De tweede vorm der bewegingsvergelijkingen van Lagrange

https://hdl.handle.net/1874/253155

DE TWEEDE VORM DER BEWEGINGS-VERGELIJKINGEN VAN LAGRANGE.

6

DE TWEEDE VORM DER BEWEGINGS-VERGELIJKINGEN VAN LAGRANGE.

ACADEMISCH PROEFSCHRIFT,

OP GEZAG VAN DEN RECTOR MAGNIFICUS

DR. C. H. C. GRINWIS,

GEWOON HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE,

MET TOESTEMMING VAN DEN ACADEMISCHEN SENAAT

EN

VOLGENS BESLUIT VAN DE FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE,

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN

DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE,

AAN DE HOOGESCHOOL TE UTRECHT,

TE VERDEDIGEN

op Zaterdag den 3den Juli 1875, des namiddags te 3 ure,

DOOR

CARLEL ALBERT SCHELTEMA,

GEBOREN TE UTRECHT.

LEIDEN, E. J. BRILL.
1875.

LEIDEN: BOEKDRUKKERIJ VAN E. J. BRILL.

Aan

MIJN VADERLIJKEN VRIEND

D. GROTHE,

HOOGLEERAAR AAN DE POLYTECHNISCHE SCHOOL.

VOORREDE.

Aan het einde mijner academische studiën gekomen, is het mij aangenaam, een openlijk woord van dank te richten tot allen, wier onderwijs ik vroeger of later mocht genieten.

In de eerste plaats tot U, Hoogleeraren der Wis- en Natuurkundige Faculteit. Was het ook gedurende slechts korten tijd, dat ik Uwe lessen kon bijwonen, ik zal ze mij, niet minder dan de vriendelijke behandeling, van U ondervonden, immer met genoegen herinneren.

Vooral U, Hooggeachte Promotor, Hooggeleerde GRINWIS, ben ik veel verplicht. Mocht ik toch van het oogenblik, dat ik, bij het afleggen van het admissie-examen voor de Koninklijke Academie te Delft, voor het eerst met U in kennis kwam, meermalen Uwe welwillendheid ondervinden, vooral gedurende mijn studietijd in Utrecht, hebt Gij mij daarvan herhaaldelijk de duidelijkste blijken gegeven. Waar ik Uw raad of Uwe hulp behoefde, hebt Gij mij die verleend met eene hartelijkheid, die mij met innige dankbaarheid jegens U vervult, en hoeveel ik aan U verschuldigd ben, wat mijne wetenschappelijke vorming aangaat, dit vermag ik niet in woorden te brengen. Is het mij dus een aangenamen plicht, U voor dat alles mijnen hartelijken dank te betuigen, ik waag het tevens den wensch er bij te voegen: blijf mij ook voor het vervolg we genegenheid en belangstelling schenken.

Ik voel mij gedrongen hier ook eenige Hoogleeraren en Leeraren der Polytechnische school te gedenken, en hun mijne erkentelijkheid te betuigen voor hetgeen zij tot mijne ontwikkeling hebben bijgedragen en voor den vriendschappelijken, soms zelfs vertrouwelijken omgang, waarmede enkele mij hebben vereerd. Mogen zij mij hunne vriendschap nimmer onthouden!

Ten slotte mag ik niet verzuimen, onder hen, aan welke ik veel verschuldigd ben, U te noemen, waarde LANDRÉ! Veel heb ik van U geleerd in de uren, die we zamen hebben gewerkt, en de omgang met U heeft ook op mijne latere studiën een heilzamen invloed uitgeoefend. Ik heb er behoefte aan, U daarvoor nogmaals mijne dankbaarheid uit te spreken, al zijt Gij daarvan ook wel overtuigd. Steeds zal ik het mij tot eer rekenen, U onder mijne vrienden te mogen tellen.

INHOUD.

EERSTE HOOFDSTUK.

De bewegings-vergelijkingen voor aanhoudend werkende krachten.

		Bladz.
1.	Variatie-vergelijking der beweging	1
2.	Eerste vorm der bewegings-vergelijkingen van Lagrange	3
3.	Krachtfunctie	6
4.	Over het invoeren van nieuwe variabelen	7
5.	Tweede vorm der bewegings-vergelijkingen van Lagrange	8
6.	Reductie van het aantal nieuwe variabelen tot het kleinste aantal	16
7.	Bijzondere gevallen van den tweeden vorm der bewegings-vergelijkingen	16
8.	Afleiding van het principe der levendige kracht uit dien tweeden vorm	18
9.	Over de beteekenis der algemeene krachts-componenten	19
10.	Toepassingen	21
11.	Toepassingen	24
12.	Toepassingen	25
13.	Toepassingen	29

TWEEDE HOOFDSTUK.

De bewegings-vergelijkingen voor impulsieve krachten.

Bladz.
1. Eerste vorm dier bewegings-vergelijkingen 39
2. Invoering van nieuwe variabelen, tweede vorm. 40
3. Andere afleiding van dezen tweeden vorm 43
4. Over de beteekenis dier vergelijkingen 46
5. Transformatie der vergelijkingen 47
6. Over verschillende vraagstukken, die zich kunnen voordoen betreffende impulsies en snelheden 50
7. } Maximum en minimum eigenschap der impulsieve beweging { 53
8. } Maximum en minimum eigenschap der impulsieve beweging { 60
9. Toepassing 62
10. Over de beteekenis der algemeene impulsie-componenten . 67

DERDE HOOFDSTUK.

Het gebruik der bewegings-vergelijkingen voor het onderzoek naar de stabiliteit van het evenwicht.

Bladz.
1. Vereenvoudigde vorm der bewegings-vergelijkingen . . . 71
2. Algemeene oplossing van die vergelijkingen 74
3. Geval dat er eene krachtfunctie bestaat 77
4. Andere behandeling van dit geval 80
5. Toepassingen. 86
6. Normale bewegingen 91
7. Geval dat er weerstanden werken 93
8. Bijzonder geval, dat er slechts ééne enkele variabele is . 97
9. Toepassing 100

Stellingen 107

INLEIDING.

Onder de talrijke werken van Lagrange is zonder twijfel zijn „Mécanique analytique" een der belangrijkste.

Lagrange legt in dit werk, waarvan de eerste druk in 1788 verscheen [1]), aan de behandeling van zijn onderwerp een geheel nieuw beginsel ten grondslag: het beroemde principe der virtueele snelheden, en ontwikkelt hieruit, langs geheel analytischen weg, al de reeds op andere wijze gevonden wetten der theoretische mechanica. In dit werk worden door hem medegedeeld de algemeene bewegings-vergelijkingen van een materiëel stelsel, waarvan de punten aan zekere voorwaarden moeten voldoen, en wel worden deze vergelijkingen verkregen, door het bovengenoemde principe toe te passen op een ander, dat eenigen tijd te voren, in 1742, door d'Alembert was gevonden, of liever nog, door dezen het eerst in bepaalden vorm was uitgesproken.

Lagrange stelt echter die bewegings-vergelijkingen niet alleen in den meest algemeenen vorm op, maar hij heeft ook nog, door het invoeren van nieuwe veranderlijken,

---

1) De tweede druk verscheen in 1811; de derde werd, herzien en met belangrijke aanteekeningen vermeerderd, in 1856 door BERTRAND uitgegeven

aan die vergelijkingen eene andere gedaante, een eenvoudiger vorm gegeven.

Die tweede vorm der bewegings-vergelijkingen is nu hoogst merkwaardig, en het is te verwonderen, dat, terwijl de eerste in bijna alle latere werken over Mechanica is opgenomen, van dien tweeden, veel eenvoudiger en even algemeenen vorm slechts zelden, en alleen terloops, wordt gewag gemaakt.

Hetgeen men daarover vindt, komt voor in de werken van geleerde genootschappen, o. a. in de Comptes rendus de l'Académie des Sciences, in verschillende mathematische journalen, bijv. in dat van Liouville, in de leerboeken van Jacobi, Schell, Thòmson en Tait, en van enkele andere schrijvers; maar toch is de litteratuur over dit onderwerp zeer beperkt, en bovendien in zeer verschillende werken verspreid.

Met het kiezen van dezen tweeden vorm der bewegings-vergelijkingen van Lagrange tot het onderwerp mijner dissertatie, beoogde ik nu in de eerste plaats de aandacht op dit punt te vestigen door verschillende van de daarover verspreide stukken te verzamelen, ze toe te lichten of aan te vullen, waar het mij wenschelijk voorkwam en ze zooveel mogelijk tot een afgerond geheel te verwerken, en in de tweede plaats daarbij, voornamelijk door het geven van enkele toepassingen, het groote gemak te doen uitkomen, dat die tweede vorm voor het in vergelijking brengen van mechanische vraagstukken aanbiedt.

EERSTE HOOFDSTUK.

De bewegingsvergelijkingen voor aanhoudend werkende krachten.

§ 1. Zooals bekend is, drukt het principe van d'Alembert uit, dat de verschillende krachten, die op al de materiëele punten van een zeker stelsel werken, op elk oogenblik evenwicht maken met de traagheidskrachten dier punten, dat is, met de krachten, die gelijk en tegengesteld zijn aan de krachten, welke de werkelijke beweging dier punten zouden kunnen veroorzaken, wanneer alle punten van het stelsel vrij waren. Met andere woorden: volgens het principe van d'Alembert, houden de krachten, die op de verschillende punten van een stelsel werken en de weerstanden dier punten tegen de versnellingen, die zij in een willekeurig bewegingsgeval aannemen, op elk oogenblik elkaar in evenwicht.

Verbindt men deze stelling met het principe der virtueele snelheden, dan verkrijgt men de bekende algemeene vergelijking voor de beweging van een stelsel materiëele punten:

$$\Sigma \left\{ \left(X_i - m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2}\right)\delta x_i + \left(Y_i - m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2}\right)\delta y_i + \left(Z_i - m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2}\right)\delta z_i \right\} = 0 \qquad (1).$$

x_i, y_i, z_i zijn de coördinaten van zeker punt van het stelsel, m_i is de massa van dat punt, X, Y, Z zijn de parallel aan de assen genomen componenten van de op dit punt werkende resulteerende kracht, terwijl

$$-m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2}, -m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2}, -m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2}$$

de componenten der traagheidskrachten van dit punt zijn.

Deze vergelijking (1) is nu de onbepaalde of variatievergelijking der beweging en levert onmiddellijk, voor het geval dat het stelsel vrij is (dat wil zeggen, dat de materiëele punten ongehinderd de inwerking van de daarop werkende krachten kunnen volgen, dus dat alsdan de δx, δy, δz enz. allen van elkaar onafhankelijk zijn) de bekende bewegingsvergelijkingen van een materiëel punt, doordat we de coëfficiënten van δx, δy, δz enz. nul stellen. Men krijgt dan:

$$X_i - m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = 0, \quad Y_i - m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = 0, \quad Z_i - m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = 0 \text{ enz.,}$$

in het geheel als het stelsel uit n materiëele punten bestaat, $3n$ dergelijke vergelijkingen door i alle geheele waarden van 1 tot en met n te geven.

We spreken in het bovenstaande en in het vervolg dikwijls van een stelsel materiëele punten. We meenen daarmee, dat de punten niet geheel en al onafhankelijk van elkaar zijn, dat ze onderling invloed op elkaar uitoefenen, zoodat zich een enkel punt niet kan bewegen, zonder dat deze beweging invloed uitoefent op die van de andere punten.

Men kan de vergelijking (1) ook in een anderen vorm brengen en wel in dezen:

$$\Sigma\, m_i\left(\frac{d^2 x_i}{dt^2}\delta x_i + \frac{d^2 y_i}{dt^2}\delta y_i + \frac{d^2 z_i}{dt^2}\delta z_i\right) =$$
$$\Sigma\,(X^i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i)$$

of, volgens de notatie, die we in het vervolg zullen aanwenden,

$$\Sigma\, m_i(\ddot{x}_i \delta x_i + \ddot{y}_i \delta y_i + \ddot{z}_i \delta z_i) = \Sigma\,(X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i) \quad (2).$$

In deze vergelijking stelt het eerste lid voor den arbeid der krachten $m_i\ddot{x}_i$; $m_i\ddot{y}_i$; $m_i\ddot{z}_i$, die gelijk en tegengesteld zijn aan de traagheidskrachten der punten, die de werkelijke beweging zouden kunnen voortbrengen, wanneer de punten vrij waren, en ze over de wegen δx_i, δy_i, δz_i werkten. Het tweede lid stelt den arbeid voor, dien de krachten, welke inderdaad op de punten werken, verrichten, als ze hunne aangrijpingspunten over dezelfde wegen verplaatsen.

§ 2. Die vergelijking (1), die we nu ook aldus kunnen schrijven:

$$\Sigma\left\{(X_i - m_i\ddot{x}_i)\,\delta x_i + (Y_i - m_i\ddot{y}_i)\,\delta y_i + (Z_i - m_i\ddot{z}_i)\,\delta z_i\right\} = 0 \quad (3).$$

geldt voor een geheel willekeurig stelsel materiëele punten. Is het stelsel vrij, dan zijn δx, δy, δz enz. van elkaar volkomen onafhankelijk; maar bestaan er tusschen de coördinaten der verschillende punten zekere betrekkingen, zijn er derhalve eenige, bijv. m voorwaarde-vergelijkingen tusschen de coördinaten der punten gegeven, dan zijn de δx, δy, δz enz. niet allen onafhankelijk meer, maar slechts $3n - m$ van die variatiën, en de m overige zijn functiën van deze. De bewegingsvergelijkingen der verschillende punten zijn dan niet meer zoo eenvoudig. De boven bedoelde voorwaarde-vergelijkingen kunnen ook nog wel bovendien den tijd expliciet als variabele bevatten, wanneer bijv. sommige deelen van het stelsel zich volgens eene bepaalde wet moeten bewegen.

Geven we aan het stelsel eene zekere virtueele verplaatsing, dan zal aan de voorwaarde-vergelijkingen $M=0$, $N=0$ enz. door de coördinaten der punten van het stelsel voldaan moeten worden, vóór die verplaatsing en na die verplaatsing. We zullen dus, indien we de vergelijkingen differentiëeren ten opzichte van x, y, z enz. en den tijd als constant beschouwen, de volgende m betrekkingen hebben, waaraan die variatien van de coördinaten moeten voldoen:

$$\left.\begin{aligned} &\Sigma\left(\frac{dM}{dx_i}\delta x_i+\frac{dM}{dy_i}\delta y_i+\frac{dM}{dz_i}\delta z_i\right)=0 \\ &\Sigma\left(\frac{dN}{dx_i}\delta x_i+\frac{dN}{dy_i}\delta y_i+\frac{dN}{dz_i}\delta z_i\right)=0 \text{ enz.} \end{aligned}\right\} \quad (4).$$

Door deze m vergelijkingen kan men nu m variatien elimineeren uit de vergelijking (3), en door dan de coëfficiënten der overblijvende $3n-m$ variatiën, die onafhankelijk van elkaar zijn, nul te stellen, verkrijgt men de $3n-m$ differentiaal-vergelijkingen van het vraagstuk, welke in vereeniging met de m voorwaarde-vergelijkingen een stelsel van $3n$ vergelijkingen vormen, waaruit men alle $3n$ variabelen in functie van den tijd kan bepalen.

Deze eliminatie kan op zich zelf reeds lastig zijn, maar heeft bovendien het nadeel, dat de uitdrukkingen, die men ten slotte verkrijgt, niet symetrisch zijn, omdat men aan enkele variatiën, die men elimineeren wil, de voorkeur geeft; bovendien is de geheele behandeling niet zeer algemeen: de vorm der vergelijkingen, die men door eliminatie van enkele variabelen verkreeg, zou toch geheel anders worden, als het aantal der voorwaarde-vergelijkingen eens veranderde.

Al deze nadeelen heeft Lagrange vermeden door de toepassing van eene methode, die reeds door Euler in de vraagstukken van maxima en minima met vrucht was aangewend, namelijk die der multiplicatoren.

Vermenigvuldigt men de vergelijkingen (4) respectievelijk met een onbepaalden factor λ, μ enz. en telt men ze allen bij (3) op, dan krijgt men:

$$\Sigma\left(X_i - m\ddot{x}_i + \lambda\frac{dM}{dx_i} + \mu\frac{dN}{dx_i} + \text{enz.}\right)\delta x_i + \Sigma\left(Y_i - m\ddot{y}_i + \lambda\frac{dM}{dx_i} + \mu\frac{dN}{dy_i} + \text{enz.}\right)\delta y_i + \Sigma\left(Z_i - m\ddot{z}_i + \lambda\frac{dM}{dz_i} + \mu\frac{dN}{dz_i} + \text{enz.}\right)\delta z_i = 0. \quad (5).$$

Bepaalt men nu de onbepaalde factoren λ, μ enz. zoodanig, dat de coëfficiënten van de m afhankelijke variatiën in deze vergelijking (5) wegvallen, en stelt men daarna de $3n - m$ coëfficiënten der overige onafhankelijke variatiën nul, dan verkrijgt men de volgende $3n$ vergelijkingen:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_i &= X_i + \lambda\frac{dM}{dx_i} + \mu\frac{dN}{dx_i} + \text{enz.} \\ m\ddot{y}_i &= Y_i + \lambda\frac{dM}{dy_i} + \mu\frac{dN}{dy_i} + \text{enz.} \\ m\ddot{z}_i &= Z_i + \lambda\frac{dM}{dz_i} + \mu\frac{dN}{dz_i} + \text{enz.} \end{aligned} \quad (6).$$

waarbij men i alle geheele waarden van 1 tot en met n moet geven, en λ, μ enz. in alle vergelijkingen dezelfde zijn.

De termen, die in dit geval in het tweede lid meer voorkomen dan in de bewegingsvergelijking van een vrij stelsel,

$$m\ddot{x}_i = X_i, \quad m\ddot{y}_i = Y_i, \quad m\ddot{z}_i = Z_i,$$

drukken natuurlijk uit den invloed, dien de verbindingen, waaraan de punten moeten voldoen, uitoefenen op de krachten, die er op werken.

Wil men de grootheden λ, μ enz. bepalen, dan heeft men de voorwaarde-vergelijkingen tweemaal ten opzichte van t te differentiëeren en vervolgens de tweede differentiaal-quotienten van x, y, z enz. uit (6) hierin te substituëeren. Men verkrijgt dan m vergelijkingen ter bepaling der m grootheden λ, μ, enz.

§ 3. De vergelijking (5) laat zich ook in dezen vorm brengen:

$$\Sigma\, m_i (\ddot{x}_i \delta x_i + \ddot{y}_i \delta y_i + \ddot{z}_i \delta z_i) = \Sigma (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i) + \lambda\, \delta M + \mu\, \delta N + \text{enz.} \qquad (7).$$

welke vorm ons in het vervolg zal te pas komen.

Zijn de krachten X_i, Y_i, Z_i enz., die op de diverse punten werken, zoodanig, dat ze de partiëele differentiaal-quotienten zijn van eene zelfde functie U der coördinaten, dan laat zich de laatste vergelijking (7) ook aldus schrijven:

$$\Sigma\, m_i (\ddot{x}_i \delta x_i + \ddot{y}_i \delta y_i + \ddot{z}_i \delta z_i) = \delta U + \lambda\, \delta M + \mu\, \delta N + \text{enz.} \ (8).$$

Deze functie U is door Hamilton krachtfunctie genoemd; ze bestaat in alle gevallen, wanneer de krachten, die op de punten van het stelsel werken, voortdurend naar vaste centrums gericht zijn, en wel functiën zijn der afstanden tot die centrums. Ook is dit het geval, als de krachten bestaan in onderlinge aantrekkingen of afstootingen tusschen de punten van een stelsel, en waarvan de intensiteit eene functie der afstanden tusschen die punten is.

§ 4. Wanneer een stelsel uit n materiëele punten bestaat, en tusschen de coördinaten dier punten m vergelijkingen gegeven zijn, dan zijn derhalve de coördinaten niet allen onafhankelijk van elkaar; we kunnen dan, zooals boven gezegd is, de $3n$ coördinaten uitdrukken door $3n - m$ coördinaten die men hiertoe naar willekeur heeft uitgekozen, en die geheel onafhankelijk van elkaar zullen zijn.

Had men bijv. de $3n$ coördinaten $x_1\, x_2 \ldots\ldots x_n$

$y_1\, y_2 \ldots\ldots y_n$

$z_1\, z_2 \ldots\ldots z_n$, en de

m voorw. verg. $M = 0$, $N = 0$ enz., en lossen we hieruit op m grootheden $x_1\, x_2 \ldots x_m$, dan vinden we daaruit:

$$x_1 = f\,(x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots . x_n, y_1, y_2, \ldots y_n, z_1, z_2, \ldots z_n)$$
$$x_2 = F(x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots . x_n, y_1, y_2, \ldots y_n, z_1, z_2, \ldots z_n)$$
$$x_3 = \phi\,(x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots . x_n, y_1, y_2, \ldots y_n, z_1, z_2, \ldots z_n)$$
$$x_{m+1} = x_{m+1}, x_{m+2} = x_{m+2} \text{ enz. } y_i = y_i, z_i = z_i;$$

we hebben dus nu de $3n$ variabelen uitgedrukt door de $3n - m$, die we hebben uitgekozen.

Nu is het echter in de meeste gevallen niet wenschelijk, die $3n$ coördinaten op deze wijze uit te drukken door $3n - m$ van hen, die men daartoe heeft uitgekozen, maar verkieselijker is het, in hunne plaats andere variabelen in te voeren, die functiën der coördinaten zijn, en wel in even groot aantal, als er onafhankelijke veranderlijken voorkomen.

Nemen we derhalve x_{m+1} = zekere functie van $3n$-m nieuwe veranderlijken, x_{m+2} = eene andere functie dier zelfde veranderlijken enz., dan is het duidelijk, dat men aldus alle $3n$ oorspronkelijke veranderlijken x, y, z enz. kan uitdrukken in $3n - m$ nieuwe variabelen, en dat deze door oplossing uit de vergelijking, x_{m+1} = functie nieuwe variabelen enz.

als functiën der oude variabelen kunnen bepaald worden. We zouden echter ook, door niet van alle m voorwaarde-vergelijkingen gebruik te maken, slechts enkele bijv. $k < m$ coördinaten kunnen elimineeren en de $3n$ coördinaten kunnen uitdrukken door de $3n - k$ overblijvende.

Deze coördinaten zullen dan natuurlijk niet allen van elkaar onafhankelijk wezen, maar nog gebonden zijn door de nog niet gebruikte voorwaarde-vergelijkingen, waaruit natuurlijk ook die k bepaalde coördinaten geëlimineerd zijn.

Voert men nu wederom nieuwe veranderlijken in, functiën dier $3n - k$ coördinaten, ten getale van k, dan zullen deze nieuwe variabelen niet allen onafhankelijk van elkaar zijn, maar, indien men in de niet gebruikte voorwaarde-vergelijkingen die nieuwe variabelen invoert, nog door deze gebonden zijn.

Op deze wijze kan men derhalve een grooter of geringer aantal nieuwe variabelen invoeren, en min of meer voorwaarde-vergelijkingen, waaraan deze nog moeten voldoen, overhouden.

Elimineert men door middel dezer vergelijkingen evenveel variabelen, dan kan men dus ten slotte tot het eerste geval terugkeeren, waarbij men natuurlijk het kleinste aantal variabelen verkrijgt, die nu geheel onafhankelijk van elkaar zijn, dat is door geen enkele voorwaarde-vergelijking meer gebonden zijn.

§ 5. De bewegings-vergelijkingen van Lagrange nemen nu een zeer eenvoudigen en hoogst merkwaardigen vorm aan, als men zulke nieuwe variabelen invoert, en vooral, als men haar aantal, zooals boven is aangegeven, zoo gering mogelijk neemt.

Bevatten de voorwaarde-vergelijkingen $M = 0$, $N = 0$ enz.

ook nog den tijd expliciet, dan zullen in den regel ook de functiën der nieuwe variabelen, die de oude uitdrukken, den tijd expliciet bevatten en derhalve van den vorm zijn:

$$
\begin{aligned}
x_i &= f_i\ (t,\ q_1, q_2 \ldots\ldots). \\
y_i &= F_i\ (t,\ q_1, q_2 \ldots\ldots). \qquad (9). \\
z_i &= \mathrm{F}_i\ (t,\ q_1, q_2 \ldots\ldots).
\end{aligned}
$$

Gaan we nu na, wat er van de algemeene vergelijkingen wordt, in geval we deze nieuwe variabelen $q_1\, q_2$ enz. invoeren, en de voorwaarde-vergelijkingen $M = 0$, $N = 0$ enz. functiën van t en der coördinaten zijn.

Vooreerst is dan:

$$
\begin{aligned}
\delta x_i &= \frac{dx_i}{dq_1}\delta q_1 + \frac{dx_i}{dq_2}\delta q_2 + \text{enz.} \\
\delta y_i &= \frac{dy_i}{dq_1}\delta q_1 + \frac{dy_i}{dq_2}\delta q_2 + \text{enz.} \qquad (10). \\
\delta z_i &= \frac{dz_i}{dq_1}\delta q_1 + \frac{dz_i}{dq_2}dq_2 + \text{enz.}
\end{aligned}
$$

Substitueeren we deze waarden in het tweede lid der vergelijking (7), dan gaat deze over in:

$$
\begin{aligned}
\Sigma\, m_i\,(\ddot{x}_i\,\delta x_i + \ddot{y}_i\,\delta y_i + \ddot{z}_i\,\delta z_i) = & \\
& \Sigma\left(\mathrm{X}_i\frac{dx_i}{dq_1} + \mathrm{Y}_i\frac{dy_i}{dq_1} + \mathrm{Z}_i\frac{dz_i}{dq_1}\right)\delta q_1 + \\
(11). \qquad & \Sigma\left(\mathrm{X}_i\frac{dx_i}{dq_2} + \mathrm{Y}_i\frac{dy_i}{dq_2} + Z_i\frac{dz_i}{dq_2}\right)\delta q_2 + \text{enz.} \\
& + \lambda\,\delta M + \mu\,\delta N + \text{enz.}
\end{aligned}
$$

δM, δN enz. worden natuurlijk na substitutie dezer nieuwe variabelen:

$$
\delta M = \frac{dM}{dq_1}\delta q_1 + \frac{dM}{dq_2}\delta q_2 + \text{enz.},\quad \delta N_2\ \frac{dN}{dq_1}\delta q_1 + \frac{dN}{dq_2}\delta q_2 + \text{enz.}
$$

Stellen we nu verder:

$$\Sigma\left(X_i \frac{dx_i}{dq_1} + Y_i \frac{dy_i}{dq_1} + Z_i \frac{dz_i}{dq_1}\right) = Q_1$$

$$\Sigma\left(X_i \frac{dx_i}{dq_2} + Y_i \frac{dy_i}{dq_2} + Z_i \frac{dz_i}{dq_2}\right) = Q_2 \text{ enz.} \qquad (12).$$

dan wordt de vergelijking (11):

$$\Sigma\, m_i (\ddot{x}_i\, \delta x_i + \ddot{y}_i\, \delta y_i + \ddot{z}_i\, \delta z_i) = Q_1\, \delta q_1 + Q_2\, \delta q_2 + \text{enz.} + \lambda\, \delta M + \mu\, \delta N + \text{enz.} \qquad (13).$$

Evenals nu in de vergelijking (7) X_i, Y_i, Z_i, de aan de assen evenwijdige componenten zijn der krachten, die op de verschillende punten van het stelsel werken, voor het eerste rechthoekige coördinatensysteem, evenzoo kunnen we nu Q_1, Q_2 enz. beschouwen als de algemeene componenten der krachten, die op het stelsel werken, genomen voor het nieuwe stelsel coördinaten of veranderlijken.

Het is duidelijk, dat Q_1, Q_2 enz. wederom onmiddellijk overgaan in de X_i, Y_i, Z_i, als we het aantal nieuwe variabelen nemen $3n$, en $q_1 = x_1$ $q_2 = x_2$ enz. stellen.

Wij hebben dus het tweede lid der vergelijking (7) een anderen vorm gegeven, en ons blijft nu nog de verandering van het eerste lid dezer vergelijking over. Men kan daartoe, zooals Lagrange heeft aangetoond, gemakkelijk geraken, en hierop berust werkelijk een der groote voordeelen dezer methode voor de behandeling van verschillende dynamische vraagstukken, doordat dit eerste lid zich laat uitdrukken door de partieële differentiaal-quotienten van de uitdrukking der halve levendige kracht,

$$T = \tfrac{1}{2}\, \Sigma\, m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) \qquad (14)$$

van het stelsel, wanneer we namelijk ook hierin de waarden van $\dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i$ in de nieuwe variabelen invoeren.

We vinden dan voor:

$$\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt} = \left(\frac{dx_i}{dt}\right) + \frac{dx_i}{dq_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{dx_i}{dq_2}\frac{dq_2}{dt} + \text{enz.} = \left(\frac{dx_i}{dt}\right)$$
$$+ \dot{q}_1 \frac{dx_i}{dq_1} + \dot{q}_2 \frac{dx_i}{dq_2} + \text{enz.}$$

$$\dot{y}_i = \frac{dy_i}{dt} = \left(\frac{dy_i}{dt}\right) + \frac{dy_i}{dq_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{dy_i}{dq_2}\frac{dq_2}{dt} + \text{enz.} = \left(\frac{dy_i}{dt}\right)$$
$$+ \frac{dy_i}{dq_1}\dot{q}_1 + \frac{dy_i}{dq_2}\dot{q}_2 + \text{enz.} \tag{15}$$

$$\dot{z}_1 = \frac{dz_i}{dt} = \left(\frac{dz_i}{dt}\right) + \frac{dz_i}{dq_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{dz_i}{dq_2}\frac{dq_2}{dt} + \text{enz.} = \left(\frac{dz_i}{dt}\right)$$
$$+ \frac{dz_i}{dq_1}\dot{q}_1 + \frac{dz_i}{dq_2}\dot{q}_2 + \text{enz.}$$

Hierin stellen $\left(\frac{dx_i}{dt}\right), \left(\frac{dy_i}{dt}\right), \left(\frac{dz_i}{dt}\right)$ voor de partieële differentiaal-quotienten van x_i, y_i, z_i, ten opzichte van t, voor zoover t in die uitdrukkingen van x_i, y_i, z_i in functie van t, q_1, q_2 enz. expliciet voorkomt. Na substitutie der waarden (15) in (14) vinden we:

$$T = \tfrac{1}{2}\Sigma_2 \left\{ (q_1 q_1)\,\dot{q}_1^2 + (q_1 q_2)\,\dot{q}_1\,\dot{q}_2 + (q_2 q_2)\,\dot{q}_2^2 + \text{enz.} + A) \right\} \tag{16}$$

waarin $(q_1 q_2)$, $(q_1 q_2)$, $(q_2 q_2)$ enz. voorstellen de coëfficiënten van $\dot{q}_1^2$ $\dot{q}_i\dot{q}_2$, enz. in de ontwikkeling van T. Het zijn bekende functiën van t, q_1, q_2 enz., die uit de voorwaarden van het vraagstuk kunnen bepaald worden. A stelt het geheel der termen voor, die ook t expliciet kunnen bevatten en waarin $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$ enz. slechts in den eersten graad voorkomen.

Die collectiefterm A vervalt, als x, y, z enz. uitgedrukt in q_1 q_2 enz. geen t bevatten. In dat geval is T eene homogeene kwadratische functie van $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$ enz. en al de coëfficiënten, die er in voorkomen, zijn uitsluitend bekende functiën van de nieuwe veranderlijken.

Na deze uitweiding gaan we over tot de vervorming van het eerste lid der vergelijking (7). Men kan dit schrijven:

$$\Sigma\, m_i(\ddot{x}_i\,\delta x_i + \ddot{y}_i\,\delta y_i + \ddot{z}_i\,\delta z_i) = \frac{d}{dt}\Sigma\, m_i\,(\dot{x}_i\,\delta x_i \pm \dot{y}_i\,\delta y_i + \dot{z}_i\,\delta z_i)$$

$$-\,\Sigma\, m_i\left(\dot{x}_i\,\delta\frac{dx_i}{dt} + \dot{y}_i\,\delta\frac{dy_i}{dt} + \dot{z}_i\,\delta\frac{dz_i}{dt}\right) =$$

$$\frac{d}{dt}\Sigma\, m_i\,(\dot{x}_i\,\delta x_i + \dot{y}_i\,\delta y_i + \dot{z}_i\,\delta z_i) - \Sigma\, m_i\,(\dot{x}^i\,\delta\dot{x}_i + \dot{y}_i\,\delta\dot{y}_i + \dot{z}_i\,\delta\dot{z}_i) \tag{17}$$

De tweede term van het tweede lid dezer vergelijking is klaarblijkelijk niet anders dan $\delta T = \delta\,\frac{1}{2}\,\Sigma\, m_i\,(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2)$ of, als T in de nieuwe variabelen is uitgedrukt:

$$\delta\,T = \frac{dT}{dq_1}\,\delta\,q_1 + \frac{dT}{dq_2}\,\delta\,q_2 + \text{enz.} + \frac{dT}{d\dot{q}_1}\,\delta\,\dot{q}_1 + \frac{dT}{d\dot{q}_2}\,\delta\,\dot{q}_2 + \text{enz.}, \tag{18}$$

daar bij het variëeren de tijd t als constant wordt beschouwd. De eerste term van het tweede lid levert na die invoering:

$$\frac{d}{dt}\,\Sigma\, m_i\,(\dot{x}_i\,\delta x_i + \dot{y}_i\,\delta y_i + \dot{z}_i\,\delta z_i) =$$

$$\frac{d}{dt}\,\Sigma\,\Bigg\{ m_i\,\dot{x}_i\left(\frac{dx_i}{dq_1}\delta q_1 + \frac{dx_i}{dq_2}\delta q_2 + \text{enz.}\right)$$
$$+\, m_i\,\dot{y}_i\left(\frac{dy_i}{dq_1}\delta q_1 + \frac{dy_i}{dq_1}\delta q_2 + \text{enz.}\right) \tag{19}$$
$$+\, m_i\,\dot{z}_i\left(\frac{dz_i}{dq_1}\delta q_1 + \frac{dz_i}{dq_2}\delta q_2 + \text{enz.}\right)\Bigg\}$$

of, daar uit de vergelijkingen (15) volgt:

$$\frac{d\dot{x}_i}{d\dot{q}_1} = \frac{dx_i}{dq_1}, \quad \frac{d\dot{x}_i}{d\dot{q}_2} = \frac{dx_i}{dq_2} \text{ enz.}$$

$$\frac{d\dot{y}_i}{d\dot{q}_1} = \frac{dy_i}{dq_1}, \quad \frac{d\dot{y}_i}{d\dot{q}_2} = \frac{dy_i}{dq_2} \text{ enz.}$$

zoo gaat de vergelijking (19) over in:

$$\frac{d}{dt} \Sigma\, m_i (\dot{x}_i \delta x_i + \dot{y}_i \delta y + \dot{z}_i \delta z_i) =$$

$$\frac{d}{dt} \Sigma\, m_i \left(\dot{x}_i \frac{d\dot{x}_i}{d\dot{q}_1} + \dot{y}_i \frac{d\dot{y}_i}{dq_1} + \dot{z}_i \frac{d\dot{z}_i}{d\dot{q}_1} \right) \delta q_1$$

$$+ m_i \left(\dot{x}_i \frac{d\dot{x}_i}{d\dot{q}_2} + \dot{y}_i \frac{d\dot{y}_i}{d\dot{q}_2} + \dot{z}_i \frac{d\dot{z}_i}{d\dot{q}_2} \right) \delta q_2 \text{ enz.}$$

$$\frac{d}{dt} \Sigma\, m_i (\dot{x}_i \delta x_i + \dot{y}_i \delta y_i + \dot{z}_i \delta z_i) =$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dT}{d\dot{q}_1} \delta q_1 + \frac{dT}{d\dot{q}_2} \delta q_2 + \text{enz.} \right) \qquad (20)$$

Derhalve vergel. (17) wordt:

$$\Sigma\, m_i (\ddot{x}_i \delta x_i + \ddot{y}_i \delta y_i + \ddot{z}_i \delta z_i) =$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dT}{d\dot{q}_1} \delta q_1 + \frac{dT}{d\dot{q}_2} \delta q_2 + \text{enz.} \right) - \delta T =$$

$$\delta q_1 \frac{d \frac{dT}{d\dot{q}_1}}{dt} + \delta q_2 \frac{d \frac{dT}{d\dot{q}_2}}{dt} + \text{enz.} + \frac{dT}{d\dot{q}_1} \delta \dot{q}_1 + \frac{dT}{d\dot{q}_2} \delta \dot{q}_2 + \text{enz.}$$

$$- \frac{dT}{d\dot{q}_1} \delta \dot{q}_1 - \frac{dT}{d\dot{q}_2} \delta \dot{q}_2 - \text{enz.} - \frac{dT}{dq_1} \delta q_1 - \frac{dT}{dq_2} \delta q_2 \text{ enz.}$$

of $\Sigma\, m_i (\ddot{x}_i \delta x_i + \ddot{y}_i \delta y_i + \ddot{z}_i \delta z_i) =$

$$\left(\frac{d \frac{dT}{d\dot{q}_i}}{dt} - \frac{dT}{dq_1} \right) \delta q_1 + \left(\frac{d \frac{dT}{d\dot{q}_2}}{dt} - \frac{dT}{dq_2} \right) \delta q_2 + \text{enz.}$$

Ten slotte hebben we de algemeene bewegingsvergelijking getransformeerd in:

$$\Sigma\left(\frac{d\frac{dT}{d\dot{q}_k}}{dt}-\frac{dT}{dq_k}\right)\delta q_k =$$

$$\Sigma\, Q_k\, \delta q_k + \lambda\, \Sigma \frac{dM}{dq_k}\delta q_k + \mu\, \Sigma_k \frac{dN}{dq_k}\delta q_k + \text{enz.}, \tag{21}$$

welke vergelijking terstond vervalt in de volgende vergekingen:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\frac{dT}{d\dot{q}_1}}{d_t} - \frac{dT}{dq_1} &= Q_1 + \lambda\frac{dM}{dq_1} + \mu\frac{dN}{dq_1} + \text{enz.}\\
\frac{d\frac{dT}{d\dot{q}_2}}{dt} - \frac{dT}{dq_2} &= Q_2 + \lambda\frac{dM}{dq_2} + \mu\frac{dN}{dq_2} + \text{enz.}\\
&\text{enz.}
\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Dergelijke vergelijkingen heeft men nu evenveel, als er nieuwe variabelen zijn ingevoerd. Deze zijn nu nog niet allen onafhankelijk van elkaar, maar nog door enkele voorwaarde-vergelijkingen: $M = 0$, $N = 0$ enz. gebonden. De vergel. (22) leveren, in verband met die voorwaardevergelijkingen, een voldoend aantal vergelijkingen ter bepaling van de nieuwe variabelen in functie van t, als men uit (22) de onbepaalde factoren λ, μ enz. elimineert.

De boven opgegeven vergelijkingen (21) stellen nu den tweeden vorm voor der bewegings-vergelijkingen van Lagrange [1]). Ze gelden voor geheel willekeurige variabelen, die men verkiest in te voeren, en zijn derhalve algemeener dan die, waarbij men uitsluitend van rechthoekige coördinaten gebruik maakt.

1) Lagrange, Mécan. Anal. Tome I. 3° édition p. 292.

§ 6. Zooals reeds boven is aangestipt, nemen de bewegings-vergelijkingen van Lagrange een bijzonder eenvoudigen vorm aan, als men het aantal nieuwe variabelen zoo klein mogelijk neemt. Men heeft dan met geen voorwaarde-vergelijkingen meer te doen; deze worden door de nieuwe variabelen identiek nul, en in de formule (21) vallen derhalve de termen $\Sigma \frac{dM}{dq_k} \delta q_k$, $\Sigma \frac{dN}{dq_k} \delta q_k$ enz. weg, en de vergelijkingen (22) worden dan eenvoudig:

$$\frac{d\frac{dT}{dq'_1}}{dt} - \frac{dT}{dq_1} = Q_1 \qquad \frac{d\frac{dT}{dq'_2}}{dt} - \frac{dT}{dq_2} = Q_2 \quad \text{enz.} \tag{23}$$

Zijn bijv. de voorwaarde-vergelijkingen van een vraagstuk, $x_1^2 + y_1^2 - a^2 = 0$ en $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - b^2 = 0$ dan kan men als nieuwe variabelen aannemen q_1 en q_2, en stellen:

$$x = a \operatorname{Sin} q_1, \quad y = a \operatorname{Cos} q_1$$
$$x_1 = a \operatorname{Sin} q_1 + b \operatorname{Sin} q_2, \quad y_1 = a \operatorname{Cos} q_1 + b \operatorname{Cos} q_2.$$

Bij invoering dezer nieuwe variabelen q_1 en q_2, worden, zooals men ziet, de voorwaarde-vergelijkingen identiek nul.

Voor het geval dat er eene krachtfunctie bestaat, dat derhalve X_i, Y_i, Z^i de partieële differentiaal-quotiënten eener enkele functie U van de coördinaten zijn, is:

$$X_i = \frac{dU}{dx_i}, \qquad Y_i = \frac{dU}{dy_i}, \qquad Z_i = \frac{dU}{dz_i}, \text{ dan wordt:}$$

$$Q_k = \Sigma \left(X_i \frac{dx_i}{dq_k} + Y_i \frac{dy_i}{dq_k} + Z_i \frac{dz_i}{dq_k} \right) =$$
$$\Sigma \left(\frac{dU}{dx_i} \frac{dx_i}{dq_k} + \frac{dU}{dy_i} \frac{dy_i}{dq_k} + \frac{dU}{dz_i} \frac{dz_i}{dq_k} \right) = \frac{dU}{dq_k} \tag{24}$$

en de vergelijkingen (23) krijgen den vorm:

$$\frac{d\,\frac{dT}{d\dot{q}_k}}{dt} - \frac{dT}{dq_k} = \frac{dU}{dq_k} \tag{25}$$

waarin k alle waarden van 1 tot en met het getal, dat aanwijst het aantal onafhankelijke variabelen, kan aannemen.

§ 7. Indien eenige der nieuwe variabelen, die voorkomen in de uitdrukking voor T, niet voorkomen in die voor U, dan wordt natuurlijk voor deze variabele de bewegings-vergelijking:

$$\frac{d\,\frac{dT}{d\dot{q}_k}}{dt} - \frac{dT}{dq_k} = 0,$$

en bevat T tevens van enkele variabelen niet q_k, maar wel $\dot{q}_k$, dan is dus ook $\frac{dT}{dq_k}$ nul, en de bewegings-vergelijking wordt eenvoudig:

$$\frac{d\,\frac{dT}{d\dot{q}_k}}{dt} = 0,$$

welke onmiddelijk een eerste integraal levert van den vorm: $\frac{dT}{d\dot{q}_k} = \text{constant}.$

Voorbeeld. Twee materiëele punten van de massa's m en m_1 zijn door een staaf zonder massa verbonden. Deze staaf is om een harer punten, dat vast is, beweegbaar in een horizontaal vlak. Het punt m kan vrij langs de staaf glijden, m_1 is op onveranderlijken afstand a van het vaste punt op de staaf bevestigd. Aan het punt m wordt eene zekere beweging medegedeeld. Wat zal de beweging van dit stelsel zijn, en wat is de weg van het punt m?

De kinetische energie van dit stelsel is:

$$T = \tfrac{1}{2}\left(m_1 a^2 \theta'^2 + mr^2 \theta'^2 + m\dot{r}^2\right), \text{ derhalve:}$$

$$\frac{dT}{d\theta} = 0, \quad \frac{dT}{dr} = mr\,\theta'^2, \quad \frac{dT}{d\theta'} = m_1 a^2 \theta' + mr^2 \theta', \quad \frac{dT}{d\dot{r}} = m\dot{r}.$$

De bewegings-vergelijkingen zijn dus (in dit geval bestaat er geen krachtfunctie):

$$\frac{d\dfrac{dT}{d\dot{r}}}{dt} - \frac{dT}{dr} = 0, \qquad m\ddot{r} - mr\,\theta'^2 = 0,$$

$$\frac{d\dfrac{dT}{d\theta'}}{dt} - \frac{dT}{d\theta} = 0, \qquad \frac{d\,(m_1 a^2 + mr^2)\,\theta'}{dt} = 0,$$

Deze laatste vergelijking levert nu onmiddellijk de eerste integraal:

$$(m_1 a^2 + mr_2)\,\theta' = B.$$

Dit is de integraal, welke ook door het principe der vlakken geleverd wordt.

Uit de boven opgegeven bewegings-vergelijkingen van dit vraagstuk is nu gemakkelijk af te leiden de differentiaal-vergelijking der baan van het punt m:

$$m\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = A\,(m_1 a^2 + mr^2)^2 - (m_1 a^2 + mr^2).$$

Het geval, dat we boven beschouwden, en dat we hier met een voorbeeld hebben toegelicht, zal zich steeds voordoen, wanneer men te doen heeft met stelsels, welker punten naar vaste centrums worden aangetrokken of afgestooten met krachten, afhankelijk van de afstanden dier punten tot die centrums, als men die afstanden en de hoeken, welke de voerstralen om die centrums doorloopen, als veranderlijken aanneemt. Zoo verkrijgt men bijv. bij de beweging van een materiëel punt om een vast aantrekkend centrum, volgens de Newtonsche wet, wederom de integraal, welke het principe der vlakken levert.

§ 8. Wanneer de functiën U, T en de voorwaarde-vergelijkingen onafhankelijk van den tijd zijn, dan geldt, zooals bekend is, het principe der levendige kracht, en we kunnen δq_k vervangen door dq_k, derhalve voor de virtueele verplaatsingen de werkelijke verplaatsingen nemen, die de punten in een tijd dt ondergaan. We kunnen aldus uit den tweeden vorm van Lagrange's bewegingsvergelijkingen (25) het principe der levendige kracht afleiden.

Telt men de vergelijkingen (25) op, na ze respectievelijk vermenigvuldigd te hebben met dq_1, dq_2, enz., dan komt, als men integreert:

$$\int \Sigma \left(\frac{d \frac{dT}{d\dot{q}_k}}{dt} - \frac{dT}{dq_k} \right) dq_k - U = \text{Const.}$$

Nu is: $\Sigma \dfrac{d \frac{dT}{d\dot{q}_k}}{dt} dq_k = \dfrac{d}{dt} \Sigma\, dq_k \dfrac{dT}{d\dot{q}_k} - \Sigma \dfrac{dT}{d\dot{q}_k} d\dot{q}_k$;

de voorgaande vergelijking wordt door deze substitutie:

$$\int \frac{d}{dt} \Sigma\, dq_k \frac{dT}{d\dot{q}_k} - \int \left(\frac{dT}{d\dot{q}_k} d\dot{q}_k + \frac{dT}{dq_k}\, dq_k \right) - U = C,$$

of:

$$\int \frac{d}{dt}\, \Sigma\, dq_k \frac{dT}{d\dot{q}_k} - T - U = C. \tag{26}$$

Maar nu is, zooals we boven (§ 5) reeds opgemerkt hebben, als T onafhankelijk is van t, T eene homogene kwadratische functie van $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$ enz., derhalve, volgens de bekende eigenschap der homogene functiën:

$$2T = \dot{q}_1 \frac{dT}{d\dot{q}_1} + \dot{q}_2 \frac{dT}{d\dot{q}_2} + \text{enz.}$$

$$= \Sigma \frac{dT}{d\dot{q}_k} \frac{dq_k}{dt} = \int \frac{d}{dt} \Sigma \left(\frac{dT}{d\dot{q}_k} \frac{dq_k}{dt} \right) dt = \int \frac{d}{dt} \Sigma \frac{dT}{d\dot{q}_k} dq_k,$$

waardoor de bovenstaande vergelijking (26) zich vereenvoudigt tot:

$$T - U = \text{Constant},$$

welke de bekende vergelijking van het principe de levendige kracht is.

§ 9. De tweede vorm der bewegings-vergelijkingen van Lagrange leent zich bijzonder tot het in vergelijking brengen van verschillende vraagstukken, en levert, indien men de variabelen met oordeel kiest, in vele gevallen de differentiaal-vergelijkingen in een vorm, geschikt voor de integratie of gemakkelijk daartoe te brengen.

De grootste moeielijkheid, die zich hierbij voordoet, is gelegen in het bepalen van de waarde van T en van de algemeene krachtscomponenten Q_k, in de nieuwe variabelen uitgedrukt, of, indien er eene krachtsfunctie bestaat, het bepalen van deze.

Het is daarom misschien niet onbelangrijk, omtrent die waarden der algemeene krachts-componenten Q_k eene enkele opmerking te maken, en eens na te gaan, wat ze eigenlijk voorstellen, omdat we daardoor in vele gevallen die waarden onmiddellijk kunnen neerschrijven, en anders vrij omslachtige berekeningen kunnen besparen.

Vooreerst hadden we toch:

$$Q_k = \Sigma \left(X_i \frac{dx_i}{dq_k} + Y_i \frac{dy_i}{dq_k} + Z_i \frac{dz_i}{dq_k} \right);$$

vervolgens kregen we in de plaats der uitdrukking:

$$\Sigma \left(X_i \, \delta x_i + Y_i \, \delta y_i + Z_i \, \delta z_i \right)$$

in de formule (7) eene uitdrukking $Q_1 \, \delta q_1 + Q_2 \, \delta q_2 +$ enz. in de vergelijking (13), toen we van variabelen veranderden.

De eerste uitdrukking $\Sigma \, (X_i \, \delta x_i + Y_i \, \delta y_i + Z_i \, \delta z_i)$ stelde voor den virtueelen arbeid der krachten X_i, Y_i, Z_i, welke op de verschillende punten van het stelsel werken, als ze hunne aangrijpingspunten over de virtueele wegen dx_i, δy_i, δz_i verplaatsen.

Evenzoo moet derhalve de uitdrukking $Q_1 \, \delta q_1 + Q_2 \, \delta q_2 +$ enz. voorstellen een even grooten arbeid, dien de algemeene krachtscomponenten verrichten, als ze over de virtueele verplaatsingen der aangrijpingspunten δq_1, δq_2 werken, of als de veranderlijken eene variatie of virtueele verandering δq_1, δq_2 enz. ondergaan.

Stellen nu de variabelen q_1, q_2 enz. hoeken voor, die het stelsel om verschillende assen doorloopt, dan moeten natuurlijk Q_1, Q_2 enz. de krachtscomponenten, die met deze variabelen overeenkomen, voorstellen het moment van zekere kracht ten opzichte van de as, waarom q_1, q_2 enz. wordt beschreven. Deze kracht en dit moment zijn in enkele gevallen onmiddellijk te bepalen.

Heeft men bijv. een enkel punt, waarop krachten X, Y, Z werken, kan dit punt slechts bewegen om zekere as, en noemen we q den hoek om die as doorloopen, dan is $X \, \delta x + Y \, \delta y + Z \, \delta z$ de virtueele arbeid van X, Y en Z; deze moet derhalve gelijk zijn aan $Q_1 \, \delta q_1$. Q_1 is dan het moment der krachten X, Y en Z of van hare resultante ten opzichte dier as.

Nog in eenige andere gevallen is het mogelijk de waarden dier momenten onmiddellijk aan te geven, zooals bij de behandeling van enkele vraagstukken wel blijken zal.

Stelt echter de nieuwe variabele eene lijn voor, dan is de beweging van het aangrijpingspunt der algemeene krachtscomponente geen draaiende maar een glijdende; dan stelt de Q_k, die daarbij behoort, ook geen moment maar eene kracht voor, en dan is dus, zooals behoort, $Q_k \delta q_k$ wederom de virtueele arbeid door Q_k verricht, als het aangrijpingspunt over den lineairen weg δq_k wordt verplaatst.

Bij de toepassing der bovenstaande theorie op enkele vraagstukken zal het hier opgemerkte duidelijker worden. We zullen zien, dat men daardoor in de meeste gevallen veel gemakkelijker tot de bepaling der algemeene krachtscomponenten kan komen, dan dat we, zooals anders noodig zou zijn, in de uitdrukking voor Q_k,

$$Q_k = \Sigma \left(X_i \frac{dx_i}{dq_k} + Y_i \frac{dy_i}{dq_k} + Z_i \frac{dz_i}{dq_k} \right)$$

de waarden van $\frac{dx_i}{dq_k}$, $\frac{dy_i}{dq_k}$, $\frac{dz_i}{dq_k}$ in de nieuwe variabelen uitgedrukt, substitueerden.

§ 10. Beschouwen we bijv. vooreerst eens de beweging van een materiëel punt, en nemen we polaire coördinaten (r, θ, ϕ) aan. Op dat punt werken de volgende krachten: A in de richting van den voerstraal, B loodrecht op vlak $P\,O\,a$ en C loodrecht op den voerstraal in het vlak $P\,O\,a$. (fig. 1).

We zullen dan voor de algemeene krachtscomponenten voor de drie onafhankelijke veranderlijken r, θ, ϕ vinden:

$$R = A, \qquad \Theta = C r, \qquad \Phi = B r \operatorname{Sin} \theta.$$

B en C brengen geen verandering in de lengte van den voerstraal te weeg; de virtueele arbeid van B en C, als r om δr varieert, is derhalve nul, die van A is $A \delta r$; bijgevolg is A de algemeene krachtscomponente voor de veranderlijke r.

Evenzoo, als θ en ϕ om $\delta\theta$, $\delta\phi$ variëeren, krijgen we voor de momenten van A, B, C om de assen, waarom θ en ϕ beschreven worden, $C r$ en $B r \operatorname{Sin} \theta$.

Verifiëeren we nu deze uitkomsten, door op de gewone wijze de algemeene krachtscomponenten uit te rekenen.

We moeten daartoe A, B, C ontbinden volgens de assen en de coördinaten van P (x, y, z) uitdrukken in de nieuwe veranderlijken r, θ, ϕ. We vinden daarvoor dan:

$$\begin{array}{llll} X, & A \operatorname{Cos} \theta \quad , & 0 \quad , & - C \operatorname{Sin} \theta \quad , \\ Y, & A \operatorname{Sin} \theta \operatorname{Cos} \phi, & - B \operatorname{Sin} \phi, & + C \operatorname{Cos} \theta \operatorname{Cos} \phi, \\ Z, & A \operatorname{Sin} \theta \operatorname{Sin} \phi, & + B \operatorname{Cos} \phi, & + C \operatorname{Cos} \theta \operatorname{Sin} \phi, \end{array}$$

$$x = r \operatorname{Cos} \theta, \qquad y = r \operatorname{Sin} \theta \operatorname{Cos} \phi, \qquad z = r \operatorname{Sin} \theta \operatorname{Sin} \phi,$$

en als de algemeene krachtscomponente voor de variabele r

$$R = X \frac{dx}{dr} + Y \frac{dy}{dr} + Z \frac{dz}{dr} = (A \operatorname{Cos} \theta - C \operatorname{Sin} \theta) \operatorname{Cos} \theta +$$
$$(A \operatorname{Sin} \theta \operatorname{Cos} \phi - B \operatorname{Sin} \phi + C \operatorname{Cos} \theta \operatorname{Cos} \phi) \operatorname{Sin} \theta \operatorname{Cos} \phi +$$
$$(A \operatorname{Sin} \theta \operatorname{Sin} \phi + B \operatorname{Cos} \phi + C \operatorname{Cos} \theta \operatorname{Sin} \phi) \operatorname{Sin} \theta \operatorname{Sin} \phi,$$

welke na eene eenvoudige herleiding geeft:

$$R = A$$

Evenzoo vinden we voor de variabele Θ,

$$\Theta = X\frac{dx}{d\theta} + Y\frac{dy}{d\theta} + Z\frac{dz}{d\theta} = -r \operatorname{Sin}\theta\,(A \operatorname{Cos}\theta - C \operatorname{Sin}\theta) +$$
$$r \operatorname{Cos}\theta \operatorname{Cos}\phi\,(A \operatorname{Cos}\phi \operatorname{Sin}\theta - B \operatorname{Sin}\phi + C \operatorname{Cos}\theta \operatorname{Cos}\phi) +$$
$$r \operatorname{Cos}\theta \operatorname{Sin}\phi\,(A \operatorname{Sin}\theta \operatorname{Sin}\phi + B \operatorname{Cos}\phi + C \operatorname{Cos}\theta \operatorname{Sin}\phi),$$

$\Theta = Cr.$ en ten slotte voor ϕ,

$$\Phi = X\frac{dx}{d\phi} + Y\frac{dy}{d\phi} + Z\frac{dz}{d\phi} = -r \operatorname{Sin}\theta \operatorname{Sin}\phi\,(A \operatorname{Cos}\phi \operatorname{Sin}\theta$$
$$- B \operatorname{Sin}\phi + C \operatorname{Cos}\phi \operatorname{Cos}\theta) + r \operatorname{Sin}\theta \operatorname{Cos}\phi\,(A \operatorname{Sin}\theta \operatorname{Sin}\phi +$$
$$B \operatorname{Cos}\phi + C \operatorname{Cos}\theta \operatorname{Sin}\phi),$$

$\Phi = B\,r \operatorname{Sin}\theta.$

Zijn verder: $\frac{dr}{dt} = \dot{r}$, $r\frac{d\theta}{dt} = r\dot{\theta}$, $r \operatorname{Sin}\theta \frac{d\phi}{dt} = r\dot{\phi} \operatorname{Sin}\theta$ de drie langs de drie loodrecht op elkaar staande richtingen genomen componenten der snelheid van het punt P, dan is de kinetische energie:

$$T = \tfrac{1}{2} m\,(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \operatorname{Sin}^2\theta\,\dot{\phi}^2),$$

waaruit wederom $\frac{dT}{dr}, \frac{dT}{d\dot{r}}, \frac{dT}{d\theta}, \frac{dT}{d\dot{\theta}}, \frac{dT}{d\phi}, \frac{dT}{d\dot{\phi}}$ zijn af te leiden, en zoo komen we ten laatste tot de drie differentiaal-vergelijkingen der beweging:

$$m\left\{\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \operatorname{Sin}^2\theta\frac{d\phi^2}{dt}\right)\right\} = A$$

$$m\left(\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right) - r^2 \operatorname{Sin}\theta \operatorname{Cos}\theta\frac{d\phi^2}{dt^2}\right) = Cr$$

$$m\frac{d}{dt}\left(r^2 \operatorname{Sin}^2\theta\frac{d\phi}{dt}\right) = B\,r \operatorname{Sin}\theta.$$

Uit deze laatste vergelijkingen kunnen we natuurlijk weder zeer gemakkelijk de bijzondere gevallen van de beweging van een punt in een plat vlak voor pool-coördinaten afleiden.

§ 11. Twee materiëele punten, waarvan de massa's m en m_1 zijn, zijn door een onrekbaar koord zonder massa verbonden; m kan zich slechts bewegen over een plat vlak, dat met een verticale lijn een hoek α maakt; m_1 beweegt zich ook over een plat vlak, dat met de verticale lijn een hoek β maakt. Het koord gaat door een zeer klein ringetje, dat op de gemeene doorsnede der twee vlakken is aangebracht. Welke is de beweging der beide punten?

De coördinaten der beide punten voor rechthoekige assen zijn zes in getal; voorwaarde-vergelijkingen, waaraan die coördinaten moeten voldoen, zijn er drie, namelijk de twee vergelijkingen der vlakken en de uitdrukking, dat het koord van constante lengte is. Men moet dus het vraagstuk kunnen terugbrengen tot een met drie onafhankelijke veranderlijken, en het ligt voor de hand hiervoor te nemen: 1°. de afstand van m tot het ringetje; 2°. de hoeken, die de voerstralen van elk der punten maken met een vaste lijn in elk der vlakken, bijv. met de gemeene doorsnede der vlakken of met eene lijn, loodrecht op die doorsnede. Doen we dit laatste. Het is duidelijk, dat deze variabelen onafhankelijk van elkaar zijn en, als ze bekend waren, de toestand van het stelsel volkomen zouden bepalen.

Voor de coördinaten x, y, z en x_1, y_1, z_1, van m en m_1 vinden we dus:

$$x = r \operatorname{Cos} \theta \operatorname{Sin} \alpha \qquad x_1 = (l - r) \operatorname{Cos} \phi \operatorname{Sin} \beta$$
$$y = r \operatorname{Sin} \theta \qquad y_1 = (l - r) \operatorname{Sin} \phi$$
$$z = r \operatorname{Cos} \theta \operatorname{Cos} \alpha \qquad z_1 = (l - r) \operatorname{Cos} \phi \operatorname{Cos} \beta,$$

als r de voerstraal van m is, l de lengte van het koord en ϕ en θ de boven bedoelde hoeken voorstellen.

De krachten, die in dit stelsel werken, reduceeren zich tot de zwaartekracht en zijn $Z = mg$, $Z_1 = m_1 g$.

In dit geval is nu eene krachtfunctie U aanwezig, en wel is

$$\delta U = X \delta x + Y \delta y + Z \delta z = mg \delta z + m_1 g \delta z_1$$
$$= mg\, d\,(r \operatorname{Cos} \theta \operatorname{Cos} \alpha) + m_1 g\, d\,((l-r) \operatorname{Cos} \phi \operatorname{Cos} \beta.)$$
$$U = mgr \operatorname{Cos} \theta \operatorname{Cos} \alpha + m_1 g\,(l-r) \operatorname{Cos} \phi \operatorname{Cos} \beta,$$

als we de constante der integratie nul nemen.

Voor de algemeene krachtscomponenten krijgen we verder:

$$\frac{dU}{dr} = mg \operatorname{Cos} \theta \operatorname{Cos} \alpha - m_1 g \operatorname{Cos} \phi \operatorname{Cos} \beta.$$

$$\frac{dU}{d\theta} = - mgr \operatorname{Cos} \alpha \operatorname{Sin} \theta$$

$$\frac{dU}{d\phi} = - m_1 g\,(l-r) \operatorname{Cos} \phi \operatorname{Sin} \phi.$$

De kinetische energie wordt nu blijkbaar:

$$T = \tfrac{1}{2} \left\{ m\,(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + m_1\,(\,(l-r)^2 \dot{\phi}^2 + \dot{r}^2) \right\}$$
$$= \tfrac{1}{2}(m + m_1)\,\dot{r}^2 + \tfrac{1}{2} m\dot{r}^2 \dot{\theta}^2 + \tfrac{1}{2} m_1 (l-r)^2 \dot{\phi}^2$$

derhalve:

$$\frac{dT}{dr} = mr\dot{\theta}^2 - m(l-r)\dot{\phi}^2, \qquad \frac{dT}{d\theta} = 0, \qquad \frac{dT}{d\phi} = 0$$

$$\frac{dT}{d\dot{r}} = (m + m_1)\,\dot{r}, \qquad \frac{dT}{d\dot{\theta}} = mr^2 \dot{\theta}, \qquad \frac{dT}{d\dot{\phi}} = m_1\,(l-r)^2 \dot{\phi};$$

en de bewegings-vergelijkingen zijn dus:

$$mr^2 \ddot{\theta} + 2mr\dot{\theta}\dot{r} = - mgr \operatorname{Cos} \alpha \operatorname{Sin} \theta$$
$$m_1 (l-r)^2 \ddot{\phi} - 2m_1 (l-r)\dot{\phi}\dot{r} = - m_1 g\,(l-r) \operatorname{Cos} \beta \operatorname{Sin} \phi$$
$$(m + m_1)\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + m_1 (l-r)\dot{\phi}^2 =$$
$$mg \operatorname{Cos} \theta \operatorname{Cos} \alpha - m_1 g \operatorname{Cos} \phi \operatorname{Cos} \beta.$$

§ 12. Zooals deze vergelijkingen hier zijn opgegeven, zijn ze niet onmiddellijk op te lossen. We zullen ons daarom bepalen tot het onderzoek van enkele bijzondere gevallen, waarbij we omtrent de waarden van α en β, ϕ en θ zekere onderstellingen zullen maken:

1°. Is $\alpha = 0$, $\beta = 0$ en nemen we ϕ en θ constant aan, dan is, daar $\dot\theta$, $\dot\phi$, $\ddot\theta$, $\ddot\phi$ nul zijn,

$$(m + m_1)\ddot r = g\,(m \operatorname{Cos}\theta - m_1 \operatorname{Cos}\phi).$$

Zijn nu ϕ en θ nul, dan heeft men in

$$\ddot r = g\,\frac{m - m_1}{m + m_1}$$

de bekende vergelijking voor de beweging van een materiëel punt.

2°. Evenzoo vinden als $\alpha = 0, \beta = 90°$, θ en ϕ constant zijn:

$(m + m_1)\ddot r = gm \operatorname{Cos}\theta$, en als $\theta = 0$ is:

$$\ddot r = g\,\frac{m}{m + m_1}$$

3°. Is $\alpha = 90°$ en $\beta = 90°$, en nemen we ϕ en θ variabel, dan krijgen de bewegings-vergelijkingen den volgenden vorm, dien we in enkele gevallen geheel kunnen oplossen:

$$mr^2\ddot\theta + 2mr\dot r\dot\theta = -\,mgr \operatorname{Cos}\alpha \operatorname{Sin}\theta$$

$$m_1(l-r)^2\ddot\phi - 2m_1(l-r)\dot r\dot\phi = -\,m_1 g\,(l-r) \operatorname{Cos}\beta \operatorname{Sin}\phi$$

$(m + m_1)\ddot r - mr\dot\theta^2 + m_1(l-r)\dot\phi^2 = mg \operatorname{Cos}\theta \operatorname{Cos}\alpha - m_1 g$ $\operatorname{Cos}\phi \operatorname{Cos}\beta$;

waaruit:

$$mr^2\ddot\theta + 2mr\dot r\dot\theta = 0 \text{ of } d.(mr^2\dot\theta) = 0 \text{ of } r^2\dot\theta = \text{Const.}$$

en $$(l-r)^2\dot\phi = C_1$$

Dit zijn dus reeds twee eerste integralen der bewegings-vergelijkingen. De derde vergelijking wordt, als we van de gevonden integralen gebruik maken:

$$(m + m_1)\ddot r - mr\dot\theta^2 + m_1(t-r)\dot\phi^2 = 0$$

$$(m + m_1)\ddot r - m\frac{C^2}{r^3} + m_1\frac{C_1^2}{(l-r)^3} = 0.$$

Een eerste integraal van deze is:

$$(m + m_1)\,\dot{r}^2 + \frac{C^2}{r^2}\,m + \frac{C_1{}^2}{(l-r)^2}\,m_1 = A.$$

Wil men nu de vergelijking van den weg van het punt m vinden, dan kunnen we uit de laatste vergelijking, door middel van $r^2\,\dot{\theta} = C$, dt elimimeeren en krijgen dus de differentiaal-vergelijking:

$$(m + m_1)\,\frac{dr^2}{d\theta^2}\,\frac{C^2}{r^4} + \frac{C^2}{r^2}\,m + \frac{C_1{}^2}{(l-r)^2}\,m_1 = A,$$

welke vergelijking, als C_1 nul is, gemakkelijk kan opgelost worden. Alsdan is de beweging van m_1 gericht naar het vaste punt. Men vindt zoo doende:

$$(m + m_1)\,\frac{dr^2}{d\theta^2}\,\frac{1}{r^4} + \frac{m}{r^2} = \frac{A}{C^2}, \quad \text{of}$$

$$\left(\frac{d\,\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2 + \frac{m}{m + m_1}\left(\frac{1}{r}\right)^2 = \frac{A}{C^2}\,\frac{1}{(m + m_1)}$$

waaruit men vrij gemakkelijk de integraal afleidt:

$$r = C\sqrt{\frac{m}{A}}\ \text{secans}\sqrt{\frac{m}{m + m_1}}\ \theta + \text{const.}$$

Het hier behandelde geval is ook een bijzonder geval van een vraagstuk, voorkomende op bl. 126 van het tweede deel van JULLIEN (Problèmes de Mécanique rationnelle). De daar gevolgde methode, om tot het opstellen der bewegingsvergelijking te geraken, is echter eene geheel de hier gebezigde.

Niet minder verdient het volgende geval onze belangstelling:

4°. Nemen we $\alpha = 90°$,

$\beta = 0$, Φ constant en wel nul, dan worden de bewegings-vergelijkingen:

$$m\frac{d(r^2\dot{\theta})}{dt} = 0 \text{ en } (m + m_1)\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = -m_1 g.$$

De beweging van m is die van een materiëel punt naar een vast centrum, getrokken door eene kracht, die daarvan uitgaat. De wet dier aantrekking, of de spanning van het koord, dat aan die kracht gelijk is, is merkwaardig.

Bij een zoodanige beweging van een punt, aangedaan door eene kracht van het centrum uitgaande, is de componente der totale versnelling in de richting van den straal, zooals bekend is:

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

en derhalve de kracht, welke deze versnelling aan eene massa m kan geven:

$$m\left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right)$$

en dit is gelijk aan de spanning S van het koord.

Uit de bewegings-vergelijkingen volgt echter dat:

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -m_1 g - \frac{m_1}{m+m_1} r\dot{\theta}^2 = -\frac{m_1}{m+m_1}(g + r\dot{\theta}^2)$$

en daar $m\dfrac{d(r^2\dot{\theta})}{dt} = 0$ of $mr^2\dot{\theta} =$ constant is, zoo is de spanning van het koord:

$$S = \frac{m_1 m}{m + m_1}\left(g + \frac{c^2}{m^2 r^3}\right).$$

Het bijzondere geval, dat m door een stoot eene beweging in eene cirkelvormige baan krijgt, en m_1 in rust gelaten wordt, is van belang, omdat dan de beweging van m stabiel is, en evenzoo m_1 in een stabielen evenwichtstoestand verkeert. De stoot, dien m ontvangt, moet voor dit geval klaarblijkelijk loodrecht op den voerstraal gericht zijn, en aan dit punt eene snelheid v geven, die men aldus bepaalt:

$$m_1 g = S = \frac{m_1 m}{m + m_1}\left(g + \frac{c^2}{m^2 r^3}\right)$$

en daar $c = mr^2 \dot{\theta} = mrv$ is,

zoo is: $(m + m_1) g = mg + \frac{v^2}{r} m$ of $v = \sqrt{\frac{m_1}{m} gr}$

Dit resultaat had men ook kunnen verkrijgen uit de overweging, dat de middelpuntvliedende kracht bij de cirkelvormige beweging van m natuurlijk gelijk moest wezen aan de spanning van het koord, dat is, aan $m_1 g$, derhalve:

$$m_1 g = \frac{mv^2}{r}, \text{waaruit } v = \sqrt{\frac{m_1}{m} gr}$$

§ 13. Een vast lichaam kan zich om een vaste as bewegen en draagt een tweede as, waarom een tweede lichaam zich bewegen kan. Wat is de beweging van dit stelsel?

1°. Geval. Nemen we aan, dat de beide assen evenwijdig zijn. Zijn Φ en ψ de hoeken, die respectievelijk gemaakt worden met een vast vlak door, een vlak gaande door beide assen en een vlak door de tweede as en het zwaartepunt van het tweede lichaam gebracht, dan is het duidelijk, dat deze beide hoeken, die onafhankelijk van elkaar zijn, den stand van het stelsel volkomen bepalen. Verder is a de afstand der beide assen en b de afstand van het zwaartepunt van het tweede lichaam B, tot de tweede as (fig. 2).

De snelheid van het zwaartepunt van B is de resultante der beide snelheden $a\dot{\phi}$ en $b\dot{\psi}$, welke samen een hoek $\psi-\phi$ insluiten. Het kwadraat dier snelheid is dus:
$a^2 \dot{\phi}^2 + 2ab\dot{\phi}\,\dot{\psi}\,\mathrm{Cos}\,(\phi-\psi) + b^2 \dot{\psi}^2$; en als nu m en m_1 de massa's der beide lichamen voorstellen, dan is de kinetische energie van dit stelsel:

$$T = \tfrac{1}{2}\left\{ mj^2\,\dot{\phi}^2 + m_1\,(a^2\dot{\phi}^2 + 2\,ab\,\dot{\phi}\,\dot{\psi}\,\mathrm{Cos}(\psi-\phi) + (b^2+k^2)\,\dot{\psi}^2) \right\}$$

als j de traagheidsstraal van het eerste lichaam A om de eerste as, en k die van B om eene daaraan evenwijdige as door het zwaartepunt voorstelt.

Uit de waarde van T leidt men af:

$$\frac{dT}{d\dot{\phi}} = mj^2\,\dot{\phi} + m_1\,a^2\,\dot{\phi} + m_1\,ab\,\mathrm{Cos}\,(\psi-\phi)\,\dot{\psi}$$

$$\frac{dT}{d\dot{\psi}} = m_1\,ab\,\mathrm{Cos}\,(\psi-\phi)\,\dot{\phi} + m_1\,(b^2+k^2)\,\dot{\psi}$$

$$\frac{dT}{d\phi} = -\,\frac{dT}{d\psi} = m_1\,ab\,\mathrm{Sin}\,(\psi-\phi)\,\dot{\phi}\,\dot{\psi}.$$

Daar nu verder, zoo er uitwendige krachten op dit stelsel werken, deze, zooals we gezien hebben, tot algemeene krachts-componenten momenten van koppels Φ en Ψ geven op A en B om de eerste en tweede as werkende, zoo worden de bewegings-vergelijkingen de volgende:

$$(mj^2+m_1 a)\,\ddot{\phi} + m_1\,ab\,\frac{d\,(\dot{\psi}\,\mathrm{Cos}(\psi-\psi))}{dt} - m_1\,ab\,\mathrm{Sin}(\psi-\phi)\,\dot{\psi}\dot{\phi} = \Phi,$$

$$m_1\,ab\,\frac{d\,(\dot{\phi}\,\mathrm{Cos}\,(\psi-\phi))}{dt} + m_1\,(b^2+k^2)\,\ddot{\psi} + m_1\,ab\,\mathrm{Sin}(\dot{\psi}-\phi)\,\dot{\psi}\dot{\phi} = \Psi.$$

Nemen we nu eens aan, dat de beide assen horizontaal zijn, en dat alleen de zwaartekracht op dit stelsel werkt, dan is de krachtfunctie U klaarblijkelijk niet anders dan

$U = \int \Sigma \, Z \, dz$, als de Z as in de richting der zwaartekracht gericht is, en derhalve:

$$U = \int mg \, d\,(h \operatorname{Cos} \phi) + \int m_1 g \, d(a \operatorname{Cos}(\phi + \alpha) + b \operatorname{Cos}(\psi + \alpha))$$

$$U = mg\,h \operatorname{Cos} \phi + m_1 g\, a \operatorname{Cos}(\phi + \alpha) + m_1 g\, b \operatorname{Cos}(\psi + \alpha),$$

als namelijk h de afstand is van het zwaartepunt van het eerste lichaam tot de eerste as en α den hoek voorstelt, tusschen het vlak door de beide assen en het vlak door de eerste as en het zwaartepunt van het eerste lichaam.

Nemen we verder ϕ of den stand van het vaste vlak zoodanig aan, dat $\phi = 0$ is als het zwaartepunt van A loodrecht beneden de eerste as is (fig. 2).

Uit de waarde van U volgt:

$$\Phi = \frac{dU}{d\phi} = -\, mgh \operatorname{Sin} \phi - m_1 ga \operatorname{Sin}(\phi + \alpha),$$

$$\Psi = \frac{dU}{d\psi} = -\, m_1 g\, b \operatorname{Sin}(\psi + \alpha).$$

De bewegings-vergelijkingen zijn nu:

$$(mj^2 + m_1 a^2)\, \ddot{\phi} + m_1 ab \frac{d(\dot{\psi} \operatorname{Cos}(\psi - \phi))}{dt} - m_1 ab \operatorname{Sin}(\psi - \phi)\, \dot{\psi}\, \dot{\phi}$$
$$-\, mgh \operatorname{Sin} \phi + m_1 ga \operatorname{Sin}(\phi + \alpha) = 0,$$

$$m_1 ab \frac{d\,(\dot{\phi} \operatorname{Cos}(\psi - \phi))}{dt} + m_1 (b^2 + k^2)\, \ddot{\psi} + m_1\, ab \operatorname{Sin}(\psi - \phi)\, \dot{\psi}\, \dot{\phi}$$
$$+\, g m_1\, b \operatorname{Sin}(\psi + \alpha) = 0.$$

Werken er op dit stelsel geen uitwendige krachten, dan zijn Φ en Ψ nul, en we verkrijgen door optelling der beide vergelijkingen en integratie de eerste integraal:

$$(mj^2 + m_1\, a^2)\, \dot{\phi} + m_1\, ab\, (\dot{\psi} + \dot{\phi}) \operatorname{Cos}(\psi - \phi) + m_1\, (b^2 + k^2)\, \dot{\psi} = C.$$

Ditzelfde vinden we ook, als $\Psi + \Phi$ nul is.

Deze uitdrukking stelt nu voor het moment der hoeveelheid van beweging van het geheele stelsel, want het is de som van $mj^2 \dot{\phi}$,

$m_1 a\dot{\phi} (a + b \operatorname{Cos} (\psi - \phi))$, $m_1 b\dot{\psi} (b + a \operatorname{Cos} (\psi - \phi))$ en $m_1 k^2 \dot{\psi}$,

welke zijn de momenten der hoeveelheden van beweging van het eerste lichaam om de eerste as, van het tweede lichaam (de massa in het zwaartepunt vereenigd) om die eerste as en van de draaiende beweging van het tweede lichaam om eene as door het zwaartepunt. Die som is nu constant.

In dit geval nu kan men de oplossing van het vraagstuk tot de kwadraturen terug brengen; want uit de laatste vergelijking kan men afleiden $\dot{\psi}$ en $\dot{\phi}$ uitgedrukt in $\psi - \phi$ en $\dot{\psi} - \dot{\phi}$, en wel:

$$\dot{\phi} = \frac{C + \left\{ m_1 (b^2 + k^2) + m_1 ab \operatorname{Cos} (\psi - \phi) \right\} (\dot{\psi} - \dot{\phi})}{mj^2 + m_1 a^2 + m_1 ab \operatorname{Cos} (\psi - \phi)},$$

$$\dot{\psi} = \frac{C + \left\{ mj^2 + m_1 a^2 + m_1 ab \operatorname{Cos} (\psi - \phi) \right\} (\dot{\psi} - \dot{\phi})}{mj^2 + m_1 a^2 + m_1 ab \operatorname{Cos} (\psi - \phi)},$$

welke waarden in T gesubstitueerd, eene vergelijking geven in $\dot{\phi} - \dot{\psi}$, $\psi - \phi$ en constanten; daar, in het geval er geen krachten op het stelsel werken, T constant is. Deze laatste vergelijking en die van de momenten der hoeveelheden van beweging zijn nu voldoende ter bepaling van ϕ en ψ in functie van t. Onderzoeken we thans een paar bijzondere gevallen van dit vraagstuk.

Nemen we aan, dat beide assen horizontaal zijn, dat alleen de zwaartekracht op het stelsel werkt, en dat de hoeken ψ en ϕ zeer klein zijn, voorts, dat hoek α nul is, en de beide lichamen zich reduceeren tot materiëele punten van de massa's m en m_1, dan wordt bij dit bewegingsgeval $j = h$ en $k = 0$, en we hebben dan te doen met de beweging van twee materiëele punten m en m_1, waarvan m op een staaf zonder massa, die in zeker punt is opgehangen, bevestigd is, en wel op een afstand h van dit vaste punt; terwijl aan het andere eind van die staaf beweegbaar verbonden is eene tweede staaf zonder massa, welke op een afstand b van dit einde een tweede punt m_1 draagt.

Daar we in dit geval $\psi - \phi$ nul kunnen nemen en $\dot{\phi}^2$ zoowel als $\dot{\psi}^2$ kunnen verwaarloozen, zoo reduceeren zich de bewegings-vergelijkingen tot:

$$
\begin{aligned}
(mh^2 + m_1 a^2)\,\ddot{\phi} + m_1 ab\,\ddot{\psi} + mgh\,\phi + m_1 ag\,\phi &= 0 \\
m_1 b\,(a\ddot{\phi} + b\ddot{\psi} + g\psi) &= 0
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

of tot:

$$
\begin{aligned}
mh^2\,\ddot{\phi} + g\,(mh + m_1 a)\,\phi - g a m_1\,\psi &= 0 \\
a\ddot{\phi} + b\ddot{\psi} + g\psi &= 0.
\end{aligned}
\qquad (2)
$$

Tot dit geval laat zich het algemeene geval gemakkelijk terugbrengen; want voor de onderstelling, die we boven aannamen, waren de bewegings-vergelijkingen:

$$
\begin{aligned}
(mj^2 + m_1 a^2)\,\ddot{\phi} + m_1 ab\,\ddot{\psi} + (mh + m_1 a)\,g\,\phi &= 0 \\
m_1 ab\,\ddot{\phi} + m_1 (b^2 + k^2)\,\ddot{\psi} + gm_1 b\,\psi &= 0.
\end{aligned}
$$

We hebben dus nu maar te bepalen de massa's M en M_1 en op welke afstanden H, A en B deze geplaatst moeten worden, opdat de beweging van het stelsel van twee lichamen om twee parallelle horizontale assen, waarvan de eerste vast is, overeenkome met die van twee materiëele punten, zooals we boven beschouwden. We kunnen die waarden bepalen uit vijf vergelijkingen:

$$M\,H^2 + M_1\,A^2 = mj^2 + m_1\,a^2.$$
$$M\,H + M_1\,A = mh + m_1\,a.$$
$$M_1\,A\,B = m_1\,ab.$$
$$M_1\,B^2 = m_1\,(b^2 + k^2)$$
$$M_1\,B = m_1\,b.$$

waaruit: $B = \frac{b^2 + k^2}{b}$, $A = a$, $M_1 = \frac{m_1\,b^2}{b^2 + k^2}$ enz.

De simultane vergelijkingen (1) of (2) zijn nu volgens de bekende methode gemakkelijk op te lossen. Stel bijv. een particuliere integraal $\phi = e^{t\sqrt{-r}}$ en $\psi = \mu\, e^{t\sqrt{-r}}$, dan is:

$$-\,r\,mh^2 + g\,(mh + m_1 a) - gm_1\,a\mu = 0 \text{ en } -\,ra - br\mu + g = 0,$$

waaruit

$$\mu = \frac{g - ra}{br} \text{ en } r^2\,mh^2\,b - rg\,(mh + m_1\,a) + gm_1\,a\,(g - ra) = 0,$$

of:

$$r^2\,mbh^2 - r\,(bg\,(mh + m_1\,a) + gm_1\,a^2) + g^2\,m_1\,a = 0,$$

welke vergelijking in het algemeen twee wortels r geeft. Hierdoor krijgt men dus de integraal:

$$\phi = A_1 \operatorname{Sin}\,(\sqrt{r_1}\,t + \alpha_1) + A_2 \operatorname{Sin}\,(\sqrt{r_2}\,t + \alpha_2)$$
$$\psi = \mu_1\,A_1 \operatorname{Sin}\,(\sqrt{r_1}\,t + \alpha_1) + \mu_2\,A_2 \operatorname{Sin}\,(\sqrt{r_2}\,t + \alpha_2).$$

Nemen we aan, dat de massa van het eerste lichaam nul is, en het tweede lichaam eene homogene of niet homogene staaf, dan levert het algemeene vraagstuk onmiddellijk de bewegings-vergelijkingen van eene staaf, opgehangen met een harer einden aan een dun onrekbaar koord zonder massa, als die staaf zeer weinig uit haar verticalen evenwichtsstand is gebracht en alleen aan de werking der zwaartekracht is overgelaten.

Voor dit geval vindt men, daar hoek $A = 0$, $m = 0$,

$k = 0$, $m_2 = M$, $b = l$, als $2l$ de lengte van de (homogene) staaf is, en $k^2 = \frac{4}{3} l^2$ is:

$$T = \tfrac{1}{2} M (a^2 \dot{\phi}^2 + 2al \dot{\phi} \dot{\psi} \operatorname{Cos} (\psi - \phi) + \tfrac{4}{3} l^2 \dot{\psi}^2)$$
$$U = gM (a \operatorname{Cos} \phi + l \operatorname{Cos} \psi).$$

De bewegings-vergelijkingen zijn:

$$a^2 \ddot{\phi} + al \ddot{\psi} + ga \phi = 0 \text{ en } \tfrac{4}{3} l^2 \ddot{\psi} + al \ddot{\phi} + lg \phi = 0,$$

waaruit wederom:

$$\phi = A_1 \operatorname{Sin} (\sqrt{r_1}\, t + \alpha_1) + A_2 \operatorname{Sin} (\sqrt{r_2}\, t + \alpha_2)$$
$$\psi = A_1 \mu_1 \operatorname{Sin} (\sqrt{r_1}\, t + \alpha_1) + A_2 \mu_2 \operatorname{Sin} (\sqrt{r_2}\, t + \alpha_2);$$

terwijl de waarden van r en μ gevonden worden uit de beide vergelijkingen:

$$alr^2 - lg (4l - 3a) + 3g^2 = 0 \quad \text{en} \quad \mu = \frac{g - ar}{lr}.$$

2° Geval. Nemen we aan, dat de beide assen elkaar rechthoekig kruisen. Stel, dat de eerste as verticaal, dus de tweede horizontaal zij, en laten na zekeren tijd ϕ en ψ de hoeken zijn, die respectievelijk gemaakt worden 1° door een vlak door de eerste as en loodrecht op de tweede as, met een vast vlak door de eerste as gaande en 2° door een vlak door de tweede as en het zwaartepunt van het tweede lichaam gebracht, met een horizontaal vlak. Deze beide van elkaar onafhankelijke hoeken bepalen wederom den stand van het stelsel. (fig. 3).

Zij vervolgens a de afstand der beide assen, b de afstand van het kruispunt op de tweede as tot het vlak door het zwaartepunt van het tweede lichaam loodrecht op de tweede as gebracht, en c de afstand van dit zwaartepunt tot de tweede as, dan is de snelheid van dit zwaartepunt de resultante van $(a + c \operatorname{Cos} \psi)\, \dot{\phi}$, $b\, \dot{\phi}$, $c\, \dot{\psi}$, en wel is het kwadraat dier snelheid, zooals men spoedig inziet:

$$(a + c \operatorname{Cos} \psi)^2\, \dot{\phi}^2 + c^2\, \dot{\psi}^2 + b^2\, \dot{\phi}^2 - 2bc\, \dot{\phi}\, \dot{\psi} \operatorname{Sin} \psi;$$

derhalve de kinetische energie van het stelsel:

$$T = \tfrac{1}{2}\, mj^2\, \dot{\phi}^2 + \tfrac{1}{2}\, m_1 \left\{ \begin{aligned} &(a + c \operatorname{Cos} \psi)^2\, \dot{\phi}^2 + c^2\, \dot{\psi}^2 + b^2\, \dot{\phi}^2 \\ &\qquad - 2bc\, \dot{\phi}\, \dot{\psi} \operatorname{Sin} \psi + k^2\, \dot{\psi}^2 \end{aligned} \right\}$$

j is de traagheidsstraal van het eerste lichaam om de verticale as, k die van het tweede lichaam, om eene as evenwijdig aan de tweede as door het zwaartepunt gaande.

Uit T leidt men af:

$$\frac{dT}{d\dot{\phi}} = mj^2\, \dot{\phi} + m_1\, (a + c \operatorname{Cos} \psi)^2\, \dot{\phi} + m_1\, b^2\, \dot{\phi} - m_1\, bc\, \dot{\psi} \operatorname{Sin} \psi$$

$$\frac{dT}{d\dot{\psi}} = m_1\, (c^2\, \dot{\psi} - bc\, \dot{\phi} \operatorname{Sin} \psi + k^2\, \dot{\psi})$$

$$\frac{dT}{d\phi} = 0, \frac{dT}{d\psi} = -m_1\, \{(a + c \operatorname{Cos} \psi)\, \dot{\phi}^2\, c \operatorname{Sin} \psi - bc\dot{\phi}\, \dot{\psi} \operatorname{Cos} \psi\}.$$

Derhalve zijn de bewegings-vergelijkingen, als zich de algemeene krachts-componenten weer reduceeren tot de momenten van twee koppels om de eerste en om de tweede as, op het eerste en tweede lichaam werkende in vlakken loodrecht op die assen:

$$(mj^2 + m_1\, b^2)\, \ddot{\phi} + \frac{d\,(m_1\, (a + c \operatorname{Cos} \psi)^2\, \dot{\phi} - m_1\, bc\, \dot{\psi} \operatorname{Sin} \psi)}{dt} = \Phi \qquad (1)$$

$$m_1 \begin{pmatrix} c^2\, \ddot{\psi} + k^2\, \ddot{\psi} - bc \operatorname{Sin} \psi\, \ddot{\phi} - bc\, \dot{\phi}\, \dot{\psi} \operatorname{Cos} \psi \\ + (a + c \operatorname{Cos} \psi)\, \dot{\phi}^2\, c \operatorname{Sin} \psi + bc\, \dot{\phi}\, \dot{\psi} \operatorname{Cos} \psi \end{pmatrix} = \Psi \qquad (2)$$

Werkt op dit stelsel alleen de zwaartekracht, dan is de krachtfunctie klaarblijkelijk:

$$U = g\, m_1\, c \operatorname{Sin} \psi;$$

$$\text{derhalve } \frac{dU}{d\psi} = \Psi = g\, m_1\, c \operatorname{Cos} \psi \text{ en } \frac{dU}{d\phi} = \Phi = 0,$$

zoodat de bewegings-vergelijkingen nu zijn:

$$(mj^2 + m_1 b^2)\,\ddot{\phi} + \frac{d\left\{m_1 (a + c \operatorname{Cos}\psi)^2 \dot{\phi} - m_1 bc \dot{\psi} \operatorname{Sin}\psi\right\}}{dt} = 0 \qquad (3)$$

$$m_1 \left\{(k^2 + c^2)\,\ddot{\psi} - bc\,\ddot{\phi} \operatorname{Sin}\psi + (a + c \operatorname{Cos}\psi)\, c \operatorname{Sin}\psi\, \dot{\phi}^2\right\} = gm_1\, c \operatorname{Cos}\psi, \qquad (4)$$

De eerste dezer vergelijkingen laat zich nu onmiddellijk integreeren:

$$(mj^2 + m_1 b^2)\,\dot{\phi} + m_1 (a + c \operatorname{Cos}\psi)^2 \dot{\phi} - m_1 bc\,\dot{\psi} \operatorname{Sin}\psi = C. \qquad (5)$$

Deze vergelijking toont dus aan, dat de som van de momenten der hoeveelheden van beweging, ten opzichte van de loodrechte as van het eerste lichaam $mj^2\,\dot{\phi}$, en die van het tweede lichaam (de massa in het zwaartepunt vereenigd gedacht) $m_1\,\dot{\phi}\,(a + c \operatorname{Cos}\psi)^2 + m_1 b\,(b\dot{\phi} - c\dot{\psi} \operatorname{Sin}\psi)$, constant is.

Passen we het bovenstaande eindelijk eens toe op het volgende eenvoudige bijzondere geval, dat $b = 0$ en $a = 0$ is, dan zijn de bewegings-vergelijkingen:

$$mj^2\,\dot{\phi} + m_1 c^2 \operatorname{Cos}^2\psi\,\dot{\phi} = \text{Const.}$$

$$(k^2 + c^2)\,\ddot{\psi} + c^2 \operatorname{Sin}\psi \operatorname{Cos}\psi\,\dot{\phi}^2 = gc \operatorname{Cos}\psi.$$

Stel nu, dat we de massa m kunnen verwaarloozen, en dat het tweede lichaam zich reduceert tot een materiëel punt, dan is dus $k = 0$ en heeft men:

$$m_1 c^2 \operatorname{Cos}^2\psi\,\dot{\phi} = \text{Const.} \quad c^2\,\ddot{\psi} + c^2 \operatorname{Sin}\psi \operatorname{Cos}\psi\,\dot{\phi}^2 = gc \operatorname{Cos}\psi$$

of:

$$c^2 \operatorname{Cos}^2\psi\,\dot{\phi} = C \text{ waaruit } \dot{\phi} = \frac{C}{c^2 \operatorname{Cos}^2\psi}.$$

Voeren we vervolgens in plaats van ψ den hoek $\xi = 90° - \psi$ in, dan zijn de vergelijkingen:

$$\dot{\phi} = \frac{C}{c^2 \operatorname{Sin}^2 \xi}, \quad c\,\ddot{\xi} = -g \operatorname{Sin} \xi + c \operatorname{Sin} \xi \operatorname{Cos} \xi \, \dot{\phi}^2,$$

waaruit:

$$c\,\ddot{\xi} = c \operatorname{Sin} \xi \operatorname{Cos} \xi \, \dot{\phi}^2 - g \operatorname{Sin} \xi = c \operatorname{Sin} \xi \operatorname{Cos} \xi \frac{C^2}{c^4 \operatorname{Sin}^4 \xi} - g \operatorname{Sin} \xi$$

na substitutie van:

$$\dot{\phi} = \frac{C}{c^2 \operatorname{Sin}^2 \xi}.$$

Door integratie van de laatste vergelijking verkrijgt men:

$$\sqrt{c}\,\frac{d\xi}{dt} = \sqrt{\left\{ 2g \operatorname{Cos} \xi - \frac{C^2}{c^3 \operatorname{Sin}^2 \xi} \right\}_{\xi_0}^{\xi}}.$$

We nemen dus aan dat $\dot{\xi}$ nul is, als $\xi = \xi_0$ is, en vinden na herleiding:

$$\sqrt{c}\,\frac{d\xi}{dt} = \sqrt{\left\{ 2g (\operatorname{Cos} \xi - \operatorname{Cos} \xi_0) - \frac{C^2}{c^3} \left(\frac{1}{\operatorname{Sin}^2 \xi} - \frac{1}{\operatorname{Sin}^2 \xi_0} \right) \right\}}$$

$$= \sqrt{(\operatorname{Cos} \xi - \operatorname{Cos} \xi_0) \left(2g - \frac{C^2}{c^3} \frac{(\operatorname{Cos} \xi + \operatorname{Cos} \xi_0)}{\operatorname{Sin}^2 \xi \operatorname{Sin} \xi_0{}^2} \right)}.$$

We zijn derhalve tot de kwadraturen gekomen.

Neemt men nu nog eens aan, dat $\dot{\phi}$ constant is $= \omega$, de hoeksnelheid om de eerste as, dan heeft men natuurlijk slechts te doen met de eene vergelijking,

$$c\,\ddot{\psi} + c\,\omega^2 \operatorname{Sin} \psi \operatorname{Cos} \psi = g \operatorname{Cos} \psi,$$

waaruit, $90° - \psi = \xi$ zijnde:

$$\sqrt{c}\,\frac{d\xi}{dt} = \sqrt{(\operatorname{Cos} \xi - \operatorname{Cos} \xi_0)\,(2g - c\omega^2 (\operatorname{Cos} \xi + \operatorname{Cos} \xi_0))},$$

zooals men ook langs anderen weg en wellicht nog eenvoudiger had kunnen vinden. Deze uitkomst stemt overeen met die, welke van de oplossing van dit speciale geval in Jullien II, p. 258, gegeven is.

TWEEDE HOOFDSTUK.

De bewegings-vergelijkingen voor impulsieve krachten.

§ 1. We hebben tot dusverre alleen beschouwd het geval, dat op het stelsel materiëele punten aanhoudende krachten werken. We moeten nu nog nagaan, wat er van de bewegings-vergelijkingen wordt, ingeval er impulsies op het stelsel werken, en we het aantal variabelen door middel van de voorwaarde-vergelijkingen, waaraan de coördinaten der punten moeten voldoen, tot het kleinste getal terugbrengen. Zooals bekend is, kan men gemakkelijk uit de algemeene dynamische vergelijking:

$$\Sigma\left(X_i - m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2}\right)\delta x_i + \Sigma\left(Y_i - m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2}\right)\delta y_i +$$
$$\Sigma\left(Z_i - m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2}\right)\delta z_i = 0,$$

afleiden de vergelijking voor impulsieve krachten:

$$\Sigma\left(X_i' - m_i \frac{dx_i}{dt}\right)\delta x_i + \Sigma\left(Y_i' - m_i \frac{dy_i}{dt}\right)\delta y_i +$$
$$\Sigma\left(Z_i' - m_i \frac{dz_i}{dt}\right)\delta z_i = 0,$$

waarin X_i', Y_i', Z_i' voorstellen de componenten der impulsies in de richting der assen, die op het punt x_i, y_i, z_i, werken.

Bestaan er nu m voorwaarde-vergelijkingen van den vorm:

$M=0$, $N=0$ enz., functiën der coördinaten, dan komt men weder door de methode der multiplicatoren tot de volgende $3n$ symetrische formules:

$$
\begin{aligned}
m_i \ddot{x}_i &= X_i' + \lambda \frac{dM}{dx_i} + \mu \frac{dN}{dx_i} + \text{enz.} \\
m_i \ddot{y}_i &= Y_i' + \lambda \frac{dM}{dy_i} + \mu \frac{dN}{dy_i} + \text{enz.} \qquad (1) \\
m_i \ddot{z}_i &= Z_i' + \lambda \frac{dM}{dz_i} + \mu \frac{dN}{dy_i} + \text{enz.}
\end{aligned}
$$

waarin i alle geheele waarden van 1 tot en met n kan krijgen. Heeft men uit deze vergelijkingen de m onbepaalde coëfficiënten λ, μ enz. geëlimineerd, dan geven de $3n-m$ overblijvende vergelijkingen, gecombineerd met de m voorwaarde-vergelijkingen, een aantal van $3n$ vergelijkingen ter bepaling van x, y, z, enz. in functie van t.

§ 2. Voeren we nu ook hier wederom nieuwe variabelen in, functiën van x, y, z en t, dan zijn dus omgekeerd x, y, z functiën dier nieuwe variabelen q_1, q_2 enz. en van t, en derhalve:

$$
\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt} = \left(\frac{dx_i}{dt}\right) + \frac{dx_i}{dq_1}\dot{q}_1 + \frac{dx_i}{dq_2}\dot{q}_2 + \text{enz.}
$$

$$
\delta x_i = \frac{dx_i}{dq_1}\dot{q}_1 + \frac{dx_i}{dq_2}\dot{q}_2 + \text{enz.}
$$

Soortgelijke uitdrukkingen krijgt men ook voor de andere variabelen.

Telt men nu de overeenkomstige leden der vergelijkingen (1) na ze respectievelijk met δx_i, δy_i, δz_i, vermenigvuldigd te hebben, bij elkaar op, dan verkrijgt men:

$$
\Sigma\, m_i (\ddot{x}_i \delta x_i + \ddot{y}_i \delta y_i + \ddot{z}_i \delta z_i) = \Sigma\, (X'_i \delta x_i + Y'_i \delta y_i + Z'_i \delta z_i) + \lambda\, \delta M + \mu\, \delta N + \text{enz.} \qquad (2)
$$

en substitueert men in deze vergelijking de boven gevonden waarden van δx, δy, δz, enz., dan wordt het tweede lid dezer vergelijking:

$$Q'_1\,\delta q_1 + Q'_2\,\delta q_2 + \text{enz.} + \lambda\,\delta M + \mu\delta N + \text{enz.},$$

als we namelijk voor Q'_1, Q'_2 enz. aannemen de waarden:

$$Q'_1 = \Sigma\left(X'_i\frac{dx_i}{dq_1} + Y'_i\frac{dy_i}{dq_1} + Z'_i\frac{dz_i}{dq_1}\right)$$

$$Q'_2 = \Sigma\left(X'_i\frac{dx_i}{dq_2} + Y'_i\frac{dy_i}{dq_2} + Z'_i\frac{dz_i}{dq_2}\right) \text{ enz.}$$

Evenals we nu in het eerste hoofdstuk

$$Q_1 = \Sigma\left(X_i\frac{dx_i}{dq_1} + Y_i\frac{dy_i}{dq_1} + Z_i\frac{dz_i}{dq_1}\right)$$

de algemeene krachts-componente voor de variabele q_1 hebben genoemd, evenzoo zullen we nu Q'_1 de algemeene componente der impulsie voor de veranderlijke q_1 noemen.

Het eerste lid van bovenstaande vergelijking kan men weer door middel van de uitdrukking der kinetische energie

$$T = \tfrac{1}{2}\,\Sigma\, m_i\,(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2)$$

gemakkelijk in functie der nieuwe variabelen omzetten.

We vinden toch terstond uit de waaren $\dot{x}_i$, $\dot{y}_i$, $\dot{z}_i$:

$$\frac{d\dot{x}_i}{d\dot{q}_1} = \frac{dx_i}{dq_1},\ \frac{d\dot{y}_i}{d\dot{q}_1} = \frac{dy_i}{dq_1},\ \frac{d\dot{z}_i}{d\dot{q}_1} = \frac{dz_i}{dq_1};$$

zoodat het eerste lid der bovenstaande vergelijking wordt:

$$\Sigma\, m_i\,(\dot{x}_i\,\delta x_i + \dot{y}_i\,\delta y_i + \dot{z}_i\,\delta z_i) =$$

$$\Sigma\, m_i\left(\dot{x}_i\,\frac{d\dot{x}_i}{dq_1}\,\delta q_1 + \dot{y}_i\,\frac{d\dot{y}_i}{dq_1}\,\delta q_1 + \dot{z}_i\,\frac{d\dot{z}_i}{dq_1}\right)\delta q_1$$

$$+\, m_i\left(\dot{x}_i\,\frac{d\dot{x}_i}{dq_2}\,\delta q_2 + \dot{y}_i\,\frac{d\dot{y}_i}{d\ _2}\,\delta q_2 + \dot{z}_i\,\frac{d\dot{z}_i}{dq_2}\right)\delta q_2$$

enz.

$$= \Sigma\, m_i \left(\dot{x}_i \frac{d\dot{x}_i}{d\dot{q}_1} \delta q_1 + \dot{y}_i \frac{d\dot{y}_i}{d\dot{q}_1} \delta q_1 + \dot{z}_i \frac{d\dot{z}_i}{d\dot{q}_1} \delta q_1 \right) +$$

$$m_i \left(\dot{x}_i \frac{d\dot{x}_i}{d\dot{q}_2} \delta q_2 + \dot{y}_i \frac{d\dot{y}_i}{d\dot{q}_2} \delta q_2 + \dot{z}_i \frac{d\dot{z}_i}{d\dot{q}_2} dq_2 \right) + \text{enz.}$$

$$= \frac{dT}{d\dot{q}_1} \delta q_1 + \frac{dT}{d\dot{q}_2} \delta q_2 + \text{enz.}$$

Men verkrijgt dus ten slotte:

$$\frac{dT}{d\dot{q}_1} \delta q_1 + \frac{dT}{d\dot{q}_2} \delta q_2 + \text{enz.} =$$

$$Q'_1 \delta q_1 + Q'_2 \delta q_2 + \text{enz.} + \lambda \delta M + \mu \delta N + \text{enz.} \qquad (3)$$

welke vergelijking onmiddellijk vervalt in vergelijkingen van den vorm:

$$\frac{dT}{d\dot{q}_s} = Q'_s + \lambda \frac{dM}{dq_s} + \mu \frac{dN}{dq_s} + \text{enz.} \qquad (4)$$

Dergelijke vergelijkingen heeft men in even groot aantal als men nieuwe variabelen q_1, q_2 enz. heeft ingevoerd. Ze geven ook weer terstond de bekende vergelijkingen voor impulsieve bewegingen voor de gewone rechthoekige coördinaten als men $q_1 = x_1$, $q_2 = x_2$ enz. stelt.

Van bijzonder belang is het ook weer in deze onderzoeking, als we het aantal nieuwe variabelen, dat we willekeurig meer of minder groot kunnen nemen, door middel van de voorwaarde-vergelijkingen van het vraagstuk tot het geringste getal reduceeren. We doen dit, door van alle voorwaarde-vergelijkingen gebruik te maken, zooals dit in het voorgaande hoofdstuk is aangewezen. De nieuwe variabelen voldoen dan van zelf aan die voorwaarde-vergelijkingen, maken die derhalve identiek nul, en uit de bovenstaande vergelijking (3) krijgt men dan de eenvoudige formules:

$$\frac{dT}{d\dot{q}_1} = Q'_1, \quad \frac{dT}{d\dot{q}_2} = Q'_2 \text{ enz.} \qquad (5)$$

Onderstellen we nu nog verder, dat de m voorwaarde-vergelijkingen $M=0$, $N=0$ enz. den tijd t niet expliciet bevatten, en is dus ook T daarvan onafhankelijk, dan gelden natuurlijk nog dezelfde formulen (5), maar bevatten nu geen t meer expliciet, en men heeft dan:

$$\frac{dT}{d\dot{q}_1} = Q'_1 = p_1, \qquad \frac{dT}{d\dot{q}_2} = Q'_2 = p_2, \text{ enz.}$$

§ 3. We kunnen deze formulen ook nog op eene andere wijze afleiden, en daardoor nog beter van het wezen der zaak een duidelijk begrip krijgen.

Vooreerst is het klaar, dat we in de algemeene formule:

$$\Sigma \left\{ (X'_i - m_i \dot{x}_i)\,\delta x_i + (Y'_i - m_i \dot{y}_i)\,\delta y_i + (Z'_i - m_i \dot{z}_i)\,\delta z_i \right\} = 0,$$

voor δx_i, δy_i, δz_i mogen nemen de oneindig kleine verplaatsingen, die de punten na een zekeren tijd werkelijk ondergaan, en daar deze verplaatsingen evenredig zijn aan de snelheden in die richtingen, zoo is:

$$\Sigma\,(X'_i\,\dot{x}_i + Y'_i\,\dot{y}_i + Z'_i\,\dot{z}_i) = \Sigma\, m_i\,(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) = 2\,T.$$

Deze vergelijking beteekent derhalve, dat de door den stoot geleverde arbeid, die op het stelsel de uitwerking heeft van de kinetische energie te vermeerderen, gelijk is aan de halve som van de producten der componenten van den stoot en der overeenkomstige componenten van de snelheden der aangrijpingspunten.

Nemen we nu voor de bepaling van de algemeene componenten der impulsie voor de nieuwe variabelen q_1, q_2 enz. dezelfde wet aan, dan luidt deze: de toename der kinetische energie van een stelsel of de arbeid, daarop door eene impulsie uitgeoefend, is gelijk aan de halve som der producten van de componenten der impulsie en de overeenkomstige componenten van de snelheden der aangrijpingspunten. Deze snelheids-componenten $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$ enz. zijn dezelfde, als ze boven zijn bepaald.

Zooals we gezien hebben, is de algemeene krachts-componente:

$$Q_i = \Sigma \left(X_i \frac{dx_i}{dq_s} + Y_i \frac{dy_i}{dq_s} + Z_i \frac{dz_i}{dq_s} \right)$$

Nemen we nu aan, dat deze krachts-componente een zeer kleinen tijd τ op het stelsel werkt, dus een stoot uitoefent, dan is, als $\dot{Q}_s$ de algemeene impulsie-componente voorstelt:

$$\dot{Q}_s = \int_0^\tau Q_s \, dt = \int_0^\tau \Sigma \left(X_i \frac{dx_i}{dq_s} + Y_i \frac{dy_i}{dq_s} + Z_i \frac{dz_i}{dq_s} \right) dt$$

Werkt nu op een stelsel, dat zich in beweging bevindt, een stoot, waarvan de algemeene componente door bovenstaande formule wordt uitgedrukt, en zijn de toenamen der snelheids-componenten, die bijv. aanvankelijk $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$ enz. waren, $\delta\dot{q}_1$, $\delta\dot{q}_2$ enz., dan is de gemiddelde snelheid gedurende den stoot:

$$\dot{q}_1 + \tfrac{1}{2}\,\delta\dot{q}_1, \quad \dot{q}_2 + \tfrac{1}{2}\,\delta\dot{q}_2 \text{ enz.,}$$

zoodat ingevolge de bovenstaande bepaling de arbeid, door den stoot verricht, zal zijn:

$$\dot{Q}_1 (\dot{q}_1 + \tfrac{1}{2}\,\delta\dot{q}_1) + \dot{Q}_2 (\dot{q}_2 + \tfrac{1}{2}\,\delta\dot{q}_2) + \text{enz.,}$$

en zoo we nu aannemen, dat de toenamen der snelheids-componenten $\delta\dot{q}_1$, $\delta\dot{q}_2$ enz. oneindig klein zijn, derhalve ten opzichte van $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$ enz. kunnen verwaarloosd worden, dan wordt de bedoelde arbeid eenvoudig:

$$\dot{Q}_1 \, \dot{q}_1 + \dot{Q}_2 \, \dot{q}_2 + \text{enz.}$$

Deze arbeid wordt nu besteed om de kinetische energie te vermeerderen, dus heeft men:

$$\delta T = \dot{Q}_1 \dot{q}_1 + \dot{Q}_2 \dot{q}_2 + \text{enz.}$$

Nemen we verder aan, dat de stoot zoodanig zij, dat er alleen eene verandering der snelheids-componente q_1 plaats vindt, en dat de andere snelheids-componenten $\dot{q}_2$, $\dot{q}_3$ enz. onveranderlijk blijven, dan is, daar T alleen functie is van q_1, q_2 enz., $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$ enz., en daar we kunnen aannemen, dat de coördinaten q_1, q_2 enz. gedurende den stoot niet veranderen, zoodat we deze als constant kunnen beschouwen:

$$\delta T = \frac{dT}{d\dot{q}_1} \delta \dot{q}_1$$

De bovenstaande vergelijking wordt derhalve:

$$\frac{dT}{d\dot{q}_1} \delta \dot{q}_1 = \overline{\dot{Q}}_1 \dot{q}_1 + \overline{\dot{Q}}_2 \dot{q}_2 + \text{enz},$$

als $\overline{\dot{Q}}_1$, $\overline{\dot{Q}}_2$ enz. voorstellen die bijzondere impulsie-componenten, welke alleen de verandering der variabele $\dot{q}_1$ te weeg kunnen brengen. Deelen we deze vergelijking door $\delta \dot{q}_1$ en geven we acht op de waarde van:

$$\frac{dT}{d\dot{q}_1} = (q_1 q_1) \dot{q}_1 + (q_1 q_2) \dot{q}_2 + (q_1 q_3) \dot{q}_3 \text{ enz. (pag 11)}$$

dan vinden we:

$$\frac{\overline{\dot{Q}}_1}{\delta \dot{q}_1} \dot{q}_1 + \frac{\overline{\dot{Q}}_2}{\delta \dot{q}_1} \dot{q}_2 + \text{enz.} = \frac{dT}{d\dot{q}_1} = (q_1 q_1) \dot{q} + (q_1 q_2) \dot{q} + \text{enz.}$$

De eerste en de laatste uitdrukking zijn nu lineaire functiën van $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$ enz., zoodat hieruit volgt:

$$\frac{\overline{Q_1}}{\delta \dot{q}_1} = (q_1 q_1), \qquad \frac{\overline{\dot{Q}}_2}{\delta \dot{q}_1} = q_1 q_2 \text{ enz.}$$

De componenten der impulsie, die we een stelsel moeten mededeelen om alleen eene verandering $\delta \dot{q}_1$ der snelheids-componente $\dot{q}_1$ te weeg te brengen, zijn derhalve:

$$\overline{\dot{Q}_1} = (q_1 q_1) \delta \dot{q}_1, \quad \overline{\dot{Q}_2} = (q_1 q_2) \delta \dot{q}_1, \text{ enz.}$$

Moet er dus eene verandering der snelheids-componente $\dot{q}_1$ worden veroorzaakt, of moet deze snelheid aan een in rust zijnd stelsel worden medegedeeld, dan zijn de hiervoor noodige componenten der impulsie:

$$(q_1 q_1) \dot{q}_1, \quad (q_1 q_2) \dot{q}_1, \quad (q_1 q_3) \dot{q}_1, \text{ enz.}$$

En zal een stelsel uit den toestand van rust eene snelheid aannemen, waarvan de componenten zijn $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$ enz. ten gevolge van een stoot, dan moeten de componenten daarvan, zooals men terstond inziet, de waarden hebben:

$$\begin{aligned} Q'_1 &= p_1 = (q_1 q_1) \dot{q}_1 + (q_2 q_1) \dot{q}_2 + (q_3 q_1) \dot{q}_3 + \text{enz.} \\ Q'_2 &= p_2 = (q_1 q_2) \dot{q}_1 + (q_2 q_2) \dot{q}_2 + (q_3 q_2) \dot{q}_3 \pm \text{enz.} \\ &\text{enz.} \end{aligned} \tag{6}$$

Deze uitdrukkingen zijn klaarblijkelijk niets anders dan:

$$\frac{dT}{d\dot{q}_1}, \quad \frac{dT}{d\dot{q}_2}, \text{ enz.}$$

derhalve:

$$\frac{dT}{d\dot{q}_1} = p_1, \quad \frac{dT}{d\dot{q}_2} = p_2, \quad \frac{dT}{d\dot{q}_3} = p_3, \text{ enz.} \tag{7}$$

§ 4. Deze uitdrukkingen, geheel in overeenstemming met die, in de vorige paragraaf gevonden, geven dus nu de oplossing van het vraagstuk: de impulsie (waarvan p_1, p_2 enz. de componenten zijn) te bepalen, die noodig is om een stelsel, dat in rust verkeert, eene bepaalde snelheid (waarvan $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$ enz. de gegeven componenten zijn) te geven, wanneer de kinetische energie T gegeven is als eene kwadratische functie dezer snelheids-componenten.

Zij stellen tevens voor de componenten der hoeveelheid van beweging van een willekeurig zich bewegend stelsel materiëele punten voor de aangenomen algemeene variabelen.

§ 5. Er kunnen natuurlijk gevallen voorkomen, waarbij de questie anders is gesteld, waar juist gevraagd wordt: uit de gegeven impulsie-componenten de initiale snelheidscomponenten af te leiden, als ook T gegeven is in functie van de impulsie-componenten. Dan zijn de bovenstaande uitdrukkingen niet onmiddellijk aan te wenden, en we zullen deze derhalve hebben te vervormen, zoodat we zoo mogelijk terstond op de gestelde vraag het antwoord bekomen.

Daartoe hebben we op te merken, dat T is eene homogene kwadratische functie van $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$ enz., en dat dus, volgens de leer der homogene functiën:

$$2\,T = \dot{q}_1 \frac{dT}{d\dot{q}_1} + \dot{q}_2 \frac{dT}{d\dot{q}_2} + \text{enz.} = \dot{q}_1 p_1 + \dot{q}_2 p_2 + \text{enz. is.} \qquad (8)$$

Differentiëeren we deze uitdrukking ten opzichte van p_1, p_2 enz., en beschouwen we daarbij T, $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$ enz. als functiën van p_1, p_2 enz., dan is:

$$2\frac{dT}{dp_1} = \dot{q}_1 + p_1 \frac{d\dot{q}_1}{dp_1} + p_2 \frac{d\dot{q}_2}{dp_1} + p_3 \frac{d\dot{q}_3}{dp_1} + \text{enz.}$$
$$2\frac{dT}{dp_2} = p_1 \frac{d\dot{q}_1}{dp_2} + \dot{q}_2 + p_2 \frac{d\dot{q}_2}{dp_2} + p_3 \frac{d\dot{q}_3}{dp_2} + \text{enz.} \qquad (9)$$

enz.

Verder heeft men (6):

$$p_1 = (q_1\, q_1)\, \dot{q}_1 + (q_2\, q_1)\, \dot{q}_2 + (q_3\, q_1)\, \dot{q}_3 + \text{enz.}$$
$$p_2 = (q_1\, q_2)\, \dot{q}_1 + (q_2\, q_2)\, \dot{q}_2 + (q_3\, q_2)\, \dot{q}_3 + \text{enz.}$$
$$p_3 = (q_1\, q_3)\, \dot{q}_1 + (q_2\, q_3)\, \dot{q}_2 + (q_3\, q_3)\, \dot{q}_3 + \text{enz.}$$

enz.

waarin $(q_2 q_1) = (q_1 q_2)$, of algemeen $(q_r q_s) = (q_s q_r)$ d. i. de coëfficiënt van $\dot{q}_r$ in de uitdrukking voor p_s is gelijk aan de coëfficiënt van $\dot{q}_s$ in die voor p_r. Dit volgt onmiddellijk uit de wijze, waarop p_1, p_2 enz. uit T worden afgeleid.

Het spreekt nu van zelf, dat als we uit deze homogene lineaire vergelijkingen in $\dot{q}_1, \dot{q}_2$ enz. deze grootheden oplossen en uitdrukken in p_1, p_2 enz., waarbij dan de coëfficiënten weer alleen functiën der variabelen q_1, q_2, enz. zullen zijn, we uitdrukkingen zullen bekomen van dezen vorm:

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= [q_1 q_1] p_1 + [q_2 q_1] p_2 + [q_3 q_1] p_3 + \text{enz.} \\ \dot{q}_2 &= [q_1 q_2] p_1 + [q_2 q_2] p_2 + [q_3 q_2] p_3 + \text{enz.} \\ \dot{q}_3 &= [q_1 q_3] p_1 + [q_2 q_3] p_2 + [q_3 q_3] p_3 + \text{enz.} \end{aligned} \qquad (11)$$

enz.,

die wederom homogeen en lineair zullen zijn in p_1, p_2, enz., en waarvan de coëfficiënten zullen voldoen aan de voorwaarde:

$$[q_r q_s] = [q_s q_r]$$

m. a. w. de coëfficiënt van p_r in de uitdrukking van $\dot{q}_s$ is gelijk aan den coëfficiënt van p_s in die van $\dot{q}_r$, zooals men gemakkelijk kan aantoonen. [1])

---

1) Als
$$\begin{aligned} p_1 &= a_{11}\dot{q}_1 + a_{12}\dot{q}_2 + a_{13}\dot{q}_3 + \text{enz.} \\ p_2 &= a_{21}\dot{q}_1 + a_{2}\dot{q}_{22} + a_{28}\dot{q}_3 + \text{enz.} \\ p_3 &= a_{31}\dot{q}_1 + a_{32}\dot{q}_2 + a_{33}\dot{q}_3 + \text{enz.} \end{aligned}$$
enz.

en D de determinant $(a_{11}, a_{12}, a_{33}, \ldots . a_{nn})$ voorstelt, terwijl de minor determinant en door D_{rs} worden aangewezen, dan is, zooals bekend is:

$$\begin{aligned} D\dot{q}_1 &= p_1 D_{11} + p_2 D_{21} + p_3 D_{31} \ldots\ldots + p_n D_{n1} \\ D\dot{q}_2 &= p_1 D_{12} + p_2 D_{22} + p_3 D_{32} \ldots\ldots + p_n D_{n2} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ D\dot{q}_n &= p_1 D_{1n} + p_2 D_{2n} + p_3 D_{3n} \ldots . + p_n D_{nn} \end{aligned}$$

$\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$, enz. nu lineaire homogene functiën van p_1, p_2, enz. zijn de, zoo heeft men natuurlijk:

Verder is:

$$D_{rs} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots\ldots a_{1\,s-1} \ldots\ldots\ldots a_{1\,s+1} \ldots\ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots\ldots a_{2\,s-1} \ldots\ldots\ldots a_{2\,s+1} \ldots\ldots\ldots a_{2n} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_{r-1\,1} & a_{r-1\,2} \ldots a_{r-1\,s-1} \ldots\ldots a_{r-1\,s-1} \ldots\ldots a_{r-1\,n} \\ a_{r+1\,1} & a_{r+1\,2} \ldots a_{r+1\,s-1} \ldots\ldots a_{r+1\,s-1} \ldots\ldots a_{r+1\,n} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots\ldots a_{n\,s-1} \ldots\ldots\ldots a_{n\,s+1} \ldots\ldots\ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

en

$$D_{sr} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots\ldots a_{1\,r-1} \ldots\ldots\ldots a_{1\,r+1} \ldots\ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots\ldots a_{2\,r-1} \ldots\ldots\ldots a_{2\,r+1} \ldots\ldots\ldots a_{2n} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_{s-1\,1} & a_{s-1\,2} \ldots a_{s-1\,r-1} \ldots\ldots a_{s-1\,r-1} \ldots\ldots a_{s-1\,n} \\ a_{s+1\,1} & a_{s+1\,2} \ldots a_{s+1\,r-1} \ldots\ldots a_{s+1\,r+1} \ldots\ldots a_{s+1\,n} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots\ldots a_{n\,r-1} \ldots\ldots\ldots a_{n\,r+1} \ldots\ldots\ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

Het is dadelijk te zien dat $D_{rs} = D_{sr}$ zal zijn, als men algemeen $a_{rs} = a_{sr}$ heeft, of als de determinant symetriek is. Dit is nu het geval in den tekst, daar hier de coëfficiënten a_{11}, a_{21}, enz. voorstellen $(q_1\,q_1)$, $(q_1\,q_2)$ enz., en we hebben aangetoond, dat $(q_r\,q_s) = (q_s\,q_r)$ is.

Hieruit volgt dus, daar $\dfrac{D_{rs}}{D} = \dfrac{D_{sr}}{D}$ is, en $\dfrac{D_{rs}}{D}$ enz. voorstellen de coëfficiënten van p_1, p_2, enz. in de ontwikkeling van $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$, enz. en deze gelijk waren aan $[q_1\,q_1]$, $[q_1\,q_2]$ enz:

$$[q_s\,q_r] = [q_r\,q_s]$$

$$\dot{q}_1 = p_1 \frac{d\dot{q}_1}{dp_1} + p_2 \frac{d\dot{q}_1}{dp_2} + p_3 \frac{d\dot{q}_1}{dp_3} + \text{enz.} \tag{12}$$

$$\dot{q}_2 = p_1 \frac{d\dot{q}_2}{dp_1} + p_2 \frac{d\dot{q}_2}{dp_2} + p_3 \frac{d\dot{q}_2}{dp_3} + \text{enz.}$$

enz.;

derhalve, daar $[q_s\, q_r] = [q_r\, q_s]$ is, is nu ook: $\frac{d\dot{q}_s}{dp_r} = \frac{d\dot{q}_r}{dp_s}$.

Maken we nu van deze eigenschap gebruik, dan laten zich de bovenstaande uitdrukkingen (9) veranderen in:

$$2\frac{dT}{dp_1} = \dot{q}_1 + p_1 \frac{d\dot{q}_1}{dp_1} + p_2 \frac{d\dot{q}_1}{dp_2} + p_3 \frac{d\dot{q}_1}{dp_3} + \text{enz.} \tag{13}$$

$$2\frac{dT}{dp_2} = p_1 \frac{d\dot{q}_2}{dp_1} + \dot{q}_2 + p_2 \frac{d\dot{q}_2}{dp_2} + p_3 \frac{d\dot{q}_2}{dp_3} + \text{enz.}$$

enz.

welke door substitutie der waarden (12) ten slotte overgaan in:

$$2\frac{dT}{dp_1} = \dot{q}_1 + \dot{q}_1 = 2\dot{q}_1 \text{ of } \quad \frac{dT}{dp_1} = \dot{q}_1$$

enz.

of algemeen voorgesteld:

$$\frac{dT}{dp_s} = \dot{q}_s$$

welke vergelijkingen de oplossing bevatten der gestelde opgave.

§ 6. Behalve de vraagstukken, in de beide voorgaande paragrafen besproken, kunnen er nog andere voorkomen, waarvan de oplossing niet direkt is af te leiden uit de verkregen uitkomsten. Indien namelijk de snelheden of de impulsies gevraagd worden, terwijl er gegeven zijn eenige voorwaarde-vergelijkingen, tusschen de impulsies en de snelheden, waaraan de beweging van het stelsel moet voldoen, en wel in even groot aantal als er onafhankelijke variabelen zijn, dan kan men voor de oplossing van het vraagstuk, gebruik maken, behalve van deze voorwaarde vergelijkingen: $M = 0$, $N = 0$, enz., van de formulen: (7) of (14):

$$p_s = \frac{dT}{d\dot{q}_s}, \qquad \dot{q}_s = \frac{dT}{dp_s}$$

Men heeft dan, als er $3n—m$ onafhankelijke variabelen zijn, dubbel zooveel vergelijkingen, ter bepaling van de $2\,(3n—m)$ grootheden p_s en $\dot{q}_s$, die in het vraagstuk voorkomen.

Een bijzonder geval hiervan is natuurlijk dat, waarbij tusschen de snelheden alleen een zeker aantal (α) betrekkingen gegeven zijn, en wel lineaire vergelijkingen met constante tweede-leden, en men bovendien weet, dat de impulsies zoodanig gericht zijn, dat ze op alle snelheden, die aan eene andere reeks van (β) homogene lineaire vergelijkingen tusschen de snelheden, voldoen, geen invloed hebben. Het geheele aantal $\alpha + \beta$ vergelijkingen moet natuurlijk weer gelijk zijn aan het getal onafhankelijke veranderlijken. Men heeft dan terstond de oplossing van het vraagstuk in de vergelijkingen (7) of (14) benevens het geheele getal voorwaarde-vergelijkingen.

We kunnen echter die oplossing nog eenigszins wijzigen. Men kan namelijk uit die α vergelijkingen $\alpha—1$ variabelen naar willekeur elimineeren, en dus overhouden eene enkele lineaire vergelijking met een constant tweede-lid. Elimineeren we door middel dezer zelfde vergelijkingen, diezelfde variabelen ook uit de andere β vergelijkingen, dan hebben we dus het vraagstuk gereduceerd tot een met minder veranderlijken.

Nu kunnen we wederom andere variabelen invoeren, functiën dergenen, die we hadden, we kunnen deze beschouwen als nieuwe snelheids-componenten, en ze zoodanig kiezen, dat een daarvan gelijk is aan de functie der snelheden in de eene vergelijking met het constante lid, die men heeft overgehouden, en dat de andere snelheids-componenten gelijk worden respectievelijk aan de β functiën der snelheden, die oorspronkelijk gegeven waren, en die zoodanig waren ondersteld, dat de impulsies geen invloed uitoefenden op de snelheden, welke daaraan voldeden. Doen we dit nu, dan hebben de impulsies, die nu op het stelsel werken, de eigenaardigheid, dat ze geen uitwerking hebben op welke snelheids-componente ook, behalve op die eene, welke gegeven is. Werkt bijv. op een in rust zijnd materiëel stelsel, eene impulsie, waardoor enkele deelen daarvan plotseling met zekere gegeven snelheden in beweging komen, dan kan men die impulsie beschouwen als eene die aan bovenstaande voorwaarden voldoet, en de snelheden der punten aanmerken als de algemeene snelheidscomponente, die gegeven is. Er wordt dan gevraagd de overige snelheids-componenten te bepalen.

De gegevens van het vraagstuk zijn derhalve:

$$\dot{q} = A, \quad p_2 = 0, \quad p_3 = 0, \text{ enz. } (a)$$

men vraagt $\qquad p_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3$ enz.

De oplossing wordt gegeven door de vergelijkingen (a) en door de vergelijkingen (7) of (14): $\dfrac{dT}{dp_s} = \dot{q}_s$ of $\dfrac{dT}{d\dot{q}_s} = p_s$

Maken we eerst eens gebruik van de vergelijkingen (14):

$$\frac{dT}{dp_s} = \dot{q}_s,$$

dan heeft men, daar

$$T = \tfrac{1}{2}\left\{[q_1\, q_1]\, p_1^2 + 2\, p_1\, p_2\, [q_1\, q_2] + p_2^2\, [q_2\, q_2] + \text{enz.}\right\} \text{ is,}$$

$$\frac{dT}{dp_1} = \dot{q}_1 = A = [q_1\, q_1]\, p_1, \text{ waaruit } p_1 = \frac{A}{[q_1\, h_1]}$$

$$\frac{dT}{dp_2} = \dot{q}_2 = [q_1\, q_2]\, p_1 = \frac{[q_1\, q_2]}{[q_1\, q_1]} A, \text{ enz.}$$

Het spreekt van zelf, dat $[q_1\, q_1]$, $[q_1\, q_2]$, $[q_2\, q_2]$ enz, de coëfficiënten der termen van T, bekende functiën zijn der variabelen q_1, q_2 enz, die van den aard van het vraagstuk afhangen en daaruit kunnen worden opgemaakt.

Hadden we gebruik gemaakt van de vergelijkingen (a) en (7), dan hadden we gevonden:

$$T = \tfrac{1}{2}\left\{(q_1\, q_1)\, \dot{q}_1^2 + 2\,(q_1\, q_2)\, \dot{q}_1\, \dot{q}_2 + (q_2 q_2)\, \dot{q}_2^2 + \text{enz.}\right\}$$

waaruit:

$$\frac{dT}{d\dot{q}_1} = p_1 = (q_1\, q_1)\, \dot{q}_1 + (q_1\, q_2)\, \dot{q}_2 + (q_1\, q_3)\, \dot{q}_3 + \text{enz.}$$

$$\frac{dT}{d\dot{q}_2} = p_2 = (q_2\, q)\, \dot{q}_1 + (q_2\, q_2)\, \dot{q}_2 + (q_2\, q_3)\, \dot{q}_3 + \text{enz.} = 0$$

enz.

en $\qquad \dot{q}_1 + A,$

uit welke vergelijkingen men dan nog p_1, $\dot{q}_2$, $\dot{q}_3$, enz had op te lossen.

§ 7. De beweging, die door een materiëel stelsel wordt aangenomen, nadat het de inwerking eener impulsie heeft ontvangen, bezit de merkwaardige eigenschap, dat de aangenomen kinetische energie een maximum is, d. w. z. grooter is dan de kinetische energie, die het stelsel zou verkregen hebben, wanneer het eene andere beweging had aangenomen, die met de voorwaarde-vergelijkingen van het vraagstuk niet in strijd is.

Euler is de eerste geweest, die deze eigenschap heeft aangetoond, en wel voor het geval van een onveranderlijk materiëel stelsel. Hij bewees, dat als zoodanig in rust zijnd stelsel een stoot ontvangt, de aangenomen kinetische energie om de as, waarom het stelsel aanvangt te bewegen, steeds een maximum of minimum moet wezen.

Lagrange heeft later deze stelling uitgebreid voor het geval van veranderlijke stelsels materiëele punten. Het bewijs, dat hij hiervan heeft gegeven, komt hierop neer. Voor een vrij maar onveranderlijk stelsel, waarop impulsieve krachten werken (X', Y', Z') gelden de vergelijkingen:

$$\begin{aligned} \Sigma\, m\,(x\dot{y} - y\dot{x}) &= \Sigma\,(xY' - yX') \\ \Sigma\, m\,(z\dot{x} - x\dot{z}) &= \Sigma\,(zX' - xZ') \\ \Sigma\, m\,(y\dot{z} - z\dot{y}) &= \Sigma\,(yZ' - zY'). \end{aligned} \qquad (1)$$

Stellen nu $\dot{\psi}$, $\dot{\omega}$, $\dot{\phi}$, de componenten der hoeksnelheden voor der rotaties om de assen OX, OY, OZ, dan is, daar $\dot{\psi}$, $\dot{\omega}$, $\dot{\phi}$ voor alle punten van het stelsel dezelfde zijn:

$$\dot{x} = z\dot{\omega} - y\dot{\phi}, \quad \dot{y} = x\dot{\phi} - z\dot{\psi}, \quad \dot{z} = y\dot{\psi} - x\dot{\omega}. \qquad (2)$$

Voor een veranderlijk materiëel stelsel kan men nu volgens Lagrange evenzoo schrijven:

$$\dot{x} = z\dot{\omega} - y\dot{\phi} + \alpha, \quad \dot{y} = x\dot{\phi} - z\dot{\psi} + \beta, \quad \dot{z} = y\dot{\psi} - z\dot{\omega} + \gamma, \qquad (3)$$

waarbij dan α, β, γ voorstellen die gedeelten van de snelheden der punten, welke afhankelijk zijn van hunne plaatsverandering ten opzichte van elkaar, of liever van een dier punten, dat men willekeurig heeft gekozen.

Het is toch, zooals Bertrand hieromtrent opmerkt, duidelijk, dat men een willekeurige verplaatsing van een veranderlijk stelsel beschouwen kan als te zijn ontstaan uit de verplaatsing van het stelsel, als onveranderlijk gedacht, en uit de daarop volgende betrekkelijke verplaatsing der punten onderling.

Dit is nu, zoo het schijnt, wat Lagrange bedoelt; de totale snelheid van x, dus $\dot{x}$, is samengesteld uit de snelheid, die x zou hebben, als het stelsel onveranderlijk was, d. i. $z\dot{\omega} - y\dot{\phi}$, waarbij weer $\dot{\psi}$, $\dot{\omega}$, $\dot{\phi}$ voor alle punten dezelfde zouden zijn, en uit de snelheid, die x in den tijd dt zou verkregen hebben, omdat het samenstel wel veranderlijk is, dat is α; α kan dus alle mogelijke waarden hebben, is in het algemeen voor alle punten verschillend, is afhankelijk van t, hetwelk van de voorwaarde-vergelijkingen tusschen de coördinaten der punten afhangt; maar is in ieder geval, evenals zulks β en γ zijn, onafhankelijk van $\dot{\phi}$, $\dot{\omega}$, $\dot{\psi}$.

In de vergelijkingen (3) zijn dus de eenige variabelen $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ en $\dot{\psi}$, $\dot{\phi}$, $\dot{\omega}$, daar de coördinaten gedurende den korten tijd van den stoot als constant gedacht worden. Variëeren we dus de waarden (3) dan is:

$$\delta\dot{x} = z\delta\dot{\omega} - y\delta\dot{\phi}, \quad \delta\dot{y} = x\delta\dot{\phi} - z\delta\dot{\psi}, \quad \delta\dot{z} = y\delta\dot{\psi} - x\delta\dot{\omega}. \quad (4)$$

Deze uitdrukkingen zijn derhalve dezelfde als in het geval van een onveranderlijk materiëel stelsel. Als we nu de vergelijkingen (1) vermenigvuldigen met $\delta\dot{\phi}$, $\delta\dot{\omega}$, $\delta\dot{\psi}$ en optellen, dan krijgt men na substitutie der waarden (4):

$$\Sigma\, m\,(\dot{x}\,\delta\,\dot{x} + \dot{y}\,\delta\,\dot{y} + \dot{z}\,\delta\,\dot{z}) = \Sigma\,(X'\,\delta\,\dot{x} + Y'\,\delta\,\dot{y} + Z'\,\delta\,\dot{z}) \quad (5)$$

Uit de algemeene bewegings-vergelijking voor impulsieve krachten:

$$\Sigma\, m\,(\dot{x}\,\delta\,x + \dot{y}\,\delta\,y + \dot{z}\,\delta\,z) = \Sigma\,(X'\,\delta\,x + Y'\,\delta\,y + Z'\,\delta\,z)$$

kan men afleiden, als men δx, δy, δz enz. aanneemt evenredig aan de werkelijke verplaatsingen of snelheden der punten:

$$\Sigma m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \Sigma(X'\dot{x} + Y'\dot{y} + Z'\dot{z}),$$

waaruit:

$$2\Sigma m(\dot{x}\delta\dot{x} + \dot{y}\delta\dot{y} + \dot{z}\delta\dot{z}) = \Sigma(X'\delta\dot{x} + Y'\delta\dot{y} + Z'\delta\dot{z}). \quad (6)$$

Uit de vergelijkingen (5) en (6) volgt nu:

$$\Sigma m(\dot{x}\delta\dot{x} + \dot{y}\delta\dot{y} + \dot{z}\delta\dot{z}) = 0 \text{ of } \delta T = 0;$$

derhalve T, de kinetische energie van het stelsel, moet een maximum of minimum zijn.

Bertrand heeft in den derden druk van Lagrange's Mécanique analytique aangetoond, dat, als we de variatiën door δ voorgesteld niet oneindig klein nemen, hoewel we ze steeds zeer klein onderstellen, de verandering, welke de kinetische energie ondergaat voor eene andere beweging dan die, welke het stelsel werkelijk aanneemt, steeds negatief is, dat derhalve voor de werkelijke beweging T steeds een maximum is.

De hier besproken stelling is later door Delaunay in het 5de deel van het Journal de Mathématiques van Liouville langs een anderen weg, namelijk door de gewone methoden der maxima en minima, bewezen. Ook Sturm en Bertrand hebben nog andere bewijzen bekend gemaakt, van welke dat van Sturm hier nog in hoofdzaak volgt. Een stelsel materiëele punten, waarvan de coördinaten aan de m voorwaarde-vergelijkingen $M = 0$, $N = 0$ enz., die van den tijd onafhankelijk zijn, moeten voldoen, heeft eene impulsie gekregen, waarvan de componenten op de verschillende punten zijn X', Y', Z', enz., en tengevolge waarvan ze aanvangen te bewegen met snelheden;

welke tot componenten hebben $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, enz. Stel nu, dat men het stelsel eene andere beweging doet aannemen, doordat men bijv. onmiddellijk na den stoot de coördinaten der punten noodzaakt te voldoen aan nog andere voorwaarde-vergelijkingen $M' = 0$, $N' = 0$, die evenzoo onafhankelijk van den tijd zijn, dan zal daardoor de beweging, die oorspronkelijk zou aangenomen zijn, noodzakelijk veranderen, en moeten dus, ingevolge het principe van d'Alembert, de werkelijk verkregen hoeveelheden van beweging der punten van het stelsel evenwicht maken met de hoeveelheden van beweging, in tegengestelde richting genomen, die ze oorspronkelijk hadden of die hun is medegedeeld.

Brengt men dit in vergelijking, dan verkrijgt men:

$$\Sigma\, m\,\left((\dot{x} - \dot{x}_1)\,\delta x + (\dot{y} - \dot{y}_1)\,\delta y + (\dot{z} - \dot{z}_1)\,\delta z\right) = 0,$$

waarin $\dot{x}_1$, $\dot{y}_1$, $\dot{z}_1$, de componenten der snelheden voorstellen, die nu de punten aannemen.

Maar zooals we ondersteld hebben zijn de voorwaarde-vergelijkingen van t onafhankelijk, en mogen we dus de δx, δy, δz, enz. evenredig nemen aan de werkelijk aangenomen snelheden. Doen we dit, dan kan men schrijven:

$$\Sigma\, m\,(\dot{x} - \dot{x}_1)\,\dot{x}_1 + (\dot{y} - \dot{y}_1)\,\dot{y}_1 + (\dot{z} - \dot{z}_1)\,\dot{z}_1 = 0 \text{ of}$$

$$\Sigma\, m\,(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \Sigma\, m\,(\dot{x}_1^{\,2} + \dot{y}_1^{\,2} + \dot{z}_1^{\,2}) =$$
$$\Sigma\, m\,(\dot{x} - \dot{x}_1)^2 + (\dot{y} - \dot{y}_1)^2 + (\dot{z} - \dot{z}_1)^2$$

d. i. $2T - 2T_1 = \Sigma\, m \left\{(\dot{x} - \dot{x}_1)^2 + (\dot{y} - \dot{y}_1)^2 + (\dot{z} - \dot{z}_1)^2\right\}$

en daar het tweede lid noodzakelijk positief is, zoo is dus de kinetische energie T der vrije beweging grooter dan de kinetische energie T_1 der gedwongen beweging en overtreft deze met een bedrag, gelijk aan de kinetische energie der beweging, die met het verschil der snelheden bij beide bewegingen overeenkomt.

Ten slotte kunnen we door invoering van nieuwe onafhankelijke variabelen, ten getale van $3n-m$, als er m voorwaarde-vergelijkingen zijn, op de volgende wijze geheel algemeen de boven opgegeven stelling bewijzen.

Laten p_1, p_2 enz. de gegeven impulsie-componenten zijn, en $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$ enz. de hierdoor voortgebrachte snelheids-componenten, bepaald uit de vergelijkingen:

$$\dot{q}^s = \frac{dT}{dp_s};$$

stel nu, dat we zoodanige beperkingen der beweging invoeren, dat de punten van het stelsel de snelheids-componenen $\dot{q}'_1$, $\dot{q}'_2$, enz. aannemen, en laat p'_1 p'_2, enz. de impulsie-componenten voorstellen, welke deze snelheden uit den toestand van rust hadden kunnen veroorzaken, dan is de energie dezer gewijzigde beweging:

$$T_1 = \tfrac{1}{2}(p'_1 \dot{q}'_1 + p'_2 \dot{q}'_2 + \text{enz.}).$$

Nu zijn natuurlijk $p'_1 - p_1$, $p'_2 - p_2$, enz. de impulsie-componenten, die op het stelsel werken, juist ten gevolge der ingevoerde beperkingen. Beweegt zich derhalve het stelsel zoodanig, als het door deze beperkingen wordt gericht, dus met de snelheids-componenten $\dot{q}'_1$, $\dot{q}_2$, enz., dan verrichten deze impulsies daarop geen arbeid, en we hebben dan:

$$0 = (p'_1 - p_1)\dot{q}'_1 + (p_2 - p_2)\dot{q}'_2 + \text{enz.} \quad \text{of}$$

$$p_1 \dot{q}'_1 + p_2 \dot{q}'_2 + p_3 \dot{q}'_3 + \text{enz.} = p'_1 \dot{q}'_1 + p'_2 \dot{q}'_2 + p'_3 \dot{q}'_3 + \text{enz.}$$

$$p_1 \dot{q}_1 + p_2 \dot{q}_2 + p_3 \dot{q}_3 + \text{enz.} = p_1 \dot{q}_1 + p_2 \dot{q}_2 + p_3 \dot{q}_3 + \text{enz.}$$

waaruit:

$$p_1 \dot q_1 + p_2 \dot q_2 + p_3 \dot q_3 + \text{enz.} - (p'_1 \dot q'_1 + p'_2 \dot q'_2 + p'_3 \dot q'_3 + \text{enz.}) =$$
$$p_1 (\dot q_1 - \dot q'_1) + p_2 (\dot q_2 - \dot q'_2) + \text{enz.}$$

of: $$2T \quad - 2T_1 = p_1 (\dot q_1 - \dot q'_1) + p_2 (\dot q - \dot q'_2) + \text{enz.}$$

$$2(T - T_1) = (p_1 - p'_1)(\dot q_1 - \dot q'_1) + (p_2 - p'_2)(\dot q_2 - \dot q'_2) + \text{enz.}$$
$$+ p'_1 (\dot q - \dot q'_1) + p'_2 (q_2 - \dot q'_2) + \text{enz.};$$

maar dit laatste gelijk zijnde aan:

$$(p_1 - p'_1)\dot q'_1 + (p_2 - p'_2)\dot q'_2 + \text{enz.} = 0$$ [1]),

heeft men eindelijk:

$$2(T - T_1) = \Sigma (p_1 - p'_1)(\dot q_1 - \dot q'_1)$$

---

1) Stel, men heeft met twee bewegingen van een zelfde stelsel te doen, dan is:

$$p_1 = \frac{dT}{d\dot q_1},\ p_2 = \frac{dT}{d\dot q_2}, \text{enz.} \qquad p'_1 = \frac{dT'}{d\dot q'_1}, p'_2 = \frac{dT'}{d\dot q'_2}, \text{enz.}$$

$$T = \tfrac{1}{2}\left\{(q_1 q_1)\dot q_1^2 + 2(q_1 q_2)\dot q_1 \dot q_2 + (q_2 q_2)\dot q_2^2 + \text{enz.}\right\}$$

$$T' = \tfrac{1}{2}\left\{(q_1 q_1)\dot q'^2_1 + 2(q_1 q_2)\dot q'_1 \dot q_2 + (q_2 q_2)\dot q'^2_1 + \text{enz.}\right\},$$

Men leidt hieruit gemakkelijk af:

$$p'_1 \dot q_1 + p'_2 \dot q_2 + p'_3 \dot q_3 + \text{enz.} = \dot q_1 \frac{dT'}{d\dot q'_1}, + \dot q_2 \frac{dT''}{d\dot q_2} + \dot q_3 \frac{dT'}{d\dot q_3}. + \text{enz.}$$
$$= \dot q_1 \dot q'1 (q_1 q_1) + \dot q_1 \dot q'_2 (q_1 q_2) + \dot q_1 \dot q'_3 (q_1 q_3 + \text{enz.}$$
$$+ \dot q_2 \dot q'_2 (q_2 q_2) + \text{enz.}$$
$$\text{enz.}$$

Juist dezelfde uitdrukking vindt men voor $p_1 \dot q'_1 + p_2 \dot q'_2 + \text{enz.}$ door $\dot q_s$ met $\dot q'_s$ en p_s met p'_s te verwisselen, derhalve verkrijgt men:

$$p'_1 \dot q_1 + p'_2 \dot q_2 + p'_3 \dot q_3 + \text{enz.} = p_1 \dot q'_1 + p_2 \dot q'_2 + p_3 \dot q_3 + \text{enz.}$$
$$p'_1 \dot q'_1 + p'_2 \dot q'_2 + p'_3 \dot q'_3 + \text{enz.} = p'_1 \dot q'_1 + p_2 \dot q'_2 + p'_3 \dot q'_3 + \text{enz.}$$

of:

$$p'_1 (\dot q_1 - \dot q'_1) + p'_2 (\dot q_2 - \dot q'_2\} + \text{enz.} = \dot q'_1 (p_1 - p'_1) + \dot q'_2 (p_2 - p'_2) + \text{enz.}$$

Het tweede lid dezer vergelijking is natuurlijk de kinetische energie der beweging van het stelsel, als het de werking van een stoot $p_1 - p'_1$, enz. had ondervonden. Deze kinetische energie is natuurlijk positief, en dus is T voor de natuurlijke beweging een maximum. De kinetische energie, die ontstaat, wanneer op zekere materiëele punten stooten werken, is derhalve grooter, wanneer zich die punten geheel vrij, onafhankelijk van elkaar, kunnen bewegen, dan wanneer ze op een of andere wijze met elkaar samenhangen, bijv. op onveranderlijken afstand van elkaar moeten blijven, enz.

§ 8. Eene andere merkwaardige eigenschap der impulsieve beweging, met die in de voorgaande paragraaf behandelde in nauw verband, maar als het ware het omgekeerde van deze, is, dat, als van een in rust zijnd materiëel stelsel enkele deelen plotseling door een of andere oorzaak genoodzaakt worden, met bepaalde gegeven snelheden in beweging te komen, en door hunne beweging die der andere deelen te veroorzaken, de aangenomen kinetische energie van het stelsel een minimum zal zijn, d. i. kleiner zal zijn dan wanneer de beweging, door het stelsel aangenomen, eene andere was geweest, maar toch steeds de voorwaarde, betrekkelijk de snelheid van enkele bepaalde deelen, vervuld blijft.

In dit geval is dus niet de stoot gegeven, zooals in de vorige paragraaf, maar de snelheid van enkele punten. Het bewijs dezer eigenschap volgt zeer gemakkelijk uit hetgeen reeds betrekkelijk dit geval is medegedeeld in § 6, waar het als toepassing van een bijzonder bewegingsgeval van een materiëel stelsel in het algemeen is uitgewerkt. We kunnen toch, even als daar geschied is, ons die snelheden, welke enkele punten aannemen, denken als eene enkele snelheids-componente $\dot{q}_1$, voortgebracht door eene enkele impulsie-componente p_1, en aannemen, dat de andere impulsie-componenten nul zijn.

Nemen we nu aan, dat p_1', p_2', p_3', enz. voorstellen de impulsie-componenten, die eene andere beweging, waarvan $\dot{q}_1'$, $\dot{q}_2'$, $\dot{q}_3'$, enz. de snelheids-componenten zijn, zouden kunnen voortbrengen. De kinetische energie, die het stelsel bij deze beweging zal aannemen, zal dan zijn:

$$2\,T' = p_1'\,\dot{q}_1' + p_2'\,\dot{q}_2' + p_3'\,\dot{q}_3' + \text{enz.},$$

terwijl ze bij de eerste beweging zou zijn:

$$2\,T = p_1\,\dot{q}_1.$$

De verdere termen, die anders voorkomen, vallen weg, omdat p_2, p_3, enz. nul zijn.

Maar nu is vroeger aangetoond (Noot pag. 59), dat

$p_1'\dot{q}_1 + p_2'\dot{q}_2 + p_3'\dot{q}_3 + \text{enz.} = p_1\dot{q}_1' + p_2\dot{q}_2' + p_3\dot{q}_3' + \text{enz.}$ is; derhalve, daar p_2, p_3, enz. nul zijn, heeft men eenvoudig:

$$p_1'\,\dot{q}_1 + p_2'\,\dot{q}_2 + p_3'\,\dot{q}_3 = p_1\,\dot{q}_1'$$

Men kan dus $2\,T'$ ook aldus schrijven:

$$2\,T' = p_1'\,\dot{q}_1' + p_2'\,\dot{q}_2' + p_3'\,\dot{q}_3' + \text{enz.} + p_1\,\dot{q}_1' - \left\{p_1'\,\dot{q}_1 + p_2'\,\dot{q}_2 + p_3'\,\dot{q}_3 + \text{enz.}\right\}$$

of

$$2\,T' = p_1\dot{q}_1' + p_1'(\dot{q}_1' - \dot{q}_1) + p_2'(\dot{q}_2' - \dot{q}_2) + p_3'(\dot{q}_3' - \dot{q}_3) + \text{enz.}$$

Is nu ook bij die tweede beweging de voorwaarde betrekkelijk de snelheid dier enkele punten vervuld, dan beteekent dit, dat de snelheids-componente $\dot{q}_1' = \dot{q}_1$ is, en verkrijgt men:

$$2T' = 2T + p_1'(\dot{q}_1' - \dot{q}_1) + p_2'(\dot{q}_2' - \dot{q}_2) + p_3'(\dot{q}_3'(\dot{q}_3' - \dot{q}_3) + \text{enz.},$$

waarvoor men ook kan schrijven:

$$2(T' - T) = (p_1' - p_1)(\dot{q}_1' - \dot{q}_1) + (p_2' - p_2)(\dot{q}'_2 - \dot{q}_2) + \text{enz.}$$

of

$$2\,T = 2\,T' - \Sigma\,(p'_s - p_s)(\dot{q}'_s - \dot{q}_s).$$

De tweede term in het tweede lid dezer vergelijking stelt blijkbaar voor de kinetische energie der beweging van het stelsel, die overeenkomt met het verschil der snelheden in de eerste en de onderstelde tweede beweging; deze term is dus noodzakelijk positief, en derhalve is T altijd kleiner dan T', m. a. w. de energie voor de werkelijk aangenomen beweging is een minimum.

De hier algemeen bewezen eigenschap is van zeer groot belang voor de oplossing van een aantal vraagstukken, zooals wel blijken zal bij de toepassing op enkele.

Ofschoon men nu bij deze toepassingen de variabelen wel zoodanig zou kunnen kiezen, dat de snelheden, die enkele punten aannamen, als een enkele snelheids-componente te voorschijn kwamen, zoo is dit toch slechts zelden doelmatig, en, behalve dat die keuze niet altijd gemakkelijk is, is het ook niet noodig. Weet men toch, dat de kinetische energie een minimum moet zijn, en heeft men nu eens niet de veranderlijken gekozen, zooals ze boven waren aangenomen, dan heeft men in ieder geval betrekkingen tusschen die veranderlijken, die ons in staat stellen deze te bepalen volgens de bekende methoden voor het zoeken van maxima en minima van zekere uitdrukkingen, wanneer er tevens voorwaarde-vergelijkingen gegeven zijn.

§ 9. Passen we nu de bovenstaande theorie eens toe op het volgende vraagstuk:

Een lichaam B (massa m_1) kan om zekere horizontale as

(2) bewegen, welke as gedragen wordt door een tweede lichaam A (massa m), dat zelf om een vaste as (1) evenwijdig aan (2) zich kan bewegen. Door een of andere oorzaak wordt zeker punt C van het lichaam B, gelegen op een afstand c van de as (2), en wel in het vlak door de as (2) en het zwaartepunt van B gaande, in horizontale richting eene snelheid q medegedeeld, in een vlak loodrecht op de beide assen (fig. 4). Men vraagt de initiale hoeksnelheden van A en B om de assen (1) en (2) te bepalen.

Nemen we weer de onafhankelijke variabelen ψ en ϕ aan, die den stand van het stelsel bepalen, evenals in het vraagstuk § 13 van het eerste hoofdstuk en evenzoo de andere notatiën, daar gebezigd, dan heeft men voor de uitdrukking der kinetische energie van dit stelsel:

$$T = \tfrac{1}{2}\left\{mj^2\dot{\phi}^2 + m_1(a^2\ \dot{\phi}^2 + 2ab\dot{\phi}\,\dot{\psi}\,\mathrm{Cos}(\psi-\phi) + (b^2+k^2)\dot{\psi}^2)\right\}$$

terwijl de voorwaarde-vergelijking voor de snelheid van het punt C is:

$$q = a\,\dot{\phi}\,\mathrm{Cos}\,\phi + c\,\dot{\psi}\,\mathrm{Cos}\,\psi.$$

Daar T een minimum moet zijn, moet δT nul zijn, derhalve:

$$dT = mj^2\,\dot{\phi}\,d\dot{\phi} + m_1\,a^2\,\dot{\phi}\,d\dot{\phi} + m_1\,ab\dot{\psi}\,\mathrm{Cos}\,(\psi-\phi)\,d\dot{\phi} + m_1\,ab\,\dot{\phi}\,\mathrm{Cos}\,(\psi-\phi)\,d\dot{\psi} + m_1\,(b^2+k^2)\,\dot{\psi}\,d\dot{\psi} = 0. \qquad (1)$$

We hebben toch alleen $\dot{\phi}$ en $\dot{\psi}$ als de variabelen aan te zien, omdat gedurende den tijd van den stoot de coördinaten ϕ en ψ geene verandering ondergaan.

Uit de voorwaarde-vergelijking der snelheid van C leiden we eveneens af:

$$0 = a\,\mathrm{Cos}\,\phi\,d\dot{\phi} + c\,\mathrm{Cos}\,\psi\,d\dot{\psi}. \qquad (2)$$

Vermenigvuldigen we nu deze laatste vergelijking met $-\lambda$, tellen haar dan bij de eerste op, en stellen we vervolgens de coëfficiënten van $d\dot{\phi}$ en $d\dot{\psi}$ nul, dan vinden we de beide vergelijkingen:

$$
\left.\begin{aligned}
(mj^2 + m_1 a^2)\,\dot{\phi} + m_1 ab \operatorname{Cos}(\psi-\phi)\,\dot{\psi} - \lambda\, a \operatorname{Cos}\phi = 0 \\
m_1 ab \operatorname{Cos}(\psi-\phi)\,\dot{\phi} + m_1 (b^2 + k^2)\,\dot{\psi} - \lambda\, c \operatorname{Cos}\psi = 0
\end{aligned}\right\} \quad (3)
$$

die met de voorwaarde-vergelijking:

$$q = a\,\dot{\phi} \operatorname{Cos}\phi + c\,\dot{\psi} \operatorname{Cos}\psi$$

een stelsel van drie vergelijkingen van den eersten graad in $\dot{\phi}$, $\dot{\psi}$ en λ vormen, waaruit men deze grootheden kan bepalen.

Gaan we nu na, wat er van deze vergelijkingen wordt in het bijzondere geval, dat de hoeken ψ en ϕ oorspronkelijk nul of zeer klein zijn, zoodat men in dit laatste geval voor $\operatorname{Cos}(\psi-\phi)$, $\operatorname{Cos}\phi$, $\operatorname{Cos}\psi$ de eenheid nemen kan.

De drie vergelijkingen worden dan:

$$
\left.\begin{aligned}
(mj^2 + m_1 a^2)\,\dot{\phi} + m_1 ab\,\dot{\psi} - a\,\lambda = 0 \\
m_1 ab\,\dot{\phi} + m_1 (b^2 + k^2)\,\dot{\psi} - c\,\lambda = 0 \\
q = a\dot{\phi} + c\dot{\psi},
\end{aligned}\right. \quad (4)
$$

waaruit men kan afleiden:

$$\dot{\phi} = \frac{\lambda\, m_1\, a\,(bc - (b^2 + k^2))}{m_1\, a^2\, b^2\, m_1 - \ b^2 + k^2)\,(m_1\, a^2 + mj^2))}$$

$$\dot{\psi} = \frac{m_1\,(a^2\, b - a^2\, c) - mj^2\, c}{m_1\,(a^2\, b^2 - (b^2 + k^2)\,(mj^2 + m_1\, a^2))}$$

$$\lambda = q m_1 \frac{a^2\, b^2\, m_1 - (b^2 + k^1)\,(mj^2 + m_1\, a^2)}{m_1\,(-k^2 - (b-c)^2)\,a^2 - m\,c^2\,j^2}$$

We kunnen uit deze waarden van $\dot{\phi}$, $\dot{\psi}$ en λ gemakkelijk opmaken, hoe groot c moet zijn, opdat het eerste lichaam A in rust blijve, $\dot{\phi}$ dus gelijk nul zij.

Alsdan moet $bc - (b^2 + k^2) = 0$ zijn, waaruit blijkt:

$$c = \frac{b^2 + k^2}{b} = b + \frac{k^2}{b}$$

c is derhalve het slingerpunt van B voor de tweede as.

Moet $\dot{\psi}$ nul zijn, moet B zich alzoo evenwijdig verplaatsen, dan vindt men:

$$c = \frac{m_1 a^2 b}{mj^2 + m_1 a^2}$$

Uit deze algemeene oplossing laten zich die van een paar interessante bijzondere gevallen gemakkelijk bepalen.

1°. Nemen we aan, dat het lichaam B zich reduceert tot een homogene staaf, en het lichaam A in een dun onrekbaar koord zonder massa overgaat, dan moet dus $m = 0$, $m_1 = M$, en $k^2 = \frac{1}{3} b^2$ gesteld worden, en de vergelijkingen (3) gaan over in:

$$(6) \qquad \begin{aligned} Ma^2 \dot{\phi} + M a b \dot{\psi} - a \lambda = 0 \\ \tfrac{4}{3} M b^2 \dot{\phi} + M a b \dot{\phi} - c \lambda = 0 \\ q = a\dot{\phi} + c\dot{\psi} \end{aligned}$$

waaruit men terstond vindt:

$$\dot{\phi} = \frac{4b - 3c}{M ab} \lambda, \quad \dot{\psi} = \frac{3(c-b)}{M b^2} \lambda, \quad \lambda = q \frac{Mb^2}{4b^2 - 6bc + 3c^2}$$

of

$$(7) \qquad \dot{\phi} = q \frac{b(4b - 3c)}{4b^2 - 6bc + 3c^2}, \quad \dot{\psi} = q \frac{3(c-b)}{(4b^2 - 6bc + 3c^2)}.$$

$\dot{\phi}$, $\dot{\psi}$ en λ zijn nu in bekende grootheden uitgedrukt, terwijl het duidelijk is uit de eerste formule (6), dat λ voorstelt de grootte van den stoot, die deze beweging zou kunnen teweegbrengen, als hij werkte op het punt c in de richting der snelheid q.

Uit de algemeene oplossing leiden we verder af, als $b = c$ is,

$$\dot{\psi} = 0, \dot{\phi} = \frac{\lambda}{Ma}, \lambda = q\,M \text{ dus } \dot{\phi} = \frac{q}{a}.$$

Is $b = \frac{4}{3}a$, is dus c het middelpunt van botsing van B,

$$\text{dan is } \dot{\phi} = 0, \dot{\psi} = \frac{\lambda}{Mb}, \lambda = \tfrac{3}{4}\,q\,M, \text{ dus } \dot{\psi} = \frac{3\,q}{4\,b},$$

welk resultaat in overeenstemming is met hetgeen de theorie ons langs anderen weg leert; want, daar ψ de hoeksnelheid van de staaf voorstelt, heeft men:

$$\dot{\psi} = \frac{3\,q}{4\,b} = \frac{q\,Mb}{\frac{4}{3}b^2 M} = \frac{\frac{3}{4}\,Mq\,\frac{4}{3}b}{\frac{4}{3}\,b^2\,M}.$$

$\dot{\psi}$ is derhalve gelijk aan het moment, van den stoot gedeeld door het traagheidsmoment ten opzichte der draaiingsas.

Daar verder $4\,b^2 - 6\,bc + 3c^2$ steeds positief is voor bestaanbare waarden van b en c, zoo is dus voor $c < \frac{4}{3}\,b$, $\dot{\phi}$ positief. Neemt c toe tot $\frac{4}{3}\,b$ dan neemt $\dot{\phi}$ af tot nul, en wordt c grooter dan $\frac{4}{3}b$ dan is $\dot{\phi}$ negatief, $\dot{\psi}$ is nul als $c = b$, negatief voor $c < b$ en positief voor $c >$ b.

Geresumeerd:

is $c < b$, dan is $\dot{\phi}$ positief en $\dot{\psi}$ negatief;

$c > b$ en $< \frac{4}{3}\,b$, dan zijn $\dot{\phi}$ en $\dot{\psi}$ positief;

$c > \frac{4}{3}\,b$, dan is $\dot{\phi}$ negatief en $\dot{\psi}$ positief.

Is nu nog $a = \infty$, dan is $\dot{\phi} = 0$ dus ϕ constant. In dat geval beweegt zich de tweede as langs eene rechte lijn evenwijdig aan zich zelve. Voor de snelheid van verplaatsing der as vindt men:

$$a\,\dot{\phi} = \frac{b\,(4b - 3c)}{4\,b^2 - 6\,bc + 3c^2},$$

welke snelheid positief is, als $c < \frac{4}{3}\,b$, negatief, als $c > \frac{4}{3}\,b$.

Men heeft dus hier de oplossing van het vraagstuk: de initiale beweging te bepalen van een homogene staaf, die aan het uiteinde een asje draagt, dat er loodrecht opstaat. dit asje rust op een horizontaal vlak, waarin een gleuf is, waardoor de staaf heen gaat; in de richting van die gleuf ontvangt de staaf een stoot. Wat is de hoeksnelheid, waarmee deze om dit asje aanvangt te bewegen, en wat is de initiale snelheid, waarmee dit asje zelf vooruitgaat?

Nemen we ten slotte het geval, dat $a = 0$ is, dan zijn de vergelijkingen van het vraagstuk:

$$\tfrac{4}{3}\, Mb^2\, \dot{\psi} - \lambda c = 0\,,\; q = c\dot{\psi}\,,$$

waaruit:

$$\lambda = \tfrac{4}{8}\, \frac{Mb^2}{c}\, \dot{\phi} = \tfrac{4}{3}\, \frac{Mb^2}{c^2}\, q,\; \dot{\psi} = \frac{q}{c} = \frac{\lambda\, c}{\tfrac{4}{3}\, Mb^2},$$

λ is derhalve, zooals duidelijk blijkt, de grootte van den stoot. Zooals uit de verschillende verkregen uitkomsten te zien is, zijn deze in volkomen overeenstemming met de resultaten voor de eenvoudiger gevallen langs anderen weg verkregen.

De oplossing van het geval, dat het eerste lichaam A zich tot een materiëel punt in de tweede as, en het lichaam B zich tot een materiëel punt in het zwaartepunt van B reduceert, laat zich even gemakkelijk uit de algemeene oplossing afleiden. Het gemak waarmede, volgens deze methode der algemeene variabelen, die we hier hebben toegepast op de bewegings-vergelijkingen van Lagrange voor impulsieve krachten, de uitkomsten zijn verkregen ook in meer samengestelde gevallen, springt duidelijk in het oog, en maakt deze methode zeer boven andere methoden, welke men wel zou kunnen aanwenden, verkieselijk.

§ 10. Gaan we thans nog eens na, even als we in het voorgaande hoofdstuk met betrekking tot de algemeene krachts-componenten gedaan hebben, wat de algemeene impulsie-componenten eigenlijk beteekenen.

Nemen we daartoe nog eens de beide eerste formulen (3) van het voorgaande vraagstuk voor oogen, dan is het dadelijk in te zien, dat, als we ze aldus schrijven:

$$(mj^2 + m_1 a^2)\,\dot{\phi} + m_1 ab \operatorname{Cos}(\psi - \phi)\,\dot{\psi} = \lambda a \operatorname{Cos}\phi,$$

$$m_1 ab \operatorname{Cos}(\psi - \phi)\,\dot{\phi} + m_1 (b^2 + k^2)\,\dot{\psi} = \lambda c \operatorname{Cos}\psi,$$

de eerste leden dezer vergelijkingen voorstellen

$$\frac{dT}{d\dot{\phi}} \text{ en } \frac{dT}{d\dot{\psi}},$$

dat deze derhalve zijn, hetgeen we vroeger als de algemeene impulsie-componenten hebben aangemerkt, dus:

$$p_1 = \frac{dT}{d\dot{\phi}} = \lambda a \operatorname{Cos}\phi,\quad p_2 = \frac{dT}{d\dot{\psi}} = \lambda c \operatorname{Cos}\psi.$$

Daar, zooals we gezien hebben, λ moet worden aangemerkt als voor te stellen de grootte van den stoot, zoo blijkt hieruit, dat de algemeene impulsie-componenten in dit geval (nu de variabelen ϕ en ψ hoeken zijn om twee evenwijdige assen doorloopen) voorstellen: de producten van den stoot met de projectiën der afstanden van de twee aan twee op elkaar volgende assen, en van de laatste as tot het aangrijpingspunt van den stoot in de loodlijn op de richting van den stoot.

Deze producten zijn derhalve de momenten van zekere hoeveelheden van beweging, ten opzichte van de verschillende assen, die in het stelsel voorkomen, en waarom de hoeken ϕ en ψ worden beschreven.

Dit is nu geheel algemeen het geval. Evenals we in het voorgaande hoofdstuk voor de algemeene krachts-componenten vonden, in het geval dat de veranderlijken hoeken voorstellen, het moment van koppels om de verschillende draaiingsassen, evenzoo blijft ook voor de algemeene impulsie-componenten dezelfde uitspraak geldig, indien we overal in plaats van krachten hoeveelheden van beweging stellen.

De overeenkomst tusschen deze momenten van hoeveelheden van beweging en de algemeene impulsie-componenten eenerzijds, en de momenten van koppels en de algemeene krachts-componenten anderzijds, is zeer merkwaardig. We willen nog door een enkel voorbeeld toelichten, dat ook in het geval van impulsieve beweging, zoo de variabele geen hoek voorstelt, maar eene lineaire grootheid is, de algemeene impulsie-componente, daarbij behoorende, ook geen moment eener hoeveelheid van beweging voorstelt, maar zelve eene hoeveelheid van beweging of impulsie is. De overeenkomst, waarop we boven doelden, gaat bij gevolg ook in dit geval door.

Vraagstuk. Aan eene staaf, die in een plat vlak kan bewegen, en aanvankelijk in rust verkeert, wordt een stoot in dat vlak medegedeeld, waardoor het gestooten punt met eene snelheid q aanvangt te bewegen.
Welke beweging neemt die staaf aan?

Zijn u en v de componenten der snelheid, waarmee het zwaartepunt aanvangt te bewegen, en is $\dot{\phi}$ de initiale hoeksnelheid, dan moet men dus u, v en $\dot{\phi}$ bepalen, en heeft men, als x en y de coördinaten van het getroffen punt zijn, ten opzichte van assen door het zwaartepunt gaande, voor de componenten der snelheid van het getroffen punt:

$$\dot{x} = u + y\dot{\phi}, \quad \dot{y} = v - x\dot{\phi}$$

Is derhalve q die snelheid zelf, en stellen l en m de richtings-cossinussen dier snelheid voor, dan is:

$$q = (u + y\dot{\phi})\,l + m\,(v - x\dot{\phi})$$

en $$T = \tfrac{1}{2} M\,(u^2 + v^2 + k^2\,\dot{\phi}^2),$$

dus: $$dT = Mudu + Mvdv + Mk^2\,\dot{\phi}\,d\dot{\phi} = 0.$$

$$0 = mdv + ldu + (ly - mx)\,d\dot{\phi}$$

De vergelijkingen van het vraagstuk zijn nu:

$$Mu = \lambda l,\ Mv = m\lambda,\quad Mk^2\,\dot{\phi} = (ly - mx)\,\lambda,$$
$$q = l\,(u + y\,\dot{\phi}) + m\,(v - x\,\dot{\phi}),$$

waaruit u, v, $\dot{\phi}$ en k te bepalen zijn.

Nu zijn weer Mu en Mv gelijk aan $\frac{dT}{du}$ en $\frac{dT}{dv}$, de algemeene impulsie-componenten, en in dit geval gelijk aan de componenten der impulsie zelf; u en v zijn nu ook geen hoek-snelheden meer, maar stellen lineaire snelheden voor. Hiermede is het bovengezegde derhalve aangetoond.

DERDE HOOFDSTUK.

Het gebruik der bewegings-vergelijkingen voor het onderzoek naar de stabiliteit van het evenwicht.

§ 1. Wanneer een stelsel van n materiëele punten, waarop krachten werken, in zekere configuratie in evenwicht is, en het door de eene of andere oorzaak een weinig uit den evenwichtsstand wordt gebracht, en wel zoodanig, dat de verplaatsingen der verschillende punten zeer klein zijn, en ook de snelheden, welke die punten hebben, op het oogenblik, dat het stelsel weder aan zichzelf wordt overgelaten, zeer klein zijn, dan laat zich door middel van den tweeden vorm der bewegings-vergelijkingen van Lagrange gemakkelijk onderzoeken, of de afwijkingen, die het stelsel van uit dien evenwichtsstand zal bekomen, na verloop van eindige tijden zeer gering zullen blijven, dan wel of die afwijkingen voortdurend grooter zullen worden. In het eerste geval moet het evenwicht natuurlijk stabiel zijn; de beweging van het stelsel is dan eene trillende beweging om dien evenwichtsstand. In het tweede geval is het evenwicht onstandvastig.

De omstandigheid, dat de afwijkingen van den evenwichtsstand en de snelheden der punten zeer klein zijn bij den aanvang der beweging, maakt, dat we de bewegingsvergelijkingen van Lagrange, die, in den algemeenen vorm, waarin we die in het eerste hoofdstuk hebben leeren kennen, slechts in enkele gevallen onmiddellijk te integreeren zijn, tot een eenvoudiger vorm kunnen brengen, dien men volgens de bekende methoden altijd kan integreeren. Die bewegings-vergelijkingen worden dan namelijk lineaire differentiaal-vergelijkingen der tweede orde met constante coëfficiënten, en hiervan kan men altijd de integralen bepalen.

Het spreekt wel van zelf, dat deze oplossing alleen geldt, zoo lang ook nog de onderstelling omtrent de kleine afwijkingen en geringe snelheden geldt, en dus alleen voor die configuraties, welke onmiddellijk in de nabijheid van den evenwichtsstand zijn gelegen.

Gaan we na, wat er wordt van die bewegings-vergelijkingen, dan vinden we, dat, als de coördinaten der punten van het stelsel aan zekere m voorwaarde-vergelijkingen $M = 0$, $N = 0$ enz., die van den tijd onafhankelijk zijn, moeten voldoen, we wederom door middel dezer vergelijkingen het aantal van $3n$ variabelen kunnen reduceeren tot $3n - m = i$ van elkaar onafhankelijke veranderlijken q_1, q_2 enz., welke tot de oorspronkelijke coördinaten x, y, z enz. in de volgende betrekkingen zullen staan:

$$x_i = f_i(q_1, q_2, q_3, \ldots \text{enz.}),\ y_i = F_i(q_1, q_2, q_3, \ldots \text{enz.}),$$
$$z_i = \mathrm{F}_i(q_1, q_2, q_3, \ldots \text{enz.});$$

in het algemeen:

$$x = a + a_1 q_1 + a_2 q_2 + \text{enz.} + A_1 q_1^2 + A_2 q_2^2 + \text{enz.}$$
$$y = b + b_1 q_1 + b_2 q_2 + \text{enz.} + B_1 q_1^2 + B_2 q_2^2 + \text{enz.}$$
$$z = c + c_1 q_1 + c_2 q_2 + \text{enz.} + C_1 q_1^2 + C_2 q_2^2 + \text{enz.}$$
$$\text{enz.}$$

Nemen we echter aan, zooals we boven onderstelden, dat de afwijkingen uit den evenwichtsstand zeer gering zijn, en dat die evenwichtsstand zelf overeenkomt met $x=a$, $y=b$, $z=c$ of met met q_1, q_2, enz. $=0$, dan zullen we de tweede en hoogere machten dezer waarden mogen verwaarloozen in de uitdrukkingen van x, y, z enz. en dus hebben:

$$x = a + a_1 q_1 + a_2 q_2 + \text{enz.}$$
$$y = b + b_1 q_1 + b_2 q_2 + \text{enz.}$$
$$z = c + c_1 q_1 + c_2 q_2 + \text{enz.}$$

enz.

waaruit:

$$\dot{x} = a_1 \dot{q}_1 + a_2 \dot{q}_2 + \text{enz.}$$
$$\dot{y} = b_1 \dot{q}_1 + b_2 \dot{q}_2 + \text{enz.}$$
$$\dot{z} = c_1 \dot{q}_1 + c_2 \dot{q}_2 + \text{enz.}$$

Hierbij zijn natuurlijk a, a_1, a_2, b, b_1 enz. bekende constante coëfficiënten. Voor de waarde der kinetische energie T vinden we:

$$T = \tfrac{1}{2} \left\{ (q_1 q_1) \dot{q}_1^2 + 2(q_1 q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + (q_2 q_2) \dot{q}_2^2 + \text{enz.} \right\},$$

waarin dan ook weer $(q_1 q_1)$, $(q_1 q_2)$ enz. bekende coëfficiënten zijn. T is derhalve eene homogene kwadratische functie van $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$ enz. en onafhankelijk van q_1, q_2 enz.; derhalve:

$$\frac{dT}{dq_1}, \frac{dT}{dq_2}, \text{enz.}$$

zijn nul in deze bepaalde onderstelling, en de bewegingsvergelijkingen:

$$\frac{d \dfrac{dT}{d\dot{q}_k}}{dt} - \frac{dT}{dq_k} = Q_k$$

vereenvoudigen zich tot:

$$\frac{d \dfrac{dT}{d\dot{q}_k}}{dt} = Q_k$$

§ 2. Dergelijke vergelijkingen heeft men natuurlijk in even groot aantal als er onafhankelijke variabelen bestaan. Wat het tweede lid dezer vergelijkingen aangaat, zoo is dit in het algemeen van den vorm:

$$Q_k = A_1 q_1 + A_2 q_2 + A_3 q_3 + \text{enz.},$$

wanneer men ook weer q_1, q_2 enz. zeer klein onderstelt, en derhalve de tweede en hoogere machten verwaarloosd mogen worden, terwijl tevens Q_k onafhankelijk is van de differentiaal-quotiënten van q_1, q_2 enz.

De coëfficiënten A_1, A_2 enz. zijn bekende constante grootheden.

De simultane lineaire differentiaal-vergelijkingen, die nu bij het onderzoek naar de stabiliteit van het evenwicht van zeker stelsel gebruikt moeten worden, zijn:

$$\begin{aligned}
&(q_1 q_1)\ddot{q}_1 + ((q_1 q_2)\ddot{q}_2 + (q_1 q_3)\ddot{q}_3 + \text{enz.} = \\
&\qquad A_1 q_1 + A_2 q_2 + A_3 q_3 + \text{enz.} \\
&(q_2 q_1)\ddot{q}_1 + (q_2 q_2)\ddot{q}_2 + (q_2 q_3)\ddot{q}_3 + \text{enz.} = \\
&\qquad 'A_1 q_1 + 'A_2 q_2 + 'A_3 q_3 + \text{enz.} \qquad (1) \\
&(q_3 q_1)\ddot{q}_1 + (q_3 q_2)\ddot{q}_2 + (q_3 q_3)\ddot{q}_3 + \text{enz.} = \\
&\qquad ''A_1 q_1 + ''A_2 q_2 + ''A_3 q_3 + \text{enz.}
\end{aligned}$$

enz.

Deze vergelijkingen laten zich nu volgens de bekende methoden algemeen integreeren; want stellen we:

$$q_1 = e^{t\sqrt{\lambda^2}} \qquad q_2 = \mu\, e^{t\sqrt{\lambda^2}} \qquad q_3 = \nu\, e^{t\sqrt{\lambda^2}},$$

dan krijgt men:

$$\begin{aligned}
&(q_1 q_1)\lambda^2 + (q_1 q_2)\lambda^2 \mu + (q_1 q_3)\lambda^2 \nu + \text{enz.} = \\
&\qquad A_1 + A_2 \mu + A_3 \nu + \text{enz.} \\
&(q_2 q_1)\lambda^2 + (q_2 q_2)\lambda^2 \mu + (q_2 q_3)\lambda^2 \nu + \text{enz.} = \\
&\qquad 'A_1 + 'A_2 \mu + 'A_3 \nu + \text{enz.} \qquad (2)
\end{aligned}$$

enz.

of:

$$\left\{(q_1 q_1)\lambda^2 - A_1\right\} + \left\{(q_1 q_2)\lambda^2 - A_2\right\}\mu +$$
$$\left\{(q_1 q_3)\lambda^2 - A_3\right\}\nu + \text{enz.} = 0$$

$$\left\{(q_2 q_1)\lambda^2 - 'A_1\right\} + \left\{(q_2 q_2)\lambda^2 - 'A_2\right\}\mu + \qquad (3)$$
$$\left\{(q_2 q_3)\lambda^2 - 'A_3\right\}\nu + \text{enz.} = 0$$

enz,

welke vergelijkingen, ten getale van $3n - m = i$, voldoende zijn ter bepaling van λ, μ, ν enz. in even groot aantal, en daar we, door eliminatie van μ, ν enz. uit deze vergelijkingen, overhouden eene vergelijking in λ^2, zoo zullen alle wortels dezer vergelijking voldoen, en voor elken wortel kan men dan wederom een stel waarden van μ, ν enz. bepalen.

De vergelijking in λ^2 van den graad i is de determinanten-vergelijking:

$$\begin{vmatrix} (q_1 q_1)\lambda^2 - A_1 & (q_1 q_2)\lambda^2 - A_2 & (q_1 q_3)\lambda^2 - A_3 \ldots \\ (q_2 q_1)\lambda^2 - 'A_1 & (q_2 q_2)\lambda^2 - 'A_2 & (q_2 q_3)\lambda^2 - 'A_3 \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} = 0 \qquad (4)$$

Men vindt nu voor de waarden van q_1, q_2 enz. voor een enkelen wortel λ^2, ingeval deze reëel en positief is, de volgende uitdrukkingen:

$$q_1 = C_1 e^{t\sqrt{\lambda_1^2}} + C_2 e^{-t\sqrt{\lambda_1^2}}$$
$$q_2 = C_1 \mu_1 e^{t\sqrt{\lambda_1^2}} + C_2 \mu_1 e^{-t\sqrt{\lambda_1^2}} \qquad (5)$$
$$q_3 = C_1 \gamma_1 e^{t\sqrt{\lambda_1^2}} + C_2 \nu_1 e^{-t\sqrt{\lambda_1^2}}$$

enz.

Zijn echter enkele wortels negatief, dan zou men voor zoodanigen wortel gevonden hebben:

$$
\begin{aligned}
q_1 &= C_s \operatorname{Sin}(\lambda_s t + c_s) \\
q_2 &= C_s \mu_1 \operatorname{Sin}(\lambda_s t + c_s) \\
q_3 &= C_s \gamma_1 \operatorname{Sin}(\lambda_s t + c_s)
\end{aligned}
\qquad (6)
$$

enz.

Komen er een paar imaginaire wortels voor, is bijv.:

$$\lambda_1^2 = \alpha + \beta \sqrt{-1}), \quad \lambda_2^2 = \alpha - \beta \sqrt{-1}$$

dan is: $\lambda_1 = \pm(\gamma + \delta \sqrt{-1}$, en $\lambda_2 = \pm(\gamma - \delta \sqrt{-1})$

en vindt men voor q_1:

$$C' e^{(\gamma + \delta \sqrt{-1})t} + C'' e^{-(\gamma + \delta \sqrt{-1})} + C''' e^{(\gamma - \delta \sqrt{-1})t} +$$

$$C'''' e^{-(\gamma - \delta \sqrt{-1})t} =$$

$$C_1 e^{\gamma t} \operatorname{Sin}(\delta t + c_1) + C_2 e^{-\gamma t} \operatorname{Sin}(\delta t + c_2)$$

In geval er paren gelijke, hetzij reëele of imaginaire wortels voorkwamen, dan zou men voor q_1, q_2 enz. natuurlijk uitdrukkingen verkrijgen, die in plaats van den constanten factor C_s te hebben, coëfficiënten hadden, waarin ook de tijd expliciet voorkwam.

De oplossing, die we nu hebben, voor het geval, dat we van een enkelen wortel λ^2 der vergelijking (4) gebruik maken, is echter eene particuliere integraal. De algemeene krijgen we door de som van alle bijzondere oplossingen te nemen. In die som van termen in de uitdrukkingen van q_1, q_2 enz. kunnen nu voorkomen termen van den boven opgegeven vorm of wel termen met coëfficiënten, functiën van t, al naarmate de wortels λ^2 zijn positief, negatief, imaginair, of deze wortels allen zijn ongelijk of dat er paren gelijke onder voorkomen.

De hier verkregen uitkomsten moeten nu beslissen over den aard der beweging, die het stelsel aanneemt, als men het, na het uit den evenwichtsstand zeer weinig verwijderd te hebben, aan zichzelf overlaat, en wel, of die beweging periodiek is, of dat bij toenemenden tijd het stelsel zich hoe langer hoe meer van den evenwichtsstand verwijdert.

Wat de arbitraire constanten in de uitkomsten voor q_1, q_2 enz. aangaat, deze kunnen natuurlijk bepaald worden uit de initiale waarden van q_1, q_2 enz. en van $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$ enz., welke bekend ondersteld worden.

§ 3. Voordat we ons echter nader met de beschouwing dezer vergelijkingen bezig houden, willen we eerst de zaak nog eens langs een anderen weg behandelen, en wel bepaaldelijk het geval nagaan, dat er eene krachtfunctie bestaat.

Alsdan is toch, zooals bekend is:

$$Q_k = \frac{dU}{dq_k},$$

en de vergelijkingen, waarmede we te maken hebben, worden:

$$\frac{d\dfrac{dT}{d\dot{q}_k}}{dt} = \frac{dU}{dq_k}.$$

Daar de krachtfunctie U eene functie is alleen van de coördinaten, zoo is de algemeene vorm van U deze:

$$U = A + A_1 q_1 + A_2 q_2 + \text{enz.} + B_1 q_1^2 + B_2 q_2 + B_3 q_1 q_2 + \text{enz.};$$

maar nemen we nu aan, dat in den evenwichtsstand, wanneer q_1, q_2 enz. nul zijn, ook U nul is, dan is $A = 0$ en, daar de vergelijkingen

$$\frac{d\dfrac{dT}{d\dot{q}_k}}{dt} = \frac{dU}{dq_k}$$

natuurlijk ook gelden, als het stelsel in den evenwichtsstand is, derhalve als q_1, q_2 enz. en $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$ enz. nul zijn, zoo volgt hieruit terstond, daar ook

$$\frac{d\,\frac{dT}{d\dot{q}_k}}{dt}=0$$

wordt, dat A_1, A_2 enz. nul zijn.

U wordt derhalve eene homogene kwadratische functie van den tweeden graad der variabelen, zoo we namelijk ook hier onderstellen, dat we de derde en hoogere machten van q_1, q_2 enz. in de uitdrukking van U mogen verwaarloozen.

Alsdan is:

$$U=\tfrac{1}{2}\Big[[q_1\,q_1]\,q_1^2+2[q_1\,q_2]\,q_1\,q_2+[q_2\,q_2]\,q_2^2+\text{enz.}\Big]$$

waarin weer $[q_1\,q_2]$, $[q_1\,q_2]$ bekende constante coëfficiënten zijn. Daar nu bovendien ook T eene homogene kwadratische functie van $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$ enz. is, zoo kunnen we door de volgende lineaire transformatie, waarbij we andere variabelen invoeren, de uitdrukkingen van T en U vervormen, de eerste tot eene som van kwadraten der eerste differentiaalquotiënten der nieuwe variabelen ten opzichte van t, en de tweede tot eene som van kwadraten der nieuwe variabelen zelven, waarbij elk kwadraat met zekeren bepaalden factor is vermenigvuldigd.

Het is dan met de volgende substitutie, dat we te doen hebben:

$$\begin{aligned}q_1&=l_1\,x+m_1\,y+n_1\,z+\text{enz.}\\ q_2&=l_2\,x+m_2\,y+n_2\,z+\text{enz.}\\ q_3&=l_3\,x+m_3\,y+n_3\,z+\text{enz.}\\ &\text{enz.},\end{aligned}\tag{7}$$

waarbij x, y, z enz. de nieuwe variabelen voorstellen, (wel te onderscheiden van de rechthoekige coördinaten, die we gewoonlijk gebruiken).

Door deze substitutie worden de waarden van $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$ enz.:

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= l_1 \dot{x} + m_1 \dot{y} + n_1 \dot{z} + \text{enz.} \\ \dot{q}_2 &= l_2 \dot{x} + m_2 \dot{y} + n_2 \dot{z} + \text{enz.} \\ \dot{q}_3 &= l_3 \dot{x} + m_3 \dot{y} + n_3 \dot{z} + \text{enz.} \\ &\text{enz.} \end{aligned} \tag{8}$$

Het is er nu maar om te doen, deze waarden te substitueeren in de uitdrukkingen voor T en U, en dan de coëfficiënten l, m enz. zoodanig te bepalen, dat de nieuwe vorm van T en U, dien we wenschten, te voorschijn komt. Dit is nu altijd mogelijk; want het aantal coëfficiënten l, m, n enz. bedraagt $(3n-m)^2 = i^2$; zooveel vergelijkingen moeten we dus ook hebben ter bepaling dier coëfficiënten.

Na substitutie van de waarden (8) in T, stellen we de coëfficiënten der tweede machten van $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z} = 0$; dit geeft dus een stel van i vergelijkingen in l, m enz.; door vervolgens de coëfficiënten der producten $\dot{x}\,\dot{y}$, $\dot{x}\,\dot{z}$ enz. nul te stellen, verkrijgt men wederom $\frac{i\,(i-1)}{2}$ vergelijkingen, en evenzoo in de uitdrukking van U de waarden (7) substitueerende en de coëfficiënten der producten $x\,y$, $x\,z$ enz. nul stellende, krijgen we nog eens $\frac{i\,(i-1)}{2}$ vergelijkingen in l, m enz., dus te zamen $i + i\,(i-1) = i^2$ vergelijkingen ter bepaling van evenveel grootheden.

Men heeft alzoo met eene bepaalde substitutie te doen, en vindt bij gevolg, dat het in het algemeen mogelijk is T te brengen tot den vorm:

$$T = \tfrac{1}{2}\,(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 + \text{enz.}),$$

en U tot den vorm:

$$U = \tfrac{1}{2}(\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + \text{enz.})$$

waarbij α, β, γ enz. positieve of negatieve, maar steeds reëele coëfficiënten zijn, die men kan verkrijgen door de waarden van l, m enz. te substitueeren in de uitdrukkingen der coëfficiënten van x^2, y^2, z^2 enz. van U.

Zijn $\alpha = f(l_1\, m_1 \text{ enz.})$, $\beta = f_1(l_1 m_1 \text{ enz.})$, $\gamma = f_{11}(l_1 m_1 \text{ enz.})$ $f(l, m \text{ enz.}) - \alpha = 0$, $f_1(l, m, \text{enz.}) - \beta = 0$, $f_{11}(l, m \text{ enz.}) - \gamma = 0$ of

$$\Big\{f(l, m, \text{enz.}) - \alpha\Big\}\Big\{f_1(l, m, \text{enz.}) - \beta\Big\}\Big\{f_{11}(l, m, \text{enz.}) - \gamma\Big\} \text{enz.} = 0.$$

Men kan dus, daar $f(l, m \text{ enz.})$, $f_1(l, m \text{ enz.})$ enz. bekend zijn, α, β, γ enz. beschouwen als de wortels eener vergelijking van den graad i, waarvan de coëfficiënten afhangen van de bekende waarden van l, m enz., die uit den aard van het vraagstuk op de boven aangegeven wijze bepaald moeten worden, en waarvan de wortels allen reëel zijn.

Voor de bewegings-vergelijkingen vinden we nu bij deze nieuwe variabelen x, y, z enz.:

$$\ddot{x} = \alpha x, \quad \ddot{y} = \beta y, \quad \ddot{z} = \gamma z, \text{ enz., waaruit:}$$

$$x = C_{\rm I}\, e^{t\sqrt{\alpha}} + C_{\rm II}\, e^{-t\sqrt{\alpha}}$$

$$y = C_{\rm III}\, e^{t\sqrt{\beta}} + C_{\rm IV}\, e^{-t\sqrt{\beta}}$$

$$z = C_{\rm V}\, e^{t\sqrt{\gamma}} + C_{\rm VI}\, e^{-t\sqrt{\gamma}}$$

$C_{\rm I}$, $C_{\rm II}$, enz. zijn willekeurige constanten, die men uit den gegeven initialen toestand zou kunnen bepalen.

§ 4. Vergelijken we nu eens de hier verkregen uitkomsten met die, welke op pag. 75 verkregen zijn, als we ook daar aannemen, dat er eene krachtfunctie bestaat, en dat er dus voldaan is aan de voorwaarde, welke deze vordert, dat:

$$'A_1 = A_2 \qquad ''A_1 = A_3 \qquad ''A_2 = 'A_3 \text{ enz.},$$

dan vinden we, wederom λ_1^2, λ_2^2 enz. de wortels der determinanten-vergelijking (4) noemende,

$$q_1 = C_1 e^{t\sqrt{\lambda_1^2}} + C_2 e^{-t\sqrt{\lambda_1^2}} + C_3 e^{t\sqrt{\lambda_2^2}} + C_4 e^{-t\sqrt{\lambda^2_2}}$$

$$\ldots + C_k \operatorname{Sin}(\lambda_k t + c_k) \text{ enz.}$$

en dergelijke waarden voor q_2, q_3 enz.

Nemen we nu de initiale beweging van het stelsel eens zoodanig, dat de constanten C_3, C_4 enz. C_k, c_k enz. in q_1 allen nul zijn, behalve C_1 en C_2, en verder, dat q_2, q_3 enz. nul zijn, dan beperken we derhalve de beweging van het stelsel zoodanig, dat er slechts eene enkele beweging overblijft of dat er slechts nog een enkele variabele bestaat.

Nemen we ook aan, voor het geval, dat we ons van de variabelen x, y, z enz. bedienen, dat de initiale beweging zoodanig is, dat C_{III}, C_{IV}, C_V, enz. allen nul zijn, en dat verder $C_1 = C_1$ en $C_{,,} = C_2$ is, dan is het duidelijk, dat voor dit geval $x = q_1$ is, en dus dat $\alpha = \lambda_1^2$ is.

Evenzoo kunnen we andere onderstellingen maken omtrent die initiale beweging, waaruit we dan kunnen afleiden: $\beta = \lambda_2^2$, $\gamma = \lambda_3^2$ enz., en hieruit blijkt derhalve, dat α, β enz. juist zijn de wortels der determinanten-vergelijking (4), die we straks vonden, en daar deze waarden α, β enz., zooals we gezien hebben, steeds reëel zijn, zoo is dit ook het geval, indien er eene krachtfunctie bestaat, met de wortels der vergelijking (4).

Men kan echter ook onmiddellijk aantoonen, dat de vergelijking (4), indien $'A_1 = A_2$, $''A_1 = A_3$, $'A_2 = ''A_2$ enz. is reëele wortels heeft.

Immers gelijk bekend is [1]), heeft de vergelijking $\phi(\lambda) = 0$, welke men verkrijgt door den symetrischen determinant,

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & m & n & p \ldots \\ m & b-\lambda & q & r \ldots \\ n & q & c-\lambda & s \ldots \\ p & r & s & d-\lambda \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \text{enz.} \end{vmatrix},$$

nul te stellen, altijd reëele wortels. Kunnen we dus aantoonen, dat onze determinanten-vergelijking (4), in die bepaalde onderstelling eener krachtfunctie, te reduceeren is tot dezen vorm, dan is daarmede het gezochte bewijs geleverd.

We hebben de vergelijking:

$$\begin{vmatrix} A_1\lambda^2-a_1 & B_1\lambda^2-b_1 & C_1\lambda^2-c_1 \\ A_2\lambda^2-a_2 & B_2\lambda^2-b_2 & C_2\lambda^2-c_2 \\ A_3\lambda^2-a_3 & B_3\lambda^2-b_3 & C_3\lambda^2-c_3 \end{vmatrix} = 0,$$

waarin $A_2 = B_1$, $A_3 = C_1$, $B_3 = C_2$, $a_2 = b_1$, $a_3 = c_1$ $b_3 = c_2$ zijn.

Nemen we aan, dat we alleen deze drie rijen en kolommen hadden; voor meerdere rijen zou toch het bewijs op dezelfde wijze te geven zijn, doch dit nog al omslachtig worden.

We vinden dan:

$$\begin{vmatrix} A_1\lambda^2-a_1 & B_1\lambda^2-b_1 & C_1\lambda^2-c_1 \\ A_2\lambda^2-a_2 & B_2\lambda^2-b_2 & C_2\lambda^2-c_2 \\ A_3\lambda^2-a_3 & B_3\lambda^2-b_3 & C_3\lambda^2-c_3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} A_1\lambda^2-a_1 & B_1 a_1-A_1 b_2 & C_1 a_1-A_1 c_1 \\ A_2\lambda^2-a_2 & \begin{matrix}(B_2 A_1-B_1 A_2)\lambda^2 \\ +B_1 a_2-A_1 b_2\end{matrix} & \begin{matrix}(C_2 A_1-C_1 A_2)\lambda^2 \\ +B_1 a_3-A_1 b_3\end{matrix} \\ A_2\lambda^2-a_3 & \begin{matrix}(B_3 A_1-B_1 A_3)\lambda_2 \\ +(B_1 a_3-A_1 b_3)\end{matrix} & \begin{matrix}(C_3 A_1-C_1 A_3)\lambda^2 \\ +(C_1 a_3-A_1 c^3)\end{matrix} \end{vmatrix} =$$

1) Brioschi Théorie der Détermin. p. 56. Salmon. Lecons d'Algèbre supér. p. 29. Cauchy Exerc. de Mathém. IV p. 140.

$$\begin{vmatrix} A_1 \lambda^2 - a_1 & B_1 a_1 - A_1 b_1 & C_1 a_1 - A_1 c_1 \\ A_2 a_1 - A_1 a_2, & \left\{(B_2 A_1 - B_1 A_2)\lambda^2 + B_1 a_2 - A_1 b_2\right\} A_1 - A_2 (B_1 a_1 - A_1 b_1), & \left\{(C_2 A_1 - C_1 A_2)\lambda^2 + C_1 a_2 - A_1 c_2\right\} A_1 - A_2 (C_1 a_1 - A_1 c_1) \\ A_3 a_1 - A_1 a_3, & \left\{B_3 A_1 - B_1 A_3)\lambda^2 + B_1 a_3 - A_1 b_3\right\} A_1 - A_3 (B_1 a_1 - A_1 b_1), & \left\{(C_3 A_1 - C_1 A_3)\lambda^2 + C_1 a_3 - A_1 c_3\right\} A_1 - A_3 (C_1 a_1 - A_1 c_1) \end{vmatrix} = 0.$$

Nu is $A_2 a_1 - A_1 a_2 = B_1 a_1 - A_1 b_1$, $A_3 a_1 - A_1 a_3 = C_1 a_1 - A_1 c_1$, dus:

$$(B_3 A_1 - A_3 B_1) A_1 \lambda^2 + A_1 B_1 a_3 - A_1^2 b_3 - A_3 B_1 a_1 + A_1 A_3 b_1 =$$
$$(C_2 A_1 - C_1 A_2) A_1 \lambda^2 + A_1 C_1 a_2 - A_1^2 c_2 - A_2 C_1 a_1 + A_1 A_2 c_1.$$

Door deze eerste transformatie verkrijgt dus de vergelijking den vorm:

$$\begin{vmatrix} A_1 \lambda^2 - a_1 & K_1 & K_2 \\ K_1 & M\lambda^2 - N & L\lambda^2 - P \\ K_2 & L\lambda^2 - P & O\lambda^2 - Q \end{vmatrix} = 0.$$

Het is nu gemakkelijk in te zien, dat we door eene verdere soortgelijke vervorming de vergelijking eindelijk kunnen brengen tot:

$$\begin{vmatrix} A_1 \lambda^2 - a_1 & K_1 & M_1 \\ K_1 & D\lambda^2 - E & N_1 \\ M_1 & N_1 & F\lambda_2 - G \end{vmatrix} = 0;$$

derhalve tot den boven bedoelden vorm. De vergelijking (4), waarvan we zijn uitgegaan, heeft dus als deze alleen reële wortels, hetwelk te bewijzen was.

Uit het bovenstaande hebben we nu gezien, dat de verplaatsing van elk der punten van het stelsel, of de variatie van elke variabele wordt voorgesteld door eene som van termen, welke, ingeval de wortels α, β enz. allen negatief zijn, den vorm C_k Sin $(\sqrt{\xi}\, t + c_k)$ hebben. In dit geval zal dus die variatie steeds binnen enge grenzen besloten blijven, als namelijk de C_k ook zeer klein zijn en, hoe de tijd ook toeneme, q_1 bijv. kan nooit grooter worden dan, hoogstens gelijk zijn aan:

$$C_1 + C_2 + \text{enz}$$

Zijn echter enkele wortels α, β enz. positief, dan komen er exponentiëele termen,

$$C e^{t\sqrt{\alpha}} + C_1 e^{-t\sqrt{\alpha}}$$

voor; het evenwicht is dan niet stabiel, de uitdrukking voor q_1 geeft dan alleen bij benadering aan, volgens welke wet het stelsel den niet stabielen evenwichtsstand verlaat.

Ook kan het voorkomen, dat enkele wortels α, β enz. nul zijn; in dat geval is er onbepaaldheid en is het voor het onderzoek noodig, hoogere machten dan de tweede in de ontwikkeling der krachtfunctie op te nemen. Men kan echter uit de uitdrukking C_k Sin $(t\sqrt{\xi} + c_k)$ afleiden, dat als ξ afneemt tot nul, de periode der slingering om den evenwichtsstand,

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\xi}},$$

toeneemt tot oneindig.

Uit een en ander blijkt nu, dat omtrent de stabiliteit van het evenwicht van zeker stelsel beslist kan worden naar de waarden van α, β enz., of de waarden der wortels der determinanten-vergelijking in λ^2 (4). Zijn die wortels positief, dan is het evenwicht instabiel; zijn ze negatief en ongelijk, dan is het stabiel; komen er positieve en negatieve te zamen, gelijke of paren imaginaire wortels voor, dan is het evenwicht eveneens in het algemeen instabiel, tenzij de coëfficiënten der termen, die den tijd buiten het sinusteeken bevatten, nul waren, hetgeen van den initialen toestand afhangt. Voor zoodanigen toestand zou dan het evenwicht stabiel wezen; voor elke afwijking daarvan, die met die onderstelling niet overeenkomt, instabiel; derhalve is dan in het algemeen die evenwichtstoestand instabiel.

We vonden, dat, als er eene krachtfunctie bestaat, deze, op de boven aangegeven wijze te reduceeren moet wezen tot eene som van kwadraten der variabelen, en, dat, als elk dezer kwadraten voorzien is van een negatieven coëfficiënt, het evenwicht voor alle verplaatsingen stabiel is; zijn enkele coëfficiënten positief, dan is het instabiel. Maar daar we aangenomen hadden, dat U nul was in den evenwichtsstand, en we gezien hebben, dat voor eene zeer kleine toename der variabelen U negatief werd, omdat $\frac{dU}{dx}, \frac{dU}{dy}$ enz. negatief zijn, ingeval de coëfficiënten van U in dit geval verkeeren, zoo volgt daaruit, dat U een maximum is in den evenwichtsstand. We krijgen ten slotte tot resultaat: De krachtfunctie U moet, als er evenwicht is in zekeren stand van het stelsel, een maximum of minimum wezen, het eerste als dit evenwicht stabiel, het tweede als het instabiel is, terwijl voor het onverschillig evenwicht U eene constante waarde behoudt.

Bestaat er echter geen krachtfunctie, zooals we tot dus verre aannamen, dan heeft men voor het onderzoek naar de stabiliteit te doen met de determinanten-vergelijking (4), waarvan de wortels nu reëel of imaginair kunnen zijn. In het laatste geval komen in de ontwikkeling van q termen voor van den vorm $Ce^{\pm(p \pm q\sqrt{-1})t}$ of van den vorm Ce^{pt} Sin qt, welke aantoonen, dat er alsdan slingeringen om den evenwichtsstand kunnen voorkomen, waarvan de amplituden volgens de logarithmische wet met den tijd toenemen. Het evenwicht is dan natuurlijk instabiel.

§ 5. Als het eenvoudigste voorbeeld tot opheldering der ontwikkelde theorie kan men het geval beschouwen van een punt, dat zich op het hoogste of laagste punt van een verticaal geplaatsten cirkel onder de werking der zwaartekracht in evenwicht bevindt. Voor het hoogste punt is

$$\ddot{\alpha} = \frac{g}{a} \operatorname{Sin} \alpha \qquad (1)$$

als a is de straal des cirkels, en α de afwijking van dien straal van den loodlijn voorstelt.

De krachtfunctie U is dus:

$$\frac{g}{a}(1 - \operatorname{Cos} \alpha)$$

of, bij benadering, als α zeer klein wordt aangenomen:

$$\frac{g}{a}\frac{\alpha^2}{2}.$$

De vergelijking (1) wordt bij gevolg:

$$\ddot{\alpha} = \frac{g}{a}\alpha$$

$\frac{g}{a}$ positief zijnde, is het evenwicht onstandvastig.

Voor het laagste punt vindt men evenzoo:

$$\ddot{\alpha} = -\frac{g}{a} \operatorname{Sin} \alpha \text{ of bij benadering, } \ddot{\alpha} = -\frac{g}{a}\alpha,$$

$$U = \frac{g}{a}(\operatorname{Cos}\alpha - 1) = -\frac{g}{a}\frac{\alpha^2}{2} \text{(bij benadering)}$$

waaruit:
$$\alpha = A \operatorname{Sin}\left(t\sqrt{\frac{g}{a}} + B\right).$$

De periode van de slingering om dit punt is:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{a}}} = 2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$$

Een tweede voorbeeld, dat vooral geschikt is om de gevallen van standvastig en onstandvastig evenwicht bij bijzondere verplaatsingen duidelijk te maken, doet zich voor, als een punt zich in evenwicht bevindt op een ringvlak en aan de werking der zwaartekracht is onderworpen.

Stel het ringvlak zoodanig geplaatst, dat de cirkel (1), dien het middelpunt van den beschrijvenden cirkel doorloopt, verticaal zij. Door het middelpunt van dien cirkel (1) is eene verticale lijn getrokken, die het oppervlak achtereenvolgens in de vier punten A, B, C, D snijdt. A is het hoogste punt.

Een materiëel punt, in A geplaatst, zal aldaar in een toestand van instabiel evenwicht verkeeren. In het punt D geplaatst, neemt het een stabielen evenwichtsstand in, terwijl de standen B en C in het algemeen instabiel zullen zijn; maar voor eene verplaatsing bij B in een vlak, loodrecht op het vlak van cirkel (1), en voor eene verplaatsing bij C in het vlak van dien cirkel is het evenwicht eveneens stabiel.

Zij R de straal van cirkel (1), r die van den beschrijvenden cirkel. Nemen we verder ϕ en ψ, de hoeken, die het meridiaanvlak van het punt maakt met het verticale meridiaanvlak, en die de straal van het punt in den beschrijvenden cirkel maakt met den straal van cirkel (1), als de natuurlijk onafhankelijk van elkaar zijnde veranderlijken aan, dan bepalen ϕ en ψ volkomen de plaats van een punt op het oppervlak.

1°. Voor het punt A gelden dan de volgende waarden van U en T: $2\,T = r^2\,\dot{\psi}^2 + (R + r \operatorname{Cos}\psi)^2\,\dot{\phi}^2$,

$$U = g\,(R + r) - g\,(R + r \operatorname{Cos}\psi) \operatorname{Cos}\phi$$
$$= gR\,(1 - \operatorname{Cos}\phi) + gr\,(1 - \operatorname{Cos}\psi \operatorname{Cos}\phi)$$

dus bij benadering:

$$2\,U = g\,R\,\phi^2 + gr\,\psi^2, \qquad 2\,T = r^2\,\dot{\psi}^2 + (R + r)^2\,\dot{\phi}^2,$$

als de afwijkingen ϕ en ψ en de snelheden $\dot{\psi}$ en $\dot{\phi}$ zeer klein ondersteld worden.

De beide vergelijkingen, die ons voor het onderzoek naar de stabiliteit dienen, zijn nu:

$$\ddot{\phi} = \frac{Rg}{(R + r)^2}\phi, \qquad \ddot{\psi} = \frac{gr}{r^2}\,\psi = \frac{g}{r}\,\psi.$$

Het evenwicht is dus instabiel.

Voor het punt D heeft men evenzoo:

$$2T = r^2\,\dot{\psi}^2 + (R + r)^2\,\dot{\phi}^2 \text{ en } 2\,U = -\,g\,(R + r)\,\phi^2 - r\,g\,\psi^2$$

waaruit:

$$\ddot{\phi} = -\frac{g}{R + r}\phi, \qquad \ddot{\psi} = -\frac{g}{r}\psi$$

Het evenwicht is dus in dit geval standvastig.

Voor de punten B en C vindt men:

$$2\,T = r^2\,\dot{\psi}^2 + (R - r)^2\,\dot{\phi}^2$$

voor B: $$2U = g\left\{(R-r)\varphi^2 - r\psi^2\right\},$$

voor C: $$2U = g\left\{-(R-r)\varphi^2 + r\psi^2\right\};$$

zoodat voor punt B,

$$\ddot{\varphi} = \frac{g}{R-r}\varphi, \quad \ddot{\psi} = -\frac{g}{r}\psi \text{ is.}$$

Is dus de initiale afwijking van het punt uit den stand B zoodanig, dat φ constant nul is, dan is de evenwichtsstand stabiel, en de verplaatsingen van het punt geschieden volgens de wet:

$$\psi = A \operatorname{Sin}\left(t\sqrt{\frac{g}{r}} + a\right)$$

en wel in het vlak van den verticalen meridiaan.

Op dezelfde wijze vindt men voor het punt C,

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{R-r}\varphi, \quad \ddot{\psi} = \frac{g}{r}\psi.$$

Is nu hier de initiale afwijking van dien aard, dat ψ constant nul blijft, dan heeft ook C eene slingerende beweging volgens de wet:

$$\varphi = B \operatorname{Sin}\left(t\sqrt{\frac{g}{R-r}} + b\right),$$

en het punt blijft steeds in het vlak van cirkel (1).

Voor elke andere beweging is in de beide laatste gevallen het evenwicht onstandvastig. Het is duidelijk in te zien, dat bovenstaande theorie onmiddellijk is uit te breiden en dat zij van toepassing is op andere oppervlakken, waarop een punt in evenwicht zou kunnen geplaatst worden, dat onderworpen is aan de zwaartekracht of aan welke andere krachten ook. Voor het standvastig evenwicht is alleen noodig, dat het oppervlak zich aan eene zijde van het rakende vlak in dat punt uitstrekke, dat dit raakvlak in dat punt loodrecht zij op de resultante der krachten, die op het punt werken, en dat de bolle zijde van het oppervlak gericht zij naar den kant, waarheen die resultante werkt.

Evenzoo zal in het algemeen, wanneer het oppervlak gedeeltelijk aan weerszijden van het rakende vlak in het evenwichtspunt gelegen is, het evenwicht aldaar instabiel wezen. Het kan evenwel zijn, dat voor enkele bepaalde kleine afwijkingen uit dien evenwichtsstand, dit evenwicht-stabiel is.

We hadden de zooeven verkregen resultaten omtrent de al of niet stabiliteit van het evenwicht in de punten A, B, C en D ook langs een anderen weg kunnen verkrijgen, en wel door toepassing van de leer der maxima en minima. Voor het punt A bijv. hadden we toch:

$$2\,U = g\,R\phi^2 + gr\psi^2$$

derhalve:

$$\frac{d\,U}{d\,\phi} = gR\phi, \qquad \frac{d\,U}{d\,\psi} = gr\psi.$$

Deze zijn nul voor $\phi = o$ en $\psi = o$. Dus U is in A een maximum of minimum. A is derhalve een evenwichtsstand. Verder is

$$\frac{d^2 U}{d\phi^2} = g\,R, \qquad \frac{d^2\,U}{d\psi^2} = gr., \qquad \frac{d^2\,U}{d\phi\,d\psi} = 0;$$

daar nu het eerste en het tweede differentiaal-quotient positief zijn, en

$$\frac{d^2\,U}{d\phi^2} \cdot \frac{d^2\,U}{d\psi^2} > \frac{d^2\,U}{d\phi d\psi}$$

is, zooals voor het bestaan van een maximum of minimum altijd noodig is, volgt hieruit, dat U in het punt A een minimum is, dat dus het evenwicht aldaar instabiel moet wezen.

Op gelijke wijze had men ook de drie andere gevallen kunnen onderzoeken.

§ 6. Zooals we gezien hebben, worden de afwijkingen, die een stelsel materiëele punten, dat aan de werking van zekere krachten onderworpen en uit een stand van stabiel evenwicht een weinig verwijderd is, en dat met zeer kleine snelheid der punten aan zich zelf overgelaten wordt, uitgedrukt door:

$$q_1 = C_1 \operatorname{Sin}(t\sqrt{\alpha} + c_1) + C_2 \operatorname{Sin}(t\sqrt{\beta} + c_2) + \text{enz.}$$
$$q_2 = C_1 \mu_1 (\operatorname{Sin} t\sqrt{\alpha} + c_1) + C_2 \mu_2 \operatorname{Sin}(t\sqrt{\beta} + c_2) + \text{enz.}$$
enz.,

als we q_1, q_2 enz. aannemen als de veranderlijken, onafhankelijk van elkaar, die den stand van het stelsel volkomen bepalen. Van bovenstaande vergelijkingen heeft men er evenveel, als er veranderlijken zijn, terwijl ook het aantal termen in die ontwikkeling van q_1, q_2 enz. in het algemeen even groot is.

Neemt men eens aan, dat de initiale afwijking zoodanig is, dat de constanten C_2, c_2, C_3, c_3 enz. nul zijn, dan heeft men slechts te doen met de eenvoudige harmonische functiën:

$$q_1 = C_1 \operatorname{Sin}(t\sqrt{\alpha} + c_1)$$
$$q_2 = C_1 \mu_1 \operatorname{Sin}(t\sqrt{\alpha} + c_1)$$
enz.,

welke de beweging van het stelsel bepalen. Elk punt beweegt zich dan volgens zulk eene eenvoudige harmonische wet, en wel hebben al deze bewegingen dezelfde periode:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha}}$$

Men kan natuurlijk onderstellen, dat het stelsel zóó uit den evenwichtstand is gebracht, dat C_1, c_1, C_3, c_3 enz. nul zijn, dan heeft men voor q_1, q_2 enz. de uitdrukkingen:

$$q_1 = C_2 \operatorname{Sin}(t\sqrt{\beta} + c_1), \qquad q_2 = C_2 \nu \operatorname{Sin}(t\sqrt{\beta} + c_2) \text{ enz.}$$

Zoo kan men voortgaan, en men kan dus het stelsel evenveel verschillende dergelijke eenvoudige harmonische bewegingen, zoogenoemde normale bewegingen, laten uitvoeren, als er onafhankelijk variabelen zijn. Elke andere beweging, welke het stelsel zou kunnen uitvoeren, kan men samengesteld denken uit eenige of uit al die verschillende normale bewegingen. — Zijn de wortels $\sqrt{\alpha}$, $\sqrt{\beta}$ enz. onderling onmeetbaar, dan is het duidelijk, dat ook de slingertijden der normale bewegingen,

$$\frac{2\pi}{\sqrt{\alpha}}, \quad \frac{2\pi}{\sqrt{\beta}} \text{ enz.}$$

onderling onmeetbaar zullen wezen, en dat het stelsel dus nooit weder in eene configuratie zal komen, welke het al eens heeft ingenomen.

Zijn echter die wortels onderling meetbaar, verhouden ze zich als de getallen a, b, enz., en is η de grootste gemeene deeler, dan is $\sqrt{\alpha} = a\eta$, $\sqrt{\beta} = b\eta$ enz. Het is dan terstond in te zien, dat,

$$q_1 = C_1 \operatorname{Sin}(a\eta t + c_1) + C_2 \operatorname{Sin}(b\eta t + c_2) + \text{enz.}$$
$$q_2 = C_1 \mu_1 \operatorname{Sin}(a\eta t + c_1) + C_2 \nu \operatorname{Sin}(b\eta t + c_2) + \text{enz.}$$
enz.

zijnde, deze uitdrukkingen dezelfde waarde zullen verkrijgen, als de tijd toeneemt met

$$T = \frac{2\pi}{n}.$$

Deze tijd T stelt derhalve de periode der samengestelde slingering van het geheele stelsel om den evenwichtsstand voor.

§ 7. De theorie, die in de voorgaande bladzijden ontwikkeld is, laat zich op gevallen der praktijk niet onmiddellijk toepassen, omdat de onderstellingen, die we gemaakt hebben, niet te verwezenlijken zijn. We hebben toch aangenomen, dat de algemeene krachts-componenten van den vorm waren:

$$Q_k = a q_1 + b q_2 + c q_3 + \text{enz.},$$

en wel, dat er geen constante term in voorkwam, en dat ze ook onafhankelijk waren van de eerste en volgende differentiaal-quotienten der variabelen, ten opzichte van t, dus van de snelheden en versnellingen van verschillende orden en machten. In de praktijk is dit nu werkelijk niet het geval. We hebben daar verschillende weerstanden in rekening te brengen, als wrijving tusschen vaste en vloeibare lichamen, tegenstand van de lucht en nog andere weerstanden, die in de ontwikkeling van licht, warmte, en electriciteit hun grond kunnen hebben, welke weerstanden de zichtbare bewegingen, waarmede we uitsluitend te doen hebben, tegenwerken.

Om deze nu in rekening te brengen, moeten we in de ontwikkeling van Q_k termen bijvoegen, constante termen en zoodanige, welke van de snelheden, en versnellingen $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$ enz. $\ddot{q}_1$, $\ddot{q}_2$ enz. afhangen.

De betrekkelijk eenvoudige oplossing der kwestie van de stabiliteit van het evenwicht van zeker stelsel is dan niet meer te gebruiken.

De werking der wrijving tusschen twee vaste lichamen bestaat eenvoudig daarin, dat daardoor de oneindig kleine trillingen, waarmede we tot dusverre te doen hadden, onmogelijk worden, en dat door die wrijving elk stelsel, waarin ze voorkomt in rust of in evenwicht kan blijven buiten den evenwichtstand, wanneer het slechts binnen zekere, doch eindige kleine grenzen uit dien evenwichtsstand, waarin geene wrijving werkt, verwijderd is.

De wrijving laat zich, daar ze volgens de ervaring onafhankelijk is van de snelheid der over elkaar bewegende oppervlakken, als eene de beweging onmiddellijk tegenwerkende kracht in de meeste gevallen der praktische werktuigkunde in rekening brengen.

Wat de andere genoemde weerstanden aangaat, deze zijn wel afhankelijk van de beweging of van de snelheden, zooals zulks weder uit de proeven gebleken is. Wanneer de snelheden klein genoeg zijn, dan kan men, als eerste benadering, die weerstanden evenredig aannemen aan die snelheden. Zoo bijv. bij de beweging van vaste lichamen in vloeistoffen.

Deze weerstanden kunnen nu een stelsel nooit in rust of in evenwicht houden, wanneer het eenmaal, hoe weinig ook en met hoe geringe snelheid ook, uit een evenwichtsstand, waarin geen tegenstand werkte, verwijderd is. Het stelsel zal dan weer slingeringen om dien evenwichtsstand uitvoeren, en de wet dier slingeringen kan men ook in dit geval weer streng mathematisch afleiden uit de bewegingsvergelijkingen; die wet geeft ons dan wederom de noodige aanwijzingen omtrent de al of niet stabiliteit van dien evenwichtsstand.

Voor dit geval gaan dan de bewegings-vergelijkingen over in:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{d\dot{q}_1}\right) = \frac{d}{dt}(A_1 q_1 + A_2 q_2 + A_3 q_3 + \text{enz.}) + a_1 q_1 + a_2 q_2 + \text{enz.}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{d\dot{q}_2}\right) = \frac{d}{dt}('A_1 q_1 + 'A_2 q_2 + 'A_3 q_3 + \text{enz.}) + 'a_1 q_1 + 'a_2 q_2 + \text{enz.} \quad (1)$$

enz.,

waarvan volgens de theorie der simultane differentiaal-vergelijkingen eene particuliere integraal kan gesteld worden:

$$q_1 = e^{\lambda t}, \quad q_2 = \mu e^{\lambda t} \quad \text{enz.}, \qquad (2)$$

na substitutie van welke waarden deze bewegings-vergelijkingen overgaan in:

$$\left\{(q_1 q_1) + (q_1 q_2)\mu + (q_1 q_3)\nu + \text{enz.}\right\}\lambda^2 -$$

$$(A_1 + A_2\mu + A_3\nu + \text{enz.})\lambda - (a_1 + a_2\mu + a_3\nu + \text{enz.}) = 0$$

$$\left\{(q_2 q_1) + (q_2 q_2)\mu + (q_2 q_3)\nu + \text{enz.}\right\}\lambda_2 -$$

$$('A_1 + 'A_2\mu + 'A_3\nu + \text{enz.})\lambda - ('a'_1 + 'a'_2\mu + 'a'_3\nu + \text{enz.}) = 0$$

enz. (3)

Uit deze vergelijkingen ten getale van i, het aantal onafhankelijk veranderlijken, kan men weer de i grootheden λ, μ, ν enz. bepalen. Elimineert men bijv. de grootheden μ, ν enz. dan houdt men over eene vergelijking in λ van den $2i^{\text{den}}$ graad, van den vorm:

$$\begin{vmatrix} \lambda^2(q_1 q_1) - A\lambda - a_1 & \lambda^2(q_1 q_2) - A_2\lambda - a_2 \ldots \\ \lambda^2(q_2 q_1) - 'A_1\lambda - 'a_1 & \lambda_2(q_2 q_2) - 'A_2\lambda - 'a_2 \ldots \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \text{enz.} \end{vmatrix} = 0. \quad (4)$$

Elke wortel λ, uit deze vergelijking verkregen, levert door substitutie in de vergelijkingen (3) waarden voor μ, ν enz., en derhalve een stel particuliere integralen der differentiaal-vergelijkingen, en daar nu weer de algemeene integraal gevormd wordt uit de som der particuliere integralen, heeft men:

$$q_1 = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + C_3 e^{\lambda_3 t} + \text{enz.}$$

$$q_2 = C_1 \mu_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 \mu_2 e^{\lambda_2 t} + C_3 \mu_3 e^{\lambda_3 t} + \text{enz.}$$

enz.

Om nu de al of niet stabiliteit van het evenwicht van zeker stelsel te onderzoeken, kan men nu van deze uitkomsten gebruik maken: want ze geven de veranderingen aan, welke de variabelen na verloop van zekeren tijd zullen ondergaan hebben. Blijven die veranderingen binnen uiterst nauwe grenzen besloten, dan is het evenwicht stabiel, anders niet. De wortels der determinanten-vergelijking (4) in λ moeten dit nu weer beslissen. Zijn die wortels reëel, dan behooren ze negatief te wezen, daar er anders, zoo ze positief waren, termen van den vorm $C e^{\lambda t}$ in de ontwikkeling van q_1, q_2 enz. zouden voorkomen, welke bij toenemende tijden eene eindige waarde zouden aannemen, en dus zouden wijzen op eene eindige afwijking uit den evenwichtsstand.

Zijn de wortels niet reëel, dan behooren toch de reëele gedeelten dier wortels negatief te zijn, en dus zal het evenwicht alleen dan stabiel kunnen wezen, als in de uitdrukkingen voor q_1, q_2 enz. slechts termen voorkomen van den vorm:

$$C e^{-\lambda t} \text{ en } C e^{-\xi t} \operatorname{Sin} \zeta t.$$

Evenzoo zouden als de reëele deelen der niet reëele wortels positief waren, in de uitdrukkingen voor q_1, q_2, enz. termen voorkomen van den vorm:

$$C e^{\xi t} \operatorname{Sin} \zeta t.$$

Het evenwicht zou dan niet standvastig zijn, en de uitdrukkingen voor q_1, q_2 enz. zouden dan alleen aangeven, volgens welke wet het stelsel den evenwichtsstand verlaat. Zulke termen zouden wijzen op slingeringen, waarvan de amplituden met den tijd grooter worden.

§ 8. Voor het geval, dat zeker stelsel slechts eene enkele beweging kan maken, dat er dus slechts eene enkele onafhankelijk veranderlijke bestaat, wordt de bewegings-vergelijking voor het onderzoek naar de stabiliteit van het evenwicht van dit stelsel eenvoudig:

$$\ddot{q} = A\dot{q} + a q.$$

Dit geval doet zich bijv. voor, als een materiëel punt in een middenstof, welker weerstand (A is derhalve negatief), evenredig is aan de snelheid van de zich daardoor heen bewegende lichamen, in een evenwichtsstand is geplaatst, terwijl de aantrekkende kracht, die op het punt werkt, als het een weinig buiten dien stand is gebracht, evenredig is aan den afstand tot dien evenwichtsstand. Zooals bekend is, is bij de eenvoudige harmonische beweging van een punt, de uitwijking van het punt uit het middelpunt:

$$s = a \operatorname{Sin}\left(\frac{2\pi t}{T} - \varepsilon\right),$$

waarin a de amplitude der beweging, ε de epoche, en T de periode voorstelt.

Hieruit volgt:

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = -\frac{4\pi^2}{T^2}s = -n^2s,$$

wanneer n^2 voorstelt de grootte der vertraging, als de afwijking van het middelpunt de eenheid is.

Nemen we nu bij ons geval, dat het punt in eene weerstandbiedende middenstof geplaatst is en een weinig uit den evenwichtsstand verwijderd wordt, ook aan, dat de vertraging der beweging n^2 bedraagt, als de uitwijking weer één is, en als er eens geen weerstandbiedende middenstof aanwezig was, dan zou $a = -n^2$ zijn.

De periode der beweging om den evenwichtsstand is dan:

$$T = \frac{2\pi}{n}.$$

Laat verder A voorstellen de grootte der vertraging, welke het gevolg is van den weerstand der middenstof voor de eenheid van snelheid.

De bewegings-vergelijking wordt dan:

$$\ddot{q} + A\dot{q} + n^2q = 0.$$

waaruit volgt:

$$q = Ce^{-\frac{A}{2}t} \operatorname{Sin}(n_1 t + c) \quad \text{of} \quad q = e^{-\frac{A}{2}t}\left(C_1 e^{-n_{,,}t} + C_{11} e^{n_{,,}t}\right),$$

waarin C en c of C_1 en C_{11} constanten voorstellen, en

$$n_1 = \sqrt{\left(n^2 - \frac{A^2}{4}\right)}, \qquad n_{11} = \sqrt{\left(\frac{A^2}{4} - n^2.\right)}$$

De eerste uitdrukking voor q geldt, als $n > \frac{A}{2}$, de tweede als $n < \frac{A}{2}$ is.

In het eerste geval is de amplitude der slingerende beweging om den evenwichtsstand

$$C e^{-\frac{A}{2}t};$$

deze neemt dus in opvolgende gelijke tijdsdeelen met gelijke breukdeelen af, en de logarithmus dier amplitude,

$\log. C - \frac{A}{2}t$, vermindert in de tijdseenheid met $\frac{A}{2}$.

In dit geval heeft men dus, bij eene uitwijking van het punt uit den evenwichtsstand, te doen met kleine schommelingen om dien stand, en waarvan de amplitude kleiner wordt. Die evenwichtsstand is daarom stabiel. Wat de duur der schommelingen aangaat, deze bedraagt:

$$\frac{2\pi}{n_{,}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(n^2 - \frac{A^2}{4}\right)}}.$$

Ze is derhalve grooter dan wanneer er geen weerstandbiedende middenstof aanwezig is, wanneer $A = 0$ is. De slingeringen zijn echter allen van even langen duur.

In het tweede geval als $n < \frac{A}{2}$ is, heeft men:

$$q = e^{-\frac{A}{2}t}\left(C_1 e^{-n_{,,}t} + C_{11} e^{n_{,,}t}\right),$$

waarin C_1 en C_{11} noodzakelijk positieve constanten voorstellen, daar de uitwijking q steeds geacht kan worden positief te zijn bij den aanvang der beweging (als $t = 0$ is).

Men heeft nu: $n < \frac{A}{2}$ en $m_{,,} = \sqrt{\left(\frac{A^2}{4} - n_2\right)}$

waaruit volgt, dat $n_{,,} - \frac{A}{2}$ negatief voor q kan men dus schrijven:

$$q = \frac{C_1}{e^{(\frac{1}{2}A + n_{,,})t}} + \frac{C_{11}}{e^{(\frac{1}{2}A - n_{,,})t}}$$

De beide termen in het tweede lid zijn nu positief. Ze nemen wel af, als de tijd toeneemt, doch alleen voor $t = \infty$ worden ze nul. Dan is dus ook q nul, en het punt wederom in den evenwichtsstand teruggekeerd, terwijl hier tevens uit volgt, dat het nooit aan den anderen kant van dien stand kan komen, omdat q niet negatief kan wezen.

Voor het overgangsgeval, namelijk als $n = \frac{1}{2}A$ is, is de periode der schommeling ook weer oneindig groot, zooals men gemakkelijk uit de grenswaarde, die T in het eerste geval kan hebben, als n_1 tot nul nadert, kan afleiden.

§ 9. Als de eenvoudigste toepassing der theorie in dit hoofdstuk ontwikkeld, kan men nemen het geval van een materiëel punt, dat zich onder de werking van zekere krachten in eene cirkelvormige baan moet bewegen.

Nemen we die krachten geheel algemeen zoodanig aan, dat hunne algebraïsche uitdrukkingen niet beschouwd kunnen worden als de afgeleiden te zijn eener zekere functie der variabelen, dat er dus geen krachtfunctie bestaat, dan gelden algemeen de beide vergelijkingen:

$$\ddot{x} = ax + by, \qquad \ddot{y} = a_1 x + b_1 y.$$

Bestond er eene krachtfunctie, dan moest $a_1 = b$ zijn.

Stel nu $x = e^{\lambda t}$, $y = \mu e^{\lambda t}$

eene particuliere integraal dezer vergelijkingen, dan vinden we na substitutie dezer waarden:

$$\lambda^2 - a - b\,\mu = 0, \qquad \mu\,(\lambda^2 - {}_1b) - a_1 = 0.$$

Door eliminatie van μ verkrijgt men dus ter bepaling van λ de vergelijking:

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 - a & -b \\ -a_1 & \lambda^2 - b_1 \end{vmatrix} = 0$$

of

$$\lambda^4 - \lambda^2\,(a + b_1) + ab_1 - a_1 b = 0 \tag{1}$$

waaruit volgt:

$$\lambda^2 = \frac{a + b_1}{2} \pm \left\{ \frac{(a + b_1)^2}{4} - (ab_1 - a_1 b) \right\}^{\frac{1}{2}},$$

λ^2 is nu reëel en negatief, als $a + b_1$ negatief en $ab_1 - a_1 b$ positief en kleiner dan

$$\left(\frac{a + b_1}{2}\right)^2 \text{ is.}$$

Zijn deze voorwaarden vervuld, dan is, zooals we gezien hebben, het evenwicht van het punt in den stand x, y stabiel. We hebben gezegd, dat het punt zich in een cirkel zou bewegen, we hebben dus niet met twee onafhankelijk veranderlijken te doen, maar met een enkele, namelijk met den hoek θ, dien het punt, van zekeren aanvangsstand af op den cirkel heeft doorloopen.

Voeren we nu pool-coördinaten in, dan heeft men:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} = -\,r\left\{\operatorname{Sin}\theta\,\frac{d^2\theta}{dt^2} + \operatorname{Cos}\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right\} ax + by =$$

$(a \operatorname{Cos}\theta + b \operatorname{Sin}\theta)\, r$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y} = r\left\{\operatorname{Cos}\theta\,\frac{d^2\theta}{dt^2} - \operatorname{Sin}\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right\} = a_1 x + b_1 y =$$

$(a_1 \operatorname{Cos}\theta + b_1 \operatorname{Sin}\theta)\, r,$

als $x = r \operatorname{Cos} \theta$, $y = r \operatorname{Sin} \theta$ en r constant is. Uit de bovenstaande vergelijkingen leiden we af:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \ddot{\theta} = a_1 \operatorname{Cos}^2\theta - b \operatorname{Sin}^2\theta - (a - b_1) \operatorname{Sin} \theta \operatorname{Cos} \theta,$$

De evenwichtsstanden zullen nu overeenkomen met de punten op den cirkel, waarvoor de versnelling $\ddot{\theta}$ nul is. Stellen we derhalve $\ddot{\theta}$ nul, dan vinden we:

$$a_1 \operatorname{Cos}^2\theta - b \operatorname{Sin}^2\theta - (a - b_1) \operatorname{Sin} \theta \operatorname{Cos} \theta =$$

$$\frac{a_1 - b}{2} + \frac{a_1 + b}{2} \operatorname{Cos} 2\theta - \frac{(a - b_1)}{2} \operatorname{Sin} 2\theta = 0.$$

Verdraaien we echter vooraf de assen onder zekeren hoek ϕ, zoodanig, dat uit deze uitdrukking $\operatorname{Cos} 2\theta$ verdwijnt, dan vinden we, daar $\theta = \theta_1 + \phi$ is:

$$\frac{d^2\theta_1}{dt^2} = \ddot{\theta}_1 = \frac{a_1 - b}{2} \operatorname{Cos} 2\theta_1 \left(\frac{a_1 + b}{2} \operatorname{Cos} 2\phi - \frac{a - b_1}{2} \operatorname{Sin} 2\phi\right)$$

$$- \operatorname{Sin} 2\theta_1 \left(\frac{a_1 + b}{2} \operatorname{Sin} 2\phi + \frac{a - b_1}{2} \operatorname{Cos} 2\phi\right) = 0.$$

Stel nu $\frac{a_1 + b}{2} \operatorname{Cos} 2\phi - \frac{a - b_1}{2} \operatorname{Sin} 2\phi = 0$, dan wordt ϕ bepaald uit:

$$tg\, 2\phi = \frac{a_1 + b}{a - b_1},$$

en de bewegings-vergelijking gaat over in:

$$\ddot{\theta} = \frac{a_1 - b}{2} - \operatorname{Sin} 2\theta_1 \left(\frac{a_1 + b}{2} \operatorname{Sin} 2\phi + \frac{a - b_1}{2} \operatorname{Cos} 2\phi\right).$$

Nemen we vervolgens

$$\frac{a_1 - b}{2} = \varepsilon,\ a_1 + b \operatorname{Sin} 2\phi = \beta,\ (b_1 - a) \operatorname{Cos} 2\phi = \alpha,$$

dan verkrijgt men ten slotte:

$$\theta_1 = \varepsilon - \frac{\beta - \alpha}{2} \operatorname{Sin} 2\theta_1. \qquad (2)$$

De evenwichtsstanden zijn nu, als $c = 0$ dus $b = a_1$ is, in de punten waarvoor $\theta_1 = 0$, $\frac{1}{2}\pi$, π en $\frac{3}{2}\pi$ is. Dit is het geval als er eene krachtfunctie bestaat; want dan geldt juist de voorwaarde, dat $b = a_1$ of $\varepsilon = 0$ is.

Is dit echter niet het geval, dan worden die evenwichtsstanden bepaald door $\ddot{\theta}_1$ = nul te stellen, waardoor men dan vindt:

$$\theta_1 = \tfrac{1}{2}\, Bg \operatorname{Sin} \frac{2\varepsilon}{\beta-\alpha}.$$

Zij ψ die waarde van θ, dan komen die evenwichtsstanden overeen met $\theta_1 = \psi, \frac{1}{2}\pi-\psi, \pi+\psi, \frac{3}{2}\pi-\psi$.

Uit de formule (2) is op te maken, dat er alleen evenwichtsstanden mogelijk zijn, dus θ_1'' alleen nul kan worden, als $\varepsilon < \pm \frac{1}{2}(\beta-\alpha)$; deze voorwaarde stemt overeen met die, welke wij hebben afgeleid uit de bestaanbaarheid der wortels van de determinanten-vergelijking in λ^2 (1), waar we vonden, dat

$\frac{(a+b_1)^2}{4} > a\,b_1 - a_1\,b$ moest wezen. We leiden hieruit af:

$$\frac{(a+b_1)^2 - 4\,a\,b_1 + 4\,a_1\,b}{4} > 0$$

$$\frac{(a_1-b)^2}{4} = \varepsilon^2$$

$$\frac{a^2+b_1^2+2\,a\,b_1-4\,a\,b_1+4\,a_1\,b+a_1^2+b^2-2\,a_1\,b}{4} > \varepsilon^2,$$

of:
$$\frac{(a-b_1)^2+(a_1+b)^2}{4} > \varepsilon^2.$$

Nu is:

$$(\beta-\alpha)^2 = (a_1+b)^2 \operatorname{Sin}^2 2\,\phi + (b_1-a)^2 \operatorname{Cos}^2 2\,\phi -$$
$$2\,(a_1+b)\,(b_1-a) \operatorname{Cos} 2\,\phi \operatorname{Sin} 2\,\phi$$
$$= (a_1+b)^2 - (a_1+b)^2 \operatorname{Cos}^2 2\,\phi + (b_1-a)^2 \operatorname{Cos}^2 2\,\phi +$$
$$2\,(a_1+b)^2 \operatorname{Cos}^2 2\,\phi,$$

daar, in gevolge $\quad tg\, 2\,\Phi = \dfrac{a_1 + b}{a - b_1}$,

$$(a - b_1) \operatorname{Sin} 2\,\Phi = (a_1 + b) \operatorname{Cos} 2\,\Phi \text{ is},$$

dus:

$$(\beta - \alpha)^2 = (a_1 + b)^2 + \operatorname{Cos}^2 2\,\Phi\, ((a_1 + b)^2 + (b_1 - a)^2)$$

verder is $\quad \operatorname{Cos}^2 2\,\Phi = \dfrac{(a - b_1)^2}{(a - b_1)^2 + (a_1 + b)^2}$

$$= (a_1 + b)^2 + (a - b_1)^2 \text{ dus:}$$

$\frac{1}{4}(\beta - \alpha)^2 > \varepsilon^2$ of $\varepsilon < \pm \frac{1}{2}(\beta - \alpha)$, evenals boven gevonden is.

Verder blijkt ook nog uit formule (2), dat ε voorstelt eene constante kracht, die werkt loodrecht op den voerstraal van het punt.

De evenwichtsstanden $\theta_1 = \psi, \frac{1}{2}\pi - \psi, \pi + \psi, \frac{3}{2}\pi - \psi$ zijn niet allen van dezelfde soort, daar alleen in den eersten en derden het evenwicht stabiel is. Dit blijkt daaruit, dat, als θ_1 kleiner dan ψ is, de versnelling $\ddot{\theta}_1$ positief is, en als θ_1 grooter dan ψ is, $\ddot{\theta}_1$ negatief is; zij is derhalve steeds gericht naar het punt op den cirkel, waarvoor $\theta_1 = \psi$ is. Evenzoo kan men het evenwicht ook in de andere standen nagaan.

Nemen we nu eerst eens aan, dat $\varepsilon < \pm \frac{1}{2}(\beta - \alpha)$ is, en bepalen we uit de vergelijking (2) door vermenigvuldiging met $2\,\dot{\theta}\, dt$ de vergelijking der levendige kracht:

$$\dot{\theta}_1^2 = C + \tfrac{1}{2}(\beta - \alpha) \operatorname{Cos} 2\,\theta_1 + 2\,\varepsilon\,\theta_1.$$

De constante C is te bepalen uit de initiale gegevens of uit eenige andere voorwaarde, bijv. dat $\dot{\theta}_1$ nul zal zijn, als het punt ergens op den cirkel zal zijn aangekomen, nemen we aan in een instabielen evenwichtstand, dan is dit het geval voor $\theta_1 = \frac{1}{2}\pi - \psi$. We vinden dan voor C:

$$-\tfrac{1}{2}(\beta-\alpha)\operatorname{Cos}(\pi-2\psi)-\varepsilon(\pi-2\psi)$$

of $$\sqrt{\frac{(\beta-\alpha)^2}{4}-\varepsilon^2+\varepsilon\left(\pi-Bg\operatorname{Sin}\frac{2\varepsilon}{\beta-\alpha}\right)}$$

Na substitutie dezer waarde van C in de voorafgaande vergelijking verkrijgt men, door $\dot{\theta}_1 =$ nul te stellen, eene transcendentale vergelijking in θ, waarvan de kleinste negatieve wortel θ' aangeeft, tot welk punt op den cirkel men een materiëel punt in rust kan plaatsen, teruggaande van eenen stabielen evenwichtsstand, ten einde het schommelingen om dien stand uitvoere.

Wordt een punt ergens op den cirkel geplaatst tusschen het punt van een stabielen evenwichtsstand op een afstand $\frac{\pi}{2}-2\psi$ voorwaarts daarvan verwijderd, en een punt op een afstand $\psi-\theta'$ achter dien evenwichtsstand gelegen, dan zal het slingeringen uitvoeren.

Buiten die grenzen geplaatst, zal het punt zich steeds in denzelfden zin blijven voorwaarts bewegen met eene snelheid, die periodiek af en toeneemt, en waarvan het kwadraat met iedere omwenteling met $2\pi\varepsilon$ vermeerdert.

Is $\varepsilon=\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$, dan vallen de standen van standvastig en wankelbaar evenwicht twee en twee samen. Het evenwicht is dan in het algemeen instabiel. Bepaalt men weer op bovenstaande wijze de constante der vergelijking van de levendige kracht, zoo vindt men:

$$C=\varepsilon\left(\pi-Bg\operatorname{Sin}\frac{2\varepsilon}{\beta-\alpha}\right)=\varepsilon\left(\pi-\frac{\pi}{2}\right)=\varepsilon\frac{\pi}{2},\text{ dus}$$

$$\dot{\theta}_1^2=\varepsilon\frac{\pi}{2}-\varepsilon\operatorname{Cos}2\theta_1+2\varepsilon\theta_1$$

Stelt men nu weer $\dot{\theta}_1=0$, en bepaalt men de kleinste negatieve waarde van θ_1, die aan de vergelijking voldoet, dan vindt men als boven weer de grens, waar buiten men een punt op den cirkel niet kan plaatsen, zonder dat de beweging blijft doorgaan, en het punt gaat dan ook voorbij den niet stabielen evenwichtsstand.

Is $\varepsilon > \frac{1}{2}(\beta - \alpha)$. dan zijn de punten van stabielen en instabielen evenwichtsstand imaginair. — Op het punt werkt dan voortdurend eene versnellende kracht; $\ddot{\theta}_1$ kan nooit nul worden. Een punt, ergens op den cirkel in rust geplaatst, komt in beweging en beweegt zich nu eens met meer, dan weer met minder toenemende, doch steeds met aangroeiende snelheid. De versnelling dier beweging $\ddot{\theta}_1$ neemt periodiek af en toe. De toename der snelheid is zoodanig, dat het kwadraat daarvan bij elke halve omwenteling met $2\pi\varepsilon$ vermeerdert.

fig. 1.

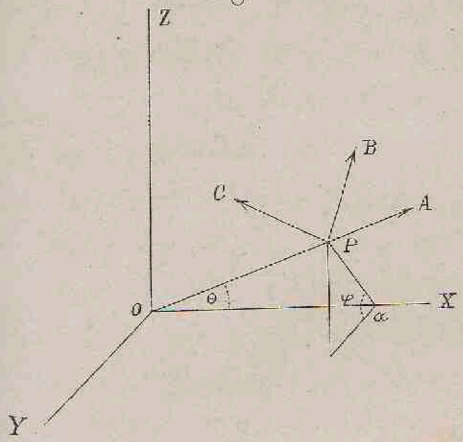


fig. 2.

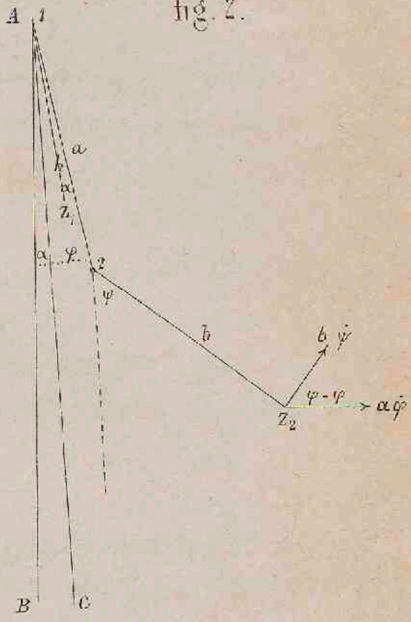


fig. 3.

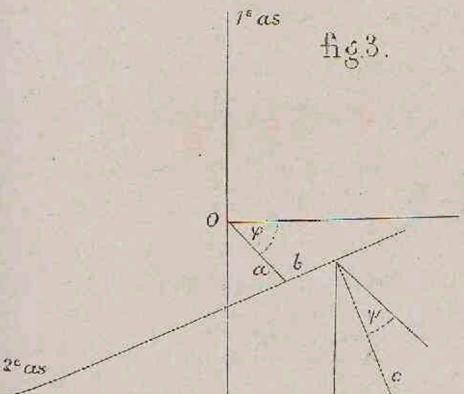
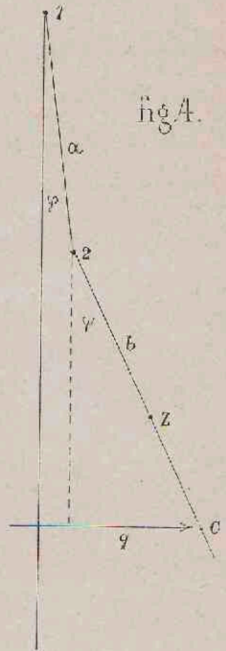


fig. 4.



STELLINGEN.

I.

De tweede vorm der bewegings-vergelijkingen van Lagrange behoort in de leerboeken der mechanica behandeld te worden.

II.

Terecht zegt *Schell* in de inleiding van zijn leerboek „*Theorie der Bewegung und der Kräfte*" dat de verdeeling der mechanica in de leer van het evenwicht en in die der beweging onlogisch is.

III.

De mechanica is een onderdeel der wiskunde.

IV.

Het is niet doelmatig de toepassingen der differentiaalrekening op meetkunde te scheiden van die der integraalrekening.

V.

De definitie, die *Sturm* (*Cours d'analyse* § 20) van differentiaal geeft, laat te wenschen over.

VI.

De toepassing van algebra op meetkunst behoort reeds vroeg te geschieden, vooral als grondslag eener latere wetenschappelijke vorming.

VII.

De wiskunde is eene wetenschap, gegrond op de ervaring.

VIII.

Het voordeel van het gebruik van logarithmen met vijf decimalen boven die met zeven decimalen wordt overdreven voorgesteld.

IX.

In de meeste leerboeken der analytische meetkunde wordt de weg der analyse te veel verlaten.

X.

Het gebruik van modellen bij het onderwijs in de stereometrie is in het algemeen af te keuren.

XI.

De beschrijvende meetkunde behoort aan de hoogescholen onderwezen te worden.

XII.

De spectroscopische onderzoekingen op hemellichamen vereischen een nauwkeuriger kennis van de absorptie-strepen des dampkrings.

XIII.

Het geluid van telegraafdraden is nog niet voldoende verklaard.

XIV.

De methode van *Burgue* ter bepaling der snelheid van het licht (*Compt. rend.* T. 78, p. 1115) verdient geen aanbeveling.

XV.

Ten einde de industrie meer nut trekke van de wetenschap, moet er meer samenwerking plaats hebben tusschen de beoefenaars der wetenschap en industriëelen.

XVI.

Daar de verdeeling der elementen in metalen en nietmetalen eene kunstmatige is, behoorde deze ook niet meer in de nieuwere leerboeken der scheikunde gevolgd te worden.

XVII.

Ten onrechte wordt in de meeste werken over kristallographie het diklinische stelsel in het geheel niet behandeld.

XVIII.

De hypothese, dat het binnenste der aarde vast is, is waarschijnlijker dan die, dat de kern vloeibaar zou zijn.

XIX.

Het is wenschelijk, dat het aantal vakken, waarin bij het eindexamen der hoogere burgerscholen wordt ondervraagd, zeer wordt beperkt.
