) \quad qc\mathrm{T} = 2\pi \text{ en } \mathrm{N} = \frac{1}{\mathrm{T}} = \frac{c}{2\pi}\, q.$$

Wij zullen in het volgende aantoonen dat alle waarden van q verschillend zijn, zoodat er dus, z. a. uit de waarde van N blijkt, geen twee termen zijn, die denzelfden toon geven. De algemeene vergelijking der knooplijnen is dus steeds

$$r^n \mathrm{U}\ [\mathrm{A} \cos n\theta + \mathrm{B} \sin n\theta] = o$$

welke zich splitst in het stel

$$(24) \quad r^n = o$$

$$(25) \quad \mathrm{U} = o$$

$$(26) \quad \mathrm{A} \cos n\theta + \mathrm{B} \sin n\theta = o.$$

De eerste hiervan geeft $r = o$ als n niet $= o$ is d. w. z., behalve voor de termen waarin $n = o$ is, is het middelpunt steeds een knooppunt.

De tweede vergelijking, is de vergelijking der cirkelvormige knooplijnen (vgl. form. (13)). Stellen wij in deze vergelijking $qr = \delta$ zoo is $r = \dfrac{\delta}{q}$ en δ successievelijk gelijk aan elk der wortels van

$$0 = 1 - \frac{\left(\frac{\delta}{2}\right)}{1\,.\,(n+1)} + \frac{\left(\frac{\delta}{2}\right)}{1\,.\,2\,(n+1)(n+2)} - \ldots\ldots$$

welke identiek is met de vergelijking (15). De achtereenvolgende waarden van δ zijn dus

$$\delta_1 = q_{n.1},\ \delta_2 = q_{n.2},\ \delta_3 = q_{n.3}\ \ldots\ldots$$

zoodat de stralen van de knoopcirkels, welke den toon $N_{n.s}$ vergezellen zijn:

$$(27)\quad r_1 = \frac{q_{n.1}}{q_{n.s}},\ r_2 = \frac{q_{n.2}}{q_{n.s}}\ \ldots\ldots r_s = \frac{q_{n.s}}{q_{n.s}} = 1.$$

De laatste hiervan is de vergelijking van den rand, de daaraan volgende stellen geen plaats op het vlies meer voor. Wij vinden dus voor den toon $N_{n.s}$, $s - 1$ concentrische, cirkelvormige knooplijnen, wier stralen door (27) zullen gegeven zijn, zoodra wij de wortels van (15) kennen.

De vergelijking (26) eindelijk geeft $2n$ stralen, onderling of gelijke afstand, want schrijven wij

tang $n\theta = -\frac{A}{B}$ en zij α de kleinste hoek, wiens tangent $= -\frac{A}{B}$ is, zoo zal bovendien elke hoek hieraan voldoen voor welken

$\theta = \frac{\alpha}{n} + i\frac{\pi}{n}$ d. i. in het geheel $2n$ waarden, die telkens $\frac{\pi}{n}$ verschillen.

De hoogte van de mogelijke toonen (vgl. (23)) en de afmetingen der cirkelvormige knooplijnen, kunnen dus niet anders worden gevonden dan door de oplossing der vergelijking (15). Wij hebben dus deze vergelijking nader te beschouwen.

§ 5. Behandeling der vergelijking

$$(15)\quad 0 = 1 - \frac{\left(\frac{q}{2}\right)^2}{1\,.\,(n+1)} + \frac{\left(\frac{q}{2}\right)^4}{1\,.\,(n+1)\,(n+2)} - .. = \mathrm{T}_n$$

Voor wij overgaan tot de oplossing van deze vergelijking, zullen wij aantoonen:

1^e dat alle wortels reëel zijn,

2^e dat er geen twee gelijke wortels voorkomen.

Het bewijs van het eerste is door Poisson gegeven en is zeer eenvoudig. — Veronderstellen wij dat (15) een imaginairewortel $q_s = a + b\sqrt{-1}$ heeft, zoo moet ook $q_{s'} = a - b\sqrt{-1}$ een wortel zijn. Voor deze twee wortels en voor dezelfde n nu zullen de waarden van R respectievelijk zijn

$$\mathrm{R}_{n,s} = \mathrm{C} + \mathrm{D}\sqrt{-1} \qquad \mathrm{R}_{n,s'} = \mathrm{C} - \mathrm{D}\sqrt{-1}$$

zooals blijkt uit de vergelijkingen (12) en (13). C en D stellen reëele functies van r voor. Brengen wij deze waarden in de form. (19) zoo komt

$$\int_1^0 (\mathrm{C}^2 + \mathrm{D}^2)\, r\, dr = o.$$

Dit is evenwel ongerijmd, want alle elementen der integraal zijn positief.

Om in de tweede plaats te bewijzen dat (15) slechts ongelijke wortels heeft, schrijven wij voor T_n hare waarde in eene bepaalde integraal, welke terstond uit (14) wordt gevonden door daarin $r = 1$ te nemen. Men heeft

$$(a)\quad \mathrm{T}_n = \frac{2.4\ .\ .\ 2n}{1.2.3\ .\ .\ (2n+1)}\,\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin^{2n}\omega\, \cos(q\cos\omega)\, d\omega.$$

Integreeren wij bij gedeelten zoo is

$$\int_0^\pi \sin^{2n}\omega \cos(q\cos\omega)\,d\omega =$$

$$=(2n-1)\int_0^\pi \sin^{2n-2}\omega\cos(q\cos\omega)\,d\omega -$$

$$-(2n-1)\int_0^\pi \sin^{2n}\omega\cos(q\cos\omega)\,d\omega +$$

$$+\ q\int_0^\pi \sin^{2n}\omega\cos\omega\sin(q\cos\omega)\,d\omega.$$

De laatste integraal integreeren wij weer bij gedeelten; daardoor zal dan worden

$$T_n = \frac{2.4\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ 2n}{1.3\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (2n+1)}\frac{1}{\pi}$$

$$\Big[(2n-1)\int_0^\pi \sin^{2n-2}\omega\cos(q\cos\omega)\,d\omega -$$

$$-(2n-1)\int_0^\pi \sin^{2n}\omega\cos(q\cos\omega)\,d\omega +$$

$$+\frac{q^2}{2n+1}\int_0^\pi \sin^{2n+2}\omega\cos(q\cos\omega)\,d\omega\Big]$$

en hieruit dan weder gemakkelijk

$$(28)\quad T_{n+1} = \frac{n(n+1)}{\left(\frac{q}{2}\right)^2}(T_n - T_{n-1}).$$

Door differentiatie van (a) verkrijgt men

$$\frac{dT_n}{dq} = -\frac{2.4\ .\ .\ \ 2n}{1.3\ .\ .\ (2n-1)}\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin^{2n} x\sin(q\cos\omega)\cos\omega\,d\omega$$

welke door partiëele integratie geeft

$$(29)\quad \frac{dT_n}{dq} = \frac{q}{2(n+1)}T_{n+1}.$$

Nemen wij nu aan, dat $T_n = o$ twee gelijke wortels had, dan zou voor de waarde van die wortels, niet alleen T_n, maar ook $\frac{dT_n}{dq} = o$ zijn, en dus ook $T_{n+1} = o$ volgens (29) en daardoor eindelijk (Vgl. (28))

$$T_{n+2} = o \quad , \quad T_{n+3} = o$$

Brengen wij deze waarden in de achtereenvolgende afgeleiden van (29)

$$\text{zoo komt } \frac{d^2T_n}{dq^2} = o, \ \frac{d^3T_n}{dq^3} = o \ldots.$$

zoodat, zooals blijkt uit de ontwikkeling van T_n door het theorema van Marlaurin, T_n *identisch* $= o$ zou zijn, welke ook de waarde van q is, hetgeen ongerijmd is.

De algemeene oplossing van (15), die wij nu laten volgen is gegeven door Bourget 1). Poisson geeft de oplossing voor het geval dat $n = o$ is 2).

Geven wij eerst T_n eenen anderen vorm door de oplossing der differentiaal vergelijking waaraan T_n voldoet en die gevonden wordt door differentiatie van (29). Er komt

$$\frac{d^2T_n}{dq^2} = -\frac{q}{2(n+1)} \frac{d^2T_{n+1}}{dq} - \frac{1}{2(n+1)} T_{n+1}$$

hierin de waarde van $\frac{dT_{n+1}}{dq}$ volgens (29) en daarna die van T_{n+2} (28) en van T_{n+1} (29), komt

$$\frac{d^2T_n}{dq^2} + \frac{2n+1}{q} \frac{dT_n}{dq} + T_n = o.$$

---

1) Annales de l'Ecole Normale III, 1866 bldz. 72.

2) Journal de l'Ecole Polyt. XII. p. 350.

Stelt men

(30) $T_n = V q^{-(n+\frac{1}{2})}$ zoo vindt men de vergelijking

$$(31)\quad \frac{d^2V}{dq^2} + \left[1 - \frac{n^2 - \frac{1}{4}}{q^2}\right] V = o$$

welke het eerst door Sturm is behandeld in het Journal de Mathémat. pures et Appliquées I p. 174. 1)

Sturm vindt daar voor het verschil τ, tusschen twee achtereenvolgende waarden van q, welke $V = o$ maken.

$$(32)\quad \tau = \frac{\pi}{\sqrt{1 + \frac{4}{\mu^2}}}$$

waarin μ een getal is tusschen de twee wortels q van $V = o$, dus ook van $T_n = o$. Door deze formule berekent men spoedig de benaderde waarde van de wortels der vergelijking (15) als de eersten bekend zijn. Als de waarden van q groot zijn is hun verschil nagenoeg $= \pi$.

Voor het geval dat de term $\frac{n^2 - \frac{1}{4}}{q^2}$ te verwaarloozen is wordt de vergelijking (31)

$$\frac{d^2V}{dq^2} + V = o$$

waarvan de integraal is

$$(33)\quad V = P \cos q + Q \sin q.$$

Trachten we voor P en Q waarden te vinden (als functies der veranderlijke) zoodanig dat (33) de integraal wordt van (31).

---

1) Vgl. ook de zeer eenvoudige behandeling van Mathieu. Phys. Math. p. 107.

Men vindt dat P en Q gegeven zijn door

$$(34)\left\{\begin{aligned}\frac{d^2P}{dq^2} + 2\,\frac{dQ}{dq} + \frac{4\,n^2-1}{4\,q^2}\,P = o \\ \frac{d^2Q}{dq^2} - 2\,\frac{dP}{dq} - \frac{4\,n^2-1}{4\,q^2}\,Q = o\end{aligned}\right.$$

welke wij zullen oplossen door de methode der onbepaalde coëfficiënten. Beproeven wij te voldoen door

$$P = A\,q^m + A_1\,q^{m-1} + A_2\,q^{m-2} + \dots\dots$$
$$Q = B\,q^m + B_1\,q^{m-1} + B_2\,q^{m-2} + \dots\dots$$

Wanneer wij deze waarden substitueeren in (34) zoo komt:

$m = o$

$$\frac{(2\,n+1)(2\,n-1)}{4}\,A + 2\,B_1 = o$$

$$\frac{(2\,n+1)(2\,n-1)}{4}\,B - 2\,A_1 = o$$

$$\frac{(2\,n+3)(2\,n-3)}{4}\,A_1 + 4\,B_2 = o$$

$$\frac{(2\,n+3)(2\,n-3)}{4}\,B_1 - 4\,A_2 = o$$

. . . .

of als wij kortheidshalve schrijven

$$(35)\quad \frac{(2\,n+i)\,(2\,n-i)}{4\,(i+1)} = \Pi_i$$

$$\begin{aligned} A_1 &= \Pi_1\,B & B_1 &= -\,\Pi_1\,A \\ A_2 &= -\,\Pi_1\,\Pi_3\,A & B_2 &= -\,\Pi_1\,\Pi_3\,B \\ A_3 &= -\,\Pi_1\,\Pi_3\,\Pi_5\,B & B_3 &= \Pi_1\,\Pi_3\,\Pi_5\,A \\ A_4 &= \Pi_1\,\Pi_3\,\Pi_5\,\Pi_7\,A & B_4 &= \Pi_1\,\Pi_3\,\Pi_5\,\Pi_7\,B \end{aligned}$$

. . . .

Hierdoor wordt dan

$$T_n = V q^{-(n+\frac{1}{2})} = q^{-(n+\frac{1}{2})}$$

$$\left[(A\cos q + B\sin q)\left(1 - \frac{\Pi_1\Pi_3}{q^2} + \frac{\Pi_1\Pi_3\Pi_5\Pi_7}{q^4} - \ldots\right)\right.$$

$$\left. - (A\sin q + B\cos q)\left(\frac{\Pi_1}{q} - \frac{\Pi_1\Pi_3\Pi_5}{q^3} + \ldots\right)\right]$$

of als wij schrijven $A = H\cos\varphi$, $B = H\sin\varphi$

$$(36)\quad T_n = q^{-(n+\frac{1}{2})}\left[H\cos(q-\varphi)\left(1 - \frac{\Pi_1\Pi_3}{q^2} + \frac{\Pi_1\Pi_3\Pi_5\Pi_7}{q^4}\ldots\right)\right.$$

$$\left. - H\sin(q-\varphi)\left(\frac{\Pi}{q} - \frac{\Pi_1\Pi_3\Pi_5}{q^3} + \ldots\right)\right]$$

Hierin moeten nog de constanten H en φ bepaald worden. Dit kan geschieden door de waarde van T_n, uitgedrukt in eene bepaalde integraal (a), in eene dergelijke reeks te ontwikkelen. Wij bchoeven daarbij niet alle termen te zoeken; één daarvan is voldoende om, door vergelijking met den correspondeerenden term in (36), de constanten te vinden. Wij nemen daartoe den term met den factor $q^{-(n+\frac{1}{2})}$.

Vooreerst merken wij op dat wij de integraal, voorkomende in (a) tusschen de grenzen o en $\frac{1}{2}\pi$ kunnen nemen, als wij slechts het geheel verdubbelen en dus

$$T_n = \frac{2.4 \ldots\ldots 2n}{1.3.5\ldots(2n-1)}\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}\omega\cos(q\cos\omega)\,d\omega$$

of omdat $\cos(q\cos\omega) = \frac{1}{2}e^{iq\cos\omega} + \frac{1}{2}e^{-iq\cos\omega}$.

$$(37)\quad T_n = \frac{2.4\ldots 2n}{1.3\ldots(2n-1)}\frac{1}{\pi}$$

$$\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}\omega e^{iq\cos\omega} + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}\omega e^{-iq\cos\omega}\,d\omega\right].$$

Beschouwen wij deze beide integralen ieder afzonderlijk. De eerste vervormen wij door de veronderstelling

$iq \cos \omega = iq - y^2$, waardoor wij zullen vinden

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} \omega e^{iq\cos\omega} d\omega = \left(\frac{2}{iq}\right)^{n+\frac{1}{2}} e^{iq}$$

$$\int_0^{\sqrt{iq}} y^{2n} \left(1 - \frac{y^2}{2iq}\right)^{n-\frac{1}{2}} e^{-y^2} dy.$$

De gewenschte factor $q^{-(n+\frac{1}{2})}$ komt hier voor buiten het integraal-teeken. Men behoeft dus slechts dien term van de ontwikkeling der integraal te zoeken, welke onafhankelijk is van q.

Nu is $\left(1 - \frac{y^2}{2iq}\right)^{n-\frac{1}{2}} = 1 - \left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{y^2}{2iq} + \ldots$

Als wij dit in de integraal invoeren, splitst zij zich in oneindig veel integralen, waarvan de eerste is

$$\int_0^{\sqrt{iq}} y^{2n} e^{-y^2} dy.$$

Partieel integreerende krijgen wij achtereenvolgens:

$$\int_0^{\sqrt{iq}} y^{2n} e^{-y^2} dy = -\frac{1}{2} (iq)^{\frac{2n-1}{2}} e^{-iq} + \frac{2n-1}{2} \int_0^{\sqrt{iq}} y^{2n-2} e^{-y^2} dy$$

$$\int_0^{\sqrt{iq}} y^{2n-2} e^{-y^2} dy = -\frac{1}{2} (iq)^{\frac{2n-3}{2}} e^{-iq} + \frac{2n-3}{2} \int_0^{\sqrt{iq}} y^{2n-4} e^{-y^2} dy$$

. . . .

$$\int_0^{\sqrt{iq}} y^2 e^{-y^2} dy = -\frac{1}{2} (iq)^{\frac{1}{2}} e^{-iq} + \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{iq}} e^{-y^2} dy$$

en dus

$$\int_0^{\sqrt{iq}} y^{2n} e^{-y^2} dy = -\frac{1}{2} e^{-iq}$$

$$\left[(iq)^{\frac{2n-3}{2}} + \left(\frac{2n-1}{2}\right)(iq)^{\frac{2n-1}{2}} + \ldots\ldots \right.$$

$$\left. + \left(\frac{2n-1}{2}\right)\left(\frac{2n-3}{2}\right) \ldots\ldots\ldots \tfrac{3}{2}(iq)^{\frac{1}{2}} \right] +$$

$$+ \frac{1.3\ldots\ldots(2n-1)}{2^n} \int_0^{\sqrt{iq}} e^{-y^2} dy.$$

Geen term van het eerste gedeelte van het tweede lid is onafhankelijk van q. De waarde van de integraal daarin voorkomende, is gelijk aan $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ verminderd met eene reeks van termen, die alle q bevatten 1). Geen van de overige integralen waarin wij de gezochte integraal hebben gesplitst, heeft eenen term onafhankelijk van q; bijgevolg is de gezochte term van de ontwikkeling der eerste integraal

$$q^{-(n+\frac{1}{2})} \left(\frac{1}{i}\right)^{n+\frac{1}{2}} \frac{1.3\ldots\ldots(2n-1)}{2^n} \frac{1}{2} \sqrt{\pi}\, e^{iq}.$$

Geheel op dezelfde wijze zal men door de substitutie

$$+ iq \cos \omega = iq + y^2$$

voor den term van de tweede integraal, die $q^{(-n+\frac{1}{2})}$ tot factor heeft, vinden:

$$q^{-(n+\frac{1}{2})} (2i)^{n+\frac{1}{2}} \frac{1.3\ldots\ldots(2n-1)}{2^n} \frac{1}{2} \sqrt{\pi}\, e^{-iq}$$

Bij gevolg is (vgl. (37)) de gezochte term van T_n

$$(38)\quad 1.2\ldots n.2^{n-\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\left(\frac{1}{i}\right)^{n+\frac{1}{2}} e^{iq} + (i)^{n+\frac{1}{2}} e^{-iq} \right] q^{-(n+\frac{1}{2})}$$

Deze moet nu gelijk zijn aan den correspondeerenden

---

1) Zie o. a. Lacroix t. III, p. 507.

term van T_n in (36). Schrijven we eerst nog om ons het vergelijken gemakkelijk te maken

$$(i)^{n+\frac{1}{2}} \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2} + i \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2} = e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}}$$

en

$$\left(\frac{1}{i}\right)^{n+\frac{1}{2}} = \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2} - i \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2} = e^{-i\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}}$$

welke men vindt door in de formule

$$(\cos x \pm \sqrt{-1} \sin x)^m = \cos mx \pm \sqrt{-1} \sin mx$$

$x = \frac{\pi}{2}$, $m = n + \frac{1}{2}$ te nemen en te schrijven $-\, i = \frac{1}{i}$.

(38) geeft daardoor, als wij hem met den correspondeerenden term van (36) gelijk stellen

$$1\,.\,2\ldots n\,.\,2^{n-\frac{1}{2}}\frac{2}{\sqrt{\pi}} \cos\left[q - \left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right] = \mathrm{H}\cos(q-\varphi)$$

en dus

$$(39)\quad \begin{cases} \varphi = \left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2} \\ \mathrm{H} = 1\,.\,2\,.\,3\,.\ldots.\,n\,.\,2^n\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,. \end{cases}$$

Hiermede is de nieuwe vorm (36) van T_n geheel bepaald. Deze vorm nu geeft eene zeer gemakkelijke oplossing voor de q's die $T_n = o$ maken. Immers als wij $T_n = o$ maken, laat (36) zich schrijven (met invoering der waarde (39) van φ).

$$\cot\left[q - \left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right] = \frac{\frac{\Pi_1}{q} - \frac{\Pi_1\Pi_3\Pi_5}{q^3} + \ldots\ldots\ldots}{1 - \frac{\Pi_1\Pi_3}{q^2} + \frac{\Pi_1\Pi_3\Pi_5\Pi_7}{q^4}\ldots\ldots}$$

of als wij deze deeling werkelijk uitvoeren en kortheidshalve stellen

$$(40)\quad \begin{cases} \Pi_1 = \lambda \\ \Pi_1\, \Pi_3\, (\Pi_5 - \Pi_1) = \Pi_1\, \Pi_3\, (\Pi_5 - \lambda) = \mu \\ \Pi_1\, \Pi_3\, (\Pi_5\, \Pi_7\, \Pi_9 - \Pi_5\, \Pi_7\, \lambda - \mu) = \nu \end{cases}$$

zoo komt

$$\cot \left[q - \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right] = \frac{\lambda}{q} - \frac{\mu}{q^3} + \frac{\nu}{q^4} - \cdots\cdots$$

of daar $\cot \alpha = - \, tg\, (\alpha + \pi)$

$$- \, tg \left[q - \left(n + \frac{3}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right] = \frac{\lambda}{q} - \frac{\mu}{q^3} + \frac{\nu}{q^5} - \cdots\cdots$$

en dus

$$q - \left(n + \frac{3}{2}\right)\frac{\pi}{2} = (s-1)\pi - arc\, tg\left(\frac{\lambda}{q} - \frac{\mu}{q^3} + \frac{\nu}{q^5} - \cdots\right)$$

maar

$$arc\, tg\, y = y - \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{5}y^5 \; . \; . \; . \; .$$

en dus eindelijk als wij aan q weer hare gewone index geven

$$(46)\; q_s = \left(s - \frac{1}{2}n - \frac{1}{4}\right) - \frac{\lambda}{q} + \left(\mu + \frac{\lambda^3}{3}\right)\frac{1}{q^3} - \left(\nu + \lambda^2\mu + \frac{\lambda^5}{5}\right)\frac{1}{q^5} + \cdots$$

Uit deze formule is q_s zeer snel te benaderen. Bourget in zijne aangehaalde verhandeling bldz. 81 geeft eene tabel van de waarden der constanten, die bij de berekening noodig zijn. Ook geeft hij uitvoerige tabellen van de toonen, welke het vlies geven kan met de knooplijnen, die deze toonen vergezellen.

§ 6. Vlies, begrensd door twee concentrische bogen en twee stralen.

Laat de vergelijkingen van deze bogen en stralen zijn

$$r = l,\quad r = l';\quad \theta = o,\quad \theta = \alpha.$$

Als wij weêr de beginverplaatsing $= o$ nemen, zal, als

$$W = TR\,Ⓗ$$

de particuliere oplossing of m. a. w. de enkelvoudige trilling voorstelt, daarin weêr

$$T = B \sin qct \text{ zijn (vgl. (10))}$$

In

$$Ⓗ = H \cos n\theta + K \sin n\theta \text{ (zie (11))}$$

moet nu $Ⓗ = o$ zijn voor $\theta = o$ en $\theta = \alpha$

bij gevolg $H = o$ en $n = i\,\frac{\pi}{\alpha}$ en dus

$$Ⓗ = R \sin i\,\frac{\pi}{\alpha}\,.$$

De voorwaarde dat n een geheel getal moet zijn, vervalt; daardoor blijft de tweede particuliere oplossing van R nu bestaan, zoodat

$$R = Ar^n \left[1 - \frac{\left(\frac{qr}{2}\right)^2}{1.(n+1)} + \frac{\left(\frac{qr}{2}\right)^4}{1\,.\,2\,(n+1)\,(n+2)} - \cdots\right] +$$

$$+ A'r^{-n}\left[1 + \frac{\left(\frac{qr}{2}\right)^2}{1\,.\,(n-1)} + \frac{\left(\frac{qr}{2}\right)^4}{1\,.\,2\,(n-1)\,(n-2)} \cdots\cdots\right].$$

Hierin moet $R = o$ worden voor $r = l$ en $r = l'$, waardoor q in functie van n en $\frac{A}{A'}$ kan worden bepaald. —

Vormen wij dan eindelijk de algemeene oplossing door de som te nemen van alle particuliere w's, zoo zullen de nog onbepaalde constanten daarin, uit de conditie $\frac{dw}{dt} = F(r, \theta)$ voor $t = o$, moeten worden afgeleid.

HOOFDSTUK I.

HET ELLIPTISCHE VLIES.

---

§ 1. Invoering van nieuwe coordinaten.

De integratie van de vergelijking

$$\frac{d^2w}{dt^2} = c^2\left(\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{d^2w}{dy^2}\right)$$

voor het elliptische vlies is gegeven door E. Mathieu in het Journal de Mathématiques pures et appliquées 1868 1). Wij zullen hem niet overal in zijne zeer uitvoerige beschouwingen volgen, maar een overzicht geven van zijne resultaten en de wijze waarop die zijn verkregen.

Om de voorwaarde $w = o$ voor den rand gemakkelijk uit te drukken, voeren wij een stelsel kromlijnige coördinaten in, bestaande uit een stel ellipsen, confocaal met den rand van het vlies en de orthogonale trajectoren van deze ellipsen. Deze orthogonale trajectoren vormen, zooals gemakkelijk te bewijzen is, een systeem hyperbels, wier groote as en brandpunten samenvallen met die van

---

1) Vgl. ook zijn' Cours de Physique Mathematique. 1873 pag. 122.

het vlies. Het is duidelijk dat een punt van het vlies gegeven is, zoodra de afmetingen van de ellips en de hyperbel, die elkaâr in dat punt snijden, bekend zijn. Het stel ellipsen laat zich voorstellen door de vergelijking:

$$(1)\quad \frac{x^2}{\varrho^2} + \frac{y^2}{\varrho^2 - c'^2} = 1$$

waarin c' de constante liniaire excentriciteit, en $\varrho' = \sqrt{\varrho^2 - c'^2}$ de assen van elke ellips voorstellen. De hyperbels zijn bevat in de vergelijking

$$(2)\quad \frac{x^2}{\nu^2} - \frac{y^2}{c'^2 - \nu^2} = 1$$

waarin ν de groote en $\nu' = \sqrt{c'^2 - \nu^2}$ de kleine as is van de hyperbel. ϱ en ν doorloopen voor de verschillende ellipsen en hyperbels alle waarden van af c' tot a (a = groote as van het vlies).

Stellen wij nu

$$(3)\quad \varrho = c' \frac{e^{\beta} + e^{-\beta}}{2} \text{ en dus } \varrho' = \sqrt{\varrho^2 - c'^2} = c' \frac{e^{\beta} - e^{-\beta}}{2}$$

$$(4)\quad \nu = c' \cos\alpha \quad \therefore \quad \nu' = \sqrt{c'^2 - \nu^2} = c' \sin\alpha \text{ 1)}$$

zoo zullen wij α en β nemen als kromlijnige coördinaten d. w. z. wij denken ons elk punt bepaald door de waarden, welke α en β hebben voor de ellips en de hyperbel, die elkander in dit punt snijden.

Door middel van deze coördinaten laat de conditie, dat de rand in rust moet blijven, zich eenvoudig zóó uitdrukken

$$w = o \text{ voor } \beta = \text{const} = \text{B}.$$

1) Het laat zich zeer eenvoudig aantoonen dat α voorstelt den hoek, welken de assymptoot van de hyperbel, gaande door het punt (α, β), maakt met de groote as van het vlies.

Elimineeren wij uit (1) en (2) beurtelings x en y, zoo komt, met invoering van de waarden (3) en (4),

$$(5)\quad x = c' \frac{e^{\beta} + e^{-\beta}}{2} \cos\alpha \qquad y = c' \frac{e^{\beta} - e^{-\beta}}{2} \sin\alpha$$

waardoor wij van de coördinaten x en y tot α, β kunnen overgaan.

Wij hebben dus bij deze quaestie eene functie w te zoeken, welke, als wij de beginverplaatsing weer $= o$ nemen, voldoet aan de volgende vereischten:

$$(6)\quad \frac{d^2w}{dt^2} = c^2 \left(\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{d^2w}{dy^2}\right)$$

welke wij eerst te transformeeren hebben voor de coördinaten α, β,

$$(7)\quad w = o \text{ voor } \beta = \text{A}.$$

$$(8)\quad w = o \quad \text{»} \quad t = o.$$

$$(9)\quad \frac{dw}{dt} = \varphi(\alpha, \beta) \text{ voor } t = o.$$

Nemen wij, om reeds terstond te voldoen aan (8), als particuliere oplossing van (6).

$$(10)\quad w = u \sin 2\lambda\, ct.$$

waarin u eene functie is van x en y alleen, die volgens (6) moet voldoen aan:

$$(11)\quad \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} = -4\lambda^2 u.$$

Voeren wij nu hier in de waarden (5)

$$x = c' \frac{e^{\beta} + e^{-\beta}}{2} \cos\alpha = c' \cos(\beta \sqrt{-1}) \cos\alpha$$

$$y = c' \frac{e^{\beta} - e^{-\beta}}{2} \sin\alpha = -c' \sqrt{-1} \sin(\beta \sqrt{-1}) \sin\alpha;$$

maar geven wij eerst aan het eerste lid van (11) zijne eenvoudigste gedaante, door te stellen

$$x + y\sqrt{-1} = t$$
$$x - y\sqrt{-1} = v$$

zoo wordt (11)

$$(12) \quad -4\lambda^2 u = 4\frac{d^2u}{dt\,dv}$$

waarin men voor t en v uitgedrukt in α en β vindt

$$t = c' \cos(\alpha - \beta\sqrt{-1})$$
$$v = c' \cos(\alpha + \beta\sqrt{-1})$$

welke door differentiatie geven

$$1 = -c' \sin(\alpha - \beta\sqrt{-1})\left(\frac{d\alpha}{dt} - \sqrt{-1}\,\frac{d\beta}{dt}\right)$$

$$0 = -c' \sin(\alpha - \beta\sqrt{-1})\left(\frac{d\alpha}{dv} - \sqrt{-1}\,\frac{d\beta}{dv}\right)$$

$$0 = -c' \sin(\alpha + \beta\sqrt{-1})\left(\frac{d\alpha}{dt} + \sqrt{-1}\,\frac{d\beta}{dt}\right)$$

$$1 = -c' \sin(\alpha + \beta\sqrt{-1})\left(\frac{d\alpha}{dv} + \sqrt{-1}\,\frac{d\beta}{dv}\right).$$

Uit de 3e en 4e dezer vergelijkingen volgt

$$(13) \quad \frac{d\beta}{dt} = \sqrt{-1}\,\frac{d\alpha}{dt} \qquad \frac{d\beta}{dv} = -\sqrt{-1}\,\frac{d\alpha}{dv}$$

en hieruit weder

$$(14) \quad \frac{d^2\beta}{dt\,dv} = \frac{d^2\alpha}{dt\,dv} = o.$$

Om nu de vervormde uitdrukking van (12) te vinden, hebben wij slechts van veranderlijke te veranderen:

$$\frac{du}{dt} = \frac{du}{d}\cdot\frac{d\alpha}{dt} + \frac{du}{d\beta}\frac{d\beta}{dt} = \left(\frac{du}{d\alpha} + \sqrt{-1}\,\frac{du}{d\beta}\right)\frac{d\alpha}{dt} \text{ volgens (13)}$$

$$\therefore \frac{d^2u}{dt\,dv} = \left(\frac{d^2u}{d\alpha^2} + \sqrt{-1}\,\frac{d^2u}{d\alpha\,d\beta}\right)\frac{d\alpha}{dt}\frac{d\alpha}{dv} +$$

$$+\left(\frac{d^2u}{d\alpha\,d\beta} + \sqrt{-1}\,\frac{d^2u}{d\beta^2}\right)\frac{d\alpha}{dt}\frac{d\beta}{dv} + \left(\frac{du}{d\alpha} + \sqrt{-1}\,\frac{du}{d\beta}\right)\frac{d}{dt\,dv}.$$

De laatste term is $= o$ volgens (14). Wegens (13) is dus

$$\frac{d^2u}{dt\,dv} = \left(\frac{d^2u}{d\alpha^2} + \sqrt{-1}\,\frac{d^2u}{d\alpha\,d\beta}\right)\frac{d\alpha}{dt}\frac{d\alpha}{dv} -$$

$$-\sqrt{-1}\left(\frac{d^2u}{d\alpha\,d\beta} + \sqrt{-1}\,\frac{d^2u}{d\beta^2}\right)\frac{d\alpha}{dt}\frac{d\alpha}{dv} = \left(\frac{d^2u}{d\alpha^2} + \frac{d^2u}{d\beta^2}\right)\frac{d\alpha}{dt}\frac{d\alpha}{dv} =$$

$$= \frac{1}{4c'^2 \sin(\alpha + \beta\sqrt{-1})\,\sin(\alpha - \beta\sqrt{-1})}\left(\frac{d^2u}{d\alpha^2} + \frac{d^2u}{d\beta^2}\right).$$

maar

$$2\sin(\alpha + \beta\sqrt{-1})\sin(\alpha - \beta\sqrt{-1}) = \cos(2\beta\sqrt{-1}) -$$
$$- \cos 2\alpha = \mathrm{E}(2\beta) - \cos 2\alpha$$

als wij voor de hyperbolische cosinus het symbool E schrijven.

Bij gevolg

$$-4\lambda^2 u = 4\,\frac{d^2u}{dt\,dv} = \frac{2}{c'^2\,[\mathrm{E}(2\beta) - \cos 2\alpha]}\left(\frac{d^2u}{d\alpha^2} + \frac{d^2u}{d\beta^2}\right)$$

of eindelijk

$$(15)\qquad \frac{d^2u}{d\alpha^2} + \frac{d^2u}{d\beta^2} = -2\lambda^2 c'^2\,[\mathrm{E}(2\beta) - \cos 2\alpha]\,u.$$

§ 2. Particuliere integralen van (15).

Zij nu om deze te integreeren.

$$(16)\qquad u = \mathrm{PQ}$$

zijnde P eene zuivere functie van α; Q eene zuivere functie van β, zoo zal men, in plaats van (15) alleen, deze twee gewone differentiaal-vergelijkingen verkrijgen

$$(17) \quad \frac{d^2P}{d\alpha^2} + (R - 2\lambda^2 c'^2 \cos 2\alpha)\, P = o.$$

$$(18) \quad \frac{d^2Q}{d\beta^2} - (R - 2\lambda^2 c'^2 E\,(2\beta)\,)\, Q = o$$

waarin R eene constante is, die voor den cirkel gelijk het vierkant van een geheel getal is. De zwarigheid van de oplossing van het nu behandelde vraagstuk bestaat hoofdzakelijk in het opsporen van de waarde der constante R en in de ontwikkeling van de functies P en Q.

Wanneer wij een punt (α, β) zich laten bewegen langs de ellips, wier parameter β is, zoo zal, als dat punt op zijne oorspronkelijke plaats terugkeert, w weder dezelfde waarde moeten aannemen, als die in het punt waarvan wij zijn uitgegaan m. a. w. als wij β constant laten en α met 2π laten aangroeien, zoo moet w en dus ook P daardoor niet veranderen. Bij gevolg moet P eene periodische functie zijn met de periode 2π. Door deze voorwaarde wordt R bepaald. Om de oplossing van de vergelijking (17) te vereenvoudigen merkt Mathieu op dat de algemeene integraal van eene differentiaal-vergelijking tweede orde zich laat splitsen in twee particuliere, waarvan de eene $= o$ en de andere maximum of minimum wordt voor de waarde o van de veranderlijke. Immers: die algemeene integraal heeft, als wij volgens het theorema van Maclaurin ontwikkelen, den vorm

$$(a) \quad y = y_0 + n\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 + \frac{x^2}{2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 + \ldots$$

waaruit door differentiatie ook

$$(b) \quad \frac{dy}{dx} = \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 + x\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 + \ldots\ldots$$

waarin wij voor y_o en $\left(\frac{dy}{dx}\right)_o$ willekeurige constanten kunnen schrijven; nemen wij in (a) $y_o = o$ en $\left(\frac{dy}{dx}\right)_o = C$ zoo komt als particuliere integraal

$$y_1 = Cx + F(C)\,x^2 + \ldots\ldots$$

welke $= o$ is voor $x = o$;

nemen wij daarentegen $\left(\frac{dy}{dx}\right)_o = o$ en $y_o = C'$ zoo is

$$y_2 = C' + x^2 f(C') + \ldots\ldots$$

eene particuliere oplossing, welke volgens (b) maximum of minimum is voor $x = o$. De algemeene integraal is bovendien

$$y = y_1 + y_2.$$

Men mag dus stellen

$$(19) \quad P = P_1 + P_2$$

waarin

P_1 eene oplossing van (17) is, die $= o$ is voor $\alpha = o$

P_2 » » » » » » max. of min. is voor $\alpha = o$.

Zoeken wij deze beide functies ieder afzonderlijk en gelijktijdig daarmede de waarde van R. Wij zullen vinden dat wij R niet zóó kunnen bepalen dat zij dezelfde waarde heeft in P_1 en P_2, zoodat er geene *algemeene* integraal van (17) te vinden is die aan alle vereischten voldoet, met name niet aan de gevorderde periodiciteit.

Beginnen wij met P_2.

§ 3. Ontwikkeling van P_2 en P_1 en de daarbij behoorende R's volgens opklimmende machten van c'.

Stellen wij $\lambda c' = h$ zoo wordt de oplossing verlangd van de vergelijking

$$(20)\quad \frac{d^2P}{d\alpha^2} + (R_2 - 2\,h^2 \cos 2\,\alpha)\,P_2 = o$$

Nu is bij den cirkel R = het vierkant van een geheel getal g.

Stellen wij dus hier

$$(21)\quad R_2 = g^2 + \omega\,h^2 + \beta\,h^4 + \ldots\ldots$$

Eveneens was bij den cirkel

$P = A \cos g\,\alpha + B \sin g\,\alpha$ en zou dus voor de oplossing, die max. of min. moet zijn voor $\alpha = o$, $A \cos g\alpha$ zijn.

Wij nemen dus nu

$$(22)\quad P_2 = \cos g\,\alpha + h^2 p + h^4 p_1 + h^6 p_2 + \ldots$$

In zijne hierboven aangehaalde verhandeling (p. 147) toont Mathieu aan, waarom wij slechts evene machten voor h behoeven toe te laten; wij verwijzen naar dat werk voor het bewijs daarvan.

Zij vooreerst

$$P_2 = \cos g\,\alpha + h^2\,P \text{ en } R_2 = g^2 + o\,h^2;$$

substitueeren wij deze in (20) zoo komt

$$\frac{d^2P}{d\alpha^2} + (g^2 - 2\,h^2 \cos 2\alpha + o\,h^2)\,P - (2 \cos 2\,\alpha - o) \cos g\alpha = o.$$

Nu is

$P = p + h^2\,P_1 \quad o = \omega + B\,h^2$ en als we deze invoeren

$$\frac{d^2p}{d\alpha^2} + g^2 p - 2 \cos 2\alpha \cos g\alpha - \varphi \cos g\alpha +$$

$$+\ h\left[\frac{d^2P_1}{d\alpha^2} + (g^2 - 2h^2 \cos 2\alpha + B\,h^4)\,P_1 + \right.$$

$$\left. + (-\,2 \cos 2\alpha + B\,h^2)\,p + B \cos g\alpha\right] = o.$$

Nu hebben wij natuurlijk stilzwijgend verondersteld, dat p geen h bevat; elk gedeelte van de vorige vergelijking moet dus afzonderlijk $= o$ zijn en dus

$$(23) \quad \frac{d^2p}{d\alpha^2} + g^2p = 2\cos 2\alpha \cos g\alpha + \ldots\cos g\alpha =$$

$$= \cos(g+2)\alpha - \omega \cos g\alpha + \cos(g-2)\alpha$$

$$(24) \quad o = \frac{d^2P}{d\alpha^2} + (g^2 - 2h^2 \cos 2\alpha + \mathrm{B}\,h^4)\,P_1 -$$

$$- (2\cos 2\alpha + \mathrm{B}\,h^2)\,p + \mathrm{B}\cos g\alpha.$$

De vergelijking (23) bevat in het laatste lid slechts cosinussen van de veelvouden van denzelfden boog; we kunnen dus stellen

$$(25) \quad p = a\cos(g+2)\alpha + b\cos g\alpha + c\cos(g-2)\alpha.$$

De substitutie in (23) geeft dan

$$(26) \quad a = -\frac{1}{4(g+1)} \qquad c = \frac{1}{4(g-1)} \qquad \omega = o$$

b is willekeurig; nemen wij $b = o$.

In (24) is alweêr

$$P_1 = p_1 + h^2 P_2 \qquad\qquad \mathrm{B} = \beta + \mathrm{C}\,h^2.$$

Om dezelfde reden als boven zal de substitutie hiervan twee vergelijkingen geven; deze zijn:

$$(27) \quad \frac{d^2p_1}{d\alpha^2} + g^2 p_1 + 2\cos 2\alpha \,.\, p + \beta \cos g\alpha = o$$

$$(28) \quad o = \frac{d^2P_2}{d\alpha^2} + (g^2 - 2h^2\cos 2\alpha + \beta\,h^4 + \mathrm{C}\,h^6)\,P_2$$

$$+ (-2\cos 2\alpha + \beta\,h^2 + \mathrm{C}\,h^4)\,p_1 + (\beta + \mathrm{C}h^2)\,p + \mathrm{C}\cos g\alpha.$$

De oplossing van (27), na invoering der waarde (25) van p, geeft

$$(29) \quad p_1 = d\cos(g+4)\alpha + e\cos(g+2)\alpha + f\cos g\alpha +$$

$$+ h\cos(g-2)\alpha + k\cos(g-4)\alpha$$

waarin

$$30\left\{\begin{array}{l} d = \dfrac{1}{32(g+1)(g+2)}\,,\ e = o\,,\ h = o\,,\ k = \dfrac{1}{32(g-1)(g-2)} \\ \beta = \dfrac{1}{2\,(g^2-1)} \qquad f = \text{willekeurige } grh,\ \text{zij} = o. \end{array}\right.$$

Op deze wijze voortgaande verkrijgen wij ten slotte

$$(31)\quad R_2 = g^2 + \frac{1}{2\,(g^2-1)}\,h^4 + \frac{5g^2+7}{32\,(g^2-1)^3\,(g^2-4)}\,h^8 + \ldots$$

terwijl

P_2 gevonden wordt door substitutie in (22) van (25), (29) . .

De ontwikkeling van P_1 geschiedt geheel en al op dezelfde wijze; slechts stellen wij hierbij natuurlijk

$$(32)\quad P_1 = \sin g\alpha + h^2 q + h^4 q_1 + \ldots\ldots$$

Wij vinden:

$$q = a \sin(g+2)\,\alpha + c \sin(g-2)\,\alpha$$
$$q_1 = d \sin(g+4)\,\alpha + k \sin(g-4)\,\alpha$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

a, c, d, k . . . . hebben dezelfde waarden als in het vorige geval (vgl. (26) en (30))

De ontwikkeling van R_1 is identisch met (31); toch zijn R_1 en R_2 niet gelijk, zooals wij zullen aantoonen. Men ziet n.l. dat de voorgaande oplossing van P en R niet tot in het oneindig kan worden voortgezet (behalve in het bijzondere geval dat $g = o$ is) immers: uit de formules (22) en (32) ziet men dat P_2 en P_1 bestaan uit een reeks van termen welke de grootheden $p, p' \ldots\ldots$; $q, q' \ldots\ldots$ bevatten.

Nu komt

in p en q voor de const. $c = \dfrac{1}{4\,(g-1)}$ en dus zal voor $g = 1$ $p = \infty$ en $q = \infty$

in p' en q' voor de const. $k = \frac{c}{4(g-2)}$ en dus zal voor

$$g = 2 \quad p' = \infty \text{ en } q' = \infty$$

. . . .

Hetzelfde is het geval in de ontwikkeling van R. De hierboven ontwikkelde vorm van P_1 en P_2, R_1 en R_2 mag dus slechts worden voortgezet tot en met den g^{en} term. Van dien term af evenwel laat de ontwikkeling zich een weinig wijzigen. Wij merken daartoe op dat zich, op het oogenblik dat de vorige afleiding ongeldig wordt, in de vergelijkingen (23) en (27) of hare analoga, termen voordoen, die met elkander kunnen worden vereenigd. Hierdoor neemt de oplossing van die vergelijkingen eenen anderen vorm aan. — Nemen wij als voorbeeld $g = 2$.

Wij mogen van P_2, volgens de vorige methode, twee termen ontwikkelen.

$$(27') \quad P_2 = \cos g\alpha + \tfrac{1}{4} k^2 (1 - \tfrac{1}{3} \cos 4\alpha)$$

De verdere termen zouden oneindig worden; gaan wij evenwel terug naar de vergelijking (27) zoo wordt die voor het gekozen geval

$$\frac{d^2 p_1}{d\alpha^2} + 4\,p_1 - 2 \cos 2\alpha\,(a \cos 4\alpha + c) + \beta \cos 2\alpha = o$$

waarin slechts twee verschillende bogen voorkomen. De integraal zal dus eenvoudig van den vorm zijn

$$p_1 = d \cos 6\alpha + f \cos 2\alpha$$

welke in (27') gebracht geeft

$$d = -\frac{a}{32}, \; \beta = a + 2c, \quad f \text{ willekeurig, zij} = o.$$

Op deze wijze zetten wij de ontwikkeling van P_2 en gelijktijdig daarmede die van R_2 voort. — Bij eene dergelijke behandeling van P_1 en R_1 zal terstond blijken dat daardoor sommige termen van R_1 in teeken met die van R_2 verschillen, zoodat ook de geheele waarde van die twee grootheden niet gelijk kan zijn, zooals wij reeds opmerkten.

§ 4. Bepaling van Q en vorm der waarde van *w*.

De differentiaal-vergelijking (18) van Q gaat in die van P (17) over, door α in $\beta\sqrt{-1}$ te veranderen. Bij gevolg zal ook de waarde van Q uit die van P volgen door daarin α te vervangen door $\beta\sqrt{-1}$.

Nu is

$$P_1 = \sin g\,\alpha + h^2\,[a \sin (g+2)\,\alpha + b\,(g-2)\,\alpha] + \ldots\ldots$$

Schrijven wij voor α, $\beta\sqrt{-1}$ en deelen wij door den factor $2\sqrt{-1}$, of liever, denken wij dien factor opgaande in de willekeurige constante, waarmede men de particuliere oplossing te vermenigvuldigen heeft, zoo komt:

$$(a)\,Q_1 = e^{\beta g} - e^{-\beta g} + h^2\left[a\left(e^{\beta(g+2)} - e^{-\beta(g+2)}\right) + b\left(e^{\beta(g-2)} - e^{-\beta(g-2)}\right)\right] + \ldots$$

evenzoo uit P_2

$$(b)\,Q_2 = e^{\beta g} + e^{-\beta g} + h^2\left[a\left(e^{\beta(g+2)} + e^{-\beta(g+2)}\right) + b\left(e^{\beta(g-2)} + e^{-\beta(g-2)}\right)\right] + \ldots$$

zoodat de algemeene integraal is

$$Q = m\,Q_1 + n\,Q_2.$$

Wij willen aantoonen dat in de oplossing $w = u \sin 2\,\lambda\,ct$, waarin algemeen $u = P\,Q$, voor u moet worden genomen, hetzij $P_1\,Q_1$ hetzij $P_2\,Q_2$ en niet de algemeene vormen $P_1\,Q$ of $P_2\,Q$, aangezien deze discontinuïteit zouden geven in de waarden van u, $\frac{du}{d\alpha}$, $\frac{du}{d\beta}$ en dus ook in w,

$\frac{dw}{d\alpha}$, $\frac{dw}{d\beta}$, op de lijn die de brandpunten vereenigt, hetwelk ongerijmd is. Om te bewijzen dat dit het geval zou zijn, beschouwen wij twee punten m en m' symmetrisch t. o. v. de verbindingslijn der brandpunten en oneindig weinig daarvan (dus ook van elkander) verwijderd. Drukken wij uit dat de waarden van u, $\frac{du}{d\alpha}$, $\frac{du}{d\beta}$ voor die twee punten oneindig weinig moeten verschillen.

Algemeen is (vgl. form. (3) bladz. 97)

$$e^{\beta} = \frac{\varrho + \varrho'}{c}$$

Het is duidelijk dat de ellipsen van den parameter β, voor die punten, welke hoe langer zoo dichter bij de lijn liggen, welke de brandpunten vereenigt, tot die lijn naderen; het limietgeval $\beta = o$ stelt die lijn zelve voor; immers: ϱ nadert tot de limiet c en ϱ' tot o en dus volgens bovenstaande waarde van e^{β}

$$\lim. e^{\beta} = 1 \quad \therefore \lim. \beta = o.$$

Zooals wij zagen (vgl. noot van bladz. 97) stelt α voor den hoek, dien de assymptoot van de hyperbel, gaande door $(\alpha\ \beta)$ maakt met de groote as. Als dus de coördinaten van

m zijn α en o zoo zijn die

van m' $-\alpha$ en o

en de continuiteits-voorwaarden laten zich zoo uitdrukken:

$$(c)\ u\ (\alpha, o) = u\ (-\alpha, o);\ \frac{d}{d\alpha} u\ (\alpha, o) =$$

$$= -\frac{d}{d\alpha} u\ (-\alpha, o);\ \frac{d}{d\beta} u(\alpha, o) = -\frac{d}{d\beta} (-\ \ , o)$$

waarvan de eerste en tweede uit elkander volgen.

Beproeven wij nu eerst of $u = P_1 Q = P_1 (m\, Q_1 + n\, Q_2)$ aan deze voorwaarden voldoet. Substitueeren wij deze waarde in de eerste vergelijking (c) zoo komt (omdat, als wij α in $-\alpha$ veranderen, P_1, waarin alleen sinussen voorkomen, in $-P_1$ overgaat, terwijl P_2 onveranderd blijft)

$$P_1 [m\, (Q_1)_o + n\, (Q_2)_o] = - P_1 [m\, (Q_1)_o + n\, (Q_2)_o]$$

maar uit (a) is duidelijk dat $Q_0 = o$ en dus

$$n\, P_1 (Q_2)_o = - n\, P_1 (Q_2)_o$$

waaraan niet kan worden voldaan dan door $n = o$.

Zij in de tweede plaats $u = P_2 Q = P_2 (mQ_1 + nQ_2)$.

De laatste vergelijking (c) geeft

$$P_2 \left[m \left(\frac{dQ_1}{d\beta} \right)_o + n \left(\frac{dQ_2}{d\beta} \right)_o \right] = - P_2 \left[m \left(\frac{dQ_1}{d\beta} \right)_o + n \left(\frac{dQ_2}{d\beta} \right)_o \right]$$

maar $\left(\frac{dQ_2}{d\beta} \right)_o = o$ vgl. (6) en dus

$$P_2\, m \left(\frac{dQ_1}{d\beta} \right)_o = - P_2\, m \left(\frac{dQ_1}{d\beta} \right)_o$$

en dus

$$m = o \quad \text{d. w. z.}$$

zal $P_1 Q$ eene continuë waarde aan u geven, zoo moet Q zich reduceeren tot Q_1; zal $P_2 Q$ in $\frac{du}{d\beta}$ geen discontinuïteit geven, zoo moet Q worden Q_2. Hetgeen te bewijzen was.

Er zijn dus twee oplossingen of m. a. w. twee enkelvoudige trillingstoestanden mogelijk, gegeven door de formules

$$(33) \quad w = AP_1 Q_1 \ \sin\, 2\lambda ct$$

$$(34) \quad w = BP_2 Q_2 \ \sin\, 2\lambda' ct.$$

Zullen nu deze oplossingen ook voldoen aan de conditie $w = o$ voor $\beta = B$ (vgl. (7)) zoo moet

$$(Q_1)_B = o \quad (Q_2)_B = o.$$

Deze vergelijkingen stellen het verband daar tusschen h en g. Zij hebben oneindig veel wortels, zoodat bij elke waarde van g weder oneindig veel waarden van h of λc behooren.

Noemen wij de wortels van af de kleinste respectievelijk

$$\lambda_{1.g}, \lambda_{2.g} \ldots\ldots \lambda_{s.g} \ldots\ldots$$
$$\lambda'_{1.g}, \lambda'_{2.g} \ldots\ldots \lambda'_{s.g} \ldots\ldots$$

zoo nemen de particuliere oplossingen dezen vorm aan

$$(35) \quad w_{g.s} = A_{g.s}\, P_{1.g.s}\, Q_{1.g.s} \sin 2\lambda_{g.s}\, ct$$
$$(36) \quad w_{g.s} = B_{g.s}\, P_{2.g.s}\, Q_{2.g.s} \sin 2\lambda'_{g.s}\, ct.$$

§ 5. Algemeene oplossing.

Nemen wij nu de som van alle mogelijke enkelvoudige trillingstoestanden, zoo blijven daarin de willekeurige constanten $A_{g.s}$, $B_{g.s}$, welke wij zoodanig moeten trachten te bepalen dat de superpositie der enkelvoudige trillingen de gewenschte beginwaarde aan de snelheden geeft d. w. z. $\left(\frac{dw}{dt}\right)_o = \varphi(\alpha, \beta)$. Deze voorwaarde gebracht in de algemeene oplossing

$$(37) \quad w = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{g=o}^{\infty} A_{g.s}\, P_{1gs}\, Q_{1gs} \sin 2\lambda_{gs} ct +$$
$$+ \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{g=o}^{\infty} B_{g.s}\, P_{2g.s}\, Q_{2gs} \sin 2\lambda'_{gs} ct.$$

levert de vergelijking waaruit de constanten moeten worden gevonden

$$(38) \quad \varphi(\alpha, \beta) = 2c \sum\sum \lambda_{gs}\, A_{gs}\, P_{1gs}\, Q_{1gs} +$$
$$+ 2c \sum\sum \lambda'_{gs}\, B_{gs}\, P_{2gs}\, Q_{2gs}.$$

Om tot de oplossing hiervan te geraken merken wij op dat P_1 en Q_1 onevene en P_2 en Q_2 evene functies van α en β zijn, zoodat

$$(K) \left\{ \begin{array}{l} P_1 = A\alpha + B\alpha^3 + C\alpha^5 + \ldots\ldots \\ P_2 = G + H\alpha^2 + K\alpha^4 + \ldots\ldots \\ Q_1 = M\beta + N\beta^3 + P\beta^5 + \ldots\ldots \\ Q_2 = R + S\beta^2 + T\beta^4 + \ldots\ldots \end{array} \right.$$

Dit blijkt terstond uit de reeds gevondene vormen van P_i, Q_i.

Immers: P_1 bevat slechts sinussen welke zich slechts in reeksen volgens onevene machten van de veranderlijke laten ontwikkelen. P_2 bevat slechts cosinussen en is daarom eene evene functie. — Q_1 bestaat uit eene reeks termen als: $e^p - e^{-p}$, maar

$e^p - e^{-p} = 2p + 2\dfrac{p^3}{2.3} + \ldots$ en is dus oneven, terwijl

Q_2 even is aangezien

$$e^p + e^{-p} = 2 + 2\frac{p^2}{2} + \ldots.$$

Hieruit blijkt dat P_1 Q_1 den vorm

(a) $a\,\alpha\beta + b\,\alpha^3\beta + c\,\alpha\beta^3 + \ldots.$ heeft welke oneven is *t. o. v.* α en β, ieder afzonderlijk maar even *t. o. v.* beide te zamen.

Evenzoo is de uitdrukking door P_2 Q_2

(b) $k + l\alpha^2 + m\beta^2 + n\alpha^2\beta^2 + \ldots.$

even *t. o.* van α en β.

Om deze reden moet ook $\varphi(\alpha, \beta)$ zoodanig gegeven zijn dat zij zich splitsen laat in twee functies

$f(\alpha, \beta)$ en $F(\alpha, \beta)$

die respectievelijk vormen hebben als (a) en (b).

Daardoor laat dan de vergelijking (38) zich splitsen in deze twee

$$(39)\ f(\alpha,\beta)=2c\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{g=o}^{\infty}\lambda_{gs}\,A_{gs}\,P_{1gs}\,Q_{1gs}$$

$$(40)\ F(\alpha,\beta)=2c\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{g=o}^{\infty}\lambda'_{gs}\,B_{g.s}\,P_{2gs}\,Q_{2gs}.$$

Voor de afzondering der constanten gebruiken wij de gelijkheid

$$(41)\ \int_o^B\int_o^\pi\{E(2\beta)-\cos 2\alpha\}\,P\,P'\,Q\,Q'\,d\beta\,d\alpha=o,$$

waarin wij door P en P′, Q en Q′ twee verschillende waarden van P of Q van *dezelfde soort* aanduiden. Deze gelijkheid laat zich gemakkelijk bewijzen; want de grootheden P, P′, Q, Q′ voldoen aan de vergelijkingen.

$$\frac{d^2Q}{d\beta^2}-[R-2\lambda^2c^2E(2\beta)]\,Q=o$$

$$\frac{d^2Q'}{d\beta^2}-[R'-2\lambda'^2c^2E(2\beta)]\,Q'=o$$

$$\frac{d^2P}{d\alpha^2}-[R-2\lambda^2c^2\cos 2\alpha]\,P=o$$

$$\frac{d^2P'}{d\alpha^2}-[R'-2\lambda'^2c^2\cos 2\alpha]\,P'=o.$$

Trekken wij Q maal de tweede vergelijking af, van Q′ maal de eerste en integreeren wij over β van o tot B zoo komt, partiëel integreerende

$$(c)\quad o=\left(Q'\frac{dQ}{d\beta}-Q\frac{dQ'}{d\beta}\right)_o^B+$$

$$+2(\lambda^2-\lambda'^2)c^2\int_o^B E(2\beta)\,QQ'\,d\beta-(R-R')\int_o^B QQ'\,d\beta$$

Op dezelfde manier geven de derde en vierde vergelijking

$$(d)\quad o=\left(P'\frac{dP}{d\alpha}-P\frac{dP'}{d\alpha}\right)_o^\pi-$$

$$-2(\lambda^2-\lambda'^2)c^2\int_o^\pi PP'\cos 2\alpha\,d\alpha+(R-R')\int_o^\pi PP'\,d\alpha.$$

In beide deze vormen is de eerste term $= o$, want van (c) verdwijnt de eerste term, voor de bovenste grens, omdat Q' en Q nul zijn aan den omtrek; voor de onderste, omdat, als Q en Q' beide van de soort Q_1 zijn, zij zelven $= o$ worden, en als Q en Q' beide van de soort Q_2 zijn, hare afgeleiden $= o$ zijn. (Vgl. de vormen van Q_1 en Q_2 in de form. (K) p. 110).

De eerste term van (d) is $= o$ omdat P en P' (welke, zooals wij aannamen van dezelfde soort zijn) aan de beide grenzen dezelfde waarde hebben. Bij gevolg bestaan deze twee vergelijkingen:

$$(e)\quad (R-R')\int_o^B QQ'\,d_\beta = 2\,(\lambda^2-\lambda'^2)\,c^2\int_o^B QQ'\,E\,(2_\beta)\,d_\beta$$

$$(f)\quad 2\,(\lambda^2-\lambda'^2)\,c^2\int_o^\pi PP'\cos 2\alpha\,d\alpha = (R-R')\int_o^\pi PP'\,d\alpha$$

waarvan het product geeft

$$(g)\quad (R-R')(\lambda^2-\lambda'^2)\int_o^B\int_o^\pi (E(2_\beta)-\cos 2_\alpha)PP'QQ'\,d_\beta\,d_\alpha = o$$

zoodat

$$(h)\quad \int_o^B\int_o^\pi (E\,(2\beta)-\cos 2_\alpha)\,PP'\,QQ'\,d_\beta\,d_\alpha = o \text{ is.}$$

Deze gaat nog door als $\lambda = \lambda'$, want, ofschoon dan (g) identisch wordt, geven (e) en (f) terstond

$$\int_o^B QQ'\,d\beta = o \qquad \int_o^\pi PP'\,d\alpha = o$$

waardoor de gelijkheid (h) wordt bewezen.

Eveneens gaat zij door voor $R = R'$.

Maar is gelijktijdig $R = R'$ en $\lambda' = \lambda$ en is dus $P' = P$ en $Q = Q'$ zoo geldt zij niet meer.

Men ziet gemakkelijk in hoe nu deze vergelijking dienen kan om de constanten af te zonderen. Immers, vermenigvuldigen wij (39) en (40) respectievelijk met

$$P_{1gs}\,Q_{1gs}\,(E\,(2\beta)-\cos 2\alpha)\,d\alpha\,d\beta \qquad \text{en}$$
$$P_{2gs}\,Q_{2gs}\,(E\,(2\beta)-\cos 2\alpha)\,d\alpha\,d\beta$$

8

en integreeren wij dan over α van o tot π en over β van o tot B, zoo zullen alle termen wegvallen, behalve die met de constante A_{gs} of B_{gs}, welke daardoor is bepaald en hiermede is dus de algemeene oplossing voltooid.

§ 6. Enkelvoudige toonen. Knooplijnen.

Wij vonden dat er twee soorten van enkelvoudige trillingstoestanden mogelijk zijn, gegeven door de formules

$$w = A\, P_1\, Q_1 \sin 2\lambda\, ct \qquad\qquad w = B\, P_2\, Q_2 \sin 2\lambda'\, ct.$$

De trillingsduur van deze toonen is respectievelijk

$$T = \frac{\pi}{\lambda c} \quad ; \quad T' = \frac{\pi}{\lambda' c}$$

waarin λ een wortel is van $(Q_1)_B = o$ en λ' van $(Q_2)_B = o$.

Het aantal trillingen per tijdseenheid is dus

$$N\,(g.s) = \frac{1}{T} = \frac{c}{\pi}\,\lambda_{g.s} \quad ; \quad N'\,(g.s) = \frac{c}{\pi}\,\lambda'_{g.s}$$

d. i. de hoogte van den toon wordt gemeten door de waarde van λ. De knooplijnen zijn bevat in

(42) $P_1 = o$; $Q_1 = o$ voor de eerste soort,

(43) $P_2 = o$; $Q_2 = o$ voor de tweede soort.

$P_1 = o$ en $P_2 = o$ zijn de vergelijkingen van hyperbels confocaal met het vlies. Aangezien $\alpha =$ const voorstelt de twee halve takken van eene hyperbel, die denzelfden assymptoot hebben, correspondeert met elken wortel der vergelijking $P_1 = o$ of $P_2 = o$ zulk eene halve hyperbel. Het aantal wortels van deze vergelijkingen tusschen o en π is $= g$.

Want: In de eerste plaats kan noch $P_1 = o$ noch $P_2 = o$ twee gelijke wortels hebben; veronderstelde men toch dat $P = o$ twee gelijke wortels a had, zoo zou voor die waarde, niet alleen $P = o$ zijn, maar ook $\frac{dP}{d\alpha} = o$ en dus volgens de vergelijking

$$\frac{d^2P}{d\alpha^2} + (R - 2h^2 \cos 2\alpha) P = o$$

en hare achtereenvolgende afgeleiden, ook alle differentiaal-quotienten $\frac{d^2P}{d\alpha^2}$, $\frac{d^3P}{d\alpha^3}$, $\ldots = o$; waaruit dan volgen zou

$$P = P_a + (\alpha - a)\left(\frac{dP}{d\alpha}\right)_a + \ldots\ldots = o$$

d. w. z. P zou $= o$ zijn wat ook h is, hetgeen ongerijmd.

Zij nu c een wortel van

$$P_1 = \sin g\alpha + h^2 [a \sin (g+2)\alpha + b \sin (g-2)\alpha] + \ldots = o.$$

Als wij h continu laten veranderen in P_2, zoo zal daardoor ook c veranderen, maar zij kan niet $= o$ worden, omdat dan $P_1 = o$ twee gelijke wortels hebben zou. Ook kan zij niet $= \pi$ worden, om diezelfde reden. Steeds moet zij dus binnen die grenzen blijven. Bijgevolg blijft het aantal wortels tusschen o en π van $P_1 = o$ hetzelfde, als wij de waarde van h varieeren.

Zij nu d een wortel van

$$P_2 = \cos g\alpha + h^2 [a \cos (g+2)\alpha + b \cos (g-2)\alpha] + \ldots = o,$$

zoo kan ook d, door h zonder sprongen te doen veranderen, de grenzen o en π niet overschrijden; want voor die waarden is $\frac{dP_2}{d\alpha} = o$; werd voor diezelfde waarden bovendien nog $P_2 = o$, zoo zou weder, evenals boven, bewezen worden dat $P_2 = o$ zou moeten zijn voor *elke* h.

Bijgevolg is ook hier het aantal wortels tusschen o en π hetzelfde, welke ook de waarde is van h.

Voor $h = o$ nu worden

$$P_1 = \sin g\alpha = o \qquad P_2 = \cos g\alpha = o$$

welke klaarblijkelijk g wortels hebben tusschen o en π (de wortels $\alpha = o$ zelven mederekenende).

De vergelijkingen $Q_1 = o$, $Q_2 = o$ geven de elliptische knooplijnen, waarvan het aantal gelijk is aan het aantal waarden van β tusschen de grenzen o en B, die Q_1 of Q_2 nul maken. Dit aantal is bij den toon, correspondeerende met λ_s, gelijk aan $s-1$. Voor het bewijs hiervan verwijzen wij naar Mathieu. Wij merken alleen op dat voor $c = o$ (d. i. voor het cirkelvormige vlies) ditzelfde resultaat is gevonden.

Algemeen heeft dus de toon N (g,s) g hyperbolische knooplijnen, als wij de twee halve takken, die denzelfden assymtoot hebben en de groote en kleine as ieder voor éène hyperbel in rekening brengen; en $s-1$ elliptische knooplijnen.

De numerische berekening der afmetingen van die knooplijnen eischt de oplossing der transcendente vergelijkingen (42) en (43). Wij zullen ons daarmede niet bezighouden, aangezien toch, voor zoover ons bekend is, nog geene proeven zijn bekend gemaakt, genomen op het elliptische vlies waarmede de uitkomsten der theorie zouden kunnen worden vergeleken.

Overigens verwijzen wij, voor meer uitvoerige theoretische ontwikkelingen, naar de reeds aangehaalde werken van Mathieu.

HOOFDSTUK VI.

VERGELIJKING DER UITKOMSTEN VAN THEORIE EN WAARNEMING.

§ 1. Voorloopige opmerkingen.

In de inleiding wezen wij op het belang van de studie der vliezen voor de theorie van de Elasticiteit. In die theorie zijn kleine grootheden verwaarloosd, die mogelijker wijze hier en daar van merkbaren invloed kunnen zijn. Bij de toepassingen op verschillende gevallen neemt men dikwijls zijne toevlucht tot hypothesen, welke wel de berekeningen zeer vereenvoudigen en zonder welke die rekeningen meestal onuitvoerbaar zouden zijn, maar waaraan de gevallen, welke werkelijk in de natuur voorkomen, niet of slechts benaderd voldoen. Zoo is bij de behandeling der vliezen aangenomen, dat elk punt van een trillend vlies zich zal bewegen op de loodlijn opgericht op den evenwichtsstand; men heeft geabstraheerd van de uitwendige krachten en aangenomen dat de dikte van het vlies oneindig klein is. Hieraan nu wordt bij de proefneming nooit voldaan. De uitkomsten der theorie kunnen daarom niet dan benaderd zijn. De vergelijking van de waarneming met de theorie moet beslissen of die benadering voldoende is en zoo niet, hoe groot die afwijkingen zijn en wij hebben dan te onderzoeken voor hoever die aan elk van de bronnen van dwaling moeten worden toegeschreven.

Maar behalve deze onvermijdelijke fouten, zijn er andere, die in de praktijk zeer moeilijk geheel zijn te elimineeren. Hierbij komen in de eerste plaats in aanmerking de fouten, ontstaan uit de ongelijkmatige spanning. Eene tamelijke gelijkmatige spanning is slechts met de uiterste zorg en meestal eerst na vele vergeefsche pogingen te bereiken. Daarna wijzen wij op de niet volmaakte vastheid van de randen en de nooit geheel zekere homogeniteit van het vlies. — Deze bezwaren zijn oorzaak geweest dat verschillende proefnemers, die niet allen met evenveel zorg schijnen te hebben geëxperimenteerd, tot zoo uiteenloopende uitkomsten zijn geraakt.

Eer wij evenwel de waarnemingen dier proefnemers behandelen, zullen wij, om de vergelijking gemakkelijk te maken, een overzicht geven van die resultaten der theorie, welke het gemakkelijkst door de proeven kunnen worden nagegaan. Wegens de steeds onvolledige kennis van de spanning van het vlies, die altijd aan kleine veranderingen onderhevig is, ten gevolge van de onstandvastige temperatuur en den veranderlijken hygrometrischen toestand van de lucht, houdt men zich niet bezig met het volstrekte getal trillingen van het vlies, maar men vergenoegt zich, de verschillende toonen van het vlies onderling te vergelijken. Wij zullen dan ook slechts die *verhoudingen* der toonen laten volgen. Bovendien geven wij slechts de resultaten van de berekening voor het vierkante en het cirkelvormige vlies, omdat, voor zoover ons bekend is, nog geene proeven op driehoekige en elliptische vliezen zijn genomen, terwijl ook het rechthoekige vlies slechts zeer terloops door eenigen is behandeld.

§ 2. Overzicht der theoretische uitkomsten voor het vierkante vlies.

1^e. De mogelijke toonen van het vierkante vlies verhouden zich als de vierkants wortels uit de getallen

2, 5, 8, 10, 13, 17, 18, 20, 25, 26, 29, 32, ...

of bij benadering als de getallen

1; 1.58; 2; 2.24; 2.55; 2.92; 3; 3.16; 3.54; 3.61; 3.81; 4; .....

2^e. Alle toonen N (i, i) worden vergezeld door één onveranderlijk stel knooplijnen, die het vlies in i^2 gelijke vierkanten verdeelen.

3^e. Met elken anderen toon N $\binom{i}{i'}$ correspondeeren oneindig veel verschillende stellen knooplijnen, waarvan er één of meer uit rechte lijnen bestaat. Deze verschillende stellen, behoorende bij éénen enkelen toon, te zamen, noemen wij het knooplijnenstelsel van dien toon en wij nemen als type van zulk een stelsel, het stel dat uit lijnen evenwijdig aan de zijden van het vlies bestaat. Gebruiken wij nu eene notatie analoog met die voor de toonen. Laat $\binom{a}{b}$ algemeen voorstellen, a lijnen evenwijdig met de eene en b lijnen evenwijdig met de andere zijde, zoo zal dit symbool alle stellen vertegenwoordigen, die den toon N $\binom{a+1}{b+1}$ kunnen vergezellen. (a, a) zal op dezelfde wijze voorstellen het eenig mogelijk stel knooplijnen van den toon N $(a+1, a+1)$

4[e]. Wij kunnen nu een gemakkelijk overzicht geven van alle toonen en knooplijnsystemen op deze wijze:

Toonshoogte	1.—	1.58	2.—	2.24	2.55	2.92	3.—	3.81	4.—	
Knoopl.	(0.0)	$\binom{1}{0}$	(1.1)	$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{3}{0}$	(2.2)	$\binom{4}{1}$	(3.3)	enz.

§ 3. Resultaten der theorie voor het cirkelvormige vlies.

1[e]. Elke toon heeft slechts één stel knooplijnen bestaande uit cirkels of middellijnen of beide gelijktijdig 1). Zulk een stel duiden wij aan door de notatie van Bourget C_a M_b d. w. z. a cirkels en b middellijnen.

2[e]. De onderlinge afstand der cirkelvormige knooplijnen is bijna gelijk. Bij die toonen waar geen middellijnen aanwezig zijn is de straal van den binnensten cirkel kleiner dan die afstand; de onderlinge afstand der meer naar den rand gelegene cirkels is een weinig grooter dan die van de meer binnenwaarts gelegene en het middelpunt is geen knooppunt. Bij de overige toonen is dit alles omgekeerd.

3[e]. De verhouding der toonen, die het cirkelvormige

---

1) Prof. Bourget merkt op dat, ofschoon dit »mathematisch gesproken" het geval moet zijn, het evenwel reeds vooraf te zien is dat dit in de praktijk niet steeds het geval zijn zal; want, hoewel in form. (17) bldz. 80 elke term een verschillende toon voorstelt, komen er vele toonen voor, die zoo weinig verschillen dat zij physisch als denzelfden moeten worden beschouwd, aangezien men bij proefneming bevindt, dat het vlies ook trilt voor toonen, die zeer nabij de toonen liggen voor welke het vlies het duidelijkst aanspreekt. Daardoor worden dan ook somtijds meer ingewikkelde figuren voortgebracht, maar zij missen bijna altijd de scherpte der andere figuren.

vlies geven kan, met de afmetingen der daarbij behoorende knooplijnen worden gegeven in het volgende overzicht. De hier gegevene getalwaarden zijn genomen uit de reeds vroeger aangehaalde verhandeling van prof. Bourget.

Verhouding van het aantal trillingen tot dat van den grondtoon.	KNOOPLIJNEN.	Stralen der knoopcirkels, als de straal van het vlies = 1 is.
1.—	C_0 M_0	
1.549	C_0 M_1	
2.136	C_0 M_2	
2.296	C_1 M_0	$r = 0.436$
2.653	C_0 M_3	
2.918	C_1 M_1	$r = 0.546$
3.156	C_0 M_4	
3.501	C_1 M_2	$r = 0.610$
3.600	C_2 M_0	$r_1 = 0.278$ $r_2 = 0.638$
3.652	C_0 M_5	
4.060	C_1 M_3	$r = 0.654$
. . . . .	. . . . .	. . . .

Met deze resultaten der theorie hebben wij nu de betrekkelijk weinige proeven te vergelijken, die op vliezen genomen zijn. Poisson in zijne kleine verhandeling 1) over de elastische lichamen, klaagt over het volslagen gemis aan proeven die hem zouden in staat stellen de uitkomsten door hem voor het cirkelvormige vlies verkregen, aan de waarneming te toetsen. Ook schijnt hij die niet gevonden te hebben voor het rechthoekige vlies, althans hij maakt daarvan geene melding ofschoon hij niet verzuimt bij de beschouwing van andere lichamen, door

1) Annales de Chimie et de Physique t. 37 p. 352.

hem behandeld, de proeven aan te halen, die dienen kunnen om zijne theorie te bevestigen. Dit neemt niet weg, dat toch reeds een paar jaar vroeger, proeven waren bekend gemaakt, genomen op vierkante en eenige weinige ook op cirkelvormige vliezen.

§ 4. Proeven van Savart.

Deze proeven zijn van den bekenden natuurkundige Savart 1). Zij hadden hoofdzakelijk ten doel, zijne theorie van het gehoor te bevestigen, welke aanneemt, dat de vliezen resonneeren kunnen voor elken toon.

Van zijne wijze van proefneming deelt hij slechts mede, dat het vlies in beweging wordt gebracht, door het te houden boven eene geluidgevende orgelpijp, welke verlengd kan worden, zoodat de toon daarvan langzaam kan worden veranderd. Van de wijze van spanning, de zelfstandigheid der vliezen enz. maakt hij geene melding, wat daarom te betreuren is, omdat het daardoor onmogelijk is, zijne proeven, die tot zoo vreemdsoortige uitkomsten leidden, te herhalen. Zijne resultaten zijn:

1e. Een vlies kan elk willekeurig aantal trillingen in de seconde volbrengen.

2e. Eene verdeeling van het vlies door klankfiguren, kan men *onmerkbaar* in elke willekeurige andere doen overgaan door langzame verandering van den toon der orgelpijp, die het vlies in trilling brengt.

Men ziet hoe geheel in strijd dit is met de theorie, welke slechts éene bepaalde reeks van toonen als mogelijk geeft en volgens welke de verschillende stellen knoop-

1) Annales de Chim. et de Phys. t. 32.

lijnen, behoorende bij *éénzelfden* toon, in elkaar kunnen overgaan (door verandering van den relatieven stand van vlies en orgelpijp) maar niet het systeem van eenen toon in dat van eenen anderen. Immers, als het vlies, zooals de theorie aangeeft, slechts voor bepaalde toonen aanspreekt, zoo zal, als men van een der mogelijke toonen van het vlies, de orgelpijp tot den volgenden doet overgaan, het vlies in dat interval zonder beweging zijn. Zoodra nu de hoogte van dien volgenden toon is bereikt, zal het vlies weder in trilling geraken en het systeem knooplijnen van den vorigen toon zal *eensklaps* in dat van den nu aansprekenden worden vervormd.

Savart gaat zelfs nog verder in zijne beweringen en houdt staande, dat niet alleen vliezen, maar ook alle andere lichamen resonneeren kunnen voor elken toon. Dit nu is zoo geheel in strijd met alles wat bekend is aangaande de trillingen van snaren en andere lichamen, dat het onmogelijk is de proeven, die tot zoodanige uitkomst leiden, ook voor de vliezen, zonder nader onderzoek aan te nemen. Prof. Bourget en Prof. Bernard, hebben in hunne verhandeling (waarvan zoo aanstonds sprake zijn zal) er zich op toegelegd, de waarschijnlijke oorzaken van Savarts dwaling aan te toonen. Eerst hebben wij evenwel nog het veel vroegere werk van Prof. Marx te behandelen 1).

§ 5. Proeven van Marx.

Welk doel Prof. Marx zich voor oogen stelde bij zijne

1) Van dezen auteur zijn twee verhandelingen opgenomen in Schweigger Seidel's Journal Bd. 65, S. 148 en Bd. 66, S. 109.

proeven, blijkt niet duidelijk. Aan het einde van zijne tweede verhandeling geeft hij wel eene proeve van theorie der klankfiguren, maar deze laat niet toe de afmetingen der knooplijnen te bepalen. De werken van Poisson (1828 en 29) over dit onderwerp schijnen Marx (1832) geheel onbekend te zijn gebleven, ten minste nergens blijkt eene poging de door Poisson gevondene uitkomsten met het resultaat zijner proeven te vergelijken. Dit is zeer te betreuren, want zonder twijfel zouden zijne proeven in dat geval oneindig meer waarde hebben gehad dan waarop zij nu kunnen aanspraak maken.

De vliezen van kautschuk, welke Marx gebruikt, zijn van zijne eigene vinding; hij geeft eene uitvoerige beschrijving van de vervaardiging daarvan. Zij zijn uiterst elastisch en geven volle toonen, gelijkende op het geluid van eene klarinet. Minder zorg dan aan de bereiding der vliezen schijnt Marx aan de wijze van spanning ten koste te hebben gelegd. Hij zegt daarvan alleen dat hij het vlies brengt over de opening van een' houten, glazen of metalen cilinder, waarna het »zoo sterk mogelijk gespannen en de omslaande rand behoorlijk vastgebonden moet worden." Maar meer nog: Het vlies wordt bij de eerste proeven van Marx in beweging gebracht door er een' luchtstroom uit den blaasbalk op te richten; het uiteinde van de buis, die den wind aanvoert moet eenigszins tegen het vlies worden aangedrukt. Ook dit is eene bron van onzekerheid in de gelijkmatigheid van de spanning.

Het is des te vreemder dat Marx niet meer zijne opmerkzaamheid aan die spanning wijdt, omdat hij zelf de aanmerking maakt dat de minste verandering in het aandrukken van de windbuis tegen het vlies »waardoor eene verandering van spanning wordt te weeg gebracht" terstond eene verandering van toon en knooplijnenfiguur ten gevolge heeft. Het bewijs dat werkelijk de spanning van het vlies bij Marx doorgaands onregelmatig was, ten minste bij de eerste proeven, waar het vlies door den luchtstroom werd in beweging gebracht, is, dat alle figuren niet alleen zeer onregelmatig, maar ook geheel *asymmetrisch* waren (z. a. is op te maken uit de tweede verhandeling van Marx t. a. p. blz. 115, eene der eerste regels).

De resultaten gevonden in de eerste verhandeling van Marx zijn dan ook afwijkende van de theorie. Zij laten zich zoo samenvatten:

1e. De klankfiguren der Aeoline (zoo noemt Marx zijn werktuig) zijn allen kromme lijnen, waaronder geen cirkels.

2e. Hoogere toonen geven meer samengestelde, lagere meer eenvoudige figuren.

3e. De laagste toon heeft ééne zwak gekromde lijn, gaande door het middelpunt.

Het tweede wil ook de theorie; daarentegen kunnen volgens de theorie slechts cirkels en middellijnen voortkomen en heeft de laagste toon in het geheel geen knooplijnen. Deze toon is evenwel moeielijk op het vlies op te wekken zonder het aan te slaan, ten minste ook Bourget en Bernard konden hem niet voortbrengen bij hunne gewone wijze van proefneming (met eene orgelpijp). Het is daarom niet onwaarschijnlijk dat Marx op een na den laagsten toon voor den laagsten heeft aangezien. Deze toon nu heeft ééne middellijn als knooplijn en deze zou dan tamelijk wel overeenkomen met hetgeen Marx waarneemt.

In zijne tweede verhandeling geeft Marx eerst eene voortzetting van op dezelfde wijze in het werk gestelde proeven. Hij vindt o. a. dat bij toonen (?), die tusschen de terz en de quint van den laagsten toon liggen, twee middellijnen voorkomen, die elkander rechthoekig snijden. Meestal zijn die knooplijnen een weinig gebogen, zóó dat zij er uitzien als de twee takken van eene hyperbel. Wanneer, zooals wij aannamen, de spanning bij Marx gebrekkig was en de laagste door hem waargenomen toon, op één na de laagst mogelijke van het vlies is, zoo bevat ook deze waarneming eene (hoewel zeer gebrekkige) bevestiging van de theorie. Immers de theorie geeft (vgl. tabel blz. 121) voor de toonen wier knooplijnen zijn C_0 M_1 en C_0 M_2 een interval liggende tusschen de terz en de quint. Dat de middellijnen als hyperbels gebogen zijn wijst op twee ongelijke assen van electriciteit waardoor de knooplijnen tot die van het eliptische vlies naderen.

Overigens vindt Marx:

1e. Dat de intervallen tusschen de mogelijke toonen *zoowel bij de lagere* als bij de hoogere zeer kleïn kunnen zijn.

2e. Dat alle hoogere toonen zeer onregelmatige knooplijnen hebben.

3e. Dat bij één' enkelen toon meer dan een stel knooplijnen kan voorkomen.

Vooral de eerste en laatste uitkomst wijken ver af van hetgeen de theorie leert. In hoeverre bij het laatste resultaat de reeds aangehaalde opmerking van Bourget (zie noot bldz. 120) van toepassing is, is niet te beslissen, omdat Marx niet zegt of deze regel ook geldt voor lagere toonen, wier intervallen door de theorie als grooter zijnde, worden gegeven en waar dus natuurlijk die opmerking geene verklaring zou kunnen geven.

Gaan wij nu over tot de proeven, die in deze verhandeling zijn gegeven en welke op eene andere wijze genomen zijn. Bij deze proeven wordt de beweging van eene longitudinaal trillende staaf of van de lucht eener orgelpijp aan het vlies medegedeeld. Op deze wijze verkrijgt Marx niets dan ringen (welke ook door andere proefnemers het gemakkelijkst werden verkregen). De afmetingen dier ringen zijn onderworpen aan de regels:

1e. De onderlinge afstanden der ringen zijn even groot. Dit is nagenoeg overeenkomstig met de theorie (vgl. 2e bldz. 120). Vooral bij hoogere toonen z. a. die zijn, welke Marx beschouwt. Uit de uitvoerige tabellen welke Bourget geeft, blijkt, dat dit b. v. voor den toon, wiens knooplijnenstelsel is C_8 M_0 nog geen duizendste van den straal van het vlies verschilt.

2e. De onderlinge afstand der knoopcirkels is het grootst bij de laagste toonen van het vlies.

3e. De toon die het octaaf is van eenen anderen, geeft het dubbele aantal ringen. Ook dit is benaderd waar en wel des te meer naarmate die toonen hooger zijn. Nemen wij b. v. het geval dat Marx heeft, n. l. twee toonen, die respectievelijk 12 en 24 ringen hebben. Dit zijn de toonen.

$$N\ (0.13)\ \text{en}\ N\ (0.25).$$

Wij vinden voor de wortels der transcendente vergelijking (15) blz. 84 de twee waarden

$$q_{0.13} = 40.06\ ;\ q_{0.25} = 77.76.$$

Als nu a het aantal trillingen is van den toon met den eersten wortel correspondeerende, zoo is volgens form. (23) blz. 82 dat aantal voor den tweeden toon $\frac{77.76\,.\,a}{40.06} = 1.94\,a$ welke slechts omstreeks een' kwart toon van het octaaf des eersten verschilt, en deze toon zal al aanspreken als de staaf of orgelpijp het octaaf geeft van den vorigen toon.

Deze laatste proeven zijn dus aan te merken als eene bevestiging van de theorie.

Toch wijken èn de eerste proeven van Marx èn de uitkomsten van Savart, zoozeer af van hetgeen Poisson had gevonden, dat de theorie en waarneming als in strijd met elkaâr moesten worden aangemerkt. Om dezen strijd te beslissen waren proeven noodig, genomen met de uiterste zorg, zonder vooraf opgevatte denkbeelden (waarvan men Savart mag verdenken) en welke zich als doel stelden de juistheid der theoretisch gevondene resultaten aan de waarneming te toetsen.

§ 6. Proeven van Bourget en Bernard.

Proeven voldoende aan deze voorwaarden zijn eerst korten tijd geleden gegeven door Bourget en Bernard. Wij laten een overzicht van die waarnemingen volgen.

In de eerste plaats hebben zij zich bezig gehouden met de vierkante vliezen 1). In de verhandeling daarover wordt al terstond gewezen op de onwaarschijnlijkheid der uitkomsten, door Savart verkregen. Immers, zooals wij reeds opmerkten, voor de snaren althans strijdt het door Savart beweerde, ten eenenmale met wat omtrent de trillingen daarvan bekend is. Maar ook voor vliezen: welke overgang laat zich denken van het geval waarin geen knooplijn voorhanden is tot dat waarbij er ééne voorkomt? Bovendien, wanneer men in de nabijheid van een vlies eene reeks van toonen voortbrengt zal men ter-

1) Annales de Chim. et de Phys. 3e serie 60. A°. 1860.

stond waarnemen dat slechts eenige daarvan worden versterkt. En al spreekt het vlies aan, dan nog is die toon niet altijd die, welke in zijne nabijheid is voortgebracht.

De oorzaak van Savarts dwaling ligt waarschijnlijk hierin, dat hij slechts (zooals blijkt uit de figuren, die hij geeft) de hoogere toonen beschouwd heeft, tusschen welke de intervallen zoo klein zijn, dat hij heeft kunnen meenen dat het vlies voor *alle* toonen resonneerde, te meer omdat voor toonen een weinig hooger of een weinig lager dan die, welke het vlies geven kan reeds trilling ontstaat. — Bij den overgang van één' van twee zulke nabij liggende toonen tot den anderen, hebben Bourget en Bernard steeds een verward ophoopen van het zand waargenomen. Deze onregelmatigheden heeft Savart waarschijnlijk voor overgangsvormen gehouden, hoewel zij bij nauwkeurige waarneming steeds veel minder scherp blijken te zijn als de knooplijnen, die zich bij de werkelijke toonen van het vlies vormen. Behalve deze overgangsvormen blijven nog eenige (zeer regelmatige) figuren van Savart onverklaard, maar deze zijn, niettegenstaande de auteurs van de nu behandelde proeven zich jaren lang met vierkante vliezen hebben bezig gehouden, nooit door hen waargenomen.

De zelfstandige proeven van Bourget en Bernard zijn zeer gevariëerd. Zij namen deze proeven op vliezen van verschillende grootte en van allerlei zelfstandigheid. De grootte wisselde af van 10 tot 35 centim. Gewoonlijk gebruikten zij vliezen van *papier sans fin*, dat zeer homogeen en weinig hygrometisch is; maar ook ander papier, perkament enz. werden aangewend. De randen waren van hout, steen, karton of iets anders, meestal van hout of karton. Het vlies werd in beweging gebracht door eene opene orgelpijp met fluitmondstuk, waarvan de harmonische toonen weinig intensiteit bezitten. Alle orgelpijpen die zij gebruikten waren voorzien van eene bewegelijke papieren buis, waardoor zij konden worden verlengd.

Het grootste bezwaar dat bij de proeven moet worden overwonnen is het verkrijgen eener gelijkmatige spanning. Bij de proeven van Bourget en Bernard werd het papier, dat dienen moest als vlies, nat gemaakt en, door het daarna in een boek vloeipapier te persen, op eenen willekeurigen graad van vochtigheid gebracht. Dan werd over den rand een laagje gom gebracht en werd hij tegen het vlies aangedrukt. Bij het droogen werd dan de spanning natuurlijk grooter of kleiner naarmate het vlies meer of min vochtig geweest was. Niettegenstaande deze wijze van het vlies te spannen vrij goede resultaten geeft is men toch nimmer van te voren zeker dat de elasticiteit in alle richtingen dezelfde zijn zal. Maar men kan erkennen of dit bij een vlies werkelijk het geval is. De methode waardoor dit geschiedt is gegeven door bovengenoemde natuurkundigen. Zij berust op het volgende:

Bij den toon N $\binom{2}{1}$ kunnen zich o. a. de beide stellen knooplijnen (0, 1) en (1, 0) vormen. Als er evenwel twee ongelijke assen van elasticiteit zijn, waardoor de knooplijnsystemen moeten naderen tot die van eenen rechthoek met ongelijke zijden, zoo vormt het eene stel zich voor eenen hoogeren toon als het andere. Hierdoor doet zich dikwijls de omstandigheid voor dat, bij het langzaam hooger worden van den toon der orgelpijp, het stel (0.1) zich vervormt om eerst voor een' hoogeren toon in (1.0) over te gaan (ook dit is hoogst waarschijnlijk eene bron van fout geweest bij Savart). Nu is, ook zonder theoretische kennis, duidelijk, dat, als de beide assen van elasticiteit dezelfde zijn en het vlies homogeen en overal van gelijke dikte is, de beide stellen knooplijnen (0.1) en (1.0) zich voor *denzelfden* toon even gemakkelijk moeten vormen, aangezien deze beide middellijnen volmaakt in dezelfde omstandigheden verkeeren. Zal dus een vlies bruikbaar zijn zoo moet het die twee stellen (of algemeener de twee stellen (a, b) en (b, a), evenzeer kunnen geven voor *denzelfden* toon.

Men erkent of dit het geval is aan de vorming van knoop*punten* (vgl. bladz. 25). Bourget en Bernard, die zich bepaalden tot het verifiëeren der door Lamé gegeven theorie, hebben, evenals hij, de theoretische noodzakelijkheid van die knooppunten over het hoofd gezien. De verklaring die Bourget van het optreden dier knooppunten geeft is dan ook onjuist. Toch bewijzen de experimenten voldoende dat deze knooppunten slechts bij gelijkmatige spanning te voorschijn komen, dus alleen dan wanneer de knooplijnenstellen $(p, 1)$ en $(1, p)$ zich voor *denzelfden* toon vormen. Zij bevinden zich juist op de plaats die de theorie aangeeft, ten minste bij de toonen $N(p, 1)$; bij de andere toonen schijnen Bourget en Bernard ze niet te hebben waargenomen. Het zou allicht de moeite waard zijn, ook voor andere toonen als die in $N(p, 1)$ begrepen zijn, deze knooppunten, zoo mogelijk, te doen ontstaan.

Op vliezen waarvan de deugdelijke spanning op deze wijze was erkend, hebben de genoemde auteurs proeven genomen. Zij zijn tot deze resultaten gekomen:

1e. De vorm en de volgorde van de knooplijnenstelsels is die van de theorie. Alleen bij den toon N (1.1) waarvan het knooplijnenstelsel onveranderlijk zijn moet en bestaan uit twee middellijnen, welke het vlies in vier gelijke vierkanten verdeelen, ontstaan, in plaats daarvan, twee krommen in den vorm van de twee takken eener hyperbel, welke die middellijnen tot asymptooten heeft. Als men den toon van de orgelpijp langzamerhand rijzen laat, naderen de toppen dier hyperbel elkaar, van af het oogenblik dat het vlies begint te resonneeren totdat zij elkaar bijna raken (en alzoo bijna samenvallen met de twee loodrechte middellijnen) om zich daarna weder van elkander te verwijderen. Een analoogverschijnsel doet zich voor bij alle toonen $N(i, i)$ welke één onveranderlijk knoopstelsel hebben moesten. — Verder zal bij den grondtoon niet het geheele vlies in beweging zijn, maar er vormt zich een knooplijn dicht bij den rand, welke een kleiner vierkant met afgeronde punten vormt.

2e. De veranderingen van alle stellen knooplijnen bij één zelfden toon behoorende (door verandering van den begintoestand d. i. door relatieve verplaatsing van vlies en orgelpijp) hebben plaats volgens de theorie.

3e. De toonen behoorende bij de verschillende knooplijnstelsels zijn *andere* dan die welke de berekening geeft. Het waargenomen interval van twee toonen van het vlies is altijd *grooter* dan het berekende. Deze afwijking is klein als men twee zeer nabij elkaar liggende toonen beschouwt, maar kan bij twee meer verwijderde aanmerkelijk zijn. Voor verschillende vliezen is deze afwijking niet hetzelfde, maar in het algemeen grooter voor zeer dunne vliezen, hoewel deze meer tot de theoretisch beschouwde abstractie naderen. Wij laten hier het overzicht volgen dat Bourget en Bernard van eenige hunner proeven geven en waaruit de grootte van de afwijking blijkt.

	Verhouding, tot den grondtoon, der toonen wier knoopstelsels zijn									
	(0.2) en (0.1)		(0.3) en (0.1)		(0.4) en (0.1)		(0.5) en (0.1)		(0.6) en (0.1)	
	waarg.	berek.	waarg.	berek.	waarg.	berek.	waarg	berek.	waarg.	berek.
Rand v. karton Plantaard. papier zijde = 10 cm.	1.50	1.415							4.100	3.610
Rand v. hout Plantaard. papier zijde = 20 cm.			2.260	1.845					4.40	3.610
Rand v. hout Gewoon papier zijde = 10 cm.	1.475	1.415	1.990	1.845	2.530	2.280	3.920	2.722		
Rand v. hout Gewoon papier zijde = 15 cm.	1.485	1.415	2.040	1.845						
Rand v. hout Gewoon papier zijde = 10 cm.			2.22	1.845	2.820	2.280	3.46	2.722		
Rand v. karton Plantaard. papier zijde = 10 cm.					2.670	2.280	3.380	2.722		

Merken wij nog op dat de hoogte van den toon van het vlies, bij deze proeven, bepaald is door den sonometer. De toon van het vlies, die overschaduwd wordt door die van de orgelpijp, werd hoorbaar gemaakt door een kurken hamertje op het vlies te laten rusten, waardoor een soort gekras ontstaat, waarvan de toonshoogte natuurlijk gelijk aan die van den toon van het vlies is.

De proeven op cirkelvormige vliezen door Bourget genomen, leidden tot bijna dezelfde Physische wetten. Het blijkt al spoedig dat wanneer de spanning van het vlies niet gelijkmatig is, de knooplijnen elliptische en hyperbolische vormen aannemen, die evenwel des te meer tot cirkels en rechte lijnen naderen, naarmate het spannen met meer zorg is verricht. Is die spanning voldoende gelijk in alle richtingen, zoo vindt men:

1e. Het vlies resonneert slechts voor bepaalde toonen, wier intervallen kleiner worden naarmate de toonen hooger zijn.

2e. De knooplijnen vormen zich voor toonen van bepaalde hoogte. Voor toonen een weinig hooger of lager, trilt het vlies ook wel, maar er ontstaan geen scherp geteekende knooplijnen.

3e. De knooplijnen zijn of cirkels of middellijnen, wier afmetingen zuiver die van de theorie zijn.

4e. De toonen, welke met deze knooplijnen correspondeeren, zijn *niet* die van de berekening. Evenals bij de vierkante vliezen, is het waargenomen interval steeds grooter. Deze afwijking blijkt uit een overzicht van eenige van B o u r g e t's proeven, dat we alweder overnemen.

Knooplijnen.	Afstand tot den grondtoon.		Afwijking.
	Waargenomen.	Berekend.	
C_0 M_1	1.97	1.59	1.24
C_0 M_2	3.00	2.14	1.40
C_1 M_0	3.26	2.30	1.42
C_0 M_3	3.94	2.65	1.48
C_1 M_1	4.32	2.92	1.48
C_0 M_4	4.79	3.16	1.51
C_1 M_2	5.56	3.50	1.58
C_2 M_0	5.65	3.60	1.57
C_0 M_5	5.70	3.66	1.56

§ 7. Invloed van den tegenstand der lucht.

Deze afwijking, die altijd in denzelfden zin is, kan onmogelijk aan fouten der waarneming worden toegeschreven. Prof. Bourget heeft zeer talrijke proeven in het werk gesteld om de oorzaak daarvan te vinden. Die proeven hebben hem overtuigd, dat zij niet een gevolg is van de onvolmaakte vastheid van den rand, noch ook van de dikte van het vlies. Want hoewel die dikte eenigen invloed heeft, zooals we reeds hebben gezien, blijft de afwijking steeds in denzelfden zin en wordt zelfs grooter naarmate het vlies dunner is. Ook schijnt zij onafhankelijk te zijn van de stof van het vlies en van die der randen. Onwaarschijnlijk à priori is het zeker wel dat het gewicht van het vlies, waarvan de theorie abstraheert, de afwijking veroorzaakt. Er blijft dus wel niet veel anders over dan de tegenstand van de lucht. Dat deze tegenstand de oorzaak der afwijking zijn zou, is ook daarom aannemelijk, omdat de theoretische uitkomsten voor de snaar verkregen, zoo goed als volmaakt met de proeven overeen stemmen. Bij de theorie der snaren nu zijn dezelfde grootheden verwaarloosd als bij de vliezen. Terwijl evenwel de overige grootheden, welke men niet in aanmerking neemt, voor beide als van dezelfde orde moeten worden beschouwd, is dit niet het geval met den wederstand der lucht. Bourget heeft daarom den invloed van dien wederstand ingevoerd 1).

Hij neemt dien weêrstand evenredig aan de snelheid; daardoor krijgt de tot nog toe beschouwde vergelijking

1) Comptes rendus t. 72 (1871)

$$(1) \quad \frac{d^2w}{dt^2} = c^2 \left(\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{d^2w}{dy^2} \right)$$

éénen term meer en wordt

$$(2) \quad \frac{d^2w}{dt^2} + m^2 \frac{dw}{dt} = c^2 \left(\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{d^2w}{dy^2} \right)$$

waarin m^2 eene constante is.

Stellen wij

$w = Tu$, waarin u alleen eene functie van x en y en T eene zuivere functie van t is, zoo verkrijgen wij in plaats van (2) alleen, de twee gewone differentiaal-vergelijkingen

$$(3) \quad \frac{d^2T}{dt^2} + m^2 \frac{dT}{dt} + c^2\, T = o$$

$$(4) \quad \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} = - a^2 u$$

a eene constante zijnde, die moet worden bepaald door de conditie dat $u = o$ zijn moet aan den rand.

Bij de invoering van $w = T'u'$ in (1) komt

$$\frac{d^2T'}{dt^2} + a\, T' = o \quad \text{en} \quad \frac{d^2u'}{dx^2} + \frac{d^2u'}{dy^2} = - a^2 u'$$

waarvan de laatste identiek is met (4); bijgevolg zal in de gegevene oplossingen van w, waar we den weêrstand van de lucht $= o$ namen, door de invoering van dien weêrstand, wel de functie van t, maar niet die van x en y veranderen d, w. z. de knooplijnstelsels in de lucht en die in 't luchtledig (welk geval door de steeds behandelde vergelijking wordt gegeven) stemmen overeen. Het aantal trillingen in de tijdseenheid daarentegen zal verschillen.

De integratie van (2) geeft

$$T = e^{-\frac{1}{2} m^2 t} \left(A \cos \frac{pt}{2} + B \sin \frac{pt}{2} \right)$$

waarin $p = \sqrt{4a^2c^2 - m^4}$

Als t aangroeit zal T, dus ook w, afnemen, zooals natuurlijk is.

De trillingsduur is

$$\tau = \frac{4\pi}{p} \text{ en dus } N = \frac{1}{\tau} = \frac{p}{4\pi} = \frac{1}{4\pi}\sqrt{4a^2c^2 - m^4} \text{ of}$$

$$N^2 = \frac{a^2c^2}{4\pi^2} - \frac{m^4}{16\pi^2}.$$

Bij de beweging zooals wij die te voren beschouwden was $m = o$ en dus wordt het aantal trillingen in het luchtledig gegeven door de formule

$$n^2 = \frac{a^2\,c^2}{4\pi^2}$$

en dus eindelijk

$N^2 = n^2 - \dfrac{m^2}{16\pi^2}$ of, als wij de grondtoonen in het luchtledig en in de lucht respectievelijk n_o en N_o noemen,

$$(5)\ \frac{N}{N_o} = \sqrt{\frac{\left(\frac{n}{n_o}\right)^2 - \varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2}} \text{ waarin } \varepsilon^2 = \frac{m^4}{16\pi^2\,n_o^2}$$

terwijl $\frac{N}{N_o}$ het interval voorstelt van een' willekeurigen toon met den grondtoon in de lucht en $\frac{n}{n_o}$ datzelfde interval in het ledig. De coëfficiënt m is niet bekend. Berekenen wij echter de waarde daarvan of die van ε door, voor één der toonen, de berekende waarde $\frac{n}{n_o}$ en de waargenomen waarde $\frac{N}{N_0}$ te substitueeren in (5), zoo zal *diezelfde* waarde van ε in (5) ingevoerd, met de overige waarnemingen moeten sluiten.

Nemen wij b. v. in de aangehaalde proeven van Bourget op het cirkelvormige vlies $\varepsilon^2 = 0.590$ (gevonden uit de middelste observat.) zoo komt:

Knooplijnen.	Waargenomen interval $\frac{n}{n_0}$	Berekende interval $\frac{n}{n_0}$	Verschil.
C_0 M_1	1.97	2.18	bijna 1 toon.
C_0 M_2	3.00	3.11	$\frac{1}{4}$ toon.
C_1 M_0	3.26	3.37	» »
C_0 M_3	3.94	3.96	onmerkbaar.
C_1 M_1	4.32	4.33	»
C_0 M_4	4.79	4.78	»
C_1 M_2	5.56	5.34	$\frac{3}{8}$ toon.
C_2 M_0	5.65	5.48	» »
C_0 M_5	5.70	5.56	» »

Bourget noemt deze overeenstemming voldoende. Het verdient evenwel opmerking dat ter weêrszij van die waarnemingen welke onmerkbaar van de berekening verschillen (omdat daaruit de waarde van ε is afgeleid) de fouten in denzelfden zin zijn. Bepaalden wij ε zoodanig dat de eerste waarneming volmaakt met de berekening sloot, zoo zou bij alle volgende waarnemingen de afwijking weêr in denzelfden zin optreden als te voren. Het bedrag daarvan, hoewel sterk verminderd, is toch nog aanzienlijk genoeg om de afwijking niet geheel op rekening van de fouten van waarneming te worden gebracht. Een nader onderzoek der quaestie blijft onzes inziens dus nog wenschelijk.

STELLINGEN.

STELLINGEN.

I.

De overeenstemming van theorie en waarneming, bij de trillende vliezen, is nog niet geheel voldoende.

II.

Eerst door de, in dit proefschrift gegevene, theoretische afleiding der knoop*punten* van het vierkante vlies, kan de theorie van dat vlies als volledig wordeu aangemerkt.

III.

Wiskunde is geen natuurwetenschap.

IV.

Le calcul n'est qu'un instrument, précieux sans doute, parce qu'il assure et facilite notre marche; mais qui n'a par lui même aucune vertu propre; qui ne dirige point l'esprit, mais que l'esprit doit diriger comme tout autre instrument.

POINSOT.

V.

Lorsqu'on parvient à un résultat simple par des calculs compliqués, il doit exister une manière beaucoup plus directe d'arriver au même résultat.

LAMÉ.

VI.

De mathematische waarheden zijn niet *alleen* waarheden van definitie.

VII.

Ten onrechte beweert Multatuli dat de bron van winst voor een speelbank niet gelegen is in het voordeel dat de zero oplevert, welke, volgens hem »desnoods wel geheel en al kan gemist worden."

VIII.

Verkorte rekenwijzen behoorden te worden ingevoerd bij het lager onderwijs.

IX.

Onjuist is de bepaling van Schlömilch: Een hoek is het verschil van twee richtingen.

X.

De beste photometer is die van Zöllner.

XI.

Het optisch bedrog, door Zöllner behandeld in zijne Cometentheorie p. 381, is niet een gevolg van oogbewegingen.

XII.

De verklaring door Laplace gegeven van de schijnbaar grootere middellijn van zon en maan aan den horizon is onjuist.

XIII.

Valsch is de bewering dat, volgens Faye's zontheorie, geene vlekken op de zon zouden moeten waargenomen worden.

XIV.

Zonnevlekken zijn cyclonen.

XV.

Het gemiddelde van de eigenbewegingen der sterren van verschillende grootte is niet omgekeerd evenredig met haren afstand.

XVI.

Het is onwaarschijnlijk dat de meeste cometenbanen ellipsen zijn.

XVII.

De articulata behooren boven de mollusca gesteld te worden.

XVIII.

De conclusie waartoe Preyer komt (Deutsche Rundschau Apr. 75. p. 62): »Die Urzeugung ist . . . ebenso unwahrscheinlich wie das Vorkommen eines lebenden Körpers, der nicht stürbe," berust op eene foutieve redeneering.