Utrecht University Library
Partner in Science
Universiteit Utrecht

Over rationeele functies behoorende bij een Riemannsch oppervlak

https://hdl.handle.net/1874/253444

A 40192

Phys. 12 Juli 1901

Over Rationeele Functies

behoorende bij

een Riemannsch Oppervlak.

E. VAN DE KAMER.

A. qu.
192

OVER RATIONEELE FUNCTIES

BEHOORENDE BIJ EEN

RIEMANNSCH OPPERVLAK.

RIJKSUNIVERSITEIT UTRECHT
1291 5306

OVER

RATIONEELE FUNCTIES

behoorende bij een Riemannsch Oppervlak.

PROEFSCHRIFT

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD

VAN

DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE

AAN DE RIJKS-UNIVERSITEIT TE UTRECHT,

NA MACHTIGING VAN DEN RECTOR-MAGNIFICUS

DR. W. KAPTEYN,

HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE,

VOLGENS BESLUIT VAN DEN SENAAT DER UNIVERSITEIT

TEGEN DE BEDENKINGEN VAN DE

FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE

TE VERDEDIGEN

op Vrijdag 12 Juli 1901, des namiddags ten 2 ure,

DOOR

ELIZABETH VAN DE KAMER,

geboren te MIDDELBURG.



UTRECHT,
J. VAN BOEKHOVEN,
1901.

AAN MIJNE OUDERS.

Met vreugde maak ik gebruik van de mij hier aangeboden gelegenheid, om mijn hartelijken dank te betuigen aan de hoogleeraren in de faculteit der Wis- en Natuurkunde voor hunne leiding bij mijn studiën en hunne hulp ook buiten de collegezaal. Dat een groot deel van dien welgemeenden dank U toekomt, Hooggeachte Promotor, behoef ik U wel niet te verzekeren, Uwe nooit falende belangstelling in mijn werk zal bij mij steeds in dankbare herinnering blijven.

INHOUD.

Bladz.

INLEIDING 1

HOOFDSTUK I.

Lückensatz 5

HOOFDSTUK II.

De vergelijking van het Riemannsche oppervlak af te leiden uit de rationeele functies. 48

HOOFDSTUK III.

Fundamentale geheele functies afgeleid uit de vergelijking van het oppervlak 70

HOOFDSTUK IV.

Toepassingen op integralen 1ste, 2de en 3de soort en rationeele functies. 94

ERRATA.

Pag. 114, regel 9 v.o.: $-3\lambda_3+3\lambda_2$ in plaats van $-3+3\lambda_3$ en
$2\lambda_2+\lambda_1$ „ „ „ $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+1$.

„ 114, „ 7 „ $\lambda_2=-\frac{1}{2}\lambda_1$ „ „ „ $\lambda_3=1-\lambda_1-\lambda_2$.

„ 114, „ 5 „ $R(x,y)=\dfrac{\frac{1}{2}\lambda_1\sqrt{3(y-x)}-\frac{3}{2}\lambda_1(1-x)+3\lambda_3 x}{3x}$.

„ 114, „ 4 „ λ_3 in plaats van λ_1.

„ 115, „ 1 v.b.: $-\frac{\lambda_1}{x'}$ „ „ „ $\frac{1-\lambda_1+\lambda_2}{x'}$.

„ 115, „ 2 „ $-\frac{\lambda_1}{2x'}$ „ „ „ $\frac{1}{x'}$.

„ 115, 3 laatste regels schrappen.

INLEIDING.

Volgens SCHOTTKY (Crelle, Bd. 83, Conforme Abbildung mehrfach zusammenhängender ebener Flächen) is de stelling, bekend geworden als de „Lückensatz" door Prof. WEIERSTRASS behandeld op diens college (Wintersemester 1874—75), toen hij een theorie heeft gegeven van de algebraïsche functies en hare integralen als inleiding tot de Abelsche functies.

In zijn verzamelde werken, voor zoover die tot heden verschenen zijn, komt geen hoofdstuk voor, waarin de stelling uitvoerig besproken wordt; slechts in een brief van 3 Oktober 1875 aan Prof. SCHWARTZ [1]) wordt ze in het kort vermeld. WEIERSTRASS schrijft daar het volgende:

„Ist zwischen zwei veränderlichen Gröszen x, y, irgend eine irreductibele algebraïsche Gleichung gegeben, so nenne ich die Gesammtheit der diese Gleichung befriedigende Werthepaare (x, y), das durch die Gleichung definirte *Gebilde*, jedes einzelne Paar aber eine Stelle (Punkt) dieses Gebildes.

Es werde irgend eine bestimmte Stelle (a, b) des betrachteten Gebildes ansgewählt, so lässt sich leicht zeigen, dass es unendlich viele rationale Functionen von (x, y) giebt, die nur an dieser Stelle unendlich grosz werden. Unter diesen giebt es nothwendig eine vom niedrigsten Grade, — ich

[1]) Vers. Werke, Bd. II, pag. 235.

will eine solche z_1 nennen — und es ist klar, dass dann jede andere von der Form $\alpha z_1 + \beta$ ist, wo α, β Constanten bezeichnen. Unter den übrigen, d. h. denen, die von höherem Grade als z_1 sind, wähle man eine (z_2) vom niedrigsten Grade aus, ebenso eine (z_3) von denen, deren Grad höher als der von (z_2) ist u. s. w. So erhält man eine unendliche Reihe von Functionen:

$$z_1, z_2, z_3, \ldots .$$

deren Grade:

$$\nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots .$$

eine steigende Reihe bilden, und die der doppelten Bedingung genügen, dass sie alle nur an der Stelle (a, b) unendlich grosz werden, und zugleich jede andere Function z von derselben Beschaffenheit sich in der Form:

$$\alpha_0 + \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \ldots + \alpha_m z_m$$

darstellen lässt, wo $\alpha_0, \ldots, \alpha_m$ Constanten bedeuten. Es lässt sich ferner leicht zeigen, dass in der Reihe der Zahlen:

$$\nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots .$$

von einer bestimmten an jede um eine Einheit gröszer ist, als die unmittelbar vorhergehende.

Ist $\nu_1 = 1$, so ist die Gleichung $f(x, y) = 0$ von der Beschaffenheit, dass sich alle Werthepaare (x, y) in der Form:

$$x = R_1(t) \qquad y = R_2(t)$$ [1])

---

[1]) $R_1(t)$, $R_2(t)$ stellen voor rationeele functies van t; immers is de laagst bestaanbare orde $\nu_1 = 1$, dan is er een rationeele functie z van de 1ste orde mogelijk; een bepaalde waarde $z = t$ verkrijgt die functie slechts in één punt (x, y) van het oppervlak, derhalve komt met één waarde $z = t$ ook maar één waarde van x en één waarde van y overeen; zoowel y als x kunnen dus worden voorgesteld als rationeele functies van een parameter t.

ausdrücken lassen. In jedem andern Falle müssen daher in der Reihe:

$$\nu_1 , \nu_2 , \ldots .$$

einige ganze Zahlen fehlen, die mit $k_1 , k_2 , \ldots .$ bezeichnet werden mögen

Durch sehr einfache Betrachtungen zeige ich nun dass:

erstens zwar nicht diese Zahlen k selbst, wohl aber ihre *Anzahl* für alle Stellen (a, b) dieselbe ist — ich nenne sie ϱ — und

zweitens für alle Stellen mit Ausnahme einer beschränkten Menge singulärer (und zwar algebraïsch bestimmbarer) die in Rede stehenden fehlenden Zahlen die folgenden sind:

$$1, 2, \ldots \varrho.$$

(Hieraus werden Sie erkennen, dass ϱ die Bedeutung hat, die ich sonst diesem Buchstaben gebe)."

Hoe WEIERSTRASS de stelling bewezen heeft is mij onbekend; hoogst waarschijnlijk rust zijn bewijs op algebraïsche gronden, in aanmerking genomen een gedeelte uit denzelfden brief, waarin hij zijne opvatting omtrent de behandeling der theorie van de algebraïsche functiën duidelijk kenbaar maakt.

Hij spreekt zich daar aldus uit:

. . . . „Je mehr ich über die Principien der Functionentheorie nachdenke — und ich thue dies unablässig —, um so fester wird meine Ueberzeugung, dass diese auf dem Fundamente *algebraïscher Wahrheiten* aufgebaut werden muss, und dass es deshalb nicht der richtige Weg ist, wenn umgekehrt zur Begründung einfacher und fundamentaler algebraïscher Sätze das „Transcendente" um mich kurz auszudrücken, in Anspruch genommen wird — so bestechend auch auf den ersten Anblick z. B. die Betrachtungen sein mögen, durch welche RIEMANN so viele der wichtigsten Eigenschaften algebraïscher Functionen entdeckt hat. (Dass dem Forscher so lange er sucht, jeder Weg gestattet sein muss, versteht

sich von selbst; es handelt sich nur um die systematische Begründung)."

Sedert WEIERSTRASS zijn fundamentale stelling uitsprak is men zich meer en meer gaan bezighouden met het hoofdstuk, waarop zij betrekking heeft, d. i. de rationeele functies behoorende bij een onherleidbare algebraïsche vergelijking $f(x, y) = 0$.

De zaak is op verschillende manieren aangepakt, en de zoogenaamde Lückensatz met hare toepassingen komen mij belangrijk genoeg voor, om ze in bijzonderheden na te gaan.

Ik wil dus eerst het bewijs geven van de stelling van WEIERSTRASS en het aantal en de plaats der ontbrekende orden zooveel mogelijk nader bepalen; daarna uit een stel fundamentale functies de vergelijking van het oppervlak afleiden, waarbij ze behooren, en omgekeerd de fundamentale functies opzoeken behoorende bij een gegeven oppervlak; ten slotte met behulp dier fundamentale functies een algemeene vorm geven voor de Abelsche integralen 1ste, 2de en 3de soort.

Een vrij eenvoudig bewijs van de Lückensatz, dat berust op de eigenschap van een normaalintegraal 2de soort om p perioden te bezitten, geeft BAKER in zijn „Abelian Functions;" met p wordt bedoeld het geslacht van de vergelijking $f(x, y) = 0$.

NÖTHER (Crelle, Bd. 92, pag. 301) daarentegen neemt als uitgangspunt het theorema van RIEMANN-ROCH, en ofschoon beiden de zaak algebraïsch opvatten is hun behandeling zoo zeer verschillend, dat het wel de moeite waard is beide bewijsvoeringen te beschouwen.

HOOFDSTUK I.

Lückensatz.

§ 1. *Bewijs van Baker.*

Het is mijn voornemen bij het bewijs van BAKER ook diens notatie te volgen, die uitmunt door groote beknoptheid.

Zij gegeven een onherleidbare algebraïsche vergelijking tusschen 2 variabelen x en y van den vorm:

$(x, 1)_{\lambda_1} y^n + (x, 1)_{\lambda_2} y^{n-1} + (x, 1)_{\lambda_3} y^{n-2} + \ldots + (x, 1)_{\lambda_n} = 0$

waarin $(x, 1)_{\lambda_i}$ voorstelt een algemeen polynomium in x van den graad aangegeven door den index λ_i; onder *onherleidbaar* wordt verstaan, dat het linker lid niet kan worden voorgesteld door het product van 2 rationeele uitdrukkingen van denzelfden vorm, maar van lager graad in y. Kortheidshalve schrijven we die vergelijking in het vervolg $f(x, y) = 0$.

Men verstaat onder een rationeele functie behoorende bij het oppervlak $f(x, y) = 0$ een functie, die éénwaardig is op dat oppervlak en een eindig aantal polen bezit van eindige orde; zoo'n functie kan ontbonden worden in elementen.

Nemen we de punten $(a_1, \ldots, a_k)$ aan als polen eener rationeele functie $R(x, y)$, wanneer n. l. a_i voorstelt een bepaald punt (x_i, y_i) van het oppervlak $f(x, y) = 0$. Al die punten $(a_1, \ldots, a_k)$ liggen in het eindige gebied en vallen niet

samen met de vertakkingspunten van het oppervlak; mocht die voorwaarde oorspronkelijk niet vervuld zijn, dan kan men altijd zorgen, dat er aan voldaan wordt door middel van een birationeele transformatie. De orden der polen mogen respectievelijk zijn $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k$; het principale gedeelte zij:

$$\sum_{i=1}^{i=k}\left[\frac{A^{(i)}}{x-x_i}+\frac{A_1^{(i)}}{(x-x_i)^2}+\ldots.+1\,.\,2\ldots(\nu_i-1)\,\frac{A_{\nu_i-1}^{(i)}}{(x-x_i)^{\nu_i}}\right]$$

waarin de A's constanten zijn.

Verder stelt Γ_a^x voor de normaalintegraal 2e soort [1]), die oneindig wordt in het punt a; zooals bekend is bezit ze alleen perioden aan de doorsneden b van het oppervlak. We onderstellen n. l. dat het oppervlak volgens de methode van RIEMANN tot een enkelvoudig samenhangend oppervlak is gemaakt door middel van 2 stel doorsneden; de doorsneden a, die om de openingen heengaan, de doorsneden b, die uitgaan van een punt in de doorsneden a en in dat zelfde punt terugkeeren. (Zie FORSYTH, Theory of Functions pag. 366).

Dan is:

$$R(x,y)-\sum_{i=1}^{i=k}\left[A\,\Gamma_{a_i}^x+A_1\,D_{a_i}\,\Gamma_{a_i}^x+\ldots+A_{\nu-1}\,D_{a_i}^{\nu-1}\,\Gamma_{a_i}^x\right]$$

een Abelsche integraal, die nergens oneindig wordt, die bovendien geen perioden bezit aan de doorsneden a, derhalve gelijk is aan een constante [2]).

Dus mogen we schrijven:

$$R(x,y)=C+\sum_{i=1}^{i=k}\left[A\,\Gamma_{a_i}^x+A_1\,D_{a_i}\,\Gamma_{a_i}^x+\ldots.+A_{\nu-1}\,D_{a_i}^{\nu-1}\,\Gamma_{a_i}^x\right].$$

Uit deze fundamentale formule kan vrij eenvoudig de stelling

---

[1]) BAKER schrijft voor de normaal integraal 2e soort $\Gamma_a^{x,c}$, wanneer c het punt is, waar die integraal nul wordt; in de volgende beschouwingen komt echter die nul niet voor, zoodat het onnoodig is haar aan te geven.

[2]) APPELL et GOURSAT, Théorie des Fonctions Algébriques pag. 254.

van WEIERSTRASS worden afgeleid. Immers het rechter lid van de laatste vergelijking is in 't algemeen geen éénwaardige functie, daar de normaalintegralen 2e soort perioden bezitten aan de doorsneden b; zal het een éénwaardige functie voorstellen, dan moet er aan zekere voorwaarden voldaan zijn. Die voorwaarden zullen we eerst nagaan voor een eenvoudig geval, n. l. voor een rationeele functie, die slechts enkelvoudige polen bezit, k in aantal.

Daaraan moge de volgende definitie voorafgaan.

Een punt a_r is *afhankelijk* van de punten $a_1, a_2, \ldots, a_s$ indien voor alle geheele positieve waarden van i van 1 tot p, waarin p aangeeft het aantal normaalintegralen 1ste soort = geslacht van het oppervlak, geldt de betrekking:

$$\Omega_i(a_r) = \mu_1 \Omega_i(a_1) + \mu_2 \Omega_i(a_2) + \ldots + \mu_s \Omega_i(a_s).$$

Daarin stellen $\mu_1, \ldots, \mu_s$ constanten voor en $\Omega_i(a)$ is de periode van de integraal Γ_a^x aan de i^{de} doorsnede b.

Is $s = p$, dan kunnen we de grootheden $\mu_1 \ldots \mu_s$ bepalen uit de s vergelijkingen ($a_1 \ldots a_s$ worden onafhankelijk van elkaar ondersteld).

Is $s > p$, b. v. $s - q = p$ en $q > 0$, dan kunnen we q van de grootheden μ willekeurig aannemen en de overige bepalen uit de vergelijkingen.

Dus voor $s \geq p$ is *elk* willekeurig punt a_r op het oppervlak afhankelijk van de punten $a_1 \ldots a_s$.

Volgens het voorgaande kunnen we een rationeele functie met k enkelvoudige polen $a_1 \ldots a_k$ voorstellen door:

$$R(x, y) = A_0 + A_1 \Gamma_{a_1}^x + A_2 \Gamma_{a_2}^x + \ldots + A_k \Gamma_{a_k}^x.$$

Zal het tweede lid een éénwaardige functie zijn, zooals behoort, dan moet:

$$A_1 \Omega_i(a_1) + A_2 \Omega_i(a_2) + \ldots + A_k \Omega_i(a_k) = 0 \quad i = 1, 2, \ldots, p.$$

Hieraan kan niet worden voldaan tenzij eenige van de punten $a_1 \ldots a_k$ afhangen van de overige onafhankelijke punten. Nu rangschikken we de punten zóódanig, dat $a_1, a_2, \ldots, a_s$ onafhankelijk zijn, $a_{s+1}, a_{s+2}, \ldots a_k$ afhangen

van de overige onafhankelijke punten. Hieruit mogen we afleiden, dat de volgende functiën éénwaardig zijn:

$$R_{s+1} = A_0^{s+1} + A_1^{s+1}\Gamma_{a_1}^x + A_2^{s+1}\Gamma_{a_2}^x + \ldots + A_s^{s+1}\Gamma_{a_s}^x + A_{s+1}^{s+1}\Gamma_{a_{s+1}}^x.$$

$$R_{s+2} = A_0^{s+2} + A_1^{s+2}\Gamma_{a_1}^x + A_2^{s+2}\Gamma_{a_2}^x + \ldots + A_s^{s+2}\Gamma_{a_s}^x + A_{s+2}^{s+2}\Gamma_{a_{s+2}}^x.$$

. . . . . .

$$R_k = A_0^k + A_1^k\Gamma_{a_1}^x + A_2^k\Gamma_{a_2}^x + \ldots + A_s^k\Gamma_{a_s}^x + A_k^k\Gamma_{a_k}^x.$$

Daarentegen zijn de functiën:

$$R_1 = A_0^1 + A_1^1\Gamma_{a_1}^x$$

$$R_2 = A_0^2 + A_1^2\Gamma_{a_1}^x + A_2^2\Gamma_{a_2}^x$$

. . . . . .

$$R_s = A_0^s + A_1^s\Gamma_{a_1}^x + A_2^s\Gamma_{a_2}^x + \ldots + A_s^s\Gamma_{a_s}^x,$$

stellig niet éénwaardig; hun aantal bedraagt s, als er s *onafhankelijke* punten zijn in de groep.

Breiden we nu het aantal punten uit en beschouwen een groep gerangschikt in de volgorde:

$$a_1, a_2, \ldots a_{Q_1-q_1};\ \underline{a_{Q_1-q_1+1}\ldots a_{Q_1}};\ a_{Q_1+1}\ldots a_{Q_2-q_2};$$

$$\underline{a_{Q_2-q_2+1}\ldots a_{Q_2}};\ a_{Q_2+1}\ldots a_{Q_3-q_3};\ \ldots a_{Q_{h-1}+1}\ldots a_{Q_h-q_h}$$

waarbij we onderstellen, dat de punten:

$$a_1\ldots a_{Q_1-q_1},\ a_{Q_1+1}\ldots a_{Q_2-q_2},\ a_{Q_2+1}\ldots a_{Q_3-q_3},\ a_{Q_3+1}\ldots a_{Q_h-q_h}$$

onafhankelijk zijn, en de onderstreepte punten:

$$a_{Q_1-q_1+1}\ldots a_{Q_1},\ a_{Q_2-q_2+1}\ldots a_{Q_2},\ \text{enz.}$$

afhankelijk zijn telkens van al de voorafgaande onafhankelijke punten.

We hebben nu zooveel punten genomen, dat het aantal onafhankelijke punten juist p bedraagt, derhalve gekozen:

$$(Q_1 - q_1) + (Q_2 - q_2 - Q_1) + \ldots + (Q_h - q_h - Q_{h-1}) =$$
$$= Q_h - q_1 - q_2 - \ldots - q_h = p.$$

en het aantal afhankelijke punten $= q_1 + q_2 + \ldots + q_{h-1}$.

Dan zal elk volgend punt $a_{Q_h - q_h + 1}$ afhangen van de voorgaande onafhankelijke punten, meer dan p onafhankelijke punten zijn toch niet denkbaar.

We kunnen nu vormen de rationeele functies:

$$R_{Q_1-q_1+1} = A_0^{Q_1-q_1+1} + A_1^{Q_1-q_1+1}\,\Gamma^x_{a_1} + \ldots + A^{Q_1-q_1+1}_{Q_1-q_1}\,\Gamma^x_{a_{Q_1-q_1}} + \\ + A^{Q_1-q_1+1}_{Q_1-q_1+1}\,\Gamma^x_{a_{Q_1-q_1+1}}.$$

. . . . . .

$$R_{Q_1} = A_0^{Q_1} + A_1^{Q_1}\,\Gamma^x_{a_1} + \ldots + A^{Q_1}_{Q_1-q_1}\,\Gamma^x_{a_{Q_1-q_1}} + A^{Q_1}_{Q_1}\,\Gamma^x_{a_{Q_1}}$$

$$R_{Q_2-q_2+1} = A_0^{Q_2-q_2+1} + A_1^{Q_2-q_2+1}\,\Gamma^x_{a_1} + \ldots + A^{Q_2-q_2+1}_{Q_2-q_2}\,\Gamma^x_{a_{Q_2-q_2}} + \\ + A^{Q_2-q_2+1}_{Q_2-q_2+1}\,\Gamma^x_{a_{Q_2-q_2+1}}.$$

. . . . . .

$$R_{Q_h-1} = A_0^{Q_h-1} + A_1^{Q_h-1}\,\Gamma^x_{a_1} + \ldots + A^{Q_h-1}_{Q_h-1-q_h-1}\,\Gamma^x_{a_{Q_h-1-q_h-1}} + \\ + A^{Q_h-1}_{Q_h-1}\,\Gamma^x_{a_{Q_h-1}}.$$

Daarentegen kunnen:

$$R_1 = A_0^1 + A_1^1\,\Gamma^x_{a_1}$$

$$R_2 = A_0^2 + A_1^2\,\Gamma^x_{a_1} + A_2^2\,\Gamma^x_{a_2}.$$

. . . . . .

$$R_{Q_1-q_1} = A_0^{Q_1-q_1} + A_1^{Q_1-q_1}\,\Gamma^x_{a_1} + \ldots + A^{Q_1-q_1}_{Q_1-q_1}\,\Gamma^x_{a_{Q_1-q_1}}.$$

. . . . . .

$$R_{Q_h-q_h} = A_0^{Q_h-q_h} + A_1^{Q_h-q_h}\,\Gamma^x_{a_1} + \ldots + A^{Q_h-q_h}_{Q_1-q_1}\,\Gamma^x_{a_{Q_1}-q_1} + \ldots + \\ + A^{Q_h-q_h}_{Q_h-q_h}\,\Gamma^x_{Q_h-q_h}$$

niet éénwaardig zijn tenzij al de coëfficienten A nul zijn. D. w. z. *voor elk van de onafhankelijke punten ontbreekt er een rationeele functie, die in dat punt en de voorafgaande onafhankelijke punten oneindig wordt; er zijn p en niet meer dan p van die punten, derhalve ontbreken er ook p rationeele functies.*

Uit de uitdrukkingen voor $R_{Q_1-q_1+1}, \ldots, R_{Q_h-1}$ kunnen we:

$$\Gamma^x_{a_{Q_1-q_1+1}}, \ldots, \Gamma^x_{a_{Q_1}}, \Gamma^x_{a_{Q_2-q_2+1}} \ldots \Gamma^x_{a_{Q_h-1}}$$

oplossen en uitdrukken in de overige Γ's. Na substitutie van de gevonden waarden vinden we dan een rationeele

functie, die oneindig wordt in de punten $a_1, a_2, \ldots, a_{Q_h - q_h}$:

$$R(x,y) = \nu_0 + \nu_1 \Gamma^x_{a_1} + \nu_2 \Gamma^x_{a_2} + \ldots + \nu_{Q_1 - q_1} \Gamma^x_{a_{Q_1 - q_1}} +$$
$$+ \nu_{Q_1 - q_1 + 1} R_{Q_1 - q_1 + 1} + \ldots + \nu_{Q_1} R_{Q_1} + \nu_{Q_1 + 1} \Gamma^x_{a_{Q_1 + 1}} +$$
$$+ \ldots + \nu_{Q_2 - q_2} \Gamma^x_{a_{Q_2 - q_2}} + \nu_{Q_2 - q_2 + 1} R_{Q_2 - q_2 + 1} +$$
$$+ \ldots + \nu_{Q_h - q_h} \Gamma^x_{a_{Q_h - q_h}}.$$

Zal het linker lid éénwaardig zijn, dan moet:

$$\nu_1 \Omega_i(a_1) + \ldots + \nu_{Q_1 - q_1} \Omega_i(a_{Q_1 - q_1}) + \nu_{Q_1 + 1} \Omega_i(a_{Q_1 + 1}) +$$
$$+ \ldots + \nu_{Q_2 - q_2} \Omega_i(a_{Q_2 - q_2}) + \ldots + \nu_{Q_h - q_h} \Omega_i(a_{Q_h - q_h}) = 0$$
$$i = 1, 2, \ldots, p.$$

Dat vereischt $\nu_1 = \nu_2 = \ldots = \nu_{Q_h - q_h} = 0$, omdat ondersteld werd, dat:

$$a_1 \ldots a_{Q_1 - q_1}, a_{Q_1 + 1} \ldots a_{Q_2 - q_2}, \ldots a_{Q_{h-1} + 1} \ldots a_{Q_h - q_h}$$

onafhankelijk zijn; en dus wordt de meest algemeene vorm voor de gezochte rationeele functie:

$$R(x,y) = \nu_0 + \nu_{Q_1 - q_1 + 1} R_{Q_1 - q_1 + 1} + \ldots + \nu_{Q_1} R_{Q_1} +$$
$$+ \nu_{Q_2 - q_2 + 1} R_{Q_2 - q_2 + 1} + \ldots + \nu_{Q_{h-1}} R_{Q_{h-1}}.$$

De functie bevat $q_1 + q_2 + \ldots + q_{h-1} + 1$ willekeurige constanten, d. i. evenveel als het aantal afhankelijke punten bedraagt plus één additieve constante.

§ 2.

Als limietgeval kunnen we beschouwen een rationeele functie, die slechts in één punt a van het oppervlak oneindig wordt en wel tot de n^{de} orde. Die functie kan geschreven worden in den vorm:

$$R_n = A_0 + A_1 \Gamma^x_a + A_2 D_a \Gamma^x_a + \ldots + A_n D^{n-1}_a \Gamma^x_a,$$

waarin $A_n \neq 0$.

De voorwaarde, dat R_n een éénwaardige functie voorstelt is:

$$A_1 \Omega_i(a) + A_2 D_a \Omega_i(a) + \ldots + A_n D^{n-1}_a \Omega_i(a) = 0 \quad i = 1, 2, \ldots p.$$

Hieraan kan slechts worden voldaan, als een van de kolommen afhangt van de overige, in denzelfden zin, als in het voorgaande geval, d. i. indien:

$$D_a^m \Omega_i(a) = \mu_1 \Omega_i(a) + \ldots + \mu_m D_a^{m-1} \Omega_i(a) + \\ + \mu_{m+2} D_a^{m+1} \Omega_i(a) + \ldots + \mu_n D_a^{n-1} \Omega_i(a).$$

voor $i = 1, 2, \ldots, p$.

Zoo krijgen we een splitsing der kolommen, sommige, die onafhankelijk, andere, die lineair afhankelijk van de overige zijn. Als we n groot genoeg kiezen bedraagt het aantal der onafhankelijke kolommen p, nooit meer dan p. Er zijn dus p waarden van n, die we $k_1, k_2, \ldots, k_p$ zullen noemen, waarvoor geen rationeele functie kan bestaan, in één punt van het oppervlak en tot één van de orden $k_1, k_2, \ldots, k_p$ oneindig.

In dezen vorm heeft WEIERSTRASS de Lückensatz gegeven en tegelijk definieert hij het geslacht van een oppervlak, als het aantal ontbrekende orden van rationeele functies oneindig in één enkel punt van dat oppervlak.

§ 3.

We kunnen nu aantoonen, dat de index van het laatste punt, waarvoor geen correspondeerende rationeele functie bestaat, niet grooter kan zijn dan $2p - 1$.

Beschouwen we nog eens de puntenreeks uit § 1, maar laten voorloopig het laatste punt weg; dan hebben we de punten:

$$a_1, a_2, \ldots a_{Q_1 - q_1}, a_{Q_1 - q_1 + 1}, \ldots a_{Q_1}, a_{Q_1 + 1}, \ldots a_{Q_2 - q_2}, \ldots a_{Q_h - q_h - 1}.$$

Volgens de definitie op pag. 7 is een punt a afhankelijk van de punten $b_1, b_2, \ldots, b_r$, wanneer:

$$\Omega_i(a) = \mu_1 \Omega_i(b_1) + \mu_2 \Omega_i(b_2) + \ldots + \mu_r \Omega_i(b_r) \quad . \quad (\alpha)$$

$i = 1, 2, \ldots, p$.

Vermenigvuldigen we die p vergelijkingen respectievelijk

met willekeurige coëfficienten $A_1, A_2, \ldots, A_p$ en tellen de kolommen afzonderlijk op, dan zal blijkbaar:

$$A_1\,\Omega_1(a) + A_2\,\Omega_2(a) + \ldots + A_p\,\Omega_p(a) = 0. \quad . \quad (\beta)$$

het gevolg zijn van:

$$\left.\begin{aligned} A_1\,\Omega_1(b_1) + A_2\,\Omega_2(b_1) + \ldots + A_p\,\Omega_p(b_1) &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ A_1\,\Omega_1(b_r) + A_2\,\Omega_2(b_r) + \ldots + A_p\,\Omega_p(b_r) &= 0 \end{aligned}\right\}. \quad (\gamma)$$

Is omgekeerd het eerste lid van (β) nul tengevolge van het bestaan der betrekkingen (γ) dan geldt ook de vergelijking (α) en is het punt a dus afhankelijk van de punten $(b_1 \ldots b_r)$.

Zal er voldaan zijn aan:

$$\Omega(x) = A_1\,\Omega_1(x) + A_2\,\Omega_2(x) + \ldots + A_p\,\Omega_p(x) = 0$$

in al de punten $a_1, a_2, \ldots, a_{Q_h - q_h - 1}$, dan moeten daarvoor evenveel lineair onafhankelijke functies van den vorm $\Omega(x)$ nul worden, als er onafhankelijke punten in de reeks voorkomen. Dat aantal bedraagt voor de beschouwde reeks:

$$Q_1 - q_1 + (Q_2 - q_2 - Q_1) + \ldots + (Q_h - q_h - 1 - Q_{h-1}) = \\ = Q_h - q_1 - \ldots - q_h - 1$$

terwijl in dit geval $Q_h - q_1 - \ldots - q_h - 1 = p - 1$ en niet gelijk p, omdat we het punt $Q_h - q_h$ weggelaten hebben.

Uit die lineaire betrekkingen, voor het punt $a_{Q_1 - q_1}$ te schrijven in den vorm:

$$A_1\,\Omega_1(a_{Q_1 - q_1}) + A_2\,\Omega_2(a_{Q_1 - q_1}) + \ldots + A_p\,\Omega_p(a_{Q_1 - q_1}) = 0$$

kunnen we $Q_h - q_1 - \ldots - q_h - 1$ coëfficienten A oplossen, zoodat er slechts $p - (Q_h - q_1 - \ldots - q_h - 1)$ overblijven, waarover we vrij beschikken kunnen; dat geeft dus nog $p - (Q_h - q_1 - \ldots - q_h - 1)$ functies $\Omega(x)$ die nul worden in al de punten $a_1, \ldots a_{Q_h - q_h - 1}$. Noemen we het aantal lineair onafhankelijke grootheden $\Omega(x)$, die verdwijnen in al de beschouwde punten $\tau + 1$, dan is dus:

$$\tau + 1 = p - (Q_h - q_1 - \ldots - q_h - 1).$$

Zij $Q = Q_h - q_h - 1$ het totale aantal punten; $q + 1$ het aantal willekeurige constanten, dat optreedt in de meest algemeene rationeele functie, die de Q gegeven punten tot enkelvoudige polen heeft, dan is zooals we weten $q + 1 =$ aantal afhankelijke punten vermeerderd met één, dus $q + 1 = q_1 + q_2 + \ldots + q_{h-1} + 1$; en uit het bovenstaande volgt onmiddellijk:

$$Q - q = p - (\tau + 1)$$

een uitdrukking voor het bekende theorema het eerst afgeleid door RIEMANN (Ges. Werke, 1876, pag. 101) en algemeen bewezen door ROCH (Crelle 64).

Het is bekend, dat de perioden aan de doorsneden b van het Riemannsche oppervlak van de normaalintegralen 2de soort op het teeken na gelijk zijn aan de afgeleiden van de p normaalintegralen 1ste soort [1]); schrijven we de laatste als volgt:

$$v_1 = \int \frac{\varphi_1(x, y)}{f_y'} dx; \ldots; \qquad v_p = \int \frac{\varphi_p(x, y)}{f_y'} dx$$

dan gaat na substitutie $\Omega(x)$ over in:

$$A_1 \varphi_1(x, y) + A_2 \varphi_2(x, y) + \ldots + A_p \varphi_p(x, y) = 0.$$

Die functie wordt nul in $2p - 2$ punten, want we kunnen haar interpreteeren als een toegevoegde van den graad $(m - 3)$, indien we $f(x, y) = 0$ interpreteeren als een vlakke kromme van den m^{den} graad. Die toegevoegde snijdt de kromme $f(x, y) = 0$ in hoogstens $(2p - 2)$ punten (behalve de veelvoudige punten), $2p - 2$ is dus het maximum aantal nullen van $\Omega(x)$.

Is het aantal punten Q, waar de rationeele functie oneindig tot de eerste orde moet worden grooter dan $2p - 2$, dan is het niet mogelijk er een toegevoegde van den graad $m - 3$ doorheen te leggen; derhalve bedraagt het aantal

---

[1]) APPELL et GOURSAT, pag. 155, pag. 320.

lineair onafhankelijke functies $\Omega(x)$, dat nul wordt in die punten:

$$\tau + 1 = 0.$$

Voor de beschouwde puntenreeks bedroeg het aantal onafhankelijke punten:

$$Q_h - q_1 - \ldots - q_h - 1 = p - 1;$$

derhalve wordt er, volgens:

$$\tau + 1 = p - (Q_h - q_1 - \ldots - q_h - 1) = 1$$

in al die punten ééne functie $\Omega(x)$ nul; hun aantal kan dus niet grooter zijn dan $2p - 2$, want zooals we gezien hebben wordt er in meer dan $2p - 2$ punten geen enkele $\Omega(x)$ nul; dus is:

$$Q_h - q_h - 1 \geqslant 2p - 2$$

of

$$Q_h - q_h \geqslant 2p - 1$$

hetgeen te bewijzen was.

Uit het bewezene in § 1 en 2 volgde, dat p orden ontbreken; alleen bestond nog de mogelijkheid, dat het aantal p eerst werd bereikt, wanneer we een oneindige reeks van punten beschouwden; uit hetgeen nu is aangetoond, blijkt, dat het aantal p zich onder een beperkt aantal punten bevindt.

§ 4.

Voorbeeld:

$V = \int \frac{\varphi(x, y)}{f'_y} dx$ moge voorstellen een Abelsche integraal 1ste soort, dan is $\varphi(x, y) = 0$ een toegevoegde van den graad $(m - 3)$ en we noemen de snijpunten van die toegevoegde met $f(x, y) = 0$ $a_1, a_2, \ldots, a_{2p-2}$; a zij een willekeurig punt op de kromme $f(x, y) = 0$, dat echter niet mag samenvallen met een van de nulpunten van $\varphi(x, y) = 0$.

Er kan dan niet bestaan een rationeele functie, die in de punten $a_1, a_2, \ldots a_{2p-2}, a$ oneindig wordt tot de eerste

orde; daar het punt a den index $2p-1$ zou verkrijgen wordt hier het uiterste geval bereikt, dat volgens de voorgaande stelling mogelijk is.

Het aantal willekeurige constanten, dat die functie zou moeten bevatten is volgens het theorema van RIEMANN—ROCH:

$$q+1 = 2p-1-p+1 = p,$$

immers $\tau+1$ is nul, omdat het aantal punten, waar de functie oneindig tot de eerste orde moet worden grooter is dan $2p-2$.

Zal nu:

$$\lambda + \lambda_1 \Gamma^x_{a_1} + \ldots + \lambda_{2p-2} \Gamma^x_{a_{2p-2}} + \lambda_{2p-1} \Gamma^x_a$$

een éénwaardige functie voorstellen, dan moet:

$$\lambda_1 \Omega_i(a_1) + \ldots + \lambda_{2p-2} \Omega_i(a_{2p-2}) + \lambda_{2p-1} \Omega_i(a) = 0 \quad i = 1, 2, \ldots, p.$$

Vermenigvuldigen we de vergelijkingen respectievelijk met coëfficienten $A_1 \ldots A_p$ en tellen de kolommen op, dan moet blijkbaar:

$$\mu\,[A_1 \Omega_1(a) + A_2 \Omega_2(a) + \ldots + A_p \Omega_p(a)] = 0$$

zijn, omdat door de punten $a_1, \ldots, a_{2p-2}$ voldaan wordt aan:

$$A_1 \Omega_1(a_1) + A_2 \Omega_2(a_1) + \ldots + A_p \Omega_p(a_1) = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A_1 \Omega_1(a_{2p-2}) + A_2 \Omega_2(a_{2p-2}) + \ldots + A_p \Omega_p(a_{2p-2}) = 0.$$

Maar a valt niet samen met een van de punten:

$$a_1, a_2, \ldots, a_{2p-2},$$

de toegevoegde φ of wel $\Omega(x)$ (zie pag. 13) heeft niet meer dan $2p-2$ nullen, hieruit volgt dus $\mu = 0$.

De gezochte functie zal dus enkelvoudige polen hebben, alleen in de punten $a_1, \ldots, a_{2p-2}$ en zal zijn van den vorm:

$$\frac{\lambda_1 \varphi_1(x,y) + \lambda_2 \varphi_2(x,y) + \ldots + \lambda_p \varphi_p(x,y)}{\varphi_1(x,y)}$$

waarin de φ functies voorstellen afgeleiden van integralen eerste soort, zoodat zoowel de teller als de noemer een toegevoegde van den graad $m-3$ is; de functie bezit het behoorlijke aantal constanten.

Het punt a hangt niet af van de punten $a_1, \ldots, a_{2p-2}$, wel hangen $(p-1)$ van die punten af van de $p-1$ overige, immers door $p-1$ onafhankelijke punten is een toegevoegde van den graad $m-3$ volkomen bepaald. Onderstrepen we de afhankelijke punten, dan kunnen we de reeks aldus schrijven:

$$a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}, \underline{a_p, a_{p+1}, \ldots, a_{2p-2}}, a$$

zoodat men onmiddellijk inziet, dat elk nu volgend punt af moet hangen van de voorafgaande onafhankelijke punten. We kunnen dus wel vinden een rationeele functie, die oneindig tot de eerste orde wordt in de punten:

$$a_1, a_2, \ldots a_{2p-2}, a, a';$$

of een rationeele functie, die oneindig tot de eerste orde wordt in $a_1, \ldots a_{2p-2}$ en oneindig tot de tweede of hooger orde in een punt a.

Uit het bewezene volgt:

$$k_1 = 1 \text{ zoodra } p > 0.$$

Want bestaat er een rationeele functie R_1, die in één punt van het oppervlak oneindig wordt tot de eerste orde, dan stelt $(R_1)^n$ voor $n = 1, 2, \ldots \infty$ een rationeele functie voor van elke willekeurige orde; er zouden er dus geen ontbreken, hetgeen in strijd is met de bewezen stelling.

§ 5.

Er zijn $(p-1)\,p\,(p+1)$ punten (niet noodzakelijk *verschillende* punten) van het oppervlak $f(x, y) = 0$; zóódanig, dat er een rationeele functie bestaat in één zoo'n punt oneindig tot de p^{de} orde $(p > 1)$ en in alle andere punten van het oppervlak eindig.

Dit resultaat en enkele van de volgende zijn afgeleid door Hurwitz (Math. Ann. 41. pag. 407).

Een rationeele functie, die in een punt a van het opper-

vlak oneindig wordt tot de p^{de} orde, eischt, dat er voldaan is aan de volgende voorwaarden:

$$A_1 \Omega_i(a) + A_2 D_a \Omega_i(a) + \ldots + A_p D_a^{p-1} \Omega_i(a) = 0$$
$$i = 1, 2, \ldots, p.$$

Of wel:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} \Omega_1(x), \Omega_2(x), \ldots\ldots\ldots \Omega_p(x) \\ D\,\Omega_1(x), D\,\Omega_2(x) \ldots\ldots D\,\Omega_p(x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ D^{p-1}\Omega_1(x), D^{p-1}\Omega_2(x) \ldots D^{p-1}\Omega_p(x) \end{vmatrix} = 0 \text{ voor } x = a.$$

Die determinant kan niet identiek nul worden, omdat er geen lineaire betrekking tusschen $\Omega_1(x), \ldots, \Omega_p(x)$ mag bestaan. In elk geval is er dus maar een eindig aantal punten, waarvoor een rationeele functie bestaat in één dier punten oneindig tot de p^{de} orde.

We weten, dat:

$$\Omega_1(x) = \frac{dv_1}{dx};\ \Omega_2(x) = \frac{dv_2}{dx};\ \ldots\ \Omega_p(x) = \frac{dv_p}{dx}$$

indien $v_1 \ldots v_p$ voorstellen p lineair onafhankelijke normaalintegralen 1ste soort; is v een algemeene integraal 1ste soort, dan mogen we schrijven:

$$\Omega_1(x) = \frac{dv_1}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} \ldots\ldots\ldots \Omega_p(x) = \frac{dv_p}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$$

$$D\,\Omega_1(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dv_1}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}\right) = \frac{d^2v_1}{dv^2}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + \frac{dv_1}{dv} \cdot \frac{d^2v}{dx^2}$$

. . . . . .

$$D^{p-1}\Omega_1(x) = \frac{d^pv_1}{dv^p}\left(\frac{dv}{dx}\right)^p + \ldots + \frac{dv_1}{dv} \cdot \frac{d^pv}{dx^p}.$$

Na substitutie wordt:

$$\Delta_x = \left(\frac{dv}{dx}\right)^{1+2+\ldots+p} \Delta_v = \left(\frac{dv}{dx}\right)^{\frac{1}{2}p(p+1)} \Delta_v$$

waarin:

$$\Delta_v = \begin{vmatrix} \frac{dv_1}{dv}, \frac{dv_2}{dv}, \ldots\ldots, \frac{dv_p}{dv} \\ \frac{d^2v_1}{dv^2}, \frac{d^2v_2}{dv^2}, \ldots, \frac{d^2v_p}{dv^2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{d^pv_1}{dv^p}, \frac{d^pv_2}{dv^p}, \ldots, \frac{d^pv_p}{dv^p} \end{vmatrix}$$

$\frac{dv_1}{dv}$ is een rationeele functie, die alleen in de nullen van dv oneindig wordt, de teller dv_1 kan immers niet oneindig worden, omdat het de afgeleide is van een Abelsche integraal 1ste soort; ook dv is de afgeleide van een integraal 1ste soort en wordt derhalve in $(2p - 2)$ punten nul.

Daaruit volgt, dat $\frac{dv_1}{dv}$ een rationeele functie is van de orde $2p - 2$; zoo wordt $\frac{d^2v_1}{dv^2}$ alleen oneindig in de nullen van dv^2, wier aantal $2(2p - 2)$ bedraagt; $\frac{d^2v_1}{dv^2}$ is dus een rationeele functie van de orde $2(2p - 2)$; eindelijk is $\frac{d^pv_1}{dv^p}$ een rationeele functie van de orde $p(2p - 2)$; zoodat we mogen besluiten, dat Δ_v een rationeele functie is van de orde:

$$\frac{p(p+1)}{2}(2p - 2) = (p - 1)p(p + 1).$$

De factor $\left(\frac{dv}{dx}\right)^{\frac{1}{2}p(p+1)}$ kan nul worden in de nullen van dv; dat waren echter polen van Δ_v, die punten vertegenwoordigen dus geen nullen van Δ_x.

Noemen we de punten, waarin Δ_x nul wordt $P_1, P_2, \ldots, P_r$ en de orden respectievelijk $m_1, m_2, \ldots, m_r$, dan is:

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_r = (p - 1)p(p + 1).$$

§ 6.

Voorbeeld:

$$x^4 + y^4 + (a\,x + b\,y + c)^4 = 0. \qquad p = 3.$$

De algemeene integraal 1ste soort is van den vorm:

$$\int \frac{A\,x + B\,y + C}{f'_y}$$

waarin A, B, C constanten voorstellen. Voor den teller kunnen we ook schrijven:

$$A\,\varphi_1(x\,y) + B\,\varphi_2(x\,y) + C\,\varphi_3(x\,y),$$

wanneer de φ functies voorstellen toegevoegden van de orde $m - 3$. Dan wordt Δ_x:

$$\begin{vmatrix} \frac{\varphi_1(x\,y)}{f'_y}, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \frac{\varphi_p(x,\,y)}{f'_y} \\ \frac{1}{f'_y} D\,\varphi_1(x\,y) + \varphi_1(x,\,y)\,\frac{\partial}{\partial x}\,\frac{1}{f'_y}, & \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \frac{1}{f'_y} D^2\,\varphi_1(x,\,y) + 2\,\frac{\partial}{\partial x}\,\frac{1}{f'_y} D\,\varphi_1(x,\,y) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{f'_y}\right)\cdot\varphi_1(x,\,y), \ldots & & \end{vmatrix}$$

Na behoorlijke vereenvoudiging neemt die determinant den vorm aan:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} \varphi_1, & \varphi_2, \ldots\ldots\ldots\ldots & \varphi_p \\ D\,\varphi_1, & D\,\varphi_2, \ldots\ldots\ldots\ldots & D\,\varphi_p \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ D^{p-1}\,\varphi_1, & D^{p-1}\,\varphi_2, \ldots & D^{p-1}\,\varphi_p \end{vmatrix}$$

waaruit blijkt, dat de bepaling van de punten $\Delta = 0$ neerkomt op het bepalen van de punten, waar de kromme:

$$A\,\varphi_1 + B\,\varphi_2 + \ldots + L\,\varphi_p = 0$$

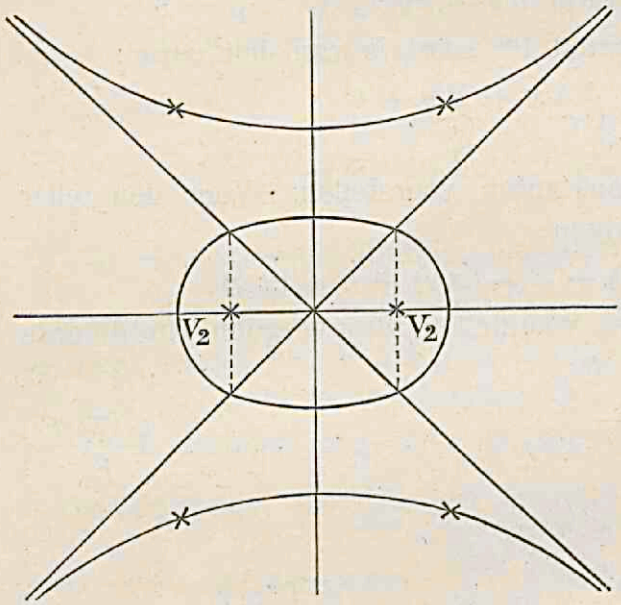
een contact van de p^{de} orde heeft met de kromme $f(x,\,y) = 0$.

Voor de gegeven vergelijking, waarvoor $p = 3$, wordt Δ_x eenvoudig gelijk aan $y'' = 0$, aan welke betrekking voldaan wordt door de buigpunten van de kromme $f(x,\,y) = 0$.

Een kromme van den 4^{den} graad zonder singuliere punten

bezit 24 buigpunten, dat is juist het vereischte aantal $(p-1)\,p\,(p+1)$.

Beschouwen we een bepaalde kromme waarvoor $p=3$



$y^4-5y^2-x^4+4=0$

die ongeveer nevensgaanden vorm heeft. In de buurt van het punt $x=0$ kunnen we ontwikkelen als volgt:

$$y_1 = 1-\frac{1}{6}x^4+\ldots$$

$$y_2 = -1+\frac{1}{6}x^4+\ldots$$

$$y_3 = 2+\frac{1}{12}x^4+\ldots$$

$$y_4 = -2-\frac{1}{12}x^4\ldots$$

en we willen nu construeeren rationeele functies in het punt $x=0$, $y=1$ respectievelijk oneindig tot de 3de, 4de en hooger orde.

Dat de eerste orde ontbreken moet zoodra $p>0$ hebben we al besproken; ook de tweede orde ontbreekt in het punt $(0, 1)$, immers een toegevoegde van de $(m-3)^{de}$ orde, (d. i. een rechte voor $m=4$), die de kromme in het punt $(0, 1)$ aanraakt, heeft tot vergelijking $y-1=0$; een tweede toegevoegde gaande door de 2 overige snijpunten van $y-1=0$ met de kromme, valt met de lijn $(y-1)=0$ samen, daar die rechte in dat punt een contact heeft van de 3de orde met $f(x, y)=0$, hetgeen blijkt uit de differentiaalquotienten $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}$, alle nul voor $y=1$, $x=0$.

Kiezen we voor noemer een kegelsnede, die de kromme in het punt $(0, 1)$ aanraakt, dan snijdt die kegelsnede de

kromme in nog 6 andere punten; een 2de kegelsnede door die 6 snijpunten valt noodzakelijk met de eerste samen, derhalve geeft ook dit geen oplossingen; zooals hieruit volgt, zullen ook krommen van hooger orde dan de tweede, geen rationeele functie geven zooals we zoeken.

Een rationeele functie oneindig tot de tweede orde in dat punt is dus niet te constueeren.

Een rationeele functie te vinden in het punt (0, 1) oneindig tot de derde orde.

Een toegevoegde van den graad $(m - 3)$ die in dat punt een contact moet hebben van de tweede orde en er een heeft in dit geval van de derde orde is $y - 1 = 0$. Een willekeurige rechte gaande door een van de 4 contactpunten heeft tot vergelijking $A x + B (y - 1) = 0$, waarin A en B arbitraire constanten voorstellen; dus wordt de functie, die we zoeken van den vorm $\frac{A x}{y - 1} + B$; ze bevat 2 willekeurige constanten, waarvan één additieve, terwijl volgens het theorema van Riemann-Roch dat aantal moet bedragen:

$$q + 1 = Q - p + (\tau + 1) + 1 = 3 - 3 + 1 + 1 = 2,$$

juist zooals we gevonden hebben.

Als een speciale vorm van de gezochte functie mogen we aannemen $\frac{x}{y - 1}$.

Een rationeele functie te construeeren in het punt (0, 1) oneindig tot de 4de orde.

De rechte $y - 1 = 0$ heeft in het beschouwde punt een contact van de derde orde met de kromme $f(x, y) = 0$; een willekeurige rechte niet gaande door het punt (0, 1) heeft tot vergelijking $A x + B y + C = 0$, dus de functie, die we zoeken krijgt den vorm $\frac{A x + B y + C}{y - 1}$; ze bevat 3 arbitraire constanten, zooals behoort, daar:

$$q + 1 = Q - p + (\tau + 1) + 1 = 4 - 3 + 2.$$

We vonden, dat $\frac{A x + C}{y - 1}$ voorstelde een rationeele functie, oneindig tot de derde orde in het punt (0, 1), derhalve kunnen we als speciale vorm van een rationeele functie in dat punt oneindig tot de 4de orde aannemen $\frac{y}{y-1}$.

Een rationeele functie in het punt (0, 1) oneindig tot de 5de orde is niet te construeeren; immers een rechte kan geen contact hebben van de 4de orde in het punt (0, 1), daar $\frac{d^4 y}{dx^4} = -4$.

Zal een kegelsnede $a x^2 + 2 h x + b y^2 + 2 g x + 2 f y + c = 0$ in het punt (0, 1) een contact hebben van de 4de orde, dan moeten we voldoen aan de voorwaarden:

$$\left.\begin{array}{l} a x^2 + 2 h x y + b y^2 + 2 g x + 2 f y + c = 0 \\ a x + h y + g + (h x + b y + f) \frac{dy}{dx} = 0 \\ a + 2 h \frac{dy}{dx} + b \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (h x + b y + f) \frac{d^2 y}{dx^2} = 0 \\ 3 h \frac{d^2 y}{dx^2} + 3 b \frac{dy}{dx} \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} + (h x + b y + f) \frac{d^3 y}{dx^3} = 0 \\ 4 h \frac{d^3 y}{dx^3} + 3 b \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)^2 + 4 b \frac{dy}{dx} \cdot \frac{d^3 y}{dx^3} + (h x + b y + f) \frac{d^4 y}{dx^4} = 0. \end{array}\right\} \text{Voor } x = 0,\ y = 1.$$

We vinden daaruit de volgende waarden voor de coëfficienten:

$$a = 0;\ h = 0;\ g = 0;\ f = -b;\ c = b,$$

zoodat de vergelijking der kegelsnede wordt:

$$y^2 - 2 y + 1 = 0 \text{ of } (y-1)^2 = 0;$$

ze bestaat dus blijkbaar uit twee samenvallende rechte lijnen en heeft in het beschouwde punt 8 punten met de kromme $f(x, y) = 0$ gemeen.

Wilden we nu een tweede kegelsnede leggen door 3 van de contactpunten, dan gaat die stellig ook door een 4de want ze wordt voorgesteld door $(2 g x + b y - c)(y - 1) = 0$,

we kunnen dus geen rationeele functie vinden, die alleen in het punt (0, 1) oneindig is tot de 5de orde. De ontbrekende orden voor dat punt zijn dus:

$$k_1 = 1,\ k_2 = 2,\ k_3 = 5.$$

Een rationeele functie te construeeren in het punt (0, 1) oneindig tot de zesde orde.

De kegelsnede $(y - 1)^2 = 0$ heeft in het beschouwde punt een contact van de zevende orde met de kromme; een tweede kegelsnede, die in het punt (0, 1) een contact heeft van de eerste orde, heeft tot vergelijking:

$$a x^2 + (2 g x + b y - 1)(y - 1),$$

wanneer we n. l. voor de algemeene vergelijking der kegelsnede aannemen:

$$a x^2 + 2 h x y + b y^2 + 2 g x + 2 f y + 1 = 0$$

zoodat de rationeele functie alleen in het punt (0, 1) oneindig tot de 6de orde kan worden voorgesteld door:

$$\lambda + \frac{a x^2 + (2 g x + b y - 1)(y - 1)}{y^2 - 2 y + 1},$$

waarin λ, a, g, b arbitraire constanten zijn. Volgens $Q - q = p - (\tau + 1)$ moet het aantal willekeurige constanten juist 4 bedragen, daar $Q = 6$, $p = 3$, $\tau + 1 = 0$, er gaat immers geen rechte, d. i. geen toegevoegde van de $(m - 3)^{de}$ orde door de 6 punten.

Als speciale vorm van een rationeele functie in het beschouwde punt oneindig tot de 6de orde mogen we nemen:

$$\frac{x^2}{(y - 1)^2}.$$

Een rationeele functie te bepalen in het punt (0, 1) oneindig tot de zevende orde.

De noemer blijft $(y - 1)^2$, terwijl we den teller verkrijgen door een kegelsnede op te zoeken, die een contact van de nulde orde heeft in het punt (0, 1); die wordt voorgesteld door:

$$a x^2 + 2 h x y + 2 g x + (b y - 1)(y - 1) = 0$$

zoodat de rationeele functie wordt:

$$\lambda + \frac{a x^2 + 2 h x y + 2 g x + (b y - 1)(y - 1)}{(y - 1)^2},$$

waarin 5 arbitraire constanten zooals behoort; een speciale vorm der functie is $\frac{x y}{(y - 1)^2}$.

Een rationeele functie oneindig in het punt (0, 1) tot de achtste orde vinden we in de gedaante:

$$\lambda + \frac{a x^2 + 2 h x y + b y^2 + 2 g x + 2 f y + 1}{(y - 1)^2}$$

of meer speciaal $\frac{y^2}{(y - 1)^2}$.

Voor rationeele functiën tot hooger orden oneindig moeten we contact hebben van hooger orde en zullen dus krommen van de derde en hooger orde moeten gebruiken.

De gevolgde wijze van afleiding, tenminste voor de rationeele functies van hooger orde dan de 5de, dient alleen ter opheldering; we kunnen er n. l. heel gemakkelijk een van de zesde orde verkrijgen door die van de 3de orde in het kwadraat te brengen, zoo geeft het product van die van de derde met die van de vierde orde een rationeele functie oneindig tot de zevende orde, enz.

De rationeele functies in het punt $x = 0$, $y = 1$ oneindig, worden dus:

$$-, -, \frac{x}{y - 1}, \frac{y}{y - 1}, -, \frac{x^2}{(y - 1)^2}, \frac{x y}{(y - 1)^2}, \frac{y^2}{(y - 1)^2},$$
$$\frac{x^3}{(y - 1)^3}, \frac{x^2 y}{(y - 1)^3}, \ldots$$

§ 7.

Bestaat er een rationeele functie, die in één punt a van het oppervlak oneindig wordt tot de p^{de} orde, en verder overal eindig is, dan zal er in het algemeen geen rationeele

functie bestaan, die in dat zelfde punt oneindig wordt tot de $(p+1)^{ste}$ orde; immers zou dan tegelijkertijd voldaan moeten zijn aan:

$$A_1 \Omega_i(a) + A_2 D\Omega_i(a) + \ldots + A_p D^{p-1}\Omega_i(a) = 0 \quad i = 1, 2, \ldots p$$

en

$$B_1 D\Omega_i(a) + B_2 D^2\Omega_i(a) + \ldots + B_p D^p \Omega_i(a) = 0 \quad i = 1, 2, \ldots p.$$

Volgens pag. 17 was die eerste voorwaarde gelijkwaardig met $\Delta_x = 0$ voor $x = a$; de tweede komt overeen met $\left(\frac{d\Delta}{dx}\right)_{x=a} = 0$. Evenals voor Δ, kunnen we voor $\frac{d\Delta}{dx}$ aantoonen, dat ze slechts in een beperkt aantal punten *kan* verdwijnen; in 't algemeen vallen de punten, waar $\Delta = 0$ en waar $\frac{d\Delta}{dx} = 0$ niet samen; zijn echter beide gelijktijdig nul in één punt van het oppervlak, dan volgt daaruit één betrekking tusschen de moduli van het oppervlak, wier aantal dan $3p - 4$ bedraagt in plaats van $3p - 3$.

Bezit een kromme van den 4^{den} graad en het 3de geslacht een osculatiepunt, (Zie § 6), d. i. een punt, waar een rechte een contact heeft van de derde orde met de kromme, dan kunnen we construeeren een rationeele functie, die in dat punt oneindig wordt tot de 3de en een in datzelfde punt oneindig tot de 4de orde. Omgekeerd kunnen we uit die twee functies, zooals we later zien zullen, de vergelijking van het oppervlak afleiden in den vorm:

$$y^3 + yx(x+a) + x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = 0$$

die slechts $3p - 4$ arbitraire constanten bevat.

Een rationeele functie, die in één enkel punt oneindig wordt tot lager orde dan de p^{de} zal in 't algemeen niet voorkomen. Daarvoor zou moeten voldaan zijn aan:

$$A_1 \Omega_i(a) + A_2 D\Omega_i(a) + \ldots + A_r D^{r-1}\Omega_i(a) = 0$$

$$i = 1, 2, \ldots p \text{ terwijl } r > p$$

of aan een zeker aantal minoren afgeleid uit de matrix:

$$\begin{vmatrix} \Omega_1(a) & \dots & D_a^{r-1}\,\Omega_1(a) \\ \vdots & & \\ \Omega_p(a) & \dots & D_a^{r-1}\,\Omega_p(a) \end{vmatrix}$$

Evenals voor A_x kunnen we voor elk dier minoren aantoonen, dat ze slechts een *beperkt* aantal nullen bezitten, die nullen zullen in 't algemeen niet samenvallen. Doen ze dat wel, dan bestaan er ook één, of meer, betrekkingen tusschen de $(3p-3)$ moduli van het oppervlak.

§ 8.

In § 3 hebben we aangetoond, dat de index van het laatste punt, waarvoor geen correspondeerende rationeele functie bestaat, niet grooter kan zijn dan $2p-1$. In deze paragraaf zullen we bewijzen dat de hoogste orde, waarvoor geen rationeele functie bestaat, die slechts in één punt a oneindig wordt tot die orde en verder overal eindig is, lager is dan $2p$.

Laat $k_1, k_2, \dots, k_p$ voorstellen de ontbrekende orden, zoodanig gerangschikt, dat $k_1 < k_2 < \dots < k_p$.

Vormen we nu den determinant:

$$\nabla_x = \begin{vmatrix} 0, \Omega_1(x), \dots, \Omega_p(x) \\ \lambda_1, D^{k_1-1}\Omega_1(a), \dots, D^{k_1-1}\Omega_p(a) \\ \dots \\ \lambda_p, D^{k_p-1}\Omega_1(a), \dots, D^{k_p-1}\Omega_p(a) \end{vmatrix}$$

waarin $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ constanten voorstellen, en ontwikkelen die volgens de elementen van de eerste kolom:

$$\nabla_x = \lambda_1 \varphi_1(x) + \lambda_2 \varphi_2(x) + \dots + \lambda_p \varphi_p(x).$$

De grootheden, die we hebben voorgesteld door:

$$\varphi_1(x), \ldots, \varphi_p(x)$$

zijn afgeleiden van integralen 1ste soort; $\varphi_1(x)$ wordt in een punt $x = a$ nul tot de orde $(k_1 - 1)$, $\varphi_2(x)$ tot de orde $(k_2 - 1)$, eindelijk $\varphi_p(x)$ tot de orde $(k_p - 1)$.

Want beschouwen we den minor $\varphi_r(x)$:

$$\varphi_r(x) = \begin{vmatrix} \Omega_1(x), & \Omega_2(x), & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \Omega_p(x) \\ D^{k_1-1}\Omega_1(a), & D^{k_1-1}\Omega_2(a), & \ldots\ldots\ldots, & D^{k_1-1}\Omega_p(a) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & \\ D^{k_r-1-1}\Omega_1(a), & D^{k_r-1-1}\Omega_2(a), & \ldots, & D^{k_r-1-1}\Omega_p(a) \\ D^{k_r+1-1}\Omega_1(a), & D^{k_r+1-1}\Omega_2(a), & \ldots, & D^{k_r+1-1}\Omega_p(a) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & \\ D^{k_p-1}\Omega_1(a), & D^{k_p-1}\Omega_2(a), & \ldots\ldots\ldots, & D^{k_p-1}\Omega_p(a) \end{vmatrix}$$

Differentieeren we $\varphi_r(x)$ naar x, dan verandert alleen de eerste rij van den determinant; in het punt $x = a$ worden alle afgeleiden van *lager* orde, dan de $(k_{r-1})^{\text{ste}}$ nul, maar de afgeleide van de orde k_{r-1} wordt daar niet nul. Immers:

1°. Een afgeleide naar x van lager orde, dan de $(k_{r-1})^{\text{ste}}$ en wel van een der orden $(k_1 - 1), (k_2 - 1), \ldots, (k_{r-1} - 1)$, geeft een determinant, die voor $x = a$ 2 gelijke rijen vertoont en dus nul is.

2°. Een afgeleide van een orde lager dan de $(k_r - 1)^{\text{ste}}$, maar niet van de orde $(k_1 - 1), (k_2 - 1), \ldots, (k_{r-1} - 1)$, wordt nul, omdat zoo'n $D^{\mu-1}\Omega_i(a)$ een lineaire functie is van $D^{k_1-1}\Omega_i(a) \ldots D^{k_r-1-1}\Omega_i(a)$. Immers zal een rationeele functie in een punt a oneindig worden tot de p^{de} orde, dan moet voldaan zijn aan:

$$A_1\Omega_i(a) + A_2 D\Omega_i(a) + \ldots + A_p D^{p-1}\Omega_i(a) = 0$$
$$i = 1, 2, \ldots, p.$$

Voor $p = k_1, \ldots, k_p$ kan niet aan die voorwaarden worden voldaan, wel voor andere waarden van p. Daaruit volgt echter, dat $D^{\mu-1}\Omega_i(a)$ een lineaire functie is van:

$$D^{k_1-1}\Omega_i(a), \ldots, D^{k_r-1}\Omega_i(a),$$

zoodra μ niet gelijk is aan een der getallen $k_1, \ldots, k_p$; we kunnen dan de afgeleide van de $(\mu - 1)^{ste}$ orde herleiden tot een determinant, wier bovenste rij slechts elementen nul bevat.

3°. De afgeleide van de $(k_r - 1)^{ste}$ orde kan niet nul worden in het punt $x = a$, omdat ze, afgezien van het teeken, gelijk is aan den minor van het element (1, 1) in den determinant ∇_x, en die minor kan niet nul worden de beteekenis van de getallen $k_1, \ldots, k_p$ in aanmerking genomen.

Of afgeleiden van hooger orde in het punt $x = a$ nul worden is nu onverschillig; we hebben hiermee aangetoond, dat $\varphi_r(x)$ in $x = a$ een nul heeft van de orde $k_r - 1$; daaruit volgt onmiddellijk, dat $\varphi_1(x)$ niet nul wordt in $x = a$, immers $k_1 = 1$.

Verder wordt $\varphi_p(x)$ nul tot de orde $k_p - 1$; daar $\varphi_p(x)$ de afgeleide is van een integraal 1ste soort, kan ze nul worden tot hoogstens de $(2p - 2)^{de}$ orde, waaruit volgt:

$$k_p - 1 < 2p - 2$$
$$k_p \leqq 2p - 1 \text{ dus stellig } k_p < 2p.$$

Voorbeeld:

$$y^4 - 5y^2 - x^4 + 4 = 0.$$

In het osculatiepunt $(x = 0, y = 1)$ konden we niet bepalen een rationeele functie van de 1ste, 2de of 5de orde, de ontbrekende orden zijn voor dat punt $k_1 = 1$, $k_2 = 2$, $k_3 = 5$ dus $k_p < 2p$.

Bestond er een buigpunt van de kromme, dat niet tegelijk osculatiepunt was, dan zouden evenals in het vorige geval de rationeele functies van de 1ste en 2de orde ontbreken, bovendien zou er geen rationeele functie van de 4de orde bestaan. Immers, daar het punt geen osculatiepunt is, kan een rechte geen contact geven van de 3de orde; construeeren we een kegelsnede, die in dat punt een contact heeft van de 3de orde, dan snijdt die kegelsnede de kromme in nog 4 andere punten, waarvan echter twee in het buigpunt moeten

vallen immers elke kegelsnede, die in het buigpunt 4 punten met de oorspronkelijke kromme gemeen heeft zal er noodzakelijk 6 in dat zelfde punt met de kromme gemeen hebben; een tweede kegelsnede, gaande door die 4 snijpunten zal geheel met de eerste samenvallen, dus is voor het buigpunt:

$$k_1 = 1;\ k_2 = 2;\ k_3 = 4.$$

In een punt, dat noch osculatiepunt, noch buigpunt is, ontbreken de rationeele functies van de 1ste, 2de en 3de orde; want wilden we b. v. construeeren een rationeele functie in dat punt oneindig tot de 3de orde, dan zouden we gebruik moeten maken van een kegelsnede, die in dat punt een contact had van de 2de orde met de kromme; die kegelsnede heeft nog 5 snijpunten met de kromme, maar leggen we een tweede kegelsnede door die 5 punten, dan valt ze noodzakelijk met de eerste samen, derhalve ontbreekt de rationeele functie in dat punt oneindig tot de 3de orde.

Nu is voor dit geval $k_1 = 1$, $k_2 = 2$, $k_3 = 3$ .dus ook $k_p < 2p$.

§ 9.

Indien $k_2 > 2$, d. w. z. als we niet te maken hebben met een hyperelliptische vergelijking, dan is:

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_p < p^2.$$

Hoe groot die som is voor de hyperelliptische vergelijking kunnen we gemakkelijk berekenen, de hyperelliptische vergelijking is gekarakteriseerd door het bestaan eener rationeele functie in één enkel punt oneindig tot de 2de orde [1]), dus bestaan ook alle orden, die veelvouden zijn van 2; dan is:

$$k_1 + \ldots + k_p = 1 + 3 + \ldots + 2p - 1 = p^2.$$

Nemen we aan, dat de laagste orde, waartoe een ratio-

[1]) Zie Baker, pag. 86.

neele functie in één enkel punt oneindig wordt de m^{de} is; dan kan er niet bestaan een rationeele functie van de orde $k_r - m$, want daaruit zou de bestaanbaarheid volgen eener rationeele functie van de orde k_r; evenmin kan een der getallen $k_1, k_2, \ldots, k_r$ een veelvoud van m zijn.

Zij nu r_i een van de onbestaanbare orden en wel de hoogste, die congruent is met i voor modulus m. Dan is $r_i = \lambda m + i$ en de getallen $r_i - m, r_i - 2m, \ldots, m + i, i$, die alle kleiner zijn dan r_i, moeten voorkomen onder de grootheden $k_1, \ldots, k_p$. Geven we nu aan i alle waarden van 1 tot $m - 1$, dan zal het tafeltje:

$$\begin{array}{lll} 1, & 1+m, & 1+2m, \ldots, r_1 \\ 2, & 2+m, & 2+2m, \ldots, r_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ m-1, & (m-1)+m, & (m-1)+2m, \ldots, r_{m-1} \end{array}$$

alle getallen $k_1, \ldots, k_p$ en geen andere bevatten; immers is $r_i = \lambda m + i$, dan kan er geen orde $\lambda' m + i$ bestaan, waarin $\lambda' < \lambda$, omdat uit het bestaan dier laatste orde, in verband met de m^{de} orde, de bestaanbaarheid zou volgen der orde $\lambda m + i$.

De onderstelling, dat twee getallen in het tafeltje hetzelfde zouden zijn, leidt tot een ongerijmdheid; was b. v.:

$$a m + 1 = b m + 3$$

dan zou $(b - a) m = 2$ zijn en daar 2 het verschil is van 2 getallen, die elk kleiner zijn dan m, kan dat nooit een veelvoud van m zijn.

Het aantal in het tafeltje voorkomende orden is:

$$p = \left(1 + \frac{r_1 - 1}{m}\right) + \left(1 + \frac{r_2 - 2}{m}\right) + \ldots + \left(1 + \frac{r_{m-1} - (m-1)}{m}\right)$$

of

$$m p = (r_1 - 1 + m) + (r_2 - 2 + m) + \ldots + (r_{m-1} - (m-1) + m),$$

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_{m-1} = m p - \frac{m (m-1)}{2}.$$

Voor de *som* der onbestaanbare orden kunnen we schrijven:

$$S_p = \sum_{i=1}^{m-1} \left[r_i + (r_i - m) + \ldots + (m+i) + i \right]$$

$$= \sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{2}(r_i + i)\left(\frac{r_i - i}{m} + 1\right) = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^{m-1} (r_i + m - i)(r_i + i).$$

$$S_p = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^{m-1} r_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m-1} r_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m-1} i - \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^{m-1} i^2.$$

Nu is:

$$\sum_{i=1}^{m-1} i = \frac{m(m-1)}{2}; \quad \sum_{i=1}^{m-1} i^2 = \frac{1}{6}(m-1)\, m\, (2m-1).$$

waardoor het bovenstaande overgaat in:

$$S_p = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^{m-1} r_i \left[r_i - (2p-1) \right] + \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^{m-1} r_i \left[2p - 1 + m \right]$$

$$+ \frac{1}{4} m(m-1) - \frac{1}{12}(m-1)(2m-1).$$

Substitueeren we nog in den tweeden term de voor $\sum_{i=1}^{m-1} r_i$ gevonden waarde:

$$S_p = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^{m-1} r_i \left[r_i - (2p-1) \right] + \frac{1}{4}\left[4p^2 - (m-1)^2 \right] +$$

$$+ \frac{1}{12}(m-1)(m+1)$$

of

$$S_p = p^2 - \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^{m-1} r_i \left[2p - 1 - r_i \right] - \frac{1}{6}(m-1)(m-2).$$

Bereikt r_i de maximumwaarde $2p-1$, dan wordt:

$$2p - 1 - r_i = 0;$$

blijft r_i beneden het maximum, dan is $2p - 1 - r_i > 0$, dus de term $\frac{1}{2m} \sum_{i=1}^{m-1} r_i \left[2p - 1 - r_i \right]$ positief.

Is nu $m > 2$, dan is $\frac{1}{6}(m-1)(m-2)$ ook een positieve grootheid en dus $S_p < p^2$.

Sluiten we het geval, dat $p = 0$, uit, dan kan m niet gelijk 1 zijn. Is $m = 2$, dan is noodzakelijk $k_2 > 2$, dus is niet $S_2 < p^2$. Immers uit het bestaan eener rationeele functie oneindig tot de tweede orde in één enkel punt, volgt het bestaan der functies van alle even orden, er blijft dus voor de getallen $k_1, \ldots, k_p$ niet anders over dan:

$$1, 3, 5, \ldots, 2p - 1, \text{ wier som} = p^2.$$

Hetzelfde resultaat geeft ook de formule:

$$S_p = p^2 - \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^{m-1} r_i [2p - 1 - r_i] - \frac{1}{6} (m-1)(m-2),$$

daar voor dit geval zoowel de tweede als de derde term nul is.

Voorbeeld:

$$y^4 = (x - a)(x - b)(x - c)(x - d)(x - e).$$

Volgens de formule van RIEMANN is het geslacht van deze vergelijking 6. De kromme door de vergelijking voorgesteld heeft dus geen dubbelpunten.

In een gewoon punt kunnen we construeeren rationeele functies, die respectievelijk oneindig zijn tot de orden 7, 8, 9,..., de ontbrekende orden zijn dan 1, 2, 3, 4, 5, 6, wier som inderdaad $< p^2$.

In de punten, waar $\Delta = 0$ wordt (zie pag. 17) bestaan in 't algemeen de orden 6, 8, 9, ..., de som der ontbrekende orden is dan $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 7 = 22$, ook $< p^2$.

Tenzij we bijzondere betrekkingen aannemen tusschen de $3p - 3$ moduli van het oppervlak, kunnen zich geen andere gevallen voordoen. Maar ook dan nog blijft de som steeds $< p^2$; want is b. v. $\frac{d\Delta}{dx} = 0$ tegelijk met $\Delta = 0$, (zie pag. 25) dan is de som der ontbrekende orden:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 8 = 23 \text{ nog} < p^2.$$

§ 10.

Er zijn minstens $2p+2$ *verschillende* punten, waarvoor rationeele functies bestaan in een van die punten oneindig tot de p^{de} of lager orde en verder overal eindig.

In een nul van Δ_x had $\varphi_1(x)$ een nul van de $(k_1-1)^{ste}$ orde, $\varphi_2(x)$ een nul van de $(k_2-1)^{ste}$ orde enz.; blijkbaar zijn de *orden* van al die nullen *verschillend*. Daaruit leiden we af, dat er geen homogene lineaire betrekking kan bestaan van den vorm:

$$\mu_1\varphi_1(x)+\mu_2\varphi_2(x)+\ldots+\mu_p\varphi_p(x)=0$$

waarin de grootheden μ constanten voorstellen. Daar:

$$\varphi_1(x),\ldots\varphi_p(x)$$

gedefinieerd zijn als afgeleiden van p integralen 1ste soort is dus:

$$\mu_1\int\varphi_1(x)\,dx+\mu_2\int\varphi_2(x)\,dx+\ldots+\mu_p\int\varphi_p(x)\,dx$$

weer een Abelsche integraal 1ste soort en wel een algemeene. We kunnen dus $\Omega_1(x),\ldots,\Omega_p(x)$ uitdrukken als lineaire functies van $\varphi_1(x),\ldots,\varphi_p(x)$ b. v.:

$$\Omega_i(x)=c_{i,1}\varphi_1(x)+c_{i,2}\varphi_2(x)+\ldots+c_{i,p}\varphi_p(x)$$
$$i=1,2,\ldots p.$$

Door substitutie van deze waarden in den bekenden determinant Δ_x gaat deze over in:

$$C\begin{vmatrix}\varphi_1(x), & \varphi_2(x), & \ldots\ldots\ldots\ldots, & \varphi_p(x)\\ D_x\varphi_1(x), & D_x\varphi_2(x), & \ldots\ldots\ldots, & D_x\varphi_p(x)\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ D_x^{p-1}\varphi_1(x), & D_x^{p-1}\varphi_2(x), & \ldots & D_x^{p-1}\varphi_p(x)\end{vmatrix}=C\times\Delta_x',$$

waarin C voorstelt de determinant van de coëfficienten c.

De determinant Δ_x' heeft in elke nul van Δ_x een nul van de orde:

$$(k_1-1)+(k_2-2)+\ldots+(k_p-p)=k_1+k_2+\ldots+k_p-\frac{1}{2}p(p+1).$$

De C is een constante, dus volgt hieruit, dat Δ_x in elk van zijn nullen verdwijnt tot de orde:

$$k_1 + \ldots + k_p - \frac{1}{2} p (p+1)$$

of indien $k_2 \geqslant 2$ tot een orde kleiner dan $\frac{1}{2} p (p-1)$, dan is immers $k_1 + k_2 + \ldots + k_p < p^2$.

Laat er r verschillende punten zijn, waarin Δ_x nul wordt en noemen we de orden respectievelijk:

$$m_1, m_2, \ldots, m_r,$$

dan weten we:

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_r = (p-1) p (p+1).$$

Ook is nu:

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_r = r \cdot \frac{1}{2} p (p-1)$$

dus: $$r > 2p + 2.$$

Bestaat er een functie oneindig tot de 2de orde in één enkel punt, is dus $k_2 > 2$, dan is $k_1 + k_2 + \ldots + k_p = p^2$, derhalve heeft Δ_x nullen van de orde $\frac{1}{2} p (p-1)$ en uit het bovenstaande volgt, dat dan het aantal r juist $2p + 2$ is.

§ 11.

We kunnen nu voor verschillende waarden van p vinden de orden λ, tot welke Δ_x verdwijnt, uit de vergelijking:

$$\lambda = k_1 + k_2 + \ldots + k_p - \frac{1}{2} p (p+1).$$

Daarna uit:

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_r = r \cdot \lambda$$

de waarde van r, d. i. het aantal *verschillende* punten, waarvoor een rationeele functie bestaat oneindig tot lager orde, dan de $(p+1)^{ste}$. We vinden dan het volgende tafeltje:

p.	$k_1, k_2, \ldots, k_p$	λ.	r.	$2p+2$.	$(p-1)p(p+1)$	Geometrische beteekenis.
2	1, 3	1	6	6	6	6 raakpunten van raaklijnen uit een dubbel punt.
	1, 2	0	onbep.			gewone punten.
3	1, 3, 5	3	8	8	24	
	1, 2, 5	2	12			buigpunten.
	1, 2, 4	1	24			osculatiepunten.
	1, 2, 3	0	onbep.			gewone punten.
4	1, 3, 5, 7	6	10	10	60	
	1, 2, 4, 7	4	15			
	1, 2, 4, 5	2	30			
	1, 2, 3, 7	3	20			
	1, 2, 3, 6	2	30			
	1, 2, 3, 5	1	60			
	1, 2, 3, 4	0	onbep.			
5	1, 3, 5, 7, 9	10	12	12	120	
	1, 2, 4, 5, 8	5	24			
	1, 2, 4, 5, 7	4	30			
	1, 2, 3, 6, 7	4	30			
	1, 2, 3, 5, 9	5	24			
	1, 2, 3, 5, 7	3	40			
	1, 2, 3, 4, 9	4	30			
	1, 2, 3, 4, 8	3	40			
	1, 2, 3, 4, 7	2	60			
	1, 2, 3, 4, 6	1	120			
	1, 2, 3, 4, 5	0	onbep.			

Voor de kromme van geslacht 4 b. v. lezen we uit dit lijstje het volgende:

Bestaat er een rationeele functie, die in één enkel punt van de kromme oneindig wordt tot de tweede orde, en verder overal eindig is, dan zijn er niet meer dan 10 verschillende punten, waar functies voorkomen, die oneindig worden tot lager orde dan de $(p+1)^{ste}$ en die zijn van de orden 2 en 4. Op die kromme zullen bovendien voorkomen gewone punten, wier aantal r, zooals we zien, onbepaald blijft.

Zijn de ontbrekende orden 1, 2, 4, 5, dan zijn er 30 *verschillende* punten, waarvoor rationeele functies oneindig tot lager orde dan de $(p+1)^{ste}$ bestaan; maar er zijn er ook 30, als de ontbrekende orden in één punt zijn 1, 2, 3, 6, die twee gevallen kunnen zich dus op éénzelfde kromme voordoen; bovendien kunnen er op die kromme gewone punten liggen, waarvoor de ontbrekende orden zijn 1, 2, 3, 4.

De nu volgende tafel geeft de verschillende mogelijkheden voor $p = 2, 3, 4, 5, 6, 7$; de eerste kolom geeft aan het geslacht; de tweede de verschillende gevallen, indien de laagst bestaande orde is de tweede; enz.

p.	2de.	3de.	4de.	5de.
2	1, 3	1, 2		
3	1, 3, 5	1, 2, 4 1, 2, 5	1, 2, 3	
4	1, 3, 5, 7	1, 2, 4, 5 1, 2, 4, 7	1, 2, 3, 5 1, 2, 3, 6 1, 2, 3, 7	1, 2, 3, 4
5	1, 3, 5, 7, 9	1, 2, 4, 5, 7 1, 2, 4, 5, 8	1, 2, 3, 5, 6 1, 2, 3, 5, 7 1, 2, 3, 5, 9 1, 2, 3, 6, 7	1, 2, 3, 4, 6 1, 2, 3, 4, 7 1, 2, 3, 4, 8 1, 2, 3, 4, 9
6	1, 3, 5, 7, 9, 11	1, 2, 4, 5, 7, 8 1, 2, 4, 5, 7, 10 1, 2, 4, 5, 8, 11	1, 2, 3, 5, 6, 7 1, 2, 3, 5, 6, 9 1, 2, 3, 5, 6, 10 1, 2, 3, 5, 7, 9 1, 2, 3, 5, 7, 11 1, 2, 3, 6, 7, 11	1, 2, 3, 4, 8, 9 1, 2, 3, 4, 7, 9 1, 2, 3, 4, 7, 8 1, 2, 3, 4, 6, 11 1, 2, 3, 4, 6, 9 1, 2, 3, 4, 6, 8 1, 2, 3, 4, 6, 7
7	1, 3, 5, 7, 9, 11, 13	1, 2, 4, 5, 7, 10, 13 1, 2, 4, 5, 7, 8, 11 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10	1, 2, 3, 5, 7, 9, 13 1, 2, 3, 5, 7, 9, 11 1, 2, 3, 5, 6, 9, 13 1, 2, 3, 5, 6, 9, 11 1, 2, 3, 5, 6, 7, 11 1, 2, 3, 5, 6, 7, 10 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9	1, 2, 3, 4, 7, 8, 13 1, 2, 3, 4, 7, 8, 9 1, 2, 3, 4, 6, 9, 11 1, 2, 3, 4, 6, 8, 13 1, 2, 3, 4, 6, 8, 11 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9 1, 2, 3, 4, 6, 7, 9 1, 2, 3, 4, 6, 7, 11 1, 2, 3, 4, 6, 7, 12 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8

6de.	7de.	8ste.	Totaal aantal.
			2
			4
			7
1, 2, 3, 4, 5			12
1, 2, 3, 4, 5, 11 1, 2, 3, 4, 5, 10 1, 2, 3, 4, 5, 9 1, 2, 3, 4, 5. 8 1, 2, 3, 4, 5, 7	1, 2, 3, 4, 5, 6		23
1, 2, 3, 4, 5, 10, 11 1, 2, 3, 4, 5, 9, 11 1, 2, 3, 4, 5, 8, 11 1, 2, 3, 4, 5, 9, 10 1, 2, 3, 4, 5, 8, 10 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9 1, 2, 3, 4, 5, 7, 13 1, 2, 3, 4, 5, 7, 11 1, 2, 3, 4, 5, 7, 10 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8	1, 2, 3, 4, 5, 6, 13 1, 2, 3, 4, 5, 6, 12 1, 2, 3, 4, 5, 6, 11 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7	39

§ 12.

Het is wel duidelijk, dat er eenig verband moet bestaan tusschen het aantal mogelijke gevallen voor verschillende waarden van p, het is mij dan ook gelukt een bepaalde betrekking op te sporen.

Is de laagst bestaanbare orde de $(p+1)^{ste}$, dan is voor elke waarde van p het aantal mogelijkheden gelijk aan de éénheid.

Is de laagst bestaanbare orde de p^{de}, dan is dat aantal voor opklimmende waarden van p: 1, 2, 3, 4, 5, . . .; die getallen vormen een rekenkundige reeks van de 1ste orde.

Is de laagst bestaanbare orde de $(p-1)^{ste}$, dan wordt het aantal (Zie het lijstje op pag. 42):

1, 2, 4, 7, 11, 16, 22, 29, 37, 56, . . .
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, . . .

een rekenkundige reeks van de 2de orde.

Is de laagste orde de $(p-2)^{de}$, dan wordt de rij:

1, 2, 6, 10, 17, 28, 44, 66, 95, . . .
4, 7, 11, 16, 22, 29, . . .
3, 4, 5, 6, 7, . . .

een rekenkundige reeks van de 3de orde.

Is in 't algemeen de laagst bestaanbare orde de:

$$(p-n)^{de} \quad (n < p),$$

dan vormen de getallen, die het aantal mogelijkheden aangeven voor opklimmende waarden van p, een rekenkundige reeks van de $(n+1)^{ste}$ orde.

Dat de eerste getallen van elke rij niet tot de rekenkundige reeksen behooren is terstond in te zien, als men het ontstaan dier getallen nagaat; de rekenkundige reeks van de 3de orde begint eerst met den 3^{den} term en elke volgende reeks begint 2 termen verder.

De reeksen zijn zeer gemakkelijk uit elkaar af te leiden, daar steeds de reeks van de q^{de} orde de rij der eerste verschillen vormt van de reeks van de $(q + 1)^{ste}$ orde.

In de volgende tafel geven de getallen in de 1ste kolom aan de waarden van p; die in de andere kolommen het *aantal* mogelijke gevallen voor de daarboven aangegeven laagst bestaanbare orde.

$p.$	LAAGST BESTAAN						
	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
2	1	1					
3	1	2	1				
4	1	2	3	1			
5	1	2	4	4	1		
6	1	3	6	7	5	1	
7	1	3	7	10	11	6	1
8	1	3	9	12	17	16	7
9	1	4	11	17	27	28	22
10	1	4	13	22	37	44	44
11	1	4	15	26	49	64	72
12	1	5	18	32	64	85	116
13							172
14							
15							
16							
17							

BARE ORDEN:

9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.
1								
8	1							
29	9	1						
66	37	10	1					
116	95	46	11	1				
188	182	132	56	12	1			
	304	277	178	67	13	1		
		486	409	234	79	14	1	
			763	587	301	92	15	1
				1172	821	380	106	16

§ 13.

Een overzicht van het bewijs, dat NÖTHER geeft voor de stelling van WEIERSTRASS moge hier volgen; een en ander daarover is te vinden in Crelle, Bd. 92, pag. 303 en Bd. 97, pag. 223.

NÖTHER spreekt de Lückensatz aldus uit:

Onder de rationeele functies gedefinieerd door de onherleidbare algebraïsche vergelijking $f(x, y) = 0$ bestaat er geen, die in één enkel, maar *willekeurig* gekozen punt van $f(x, y) = 0$ oneindig wordt tot de orde $\mu < p + 1$.

Zij $q + 1$ het aantal willekeurige constanten, dat optreedt in een rationeele functie, die in μ willekeurige punten van $f(x, y) = 0$ oneindig wordt tot de 1ste orde, dan kunnen we die rationeele functie schrijven:

$$R_\mu = \frac{\alpha_0 \varphi_0 + \alpha_1 \varphi_1 + \ldots + \alpha_q \varphi_q}{\varphi_0} = \alpha_0 + \frac{\alpha_1 \varphi_1 + \ldots + \alpha_q \varphi_q}{\varphi_0}$$

waarin φ_0 voorstelt een toegevoegde kromme van den graad $(m - 3)$ gaande door de μ gegeven punten; $\varphi_1 \ldots \varphi_q$ stellen voor toegevoegden van denzelfden graad als φ_0 gaande door de overige $2p - 2 - \mu$ snijpunten van φ_0 met $f(x, y) = 0$.

Nemen we nu aan, dat φ_0 slechts in een enkel punt a nul wordt en daar tot de μ^{de} orde, terwijl μ het *kleinste* getal is, $(\mu < p + 1)$ waarvoor dat in een willekeurig punt van $f(x, y) = 0$ mogelijk is.

In dat geval kan q niet anders zijn dan 1. Immers was $q > 1$, waren er b. v. 3 constanten, dan zouden we een toegevoegde van de $(m - 3)^{de}$ orde kunnen leggen door het punt a en we hielden dan nog 2 willekeurige constanten over, derhalve zouden we een rationeele functie:

$$\frac{\alpha_0 \varphi_0 + \alpha_1 \varphi_1}{\varphi_0}$$

verkrijgen, die alleen in het punt a oneindig werd, maar tot

de $(\mu - 1)^{ste}$ orde, terwijl we toch de μ^{de} als de laagst mogelijke orde aannamen.

De onderstelling $q < 1$ zou leiden tot $R_\mu = C$, dat is niet langer een rationeele functie.

Er blijft dus over $q = 1$.

Volgens het bekende theorema van RIEMANN—ROCH uitgedrukt in de formule $Q - q = p - (\tau + 1)$ is nu het aantal lineair onafhankelijke functies φ, dat nul wordt in het punt a tot de μ^{de} orde juist $p - \mu + 1$ en zooals we weten (zie pag. 12) komt dat aantal overeen met $\mu - 1$ lineair onafhankelijke condities.

De condities, waarop de kromme φ in het punt a een contact heeft van de $(\mu - 1)^{ste}$ orde met $f(x, y) = 0$ schrijven we als volgt:

$$1)\ \varphi_a = 0;\ 2)\ \varphi_a + (d\varphi)_a = 0;\ 3)\ \varphi_a + 2(d\varphi)_a + (d^2\varphi)_a = 0; \ldots$$
$$\ldots \varphi_a + (\mu - 1)(d\varphi)_a + \ldots + (d^{\mu-1}\varphi)_a = 0$$

waarbij wordt ondersteld, dat de differentiaal-quotiënten $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots$ afgeleid zijn uit $f(x, y) = 0$.

Echter stellen de eerste $(\mu - 1)$ vergelijkingen reeds $\mu - 1$ onafhankelijke condities voor; want nemen we aan, dat die vervuld zijn en onderstellen, dat ze *minder* dan $\mu - 1$ onafhankelijke voorwaarden in zich sluiten, dan moeten er in het punt a meer dan $p - \mu + 1$ lineair onafhankelijke functies φ nul worden tot de $(\mu - 1)^{ste}$ orde; volgens het theorema van RIEMANN—ROCH was dan $q > 1$ en we zouden een rationeele functie verkrijgen, die in het punt a oneindig werd tot de $(\mu - 1)^{ste}$ orde in strijd met de onderstelling, dat μ de laagst mogelijke orde is.

Derhalve stellen de eerste $\mu - 1$ vergelijkingen ook $\mu - 1$ onafhankelijke voorwaarden voor en is de μ^{de} daarvan eenvoudig het gevolg.

Nu was a een willekeurig punt van $f(x, y) = 0$, de redeneering blijft dus gelden, indien we een oneindig dicht

bij a gelegen punt op de kromme beschouwen. Daarvoor zijn de μ voorwaarden:

$$1)\ \varphi_a + (d\varphi)_a = 0;\quad 2)\ \varphi_a + 2(d\varphi)_a + (d^2\varphi)_a = 0 \ldots$$
$$\ldots \mu - 1)\ \varphi_a + (\mu - 1)(d\varphi)_a + \ldots + (d^{\mu-1}\varphi)_a = 0$$
$$\mu)\ \varphi_a + \mu(d\varphi)_a + \ldots + (d^{\mu}\varphi)_a = 0.$$

Ook hier vertegenwoordigen de eerste $(\mu - 1)$ vergelijkingen $(\mu - 1)$ onafhankelijke condities, terwijl de laatste daarvan het gevolg is.

Zoo voortgaande komen we tot het volgende resultaat:

Zoodra $\varphi = 0;\ \frac{d\varphi}{dx} = 0; \ldots \frac{d^{\mu-2}\varphi}{dx^{\mu-2}} = 0$ in een willekeurig punt a, dan is ook:

$$\frac{d^{\mu-1}\varphi}{dx^{\mu-1}} = 0;\quad \frac{d^{\mu}\varphi}{dx^{\mu}} = 0;\quad \frac{d^{\mu+1}\varphi}{dx^{\mu+1}} = 0$$

tot de differentiaal-quotiënten van oneindige orde toe.

Maar dan valt ook de kromme van den $(m-3)^{\text{den}}$ graad samen met de kromme $f(x, y) = 0$ en is dus $f(x, y) = 0$ geen onherleidbare vergelijking, zooals toch het geval moet zijn. Derhalve is ook $\mu < p + 1$ een onmogelijkheid voor een willekeurig gekozen punt.

Hieruit volgt, dat wanneer we alle rationeele functies opzoeken behoorende bij de onherleidbare algebraïsche vergelijking $f(x, y) = 0$, die in een willekeurig gekozen punt (een eindig aantal punten uitgezonderd) oneindig worden tot de μ^{de} orde, de orden $\mu = 1, 2, \ldots p$ ontbreken, alle orden $\mu > p$ kunnen bestaan.

Immers voor $\mu > p$ is $\tau + 1 = 0$ en het aantal willekeurige constanten dat $= \mu - p + 1$ stellig $\geqq 1$.

Nöther toont nu aan, dat er voor *elk* punt (d. w. z. ook voor het *eindige* aantal punten, dat we uitgezonderd hebben) eenzelfde aantal orden niet kan bestaan. Terwijl echter Weierstrass het geslacht p definieert, door het aantal ontbrekende orden, bewijst Nöther omgekeerd, dat er steeds

p' orden ontbreken en dat het getal p' gelijk is aan het op een der bekende manieren gedefinieerde geslacht p.

Uitgaande van de stelling van RIEMANN—ROCH gebruikt hij daartoe scharen van puntengroepen op de kromme $f(x, y) = 0$, daarbij onderscheidende bewegelijke en vaste, d. w. z. van de parameters der schaar afhankelijke en onafhankelijke punten.

Op dat bewijs zullen we hier niet verder ingaan, daar dan een uiteenzetting over die scharen van puntengroepen (zie Math. Ann. VII; Crelle, Bd. 93, pag. 275) niet zou kunnen ontbreken, die ons te ver zou voeren.

HOOFDSTUK II.

De vergelijking van het oppervlak af te leiden uit de rationeele functies.

§ 1.

Zij g_N een rationeele functie alleen oneindig tot de N^{de} orde in een willekeurig punt (x_0, y_0) van het oppervlak $f(x, y) = 0$ en verder overal eindig. Noemen we a de laagst mogelijke orde, waartoe een rationeele functie in dat punt oneindig kan worden, dan kunnen we alle werkelijk bestaande rationeele functies oneindig in het punt (x_0, y_0) voorstellen door $g_{\mu a + i}$, waarin $i < a$. Het aantal ontbrekende orden was *eindig*, derhalve zal i alle waarden aannemen van $i = 0$ tot $i = a - 1$.

Laat $_{\mu_i} a + i$ de *laagste* orde voorstellen congruent met i voor modulus a; en beschouwen we de volgende rationeele functies:

$$g_a,\ g_{\mu_1 a + 1},\ g_{\mu_2 a + 2},\ \cdots\ g_{\mu_{a-1} a + (a-1)}.$$

Is nu $m a + i$ een van de bestaanbare orden, dan kan volgens de onderstelling m niet kleiner zijn dan μ_i; we kunnen dus een constante λ bepalen, zoodanig dat:

$$g_{m a + i} = \lambda\, g_a^{m - \mu_i}\, g_{\mu_i a + i} + g_{\mu a + j}$$

waarin $_{\mu} a + j < m a + i$.

Behandelen we $g_{\mu a+j}$ op dezelfde manier en gaan zoo voort, dan komt er ten slotte een vergelijking van den vorm:

$$g_{ma+i} = A + B\, g_{\mu_1 a+1} + C\, g_{\mu_2 a+2} + \ldots + K\, g_{\mu_{a-1} a+(a-1)},$$

waarin de coëfficienten $A, B, \ldots, K$ geheele functies zijn van g_a.

Voorbeeld:

$$f(x, y) = y^4 - 5\,y^2 - x^4 + 4 = 0.$$

Op pag. 24 hebben we gevonden voor de rationeele functies alleen oneindig in het punt $x = 0, y = 1$ van het oppervlak:

$$g_3 = \frac{x}{y-1};\ g_4 = \frac{y}{y-1},$$

$$g_6 = \frac{x^2}{(y-1)^2};\ g_7 = \frac{x\,y}{(y-1)^2};\ g_8 = \frac{y^2}{(y-1)^2},$$

$$g_9 = \frac{x^3}{(y-1)^3};\ g_{10} = \frac{x^2\,y}{(y-1)^3};\ g_{11} = \frac{x\,y^2}{(y-1)^3};\ g_{12} = \frac{y^3}{(y-1)^3}.$$

Dus is:

$$g_a = g_3 = \frac{x}{y-1},$$

$$g_{ma+1} = g_7 = \frac{L\,x\,y + M\,x^2}{(y-1)^2} + \frac{N\,y + Q\,x}{y-1} +$$

$$+ P = L\,\frac{x}{y-1}\cdot\frac{y}{y-1} + M\left(\frac{x}{y-1}\right)^2 + N\,\frac{y}{y-1} +$$

$$+ Q\,\frac{x}{y-1} + P = L\,g_3 \cdot g_4 + M\,g_3^2 + N\,g_4 + Q\,g_3 + P,$$

waarin L, M, N, Q, P constanten zijn.

Noemen we r een willekeurige bestaande orde, dan kunnen we dus het volgende stel vergelijkingen neerschrijven:

$$g_r = A_1 + B_1\, g_{\mu_1 a+1} + \ldots + K_1\, g_{\mu_{a-1} a + (a-1)}$$

$$g_r^2 = A_2 + B_2\, g_{\mu_1 a+1} + \ldots + K_2\, g_{\mu_{a-1} a + (a-1)}$$

. . . . . .

$$g_r^{a-1} = A_{a-1} + B_{a-1}\, g_{\mu_1 a+1} + \ldots + K_{a-1}\, g_{\mu_{a-1}} + a - 1.$$

Zijn die vergelijkingen lineair onafhankelijk, dan kunnen we daaruit de $(a-1)$ onbekenden:

$$g_{\mu_1 a+1}, \ldots, g_{\mu_{a-1} a+(a-1)}$$

oplossen, d. w. z. ze uitdrukken in g_a en g_r.

B. v.:

$$g_{\mu_1 a+1} = \begin{vmatrix} g_r - A_1, & C_1, & \ldots, & K_1 \\ g_r^2 - A_2, & C_2, & \ldots, & K_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ g_r^{a-1} - A_{a-1}, & C_{a-1}, & \ldots, & K_{a-1} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} B_1, & C_1, & \ldots, & K_1 \\ B_2, & C_2, & \ldots, & K_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ B_{a-1}, & C_{a-1}, & \ldots, & K_{a-1} \end{vmatrix}$$

of in 't algemeen:

$$g_{\mu_i a+i} = (g_r - A_1)\, Q_{i,1} + (g_r^2 - A_2)\, Q_{i,2} + \ldots + (g_r^{a-1} - A_{a-1})\, Q_{i,(a-1)}.$$

De Q's zijn functies van g_a, maar niet noodzakelijk geheele functies.

Zijn daarentegen de vergelijkingen niet lineair onafhankelijk, dan zullen er een of meer betrekkingen bestaan van den vorm:

$$P_1 (g_r - A_1) + P_2 (g_r^2 - A_2) + \ldots + P_{a-1} (g_r^{a-1} - A_{a-1}) = 0,$$

waarin P_i een geheele rationeele functie in g_a voorstelt; of:

$$P_{a-1}\, g_r^{a-1} + P_{a-2}\, g_r^{a-2} + \ldots + P_1\, g_r + P = 0$$

indien:

$$-[P_1 A_1 + P_2 A_2 + \ldots + P_{a-1} A_{a-1}] = P.$$

Zij de orde van P_{a-1} in g_a: λ_{a-1}; λ_{a-2} die van P_{a-2} enz.; dan is de orde tot welke een term $P_k\, g_r^k$ oneindig wordt in het punt $x_0\, y_0$:

$$a\, \lambda_k + r\, k.$$

Die van $P_{k'}\, g_r^{k'}$ is:

$$a\, \lambda_{k'} + r\, k'.$$

Nemen we aan, dat $P_{k'}\, g_r^{k'}$ een term is van dezelfde orde

als $P_k g_r^k$, zooals er minstens één moet voorkomen, dan is:

$$a\,\lambda_k + r\,k = a\,\lambda_{k'} + r\,k'$$
$$a\,(\lambda_k - \lambda_{k'}) = r\,(k' - k)$$
$$\frac{r}{a} = \frac{\lambda_k - \lambda_{k'}}{k' - k}.$$

Zoowel k als k' is kleiner dan a, dus ook hun verschil, dan is het duidelijk, dat r en a een gemeenschappelijken factor moeten bezitten.

Nu keeren we de zaak om en stellen, dat zoodra a en r relatief priem zijn, het stel vergelijkingen lineair onafhankelijk is, hetgeen uit het voorgaande gemakkelijk is af te leiden; in het vervolg kiezen we nu altijd zóó, dat r relatief priem is met a, dan kunnen we elke rationeele functie:

$$g_{\mu_1 a+1},\ \ldots,\ g_{\mu_{a-1} a+(a-1)}$$

uitdrukken in g_a en g_r.

Uit de betrekking:

$$g_{m a+i} = A + B\,g_{\mu_1 a+1} + \ldots + K\,g_{\mu_{a-1} a+(a-1)}$$

volgt onmiddellijk, dat we ook *elke* rationeele functie, die alleen oneindig wordt in het punt $(x_0\ y_0)$ uit kunnen drukken in g_a en g_r, immers als het stel vergelijkingen op pag. 49 lineair onafhankelijk is, dan kunnen we daaruit:

$$g_{\mu_1 a+1},\ \ldots,\ g_{\mu_{a-1} a+(a-1)}$$

oplossen. Maar ook g_r^a is een rationeele functie, dus:

$$g_r^a = A + B\,g_{\mu_1 a+1} + \ldots + K\,g_{\mu_{a-1} a+a-1}$$

waaruit volgt:

$$L\,g_r^a + L_1\,g_r^{a-1} + \ldots + L_{a-1}\,g_r + L_a = 0.$$

L_1, L_2, $\ldots$, L_{a-1} zijn geheele functies van g_a, maar L kan niet anders dan een constante zijn, omdat g_r alleen oneindig wordt, wanneer g_a oneindig wordt. Met elke waarde van g_r correspondeeren r punten van het oorspronkelijk oppervlak, waarin g_r die bepaalde waarde aanneemt; in het

algemeen dus ook r waarden van g_a, omdat slechts voor bijzondere gevallen de waarde van g_a in 2 punten hetzelfde is. Dus is de hoogste macht tot welke g_a in de vergelijking voorkomt de r^{de}, g_a^r wordt in het punt $(x_0\ y_0)$ oneindig tot de orde $a \times r$, derhalve kan g_r^a geen anderen coëfficient hebben dan een constante.

De gevonden vergelijking is *onherleidbaar*, er kan immers geen betrekking bestaan van den vorm:

$$L_k g_r^k + L_{k-1} g_r^{k-1} + L_{k-2} g_r^{k-2} + \ldots + L_0 = 0,$$

waarin $k < a$.

Ze stelt dus voor een Riemannsch oppervlak, waarvoor g_a en g_r de onafhankelijk en de afhankelijk veranderlijke zijn.

Elke rationeele functie, die oneindig wordt in een ander punt van het oppervlak b. v. in $(x_1\ y_1)$ tot de orde r_1, kunnen we door vermenigvuldiging met een of meer factoren van de soort $(g_a - E_1)^{r_1}$ omzetten in een rationeele functie, die alleen oneindig wordt in het punt $(x_0\ y_0)$ van het oppervlak, wanneer n. l. $g_a - E_1$ in het punt $x_1\ y_1$ een nul bezit van de 1ste orde.

Willen we b. v. de rationeele functie $\frac{x}{y-1}$, die in het punt $x = 0$, $y = 1$ van het Riemannsche oppervlak voorgesteld door $y^4 - 5\,y^2 - x^4 + 4 = 0$ oneindig wordt tot de 3de orde omzetten in een rationeele functie, van de soort $\frac{y}{y-2}$, die in het punt $x = 0$, $y = 2$ van datzelfde oppervlak oneindig wordt tot de 4de orde, dan moeten we stellen:

$$E_1 = \left(\frac{y}{y-2}\right)_{\substack{x=0\\y=0}} = -1$$

en dus vermenigvuldigen:

$$\frac{x}{y-1}\left(\frac{y}{y-2} + 1\right)^4.$$

Dus kan *elke* rationeele functie worden omgezet in een

rationeele functie, die alleen oneindig wordt in het punt $(x_0\, y_0)$ van het oppervlak en kan dus worden uitgedrukt als functie van g_a en g_r. Derhalve stelt:

$$L\, g_r^a + L_1\, g_r^{a-1} + \ldots + L_a = 0$$

voor een RIEMANNSCH oppervlak, waarin het oorspronkelijk birationeel kan worden omgezet. Kunnen we de transformatie vinden, waardoor de vergelijking in g_a en g_r overgaat in een vergelijking in x en y, dan hebben we dus uit 2 bestaande rationeele functies g_a en g_r (a relatief priem met r) de vergelijking van het oppervlak afgeleid.

Het getransformeerde oppervlak bezit een vertakkingspunt in het oneindige, waardoor alle bladen van het Riemannsche oppervlak heengaan.

Immers:

$$L\, g_r^a + L_1\, g_r^{a-1} + \ldots + L_a = 0,$$

waarin $L_1 \ldots L_a$ geheele functies voorstellen van g_a, maar L een constante is, dus:

$$L\, g_r^a + (g_a, 1)_1\, g_r^{a-1} + \ldots (g_a, 1)_{r-1}\, g_r + (g_a, 1)_r.$$

Stel $g_r = \frac{1}{y'}$; $g_a = \frac{1}{x'}$ dan gaat de vergelijking over in:

$$\frac{L\left(\frac{1}{y'}\right)^a + \left(\frac{1}{x'}, 1\right)_1 \left(\frac{1}{y'}\right)^{a-1} + \ldots + \left(\frac{1}{x'}, 1\right)_r = 0}{L\, x'^r + \ldots + (1, x')_r\, y'^a = 0}\; y'^a\, x'^r.$$

Voor $x' = 0$ of $g_a = \infty$ vinden we $y'^a = 0$, d. w. z. $y' = 0$ of wel $g_r = \infty$; er zijn dus a gelijke waarden $g_r = \infty$, of door het vertakkingspunt in het oneindige gaan alle a bladen van het Riemannsche oppervlak.

De functies:

$$(1,\ g_{\mu_1 a+1},\ g_{\mu_2 a+2},\ \ldots,\ g_{\mu_{a-1} a+a-1})$$

vormen een fundamentaal systeem geheele functies t. o. v. de vergelijking:

$$L\, g_r^a + \ldots + L_a = 0.$$

Alle rationeele functies op het oppervlak kunnen in dat stel functies worden uitgedrukt en wel zóódanig, dat aan de dimensievoorwaarde is voldaan.

Die laatste uitdrukking eischt echter eenige verklaring.

De dimensie eener geheele functie (onder een *geheele* functie te verstaan een rationeele functie, wier polen alle liggen in de punten $x = \infty$ van het oppervlak) wordt gebruikt door HENSEL (zie Crelle 105, 109, 111; Acta Math. 18). Zij b. v. h zoo'n geheele functie en laat er k vertakkingspunten zijn voor $x = \infty$, waar het aantal samenkomende bladen van het Riemannsche oppervlak respectievelijk bedraagt:

$$w_1 + 1,\ w_2 + 1,\ \ldots,\ w_k + 1.$$

De functie h moge in die k punten oneindig worden tot de orden $r_1, r_2, \ldots, r_k$, en $\left[\frac{r_i}{w_i + 1}\right]$ moge voorstellen het kleinste geheele positieve getal grooter dan $\frac{r_i}{w_i + 1}$; noemen we $\varrho + 1$ het grootste van de zoo verkregen *geheele* getallen, dan is blijkbaar $\varrho + 1$ het kleinste positieve *geheele* getal zóódanig, dat $\frac{1}{x^{\varrho+1}} \cdot h$ eindig is in alle punten $x = \infty$; HENSEL noemt nu $\varrho + 1$ de dimensie van de geheele functie h.

Zoo noemt men $\sigma + 1$ de dimensie eener rationeele functie g, die in de punten $x = x_0$ oneindig wordt tot verschillende orden, indien $\sigma + 1$ het kleinste geheele positieve getal is, zóódanig, dat $(x - x_0)^{\sigma+1} g$ eindig is in alle punten $x = x_0$.

Voorbeeld:

De rationeele funtie $\frac{x}{y - 1}$ behoorende bij het oppervlak:

$$y^4 - 5\,y^2 - x^4 + 4 = 0$$

wordt in het punt $x = 0, y = 1$, oneindig als $\frac{1}{x^3}$ (zie pag. 21) haar dimensie is dus 3; een rationeele functie, die in het

punt $x = 0$ oneindig wordt als $\frac{1}{x^{\frac{5}{2}}}$ heeft eveneens tot dimensie 3.

Is nu b. v.:

$$g_{m\,a+i} = (g_a, 1)_{\lambda_1} + (g_a, 1)_{\lambda_2}\, g_{\mu_1\, a+1} + \ldots + (g_a, 1)_{\lambda_a}\, g_{\mu_{a-1}\, a+(a-1)}.$$

Zij $\sigma + 1$ de dimensie van $g_{m\,a+i}$; $\sigma_1 + 1$ die van $g_{\mu_1\, a+1}$, $\sigma_2 + 1$ van $g_{\mu_2\, a+2}$ enz., en $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_a$ die van $(g_a, 1)_{\lambda_1}, \ldots, (g_a, 1)_{\lambda_a}$; dan is de voorwaarde, dat geen der grootheden:

$$\lambda_1,\ \lambda_2 + \sigma_1 + 1, \ldots,\ \lambda_a + \sigma_{a-1} + 1$$

grooter mag zijn, dan $\sigma + 1$, de zoogenaamde dimensievoorwaarde.

Harkness and Morley, Theory of Functions, p. 262 geven de bepaling van een fundamentaal systeem volgens Kronecker; de conditie, dat de som der dimensies zoo klein mogelijk zal zijn, wordt niet ingevoerd, zóódat de functies in dien vorm niet dienen kunnen om het geslacht der vergelijking te bepalen.

De fundamentale functies bezitten verschillende belangrijke eigenschappen, die ik in een volgend hoofdstuk wil behandelen, in verband met de methode om een fundamentaal systeem te vinden.

Hier willen we nu nagaan, wat de kanonische vergelijking van het oppervlak wordt, afgeleid uit de fundamentale functies. Volgens Schottky (Conforme Abbildung mehrfach zusammenhängender ebener Flächen, Crelle, Bd. 83) zijn die kanonische vormen door Weierstrass aangegeven, terwijl Weierstrass schrijft, dat ze door Mevrouw Kovalevsky voor hem zijn berekend.

Bij Weierstrass kan ik ze echter niet vinden; en Schottky geeft er maar enkele.

§ 2.

Hier volgen nu die kanonische vormen voor $p = 1, 2, 3$, eenige vormen voor $p = 4$ en de algemeene vormen voor het geval, dat de laagst bestaanbare orde de i^{de} is voor $i = 2, 3, 4, 5$.

Voor $p = 1$ hebben we slechts na te gaan het geval $k_1 = 1$; voor $p = 2$ het geval $k_1 = 1$, $k_2 = 3$, want $k_1 = 1$, $k_2 = 2$ geeft eenvoudig gewone punten van het oppervlak, die de vergelijking niet determineeren; zoo moeten we voor $p = 3$ alleen onderzoeken de gevallen:

$$k_1 = 1,\ k_2 = 2,\ k_3 = 5,$$
$$k_1 = 1,\ k_2 = 2,\ k_3 = 4,$$
$$k_1 = 1,\ k_2 = 3,\ k_3 = 5,$$

en kunnen het geval $k_1 = 1$, $k_2 = 2$, $k_3 = 3$ buiten beschouwing laten.

$$p = 1;\ k_1 = 1,$$
$$g_a = g_2;\ g_{\mu_1 a+1} = g_r = g_3.$$

Er zal bestaan een betrekking van den vorm:

$$g_{m a+1} = (g_2, 1)\,\lambda + g_3\,(g_2, 1)\,\lambda_1$$

en in het bijzonder:

$$g_3^2 = (g_2, 1)_3 + g_3\,(g_2, 1)$$

de kanonische vorm van WEIERSTRASS.

Stellen we:

$$y = g_3 - \frac{1}{2}(g_2; 1),$$

dan gaat de laatste vergelijking over in:

$$y^2 + 2y\,(g_2, 1)_1 + \frac{1}{4}(g_2, 1)_2 = (g_2, 1)_3 + \left(y - \frac{1}{2}(g_2, 1)_1\right)(g_2, 1)_1$$

of:

$$y^2 = A g_2^3 + B g_2^2 + C g_2 + D.$$

Voeren we nu nog in $x = a g_2 + b$, dan kunnen we deze constanten a en b zóó kiezen, dat de vergelijking den vorm aanneemt:

$$y^2 = 4 x^3 - g_2 x - g_3$$

waarin g_2 en g_3 de uit de theorie der elliptische functiën bekende constanten voorstellen, niet te verwarren met de rationeele functies g_2 en g_3. Door x met een constante factor te vermenigvuldigen kan men bereiken, dat één van de twee constanten een vooraf bepaalde waarde verkrijgt, zoodat de vergelijking slechts 1, d. i. $2p - 1$ parameters bevat, hetgeen het juiste aantal is zoodra er een rationeele functie van de 2de orde bestaat [1]).

§ 3.

$$p = 2. \quad k_1 = 1; \; k_2 = 3.$$

Het hyperelliptische oppervlak is gekarakteriseerd door het bestaan eener rationeele functie in een enkel punt van het oppervlak oneindig tot de 2de orde, derhalve zullen we ook in dit geval een hyperelliptisch oppervlak vinden, bepaald door $(2p - 1)$ parameters.

$$g_a = g_2; \; g_{\mu_1 a + 1} = g_5 = g_r,$$

$$g_5^2 = (g_2, 1)_5 + g_5 (g_2, 1)_2.$$

Stel:

$$y = g_5 - \frac{1}{2} (g_2, 1)_2,$$

dan gaat de vergelijking over in:

$$y^2 = R (g_2),$$

waarin $R (g_2)$ voorstelt een geheele functie van g_2 van den vijfden graad. Stellen we nog:

$$x = m g_2 + n$$

---

[1]) Baker, Abelian Functions pag. 88.

en beschikken naar willekeur over de constanten a en b, dan kan de vergelijking van het oppervlak worden:

$$y^2 = x^5 + a x^3 + b x^2 + c x + d.$$

Vermenigvuldigen we x met een factor, dan kan één der constanten een vooraf bepaalde waarde verkrijgen, zoodat het oppervlak afhangt van $3 = 2p - 1$ constanten, zooals behoort.

§ 4.

$$p = 3. \quad k_1 = 1;\ k_2 = 2;\ k_3 = 5.$$

$$g_a = g_3;\ g_{\mu_1 a + 1} = g_4 = g_r;\ g_{\mu_1 a + 2} = g_8 = g_4^2.$$

Voor een willekeurige rationeele functie mogen we schrijven:

$$g_{m a + i} = g_4^3 (g_3, 1)_\lambda + g_4 (g_3, 1)_\mu + (g_3, 1)_\nu.$$

Derhalve bestaat ook de betrekking:

$$g_4^3 = g_4^2 (g_3, 1)_1 + g_4 (g_3, 1)_2 + (g_3, 1)_4.$$

Deze vergelijking, die 10 constanten bevat stelt een Riemannsch oppervlak voor; stellen we $y = g_4 - \frac{1}{3}(g_3, 1)_1$, dan gaat ze over in:

$$y^3 + y^2 (g_3, 1)_1 + \frac{1}{3} y (g_3, 1)_1^2 + \frac{1}{9} (g_3, 1)_1^3 = \left\{ y^2 + \frac{2}{3} y (g_3, 1)_1 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{9} (g_3, 1)_1^2 \right\} g_3, 1)_1 + \left\{ y + \frac{1}{3} (g_3, 1)_1 \right\} (g_3, 1)_2 + (g_3, 1)_4$$

of

$$y^3 + y (A g_3^2 + B g_3 + C) + D g_3^4 + E g_3^3 + F g_3^2 + G g_3 + H = 0.$$

Vervangen we nu g_3 door $a x + b$, dan kunnen we over de constanten a en b zóódanig beschikken, dat de vergelijking den volgenden vorm aanneemt:

$$y^3 + y (\alpha x + \beta) + x^4 + \gamma x^3 + \delta x^2 + \varepsilon x + \eta = 0.$$

Vermenigvuldigen we x met een factor, dan kunnen we

aan één der coëfficienten een vooraf bepaalde waarde geven en de vergelijking wordt ten slotte:

$$y^3 + y(x + a) + x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = 0,$$

een vorm, die $5 = 3p - 3 - 1$ parameters bevat. In het algemeen is het aantal parameters $3p - 3$, maar uit het bestaan eener rationeele functie oneindig tot de 3de orde, en een oneindig tot de 4de orde in eenzelfde punt volgt één bepaalde betrekking tusschen de $3p - 3$ vertakkingspunten, wier plaats het oppervlak bepaalt; het aantal parameters der vergelijking wordt dus 1 minder dan $3p - 3$.

Vervangen we in dezen laatsten vorm y door $\frac{y}{y-1}$ en x door $\frac{x}{y-1}$ (zie pag. 24) dan kunnen we door behoorlijke keus der constanten de vergelijking omzetten in:

$$y^4 - 5y^2 - x^4 + 4 = 0$$

$$p = 3. \qquad k_1 = 1;\ k_2 = 2;\ k_3 = 4,$$

$$g_a = g_3;\ g_{\mu_1 a+1} = g_7;\ g_{\mu_2 a+2} = g_5 = g_r.$$

Er bestaan betrekkingen van den vorm:

$$g_{ma+i} = (g_3, 1)_\lambda + g_{\mu_1 a+1}(g_3, 1)_\mu + g_{\mu_2 a+2}(g_3, 1)_\nu$$

voor alle waarden van $ma + i$, die bestaanbaar zijn; stellen we de geheele polynomia in g_3 voor door Grieksche letters, terwijl de indices aangeven de orden dier geheele functies, dan kunnen we de volgende vergelijkingen opschrijven:

$$\left.\begin{aligned} g_5^2 &= \alpha_1 g_7 + \beta_1 g_5 + \alpha_3 \\ g_5 g_7 &= \gamma_1 g_7 + \alpha_2 g_5 + \alpha_4 \\ g_7^2 &= \beta_2 g_7 + \beta_3 g_5 + \beta_4 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (1)$$

waaruit we een vergelijking tusschen g_5 en g_3, of tusschen g_7 en g_3 zullen afleiden, die de kanonische vergelijking van het oppervlak zal voorstellen.

In de eerste plaats vervangen we g_5 door $g_5 - \gamma_1$, g_7 door $g_7 - \alpha_2$, waardoor de 2de vergelijking overgaat in $g_5 g_7 = \alpha_4$;

de vorm der beide andere vergelijkingen verandert hierdoor niet.

Uit het systeem:

$$\left.\begin{aligned} g_5^2 &= \alpha_1 g_7 + \beta_1 g_5 + \alpha_3 \\ g_5 g_7 &= \alpha_4 \\ g_7^2 &= \beta_2 g_7 + \beta_3 g_5 + \beta_4 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

kunnen we afleiden:

$$\left.\begin{aligned} g_7 g_5^2 &= \alpha_1 (\beta_2 g_7 + \beta_3 g_5 + \beta_4) + \beta_1 \alpha_4 + \alpha_3 g_7 = \alpha_4 g_5 \\ g_5 g_7^2 &= \beta_2 \alpha_4 + \beta_3 (\alpha_1 g_7 + \beta_1 g_5 + \alpha_3) + \beta_4 g_5 = \alpha_4 g_7 \end{aligned}\right\} . \quad (3)$$

Deze betrekkingen kunnen alleen bestaan, wanneer de coëfficienten van g_5 en g_7 in beide leden dezelfde zijn. Immers, daar g_3, g_5, g_7 fundamentale rationeele functies zijn, kan elke rationeele functie worden uitgedrukt in den vorm:

$$(x, 1)_\lambda + (x, 1)_{\lambda_1} g_3 + (x, 1)_{\lambda_2} g_5 + (x, 1)_{\lambda_3} g_7.$$

(Zie BAKER, pag. 56).

Bestonden er echter één of meer betrekkingen van den vorm:

$$(x, 1)_\mu + (x, 1)_{\mu_1} g_3 + (x, 1)_{\mu_2} g_5 + (x, 1)_{\mu_3} g_7 = 0.$$

dan zouden we daaruit één van de functies b. v. g_7 kunnen oplossen, d. w. z. g_7 uitdrukken in g_3 en g_5. Maar dan kunnen we *elke rationeele* functie uitdrukken in g_3 en g_5, met coëfficienten, die rationeel zijn in x. Stellen β_1, β_2, β_3 polynomia in x voor, dan bestaan dus ook de volgende betrekkingen:

$$\begin{aligned} \beta_1 y &= (x, 1)_\tau + (x, 1)_{\tau_1} g_3 + (x, 1)_{\sigma_2} g_5 \\ \beta_2 y^2 &= (x, 1)_\rho + (x, 1)_{\rho_1} g_3 + (x, 1)_{\rho_2} g_5 \\ \beta_3 y^3 &= (x, 1)_\tau + (x, 1)_{\tau_1} g_3 + (x, 1)_{\tau_2} g_5. \end{aligned}$$

Elimineeren we daaruit g_3 en g_5, dan blijft er iets over als:

$$(x, 1)_\alpha + (x, 1)_{\alpha_1} y + (x, 1)_{\alpha_2} y^2 + (x, 1)_{\alpha_3} y^3 = 0$$

een betrekking in strijd met de onderstelling, dat de vergelijking van het oppervlak onherleidbaar zou zijn; voor $p = 3$ is de graad van het oppervlak minstens $= 4$.

Uit de betrekkingen:

$$g_7 g_5^2 = \alpha_1 (\beta_2 g_7 + \beta_3 g_5 + \beta_4) + \beta_1 \alpha_4 + \alpha_3 g_7 = \alpha_4 g_5$$
$$g_5 g_7^2 = \beta_2 \alpha_4 + \beta_3 (\alpha_1 g_7 + \beta_1 g_5 + \alpha_3) + \beta_4 g_5 = \alpha_4 g_7$$

volgt dus:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_4 - \alpha_1 \beta_3 = 0;\ \alpha_1 \beta_2 + \alpha_3 = 0;\ \alpha_1 \beta_4 + \beta_1 \alpha_4 = 0 \\ \alpha_4 - \beta_1 \alpha_3 = 0;\ \beta_1 \beta_3 + \beta_4 = 0;\ \beta_2 \alpha_4 + \beta_3 \alpha_3 = 0. \end{array}\right\} \quad (4)$$

Zoo min α_1 als β_3 kan nul zijn, daar b. v. uit $\beta_3 = 0$ zou volgen $g_7^2 = \beta_2 g_7 + \beta_4$ en uit $\alpha_1 = 0$: $g_5^2 = \beta_1 g_5 + \alpha_3$, betrekkingen, die immers volgens pag. 52 niet mogen bestaan. We kunnen dus afleiden:

$$\beta_4 = -\beta_1 \beta_3;\ \alpha_4 = \alpha_1 \beta_3;\ \alpha_3 = -\alpha_1 \beta_2 \quad . \quad . \quad (5)$$

Deze voorwaarden zijn afgeleid in de onderstelling, dat:

$$g_5 g_7 \times g_5 = g_7 \times g_5^2$$
$$g_5 g_7 \times g_7 = g_5 \times g_7^2.$$

Nemen we omgekeerd aan, dat die voorwaarden vervuld zijn, dan kunnen we daaruit afleiden, dat de producten $g_5 g_7^2$ en $g_7 g_5^2$ éénwaardig zijn; bovendien is dan elk polynomium in g_7 en g_5 éénwaardig. Immers elk product van geheele machten van g_5 en g_7 kunnen we schrijven als:

$$g_5^\lambda,\ g_7^\mu \text{ of } g_5 g_7 . k.$$

De eerste twee producten kunnen slechts op één manier uit de vergelijkingen (2) worden afgeleid, ze zijn dus uit den aard der zaak éénwaardig. Zij ook k éénwaardig en geschreven in den vorm $L g_7 + M g_5 + N$, dan behoeft slechts aangetoond te worden, dat:

$$g_5 (L g_7^2 + M g_5 g_7 + N g_7) = g_7 (L g_7 g_5 + M g_5^2 + N g_5).$$

Daarvoor is noodig:

$$g_5 g_7^2 = g_7 . g_7 g_5;\ g_5 . g_5 g_7 = g_7 g_5^2.$$

Aan deze voorwaarden is voldaan tengevolge van de

betrekkingen (5), die betrekkingen zijn dus voldoende om te maken, dat elk polynomium in g_5 en g_7 éénwaardig is.

Substitueeren we de voor α_3, α_4 en β_4 gevonden waarden in de vergelijkingen (2), dan gaan deze over in:

$$\left.\begin{aligned} g_5^2 &= \alpha_1 g_7 + \beta_1 g_5 - \alpha_1 \beta_2 \\ g_7^2 &= \beta_2 g_7 + \beta_3 g_5 - \beta_1 \beta_3 \\ g_5 g_7 &= \alpha_1 \beta_3 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

waaruit voor de vergelijking van het oppervlak volgt:

$$g_5^3 - \beta_1 g_5^2 + \alpha_1 \beta_2 g_5 - \alpha_1^2 \beta_3 = 0.$$

Deze vergelijking bevat 11 constanten; vervangen we nu $a g_3 + b$ door x en $c g_5 + d g_3 + e$ door y, dan kunnen we over 5 constanten beschikken en houden de vergelijking over b. v. in den vorm:

$$y^3 + y x (A x + B) + x^2 (C x^3 + D x^2 + E x + F) = 0$$

die $3p - 3 = 6$ constanten bevat, zooals behoort.

$$p = 3. \quad k_1 = 1;\ k_2 = 3;\ k_3 = 5,$$
$$g_a = g_2;\ g_{\mu_1 a + 1} = g_7 = g_r.$$

Hier vinden we onmiddellijk voor de vergelijking van het oppervlak:

$$g_7^2 = g_7 (g_2, 1)_3 + (g_2, 1)_7.$$

Stel:

$$y = g_7 - \frac{1}{2} (g_2, 1)_3$$

dan gaat die vergelijking over in:

$$y^2 = R (g_2),$$

waarin R voorstelt een rationeele functie van g_2 van de zevende orde. Stellen we nog $x = a g_2 + b$, dan kunnen we zoodanig over de constanten a en b beschikken, dat de vergelijking den vorm aanneemt:

$$y^2 + A x^5 + B x^4 + C x^3 + D x^2 + E x + F = 0$$

of wanneer we x met een constanten factor vermenigvuldigen:

$$y^2 + x^5 + a_1 x^4 + a_2 x^3 + a_3 x^2 + a_4 x + a_5 = 0.$$

zoodat de vergelijking van het oppervlak ten slotte $5 = 2p-1$ parameters bevat.

§ 5.

De normale vergelijking van het oppervlak te bepalen, indien de laagst bestaanbare orde is de 2de; indien de laagst bestaanbare orde is de 3de, enz.

$$k_1 = 1;\ k_2 > 2,$$
$$g_a = g_2;\ g_{\mu_1 a+1} = g_{2p+1} = g_r.$$

Vergelijking van het oppervlak:

$$g_{2p+1}^2 = g_{2p+1}(g_2, 1)_p + (g_2, 1)_{2p+1}.$$

Stellen we $y = g_{2p+1} - \frac{1}{2}(g_2, 1)_p$, $x = a g_2 + b$ en vermenigvuldigen dan nog x of y met een constanten factor, waarover we vrij beschikken kunnen, dan houden we in de vergelijking juist de $2p-1$ voor het hyperelliptische oppervlak vereischte parameters over.

$$k_1 = 1;\ k_2 = 2;\ k_3 > 3,$$
$$g_a = g_3;\ g_{\mu_1 a+1} = g_x;\ g_{\mu_2 a+2} = g_y.$$

Er bestaan vergelijkingen:

$$\left.\begin{aligned} g_x^2 &= \alpha g_x + \beta g_y + \gamma \\ g_x g_y &= \delta \\ g_y^2 &= \varepsilon g_x + \vartheta g_y + \zeta \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

waarin de Grieksche letters polynomia in g_3 voorstellen, wier orden eerst bekend zijn, als we x en y kennen. Uit (1) kan worden afgeleid:

$$\left.\begin{aligned} \delta g_x &= \alpha\delta + \beta(\varepsilon g_x + \vartheta g_y + \zeta) + \gamma g_y \\ \delta g_y &= \varepsilon(\alpha g_x + \beta g_y + \gamma) + \vartheta\delta + \zeta g_x \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (2)$$

en uit de vergelijkingen (2) volgt:

$$\left.\begin{array}{l} \beta\,\varepsilon - \delta = 0;\ \beta\,\vartheta + \gamma = 0;\ \alpha\,\delta + \beta\,\zeta = 0 \\ \varepsilon\,\alpha + \zeta = 0;\ \varepsilon\,\beta - \delta = 0;\ \varepsilon\,\gamma + \vartheta\,\delta = 0 \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (3)$$

of

$$\gamma = -\beta\,\vartheta;\ \delta = \beta\,\varepsilon;\ \zeta = -\alpha\,\varepsilon.$$

Na substitutie dezer waarden van γ, δ, ζ in de vergelijkingen (1) gaan deze over in:

$$\left.\begin{array}{rl} g_x^2 = & \alpha\,g_x + \beta\,g_y - \beta\,\vartheta \\ g_x\,g_y = & \beta\,\varepsilon \\ g_y^2 = & \varepsilon\,g_x + \vartheta\,g_y - \alpha\,\varepsilon \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

welke laatste betrekkingen de volgende vergelijking voor het oppervlak geven:

$$\left.\begin{array}{rl} g_x^3 = & \alpha\,g_x^2 - \beta\,\vartheta\,g_x + \beta_\varepsilon^2 \\ \text{of} & \\ g_y^3 = & \vartheta\,g_y^2 - \alpha\,\varepsilon\,g_y + \beta\,\varepsilon^2. \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Beide geven de normale vorm voor alle oppervlakken, waarvoor een rationeele functie bestaat oneindig tot de 3de orde in één enkel punt.

$$k_1 = 1;\ k_2 = 2;\ k_3 = 3;\ k_4 > 4,$$

$$g_a = g_4;\ g_{\mu_1 a + 1} = g_x;\ g_{\mu_2 a + 2}\,g_y;\ g_{\mu_3 a + 3} = g_z.$$

De volgende betrekkingen zijn mogelijk:

$$\left.\begin{array}{l} g_z^2 = \alpha_1\,g_x + \beta_1\,g_y + \gamma_1\,g_z + \delta_1 \\ g_y\,g_z = \alpha_2\,g_x + \delta_2 \\ g_x\,g_z = \alpha_3\,g_x + \beta_3\,g_y + \delta_3. \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

De Grieksche letters stellen voor polynomia in g_4, wier orden volgen uit x, y, z.

Door eliminatie van g_x en g_y vinden we voor de vergelijking van het oppervlak:

$$\begin{array}{l} g_z^4 - g_z^3\,(\alpha_3 + \gamma_1) - g_z^2\,(\alpha_2\,\beta_3 + \delta_1 - \alpha_3\,\gamma_1) + \\ \quad + g_z\,(-\alpha_1\,\delta_3 - \beta_1\,\delta_2 + \gamma_1\,\alpha_2\,\beta_3 + \delta_1\,\alpha_3) - \\ - \alpha_1\,\beta_3\,\delta_2 - \beta_1\,\alpha_2\,\delta_3 + \beta_1\,\alpha_3\,\delta_2 + \delta_1\,\alpha_2\,\beta_3 = 0. \end{array}$$

Behalve de betrekkingen (6) bestaan echter ook:

$$\left.\begin{aligned} g_y^2 &= \alpha_4 g_x + \beta_4 g_y + \gamma_4 g_z + \delta_4 \\ g_x g_y &= \alpha_5 g_x + \beta_5 g_y + \gamma_5 g_z + \delta_5 \\ g_x^2 &= \alpha_6 g_x + \beta_6 g_y + \gamma_6 g_z + \delta_6 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Uit (6) en (7) kunnen we de volgende vergelijkingen vinden:

$$g_y g_z^2 = g_y g_z \cdot g_z;\ g_x g_z^2 = g_x g_z \cdot g_z;\ g_x \cdot g_y g_z = g_y \cdot g_x g_z.$$

Deze leveren de voorwaarden:

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_1 \alpha_5 + \beta_1 \alpha_4 + \gamma_1 \alpha_2 - \alpha_2 \alpha_3 = 0 \\ &\alpha_1 \beta_5 + \beta_1 \beta_4 + \delta_1 - \alpha_2 \beta_3 = 0 \\ &\alpha_1 \gamma_5 + \beta_1 \gamma_4 - \delta_2 = 0 \\ &\alpha_1 \alpha_6 + \beta_1 \alpha_5 + \gamma_1 \alpha_3 + \delta_1 - \alpha_3^2 - \beta_3 \alpha_2 = 0 \\ &\alpha_1 \beta_6 + \beta_1 \beta_5 + \gamma_1 \beta_3 - \alpha_3 \beta_3 = 0 \\ &\alpha_1 \gamma_6 + \beta_1 \gamma_5 - \delta_3 = 0 \\ &- \alpha_2 \alpha_6 - \delta_2 + \alpha_3 \alpha_5 + \beta_3 \alpha_4 = 0 \\ &- \alpha_2 \beta_6 + \alpha_3 \beta_5 + \beta_3 \beta_4 + \delta_3 = 0 \\ &- \alpha_2 \gamma_6 + \alpha_3 \gamma_5 + \beta_3 \gamma_4 = 0 \\ &\alpha_1 \delta_5 + \beta_1 \delta_4 + \gamma_1 \delta_2 - \alpha_2 \delta_3 = 0 \\ &\alpha_1 \delta_6 + \beta_1 \delta_5 + \gamma_1 \delta_3 - \alpha_3 \delta_3 - \beta_3 \delta_2 = 0 \\ &- \alpha_2 \delta_6 + \alpha_3 \delta_5 + \beta_3 \delta_4 = 0. \end{aligned}\right\} \quad . \quad (8)$$

Beschouwen we α_4, α_5, α_6, β_4, β_5, β_6, γ_4, γ_5, γ_6, δ_4, δ_5, δ_6 als onbekenden, dan kunnen we telkens uit 3 van de vergelijkingen (8) de 12 grootheden $\alpha_4 \ldots \delta_6$ bepalen. Zoo wordt b. v.:

$$\alpha_4 = \begin{vmatrix} \varrho\ \alpha_2 & \alpha_1 & 0 \\ \varrho\ \alpha_3 + \sigma & \beta_1 & \alpha_1 \\ \delta_2 & \alpha_3 & -\alpha_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \beta_1 & \alpha_1 & 0 \\ 0 & \beta_1 & \alpha_1 \\ \beta_3 & \alpha_3 & -\alpha_2 \end{vmatrix}$$

waarin ϱ gesteld is voor $\alpha_3 - \gamma_1$; σ voor $\alpha_2 \beta_3 - \delta_1$.

Soortgelijke uitdrukkingen vinden we voor $\beta_4, \ldots, \gamma_6$, terwijl de determinant in den noemer voor die 9 grootheden dezelfde is. Blijkbaar moeten dus de 9 polynomia:

$$-\alpha_2^2\beta_1\varrho+\alpha_1\alpha_2\sigma+\alpha_1^2\delta_2;\ \alpha_2\varrho(\alpha_1\beta_3-\alpha_3\beta_1)-\beta_1(\alpha_2\sigma+\alpha_1\delta_2);$$
$$(\sigma+\alpha_3\varrho)(\alpha_1\beta_3-\alpha_3\beta_1)-\beta_1(\alpha_2\beta_3\varrho-\beta_1\delta_2);$$
$$-\sigma(\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\beta_1)+\alpha_1(\alpha_2\beta_3\varrho+\alpha_1\delta_3);$$
$$-\beta_1(\alpha_2\beta_3\varrho+\alpha_1\delta_3)+\alpha_1\beta_3\sigma;$$
$$\varrho\beta_3(\alpha_1\beta_3-\beta_1\alpha_3)-\beta_1(\sigma\beta_3+\beta_1\delta_3);$$
$$\alpha_1(\alpha_2\delta_3-\alpha_3\delta_2)-\beta_1\alpha_2\delta_2;$$
$$\alpha_1\beta_3\delta_2-\alpha_2\beta_1\delta_3;\ \delta_3(\alpha_1\beta_3-\beta_1\alpha_3)-\beta_1\beta_3\delta_2$$

deelbaar zijn door

$$\alpha_1^2\beta_3-\alpha_1\alpha_3\beta_1-\alpha_2\beta_1^2.$$

Dan volgt uit de laatste 3 vergelijkingen van het stel (8):

$$\delta_4=\alpha_2\gamma_5-\gamma_1\gamma_4;\quad \delta_5=\varrho\gamma_5-\beta_3\gamma_4;\quad \delta_6=\varrho\gamma_6-\beta_3\gamma_5.$$

$k_1=1;\ k_2=2;\ k_3=3;\ k_4=4;\ k_5>5.$

$g_a=g_5;\ g_{\mu_1 a+1}=g_x;\ g_{\mu_2 a+2}=g_y;\ g_{\mu_3 a+3}=g_z;\ g_{\mu_4 a+4}=g_u.$

Uit:

$$g_u^2=\alpha_1 g_x+\beta_1 g_y+\gamma_1 g_z+\delta_1 g_u+\varepsilon_1$$
$$g_z g_u=\alpha_2 g_x+\varepsilon_2$$
$$g_y g_u=\alpha_3 g_x+\beta_3 g_y+\varepsilon_3$$
$$g_x g_u=\alpha_4 g_x+\beta_4 g_y+\gamma_4 g_z+\varepsilon_4$$

volgt de vergelijking van het oppervlak in den vorm:

$$g_u^5+(g_5,1)_\lambda g_u^4+(g_5,1)_\mu g_u^3+(g_5,1)_\nu g_u^2+(g_5,1)_\pi g_u+(g_5,1)_\rho=0.$$

Daar we echter ook

$$g_x^2,\ g_y^2,\ g_z^2,\ g_x g_y,\ g_x g_z,\ g_y g_z$$

kunnen uitdrukken in g_x, g_y, g_z, g_u met coëfficiënten, die polynomia zijn in g_5, kunnen we uit:

$$g_z g_u^2=g_z g_u\cdot g_u;\ g_y g_u^2=g_y g_u\cdot g_u;\ g_x\cdot g_u^2=g_x g_u\cdot g_u$$
$$g_y\cdot g_z g_u=g_z\cdot g_y g_u;\ g_x\cdot g_z g_u=g_z\cdot g_x g_u;\ g_x\cdot g_y g_u=g_y\cdot g_x g_u$$

een reeks voorwaarden afleiden, waaraan de coëfficiënten moeten voldoen. We vinden, dat 24 determinanten van de zesde orde deelbaar moeten zijn door:

$$\begin{vmatrix} \varrho, & 0, & 0, & \beta_1, & \alpha_1, & 0 \\ \sigma, & \beta_1, & 0, & \gamma_1, & 0, & \alpha_1 \\ \tau, & 0, & 0, & 0, & \gamma_1, & \beta_1 \\ -\varepsilon_2 + \delta_4\,\alpha_2, & 0, & -\gamma_4, & -\beta_4, & -\alpha_4, & \beta_2 \\ 0, & \beta_2, & -\gamma_3, & -\beta_3, & -\alpha_3, & \alpha_2 \\ -\varepsilon_3 + \delta_4\,\alpha_3, & -\beta_4, & 0, & -\gamma_4, & \gamma_3, & \beta_3 - \alpha_4. \end{vmatrix}$$

waarin:

$$\varrho = \alpha_2\,\alpha_4 + \beta_2\,\alpha_3 - \delta_1\,\alpha_2$$

$$\sigma = \alpha_3\,\alpha_4 - \delta_1\,\alpha_3 + \beta_3\,\alpha_3 + \gamma_3\,\alpha_2$$

$$\tau = \alpha_4^2 - \delta_1\,\alpha_4 - \varepsilon_1 + \beta_4\,\alpha_3 + \gamma_4\,\alpha_2 + \delta_4\,\alpha_1.$$

Het is duidelijk, dat de voorwaarden, waaraan de coëfficienten moeten voldoen ingewikkelder worden, naarmate de laagst bestaanbare orde hooger is.

Tot slot van dit hoofdstuk volgen de vergelijkingen behoorende bij eenige waarden van p. Daarin is voor $p = 3$ niet opgenomen de mogelijkheid $k_1 = 1$, $k_2 = 2$, $k_3 = 3$, om de in § 2 vermelde reden; in 't algemeen dus niet het geval $k_1 = 1$, $k_2 = 2, \ldots, k_p = p$.

$p.$	$k_1, k_2, \ldots$	$g_a; g_{\mu_1 a+1}, \ldots$	Kanonische vergelijking van g_3^2
1	1	g_2, g_3	$g_3^2 = (g_2, 1)_1 g_3 + (g_2, 1)_3.$
2	1, 3	g_2, g_5	$g_5^2 = (g_2, 1)_2 g_5 + (g_2, 1)_5.$
3	1, 3, 5	g_2, g_7	$g_7^2 = (g_2, 1)_3 g_7 + (g_2, 1)_7.$
3	1, 2, 5	g_3, g_4, g_4^2	$g_4^3 = g_4^2 (g_3, 1)_1 + g_4 (g_3, 1)_2 + (g_3,$
3	1, 2, 4	g_3, g_5, g_7	$g_5^3 = (g_3, 1)_1 g_5^2 + (g_3, 1)_2 (g_3, 1)_1 g_3$
4	1, 3, 5, 7	g_2, g_9	$g_9^2 = (g_2, 1)_4 g_9 + (g_2, 1)_9.$
4	1, 2, 4, 5	g_3, g_7, g_8	$g_7^3 = \beta_2 g_7^2 + \alpha_2 \gamma_2 g_7 + \alpha_2^2 \alpha_3.$
4	1, 2, 4, 7	g_3, g_5, g_5^2	$g_5^3 = \alpha_1 g_5^3 + \alpha_3 g_5 + \alpha_5.$
4	1, 2, 3, 5	g_4, g_6, g_7, g_9	$g_9^4 = g_9^3 (\beta_2 + \delta_2) + g_9^2 (\beta_2 \delta_2 + \alpha_4 + \varepsilon_2$ $+ \alpha_4 \delta_2 + \alpha_2 \beta_4 + \alpha_3 \beta_3) + \alpha_2 \beta_4 \delta_2$ $+ \alpha_3 \varepsilon_2 \beta_4 + \alpha_2 \gamma_2$
4	1, 2, 3, 6	g_4, g_5, g_7, g_5^2	$g_5^4 = \gamma_1 g_5^3 + \beta_2 g_5^2 + \beta_1 \gamma_2 g_5 + \alpha_1 \gamma_2^2$
4	1, 2, 3, 7	g_4, g_5, g_6, g_{11}	$g_5^4 = (\gamma_1 + \beta_1) g_5^3 + (\gamma_2 + \alpha_2 + \gamma_1 \beta_1$ $+ \alpha_2 \gamma_1) g_5 + \alpha_1 \beta_2 \gamma_1 +$
5	1, 3, 5, 7, 9	g_2, g_{11}	$g_{11}^2 = (g_2, 1)_5 g_{11} + (g_2, 1)_{11}.$
5	1, 2, 4, 5, 7	g_3, g_8, g_{10}	$g_8^3 = \beta_2 g_8^2 + \alpha_2 \alpha_3 g_8 + \alpha_2^2 \alpha_4.$
5	1, 2, 4, 5, 8	g_3, g_7, g_{11}	$g_7^3 = \alpha_2 g_7^2 + \alpha_1 \alpha_3 g_7 + \alpha_1^2 \alpha_5.$
5	1, 2, 3, 5, 6	g_4, g_7, g_9, g_{10}	$g_7^4 = (\varepsilon_1 + \gamma_1) g_7^3 + (\alpha_2 \delta_1 + \alpha_3 + \gamma_1 \varepsilon$ $+ \gamma_1 \alpha_2 \delta_1 + \alpha_3 \varepsilon_1) g_7 + \alpha_1 \alpha_2 \alpha_4 + \beta_1 \varepsilon$
5	1, 2, 3, 5, 7	g_4, g_6, g_9, g_{11}	$g_9^4 = (\beta_2 + \alpha_2) g_9^3 + (\beta_1 \gamma_3 + \alpha_4 + \alpha_2$ $+ \alpha_2 \beta_1 \gamma_3 + \alpha_4 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3) g$ $+ \alpha_4 \beta_1 \gamma_3 + \alpha_3 \alpha_5 \beta_1 + \alpha_3 \beta_2$
5	1, 2, 3, 5, 9	g_4, g_6, g_7, g_{13}	$g_7^4 = (\beta_1 + \alpha_1) g_7^3 + (\gamma_3 + \alpha_3 + \alpha_1 \beta_1$ $+ \alpha_1 \gamma_3 + \alpha_3 \beta_1) g_7 + \gamma_3 \beta_3 + \alpha_2 \beta_3 \beta$
5	1, 2, 3, 6, 7	g_4, g_5, g_5^2, g_{11}	$g_{11}^4 = (\beta_2 + \alpha_2) g_{11}^3 + (\alpha_1 \beta_4 + \alpha_2 \beta_3$ $+ \alpha_3 \beta_5 + \alpha_1 \alpha_2 \beta_4 + \alpha_5 \beta_2) g_1$ $+ \alpha_3 \beta_4 \gamma_4 + \alpha_3 \beta_2 \beta_5 + \alpha_1 \alpha_5$

pervlak.	Substituties.	Aantal parameters.
	$y = g_3 - \frac{1}{2}(g_2, 1)_1$; $x = a g_2 + b$. $x' = \alpha x$.	$1 = 2p - 1$.
	$y = g_5 - \frac{1}{2}(g_2, 1)_2$; $x = a g_2 + b$. $x' = \alpha x$.	$3 = 2p - 1$.
	$y = g_7 - \frac{1}{2}(g_2, 1)_3$; $x = a g_2 + b$. $x' = \alpha x$.	$5 = 2p - 1$.
	$y = g_4 - \frac{1}{3}(g_3, 1)_1$; $x = a g_3 + b$. $x' = \alpha x$.	$5 = 3p - 3 - 1$.
$_3, 1)^2\ (g_3, 1)_3$.	$y = g_5 - \frac{1}{3}(g_3, 1)_1$; $x = a g_3 + b$. $x' = \alpha x$.	$6 = 3p - 3$.
	$y = g_9 - \frac{1}{2}(g_2, 1)_4$; $x = a g_2 + b$. $x' = \alpha x$.	$7 = 2p - 1$.
	$y = a g_7 + b g_3^2 + c g_3 + d$; $x = e g_3 + f$.	$7 = 3p - 3 - 2$.
	$y = a g_5 + b g_3 + c$; $x = d g_3 + e$.	$7 = 3p - 3 - 2$.
$g_9(\beta_2 \gamma_2 \epsilon_2 +$ $\epsilon_2 \gamma_2 +$	$y = a g_9 + b g_4^2 + c g_4 + d$; $x = e g_4 + f$. bovendien 9 betrekkingen, zie pag. 66.	$9 = 3p - 3$.
	$y = a g_5 + b g_4 + c$; $x = d g_4 + e$.	$7 = 3p - 3 - 2$.
$(\alpha_1 \beta_2 + \beta_1 \gamma_2 +$ $+ \alpha_2 \gamma_2$.	$y = a g_5 + b g_4 + c$; $x = d g_4 + e$.	$6 = 3p - 3 - 3$.
	$y = g_{11} - (g_2, 1)_5$; $x = a g_2 + b$. $x' = \alpha x$.	$9 = 2p - 1$.
	$y = a g_8 + b g_3^2 + c g_3 + d$; $x = e g_3 + f$.	$9 = 3p - 3 - 3$.
	$y = a g_7 + b g_3^2 + c g_3 + d$; $x = e g_3 + f$.	$9 = 3p - 3 - 3$.
$(\alpha_1 \beta_4 + \beta_1 \alpha_4 +$ $\beta_1 \delta_1 \beta_4 + \alpha_2 \alpha_3 \delta_1$. $+ (\alpha_1 \alpha_5 +$ $\gamma_3 \beta_3 +$	$y = a g_7 + b g_4 + c$; $x + d g_4 + e$.	
	$y = a g_9 + b g_4^2 + c g_4 + d$; $x = e g_4 + f$.	
$(\alpha_5 + \alpha_2 \beta_3 +$ $\alpha_5 + \alpha_3 \gamma_3$. $) g_{11}^2 + (\alpha_4 \gamma_4 +$ $\alpha_4 \beta_5 +$	$y = a g_7 + b g_4 + c$; $x = d g_4 + e$.	
	$y = a g_{11} + b g_4^2 + c g_4 + d$; $x = e g_4 + f$.	

HOOFDSTUK III.

De fundamentale functiën te vinden behoorende bij een gegeven vorm van de vergelijking $f(x, y) = 0$.

(Zie HENSEL, Acta Mathematica, XVIII).

§ 1.

In het vorige hoofdstuk hebben we fundamentale systemen van geheele functies leeren kennen, en met behulp daarvan de vergelijking van het oppervlak opgebouwd. Is deze gegeven, dan willen we nu nagaan, hoe uit die vergelijking de functies bepaald kunnen worden.

Onder een fundamentaal systeem van rationeele functies behoorende bij de algebraïsche onherleidbare vergelijking $f(x, y) = 0$ zullen we verstaan een stel rationeele functies $1, g_1, \ldots, g_{n-1}$ alleen oneindig in de n punten $x = a$ van het oppervlak en zóódanig gekozen, dat elke rationeele functie G, die alleen oneindig wordt in die n punten $x = a$ kan worden uitgedrukt in den vorm:

$$G = \left(\frac{1}{x-a}, 1\right)_{\lambda} + \left(\frac{1}{x-a}, 1\right)_{\lambda_1} g_1 + \ldots + \left(\frac{1}{x-a}, 1\right)_{\lambda_{n-1}} g_{n-1}$$

en wel zóó, dat aan de dimensievoorwaarde is voldaan. (Voor het bewijs, dat er altijd zoo'n systeem bestaat, zie BAKER, pag. 49).

Is nu H een *geheele* functie, wier dimensie $= \varrho + 1$. Dan is $\frac{1}{x^{\varrho+1}}$. H eindig in alle punten $x = \infty$; hetzelfde geldt voor $\frac{1}{(x-a)^{\varrho+1}} H$; die laatste functie wordt echter ∞ in de punten $x = a$. Wordt H niet in alle punten $x = a$ nul, dan zal de dimensie van $H \cdot \frac{1}{(x-a)^{\varrho+1}}$ gelijk zijn aan $\varrho + 1$, in het algemeen zal de dimensie $\sigma + 1$ van $\frac{H}{(x-a)^{\varrho+1}}$ kleiner zijn dan $(\varrho + 1)$.

Stelt $g_1, \ldots, g_{n-1}$ voor een stel rationeele functies, zooals we juist beschouwden en wier dimensies bedragen $\sigma_1 + 1$, $\ldots, \sigma_{n-1} + 1$, dan bestaat er dus een betrekking:

$$\frac{H}{(x-a)^{\varrho+1}} = \left(\frac{1}{x-a}, 1\right)_{\lambda} + \left(\frac{1}{x-a}, 1\right)_{\lambda_1} g_1 + \ldots + \left(\frac{1}{x-a}, 1\right)_{\lambda_{n-1}} g_{n-1}$$

welke aan de dimensievoorwaarde voldoet. Dus is

$$\sigma + 1 \geqq \lambda_i + \sigma_i + 1 \qquad i = 1, 2, \ldots, (n-1),$$

en stellig $\varrho + 1 \geqq \lambda_i + \sigma_i + 1$.

We kunnen dus ook schrijven:

$$H = (1, x-a)_{\lambda} (x-a)^{\varrho-\lambda+1} + (1, x-a)_{\lambda_1} (x-a)^{\varrho-\lambda_1-\sigma_1} h_1 + \ldots + (1, x-a)_{\lambda_{n-1}} (x-a)^{\varrho-\lambda_{n-1}-\sigma_{n-1}} h_{n-1}$$

waarin nu $h_1, \ldots, h_{n-1}$ niet meer oneindig worden in het punt $x = a$.

De uitdrukking voor H kunnen we nu nog vervangen door:

$$H = (1, x)_{\mu} + (1, x)_{\mu_1} h_1 + \ldots + (1, x)_{\mu_{n-1}} h_{n-1} \qquad (\alpha)$$

waarin:

$$\mu_i + \varrho_i + 1 = \varrho - \sigma_i + \varrho_i + 1 = \varrho + 1 - (\sigma_i - \varrho_i) \leqq \varrho + 1$$

ϱ_i stelt n. l. voor de dimensie van de geheele functie h_i; elke term in het rechter lid van de vergelijking (α) heeft lager

dimensie dan de functie H, we noemen nu $(1, h_1, \ldots, h_{n-1})$ een fundamentaal systeem van *geheele* functies, waarin elke geheele functie kan worden uitgedrukt, met coëfficienten, die polynomia zijn in x.

Voor een rationeele functie oneindig tot de r^{de} orde in één enkel punt van het oppervlak kunnen we schrijven:

$$G = \left(\frac{1}{x-a}, 1\right)_{\lambda} + \left(\frac{1}{x-a}, 1\right)_{\lambda_1} g_1 + \ldots + \left(\frac{1}{x-a}, 1\right)_{\lambda_{n-1}} g_{n-1}$$

waar, indien weer $\sigma_i + 1$ de dimensie van g_i is, voor elke term geldt $\lambda_i + \sigma_i + 1 \leqq r$.

Omgekeerd is de meest algemeene uitdrukking van dezen vorm, waarin $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ de bovenste grens bereiken, die, deze voorwaarde in aanmerking genomen, mogelijk is, een rationeele functie van de verlangde soort. Zoo'n algemeene uitdrukking bevat:

d. i.
$$\begin{aligned} &\lambda + 1 + (\lambda_1 + 1) + \ldots + (\lambda_{n-1} + 1) \\ &r + 1 + (r - \sigma_1) + \ldots + (r - \sigma_{n-1}) \\ &= nr - (\sigma_1 + \ldots + \sigma_{n-1}) + 1 \end{aligned}$$

willekeurige constanten.

Als we r maar groot genoeg kiezen bestaat er altijd zoo'n rationeele functie en ze bevat $nr - p + 1$ constanten, waarvan één additieve (zie Baker § 37). Daaruit volgt:

$$p = \sigma_1 + \ldots + \sigma_{n-1}.$$

Evenzoo is voor een fundamentaal systeem van geheele functies, wier dimensies respectievelijk zijn $\varrho_1 \ldots \varrho_{n-1}$.

$$\varrho_1 + \ldots + \varrho_{n-1} = p.$$

§ 2.

We willen nu onderzoeken welke eigenschappen karakteristiek zijn voor een systeem fundamentale functies.

Stelt $1, h_1, \ldots, h_{n-1}$ een dergelijk systeem *geheele* functies

voor, dan kan er geen betrekking bestaan van den vorm:

$$(x, 1)_{\mu} + (x, 1)_{\mu_1} h_1 + \ldots + (x, 1)_{\mu_{n-1}} h_{n-1} = 0.$$

Immers, bestonden er k van deze betrekkingen, die onafhankelijk van elkaar waren, dan zouden we k van de functies h kunnen uitdrukken als lineaire functies van de overige $n - 1 - k$, met coëfficienten, die rationeel zijn in x. Dan zouden we ook de geheele functies $\beta_1 y, \ldots, \beta_{n-k} y^{n-k}$ (β's zijn geheele polynomia in x) kunnen uitdrukken als lineaire functies van de $n - k$ onafhankelijke functies h met coëfficienten, die rationeel zijn in x.

Door eliminatie van deze $n - 1 - k$ functies h verkrijgen we een vergelijking:

$$A + A_1 y + \ldots + A_{n-k} y^{n-k} = 0$$

waarin de coëfficienten A rationeele functies van x voorstellen; deze betrekking is echter in strijd met de onderstelling, dat de vergelijking van het oppervlak onherleidbaar zou zijn.

§ 3.

Het is niet mogelijk, dat de lineaire functie

$$\lambda + \lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2 + \ldots + \lambda_{n-1} h_{n-1},$$

waarin de λ's constanten voorstellen, dezelfde waarde heeft in 2 punten met dezelfde x voor alle waarden van λ.

Beschouwen we een punt x, waarin geen vertakkingspunten voorkomen. Noemen we respectievelijk $a_1 \ldots a_{n-1}$ de waarden van de functies $h_1 \ldots h_{n-1}$ in deze 2 punten x, waar de functies $h_1 \ldots h_{n-1}$ aan elkaar gelijk zijn; dan kunnen we coëfficienten $\mu_1 \ldots \mu_{n-1}$ bepalen, zoodanig, dat

$$\mu_1 (h_1 - a_1) + \ldots + \mu_{n-1} (h_{n-1} - a_{n-1})$$

niet alleen in de 2 punten, waar de waarden van h dezelfde is, nul wordt, maar ook in de overige $n - 2$ punten, die uit de gekozen waarde van x volgen. Zij c de waarde van

x, waarvoor dus geen vertakkingspunten bestaan, dan is:

$$\frac{[\mu_1 (h_1 - a_1) + \ldots + \mu_{n-1} (h_{n-1} - a_{n-1})]}{x - c}$$

in geen der punten $x = c$ oneindig, het is derhalve een geheele functie. Maar dan zouden we ze ook kunnen uitdrukken in den vorm:

$$(x, 1)_\lambda + (x, 1)_{\lambda_1} h_1 + \ldots + (x, 1)_{\lambda_{n-1}} h_{n-1},$$

hetgeen zou leiden tot een betrekking

$$(x, 1)_\mu + (x, 1)_{\mu_1} h_1 + \ldots + (x, 1)_{\mu_{n-1}} h_{n-1} = 0,$$

die volgens § 2 niet mag bestaan.

Bestaat er in het punt x één vertakkingspunt, waardoor 2 bladen heengaan, terwijl dat punt x geen verdere vertakkingspunten bezit, dan kunnen we op dezelfde manier bewijzen, dat er geen functie

$$\lambda + \lambda_1 h_1 + \ldots + \lambda_{n-1} h_{n-1}$$

voor *alle* waarden van λ nul kan worden in dat vertakkingspunt tot de 2de orde.

In 't algemeen geldt de stelling:

Wanneer $h_1, \ldots, h_{n-1}$ alle nul worden in een punt van het Riemannsche oppervlak, dan kunnen ze niet alle nul worden in een punt met dezelfde x; en in een vertakkingspunt kunnen ze niet alle nul worden tot de 2de orde.

§ 4.

Beschouwen we 2 systemen geheele fundamentale functies $1, H_1, H_2, \ldots, H_{n-1}$ en $1, h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}$, dan bestaan de volgende betrekkingen:

$$1 = 1$$
$$H_1 = (x, 1)_1 + (x, 1)_{1,1} h_1 + (x, 1)_{1,2} h_2 + \ldots + (x, 1)_{1,n-1} h_{n-1}$$
$$H_2 = (x, 1)_2 + (x, 1)_{2,1} h_1 + (x, 1)_{2,2} h_2 + \ldots + (x, 1)_{2,n-1} h_{n-1}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$H_{n-1} = (x, 1)_{n-1} + (x, 1)_{n-1,1} h_1 + (x, 1)_{n-1,2} h_2 + \ldots + (x, 1)_{n-1,n-1} h_{n-1}$$

De indices i, k in $(x, 1)_{i,k}$ geven eenvoudig aan, dat $(x, 1)_{i,k}$ een polynomium is van de orde, die behoort in de rij van H_i en in de kolom van h_k.

Noemen we $H_i^{(r)}$ de waarde, die H_i aanneemt in het r^{de} blad van het Riemannsche oppervlak, dan kunnen we de volgende identiteit neerschrijven:

$$\begin{vmatrix} 1, 1, \ldots\ldots\ldots, 1 \\ H_1^{(1)}, H_1^{(2)}, \ldots, H_1^{(n)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ H_{n-1}^{(1)}, H_{n-1}^{(2)} \ldots, H_{n-1}^{(n)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, 0, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, 0 \\ (x, 1)_1, (x, 1)_{1,1} \ldots, (x, 1)_{1,(n-1)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (x, 1)_{n-1}, (x, 1)_{(n-1,1} \ldots, (x, 1)_{n-1,n-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1, 1, \ldots\ldots\ldots, 1 \\ h_1^{(1)} h_1^{(2)} \ldots\ldots, h_1^{(n)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ h_{n-1}^{(1)} h_{n-1}^{(2)} \ldots, h_{n-1}^{(n)} \end{vmatrix}$$

Verhef die in het kwadraat, dan is de algemeene term van den determinant in het eerste lid

$$H_i^{(1)} H_j^{(1)} + H_i^{(2)} H_j^{(2)} + \ldots + H_i^{(n)} H_j^{(n)}.$$

Deze uitdrukking wordt alleen oneindig voor $x = \infty$, het is dus een geheel polynomium in x. Stellen we de determinant $[(x, 1)_{i,j}] = \nabla_H$, dan kunnen we schrijven:

$$\Delta (1, H_1, \ldots H_{n-1}) = \nabla_H^2 . \Delta (1, h_1, \ldots h_{n-1}).$$

waarin $\Delta (1, H_1, \ldots H_{n-1})$ voorstelt de determinant

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} (H_i^{(1)} H_j^{(1)} + \ldots + H_i^{(n)} H_j^{(n)}).$$

De Δ noemt men de discriminant van het stelsel, waarop ze betrekking heeft. Beschouwen we een geheele functie $\eta = \beta y$, (waarin $\beta = (x, 1)_\lambda$), dan kunnen we evenals voor de H functies een betrekking afleiden:

$$\Delta (1, \eta, \ldots, \eta^{n-1}) = \nabla_\eta^2 \Delta (1, h_1, \ldots, h_{n-1}),$$

waarin weder ∇_η voorstelt een determinant $[(x, 1)_{i,j}]$, die echter niet noodzakelijk dezelfde behoeft te zijn als ∇_H.

Nu is echter het eerste lid gelijk aan:

$(\eta^{(1)} - \eta^{(2)})^2 (\eta^{(1)} - \eta^{(3)})^2 \ldots (\eta^{(n-2)} - \eta^{(n-1)})^2 (\eta^{(n-1)} - \eta^{(n)})^2$

een uitdrukking, die niet nul kan worden voor alle waarden

van x, omdat dan de functie y in alle n punten x eenzelfde waarde zou moeten hebben; dan wordt echter ook $\Delta(1, h_1, \ldots, h_{n-1})$ niet nul voor alle waarden van x, evenmin $\Delta(1, H_1, \ldots, H_{n-1})$.

Er bestaat dus een betrekking

$$\Delta(1, h_1, \ldots, h_{n-1}) = \nabla_h^2 \cdot \Delta(1, H_1, \ldots, H_{n-1}),$$

waarin ∇_h een rationeele functie is van x. Hieruit volgt:

$$\nabla_H^2 \times \nabla_h^2 = 1$$

of

$$\nabla_H = C_1; \nabla_h = C_2.$$

Elk systeem fundamentale functies heeft dus op een constanten factor na denzelfden discriminant.

Noemen we hun gemeenschappelijke waarde Δ_1 en laat $\eta_1, \ldots, \eta_n$ voorstellen *n willekeurige geheele* functies; drukken we die alle uit in een systeem fundamentale functies, dan kunnen we komen tot de betrekking:

$$\Delta(\eta_1, \ldots, \eta_n) = M^2 \Delta^1$$

als $M =$ polynomium in x. Daaruit volgt, dat Δ^1 deelbaar is op $\Delta(\eta_1, \ldots, \eta_n)$; $(1, h_1, \ldots, h_{n-1})$ is echter een dergelijk systeem als $(1, \eta_1 \ldots \eta_{n-1})$, derhalve is de discriminant der fundamentale functies de grootste gemeene deeler der discriminanten van elk stel van n geheele functies.

§ 5.

Zij g een willekeurige rationeele functie, behoorende bij de vergelijking

$$y^n + a_1 y^{n-1} + a_2 y^{n-2} + \ldots + a_n = 0$$

waarin de coëfficienten $a_1, \ldots, a_n$ polynomia in x voorstellen. De n waarden, welke die functie kan aannemen voor één waarde van x, noemen we $g^{(1)}, g^{(2)}, \ldots, g^{(n)}$, hun som zij Σg.

Zijn $\varphi(x, y)$ en $\psi(x, y)$ 2 polynomia in x en y, dan

kunnen we voor g schrijven $\frac{\varphi(x, y)}{\psi(x, y)}$; voor één van de waarden $y^{(i)}$ behoorende bij een bepaalde x, krijgt g de waarde:

$$g^{(i)} = \frac{\varphi(x, y^{(i)})}{\psi(x, y^{(i)})}.$$

Vermenigvuldigen we teller en noemer met de $(n-1)$ andere waarden, die $\psi(x, y)$ aanneemt voor dezelfde x:

$$\frac{\varphi(x, y^{(i)})\ \psi(x, y^{(1)}) \ldots \psi(x, y^{(i-1)})\ \psi(x, y^{(i+1)}) \ldots \psi(x, y^{(n)})}{\psi(x, y^{(1)}) \quad \ldots \quad \psi(x, y^{(n)})};$$

dan wordt blijkbaar de noemer een symmetrische functie van de wortels $y^{(1)} \ldots y^{(n)}$, ze kan dus rationeel worden uitgedrukt in de coëfficienten in x. De teller is een rationeele functie van x en $y^{(i)}$.

Elke rationeele functie behoorende bij $f(x, y) = 0$ kan dus worden voorgesteld door:

$$g = \frac{A + A_1 y + \ldots + A_{n-1} y^{n-1}}{D}$$

waarin $A, \ldots, A_{n-1}, D$ polynomia zijn in x, die geen gemeenschappelijken factor bezitten.

Nu kunnen we uit het voorgaande onmiddellijk afleiden, dat D^2 een factor moet zijn van $\Delta(1, y, \ldots, y^{n-1})$, indien g een *geheele* functie zal voorstellen. Want zij $(x-a)^r$ een factor van D en stellen we

$$A_i = (x-a)^r B_i + C_i \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

De coëfficienten A hebben geen factor met D gemeen, dus kunnen niet alle C's deelbaar zijn door $(x-a)$; zij C_i niet deelbaar door $(x-a)$.

Maken we nu gebruik van de in § 4 gevonden betrekking:

$$\Delta(1, H_1, H_2, \ldots, H_{n-1}) = \nabla_H^2 \cdot \Delta(1, h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}),$$

waarin de functies H en h de vroeger aangegeven beteekenis behouden.

Het is duidelijk, dat:

$$\frac{g\,D}{(x-a)^r}-(B+B_1y+\ldots+B_{n-1}y^{n-1})=\frac{C+C_1y+\ldots+C_{n-1}y^{n-1}}{(x-a)^r}$$

Is nu g een *geheele* functie, dan is het geheele eerste lid een *geheele* functie en dientengevolge ook het tweede lid; dat laatste noemen we ζ en vormen de vergelijking:

$$\Delta(1,y,y^2,\ldots,y^{i-1},\zeta,y^{i+1},\ldots,y^{n-1})=\nabla_i^2\,\Delta(1,h_1,h_2,\ldots,h_{n-1}).$$

De beteekenis van den determinant in het eerste lid in aanmerking genomen kunnen we hiervoor schrijven:

$$\frac{C_i^2}{(x-a)^{2r}}\Delta(1,y,\ldots,y^{i-1},y^i,y^{i+1},\ldots,y^{n-1})=\nabla_i^2\,\Delta(1,h_1,\ldots,h_{n-1}).$$

Maar:

$$\Delta(1,y,\ldots,y^{n-1})=\nabla^2\,\Delta(1,h_1,\ldots,h_{n-1}).$$

Dus:

$$\frac{C_i^2}{(x-a)^{2r}}\Delta(1,h_1,\ldots,h_{n-1})\,\nabla^2=\nabla_i^2\,.\,\Delta(1,h_1,\ldots,h_{n-1})$$

$$\frac{\nabla}{\nabla_i}=\frac{(x-a)^r}{C_i}$$

en daar $(x-a)$ geen factor is van C_i moet ∇ deelbaar zijn door $(x-a)^r$ en $\Delta(1,y,\ldots,y^{n-1})$ door $(x-a)^{2r}$. Hieruit volgt, dat D^2 inderdaad een factor moet zijn van $\Delta(1,y,\ldots,y^{n-1})$, zoodat D geen andere factoren zal kunnen bevatten, dan die in $\Delta(1,y,\ldots,y^{n-1})$ optreden minstens tot de tweede macht.

§ 6.

Voorbeeld.

$$y^3-b\,y^2+a_1\,c\,y-a_1^2\,a_2=0.$$

Voor het systeem geheele functies:

$$1,\ y,\ \eta=\frac{y^2-b\,y+a_1\,c}{a_1}$$

vinden we de Δ als volgt:

$$\Delta(1, y, \eta) = \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, \\ y^{(1)}, & y^{(2)}, & y^{(3)}, \\ \frac{a_1 a_2}{y^{(1)}}, & \frac{a_1 a_2}{y^{(2)}}, & \frac{a_1 a_2}{y^{(3)}}. \end{vmatrix}^2 = a_1^2 a_2^2 \begin{vmatrix} 3, & h, & \frac{c}{a_1 a_2} \\ b, & b^2 - 2 a_1 c, & 3 \\ \frac{c}{a_1 a_2}, & 3, & \frac{c^3 - 2 a_2 b}{a_1^2 a_2^2} \end{vmatrix} =$$

$$= b^2 c^2 - 4 a_2 b^3 - 4 a_1 c^3 + 18 a_1 a_2 b c - 27 a_1^2 a_2^2.$$

Zoo wordt voor het systeem $1, y, y^2$:

$$\Delta(1, y, y^2) = \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, \\ y_{(1)} & y_{(2)} & y_{(3)} \\ y_{(1)}^2, & y_{(2)}^2, & y_{(3)}^2 \end{vmatrix}^2 =$$

$$= \begin{vmatrix} 3, & b, & b^2 - 2 a_1 c \\ b, & b^2 - 2 a_1 c, & b^3 - 3 b a_1 c + 3 a_1^2 a_2 \\ b^2 - 2 a_1 c, & b^3 - 3 b a_1 c + 3 a_1^2 a_2, & b^4 - a_1 c(b^2 - 2 a_1 c) - 3 a_1 c b^2 + 4 a_1^2 a_2 b \end{vmatrix} =$$

$$= a_1^2 \begin{vmatrix} 3, & b, & -2 c \\ b, & b^2 - 2 a_1 c, & 3 a_1 a_2 - b c \\ -2 c & 3 a_1 a_2 - b c, & 2 c^2 - 2 a_2 b \end{vmatrix} = a_1^2 \Delta(1, y, \eta).$$

Voor de functies $1, \eta, \eta^2$ wordt:

$$\Delta(1, \eta, \eta^2) = \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1 \\ \frac{a_1 a_2}{y_{(1)}}, & \frac{a_1 a_2}{y_{(2)}}, & \frac{a_1 a_2}{y_{(3)}} \\ \left(\frac{a_1 a_2}{y_{(1)}}\right)^2, & \left(\frac{a_1 a_2}{y_{(2)}}\right)^2, & \left(\frac{a_1 a_2}{y_{(3)}}\right)^2 \end{vmatrix}^2 =$$

$$= (a_1 a_2)^6 \begin{vmatrix} 3, & \frac{c}{a_1 a_2}, & \frac{c^2 - 2 a_2 b}{a_1^2 a_2^2} \\ \frac{c}{a_1 a_2}, & \frac{c^2 - 2 a_2 b}{a_1^2 a_2^2}, & \frac{c^3 - 3 a_2 c b + 3 a_1 a_2^2}{a_1^3 a_2^3} \\ \frac{c^2 - 2 a_2 b}{a_1^2 a_2^2}, & \frac{c^3 - 3 a_2 c b + 3 a_1 a_2^2}{a_1^3 a_2^3}, & \frac{c^4 - 4 a_2 c^2 b + 4 a_2^2 a_1 c + 2 a_2^2 b^2}{a_1^4 a_2^4} \end{vmatrix} = a_2^2 \Delta(1, y, \eta).$$

En eindelijk wordt voor de functies y, y^2, η:

$$\Delta(y, y^2, \eta) = (a_1 a_2)^2 \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{3} y_{(i)}^2, & \sum_{i=1}^{3} y_{(i)}^3, & 3 \\ \sum_{i=1}^{3} y_{(i)}^3, & \sum_{i=1}^{3} y_{(i)}^4, & \sum_{i=1}^{3} y_{(i)} \\ 3, & \sum_{i=1}^{3} y_{(i)}, & \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{1}{y_{(i)}}\right)^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} b^2 - 2 a_1 c, & b^3 - 3 b a_1 c + 3 a_1^2 a_2, & 3 a_1 a_2 \\ b^3 - 3 b a_1 c + 3 a_1^2 a_2, & b^4 - 4 b^2 a_1 c + 4 a_1^2 a_2 b + 2 a_1^2 c^2, & b a_1 a_2 \\ 3 a_1 a_2, & b a_1 a_2, & c^2 - 2 a_2^2 b \end{vmatrix} = a_1^2 c^2 \Delta(1, y, \eta)$$

Stelt $(1, y, \eta)$ een fundamentaal systeem voor, dan is blijkbaar bij deze keuze van de η de voorwaarde vervuld, dat $\Delta(1, y, \eta)$ deelbaar moet zijn op de andere discriminanten.

§ 7.

Bij het opzoeken der fundamentale functiën stelt HENSEL de volgende voorwaarden:

1°. De functie van de laagste orde zij $\eta_1 = 1$; deze voorwaarde is b. v. vervuld bij het eenvoudigste systeem, dat we ons denken kunnen, n. l. $1, y, y^2, \ldots, y^{n-1}$.

2°. Het product van 2 der fundamentale functiën moet kunnen worden uitgedrukt in den vorm:

$$\eta_i \eta_k = (x, 1)_{\lambda_1} \eta_1 + (x, 1)_{\lambda_2} \eta_2 + \ldots + (x, 1)_{\lambda_n} \eta_n$$

waarin $(x, 1)_{\lambda_i}$ voorstelt een polynomium in x; was die voorwaarde voor het gevonden systeem niet vervuld, dan zouden we het altijd vervangen kunnen door een ander, waarvan de som der dimensies lager is dan van het beschouwde. (HENSEL, loc. cit. Chap. III).

Zij $(x - a)^2$ een factor van $\Delta(1, y, \ldots, y^{n-1})$ dan gaan we opzoeken alle functies van den vorm:

$$\zeta = \frac{\alpha + \alpha_1 \eta_1 + \ldots + \alpha_{n-1} \eta_{n-1}}{x - a}$$

die niet oneindig worden in het punt $x = a$. (De coëfficienten α zijn constanten).

Zij $\alpha + \alpha_1 \eta_1 + \ldots + \alpha_{n-1} \eta_{n-1} = H$, dan is H een geheele functie, die voor elke waarde van x n waarden (niet noodzakelijk verschillende) aanneemt; ze voldoet dus aan een vergelijking:

$$H^n + K_1 H^{n-1} + \ldots + K_{n-1} H + K_n = 0$$

waarin $k_1 \ldots k_n$ voorstellen polynomia in x. Zal $\frac{H}{x-a}$ niet oneindig worden in het punt $x = a$, dan moet noodzakelijk elke wortel H uit de laatste vergelijking minstens één factor $(x - a)$ bevatten; daarvoor is noodig en voldoende, dat K_1 dien factor bevat tot den 1sten, K_2 tot den 2^{den}, en eindelijk K_{n-1} tot den $(n-1)^{\text{sten}}$ en K_n tot den n^{den} graad. Noemen we de som van de i^{de} machten van de n waarden van H, die uit de vergelijking volgen voor één waarde van x, S_i; dan kunnen we echter de voorwaarde, dat K_i deelbaar moet zijn door $(x - a)^i$ vervangen door de equivalente voorwaarde, dat S_i deelbaar moet zijn door $(x - a)^i$. Immers voor $i = 1$ is:

$$S_i = H^{(1)} + H^{(2)} + \ldots + H^{(n)} = -K_i$$

en zijn de voorwaarden inderdaad gelijkwaardig. Is echter $(x - a)$ deelbaar op S_1, dan is $(x - a)^2$ deelbaar op S_1^2 en:

$$S_1^2 = S_2 + 2 \Sigma H^{(k)} H^{(l)} = S_2 + 2 K_2.$$

Is $(x - a)^2$ deelbaar op S_2, dan moet k_2 ook deelbaar zijn door $(x - a)^2$. Evenzoo is:

$$K_3 = \frac{1}{6}(-S_1^3 + 3 S_1 S_2 - 2 S_3);$$

$(x - a)^3$ is een factor van S_1^3 en $S_1 S_2$; is $(x - a)^3$ deelbaar op S_3, dan is ook k_3 deelbaar door $(x - a)^3$.

Hetzelfde is gemakkelijk aan te toonen voor $S_4, \ldots, S_n$ met behulp der vergelijkingen, die de coëfficienten uitdrukken in de symmetrische functiën $S_1, \ldots, S_n$.

Deze voorwaarden, n stuks zijn voldoende om de coëfficienten $\alpha_1 \ldots \alpha_{n-1}$ af te leiden.

Vinden we nu op deze wijze k functies ζ en is in 2 van die functies b. v. in ζ en ζ' de hoogst voorkomende macht van y dezelfde, dan kunnen we één van de twee, b. v. ζ' vervangen door $\zeta' - \mu\,\zeta = \zeta''$, daarin is μ een constante, zoodanig gekozen, dat de graad in y van ζ'' lager is dan die van ζ'. Dan verkrijgen we k lineair onafhankelijke (dus $k < n$) functies, die eindig zijn voor $x = a$ van den vorm:

$$\zeta_r = \frac{\alpha' + \alpha_1' y + \ldots + \alpha_r' y^r}{x - a},$$

terwijl we gezorgd hebben, dat de waarden van r alle verschillend zijn.

Die waarden van r bevinden zich in de reeks:

$$1, 2, \ldots, (n-1).$$

De overige $(n - 1 - k)$ getallen stellen we elk op hun beurt $= s$ en stellen $y_s = \zeta_s$; dan hebben we dus een geheele ζ functie voor elk der getallen van de reeks $1, 2, \ldots, (n-1)$.

We gaan nu uit van die nieuwe reeks geheele functiën:

$$1, \zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{n-1}$$

en bepalen door middel van een stel lineaire vergelijkingen alle lineair onafhankelijke functiën, die niet oneindig worden voor $x = a$ van den vorm:

$$\xi = \frac{\beta + \beta_1 \zeta_1 + \ldots + \beta_{n-1} \zeta_{n-1}}{x - a}$$

waarin $\beta, \ldots, \beta_{n-1}$ constanten zijn; evenals voor de ζ functies zorgen we nu, dat er geen 2 ξ functies voorkomen, waarvoor de hoogst optredende suffixen van ζ gelijk zijn. Verder stellen we $\xi_r = \zeta_r$ voor die waarden van r, waarvoor geen geheele functie bestaat van den vorm:

$$\frac{\beta' + \beta_1' \zeta_1 + \ldots + \beta_r' \zeta_r}{x - a}$$

waarin de hoogste suffix van ζ gelijk r is. Bestaat een dergelijke functie wel, dan wordt die $= \xi_r$ gesteld.

Beschouwen we nu de reeks $1, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$ en onderzoeken of er geheele functies mogelijk zijn van den vorm:

$$\eta = \frac{\gamma + \gamma_1 \xi_1 + \ldots + \gamma_{n-1} \xi_{n-1}}{x - a}$$

waarin weer de γ's constanten voorstellen; blijken zulke functies te bestaan, dan zetten we ons onderzoek op dezelfde wijze voort; zijn ze er niet, dan gaan we over tot de beschouwing van een tweeden factor (als er een is) die in $\Delta(1, y, \ldots, y^{n-1})$ optreedt tot de tweede orde minstens.

Het eindresultaat, waartoe we op deze wijze geraken zal zijn een systeem geheele functies:

$$1, \eta, \ldots, \eta_{n-1}$$

zóódanig, dat er geen *geheele* functie bestaat van den vorm:

$$\frac{\alpha + \alpha_1 \eta_1 + \ldots + \alpha_{n-1} \eta_{n-1}}{x - c}$$

voor eenige waarde van c, ($\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ zijn constanten).

§ 7.

Een stel geheele functies $1, \eta_1 \ldots \eta_{n-1}$ te vinden voor de vergelijking:

$$y^4 = x^2 (x - 1).$$

$$\Delta(1, y, y^2, y^3) = \begin{vmatrix} 4, & \Sigma y, & \Sigma y^2, & \Sigma y^3 \\ \Sigma y, & \Sigma y^2, & \Sigma y^3, & \Sigma y^4 \\ \Sigma y^2, & \Sigma y^3, & \Sigma y^4, & \Sigma y^5 \\ \Sigma y^3, & \Sigma y^4, & \Sigma y^5, & \Sigma y^6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 4x^2(x-1) \\ 0, & 0, & 4x^2(x-1), & 0 \\ 0, & 4x^2(x-1), & 0, & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -256\, x^6 (x - 1)^3.$$

De factoren, die we voor ons onderzoek noodig hebben zijn dus x en $(x - 1)$.

1°. Zijn er functies van den vorm:

$$\frac{\alpha + \alpha_1 y + \alpha_2 y^2 + \alpha_3 y^3}{x - 1},$$

die niet oneindig worden voor $x = 1$? We vonden als voorwaarde, dat de som van de i^{de} machten van de 4 waarden, die de teller aanneemt in de 4 bladen van het oppervlak, deelbaar zij door $(x-1)^i$ voor $i = 1, 2, 3, 4$. Gaan we na wat die voorwaarde ons leert, omtrent de constanten $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

$i = 1.$ $\Sigma(\alpha + \alpha_1 y + \alpha_2 y^2 + \alpha_3 y^3) \equiv 0 \pmod{(x-1)}$.

$4\alpha + \alpha_1 \Sigma y + \alpha_2 \Sigma y^2 + \alpha_3 \Sigma y^3 \equiv 0 \pmod{(x-1)}$.

maar $\Sigma y = \Sigma y^2 = \Sigma y^3 = 0$ dus $\alpha = 0$.

$i = 2.$ $\Sigma y^2 (\alpha_1 + \alpha_2 y + \alpha_3 y^2)^2 \equiv 0 \pmod{(x-1)^2}$.

$$\alpha_1^2 \Sigma y^2 + \alpha_2^2 \Sigma y^4 + \alpha_3^2 \Sigma y^6 + 2(\alpha_1 \alpha_2 \Sigma y^3 + \alpha_1 \alpha_3 \Sigma y^4 + \alpha_2 \alpha_3 \Sigma y^5) \equiv 0 \pmod{(x-1)^2}.$$

$\Sigma y^3 = \Sigma y^5 = \Sigma y^6 = 0$. $\Sigma y^4 = 4x^2(x-1)$ dus

$4x^2(x-1)(\alpha_2^2 + 2\alpha_1\alpha_3) \equiv 0 \pmod{(x-1)^2}$.

$4x^2(\alpha_2^2 + 2\alpha_1\alpha_3 \equiv 0 \pmod{(x-1)}$.

$\alpha_2 = \sqrt{-2\alpha_1\alpha_3}$.

$i = 3.$ $\Sigma y^3 (\alpha_1 + \sqrt{-2\alpha_1\alpha_3}\, y + \alpha_3 y^2)^3 \equiv 0 \pmod{(x-1)^3}$.

$12\sqrt{-2\alpha_1\alpha_3}\{\alpha_1^2 x^2(x-1) + \alpha_3^2 x^4 (x-1)^2\} \equiv 0 \pmod{(x-1)^3}$.

$\alpha_1 = 0$ waaruit volgt $\alpha_2 = 0$.

$i = 4.$ $\Sigma(\alpha_3 y^3)^4 \equiv 0 \pmod{(x-1)^4}$.

$\alpha_3 = 0$.

We vinden $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$, er bestaat dus geen geheele functie van den vorm:

$$\frac{\alpha + \alpha_1 y + \alpha_2 y^2 + \alpha_3 y^3}{x - 1}.$$

Is er een functie $\frac{\beta + \beta_1 y + \beta_2 y^2 + \beta_3 y^3}{x}$ mogelijk, die eindig blijft voor $x = 0$, wanneer $\beta, \ldots \beta_3$ constanten zijn?

$i = 1.$ $\Sigma (\beta + \beta_1 y + \beta_2 y^2 + \beta_3 y^3) \equiv 0$ $(, x)$

$\beta = 0.$

$i = 2.$ $\Sigma y^2 (\beta_1 + \beta_2 y + \beta_3 y^2) \equiv 0$ $(, x^2)$

geeft geen voorwaarde.

$i = 3.$ $\Sigma y^3 (\beta_1 + \beta_2 y + \beta_3 y^2) \equiv 0$ $(, x^3).$

$\beta_1 = 0.$

$i = 4.$ $\Sigma y^8 (\beta_2 + \beta_3 y)^4 \equiv 0$ $(, x^4)$

geeft geen voorwaarde.

$\beta = \beta_1 = 0$, maar β_2 en β_3 blijven onbepaald, dus zijn $\frac{y^3}{x}$ en $\frac{y^3}{x}$ geheele functies, en we hebben nu het volgende systeem verkregen:

$$\zeta_1 = 1; \quad \zeta_2 = y; \quad \zeta_3 = \frac{y^2}{x}; \quad \zeta_4 = \frac{y^3}{x}.$$

Gaan we onderzoeken of er functies bestaan van den vorm:

$$\gamma + \gamma_1 y + \gamma_2 \frac{y^2}{x} + \gamma_3 \frac{y^3}{x},$$

die niet oneindig worden voor $x = 0$.

$i = 1.$ $\Sigma \left(\gamma + \gamma_1 y + \gamma_2 \frac{y^2}{x} + \gamma_3 \frac{y^3}{x}\right) \equiv 0$ $(, x)$

$\gamma = 0.$

$i = 2.$ $\Sigma y^2 \left(\gamma_1 + \gamma_2 \frac{y}{x} + \gamma_3 \frac{y^2}{x}\right)^2 \equiv 0$ $(, x^2)$

$\gamma_1 = 0; \quad \gamma_2 = 0.$

$i = 3.$ $\Sigma \left(\gamma_3 \frac{y^3}{x}\right)^3 \equiv 0$ $(, x^3)$

geeft geen voorwaarde.

$i = 4.$ $\Sigma \left(\gamma_3 \frac{y^3}{x}\right)^4 \equiv 0$ $(, x^4)$

$\gamma_3 = 0.$

Er bestaan blijkbaar geen functies van den verlangden

vorm en het systeem, waartoe we gekomen zijn, blijft dus:

$$1,\ y,\ \frac{y^2}{x},\ \frac{y^3}{x}.$$

§ 8.

Het systeem $1, \eta_1, \ldots, \eta_n$ zal een fundamentaal systeem zijn, wanneer we elke geheele functie kunnen uitdrukken in den vorm $H = (x, 1)_\mu + (x, 1)_{\mu_1}\eta_1 + \ldots + (x, 1)_{\mu_{n-1}}\eta_{n-1}$, waarin $(x, 1)_{\mu_i}$ een polynomium is in x.

In § 6 hebben we afgeleid:

$$\zeta_r = \frac{\alpha' + \alpha_1' y + \ldots + \alpha_r' y^r}{x - a}$$

$$\xi_r = \frac{\beta' + \beta_1' \zeta_1 + \ldots + \beta_r' \zeta_r}{x - a}$$

$$\eta_r = \frac{\gamma' + \gamma_1' \xi_1 + \ldots + \gamma_r' \xi_r}{x - a}.$$

Daaruit volgt:

$$y^i = (x, 1)_{\lambda_0} + (x, 1)_{\lambda_1}\eta_1 + (x, 1)_{\lambda_2}\eta_2 + \ldots + (x, 1)_{\lambda_{n-1}}\eta_{n-1}.$$

Elke geheele functie kan worden geschreven in den vorm:

$$H = \frac{A + A_1 y + \ldots + A_{n-1} y^{n-1}}{D}.$$

Substitueeren we in die uitdrukking de voor y^i gevonden vorm, dan wordt:

$$H = \frac{E + E_1 \eta_1 + \ldots + E_{n-1}\eta_{n-1}}{F}$$

waarin $E, \ldots, E_{n-1}$ voorstellen polynomia in x, die geen factor gemeen hebben met het polynomium F.

Zij $(x - c)$ een factor van F, dan mogen we stellen:

$$E_i = (x - c)\, G_i + a_i \qquad i = 1, 2, \ldots, n - 1.$$

a_i = constante.

Uit de vergelijking:

$$\frac{H\,F}{x-c} - (G + G_1\,\eta_1 + \ldots + G_{n-1}\,\eta_{n-1}) =$$

$$= \frac{a + a_1\,\eta_1 + \ldots + a_{n-1}\,\eta_{n-1}}{x - c}$$

volgt, dat het 2de lid niet oneindig kan worden voor $x = c$, omdat het 1ste lid eindig blijft. Er waren echter voor het systeem $1, \eta_1, \ldots, \eta_{n-1}$ geen constanten te vinden, zóódanig, dat voor eenige waarde van c

$$\frac{a + a_1\,\eta_1 + \ldots + a_{n-1}\,\eta_{n-1}}{x - c}$$

eindig bleef in $x = c$, derhalve moet $a = a_1 = \ldots = a_{n-1} = 0$ zijn en $E_1 \ldots E_{n-1}$ deelbaar door $(x - c)$.

Voor elken factor van F kunnen we aldus redeneeren en komen dan tot het resultaat, dat elke geheele functie kan worden geschreven in den vorm:

$$H = (x, 1)_\mu + (x, 1)_{\mu_1}\,\eta_1 + \ldots + (x, 1)_{\mu_{n-1}}\,\eta_{n-1},$$

waarin de coëfficienten polynomia zijn in x.

Voldoet het systeem $(1, \eta_1, \ldots, \eta_{n-1})$ ook aan de dimensievoorwaarde, dan is het dus een fundamentaal systeem, zooals we zoeken.

Daartoe is noodig, dat geen term $(x, 1)_{\mu_i}\,\eta_i$ hooger dimensie heeft dan H.

Zij $\sigma + 1$ de dimensie van H; ϱ_i de dimensie van het polynomium $(x, 1)_{\mu_i}$, die gelijk is aan den graad; $\sigma_i + 1$ die van η_i en zij $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \sigma_3 \ldots \geqslant \sigma_{n-1}$. Nu bestaat de gelijkheid:

$$\frac{H}{x^{\sigma+1}} = \ldots + \frac{(x, 1)_{\mu_i}}{x^{\varrho_i}} \cdot \frac{\eta_i}{x^{\sigma_i+1}} \cdot x^{\varrho_i + \sigma_i - \sigma} + \ldots$$

Stel:

$$\frac{H}{x^{\sigma+1}} = h;\ x = \frac{1}{\xi};\ \frac{\eta_i}{x^{\sigma_i+1}} = h_i;\ \frac{(x, 1)_{\mu_i}}{x^{\varrho_i}} = (1, \xi)_{\varrho_i}$$

dan gaat die betrekking over in:

$$h = \ldots + (1, \xi)_{\varrho_i} \frac{h_i}{\xi^{\varrho_i + \sigma_i - \sigma}} + \ldots$$

Heeft een van de termen $(x, 1)_{\mu_i}\, \eta_i$ hooger dimensie dan H, dan moet een der geheele getallen:

$$\varrho - (\sigma + 1), \ldots, \varrho_i + \sigma_i + \sigma, \ldots$$

grooter dan nul zijn.

Onderstel, dat het geval voorkomt en noem $r + 1$ het grootste van de getallen in bovenstaande rij, dan is:

$$\xi^r h = \frac{\ldots (1, \xi)_{m_i} h_i + \ldots}{\xi}.$$

Stellen we nu:

$$(1, \xi)_{m_i} = \xi\, k_i + a_i; \quad i = 0, 1, 2, \ldots (n-1);$$

a_i = constant, dan is:

$$\xi^r h - (k + k_1 h + \ldots k_{n-1} h_{n-1}) =$$
$$= \frac{a + a_1 h_1 + \ldots a_{n-1} h_{n-1}}{\xi}.$$

Daaruit volgt, dat indien de functies $1, \eta_1, \ldots, \eta_{n-1}$ niet voldoen aan de dimensievoorwaarde er functies bestaan van den vorm:

$$\frac{\alpha + \alpha_1 h_1 + \ldots + \alpha_{n-1} h_{n-1}}{\xi}$$

of wel:

$$x \left[\alpha + \alpha_1 \frac{\eta_1}{x^{\sigma_1 + 1}} + \ldots + \alpha_{n-1} \frac{\eta_{n-1}}{x^{\sigma_{n-1} + 1}}\right],$$

die niet oneindig worden voor $\xi = 0$ of $x = \infty$.

De functies h_i mogen we beschouwen als geheele functies van ξ en daar er geen geheele functie bestaat van den vorm $\frac{\eta_i}{x}$ zijn de dimensies van de functies $h_1 \ldots h_{n-1}$ als functies van ξ beschouwd:

$$\sigma_1 + 1, \ldots, \sigma_{n-1} + 1.$$

Bepalen we nu een stel lineair onafhankelijke functies:

$$\frac{\alpha + \alpha_1 h_1 + \ldots + \alpha_{n-1} h_{n-1}}{\xi}$$

niet oneindig voor $\xi = 0$ en zóódanig gekozen, dat de h met de hoogste suffix in alle functies verschillend is.

Zij:

$$k_r = \frac{\mu + \mu_1 h_1 + \ldots + \mu_r h_r}{\xi}$$

dan wordt:

$$k_r x^{\tau_r} = x^{\tau_r + 1}\left(\mu + \mu_1 \frac{\eta_1}{x^{\tau_1 + 1}} + \ldots + \mu_r \frac{\eta_r}{x^{\tau_r + 1}}\right)$$

niet oneindig voor $x = 0$, dus is het een geheele functie van x, wier dimensie $= \sigma_r$. Noem die functie G_r en schrijf voor η_r:

$$\eta_r = -\frac{1}{\mu_r}\left[\mu x^{\tau_r + 1} + \mu_1 \eta_1 x^{\tau_r - \sigma_1} + \ldots + \mu_{r-1} \eta_{r-1} x^{\tau_r - \sigma_{r-1}} - G_r\right].$$

In het rechter lid komt geen enkele term voor, wier dimensie hooger is dan die van η_r. Voor elke functie k_r, die er bestaat, kunnen we op deze wijze te werk gaan, en de functies η vervangen door functies G van lager dimensie; stellen we ook de functies η, waarvoor geen k functie bestaat, voor door het symbool G, dan kunnen we nu elke geheele functie schrijven in den vorm:

$$H = (x, 1)_\lambda + (x, 1)_{\lambda_1} G_1 + \ldots + (x, 1)_{\lambda_{n-1}} G_{n-1}$$

terwijl de som der dimensies van $G_1, \ldots, G_{n-1}$ kleiner is dan die van $\eta_1 \ldots \eta_{n-1}$.

Mocht nog een der termen hooger dimensie hebben dan H, zoo handelen we nog eens op dezelfde manier, totdat we een systeem vinden, dat aan de dimensievoorwaarde voldoet. De dimensie eener geheele functie is minstens $= 1$, dus de som der dimensies van het fundamentale systeem kan in geen geval lager worden dan $(n - 1)$.

Voorbeeld.

In § 6 vonden we dat bij het oppervlak $y^4 = x^2(x-1)$ behoorden de geheele functies $1, y, \frac{y^2}{x}, \frac{y^3}{x}$. Hun dimensies zijn respectievelijk 0, 1, 1, 2, we moeten dus onderzoeken of er functies bestaan van den vorm:

$$x\left(\alpha + \alpha_1 \frac{y}{x} + \alpha_2 \frac{y^2}{x^2} + \alpha_3 \frac{y^3}{x^3}\right)$$

die niet oneindig worden voor $x = \infty$.

De functies $1, y, \frac{y^2}{x}, \frac{y^3}{x}$ worden niet oneindig voor $x = \infty$, alleen voor $x' = \frac{1}{x} = \infty$; ik kan ze beschouwen als geheele functies van x', met dimensies 0, 1, 1, 2, daar er geen geheele functie bestaat van den vorm:

$$\frac{\alpha + \alpha_1 y + \alpha_2 \frac{y^2}{x} + \alpha_3 \frac{y^3}{x}}{x}.$$

We moeten dus nagaan of er bestaat een functie:

$$\frac{\alpha + \alpha_1 y + \alpha_2 \frac{y^2}{x} + \alpha_3 \frac{y^3}{x}}{x'}$$

die niet oneindig wordt voor $x' = 0$.

$i = 1$ $\quad \Sigma\left(\alpha + \alpha_1 y + \alpha_2 \frac{y^2}{x} + \alpha_3 \frac{y^3}{x}\right) \equiv 0 \quad \left(, \frac{1}{x}\right)$

$$\alpha = 0.$$

$i = 2$ $\quad \Sigma\, y^2\left(\alpha_1 + \alpha_2 \frac{y}{x} + \alpha_3 \frac{y^2}{x}\right)^2 \equiv 0 \quad \left(, \frac{1}{x^2}\right)$

$$\alpha_1 = 0 \quad \alpha_2 = 0.$$

$i = 3$ $\quad \Sigma\left(\alpha_3 \frac{y^3}{x}\right)^3 \equiv 0 \quad \left(, \frac{1}{x^3}\right)$

geeft geen voorwaarde.

$i = 4.$ $\qquad \Sigma \left(\alpha_3 \frac{y^3}{x}\right)^4 \equiv 0 \qquad \left(, \frac{1}{x^4}\right)$

$$\alpha_3 = 0.$$

Zoo'n functie bestaat blijkbaar niet, dus voldoen:

$$1, y, \frac{y^2}{x}, \frac{y^3}{x}$$

aan de dimensievoorwaarde en uit de som der dimensies $= p + n - 1$ volgt $p = 4 - 4 + 1 = 1$, dezelfde uitkomst, die we verkrijgen bij toepassing van de formule van RIEMANN:

$$p = \frac{\Sigma (r - 1)}{2} - n + 1.$$

§ 8.

De lineaire congruenties, waaruit we afleiden of er *geheele* functies bestaan van den vorm:

$$\frac{\alpha + \alpha_1 y + \alpha_2 y^2 + \alpha_{n-1} y^{n-1}}{x - c},$$

wanneer $(x - c)$ een factor is van Δ, worden door HENSEL herleid tot lineaire vergelijkingen; de bewerkingen noodig om de geheele functies te vinden worden daardoor echter niet éénvoudiger, zoodat ik die methode niet heb toegepast.

Heeft de vergelijking van het oppervlak een eenigszins eenvoudigen vorm, dan is het niet moeielijk de fundamentale functiën te vinden, en het komt mij voor dat de methode om daaruit het geslacht te bepalen wel verdient in aanmerking te worden genomen. Ik heb ze toegepast op eenige vergelijkingen, o. a. op die, waarvan RAFFY langs geheel anderen weg het geslacht afleidt [1]) en vond vrij gemakkelijk de volgende resultaten:

---

1) Ann. de l'Ecole Normale, 12, 1883.

Vergelijking.	Graad.	Discriminant.
$(y - x^2)^2 - x^5 = 0$. (RAFFY).	2	$\Delta(1, y) = 4\,x^5$.
$y^2 = x(x-1)(x-2)(x-3)$.	2	$\Delta(1, y) = 4\,x(x-1)(x-2)(x-3)$.
$y^2 = x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$.	2	$\Delta(1, y) = 4\,x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$.
$y^2 = x(1-x)(1-k^2x)(1-\lambda^2x)(1-\mu^2x)(1-\nu^2x)(1-\varrho^2x)$.	2	$\Delta(1, y) = 4\,x(1-x)(1-k^2x)(1-\lambda^2x)(1-\mu^2x)(1-\nu^2x)(1-\varrho^2x)$.
$y^3 = (x-1)^2(x-2)$.	3	$\Delta(1, y, y^2) = -27\,(x-1)^4(x-2)^2$.
$y^3 - 3y + 2x^3 = 0$.	3	$\Delta(1, y, y^2) = -10^3\,(x^6 - 1)$.
$y^3 = (x-1)^2(x-2)^2(x-3)^2$.	3	$\Delta(1, y, y^2) = -27\,(x-1)^4(x-2)^4(x-3)^4$.
$y^3 + y(x-1) + (x-1)^4 = 0$.	3	$\Delta(1, y, y^2) = -(x-1)^3\{27\,(x-1)^5 + 4\}$.
$y^3 + yx(x+a) + x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0$.	3	$\Delta(1, y, y^2) = -\{4\,x^3(x+a)^3 - 27\,(x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4)^2\}$.
$y^3 - 3xy^2 + 3yx(x-1) + x^2(x-1)^2(9x^3 + 7x^2 + 5x + 3) = 0$.	3	$\Delta(1, y, y^2) = x^3(x-1)^2 \times$ polynomium in x.
$y^4 = x(x-1)(x-2)^2$.	4	$\Delta(1, y, y^2, y^3) = -256\,x^3(x-1)^3(x-2)^6$.
$y^4 - 5y^2 - x^4 + 4 = 0$.	4	$\Delta(1, y, y^2, y^3) =$ polynomium in x.
$y^4 = x^2(x-1)^3(x-2)^3$.	4	$\Delta(1, y, y^2, y^3) = -256\,x^6(x-1)^9(x-2)^9$.
$y^4 = x(x-1)^2(x-2)^2(x-3)^3$.	4	$\Delta(1, y, y^2, y^3) = -256\,x^3(x-1)^6(x-2)^6(x-3)^9$.
$y^4 + x^4 + (ax + by + c)^4 = 0$.	4	$\Delta(1, y, y^2, y^3) =$ polynomium in x.
$y^4 - x^2(x^2 + x + 1) = 0$.	4	$\Delta(1, y, y^2, y^3) = -256\,x^6(x^2 + x + 1)^3$.
$y^5 - x(x-1)(x-2)^3 = 0$.	5	$\Delta(1, y, y^2, y^3, y^4) = 3125\,x^4(x-1)^4(x-2)^{12}$.
$y^5 + x^5 - 5x^2y = 0$.	5	$\Delta(1, y, y^2, y^3, y^4) = A\,x^{10} \times$ polyn. in x.
$y^5 - 5(x^2 + x + 1)y^3 + 5(x^2 + x + 1)^2y - 2x(x^2 + x + 1)^2 = 0$.	5	$\Delta(1, y, y^2, y^3, y^4) = A\,(x^2 + x + 1)^7$ polynomium in x.

Fundamentale functies.	Dimensies.	Geslacht $p = \Sigma \text{dim.} - n + 1$.
$1, \frac{y^2}{x}$.	0, 1.	$p = 1 - 2 + 1 = 0$
$1, y$.	0, 2.	1.
$1, y$.	0, 3.	2.
$1, y$.	0, 4.	3.
$1, y, \frac{y^2}{x-1}$.	0, 1, 1.	0.
$1, y, y^2$.	0, 1, 2.	1.
$1, y, \frac{y^2}{(x-1)(x-2)(x-3)}$.	0, 2, 1.	1.
$1, y, \frac{y^2}{x-1}$.	0, 2, 2.	2.
$1, y, y^2$.	0, 2, 3.	3.
$1, y, \frac{y^3 - 3xy}{x(x-1)}$.	0, 3, 3.	4.
$1, y, \frac{y^2}{x-2}, \frac{y^3}{x-2}$.	0, 1, 1, 2.	1.
$1, y, y^2, y^3$.	0, 1, 2, 3.	3.
$1, y, \frac{y^2}{x(x-1)(x-2)}, \frac{y^3}{x(x-1)^2(x-2)^2}$.	0, 2, 1, 1.	1.
$1, y, \frac{y^2}{(x-1)(x-2)(x-3)}, \frac{y^3}{(x-1)(x-2)(x-3)^2}$.	0, 2, 1, 2.	2.
$1, y, y^2, y^3$.	0, 1, 2, 3.	3.
$1, y, \frac{y^2}{x}, \frac{y^3}{x}$.	0, 1, 1, 2.	1.
$1, y, \frac{y^2}{x-2}, \frac{y^3}{x-2}, \frac{y^4}{(x-2)^2}$.	0, 1, 1, 2, 2.	2.
$1, y, \frac{y^2}{x}, \frac{y^3}{x}, \frac{y^4}{x^2}$.	0, 1, 1, 2, 2.	2.
$1, y, \frac{y^2}{x^2+x+1}, \frac{y^3}{x^2+x+1}, \frac{y^4}{x^2+x+1}$.	0, 1, 0, 1, 2	0.

HOOFDSTUK IV.

Toepassingen op integralen 1ste, 2de en 3de soort en rationeele functies.

§ 1.

Een algemeene vorm voor een Abelsche integraal 1ste soort te bepalen.

Ten einde een toepassing te geven van de geheele functies in het vorige hoofdstuk bepaald, willen we in dit laatste hoofdstuk ons bezighouden met de bepaling van Abelsche integralen 1ste, 2de en 3de soort en rationeele functies met gegeven polen.

Daarbij zullen we BAKER's uiteenzetting volgen, maar deze met voorbeelden trachten te verduidelijken.

Zij Π_{x_1, x_2} een algemeene integraal 3de soort, die oneindig wordt in de punten x_1 en x_2 als $A \log \left(\frac{x - x_1}{x - x_2}\right)$, waarin A een factor voorstelt, die ook $= 1$ kan zijn en verder overal eindig is. Stellen we in de onmiddellijke nabijheid van het punt x_1: $x - x_1 = t_1^{w_1 + 1}$, waarin t_1 een oneindig kleine grootheid aangeeft, dan kunnen we $\frac{d\Pi}{dx} = \frac{d\Pi}{dt_1} \cdot \frac{dt_1}{dx}$ in de buurt van het punt x_1 ontwikkelen als volgt:

$$\frac{d\Pi}{dx} = \frac{1}{(w_1 + 1)\, t_1^{w_1}} \cdot \frac{d}{dt_1} (\log t_1 + A + A_1 t_1 + A_2 t_1^2 + \ldots) =$$

$$= \frac{1}{w_1 + 1} \left(\frac{1}{x - x_1} + \frac{A_1}{t_1^{w_1}} + \frac{2\, A_2}{t_1^{w_1 - 1}} + \frac{3\, A_3}{t_1^{w_1 - 2}} + \ldots \right),$$

waaruit blijkt, dat $(x - x_1)\frac{d\,\Pi}{d\,x}$ niet oneindig is in het punt $x = x_1$, maar gelijk aan $\frac{1}{w_1 + 1}$; op dezelfde wijze zien we, dat $(x - x_2)\frac{d\,\Pi}{d\,x}$ in het punt $x = x_2$ gelijk is aan $\frac{1}{w_2 + 1}$ als we in de nabijheid van dat punt stellen $x - x_2 = t^{w_2 + 1}$.

Nemen we eenvoudigheidshalve aan, dat de waarden van y zoowel in het punt x_1 als in x_2 alle verschillend zijn, en noemen we de vertakkingspunten in het eindige gebied $a_1, a_2, \ldots$; stellen we dan in de nabijheid van het punt $a_1 : x - a_1 = t^{w+1}$, dan kunnen we in de buurt van dat punt ontwikkelen:

$$\frac{d\,\Pi}{d\,x} = \frac{1}{(w+1)\,t^w}\frac{d}{d\,t}(B + B_1 t + B_2 t^2 + \ldots) =$$

$$= \frac{1}{(w+1)\,t^w}(B_1 + 2\,B_2 t + 3\,B_3 t^2 + \ldots),$$

waaruit volgt, dat:

$$(x - a_1)\frac{d\,\Pi}{d\,x} = \frac{t}{w+1}(B_1 + 2\,B_2 t + \ldots)$$

een nul bezit van de 1ste orde in het punt $x = a_1$.

Construeeren we een polynomium $\alpha = (x - a_1)(x - a_2)\ldots$ dat nul wordt in alle vertakkingspunten in het eindige gebied, en zij h een willekeurige geheele functie op het oppervlak, dan zal:

$$H = \alpha \,.\, h \,.\, (x - x_1)(x - x_2)\frac{d\,\Pi}{d\,x}$$

een *geheele* functie voorstellen, daar ze voor geen enkele *eindige* waarde van x oneindig wordt; H is bovendien nul tot de eerste orde in elk eindig vertakkingspunt.

De som van de n waarden van H in de n bladen van het oppervlak voor een willekeurige waarde van x, zal een symmetrische functie zijn van de waarden $H^{(1)} \ldots H^{(n)}$, die behooren bij die bepaalde x; derhalve is het een rationeele

functie van x alleen en bovendien een geheele functie, omdat ze in geen enkel eindig punt van het oppervlak oneindig wordt; ze wordt nul voor alle nullen van het polynomium α, we mogen dus stellen:

$$\sum_{i=1}^{n} H^{(i)} = \alpha H'.$$

Een polynonium van graad $\mu + 1$ heeft $\mu + 2$ constanten; zijn nu x_1 en x_2 gegeven dan kunnen we het polynomium H' ook schrijven in den vorm:

$$\lambda_1 (x - x_2) - \lambda_2 (x - x_1) + (x - x_1)(x - x_2)(x_1\ 1)_{\mu-1},$$

die $\mu + 1$ arbitraire constanten bevat, wanneer $\mu - 1$ aangeeft den graad van het polynomium $(x, 1)$. Dus is:

$$\left(h \frac{d\,\Pi}{d\,x}\right)_1 + \left(h \frac{d\,\Pi}{d\,x}\right)_2 + \ldots + \left(h \frac{d\,\Pi}{d\,x}\right)_n =$$

$$= \frac{\lambda_1}{x - x_1} - \frac{\lambda_2}{x - x_2} + (x, 1)^{\mu-1}.$$

en we kunnen uit deze betrekking λ_1 en λ_2 nauwkeurig bepalen en een grens aanwijzen voor μ.

Vermenigvuldigen we n. l. met $(x - x_1)$ en stellen daarna $x = x_1$ steeds in de onderstelling, dat x_1 geen vertakkingspunt is, dan worden alle termen in het eerste lid der vergelijking nul behalve de eerste; die geeft n. l. als limiet de waarde van h in het punt $x_1\, y_1$, in het tweede lid blijft alleen λ_1 over, dus we vinden $\lambda_1 = h(x_1\, y_1)$; evenzoo blijkt $\lambda_2 = h(x_2, y_2)$.

Voor een oneindig ver punt mogen we stellen $x = \frac{1}{t^{w+1}}$, waarin t weer een oneindig kleine grootheid aanduidt. Dan is:

$$\frac{d\,t}{d\,x} = -\frac{t^{w+2}}{w+1}$$

$$\frac{d\,\Pi}{d\,x} = -\frac{t^{w+2}}{w+1}\frac{d}{d\,t}(C + C_1 t + C_2 t^2 + \ldots)$$

$$= -\frac{t^{w+2}}{w+1}(C_1 + 2\,C_2 t + 3\,C_3 t^2 + \ldots),$$

waaruit volgt, dat $x^2 \frac{d\,\Pi}{d\,x}$ niet meer oneindig wordt in het punt $x = \infty$. Is dus $\varrho + 1$ de dimensie van de geheele functie h, dan is ook $\frac{h}{x^{\varrho+1}}$ een functie, die niet meer oneindig wordt in het punt $x = \infty$.

Derhalve moet in de vergelijking:

$$\left(\frac{h}{x^{\varrho+1}} \cdot x^2 \frac{d\,\Pi}{d\,x}\right)_1 + \left(\frac{h}{x^{\varrho+1}} \cdot x^2 \frac{d\,\Pi}{d\,x}\right)_2 + \ldots + \left(\frac{h}{x^{\varrho+1}} x^2 \frac{d\,\Pi}{d\,x}\right)_n =$$

$$= \frac{h\,(x_1\,y_1)}{x^{\varrho-1}\,(x - x_1)} - \frac{h\,(x_2\,y_2)}{x^{\varrho-1}\,(x - x_2)} + \frac{(x_1\,1)^{\mu-1}}{x^{\varrho-1}}$$

het tweede lid niet oneindig worden voor $x = \infty$, omdat het eerste lid voor die waarde eindig blijft; maar dan moet $\mu - 1 < \varrho - 1$ of $\mu < \varrho$ zijn.

Stellen we h achtereenvolgens gelijk aan de geheele functies $1, h_1, \ldots, h_{n-1}$, wier dimensies we noemen $0, \tau_1 + 1, \tau_2 + 1, \ldots, \tau_{n-1} + 1$, dan krijgen we het volgende stel vergelijkingen:

$$\left(\frac{d\,\Pi}{d\,x}\right)_1 + \ldots + \left(\frac{d\,\Pi}{d\,x}\right)_n = \frac{1}{x - x_1} - \frac{1}{x - x_2}$$

$$\left(h_1 \frac{d\,\Pi}{d\,x}\right)_1 + \ldots + \left(h_1 \frac{d\,\Pi}{d\,x}\right)_n = \frac{h_1\,(x_1\,y_1)}{x - x_1} - \frac{h_1\,(x_2, y_2)}{x - x_2} + (x_1, 1)^{\tau_1 - 1}$$

. . . . . .

$$\left(h_{n-1} \frac{d\,\Pi}{d\,x}\right)_1 + \ldots + \left(h_{n-1} \frac{d\,\Pi}{d\,x}\right)_n = \frac{h_{n-1}\,(x_1, y_1)}{x - x_1} -$$

$$- \frac{h_{n-1}\,(x_2, y_2)}{x - x_2} + (x_1, 1)^{\tau_{n-1} - 1}.$$

De graden $\sigma_1 + 1, \ldots, \sigma_{n-1} + 1$ zijn respectievelijk kleiner dan $\tau_1 + 1, \ldots, \tau_{n-1} + 1$.

Lossen we $\left(\frac{d\,\Pi}{d\,x}\right)_1$ op uit deze vergelijkingen:

$$\left(\frac{d\,\Pi}{d\,x}\right)_1 = \begin{vmatrix} \frac{1}{x-x_1} - \frac{1}{x-x_2} \ldots\ldots\ldots\ldots, \ldots, & 1 \\ \frac{h_1(x_1,y_1)}{x-x_1} - \frac{h_1(x_2,y_2)}{x-x_1} + (x,1)^{r_1-1}, \ldots, & h_1^{(n)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \frac{h_{n-1}(x_1,y_1)}{x-x_1} - \frac{h_{n-1}(x_2,y_2)}{x-x_2} + (x_1\,1)^{r_n-1-1}, \ldots & h_{n-1}^{(n)} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1, & 1, \ldots, & 1 \\ h_1^{(1)}, & h_1^{(2)}, \ldots, & h_1^{(n)} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \\ h_{n-1}^{(1)}, & h_{n-1}^{(2)}, \ldots & h_{n-1}^{(n)} \end{vmatrix}$$

Zij:

$$\Phi_0(x,y') + \Phi_1(x,y')\,h_1(x,y) + \ldots + \Phi_{n-1}(x,y')\,h_{n-1}(x,y) = \frac{f(x,y') - f(x,y)}{y' - y}.$$

Stellen we hierin $y = y' = y_1$:

$$\Phi_0^{(1)} + \Phi_1^{(1)}\,h_1^{(1)} + \ldots + \Phi_{n-1}^{(1)}\,h_{n-1}^{(1)} = f'(y_1).$$

Stellen we $y = y_1$, $y' = y_s$ voor $s = 2, 3, \ldots, n$:

$$\Phi_0^{(1)} + \Phi_1^{(1)}\,h_1^{(s)} + \ldots + \Phi_{n-1}^{(1)}\,h_{n-1}^{(s)} = 0.$$

Door middel van deze n vergelijkingen kunnen we de Φ-functies bepalen als volgt:

$$\Phi_0^{(1)} = \frac{f'(y_1)}{A} \begin{vmatrix} h_1^{(2)}, & \ldots, & h_{n-1}^{(2)} \\ h_1^{(3)}, & \ldots, & h_{n-1}^{(3)} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \\ h_1^{(n)}, & \ldots, & h_{n-1}^{(n)} \end{vmatrix}$$

$$\Phi_1^{(1)} = -\frac{f'(y_1)}{A} \begin{vmatrix} 1, & h_2^{(2)}, & \ldots, & h_{n-1}^{(2)} \\ 1, & h_2^{(3)}, & \ldots, & h_{n-1}^{(3)} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \\ 1, & h_2^{(n)}, & \ldots, & h_{n-1}^{(n)} \end{vmatrix} \text{ enz.,}$$

wanneer we door A voorstellen den determinant:

$$\begin{vmatrix} 1, & h_1^{(1)}, \ldots, & h_{n-1}^{(1)} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \\ 1, & h_1^{(n)}, \ldots, & h_{n-1}^{(n)} \end{vmatrix}$$

In plaats van den voor $\left(\frac{d\,\Pi}{d\,x}\right)_1$ gevonden determinant kunnen we 3 determinanten schrijven:

$$\left(\frac{d\,\Pi}{d\,x}\right)_1 = \frac{1}{x-x_1}\begin{vmatrix} 1, & 1, \ldots\ldots, & 1 \\ h_1(x_1, y_1), & h_1^{(2)}, \ldots\ldots, & h_1^{(n)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ h_{n-1}(x_1, y_1), & h_{n-1}^2, \ldots\ldots, & h_{n-1}^{(n)} \end{vmatrix} : A$$

$$- \frac{1}{x-x_2}\begin{vmatrix} 1, & 1, \ldots\ldots, & 1 \\ h_1(x_2, y_2), & h_1^{(2)}, \ldots\ldots, & h_1^{(n)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ h_{n-1}(x_2, y_2), & h_{n-1}^{(2)}, \ldots\ldots, & h_{n-1}^{(n)} \end{vmatrix} : A$$

$$+ \begin{vmatrix} 0, \ldots\ldots 1, \ldots\ldots, & 1 \\ (x, 1)^{\tau_1 - 1}, & h_1^{(2)}, \ldots\ldots & h_1^{(n)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ (x, 1)^{\tau_n - 1 - 1} & h_{n-1}^{2)}, \ldots\ldots, & h_{n-1}^{(n)} \end{vmatrix} : A$$

of wanneer we nu de zooeven bepaalde functies Φ invoeren:

$$f'(y)\,\frac{d\,\Pi}{d\,x} = (x, 1)^{\tau_1 - 1}\,\Phi_1 + (x, 1)^{\tau_2 - 1}\,\Phi_2 + \ldots + (x, 1)^{\tau_n - 1 - 1}\,\Phi_{n-1}$$
$$+ \frac{\Phi_0 + \Phi_1 h_1(x_1, y_1) + \ldots + \Phi_{n-1} h_{n-1}(x_1, y_1)}{x - x_1} -$$
$$- \frac{\Phi_0 + \Phi_1 h_1(x_2, y_2) + \ldots + \Phi_{n-1} h_{n-1}(x_2, y_2)}{x - x_2}.$$

De methode van afleiding in aanmerking genomen hebben we hier wel de meest algemeene vorm voor $\frac{d\,\Pi}{d\,x}$ gevonden; het aantal willekeurige coëfficienten in de polynomia:

$$(x_1, 1)^{\tau_1 - 1}, \ldots, (x_1, 1)^{\tau_n - 1 - 1}$$

bedraagt op zijn hoogst $\tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau^{n-1}$ of p en verder is de geheele uitdrukking volkomen bepaald. Zooals we weten is echter de meest algemeene vorm van $\frac{d\,\Pi}{d\,x}$:

$$\lambda_1 \frac{d\,v_1}{d\,x} + \lambda_2 \frac{d\,v_2}{d\,x} + \ldots + \lambda_p \frac{d\,v_p}{d\,x} + \left(\frac{d\,\Pi}{d\,x}\right)$$

waarin $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ arbitraire constanten zijn, $v_1, \ldots, v_p$ Abelsche integralen 1ste soort en $\frac{d\,\Pi}{d\,x}$ de afgeleide naar x van een speciale integraal derde soort.

Door vergelijking der beide vormen van $\frac{d\,\Pi}{d\,x}$ komen we tot het resultaat:

1°. De meest algemeene vorm voor een integraal 1ste soort is:

$$\int^x \frac{d\,x}{f'_y}\Big[(x_1\,1)^{\tau_1-1}\Phi_1 + (x,1)^{\tau_2-1}\Phi_2 + \ldots + (x,1)^{\tau_n-1-1}\Phi^{n-1}\Big].$$

Een speciale vorm voor een integraal 3de soort is:

$$\int^x \frac{d\,x}{f'_y}\Big[\frac{\Phi_0(x,y)+\Phi_1(x,y)\,h_1(x_1,y_1)+\ldots+\Phi_{n-1}(x,y)\,h_{n-1}(x_1,y_1)}{x-x_1}$$

$$-\frac{\Phi_0(x,y)+\Phi_1(x,y)\,h_1(x_2,y_2)+\ldots+\Phi_{n-1}(x,y)\,h_{n-1}(x_2,y_2)}{x-x_2}\Big].$$

Deze uitdrukking verandert niet, wanneer zich in x_1, x_2, of één van beide vertakkingspunten bevinden.

Voorbeeld I:

$$y^3 - 3\,y + 2\,x^3 = 0. \qquad p = 1.$$

Geheele fundamentale functies zijn:

$$1,\ y,\ y^2$$

met dimensies:

$$0,\ 1,\ 2.$$

Uit $\tau_1 + 1 = 1$, $\tau_2 + 1 = 2$ volgt:

$$\Phi_0(x,y') + \Phi_2(x,y')\,h_1(x,y) + \Phi_2(x,y')\,h_2(x,y) =$$

$$= \frac{y'^3 - y^3 - 3\,(y'-y)}{y'-y} = y'^2 + y'\,y + y^2 - 3.$$

Dus:

$$\Phi_0(x,y') = y'^2 - 3$$
$$\Phi_1(x,y') = y'$$
$$\Phi_2(x,y') = 1.$$

De algemeene vorm voor een integraal 1ste soort wordt dus:

$$V = \int \frac{A}{3\,(y^2 - 1)},$$

waarin, zooals behoort één arbitraire constante optreedt.

Een speciale vorm voor een integraal 3de soort, die oneindig wordt in de punten $x_1 = 0$, $y_1 = 0$ en:

$$x_2 = -1 - \sqrt{3},\ y_2 = 2 + \sqrt{3}$$

respectievelijk als $log\,(x - x_1)$ en $-log\,(x - x_2)$ is:

$$\Pi_{x_1 x_2} = \int \frac{dx}{3\,(y^2 - 1)} \left[\frac{y^2 - 3}{x} - \frac{y^2 + (2 + \sqrt{3})\,y + 4 + 4\sqrt{3}}{x + 1 + \sqrt{3}} \right].$$

Bepalen we zoo'n integraal volgens een andere methode, n.l door een snijlijn te leggen door de punten $(x_1\,y_1)$ en $(x_2\,y_2)$; verder het 3de snijpunt $(x_3\,y_3)$ van die snijlijn met de kromme op te zoeken en door dat punt $(x_3\,y_3)$ een willekeurige rechte te leggen, dan vinden we een integraal derde soort in den vorm:

$$\Pi'_{x_1 x_2} = \int \frac{\alpha\,(x - 1 - \sqrt{3}) + \beta\,(y + 2 + \sqrt{3})}{\{(2 + \sqrt{3})\,x + (1 + \sqrt{3})\,y\}\,(y^2 - 1)}\,dx.$$

Deze blijkt oneindig te worden als $-lg\,(x + 1 + \sqrt{3})$ en als $lg\,(x - 0)$, wanneer we onderstellen:

$$\frac{(1 + \sqrt{3})\,\alpha - (2 + \sqrt{3})\,\beta}{2 + \sqrt{3}} = 1.$$

Dan kunnen we ze ook schrijven:

$$\Pi'_{x_1 x_2} = \int \frac{\alpha x + \beta y - (2 + \sqrt{3})}{\{(2 + \sqrt{3})\,x + (1 + \sqrt{3})\,y\}\,(y^2 - 1)}\,dx.$$

en deze laatste vorm blijkt volkomen overeen te stemmen met de boven gevonden $\Pi_{x_1 x_2}$ mits we substitueeren:

$$\alpha = \frac{-2\,(1 + \sqrt{3})^2}{3};\ \beta = \frac{-(2 + \sqrt{3})^2}{3}.$$

Voorbeeld II:

$$y^4 - 5\,y^2 - x^4 + 4 = 0.$$

Geheele functies:

$$1, y, y^2, y^3.$$

Dimensies:

$$0, 1, 2, 3. \qquad p = 3,$$

dus: $\tau_1 + 1 = 1,\ \tau_2 + 1 = 2,\ \tau_3 + 1 = 3.$

$$\Phi_0(x, y') + \Phi_1(x, y')\, y + \Phi_2(x, y')\, y^2 + \Phi_3(x, y')\, y^3 = \\ = y'^3 - y'^2\, y + y'\, y^2 + y^3 - 5\,(y' + y).$$

Derhalve:

$$\Phi_0(x, y') = y'^3 - 5\, y'$$
$$\Phi_1(x, y') = y'^2 - 5$$
$$\Phi_2(x, y') = y'$$
$$\Phi_3(x, y') = 1.$$

De algemeene vorm voor de integraal 1ste soort wordt:

$$\int \frac{A\, y + B\, x + C}{2\, y\,(y^2 - 5)}\, d\, x,$$

waarin 3 arbitraire constanten optreden.

Een speciale integraal 3de soort, die logarithmisch oneindig wordt in de punten $x_1 = 0\ y_1 = 1$ en:

$$x_2 = \frac{2}{5}\sqrt{5},\ y_2 = \frac{2}{5}\sqrt{5} \text{ is:}$$

$$\int \frac{d\, x}{2\, y\,(y^2 - 5)} \left[\frac{y^3 - 5\, y + y^2 - 5 + y + 1}{x} - \frac{y^3 - 5\, y + (y^2 - 5)\frac{2}{5}\sqrt{5} + \frac{4}{5} y + \frac{8}{25}\sqrt{5}}{x - \frac{2}{5}\sqrt{5}} \right.$$

§ 2.

Afleiding van de integraal 2de soort.

Stelt Γ_ξ een elementaire integraal 2de soort voor, die in het punt $x = \xi$ algebraïsch oneindig wordt als $\frac{1}{x - \xi}$, en geeft D_ξ een differentiatie aan naar ξ, dan wordt de functie

van (x, y) voorgesteld door:

$$D_\xi \Pi_{\xi, x_2} - \Gamma_\xi$$

niet oneindig in het punt $x = \xi$; immers in dat punt kunnen we ontwikkelen, als volgt:

$$\Pi_{\xi, x_2} = log\,(x - \xi) + A + B\,(x - \xi) + C\,(x - \xi)^2 + \cdots$$

$$D_\xi \Pi_{\xi, x_2} = \frac{1}{x - \xi} + B + 2\,C\,(x - \xi) + \cdots$$

$$\Gamma_\xi = \frac{1}{x - \xi} + A' + B'\,(x - \xi) + \cdots$$

zoodat:

$$D_\xi \Pi_{\xi, x_2} - \Gamma_\xi = \alpha + \beta\,(x - \xi) + \cdots$$

een vorm is, die niet meer oneindig wordt voor $x = \xi$. Omdat we de afgeleide naar ξ genomen hebben, hangt de functie niet van x_2 af, zoodat $D_\xi \Pi_{\xi, x_2} - \Gamma_\xi$ ook in het punt $x = x_2$ niet oneindig wordt. Is die functie niet gelijk aan een constante, dan stelt ze dus een Abelsche integraal 1ste soort voor, zoodat we mogen besluiten, dat een elementaire integraal 2de soort in één enkel punt $(\xi\ \eta)$ van het oppervlak oneindig als $\frac{1}{x - \xi}$ kan worden geschreven als:

$$\int^x \frac{d\,x}{f'\,y} \frac{d}{d\,\xi}\left[\frac{\Phi_0\,(x, y) + \Phi_1\,(x, y)\,h_1\,(\xi, \eta) + \ldots + \Phi_{n-1}\,(x, y) h_{n-1}\,(\xi, \eta)}{x - \xi}\right]$$

Tot eenzelfde resultaat komen we door *directe* afleiding van de integraal 2de soort.

Zij $(\xi\ \eta)$ een punt van het oppervlak, waardoor $(w + 1)$ bladen heengaan, en stellen we in de nabijheid van dat punt $x - \xi = t^{w+1}$; de integraal moge in de buurt van dat punt dezen vorm hebben:

$$\frac{A_1}{t} + \frac{A_2}{t^2} + \cdots + \frac{A_w}{t^w} + \frac{A_{w+1}}{x - \xi}.$$

De integraal Γ_ξ in het punt ξ, η oneindig als $\frac{1}{x - \xi}$ kunnen

we in de buurt van het punt (ξ, η) ontwikkelen, als volgt:

$$\Gamma_\xi = \frac{1}{x-\xi} + A + B\,t + C\,t^2 + \ldots$$

Vormen we evenals in § 1 de som van de waarden der functies $h\,(x-\xi)^2\,\frac{d\,\Gamma}{d\,x}$ in de n bladen van het oppervlak, wanneer h een geheele functie is, dan krijgen we de uitdrukking:

$$\sum_{i=1}^{n}\left[h\,(x-\xi)^2\,\frac{d\,\Gamma}{d\,x}\right]_i = \lambda + \mu\,(x-\xi) + (x-\xi)^2\,(x,\,1)^{\mu-1},$$

die aan beide kanten $\mu+2$ constanten bevat.

Stellen we hierin $x=\xi$, dan houden we alleen over:

$$-(w+1)\,h\,(\xi,\,\eta) = \lambda,$$

want in de bladen, die in $x=\xi$ niet samenhangen is $\frac{d\,\Gamma}{d\,x}$ eindig.

Differentieeren we eerst en stellen daarna $x=\xi$, dan vinden we:

$$lim\,\Sigma\left\{\frac{d^{w+1}h}{d\,t^{w+1}}(x-\xi)^2\,\frac{d\,\Gamma}{d\,x} + h\,\frac{d^{w+1}}{d\,t^{w+1}}\left[-1+(x-\xi)^2\,\frac{d}{d\,x}(A+Bt+\ldots)\right]\right\} = \mu\,(w+1)!$$

Want zij:

$$(x-\xi)^2\,\frac{d\,\Gamma}{d\,x} = -1 + \frac{1}{w+1}\,B\,t^{w+2} + \frac{2}{w+1}\,C\,t^{w+3} + \ldots = P.$$

$$\frac{d^{w+1}}{d\,t^{w+1}}(h\,P) = P\,\frac{d^{w+1}}{d\,t^{w+1}}h + (w+1)\,\frac{d}{d\,t}\,P\,\frac{d^w}{d\,t^w}h +$$

$$+\frac{(w+1)\,w}{1\,.\,2}\,\frac{d^2}{d\,t^2}\,P\,.\,\frac{d^{w-1}}{d\,t^{w-1}}h + \ldots + h\,\frac{d^{w+1}\,P}{d\,t^{w+1}}.$$

$$\frac{d\,P}{d\,t} = \frac{w+2}{w+1}\,B\,t^{w+1} + \frac{2\,(w+3)}{w+1}\,C\,t^{w+2} + \ldots$$

$$\frac{d^2\,P}{d\,t^2} = (w+2)\,B\,t^w + \frac{2\,(w+3)\,(w+2)}{w+1}\,C\,t^{w+1} + \ldots$$

dus voor $t = 0$ is:

$$P = -1; \frac{dP}{dt} = 0; \ldots \frac{d^{w+1}P}{dt^{w+1}} = 0.$$

Derhalve is:

$$lim\ \Sigma - \frac{d^{w+1}}{dt^{w+1}} h = \mu\,(w+1)!$$

Maar:

$$\frac{d}{dx}\left[(x-\xi)^2 \frac{d}{dx}(A + Bt + \ldots)\right] =$$

$$= \frac{1}{(w+1)^2 t^w} \cdot \frac{d}{dt}\left[t^{w+2}(B + 2Ct + \ldots)\right]$$

en deze uitdrukking wordt nul voor $t = 0$; derhalve is:

$$\mu = -\frac{1}{w!} D^{w+1} h\,(\xi,\eta).$$

Nu komen we evenals in § 1 tot het resultaat, dat op een som van integralen 1ste soort na, de integraal 2de soort, die in het punt (ξ, η) oneindig is als $\frac{1}{x-\xi}$ wordt voorgesteld door:

$$\Gamma_\xi = -(w+1)\int \frac{dx}{f'_y} \frac{\Phi_0 + \Phi_1 h_1(\xi,\eta) + \ldots + \Phi_{n-1} h_{n-1}(\xi,\eta)}{(x-\xi)^2}$$

$$-\frac{1}{w!}\int \frac{dx}{f'_y} \frac{D^{w+1}[\Phi_0 + \Phi_1 h_1(\xi,\eta) + \ldots + \Phi_{n-1} h_{n-1}(\xi,\eta)]}{x-\xi}.$$

Dit resultaat blijft gelden, als (ξ, η) geen vertakkingspunt is en op overeenkomstige wijze vinden we een integraal, die in een punt (ξ, η) oneindig wordt tot de 2de of hooger orde.

Voorbeeld I:

$$y^4 - 5y^2 - x^4 + 4 = 0.$$

Geheele functies $1, y, y^2, y^3$.

$$\Phi_0 = y^3 - 5y; \quad \Phi_1 = y^2 - 5; \quad \Phi_2 = y; \quad \Phi_3 = 1.$$

Zij $(\xi\,\eta)$ het punt, waar $x = 0$, $y = 1$ (geen vertakkingspunt), dan is:

$$\Gamma_\xi = -\int \frac{dx}{2y^2(2y-5)} \frac{(y^3-5y)+(y^2-5)\eta+y\eta^2+\eta^3}{(x-\xi)^2}$$
$$-\int \frac{dx}{2y^2(2y-5)} \frac{d}{d\xi} \frac{(y^3-5y)+(y^2-5)\eta+y\eta^2+\eta^3}{x-\xi}$$

of:

$$\Gamma_\xi = -\int \frac{dx}{2y^2(2y-5)} \frac{y^3+y^2-4y-4}{(x-\xi)^2} - \int \frac{dx}{2y^2(2y-5)} \frac{(y^3+y^2-4y-4)}{(x-\xi)^2}.$$

$$= -2\int \frac{dx}{2y^2(2y-5)} \frac{y^3+y^2-4y-4}{x^2}.$$

Voorbeeld II:

$$y^3 - 3y + 2x^3 = 0.$$

Geheele fundamentale functies: $1, y, y^2$.

dimensies: $0, 1, 2$.

$$\Phi_0 = y^2 - 3; \quad \Phi_1 = y; \quad \Phi_2 = 1.$$

Dus een integraal 2de soort, die in het punt $\xi = +1$, $\eta = -2$ oneindig wordt tot de 1ste orde, is:

$$\Gamma_\xi = \int \frac{dx}{3(y^2-1)} \frac{d}{d\xi} \left[\frac{y^2+y\eta+\eta^2-3}{x-\xi}\right]_{\xi=1,\eta=-2} \infty \text{ als } -\frac{1}{x-1}.$$

Bepalen we zoo'n integraal volgens een andere methode. De raaklijn aan de kromme in het punt $x = 1$, $y = -2$ heeft tot vergelijking:

$$6(x-1) + 9(y+2) = 0.$$

Deze snijdt de kromme nog in een punt $x = -\frac{22}{23}$, $y = -\frac{16}{23}$; bepalen we nu de rechte $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ zóódanig, dat ze door het laatstgenoemde punt gaat, dan is:

$$\Gamma = \int \frac{\alpha\left(x+\frac{22}{23}\right)+\beta\left(y+\frac{16}{23}\right)}{3\{6(x-1)+9(y+2)\}(y_2-1)} dx$$

een integraal, zooals we zoeken, of wel:

$$\Gamma = \int \frac{\alpha x + \beta y + \frac{22\alpha + 16\beta}{23}}{(2x + 3y + 4)(y^2 - 1)} dx.$$

Deze wordt oneindig als $-\frac{1}{x-1}$ in de onderstelling $-18\alpha + 27\beta = 46$ en wordt gelijk aan den eersten vorm, als we stellen $\alpha = \frac{4}{9}$; $\beta = 2$.

§ 3.

Een uitdrukking te vinden voor elke willekeurige rationeele functie.

De meest algemeene vorm voor een rationeele functie, die polen bezit in $(p+1)$ onafhankelijke punten is $Ag + B$, indien g een speciale functie van de bedoelde soort voorstelt en A en B willekeurige constanten zijn.

Geven we dus aan de residu van de functie in een van de $(p+1)$ polen, een bovendien één nul van de functie, dan is ze volkomen bepaald.

Beperken we ons tot het geval, dat de $(p+1)$ polen liggen in eindige gewone punten van het oppervlak, dan kunnen we nu de rationeele functie, die we op de bovengenoemde wijze volkomen bepaald hebben, geheel uitdrukken met behulp van de in dit hoofdstuk gebruikte functiën. Het zal dan blijken, dat we ook voor elke willekeurige geheele functie een uitdrukking kunnen vinden.

Indien we de algemeene integraal 3de soort, die we hebben afgeleid in § 1 aangeven door $\Pi_{x_1 x_2}$, dan zal de functie:

$$f'_y \frac{d\,\Pi_{x_1 x_2}}{dx} = \frac{\Phi_0(x,y) + \Phi_1(x,y)\,h_1(x_1,y_1) + \ldots + \Phi_{n-1}(x,y)\,h_{n-1}(x_1,y_1)}{x - x_1}$$

$$- \frac{\Phi_0(x,y) + \Phi_1(x,y)\,h_1(x_2,y_2) + \ldots + \Phi_{n-1}(x,y)\,h_{n-1}(x_2,y_2)}{x - x_2}$$

$$+ \Phi_1(x,y)\,(x,1)^{\tau_1 - 1} + \ldots + \Phi_{n-1}(x,y)\,(x,1)^{\tau_{n-1}-1}$$

hoogstens p beschikbare coëfficienten bevatten, n. l. de constanten, die optreden in de polynomia:

$$(x, 1)^{\tau_1 - 1}, \ldots, (x, 1)^{\tau_{n-1} - 1}.$$

Laat nu $c_1, c_2, \ldots, c_p$ aanwijzen p gewone punten (geen vertakkingspunten) van het oppervlak in het eindige gebied, wier x respectievelijk wordt voorgesteld door $c_1, c_2, \ldots c_p$ en die zoo gelegen zijn, dat de determinant:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \Phi_1^{(1)}, \Phi_1^{(1)} c_1, \ldots, \Phi_1^{(1)} c_1^{\tau_1 - 1}, \ldots, \Phi_{n-1}^{(1)}, \Phi_{n-1}^{(1)} c_1, \ldots, \Phi_{n-1}^{(1)} c_1^{\tau_n - 1 - 1} \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ \Phi_1^{(p)}, \Phi_1^{(p)} c_p, \ldots, \Phi_1^{(p)} c_p^{\tau_1 - 1}, \ldots, \Phi_{n-1}^{(p)}, \Phi_{n-1}^{(p)} c_p, \ldots, \Phi_{n-1}^{(p)} c_p^{\tau_n - 1 - 1} \end{vmatrix}$$

waarin $\Phi_i^{(r)}$ aangeeft de waarde van $\Phi_i(x, y)$ in het punt c_r, niet nul wordt. Dat het altijd mogelijk is de punten zóó te kiezen is duidelijk: want indien $v_1 \ldots v_p$ aanwijzen een stel onafhankelijke integralen 1ste soort, dan geeft het nul worden van deze Δ de voorwaarde aan, dat een rationeele functie van den vorm:

$$f'_y \left[\lambda_1 \frac{d v_1}{d x} + \ldots + \lambda_p \frac{d v_p}{d x} \right]$$

die slechts $(p - 1)$ beschikbare verhoudingen $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \ldots$ bevat, nul wordt in elk van de punten $c_1 \ldots c_p$.

We kiezen nu de coëfficienten in de functie $f'_y \frac{d \Pi_{x_1 x_2}}{d x}$ zóódanig, dat deze functie nul wordt in de punten $c_1, \ldots, c_p$ en stellen de functie $\frac{d \Pi_{x_1 x_2}}{d x}$ met die bepaalde coëfficienten $= \psi(x_1, x_2; x, c_1, \ldots, c_p)$, zoodat $\Delta f'_y \psi(x_1, x_2, x, c_1, \ldots, c_p)$ gelijk is aan den determinant:

$$\begin{vmatrix} [x, x_1] - [x, x_2], \Phi_1(x, y), x \Phi_1(x, y) \ldots x^{\tau_1 - 1} \Phi_1(x, y) \ldots x^{\tau_n - 1 - 1} \Phi_{n-1}(x, y) \\ [c_1, x_1] - [c_1, x_2], \Phi_1^{(1)}, c_1 \Phi_1^{(1)} \ldots \ldots c_1^{\tau_1 - 1} \Phi_1^{(1)} \ldots \ldots c_1^{\tau_n - 1 - 1} \Phi_{n-1}^{(1)} \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ [c_p, x_1] - [c_p, x_2], \Phi_1^{(p)}, \ldots, c_p \Phi_1^{(p)} \ldots \ldots c_p^{\tau_1 - 1} \Phi_1^{(p)} \ldots \ldots c_p^{\tau_n - 1 - 1} \Phi_{n-1}^{(p)} \end{vmatrix}$$

waarin:

$$[x, x_1] = \frac{\Phi_0(x, y) + \Phi_1(x. y)\, h_1(x_1, y_1) + \ldots + \Phi_{n-1}(x, y)\, h_{n-1}(x_1, y_1)}{x - x_1}$$

en $\Phi_i^{(r)}$ de waarde, die de functie $\Phi_i(x, y)$ aanneemt in het punt c_r. Onderstellen we nu, dat (x, y) een eindig punt is en bovendien geen vertakkingspunt, zoodat geen der minoren van de eerste rij van dezen determinant nul wordt. Beschouwen we $\psi(x_1, x_2; x, c_1, \ldots, c_p)$ als een functie van $x_1\, y_1$, dan is het blijkbaar een rationeele functie. Ze is oneindig in elk der punten $x, c_1, \ldots, c_p$ en wanneer x_1 nadert tot x dan is de limiet van:

$$(x - x_1)\, \psi(x_1, x_2; x, c_1, \ldots, c_p)$$

dezelfde als die van:

$$\frac{\Phi_0(x, y) + \Sigma\, \Phi_r(x, y)\, h_r(x_1, y_1)}{f'_y}$$

en wel $= 1$; zoodat in het punt $x_1 = x$ de functie ψ oneindig is als $-\frac{1}{x_1 - x}$; op dezelfde wijze blijkt, dat ze in $c_1, \ldots, c_p$ oneindig is tot de eerste orde.

Om na te gaan hoe de functie zich gedraagt in het oneindige, dat is voor $x_1 = \infty$, merken we op, dat de functie:

$$\frac{h_i(x_1, y_1)}{x - x_1} + h_i(x_1, y_1)\left[\frac{1}{x_1} + \frac{x}{x_1^2} + \ldots + \frac{x^{\tau_i - 1}}{x_1^{\tau_i}}\right]$$

die we kunnen voorstellen in den vorm:

$$-\frac{1}{x_1^{\tau_i + 1}}\, h_i(x_1, y_1)\left[x^{\tau_i} + \frac{x^{\tau_i + 1}}{x_1} + \frac{x^{\tau_i + 2}}{x_1^2} + \ldots\right]$$

niet oneindig wordt voor $x_1 = \infty$, daar de dimensie van de functie $h_i(x, y)$ was $\tau_i + 1$.

Immers:

$$\frac{1}{x - x_1} = -\frac{1}{x\left(1 - \frac{x}{x_1}\right)} = -\frac{1}{x_1}\left(1 + \frac{x}{x_1} + \ldots\right)$$

$$\frac{h_i(x_1, y_1)}{x - x_1} = -h_i(x_1, y_1)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{x}{x_1^2} + \cdots \frac{x^{\tau_i - 1}}{x_1^{\tau_i}}\right)$$

$$- h_i(x_1, y_1)\left(\frac{x^{\tau_i}}{x_1^{\tau_i+1}} + \frac{x^{\tau_i+1}}{x_1^{\tau_i+2}} + \cdots\right).$$

Zoodat:

$$\frac{h_i(x_1, y_1)}{x - x_1} + h_i(x_1, y_1)\left[\frac{1}{x_1} + \frac{x}{x_1^2} + \cdots + \frac{x^{\tau_i - 1}}{x_1^{\tau_i}}\right] =$$

$$= -\frac{1}{x_1^{\tau_i+1}} + h_i(x_1, y_1)\left[x^{\tau_i} + \frac{x^{\tau_i+1}}{x_1} + \frac{x^{\tau_i+2}}{x_1^2} + \cdots\right].$$

Voegen we nu bij de elementen van de eerste kolom van den determinant, die de waarde uitdrukt van:

$$A f'_y \psi(x_1, x_2; x, c_1, \ldots, c_p)$$

de volgende veelvouden van opeenvolgende p kolommen:

$$\frac{h_1(x_1, y_1)}{x_1^{\tau'_1}} - \frac{h_1(x_2, y_2)}{x_2^{\tau'_1}}, \qquad \frac{h_2(x_1, y_1)}{x_1^{\tau'_2}} - \frac{h_2(x_2, y_2)}{x_2^{\tau'_2}} \cdots$$

waarin:

$$\tau'_1 = 1, 2, \ldots, \tau_1; \qquad \tau'_2 = 1, 2, \ldots, \tau_2;$$

dan zal de determinant alleen grootheden bevatten, die eindig blijven voor oneindige waarden voor x.

We kunnen nu het resultaat uitspreken als volgt:

De functie $\psi(x_1, x_2; x, c_1, \ldots, c_p)$ is een rationeele functie van x, die niet meer dan $(p + 1)$ polen heeft, alle van de eerste orde, n. l. $x, c_1, \ldots, c_p$. Ze is in x oneindig als:

$$-\frac{1}{x_1 - x}$$

en ze wordt nul in $x_1 = x_2$.

Wanneer $\omega_i(x)$ voorstelt een functie van x:

$$\lambda_1 \frac{d v_1}{d x} + \ldots + \lambda_p \frac{d v_p}{d x}$$

zóó gekozen, dat ze nul is in alle punten $c_1, \ldots, c_p$ behalve in c_i, en in $c_i = 1$, dan is blijkbaar $\psi(x_1, x_2; x, c_1, \ldots, c_p)$ in het punt c_i oneindig als $\frac{\omega_i(x)}{x_1 - c_i}$.

Is $R(x_1, y_1)$ een rationeele functie van (x_1, y_1), die tot enkelvoudige polen heeft de eindige punten $z_1, z_2, \ldots, z_Q$, terwijl ze in het punt z_i oneindig wordt als $-\frac{\lambda_i}{x_1 - z_i}$; dan stelt:

$$R(x_1, y_1) - \lambda_1 \psi(x_1, x_2; z_1, c_1, \ldots, c_p) - \ldots - \lambda_Q \psi(x_1, x_2; z_Q, c_1, \ldots, c_p)$$

een rationeele functie van $(x_1\, y_1)$ voor, alleen oneindig in $c_1, \ldots, c_p$). Zoo'n functie is er evenwel niet, daar we aannamen, dat $c_1 \ldots c_p$ *onafhankelijke* punten waren; evenmin bestaat er een rationeele functie, die in enkele van die punten oneindig wordt; derhalve is de gevormde functie een constante en is:

$$R(x_1; y_1) = \lambda_1 \psi(x_1, x_2; z_1, c_1, \ldots, c_p) + \ldots + \\ + \lambda_Q \psi(x_1, x_2; z_Q, c_1, \ldots, c_p) + \lambda.$$

Omgekeerd zal een uitdrukking, zooals die aan de rechterhand voorstellen een rationeele functie, die de punten $z_1 \ldots z_Q$ tot enkelvoudige polen heeft, voor *alle* waarden $\lambda_1 - \lambda_Q$ die voldoen aan de conditie, dat de uitdrukking eindig zij in alle punten $c_1 \ldots c_p$. Deze conditie wordt uitgedrukt door de p vergelijkingen:

$$\lambda_1 \omega_i(z_1) + \lambda_2 \omega_i(z_2) + \ldots + \lambda_Q \omega_i(z_Q) = 0$$

waarin $i = 1, 2, \ldots, p$.

Wanneer deze condities onafhankelijk zijn, dan bevat de functie $Q - p + 1$ willekeurige constanten — in overeenstemming met het vroeger gevonden resultaat. Zijn die vergelijkingen niet onafhankelijk, dan wordt het aantal willekeurige constanten uitgedrukt door $Q - p + (\tau + 1)$, waarin $(\tau + 1)$ aangeeft het aantal toegevoegden van de orde $(m - 3)$, dat door de Q punten kan worden gelegd.

De functie $\psi(x_1, x_2; x, c_1, \ldots, c_p)$ wordt somtijds de functie van WEIERSTRASS genoemd.

Voorbeeld.

De functie $\psi\,(x_1, x_2;\ x, c_1, c_2, c_3)$ te bepalen.

$$y^4 - 5\,y^2 - x^4 + 4 = 0.$$

$h_1 = y;\ h_2 = y^2;\ h_3 = y^3$, wier dimensies zijn 1, 2, 3.

$$p = 6 - 4 + 1 = 3.$$

$$\tau_2 \leqq 1,\ \tau_3 \leqq 2.$$

$$\Phi_0 = y^3 - 5\,y;\ \Phi_1 = y^2 - 5;\ \Phi_2 = y;\ \Phi_3 = 1.$$

$$f'_y \frac{d\,\Pi_{x_1 x_2}}{d\,x} = A\,y + B\,x + C + \frac{y^3 - 5\,y + (y^2 - 5)\,y_1 + y\,y_1^2 + y_1^3}{x - x_1} -$$

$$- \frac{y^3 - 5\,y + (y^2 - 5)\,y_2 + y\,y_2^2 + y_2^3}{x - x_2}.$$

Kiezen we de punten:

c_1, c_2, c_3 in $(x = 0, y = 1), (x = 0\ y = -1), (x = \sqrt{2}, y = \sqrt{5})$.

Door substitutie van deze waarden in de uitdrukking voor $f'_y \frac{d\,\Pi_{x_1 x_2}}{d\,x}$ vinden we door de 3 vormen respectievelijk gelijk aan nul te stellen:

$$A = \frac{4 - y_2^2}{x_2} - \frac{4 - y_1^2}{x_1}.$$

$$B = \frac{4 + 4\,y_1 - y_1^2 - y_1^3}{x_1\sqrt{2}} - \frac{4 + 4\,y_2 - y_2^2 - y_2^3}{x_2\sqrt{2}} -$$

$$- \frac{\sqrt{5}\,.\,y_1^2 + y_1^3}{\sqrt{2}(\sqrt{2} - x_1)} + \frac{\sqrt{5}\,.\,y_2^2 + y_2^3}{\sqrt{2}(\sqrt{2} - x_2)}.$$

$$C = \frac{y_2\,(4 - y_2^2)}{x_2} - \frac{y_1\,(4 - y_1^2)}{x_1}.$$

Dus wordt:

$$\psi\,(x_1, x_2;\ x,\ c_1, c_2, c_3) = \frac{1}{2\,y\,(2\,y^2 - 5}\left\{\left(\frac{4 - y_2^2}{x_2} - \frac{4 - y_1^2}{x_1}\right) y + \right.$$

$$+ \left(\frac{4 + 4\,y_1 - y_1^2 - y_1^3}{x_1\sqrt{2}} - \frac{4 + 4\,y_2 - y_2^2 - y_2^3}{x_2\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{5}\,.\,y_1^2 + y_1^3}{\sqrt{2}(\sqrt{2} - x_1)} + \right.$$

$$+\frac{\sqrt{5}.y_2^2+y_2^3}{\sqrt{2}(\sqrt{2}-x_2)}\Big)x+\frac{4y_2-y_2^3}{x_2}-\frac{4y_1-y_1^3}{x_1}+$$

$$+\frac{(y^3-5y+(y^2-5)y_1+yy_1^2+y_1^3}{x-x_1}+$$

$$+\frac{y^3-5y+(y^2-5)y_2+yy_2^2+y_2^3}{x-x_2}.$$

Voorbeeld.

Te bepalen de rationeele functie behoorende bij de vergelijking $y^3-3y+2x^3=0$, die tot enkelvoudige polen heeft de gewone punten $(0,-\sqrt{3})$ en $(0,0)$.

$$y^3-3y+2x^3=0. \quad p=1.$$

Geheele fundamentale functies: $1, y, y^2$, wier dimensies respectievelijk bedragen $0, 1, 2$; dus is $\tau_3-1\gtrless 0$.

$$\Phi_0=y^2-3; \quad \Phi_1=y; \quad \Phi_2=1.$$

$$f'_y\frac{d\,\Pi_{x_1x_2}}{dx}=A+\frac{y^2-3+yy_1+y_1^2}{x-x_1}-\frac{y^2-3+yy_2+y_2^2}{x-x_2}.$$

Kiezen we voor c_1 het punt, waar $x=0$, $y=+\sqrt{3}$, dan moeten we A bepalen uit de betrekking:

$$A+\frac{3-3+y_1\sqrt{3}+y_1^2}{-x_1}-\frac{3-3+y_2\sqrt{3}+y_2^2}{-x_2}=0$$

waaruit volgt:

$$A=\frac{y_1(y_1+\sqrt{3})}{x_1}-\frac{y_2(y_2+\sqrt{3})}{x_2}.$$

$$\psi(x_1,x_2;x,c_1)=\frac{1}{3(y^2-1)}\left\{\frac{y_1(y_1+\sqrt{3})}{x_1}-\frac{y_2(y_2+\sqrt{3})}{x_2}+\right.$$

$$\left.+\frac{y^2-3+yy_1+y_1^2}{x-x_1}-\frac{y^2-3+yy_2+y_2^2}{x-x_2}\right\}.$$

Zij:

$$(x_1=1, y_1=-2); (x_2=1, y_2=1).$$

Vervangen we nu in de uitdrukking voor ψ als volgt:

x_1	x
y_1	y
x_2	1
y_2	1
x	0
y	0

dan is:

$$\psi(x_1, x_2; x, c_1) = \frac{\sqrt{3}(y-x) + 3(1-x)}{3x}.$$

Zoo wordt voor $x = 0, y = -\sqrt{3}$:

$$\psi(x_1, x_2; x, c_1) = \frac{\sqrt{3}(y-x)}{3x}$$

en eindelijk:

$$R(x, y) = \lambda_1 \frac{\sqrt{3}(y-x)}{3x} + \lambda_2 \frac{\sqrt{3}(y-x) + 3(1-x)}{3x} + \lambda_3.$$

Nu moeten we $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ nog binden door de voorwaarde, dat de rationeele functie $R(x, y)$ eindig moet blijven in het punt c_1; stellen we dus:

$$x = x', \; y = +\sqrt{3} + y',$$

dan vinden we:

$$\frac{(\lambda_1+\lambda_2)\sqrt{3}.y' - x'(\lambda_1\sqrt{3} + \lambda_2\sqrt{3} - 3 + 3\lambda_3) + 3(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+1)}{3x'}$$

en daar uit de vergelijking volgt: $y' = -\frac{1}{3}x'^3$ mogen we tot voorwaarde stellen: $\lambda_3 = -1 - \lambda_1 - \lambda_2$.

Eindelijk is dus:

$$R(x, y) = \frac{y\sqrt{3}(\lambda_1+\lambda_2) + x(3-\sqrt{3})(\lambda_1+\lambda_2) + 3}{3x},$$

voor *alle* waarden van λ_1, λ_2, een rationeele functie, zooals we zoeken; volgens het theorema van RIEMANN—ROCH moet die functie 2 constanten bevatten.

Substitueeren we $x = x', y = y' - \sqrt{3}$, dan blijkt $R(x, y)$

oneindig te worden in dat punt, als $\frac{1-\lambda_1-\lambda_2}{x'}$; dus in het punt $x=0, y=0$, als $\frac{1}{x'}$.

Geven we aan de constanten zoodanige waarden, dat $\lambda_1 = -\lambda_2$, dan krijgen we de speciale vorm:

$$R(x, y) = \frac{1}{x}.$$

STELLINGEN.

STELLINGEN.

I.

De grondslag, waarop de theorie der Abelsche functies berust, moet algebraïsch zijn.

II.

De door BAKER (Abel's Theorem) voor de Abelsche functies gebruikte notatie laat wat beknoptheid en duidelijkheid betreft niets te wenschen over.

III.

De methode om het geslacht eener vergelijking te bepalen met behulp van een systeem geheele fundamentale functies, verdient zeer de aandacht.

IV.

De uitdrukkingen „gebroken rationeele functie" en „geheele rationeele functie" (zie Stahl, Abelsche Functionen) zijn te verkiezen boven „rationeele functie" en „geheele functie".

V.

De bewering van BERTRAND (Arithmétique, pag. 107) dat $(p-1)!$ altijd deelbaar is door p, indien p niet priem is, is niet geheel juist.

VI.

Niet singuliere krommen kunnen feitelijk niet anders zijn dan kegelsneden; het zou daarom doelmatig zijn voor krommen van hoogeren graad zonder veelvoudige punten den naam anautotomisch in te voeren.

VII.

Het bewijs van EULER voor de stelling, dat elke geheele rationeele functie van een veranderlijke ontbonden kan worden in reeële factoren van den 1sten of 2^{den} graad is niet boven bedenking verheven.

VIII.

Nemen we het bestaan eener vierde dimensie aan als materieele werkelijkheid, dan kunnen wij, tenzij we zelf vierdimensionaal zijn, voor vierdimensionale wezens niet anders dan een abstract begrip zijn.

IX.

In Tait and Steele „Dynamics of a Particle" wordt ten onrechte gezegd: Since accelerations are compounded according to the same law as velocities, the above theorem is true of them also.

X.

De gewone verklaring van de proef van POHL, door de rotatie van een magneetpool langs de krachtlijnen van een lineairen geleider, is onhoudbaar. Deze draaiing is veel eerder een gevolg van de zijwaartsche geleiding.

XI.

Een waarschijnlijkheid mag niet gedefinieerd worden als volgt: Indien een evenement gebeuren kan in a en niet gebeuren in b gevallen en al deze gevallen hebben evenveel kans, dan is de waarschijnlijkheid, dat het evenement gebeurt $\frac{a}{a+b}$, dat het niet gebeurt $\frac{b}{a+b}$.

XII.

De physische gronden, waarop THOMSON aanneemt, dat de aarde gevormd is in 20 millioen jaar geven geen van alle een bepaalden tijd aan.

XIII.

De proeven van DE HEEN over den invloed, dien een draadscherm of een enkele metaaldraad uitoefent op een elektrischen geleider bij ontlading door een vlam, laten, wat nauwkeurigheid betreft, zooveel te wenschen over, dat men er geen conclusie uit mag trekken.

XIV.

De psychologie behoort niet afhankelijk te zijn van de metaphysica.

XV.

De scherpe tegenstelling tusschen ziel en lichaam is in strijd met de tegenwoordige wetenschappelijke psychologie.