Utrecht University Library
Partner in Science
Universiteit Utrecht

Het beginsel van Huygens

https://hdl.handle.net/1874/253059

4° 192

Phys.
26 Jan 1900

Het Beginsel van Huygens

door

D. P. Moll

HET BEGINSEL VAN HUYGENS.

Typ. F. J. BELINFANTE voorh. A. D. SCHINKEL te 's-Gravenhage.

Het Beginsel van Huygens.

PROEFSCHRIFT

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN

Doctor in de Wis- en Natuurkunde

AAN DE RIJKS-UNIVERSITEIT TE UTRECHT,

NA MACHTIGING VAN DEN RECTOR-MAGNIFICUS

DR. H. WEFERS BETTINK,

Hoogleeraar in de Faculteit der Wis- en Natuurkunde,

VOLGENS BESLUIT VAN DEN SENAAT DER UNIVERSITEIT

TEGEN DE BEDENKINGEN VAN

DE FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE

TE VERDEDIGEN

op Vrijdag 26 Januari 1900

des namiddags te 4 uren,

DOOR

DANIEL PIETER MOLL,

geboren te Westervoort.



UTRECHT. — A. J. VAN HUFFEL.

1900.

RIJKSUNIVERSITEIT TE UTRECHT
1754 2725

Aan mijn Ouders.

Hoewel ik reeds voor ongeveer twee jaren de Universiteit heb verlaten, is het mij een behoefte U, Hoogleeraren in de Faculteit der Wis- en Natuurkunde, dank te zeggen voor Uw onderwijs in collegezaal en laboratorium, en niet minder voor Uw vriendschappelijken en leerrijken omgang daarbuiten.

Het is U bekend, Hooggeleerde V. A. JULIUS, *Hooggeachte Promotor, hoe groote dankbaarheid mij vervult voor Uw zorgvuldige leiding van mijn studiën. Toch is het mij een vreugde dien dank hier openlijk te kunnen uitspreken, niet het minst voor Uw krachtigen steun en voorlichting bij de samenstelling van dit proefschrift.*

Amersfoort, Dec. 1899.

INHOUD.

Bladz.

INLEIDING 1

HOOFDSTUK I.

KIRCHHOFF's formuleering van het beginsel van HUYGENS

1. Potentiaalfunctie eener golfbeweging 11
2. Afleiding en beteekenis van Kirchhoff's formuleering van het beginsel van Huygens 16
3. Mathematische bezwaren in te brengen tegen de wijze waarop Kirchhoff zijn formuleering van het beginsel van Huygens afleidt, en exacte afleiding daarvan 24

HOOFDSTUK II.

Algemeene beschouwingen over golfbewegingen.

1. Phaseoppervlakken. Phasesnelheden. Voortplantingssnelheid van de grens eener golfbeweging 47
2. Harmonische golfbeweging van oneindig kleine trillingsperiode 55
3. Stationaire golfbewegingen. Vorm der potentiaal. Standvastigheid van het trillingsgetal 57
4. Verschijnselen aan de grenzen eener stationaire golfbeweging 66

HOOFDSTUK III.

Bolvormige golfbewegingen.

Bladz.

1. Eenige vormen van potentiaalfuncties van bolvormige golven 70
2. Phasesnelheden van eenige soorten van bolvormige stationaire golfbewegingen 74
3. Vorm der potentiaal eener begrensde bolvormige golfbeweging 82
4. Berekening van de voortplantingssnelheid der grens van een bolvormige golfbeweging door middel van het theorema van Kirchhoff 94

HOOFDSTUK IV.

Willekeurige golfbewegingen.

1. Voortplantingssnelheid van de grens eener willekeurige golfbeweging 104
2. De differentiaalvergelijking der golfbeweging voor functies van den vorm $G\chi\sin\psi$ 116

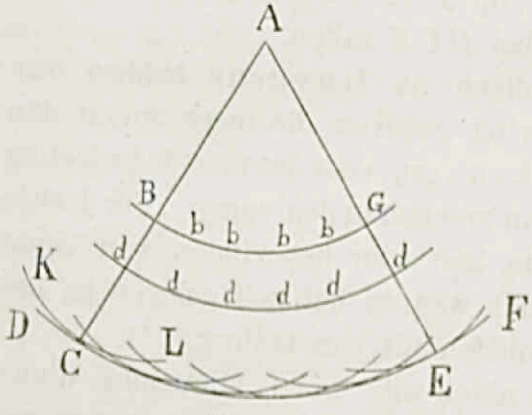
CONCLUSIES. 128

STELLINGEN 135

INLEIDING.

In zijn „Traité de la Lumière" [1]) Chap. I, pg. 17 en 18 houdt Huygens de volgende beschouwing:

„Il y a à considerer, que chaque particule de la matiere, dans laquelle une onde s'etend, ne doit pas communiquer son mouvement seulement à la particule prochaine, qui est dans la ligne droite tirée du point lumineux; mais qu'elle en donne aussi necessairement à toutes les autres qui la touchent, et qui s'opposent à son mouvement.



Figuur 1.

De sorte qu'il faut qu'autour de chaque particule il se fasse une onde dont cette particule soit le centre. Ainsi si $D\,C\,F$ est une onde emanée du point lumineux A, qui est son centre; la particule B, une de celles qui sont comprises dans la sphere $D\,C\,F$, aura fait son onde particuliere $K\,C\,L$, qui touchera l'onde $D\,C\,F$ en C, au mesme moment que l'onde principale, emanée du point A, est parvenuë en $D\,C\,F$; et il est clair qu'il n'y aura que l'endroit C de l'onde $K\,C\,L$ qui touchera

1) De volledige titel is:
Traité de la Lumiere, où sont expliquées les causes de ce qui luy arrive dans la Reflexion et dans la Refraction et particulierement dans l'etrange Refraction du Cristal d'Islande, par C. H. D. Z. avec un Discours de la Cause de la Pesanteur. A Leide, chez Pierre van der Aa, MDCXC.

l'onde DCF, sçavoir celuy qui est dans la droite menée par AB. De mesme les autres particules comprises dans la sphere DCF, comme bb, dd etc. auront fait chacune son onde. Mais chacune de ces ondes ne peut estre qu'infiniment foible comparée à l'onde DCF, à la composition de laquelle toutes les autres contribuent par la partie de leur surface qui est la plus éloignée du centre A.

L'on voit de plus que l'onde DCF est determinée par l'extremité du mouvement, qui est sorti du point A en certain espace de temps; n'y ayant point de mouvement au de là de cette onde, quoy qu'il y en ait bien dans l'espace qu'elle enferme, sçavoir dans les parties des ondes particulieres, lesquelles parties ne touchent point la sphere DCF."

Dit is nagenoeg alles wat Huygens zelf zegt omtrent zijn zoo beroemd geworden beginsel. Er blijkt duidelijk uit dat Huygens aannam, dat een deel der beweging op zeker oogenblik van A uitgegaan, op een later tijdstip gevonden werd niet uitsluitend op het oppervlak DCF, maar ook binnen het oppervlak DCF op de deelen van de „ondes particulieres" welke niet den bol DCF raken.

Verschillende natuurkundigen na Huygens hebben van zijn beginsel een formuleering gegeven die meer omvat dan Huygens zelf zegt. Het komt mij voor dat men de bedoeling van Huygens het best kan brengen in den vorm: „Elk deeltje dat in beweging gekomen is, kan voor het vinden van eenig ander golfoppervlak dan dat waarop het zelf gelegen is, beschouwd worden als een middelpunt van trilling." [1])

Fresnél [2]) spreekt het aldus uit: „Les vibrations d'une onde lumineuse dans chacun de ses points peuvent être regardées comme la somme des mouvements élémentaires qu'y enverraient au même instant, en agissant isolément, toutes les parties de cette onde considérée dans une quelconque de ses positions antérieures."

Dit is reeds iets meer; het geeft den grondslag van de

---

1) V. A. Julius. Leerboek der Natuurkunde. Derde deel, derde druk pg. 14.

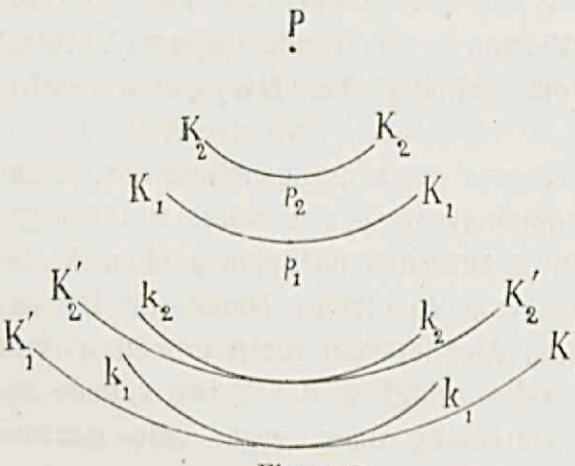
2) Oeuvres de Fresnel. I pg. 293.

methode die Fresnel uit hetgeen Huygens gezegd heeft, heeft afgeleid voor de bepaling van den bewegingstoestand van een deeltje op een bepaald oogenblik.

Beer [1]) houdt de volgende beschouwing naar aanleiding van dat beginsel:

„Hört der Punkt P mit seinem Leuchten nach einer Zeit T auf, so erhalten wir neben der äusseren Grenze der beginnenden Lichtbewegung eine innere Grenze der aufhörenden. Wie jene, wird auch diese eine Kugel sein, deren Mittelpunkt P ist, und deren Radius sich stetig mit der Geschwindigkeit v verlängert. Nach der Zeit T', die grösser als T sei, wird sich daher derjenige Theil des Aethers in Bewegung befinden, welcher in einer Kugelschale von den Radien vT' und $v(T' - T)$ liegt. Bei wachsender Zeit erweitert sich diese Schale gleichförmig; ihre Dicke aber bleibt constant.

Von dem Hergange bei der Fortpflanzung des Lichtes können wir uns auch noch eine von der vorhergehenden etwas abweichende Vorstellung bilden. Für die Zeit t seien K_1 und K_2 (Fig. 2) die äussere und innere Grenze einer Lichtwelle. Jeden Punkt der zwischen K_1 und K_2 gelegenen Aethermasse können wir uns nun als Mittelpunkt einer neuen Lichterregung denken. Nach der Zeit t wird sich z. B. der Zustand eines Punktes p_1 von K_1 auf die Punkte der Kugel k_1 übertragen haben, deren Mittelpunkt p_1 ist, und deren Radius vt gleichkommt. Construiren wir für alle Punkte von K_1 die zugehörigen Kugeln k_1, so leuchtet ein, dass nach der Zeit t der Zustand von K_1 sich auf die Punkte derjenigen Fläche übertragen hat, welche



Figuur 2.

1) Beer. Einleitung in die höhere Optik pg. 18. Braunschweig bij Vieweg und Sohn 1853.

jene Kugeln insgesammt berührend umhüllt. Jene Kugeln werden aber umhüllt von zwei Kugelflächen, deren Centrum der leuchtende Punkt P ist, und von denen die äussere K_1' den Radius $vT + vt$, die innere K_1'' den Radius $vT - vt$ hat; die letztere Kugel lassen wir unberücksichtigt; von der ersteren aber wissen wir aus dem Vorhergehenden, dass sie wirklich der Ort der Punkte ist, auf welche sich der Zustand von K_1 nach der Zeit t überträgt. Dieselbe Construction liefert uns für jeden Schwingungszustand der Welle eine äussere und innere Fläche, von denen wir jene als den Ort der Punkte, auf welche sich der fragliche Zustand übertragen hat, beibehalten. Und der Inbegriff dieser äusseren Flächen ist der Ort, nach dem sich die ursprüngliche Welle nach Verlauf der Zeit t fortgepflanzt. Die innere Grenze der neuen Welle ist die Kugel K_2', welche die den Punkten p_2 der Fläche K_2 entsprechenden Kugeln k_2 nach Aussen hin umhüllt. Das mitgetheilte Verfahren, von einer Welle zu einer ihrer späteren Lagen überzugehen, würde auch dann anzuwenden sein, wenn die ursprüngliche Welle eine andere als kugelige Gestalt besässe. Die dem Verfahren zu Grunde liegende Vorstellungsart heisst nach ihrem Erfinder das Huyghens'sche Princip."

Hier wordt dus in de eerste plaats aangenomen dat, wanneer de beweging in P ophoudt, na een zekeren tijd de geheele beweging besloten is tusschen de oppervlakken K_1 en K_2. Dat dit werkelijk zoo is zal ik in Hoofdstuk III bewijzen, maar het is zeker niet iets dat uit het beginsel van Huygens voortvloeit. Opmerkelijk is dat Beer van de inwendig omhullende K_1'' eenvoudig maar zegt: „die letztere Kugel lassen wir unberücksichtigt".

Die inwendig omhullende werd dan ook door Poisson aangehaald als een groot bezwaar tegen hetgeen Fresnel uit het beginsel van Huygens afleidde. In een brief aan Fresnel waarvan hij een extract heeft gepubliceerd [1]) en

---

1) Poisson. Annales de Chim. et de Physique, t. XXII p. 270, cahier de Mars 1823.

die is opgenomen in de Oeuvres de Fresnel t. II pg. 206 s. s. zegt Poisson op pg. 209:

„Je vous ferai aussi remarquer que, dans le raisonnement qui vous a conduit à la formule de la page 287 de votre Mémoire sur la diffraction [1]) rien n'exprime que le point P [2]) soit situé au delà de l'onde $A\,M\,F$, et que, s'il était situé en deçà de cette onde, le même raisonnement appliqué mot à mot vous conduirait à une formule semblable pour exprimer la vitesse qu'il reçoit. Il suivrait donc de vos principes que l'onde $A\,M\,F$, même quand elle est complète, devrait produire du mouvement en deçà et au delà de sa position; conclusion qui suffirait pour montrer qu'il y a un vice quelconque dans votre manière d'envisager la question. Et, en effet, la production d'une nouvelle onde en avant de celle que vous considérez, et la non-communication du mouvement en arrière, n'ont lieu qu'à raison d'un rapport déterminé qui subsiste, dans l'onde donnée, entre les condensations et les vitesses propres des molécules fluides, et nullement à raison de l'interférence des ondes élémentaires parties de tous les points à des instants différents."

Het antwoord van Fresnel: [3])

„Je conviens que le principe de la composition des petits mouvements doit s'appliquer à ce cas comme à celui que j'ai considéré; mais si les éléments dans lesquels je conçois l'onde divisée ne peuvent pas envoyer de mouvement de ce côté, même en agissant isolément, il est clair que la résultante des ondes élémentaires sera nulle. Je ne vois donc pas qu'il résulte de mes principes qu'une onde doive produire des mouvements rétrogrades,"

kan dan ook als weinig afdoende gelden.

Maar Poisson had nog meer bezwaren. In dien zelfden brief [4]) wees hij er Fresnel op dat de uitwijking die een deeltje kreeg bij de berekeningswijze van Fresnel evenredig

---

1) Oeuvres de Fresnel t. I pg. 313.

2) P is het punt waarin Fresnel berekent de intensiteit der beweging uitgezonden door alle deeltjes van het golffront $A\,M\,F$.

3) Oeuvres de Fresnel t. II pg. 219.

4) Oeuvres de Fresnel t. II. pg. 208.

was met de golflengte, wat toch vrijwel onaannemelijk mocht heeten, of men moest onderstellen dat de invloed van een golfoppervlak-element omgekeerd evenredig was met de golflengte, wat even onaannemelijk was.

Fresnel zag zeer wel in dat het beginsel van Huygens, zooals hij dat had geformuleerd en toegepast, niet tot uitkomsten overeenkomende met de verschijnselen zou leiden, indien hij aannam dat de intensiteit van de secundaire golven in alle punten even groot was. Hij zegt: [1])

„L'impulsion qui a été communiquée à toutes les parties de l'onde primitive étant dirigée suivant la normale, les mouvements qu'elles tendent à imprimer à l'éther doivent être plus intenses dans cette direction que dans toute autre ; et les rayons qui en émaneraient, si elles agissaient isolément, seraient d'autant plus faibles qu'ils s'écarteraient davantage de cette direction.

La recherche de la loi suivant laquelle leur intensité varierait autour de chaque centre d'ébranlement présenterait sans doute de grandes difficultés ; mais heureusement nous n'avons pas besoin de la connaître, car il est aisé de voir que les effets produits par ces rayons se détruisent presque complètement dès qu'ils s'inclinent sensiblement sur la normale, en sorte que ceux qui influent d'une manière appréciable sur la quantité de lumière que reçoit chaque point P peuvent être regardés comme d'égale intensité."

Later heeft Fresnel [2]) in antwoord op een aanval van Poisson getracht de wet af te leiden volgens welke men moet aannemen dat de intensiteit over de verschillende punten van een zelfde secundaire golf verdeeld is. Is M een punt van een secundaire golf met A als middelpunt en verder C het punt waar die golf wordt gesneden door de golffrontsnormaal gaande door A, dan zou volgens Fresnel de intensiteit van de secundaire golf in het punt M evenredig zijn met de cosinus van hoek MAC. Deze cosinuswet is echter zeer weinig vruchtbaar gebleken en aan een uitdaging van Poisson [3])

---

1) Oeuvres de Fresnel t. I pg. 295.
2) Oeuvres de Fresnel t. II pg. 224.
3) Oeuvres de Fresnel t. II pg. 226.

om de berekening der intensiteit met behulp dier wet nu eens uit te voeren voor een zeer eenvoudig geval, waarin de uitkomst te voren bekend was, heeft Fresnel niet voldaan.

Trouwens het is gebleken [1]) dat in een ander geval de berekeningswijze van Fresnel tot een onjuiste uitkomst leidde. Is P een lichtgevend punt, M een bol met P als middelpunt en C een punt gelegen buiten M, dan vindt men voor de phase in C, indien men deze berekent door middel van de secundaire golven door M uitgezonden volgens de berekeningswijze van Fresnel, niet wat de rechtstreeksche beschouwing geeft, maar een phase die $\frac{\pi}{2}$ grooter is. Jamin et Bouty [2]) zeggen naar aanleiding hiervan:

„On ne s'est pas arrêté à ce résultat bizarre d'une analyse évidemment incomplète, lequel ne paraît pas susceptible d'interprétation physique."

Dit alles mag niet als een verwijt tegen Fresnel gelden; integendeel bewijst het hoe zijn intuitie hem hielp zwarigheden te overwinnen of tijdelijk op zijde te zetten, die een Poisson het voortgaan onmogelijk maakten. In tegenstelling met Poisson kende Fresnel aan het resultaat zijner beschouwingen de hoogste waarde toe; of die beschouwingen zelf volmaakt exact waren liet hem vrij koud, want de juistheid zijner resultaten kon hij aan het experiment toetsen. In dien geest uit hij zich zeer kras aan het slot van boven aangehaalden brief:

„Peut-être direz-vous encore que je suis arrivé à des résultats justes en raisonnant faux. Au reste, si cette mauvaise manière de raisonner me conduit à des vérités nouvelles, comme je l'espère, elle m' aura procuré tous les avantages qu'on peut retirer des bonnes méthodes, la facilité des découvertes et l'exactitude des résultats."

---

1) Stokes. On the Dyn. Th. of Diffraction. Transactions of the Cambr. Phil. Soc. Vol. IX, pg. 2 (26 Nov. 1849). Math. and Phys. Papers Vol. II, pg. 244.

W. Voigt. Zur Fresnel'schen Theor. der Diffractionserscheinungen. Wied. Ann. 3, pg. 533. 1878.

2) Jamin et Bouty, Cours de Physique. Paris 1887. t. III. 3. pg. 365.

Maar wel blijkt hieruit dat het beginsel van Huygens in zijn meer eenvoudigen vorm of zelfs in den vorm, waarin Fresnel het bracht, physisch onjuist is.

Daarom kwam het mij niet onbelangrijk voor in de eerste plaats de voortplanting van een bolvormige verstoring aan een wiskundig onderzoek te onderwerpen. Daarmede zal ik mij bezig houden in het derde hoofdstuk van dit proefschrift en daarbij gelegenheid vinden om Poisson's opmerking betreffende het terugloopen der golven en evenzoo Stokes' zonderling resultaat te weerleggen.

Wij zullen daar doen zien dat, indien het punt A gedurende eenigen tijd middelpunt van verstoring is geweest, er eenigen tijd later alleen beweging bestaat binnen een deel der ruimte besloten tusschen twee bollen met A als middelpunt, en dat de voorstelling, die Beer zich vormt van de voortplanting van een bolvormige verstoring, (zie pag. 3) juist is; dat nl. indien op zeker oogenblik alleen beweging wordt gevonden binnen de bolschaal $K_2 K_1$ (zie figuur 2) er t sec. later alleen beweging binnen de bolschaal $K_2' K_1'$ bestaat. Indien men aan de secundaire golven physische beteekenis toekent, zou slechts een deel der energie aanwezig binnen $K_2 K_1$ binnen $K_2' K_1'$ worden teruggevonden en dus ook buiten die schaal beweging moeten bestaan volgens de wet van behoud van arbeidsvermogen. Kennen wij dus physische beteekenis toe aan die secundaire golven en aan de beschouwingen van Huygens, dan komen wij in strijd met de wet van behoud van arbeidsvermogen. Dit geeft ons recht te zeggen, dat het beginsel van Huygens tot strijd voert met de wet van behoud van arbeidsvermogen en derhalve physisch onjuist is.

Hiervan echter mogen wij den genialen grondlegger van de theorie der golfbeweging geen verwijt maken, vooreerst toch was hem de wet van het behoud van arbeidsvermogen onbekend en bovendien moet men naar mij voorkomt aan zijn beschouwingen geen physische maar slechts een meetkunstige beteekenis toekennen. Van die beschouwingen toch zegt Huygens in onmiddellijke aansluiting met voorstaande aanhaling: „Et tout cecy ne doit pas sembler estre recherché avec trop de soin, ni de subtilité; puisque l'on verra dans la

suite, que toutes les proprietez de la lumiere, et tout ce qui appartient à sa reflexion et à sa refraction, s'explique principalement par ce moyen."

De hier bedoelde verklaringen der wetten van terugkaatsing en breking nu bestaan slechts in zijn bekende meetkunstige constructies van den teruggekaatsten en den gebroken straal van een vlakke verstoring door een vlakke grenslaag. Huygens heeft die beschouwingen naar mij voorkomt alleen gehouden om die constructies te motiveeren. Daar, waar Fresnel door Poisson in het nauw gedreven physische beteekenis hecht aan de secundaire golven en b.v. gaat spreken over de verdeeling der intensiteit over die golven, beginnen de onjuistheden en wijkt hij mijns inziens van de voorstellingen van Huygens af.

Hoewel het dus zeer te betreuren is dat Huygens zelf geen scherpere formuleering aan zijn denkbeelden heeft gegeven, zijn hem dunkt mij de onjuiste resultaten door anderen daaruit afgeleid niet toe te rekenen, maar heeft men slechts het recht aan zijn beginsel meetkunstige beteekenis toe te kennen, n.l. in zooverre het ons de grens der beweging leert vinden en ons een middel aan de hand doet om uit een vorig golffront een volgend te construeeren. Wij hebben er zijn geniale beperking in te bewonderen dat hij zelf dat ook deed.

In Hoofdstuk III zal ons blijken dat slechts voor etherbewegingen van oneindig kleine golflengte de golffrontsconstructie van Huygens voor bolvormige en vlakke golven geheel juist is.

Toen ik deze quaestie had onderzocht, deed zich als vanzelf de vraag aan mij voor: hoe staat het met de golffrontsconstructie van Huygens voor golven van willekeurigen vorm? Daartoe had ik dus het volgende vraagstuk te behandelen: indien gegeven is dat een gesloten oppervlak A golffront is voor een beweging die zich voortplant naar buiten toe, is dan de uitwendig omhullende van bollen met gelijken straal beschreven om alle punten van A voor die beweging ook een golffront? De behandeling van dat vraagstuk maakt in eenigszins gewijzigden vorm den hoofdinhoud uit van Hoofdstuk IV.

Tegenwoordig duidt men met den naam beginsel van Huygens dikwijls aan een theorema door Kirchhoff afgeleid en dat ons in staat stelt om uit een golfbeweging die op eenig oogenblik gegeven is, de beweging na een willekeurig tijdsverloop af te leiden. Toen ik zooeven het beginsel van Huygens physisch onjuist noemde, bedoelde ik daarmede natuurlijk geenszins dat theorema van Kirchhoff hetwelk in den laatsten tijd volmaakt streng bewezen is. Integendeel, van dat theorema dat de oplossing van alle vraagstukken over golfbewegingen in een isotroop medium impliciet bevat, zal ik juist gebruik maken om het physisch onjuiste in het beginsel van Huygens en in de formuleering ervan door Fresnel aan te toonen.

Met de afleiding en de bespreking van dat theorema heb ik mij bezig gehouden in Hoofdstuk I, terwijl in Hoofdstuk II eenige algemeene besprekingen van golfbewegingen worden gehouden.

Ten slotte wil ik nog opmerken dat ik nergens heb ingevoerd de voorwaarde dat de golflengte der beweging oneindig klein is. Doet men dit wel, dan worden de berekeningen veel eenvoudiger, maar dan gelden de beschouwingen slechts (bij benadering) voor lichtbewegingen en verliezen nagenoeg geheel haar beteekenis. Hoewel ik dus in het vervolg de nomenclatuur voor lichtbewegingen gebruik, kunnen op etherverstoringen van eindige golflengte de verkregen resultaten evengoed worden toegepast. Juist voor zulke electromagnetische golfbewegingen verkrijgen zij naar mij voorkomt hun beteekenis en met het oog daarop is het dat ik de voortplanting van etherverstoringen heb bestudeerd.

HOOFDSTUK I.

KIRCHHOFF'S FORMULEERING VAN HET BEGINSEL VAN HUYGENS.

1. Potentiaalfunctie eener Golfbeweging.

In de volgende beschouwingen zullen we ons voorstellen te doen te hebben met een golfbeweging in den homogenen en isotropen ether. Zulk een golfbeweging wordt beheerscht door drie van de coördinaten x, y en z en van den tijd t afhankelijke functies U, V en W, die moeten voldoen aan de part. diff. verg.

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 \triangle \varphi, \tag{1}$$

waarin a een constante is voor den ether en $\triangle$ de bekende notatie is voor den operator

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Indien we ons plaatsen op het standpunt van de elasticiteitstheorie van het licht en derhalve den ether beschouwen als een elastisch onsamendrukbaar medium en licht als een zich daarin transversaal voortplantende verstoring, dan wordt een lichtbeweging bepaald door de ontbindingsuitwijkingen u, v en w van een etherdeeltje langs de coördinatenassen en dan worden die functies u, v en w uit bovengenoemde functies U, V en W afgeleid door middel van de vergelijkingen:

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial y}, \\ v &= \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial z}, \\ w &= \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x}. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Indien dus U, V en W gegeven zijn, dan wordt in de elasticiteitstheorie van het licht een lichtbeweging door de vergelijkingen (2) volkomen bepaald en omgekeerd, indien de lichtbeweging gegeven is, dan kunnen de dan gegeven functies u, v en w steeds worden geschreven in den vorm (2), terwijl de daarin voorkomende functies U, V en W voldoen aan de diff. verg. (1). Voor iedere lichtbeweging is dus in de elasticiteitstheorie voldoende de bestudeering van die functies U, V en W die onderling onafhankelijk zijn maar moeten voldoen aan (1).

Aanvaarden we de electromagnetische lichttheorie en beschouwen we derhalve den ether als een electrisch en magnetisch polariseerbaar medium en licht als de voortplanting daarin van electrische en magnetische schommelingen, dan wordt de electromagnetische toestand van den ether en dus de lichtbeweging bepaald door de volgende twaalf functies van x, y, z en t :

$\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, de ontbondenen van het electrisch moment per volume eenheid;

$\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, de ontbondenen van het magnetisch moment per volume eenheid;

X, Y, Z, de ontbondenen van de electrische kracht;

L, M, N, de ontbondenen van de magnetische kracht.

Evenals u, v en w hangen ook deze functies van drie functies U, V en W af en worden daaruit afgeleid door middel van de vergelijkingen :

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon} &= \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial y}, & X &= 4\pi\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon},\\
\frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon} &= \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial z}, & Y &= 4\pi\frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon},\\
\frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon} &= \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x}, & Z &= 4\pi\frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon},\\
\mathfrak{L} &= -A\mu\varepsilon\frac{\partial U}{\partial t}, & L &= 4\pi\frac{\mathfrak{L}}{\mu},\\
\mathfrak{M} &= -A\mu\varepsilon\frac{\partial V}{\partial t}, & M &= 4\pi\frac{\mathfrak{M}}{\mu},\\
\mathfrak{N} &= -A\mu\varepsilon\frac{\partial W}{\partial t}, & N &= 4\pi\frac{\mathfrak{N}}{\mu}.
\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Hierin zijn ε en μ constanten voor het medium, die in den vrijen ether gelijk 1 worden en A is de constante, waardoor men van het electromagnetische naar het electrostatische maatstelsel overgaat, zoodanig dat in eenheden van het C. G. S. stelsel ongeveer

$$A = \frac{1}{3.10^{10}}.$$

Evenals in de elasticiteitstheorie is dus ook hier, indien U, V en W gegeven zijn, een lichtbeweging geheel bepaald en omgekeerd, indien de lichtbeweging gegeven is, dan kunnen de electrische en magnetische ontbindingskrachten en ontbindingsmomenten steeds worden geschreven in den vorm (3). Ook hier is dus voor iedere lichtbeweging de bestudeering der functies U, V en W voldoende.

Terwijl echter in de elasticiteitstheorie de functies U, V en W moeten voldoen aan (1) maar onafhankelijk zijn van elkaar, moeten in de electromagnetische lichttheorie de functies U, V en W behalve aan (1) ook nog voldoen aan de betrekking:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0, \qquad (4)$$

en zijn hier dus niet onafhankelijk van elkaar.

Daar in de elasticiteitstheorie U, V en W onafhankelijk van elkaar zijn, kunnen we daar eens onderstellen:

$$\left.\begin{aligned} U &= \varphi, \\ V &= 0, \\ W &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

waarin φ voldoen moet aan (1). Door de beweging (5) samen te stellen met twee andere dergelijke bewegingen, waarvan voor de eene U en V en voor de andere U en W nul zijn, keeren we tot het algemeene geval terug. Omgekeerd kan een willekeurige lichtbeweging steeds in drie zulke bewegingen ontbonden worden. In plaats van de vergelijkingen (2) krijgen we dan:

$$\left.\begin{aligned} u &= 0, \\ v &= -\frac{\partial \varphi}{\partial z}, \\ w &= \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

In de electromagnetische lichttheorie moeten U, V en W voldoen aan (1) en aan (4); dit is het geval zoo we stellen:

$$\left.\begin{aligned} U &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}, \\ V &= \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \\ W &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

terwijl φ, φ_1 en φ_2 voldoen aan (1), maar onafhankelijk kunnen zijn van elkaar.

De beweging (7) kunnen we splitsen in drie bewegingen door beurtelings twee der functies φ, φ_1 en φ_2 gelijk nul te stellen.

We blijven dus algemeen, indien we één dezer bewegingen bestudeeren, b.v.

$$\left.\begin{aligned} U &= 0, \\ V &= -\frac{\partial \varphi}{\partial z}, \\ W &= \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

waarin φ een oplossing is van (1). Dan worden de vergelijkingen (3):

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon} &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, & X &= 4\pi \frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon}, \\ \frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}, & Y &= 4\pi \frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon}, \\ \frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z}, & Z &= 4\pi \frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon}, \\ \mathfrak{L} &= 0, & L &= 0, \\ \mathfrak{M} &= A\,\mu\,\varepsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial t}, & M &= 4\pi \frac{\mathfrak{M}}{\mu}, \\ \mathfrak{N} &= -A\,\mu\,\varepsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial t}, & N &= 4\pi \frac{\mathfrak{N}}{\mu}. \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Volgens beide lichttheorieën kan dus iedere lichtbeweging worden gesplitst in drie andere, die elk door één functie φ worden beheerscht, welke alleen onderworpen is aan de voorwaarde dat zij moet voldoen aan (1).

In de elasticiteitstheorie kunnen we door middel der vergelijkingen (6) en in de electromagnetische lichttheorie door middel van (9) voor een dezer drie bewegingen alle lichtvectoren berekenen. De bestudeering van één functie φ, die aan (1) voldoet, is dus volgens beide theorieën voldoende.

Von Helmholtz gebruikt in zijn „Vorlesungen über die Electromagnetische Theorie des Lichts" de uitdrukking „Wellenpotential". Ik zal die uitdrukking overnemen en de functie φ aanduiden met den naam „potentiaal der golfbeweging".

Een willekeurige lichtbeweging heeft dus volgens het bovenstaande drie potentialen, maar kan steeds worden gesplitst in

drie bewegingen waarvoor telkens twee der potentialen nul zijn. Met de bestudeering van één dezer drie bewegingen en dus met de bestudeering van één potentiaal kunnen we volstaan.

---

2. Afleiding en beteekenis van Kirchhoff's formuleering van het beginsel van Huygens.

Door Kirchhoff [1]) is een theorema afgeleid, dat gewoonlijk wordt genoemd de formuleering van het beginsel van Huygens door Kirchhoff, en dat ons in staat stelt om uit de waarde, die een functie, welke voldoet aan de diff. verg. der golfbeweging (1), op een gesloten oppervlak s heeft, te berekenen de waarde dier functie in eenig punt binnen s gelegen. Daartoe moet binnen s de ether continu zijn; binnen s mogen dus geen vreemde lichamen of lichtbronnen zich bevinden. Bij de afleiding van dat theorema wordt van het beginsel van Huygens geen gebruik gemaakt en evenmin volgt de juistheid der golffrontsconstructie van Huygens er onmiddellijk uit. Daarom komt het mij voor, dat er weinig reden bestaat, om dat theorema te noemen de formuleering van het beginsel van Huygens. Waarschijnlijk heeft het dien naam gekregen, omdat als basis der bestudeering van lichtverschijnselen in den isotropen ether het beginsel van Huygens door dat theorema kan worden vervangen.

Kirchhoff leidt zijn theorema op de volgende wijze af:

Indien U en V twee functies zijn van x, y en z, die met haar eerste diff. quot. naar x, y en z binnen een geheel begrensde ruimte (welke uit verschillende gescheiden deelen kan bestaan) eenwaardig en continu zijn; indien $d\tau$ een element van die ruimte is en ds een element van haar oppervlak s (hetwelk eveneens uit verschillende gescheiden deelen kan bestaan); en indien N de normaal is op het oppervlak s naar

---

1) Kirchhoff. Sitz. Ber. d. Kön. Acad. d. Wissensch. zu Berlin vom 22 Juni 1882 pg. 641. Wiedem. Ann. Bd. 18 pg. 663. 1883.
Gesamm. Abhandl. von Kirchhoff, Nachtrag pag. 22.

binnen toe getrokken, dan is volgens het theorema van Green

$$\int ds\left(U\frac{\partial V}{\partial N}-V\frac{\partial U}{\partial N}\right)=\int d\tau\ (V\triangle U-U\triangle V).$$

Hierin stelt Kirchhoff $U=\varphi$, terwijl φ een functie is die voldoet aan de diff. verg. der golfbeweging (1).

Van V, welke functie we zoo aanstonds nader zullen bepalen, neemt Kirchhoff aan dat zij ook aan (1) voldoet.

Het theorema van Green gaat dan over in:

$$\int ds\left(\varphi\frac{\partial V}{\partial N}-V\frac{\partial\varphi}{\partial N}\right)=\frac{1}{a^2}\frac{\partial}{\partial t}\int d\tau\left(V\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\varphi\frac{\partial V}{\partial t}\right).$$

Vermenigvuldigen we beide leden met dt en integreeren over t tusschen de negatieve en positieve grenzen $-t'$ en t'', dan is

$$\int_{-t'}^{t''}dt\int ds\left(\varphi\frac{\partial V}{\partial N}-V\frac{\partial\varphi}{\partial N}\right)=\frac{1}{a^2}\left[\int d\tau\left(V\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\varphi\frac{\partial V}{\partial t}\right)\right]_{-t'}^{t''}\quad(10)$$

Kirchhoff stelt nu

$$V=\frac{F(r_o+at)}{r_o},$$

waarin r_o de afstand is van eenig punt x, y en z tot een willekeurig vast punt o. Deze onderstelling is geoorloofd, want dan voldoet V aan (1) voor elken vorm van F.

Betreffende F onderstelt Kirchhoff:

1° $F(\zeta)$ en $F'(\zeta)$ zijn oneindig klein voor iedere eindige positieve of negatieve waarde van ζ;

2° $F(\zeta)$, is nooit negatief, wat ook ζ moge zijn;

3° $\int F(\zeta)\,d\zeta=1$, (11)

indien we deze integraal nemen van een eindige negatieve tot een eindige positieve waarde van ζ.

Zij nu gegeven een ruimte geheel begrensd door een oppervlak s, waarbinnen de ether homogeen is en waarbinnen geen lichtbronnen voorkomen. Het punt o kiezen we binnen die ruimte. Dan is binnen die ruimte φ continu en eindig en ook V behalve in het punt o, waar V oneindig groot wordt.

We mogen dus (10) toepassen op de ruimte begrensd door s en

een oneindig klein bolletje met straal R, dat we om het punt o leggen. Van dat bolletje zij dS een oppervlakteelement. Verder kiezen we t' zoo groot, dat voor de geheele ruimte s de uitdrukking $r_o - at'$ negatief en eindig blijft.

Onder die voorwaarden komen in de rechterzijde van (10) slechts waarden voor van V en $\frac{\partial V}{\partial t}$, waarin $r_o + at$ eindig positief of eindig negatief is, en die dus oneindig klein zijn.

Van de vergelijkingen (10) blijft dus slechts over:

$$\int_{-t'}^{t''} dt \int ds \left(\varphi \frac{\partial V}{\partial N} - V \frac{\partial \varphi}{\partial N}\right) + \int_{-t'}^{t''} dt \int dS \left(\varphi \frac{\partial V}{\partial N} - V \frac{\partial \varphi}{\partial N}\right) = o. \quad (12)$$

In de tweede integraal is

$$V = \frac{F(R + at)}{R},$$

$$\frac{\partial V}{\partial N} = \frac{\partial V}{\partial R} = -\frac{1}{R^2} F(R + at) + \frac{1}{R} \frac{\partial F(R + at)}{\partial R}.$$

Noemen we nu $d\sigma$ een ruimtehoekelement, waarvan het punt o hoekpunt is, dan is

$$dS = R^2 d\sigma$$

en dus

$$\int dS \left(\varphi \frac{\partial V}{\partial N} - V \frac{\partial \varphi}{\partial N}\right) =$$

$$= \int d\sigma \left\{ -\varphi F(R + at) + R\varphi \frac{\partial F(R + at)}{\partial R} - R \frac{\partial \varphi}{\partial N} F(R + at) \right\},$$

of daar R oneindig klein is:

$$\int dS \left(\varphi \frac{\partial V}{\partial N} - V \frac{\partial \varphi}{\partial N}\right) = -\int d\sigma \, \varphi_o F(at) = -4\pi \varphi_o F(at),$$

waarin φ_o voorstelt de waarde van φ in het punt o op den tijd t.

Nu is volgens (11)

$$\int_{-t'}^{t''} dt \, F(at) = \frac{1}{a},$$

en tot de waarde dezer integraal hebben alleen bijgedragen de elementen in de buurt van $t = o$, dus

$$\int_{-t'}^{t''} dt\ \varphi_o(t)\, F(at) = \frac{1}{a}\,\varphi_o(o),$$

waarin $\varphi_o(o)$ voorstelt de waarde van φ in het punt o op tijd $t = o$.

De tweede integraal uit (12) wordt dus

$$\int_{-t'}^{t''} dt \int dS \left(\varphi \frac{\partial V}{\partial N} - V \frac{\partial \varphi}{\partial N}\right) = -\frac{4\pi}{a}\,\varphi_o(o).$$

Thans gaan we de eerste integraal van (12) transformeeren; na omkeering der integraties wordt zij

$$\int ds \int_{-t'}^{t''} dt \left(\varphi \frac{\partial V}{\partial N} - V \frac{\partial \varphi}{\partial N}\right);$$

hierin is

$$\int_{-t'}^{t''} dt\ V \frac{\partial \varphi}{\partial N} = \int_{-t'}^{t''} dt\ \frac{F(r_o + at)}{r_o} \frac{\partial \varphi}{\partial N} = \frac{1}{a r_o} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial N}\right)_{t=-\frac{r_o}{a}},$$

terwijl in $\frac{\partial \varphi}{\partial N}$ na uitvoering der differentiatie gesteld moet worden $t = -\frac{r_o}{a}$. Stellen we dus

$$\frac{\partial \varphi}{\partial N} = f(t),$$

dan wordt

$$\int_{-t'}^{t''} dt\ V \frac{\partial \varphi}{\partial N} = \frac{1}{a r_o} f\left(-\frac{r_o}{a}\right).$$

Vervolgens is

$$\frac{\partial V}{\partial N} = \frac{\partial}{\partial N} \frac{F(r_o + at)}{r_o}$$

$$= F(r_o + at) \frac{\partial \frac{1}{r_o}}{\partial N} + \frac{1}{a r_o} \frac{\partial r_o}{\partial N} \frac{\partial}{\partial t} F(r_o + at),$$

en dus

$$\int_{-t'}^{t''} dt\, \varphi \frac{\partial V}{\partial N} = \frac{\partial \frac{1}{r_o}}{\partial N} \frac{1}{a} \varphi\left(-\frac{r_o}{a}\right) + \frac{1}{a r_o} \frac{\partial r_o}{\partial N} \int_{-t'}^{t''} \varphi \frac{\partial F(r_o + at)}{\partial t} dt,$$

wat door partieele integratie van de laatste integraal overgaat in

$$\int_{-t'}^{t''} dt\, \varphi \frac{\partial V}{\partial N} = \frac{\partial \frac{1}{r_o}}{\partial N} \frac{1}{a} \varphi\left(-\frac{r_o}{a}\right) + \frac{1}{a r_o} \frac{\partial r_o}{\partial N} \Big[\varphi F(r_o + at)\Big]_{-t'}^{t''} -$$

$$- \frac{1}{a r_o} \frac{\partial r_o}{\partial N} \int_{-t'}^{t''} \frac{\partial \varphi}{\partial t} F(r_o + at)\, dt.$$

De tweede term is nul omdat F voor een eindig argument verdwijnt en de laatste term herleidend volgens (11) krijgen we:

$$\int_{-t'}^{t''} dt\, \varphi \frac{\partial V}{\partial N} = \frac{\partial \frac{1}{r_o}}{\partial N} \frac{1}{a} \varphi\left(-\frac{r_o}{a}\right) - \frac{1}{a^2 r_o} \frac{\partial r_o}{\partial N} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_{t=-\frac{r_o}{a}}.$$

Derhalve wordt (12):

$$\int ds \left[\frac{\partial \frac{1}{r_o}}{\partial N} \frac{1}{a} \varphi\left(-\frac{r_o}{a}\right) - \frac{1}{a^2 r_o} \frac{\partial r_o}{\partial N} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_{t=-\frac{r_o}{a}} - \frac{1}{a r_o} f\left(-\frac{r_o}{a}\right)\right] - \frac{4\pi}{a} \varphi_o(o) = o.$$

Verleggen we nu den tijdsoorsprong, zoodat het oorspronkelijke aanvangspunt het tijdstip t wordt, dan is

$$4\pi \varphi_o(t) = \int ds \left[\frac{\partial \frac{1}{r_o}}{\partial N} \varphi\left(t - \frac{r_o}{a}\right) - \frac{1}{a r_o} \frac{\partial r_o}{\partial N} \frac{\partial \varphi\left(t - \frac{r_o}{a}\right)}{\partial t} - \frac{1}{r_o} f\left(t - \frac{r_o}{a}\right)\right].$$

Merken we nu nog op dat

$$\frac{\partial \frac{1}{r_o}}{\partial N} \varphi\left(t - \frac{r_o}{a}\right) - \frac{1}{a r_o} \frac{\partial r_o}{\partial N} \frac{\partial \varphi\left(t - \frac{r_o}{a}\right)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial N} \frac{\varphi\left(t - \frac{r_o}{a}\right)}{r_o},$$

indien we onder den operator $\frac{\partial}{\partial N}$ in het tweede lid dezer

vergelijking verstaan den operator $\frac{\partial r_o}{\partial N} \cdot \frac{\partial}{\partial r_o}$, dan kunnen we ons resultaat in den vorm brengen:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_o(t) &= \frac{1}{4\pi}\int \Omega \, ds, \\ \text{waarin} \\ \Omega &= \frac{\partial}{\partial N}\,\frac{\varphi\left(t-\frac{r_o}{a}\right)}{r_o} - \frac{1}{r_o} f\left(t-\frac{r_o}{a}\right), \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

terwijl f de beteekenis heeft:

$$f(t) = \frac{\partial \varphi(t)}{\partial N}.$$

Indien we dus de potentiaalfunctie φ eener golfbeweging op een gegeven oppervlak s kennen benevens haar diff. quot. op dat oppervlak naar den tijd en naar de normaal op het oppervlak, dan geven de vergelijkingen (13) ons de potentiaalfunctie in eenig punt o binnen s gelegen.

De vergelijkingen (13) vormen de zoogenoemde formuleering van Kirchhoff van het beginsel van Huygens.

Om de vergelijkingen (13) te kunnen interpreteeren merken we op, dat indien de functie φ alleen afhangt van r en van t, de diff. verg. (1) te integreeren is en dat dan haar meest algemeene oplossing den vorm heeft:

$$\varphi = \frac{1}{r} F\left(t-\frac{r}{a}\right) + \frac{1}{r} F\left(t+\frac{r}{a}\right).$$

In die onderstelling hebben we te doen met bolvormige golven en r is de afstand tot het middelpunt der golven.

De eerste term stelt voor de potentiaal van een bolvormige golfbeweging die zich van het middelpunt verwijdert, en de tweede term stelt voor de potentiaal van een bolvormige golfbeweging die zich naar het middelpunt toe beweegt.

Dus de tweede integraal uit Kirchhoff's theorema n.l.

$$\int \frac{1}{r_o} f\left(t-\frac{r_o}{a}\right) ds$$

stelt voor de potentiaal die in het punt o wordt verwekt door bolvormige golven die uitgaan van alle elementen van het oppervlak s, indien

$$\frac{1}{r} f\left(t - \frac{r}{a}\right) ds$$

voorstelt de potentiaal door een element ds verwekt in een punt op afstand r van ds gelegen.

Om ook de eerste integraal te kunnen interpreteeren, stellen we ons voor op het oppervlak s een soort dubbellaag van positieve en negatieve middelpunten van verstoring. Met een negatief middelpunt van verstoring bedoelen we een punt, dat bolvormige golven uitzendt, waarvan de potentiaal negatief is. De afstand der lagen zij dN. Van de beweging verwekt door een bolvormige golf uitgaande van een element ds der buitenste laag zij de potentiaal in eenig punt op afstand r van dat element gelegen

$$- ds \frac{\varphi\left(t - \frac{r_o}{a}\right)}{r} \frac{1}{dN}$$

en in datzelfde punt zij de potentiaal verwekt door het bijbehoorend element der binnenste laag

$$ds \frac{\varphi\left(t - \frac{r_o}{a}\right)}{r} \frac{1}{dN} + ds \frac{\partial}{\partial N} \left[\frac{\varphi\left(t - \frac{r_o}{a}\right)}{r} \frac{1}{dN}\right] dN.$$

De potentiaal door beide elementen te samen verwekt in dat punt is dan gelijk aan de som dezer beide potentialen (want de diff. verg. der golfbeweging is lineair), en dus gelijk aan

$$ds \frac{\partial}{\partial N} \frac{\varphi\left(t - \frac{r_o}{a}\right)}{r_o},$$

zoodat de eerste integraal uit Kirchhoff's theorema, n.l.

$$\int \frac{\partial}{\partial N} \frac{\varphi\left(t - \frac{r_o}{a}\right)}{r_o} ds$$

kan worden opgevat als de potentiaal der beweging verwekt in het punt o door positieve en negatieve middelpunten van verstoring, die in een dubbellaag van de boven omschreven aard zijn gerangschikt op het oppervlak s en bolvormige golven uitzenden.

De vergelijkingen (13) kunnen we derhalve aldus uitspreken:

Ieder golfbeweging binnen een gesloten ruimte waarin het medium continu en isotroop is en waarbinnen zich geen middelpunten van verstoring bevinden, kan worden opgevat als te worden verwekt door bolvormige golven die worden uitgezonden door middelpunten van verstoring, die deels in een enkelvoudige deels in een dubbellaag gerangschikt zijn op het oppervlak s dat die ruimte omsluit.

De vergelijkingen (13) leeren ons dus de potentiaal door een willekeurige golfbeweging verwekt, berekenen uit de potentiaal van denkbeeldige bolvormige golven. Wat betreft de golfbeweging binnen s mogen we dus voor de werkelijke middelpunten van verstoring genoemde denkbeeldige middelpunten van verstoring substitueeren die gelegen zijn op s.

Ook Huygens en Fresnel maakten in hun beschouwingen van secundaire bolvormige golven gebruik; maar terwijl zij die bolvormige golven als werkelijk bestaande voorstelden en als wordende uitgezonden door ieder deeltje dat in beweging gekomen is krachtens de beweging die het in werkelijkheid heeft, moeten de secundaire golven waarmede we Kirchhoff's theorema interpreteerden als geheel denkbeeldig worden beschouwd: physisch toch is het bestaan van zulk een dubbellaag van positieve en negatieve middelpunten van verstoring niet denkbaar en in ieder geval is van zulk een dubbellaag op het oppervlak s in werkelijkheid geen sprake.

3. Mathematische bezwaren in te brengen tegen de wijze waarop Kirchhoff zijn formuleering van het beginsel van Huygens afleidt, en exacte afleiding daarvan.

Tegen de wijze waarop Kirchhoff zijn formuleering van het beginsel van Huygens heeft afgeleid, zijn bezwaren in te brengen.

In de vergelijking (10) pg. 17 vervangt Kirchhoff de functie V door

$$\frac{F(r_o + at)}{r_o}.$$

Daar V eenwaardig en continu moet zijn binnen de ruimte s waarover de integratie wordt uitgevoerd, moet dat ook met F het geval zijn.

De mogelijkheid nu, dat er een functie F bestaat die continu is binnen die ruimte en tegelijkertijd voldoet aan de voorwaarden genoemd op pag. 17, is zeer twijfelachtig.

$F(\zeta)$ toch moet voor een eindige positieve of negatieve waarde van ζ oneindig klein worden en tevens moet $\int F(\zeta)\,d\zeta$ genomen tusschen een eindige positieve en een eindige negatieve grens gelijk aan 1 zijn. Men wordt daardoor wel genoodzaakt aan te nemen dat $F(\zeta)$ in de buurt van $\zeta = o$ oneindig groot wordt. En daar verder voor ζ eindig $F(\zeta)$ oneindig klein is ondersteld, moet $F(\zeta)$ indien men ζ van o laat toenemen tot een eindige waarde, hoe klein ook genomen, veranderen van oneindig groot tot oneindig klein. Er is reden om aan te nemen dat aan dezen eisch niet door een continue functie kan worden voldaan. Hoe het zij, voor de mogelijkheid dat er een functie bestaat die aan dien eisch voldoet en die in de buurt van het punt $\zeta = o$ wel continu blijft, heeft men geen voldoenden waarborg.

Kirchhoff zelf geeft [1]) een voorbeeld van zulk een functie F en kiest den vorm:

---

1) G. Kirchhoff. Vorlesungen über Mathematische Optik, pg. 24. 1891.

$$F(\zeta) = \frac{\mu}{\sqrt{\pi}} e^{-\mu^2 \zeta^2} .$$

Indien μ hierin een oneindig groot positief getal voorstelt dan voldoet $F(\zeta)$ aan de haar gestelde eischen, zooals eenvoudig is na te gaan. Maar dan is

$$\frac{\partial F(\zeta)}{\partial \zeta} = -\frac{2\mu^3}{\sqrt{\pi}} \zeta \, e^{-\mu^2 \zeta^2} ,$$

en stellen we hierin $\zeta = \frac{1}{\mu}$ dan

$$\frac{\partial F(\zeta)}{\partial \zeta} = -\frac{2\mu^2}{\sqrt{\pi}} e^{-1} .$$

Voor μ oneindig groot is dus $\frac{\partial F(\zeta)}{\partial \zeta}$ in het punt $\zeta = \frac{1}{\mu}$ oneindig groot en dus $F(\zeta)$ discontinu.

Nemen we aan dat μ niet oneindig groot is, maar zeer groot, dan is $F(\zeta)$ wel continu maar dan voldoet $F(\zeta)$ niet meer aan de eischen op pg. 17 genoemd.

De bezwaren tegen de invoering van de functie F boven genoemd blijken dus op Kirchhoff's voorbeeld van toepassing te zijn. Bovendien zou men de invoering eener functie, die aan zulke bijzondere voorwaarden moet voldoen, en in het eindresultaat niet meer voorkomt, als overbodig en misplaatst kunnen beschouwen.

Omdat Kirchhoff's theorema den grondslag uitmaakt van mijn onderzoekingen en een volmaakt exact bewijs dus gewenscht voor mij is, zal ik van de vele andere afleidingen die van dat theorema zijn gegeven er enkele bespreken.

Von Helmholtz staat in zijn „Vorlesungen über die Electromagnetische Theorie des Lichts" zeer lang bij het beginsel van Huygens stil. Bij de afleiding van Kirchhoff's theorema volgt hij Kirchhoff nagenoeg geheel. Voor de functie F kiest hij echter een ander voorbeeld n.l.

$$F(\zeta) = \frac{1}{\pi} \frac{c}{c^2 + \zeta^2} ,$$

waaruit volgt

$$\frac{\partial F(\zeta)}{\partial \zeta} = -\frac{1}{\pi}\frac{2c\zeta}{(c^2+\zeta^2)^2};$$

stellen we hierin $\zeta = c$, dan

$$\left\{\frac{\partial F(\zeta)}{\partial \zeta}\right\}_{\zeta=c} = -\frac{1}{\pi}\frac{1}{c^2}.$$

Gemakkelijk is na te gaan dat voor c oneindig klein $F(\zeta)$ aan de gestelde eischen voldoet, dat dan echter $\frac{\partial F(\zeta)}{\partial \zeta}$ in het punt $\zeta = c$ oneindig groot wordt en dat daar derhalve $F(\zeta)$ discontinu is. Onderstellen we zooals Helmholtz doet, c niet oneindig klein maar zeer klein dan blijft $F(\zeta)$ wel continu, maar voldoet niet meer aan de eischen van pg. 17.

Terwijl dus in de oorspronkelijke afleiding die Kirchhoff van zijn theorema gaf, aan de continuiteit van F moest worden getwijfeld, is in zijn latere afleiding, waar hij voor F een bepaald voorbeeld kiest, evenals in de afleiding van von Helmholtz de discontinuiteit van F en dus het niet meer vervuld worden der drie voorwaarden aan F op pg. 17 gesteld, aan te toonen.

Het komt me voor, dat tegen de invoering van iederen anderen vorm, dien men voor F zou kunnen kiezen, dezelfde bezwaren zouden zijn in te brengen.

Poincaré (leçons sur la théorie mathématique de la lumière, professées 1887—'88) bespreekt evenals von Helmholtz het beginsel van Huygens zeer uitvoerig. Op zeer eigenaardige wijze leidt hij een formuleering van dat beginsel af. Zijn formuleering is minder algemeen dan die van Kirchhoff en is zeer eenvoudig uit die van Kirchhoff af te leiden, hoewel hij onafhankelijk [1]) van Kirchhoff heeft gewerkt.

---

1) Aan het slot der voorrede van geneemd werk, die gedateerd is December 1888 zegt Poincaré: dans le chapitre relatif à la diffraction j'ai développé des idées que je croyais nouvelles. Je n'ai pas nommé Kirchhoff dont le nom aurait dû être cité à chaque ligne. Il est encore temps de réparer cet oubli involontaire. Je m'empresse de le faire en renvoyant aux Sitzungsberichte Juni 1882.

Poincaré tracht te vinden de algemeene oplossing der diff. verg.

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 \triangle \varphi \,, \qquad (1)$$

en beschouwt als zoodanig een functie van x, y, z en t, die identiek aan (1) voldoet en voor $t = o$ overgaat in een arbitraire coördinatenfunctie, terwijl evenzoo $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ voor $t = o$ in een andere arbitraire coördinatenfunctie overgaat.

Die aanvangswaarden van φ en $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ beschouwt Poincaré als gegeven en hij tracht dus het volgende vraagstuk op te lossen: indien van een golfbeweging gegeven zijn de aanvangswaarden van φ en $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$, vraagt men de waarde van φ in functie van de coördinaten en den tijd te bepalen.

Daar de aanvangswaarden van φ en $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ gegeven zijn, is de beweging van alle deeltjes op tijd nul bekend. Volgens de beschouwingen van Huygens zullen dan op den tijd t alle deeltjes bolvormige golven verwekt hebben, waarvan de stralen zijn $r = a t$, en dus zal een deeltje x, y, z op den tijd t alleen bereikt worden door bolvormige golven die uitgezonden zijn door de deeltjes, welke gelegen zijn op een bol met straal $r = a t$ om het punt x, y, z als middelpunt. Noemen we x', y', z' de coördinaten van een element ds van dien bol en houden we in het oog, dat voor bolvormige golven wier potentiaal slechts van r en t afhangt, de oplossing van (1) den vorm heeft $\frac{F}{r}$, dan brengt de voorstelling van Huygens er ons toe om te onderzoeken of aan (1) voldaan wordt door

$$\varphi_1 (x\, y\, z\, t) = \int \frac{F(x'\, y'\, z')}{r}\, ds \,, \qquad (14)$$

waarin F is een nog nader uit de initale gegevens te bepalen coördinatenfunctie, terwijl die integraal moet worden genomen over het oppervlak van een bol met straal $r = a t$ om het punt x, y, z als middelpunt.

Om te onderzoeken of (14) voldoet aan (1), merken we op dat bij een differentiatie van (14) naar de coördinaten de straal $r = at$ van den integratiebol standvastig blijft, maar het middelpunt van den bol oneindig kleine translaties dx, dy, dz verkrijgt. Dan krijgt dus ieder punt op den integratiebol translaties dx', dy', dz', die juist gelijk zijn aan dx, dy en dz; derhalve

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \int \frac{\partial F}{\partial x'} \frac{ds}{r},$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} = \int \frac{\partial^2 F}{\partial x'^2} \frac{ds}{r},$$

en dus

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} = \int \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z'^2} \right) \frac{ds}{r},$$

of

$$\triangle \varphi_1 = \int \frac{\triangle F}{r} ds. \tag{15}$$

Bij differentiatie naar t krijgt de straal $r = at$ een aangroeiing. Het middelpunt van den bol blijft op zijn plaats, maar het element ds verplaatst zich in de richting van den straal. Om die differentiatie naar t te kunnen uitvoeren, noemen we $d\sigma$ het ruimtehoekelement, waaronder het element ds uit het middelpunt van den bol wordt gezien, dan is

$$ds = r^2 d\sigma$$

en

$$\varphi_1 = \int F r \, d\sigma .$$

Geven we nu t een aangroeing dt, dan krijgt r eene aangroeiing $dr = a dt$ en F een aangroeiing $\frac{\partial F}{\partial r} dr$, terwijl $d\sigma$ daarbij constant blijft. Voor (16) is dus de operator $\frac{\partial}{\partial t}$ gelijkwaardig met $a \frac{\partial}{\partial r}$, zoodat

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = a \frac{\partial}{\partial r} \int F r \, d\sigma = a \int F \, d\sigma + a r \int \frac{\partial F}{\partial r} \, d\sigma .$$

waarbij we wel moeten onthouden dat $\frac{\partial F}{\partial r}$ kortheidshalve is geschreven voor

$$\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial r} .$$

Nu is het volgens het theorema van Green:

$$\int \frac{\partial F}{\partial r} \, ds = \int \triangle F \, d\tau ,$$

waarbij de laatste integraal moet genomen worden over het volume van den bol, waarvan $d\tau$ een element is. Waaruit volgt:

$$\int \frac{\partial F}{\partial r} \, d\sigma = \frac{1}{r^2} \int \triangle F \, d\tau , \qquad (17)$$

zoodat

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = a \int F \, d\sigma + \frac{a}{r} \int \triangle F \, d\tau .$$

Differentieeren we deze verg. nog eens naar t, dan

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} = a^2 \int \frac{\partial F}{\partial r} \, d\sigma - \frac{a^2}{r^2} \int \triangle F \, d\tau + \frac{a^2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \int \triangle F \, d\tau ,$$

of in verband met (17)

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} = \frac{a^2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \int \triangle F \, d\tau .$$

Nu beduidt

$$\frac{\partial}{\partial r} \int \triangle F \, d\tau$$

de aangroeiing die $\int \triangle F \, d\tau$ verkrijgt, indien we r een aangroeiing dr geven, en is dus gelijk aan de waarde van $\int \triangle F \, d\tau$ genomen over het volume van den bolschil besloten tusschen

de boloppervlakken r en $r + dr$; van die bolschil is $ds\ dr$ een volumeelement, dus

$$\frac{\partial}{\partial r}\left\{\int \triangle F\, d\tau\right\} dr = \int \triangle F\ ds\ dr\ ,$$

of

$$\frac{\partial}{\partial r}\left\{\int \triangle F\, d\tau\right\} dr = dr \int \triangle F ds\ ,$$

of

$$\frac{\partial}{\partial r}\int \triangle F\, d\tau = \int \triangle F ds\ ;$$

zoodat we ten slotte hebben gevonden

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} = \frac{a^2}{r}\int \triangle F ds\ , \tag{18}$$

waaruit in verband met (15) volgt, dat (14) een oplossing is van (1).

De oplossing (14) is echter nog niet de oplossing die Poincaré zoekt, want deze moet twee arbitraire functies bevatten. Om een tweede particuliere oplossing te vinden merken we op dat indien φ_1 eene oplossing is van (1), ook $\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}$ aan (1) voldoet. Uit de oplossing (14) volgt derhalve als tweede oplossing

$$\varphi_2 = \frac{\partial}{\partial t}\int \frac{F_1\,(x'\,y'\,z')}{r}\ ds\ , \tag{19}$$

waarin we het recht hebben voor F_1 een andere functie te kiezen dan de functie F in (14).

Nu is weder

$$\varphi_2 = \frac{\partial}{\partial t}\int \frac{F_1}{r}\, ds = \frac{\partial}{\partial t}\int F_1\, r\, d\sigma = a\,\frac{\partial}{\partial r}\int F_1\, r\, d\sigma\ ,$$

of

$$\varphi_2 = a\int \left(F_1 + r\,\frac{\partial F_1}{\partial r}\right) d\sigma\ . \tag{20}$$

Daar (1) lineair is zal ook de som van (14) en (20) voldoen aan (1), zoodat we krijgen als oplossing

$$\varphi = \int \frac{F}{r}\, ds + a \int \left(F_1 + r \frac{\partial F_1}{\partial r}\right) d\sigma ,$$

of

$$\varphi = \int \left(\frac{F}{r} + \frac{a}{r^2} F_1 + \frac{a}{r} \frac{\partial F_1}{\partial r}\right) ds . \qquad (21)$$

Deze oplossing bevat twee arbitraire coördinatenfuncties en is dus de oplossing, die Poincaré zoekt. Daar Poincaré de aanvangswaarden van φ en $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ als gegeven beschouwt, moeten we F en F_1 nog daarin gaan uitdrukken. We duiden die aanvangswaarden aan door $(\varphi)_o$ en $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_o$.

We kunnen (21) in den vorm schrijven:

$$\varphi = \int \left(r F + a F_1 + a r \frac{\partial F_1}{\partial r}\right) d\sigma , \qquad (21)$$

en laten we hierin t en dus r tot nul naderen, dan

$$(\varphi)_o = 4 \pi a F_1 ,$$

en dus

$$F_1 = \frac{1}{4 \pi a} (\varphi)_o . \qquad (22)$$

Om ook F te berekenen gaan we de vergelijking

$$\varphi = \int \frac{F}{r}\, ds + \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{F_1}{r}\, ds$$

differentieeren naar t, dan

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{F}{r} ds + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int \frac{F_1}{r}\, ds ;$$

nu is

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \frac{F}{r}\, ds = a \frac{\partial}{\partial r} \int F r\, d\sigma = a \int F\, d\sigma + a r \int \frac{\partial F}{\partial r}\, d\sigma ,$$

en volgens (18)

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int\frac{F}{r}\,ds = \frac{a^2}{r}\int\triangle F\,ds\,,$$

zoodat

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int\frac{F_1}{r}\,ds = \frac{a^2}{r}\int\triangle F_1\,ds = a^2 r\int\triangle F_1\,d\sigma\;;$$

waardoor we krijgen

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = a\int F\,d\sigma + ar\int\frac{\partial F}{\partial r}\,d\sigma + a^2 r\int\triangle F_1\,d\sigma\,.$$

Stellen we hierin t en dus r gelijk nul, dan

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_o = 4\pi a F$$

en dus

$$F = \frac{1}{4\pi a}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_o. \tag{23}$$

Door middel van (22) en (23) zijn de onbekende functies F en F_1 uitgedrukt in de als gegeven beschouwde functies $(\varphi)_o$ en $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_o$ en gaat (21) over in

$$\varphi(x\,y\,z\,t) = \frac{1}{4\pi}\int\left\{\frac{1}{ar}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_o + \frac{1}{r^2}(\varphi)_o + \frac{1}{r}\frac{\partial(\varphi)_o}{\partial r}\right\}ds.$$

Deze integraal moet worden genomen over een bol met straal $r = at$ om het punt x, y, z. We zullen daarom voor de duidelijkheid schrijven:

$$\varphi_{\substack{r=o\\t=t}} = \frac{1}{4\pi}\int\left\{\frac{1}{ar}\,\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\,\varphi\right\}_{\substack{r=at\\t=o}} ds\,. \tag{24}$$

Dit is de formuleering door Poincaré aan het beginsel van Huygens gegeven; zij leert ons de lichtbeweging in eenig punt op den tijd t kennen uit de lichtbeweging op den tijd nul op een bol met straal $r = at$ om dat punt beschre-

ven. Uit Kirchhoff's formuleering is zij gemakkelijk af te leiden. Volgens dat theorema (verg. 13) is

$$\varphi_o(t) = \frac{1}{4\pi}\int\left\{\frac{\partial}{\partial N}\frac{\varphi\left(t-\frac{r_o}{a}\right)}{r_o} - \frac{1}{r_o} f\left(t-\frac{r_o}{a}\right)\right\} ds,$$

waarin

$$f(t) = \frac{\partial \varphi(t)}{\partial N}.$$

Nu heeft in

$$\frac{\partial}{\partial N}\frac{\varphi\left(t-\frac{r_o}{a}\right)}{r_o}$$

de operator $\frac{\partial}{\partial N}$ de beteekenis $\frac{\partial r_o}{\partial N}\frac{\partial}{\partial r_o}$, derhalve

$$\varphi_o(t) = -\frac{1}{4\pi}\int\left\{\left(\frac{1}{r_o^2}\varphi + \frac{1}{a r_o}\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)\frac{\partial r_o}{\partial N} + \frac{1}{r_o}\frac{\partial \varphi}{\partial N}\right\}_{t=t-\frac{r_o}{a}} ds.$$

Passen we Kirchhoff's theorema in dezen vorm toe op een bol met straal $r = at'$ beschreven om het punt o, dan is $r = r_o = at'$ en daar N de normaal is op s naar binnen getrokken, wordt

$$\frac{\partial}{\partial N} = -\frac{\partial}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r_o},$$

dus

$$\underset{\substack{r=o\\t=t}}{\varphi} = \frac{1}{4\pi}\int\left\{\frac{\varphi}{r^2} + \frac{1}{a r}\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right\}_{\substack{t=t-t'\\r=at'}} ds,$$

of als we hierin stellen $t' = t$, dan is

$$\underset{\substack{r=o\\t=t}}{\varphi} = \frac{1}{4\pi}\int\left\{\frac{\varphi}{r^2} + \frac{1}{a r}\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right\}_{\substack{t=o\\r=at}} ds;$$

en dit is juist de formuleering van Poincaré.

Poincaré's formuleering is dus niets anders dan een speciaal geval van het theorema van Kirchhoff en minder algemeen.

Poincaré vermeldt niet de voorwaarden waaronder (24) geldt, maar uit zijn afleiding kunnen we die voorwaarden gemakkelijk voor den dag brengen. Stilzwijgend neemt hij aan, dat de functies F en F_1 en haar differentiaalquotienten naar de coördinaten continu en eindig zijn op den integratiebol; verder heeft hij om het verband tusschen die functies met $(\varphi)_o$ en $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_o$ op te sporen den straal van dien integratiebol tot nul laten naderen. De continuiteitsvoorwaarden van F, F_1 en haar differentiaalquotienten moeten dus ook binnen dien bol vervuld zijn, wat bovendien ook nog geeischt wordt door de toepassing van het theorema van Green.

De voorwaarden waaronder Poincaré's theorema geldt zijn dus dezelfde als voor dat van Kirchhoff, n.l. dat op en binnen den integratiebol φ en $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ met haar afgeleiden naar de coördinaten continu en eindig zijn. Physisch gesproken : binnen, op en op oneindig kleinen afstand van den integratiebol mogen geen vreemde lichamen of lichtbronnen voorkomen.

Men zou kunnen meenen, dat de particuliere oplossing

$$\varphi_1 (x\, y\, z\, t) = \int \frac{F(x'\, y'\, z')}{r}\, ds$$

in het punt $r = o$ oneindig wordt; dit is niet zoo, want stellen we in die integraal $ds = r^2 d\sigma$ en laten we dan r en dus t tot nul naderen dan vinden we

$$\varphi_1 (x\, y\, z\, o) = \Big[4\pi\, r\, F \Big]_{\substack{r=o \\ t=o}} = o.$$

Evenzoo blijft de tweede particuliere oplossing in het punt $r = o$ eindig; zij heeft in dat punt de waarde $4\pi a F_1$ of wel $(\varphi)_o$.

Van de eerste oplossing ligt dus het particuliere daarin, dat de aanvangswaarde van de potentiaal nul is, en van de tweede

oplossing, dat de aanvangswaarde van het differentiaalquotient naar den tijd van de potentiaal nul is, want

$$\varphi_2 = \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{F_1}{r}\, ds$$

en dus

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int \frac{F_1}{r}\, ds\,,$$

of volgens (18)

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial t} = \frac{a^2}{r} \int \triangle F_1\, ds\,,$$

of

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial t} = a \int \triangle F_1\, r\, d\sigma\,.$$

Stellen we hierin t en dus r gelijk nul, dan :

$$\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial t}\right)_o = \left[4\pi a^2 \triangle F_1\, r\right]_{\substack{r=o \\ t=o}} = o.$$

Terwijl ik dus niet geloof, dat tegen de exactheid van Poincaré's afleiding iets is in te brengen, komt het mij echter voor, dat hij geen recht heeft zijn oplossing de algemeene oplossing van de diff. verg. der golfbeweging te noemen.

Door toepassing n.l. van het beginsel van Huygens leidt Poincaré twee particuliere oplossingen van (1) af. In beide oplossingen ligt dus het principe opgesloten dat de waarde van φ in eenig punt op tijd t alleen afhangt van de beweging op tijd o op een bol met straal $r = at$ om dat punt beschreven. Alleen in de onderstelling, dat dat principe juist is, is Poincaré's oplossing de algemeene te noemen, en verdienen de functies F en F_1, die expliciet niet afhangen van t en waarin $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = r^2$, den naam arbitraire functies.

A priori zou men geneigd zijn te meenen, dat de beweging op tijd t in eenig punt niet alleen zou afhangen van de beweging op tijd nul op een bol met straal $r = at$ om dat punt beschreven, maar ook van de beweging op tijd nul

in alle punten binnen dien bol. Het bewijs dat dit niet zoo is ontbreekt bij Poincaré; zooals Poincaré de verg. (24) heeft afgeleid mag zij dus niet de algemeene oplossing van (1) worden genoemd, maar slechts een formuleering van het beginsel van Huygens.

Een korte en zeer elegante afleiding van Kirchhoff's theorema geeft Gutzmer [1]; zonder van een hulpfunctie gebruik te maken leidt hij op volmaakt exacte wijze dat theorema in zijn algemeene gedaante af.

Volgens het theorema van Green (pag. 17) is

$$\int \left(V \frac{\partial U}{\partial N} - U \frac{\partial V}{\partial N} \right) ds = \int (U \triangle V - V \triangle U) \, d\tau . \quad (25)$$

Stellen we hierin $U = \frac{1}{r_o}$, waarin r_o voorstelt den afstand van eenig punt x, y, z tot een vast punt o binnen s gelegen, dan is U overal continu en eindig behalve in het punt o.

Daarom leggen we om dat punt een bolletje met straal R en mogen dan het theorema van Green toepassen op de ruimte besloten tusschen s en dat bolletje.

Noemen we van dat bolletje dS een oppervlakteelement, dan is daar R oneindig klein is

$$\int V \frac{\partial U}{\partial N} dS = \int V \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial R} dS = - \frac{V_o}{R^2} \int dS = - 4\pi V_o ,$$

waarin V_o voorstelt de waarde van V in het punt o.

En indien we even een polair hulpcoördinatenstelsel invoeren r, ϑ, φ met het punt o als oorsprong, dan is

$$\int U \frac{\partial V}{\partial N} dS = \int_o^{\pi} \int_o^{2\pi} \frac{1}{R} \frac{\partial V}{\partial R} R^2 \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi =$$

$$= R \int_o^{\pi} \int_o^{2\pi} \frac{\partial V}{\partial R} \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi ,$$

---

1) Gutzmer. Journal für die Mathematik. Crelle. Bd. 114 pg. 333.

en dus, daar $\frac{\partial V}{\partial R}$ op het bolletje eindig is, is voor $R = o$

$$\int U \frac{\partial V}{\partial N} dS = o .$$

Zoodat (25) wordt:

$$4\pi V_o = \int \left(V \frac{\partial \frac{1}{r_o}}{\partial N} - \frac{1}{r_o} \frac{\partial V}{\partial N} \right) ds - \int \left(\frac{1}{r_o} \triangle V - V \triangle \frac{1}{r_o} \right) d\tau , \quad (26)$$

waarin de eerste integraal alleen genomen moet worden over het oppervlak s en de tweede over de ruimte besloten tusschen s en het bolletje R.

Nu is

$$\triangle \frac{1}{r_o} = o$$

en dus

$$\int V \triangle \frac{1}{r_o} d\tau = o .$$

Noemen we verder $d\tau'$ een volumeelement van het bolletje en voeren we weder hetzelfde coördinatenstelsel r, ϑ, φ in, dan is

$$\int \frac{1}{r_o} \triangle V d\tau' = \int_o^{\pi} \int_o^{2\pi} \int_o^{R} \frac{1}{r} \triangle V r^2 \sin\vartheta \, d\vartheta \, dr \, d\varphi .$$

Daar R oneindig klein is, mogen we $\triangle V$ als een constante beschouwen, dus

$$\int \frac{1}{r_o} \triangle V d\tau' = R \triangle V \int_o^{\pi} \int_o^{2\pi} \sin\vartheta \, d\vartheta \, dr \, d\varphi ,$$

en ook deze integraal verdwijnt voor $R = o$.

De laatste integraal in (26) is dus gelijk aan

$$\int \frac{1}{r_o} \triangle V d\tau ,$$

en deze integraal mogen we uitstrekken over de geheele ruimte door s omsloten. Derhalve

$$4\pi V_0 = \int \left(V \frac{\partial \frac{1}{r_0}}{\partial N} - \frac{1}{r_0} \frac{\partial V}{\partial N} \right) ds - \int \frac{1}{r_0} \triangle V \, d\tau \ , \qquad (27)$$

terwijl de eerste integraal genomen moet worden over het oppervlak s en de tweede over de ruimte door s omsloten.

Van dit theorema, dat in de potentiaaltheorie [1]) een gewichtige rol speelt, gaat Gutzmer uit.

Hij stelt hierin

$$V = \varphi \left(x\, y\, z\, t - \frac{r_0}{a} \right),$$

waarin $\varphi(x\, y\, z\, t)$ is de potentiaalfunctie of meer in het algemeen ieder functie die voldoet aan (1).

V is dus de functie die we krijgen indien we in φ in plaats van t schrijven $t - \frac{r_0}{a}$.

Binnen s moet V en dus ook φ continu en eindig zijn evenals haar eerste diff. quot. naar x, y en z. Physisch gesproken: binnen s, op s, of op oneindig kleinen afstand buiten s, mogen zich geen lichtbronnen of vreemde lichamen bevinden.

Dan wordt (27)

$$4\pi \varphi(x_0\, y_0\, z_0\, t) = \int \left\{ \frac{\partial \frac{1}{r_0}}{\partial N} \varphi \left(t - \frac{r_0}{a} \right) - \frac{1}{r_0} \frac{\partial \varphi \left(t - \frac{r_0}{a} \right)}{\partial N} \right\} ds -$$

$$- \int \frac{1}{r_0} \triangle \varphi \left(t - \frac{r_0}{a} \right) d\tau \ . \qquad (28)$$

Noemen wij nu kortheidshalve

$$\frac{\partial \varphi(t)}{\partial x} = \varphi_1(t) \ , \qquad \frac{\partial \varphi(t)}{\partial y} = \varphi_2(t) \ , \qquad \frac{\partial \varphi(t)}{\partial z} = \varphi_3(t) \ ,$$

$$\frac{\partial^2 \varphi(t)}{\partial x^2} = \varphi_{11}(t) \ , \qquad \frac{\partial^2 \varphi(t)}{\partial y^2} = \varphi_{22}(t) \ , \qquad \frac{\partial^2 \varphi(t)}{\partial z^2} = \varphi_{33}(t) \ ,$$

1) Green. An Essay on the application of Math. Anal. to the Theory of Electr. and Magnet. 1828 art. 3 eq. (3) — Mathem. papers p. 27.

dan is

$$\frac{\partial\,\varphi\left(t-\frac{r_o}{a}\right)}{\partial x} = \varphi_1\left(t-\frac{r_o}{a}\right) - \frac{1}{a}\,\frac{\partial\,\varphi\left(t-\frac{r_o}{a}\right)}{\partial t}\,\frac{\partial\,r_o}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2\,\varphi\left(t-\frac{r_o}{a}\right)}{\partial x^2} = \varphi_{11}\left(t-\frac{r_o}{a}\right) - \frac{2}{a}\,\frac{\partial\,\varphi_1\left(t-\frac{r_o}{a}\right)}{\partial t}\,\frac{\partial\,r_o}{\partial x} +$$

$$+\frac{1}{a^2}\,\frac{\partial^2\varphi\left(t-\frac{r_o}{a}\right)}{\partial t^2}\left(\frac{\partial\,r_o}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{a}\,\frac{\partial\varphi\left(t-\frac{r_o}{a}\right)}{\partial t}\,\frac{\partial^2 r_o}{\partial x^2}.$$

Houden we nu in het oog, dat

$$\left(\frac{\partial\,r_o}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\,r_o}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\,r_o}{\partial z}\right)^2 = 1$$

en dat

$$\triangle r_o = \frac{2}{r_o},$$

dan volgt hieruit

$$\triangle\varphi\left(t-\frac{r_o}{a}\right) = \varphi_{11}\left(t-\frac{r_o}{a}\right) + \varphi_{22}\left(t-\frac{r_o}{a}\right) + \varphi_{33}\left(t-\frac{r_o}{a}\right)$$

$$-\frac{2}{a}\left\{\frac{\partial\,\varphi_1\left(t-\frac{r_o}{a}\right)}{\partial t}\,\frac{\partial\,r_o}{\partial x} + \frac{\partial\,\varphi_2\left(t-\frac{r_o}{a}\right)}{\partial t}\,\frac{\partial\,r_o}{\partial y} + \frac{\partial\,\varphi_3\left(t-\frac{r_o}{a}\right)}{\partial t}\,\frac{\partial\,r_o}{\partial z}\right\}$$

$$+\frac{1}{a^2}\,\frac{\partial^2\,\varphi\left(t-\frac{r_o}{a}\right)}{\partial t^2} - \frac{2}{a\,r_o}\,\frac{\partial\,\varphi\left(t-\frac{r_o}{a}\right)}{\partial t}.$$

Vereenigen we hiervan de eerste drie termen door middel van

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = a^2\triangle\varphi,$$

dan is

$$\triangle \varphi\left(t-\frac{r_o}{a}\right)=\frac{2}{a^2}\frac{\partial^2\varphi\left(t-\frac{r_o}{a}\right)}{\partial t^2}-\frac{2}{a\,r_o}\frac{\partial\,\varphi\left(t-\frac{r_o}{a}\right)}{\partial t}-$$

$$-\frac{2}{a}\left\{\frac{\partial\,\varphi_1\left(t-\frac{r_o}{a}\right)}{\partial t}\frac{\partial r_o}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_2\left(t-\frac{r_o}{a}\right)}{\partial t}\frac{\partial r_o}{\partial y}+\frac{\partial\,\varphi_3\left(t-\frac{r_o}{a}\right)}{\partial t}\frac{\partial r_o}{\partial z}\right\}.$$

Voegen we hiervan de eerste en laatste term samen, dan

$$\triangle \varphi\left(t-\frac{r_o}{a}\right)=-\frac{2}{a}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\varphi_1\left(t-\frac{r_o}{a}\right)\frac{\partial r_o}{\partial x}+\varphi_2\left(t-\frac{r_o}{a}\right)\frac{\partial r_o}{\partial y}\right.$$

$$\left.+\varphi_3\left(t-\frac{r_o}{a}\right)\frac{\partial r_o}{\partial z}-\frac{1}{a}\frac{\partial\,\varphi\left(t-\frac{r_o}{a}\right)}{\partial t}\right\}-\frac{2}{a}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\varphi\left(t-\frac{r_o}{a}\right)}{r_o}$$

of

$$\triangle\,\varphi\left(t-\frac{r_o}{a}\right)=-\frac{2}{a}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial r_o}\,\varphi\left(t-\frac{r_o}{a}\right)-\frac{2}{a}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\varphi\left(t-\frac{r_o}{a}\right)}{r_o}\,.$$

De laatste integraal uit (28) wordt derhalve

$$\int\frac{1}{r_o}\triangle\varphi\left(t-\frac{r_o}{a}\right)d\tau=-\frac{2}{a}\frac{\partial}{\partial t}\int\left\{\frac{1}{r_o}\frac{\partial}{\partial r_o}\,\varphi\left(t-\frac{r_o}{a}\right)+\frac{\varphi\left(t-\frac{r_o}{a}\right)}{r_o^2}\right\}d\tau. \quad (29)$$

Nu is $d\tau = r_o^2\,dr_o\,d\sigma$, wanneer $d\tau$ een ruimtehoekelement is met het punt o tot hoekpunt, en dus

$$\int\frac{1}{r_o}\frac{\partial\,\varphi\left(t-\frac{r_o}{a}\right)}{\partial r_o}\,d\tau=\int d\sigma\int_o^R\frac{\partial\,\varphi\left(t-\frac{r_o}{a}\right)}{\partial r_o}\,r_o\,dr_o\,,$$

waarin R voorstelt den afstand van een element van het oppervlak s tot het punt o, of als we partieel integreeren:

$$\int\frac{1}{r_o}\frac{\partial\,\varphi\left(t-\frac{r_o}{a}\right)}{\partial r_o}d\tau=\int d\sigma\,R\,\varphi\left(t-\frac{R}{a}\right)-\int\int_o^R\varphi\left(t-\frac{r_o}{a}\right)dr_o\;d\sigma=$$

$$=\int d\sigma\;R\,\varphi\left(t-\frac{R}{a}\right)-\int\varphi\left(t-\frac{r_o}{a}\right)\frac{d\tau}{r_o^2}.$$

Hierdoor gaat (29) over in

$$\int \frac{1}{r^0} \triangle \varphi \left(t - \frac{r_0}{a}\right) d\tau = -\frac{2}{a} \frac{\partial}{\partial t} \int d\sigma \; R \, \varphi \left(t - \frac{R}{a}\right) :$$

nu is

$$R^2 \, d\sigma = -\cos (NR) \, ds = -\frac{\partial R}{\partial N} \, ds ,$$

dus

$$\int \frac{1}{r_0} \triangle \varphi \left(t - \frac{r_0}{a}\right) d\tau = \frac{2}{a} \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{\varphi \left(t - \frac{R}{a}\right)}{R} \frac{\partial R}{\partial N} ds .$$

We kunnen in het tweede lid R vervangen door r_0, dan

$$\int \frac{1}{r_0} \triangle \varphi \left(t - \frac{r_0}{a}\right) d\tau = \frac{2}{a} \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{\varphi \left(t - \frac{r_0}{a}\right)}{r_0} \frac{\partial r_0}{\partial N} ds ,$$

waardoor (28) overgaat in

$$4\pi \varphi (x_0 \, y_0 \, z_0 \, t) = \int \left\{ \frac{\partial \frac{1}{r_0}}{\partial N} \varphi \left(t - \frac{r_0}{a}\right) - \frac{1}{r_0} \frac{\partial \varphi \left(t - \frac{r_0}{a}\right)}{\partial N} - \frac{2}{a r_0} \frac{\partial r_0}{\partial N} \frac{\partial \varphi \left(t - \frac{r_0}{a}\right)}{\partial t} \right\} ds .$$

Nu is

$$\frac{\partial \varphi \left(t - \frac{r_0}{a}\right)}{\partial N} = f \left(t - \frac{r_0}{a}\right) - \frac{1}{a} \frac{\partial \varphi \left(t - \frac{r_0}{a}\right)}{\partial t} \frac{\partial r_0}{\partial N} ,$$

indien de functie f hierin de beteekenis heeft

$$f (t) = \frac{\partial \varphi (t)}{\partial N}$$

en dus

$$4\pi \varphi (x_0 \, y_0 \, z_0 \, t) = \int \left\{ \frac{\partial \frac{1}{r_0}}{\partial N} \varphi \left(t - \frac{r_0}{a}\right) - \frac{1}{a r_0} \frac{\partial \varphi \left(t - \frac{r_0}{a}\right)}{\partial t} \frac{\partial r_0}{\partial N} - \frac{1}{r_0} f \left(t - \frac{r_0}{a}\right) \right\} ds .$$

Dit is Kirchhoff's formuleering van het beginsel van Huygens. Het theorema van Kirchhoff blijkt dus niets

anders te zijn dan een transformatie van het theorema (27), indien we daarin stellen

$$V = \varphi\left(x\,y\,z\,t - \frac{r_0}{a}\right),$$

terwijl φ moet voldoen aan de diff. verg. (1) der golfbeweging en binnen, op en op oneindig kleinen afstand buiten s continu en eindig moet zijn evenals haar diff. quot. naar de coördinaten.

Deze afleiding van Kirchhoff's theorema is volmaakt exact.

Eindelijk zal ik nog bespreken een bewijs door Beltrami van Kirchhoff's theorema gegeven. Op verschillende wijzen heeft hij dat theorema afgeleid [1]).

Het bewijs dat ik hier laat volgen heeft het eigenaardige dat Beltrami daarin een algemeener theorema afleidt, waaruit door een eenvoudige substitutie Kirchhoff's theorema direct volgt.

Indien de coördinatenfunctie V eindig en continu is binnen een ruimte s waarvan ds is een oppervlakteelement en $d\tau$ een volumeelement, terwijl N de normaal is naar binnen gerekend, dan geldt zooals we bewezen het theorema (27).

Nu is, indien we partieel integreeren volgens de methode van Green:

$$\int\frac{1}{r_0}\,\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\,d\tau = -\int\frac{1}{r_0}\,\frac{\partial V}{\partial x}\cos(Nx)\,ds - \int\frac{\partial V}{\partial x}\,\frac{\partial\,\frac{1}{r_0}}{\partial x}\,d\tau$$

$$= -\int\frac{1}{r_0}\,\frac{\partial V}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial N}\,ds + \int\frac{1}{r_0^2}\,\frac{\partial V}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial r_0}\,d\tau$$

en dus

$$\int\frac{1}{r_0}\,\triangle V\,d\tau = -\int\frac{1}{r_0}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial N} + \frac{\partial V}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial N} + \frac{\partial V}{\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial N}\right)ds$$

$$+\int\frac{1}{r_0^2}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial r_0} + \frac{\partial V}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial r_0} + \frac{\partial V}{\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial r_0}\right)d\tau$$

---

1) Beltrami. Rendiconti d. Reale Acad. dei Lincei 1892 1° semestre pg. 99. Rendiconti d. Reale Acad. dei Lincei 1895 2° semestre pg. 29 en pg. 51. Rendiconti d. Reale Instituto Lombardo serie II vol. XXII 1889.

of

$$\int \frac{1}{r_o} \triangle V \, d\tau = -\int \frac{1}{r_o} \frac{\partial V}{\partial N} \, ds + \int \frac{1}{r_o^2} \frac{\partial V}{\partial r_o} \, d\tau .$$

Door dit te substitueeren in het theorema (27) krijgen we

$$4\pi V_o = \int V \frac{\partial \frac{1}{r_o}}{\partial N} ds - \int \frac{\partial V}{\partial r_o} \frac{1}{r_o^2} \, d\tau . \qquad (30)$$

Dit is het theorema van Gauss hetgeen door Beltrami als uitgangspunt wordt gekozen.

Beltrami stelt zich voor een coördinatenfunctie U, waarin behalve de letters x, y en z ook nog de letter r_o voorkomt. Spreken we nu af door het symbool δ aan te duiden een differentiatie naar de grootheden x, y, z en r_o voor zoover ze expliciet in U voorkomen, dus een differentiatie naar de letter, dan

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\delta U}{\delta x}\right) = \frac{\delta^2 U}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 U}{\delta x \, \delta r_o} \frac{\partial r_o}{\partial x} = \frac{\delta^2 U}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 U}{\delta x \, \delta r_o} \frac{\partial x}{\partial r_o} ,$$

verder

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r_o}\frac{\delta U}{\delta x}\right) = \frac{1}{r_o}\frac{\delta^2 U}{\delta x^2} + \frac{1}{r_o}\frac{\delta^2 U}{\delta x \, \delta r_o}\frac{\partial x}{\partial r_o} - \frac{1}{r_o^2}\frac{\delta U}{\delta x}\frac{\partial x}{\partial r_o} .$$

Sommeeren wij deze vergelijking over x, y en z, dan

$$\Sigma \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r_o}\frac{\delta U}{\delta x}\right) = \frac{1}{r_o}\triangle U + \frac{1}{r_o}\left\{\frac{\partial}{\partial r_o}\left(\frac{\delta U}{\delta r_o}\right) - \frac{\delta^2 U}{\delta r_o^2}\right\} - \frac{1}{r_o^2}\left\{\frac{\partial U}{\partial r_o} - \frac{\delta U}{\delta r_o}\right\}$$

waarin $\triangle$ aanduidt den operator $\frac{\delta^2}{\delta x^2} + \frac{\delta^2}{\delta y^2} + \frac{\delta^2}{\delta z^2}$, of

$$\frac{1}{r_o^2}\frac{\partial}{\partial r_o}\left(U - r_o \frac{\delta U}{\delta r_o}\right) + \Sigma \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r_o}\frac{\delta U}{\delta r_o}\right) + \frac{1}{r_o}\left(\frac{\delta^2 U}{\delta r_o^2} - \triangle U\right) = o. \qquad (31)$$

Nu stellen we in (30)

$$V = U - r_o \frac{\delta U}{\delta r_o} ,$$

terwijl we aannemen, dat U en haar eerste afgeleiden naar x, y en z eindig en continu zijn binnen s, dan wordt (30)

$$4\pi U_o = \int \left(U - r_o \frac{\delta U}{\delta r_o}\right) \frac{\partial \frac{1}{r_o}}{\partial N} ds - \int \frac{\partial}{\partial r_o} \left(U - r_o \frac{\delta U}{\delta r_o}\right) \frac{d\tau}{r_o^2}$$

$$4\pi U_o = \int \frac{\delta}{\delta r_o} \left(\frac{U}{r_o}\right) \frac{\partial r_o}{\partial N} ds - \int \frac{\partial}{\partial r_o} \left(U - r_o \frac{\delta U}{\delta r_o}\right) \frac{d\tau}{r_o^2},$$

wat door middel van (31) overgaat in

$$4\pi U_o = \int \frac{\delta}{\delta r_o} \left(\frac{U}{r_o}\right) \frac{\partial r_o}{\partial N} ds + \int \frac{d\tau}{r_o} \left(\frac{\delta^2 U}{\delta r_o^2} - \triangle U\right) + \int d\tau \, \Sigma \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r_o} \frac{\delta U}{\delta x}\right).$$

Nu is, wanneer we een bekende notatie volgen

$$\int d\tau \, \Sigma \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r_o} \frac{\delta U}{\delta x}\right) = -\int \frac{ds}{r_o} \Sigma \frac{\delta U}{\delta x} \cos(Nx) = -\int \frac{U_n}{r_o} ds ,$$

waarin

$$U_n = \Sigma \frac{\delta U}{\delta x} \frac{\partial x}{\partial N},$$

waardoor we krijgen

$$4\pi U_o = \int \left\{ \frac{\delta}{\delta r_o} \left(\frac{U}{r_o}\right) \frac{\partial r_o}{\partial N} - \frac{U_n}{r_o} \right\} ds + \int \frac{d\tau}{r_o} \left(\frac{\delta^2 U}{\delta r_o^2} - \triangle U\right). \quad (32)$$

Duiden we nu aan door U, wat er wordt van φ, indien we daarin t vervangen door $t - \frac{r_o}{a}$, zoodat

$$U = \varphi \left(x, y, z, t - \frac{r_o}{a}\right),$$

terwijl φ een oplossing is van de diff. verg. (1) der golfbeweging, dan is

$$\frac{\delta U}{\delta r_o} = -\frac{1}{a} \frac{\partial U}{\partial t},$$

$$\frac{\delta^2 U}{\delta r_o^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2},$$

dus

$$\frac{\delta^2 U}{\delta r_o^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2},$$

Nu is volgens de notatie, die we zooeven aannamen

$$\triangle U = \frac{\delta^2 U}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 U}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 U}{\delta z^2},$$

of

$$\triangle U = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2},$$

Volgens de diff. verg. (1) is derhalve

$$\frac{\delta^2 U}{\delta r_o^2} - \triangle U = o.$$

Daardoor valt de volumeintegraal uit (32) weg en we houden over

$$4\pi \varphi (x_o y_o z_o t) =$$

$$= \int \left\{ \frac{\delta}{\delta r_o} \left(\frac{\varphi \left(x y z \; t - \frac{r_o}{a} \right)}{r_o} \right) \frac{\partial r_o}{\partial N} - \frac{1}{r_o} \Sigma \frac{\delta \varphi \left(x y z \; t - \frac{r_o}{a} \right)}{\delta x} \frac{\partial x}{\partial N} \right\} ds.$$

Nu is volgens onze vroegere notatie

$$f(t) = \frac{\partial \varphi}{\partial N},$$

en dus

$$\Sigma \frac{\partial \varphi \left(x y z \; t - \frac{r_o}{a} \right)}{\delta x} \frac{\partial x}{\partial N} = f\left(t - \frac{r_o}{a} \right)$$

en

$$\frac{\delta}{\delta r_o} \left(\frac{\varphi \left(x y z \; t - \frac{r_o}{a} \right)}{r_o} \right) \frac{\partial r_o}{\partial N} = \varphi \left(x y z \; t - \frac{r_o}{a} \right) \frac{\partial \frac{1}{r_o}}{\partial N} - \frac{1}{a r_o} \frac{\partial r_o}{\partial N} \frac{\partial \varphi \left(x y z \; t - \frac{r_o}{a} \right)}{\partial t},$$

en derhalve

$$4\pi\varphi(x_0\,y_0\,z_0\,t) = \int\left\{\frac{\partial\frac{1}{r_0}}{\partial N}\,\varphi\left(t-\frac{r_0}{a}\right) - \frac{1}{a\,r_0}\,\frac{\partial r_0}{\partial N}\,\frac{\partial\varphi\left(t-\frac{r_0}{a}\right)}{\partial t} - \frac{1}{r_0}\,f\left(t-\frac{r_0}{a}\right)\right\}ds\ .$$

Dit is het theorema van Kirchhoff.

We zien dus dat Kirchhoff's theorema is te beschouwen als een speciaal geval van het theorema (32) door Beltrami afgeleid. Voor functies die voldoen aan de diff. verg. (1) der golfbeweging is Beltrami's theorema onmiddelijk in dat van Kirchhoff om te zetten.

Ten slotte kunnen we nog opmerken, dat, aangezien Kirchhoff's theorema geldt voor ieder functie die voldoet aan de diff. verg. (1), we dat theorema niet alleen mogen toepassen op de potentiaalfunctie eener golfbeweging maar even goed op de ontbindingsuitwijkingen en op de electrische en magnetische ontbindingsmomenten en ontbindingskrachten. Het is n. l. eenvoudig in te zien, dat al die lichtvectoren aan de diff. verg. (1) voldoen, daar de potentiaal φ een oplossing moet zijn van die diff. verg.

HOOFDSTUK II.

ALGEMEENE BESCHOUWINGEN OVER GOLFBEWEGINGEN.

1. PHASEOPPERVLAKKEN. PHASESNELHEDEN. VOORTPLANTINGSSNELHEID VAN DE GRENS EENER GOLFBEWEGING.

We kunnen eens onderstellen dat de potentiaal φ eener golfbeweging den vorm heeft

$$\varphi = \chi \sin \psi, \tag{33}$$

waarin χ en ψ niet periodische, maar overigens willekeurige functies zijn van x, y, z en t. Deze vorm zal blijken algemeen genoeg te zijn voor de potentiaal van trillende bewegingen. Daar φ moet voldoen aan de diff. verg. (1) der golfbeweging, zal er tusschen χ en ψ een verband moeten bestaan, dat we vinden door (33) te substitueeren in (1) en dat we later zullen bespreken.

We zullen noemen

χ de amplitude der potentiaal,

ψ de phase der potentiaal,

en verder χ^2 aannemen als maat voor de intensiteit van de potentiaal. Met dit laatste wordt natuurlijk niet bedoeld dat χ^2 evenredig zou zijn met de energie der beweging.

Door middel van de vergelijkingen (6) en (9) zijn te berekenen alle grootheden die een lichtbeweging bepalen, zoowel

in de elasticiteitstheorie als in de electromagnetische lichttheorie.

In de elasticiteitstheorie zijn volgens (6) de ontbindingsuitwijkingen:

$$u = o,$$

$$v = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{\partial \chi}{\partial z}\sin\psi - \chi\frac{\partial \psi}{\partial z}\cos\psi,$$

$$w = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \chi}{\partial y}\sin\psi + \chi\frac{\partial \psi}{\partial y}\cos\psi,$$

waaruit eenvoudig is af te leiden:

$$\left.\begin{aligned} u &= o, \\ v &= \sqrt{\left(\frac{\partial \chi}{\partial z}\right)^2 + \left(\chi\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2}\,\sin\left\{\psi + \operatorname{arc\,tg}\frac{\chi\dfrac{\partial \psi}{\partial z}}{\dfrac{\partial \chi}{\partial z}} - \pi\right\}, \\ w &= \sqrt{\left(\frac{\partial \chi}{\partial y}\right)^2 + \left(\chi\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2}\,\sin\left\{\psi + \operatorname{arc\,tg}\frac{\chi\dfrac{\partial \psi}{\partial y}}{\dfrac{\partial \chi}{\partial y}}\right\}, \end{aligned}\right\} \quad (34)$$

of, indien we stellen:

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{\left(\frac{\partial \chi}{\partial z}\right)^2 + \left(\chi\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2} &= \chi_1, \qquad \psi + \operatorname{arc\,tg}\frac{\chi\dfrac{\partial \psi}{\partial z}}{\dfrac{\partial \chi}{\partial z}} = \psi_1, \\ \sqrt{\left(\frac{\partial \chi}{\partial y}\right)^2 + \left(\chi\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2} &= \chi_2, \qquad \psi + \operatorname{arc\,tg}\frac{\chi\dfrac{\partial \psi}{\partial y}}{\dfrac{\partial \chi}{\partial y}} = \psi_2, \end{aligned}\right\} \quad (35)$$

dan wordt (34)

$$\left.\begin{aligned} u &= o, \\ v &= \chi_1 \sin(\psi_1 - \pi), \\ w &= \chi_2 \sin\psi_2. \end{aligned}\right\} \quad (36)$$

De ontbindingsuitwijkingen hebben dus juist denzelfden vorm als de potentiaal; zij voldoen evenals de potentiaal aan de diff. verg. (1) der golfbeweging, maar zijn niet onafhankelijk van elkaar, daar tusschen v en w het verband bestaat:

$$\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 , \qquad (37)$$

We kunnen dus voortaan v of w beschouwen als een geheel willekeurige functie van den vorm $\chi \sin \psi$, die aan geen andere voorwaarden is gebonden, dan dat zij een oplossing moet zijn van (1). De bijbehoorende waarde van w of v moet dan ook een oplossing zijn van (1) en met v of w samen voldoen aan (37).

In de electromagnetische lichttheorie worden uit de potentiaal φ de electrische en magnetische ontbindingsmomenten en ontbindingskrachten berekend door middel van de vergelijkingen (9). Daar de electrische en magnetische krachten gelijk zijn aan de momenten vermenigvuldigd met een constante, knnnen we met de berekening der momenten volstaan.

Stellen we weder als boven:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \chi_1 \sin \psi_1 \quad \text{en} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \chi_2 \sin \psi_2 ,$$

dan vinden we volgens (9)

$$\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon} = -\frac{\partial \chi_1}{\partial z} \sin \psi_1 - \chi_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \cos \psi_1 - \frac{\partial \chi_2}{\partial y} \sin \psi_2 - \chi_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \cos \psi_2 ,$$

$$\frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon} = \frac{\partial \chi_2}{\partial x} \sin \psi_2 + \chi_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \cos \psi_2 ,$$

$$\frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon} = \frac{\partial \chi_1}{\partial x} \sin \psi_1 + \chi_2 \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \cos \psi_2 ,$$

$$\mathfrak{L} = 0 ,$$

$$\frac{\mathfrak{M}}{A\mu\varepsilon} = \frac{\partial \chi_1}{\partial t} \sin \psi_1 + \chi_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial t} \cos \psi_1 ,$$

$$\frac{\mathfrak{N}}{A\mu\varepsilon} = -\frac{\partial \chi_2}{\partial t} \sin \psi_2 - \chi_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial t} \cos \psi_2 ,$$

waaruit eenvoudig is af te leiden

$$
\left.
\begin{aligned}
\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon} &= \sqrt{\left(\frac{\partial \chi_1}{\partial z}\right)^2 + \left(\chi_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial z}\right)^2} \sin\left\{\psi_1 + \operatorname{arc\,tg} \frac{\chi_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial z}}{\frac{\partial \chi_1}{\partial z}} - \pi\right\} \\
&+ \sqrt{\left(\frac{\partial \chi_2}{\partial y}\right)^2 + \left(\chi_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial y}\right)^2} \sin\left\{\psi_2 + \operatorname{arc\,tg} \frac{\chi_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial y}}{\frac{\partial \chi_2}{\partial y}} - \pi\right\}, \\
\frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon} &= \sqrt{\left(\frac{\partial \chi_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\chi_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial x}\right)^2} \sin\left\{\psi_2 + \operatorname{arc\,tg} \frac{\chi_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial x}}{\frac{\partial \chi_2}{\partial x}}\right\}, \\
\frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon} &= \sqrt{\left(\frac{\partial \chi_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\chi_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial x}\right)^2} \sin\left\{\psi_1 + \operatorname{arc\,tg} \frac{\chi_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial x}}{\frac{\partial \chi_1}{\partial x}}\right\}, \\
\mathfrak{L} &= o, \\
\frac{\mathfrak{M}}{A\mu\varepsilon} &= \sqrt{\left(\frac{\partial \chi_1}{\partial t}\right) + \left(\chi_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial t}\right)^2} \sin\left\{\psi_1 + \operatorname{arc\,tg} \frac{\chi_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial t}}{\frac{\partial \chi_1}{\partial t}}\right\}, \\
\frac{\mathfrak{N}}{A\mu\varepsilon} &= \sqrt{\left(\frac{\partial \chi_2}{\partial t}\right)^2 + \left(\chi_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial t}\right)^2} \sin\left\{\psi_2 + \operatorname{arc\,tg} \frac{\chi_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial t}}{\frac{\partial \chi_2}{\partial t}} - \pi\right\}.
\end{aligned}
\right\} \quad (38)
$$

Stelt men hierin de waarden van χ_1, χ_2, ψ_1 en ψ_2 uit (35) dan zijn de electrische en magnetische momenten uitgedrukt in χ en ψ.

In de vergelijkingen (36) en (38) komen alleen voor uitdrukkingen van den vorm $\chi \sin \psi$ We zullen daarin steeds aan de uitdrukkingen vóór en onder den sinus de namen amplitude en phase geven en het kwadraat van de amplitude weder aannemen als maat voor de intensiteit.

Onder phaseoppervlakken zullen we verstaan oppervlakken, wier vergelijking men verkrijgt door de phase gelijk

te stellen aan een constante, en daarin aan t een vaste waarde te geven.

Uit (36) volgt, dat de phaseoppervlakken van de ontbindingsuitwijkingen v en w verschillend zijn, en dat er dus in het algemeen geen oppervlakken bestaan, waarop op hetzelfde oogenblik zoowel de phase van v als de phase van w constante waarde heeft. De phaseoppervlakken der ontbindingsuitwijkingen vallen samen, indien haar phases gelijk zijn of een standvastig verschil hebben. Is dit het geval dan kan men spreken van phaseoppervlakken der uitwijking; deze bestaan dus slechts in bijzondere gevallen.

Uit (38) blijkt, dat er in 't algemeen evenmin oppervlakken bestaan, waarop op eenzelfde oogenblik alle drie de electrische ontbindingsmomententen constante phase hebben; voor $\mathfrak{X}$ is er zelfs in het algemeen geen sprake van phaseoppervlakken. We kunnen wel de beide termen, waaruit $\mathfrak{X}$ bestaat, afzonderlijk beschouwen en voor ieder van die termen van phaseoppervlakken spreken. In het bijzondere geval, dat deze beide phaseoppervlakken met elkaar samenvallen en ook samenvallen met de phaseoppervlakken van $\mathfrak{Y}$ en $\mathfrak{Z}$ (waartoe noodig is, dat de phases van $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ en $\mathfrak{Z}$ gelijk zijn of constante verschillen hebben), kunnen we aan die oppervlakken den naam phaseoppervlakken van het electrisch moment (of van de electrische kracht) geven.

Ook de phaseoppervlakken van de magnetische ontbindingsmomenten blijken volgens (38) in 't algemeen verschillend te zijn. Vallen ze samen, dan kunnen we ze noemen phaseoppervlakken van het magnetisch moment (of de magnetische kracht).

Ons doel is na te gaan of de constructie van Huygens juist is. Daartoe zouden we moeten onderzoeken of de omhullende van bollen die met gelijken straal zijn beschreven om alle punten van eenzelfde phaseoppervlak van de potentiaal, van de uitwijking of van het electrisch of magnetisch moment, weder een nieuw phaseoppervlak oplevert.

We zagen dat voor de beweging waarvan (33) de potentiaal is, zoowel voor de uitwijking als voor de electrische of magnetische momenten, in het algemeen geen phaseoppervlakken

bestaan, Daarom zullen we niet de juistheid van de constructie van Huygens gaan onderzoeken voor die phaseoppervlakken, maar voor de phaseoppervlakken van de potentiaal, van de ontbindingsuitwijkingen en van de electrische en magnetische ontbindingsmomenten (of krachten).

Stel dat $\Theta(x\,y\,z\,t)$ de phase is van de potentiaal, van een der ontbindingsuitwijkingen, of van een der electrische of magnetische ontbindingsmomenten, dan heeft het phaseoppervlak daarvan tot vergelijking

$$\Theta\,(x\,y\,z\,t) = \text{Constant},$$

indien we hierin t als standvastig beschouwen.

In een punt van dat oppervlak richten we een normaal op van lengte dN; de uiteinden van die normaal noemen we de punten P en Q en de coördinaten dier punten x, y, z en $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$; dan is

$$\Theta\,(Q, t+dt) = \Theta\,(P,t) + \frac{\partial\Theta}{\partial t}\,dt + \left[\frac{\partial\Theta}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial N} + \frac{\partial\Theta}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial N} + \frac{\partial\Theta}{\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial N}\right] dN.$$

Kiezen we hierin dt zoodanig dat

$$\frac{\partial\Theta}{\partial t}\,dt + \left[\frac{\partial\Theta}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial N} + \frac{\partial\Theta}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial N} + \frac{\partial\Theta}{\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial N}\right] dN = 0,$$

dan is volgens de vorige vergelijking de phase in Q op tijd $t+dt$ gelijk aan de phase in P op tijd t. We kunnen dus zeggen dat in dt secunden de phase zich in de richting van de normaal op het phaseoppervlak voortbeweegt over een afstand dN, indien dt en dN zijn verbonden door de laatste vergelijking. De phasesnelheid, die we zullen aanduiden door de letter a', kunnen we dus definieeren door de formule:

$$a' = -\frac{\dfrac{\partial\Theta}{\partial t}}{\dfrac{\partial\Theta}{\partial x}\,\dfrac{\partial x}{\partial N} + \dfrac{\partial\Theta}{\partial y}\,\dfrac{\partial y}{\partial N} + \dfrac{\partial\Theta}{\partial z}\,\dfrac{\partial z}{\partial N}},$$

of

$$\left.\begin{aligned} a' &= -\frac{\frac{\partial \Theta}{\partial t}}{\frac{\partial \Theta}{\partial N}}, \\ \text{indien we ter afkorting stellen} & \\ \frac{\partial \Theta}{\partial N} &= \frac{\partial \Theta}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial N} + \frac{\partial \Theta}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial N} + \frac{\partial \Theta}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial N}; \end{aligned}\right\} \quad (39)$$

hierin beteekent dan a' de phasesnelheid langs de normaal op het phaseoppervlak in die richting waarin we dN positief noemen; daarvoor zullen we steeds die richting kiezen, waarin de phase zich voortbeweegt.

Door middel van (39) kunnen we berekenen de phasesnelheid van de potentiaal, van de ontbindingsuitwijkingen of van de electrische of magnetische ontbindingsmomenten (of krachten) door in (39) voor Θ in te voeren de phase der potentiaal of van een dezer lichtvectoren.

Zal de constructie van Huygens voor de phaseoppervlakken gelden, dan moet de phasesnelheid voor ieder phaseoppervlak standvastig zijn, of duidelijker gezegd dan moet (39) voor a' een waarde opleveren die constant is of die een functie is alleen van Θ.

Indien a' gelijk is aan de constante a uit de diff. verg. der golfbeweging, eerst dan mag de constructie van Huygens worden toegepast met bollen van straal $r = at$, zooals bij de elementaire verklaring van de verschijnselen van terugkaatsing, breking en buiging ze wordt toegepast op de golfoppervlakken der beweging. Onder golfoppervlakken moeten verstaan worden de zooals we zagen slechts in bijzondere gevallen voorkomende phaseoppervlakken der uitwijking of der momenten.

Ons onderzoek naar de juistheid der constructie van Huygens komt dus neer op de berekening van de phasesnelheid a' door middel van (39).

Tot nu toe gebruikte ik de uitdrukking voortplantingssnelheid der verstoring opzettelijk niet. Voor het een-

voudigste soort bolvormige golven dat zich laat denken, n.l. dat waarvan de potentiaal den vorm heeft $\frac{A}{r} \sin m\,(r - at)$, waarin A en m constanten zijn, zijn reeds de phasesnelheden der potentiaal, der ontbindingsuitwijkingen en der ontbindingsmomenten verschillend, zooals we zullen zien. We zouden dus niet weten aan welke van al dezer phasesnelheden we den naam voortplantingssnelheid der verstoring zouden moeten geven. Bovendien komt het mij voor, dat in het deel der ruimte, waar alle deeltjes reeds in verstoring zijn, het geen zin heeft te spreken van de voortplantingssnelheid der verstoring en deze al zeer moeilijk te definieeren zou zijn.

Anders is het gesteld aan de grens der beweging.

Indien een deeltje P gelegen is in het oppervlak, dat de beweging op tijd t begrenst en Q is een deeltje gelegen op de grensnormaal in P opgericht terwijl $PQ = dN$, en indien de grens der beweging op tijd $t + dt$ het deeltje Q bereikt, dan moeten we onder $\frac{dN}{dt}$ verstaan de voortplantingssnelheid van de grens der verstoring in het punt P. Het is deze snelheid die bepaald is voor lichtbewegingen door Fizeau, Foucauld, Römer, Bradley e.a. en die zooals we zullen zien steeds gelijk is aan de constante a uit de diff. verg. (1) zoowel voor lichtbewegingen als voor electrische golfbewegingen van grooter trillingsperiode.

In de elasticiteitstheorie van het licht onderscheiden we dus:

1e de voortplantingssnelheid van de grens der beweging,

2e de phasesnelheid van de potentiaal,

3e de phasesnelheid van de ontbindingsuitwijkingen.

In de electromagnetische lichttheorie onderscheiden we:

1e de voortplantingssnelheid van de grens der beweging,

2e de phasesnelheid van de potentiaal,

3e de phasesnelheid van de electrische ontbindingsmomenten of krachten,

4e de phasesnelheid van de magnetische ontbindingsmomenten of krachten.

2. Harmonische golfbeweging van oneindig kleine trillingsperiode.

Gewoonlijk worden slechts bestudeerd potentialen van den vorm

$$\varphi = \frac{C}{r} \sin \frac{2\pi}{\lambda} (r \mp a t) , \qquad (40)$$

waarin r is de afstand van eenig punt tot een vast punt, het middelpunt der beweging, a de constante uit de diff. verg. der golfbeweging en C en λ constanten samenhangende met de intensiteit en de periode der beweging.

Voor dezen vorm van φ is in onze notatie

$$\chi = \frac{C}{r} , \qquad \psi = \frac{2\pi}{\lambda} (r \mp a t) ,$$

$$\psi_1 = \psi_2 = \frac{2\pi}{\lambda} (r \mp a t) - \text{arc tg } \frac{2\pi r}{\lambda} ,$$

$$\chi_1 = \frac{Cz}{r^3} \sqrt{1 + \left(\frac{2\pi r}{\lambda}\right)^2} , \qquad \chi_2 = \frac{Cy}{r^3} \sqrt{1 + \left(\frac{2\pi r}{\lambda}\right)^2} .$$

Onderstellen we dat $\frac{2\pi r}{\lambda}$ oneindig groot is, dus dat we ons op een afstand van het middelpunt der beweging bevinden die oneindig groot is t. o. v. λ, dan wordt

$$\psi_1 = \psi_2 = \frac{2\pi}{\lambda} (r \mp a t) - \frac{\pi}{2} ,$$

$$\chi_1 = \frac{Cz}{r^3} \frac{2\pi r}{\lambda} , \qquad \chi_2 = \frac{Cy}{r^3} \frac{2\pi r}{\lambda} .$$

Verder worden dan de in (38) onder het teeken arc tg voorkomende uitdrukkingen alle positief of negatief oneindig groot, want de tellers dier uitdrukkingen bevatten alle een diff. quot. van ψ_1 en ψ_2 en daarin treedt $\frac{2\pi r}{\lambda}$ als factor op; later gaan we dit uitvoeriger na.

In die onderstelling kunnen we dus in (38) voor alle arc tg in de plaats zetten $+\frac{\pi}{2}$ of $-\frac{\pi}{2}$, zoodat de phase van de

electrische en magnetische ontbindingsmomenten en krachten gelijk wordt aan $\frac{2\pi}{\lambda}(r \pm at)$ vermeerderd of verminderd met eenige malen $\frac{\pi}{2}$.

Als $\frac{2\pi r}{\lambda}$ oneindig groot is vallen dus de phaseoppervlakken van de potentiaal en van alle ontbindingslichtvectoren samen, en de phasesnelheid is dan voor alle gelijk.

Die samenvallende phaseoppervlakken worden dan golffronten of golfoppervlakken genoemd en de phasesnelheid, die volgens (39) gelijk is aan a, heet dan de golffrontssnelheid of wel de voortplantingssnelheid der verstoring. Daar echter in het gebied gelegen binnen de grenzen der beweging alle deeltjes reeds in verstoring zijn, lijkt mij binnen dat gebied die laatste naam ook hier minder gelukkig gekozen.

Gouy [1]) heeft er het eerst op gewezen, dat de onderstelling $\frac{2\pi r}{\lambda}$ oneindig groot en de daaruit voortvloeiende vereenvoudiging van de uitdrukking der phase zelfs voor lichtbewegingen niet steeds is geoorloofd. In het focus n.l is $\frac{2\pi r}{\lambda}$ gelijk aan nul en dus de phase der ontbindingsuitwijkingen gelijk aan

$$\frac{2\pi}{\lambda}(r \pm at),$$

terwijl op een afstand van het focus, die t. o. v. λ oneindig groot gesteld kan worden, de phase gelijk is aan

$$\frac{2\pi}{\lambda}(r \pm at) - \frac{\pi}{2}.$$

Dit phaseverschil $\frac{\pi}{2}$ heeft hij door zijn bekende elegante proeven gedemonstreerd.

De verklaring daarvan is voor geluidsgolven gegeven door Gouy en voor lichtgolven door V. A. Julius. Laatstge-

---

1) Gouy. C. R. T. 110, p. 1251, 1890; ibid. T. 111, p. 33 et p. 910, 1890. Ann. de Chim. et de Phys. 6e série, T. 24, p. 145, 1891.

noemde toonde tevens aan [1]) dat voor cilindrische golven dit phaseverschil gelijk is aan $\frac{\pi}{4}$.

Het is gemakkelijk in te zien, dat wanneer in den algemeenen vorm der potentiaal $\varphi = \chi \sin \psi$, de diff. quot. van ψ naar x, y, z en t zeer groot zijn t. o. v. de diff. naar x, y, z en t van χ, alle phaseoppervlakken van (36) en (38) samenvallen. Deze onderstelling is analoog met de onderstelling $\frac{2\pi r}{\lambda}$ oneindig groot of λ oneindig klein t. o. v. r.

Het is vooral met het oog op electrische trillingen, dat ik de onderstelling λ oneindig klein t. o. v. r niet overneem.

Bovendien zullen we voor de potentiaal niet den specialen vorm (40) aannemen, maar de vergelijkingen (33) tot (38) in haar algemeenen vorm behouden.

---

3. Stationaire golfbewegingen. Vorm der potentiaal. Standvastigheid van het trillingsgetal.

In de elasticiteitstheorie van het licht noemt men een golfbeweging stationair, indien eenzelfde deeltje telkens na eenzelfde tijdsverloop met dezelfde snelheid in hetzelfde punt van zijn baan terugkeert. Amplitude en trillingstijd van de ontbindingsuitwijkingen moeten dan van den tijd onafhankelijk zijn; deze voorwaarde is noodig en voldoende. Hieruit volgt dat de amplitude een functie moet zijn alleen van de coördinaten en de phase een functie van de coördinaten en den tijd, die lineair is in den tijd.

Voor een stationaire golfbeweging waarvan de potentiaal den vorm (33) heeft moeten dus de ontbindingsuitwijkingen v en w den vorm hebben

$$F = f(x\,y\,z) \sin \{ f_1(x\,y\,z + t f_2(x\,y\,z) \}. \qquad (41)$$

In analogie hiermede kunnen we in de electromagnetische lichttheorie een golfbeweging stationair noemen, indien de

---

1) V. A. Julius. Arch. Néerl. T. 28. p. 226—244.

electrische en magnetische ontbindingsmomenten (en krachten) den vorm (41) hebben.

Nu moeten de ontbindingsuitwijkingen en ontbindingsmomenten even goed aan de diff. verg. der golfbeweging voldoen als de potentiaal zelve, dus:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = a^2 \triangle F.$$

Nu is:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \sin\{f_1 + t f_2\} + f\left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + t \frac{\partial f_2}{\partial x}\right) \cos\{f_1 + t f_2\},$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \left\{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - f\left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + t \frac{\partial f_2}{\partial x}\right)^2\right\} \sin\{f_1 + t f_2\}$$

$$+ \left\{2 \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + t \frac{\partial f_2}{\partial x}\right) + f\left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} + t \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2}\right)\right\} \cos\{f_1 + t f_2\};$$

dus:

$$\triangle F = \left[\triangle f - f\left\{\Sigma\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)^2 + 2t \Sigma \frac{\partial f_1}{\partial x} \frac{\partial f_2}{\partial x} + t^2 \Sigma \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)^2\right\}\right] \sin\{f_1 + t f_2\}$$

$$+ \left[2 \Sigma \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f_1}{\partial x} + 2t \Sigma \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f_2}{\partial x} + f \triangle f_1 + t f \triangle f_2\right] \cos\{f_1 + t f_2\},$$

waarin door Σ wordt aangeduid een som die zich symmetrisch over x, y en z uitstrekt. Verder is:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = -f_2^2 f \sin\{f_1 + t f_2\};$$

zoodat we krijgen:

$$\left[\triangle f - f\left\{\Sigma\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)^2 + 2t \Sigma \frac{\partial f_1}{\partial x} \frac{\partial f_2}{\partial x} + t^2 \Sigma \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)^2\right\} + \frac{1}{a^2} f f_2^2\right] \sin\{f_1 + t f_2\}$$

$$+ \left[2 \Sigma \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f_1}{\partial x} + 2t \Sigma \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f_2}{\partial x} + f \triangle f_1 + t f \triangle f_2\right] \cos\{f_1 + t f_2\} = 0.$$

Geven we aan x, y en z vaste waarden en laten we t regelmatig toenemen dan bewegen zich $\sin\{f_1 + t f_2\}$ en $\cos\{f_1 + t f_2\}$ periodisch tusschen -1 en $+1$. En daar voortdurend boven-

staande verg. gelden blijft, moet dus:

$$\triangle f - f\left\{\Sigma\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)^2 + 2t\,\Sigma\,\frac{\partial f_1}{\partial x}\,\frac{\partial f_2}{\partial x} + t^2\,\Sigma\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)^2\right\} + \frac{1}{a^2} f f_2^2 = o\,,$$

en

$$2\,\Sigma\,\frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{\partial f_1}{\partial x} + 2t\,\Sigma\,\frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{\partial f_2}{\partial x} + f\triangle f_1 + t f \triangle f_2 = o.$$

Deze beide vergelijkingen moeten doorgaan voor ieder waarde van t. Volgens de coëfficient van t^2 uit de eerste verg. moet dus:

$$\Sigma\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)^2 = o\,,$$

waaruit volgt:

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = o\,, \qquad \frac{\partial f_2}{\partial y} = o\,, \qquad \frac{\partial f_2}{\partial z} = o\,,$$

en dus:

$$f_2 = C\,,$$

waarin C een constante is.

Onze beide diff. verg. worden daardoor:

$$\left.\begin{aligned} &\triangle f - f\left\{\Sigma\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)^2 - \frac{C^2}{a^2}\right\} = o\,, \\ \text{en} \qquad &2\,\Sigma\,\frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{\partial f_1}{\partial x} + f\triangle f_1 = o\,. \end{aligned}\right\} \qquad (42)$$

Voor een stationaire golfbeweging hebben dus de ontbindingsuitwijkingen, de ontbindingsmomenten en de ontbindingskrachten den vorm:

$$F = f(x\,y\,z)\,\sin\left\{f_1(x\,y\,z) + C\,t\right\}, \qquad (43)$$

terwijl f en f_1 moeten voldoen aan (42).

Uit (43) blijkt dat de trillingstijd dier functies hetzelfde is

voor alle deeltjes, want de trillingstijd d. w. z. de aangroeiing die we aan t moeten geven om de phase een aangroeiing 2π te doen verkrijgen is gelijk aan $\frac{2\pi}{C}$ en dus onafhankelijk zoowel van de coördinaten als van den tijd.

De onderstelling (41) dat de trillingstijd onafhankelijk is van den tijd, brengt dus met zich dat de trillingstijd dan noodzakelijk bovendien onafhankelijk moet zijn van de coördinaten.

Als dus door een lichtbron (of electrische verstoringsbron) een stationaire golfbeweging wordt uitgezonden, is op grooten afstand van die bron de trillingstijd juist dezelfde als in de nabijheid ervan. Gaat een stationaire golfbeweging door een focus dan is in het focus de trillingstijd juist dezelfde als er buiten; de trillingstijd is van de veranderingen in de amplitude onafhankelijk.

Indien we aannemen dat een willekeurige golfbeweging mag worden beschouwd als te zijn de opvolging van een reeks stationaire bewegingen, dan mogen we die stelling uitbreiden voor een willekeurige golfbeweging. Zij is met de experimenten in overeenstemming.

We gaan thans onderzoeken welken vorm we aan de potentiaal moeten geven, opdat de beweging stationair zij, m. a. w. opdat de ontbindingsuitwijkingen en de ontbindingsmomenten den vorm hebben:

$$F = f(x\,y\,z)\,\sin\{f_1(x\,y\,z) + C\,t\}$$

of wel

$$F = \beta_1 \sin Ct + \beta_2 \cos Ct\,, \qquad (44)$$

indien

$$\beta_1 = f\cos f_1 \quad \text{en} \quad \beta_2 = f\sin f_1\,;$$

β_1 en β_2 zijn dan periodische coördinatenfuncties.

Daar de electrische momenten den vorm (44) moeten hebben zal volgens (9):

$$\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \beta_1 \sin Ct + \beta_2 \cos Ct,$$

$$\frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \, \partial y} = \beta_3 \sin C't + \beta_4 \cos C't,$$

$$\frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \, \partial z} = \beta_5 \sin C''t + \beta_6 \cos C''t,$$

waarin β_1, $\beta_2 \ldots \beta_6$ functies van x, y en z zijn en C, C' en C'' constanten; de functies β en de constanten C zijn echter niet onafhankelijk van elkaar, want:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon}\right) \text{ en } \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon}\right) = 0;$$

dus:

$$\frac{\partial \beta_3}{\partial z} \sin C't + \frac{\partial \beta_4}{\partial z} \cos C't = \frac{\partial \beta_5}{\partial y} \sin C''t + \frac{\partial \beta_6}{\partial y} \cos C''t, \quad (45)$$

en

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \beta_1}{\partial x} \sin Ct + \frac{\partial \beta_2}{\partial x} \cos Ct + \frac{\partial \beta_3}{\partial y} \sin C't + \\ &+ \frac{\partial \beta_4}{\partial y} \cos C't + \frac{\partial \beta_5}{\partial z} \sin C''t + \frac{\partial \beta_6}{\partial z} \cos C''t = 0. \end{aligned}\right\} \quad (46)$$

Indien deze vergelijkingen (45) en (46) gelden voor ieder waarde van t, dan zijn daardoor de functies β en de constanten C zoo bepaald, dat $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ en $\mathfrak{Z}$ den door (9) vereischten vorm hebben.

De verg. (45) heeft de gedaante:

$$A \sin at + B \cos at = A' \sin a't \text{ en } B' \cos a't. \quad (47)$$

Differentieeren we deze verg. tweemalen naar t en deelen we de aldus verkregen verg. door (47), dan vinden we:

$$a^2 = a'^2,$$

en dus

$$a' = \mp a;$$

waardoor (47) overgaat in:

$$(A \mp A') \sin at + (B - B') \cos at = o;$$

indien deze verg. zal gelden voor ieder waarde van t dan moet zoo A, A', B en B' onafhankelijk zijn van t:

$$A = \mp A' \quad \text{en} \quad B = B'.$$

Zal dus (47) gelden voor ieder waarde van t en zijn A, A', B en B' onafhankelijk van t, dan volgt daaruit:

$$\left.\begin{aligned} a' &= \mp a, \\ A' &= \mp A, \\ B' &= B. \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

Derhalve volgt evenzoo uit (45):

$$\left.\begin{aligned} C'' &= \mp C', \\ \frac{\partial \beta_5}{\partial y} &= \mp \frac{\partial \beta_3}{\partial z}, \\ \frac{\partial \beta_6}{\partial y} &= \frac{\partial \beta_4}{\partial z}; \end{aligned}\right\} \quad \text{of:} \quad \left.\begin{aligned} C'' &= \mp C', \\ \beta_3 &= \frac{\partial \beta_7}{\partial y}, \\ \beta_5 &= \mp \frac{\partial \beta_7}{\partial z}, \\ \beta_4 &= \frac{\partial \beta_8}{\partial y}, \\ \beta_6 &= \frac{\partial \beta_8}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

Door het stel (49) gaat (46) over in:

$$\frac{\partial \beta_1}{\partial x} \sin C t + \frac{\partial \beta_2}{\partial x} \cos C t + \frac{\partial^2 \beta_7}{\partial y^2} \sin C' t + \frac{\partial^2 \beta_8}{\partial y^2} \cos C' t +$$

$$+ \frac{\partial^2 \beta_7}{\partial z^2} \sin C' t + \frac{\partial^2 \beta_8}{\partial z^2} \cos C' t = o,$$

of

$$\frac{\partial \beta_1}{\partial x} \sin Ct + \frac{\partial \beta_2}{\partial x} \cos Ct = -$$

$$- \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \beta_7 \sin C't - \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \beta_8 \cos C't .$$

Evenals uit (47) volgt (48), zoo volgt uit deze laatste vergelijking daar zij moet gelden voor ieder waarde van t en de coëfficienten van sin. en cos. van t onafhankelijk zijn:

$$\left.\begin{aligned} C' &= \pm C, \\ \frac{\partial \beta_1}{\partial x} &= \mp \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \beta_7, \\ \frac{\partial \beta_2}{\partial x} &= - \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \beta_8, \end{aligned}\right\} \text{ of: } \left.\begin{aligned} C' &= \pm C, \\ \beta_7 &= \frac{\partial \beta_9}{\partial x}, \\ \beta_1 &= \mp \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \beta_9, \\ \beta_8 &= \frac{\partial \beta_{10}}{\partial x}, \\ \beta_2 &= - \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \beta_{10}. \end{aligned}\right\} \quad (50)$$

Uit (49) en (50) volgt:

$$\left.\begin{aligned} C' &= \pm C, \\ C'' &= C, \\ \beta_1 &= \mp \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \beta_9, \\ \beta_2 &= - \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \beta_{10}, \end{aligned}\right. \qquad \left.\begin{aligned} \beta_3 &= \frac{\partial^2}{\partial x \, \partial y} \beta_9, \\ \beta_4 &= \frac{\partial^2}{\partial x \, \partial y} \beta_{10}, \\ \beta_5 &= \pm \frac{\partial^2}{\partial x \, \partial z} \beta_9, \\ \beta_6 &= \frac{\partial^2}{\partial x \, \partial z} \beta_{10}; \end{aligned}\right.$$

zoodat:

$$\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon} = - \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \varphi = - \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) (\pm \beta_9 \sin Ct + \beta_{10} \cos Ct),$$

$$\frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon} = \frac{\partial^2}{\partial x \, \partial y} \varphi = \frac{\partial^2}{\partial x \, \partial y} (\pm \beta_9 \sin Ct + \beta_{10} \cos Ct),$$

$$\frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon} = \frac{\partial^2}{\partial x \, \partial z} \varphi = \frac{\partial^2}{\partial x \, \partial z} (\pm \beta_9 \sin Ct + \beta_{10} \cos Ct);$$

en hieruit volgt:

$$\varphi = \pm \beta_9 \sin Ct + \beta_{10} \cos Ct.$$

Dezen vorm waarin β_9 en β_{10} willekeurige periodische coördinatenfuncties zijn, moet de potentiaal hebben, opdat de electrische ontbindingsmomenten zijn van de gedaante (44). Het is eenvoudig in te zien dat als φ dien vorm heeft ook de magnetische ontbindingsmomenten en de ontbindingsuitwijkingen den vorm (44) zullen verkrijgen en ook voor deze vectoren is gemakkelijk te bewijzen evenals we het boven deden voor $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ en $\mathfrak{Z}$ dat die vorm van φ daartoe noodzakelijk is.

We kunnen dus zeggen:

Opdat een lichtbeweging stationair zij, moet zoowel in de elasticiteitstheorie als in de electromagnetische lichttheorie de potentiaal φ den bovenstaanden vorm hebben, en als φ dien vorm heeft dan is de beweging stationair.

Daar β_9 en β_{10} willekeurige periodische coördinatenfuncties zijn, kunnen we voor φ ook schrijven:

$$\varphi = \alpha \sin Ct + \beta \cos Ct.$$

Dan krijgen we:

$$\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon} = -\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\varphi = -\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\alpha \sin Ct - \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\beta \cos Ct,$$

$$\frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon} = \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y}\varphi = \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y}\alpha \sin Ct + \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y}\beta \cos Ct,$$

$$\frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon} = \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial z}\varphi = \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial z}\alpha \sin Ct + \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial z}\beta \cos Ct,$$

$$\mathfrak{L} = 0,$$

$$\frac{\mathfrak{M}}{A\mu\varepsilon} = \frac{\partial^2}{\partial z\, \partial t}\varphi = C\frac{\partial}{\partial z}\alpha \cos Ct - C\frac{\partial}{\partial z}\beta \sin Ct,$$

$$\frac{\mathfrak{N}}{A\mu\varepsilon} = -\frac{\partial^2}{\partial y\, \partial t}\varphi = -C\frac{\partial}{\partial y}\alpha \cos Ct + C\frac{\partial}{\partial y}\beta \sin Ct.$$

Stellen we deze uitdrukkingen samen door middel van de vergelijkingen:

$$A \sin a + B \cos a = \sqrt{A^2 + B^2} \sin \left\{ a + \operatorname{arc\,tg} \frac{B}{A} \right\},$$

en

$$A \sin a - B \cos a = \sqrt{A^2 + B^2} \sin \left\{ a - \operatorname{arc\,tg} \frac{B}{A} \right\},$$

dan krijgen we

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon} &= \sqrt{\left(\frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial z^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \beta}{\partial z^2}\right)^2} \sin \left\{ Ct + \operatorname{arc\,tg} \frac{\frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \beta}{\partial z^2}}{\frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial z^2}} - \pi \right\}, \\
\frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon} &= \sqrt{\left(\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x\, \partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \beta}{\partial x\, \partial y}\right)^2} \sin \left\{ Ct + \operatorname{arc\,tg} \frac{\frac{\partial^2 \beta}{\partial x\, \partial y}}{\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x\, \partial y}} \right\}, \\
\frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon} &= \sqrt{\left(\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x\, \partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \beta}{\partial x\, \partial z}\right)^2} \sin \left\{ Ct + \operatorname{arc\,tg} \frac{\frac{\partial^2 \beta}{\partial x\, \partial z}}{\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x\, \partial z}} \right\}, \\
\mathfrak{L} &= o, \\
\frac{\mathfrak{M}}{A\mu\varepsilon} &= C \sqrt{\left(\frac{\partial \alpha}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial z}\right)^2} \sin \left\{ Ct - \operatorname{arc\,tg} \frac{\frac{\partial \alpha}{\partial z}}{\frac{\partial \beta}{\partial z}} - \pi \right\}, \\
\frac{\mathfrak{N}}{A\mu\varepsilon} &= C \sqrt{\left(\frac{\partial \alpha}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial y}\right)^2} \sin \left\{ Ct - \operatorname{arc\,tg} \frac{\frac{\partial \alpha}{\partial y}}{\frac{\partial \beta}{\partial y}} - \pi \right\}.
\end{aligned}\right\} \quad (51)$$

De trillingstijd al dezer lichtvectoren is $\frac{2\pi}{C}$.

Voor een stationaire golfbeweging is dus de trillingstijd zoowel van de electrische en magnetische ontbindingsmomenten en krachten, als ook van de potentiaal zelve en van de ontbindingsuitwijkingen (zooals eenvoudig is uit te rekenen) hetzelfde.

Ook voor $\mathfrak{X}$ bestaan hier phaseoppervlakken.

De phase van de potentiaal, van de ontbindingsuitwijkingen, van de electrische en van de magnetische ontbindingsmomenten en krachten is echter ook hier in 't algemeen verschillend.

Definieeren wij de golflengte van de potentiaal, van de ontbindingsuitwijkingen, momenten en krachten als te zijn de normale afstand van twee phaseoppervlakken, waarvoor de phase een verschil 2π heeft (voor eenzelfde waarde van t), dan zijn dus de golflengten der potentiaal en der ontbindingsuitwijkingen, momenten en krachten verschillend en voor al deze grootheden bovendien afhankelijk van de coördinaten maar onafhankelijk van den tijd.

Bij een stationaire beweging is dus voor alle lichtvectoren de trillingstijd gelijk aan dezelfde constante, de golflengte echter is wel onafhankelijk van den tijd, maar is voor elk dier lichtvectoren gelijk aan een andere coördinatenfunctie.

Door voorbeelden zullen we dit in het volgend hoofdstuk nader toelichten.

---

4. Verschijnselen aan de grenzen van een stationaire golfbeweging.

Stel dat een of meer verstoringsbronnen A in stationaire beweging verkeeren en dat op tijd t_1 de beweging die zij hebben verwekt in het omgevend medium, wordt begrensd door een oppervlak S, zoodanig dat de deeltjes op S op tijd t_1 hun beweging beginnen. Op tijd t_1 is dan rust buiten S en binnen S is beweging. Op tijd t_1 is dus ook op S rust en de deeltjes op S hebben dan nog geen arbeidsvermogen van A ontvangen. Van dat oogenblik af deelt de golfbeweging door A verwekt aan de deeltjes op S voortdurend arbeidsvermogen mede. Dit arbeidsvermogen dragen zij voor een deel over aan de verder gelegen deeltjes, maar ze behouden zelf ook een gedeelte, waardoor de som van hun arbeidsvermogen van

plaats en van beweging langzamerhand grooter wordt. Gedurende het begin van hun beweging dragen de deeltjes op S dus minder arbeidsvermogen over dan zij ontvangen. De golfbeweging die dan het oppervlak S passeert, verhoogt dus de energie van de deeltjes op S.

Na eenigen tijd echter, b.v. op tijd t_2, is de beweging van de deeltjes op S stationair geworden, d. w. z. ze keeren dan telkens na eenzelfde tijdsverloop met dezelfde snelheid in hetzelfde punt van hun baan terug. De som van hun arbeidsvermogen van plaats en van beweging blijft dan standvastig; de golfbeweging die dan het oppervlak S passeert, verhoogt de energie van de deeltjes op S niet meer.

We stelden ons hier op het standpunt van de elasticiteitstheorie van het licht en spraken van de beweging der etherdeeltjes; het is echter duidelijk dat in de electromagnetische lichttheorie een analoge redeneering kan worden gehouden; ook hier wordt door de verstoringsbronnen aan den ether arbeidsvermogen medegedeeld en wel in den vorm van een electrische en een magnetische polarisatie.

Volgens beide theorieën hebben we dus het recht te zeggen:

1e. Een golfbeweging die zich voortplant in de buurt van de voorste grens der beweging en wel in dat deel, waar de beweging nog niet stationair is geworden, verliest bij haar voortbeweging een deel van haar arbeidsvermogen of m. a. w. ondergaat een demping.

2e. In het deel der ruimte dat zoover van de grenzen der beweging verwijderd is, dat deze daar stationair is geworden, plant een golfbeweging zich voort zonder arbeidsvermogen te verliezen.

Het woord demping moet hierbij goed worden opgevat; niet de beweging van eenzelfde deeltje dat in de buurt der voorste grens ligt ondervindt een demping, integendeel de energie en dus de amplitude van zulk een deeltje neemt toe; maar de golfbeweging die door de bronnen A wordt uitgezonden, ondervindt in de buurt der voorste grens een demping, omdat zij het arbeidsvermogen van de deeltjes die zij passeert verhoogt.

In de buurt van de achterste grens van een stationaire

golfbeweging heeft juist het omgekeerde plaats. Om dat in te zien stellen wij dat op zeker oogenblik t_2 de bronnen A ophouden een golfbeweging uit te zenden. De deeltjes op grooteren afstand van A en die zoover van de voorste grens verwijderd zijn dat hun beweging stationair is, zullen dan pas ophouden een stationaire beweging te hebben n a d a t dit het geval is met de dichter bij A gelegen deeltjes; het onderling verband toch tusschen de uitwijkingen en de snelheden van alle in stationaire beweging verkeerende deeltjes is zoodanig, dat er voortdurend arbeidsvermogen van deeltje op deeltje in de richting van de bronnen af wordt overgedragen, zonder dat (zoolang als de bronnen arbeidsvermogen leveren) daarbij het arbeidsvermogen dier deeltjes toe- of afneemt.

Dat overdragen van arbeidsvermogen van deeltje op deeltje blijft voortgaan ook nadat de bronnen A hebben opgehouden arbeidsvermogen te leveren; het gevolg daarvan is dat de voorste grens der beweging door blijft gaan met zich voort te planten juist als toen de bronnen nog wel energie leverden. Daar dus voortdurend arbeidsvermogen wordt overgedragen in de richting van de bronnen af, zal noodzakelijk het arbeidsvermogen van de deeltjes in de buurt dier (niet meer energie leverende) bronnen afnemen, en weldra zullen de deeltjes die aan die bronnen grenzen in rust zijn gekomen.

Het is hieruit duidelijk, dat we op zeker oogenblik t_3 nadat de bronnen hebben opgehouden energie te leveren, kunnen onderscheiden vier oppervlakken S_1, S_2, S_3 en S_4, zoodanig dat S_1 de voorste en S_4 de achterste grens der beweging vormt, dat tusschen S_2 en S_3 de beweging stationair is en dat tusschen S_1 en S_2 evenals tusschen S_3 en S_4 de beweging niet stationair is. Het arbeidsvermogen der deeltjes tusschen S_1 en S_2 dus der deeltjes in het v o o r s t e niet stationaire gebied neemt toe totdat de beweging dier deeltjes stationair is geworden; het arbeidsvermogen der deeltjes tusschen S_3 en S_4 dus der deeltjes in het a c h t e r s t e niet stationaire gebied neemt af totdat die deeltjes tot rust zijn gekomen.

Indien we een galvanische keten op tijd T_1 sluiten dan heeft pas op tijd T_2 de stroom zijn volle sterkte verkregen,

daar er gedurende dat tijdsverloop een deel van het arbeidsvermogen dat door de batterij wordt geleverd aan het omgevend medium wordt overgedragen en dit maakt tot een magnetisch veld. Verbreken we nu op tijd T_3 den keten, dan is eerst op tijd T_4 de stroomsterkte nul geworden; het arbeidsvermogen dat het magnetisch veld op tijd T_3 bezat onderhoudt den stroom gedurende den tijd T_3 tot T_4. De tijdgrenzen T_1, T_2, T_3 en T_4 zijn eenigszins met de ruimtegrenzen S_1, S_2, S_3 en S_4 te vergelijken.

Hoe we in de uitdrukking van de potentiaal eener begrensde door stationaire bronnen verwekte verstoring rekening kunnen houden met die verschijnselen in de buurt der grenzen, zullen we later doen zien. Daarbij zullen we ons laten leiden door het aangehaalde beeld van den extrastroom. Die grensverschijnselen maken dat ook op de grenzen der beweging de potentiaal, de ontbindingsuitwijkingen, ontbindingsmomenten en krachten continue functies blijven, zooals voor de toepassing van Kirchhoff's theorema noodzakelijk is.

Bij niet stationaire golfbewegingen zullen zich aan de grenzen dergelijke verschijnselen voor moeten doen; ze zijn daar echter niet zoo scherp te omschrijven. De deeltjes in de voorste grens moeten in beweging worden gesteld en dragen dus minder arbeidsvermogen over dan zij ontvangen; de deeltjes in de buurt der achterste grens dragen arbeidsvermogen over zonder dat hun door de bronnen nieuw arbeidsvermogen wordt toegevoerd en komen daarom tot rust.

HOOFDSTUK III.

BOLVORMIGE GOLFBEWEGINGEN.

1. Eenige vormen van potentiaalfuncties van bolvormige golven.

De eenvoudigste onderstelling die we voor bolvormige golven kunnen maken is, dat de potentiaal φ behalve van den tijd alleen een functie is van den afstand r tot het middelpunt der golven. Kiezen we dat middelpunt tot oorsprong van coördinaten dan kunnen we de diff. verg. der golfbeweging

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 \triangle \varphi \tag{1}$$

transformeeren tot

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(r\varphi) = a^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\varphi). \tag{52}$$

Hiervan is de algemeene oplossing

$$\varphi = \frac{1}{r} F_1(r + at) + \frac{1}{r} F_2(r - at), \tag{53}$$

waarin F_1 en F_2 arbitraire functies zijn. De eerst term van φ heeft blijkbaar betrekking op een convergeerende en de tweede op een divergeerende golfbeweging.

De uitdrukking (53) is de eenvoudigste vorm van de potentiaal van bolvormige golven. Daar φ hier slechts afhangt van

r en t en dit dus ook met haar phase het geval zal zijn, is ook de phasesnelheid der potentiaal een funtie alleen van r en t en dus naar alle richtingen dezelfde.

Uit (53) zijn andere meer ingewikkelde potentialen van bolvormige golven af te leiden.

Indien we n.l. (1) differentieeren naar x krijgen we:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) = a^2 \triangle \frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

Is dus φ een oplossing van (1), dan voldoet ook $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ en evenzoo zijn dan ook $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ en $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ oplossingen. Door ieder dezer oplossingen weder naar x, y, z en t te differentieeren vinden we weder nieuwe oplossingen, enz. Verder zullen sommen dezer oplossingen ook weder oplossingen zijn, daar (1) lineair en homogeen is.

Uit de oplossing

$$\varphi_1 = \frac{1}{r} F(r - at) \tag{54}$$

kunnen we dus vooreerst afleiden de oplossing

$$\left.\begin{aligned} \varphi_2 &= \frac{\partial}{\partial x}\ \frac{1}{r}\ F(r - at) \\ \text{of} \\ \varphi_2 &= -\frac{x}{r^3} F(r - at) + \frac{x}{r^2} F'(r - at). \end{aligned}\right\} \tag{55}$$

Noemen we ϑ den hoek dien r maakt met de Z as en γ den hoek tusschen het ZX vlak en het vlak gaande door r en de Z as, dan is

$$x = r \cos \gamma \sin \vartheta$$

en dus

$$\varphi_2 = \left(-\frac{F}{r^2} + \frac{F'}{r}\right) \cos \gamma \sin \vartheta, \tag{56}$$

waarin F en F' zijn geschreven voor $F(r-at)$ en $F'(r-at)$.

De beweging (56) is reeds veel ingewikkelder dan (54); haar potentiaal is niet onafhankelijk van de richting. In het YZ vlak is $\cos\gamma = o$, langs de Z as is $\sin\vartheta = o$, terwijl langs de X as zoowel $\sin\vartheta$ als $\cos\gamma$ afgezien van het teeken hun grootste waarde hebben. In de punten waar de X as den bol snijdt heeft de potentiaal afgezien van het teeken haar grootste waarde en neemt van die punten als polen beschouwd naar het aequatorvlak YZ af. Aan beide zijden van den aequator heeft de potentiaal verschillend teeken en is op den aequator zelf nul. Met grooter worden van r nemen beide termen waaruit (56) bestaat af, maar de eerste het snelst. Ver van den oorsprong behoeven we dus slechts de laatste term in aanmerking te nemen en de eerste is overwegend in de buurt van den oorsprong.

Door (55) nog eens naar x te differentieeren krijgen we de oplossing

$$\varphi_3 = -\frac{F}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5}F - \frac{3x^2}{r^4}F' + \frac{1}{r^2}F' + \frac{x^2}{r^3}F'',$$

of

$$\varphi_3 = -\frac{F}{r^3} + \frac{F'}{r^2} + \left(\frac{3F}{r^3} - \frac{3F'}{r^2} + \frac{F''}{r}\right)\cos^2\gamma\sin^2\vartheta. \quad (57)$$

De eerste twee termen zijn van γ en ϑ onafhankelijk en stellen dus een deel der potentiaal voor, dat zich naar alle zijden met gelijke phasesnelheid en intensiteit uitbreidt. Het tweede deel wordt vermenigvuldigd met $\cos^2\gamma\sin^2\vartheta$; deze richtingsfactor is nooit negatief, bereikt zijn maximum 1 op de X as en is in het YZ vlak nul. Het deel der potentiaal door de laatste termen van (57) voorgesteld, is dus langs de X as het grootst en neemt van daar naar het YZ vlak af tot nul. In het YZ vlak overheerscht het eerste deel; het laatste overweegt voor grootere waarden van r in de buurt van de X as.

Op deze wijze voortgaande kunnen we potentialen van steeds ingewikkelder vorm afleiden. Door (55) naar y te differentieeren krijgen we b. v. de oplossing

$$\varphi_4 = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{x}{r^3}F + \frac{x}{r^2}F'\right)$$

$$= \frac{xy}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{F}{r^3} + \frac{F'}{r^2}\right)$$

$$= \frac{xy}{r}\left(\frac{3F}{r^4} - \frac{3F'}{r^3} + \frac{F''}{r^2}\right).$$

Nu is

$$x = r\cos\gamma\sin\vartheta \qquad \text{en} \qquad y = r\sin\gamma\sin\vartheta,$$

dus

$$\varphi_4 = \left(\frac{3F}{r^3} - \frac{3F'}{r^2} + \frac{F''}{r}\right)\sin\gamma\cos\gamma\sin^2\vartheta. \tag{58}$$

De richtingsfactor heeft hier al weer ingewikkelder vorm. Langs de X, Y en Z as is de potentiaal nul en zij bereikt haar maximum voor $\vartheta = 90^0$ en $\gamma = 45^0$ dus in het XY vlak midden tusschen de X en Y as in.

Von Helmholtz [1]) noemt verstoringen als waarvan (56), (57) en (58) de potentialen zijn, „Zusammengesetzte Kugelwellen". Strikt genomen zijn van al deze golfbewegingen de potentiaalphaseoppervlakken niet bolvormig. Ik zal ze echter toch met den naam bolvormige golfbewegingen aanduiden.

We kunnen in (54) het — teeken door het + teeken vervangen en mogen dus in (56), (57) en (58) hetzelfde doen; zij worden dan de potentialen van convergeerende bewegingen.

---

1) Von Helmholtz. Vorlesungen über die Electromagn. Theorie des Lichts. Hamburg und Leipzig 1897.

2. Phasesnelheden van eenige soorten van bolvormige stationaire golfbewegingen.

Als eerste voorbeeld kunnen we kiezen een speciaal geval van (54) n.l.

$$\varphi = \frac{C}{r} \sin 2\pi \frac{r - at}{\lambda} . \tag{59}$$

De phasesnelheid a' der potentiaal vinden we volgens (39) uit

$$a' = - \frac{\frac{\partial \Theta}{\partial t}}{\frac{\partial \Theta}{\partial N}} ,$$

waarin Θ is de phase der potentiaal.

In ons geval is dus

$$\Theta = 2\pi \frac{r - at}{\lambda} ,$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = - \frac{2\pi}{\lambda} a , \qquad \frac{\partial \Theta}{\partial N} = \frac{\partial \Theta}{\partial r} = \frac{2\pi}{\lambda} ;$$

dus

$$a' = a .$$

De phasesnelheid van de potentiaal (59) is dus gelijk aan a.

Als tweede voorbeeld kiezen we

$$\varphi = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{C}{r} \sin 2\pi \frac{(r - at)}{\lambda} \right\} ; \tag{60}$$

deze potentiaal is van den vorm (56).

Stellen we ter afkorting $\frac{2\pi}{\lambda} = m$, dan is

$$\varphi = - \frac{Cx}{r^3} \sin m(r - at) + \frac{Cmx}{r^2} \cos m(r - at) ,$$

of

$$\varphi = \frac{C x}{r^3} \sqrt{1 + m^2 r^2} \sin \left\{ m (r - a t) - \operatorname{arc\,tg}\, m r \right\}.$$

Hier is dus

$$\Theta = m (r - a t) - \operatorname{arc\,tg}\, m r,$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = - m a, \qquad \frac{\partial \Theta}{\partial N} = \frac{\partial \Theta}{\partial r} = \frac{m^3 r^2}{1 + m^2 r^2};$$

dus:

$$a' = - \frac{\frac{\partial \Theta}{\partial t}}{\frac{\partial \Theta}{\partial N}} = a \left(1 + \frac{1}{m^2 r^2}\right),$$

of

$$a' = a \left(1 + \frac{\lambda^2}{4 \pi^2 r^2}\right). \tag{61}$$

De met (60) overeenkomende convergeerende beweging heeft tot potentiaal

$$\varphi = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{C}{r} \sin 2 \pi \frac{r + a t}{\lambda} \right\}; \tag{62}$$

daarvoor vindt men evenzoo voor de phase:

$$\Theta = m (r + a t) - \operatorname{arc\,tg}\, m r,$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = m a, \qquad \frac{\partial \Theta}{\partial N} = - \frac{\partial \Theta}{\partial r} = - \frac{m^3 r^3}{1 + m^2 r^2},$$

en dus

$$a' = a \left(1 + \frac{\lambda^2}{4 \pi^2 r^2}\right).$$

Dit is juist dezelfde uitdrukking als (61). Zoowel van (60) als van (62) stelt dus (61) voor de phasesnelheid der potentiaal.

Voor r oneindig groot t. o. v. λ is de phasesnelheid gelijk aan a; voor r oneindig klein t. o. v. λ is de phasesnelheid oneindig groot.

Bedroeg die snelheid overal a dan zou de phase der potentiaal tusschen twee punten gelegen op afstanden R_1 en R_2 voor en achter het focus een vermeerdering verkrijgen $m\ (R_1 + R_2)$; nu echter bedraagt de phasevermeerdering tusschen die punten

$$m\,(R_1 + R_2) + \text{arc tg}\, m\,R_1 + \text{arc tg}\, m\,R_2\,.$$

De phasevermeerdering die het gevolg is van die grootere phase snelheid is dus

$$\text{arc tg}\ m\,R_1 + \text{arc tg}\ m\,R_2\,.$$

Zijn $m\,R_1$ en $m\,R_2$ zeer groot, d. w. z. R_1 en R_2 zeer groot t. o. v. λ, dan wordt die phasevermeerdering dus gelijk aan π. Die phasevermeerdering komt overeen met een wegvoorsprong $\frac{\pi}{m}$ of $\frac{\lambda}{2}$.

Nemen we thans eens aan dat de potentiaal den vorm heeft

$$\varphi = \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{C}{r}\sin 2\pi\frac{r - at}{\lambda}\right), \tag{63}$$

wat een bijzonder geval is van den vorm (58).

Stellen we weder ter afkorting $\frac{2\pi}{\lambda} = m$, dan vindt men

$$\varphi = \frac{Cxy}{r^5}\sqrt{(3 - m^2 r^2)^2 + (3\,m\,r)^2}\,\sin\left(m\,(r - at) - \text{arc tg}\,\frac{3\,m\,r}{3 - m^2 r^2}\right).$$

Hier is dus

$$\Theta = m\,(r - at) - \text{arc tg}\,\frac{3\,m\,r}{3 - m^2 r^2}\,,$$

waaruit men vindt:

$$\frac{\partial\,\Theta}{\partial\,t} = -\,m\,a\,,$$

$$\frac{\partial\,\Theta}{\partial\,N} = \frac{\partial\,\Theta}{\partial\,r} = \frac{m^5 r^4}{9 + 3\,m^2 r^2 + m^4 r^4}\,,$$

en dus

$$a' = a \frac{9 + 3 m^2 r^2 + m^4 r^4}{m^4 r^4}$$

of

$$a' = a \left[1 + \frac{9 + 3 \left(\frac{2 \pi r}{\lambda}\right)^2}{\left(\frac{2 \pi r}{\lambda}\right)^4} \right]. \qquad (64)$$

Voor de met (63) overeenkomende convergeerende beweging is

$$\varphi = \frac{\partial^2}{\partial x \, \partial y} \left\{ \frac{C}{r} \sin 2 \pi \frac{r + a t}{\lambda} \right\}. \qquad (65)$$

Men vindt hiervoor

$$\Theta = m (r + a t) - \operatorname{arc\,tg} \frac{3 m r}{3 - m^2 r^2},$$

waaruit voor de phasesnelheid der potentiaal weder de waarde (64) volgt.

Voor r oneindig groot t. o. v. λ is de phasesnelheid weer gelijk a; voor r oneindig klein t. o. v. λ is zij weer oneindig groot.

De door die grootere phasesnelheid (grooter dan a) verkregen phasevermeerdering bedraagt tusschen twee punten gelegen op afstanden R_1 en R_2 voor en achter het focus voor de gecombineerde potentiaal (63), (65):

$$\left[\operatorname{arc\,tg} \frac{3 m r}{3 - m^2 r^2} \right]_0^{R_1} + \left[\operatorname{arc\,tg} \frac{3 m r}{3 - m^2 r^2} \right]_0^{R_2}.$$

Is $m R_1$ oneindig groot, d. w. z. R_1 oneindig groot t. o. v. λ, dan is

$$\left[\operatorname{arc\,tg} \frac{3 m r}{3 - m^2 r^2} \right]_0^{R_1} = \left[\operatorname{arc\,tg} \frac{3 m r}{3 - m^2 r^2} \right]_0^{\sqrt{\frac{3}{m^2}}} + \left[\operatorname{arc\,tg} \frac{3 m r}{3 - m^2 r^2} \right]_{\sqrt{\frac{3}{m^2}}}^{\infty} = \pi.$$

Zijn R_1 en R_2 beide oneindig groot t. o. v. λ dan wordt de

geheele phasevermeerdering derhalve 2π; deze phasevermeerdering komt overeen met een wegvoorsprong λ.

We vinden hier dus de dubbele phasevermeerdering en den dubbelen wegvoorsprong als bij het vorige voorbeeld.

Ten slotte zullen we nog berekenen de phasesnelheid der potentiaal

$$\varphi = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{C}{r}\sin 2\pi\frac{r-at}{\lambda}\right). \qquad (66)$$

Stellen we weder $\frac{2\pi}{\lambda} = m$, dan vindt men:

$$\varphi = \frac{C}{r^5}\sqrt{(3x^2-r^2-m^2x^2r^2)^2+(3x^2-r^2)^2m^2r^2}\,\sin\left\{m(r-at)-\operatorname{arc\,tg}\frac{mr(3x^2-r^2)}{3x^2-r^2-m^2x^2r^2}\right\}.$$

Hier is

$$\Theta = m(r-at) - \operatorname{arc\,tg}\frac{mr(3x^2-r^2)}{3x^2-r^2-m^2x^2r^2},$$

en dus

$$\frac{\partial\Theta}{\partial t} = -ma.$$

Hier zijn de phaseoppervlakken der potentiaal geen bollen, want in Θ komt behalve r en t ook x voor. Hier is dus niet

$$\frac{\partial\Theta}{\partial N} = \frac{\partial\Theta}{\partial r}.$$

Om $\frac{\partial\Theta}{\partial N}$ te berekenen hebben we volgens (39)

$$\frac{\partial\Theta}{\partial N} = \frac{\partial\Theta}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial N} + \frac{\partial\Theta}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial N} + \frac{\partial\Theta}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial N}$$

of

$$\frac{\partial\Theta}{\partial N} = \sqrt{\left(\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Theta}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\Theta}{\partial z}\right)^2}.$$

Nu is

$$\frac{\partial \Theta}{\partial x} = \frac{\partial \Theta}{\partial r}\,\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\delta \Theta}{\delta x},$$

indien we door δ aanduiden een differentiatie naar de letter x, d. w. z. een differentiatie waarbij we alleen naar x differentieeren voor zoover x als zoodanig in Θ voorkomt; verder:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial y} = \frac{\partial \Theta}{\partial r}\,\frac{\partial r}{\partial y} \qquad \text{en} \qquad \frac{\partial \Theta}{\partial z} = \frac{\partial \Theta}{\partial r}\,\frac{\partial r}{\partial z}.$$

Dus:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial N} = \sqrt{\left(\frac{\partial \Theta}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\delta \Theta}{\delta x}\right)^2 + 2\,\frac{\partial \Theta}{\partial r}\,\frac{\delta \Theta}{\delta x}\,\frac{x}{r}}.$$

Voert men deze differentiaties uit dan vindt men:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial N} = \frac{m^3 r^4 \sqrt{r^4 + 2m^2 r^2 x^4 - 2r^2 x^2 + m^4 x^8 - 6m^2 x^6 + 5x^4}}{(3x^2 - r^2 - m^2 x^2 r^2)^2 + m^2 r^2 (3x^2 - r^2)^2},$$

en dus

$$a' = -\,\frac{\dfrac{\partial \Theta}{\partial t}}{\dfrac{\partial \Theta}{\partial N}} = a\,\frac{(3x^2 - r^2 - m^2 x^2 r^2)^2 + m^2 r^2 (3x^2 - r^2)^2}{m^2 r^4 \sqrt{r^4 + 2m^2 r^2 x^4 - 2r^2 x^2 + m^4 x^8 - 6m^2 x^6 + 5x^4}}. \qquad (67)$$

Stellen we hierin $x = r\cos\alpha$, dan:

$$a' = a\,\frac{(3\cos^2\alpha - 1 - m^2 r^2 \cos^2\alpha)^2 + m^2 r^2 (3\cos^2\alpha - 1)^2}{m^2 r^2 \sqrt{1 + 2m^2 r^2 \cos^4\alpha - 2\cos^2\alpha + m^4 r^4 \cos^8\alpha - 6m^2 r^2 \cos^6\alpha + 5\cos^4\alpha}}.$$

Voor mr oneindig groot, dus r oneindig groot t. o. v. λ is $a' = a$;

voor mr oneindig klein, dus r oneindig klein t. o. v. λ is $a' = \infty$.

Behalve van r hangt hier de phasesnelheid der potentiaal ook af van de richting α, dus van den hoek, dien r maakt met de Xas.

In het YZ vlak is $\cos\alpha = 0$, dus daar is

$$a' = a\left(1 + \frac{1}{m^2 r^2}\right),$$

of

$$a' = a\left(1 + \frac{\lambda^2}{4\pi^2 r^2}\right);$$

dit is juist de uitdrukking (61).

Langs de Xas is $\cos\alpha = 1$, dus daar is

$$a' = a\,\frac{(2 - m^2 r^2)^2 + 4 m^2 r^2}{m^2 r^2 (2 - m^2 r^2)}.$$

De phasesnelheid der potentiaal is dus oneindig groot in den oorsprong (het focus) en ook in de twee punten gelegen op de Xas waarvoor $m^2 r^2 = 2$.

Voor de met (66) overeenkomende convergeerende golfbeweging is

$$\varphi = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\{\frac{C}{r}\sin 2\pi\,\frac{r + at}{\lambda}\right\}. \qquad (68)$$

Hiervoor vindt men weder:

$$\Theta = m(r + at) - \operatorname{arc\,tg}\frac{m r (3x^2 - r^2)}{3x^2 - r^2 - m^2 x^2 r^2},$$

zoodat de phasesnelheid der potentiaal (68) weder gelijk is aan de uitdrukking (67).

Voor de gecombineerde beweging (66), (68) is de phasevermeerdering der potentiaal tusschen twee punten gelegen op afstanden R_1 en R_2 voor en achter het focus, boven wat zij zou zijn indien de phasesnelheid was a, derhalve:

$$\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{m r (3x^2 - r^2)}{3x^2 - r^2 - m^2 x^2 r^2}\right]_0^{R_1} + \left[\operatorname{arc\,tg}\frac{m r (3x^2 - r^2)}{3x^2 - r^2 - m^2 x^2 r^2}\right]_0^{R_2}$$

of

$$\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{m r (3\cos^2\alpha - 1)}{3\cos^2\alpha - 1 - m^2 r^2 \cos^2\alpha}\right]_0^{R_1} + \left[\operatorname{arc\,tg}\frac{m r (3\cos^2\alpha - 1)}{3\cos^2\alpha - 1 - m^2 r^2 \cos^2\alpha}\right]_0^{R_2}.$$

Onderstellen we $m R_1$ oneindig groot en $\cos\alpha = 1$, dan is:

$$\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{m r (3\cos^2\alpha - 1)}{3\cos^2\alpha - 1 - m^2 r^2 \cos^2\alpha}\right]_0^{R_1} = \left[\operatorname{arc\,tg}\frac{2 m r}{2 - m^2 r^2}\right]_0^{\sqrt{\frac{2}{m^2}}} + \left[\operatorname{arc\,tg}\frac{3 m r}{2 - m^2 r^2}\right]_{\sqrt{\frac{2}{m^2}}}^{\infty} = \pi$$

Zijn $m R_1$ en $m R_2$ beide oneindig groot dan wordt dus voor $\cos \alpha = 1$ de geheele phaseverandering gelijk aan 2π. De wegvoorsprong is λ.

Tot nu toe hebben we slechts berekend voor eenige voorbeelden de phasesnelheid der potentiaal en we hebben gezien dat deze zeer verschillende waarde kan hebben, maar dat in de onderstelling dat λ oneindig klein is t. o. v. r, zij steeds gelijk wordt aan a.

We zouden thans voor die verschillende voorbeelden kunnen gaan berekenen de phasesnelheden van de ontbindingsuitwijkingen en van de electrische en de magnetische ontbindingsmomenten en ontbindingskrachten.

Daarvoor worden die berekeningen echter zeer uitvoerig en daarom zal ik slechts de phasesnelheden vermelden voor ons eerste voorbeeld

$$\varphi = \frac{C}{r} \sin 2\pi \frac{r - at}{\lambda}. \qquad (59)$$

Men vindt indien men weder ter afkorting stelt $\frac{2\pi}{\lambda} = m$:

$$u = o,$$

$$v = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{Cz}{r^3} \sqrt{1 + m^2 r^2} \sin \left\{ m(r - at) - \operatorname{arc\,tg} mr - \pi \right\},$$

$$w = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{Cy}{r^3} \sqrt{1 + m^2 r^2} \sin \left\{ m(r - at) - \operatorname{arc\,tg} mr \right\},$$

$$\frac{\mathfrak{X}}{\epsilon} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{C}{r^5} \sqrt{\{r^2 - 3x^2 - m^2 r^2 (r^2 - x^2)\}^2 + m^2 r^2 (r^2 - 3x^2)^2}$$

$$\sin \left\{ m(r - at) - \operatorname{arc\,tg} \frac{mr(r^2 - 3x^2)}{r^2 - 3x^2 - m^2 r^2 (r^2 - x^2)} - \pi \right\},$$

$$\frac{\mathfrak{Y}}{\epsilon} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \, \partial y} = \frac{Cxy}{r^5} \sqrt{(3 - m^2 r^2)^2 + (3mr)^2} \sin \left\{ m(r - at) - \operatorname{arc\,tg} \frac{3mr}{3 - m^2 r^2} \right\},$$

$$\frac{\mathfrak{Z}}{\epsilon} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \, \partial z} = \frac{Cxz}{r^5} \sqrt{(3 - m^2 r^2)^2 + (3mr)^2} \sin \left\{ m(r - at) - \operatorname{arc\,tg} \frac{3mr}{3 - m^2 r^2} \right\},$$

$$\mathfrak{L} = o,$$

$$\frac{\mathfrak{M}}{A\mu\varepsilon} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial t} = \frac{Cmaz}{r^3}\sqrt{1+m^2r^2}\sin\left\{m(r-at) - \operatorname{arc\,tg} mr - \frac{\pi}{2}\right\},$$

$$\frac{\mathfrak{N}}{A\mu\varepsilon} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial t} = \frac{Cmay}{r^3}\sqrt{1+m^2r^2}\sin\left\{m(r-at) - \operatorname{arc\,tg} mr + \frac{\pi}{2}\right\}.$$

Indien men λ oneindig klein onderstelt t. o. v. r en dus mr oneindig groot, dan worden de phases al dezer lichtvectoren gelijk aan $m(r-at) + k\frac{\pi}{2}$ en al de phasesnelheden worden dan gelijk aan a. Maakt men die onderstelling niet dan zijn de phasesnelheden grooter dan a. De hieruit voort vloeiende wegvoorsprong tusschen twee punten gelegen voor en achter het focus op afstanden die t. o. v. λ oneindig groot zijn, bedraagt voor de ontbindingsuitwijkingen en de magnetische ontbindingsvectoren π en voor de electrische ontbindingsvectoren 2π.

Voor lichtgolven waarvan (59) de potentiaal is, kan men dus zeggen, dat op eenigen afstand van het focus alle phasesnelheden gelijk zijn aan a. In de buurt van het focus is echter voor ieder waarde van λ de phasesnelheid grooter dan a.

---

3. Vorm der potentiaal eener begrensde bolvormige golfbeweging.

Indien we onderstellen dat van een bolvormige divergeerende verstoring de potentiaal een functie is alleen van r en van t, dan is haar meest algemeene vorm:

$$\varphi = \frac{1}{r} F(r-at). \qquad (54)$$

Indien de golfbeweging plaats heeft in den vrijen ether dan moet F bovendien nog voldoen aan zekere continuïteitseischen, die in de elasticiteitstheorie en in de electromagnetische lichttheorie verschillend uitvallen.

In de elasticiteitstheorie is een physische eisch waaraan φ voldoen moet, dat overal waar geen vreemde lichamen of lichtgevende punten aanwezig zijn, de uitwijkingen en de snelheden der etherdeeltjes eindige en continue functies zijn van den tijd. Volgens de vergelijkingen (6) hangen de ontbindingsuitwijkingen der beweging waarvan (54) de potentiaal is, samen met F en F' en dus de ontbindingssnelheden met F' en F''. Zal dus (54) in de elasticiteitstheorie voorstellen de potentiaal van een golfbeweging in den vrijen ether, dan moeten F, F' en F'' eindige en continue functies zijn.

In de electromagnetische lichttheorie hangen de electrische en de magnetische momenten en krachten eener golfbeweging waarvan (54) de potentiaal voorstelt, volgens de vergelijkingen (9) samen met F, F' en F'' en dus de snelheden dezer vectoren met F', F'' en F'''. Zal dus (54) in de electromagnetische lichttheorie voorstellen de potentiaal van een golfbeweging in den vrijen ether, dan moeten F, F', F'' en F''' eindige en continue functies zijn.

Stellen we ons nu voor dat de beweging waarvan (54) de potentiaal is, wordt begrensd door twee boloppervlakken om het middelpunt van verstoring hetwelk we kiezen als oorsprong van coördinaten, dan zullen in beide theorieën op tijd $t = o$ de lichtvectoren en hun snelheden binnen een ruimte S omsloten door twee bollen met stralen r_1 en r_2 om het middelpunt van verstoring van nul verschillen en overal daar buiten nul zijn.

In de elasticiteitstheorie hangen die uitwijkingen en snelheden samen met F, F' en F''; daar moeten dus binnen S de functies F, F' en F'' voor $t = o$ een eindige en continue waarde hebben en daar buiten overal nul zijn, waaruit volgt dat voor $t = o$ ook op de bollen r_1 en r_2 de functies F, F' en F'' gelijk nul moeten zijn.

In de electromagnetische lichttheorie zijn de eischen waaraan F voldoen moet nog zwaarder. Daar moeten F, F', F'' en F''' voor $t = o$ binnen S een eindige en continue waarde hebben, buiten S nul zijn en dus ook nul zijn op de bollen r_1 en r_2.

Volgens Fourier's theorema is de uitdrukking

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\alpha \int_c^d f(\mu)\cos\alpha(x-\mu)\,d\mu$$

tusschen de grenzen $c<x<d$ gelijk aan $f(x)$ en buiten die grenzen overal nul.

Maken we van dit theorema gebruik dan kunnen we aantoonen dat φ aan de haar gestelde eischen voldoet zoo we haar schrijven in den vorm:

$$\varphi_{\substack{r=r\\t=t}} = \frac{1}{\pi r}\int_0^\infty d\alpha \int_{r_1}^{r_2} F(\mu)\cos\alpha(r-at-\mu)\,d\mu\,; \qquad (69)$$

mits bovendien F voldoet aan de continuïteitseischen, d. w. z. dat in de elasticiteitstheorie F, F' en F'' door de geheele ruimte eindig en continu zijn, en voor $t=o$ op de bollen r_1 en r_2 gelijk zijn aan nul, terwijl in de electromagnetische lichttheorie diezelfde voorwaarden gelden voor F, F', F'' en F'''.

Aan die eischen voor F kunnen we voldoen door te stellen

$$F(r-at) = G(r-at)\,f(r-at), \qquad (70)$$

waarin f de waarde is die F verkrijgt op grooten afstand van de grenzen (zie het laatste gedeelte van Hoofdstuk II), terwijl G een factor is die samenhangt met de verschijnselen aan de grenzen, welke we aldaar bespraken, en dien we zulk een vorm zullen geven dat F aan de haar gestelde eischen voldoet.

Uit (70) volgt:

$$\left.\begin{aligned} F' &= G'f + Gf',\\ F'' &= G''f + 2G'f' + Gf'',\\ F''' &= G'''f + 3G''f' + 3G'f'' + Gf'''. \end{aligned}\right\} \qquad (71)$$

G moet dus voldoen aan de volgende voorwaarden:

	Elasticiteitstheorie,	Electromagn. Lichttheorie,
aan de grenzen:	$G=o,\ G'=o,\ G''=o,$	$G=o,\ G'=o,\ G''=o,\ G'''=o,$
ver van de grenzen:	$G=1,\ G'=o,\ G''=o.$	$G=1,\ G'=o,\ G''=o,\ G'''=o.$

(72)

Aan die eischen voldoet G zoo we stellen in de elasticiteitstheorie:

$$G = \left[1 - e^{-\alpha_1 (r - at - r_1)}\right]^2 \left[1 - e^{-\alpha_2 (r_2 - r + at)}\right]^2, \quad (73)$$

en in de electromagnetische lichttheorie:

$$G = \left[1 - e^{-\alpha_1 (r - at - r_1)}\right]^3 \left[1 - e^{-\alpha_2 (r_2 - r + at)}\right]^3, \quad (74)$$

zooals eenvoudig is na te gaan; α_1 en α_2 stellen voor constanten.

We zouden voor G ook wel andere vormen kunnen kiezen en willen door de voorbeelden (73) en (74) slechts aantoonen dat we aan G geen onmogelijk te vervullen eischen stelden.

Indien in een gesloten keten van weerstand r en coëfficient van zelfinductie L een electromotorische kracht E werkzaam wordt, dan is na t sec. de stroomsterkte gelijk aan i, indien:

$$i = \frac{E}{r}\left(1 - e^{-\frac{r}{L}t}\right).$$

Voor zeer groote waarden van t is

$$i = \frac{E}{r}.$$

In de uitdrukking voor de stroomsterkte treedt hier dus op de factor $1 - e^{-\frac{r}{L}t}$. We wezen aan het eind van het vorige hoofdstuk op een zekere overeenkomst die bestaat tusschen het verschijnsel van den extrastroom en de verschijnselen aan de grenzen eener golfbeweging. Naar analogie van den factor $1 - e^{-\frac{r}{L}t}$ zijn de uitdrukkingen (73) en (74) gekozen.

In 't vervolg nemen we echter voor G geen bepaalden vorm aan, maar onderstellen slechts dat G voldoet aan de vergelijkingen (72).

Volgens (71) hebben we dan:

	Elasticiteitstheorie,	Electromagn. Lichttheorie,
aan de grenzen:	$F=o,\ F'=o,\ F''=o,$	$F=o,\ F'=o,\ F''=o,\ F'''=o,$
ver van de grenzen:	$F=f,\ F'=f',\ F''=f'',$	$F=f,\ F'=f',\ F''=f'',\ F'''=f'''.$

(75)

G doet dus slechts in de buurt der grenzen zijn invloed gevoelen.

Als G aan (72) en dus F aan (75) voldoet, is gemakkelijk aan te toonen dat (69) de potentiaal voorstelt van onze begrensde bolvormige verstoring, terwijl aan de continuïteitseischen voldaan wordt.

Uit (69) volgt n.l.

$$\varphi_{\substack{r=r\\t=o}} = \frac{1}{\pi r}\int_o^\infty d\alpha \int_{r_1}^{r_2} F(\mu)\cos\alpha(r-\mu)\,d\mu\,, \qquad (76)$$

en dus is volgens Fourier's theorema:

$$\varphi_{\substack{r=r\\t=o}} = \frac{1}{r}\,F(r)\,, \qquad \text{indien } r_1 < r < r_2\,;$$

dit is juist den vorm door (54) geëischt, terwijl buiten die grenzen

$$\varphi_{\substack{r=r\\t=o}} = o$$

Daar verder volgens (75):

$$F(r_1) = o \qquad \text{en} \qquad F(r_2) = o$$

blijft $\varphi_{\substack{r=r\\t=o}}$ aan de grenzen continu.

Verder volgt uit (69):

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_{\substack{r=r\\t=t}} = -\frac{x}{r^2}\varphi_{\substack{r=r\\t=t}} - \frac{x}{\pi r^2}\int_o^\infty d\alpha \int_{r_1}^{r_2} F(\mu)\,\alpha\sin\alpha(r-at-\mu)\,d\mu\,,$$

wat door partieele integratie wordt:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_{\substack{r=r\\t=t}} = -\frac{x}{r^2}\varphi_{\substack{r=r\\t=t}} - \frac{x}{\pi r^2}\int_o^\infty d\alpha \left\{\Big[F(\mu)\cos\alpha(r-at-\mu)\Big]_{r_1}^{r_2} - \int_{r_1}^{r_2} F'(\mu)\cos\alpha(r-at-\mu)\,d\mu\right\},$$

of, daar volgens (75), $F(r_1) = o$ en $F(r_2) = o$:

$$\left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x}\right)_{\substack{r=r\\t=t}} = -\frac{x}{r^2}\varphi_{\substack{r=r\\t=t}} + \frac{x}{\pi r^2}\int_o^\infty d\alpha \int_{r_1}^{r_2} F'(\mu)\cos\alpha(r-at-\mu)\,d\mu\,, \qquad (77)$$

en dus

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_{\substack{r=r\\t=o}} = -\frac{x}{r^2}\varphi_{\substack{r=r\\t=o}} + \frac{x}{\pi r^2}\int_o^\infty d\alpha \int_{r_1}^{r_2} F'(\mu)\cos\alpha(r-\mu)\,d\mu\,.$$

Volgens Fourier's theorema is dus:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_{\substack{r=r\\t=o}} = -\frac{x}{r^3}F(r) + \frac{x}{r^2}F'(r)\,, \quad \text{indien } r_1 < r < r_2\,;$$

dit is juist de vorm die door (54) wordt geeischt, terwijl buiten die grenzen

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_{\substack{r=r\\t=o}} = o.$$

Daar verder volgens (75), $F(r_1) = o$ en $F(r_2) = o$, blijft $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_{\substack{r=r\\t=o}}$ ook aan de grenzen continu.

Geheel dezelfde bewijsvoering geldt voor den juisten vorm en de continuïteit van $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_{\substack{r=r\\t=o}}$ en $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_{\substack{r=r\\t=o}}$, zoodat we zien dat de eerste diff. quot. van φ naar de coördinaten (en daarmede de ontbindingsuitwijkingen) voor $t = o$ door (69) in den juisten vorm en op continue wijze worden voorgesteld.

Voor de overige diff. quot. van φ verloopt het bewijs hiervan geheel analoog. Zoo is b.v. volgens (69):

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_{\substack{r=r\\t=t}} = \frac{a}{\pi r}\int_o^\infty d\alpha \int_{r_1}^{r_2} F(\mu)\,\alpha\sin\alpha(r-at-\mu)\,d\mu\,,$$

wat door partieele integratie en door van (75) gebruik te maken kan worden getransformeerd tot:

$$\left(\frac{\partial\,\varphi}{\partial\,t}\right)_{\substack{r=r\\t=t}} = -\frac{a}{\pi\,r}\int_0^{\infty} d\,\alpha \int_{r_1}^{r_2} F'(\mu)\cos\alpha\,(r-a\,t-\mu)\,d\,\mu$$

en dus:

$$\left(\frac{\partial\,\varphi}{\partial\,t}\right)_{\substack{r=r\\t=o}} = -\frac{a}{\pi\,r}\int_0^{\infty} d\,\alpha \int_{r_1}^{r_2} F'(\mu)\cos\alpha\,(r-\mu)\,d\,\mu\,.$$

De continuïteit en juisten vorm hiervan zijn eenvoudig te herkennen.

Verder volgt uit (77):

$$\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\,x^2}\right)_{\substack{r=r\\t=t}} = -\frac{r^2-2x^2}{r^4}\,\varphi_{\substack{r=r\\t=t}} - \frac{x}{r^2}\left(\frac{\partial\,\varphi}{\partial\,x}\right)_{\substack{r=r\\t=t}} + \frac{r^2-2x^2}{\pi\,r^4}\int_0^{\infty} d\,\alpha \int_{r_1}^{r_2} F'(\mu)\cos\alpha\,(r-at-\mu)\,d\,\mu$$

$$-\frac{x^2}{\pi\,r^3}\int_0^{\infty} d\,\alpha \int_{r_1}^{r_2} F'(\mu)\,\alpha\sin\alpha\,(r-at-\mu)\,d\,\mu\,.$$

Voegen we de eerste en derde term samen door middel van (77) en herleiden we de laatste integraal door partieele integratie, waarbij we van (75) gebruik maken, dan:

$$\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\,x^2}\right)_{\substack{r=r\\t=t}} = \frac{r^2-3x^2}{r^2\,x}\left(\frac{\partial\,\varphi}{\partial\,x}\right)_{\substack{r=r\\t=t}} + \frac{x^2}{\pi\,r^3}\int_0^{\infty} d\,\alpha \int_{r_1}^{r_2} F''(\mu)\cos\alpha\,(r-at-\mu)\,d\mu,$$

en dus:

$$\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\,x^2}\right)_{\substack{r=r\\t=o}} = \frac{r^2-3x^2}{r^2\,x}\left(\frac{\partial\,\varphi}{\partial\,x}\right)_{\substack{r=r\\t=o}} + \frac{x^2}{\pi\,r^3}\int_0^{\infty} d\,\alpha \int_{r_1}^{r_2} F''(\mu)\cos\alpha\,(r-\mu)\,d\,\mu\,.$$

Volgens Fourier's theorema is dus

$$\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\,x^2}\right)_{\substack{r=r\\t=o}} = \frac{r^2-3x^2}{r^2\,x}\left[-\frac{x}{r^3}F(r)+\frac{x}{r^2}F'(r)\right] + \frac{x^2}{r^3}F''(r)\,,$$

indien $r_1 < r < r_2$, terwijl buiten die grenzen $\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\,x^2}\right)_{\substack{r=r\\t=o}} = 0$, en ook op die grenzen volgens (75) de continuïteit van $\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\,x^2}\right)_{\substack{r=r\\t=o}}$ is gewaarborgd. Gemakkelijk kan men er zich van

overtuigen, dat bovenstaande vorm van $\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_{\substack{r=r \\ t=o}}$ juist dezelfde is als door (54) wordt geeischt.

Geheel op analoge wijze kan men aantoonen dat volgens de vergelijkingen (75) in de elasticiteitstheorie de 1e en 2e diff. quot. van (69) naar x, y, z en t den vorm hebben door (54) geeischt en dat zij overal, ook op de grenzen, continu blijven. In de electromagnetische lichttheorie kan men door middel van (75) hetzelfde aantoonen voor de 1e, 2e en 3e diff. quot. van (69). In beide theoriën blijft dus van de lichtvectoren en hun snelheden door de geheele ruimte de continuïteit gewaarborgd, zoo men voor de potentiaal den vorm (69) stelt, terwijl daarin F den vorm (70) heeft, waarin G voldoet aan de vergelijkingen (72). In beide theoriën is dus de notatie geheel dezelfde; alleen zijn de voorwaarden (72) waaraan G moet voldoen, in de electromagnetische lichttheorie iets zwaarder dan in de elasticiteitstheorie.

Aan het slot van Hoofdstuk I merkten we op dat de ontbindingsuitwijkingen, ontbindingsmomenten en ontbindingskrachten evengoed aan de diff. verg. (1) der golfbeweging voldoen als de potentiaal. We kunnen dus ook onderstellen dat één dezer lichtvectoren den vorm (54) heeft (waarbij dan is ondersteld dat de andere lichtvectoren in passenden vorm zijn gegeven). Dan moet dus door de geheele ruimte (ook op de grenzen der beweging) die lichtvector en zijn snelheid eindig en continu zijn. We kunnen daartoe dien vector weder schrijven in den vorm (69), terwijl we daarin voor F stellen den vorm (70) en men ziet gemakkelijk in dat dan G voldoen moet aan de voorwaarden:

$$\left.\begin{array}{rl} \text{aan de grenzen:} & G = o,\ G' = o; \\ \text{ver van de grenzen:} & G = 1,\ G' = o. \end{array}\right\} \qquad (78)$$

Aan die voorwaarden kunnen we b.v. voldoen door te stellen:

$$G = \left[1 - e^{-\alpha_1 (r - at - r_1)}\right]\left[1 - e^{-\alpha_2 (r_2 - r + at)}\right], \qquad (79)$$

waarin α_1 en α_2 weder constanten zijn.

Een tweede begrensde verstoring die we door middel van Fourrier's theorema wiskunstig zullen voorstellen heeft een potentiaal van den vorm:

$$\varphi = \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{1}{r} F(r - at)\right\} \tag{55}$$

of indien γ en ϑ weder dezelfde beteekenis hebben als op pg. 71

$$\varphi = \cos\gamma \sin\vartheta \frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{1}{r} F(r - at)\right\} \tag{80}$$

of

$$\varphi = \cos\gamma \sin\vartheta \left\{-\frac{F(r-at)}{r^2} + \frac{F'(r-at)}{r}\right\}. \tag{56}$$

We onderstellen weder dat op tijd $t = o$ deze beweging besloten is binnen een ruimte S begrensd tusschen twee bollen met stralen r_1 en r_2 om het middelpunt der golven. De physische eisch die daardoor aan φ wordt gesteld is, dat buiten S alle lichtvectoren en hun snelheden nul zijn, dat binnen S zij een vorm hebben met (55) overeenkomende en dat zij op de bollen r_1 en r_2 gelijk nul zijn. In de elasticiteitstheorie hangen de lichtvectoren en hun snelheden samen met φ, φ' en φ'' en dus volgens (56) met F, F'', F'''' en F''''''; in de electromagn. lichttheorie hangen zij samen met φ, φ', φ'' en φ''' en dus volgens (56) met F, F', F'', F''' en F''''. Stellen we derhalve evenals zooeven

$$F(r - at) = G(r - at) f(r - at), \tag{81}$$

dan moet G voldoen aan de volgende voorwaarden:

	Elasticiteitstheorie,	Electromagn. lichttheorie,	
aan de grenzen:	$G=o,\ G'=o,\ G''=o,\ G'''=o,$	$G=o,\ G'=o,\ G''=o,\ G'''=o,\ G''''=o,$	(82)
ver van de grenzen:	$G=1,\ G'=o,\ G''=o,\ G'''=o;$	$G=1,\ G'=o,\ G''=o,\ G'''=o,\ G''''=o.$	

Aan die eischen kunnen we voldoen door in de elasticiteitstheorie voor G te stellen den vorm (74) en in de electromagn. lichttheorie:

$$G = \left[1 - e^{-\alpha_1 (r - at - r_1)}\right]^4 \left[1 - e^{-\alpha_2 (r_2 - r + at)}\right]^4. \quad (83)$$

Volgens (81) en (82) hebben we dan:

	Elasticiteitstheorie,	Electromagn. lichttheorie,
aan de grenzen:	$F=o,\ F'=o,\ F''=o,\ F'''=o,$	$F=o,\ F'=o,\ F''=o,\ F'''=o,\ F''''=o,$
er van de grenzen:	$F=f,\ F'=f',\ F''=f'',\ F'''=f'''$;	$F=f,\ F'=f',\ F''=f'',\ F'''=f''',\ F''''=f''''.$

(84)

G doet dus weder alleen in de buurt der grenzen zijn invloed gevoelen.

Door middel van Fourier's theorema moeten we nu weder gaan uitdrukken dat buiten S de potentiaal, alle lichtvectoren en hun snelheden gelijk zijn aan nul en daar binnen in overeenstemming zijn met (55).

Daar voor $t = o$ de potentiaal besloten moet zijn binnen S en deze voorwaarde onafhankelijk is van γ en ϑ, kunnen we volgens (80) stellen:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{1}{r} F(r)\right\} = \frac{1}{\pi}\int_o^\infty d\alpha \int_{r_1}^{r_2} \frac{\partial}{\partial \mu}\left\{\frac{1}{\mu} F(\mu)\right\} \cos\alpha(r-\mu)\, d\mu. \quad (85)$$

Door middel van de identiteit

$$\frac{1}{r} F(r) = \int_\infty^r \frac{\partial}{\partial \varrho}\left\{\frac{1}{\varrho} F(\varrho)\right\} d\varrho$$

volgt hieruit

$$\frac{1}{r} F(r) = \frac{1}{\pi}\int_\infty^r d\varrho \int_o^\infty d\alpha \int_{r_1}^{r_2} \frac{\partial}{\partial \mu}\left\{\frac{1}{\mu} F(\mu)\right\} \cos\alpha(\varrho-\mu)\, d\mu. \quad (86)$$

Deze vorm geeft er aanleiding toe te stellen:

$$\frac{1}{r} F(r-at) = \frac{r-at}{\pi r}\int_\infty^{r-at} d\varrho \int_o^\infty d\alpha \int_{r_1}^{r_2} \frac{\partial}{\partial \mu}\left\{\frac{1}{\mu} F(\mu)\right\} \cos\alpha(\varrho-\mu)\, d\mu, \quad (87)$$

en dus

$$\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{1}{r} F(r-at)\right\} = \frac{at}{\pi r^2}\int_\infty^{r-at} d\varrho \int_o^\infty d\alpha \int_{r_1}^{r_2} \frac{\partial}{\partial \mu}\left\{\frac{1}{\mu} F(\mu)\right\} \cos\alpha(\varrho-\mu)\, d\mu$$

$$+ \frac{r-at}{\pi r}\int_o^\infty d\alpha \int_{r_1}^{r_2} \frac{\partial}{\partial \mu}\left\{\frac{1}{\mu} F(\mu)\right\} \cos\alpha(r-at-\mu)\, d\mu. \quad (88)$$

Ik zal aantoonen dat voor $t = o$ de uitdrukking (56) den initialen toestand van onze begrensde verstoring volledig en continu voorstelt, indien we daarin voor $\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{1}{r} F(r - at)\right\}$ den vorm (88) in de plaats stellen terwijl F voldoet aan (84) en dat dan alle lichtvectoren en hun snelheden voldoen aan de physische eischen en den vorm hebben in overeenstemming met (56).

Indien we in (88) stellen $t = o$ krijgen we den vorm (85) terug. Volgens het theorema van Fourier is dus $\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{1}{r} F(r - at)\right\}$ voor $t = o$ buiten de ruimte S gelijk nul en volgens (84) blijft haar continuïteit op de grenzen van S bestaan.

Stellen we dus de uitdrukking (88) in (56) dan heeft φ den juisten vorm en blijft aan de grenzen continu. Ditzelfde moeten we nu ook nog voor de afgeleiden van (88) aantoonen. Het is gemakkelijk in te zien dat het bewijs daarvoor geheel analoog is aan dat wat we gaven voor den vorm (69).

Voor het 1e diff. quot. naar x hebben we b.v.

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{1}{r} F(r - at)\right\} = \frac{x}{r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{1}{r} F(r - at)\right\},$$

en dus

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{1}{r} F(r - at)\right\} = -\frac{x}{r}\frac{2at}{\pi r^3}\int_{\infty}^{r-at} d\varrho \int_{o}^{\infty} d\alpha \int_{r_1}^{r_2} \frac{\partial}{\partial \mu}\left\{\frac{1}{\mu} F(\mu)\right\} \cos\alpha(\varrho - \mu)\, d\mu$$

$$+ \frac{x}{r}\frac{at}{\pi r^2}\int_{o}^{\infty} d\alpha \int_{r_1}^{r_2} \frac{\partial}{\partial \mu}\left\{\frac{1}{\mu} F(\mu)\right\} \cos\alpha(r - at - \mu)\, d\mu$$

$$+ \frac{x}{r}\frac{at}{\pi r^2}\int_{o}^{\infty} d\alpha \int_{r_1}^{r_2} \frac{\partial}{\partial \mu}\left\{\frac{1}{\mu} F(\mu)\right\} \cos\alpha(r - at - \mu)\, d\mu$$

$$- \frac{x}{r}\frac{r - at}{\pi r}\int_{o}^{\infty} d\alpha \int_{r_1}^{r_2} \frac{\partial}{\partial \mu}\left\{\frac{1}{\mu} F(\mu)\right\} \alpha \sin\alpha(r - at - \mu)\, d\mu.$$

Indien we hierin voor de eerste integraal haar waarde uit (88) invoegen, krijgen we in het tweede lid drie gelijke integralen. Voegen we die drie samen en herleiden we de laatste inte-

graal door partieele integratie (waarbij we van (84) gebruik maken), dan vinden we:

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{1}{r}F(r-at)\right\} = -\frac{2x}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{1}{r}F(r-at)\right\}$$

$$+\frac{2x}{\pi r^2}\int_0^\infty d\alpha\int_{r_1}^{r_2}\frac{\partial}{\partial \mu}\left\{\frac{1}{\mu}F(\mu)\right\}\cos\alpha(r-at-\mu)\,d\mu$$

$$+\frac{x}{r}\frac{r-at}{\pi r}\int_0^\infty d\alpha\int_{r_1}^{r_2}\frac{\partial^2}{\partial\mu^2}\left\{\frac{1}{\mu}F(\mu)\right\}\cos\alpha(r-at-\mu)\,d\mu.$$

Stellen we hierin $t=o$, dan

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}F(r-at)\right]_{t=o} = -\frac{2x}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{1}{r}F(r)\right\}$$

$$+\frac{2x}{\pi r^2}\int_0^\infty d\alpha\int_{r_1}^{r_2}\frac{\partial}{\partial\mu}\left\{\frac{1}{\mu}F(\mu)\right\}\cos\alpha(r-\mu)\,d\mu$$

$$+\frac{x}{\pi r}\int_0^\infty d\alpha\int_{r_1}^{r_2}\frac{\partial^2}{\partial\mu^2}\left\{\frac{1}{\mu}F(\mu)\right\}\cos\alpha(r-\mu)\,d\mu\,.$$

Buiten de ruimte S is deze uitdrukking volgens het theorema van Fourier en volgens (85) gelijk nul. Op de grenzen van S is zij volgens (85) en (84) gelijk nul. Binnen S heeft zij de waarde:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{1}{r}F(r-at)\right\}\right]_{t=o} = -\frac{2x}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{1}{r}F(r)\right\}+\frac{2x}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{1}{r}F(r)\right\}+\frac{x}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left\{\frac{1}{r}F(r)\right\}$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{1}{r}F(r)\right\}.$$

Hieruit blijkt dat ook het eerste diff. quot. naar x van de uitdrukking (88) aan alle eischen voldoet. Voor de hoogere diff. quot. is het bewijs van den juisten vorm van (88) geheel analoog. We hebben dus bewezen dat (55) de potentiaal eener begrensde beweging voorstelt, indien we daarin voor $\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{1}{r}F(r-at)\right\}$ den vorm (88) stellen, terwijl F voldoet aan de voorwaarden (84). Door de vergelijkingen (81),

(82) en (83) hebben we doen zien dat die voorwaarden aan F geen onmogelijk te vervullen eischen stellen.

We kunnen ook onderstellen, dat niet de potentiaal, maar dat een der ontbindingsuitwijkingen, ontbindingsmomenten of ontbindingskrachten den vorm (55) heeft. Dien lichtvector kunnen we dan weder schrijven in den vorm (88), terwijl we daarin voor F stellen den vorm (81) en men ziet gemakkelijk in dat G dan moet voldoen aan de voorwaarden:

$$\left.\begin{array}{rl} \text{aan de grenzen:} & G = o,\ G' = o,\ G'' = o, \\ \text{ver van de grenzen:} & G = 1,\ G' = o,\ G'' = o, \end{array}\right\} \qquad (89)$$

Aan die eischen kunnen we voldoen door b.v. te stellen:

$$G = \left[1 - e^{-\alpha_1 (r - at - r_1)}\right]^2 \left[1 - e^{-\alpha_2 (r_2 - r + at)}\right]^2. \qquad (90)$$

---

4. Berekening van de voortplantingssnelheid der grens van een bolvormige golfbeweging door middel van het theorema van Kirchhoff.

We nemen aan, dat de deeltjes binnen een klein bolletje A gedurende eenigen tijd een lichtbeweging hebben uitgezonden, en dat vervolgens de beweging binnen A en daarbuiten geheel aan zich zelf wordt overgelaten. Op zeker oogenblik daarna zullen dan alleen in beweging zijn de deeltjes binnen een deel S der ruimte, besloten tusschen twee bollen met A als middelpunt en met stralen r_1 en r_2 $(r_2 > r_1)$. Dat oogenblik kiezen we als aanvangspunt van tijdstelling.

We gaan nu onderzoeken, wat er is van de lichtbeweging op tijd $t = t'$ in eenig punt B, welks afstand tot A we p noemen. We zullen aantoonen dat er in B alleen beweging is, indien

$$r_1 + a\,t' < p < r_2 + a\,t'\,.$$

Voor de potentiaal der lichtbeweging binnen S nemen we aan den vorm:

$$\varphi = \frac{1}{r} F\,(r - at). \qquad (54)$$

Zooals we zooeven bespraken moet dan φ worden geschreven in den vorm (69), terwijl we hierin voor F den vorm (70) stellen, waarin G moet voldoen aan de voorwaarden (72).

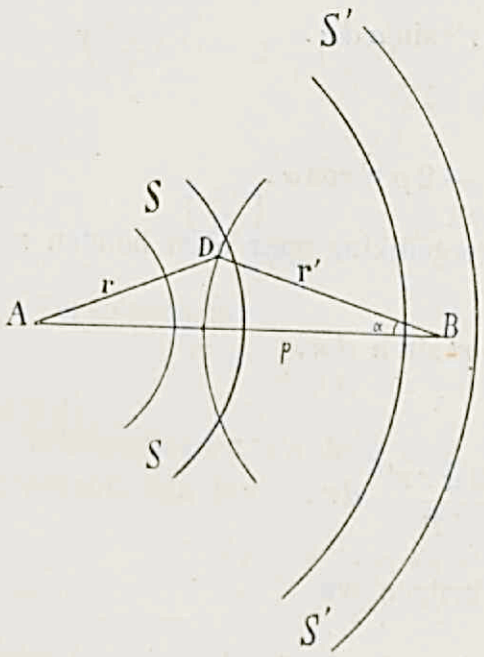


FIG. 3.

Om uit de beweging op tijd nul te bepalen de beweging op tijd t', construeeren we om het punt B een bol met straal $r' = a\,t'$. Wanneer dan φ is de potentiaal der beweging, dan weten we, dat deze op tijd t' in het punt B volgens het theorema van Kirchhoff in den vorm (24) gelijk is aan:

$$\varphi_{\substack{r=p\\t=t'}} = \frac{1}{4\pi}\int\left\{\frac{1}{ar'}\,\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{r'}\,\frac{\partial\varphi}{\partial r'} + \frac{1}{r'^2}\,\varphi\right\}_{t=o} ds\,, \qquad (24)$$

welke integraal moet worden uitgestrekt over den bol r' om B, dien we den integratiebol zullen noemen.

Op den tijd $t = o$ zijn φ, $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ en $\frac{\partial\varphi}{\partial r}$ overal nul behalve binnen de ruimte S. We behoeven dus de integraal (24) slechts uit te strekken over het deel van den integratiebol gelegen binnen S.

Op alle elementen ds van den integratiebol, waarop r dezelfde waarde heeft, heeft ook de uitdrukking

$$\left\{\frac{1}{ar'}\,\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{r'}\,\frac{\partial\varphi}{\partial r'} + \frac{1}{r'^2}\,\varphi\right\}_{t=o}$$

dezelfde waarde. We kunnen dus als element ds in (24) kiezen het stuk van den integratiebol, dat is gelegen tusschen twee naastliggende platte vlakken loodrecht staande op AB. Dat stuk zal het vlak van teekening tweemaal snijden; een dier snijplaatsen duiden we aan door de letter D.

Noemen we nu $\angle DBA = \alpha$, dan is

$$ds = 2\pi r'^2 \sin\alpha \, d\alpha .$$

Verder is

$$r^2 = r'^2 + p^2 - 2pr' \cos\alpha .$$

Differentieeren we deze vergelijking naar α en houden r' constant, dan is

$$r\,dr = pr' \sin\alpha \; d\alpha ,$$

en dus

$$ds = \frac{2\pi r r'}{p} \, dr .$$

Door dit te stellen in (24) krijgen we

$$\varphi_{\substack{r=p \\ t=t'}} = \frac{1}{2p} \int_{R_1}^{R_2} \left\{ \frac{r}{a} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + r \frac{\partial \varphi}{\partial r'} + \frac{r}{r'} \varphi \right\}_{t=0} dr , \tag{91}$$

waarin R_1 en R_2 voorstellen de kleinste en de grootste waarde die r op den integratiebol bezit.

Om (24) of (91) te mogen toepassen moeten φ en haar afgeleiden naar x, y, z en t voor $t = o$ binnen en op den integratiebol eindig en continu zijn. In het vorig deel van dit hoofdstuk toonden we aan dat we daartoe φ moeten schrijven in den vorm:

$$\varphi_{\substack{r=r \\ t=t}} = \frac{1}{\pi r} \int_o^\infty d\alpha \int_{r_1}^{r_2} F(\mu) \cos\alpha \, (r - at - \mu) \, d\mu . \tag{69}$$

Onder in acht neming der vergelijkingen (70) en (72) leidden we daaruit af, dat tusschen de grenzen r_1 en r_2 en dus ook tusschen de grenzen R_1 en R_2:

$$\varphi_{\substack{r=r \\ t=o}} = \frac{1}{r} \; F(r) , \tag{92}$$

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{\substack{r=r \\ t=o}} = - \frac{a}{r} \; F'(r) . \tag{93}$$

Verder is binnen die grenzen:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)_{\substack{r=r\\t=o}} = \Sigma \frac{x}{r}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_{\substack{r=r\\t=o}} = \Sigma \left\{-\frac{x^2}{r^3}F(r) + \frac{x^2}{r^3}F'(r)\right\},$$

en dus

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)_{\substack{r=r\\t=o}} = -\frac{1}{r^2}F(r) + \frac{1}{r}F'(r).$$

Vervolgens is:

$$r^2 = p^2 + r'^2 - 2\,p\,r'\cos\alpha.$$

Differentieeren we deze verg. naar r' en houden daarbij α constant, dan is

$$\frac{\partial r}{\partial r'} = \frac{r' - p\cos\alpha}{r} = \frac{r'^2 + r^2 - p^2}{2\,r\,r'},$$

zoodat

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r'}\right)_{\substack{r=r\\t=o}} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)_{\substack{r=r\\t=o}} \frac{\partial r}{\partial r'} = \left\{-\frac{1}{r^2}F(r) + \frac{1}{r}F'(r)\right\}\frac{r'^2 + r^2 - p^2}{2\,r}. \quad (94)$$

Substitueeren we (92), (93) en (94) in (91) dan krijgen we:

$$\varphi_{\substack{r=p\\t=t'}} = \frac{1}{2p}\int_{R_1}^{R_2}\left\{\left(-1 + \frac{r'^2 + r^2 - p^2}{2\,r\,r'}\right)F'(r) + \left(\frac{1}{r'} - \frac{r'^2 + r^2 - p^2}{2\,r^2\,r'}\right)F(r)\right\}dr,$$

$$\varphi_{\substack{r=p\\t=t'}} = \frac{1}{4\,p\,r'}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{(r-r')^2 - p^2}{r}F(r)\right]dr,$$

$$\varphi_{\substack{r=p\\t=t'}} = \frac{1}{4\,p\,r'}\left[\frac{(r-r')^2 - p^2}{r}F(r)\right]_{R_1}^{R_2} \quad (95)$$

Betreffende de ligging van B hebben we de volgende gevallen te onderscheiden:

1e

$$p > r_2 + r'.$$

De geheele integratiebol ligt dan buiten het deel S. De integraal (24) is dan nul. In B is dan op tijd t' de potentiaal nul; in B is dus op tijd t' geen lichtbeweging.

2e $$r_1 + r' < p < r_2 + r' .$$

De integratiebol snijdt dan wel den bol r_2, maar niet den bol r_1. Het punt B ligt dan in het deel S' der ruimte besloten tusschen de bollen $r_1 + at'$ en $r_2 + at'$. Fig. 3 stelt deze ligging van B voor. Dan is

$$R_1 = p - r' \qquad \text{en} \qquad R_2 = r_2 .$$

Daar $F(r_2)$ volgens (75) gelijk is aan nul, is volgens (95)

$$\varphi_{\substack{r=p \\ t=t'}} = \frac{-1}{4\,p\,r'} \frac{(p-2r')^2 - p^2}{p-r'} F(p-r') ,$$

$$\varphi_{\substack{r=p \\ t=t'}} = \frac{1}{p} F(p-r') ,$$

of

$$\varphi_{\substack{r=p \\ t=t'}} = \frac{1}{p} F(p-at') .$$

Ligt dus B binnen S' dan heeft φ op tijd t' daar juist de waarde, die direct uit (54) volgt.

3e $$r_2 < p < r_1 + r' .$$

In dit geval ligt B tusschen S en S' in, en de integratiebol snijdt beide begrenzingen van S. Dan is

$$R_1 = r_1 \qquad \text{en} \qquad R_2 = r_2 .$$

Daar volgens (75) zoowel $F(r_1)$ als $F(r_2)$ gelijk is aan nul, wordt dan (95) aan beide grenzen nul. In B is dan op tijd t' de potentiaal nul. In B is dan geen lichtbeweging.

4e $$r_1 < p < r_2 .$$

In dit geval ligt B binnen S. Er kunnen zich nu vier gevallen voordoen:

a. $r_2 - r' < p$, terwijl ook $r_1 + r' < p$.

S en S' vallen dan voor een deel samen en in dat deel ligt

B. De integratiebol snijdt dan r_2 wel, maar r_1 niet. Dan is

$$R_1 = p - r' \qquad \text{en} \qquad R_2 = r_2 ,$$

en we hebben dan evenals in het tweede geval

$$\varphi_{\substack{r=p \\ t=t'}} = \frac{1}{p} F(p - a t') .$$

b. $r_2 - r' < p$, terwijl $r_1 + r' > p$.

Dan ligt B buiten S' en de integratiebol snijdt zoowel r_2 als r_1. Dan is:

$$R_1 = r_1 \qquad \text{en} \qquad R_2 = r_2 ,$$

en evenals in het derde geval is dan in B geen lichtbeweging.

c. $r_2 - r' > p$, terwijl $r_1 + r' < p$.

Dan ligt B in het deel van S en S' dat samenvalt, en de integratiebol ligt geheel binnen S. Dan is:

$$R_1 = p - r' \qquad \text{en} \qquad R_2 = p + r',$$

zoodat (95) wordt:

$$\varphi_{\substack{r=p \\ t=t'}} = \frac{1}{4 p r'} \left[\frac{p^2 - p^2}{p + r'} F(p + r') - \frac{(p - 2r')^2 - p^2}{p - r'} F(p - r') \right],$$

$$\varphi_{\substack{r=p \\ t=t'}} = \frac{1}{p} F(p - r'),$$

of

$$\varphi_{\substack{r=p \\ t=t'}} = \frac{1}{p} F(p - a t').$$

Dan heeft dus φ in het punt B juist de waarde, die direct uit (54) volgt.

d. $r_2 - r' > p$, terwijl ook $r_1 + r' > p$.

Dan ligt B buiten S' en de integratiebol snijdt r_2 niet, maar r_1 wel, zoodat

$$R_1 = r_1 \qquad \text{en} \qquad R_2 = p + r' ,$$

en dan wordt (95) daar $F(r_1) = o$:

$$\varphi_{\substack{r=p \\ t=t'}} = \frac{1}{4pr'} \frac{p^2 - p^2}{p + r'} F(p + r'),$$

of

$$\varphi_{\substack{r=p \\ t=t'}} = o .$$

In B is dan geen lichtbeweging.

5e $$p < r_1 \quad \text{en} \quad p > r_2 - r' .$$

Dan ligt B buiten S' en binnen r_1. De integratiebol snijdt dan r_1 en r_2, zoodat

$$R_1 = r_1 \quad \text{en} \quad R_2 = r_2$$

en evenals in het derde geval is dan in B geen lichtbeweging.

6e $$p < r_2 - r', \quad \text{terwijl} \quad p > r_1 - r' .$$

Dan ligt B buiten S' en binnen r_1. De integratiebol snijdt dan den bol r_1, maar niet den bol r_2, zoodat

$$R_1 = r_1 \qquad R_2 = p + r'.$$

Evenals in het vierde geval sub d wordt dan de uitdrukking (95) nul. In B is dan geen lichtbeweging.

7e $$p < r_1 - r' .$$

Dan ligt B buiten S' en binnen r_1. De integratiebol ligt dan geheel buiten het gebied S, waar op tijd $t = o$ beweging is. De integraal (24) is dan nul. In B is dan geen lichtbeweging.

Hieruit blijkt dus, dat in B op tijd t' alleen lichtbeweging is, indien B is gelegen binnen het deel S' der ruimte, begrensd door twee bollen met stralen $r_1 + at'$ en $r_2 + at'$ beschreven

om A, en dat φ binnen S' juist den vorm heeft die direct uit (54) volgt.

Het blijkt dus dat de potentiaal eener begrensde bolvormige verstoring van vorm (54) niet alleen op tijd $t = o$ continu en eindig wordt voorgesteld zoo we haar schrijven in den vorm (69), maar ook op ieder oogenblik daarna. Het is n.l. duidelijk dat voor $t = t'$ de uitdrukking (69) buiten de grenzen

$$r_1 + at' < r < r_2 + at'$$

dus buiten de grenzen van S' gelijk is aan nul, op die grenzen nul is, evenals haar afgeleiden naar x, y, z en t en daarbinnen met haar afgeleiden den vorm heeft overeenkomende met (54).

Kirchhoff's theorema stelde ons dus in staat het in de inleiding besproken vraagstuk door Poisson gesteld op te lossen, n.l. te bewijzen, dat een golfbeweging door een middelpunt van verstoring A uitgezonden en op zeker oogenblik tusschen twee boloppervlakken om A begrensd, alleen zich voortbeweegt in de richting van A af, maar zich niet naar A terug beweegt.

De voorstelling die Beer zich vormde van de voortplanting eener bolvormige begrensde verstoring is dus juist, waaruit volgt zooals we in de inleiding bespraken dat we aan de elementaire golven van Huygens geen physische beteekenis mogen toekennen, daar dit ons tot strijd zou voeren met de wet van behoud van arbeidsvermogen, wel echter een meetkunstige n.l. als constructiemiddel om voor vlakke en bolvormige golven uit een vorige grens een volgende grens af te leiden.

Het resultaat door Stokes verkregen (zie inleiding) n.l. dat, indien men de beweging door middel der elementaire golven van Huygens volgens Fresnel's rekenwijze bepaalt, men een phaseverschil $\frac{\pi}{2}$ vindt met de phase, die direct uit de bewegingsvergelijking volgt, moet worden beschouwd als een gevolg van de onjuiste formuleering door Fresnel aan het beginsel van Huygens gegeven. Maakt men gebruik van

Kirchhoff's formuleering dan treedt zooals we zagen dat phaseverschil niet op.

We stelden ons in het voorgaande voor, dat een divergeerende golfbeweging, welker potentiaal slechts een functie was van r en van t en dus den vorm (54) had, besloten was op tijd $t = o$ tusschen twee boloppervlakken r_1 en r_2. Geheel hetzelfde onderzoek kan men instellen voor een convergeerende golfbeweging, welker potentiaal dan den vorm heeft $\frac{1}{r} F(r + at)$. Men vindt dan, dat de beweging op tijd t' is begrensd door twee boloppervlakken met stralen $r_1 - at'$ en $r_2 - at'$ en dat haar potentiaal binnen die ruimte weder juist denzelfden vorm heeft. Ook van deze golfbeweging is dus de voortplantingssnelheid van de grens gelijk aan a.

In het vorig gedeelte van dit hoofdstuk leidde ik ook nog den vorm af, waarin de potentiaal eener begrensde verstoring geschreven moet worden, opdat zij de gedaante hebbe

$$\varphi = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{r} F(r - at) \right\}. \tag{55}$$

In het vorig hoofdstuk zagen we dat de phasesnelheid a' der potentiaal van een zeer specialen vorm dezer beweging n.l.

$$\varphi = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{C}{r} \sin 2\pi \frac{r - at}{\lambda} \right\} \tag{60}$$

op grooten afstand van de grens gelijk is aan a' indien

$$a' = a \left(1 + \frac{\lambda^2}{4\pi^2 r^2} \right). \tag{61}$$

Het onderzoek naar de voortplantingssnelheid van de grens dezer beweging (55) is echter overbodig, daar we in het volgend hoofdstuk een algemeener geval zullen behandelen.

In het vorig deel van dit hoofdstuk merkten we reeds op, dat de aldaar gegeven formuleeringen van de potentialen van begrensde bolvormige golfbewegingen even goed konden worden beschouwd als te zijn formuleeringen van een der ontbindingsuitwijkingen, ontbindingsmomenten of ontbindingskrachten, met

dat verschil, dat dan de eischen aan G gesteld minder zwaar werden. Geheel dezelfde redeneering, als boven is gehouden voor de potentiaal, kan dus worden gehouden indien men overal voor het woord potentiaal leest ontbindingsuitwijking, ontbindingsmoment of ontbindingskracht. Dit zou eigenlijk eerst het bewijs zijn, dat de voortplantingssnelheid van de grens der beweging gelijk is aan a. Dat bewijs kan echter als overbodig worden beschouwd, door uit den vorm, waarin we de potentiaal eener begrensde golfbeweging schreven, reeds direct blijkt, dat de grenzen der lichtvectoren met de grenzen der potentiaal samenvallen.

HOOFDSTUK IV.

WILLEKEURIGE GOLFBEWEGINGEN.

1. Voortplantingssnelheid van de grens eener willekeurige golfbeweging.

In het tweede hoofdstuk hebben we golfbewegingen besproken waarvan de potentiaal den vorm heeft

$$\varphi = \chi \sin \psi , \tag{33}$$

waarin χ en ψ met periodische, maar overigens willekeurige functies zijn van x, y, z en t. Daar phase en amplitude hier geheel willekeurige functies zijn, is de bestudeering van dezen vorm (33) voldoende algemeen. Een willekeurige trillende beweging kan worden ontbonden in bewegingen waarvan (33) de potentiaal is.

De phasesnelheid a' van de potentiaal (33) definieerden we door de formule

$$a' = -\frac{\frac{\partial \psi}{\partial t}}{\frac{\partial \psi}{\partial N}} \tag{39}$$

en we zagen dat reeds voor bolvormige golven deze in het algemeen van a verschilt, en afhangt van den afstand tot het middelpunt der golfbeweging en voor de potentiaal (66), welker phaseoppervlakken niet bolvormig zijn, nog bovendien van de richting.

We kunnen dus wel dadelijk zeggen dat voor golven, welker

potentiaal den vorm (33) heeft in het algemeen de phasesnelheid der potentiaal niet gelijk zal zijn aan a, maar zal afhangen van den vorm der potentiaalphaseoppervlakken

$$\psi = \text{Constant.}$$

De phasesnelheid der ontbindingsuitwijkingen en van de ontbondenen der magnetische en electrische momenten en krachten zal behalve van ψ ook nog afhangen van χ, want de phase dezer lichtvectoren is zoowel van χ als van ψ afhankelijk.

De constructie van Huygens geldt dus voor de phaseoppervlakken van willekeurige golfbewegingen niet. We komen nog nader op de waarde dezer phasesnelheden terug in het volgend deel van dit hoofdstuk en zullen ons thans gaan bezighouden met de snelheid waarmede de grens der beweging (33) zich voortbeweegt.

Op de grens der beweging moeten in de elasticititeitstheorie de ontbindingsuitwijkingen en de ontbindingssnelheden nul zijn, en in de electromagnetische lichttheorie moet dat het geval wezen met de ontbindingsmomenten en krachten en de snelheden daarvan.

Om aan die eischen te voldoen stellen we:

$$\varphi = G\,\chi \sin \psi, \qquad (96)$$

waarin we naar analogie van het vorig hoofdstuk zullen onderstellen dat G een functie is van ψ.

Volgens de bovengenoemde grensvoorwaarden moet dan G voldoen aan de volgende eischen:

	Elasticiteitstheorie,	Electromagn. lichttheorie,	
aan de grenzen:	$G=o,\ G'=o,\ G''=o,$	$G=o,\ G'=o,\ G''=o,\ G'''=o,$	(97)
ver van de grenzen:	$G=1,\ G'=o,\ G''=o;$	$G=1,\ G'=o,\ G''=o,\ G'''=o.$	

In het vorig hoofdstuk namen we aan dat de bolvormige verstoring begrensd werd door een bol, evenzoo onderstellen we dat op tijd $t=t'$ de grens der beweging (96) gevormd wordt door het oppervlak

$$\psi\ (x, y, z, t') = A, \tag{98}$$

waarin A een constante is.

Dat de vergelijkingen (97) aan G geen onmogelijke eischen stellen kunnen we door een voorbeeld laten zien. In de elasticiteitstheorie zouden we kunnen onderstellen:

$$G = \left\{1 - e^{-\alpha(\psi - A)}\right\}^3,$$

en in de electromagnetische lichttheorie:

$$G = \left\{1 - e^{-\alpha(\psi - A)}\right\}^4.$$

We willen weten met welke snelheid de grens zich voortbeweegt en gaan daartoe bepalen welk oppervlak de grens vormt op eenig later oogenblik.

In een punt P van het oppervlak $\psi(x, y, z, t') = A$, of kortweg van het oppervlak A (zie fig. 4), richten we op een loodlijn PO naar dat deel van de ruimte, waar op tijd t' geen beweging is, en we beschrijven om O een bol met een straal ϱ, die oneindig weinig grooter is dan de afstand OP. De grootheid $\varrho - OP$ stellen we in onze berekeningen een oneindig kleine grootheid van de eerste orde. In de onderstelling dat het oppervlak A in de buurt van P zijn bolle zijde naar buiten keert of duidelijker gezegd, dat de hoofdkrommingsmiddelpunten van het oppervlak A in het punt P beide zijn gelegen op het verlengde der lijn OP aan de zijde van P, wordt de bol ϱ door het oppervlak A gesneden volgens een oneindig klein gesloten lijntje waarbinnen P ligt.

Duiden we nu aan door $\varphi_{\substack{\varrho=o \\ t=t'+t''}}$ de waarde van φ op tijd $t' + t''$ in het punt O, terwijl $t'' = \frac{\varrho}{a}$, dan is volgens Kirchhoff's theorema

$$\varphi_{\substack{\varrho=o \\ t=t'+t''}} = \frac{1}{4\pi} \int \left\{ \frac{1}{a\varrho} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2} \varphi \right\}_{t=t'} ds, \tag{99}$$

welke integraal we moeten nemen over dien bol $\varrho = at''$.

Door de invoering van den factor G is de continuiteit

van φ en haar eerste afgeleiden binnen en op den integratiebol gewaarborgd.

Op tijd t' zijn op dien bol overal φ, $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ en $\frac{\partial \varphi}{\partial \varrho}$ nul, behalve op het stukje σ van den bol dat binnen A ligt. We behoeven onze integraal dus slechts over dat stukje σ uit te strekken.

We kiezen nu een constante B die zoo groot is, dat het potentiaalphaseoppervlak

$$\psi\ (x\ y\ z\ t') = B,$$

hetwelk we het oppervlak B zullen noemen, raakt aan den integratiebol. Het raakpunt noemen we het punt Q. Verder zij het oppervlak D welks vergelijking is

$$\psi\ (x\ y\ z\ t') = D \qquad (100)$$

gelegen tusschen de oppervlakken A en B in. Door aan de constante D verschillende waarden te geven tusschen A en B in, zal het oppervlak D zich bewegen tusschen de oppervlakken A en B. De snijpunten van de lijn $Q\,O$ met het grensoppervlak A en het bewegelijk oppervlak D duiden we aan door de letters P en T. Als vlak van teekening is gekozen het osculeerend vlak van een der hoofdkromtelijnen van het oppervlak A in het punt P. C zij het bijbehoorend krommingsmiddelpunt. De punten C, Q, T, P en O liggen dan in het vlak van teekening. De doorsnede van A met het vlak van teekening is dan in de buurt van P een cirkel met C tot middelpunt. De continuiteit van ψ brengt mede, dat ook de oppervlakken B en D als doorsneden met het vlak van teekening lijnen opleveren die in de buurt van T en Q als cirkels met C als middelpunt kunnen worden beschouwd.

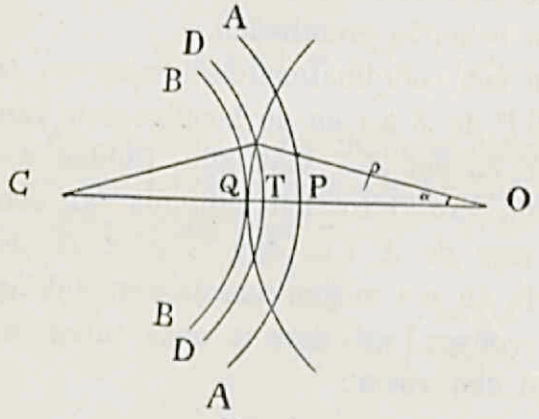


Fig. 4.

Duiden we nu aan door de letter N een stuk van de normaal $Q\,O$ gemeten van Q af in de richting van Q naar O, dan kunnen we als element ds van den integratiebol kiezen een gedeelte van σ gelegen tusschen twee potentiaalphaseoppervlakken op afstanden N en $N + d\,N$ van B gelegen.

Op zulk een element is

$$\psi\,(x\,y\,z\,t') = B + \frac{\partial\,\psi}{\partial\,N}\,N.$$

Verder is

$$A = B + \frac{\partial\,\psi}{\partial N}\,N_1,$$

indien

$$N_1 = Q\,P.$$

Zoodat

$$\psi\,(x\,y\,z\,t') = A + \frac{\partial\,\psi}{\partial\,N}\,(N - N_1). \qquad (101)$$

Thans gaan we in onze integraal $d\,N$ in plaats van ds als onafhankelijk veranderlijke invoeren en moeten daartoe ds gaan uitdrukken in dN en bekende grootheden.

Daartoe nemen we aan een coördinatenstelsel waarvan O de oorsprong is, de lijn $O\,P$ de Z as en de hoofdsneden van A in het punt P het $Z\,Y$ en het $Z\,X$ vlak zijn. Duiden we nu aan door z_0 den afstand van O tot het snijpunt van een potentiaalphaseoppervlak met de Z as, dan is $z - z_0$ in de buurt van P oneindig klein en we mogen dus de vergelijking van dat oppervlak voor zoover we deze in onze integraal noodig hebben schrijven in den vorm:

$$z - z_0 = \frac{1}{2}\,r\,x^2 + \frac{1}{2}\,t\,y^2, \qquad (102)$$

waarin

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial\,x^2} \quad \text{en} \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial\,y^2}.$$

De verg. van den integratiebol is

$$\varrho^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Noemen we nu α den hoek tusschen ϱ en de Z as dan is α steeds klein, en is verder ϑ de hoek tusschen het ϱ Z en het ZX vlak dan is:

$$x = \varrho \sin\alpha \cos\vartheta,$$
$$y = \varrho \sin\alpha \sin\vartheta,$$
$$z = \varrho \cos\alpha.$$

Dus gaat (102) over in:

$$\varrho\cos\alpha - z_o = \frac{1}{2} r \varrho^2 \sin^2\alpha \cos^2\vartheta + \frac{1}{2} t \varrho^2 \sin^2\alpha \sin^2\vartheta.$$

Nu is α oneindig klein van de 1e orde; derde en hoogere machten van α verwaarloozend vinden we:

$$\varrho - \frac{1}{2}\varrho\alpha^2 - z_o = \frac{1}{2} r \varrho^2 \alpha^2 \cos^2\vartheta + \frac{1}{2} t \varrho^2 \alpha^2 \sin^2\vartheta$$

of

$$2(\varrho - z_o) = \alpha^2 [\varrho + r\varrho^2 \cos^2\vartheta + t\varrho^2 \sin^2\vartheta].$$

We zoeken ds en dit is de differentiaal van het oppervlak door een potentiaalphaseoppervlak uit den bol gesneden, dus de differentiaal van

$$s = \varrho^2 \int_o^{2\pi} d\vartheta \int_o^{\alpha} \sin\alpha \, d\alpha;$$

of als we weder derde en hoogere machten van α verwaarloozen:

$$s = \varrho^2 \int_o^{2\pi} d\vartheta \frac{\alpha^2}{2} = \int_o^{2\pi} \frac{(\varrho - z_o)\, d\vartheta}{\frac{1}{\varrho} + r\cos^2\vartheta + t\sin^2\vartheta},$$

of na integratie:

$$s = \frac{2\pi(\varrho - z_0)}{\sqrt{\left(\frac{1}{\varrho} + r\right)\left(\frac{1}{\varrho} + t\right)}}.$$

Nu is $\varrho - z_0 = N$, verder zijn $R_1 = \frac{1}{r}$ en $R_2 = \frac{1}{t}$, indien R_1 en R_2 zijn de hoofdkromtestralen van de phaseoppervlakken welke σ snijden. We mogen R_1 en R_2 als constant beschouwen, dus:

$$s = \frac{2\pi N}{\sqrt{\left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{R_1}\right)\left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{R_2}\right)}} = 2\pi\varrho N \sqrt{\frac{R_1 R_2}{(\varrho + R_1)(\varrho + R_2)}},$$

en dus

$$ds = 2\pi\varrho\, dN \sqrt{\frac{R_1\ R_2}{(\varrho + R_1)\ (\varrho + R_2)}},$$

of wel:

$$ds = 2\pi\varrho\, k\, dN, \tag{103}$$

waarin

$$k = \sqrt{\frac{R_1\ R_2}{(\varrho + R_1)\ (\varrho + R_2)}}. \tag{104}$$

Op σ is k als constant te beschouwen.
Door (103) gaat onze integraal (99) over in:

$$\varphi_{\substack{\varrho=\varrho \\ t=t'+t''}} = \frac{k}{2}\int_{N=o}^{N=N_1} \left\{\frac{1}{a}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial\varrho} + \frac{1}{\varrho}\varphi\right\}_{t=t'} dN.$$

Nu is:

$$\varphi = G\chi\sin\psi,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \left(G'\frac{\partial\psi}{\partial t}\chi + G\frac{\partial\chi}{\partial t}\right)\sin\psi + G\chi\frac{\partial\psi}{\partial t}\cos\psi,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} = \left(G' \frac{\partial \psi}{\partial \varrho} \chi + G \frac{\partial \chi}{\partial \varrho}\right) \sin \psi + G \chi \frac{\partial \psi}{\partial \varrho} \cos \psi ;$$

dus:

$$\varphi_{\substack{\varrho=o \\ t=t'+t''}} = \frac{k}{2} \int_{N=o}^{N=N_1} \Big[\Big\{ G' \chi \left(\frac{1}{a} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial \varrho}\right) + G \left(\frac{1}{\varrho} \chi + \frac{1}{a} \frac{\partial \chi}{\partial t} + \frac{\partial \chi}{\partial \varrho}\right) \Big\} \sin \psi$$

$$+ G \chi \left(\frac{1}{a} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial \varrho}\right) \cos \psi \Big]_{t=t'} d N.$$

Op de grens zijn volgens (97) zoowel G als G' gelijk nul. In de buurt der grens is dus volgens de ontwikkeling van Taylor G oneindig klein t.o.v. G'; derhalve mogen we

$$G \left(\frac{1}{\varrho} \chi + \frac{1}{a} \frac{\partial \chi}{\partial t} + \frac{\partial \chi}{\partial \varrho}\right)$$

verwaarloozen tegenover

$$G' \chi \left(\frac{1}{a} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial \varrho}\right),$$

zoodat we krijgen

$$\varphi_{\substack{\varrho=o \\ t=t'+t''}} = \frac{k}{2} \int_{N=o}^{N=N_1} \Big[G' \chi \sin \psi + G \chi \cos \psi \Big]_{t=t'} \left(\frac{1}{a} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial \varrho}\right)_{t=t'} d N.$$

Nu mag op σ

$$\chi_{t=t'} \left(\frac{1}{a} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial \varrho}\right)_{t=t'}$$

als constant worden beschouwd, zoodat

$$\varphi_{\substack{\varrho=o \\ t=t'+t''}} = \frac{k}{2} \left\{ \frac{\chi \left(\frac{1}{a} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial \varrho}\right)}{\frac{\partial \psi}{\partial N}} \right\}_{\substack{t=t' \\ \varrho}} \int_{N=o}^{N=N_1} \frac{\partial}{\partial N} (G \sin \psi) \, d N,$$

waarin

$$\left\{\frac{\chi\left(\frac{1}{a}\,\frac{\partial\,\psi}{\partial\,t}+\frac{\partial\,\psi}{\partial\,\varrho}\right)}{\frac{\partial\,\psi}{\partial\,N}}\right\}_{\substack{t=t'\\ Q}}$$

beteekent de waarde dezer uitdrukking in het punt Q op den tijd t'.

Of:

$$\varphi_{\substack{\varrho=o\\ t=t'+t''}}=\frac{k}{2}\left\{\frac{\chi\left(\frac{1}{a}\,\frac{\partial\,\psi}{\partial\,t}+\frac{\partial\,\psi}{\partial\,\varrho}\right)}{\frac{\partial\,\psi}{\partial\,N}}\right\}_{\substack{t=t'\\ Q}}\left[\{G\sin\psi\}_{t=t'}\right]_{N=o}^{N=N_1}.$$

Voor $N=N_1$ bevinden we ons op de grens en daar is $G=o$ voor $t=t'$. Aan de bovenste grens is dus $\{G\sin\varphi\}_{t=t'}$ gelijk nul. Aan de benedenste grens bevinden we ons in het punt Q, zoodat:

$$\varphi_{\substack{\varrho=o\\ t=t'+t''}}=-\frac{k}{2}\left\{\frac{\frac{1}{a}\,\frac{\partial\,\psi}{\partial\,t}+\frac{\partial\,\psi}{\partial\,\varrho}}{\frac{\partial\,\psi}{\partial\,N}}\,G\,\chi\,\sin\psi\right\}_{\substack{t=t'\\ Q}}.$$

Onderstellen we vooreerst dat $\frac{1}{a}\,\frac{\partial\,\psi}{\partial\,t}+\frac{\partial\,\psi}{\partial\,\varrho}$ niet gelijk is aan nul. In dat geval is op tijd $t'+t''$ in O beweging blijkens bovenstaande uitdrukking. Hadden we den straal ϱ van den integratiebol niet gelijk gemaakt aan at'', maar gelijk aan at''' terwijl $t'''<t''-\frac{QP}{a}$, dan zou geen enkel deel van den integratiebol binnen de grens A hebben gelegen. Waaruit volgt dat onmiddellijk vóór het tijdstip $t'+t''$ in O de beweging is begonnen. Op den tijd $t'+t''$ ligt dus het punt O in de onmiddellijke nabijheid van de grens der beweging. Met andere woorden: om uit de grens op tijd t' te bepalen de grens op tijd $t'+t''$, mag men de constructie van Huygens met straal $\varrho=at''$ toepassen. Uit bovenstaanden vorm voor $\varphi_{\substack{\varrho=o\\ t=t'+t''}}$ blijkt dan verder dat de phase in O op tijd $t'+t''$ gelijk is

aan de phase in Q op tijd t'. O en Q liggen op dezelfde normaal N op afstand at''. Dus ψ is in de buurt der grens een functie alleen van N en t en heeft zulk een vorm dat, als we aan t een vermeerdering t'' geven en aan N een vermeerdering at'', die functie niet verandert. Dus moet noodzakelijk in de buurt van de grens ψ een functie zijn van $N-at$, zoodat

$$\frac{\partial \psi}{\partial N} = \psi' \qquad \text{en} \qquad \frac{\partial \psi}{\partial t} = - a \psi' .$$

Verder is op σ:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \varrho} = - \frac{\partial \psi}{\partial N} = - \psi' ,$$

dus:

$$\left\{ \frac{\frac{1}{a} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial \varrho}}{\frac{\partial \psi}{\partial N}} \right\}_{\substack{t=t' \\ \varrho}} = - 2 .$$

Onderstellen we thans

$$\frac{1}{a} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial \varrho} = 0 .$$

Stellen we hierin

$$\frac{\partial \psi}{\partial \varrho} = - \frac{\partial \psi}{\partial N}$$

dan krijgen we:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = a \frac{\partial \psi}{\partial N} ,$$

waaruit blijkt dat ψ tot argument heeft $N + at$. In dit geval is in O op tijd $t' + t''$ geen lichtbeweging; het argument van ψ wijst aan, dat in dit geval het oppervlak $\psi = A$ de achterste grens der beweging vormt, terwijl voor het argument $N-at$ dat oppervlak de voorste grens vormt.

Indien we terugkeeren tot het vorige geval en voor $\varphi_{\substack{\varrho=o \\ t=t'+t''}}$ schrijven $\varphi_{\substack{o \\ t=t'+t''}}$, dan krijgen we:

$$\varphi_{\substack{o \\ t=t'+t''}} = k \left\{ G \chi \sin \psi \right\}_{\substack{\varrho \\ t=t'}};$$

daar verder

$$\psi_{\substack{\varrho \\ t=t'}} = \psi_{\substack{o \\ t=t'+t''}},$$

en G een functie is van ψ, is

$$G_{\substack{\varrho \\ t=t'}} = G_{\substack{o \\ t=t'+t''}}$$

dus:

$$\varphi_{\substack{o \\ t=t'+t''}} = G_{\substack{o \\ t=t'+t''}} k \chi_{\substack{\varrho \\ t=t'}} \sin \psi_{\substack{o \\ t=t'+t''}}.$$

Hieruit volgt

$$\chi_{\substack{o \\ t=t'+t''}} = k \chi_{\substack{\varrho \\ t=t'}}$$

of

$$\chi_{\substack{o \\ t=t'+t''}} = \chi_{\substack{\varrho \\ t=t'}} \sqrt{\frac{R_1 R_2}{(R_1+\varrho)(R_2+\varrho)}}. \qquad (105)$$

Nu zijn R_1 en R_2 de hoofdkromtestralen van het potentiaalphaseoppervlak in Q en dus $R_1 + \varrho$ en $R_2 + \varrho$ de hoofdkromtestralen in het punt O, want zooals we zooeven aantoonden mogen we de constructie van Huygens toepassen om uit de grens op zeker oogenblik de grens op een later oogenblik te bepalen.

De laatste vergelijking kunnen we dus schrijven in den vorm

$$\left\{ \chi \sqrt{\varrho_1 \varrho_2} \right\}_{\substack{o \\ t=t'+t''}} = \left\{ \chi \sqrt{\varrho_1 \varrho_2} \right\}_{\substack{\varrho \\ t=t'}},$$

indien ϱ_1 en ϱ_2 zijn de hoofdkromtestralen van het grensoppervlak.

Dus:

$$\chi \sqrt{\varrho_1 \varrho_2} = A,$$

waarin A een constante is voor alle punten gelegen op eenzelfde normaal op eenig grensoppervlak.

Schrijven we de laatste verg. in den vorm

$$\chi = \frac{A}{\sqrt{\varrho_1 \varrho_2}} \qquad (105a)$$

dan blijkt hieruit dat men χ voor een punt der grens kan vinden, indien men voor eenig ander punt gelegen op dezelfde grensnormaal χ kent op het oogenblik waarop dat punt in de grens, ligt benevens de hoofdkromtestralen van de grens in dat punt.

Indien we onderstellen dat de beweging stationair is, dan is χ onafhankelijk van t. Weten we dus χ op eenig oogenblik dan kennen we χ geheel. De betrekkingen (105) en (105a) gelden dan niet alleen voor de grens, maar voor het geheele gebied waar beweging is.

Onderstellen we dat χ^2 een maat is voor de energie der beweging en dat deze zich met snelheid a voortbeweegt in een richting loodrecht op de grens, dan zijn (105) en (105a) eenvoudig af te leiden uit de wet van behoud van arbeidsvermogen.

Zij n.l. een oppervlak A de grens op eenig oogenblik en B de grens dt sec. later dan is zooals we bewezen de loodrechte afstand der oppervlakken overal dezelfde n.l. $dn = a\,dt$. Beschouwen we nu een element van A groot ω en richten in elk punt van de lijn die ω omsluit loodlijnen op, dan snijden deze een stukje ω' uit B. Noemen we ϱ_1 en ϱ_2 de hoofdkromtestralen van A in ω, dan zijn die van B in ω' gelijk aan $\varrho_1 + dn$ en $\varrho_2 + dn$ en dan is eenvoudig in te zien:

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{\varrho_1 \varrho_2}{(\varrho_1 + dn)\,(\varrho_2 + dn)}.$$

Nemen we nu χ^2 aan als maat der energie, en merken we op dat volgens de wet van behoud van arbeidsvermogen de

energie op ω aanwezig na dt sec. op ω' moet worden teruggevonden, dan is in verband met de vorige vergelijking:

$$\frac{\chi'^2}{\chi^2} = \frac{\varrho_1 \varrho_2}{(\varrho_1 + dn)(\varrho_2 + dn)},$$

waarin χ' is de waarde van χ in ω', of

$$\chi_1 = \chi \sqrt{\frac{\varrho_1 \varrho_2}{(\varrho_1 + dn)(\varrho_2 + dn)}}.$$

Hieruit volgen (105) en (105a) onmiddelijk. De onderstellingen waarin we die verg. hier afleidden zijn echter zeer gewaagd, en deze afleiding mag dan ook alleen ter contrôle dienen.

In het voorgaande onderstelden we, dat de functie Q, die den vorm (96) had, de potentiaal was der beweging. We kunnen even goed aannemen, dat (96) een der ontbindingsuitwijkingen, ontbindingsmomenten of ontbindingskrachten voorstelt. De geheele redeneering van dit hoofdstuk blijft dan dezelfde; alleen worden dan de eischen (97), waaraan G thans moest voldoen, wat minder streng evenals we dat in Hoofdstuk II bespraken.

---

2. De differentiaalvergelijking der golfbeweging voor functies van den vorm $G\,\chi \sin \psi$.

Zoowel de potentiaal als de ontbindingsuitwijkingen, ontbindingskrachten of ontbindingsmomenten moeten voldoen aan de diff. verg.

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 \triangle \varphi. \qquad (1)$$

Indien dus zooals we in dit hoofdstuk onderstelden, deze functies den vorm hebben

$$\varphi = G\,\chi \sin \psi,$$

dan zal er tusschen G, χ en ψ krachtens (1) een verband moeten bestaan, dat we nu nog zullen gaan bespreken.

Dan wordt

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \left\{\frac{\partial G}{\partial \psi}\frac{\partial \psi}{\partial x}\chi + G\frac{\partial \chi}{\partial x}\right\}\sin\psi + G\chi\frac{\partial \psi}{\partial x}\cos\psi,$$

en

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \left\{\frac{\partial^2 G}{\partial \psi^2}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2\chi + \frac{\partial G}{\partial \psi}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\chi + 2\frac{\partial G}{\partial \psi}\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \chi}{\partial x} + G\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} - G\chi\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2\right\}\sin\psi$$

$$+\left\{2\frac{\partial G}{\partial \psi}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2\chi + 2G\frac{\partial \chi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + G\chi\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\right\}\cos\psi.$$

Dus:

$$\triangle\varphi = \left\{\frac{\partial^2 G}{\partial \psi^2}\chi\Sigma\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial G}{\partial \psi}\chi\triangle\psi + 2\frac{\partial G}{\partial \psi}\Sigma\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \chi}{\partial x} + G\triangle\chi - G\chi\Sigma\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2\right\}\sin\psi$$

$$+\left\{2\chi\frac{\partial G}{\partial \psi}\Sigma\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + 2G\Sigma\frac{\partial \chi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + G\chi\triangle\psi\right\}\cos\psi,$$

en

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \left\{\frac{\partial^2 G}{\partial \psi^2}\chi\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)^2 + \frac{\partial G}{\partial \psi}\chi\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + 2\frac{\partial G}{\partial \psi}\frac{\partial \psi}{\partial t}\frac{\partial \chi}{\partial t} + G\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} - G\chi\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)^2\right\}\sin\psi$$

$$+\left\{2\chi\frac{\partial G}{\partial \psi}\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)^2 + 2G\frac{\partial \chi}{\partial t}\frac{\partial \psi}{\partial t} + G\chi\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\right\}\cos\psi.$$

De diff. verg. (1) wordt dus:

$$\left[\left(\chi\frac{\partial^2 G}{\partial \psi^2} - G\chi\right)\left\{\Sigma\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)^2\right\} + \chi\frac{\partial G}{\partial \psi}\left\{\triangle\psi - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\right\}\right.$$

$$+ 2\frac{\partial G}{\partial \psi}\left\{\Sigma\frac{\partial \chi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial \chi}{\partial t}\frac{\partial \psi}{\partial t}\right\} + G\left\{\triangle\chi - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2}\right\}\Big]\sin\psi$$

$$+\left[2\chi\frac{\partial G}{\partial \psi}\left\{\Sigma\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)^2\right\} + 2G\left\{\Sigma\frac{\partial \chi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial \chi}{\partial t}\frac{\partial \psi}{\partial t}\right\}\right.$$

$$\left.+ G\chi\left\{\triangle\psi - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\right\}\right]\cos\psi = 0, \qquad (106)$$

Deze diff. verg. bestaat uit twee termen waarvan de eene sin ψ en de andere cos ψ als factor heeft. Geven we aan x, y, z en t aangroeiingen dan bewegen zich sin ψ en cos ψ periodisch tusschen -1 en $+1$. Voor al die waarden van sin ψ en cos ψ moet (106) blijven gelden, waaruit volgt dat haar beide termen nul moeten zijn, dus:

$$\left.\begin{aligned} &\chi\left(\frac{\partial^2 G}{\partial \psi^2} - G\right)\left\{\Sigma\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)^2\right\} + \chi\frac{\partial G}{\partial \psi}\left(\triangle\psi - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right) \\ &\quad + 2\frac{\partial G}{\partial \psi}\left\{\Sigma\frac{\partial \chi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial \chi}{\partial t}\frac{\partial \psi}{\partial t}\right\} + G\left(\triangle\chi - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2}\right) = o \end{aligned}\right\} \quad (107)$$

en

$$\left.\begin{aligned} &2\chi\frac{\partial G}{\partial \psi}\left\{\Sigma\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)^2\right\} + 2G\left\{\Sigma\frac{\partial \chi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial \chi}{\partial t}\frac{\partial \psi}{\partial t}\right\} \\ &\quad + G\chi\left\{\triangle\psi - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right\} = o. \end{aligned}\right\}$$

Deze diff. verg. zijn in het algemeen onhandelbaar; voor twee bijzondere gevallen zijn er belangrijke gevolgtrekkingen uit te maken.

A. Vooreerst kunnen we onderstellen, dat de beweging stationair is. We bevinden ons dan niet in de buurt van de grens. In hoofdstuk II beredeneerden we dat voor een stationaire beweging de functie

$$\varphi = \chi \sin \psi \qquad (33)$$

den vorm krijgt

$$F = f(x\,y\,z) \sin\left\{f_1(x\,y\,z) + t\,f_2(x\,y\,z)\right\} \qquad (41)$$

De vergelijkingen (107) worden dan

$$\triangle f - f\left\{\Sigma\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)^2 + 2t\,\Sigma\frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial f_2}{\partial x} + t^2\,\Sigma\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)^2\right\} + \frac{1}{a^2}f\,f_2^2 = o,$$

en

$$2\Sigma \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f_1}{\partial x} + 2t\Sigma \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f_2}{\partial x} + f\triangle f_1 + tf\triangle f_2 = o.$$

Dit zijn dezelfde vergelijkingen als we hebben gevonden in het derde deel van hoofdstuk II. Uit de eisch dat zij moeten gelden voor ieder waarde van t, leidden we toen reeds af de vergelijkingen (42) en bovendien $f_2 = C$. De laatste verg. zegt dat van een stationaire beweging van vorm (33) het trillingsgetal overal hetzelfde is, zooals we daar hebben besproken.

De vergelijkingen (42) kunnen we ook den vorm geven:

$$\left.\begin{aligned} \triangle\chi - \chi\left\{\Sigma\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 - \frac{C^2}{a^2}\right\} &= o, \\ 2\Sigma\frac{\partial\chi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \chi\triangle\psi &= o, \end{aligned}\right\} \qquad (108)$$

indien we in het oog houden dat hierin de functies χ en ψ den vorm hebben:

$$\chi = f(x\,y\,z), \qquad \psi = f_1(x\,y\,z) + Ct.$$

De phasesnelheid van (33) is volgens (39)

$$a' = -\frac{\frac{\partial\psi}{\partial t}}{\frac{\partial\psi}{\partial N}},$$

waarin

$$\frac{\partial\psi}{\partial N} = \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial N} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial N} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial N}.$$

Nu is

$$\frac{\partial x}{\partial N} = \pm\frac{\frac{\partial\psi}{\partial x}}{\sqrt{\Sigma\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2}},$$

zoodat

$$\frac{\partial\psi}{\partial N} = \pm\sqrt{\Sigma\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2},$$

en dus volgens (108):

$$\frac{\partial \psi}{\partial N} = \pm \sqrt{\frac{\triangle \chi}{\chi} + \frac{C^2}{a^2}}.$$

Verder is

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = C,$$

zoodat we krijgen:

$$a' = \pm \frac{C}{\sqrt{\frac{\triangle \chi}{\chi} + \frac{C^2}{a^2}}}. \qquad (109)$$

Door deze uitdrukking voor a' kunnen we de phasesnelheid eener stationaire beweging berekenen indien we alleen de amplitude χ kennen; door (39) leerden we haar vinden alleen uit de phase ψ.

Voor een paar bewegingen zullen we door middel van (109) de phasesnelheid eens berekenen.

1e $$\varphi = \frac{A}{r} \sin m(r - at).$$

Hier is

$$\chi = \frac{A}{r},$$

dus

$$\triangle \chi = 0,$$

en dus volgens (109):

$$a' = \pm a$$

2e $$\varphi = A\, e^{y\sqrt{m^2 - \frac{C}{a^2}}} \sin (mx - Ct),$$

waarin A, B en m constanten zijn.

Laten we de constante A weg, dan is

$$\chi = e^{y\sqrt{m^2 - \frac{C^2}{a^2}}}$$

dus

$$\frac{\triangle \chi}{\chi} = m^2 - \frac{C^2}{a^2}.$$

Stellen we dit in (109), dan wordt

$$a' = \pm \frac{C}{m}.$$

Door middel van (39) vinden we voor a' dezelfde waarde.

3e $$\varphi = \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{A}{r}\sin m(r - at)\right\},$$

of

$$\varphi = \frac{A x}{r^3}\sqrt{1 + m^2 r^2}\,\sin\left\{\text{arc tg}\, m r - m(r - at)\right\}.$$

Hier is

$$C = m a,$$

en laten we de constante A weg, dan is

$$\chi = \frac{x}{r^3}\sqrt{1 + m^2 r^2}.$$

Hieruit vindt men

$$\frac{\triangle \chi}{\chi} = -\frac{m^2(1 + m^2 r^2) + m^4 r^2}{(1 + m^2 r^2)^2}.$$

Stelt men deze waarden van C en $\frac{\triangle \chi}{\chi}$ in (109) dan wordt

$$a' = \pm a\left(1 + \frac{1}{m^2 r^2}\right).$$

In hoofdstuk III vonden we in verg. (61) deze zelfde waarde van a' door middel van de formule (39).

4e Nog een andere oplossing van de diff. verg. der golfbeweging is

$$\varphi = \frac{A}{r} \text{ arc tg } \frac{y}{x} F(r - at).$$

Een speciale vorm hiervan van gedaante (33) is

$$\varphi = \frac{A}{r} \text{ arc tg } \frac{y}{x} \sin m(r - at).$$

Hier is

$$C = m a,$$

en laten we weder de constante A weg, dan is

$$\chi = \frac{1}{r} \text{ arc tg } \frac{y}{x}.$$

Men vindt

$$\triangle \chi = 0.$$

Volgens (109) is dus

$$a' = \pm a,$$

welke waarde van a' door (39) direct wordt geleverd.

B. Thans zullen we de diff. verg. (107) nog behandelen in de onderstelling dat we ons bevinden in de buurt van de grens der beweging.

Op de grens zelf zijn, indien φ voorstelt de potentiaal der beweging, volgens (97) G, $\frac{\partial G}{\partial \psi}$ en $\frac{\partial^2 G}{\partial \psi^2}$ gelijk aan nul, en daar wordt dus aan de verg. (107) voldaan zonder dat aan χ of ψ eenige eischen worden gesteld.

In de buurt der grens is zooals we reeds opmerkten, volgens de ontwikkeling van Taylor, G oneindig klein t. o. v. $\frac{\partial G}{\partial \psi}$ en $\frac{\partial G}{\partial \psi}$ oneindig klein t. o. v. $\frac{\partial^2 G}{\partial \psi^2}$.

In de buurt der grens is dus volgens de laatste der vergelijkingen (107)

$$\Sigma \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)^2 = o. \qquad (110)$$

Nu is weder

$$\Sigma \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{\partial \psi}{\partial N}\right)^2$$

en dus

$$a' = - \frac{\frac{\partial \psi}{\partial t}}{\frac{\partial \psi}{\partial N}} = \pm a.$$

Een golf, die zich in de buurt der grens bevindt, heeft dus een phasesnelheid a. Indien de grens wordt gevormd door een phaseoppervlak volgt hieruit dat de grens zich met snelheid a voortbeweegt in een richting loodrecht op de grens. De constructie van Huygens mag dan worden toegepast om uit de grens op eenig oogenblik de grens op een volgend oppervlak af te leiden.

Door (110) gaat de eerste der verg. (107) over in:

$$\chi \frac{\partial G}{\partial \psi}\left(\triangle \psi - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\right) + 2\frac{\partial G}{\partial \psi}\left(\Sigma \frac{\partial \chi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial \chi}{\partial t}\frac{\partial \psi}{\partial t}\right) + G\left(\triangle \chi - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2}\right) = o.$$

of daar G oneindig klein is t. o. v. $\frac{\partial G}{\partial \psi}$:

$$\chi\left(\triangle \psi - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\right) + 2\,\Sigma \frac{\partial \chi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{2}{a^2}\frac{\partial \chi}{\partial t}\frac{\partial \psi}{\partial t} = o.$$

We kunnen eens onderstellen dat evenals in het gebied waar de beweging stationair is, ook aan de grens het trillingsgetal onafhankelijk is van den tijd en dus $\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = o$. Nemen we verder aan dat ook aan de grens $\frac{\partial \chi}{\partial t} = o$, waartegen geen

direct bezwaar is, daar door den factor G met de dempingsverschijnselen aan de grens voldoende rekening wordt gehouden, dan wordt de laatste vergelijking:

$$\chi \triangle \psi + 2 \Sigma \frac{\partial \chi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} = o , \qquad (111)$$

en (110) gaat dan over in:

$$\Sigma \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 = \frac{C^2}{a^2} . \qquad (112)$$

Om deze beide verg. te interpreteeren noemen we ϱ_1 en ϱ_2 de hoofdkromtestralen van het oppervlak $\psi\ (x, y, z) = C$ en gaan $\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}$ uitdrukken in diff. quot. van ψ.

Stellen we ter afkorting: [1])

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = P , \qquad \frac{\partial \psi}{\partial y} = Q , \qquad \frac{\partial \psi}{\partial z} = R ,$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = L , \qquad \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = M , \qquad \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = N ,$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z} = L' , \qquad \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial x} = M' , \qquad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = N' ;$$

en noemen we verder K_1 en K_2 de wortels van:

$$P^2 \{ (M-K)(N-K) - L'^2 \} + Q^2 \{ (N-K)(L-K) - M'^2 \}$$
$$+ R^2 \{ (L-K)(M-K) - N'^2 \} + 2QR \{ M'N' - L'(L-K) \}$$
$$+ 2RP \{ N'L' - M'(M-K) \} + 2PQ \{ L'M' - N'(N-K) \} = o ;$$

dan is:

$$\varrho_1 = \frac{\sqrt{P^2+Q^2+R^2}}{K_1} \qquad \text{en} \qquad \varrho_2 = \frac{\sqrt{P^2+Q^2+R^2}}{K_2} .$$

---

1) Joachimstal. Anwendung der Diff. und Integr. Rechnung auf die algem. Th. der Flächen und der Liniën doppelter Krümmung.

Uit deze vierkantsverg. volgt:

$$-(K_1+K_2)=\frac{-P^2(M+N)-Q^2(N+L)-R^2(L+M)+2QRL'+2RPM'+2PQN'}{P^2+Q^2+R^2},$$

en dus:

$$-\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}\right)=\frac{-P^2(M+N)-Q^2(N+L)-R^2(L+M)+2QRL'+2RPM'+2PQN'}{(P^2+Q^2+R^2)^{3/2}},$$

of:

$$-\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}\right)=\frac{-\triangle\psi\,\Sigma\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+\Sigma\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+2\Sigma\frac{\partial^2\psi}{\partial y\,\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial z}}{\left\{\Sigma\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2\right\}^{3/2}}$$

Indien we (112) differentieeren naar x, naar y en naar z, die drie vergelijkingen respectievelijk vermenigvuldigen met $\frac{\partial\psi}{\partial x}$, $\frac{\partial\psi}{\partial y}$ en $\frac{\partial\psi}{\partial z}$ en vervolgens samentellen, vinden we

$$\Sigma\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+2\Sigma\frac{\partial^2\psi}{\partial y\,\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial z}=0,$$

zoodat

$$\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}=\frac{\triangle\psi}{\sqrt{\Sigma\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2}}.$$

Hieruit volgt door middel van (111)

$$2\Sigma\frac{\partial\chi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x}=-\chi\sqrt{\Sigma\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2}\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}\right),$$

$$2\Sigma\frac{\partial\chi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial N}=\pm\chi\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}\right),$$

$$\frac{\partial\chi}{\partial N}=\pm\frac{1}{2}\chi\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}\right).$$

We namen aan, dat het oppervlak ψ zijn bolle zijde naar buiten keert en naar die richting telden wij N. Volgens de wet van

behoud van arbeidsvermogen zal dan de intensiteit der beweging in de richting van N afnemen. Indien $\varphi = \chi \sin \psi$ voorstelt een der lichtvectoren dan is χ^2 een maat voor de intensiteit der beweging. Dan is χ de amplitude en derhalve essentieel positief, zoodat $\frac{\partial \chi}{\partial N}$ negatief is. Het $+$ teeken vervalt dus in bovenstaande verg. zoodat

$$\frac{\partial \chi}{\partial N} = -\frac{1}{2}\chi\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right)$$

of

$$\frac{\partial}{\partial N} \lg \chi = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right).$$

Daar ψ zijn bolle zijde naar buiten keert worden ϱ_1 en ϱ_2 geteld in dezelfde richting als N, zoodat:

$$\frac{\partial}{\partial N} \lg \chi = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial N}(\lg \varrho_1 + \lg \varrho_2)$$

of

$$\chi = \frac{A}{\sqrt{\varrho_1 \varrho_2}}.$$

waarin A een grootheid is die onafhankelijk is van N en dus constant langs eenzelfde normaal op de grens.

Keert het oppervlak ψ zijn holle zijde naar buiten, dan is $\frac{\partial \chi}{\partial N}$ positief, zoodat

$$\frac{\partial \chi}{\partial N} = \frac{1}{2}\chi\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right);$$

in dit geval worden echter ϱ_1 en ϱ_2 geteld in tegengestelden zin als N, zoodat ook nu:

$$\frac{\partial \chi}{\partial N} = -\frac{1}{2}\chi\frac{\partial}{\partial N}\left(\frac{1}{\varrho_2} + \frac{1}{\varrho_2}\right),$$

waaruit weder volgt:

$$\chi = \frac{A}{\sqrt{\varrho_1 \varrho_2}}.$$

Dit is onze verg. (105a) die we reeds bespraken in het eerste deel van dit hoofdstuk.

We bewezen dus dat de grens eener golfbeweging die beheerscht wordt door functies van den vorm $\varphi = \chi \sin \psi$, zich met snelheid a voortplant in de richting loodrecht op de grens, dat dus de constructie van Huygens op de grens van toepassing is en dat eindelijk in het grensgebied χ bovenstaanden vorm heeft. Daar χ ondersteld is van t onafhankelijk te zijn zal χ ook ver van de grenzen denzelfden vorm hebben.

Tegen bovenstaande bewijsvoering is wel het een en ander in te brengen. We hebben n.l. aangenomen zonder bewijs, dat in de grens $\frac{\partial \chi}{\partial t} = o$ en $\frac{\partial \psi}{\partial t} =$ constant, en verder zou men kunnen betwijfelen of ook voor het grensgebied de diff. verg· (106) uiteen valt in de vergelijkingen (107). In het grensgebied zijn n.l. G, $\frac{\partial G}{\partial \psi}$ en $\frac{\partial^2 G}{\partial \psi^2}$ oneindig klein en de redeneering waardoor we uit (106) het stel (107) afleidden, wordt daardoor bedenkelijk.

Daarom is aan de afleiding dezer stellingen die ik in het eerste deel van dit hoofdstuk gaf, de voorkeur te geven. Ik vermeld de laatste methode slechts, daar deze tot contröle kan dienen.

CONCLUSIES.

I.

Indien men onder golfoppervlakken van een golfbeweging welker potentiaal den vorm heeft

$$\varphi = \chi \sin \psi \qquad (33)$$

verstaat oppervlakken, waarop de phase van elk der drie ontbindingsuitwijkingen (elasticiteitstheorie v. h. licht) of wel de phase van elk der drie electrische of magnetische ontbindingsmomenten (electromagn. lichttheorie) overal gelijke waarde heeft, dan bestaan golfoppervlakken in het algemeen niet.

Zelfs voor de meest eenvoudige bolvormige golven, die zich laten denken, n. l. voor die welker potentiaal den vorm heeft

$$\varphi = \frac{C}{r} \sin 2\pi \frac{r - at}{\lambda},$$

bestaan geen oppervlakken waarop elk der drie electrische ontbindingsmomenten overal gelijke phase heeft.

II.

Bij de voortplanting van een golfbeweging welker potentiaal bovenstaanden vorm (33) heeft, moeten de volgende snelheden worden onderscheiden:

1° de voortplantingssnelheid van de grens der beweging;

2° de phasesnelheid van de potentiaal;

3° de phasesnelheden van elk der drie ontbindingsuitwijkingen (elasticiteitstheorie v. h. licht);

4° de phasesnelheden van de electrische ontbindingsvectoren (electromagn. lichttheorie);

5° de phasesnelheden van de magnetische ontbindingsvectoren (electromagn. lichttheorie).

Al deze snelheden zijn in het algemeen verschillend. De phasesnelheden zijn zoowel afhankelijk van de phase als van de amplitude; zij kunnen uit de phase berekend worden door middel van de formule (39) en uit de amplitude door middel van de formule (109).

III.

Bij een stationaire golfbeweging (waaronder we verstaan een golfbeweging waarvoor de amplitude en de trillingstijd van elk deeltje van den tijd onafhankelijk is) van den vorm (33) is de trillingstijd van alle deeltjes dezelfde. Het is dus onmogelijk door concentratie van een golfbeweging haar tril-

lingstijd te veranderen; in een focus en op grooten afstand daarvan is de trillingstijd juist dezelfde.

IV.

Indien in den vrijen ether zich een golfbeweging voortplant die op zeker oogenblik is begrensd tusschen twee phaseoppervlakken n. l. een voorste en een achterste grens, dan treden in de buurt dier grenzen bijzondere verschijnselen op, die we in het 4e deel van Hoofdstuk II bespraken en aanduidden met den naam dempingsverschijnselen.

Met die dempingsverschijnselen heeft men bij de bestudeering van de voortplanting eener begrensde golfbeweging rekening te houden en doet men dit, dan kan door middel van het theorema van Fourier de potentiaal van een begrensde golfbeweging worden geschreven in een vorm die door de geheele ruimte continu en eindig is.

V.

Indien een bolvormige golfbeweging op tijd t begrensd wordt door twee boloppervlakken met stralen r_1 en r_2 om het middelpunt der beweging en haar potentiaal heeft den vorm

$$\varphi = \frac{1}{r} F(r \mp at),$$

dan wordt zij op tijd $t + t'$ begrensd door twee boloppervlakken met stralen $r_1 \mp at'$ en $r_2 \mp at'$ om dat middelpunt, en binnen die grenzen heeft haar potentiaal weder denzelfden vorm.

VI.

Het door Stokes en door Voigt berekende phaseverschil $\frac{\pi}{2}$ (zie inleiding) treedt derhalve niet op, en hun resultaat moet worden beschouwd als een gevolg van Fresnel's onjuiste opvatting en onjuiste mathematische formuleering van het beginsel van Huygens.

Kent men, zooals Fresnel deed, physische beteekenis toe aan de elementaire golven van Huygens, dan eischt zooals Poisson opmerkte (zie inleiding), bij een divergeerende bolvormige golfbeweging de inwendig omhullende dier elementaire golven een naar het middelpunt terugloopende golfbeweging, die in werkelijkheid niet optreedt; bovendien kan dan niet al het arbeidsvermogen krachtens de golfbeweging op tijd t aanwezig tusschen de bollen r_1 en r_2, op tijd $t + t'$ worden teruggevonden tusschen de bollen $r_1 + at'$ en $r_2 + at'$.

Terwijl dus de elementaire golven van Huygens geen physische beteekenis hebben, mag men ze echter wel een meetkunstige beteekenis toekennen en ze volgens de 5e conclusie gebruiken als constructiemiddel om uit een voorgaande grens van een bolvormige golfbeweging de grens op eenig later oogenblik te bepalen.

VII.

Indien van een golfbeweging welker potentiaal den vorm (33) heeft, de voorste grens op zeker oogenblik t' wordt ge-

vormd door het oppervlak

$$\psi\ (x, y, z,\ t') = \text{Constant},$$

dan wordt t sec. later de grens gevormd door het uitwendig omhullend oppervlak van alle bollen met stralen $r = a\,t$ om alle punten van die eerste grens beschreven. Hierin is a de constante uit de diff. verg. der golfbeweging.

VIII.

Voor alle punten gelegen op een normaal op de grens der beweging (33) geldt de betrekking

$$\chi \sqrt{\varrho_1 \varrho_2} = \text{Constant},$$

waarin χ is de waarde der amplitude op het oogenblik dat die punten liggen in de grens en waarin ϱ_1 en ϱ_2 zijn de hoofdkromtestralen van het grensoppervlak in die punten.

Neemt men aan dat χ^2 een maat is voor de energie der beweging en dat die energie zich met snelheid a voortplant in een richting loodrecht op de grens, dan is die betrekking ook af te leiden door toepassing van de wet van behoud van arbeidsvermogen.

IX.

De phasesnelheden van de potentiaal en van de verschillende ontbindingslichtvectoren zijn afhankelijk van den vorm dier oppervlakken en in de verschillende punten van eenzelfde phaseoppervlak in het algemeen verschillend. Om uit een

bekend phaseoppervlak een ander af te leiden mag dus de constructie van Huygens niet worden aangewend.

En verder, indien een punt A op zeker oogenblik ligt in de buurt van de voorste grens der beweging, dan zullen de phaseoppervlakken van de potentiaal en van de verschillende ontbindingslichtvectoren, waartoe A op dat oogenblik behoort, een anderen vorm hebben dan de phaseoppervlakken waartoe A op eenig later oogenblik behoort.

Hoe de phasesnelheid samenhangt met den vorm van het phaseoppervlak (of er b. v. een verband bestaat tusschen de kromming van een phaseoppervlak in eenig punt en de phasesnelheid in dat punt), en wat het verband is tusschen den vorm van het phaseoppervlak gaande door A op zeker oogenblik dat A ligt in de buurt der grens, en den vorm van het phaseoppervlak waartoe A behoort eenigen tijd later, zou nog aan een nader onderzoek kunnen worden onderworpen.

De meeste dezer conclusies zijn zooals ik reeds in de inleiding vermeldde voor lichtbewegingen van minder belang en moeilijk experimenteel te controleeren. Het is dan ook voornamelijk met het oog op electromagnetische golfbewegingen van grooter trillingstijd (grooter golflengte) dat ik het voorgaande onderzoek heb ingesteld.

STELLINGEN.

I.

De elementaire golven van HUYGENS hebben geen physische doch slechts meetkunstige beteekenis.

II.

Men behoort te onderscheiden de snelheid waarmede de grens eener verstoring zich voortbeweegt en de phasesnelheden dier verstoring.

III.

De snelheid der grens eener golfbeweging is slechts afhankelijk van den aard van het medium, haar phasesnelheden hangen bovendien af van den aard der beweging.

IV.

Bij de voortplanting van een golfbeweging in den vrijen ether veranderen in het algemeen haar phasesnelheden wel, maar de trillingstijd blijft standvastig.

V.

Bij een voortgaande trillende beweging is het verband tusschen de uitwijking en de snelheid der deeltjes zoodanig, dat zij elkaar voortdurend energie overdragen in de richting van de verstoringsbronnen af. Het voortbestaan van dat verband als de bronnen hebben opgehouden energie te leveren geeft er verklaring van dat er geen golven naar die bronnen terugloopen (1).

VI.

De bewering (2) dat de aarde in een eeuw 22 sec. bij een juisten chronometer achterblijft, mist voldoenden grond.

VII.

De moeilijkheden die volgens HERTZ (3) zich voordoen bij de mechanische verklaring der draaiende beweging van een steen aan een touw, zijn denkbeeldig.

VIII.

De strijd over het verschil tusschen een rotatie en een translatie (4) is het gevolg daarvan, dat men verzuimd heeft op te merken, dat men bij een rotatie steeds heeft te maken met een versnelling, maar bij een translatie niet altijd.

---

(1) Cf. aanhaling van POISSON, Inleiding pg. 5.
(2) THOMSON en TAIT, Theor. Phys. § 820, HERTZ. Ges. W. I pg. 225, etc.
(3) HERTZ, Ges. W. III. pg. 6 en 7.
(4) Zie o. a. E. MACH, Die Mechanik in ihrer Entwickelung; Kapittel 2, § 6.

IX.

De samenstelling van krachten door middel van parallelogramconstructie kan niet worden bewezen, maar behoort als hypothese te worden aanvaard (1).

X.

De lichtverschijnselen door BOYS aan kwartsdraden opgemerkt (2) zijn volledig te verklaren uit interferentie van den door den draad direct teruggekaatsten en den tweemaal gebroken straal.

XI.

Het sissen van den electrischen lichtboog wordt veroorzaakt door de directe aanraking van de zuurstof der lucht met de kom van de positieve koolstaaf.

XII.

Kathodestralen zijn banen van geladen stoffelijke deeltjes.

XIII.

De eischen door KIRCHHOFF (3) aan een functie $F(\zeta)$ gesteld:

1° $F(\zeta)$ is continu voor iedere waarde van ζ,

2° $F(\zeta) = o$ voor ζ eindig,

3° $\int F(\zeta)\, d\zeta = 1$ als men die integraal neemt tusschen een eindige negatieve en een eindige positieve waarde van ζ,

zijn onvervulbaar.

(1) V. A. JULIUS, Beschouwingen over de grondslagen der Natuurkunde.

(2) BOYS, Nature. Vol. 40. pg. 247. 1889.

(3) KIRCHHOFF, Sitz. Ber. d. Kön. Acad. d. Wissensch. zu Berlin vom 22 Juni 1882 pg. 641. Wiedem. Ann. Bd. 18 pg. 663. 1883.
Ges. Abh. von KIRCHHOFF, Nachtrag pg. 22.

XIV.

Ten onrechte beweert JAMIN (1) dat de evolute van een hyperbool of ellips tot evolventen heeft een stelsel hyperbolen of ellipsen.

XV.

Van het postulatum door GAUSS gesteld bij de afleiding van zijn foutenwet kan zoomin de juistheid als de onjuistheid worden aangetoond.

Het bewijs dat o. a. BERTRAND (2) geeft van de onjuistheid er van, is foutief.

XVI.

Het paradoxale antwoord der kansrekening, dat bij het spel van St. Petersburg de waarde voor A om met B te spelen oneindig groot is, spruit voort uit de onderstelling dat B aan zijn verplichtingen zou kunnen voldoen.

Bezit B een kapitaal 2^m, dan is eenvoudig te berekenen dat de waarde van dat spel voor A niet oneindig groot is, maar gelijk is aan $\frac{m}{2} + 1$.

XVII.

Daar men niet weet of het massa-middelpunt van de komeet van ENCKE in rust is t. o. v. de kern, bestaat er geen reden om ter verklaring van de verkorting van den omloopstijd dier kern aan te nemen dat die komeet bij haar beweging een tegenstand ondervindt.

---

(1) JAMIN et BOUTY, Cours de Physique, Optique Géométrique pg. 72 en 74. (Paris 1887).

(2) BERTRAND, Calcul des Probabilités § 143.

XVIII.

Onderzoekingen van J. J. Thomson over kathodestralen maken het waarschijnlijk dat de atomen van de verschillende scheikundige elementen verschillende aggregaties zijn van deeltjes van dezelfde soort.

XIX.

De moleculairgewichten van gassen en de atoomgewichten van de elementen waaruit deze zijn opgebouwd, kunnen langs physischen weg met gelijke of grooter nauwkeurigheid worden bepaald dan langs chemischen.

XX.

Alle vaste lichamen hebben kristallijne structuur.

XXI.

Aan de geschiedenis der natuurwetenschappen en aan de kritiek van haar grondslagen en methode behoorde aan onze universiteiten een afzonderlijke leerstoel te worden gewijd.

XXII.

Het beeld waarin volgers van Maxwell (Lorentz, V. A. Julius) zijn theorie aanschouwelijk hebben gemaakt, kan bij het onderwijs in de leer van het magnetisme en de electriciteit aan een hoogere burgerschool zonder vermeerdering van moeilijkheden de verouderde voorstellingen vervangen.

XXIII.

Bij het onderwijs in natuurkunde mag slechts dan gebruik worden gemaakt van projectiebeelden, indien directe aanschouwing geheel onmogelijk is.

XXIV.

Ten onrechte meent FRIEDRICH EGO (1) dat de slotconclusies van zijn „Kritik der exacten Forschung":

> „Alle Naturgesetze sind bloss einfache, empirische Regeln, die sich für die Systematisirung der bekannten Thatsachen als brauchbar erwiesen haben. Ihre Giltigkeit für die Zukunft ist und bleibt immer problematisch. Vorhersagungen mittelst derselben sind daher ebenfalls nur von problematischem Wert. Alle Theoriën sind nur willkürliche Geschöpfe unserer Vernunft ohne jeglichen anderen als systematisirenden und vielleicht heuristischen Wert. Denselben eine wirkliche Bedeutung zuzuerteilen ist thöricht und nur die Folge einer mangelhaften Kenntniss der Grundlagen und des Zweckes unserer Forschung," etc.

iets inhouden dat niet reeds vroeger door anderen is uitgesproken.

---

(1) FRIEDRICH EGO. Kritik der exacten Forschung; E. J. Brill, Leiden 1897.